

Université de Montréal

Étude des maxima de champs gaussiens corrélés

par

Samuel April

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

juillet 2013

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Étude des maxima de champs gaussiens corrélés

présenté par

Samuel April

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

(président-rapporteur)

Louis-Pierre Arguin

(directeur de recherche)

Sabin Lessard

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

22 juillet 2013

SOMMAIRE

Ce mémoire porte sur l'étude des maxima de champs gaussiens. Plus précisément, l'étude portera sur la convergence en loi, la convergence du premier ordre et la convergence du deuxième ordre du maximum d'une collection de variables aléatoires gaussiennes. Les modèles de champs gaussiens présentés sont le modèle i.i.d., le modèle hiérarchique et le champ libre gaussien. Ces champs gaussiens diffèrent par le degré de corrélation entre les variables aléatoires. Le résultat principal de ce mémoire sera que la convergence en probabilité du premier ordre du maximum est la même pour les trois modèles. Quelques résultats de simulations seront présentés afin de corroborer les résultats théoriques obtenus.

Mots Clés : Maxima, champ libre gaussien, modèle hiérarchique, marche aléatoire.

SUMMARY

In this study, results about maxima of different Gaussian fields will be presented. More precisely, results for the convergence of the first order of the maximum of a set of Gaussian variables will be presented. Some results on the convergence of the second order, and of the law will also be explained. The models presented here are the Gaussian field of i.i.d. variables, the hierarchical model and the Gaussian free fields model. These fields differ from one another by their correlation structure. The main result of this study is that the first order convergence in probability of the maximum is the same for the three models. Finally, numerical simulations results will be presented to confirm theoretical results.

Keywords :Maxima, Gaussian free field, hierarchical model, random walk.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xi
Remerciements	1
Chapitre 1. Introduction	3
1.1. Présentation.....	3
1.2. Notions de bases.....	6
1.2.1. Estimé gaussien.....	6
1.2.2. Estimé pour une somme de variables aléatoires i.i.d.....	7
1.2.3. Lemme de Slepian	10
Chapitre 2. Convergence du maximum d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d.	13
2.1. Théorème de convergence des types.....	13
2.2. Théorème limite des classes.....	17
2.3. Convergence en loi du maximum de variables aléatoires i.i.d. de loi normale.....	20
2.4. Convergence du deuxième ordre du maximum d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard.....	24

2.5. Convergence du premier ordre du maximum d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard	25
Chapitre 3. Convergence du maximum d'un ensemble de variables aléatoires corrélées de loi normale	29
3.1. Le modèle hiérarchique	30
3.1.1. Définition du modèle hiérarchique	30
3.1.2. Convergence du premier ordre du modèle hiérarchique	30
3.2. Le modèle harmonique	42
3.2.1. Définition du modèle harmonique	42
3.2.2. Espérance conditionnelle, covariance et marche aléatoire	46
3.2.3. Bornes pour la variance	51
3.2.4. Convergence du premier ordre du DGFF	52
Chapitre 4. Simulations	67
4.1. Modèle hiérarchique	67
4.1.1. Résultats	68
4.2. Modèle harmonique	70
4.2.1. Méthode de Cholesky	70
4.2.2. Résultats	70
Chapitre 5. Conclusion	75
Bibliographie	77

LISTE DES FIGURES

3.1	Représentation de Γ_i , η_i et de $T_{\eta_i m}$ pour $i = 0, 1, \dots, K$	37
3.2	Représentation, à partir d'un arbre binaire $T_{\eta_i m}$, de la variable aléatoire X_α , $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\eta_i m}$. $X_\alpha = X_{\alpha_i} + Z_{\alpha_i \alpha'_j}$, où $\alpha_i \alpha'_j$ représente l'une des μ étiquettes $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$	39
3.3	Schéma représentant la matrice de covariance $G_N(x, y)$, pour x fixé, d'un DGFF Φ_N avec $N = 51$:	
	a) x près de la frontière. b) x est le point centre.....	44
3.4	Représentation de V_N , V_N^δ et des α -boîtes $B_i^\alpha \in \Pi_\alpha$	55
3.5	Représentation des boîtes B_i^α de $\Pi_{\alpha', \alpha}$ et de $B_i^{\alpha'}$ de $\Pi_{\alpha'}$	57
3.6	Représentation des boîtes B de Γ_{α_i} . $\Gamma_{\alpha_{i+1}} = \bigcup_{B \in \Gamma_{\alpha_i}} \Gamma_{B, \alpha_{i+1}}$	61
3.7	Schéma représentant les boîtes à considérer pour les sommes ξ_{j1} et ξ_{j2} .	63
4.1	Convergence du deuxième ordre pour le maximum (M_{2^m}) d'un ensemble de 2^m variables aléatoires ($a_{2^m} = m\sqrt{2\log 2}$, $b_{2^m} = -\frac{3}{2\sqrt{2\log 2}} \log m$). Pour chaque m , <i>moyenne</i> est la valeur moyenne sur un échantillon de 1000 valeurs maximales. Les variables sont corrélées selon le modèle de l'arbre binaire ayant une hauteur m	69
4.2	Simulation selon le modèle harmonique d'une surface (150×150) générée par la méthode de Cholesky.....	71
4.3	Convergence du premier ordre pour le maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls. Pour chaque N , <i>moyenne</i> est une moyenne sur un ensemble de 1000 valeurs. Simulation obtenue avec la méthode de Cholesky ($a_N = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N$).....	71

- 4.4 Distribution d'un échantillon de 10000 maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls et $N = 100$ 72
- 4.5 Convergence du deuxième ordre pour le maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls. Pour chaque N , *moyenne* est une moyenne sur un échantillon de 1000 valeurs maximales. Simulation obtenue avec la méthode de Cholesky ($a_N = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N)$, $b_N = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(\log(N))$). 73

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, Louis-Pierre Arguin, pour m'avoir accepté comme étudiant, pour sa patience et pour toute l'aide apportée à la réalisation de ce mémoire. Merci à mes deux compagnons de cellule, Vincent Létourneau, pour sa bonne et constante humeur, Jordan Payette, pour m'avoir transmis son art du tracé de la droite en pointillé sur un tableau. Merci à Frédéric Ouimet, aux membres du jury, Yvan Saint-Aubin et Sabin Lessard, pour les commentaires ayant permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Merci également au responsable informatique, Michele Nasoni, pour son professionnalisme.

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1. PRÉSENTATION

Un champ gaussien est un vecteur gaussien $(X_i, i = 1, 2, \dots, n)$ sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , dont la loi est multinormale. Pour l'étude de ces vecteurs gaussiens, on considèrera que les variables sont centrées ($E[X_i] = 0, i = 1, 2, \dots, n$). Ainsi, la loi jointe sera complètement déterminée par la matrice de covariance.

La connaissance du maximum d'une collection de variables aléatoires est une information utile dans plusieurs domaines d'application^[20]. L'étude de ces collections de n variables aléatoires portera donc sur le comportement du maximum lorsque n devient grand. Plus précisément, on s'intéressera à la *convergence du premier ordre*, la *convergence du deuxième ordre* et la *convergence en loi* du maximum. Le but est d'obtenir des résultats universels, c'est-à-dire des résultats indépendants de la loi des variables aléatoires.

Dans le cas de la *convergence du premier ordre* du maximum, on cherche un résultat analogue à la *loi des grands nombres* (LGN) pour les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On veut trouver une constante de normalisation c_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1, \dots, n} X_i}{c_n} = 1, \text{ en probabilité.}$$

Dans le cas de la *convergence du deuxième ordre* du maximum, on tient à avoir deux constantes de normalisation, u_n et v_n , telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1, \dots, n} X_i - v_n}{u_n} = 1, \text{ en probabilité.}$$

Et enfin, dans le cas de la *convergence en loi du maximum*, on cherche un résultat qui rappelle le *Théorème Centrale Limite* (TCL). C'est-à-dire, on cherche a_n et b_n telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1, \dots, n} X_i - b_n}{a_n}$$

converge en loi vers une variable aléatoire X .

Le premier champ gaussien étudié, le modèle i.i.d., sera un vecteur gaussien $(X_i, i = 1, \dots, 2^n)$ composé de variables aléatoires i.i.d. telles que $\text{var}(X_i) = 1$. Dans ce cas, les trois types de convergence sont bien déterminés et les divers théorèmes menant à ces résultats seront présentés (voir Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.4).

Le Théorème 2.2 de Gnedenko^[17] donne les conditions nécessaires pour la convergence en loi du maximum d'une collection de variables aléatoires i.i.d. ayant une distribution quelconque (c'est donc un résultat universel). Il sera montré que la loi du maximum pour le modèle i.i.d. converge vers une double exponentielle. Pour y parvenir, on utilisera les fonctions dites de Von Mises. Plus concrètement, le Théorème 2.4 permettra de déterminer les constantes a_n et b_n permettant la convergence en loi vers la double exponentiel.

On utilisera le résultat sur la convergence en loi pour obtenir les constantes u_n et v_n pour la convergence du deuxième ordre. De ce résultat, on retiendra un résultat plus faible, la convergence du premier ordre, pour fin de comparaison avec les autres modèles étudiés dans ce mémoire. Il sera obtenu pour le modèle i.i.d., voir Théorème 2.7, que

$$\frac{\max_{i=1, \dots, 2^n} X_i}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

Deux types de modèles seront étudiés pour le cas où les variables aléatoires sont corrélées, le modèle hiérarchique (section 3.1) et le modèle harmonique (section 3.2). Pour le modèle hiérarchique, le vecteur gaussien $(X_\alpha, \alpha \in T_m)$ est composé de 2^m variables aléatoires corrélées selon un arbre binaire et telles que $\text{var}(X_\alpha) = m$. Pour ce champ, le résultat de J. D. Biggins, voir Théorème 3.1 sur

la convergence en probabilité du premier ordre du maximum est bien connu^[2] :

$$\frac{\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha}{m} \rightarrow \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

Poser $\text{var}(X_\alpha) = 1$ dans le modèle hiérarchique révélera que la convergence du premier ordre pour ce modèle est la même que pour le cas i.i.d. Dans ce mémoire, le résultat de J. D. Biggins sera obtenu en grande partie avec la preuve de E. Bolthausen^[4] de la Proposition 3.3.

Un deuxième modèle corrélé de champ gaussien, le modèle harmonique ou le champ libre gaussien discret (DGFF), sera également étudié. Ce champ gaussien est un vecteur gaussien $(\phi_x, x \in V_N)$ tel que $\text{card } V_N = N^2$ et dont la matrice de covariance est donnée par la fonction de Green du laplacien discret. Le DGFF est un modèle simple qui peut être généralisé^{[11],[12],[13]} au cas continu^[23] (GFF). Le GFF est utilisé dans plusieurs théories des champs quantiques^{[15],[14],[16]} et joue un rôle important en physique statistique et dans les théories des surfaces aléatoires. Le DGFF étudié dans ce mémoire est donc un modèle important en physique et en mathématiques.

Une méthodologie analogue à celle utilisée pour le modèle hiérarchique permettra d'obtenir la convergence en probabilité du premier ordre du maximum dans le cas du modèle harmonique, voir Théorème 3.10 :

$$\frac{\max_{x \in V_N} \phi_x}{\log(N)} \rightarrow 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ en probabilité.}$$

On observera que la constante $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ est la même que pour le modèle i.i.d. ayant N^2 variables aléatoires avec une variance $\frac{1}{\pi} \log N^2$.

Quelques résultats de simulations seront présentés afin de corroborer qualitativement les résultats théoriques obtenus. Pour le modèle hiérarchique, les simulations pour la convergence du deuxième ordre seront cohérents avec ceux de la littérature^[5]. Les simulations pour le modèle harmonique, employant la méthode de Cholesky, seront données pour la convergence des premier et deuxième ordres.

Enfin, ce mémoire est une brève synthèse des différents résultats théoriques connus sur le maximum d'un ensemble de variables aléatoires pour les modèles

i.i.d, hiérarchique et harmonique. La contribution principale de ce mémoire est la partie sur les simulations, qui permettront de corroborer les résultats théoriques. La conclusion de ce mémoire sera que la convergence en probabilité du premier ordre du maximum est la même pour les trois modèles, nonobstant quelques changements pour tenir compte du nombre de variables et de la variance de chacun des modèles.

On poursuit ce chapitre d'introduction en présentant différents lemmes de bases mais fondamentaux et couramment employés dans ce mémoire.

1.2. NOTIONS DE BASES

1.2.1. Estimé gaussien

Divers moyens seront utilisés dans ce mémoire afin d'obtenir de bonnes estimations d'une mesure de probabilité. En particulier, le lemme suivant donne une estimation des bornes supérieure et inférieure de la probabilité qu'une variable aléatoire normale soit supérieure à une certaine valeur $t > 0$.

Lemme 1.1 (Estimé gaussien^[10]).

Pour $t > 0$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \geq P(\xi \geq t) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{\sigma^2}{t^3}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.1 .

Par définition de la fonction de densité d'une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$P(\xi \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz.$$

En effectuant le changement de variable $z = x + t$,

$$\begin{aligned} P(\xi \geq t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x+t)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{xt}{\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

La première inégalité s'obtient car $\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \leq 1$ et que $t \geq 0$. La dernière égalité est obtenue rapidement en considérant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = t/\sigma^2$. Maintenant, la borne inférieure s'obtient en observant que

$$\frac{1}{\sigma} \int_t^\infty \left(1 - \frac{3\sigma^4}{z^4}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz = \sigma(t^{-1} - \sigma^2 t^{-3}) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

et donc que

$$\begin{aligned} P(\xi \geq t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_t^\infty \left(1 - \frac{3\sigma^4}{z^4}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (t^{-1} - \sigma^2 t^{-3}) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

□

En notant $g(t) \sim h(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ pour signifier que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 1$, on a par le théorème précédent pour la fonction de répartition $F(t)$ d'une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, que $1 - F(t) \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}t} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$.

1.2.2. Estimé pour une somme de variables aléatoires i.i.d.

Dans le cas d'une somme de X_1, \dots, X_n variables aléatoires i.i.d avec $E[X_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$, $E[X_i^2] = \sigma_i^2$, et $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, l'inégalité de Tchebychef donne une borne supérieure

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\sigma\right) < 1/t^2.$$

Cette borne s'avère inappropriée pour le niveau de précision dont nous aurons besoin et une borne plus fine donnée par le lemme suivant sera employée.

Lemme 1.2 ([1],[7]).

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. réelles telles que, $\forall_{i \leq n} E[X_i] = 0$, $E[X_i^2] = \sigma_i^2$ et $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Si $E[|X_i|^k] \leq \frac{\sigma_{X_i}^2}{2} k! h^{k-2}$, $k \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, n$, $h \geq 0$, alors $\forall t > 0$,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2 + 2th}\right].$$

DÉMONSTRATION.

Prenons $u = \exp(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i)$, ε étant arbitraire. On a donc

$$\exp(\varepsilon X_i) = 1 + \varepsilon X_i + \frac{\varepsilon^2 X_i^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3 X_i^3}{3!} + \dots$$

et par la première hypothèse ($E[X_i] = 0$), par la troisième hypothèse ($E[|X_i|^k] \leq \frac{\sigma_{X_i}^2}{2} k! h^{k-2}$) et par le théorème de convergence dominée, on a que

$$\begin{aligned} E[\exp(\varepsilon X_i)] &\leq 1 + \frac{\varepsilon^2 \sigma_i^2}{2} + \frac{\varepsilon^3 \sigma_i^2 h}{2} + \frac{\varepsilon^4 \sigma_i^2 h^2}{2} + \dots \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2 \sigma_i^2}{2} (1 + \varepsilon h + (\varepsilon h)^2 + (\varepsilon h)^3 \dots) \end{aligned}$$

En observant que la série mise en évidence dans l'équation précédente est en fait l'expression de la fonction $\frac{1}{1-x}$ évaluée en εh et en supposant pour l'instant que l'on peut choisir c telle que $|\varepsilon| h \leq c < 1$, on obtient que

$$E[\exp(\varepsilon X_i)] \leq 1 + \frac{\varepsilon^2 \sigma_i^2}{2(1-c)} < \exp\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma_i^2}{2(1-c)}\right)$$

car $\exp x > 1 + x$ pour $x \geq 0$. En rappelant que $u = \exp(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i)$, on a que

$$E[u] < \exp\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2(1-c)}\right).$$

En utilisant *l'inégalité de Markov*, affirmant que pour une variable aléatoire $u > 0$ et $E[u] = A$, la probabilité $P[u > At^2] \leq 1/t^2$, on a que pour $A' > A$, $P[u > A't^2] \leq 1/t^2$. Ainsi,

$$P\left(u \geq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2(1-c)}\right) \exp(t^2)\right) \leq \exp(-t^2). \quad (1.1)$$

Mais $u \geq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2(1-c)} + t^2\right)$ implique, pour $\varepsilon > 0$, que

$$\sum_{i=1}^n X_i \geq \frac{\varepsilon \sigma^2}{2(1-c)} + \frac{t^2}{\varepsilon}.$$

En minimisant le terme de droite de l'inéquation précédente en fonction de ε , on trouve une borne inférieure pour $\sum_{i=1}^n X_i$ en prenant $\varepsilon^2 = \frac{2(1-c)t^2}{\sigma^2}$. Enfin, à ce point-ci de cette démonstration, en choisissant $\varepsilon^2 = \frac{2(1-c)t^2}{\sigma^2}$, $\varepsilon \leq c/h$ et $c < 1$, on a en remplaçant ces valeurs dans (1.1), que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\sigma \left(\frac{2}{1-c}\right)^{1/2}\right) \leq \exp(-t^2).$$

De même, en choisissant $\varepsilon < 0$, on obtient, pour les mêmes valeurs de ε^2 et c , que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq -t\sigma \left(\frac{2}{1-c}\right)^{1/2}\right) \leq \exp(-t^2).$$

En combinant les deux résultats, on obtient que

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\sigma \left(\frac{2}{1-c}\right)^{1/2}\right) \leq 2 \exp(-t^2) \quad (1.2)$$

pour $\varepsilon^2 = \frac{2(1-c)t^2}{\sigma^2}$, $|\varepsilon| \leq c/h$ et $c < 1$.

Les constantes h et σ sont connues. On a besoin de trois équations pour trouver les constantes t , c et ε . On pose donc

$$\begin{aligned} \omega &= t\sigma \left(\frac{2}{1-c}\right)^{1/2}, \\ \varepsilon^2 &= \frac{c^2}{h^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

et

$$\frac{2(1-c)}{\sigma^2} t^2 \leq c^2/h^2. \quad (1.4)$$

En isolant t dans (1.3) pour remplacer t^2 dans (1.4), on a

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{h^2} &\geq \frac{2(1-c)^2\omega^2}{2\sigma^4} \Rightarrow c \geq \frac{h\omega}{\sigma^2}(1-c) \\ &\Rightarrow c \left(1 + \frac{\omega h}{\sigma^2}\right) \geq \frac{h\omega}{\sigma^2} \\ &\Rightarrow c \geq \frac{h\omega}{\sigma^2 + h\omega}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive et inférieure à 1 tel que requis pour que la constante c puisse être déterminée (c doit être inférieure à 1). Ainsi en posant $c = \frac{h\omega}{\sigma^2 + h\omega}$ et en substituant cette valeur dans (1.3), on a que $t = \omega[2(\sigma^2 + h\omega)]^{-1/2}$. Ainsi, en remplaçant ces deux valeurs dans l'équation (1.2), on a

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \omega\right) \leq 2 \exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2 + 2h\omega}\right].$$

□

Dans le cas où les $|X_i|$ sont bornées par une constante b , on peut prendre $h = b/3$ dans le lemme précédent et obtenir une borne supérieure explicite. Cette

borne est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 1.3 ^([1],[7]).

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. réelles, $\forall_{i \leq n} E[X_i] = 0$, $\sigma^2 = \sigma^2(X_i)$. Si $\|X_i\|_\infty \leq b$, alors $\forall t > 0$,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left[-\frac{t^2}{2n\sigma^2 + 2tb/3}\right].$$

DÉMONSTRATION.

Ce lemme est une généralisation du Lemme 1.2 et se prouve facilement par induction. En effet, pour $k = 3$ ($k = 2$ est évidemment vrai),

$$\begin{aligned} E[|X_i|^3] &\leq bE[|X_i|^2] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} 3! \frac{b}{3}, \text{ par Lemme (1.2)}. \end{aligned}$$

Supposons que l'on peut prendre $h = b/3$ pour $k = 2, \dots, n$, alors pour $k = n + 1$ on a

$$\begin{aligned} E[|X_i|^{n+1}] &\leq bE[|X_i|^n] \\ &\leq b \frac{n+1}{3} \frac{\sigma^2}{2} n! \left(\frac{b}{3}\right)^{n-2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (n+1)! \left(\frac{b}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

1.2.3. Lemme de Slepian

Le lemme suivant permet d'obtenir des bornes pour la probabilité d'un ensemble de variables aléatoires corrélées à partir des résultats connus sur les variables aléatoires indépendantes.

Lemme 1.4 (^[26]).

Soit $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$, $X_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ deux vecteurs gaussiens de n variables aléatoires centrées et dont les matrices de covariance, Γ_1 et Γ_2 respectivement, sont définies non-négatives. Soit $P_n(\Gamma_i) = P(X_{i1} \geq 0, \dots, X_{in} \geq 0)$.

Si

$$\Gamma_1(j, j) = \Gamma_2(j, j) = 1 \text{ et } \Gamma_1(j, k) \leq \Gamma_2(j, k), \forall j, k \leq n,$$

alors

$$P_n(\Gamma_1) \leq P_n(\Gamma_2).$$

DÉMONSTRATION.

Dans le cas où $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien de n variables aléatoires centrées et dont la matrice de covariance Γ est définie positive, on peut poser la fonction de densité de X par

$$g_n(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \Gamma) = (2\pi)^{-n/2} |\Gamma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j,k} \Gamma^{-1}(j,k) x_j x_k}.$$

Ainsi,

$$P_n(\Gamma) = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_n g_n(x_1, \dots, x_n; \Gamma) \quad (1.5)$$

En utilisant l'inversion par transformée de Fourier, la fonction de densité de la gaussienne jointe peut être exprimée en terme de sa fonction caractéristique par

$$g_n(x_1, \dots, x_n, \Gamma) = \int_{-\infty}^\infty d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^\infty d\xi_n e^{i \sum_j x_j \xi_j} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j,k} \Gamma(j,k) \xi_j \xi_k}.$$

Cette dernière formulation de la fonction de densité en terme de sa fonction caractéristique permet de conclure que

$$\frac{\partial g_n}{\partial \Gamma(j, k)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_n}{\partial x_j \partial x_k}, \quad k > j.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial P_n(\Gamma)}{\partial \Gamma(1, 2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_n \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g_n(x_1, \dots, x_n, \Gamma)$$

et en effectuant l'intégrale sur x_1 et x_2 , on obtient que

$$\frac{\partial P_n(\Gamma)}{\partial \Gamma(1, 2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx_3 \dots \int_0^\infty dx_n g_n(0, 0, x_3, \dots, x_n, \Gamma) \geq 0.$$

Ainsi, pour Γ définie positive,

$$\frac{\partial P_n(\Gamma)}{\partial \Gamma(j, k)} \geq 0, \quad k > j. \quad (1.6)$$

En prenant Γ_1, Γ_2 définies non-négatives, on a que

$$\Gamma = \lambda \Gamma_2 + (1 - \lambda) \Gamma_1 + \epsilon I$$

est définie positive pour $\epsilon > 0$ et $1 \geq \lambda \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(\Gamma)}{d\lambda} &= \sum_{k>j} \frac{\partial P_n(\Gamma)}{\partial \Gamma(j, k)} \frac{d\Gamma(j, k)}{d\lambda} \\ &= \sum_{k>j} \frac{\partial P_n(\Gamma)}{\partial \Gamma(j, k)} (\Gamma_2(j, k) - \Gamma_1(j, k)) \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, $\Gamma_1(j, k) \leq \Gamma_2(j, k)$, donc avec (1.6),

$$\frac{dP_n(\Gamma)}{d\lambda} \geq 0.$$

En intégrant sur λ de 0 à 1, on obtient que $P_n(\Gamma_2 + \epsilon I) \geq P_n(\Gamma_1 + \epsilon I)$. Enfin, le résultat est obtenu par continuité^[8] de P_n lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Le lemme suivant est une version plus générale du lemme précédent.

Lemme 1.5 (Lemme de Slepian ^[26]).

Soient $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$, $X_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ deux vecteurs gaussiens de n variables aléatoires centrées telles que $E[X_{1i}^2] = E[X_{2i}^2]$, $i = 1, \dots, n$ et dont les matrices de covariance, Γ_1 et Γ_2 , sont définies non-négatives. Si $E[X_{1i}X_{1j}] \leq E[X_{2i}X_{2j}]$ pour $i \neq j$, alors

$$P(\max_{i=1, \dots, n} X_{1i} \leq u) \leq P(\max_{i=1, \dots, n} X_{2i} \leq u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION.

Le Lemme 1.4 peut être facilement généralisé en remplaçant la borne inférieure d'intégration 0 par $u_i \in \mathbb{R}$ quelconque. Le résultat ne change pas en considérant que $\Gamma_1(i, i) = \Gamma_2(i, i) = \sigma_i^2$. De plus, puisque les Γ_i sont symétriques, on a que $P(x_i > -u_i, i = 1, 2, \dots, n) = P(x_i < u_i, i = 1, 2, \dots, n)$. \square

Chapitre 2

CONVERGENCE DU MAXIMUM D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES ALÉATOIRES I.I.D.

Le travail présenté dans ce chapitre se trouve dans [20]. Le but de ce chapitre est de déterminer les bonnes constantes de normalisation permettant la convergence du premier ordre, la convergence du deuxième ordre et la convergence en loi du maximum d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard.

Il sera montré, par l'intermédiaire des théorèmes de convergence des types (Théorème 2.1) et de limite des classes (Théorème 2.2), que la loi de ce maximum normalisé converge vers une double exponentielle. Les constantes de normalisation seront déterminées grâce au théorème sur les fonctions dites de Von Mises (Théorème 2.4).

2.1. THÉORÈME DE CONVERGENCE DES TYPES

Dans le cas d'une fonction monotone H , on dénote

$$\mathcal{L}(H) = \{x \in \mathbb{R} : H \text{ est fini et continue en } x\}.$$

On dit qu'une suite $\{H_n\}_{n \geq 0}$ de fonctions non-décroissantes converge vers H_0 (faiblement), si lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $H_n(x) \rightarrow H_0(x)$ pour tout $x \in \mathcal{L}(H_0)$. Aussi, dans le cas où H est une fonction non-décroissante sur \mathbb{R} , avec pour convention que l'infimum de l'ensemble vide est ∞ , on définit l'inverse (continue à gauche) de H par

$$H^{\leftarrow}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{s : H(s) \geq y\}.$$

Ainsi, on dira que deux fonctions de distribution $U(x)$ et $V(x)$ sont du même type s'il existe pour $A \geq 0$, $B \in \mathbb{R}$,

$$V(x) = U(Ax + B), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, on dira que la fonction de distribution $F(x)$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$ est du même type que la fonction de distribution $G(x)$ d'une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ car $G(x) = F(\sigma^{-1}x - \sigma^{-1}\mu)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pour la suite, lorsque X_n et X seront des variables aléatoires avec fonctions de distribution F_n et F , respectivement, $X_n \Rightarrow X$ signifiera que $F_n \rightarrow F$ (faiblement). Pour X, Y des variables aléatoires avec fonctions de distribution F et G , respectivement, $X \stackrel{d}{=} Y$ signifiera que $F = G$ presque sûrement.

Le théorème suivant permettra de dériver les classes de distributions limites possibles du maximum normalisé d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d..

Théorème 2.1 (Convergence des types^[20]).

Soient $n \geq 1$ et $(X_n, n \geq 1)$, U, V des variables aléatoires telles que ni U et ni V ne sont presque sûrement des constantes et $(\alpha_n, n \geq 1)$, $(\beta_n, n \geq 1)$ des suites de nombres réels.

a) S'il existe des suites $(b_n, n \geq 1)$ et $(a_n, n \geq 1)$ telles que

$$\frac{(X_n - b_n)}{a_n} \Rightarrow U, \quad \frac{(X_n - \beta_n)}{\alpha_n} \Rightarrow V, \quad (2.1)$$

alors

$$\alpha_n/a_n \rightarrow A > 0, \quad (\beta_n - b_n)/a_n \rightarrow B \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

et

$$V \stackrel{d}{=} (U - B)/A. \quad (2.3)$$

b) Si (2.2) est vraie, chacune des deux équations de (2.1) implique l'autre et (2.3) est vraie.

DÉMONSTRATION DE *b*).

Supposons que (2.2) est vraie et que $Y_n = (X_n - b_n)/a_n \Rightarrow U$. On a alors par le théorème de Skorohod^[25] qu'il existe des variables aléatoires $\tilde{Y}_n, \tilde{U}, n \geq 1$, définies sur $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$ telles que $\tilde{Y}_n \stackrel{d}{=} Y_n, n \geq 1, \tilde{U} \stackrel{d}{=} U$ et $\tilde{Y}_n \rightarrow \tilde{U}$ presque sûrement. On définit $\tilde{X}_n = a_n \tilde{Y}_n + b_n$ de telle sorte que $\tilde{X}_n \stackrel{d}{=} X_n$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} (X_n - \beta_n) / \alpha_n &\stackrel{d}{=} (\tilde{X}_n - \beta_n) / \alpha_n \\ &= (a_n / \alpha_n) \tilde{Y}_n + \frac{(b_n - \beta_n)}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow A^{-1} \tilde{U} - BA^{-1} \stackrel{d}{=} (U - B) / A \end{aligned}$$

de telle sorte que $(X_n - \beta_n) / \alpha_n \Rightarrow (U - B) / A$. □

DÉMONSTRATION DE *a*).

Il est possible de montrer, voir [3], que pour une suite $\{H_n\}_{n \geq 0}$ de fonctions non-décroissantes telles que $H_n \rightarrow H_0$ faiblement, alors $H_n^{\leftarrow} \rightarrow H_0^{\leftarrow}$ faiblement. Soit $F_n(x) = P[X_n \leq x]$. Par (2.1), on a que

$$\frac{(F_n^{\leftarrow}(y) - b_n)}{a_n} \rightarrow U^{\leftarrow}(y), \quad \frac{(F_n^{\leftarrow}(y) - \beta_n)}{\alpha_n} \rightarrow V^{\leftarrow}(y). \quad (2.4)$$

Puisque que U et V ne sont presque sûrement pas des constantes, il existe y_1 et y_2 satisfaisant

$$\begin{aligned} y_1, y_2 &\in \mathcal{L}(U^{\leftarrow}) \cap \mathcal{L}(V^{\leftarrow}) \\ U^{\leftarrow}(y_1) &< U^{\leftarrow}(y_2), \quad V^{\leftarrow}(y_1) < V^{\leftarrow}(y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, avec (2.4) pour $i = 1, 2$,

$$\frac{(F_n^{\leftarrow}(y_i) - b_n)}{a_n} \rightarrow U^{\leftarrow}(y_i), \quad \frac{(F_n^{\leftarrow}(y_i) - \beta_n)}{\alpha_n} \rightarrow V^{\leftarrow}(y_i) \quad (2.5)$$

et, par soustraction,

$$\frac{(F_n^{\leftarrow}(y_2) - F_n^{\leftarrow}(y_1))}{a_n} \rightarrow U^{\leftarrow}(y_2) - U^{\leftarrow}(y_1) > 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{(F_n^{\leftarrow}(y_2) - F_n^{\leftarrow}(y_1))}{\alpha_n} \rightarrow V^{\leftarrow}(y_2) - V^{\leftarrow}(y_1) > 0. \quad (2.7)$$

En divisant (2.6) par (2.7), on obtient que

$$\alpha_n/a_n \rightarrow \frac{U^{\leftarrow}(y_2) - U^{\leftarrow}(y_1)}{V^{\leftarrow}(y_2) - V^{\leftarrow}(y_1)} \stackrel{\text{def}}{=} A > 0 \quad (2.8)$$

et, en utilisant cette dernière équation et les équations (2.5) avec y_1 , on déduit que

$$\frac{(F_n^{\leftarrow}(y_1) - b_n)}{a_n} \rightarrow U^{\leftarrow}(y_1), \quad \frac{(F_n^{\leftarrow}(y_1) - \beta_n)}{a_n} \rightarrow V^{\leftarrow}(y_1)A.$$

En soustrayant ces deux équations, on a

$$\frac{(\beta_n - b_n)}{a_n} \rightarrow U^{\leftarrow}(y_1) - V^{\leftarrow}(y_1)A \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

On obtient donc que l'équation (2.2) est vraie et par ce qui a été démontré en b), l'équation (2.3) est aussi vraie. \square

2.2. THÉORÈME LIMITE DES CLASSES

Le résultat intéressant que le théorème de convergence des types permet d'obtenir est le théorème limite des classes suivant.

Théorème 2.2 (Limite des classes de Gnedenko^[17]).

Soient $(X_i, i = 1, \dots, n)$ des variables aléatoires i.i.d. avec fonction de répartition F et $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$. S'il existe des suites $(a_n, n \geq 1)$, et $(b_n, n \geq 1) \in \mathbb{R}$, telles que

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x), \quad (2.9)$$

faiblement lorsque $n \rightarrow \infty$, où G est une fonction non-dégénérée, alors G est du type de l'une des trois classes suivantes :

$$(I) \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$.

$$(II) \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$.

$$(III) \quad \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour les besoins de ce mémoire, la preuve complète du théorème ne sera donnée que pour le cas (III) de la double exponentielle.

DÉMONSTRATION.

Par hypothèse (voir (2.9)), on a $\forall t > 0$,

$$F^{\lfloor nt \rfloor}(a_{\lfloor nt \rfloor}x + b_{\lfloor nt \rfloor}) \rightarrow G(x),$$

car $F^{\lfloor nt \rfloor}$ est une sous-suite de F^n . On a également que

$$F^{\lfloor nt \rfloor}(a_n x + b_n) = (F^n(a_n x + b_n))^{\lfloor nt \rfloor/n} \rightarrow G^t(x),$$

faiblement lorsque $n \rightarrow \infty$. En effet, on a

$$t = \frac{nt}{n} \geq \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \geq \frac{nt - 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t.$$

Par le Théorème 2.1, il existe $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t > 0$, tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / a_{\lfloor nt \rfloor} = \alpha(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b_{\lfloor nt \rfloor}) / a_{\lfloor nt \rfloor} = \beta(t) \quad (2.10)$$

et, voir équation (2.3),

$$G^t(x) = G(\alpha(t)x + \beta(t)). \quad (2.11)$$

Ainsi, on a pour $t > 0$, $s > 0$, que

$$G^{ts}(x) = G(\alpha(ts)x + \beta(ts)) \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} G^{ts}(x) &= (G^s(x))^t \\ &= G^t(\alpha(s)x + \beta(s)) \\ &= G(\alpha(t)(\alpha(s)x + \beta(s)) + \beta(t)) \\ &= G(\alpha(t)\alpha(s)x + \alpha(t)\beta(s) + \beta(t)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les 2^{-ème} et 3^{-ème} égalités surviennent par l'application successive de (2.11). Puisque G est non-dégénérée, on a alors, en comparant (2.12) et (2.13) pour $t > 0$, $s > 0$, que

$$\alpha(ts) = \alpha(t)\alpha(s), \quad (2.14)$$

$$\beta(ts) = \alpha(t)\beta(s) + \beta(t) = \alpha(s)\beta(t) + \beta(s). \quad (2.15)$$

L'équation (2.14) est la fonctionnelle de Hamel ^[24] dont la seule solution finie mesurable, non-négative est de la forme

$$\alpha(t) = t^{-\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Concrètement, en analysant les trois cas possibles, $\theta = 0$, $\theta > 0$, et $\theta < 0$, on en déduit les trois classes du Théorème ^[20]. Dans le cas de cette étude, la classe (III) seulement sera considérée, et donc la preuve se limitera à montrer le cas

$\theta = 0$. Dans le cas $\theta = 0$, on a par (2.16), que $\alpha(t) \equiv 1$ et que l'unique solution de (2.15) est

$$\beta(t) = -c \log t, t > 0, c \in \mathbb{R}.$$

L'équation (2.11) devient alors

$$G^t(x) = G(x - c \log t). \quad (2.17)$$

Évidemment, si $c = 0$, on a $G^t(x) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et donc $G(x) = 1$ ou $G(x) = 0$, auquel cas G est une fonction dégénérée (ce qui est une contradiction avec les hypothèses du théorème). De plus, G^t est non-décroissante (par définition de la convergence faible) et donc c doit être plus grand que 0. Ensuite, si on suppose qu'il existe x_0 tel que $G(x_0) = 1$, alors on obtient une contradiction. En effet, par (2.17), on a que

$$1 = G(x_0 - c \log t), \forall t.$$

De la même manière, on obtient qu'il n'existe pas de x_0 tel que $G(x_0) = 0$ et donc que $0 < G(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Maintenant pour $x = 0$ dans (2.17), on obtient pour $t > 0$ que

$$G^t(0) = G(-c \log t). \quad (2.18)$$

On cherche donc une fonction G telle que $G(0) \in (0, 1)$ et $(G(0))^t = G(-c \log t)$. La fonction $\exp(-\exp(-p))$ permet, avec un choix quelconque de $p \in \mathbb{R}$, d'obtenir la bonne valeur de $G(0) \in (0, 1)$. Ainsi, en effectuant le changement de variable $u = -c \log t$, on obtient la forme explicite générale pour G , soit

$$\begin{aligned} G(u) &= G^t(0) \\ &= (\exp(-\exp(-p)))^t \\ &= \exp(-\exp(-(u/c + p))) \\ &= \Lambda(c^{-1}u + p). \end{aligned}$$

□

2.3. CONVERGENCE EN LOI DU MAXIMUM DE VARIABLES ALÉATOIRES I.I.D. DE LOI NORMALE

Pour F une fonction de répartition, on dira que $F \in D(G)$ s'il existe des constantes de normalisation $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$F^n(a_n x + b_n) = P[M_n \leq a_n x + b_n] \rightarrow G(x).$$

Il est connu que la fonction de répartition F^n du maximum M_n d'un ensemble de n variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard est dans $D(\Lambda)$. Une façon de le démontrer est d'utiliser les fonctions dites de Von Mises.

Définition 2.3 (Fonction de Von Mises^[20]).

Une fonction $F_ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Von Mises s'il existe f , z_0 , x_0 , tels que*

$$1 - F_*(x) = c \exp\left(-\int_{z_0}^x 1/f(u) du\right), \quad z_0 < x < x_0, \quad c > 0,$$

où

$$f(u) > 0, \quad \forall u \in [z_0, x_0],$$

et f est absolument continue sur (z_0, x_0) avec $\lim_{u \uparrow x_0} f'(u) = 0$.

La fonction f est appelée fonction auxiliaire.

Le théorème suivant, qui ne sera pas démontré ici, permettra de trouver les constantes de normalisation pour le cas de la fonction de répartition F_n du maximum M_n d'un ensemble de n variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard.

Théorème 2.4 (^[20]).

a) Si F_* est une fonction de Von Mises, alors $F_* \in D(\Lambda)$ et les constantes de normalisation peuvent être choisies comme suit :

$$b_n = (1/(1 - F_*))^{*} (n)$$

$$a_n = f(b_n).$$

b) Soit F une fonction absolument continue avec la dérivée deuxième négative, $\forall x \in (z_0, x_0)$. Si

$$\lim_{x \uparrow x_0} F''(x) (1 - F(x)) / (F'(x))^2 = -1,$$

alors F est de Von Mises et la fonction auxiliaire f est déterminée par

$$f = \frac{(1 - F)}{F'}.$$

Les constantes de normalisation, a_n et b_n , permettant la convergence en loi du maximum d'un ensemble de variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard sont données dans la proposition suivante.

Proposition 2.5 (^[20]).

Soient $(X_i, i = 1, \dots, n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard et $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$. En posant $a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \log n}}$ et $b_n = (2 \log(n))^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{(\log(\log(n)) + \log(4\pi))}{(2 \log(n))^{1/2}}$, on a

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] \rightarrow \Lambda(x).$$

DÉMONSTRATION.

En posant $x_0 = \infty$, $z_0 = -\infty$ et $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2/2)$, on a

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2),$$

$$F''(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x \exp(-x^2/2) = -x F'(x).$$

En utilisant le Lemme 1.1 pour une variable aléatoire de loi normal standard, on a que $1 - F(x) \sim x^{-1}F'(x)$. Ainsi,

$$\lim_{x \uparrow \infty} F''(x)(1 - F(x))/(F'(x))^2 = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{-x^{-1}F'(x)xF'(x)}{(F'(x))^2} = -1,$$

et que F est de Von Mises par la partie b) du Théorème 2.4. On peut donc trouver les constantes de normalisation a_n et b_n telles que

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] \rightarrow \Lambda(x).$$

On a d'abord, par la partie b) du Théorème 2.4, que

$$f(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)} \sim \frac{F'(x)/x}{F'(x)} = 1/x,$$

et donc que

$$f(b_n) = \frac{1 - F(b_n)}{F'(b_n)} \sim 1/b_n. \quad (2.19)$$

Mais par définition de b_n (voir Théorème 2.4), on a

$$\begin{aligned} b_n &= \inf \left\{ s : \frac{1}{1 - F(s)} \geq n \right\} \\ &= \inf \left\{ s : \frac{1}{n} \geq 1 - F(s) \right\}, \end{aligned}$$

où $F(s)$ est la fonction de répartition d'une loi normale standard. On a donc $b_n \rightarrow \infty$ et

$$b_n = s \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 1 - F(s).$$

Ainsi, il suffit de résoudre en remplaçant $1 - F(b_n)$ par $1/n$ dans (2.19), c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b_n} \exp(-b_n^2/2) = 1/n. \quad (2.20)$$

En prenant moins le logarithme de chaque côté de l'égalité, on a

$$\frac{1}{2}b_n^2 + \log b_n + \frac{1}{2} \log(2\pi) = \log(n), \quad (2.21)$$

et en divisant par b_n^2 , on obtient, puisque $b_n \rightarrow \infty$, que

$$b_n \sim \sqrt{2 \log n}. \quad (2.22)$$

Puisque $a_n = f(b_n) \sim 1/b_n$, voir partie a) du Théorème 2.4, on pose

$$a_n = 1/\sqrt{2 \log n}. \quad (2.23)$$

En posant $b_n = \beta_n + o(1/\sqrt{\log(n)})$, on a

$$(b_n - \beta_n)/a_n = o(1/\sqrt{\log(n)})\sqrt{\log(n)} \rightarrow 0 \in \mathbb{R},$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, le Théorème 2.1 sur la convergence des types est vérifié et assure que β_n est un choix acceptable, c'est-à-dire qu'en posant $b_n = \beta_n$, on a

$$P[(M_n - b_n)/a_n \leq x] \rightarrow \Lambda(x).$$

Ainsi par (2.22), on a

$$b_n = \sqrt{2 \log n} + r_n, \quad (2.24)$$

où r_n est $o(\sqrt{\log(n)})$. En substituant (2.24) dans (2.21), on obtient que

$$\begin{aligned} (1/2)r_n^2 + r_n\sqrt{2 \log(n)} + (1/2)(\log(\log(n)) + \log(4\pi)) \\ + \log\left(1 + \frac{r_n}{\sqrt{2 \log(n)}}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

et en divisant par $r_n\sqrt{2 \log(n)}$, que

$$\frac{r_n}{2\sqrt{2 \log(n)}} + 1 + (1/2)\frac{(\log(\log(n)) + \log(4\pi))}{r_n\sqrt{2 \log(n)}} + \frac{\log(1 + \frac{r_n}{\sqrt{2 \log(n)}})}{r_n\sqrt{2 \log(n)}} = 0.$$

Le dernier terme du membre de gauche de l'égalité tend vers 0, puisque $r_n = o(\sqrt{\log(n)})$ et que $\log(1+x) \sim x$, lorsque x est très petit. On obtient donc que

$$o(1) + 1 + (1/2)\frac{(\log(\log(n)) + \log(4\pi))}{r_n\sqrt{2 \log(n)}} = 0,$$

et en réarrangeant les termes, que

$$r_n = -(1/2)\frac{(\log(\log(n)) + \log(4\pi))}{\sqrt{2 \log(n)}} + s_n, \quad (2.26)$$

où $s_n = o(\frac{\log(\log(n))}{\sqrt{\log(n)}})$. En fait, on peut voir que s_n est $o((\log(n))^{-1/2})$ car

$$\begin{aligned} (2 \log(n))^{1/2} r_n + \frac{1}{2}(\log(\log(n)) + \log(4\pi)) \\ = -\log(1 + (2 \log(n))^{-1/2} r_n) - r_n^2/2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'égalité s'obtient en réarrangeant les termes dans (2.25). Le tout tend vers 0, car $r_n \rightarrow 0$ par (2.26). Ainsi, en substituant (2.26) dans le membre de gauche de (2.27), on obtient que $s_n = o((\log(n))^{-1/2})$. Ainsi, on a suffisamment bien défini b_n et on peut poser

$$b_n = (2 \log(n))^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{(\log(\log(n)) + \log(4\pi))}{(2 \log(n))^{1/2}}. \quad (2.28)$$

□

Ainsi, on a les constantes a_n et b_n qui permettent d'avoir la convergence en loi du maximum M_n d'un ensemble de n variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard.

2.4. CONVERGENCE DU DEUXIÈME ORDRE DU MAXIMUM D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES ALÉATOIRES I.I.D. DE LOI NORMALE STANDARD

Avec les constantes a_n et b_n déterminées précédemment (voir (2.23) et (2.28) respectivement) pour la convergence en loi de 2^n variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard, on a

$$P[M_n \leq U_n(x)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-\exp(-x)), \quad (2.29)$$

où

$$U_n(x) = \sqrt{2n \log 2} + \frac{x}{\sqrt{2n \log 2}} - \frac{\log(n \log 2) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2n \log 2}}. \quad (2.30)$$

Ainsi, il est facile de montrer la convergence du deuxième ordre du maximum en montrant la proposition suivante.

Proposition 2.6.

Soient $(X_i, i = 1, \dots, 2^n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard et $M_n = \max_{i=1, \dots, 2^n} X_i$. En posant $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = -\frac{1}{2} \frac{(\log(n \log(2)) + \log(4\pi))}{\sqrt{2n \log(2)}}$, on a

$$(M_n - b_n)/a_n \rightarrow \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

DÉMONSTRATION.

Pour $\delta \geq 0$, on a que

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} - \sqrt{2 \log 2} \leq \delta\right) &= P\left(\frac{M_n + \frac{\log(n \log 2) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2n \log 2}}}{n^{1/2}} - \sqrt{2 \log 2} \leq \delta\right) \\ &= P\left(M_n \leq \left(\sqrt{2 \log 2} + \delta\right) n^{1/2} - \frac{\log(n \log 2) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2n \log 2}}\right) \\ &\geq P(M_n \leq U_n(x)) \end{aligned}$$

et donc par (2.29), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} - \sqrt{2 \log 2} \leq \delta\right) \geq \exp(-\exp(-x)).$$

Puisque $x \in \mathbb{R}$, on a que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} - \sqrt{2 \log 2} \leq \delta\right) \geq 1.$$

Mais une mesure de probabilité étant majorée par 1, on doit avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} - \sqrt{2 \log 2} \leq \delta\right) = 1. \quad (2.31)$$

En procédant de la même façon, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} - \sqrt{2 \log 2} \geq -\delta\right) = 1. \quad (2.32)$$

En prenant l'union des compléments des événements évalués en (2.31) et (2.32), on obtient la convergence en probabilité du deuxième ordre souhaitée. \square

2.5. CONVERGENCE DU PREMIER ORDRE DU MAXIMUM D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES ALÉATOIRES I.I.D. DE LOI NORMALE STANDARD

Une approche probabiliste est utilisée pour démontrer la convergence du premier ordre. La convergence du premier ordre est un résultat plus faible que la convergence du deuxième ordre tout juste démontrée. Toutefois, l'approche probabiliste utilisée ici simplifie l'expression d'une variable aléatoire en l'exprimant sous la forme d'une somme de variables aléatoires de Bernoulli plus simples.

Cette approche sera utilisée pour traiter les modèles corrélés du chapitre 3.

Proposition 2.7.

Soient $(X_i, i = 1, \dots, 2^n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi normale standard et $M_n = \max_{i=1, \dots, 2^n} X_i$. En posant $a_n = \sqrt{n}$, on a

$$M_n/a_n \rightarrow \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

DÉMONSTRATION.

Soit la variable à valeurs entières

$$\begin{aligned} \text{card}_{\pm\delta} &= \# \left\{ i \leq 2^n : X_i \geq \left(\sqrt{2 \log 2} \pm \delta \right) n^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} 1_{\{X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} \pm \delta) n^{\frac{1}{2}}\}}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

On a

$$\begin{aligned} P(\text{card}_{+\delta} \geq 1) &\leq E \left[\sum_{i=1}^{2^n} 1_{\{X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} + \delta) n^{\frac{1}{2}}\}} \right] \\ &= 2^n P \left(X_1 \geq \left(\sqrt{2 \log 2} + \delta \right) n^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq 2^n \left(\frac{\exp \left(-\frac{(\sqrt{2 \log 2} + \delta)^2 n}{2} \right)}{\left(\sqrt{2 \log 2} + \delta \right) n^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq \exp(-cn), \text{ pour } c \text{ une constante positive} \end{aligned} \quad (2.34)$$

La première inégalité est par *Tchebychef*, l'égalité suivante découle de la linéarité de l'espérance et le fait que les variables aléatoires sont identiquement distribuées. Enfin, les deux dernières inégalités surviennent par l'approximation sur les normales standards. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités $\text{card}_{\pm\delta} \geq 0$ et $1_{\{\text{card}_{\pm\delta} \geq 1\}} \geq 0$, on a que

$$\begin{aligned} E[\text{card}_{\pm\delta}]^2 &= E \left[\text{card}_{\pm\delta} 1_{\{\text{card}_{\pm\delta} \geq 1\}} \right]^2 \leq E[\text{card}_{\pm\delta}^2] E[1_{\{\text{card}_{\pm\delta} \geq 1\}}^2] \\ &= E[\text{card}_{\pm\delta}^2] P(\text{card}_{\pm\delta} \geq 1), \end{aligned}$$

et donc que

$$P(\text{card}_{-\delta} \geq 1) \geq \frac{E[\text{card}_{-\delta}]^2}{E[\text{card}_{-\delta}^2]}. \quad (2.35)$$

Puisque $\text{card}_{-\delta}$ est une somme de variables i.i.d., on a

$$\begin{aligned} E[\text{card}_{-\delta}^2] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{2^n} 1_{\{X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\}}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{2^n} E\left[1_{\{X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\}} 1_{\{X_j \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) P\left(X_j \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2^n P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) + (2^{2^n} - 2^n) P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E[\text{card}_{-\delta}] &= E\left[\sum_{i=1}^{2^n} 1_{\{X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\}}\right] \\ &= 2^n P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Donc par (2.35)

$$P(\text{card}_{-\delta} \geq 1) \geq \frac{2^{2^n} P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2^n P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) + (2^{2^n} - 2^n) \left(P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}$$

Afin d'alléger la notation, on pose

$$P = P\left(X_i \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right)$$

et en simplifiant l'équation précédente, on a que

$$P(\text{card}_{-\delta} \geq 1) \geq \frac{1}{\frac{1-P}{2^n P} + 1}.$$

En considérant le fait que

$$P\left(M_n \geq (\sqrt{2 \log 2} - \delta) n^{\frac{1}{2}}\right) = P(\text{card}_{-\delta} \geq 1),$$

on a donc

$$\begin{aligned} P\left(M_n \leq \left(\sqrt{2\log 2} - \delta\right) n^{\frac{1}{2}}\right) & \\ & \leq 1 - \frac{1}{\frac{(1-P)}{2^n P} + 1} \\ & \leq \frac{(1-P)}{2^n P} \\ & \leq \frac{1}{2^n P} \\ & \leq \exp(-cn), \text{ pour } c \text{ une constante positive.} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Donc par (2.34) et (2.36), on a la convergence en probabilité.

□

Chapitre 3

CONVERGENCE DU MAXIMUM D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES ALÉATOIRES CORRÉLÉES DE LOI NORMALE

Deux modèles de champ gaussien seront étudiés dans le cas de la convergence du premier ordre du maximum, soit le modèle hiérarchique et le modèle harmonique. Le premier est représenté par les feuilles d'un arbre binaire, le second, par une surface aléatoire carrée avec les bords fixés à zéro. Les deux modèles sont très similaires car, comme il le deviendra évident à la suite de la lecture de cette section, la covariance du modèle harmonique s'obtient par un changement dans la façon de mesurer la distance entre les points et par un changement d'échelle qui tient compte du nombre de points dans chacun des modèles (le changement sera logarithmique). L'étude du modèle hiérarchique est motivée par le fait que le traitement théorique y est beaucoup plus simple que dans le modèle harmonique. Le fait qu'il n'y a pas de géométrie impliquée dans le modèle hiérarchique et que la corrélation entre les variables aléatoires y est plus simple que dans le modèle harmonique simplifiera grandement les calculs. La méthodologie pour traiter le cas du modèle harmonique sera similaire à celle utilisée pour le modèle hiérarchique.

Enfin, le résultat principal de ce chapitre sera que le comportement du maximum de ces deux modèles est le même que pour les variables aléatoires i.i.d. dans le cas de la convergence du premier ordre.

3.1. LE MODÈLE HIÉRARCHIQUE

3.1.1. Définition du modèle hiérarchique

Le modèle hiérarchique est en fait un arbre binaire dans lequel la racine est une variable aléatoire constante prenant la valeur 0 et dont tous les autres noeuds sont des variables aléatoires normales i.i.d. de loi normale, notée (ξ_i) , avec variance γ . L'étiquette $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$, avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$, représente un chemin de longueur $l(\alpha)$, c'est-à-dire le nombre d'arcs entre la racine et le noeud à atteindre ($l(\emptyset) = 0$). L'ensemble des étiquettes est noté T , T_m étant l'ensemble des étiquettes de longueur m . On écrit $[\alpha]_k$, pour $\alpha \in T_m$, $0 \leq k \leq m$, pour signifier :

$$[\alpha]_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k,$$

et on note la distance hiérarchique $d_H(\alpha, \beta)$ pour indiquer le nombre d'arcs qui diffèrent entre deux chemins de même longueur :

$$d_H(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} m - \max \{k \leq m : [\alpha]_k = [\beta]_k\}.$$

Ainsi, le champ gaussien correspond aux variables aléatoires $(X_\alpha, \alpha \in T_m)$ définies par $X_\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 0$ (autrement dit, la racine vaut 0), et pour $l(\alpha) = m \geq 1$,

$$X_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\alpha_1}^1 + \xi_{\alpha_1\alpha_2}^2 + \cdots + \xi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^m.$$

On a évidemment que les 2^m variables aléatoires $X_{\alpha \in T_m}$ ont toutes une variance de γm étant donnée que chaque $X_{\alpha \in T_m}$ est une somme de m variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée de variance γ . On obtient facilement que la covariance du champ gaussien $(X_\alpha, \alpha \in T_m)$ est définie par

$$\text{cov}(X_\alpha, X_\beta) = \gamma(m - d_H(\alpha, \beta)).$$

3.1.2. Convergence du premier ordre du modèle hiérarchique

Dans tout le texte qui suit, c sera employée comme constante positive (pas nécessairement la même à chaque occurrence). De plus, toutes les inégalités sont valides pour m suffisamment grand. Sans perte de généralité, m est considéré pair. De plus, on posera, sans perte de généralité, $\gamma = 1$ pour la variance des variables aléatoires ξ_α .

Le résultat principal de cette section, préalablement trouvé par Biggins^[3], sera que la convergence du premier ordre pour les variables aléatoires corrélées du modèles hiérarchique est la même que celle pour les variables aléatoires indépendantes.

Théorème 3.1 (Biggins^[3]).

Soient $(X_\alpha, \alpha \in T_m)$ et $M_m = \max_{\alpha \in T_m} X_\alpha$. On a

$$M_m/m \rightarrow \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

Comme conséquence directe du lemme de Slepian, voir Lemme 1.5, il est facile de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.

Soient $(X_\alpha, \alpha \in T_m)$ et $M_m = \max_{\alpha \in T_m} X_\alpha$. Pour tout $\eta > 0$, on a

$$P \left(M_m \leq \sqrt{2 \log 2} (1 + \eta) m \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

DÉMONSTRATION.

La Proposition 2.7 sur la convergence en probabilité du maximum pour 2^m variables aléatoires $(X_i, i = 1, \dots, 2^m)$ indépendantes de loi normale centrée et de variance m , donne

$$\frac{\max_{i=1,2,\dots,2^m} X_i}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

Donc, pour tout $\eta > 0$, on a

$$P \left(\max_{i=1,2,\dots,2^m} X_i \leq \sqrt{2 \log 2} (1 + \eta) m \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Par le lemme de Slepian (Lemme 1.5), on a pour 2^m variables aléatoires $(Y_\alpha, \alpha \in T_m)$ de loi normale avec variance m , que

$$P \left(\max_{i=1,2,\dots,2^m} X_i \leq \sqrt{2 \log 2} (1 + \eta) m \right) \leq P \left(\max_{\alpha \in T_m} Y_\alpha \leq \sqrt{2 \log 2} (1 + \eta) m \right). \quad (3.1)$$

□

Ainsi, pour démontrer la proposition de Biggins, il est donc suffisant de démontrer la proposition suivante dont la preuve donnée dans ce mémoire à été obtenue par E. Bolthausen^[4].

Proposition 3.3 ^([4]).

Soit $\eta > 0$. Il existe $b(\eta) > 0$ tel que

$$P\left(\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \leq \sqrt{2 \log 2} (1 - \eta) m\right) \leq \exp\left[-b(\eta) m^2\right].$$

Pour arriver à démontrer cette proposition, on démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.4 ^([4]).

Il existe $\delta > 0$, $b > 0$ tels que

$$P\left(\text{card}\{\alpha \in T_m : X_\alpha \geq 0\} \leq 2^{\delta m}\right) \leq e^{-bm^2}.$$

Ce lemme garantit que la probabilité d'avoir plus de $2^{\delta m}$ variables positives soit suffisamment grande.

DÉMONSTRATION.

Soient $\alpha \in T_{\frac{m}{2}}$, $Y_\alpha^1 \stackrel{\text{def}}{=} X_\alpha$ et $Y_\alpha^2 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\alpha 0}^{m/2+1} + \xi_{\alpha 00}^{m/2+2} + \dots + \xi_{\alpha 0\dots 0}^m$. Les variables aléatoires $Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2$ correspondent donc aux feuilles d'un arbre binaire de hauteur m ayant pour étiquette $\alpha 0\dots 0 \in T_m$. Ainsi, on a évidemment que

$$\left\{\alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2 \geq 0\right\} \subset \left\{\alpha \in T_m : X_\alpha \geq 0\right\}$$

et donc que

$$\begin{aligned} P\left(\text{card}\{\alpha \in T_m : X_\alpha \geq 0\} \leq 2^{m\delta}\right) \\ \leq P\left(\text{card}\{\alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2 \geq 0\} \leq 2^{m\delta}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

En définissant $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 \geq -m/10\}$ et l'évènement $A \stackrel{\text{def}}{=} \{|\Lambda| \geq 2^{m/4}\}$, on a

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P\left(A^c, \max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq m^2\right) + P\left(A^c, \max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 > m^2\right) \\ &\leq P\left(A^c, \max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq m^2\right) + P\left(\max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 > m^2\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

De plus, sur $A^c \cap \left\{\max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq m^2\right\}$, on a que

$$\begin{aligned} 2^{-m/2} \sum_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 &= 2^{-m/2} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha^1 + \sum_{\alpha \notin \Lambda} Y_\alpha^1 \right) \\ &\leq 2^{-m/2} \left(|\Lambda| m^2 + |\Lambda^c| \left(\frac{-m}{10}\right) \right) \\ &= 2^{-m/2} |\Lambda| m^2 - 2^{-m/2} (2^{m/2} - |\Lambda|) \frac{m}{10} \\ &= -\frac{m}{10} + 2^{-m/2} |\Lambda| \left(m^2 + \frac{m}{10}\right) \\ &\leq -\frac{m}{20}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est valide, car sur A^c , on a $|\Lambda| < 2^{m/4}$. Ainsi, on a que

$$P\left(A^c, \left\{\max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq m^2\right\}\right) \leq P\left(2^{-m/2} \sum_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq -\frac{m}{20}\right). \quad (3.4)$$

En considérant que,

$$\begin{aligned} P\left(\max_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 > m^2\right) &\leq 2^m \max_{\alpha \in T_{m/2}} P\left(Y_\alpha^1 > m^2\right) \\ &\leq 2^m \frac{\exp\left(-\frac{m^4}{2(m/2)}\right)}{m^2} \\ &\leq e^{-cm^3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où la deuxième inégalité s'obtient par le Lemme 1.1 avec $\sigma = m/2$, car Y_α^1 est une somme de $\frac{m}{2}$ variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée de variance 1. Ainsi, en remplaçant (3.4) et (3.5) dans (3.3), on obtient que

$$\begin{aligned} P(A^c) &\leq P\left(2^{-m/2} \sum_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \leq -\frac{m}{20}\right) + e^{-cm^3} \\ &\leq e^{-cm^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La dernière inégalité découle du Lemme 1.1 en considérant que $2^{-m/2} \sum_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1$ est une variable aléatoire de loi normale centrée de variance donnée par

$$\text{var} \left(2^{-m/2} \sum_{\alpha \in T_{m/2}} Y_\alpha^1 \right) = 1 - 2^{-m/2}. \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) se prouve facilement par induction. En effet, sans perte de généralité, supposons $\alpha \in T_m$. Alors pour $m = 1$, on a

$$\begin{aligned} \text{var} \left(2^{-1} (\xi_1 + \xi_0) \right) &= \frac{1}{4} (\text{var} (\xi_1) + \text{var} (\xi_0)) \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 1 - 2^{-1}. \end{aligned}$$

En supposant l'affirmation vraie pour m , on a

$$\begin{aligned} \text{var} \left(2^{-(m+1)} \sum_{\alpha \in T_{m+1}} X_\alpha \right) &= \text{var} \left(2^{-(m+1)} \left(\sum_{\alpha \in T_{m+1}} (X_{[\alpha]_m} + \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1}}) \right) \right) \\ &= \text{var} \left(\frac{2^{-m}}{2} \left(\sum_{\alpha \in T_m} (2X_\alpha) \right) \right) + 2^{-2(m+1)} 2^{m+1} \text{var} (\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1}}) \\ &= 1 - 2^{-m} + 2^{-(m+1)} \\ &= 1 - 2^{-(m+1)}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est valide, car $X_{[\alpha]_m}$ et $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1}}$ sont indépendantes et la troisième égalité découle de l'hypothèse d'induction. En considérant maintenant

$$\mathcal{F}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(Y_\alpha^1 : \alpha \in T_{m/2} \right),$$

on a que

$$\begin{aligned} P \left(\text{card} \left\{ \alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2 \geq 0 \right\} \leq 2^{\delta m}, A \right) &= E \left[1_A 1_{\left\{ \left(\sum_{\alpha \in T_{m/2}} 1_{\{Y_\alpha^2 + Y_\alpha^1 \geq 0\}} \right) \leq 2^{\delta m} \right\}} \right] \\ &\leq E \left[1_A 1_{\left\{ \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} 1_{\{Y_\alpha^2 + Y_\alpha^1 \geq 0\}} \right) \leq 2^{\delta m} \right\}} \right] \\ &= E \left[E \left[1_A 1_{\left\{ \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} 1_{\{Y_\alpha^2 + Y_\alpha^1 \geq 0\}} \right) \leq 2^{\delta m} \right\}} \middle| \mathcal{F}_1 \right] \right]. \end{aligned}$$

L'inégalité est obtenue car les α de Λ sont également dans $T_{m/2}$. Puisque $A \in \mathcal{F}_1$,

$$\begin{aligned} E \left[E \left[1_A 1_{\left\{ \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} 1_{\{Y_\alpha^2 + Y_\alpha^1 \geq 0\}} \right) \leq 2^{\delta m} \right\}} \middle| \mathcal{F}_1 \right] \right] &= E \left[1_A P \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} 1_{\{Y_\alpha^2 \geq -Y_\alpha^1\}} \leq 2^{\delta m} \middle| \mathcal{F}_1 \right) \right] \\ &\leq E \left[1_A P \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} 1_{\{Y_\alpha^2 \geq \frac{m}{10}\}} \leq 2^{\delta m} \middle| \mathcal{F}_1 \right) \right] \\ &\leq P \left(\sum_{j=1}^{2^{m/4}} 1_{\{Y_j \geq \frac{m}{10}\}} \leq 2^{\delta m} \right). \end{aligned}$$

La première inégalité découle du fait que, sur Λ , les variables Y_α^1 sont supérieures ou égales à $-m/10$. La deuxième inégalité est obtenue, car $|\Lambda| \geq 2^{m/4}$ dans A . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P \left(\text{card} \left\{ \alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2 \geq 0 \right\} \leq 2^{\delta m}, A \right) \\ \leq P \left(\sum_{j=1}^{2^{m/4}} 1_{\{Y_j \geq \frac{m}{10}\}} \leq 2^{\delta m} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le changement de notation, $Y_\alpha^2 = Y_j$, est simplement pour signifier que l'on prend seulement $2^{m/4}$ variables aléatoires dans l'ensemble Λ . Les Y_j sont évidemment i.i.d. de loi normale centrée de variance $\sigma^2 = m/2$. Afin d'alléger la notation, on pose $\eta_j \stackrel{\text{def}}{=} 1_{\{Y_j \geq \frac{m}{10}\}} - P \left(Y_j \geq \frac{m}{10} \right)$. En utilisant le Lemme 1.1) avec $\sigma^2 = m/2$, on a que $P \left(Y_j \geq \frac{m}{10} \right) \geq \exp \left(-\frac{m}{90} \right)$.

Ainsi, pour δ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} P \left(\sum_{j=1}^{2^{m/4}} 1_{\{Y_j \geq \frac{m}{10}\}} \leq 2^{\delta m} \right) &\leq P \left(\sum_{j=1}^{2^{m/4}} 1_{\{Y_j \geq \frac{m}{10}\}} - P \left(Y_j \geq \frac{m}{10} \right) \leq 2^{\delta m} - 2^{m/4} \exp \left(-\frac{m}{90} \right) \right) \\ &\leq P \left(\sum_{j=1}^{2^{m/4}} \eta_j \leq -\frac{2^{m/4}}{2} \exp \left(-\frac{m}{90} \right) \right) \\ &\leq P \left(\left| \sum_{j=1}^{2^{m/4}} \eta_j \right| \geq \frac{2^{m/4}}{2} \exp \left(-\frac{m}{90} \right) \right) \\ &= P \left(\left| \sum_{j=1}^{2^{m/4}} \eta_j \right| \geq \frac{2^{m/4} 2^{-\frac{m}{90} \log_2 e}}{2} \right) \\ &\leq \exp \left(-2^{cm} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La dernière inégalité s'obtient par l'estimé de la valeur absolue d'une somme de variables aléatoires i.i.d. (Lemme 1.3). En effet, le lemme est applicable car on a

$\|\eta_j\| < 1$ et $E[\eta_j] = 0, \forall_j$. Ainsi, en considérant la somme des probabilités sur des ensembles disjoints de la partie droite de (3.2), on a

$$\begin{aligned} P(\text{card}\{\alpha \in T_m : X_\alpha \geq 0\} \leq 2^{m\delta}) \\ \leq P(A^c) + P(\text{card}\{\alpha \in T_{m/2} : Y_\alpha^1 + Y_\alpha^2 \geq 0\} \leq 2^{\delta m}, A) \\ \leq e^{-cm^2} + \exp(-2^{cm}) \\ \leq e^{-cm^2}. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité découle de (3.6) et (3.9). □

Pour démontrer la Proposition 3.3, le corollaire suivant, qui est une conséquence direct du Lemme 3.4, sera utilisé.

Corollaire 3.5.

Soit $\eta > 0$. Il existe $\delta(\eta) > 0$ et $b(\eta) > 0$ tels que

$$P(\text{card}\{\alpha \in T_{\eta m} : X_\alpha \geq 0\} \leq 2^{\delta(\eta)m}) \leq e^{-b(\eta)m^2}.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.3.

On fixe $\eta > 0$, $K \in \mathbb{N}$. On définit $\eta_i \stackrel{\text{def}}{=} \eta + \frac{i}{K}(1 - \eta)$, $0 \leq i \leq K$, et on suppose $\eta_i m \in \mathbb{N}$. On pose

$$\Gamma_0 = \{\alpha \in T_{\eta m} : X_\alpha \geq 0\}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_i = \left\{ \alpha \in T_{\eta_i m} : [\alpha]_{\eta_{i-1}m} \in \Gamma_{i-1}, X_\alpha \geq \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{i}{K} - \frac{i}{K^2} \right) (1 - \eta) m \right\}, \quad (3.11)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ (voir figure 3.1). En fixant $0 < \delta = \delta(\eta)$ du Corollaire 3.5, on pose également

$$A_i = \{|\Gamma_i| \geq 2^{\delta m}\} \quad (3.12)$$

et

$$\mathcal{F}_i = \sigma(\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^j : j \leq \eta_i m).$$

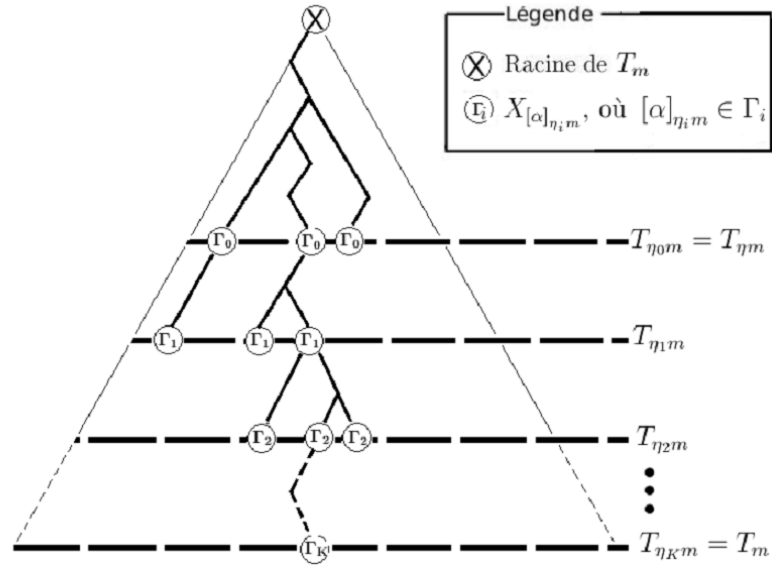


FIGURE 3.1. Représentation de Γ_i , η_i et de $T_{\eta_i m}$ pour $i = 0, 1, \dots, K$.

Soient les inégalités suivantes :

$$P(A_0) \geq 1 - \exp(b(\eta)m^2), \quad (3.13)$$

$$P(A_i | \mathcal{F}_{i-1}) \geq 1 - \exp(-\exp(d_K m)). \quad (3.14)$$

La première inégalité est vraie, car on sait par le Corollaire 3.5 qu'il existe $b(\eta)$ tel que (3.13) est vérifiée. On montrera que pour $\eta > 0$ et le $\delta(\eta) > 0$ correspondant, il est toujours possible de choisir $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $K \geq K_0$, il existe $d_K > 0$ tel que la deuxième inégalité est vérifiée sur A_{i-1} , $i \geq 1$. Le fait est que ces deux inégalités démontrent la Proposition 3.3. En effet, on a

$$\begin{aligned}
P(A_K) &\geq P(A_K | A_{K-1}) P(A_{K-1}) \\
&\geq P(A_K | A_{K-1}) P(A_{K-1} | A_{K-2}) P(A_{K-2}) \dots P(A_0) \\
&\geq (1 - \exp(-\exp(d_K m)))^K (1 - \exp(b(\eta)m^2)) \\
&\geq (1 - K \exp(-\exp(d_K m))) (1 - \exp(b(\eta)m^2)) \\
&\geq 1 - K \exp(-\exp(d_K m)) - \exp(b(\eta)m^2) \\
&\geq 1 - \exp\left(\frac{b(\eta)}{2} m^2\right). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

La troisième inégalité est obtenue, car on suppose l'inégalité (3.14) vraie pour $K, K-1, \dots, 1$. La quatrième inégalité est due à Bernoulli ($(1-x)^n \geq 1-nx$, pour $x > -1$). La cinquième s'obtient en effectuant la multiplication et en négligeant certains termes positifs. Enfin, la dernière inégalité découle du fait fait que la double exponentielle, dans l'inégalité précédente, est positive et inférieure à 1. Elle devient donc négligeable lorsque m est suffisamment grand.

Pour

$$\beta > 0 \text{ fixé,} \quad (3.16)$$

on pose $\eta = \beta/2$ et $K \geq K_0(\eta)$ tels que $1/K < \beta/2$, on a sur A_K et pour tout $\alpha \in T_{\eta_K m}$, que

$$\begin{aligned} X_\alpha &\geq \sqrt{2 \log 2} \left(1 - \frac{1}{K}\right) (1 - \eta) m \\ &= \sqrt{2 \log 2} \left(1 - \frac{1}{K}\right) \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) m \\ &= \sqrt{2 \log 2} \left(1 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{K} + \frac{\beta}{2K}\right) m \\ &\geq \sqrt{2 \log 2} (1 - \beta) m. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est obtenue en laissant tomber le terme positif $\frac{\beta}{2K}$. Ainsi, puisque $\eta_K = \eta + \frac{K}{K}(1 - \eta) = 1$, on a que $A_K \subset \left\{ \max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \geq \sqrt{2 \log 2} (1 - \beta) m \right\}$ et donc que $P(A_K^c) \geq P\left(X_\alpha \leq \sqrt{2 \log 2} (1 - \beta) m\right)$. Par (3.15), on a $P(A_K^c) < \exp\left(\frac{b(\eta)}{2} m^2\right)$ et donc la Proposition 3.3 serait prouvée.

Bref, puisque (3.13) est déjà vérifié par le Corollaire 3.5, il est suffisant pour démontrer la Proposition 3.3, de montrer (3.14). On sait que sur A_{i-1} , on a au moins $\mu \stackrel{\text{def}}{=} 2^{m\delta}$ étiquettes $\alpha \in T_{\eta_{i-1} m}$ telles que

$$X_\alpha \geq \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{i-1}{K} - \frac{i-1}{K^2}\right) (1 - \eta) m.$$

On note ces μ étiquettes, $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$. À chaque $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$, il y a 2^M , $M = \frac{1}{K}(1 - \eta) m$, variables gaussiennes de variance M , notées $Z_{\alpha_i \alpha_j}$, $1 \leq j \leq 2^M$, telles que $X_\alpha = X_{\alpha_i} + Z_{\alpha_i \alpha_j}$, $X_\alpha \in A_i$ et $[\alpha]_{\eta_{i-1} m} \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ (voir Figure 3.2, page suivante). En effet, le nombre de variables aléatoires indépendantes que l'on doit ajouter à une variable qui se trouve dans A_{i-1} pour obtenir une variable

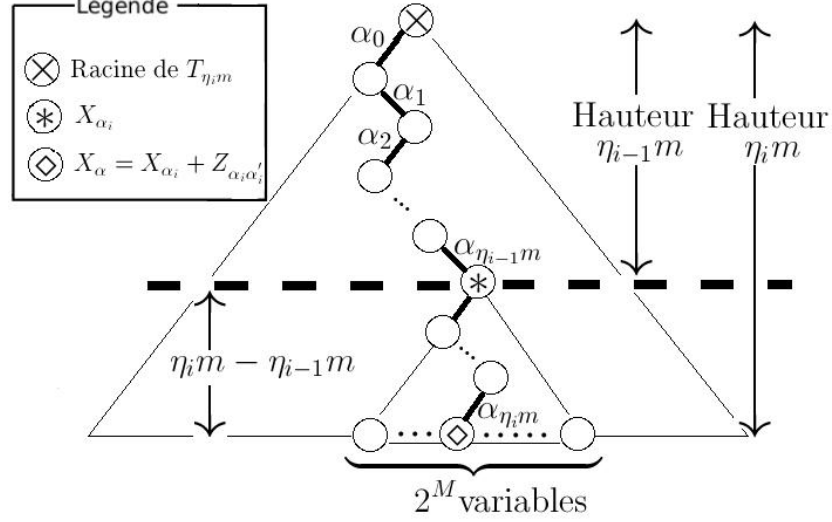


FIGURE 3.2. Représentation, à partir d'un arbre binaire $T_{\eta, m}$, de la variable aléatoire X_α , $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\eta_i m}$. $X_\alpha = X_{\alpha_i} + Z_{\alpha_i \alpha'_j}$, où $\alpha_i \alpha'_j$ représente l'une des μ étiquettes $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$.

dans A_i est

$$\begin{aligned} \eta_i m - \eta_{i-1} m &= \left(\eta + \frac{i}{K} (1 - \eta) \right) m - \left(\eta + \frac{i-1}{K} (1 - \eta) \right) m \\ &= \left(\frac{1 - \eta}{K} \right) m. \end{aligned}$$

Donc pour chaque $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$, il y a 2^M , $M = \frac{1}{K} (1 - \eta) m$ variables gaussiennes dont la variance est M et notée $Z_{\alpha_i \alpha'_j}$, $1 \leq j \leq 2^M$.

Soient $X_\alpha \in A_i$ et $X_{\alpha_i} \in A_{i-1}$, alors

$$X_\alpha = X_{\alpha_i} + Z_{\alpha_i \alpha'_j} \geq \sqrt{2 \log 2} (i) \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m \quad (3.17)$$

$$X_{\alpha_i} \geq \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{i-1}{K} - \frac{i-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m. \quad (3.18)$$

Donc si

$$Z_{\alpha_i \alpha'_j} \geq \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m, \quad (3.19)$$

alors

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_i \alpha'_j} &\geq (i) \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m - (i-1) \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m \\ &\geq (i) \sqrt{2 \log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1 - \eta) m - X_{\alpha_i} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_\alpha \geq (i)\sqrt{2\log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1-\eta) m.$$

La première inégalité est vraie, car on a simplement ajouté et retranché

$$(i)\sqrt{2\log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1-\eta) m$$

dans (3.19). La deuxième inégalité suit en considérant (3.18). Enfin l'implication s'obtient en considérant (3.17). Il est donc suffisant, pour montrer la deuxième inégalité, de montrer l'estimation suivante :

$$P \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{2^M} 1_{\{Z_{\alpha_i \alpha'_j} \geq \sqrt{2\log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1-\eta) m\}} \leq 2^{m\delta} \right) \leq \exp(-b(\eta)m^2). \quad (3.20)$$

Afin de simplifier les expressions, on pose $\eta_{ij} = 1_{Z_{\alpha_i \alpha'_j} \geq \sqrt{2\log 2} \left(\frac{K-1}{K^2} \right) (1-\eta) m}$ et $\eta_i = \sum_{j=1}^{2^M} \eta_{ij}$. Il est évident que pour des i différents, les variables η_i sont indépendantes. On a alors pour m suffisamment grand,

$$\begin{aligned} E[\eta_i] &= E \left[\sum_{j=1}^{2^M} \eta_{ij} \right] \\ &= 2^M P \left(Z_{\alpha_i \alpha'_j} \geq \sqrt{2\log 2} (1-\eta) \frac{K-1}{K^2} m \right) \\ &\geq 2^M c \exp \left(-\frac{2(\log 2)M^2 \left(\frac{K-1}{K} \right)^2}{2M} \right) \\ &\geq 2^{cM} \geq 2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La première inégalité découle du Lemme 1.1 avec $\sigma_z^2_{\alpha_i \alpha'_j} = M$. Ainsi, en rappelant que $\mu = 2^{m\delta}$, on a que

$$\begin{aligned} P \left(\sum_{i=1}^{\mu} \eta_i \leq 2^{m\delta} \right) &= P \left(\left(\sum_{i=1}^{\mu} \eta_i \right) - 2 * 2^{m\delta} \leq 2^{m\delta} - 2 * 2^{m\delta} \right) \\ &\leq P \left(\sum_{i=1}^{\mu} (\eta_i - E\eta_i) \leq -2^{m\delta} \right) \text{ par (3.21)} \\ &\leq P \left(\left| \sum_{i=1}^{\mu} (\eta_i - E\eta_i) \right| \geq 2^{m\delta} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

On a évidemment que $\|\eta_i\|_\infty \leq 2^M$, où $\|\eta\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{k > 0 : P(\eta > k) = 0\}$, car η_i est une somme de 2^M variables aléatoires indicatrices. En prenant $K \geq K_0(\beta)$,

$\frac{1-\eta}{K_0} \leq \delta/3$ (η et δ ont été préalablement choisies en fonction de β (voir inégalité (3.16)), et en définissant $\bar{\eta}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\eta_i - E\eta_i)}{\|\eta_i - E\eta_i\|_\infty}$, on obtient que

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{\mu} \eta_i \leq 2^{m\delta}\right) &\leq P\left(\left|\sum_{i=1}^{\mu} \bar{\eta}_i\right| \geq 2^{\frac{2m\delta}{3}}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{2^{\frac{2m\delta}{3}}}{3}\right). \end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue par (3.22) et par le fait que $\|\eta_i - E\eta_i\|_\infty \leq \|\eta_i\|_\infty \leq 2^M$ et $2^{m\delta}2^M = 2^{m\delta}2^{-\frac{1-\eta}{K}m} \geq 2^{m\delta}2^{-\frac{\delta}{3}m} = 2^{2\frac{\delta}{3}m}$.

□

Le résultat précédent, voir Proposition 3.2, était connu depuis longtemps^[2]. En fait, il existe des résultats non publiés pour la convergence du deuxième ordre^[4] :

$$\begin{aligned} P\left(\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \geq m\sqrt{2 \log 2} - \frac{3}{2\sqrt{2 \log 2}} \log m + u\right) &\leq \exp(-cu), \\ P\left(\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \leq m\sqrt{2 \log 2} - \frac{3}{2\sqrt{2 \log 2}} \log m - u\right) &\leq \exp(-cu^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour mieux comprendre d'où vient l'idée de procéder par niveau, il suffit de considérer un arbre avec une hauteur K fixe et le nombre de branchements m variable, c'est-à-dire de considérer les variables aléatoires

$$X_\alpha^{(K)} = \xi_{\alpha_1}^1 + \xi_{\alpha_1\alpha_2}^2 + \dots + \xi_{\alpha_1\dots\alpha_K}^K,$$

où $\alpha_i \in \{1, \dots, 2^{m/K}\}$ et les ξ_i est de loi normale centrée avec variance m/K . Il y aura donc au total 2^m variables aléatoires avec variance m . Ainsi, avec les résultats sur les variables aléatoires i.i.d. (chapitre 2) et en prenant le maximum des ξ_i sur chaque niveau (c'est-à-dire sur $2^{m/K}$ variables aléatoires), on a lorsque $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\frac{m}{K}} \max_{\alpha_1} \xi_{\alpha_1}^1 \rightarrow \sqrt{2 \log 2}$$

et ainsi pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$

$$\frac{1}{\frac{m}{K}} \max_{\alpha_{i+1}} \xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}}^{i+1} \rightarrow \sqrt{2 \log 2}$$

et donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \max_{\alpha} X_{\alpha}^K \geq \sqrt{2 \log 2}, \text{ en probabilité.}$$

La borne supérieure est donnée par le lemme de Slepian.

3.2. LE MODÈLE HARMONIQUE

3.2.1. Définition du modèle harmonique

On considère la version discrète du champs libre gaussien, que l'on dénotera DGFF, en deux dimensions avec bords nuls. Soit $V_N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, N\}^2$ et ∂V_N les points de V_N dont le plus proche voisin se trouve à l'extérieur de V_N :

$$\partial V_N \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V_N \mid \exists y \in V_N^c, |x - y| = 1\}.$$

On notera aussi $\text{int}(V_N) \stackrel{\text{def}}{=} V_N \setminus \partial V_N$.

Le DGFF $\Phi_N = (\phi_x, x \in V_N)$ est un vecteur de variables aléatoires gaussiennes centrées dont la fonction de densité f est donnée par

$$f(\phi_{x_i}, i = \{1, 2, \dots, N^2\}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x_i, x_j \in V_N: |x_i - x_j| = 1} \frac{(\phi_{x_i} - \phi_{x_j})^2}{8}\right), \quad (3.24)$$

où $\phi_{x_i} = 0, \forall x_i \in \partial V_N$ et k est une constante de normalisation pour que f soit une fonction de densité. Par définition de la fonction de densité d'une multinormale, on a que la matrice, intervenant dans l'argument de l'exponentielle de f , est l'inverse de la matrice de covariance Γ du DGFF. En considérant le produit scalaire de Dirichlet défini ci-bas,

Définition 3.6 (Produit scalaire de Dirichlet discret).

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x, y \in B: |x - y| = 1} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)),$$

où B est un ensemble fini de points dans \mathbb{Z}^2 .

on a que

$$\begin{aligned} \langle \phi, \phi \rangle_{\nabla} &= \sum_{x,y \in V_N: |x-y|=1} (\phi_x - \phi_y)^2 \\ &= 8 \sum_{x \in \text{int}(V_N)} (\phi_x \cdot \Delta \phi_x), \end{aligned}$$

où Δ est le Laplacien discret de dimension 2.

Définition 3.7 (Laplacien discret de dimension 2).

$$\Delta f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \frac{1}{4} \sum_{|e|=1} f(x+e),$$

où e est un vecteur unitaire dans \mathbb{Z}^2 .

Ainsi, la fonction de densité f du DGFF Φ_N peut être exprimée par

$$f(\phi_{x_i}, i = \{1, 2, \dots, N^2\}) \stackrel{\text{def}}{=} \left((2\pi)^{\frac{\text{card}(\text{int}(V_N))}{2}} \sqrt{\det(\Delta^{-1})} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x_i \in \text{int}(V_N)} \phi_{x_i} \Delta \phi_{x_i} \right),$$

c'est-à-dire que la matrice de covariance Γ de Φ_N représente en fait l'inverse du laplacien. Ainsi, la matrice de covariance Γ est donnée par la fonction de Green G_N du laplacien discret sur $\text{int}(V_N)$, c'est-à-dire que Φ_N est de loi multinormale dont $\Gamma = (\Delta)^{-1}$. À titre d'exemple, pour Φ_N avec $N = 5$, on a

$$(\Gamma)^{-1} = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \boxed{0} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \boxed{0} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \boxed{0} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \boxed{0} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

et il apparaît bien que cette matrice $3^2 \times 3^2$ correspond au laplacien du DGFF avec bords nuls. En prenant l'inverse de cette matrice, on obtient la matrice de

covariance

$$\Gamma = G_N = \begin{pmatrix} \frac{67}{56} & \frac{11}{28} & \frac{1}{8} & \frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{3}{28} & \frac{1}{8} & \frac{3}{28} & \frac{3}{56} \\ \frac{11}{28} & \frac{37}{28} & \frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{28} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{28} & \frac{67}{56} & \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & \frac{11}{28} & \frac{3}{56} & \frac{3}{28} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{3}{28} & \frac{37}{28} & \frac{1}{2} & \frac{5}{28} & \frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{3}{28} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & \frac{11}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{2} & \frac{37}{28} & \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & \frac{11}{28} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{28} & \frac{3}{56} & \frac{11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{3}{28} & \frac{67}{56} & \frac{11}{28} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{28} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{11}{28} & \frac{37}{28} & \frac{11}{28} \\ \frac{3}{56} & \frac{3}{28} & \frac{1}{8} & \frac{3}{28} & \frac{1}{4} & \frac{11}{28} & \frac{1}{8} & \frac{11}{28} & \frac{67}{56} \end{pmatrix}.$$

En prenant une colonne de Γ (soit $(N - 2)^2$ composantes) et en réorganisant celle-ci sous forme de matrice $(N - 2) \times (N - 2)$, on obtient une représentation de $G_N(x, y)$ de Φ_N , pour x fixé (voir Figure 3.3).

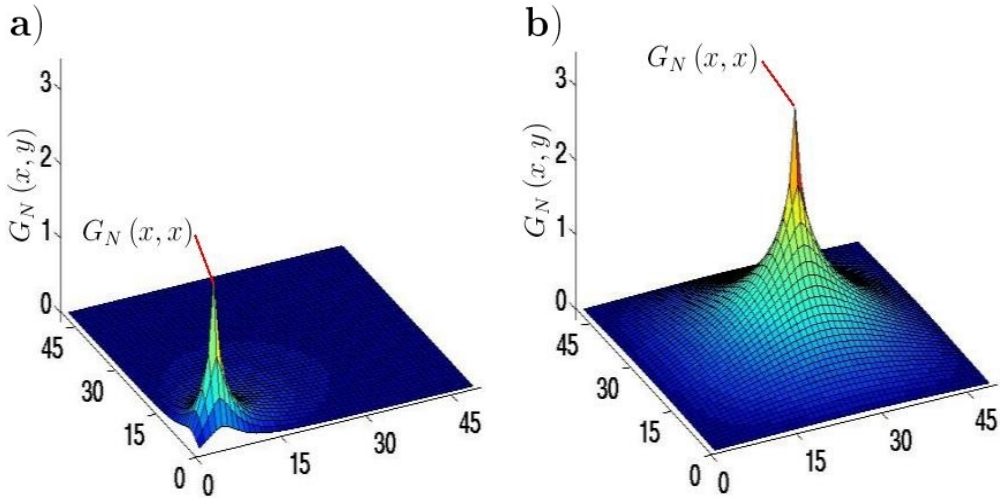


FIGURE 3.3. Schéma représentant la matrice de covariance $G_N(x, y)$, pour x fixé, d'un DGFF Φ_N avec $N = 51$:

a) x près de la frontière. b) x est le point centre.

Pour compléter cette sous-section sur la définition du modèle harmonique, on montre que le DGFF Φ_N est un champ de Markov^[22]. On observe d'abord que la fonction de densité f de Φ_N (voir (3.24)) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} f(\phi_{x_i}, i = \{1, 2, \dots, N^2\}) \\ = \frac{1}{k} \exp(g(\phi_{x_i}, x_i \in B)) \exp(h(\phi_{x_i}, x_i \in B^c \cup \partial B)), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} g(\phi_{x_i} : x_i \in B) &= -\frac{1}{2} \sum_{x_i, x_j \in B: |x_i - x_j| = 1} \frac{(\phi_{x_i} - \phi_{x_j})^2}{8}, \\ h(\phi_{x_i} : x_i \in B^c \cup \partial B) &= -\frac{1}{2} \sum_{x_i, x_j \in B^c \cup \partial B: |x_i - x_j| = 1, x_i \in B^c, x_j \in B^c} \frac{(\phi_{x_i} - \phi_{x_j})^2}{8}. \end{aligned}$$

Un fait important à considérer est que la fonction g ne dépend pas des variables aléatoires qui se trouvent dans B^c tout comme la fonction h ne dépend pas des variables aléatoires qui se trouvent dans $\text{int}(B)$. On note P_N pour la loi de Φ_N . Pour $B \in V_N$, on définit la σ -algèbre $\mathcal{F}_B \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\phi_x : x \in B)$. Ainsi, pour $A \in \mathcal{F}_{\text{int}(B)}$, on a que

$$\begin{aligned} P_N(A | \mathcal{F}_{\partial B \cup B}) \\ = \iint_A \left(\frac{f(\phi_{x_i}, i = \{1, 2, \dots, N^2\})}{\iint_{-\infty}^{\infty} f(\phi_{x_i}, i = \{1, 2, \dots, N^2\}) \prod_{x_i \in \text{int}(B)} d\phi_{x_i}} \right) \prod_{x_i \in \text{int}(B)} d\phi_{x_i} \\ = \iint_A \left(\frac{\exp(g(\phi_{x_i}, x_i \in B))}{\iint_{-\infty}^{\infty} \exp(g(\phi_{x_i}, x_i \in B)) \prod_{x_i \in \text{int}(B)} d\phi_{x_i}} \right) \prod_{x_i \in \text{int}(B)} d\phi_{x_i} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$= P_N(A | \mathcal{F}_{\partial B}). \quad (3.27)$$

La deuxième égalité est par (3.25) et le fait que la fonction h soit indépendante des variables aléatoires dans $\text{int}(B)$. Ainsi, le champ gaussien Φ_N est un champ de Markov.

De plus, en donnant des valeurs constantes aux variables aléatoires qui se trouvent sur la frontière de B , on a que la fonction g est exactement l'argument de l'exponentielle de la fonction de densité d'un DGFF $\Phi_{B, \partial B} = (\phi_x, x \in B)$ tel $(\phi_x, x \in \partial B) = \phi_{\partial B}$, $\phi_{\partial B} \in \mathbb{R}^{\partial B}$. Plus précisément, en notant $P_{B, \partial B}$ pour la loi

de $\Phi_{B,\partial B}$, on a (voir (3.26)) que

$$P_N(\cdot|\mathcal{F}_{\partial B}) = P_{B,\partial B}(\cdot). \quad (3.28)$$

Il est également intéressant de constater, puisque $E[P_N(\cdot, \omega)] = P_N(\cdot)$, que la loi de $\Phi_{B,\partial B}$ est la même que $m + \Phi_B$, où m est le champ moyen des différents $\Phi_{B,\partial B}$ et Φ_B est un DGFF défini sur B avec frontière nulle^[9]. Enfin, il est important de comprendre que la matrice covariance de $\Phi_{B,\partial B}$ est la même que pour un champ Φ_B , soit Δ^{-1} .

3.2.2. Espérance conditionnelle, covariance et marche aléatoire

L'espérance conditionnelle et la covariance du DGFF seront données en fonction d'une marche aléatoire. Dans le cas de la covariance, défini par la fonction de Green G_N du laplacien discret, la définition suivante sera utilisée, soit

$$G_N(x, y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial V_N}} 1_{\{\eta_i=y\}} \right], \quad x, y \in \text{int}(V_N),$$

où $\{\eta_i\}_{i \geq 0}$ est une marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2 commençant en x avec loi \mathbb{P}^x et où $\tau_{\partial V_N}$ est le temps de première entrée dans ∂V_N ($\phi_x = 0$ pour $x \in \partial V_N$). Pour la suite, on écrit \mathbb{P} et \mathbb{E} pour la loi et l'espérance, respectivement, d'une marche aléatoire et de manière équivalente, P_N et E_N pour Φ_N .

L'équivalence entre les deux définitions de G_N se déduit du théorème suivant.

Théorème 3.8 ^([18]).

Soient $A \subset \mathbb{Z}^d$ fini connexe et les fonctions $F : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \text{int}(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors l'unique fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

- (a) $\Delta f(x) = g(x), \quad x \in \text{int}(A),$
- (b) $f(x) = F(x), \quad x \in \partial A,$

est

$$f(x) = \mathbb{E}^x \left[F(\eta_{\tau_{\partial A}}) + \sum_{j=0}^{\tau_{\partial A}-1} g(\eta_j) \right]$$

où \mathbb{E}^x est l'espérance d'une marche aléatoire $\{\eta_j\}_{j \geq 0}$ avec $\eta_0 = x$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.8.

La preuve de ce théorème se réduit à un problème de martingale. Soit $f(x)$ définie par le théorème. Il est facile de montrer que $f(x)$ satisfait les conditions du théorème en considérant que le laplacien discret en fonction d'une marche aléatoire η ($\{\eta_i\}_{i \geq 0}, \eta_0 = x$) est

$$\Delta f(x) = \mathbb{E}^x [f(\eta_0) - f(\eta_1)].$$

Ainsi, pour $x \in \text{int}(A)$, on a

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{\eta_0} \left[F(\eta_{\tau_{\partial A}}) + \sum_{j=0}^{\tau_{\partial A}-1} g(\eta_j) \right] - \mathbb{E}^{\eta_1} \left[F(\eta_{\tau_{\partial A}}) + \sum_{j=0}^{\tau_{\partial A}-1} g(\eta_j) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[g(\eta_0) + \mathbb{E}^{\eta_1} \left[F(\eta_{\tau_{\partial A}}) + \sum_{j=0}^{\tau_{\partial A}-1} g(\eta_j) \right] - \mathbb{E}^{\eta_1} \left[F(\eta_{\tau_{\partial A}}) + \sum_{j=0}^{\tau_{\partial A}-1} g(\eta_j) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x [g(\eta_0)] \\ &= g(x), \end{aligned}$$

et pour $x \in \partial A$, $f(x) = F(x)$. Ainsi, il ne reste qu'à montrer que la solution $f(x)$ est unique. Pour cela, afin d'alléger la notation, posons $\tau_{\partial A} = \tau$ et montrons que pour toute solution $f(x)$, $M_n \stackrel{\text{def}}{=} f(\eta_{n \wedge \tau}) + \sum_{j=0}^{(n-1) \wedge (\tau-1)} \Delta f(\eta_j)$ est une martingale. Soit $B_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau > n\}$. Alors on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} [M_{n+1} 1_{B_n} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E} [M_{n+1} 1_{B_n^c} | \mathcal{F}_n] \\ &= 1_{B_n} \mathbb{E} \left[f(\eta_{n+1}) + \sum_{j=0}^n \Delta f(\eta_j) | \mathcal{F}_n \right] + \mathbb{E} [M_n 1_{B_n^c} | \mathcal{F}_n] \\ &= 1_{B_n} \mathbb{E} \left[f(\eta_n) - \Delta f(\eta_n) + \sum_{j=0}^n \Delta f(\eta_j) | \mathcal{F}_n \right] + M_n 1_{B_n^c} \\ &= 1_{B_n} \left(f(\eta_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta f(\eta_j) \right) + M_n 1_{B_n^c} \\ &= M_n. \end{aligned}$$

La troisième égalité s'obtient en considérant que

$$\mathbb{E}[\Delta f(\eta_n) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(\eta_n) - f(\eta_{n+1}) | \mathcal{F}_n].$$

Ainsi, on a que $f(x) = \mathbb{E}^x[M_0]$. De plus, par le Théorème 1.4.4 de [18], on a que $\mathbb{E}^x [|M_n| 1_{B_n}] \leq (\|f\|_\infty + n \|g\|_\infty) P^x(\tau \geq n) \rightarrow 0$. Ainsi, par le théorème d'arrêt de Doob, on a que

$$\mathbb{E}^x[M_0] = E^x[M_\tau].$$

Enfin, avec $\Delta f(x) = g(x)$, on a pour toute solution f que l'unique représentation est

$$f(x) = \mathbb{E}^x[F(\eta_\tau) + \sum_{j=0}^{\tau-1} g(\eta_j)].$$

□

Remarquez que le théorème précédent est une version modifiée du Théorème 1.4.6 que l'on trouve dans [18]. Dans ce dernier, la frontière extérieure est utilisée comme définition de ∂A et le laplacien discret utilisé est égal à celui utilisé dans ce mémoire multiplié par -1 . La preuve de la martingale est fortement inspirée du Théorème 1.4.1 de la même référence.

Ainsi, en posant $A = V_N$ dans le théorème précédent et pour $y \in \text{int}(V_N)$,

$$\begin{aligned} g_y : \text{int}(V_N) &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\rightarrow 1_{\{x=y\}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_y : \partial A &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

on a que l'unique solution $f_y(x)$, que l'on obtient en terme d'une marche aléatoire, correspond bien à la fonction de Green $G_N(x, y)$, pour $x, y \in \text{int}(V_N)$.

Enfin, on retient de ce qui précède que Φ_N est de loi multinormale dont la matrice de covariance est donnée par la fonction de Green du laplacien discret en fonction d'une marche aléatoire, précisément que la covariance du DGFF est

$$G_N(x, y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial V_N}} 1_{\{\eta_i=y\}} \right], \quad x, y \in \text{int}(V_N). \quad (3.29)$$

Pour la suite, on considèrera des sous-ensembles de V_N . Certaines décompositions et définitions standards seront nécessaires. En généralisant un peu, considérons une boîte quelconque $B \in \mathbb{Z}^2$ et le $DGFF$ associé $\Phi_B = (\phi_x, x \in \text{int}(B))$, comme étant le $DGFF$ avec covariance

$$\text{cov}_B(\phi_x, \phi_y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial B}} 1_{\{\eta_i=y\}} \right].$$

On définit la covariance conditionnelle

$$\text{cov}_{\mathcal{F}_A}(\phi_x, \phi_y) = \mathbb{E}^x \left[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial B} \wedge \tau_A} 1_{\{\eta_i=y\}} \right],$$

où $\mathcal{F}_A \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\phi_x : x \in A)$. Ainsi, pour $x, y \in A \subset B$, on a $\text{cov}_{\mathcal{F}_A}(\phi_x, \phi_y) = \text{cov}_A(\phi_x, \phi_y)$, qui n'est pas un aléa. En considérant que la variance conditionnelle d'une variable aléatoire X selon la σ -algèbre \mathcal{F} , notée ($\text{var}_{\mathcal{F}}(X)$), est donnée par $\text{var}_{\mathcal{F}}(X) = E[X^2|\mathcal{F}] - E[X|\mathcal{F}]^2$, on a que

$$\begin{aligned} E[\text{var}_{\mathcal{F}}(X)] &= E[E[X^2|\mathcal{F}] - E[X|\mathcal{F}]^2] \\ &= E[E[X^2|\mathcal{F}]] - E[E[X|\mathcal{F}]^2] \\ &= E[X^2] - E[E[X|\mathcal{F}]^2] \end{aligned} \tag{3.30}$$

et que

$$\begin{aligned} \text{var}(E[X|\mathcal{F}]) &= E[E[X|\mathcal{F}]^2] - E[E[X|\mathcal{F}]]^2 \\ &= E[E[X|\mathcal{F}]^2] - E[E[X|\mathcal{F}]]^2 \\ &= E[E[X|\mathcal{F}]^2] - E[X]^2. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ainsi, en additionnant (3.30) et (3.31) et en réarrangeant les termes, on obtient que

$$\text{var}(X) = E[\text{var}_{\mathcal{F}}(X)] + \text{var}(E[X|\mathcal{F}]).$$

En prenant l'espérance sur C , $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\partial B}$ et $X = \phi_x$, on obtient la décomposition standard suivante

$$\text{var}_C(\phi_x) = \text{var}_C(E_C[\phi_x|\mathcal{F}_{\partial B}]) + E_C[\text{var}_{\mathcal{F}_{\partial B}}(\phi_x)].$$

Par définition de la covariance conditionnelle et par le fait que $B \subset C$, on a que

$$\text{var}_C(\phi_x) = \text{var}_C(E_C[\phi_x | \mathcal{F}_{\partial B}]) + \text{var}_B(\phi_x). \quad (3.32)$$

Pour définir formellement l'espérance conditionnelle en fonction d'une marche aléatoire, on considère d'abord le cas de la projection d'un vecteur x sur un vecteur y , donnée par

$$x_{\text{proj } y} = \frac{(x, y)y}{(y, y)^2}.$$

En remplaçant $x \in B$ par ϕ_x et $y \in \partial B$ par ϕ_y et en considérant que les ϕ sont centrées, on a que

$$(\phi_x)_{\text{proj } \phi_y} = \frac{\text{cov}(\phi_x, \phi_y)\phi_y}{\text{var}(\phi_x)^2}.$$

Or $\text{cov}_B(\phi_x, \phi_y) = \mathbb{E}^x[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial B}} 1_{\eta_i=y}] = \mathbb{P}^x(\eta_{\tau_{\partial B}} = y)$ lorsque $y \in \partial B$ et $\text{var}_B(\phi_y) = \mathbb{E}^y[\sum_{i=0}^{\tau_{\partial B}} 1_{\eta_i=y}] = 1$, car y est dans ∂B . Ainsi, on peut écrire l'espérance conditionnelle en terme d'une marche aléatoire de la façon suivante pour $x \in B \subset C$,

$$E_C[\phi_x | \mathcal{F}_{\partial B \cup B^c}] = \sum_{y \in \partial B} \mathbb{P}^x(\eta_{\tau_{\partial B}} = y) \phi_y.$$

La covariance dans B (et non dans C) a été utilisée car, pour $x \in B \subset C$, on a $P_C(\cdot | \mathcal{F}_{\partial B}) = P_{B, \partial B}(\cdot)$, voir (3.28). Par la propriété de Markov, on a que

$$E_C[\phi_x | \mathcal{F}_{\partial B}] = \sum_{y \in \partial B} \mathbb{P}^x(\eta_{\tau_{\partial B}} = y) \phi_y. \quad (3.33)$$

Cette forme permet de conclure que l'espérance conditionnelle est une variable aléatoire de loi normale centrée. De plus, on s'aperçoit que l'espérance conditionnelle est en fait une valeur moyenne pondérée des ϕ_y pris sur la frontière de la boîte B .

Pour la suite, on supposera toujours que N est impair afin d'avoir un point x_N (notée aussi x_{V_N}) dans le centre de V_N . Ainsi, il sera noté

$$\sigma^2(N, y) = \text{var}(\phi_y),$$

$$\sigma^2(N, y) = 0 \text{ si } y \notin \text{int}(V_N),$$

$$\sigma^2(N) = \text{var}(\phi_{x_N}).$$

En définissant

$$\phi_B \stackrel{\text{def}}{=} E_{V_N} [\phi_{x_B} | \mathcal{F}_{\partial B}], \quad (3.34)$$

pour $B \in V_N$ une boîte $n \times n$ et x_B le centre de la boîte B , on obtient par (3.32), que

$$\begin{aligned} \text{var}_{V_N}(\phi_{x_B}) &= \sigma^2(N, x_B) \\ &= \text{var}_{V_N}(\phi_B) + \sigma^2(n). \end{aligned}$$

Si B est dans le centre de V_N , on a alors que

$$\text{var}_{V_N}(\phi_B) = \sigma^2(N) - \sigma^2(n). \quad (3.35)$$

3.2.3. Bornes pour la variance

Il est bien connu que les termes de la diagonale de la fonction de Green, soit $G_N(x, x)$, diverge de façon logarithmique pour x assez loin de la frontière. Ce résultat est concrètement exprimé par le lemme suivant.

Lemme 3.9 ([5]).

Soit $V_N^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V_N : \text{dist}(x, V_N^c) \geq \delta N\}$. Alors

$$(a) \quad \sup_{y \in V_N^0} \sigma^2(N, y) \leq \frac{2}{\pi} \log N + c.$$

$$(b) \quad \text{Pour } \delta \in (0, 1/2)$$

$$\sup_{y \in V_N^\delta} \left| \sigma^2(N, y) - \frac{2}{\pi} \log N \right| \leq c(\delta).$$

DÉMONSTRATION.

Soient

$$d(x, N) = \min\{\text{dist}(x, y) : y \in \partial V_N\},$$

$$D(x, N) = \max\{\text{dist}(x, y) : y \in \partial V_N\}$$

et

$\bar{G}_N(x, y)$: La fonction de Green du laplacien discret sur la boule $B_N(x)$ centrée en x et de rayon N .

Alors par la représentation en fonction d'une marche aléatoire (voir (3.29)), on a

$$\bar{G}_{d(x,N)}(x, x) \leq G_N(x, x) \leq \bar{G}_{D(x,N)}(x, x).$$

La conclusion découle du résultat du Théorème 1.6.6 de [18] suivant,

$$\bar{G}_N(x, x) = \frac{2}{\pi} \log N + c + O(N^{-1}).$$

En effet pour montrer la partie a), il suffit de voir que $D(x, N) \leq \sqrt{2}N$. Pour la partie b), il suffit de voir que $d(x, N) \geq \delta N$ (d'où $c(\delta)$). \square

En fait, le Théorème 1.6.7 de [18] donne, après avoir égalisé le nombre de variables aléatoires entre les modèles harmonique et hiérarchique (en posant $N^2 = 2^m$), que la covariance pour Φ_N en fonction de la hauteur m de l'arbre binaire est donnée par

$$G_N(x, y) \sim \frac{2}{\pi} \left(m \frac{\log 2}{2} - \log |y - x| \right).$$

Ainsi, en rappelant que la covariance du modèle hiérarchique pour $x, y \in T_m$ est $cov(x, y) = \gamma(m - d_H(x, y))$, la covariance du modèle harmonique s'obtient donc en changeant la distance hiérarchique d_H par la distance euclidienne et un changement d'échelle (échelle logarithmique), qui tient compte du nombre de variables aléatoires dans les deux modèles.

3.2.4. Convergence du premier ordre du DGFF

La preuve du théorème suivant, analogue au théorème de Biggins (voir Théorème 3.1) permettra de conclure que la convergence du premier ordre du maximum du DGFF est la même que lorsque les variables aléatoires sont indépendantes.

Théorème 3.10.

Soient $(\phi_x, x \in V_N)$ et $M_N = \max_{x \in V_N} \phi_x$. On a

$$M_N / \log(N) \rightarrow 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ en probabilité.}$$

Remarquez que la constante $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ est la même que pour le modèle i.i.d. ayant N^2 variables aléatoires avec une variance $\frac{1}{\pi} \log N^2$. Pour démontrer le théorème, on démontre dans un premier temps la proposition ci-dessous, qui se trouve être

l'analogie de la Proposition 3.2.

Proposition 3.11 ^([5]).

Soient $(\phi_x, x \in V_N)$ et $M_N = \max_{x \in V_N} \phi_x$. Pour tout $\eta > 0$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N \left(\max_{x \in V_N} \phi_x \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N \right) = 1.$$

DÉMONSTRATION.

Cette proposition est une conséquence directe du Lemme 3.9. On a

$$\begin{aligned} P_N \left(\max_{x \in V_N} \phi_x \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N) \right) &\leq N^2 \max_{x \in V_N} P_N \left(\phi_x \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N) \right) \\ &\leq N^2 \frac{\sqrt{\max_{x \in V_N} G_N(x, x)}}{\sqrt{2\pi} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N)} \exp \left[-\frac{\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N) \right)^2}{2 \max_{x \in V_N} G_N(x, x)} \right] \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue en donnant à l'ensemble des valeurs la probabilité maximum d'être supérieur à $2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N)$. La deuxième inégalité découle du Lemme 1.1. □

En démontrant le Théorème (3.12) suivant, analogue à la Proposition 3.3, on aura démontré le Théorème 3.10.

Théorème 3.12 ^([5]).

Soit $V_N^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V_N : \text{dist}(x, V_N^c) \geq \delta N\}$. Pour $\eta > 0$ et $\delta \in [0, 1/2)$, il existe $c = c(\delta, \eta) > 0$ tel que

$$P_N \left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \eta \right) \log N \right) \leq \exp \left(-c(\log N)^2 \right),$$

si $N \geq N_0(\delta, \eta)$.

Pour la suite, on pose $\alpha \in (0, 1)$ et on considère que les sous-boîtes contenues dans

V_N auront N^α comme largeur, que l'on notera α -boîtes. Ainsi, on recouvre V_N^δ par ces α -boîtes, avec $\delta \in [0, 1/2)$. Afin de simplifier la notation, on pose $\delta \stackrel{\text{def}}{=} (1/2) - \bar{\delta}$. On suppose toujours que N^α est impair (afin que chaque α -boîte ait un point au centre) et que $N^\alpha - 1$ divise l'entier $2\bar{\delta}N - 1$. Pour $i = (i_1, i_2)$, $1 \leq i_1, i_2 \leq \frac{2\bar{\delta}-1}{N^\alpha-1}$, on considère les α -boîtes

$$B_i^\alpha = [(i_1 - 1)(N^\alpha - 1) + 1, i_1(N^\alpha - 1) + 1] \\ \times [(i_2 - 1)(N^\alpha - 1) + 1, i_2(N^\alpha - 1) + 1].$$

Les ensembles V_N , V_N^δ et les α -boîtes B_i^α sont représentés dans la Figure 3.4 (voir page suivante). On remarque que dans chaque B_i^α , il y a $N^{2\alpha}$ points de V_N . On définit également l'union de l'ensemble des points frontières de chaque B_i^α par

$$\bigcup_i \partial B_i^\alpha = \Delta_N^\alpha.$$

On dénote par Π_α , l'ensemble des α -boîtes contenues dans V_N^δ et on définit la σ -algèbre \mathcal{F}_α par

$$\mathcal{F}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\phi_x : x \in \Delta_N^\alpha). \quad (3.36)$$

Différentes échelles $\alpha_i, 1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_K > 0$ seront considérées et les hypothèses mentionnées plutôt seront toujours valides. Pour la suite, toutes les inégalités seront valides pour N suffisamment grand. Afin de montrer le Théorème 3.12, on a besoin de montrer qu'il y a suffisamment de α_1 -boîtes dans lesquelles ϕ_B (voir (3.34)) est positif (par analogie au Lemme 3.4 pour l'arbre binaire). Le lemme suivant garantit ce fait.

Lemme 3.13.

Soit $\alpha \in (1/2, 1)$, alors il existe $\kappa(\alpha)$, $a(\delta, \alpha) > 0$ tels que

$$P(\text{card}\{B \in \Pi_\alpha : \phi_B \geq 0\} \leq N^\kappa) \leq \exp[-a(\log N)^2].$$

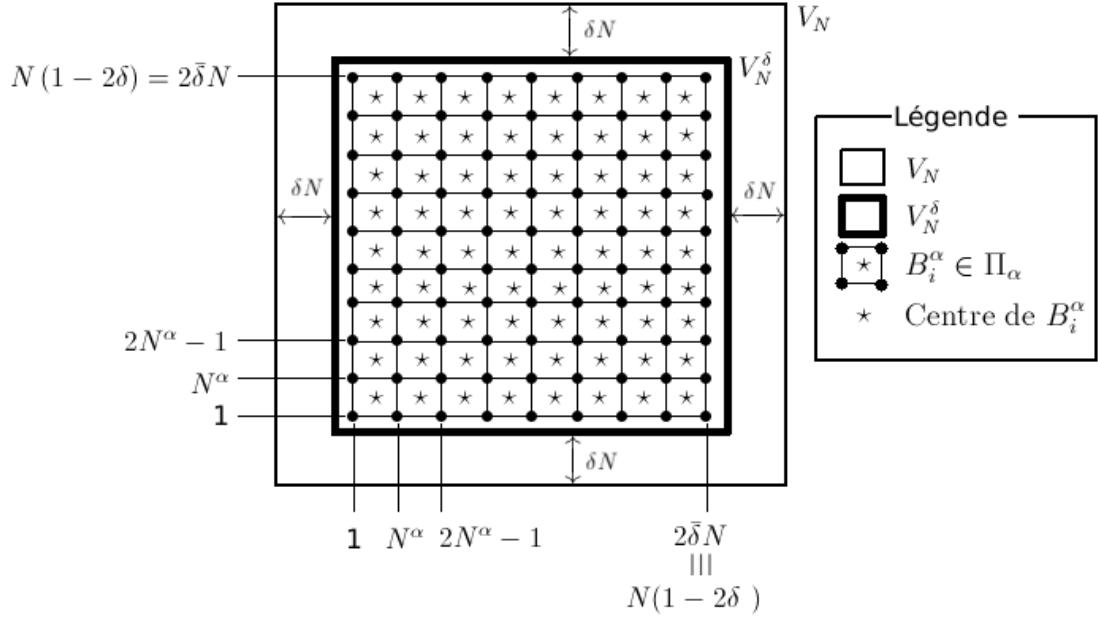


FIGURE 3.4. Représentation de V_N , V_N^δ et des α -boîtes $B_i^\alpha \in \Pi_\alpha$.

DÉMONSTRATION.

Afin de simplifier la notation, on pose $\alpha' = (1 + \alpha)/2$ et $g = \frac{2}{\pi}$. Considérons

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ B \in \Pi_{\alpha'} : \phi_B \geq -\frac{(1 - \alpha')\sqrt{g} \log N}{2} \right\}$$

et

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ |\Lambda| \geq N^{(1-\alpha')} \}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(A^c, \max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \leq (\log N)^2) + P(A^c, \max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B > (\log N)^2) \\ &\leq P(A^c, \max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \leq (\log N)^2) + P(\max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B > (\log N)^2). \end{aligned}$$

Or, par définition de ϕ_B (voir (3.33) à la page 50), on a

$$\begin{aligned} P\left(\max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B > (\log N)^2\right) &= P\left(\max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \left(\sum_{y \in \partial B} \mathbb{P}^{x_B}(\eta_{\partial B} = y) \phi_y\right) > (\log N)^2\right) \\ &\leq P(\max_{x \in V_N} \phi_x > (\log N)^2) \\ &\leq N^2 \max_{x \in V_N} P(\phi_x > (\log N)^2) \\ &\leq N^2 \frac{\exp\left(-\frac{(\log N)^4}{2\sigma^2(N, \phi_x)}\right)}{(\log N)^2}. \end{aligned}$$

La première inégalité découle du fait que ϕ_B est en fait une valeur moyenne des ϕ_x pris sur la frontière de la boîte B . Ainsi, le maximum des moyennes sur toutes les boîtes est de loin inférieur au maximum de l'ensemble des points de V_N , d'où la première inégalité. La troisième inégalité est obtenue par l'estimé gaussien standard (Lemme 1.1). Avec le Lemme 3.9, on a que

$$\sup_{x \in V_N^\delta} \sigma^2(N, \phi_x) \leq g \log N + c,$$

et donc que

$$\begin{aligned} P(\max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B > (\log N)^2) &\leq N^2 \frac{\exp(-\frac{(\log N)^4}{2(g \log N + c)})}{(\log N)^2} \\ &\leq \exp(-c(\log N)^3). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Maintenant, sur $\{A^c, \max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \leq (\log N)^2\}$, on a $|\Pi_{\alpha'}|^{-1} = \left(\frac{2\bar{\delta}N-1}{N^{\alpha'}-1}\right)^{-2}$, $|\Lambda| < N^{1-\alpha'}$, $\phi_{B \in \Lambda} < (\log N)^2$ et $\phi_{B \in \Lambda^c} < -\frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} |\Pi_{\alpha'}|^{-1} \sum_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B &= \left(\frac{2\bar{\delta}N-1}{N^{\alpha'}-1}\right)^{-2} \left(\sum_{B \in \Lambda, B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B + \sum_{B \in \Lambda^c, B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \right) \\ &\leq \left(\frac{2\bar{\delta}N-1}{N^{\alpha'}-1}\right)^{-2} \left(N^{1-\alpha'} (\log N)^2 + (|\Pi_{\alpha'}| - N^{1-\alpha'}) \left(-\frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{2}\right) \right) \\ &= -\frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{2} + \left(\frac{2\bar{\delta}N-1}{N^{\alpha'}-1}\right)^{-2} N^{1-\alpha'} \left((\log N)^2 + \frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{2} \right) \\ &\leq -\frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant le lemme 13 de [5], on a que

$$\begin{aligned} P\left(A^c, \max_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \leq (\log N)^2\right) &\leq P\left(|\Pi_{\alpha'}|^{-1} \sum_{B \in \Pi_{\alpha'}} \phi_B \leq -\frac{(1-\alpha')\sqrt{g} \log N}{3}\right) \\ &\leq \exp(-c(\log N)^2), \text{ par le Lemme 1.1,} \end{aligned}$$

et avec (3.37), que

$$P(A^c) \leq \exp(-c(\log N)^2). \quad (3.38)$$

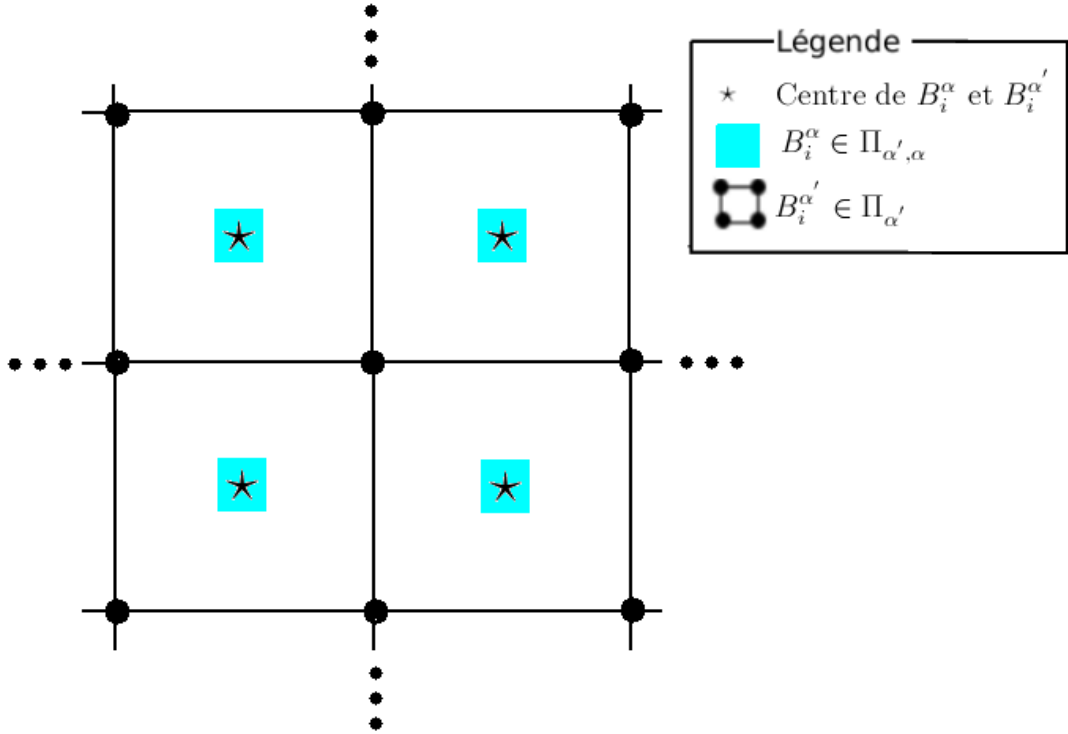


FIGURE 3.5. Représentation des boîtes B_i^α de $\Pi_{\alpha', \alpha}$ et de $B_i^{\alpha'}$ de $\Pi_{\alpha'}$

Maintenant, pour chaque α' -boîte, on considère la α -boîte dont le centre coïncide avec la α' -boîte choisie. L'union de ces α -boîtes est notée $\Pi_{\alpha', \alpha}$ (voir la Figure 3.5, page suivante). Considérons maintenant

$$\begin{aligned} P(\text{card}\{B \in \Pi_\alpha : \phi_B \geq 0\} \leq N^\kappa) &\leq P(\text{card}\{B \in \Pi_{\alpha', \alpha} : \phi_B \geq 0\} \leq N^\kappa) \\ &\leq E\left[P(\text{card}\{B \in \Pi_{\alpha', \alpha} : \phi_B \geq 0\} \leq N^\kappa | \mathcal{F}_{\alpha'}), A\right] + P(A^c). \end{aligned}$$

La première inégalité s'obtient en considérant qu'il y a beaucoup plus de α -boîtes dans Π_α que dans $\Pi_{\alpha', \alpha}$. En choisissant $\kappa < 1 - \alpha'$, on a sur A qu'il y a $N^{1-\alpha'}$ α' -boîtes qui satisfont $\phi_{B'} \geq -\frac{(1-\alpha')}{2}\sqrt{g}\log N$. Évidemment, $\phi_{B'} = E[\phi_B | \mathcal{F}_{\alpha'}]$ lorsque B est une α -boîte qui a le même centre que B' . En effet, pour $x \in B \subset B'$, on a

$$\begin{aligned} \phi_{B'} &= E[\phi_{x_{B'}} | \mathcal{F}_{\partial B'}] \\ &= E[\phi_{x_{B'}} | \mathcal{F}_{\alpha'}] \\ &= E[\phi_{x_B} | \mathcal{F}_{\alpha'}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E [E[\phi_{x_B} | \mathcal{F}_{\partial B^c \cup \partial B}] | \mathcal{F}_{\alpha'}] \\
&= E [E[\phi_{x_B} | \mathcal{F}_{\partial B}] | \mathcal{F}_{\alpha'}] \\
&= E [\phi_B | \mathcal{F}_{\alpha'}].
\end{aligned}$$

La première égalité est par définition de l'espérance conditionnelle. La deuxième égalité s'obtient en considérant que $\partial B' \subset \Pi_{\alpha'}$ et la propriété de Markov du DGFF. La troisième égalité découle du fait que la boîte B est centrée en B' et enfin la quatrième découle du fait que $\mathcal{F}_{\alpha'} \subset \mathcal{F}_{B^c \cup \partial B}$. On a donc $\phi_{B'} = E[\phi_B | \mathcal{F}_{\alpha'}]$.

Conditionnellement à $\mathcal{F}_{\alpha'}$, les variables $\{\phi_B - \phi_{B'}\}_{B' \in \Pi_{\alpha'}}$ seront donc i.i.d. gaussiennes centrées avec une variance conditionnelle donnée par $\text{var}_{B'}(\phi_B)$. En effet, on obtient une gaussienne par définition même de ϕ_B . La moyenne est évidemment 0, car $\phi_{B'} = E[\phi_B | \mathcal{F}_{\alpha'}]$. D'autre part, pour $A' \neq B'$,

$$\begin{aligned}
E[(\phi_B - \phi_{B'}) (\phi_A - \phi_{A'}) | \mathcal{F}_{\alpha'}] &= E[(\phi_B - \phi_{B'}) \phi_A | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{A'} E[(\phi_B - \phi_{B'}) | \mathcal{F}_{\alpha'}] \\
&= E[\phi_B \phi_A | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{B'} E[\phi_A | \mathcal{F}_{\alpha'}] \\
&= E[\phi_A E[\phi_B | \mathcal{F}_{B'^c \cup \partial B'}] | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{B'} \phi_{A'} \\
&= E[\phi_A E[\phi_B | \mathcal{F}_{\partial B'}] | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{B'} \phi_{A'} \\
&= E[\phi_B | \mathcal{F}_{\partial B'}] E[\phi_A | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{B'} \phi_{A'} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'indépendance. La troisième égalité découle de l'identité

$$E[E[\phi_A \phi_B | \mathcal{F}_{B'^c \cup \partial B'}] | \mathcal{F}_{\alpha'}] = E[\phi_A \phi_B | \mathcal{F}_{\alpha'}]$$

et du fait que $\phi_A \in \mathcal{F}_{B'^c \cup \partial B'}$. Pour $A = B$,

$$\begin{aligned}
E[(\phi_B - \phi_{B'})^2 | \mathcal{F}_{\alpha'}] &= E[\phi_B^2 | \mathcal{F}_{\alpha'}] - \phi_{B'}^2 \\
&= \text{var}_{\mathcal{F}_{\alpha'}}(\phi_B).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Puisque $B \subset B'$, on a finalement que

$$\text{var}_{\mathcal{F}_{\alpha'}}(\phi_B - \phi_{B'}) = \text{var}_{B'}(\phi_B). \tag{3.40}$$

En considérant (3.35) et le Lemme 3.9, on a que

$$\begin{aligned} \text{var}_{B'}(\phi_B) &= \sigma^2(N^{\alpha'}) - \sigma^2(N^\alpha) \\ &= g(\alpha' - \alpha) \log N + c. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ainsi, sur A (défini au début de la preuve par $A \stackrel{\text{def}}{=} \{|\Lambda| \geq N^{(1-\alpha')}\}$), on a que

$$\begin{aligned} P(\text{card}\{B \in \Pi_{\alpha', \alpha} : \phi_B \geq 0\}) &\leq N^\kappa |\mathcal{F}_{\alpha'}| \\ &= P(\text{card}\{B \in \Pi_{\alpha', \alpha} : \phi_B - \phi_{B'} \geq -\phi_{B'}\}) \leq N^\kappa |\mathcal{F}_{\alpha'}| \\ &\leq P\left(\text{card}\left\{B \in \Pi_{\alpha', \alpha} : \phi_B - \phi_{B'} \geq \frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N\right\} \leq N^\kappa |\mathcal{F}_{\alpha'}|\right) \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} \mathbf{1}_{\{\xi_i \geq \frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N\}} \leq N^\kappa\right). \end{aligned}$$

On a la première inégalité, car dans A , $\phi_{B'} \geq -\frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N$. Les $\xi_i = E[\phi_B - \phi_{B'} | \mathcal{F}_{\alpha'}]$ sont bien évidemment indépendantes et gaussiennes centrées avec une variance $\text{var}_{B'}(\phi_B)$. Ainsi, par le lemme sur l'estimé d'une gaussienne standard (voir Lemme 1.1), on a que

$$\begin{aligned} &P\left(\xi_i \geq \frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{\frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N} - \frac{g(\alpha' - \alpha) \log N}{\left(\frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\right)^3}\right) \exp\left(-\frac{\left(\frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\right)^2}{2(g(\alpha' - \alpha) \log N)}\right) \\ &= O(1/\log N) \exp\left(-\frac{\left(\frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\right)^2}{2(g(1-\alpha') \log N)}\right) \\ &= O(1/\log N) \exp\left(-\frac{(1-\alpha') \log N}{4}\right) \\ &= O(1/\log N) N^{(1-\alpha')(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} \frac{1}{N^{(1-\alpha')/3}} \\ &\geq N^{-(1-\alpha')/3}. \end{aligned}$$

Donc en posant $\theta_i = 1_{\{\xi_i \geq \frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\}}$ et $\kappa = \frac{1-\alpha'}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
P \left(\sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} 1_{\{\xi_i \geq \frac{1-\alpha'}{2} \sqrt{g} \log N\}} \leq N^\kappa \right) &= P \left(\sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} (\theta_i - E[\theta_i]) \leq N^\kappa - N^{1-\alpha'} E[\theta_i] \right) \\
&\leq P \left(\sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} (\theta_i - E[\theta_i]) \leq N^{\frac{1-\alpha'}{2}} - N^{1-\alpha'} N^{-\frac{(1-\alpha')}{3}} \right) \\
&\leq P \left(\sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} (\theta_i - E[\theta_i]) \leq -\frac{N^{\frac{2}{3}(1-\alpha')}}{2} \right) \\
&\leq P \left(\left| \sum_{i=1}^{N^{1-\alpha'}} (\theta_i - E[\theta_i]) \right| \geq \frac{N^{\frac{2}{3}(1-\alpha')}}{2} \right).
\end{aligned}$$

La première inégalité tient, car $E[\theta_i] \geq N^{-\frac{1-\alpha'}{2}}$. La deuxième inégalité tient, car pour N suffisamment grand, $\frac{N^{\frac{2}{3}(1-\alpha')}}{2} \geq N^{\frac{1-\alpha'}{2}}$. Et en appliquant l'estimé sur la valeur absolue d'une somme de variables aléatoires i.i.d. (voir le Lemme 1.3) et par (3.38), on trouve que

$$P(\text{card}\{B \in \Pi_\alpha : \phi_B \geq 0\} \leq N^\kappa) \leq \exp \left(-cN^{\frac{(1-\alpha')}{3}} \right) + \exp \left(-c(\log N)^2 \right).$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.12.

Afin d'alléger la notation, on pose $g = \frac{2}{\pi}$. On fixe $1/2 < \alpha < 1$ et on prend $\kappa = \kappa(\alpha)$, $a = a(\delta, \alpha)$ selon le Lemme 3.13. On prend $K \in \mathbb{N}$ et on pose $\alpha_i = \frac{K-i+1}{K}\alpha$, $1 \leq i \leq K$. On définit récursivement un sous-ensemble (Γ_i) de toutes les α -boîtes. On pose d'abord

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{\alpha_1}.$$

Considérant que Γ_i a été défini pour $1 \leq i \leq K-1$, on prend une boîte $B \in \Pi_{\alpha_i}$ et on retient les points contenus dans le carré ayant le même centre que B et de largeur $\frac{N^{\alpha_i-1}}{2}$. On note tous les α_{i+1} -boîtes contenues dans ce carré par $\Gamma_{B, \alpha_{i+1}}$.

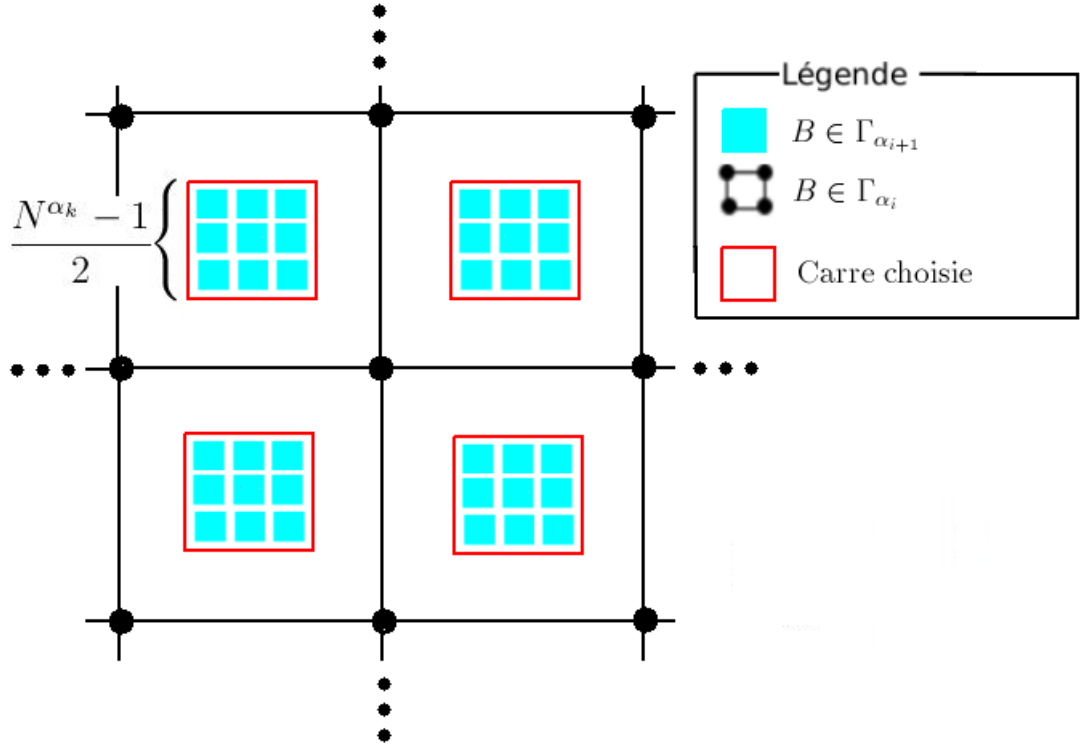


FIGURE 3.6. Représentation des boîtes B de Γ_{α_i} . $\Gamma_{\alpha_{i+1}} = \bigcup_{B \in \Gamma_{\alpha_i}} \Gamma_{B, \alpha_{i+1}}$

Ainsi, toutes les α_{i+1} -boîtes de $\Gamma_{B, \alpha_{i+1}}$ n'ont pas de frontière commune avec la boîte B , qui les contient (voir la Figure 3.6). On pose alors

$$\Gamma_{\alpha_{i+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{B \in \Gamma_{\alpha_i}} \Gamma_{B, \alpha_{i+1}}.$$

On définit également, par analogie aux événements (3.10) et (3.11) définis dans la Proposition 3.3 du modèle hiérarchique (voir page 36), les suites d'évènements $C_1, \dots, C_K, C_k \in \mathcal{F}_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq K$, de la façon suivante :

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{card} \{B \in \Gamma_{\alpha_1} : \phi_B \geq 0\} \geq N^\kappa\}$$

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{card} \left\{ \underline{B}^{(k)} : \phi_{B_i} \geq (i-1) \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N, 1 \leq i \leq k \right\} \geq N^\kappa \right\}.$$

Par le Lemme 3.13, on a que

$$P(C_1) \geq 1 - \exp \left[-a(\delta, \alpha) (\log N)^2 \right]. \quad (3.42)$$

On définit la σ -algèbre $\tilde{\mathcal{F}}_k$ par

$$\tilde{\mathcal{F}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(\phi_x : x \in \bigcup_{B \in \Pi_{\alpha_k}} \partial B \right). \quad (3.43)$$

Ainsi, par construction, on a que $\tilde{\mathcal{F}}_1 \subset \tilde{\mathcal{F}}_2 \subset \dots \subset \tilde{\mathcal{F}}_K$. Sur C_k , on a au moins N^κ séquences $\underline{B}^{(k)} = (B_1, \dots, B_k)$, $B_i \in \Gamma_{\alpha_i}$, qui sont emboîtées et qui satisfont $\phi_{B_1} \geq 0$, $\phi_{B_i} \geq (i-1)\alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N$, $2 \leq i \leq k$. On dénote ces séquences par

$$\underline{B}_j^{(k)} = (B_{j1}, \dots, B_{jk}), \quad 1 \leq j \leq N^\kappa.$$

On utilise

$$\begin{aligned} P(C_{k+1}^c) &= E \left[P(C_{k+1}^c | \tilde{\mathcal{F}}_k) \right] \\ &= E \left[P(C_{k+1}^c | \tilde{\mathcal{F}}_k); C_k \right] + E \left[P(C_{k+1}^c | \tilde{\mathcal{F}}_k); C_k^c \right] \\ &\leq E \left[P(C_{k+1}^c | \tilde{\mathcal{F}}_k); C_k \right] + P(C_k^c). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pour $B \in \Gamma_{\alpha_{k+1}}$, $B_{jk} \in \Gamma_{\alpha_k}$ et $B \subset B_{jk}$, on constate que si

$$\begin{aligned} \phi_B - \phi_{B_{jk}} &\geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N \\ &= k\alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N - (k-1)\alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N, \end{aligned}$$

alors

$$\phi_B \geq k\alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N.$$

Ainsi, sur C_k , on a

$$\begin{aligned} C_{k+1}^c &\subset \left\{ \sum_{j=1}^{N^\kappa} \sum_{B \in \Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}} \mathbf{1}_{\{\phi_B - \phi_{B_{jk}} \geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N\}} \leq N^\kappa \right\} \\ &\subset \left\{ \sum_{j=1}^{N^\kappa} \frac{1}{|\Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}|} \sum_{B \in \Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}} \mathbf{1}_{\{\phi_B - \phi_{B_{jk}} \geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N\}} \leq \frac{4N^\kappa}{N^{2\alpha/K} - 2} \right\}. \end{aligned}$$

La dernière inclusion est justifiée par l'inégalité $\frac{1}{|\Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}|} \leq \frac{4}{N^{2\alpha/K} - 2}$. Afin d'alléger la notation, on écrit

$$\xi_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}|} \sum_{B \in \Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}} \mathbf{1}_{\{\phi_B - \phi_{B_{jk}} \geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N\}}$$

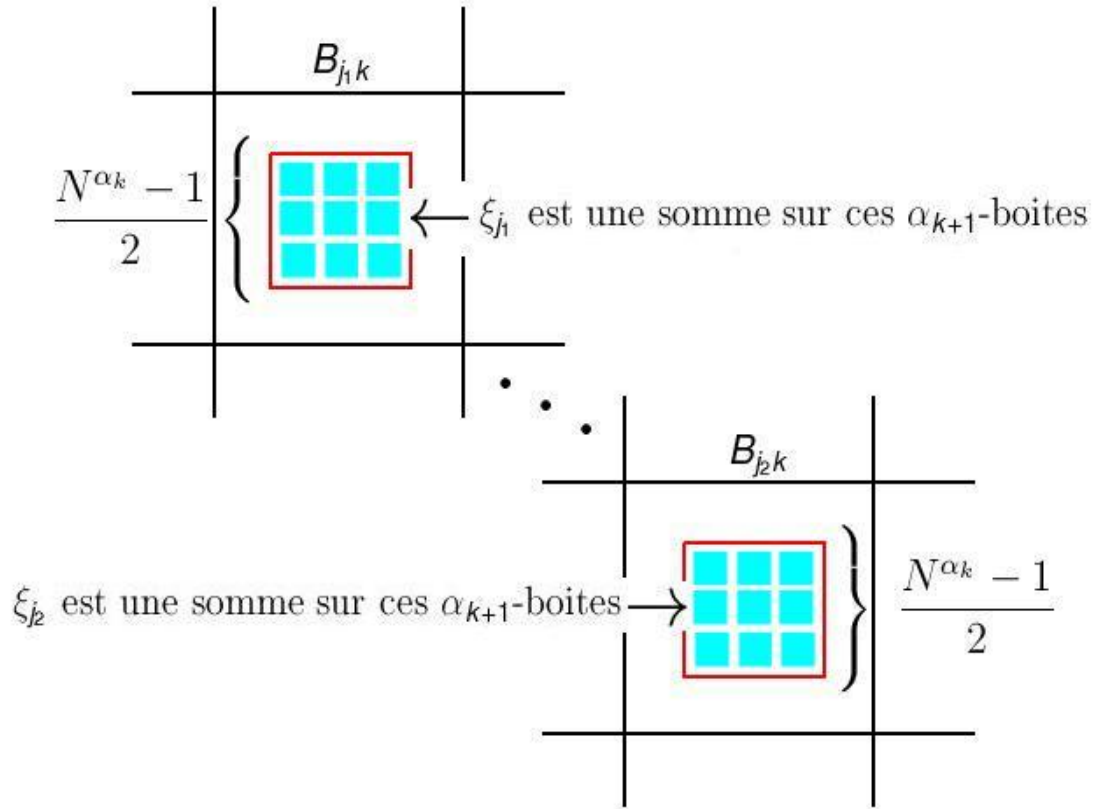


FIGURE 3.7. Schéma représentant les boîtes à considérer pour les sommes ξ_{j_1} et ξ_{j_2} .

Conditionnellement à $\tilde{\mathcal{F}}_k$, les variables ξ_j sont i.i.d. En effet, la somme ξ_j est sur les $B \in \Gamma_{B_{j_k}, \alpha_{k+1}}$. Pour $j_1 \neq j_2$, on a $\text{int}(B_{j_1 k}) \cap \text{int}(B_{j_2 k}) = \emptyset$, $B_{j_1 k}$, $B_{j_2 k}$ étant les dernières boîtes d'une séquence $\underline{B}_j^{(k)}$ (voir la Figure 3.7). Pour $j_1 \neq j_2$ et en conditionnant sur les complémentaires des boîtes B_{j_1} , B_{j_2} au besoin, on obtient que

$$\begin{aligned} E \left[\left(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_{j_1, k}} \right) \left(\varphi_{B_2} - \varphi_{B_{j_2, k}} \right) \mid \tilde{\mathcal{F}}_k \right] \\ = E \left[\left(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_{j_1, k}} \right) \mid \tilde{\mathcal{F}}_k \right] E \left[\left(\varphi_{B_2} - \varphi_{B_{j_2, k}} \right) \mid \tilde{\mathcal{F}}_k \right]. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{cov}_{\tilde{\mathcal{F}}_k} \left(\left(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_{j_1, k}} \right), \left(\varphi_{B_2} - \varphi_{B_{j_2, k}} \right) \right) = 0$. Puisque l'ensemble des variables aléatoires $\varphi_B - \varphi_{B_{j, k}}$ conditionnées sur $\tilde{\mathcal{F}}_k$ sont de loi normale avec une covariance nulle pour des j différents, elles sont donc indépendantes. Et donc, pour des j différents, les variables $1_{\left\{ \varphi_B - \varphi_{B_{j, k}} \geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{q}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N \right\}}$ ainsi que les variables ξ_j seront indépendantes lorsqu'on conditionne sur $\tilde{\mathcal{F}}_k$. De plus, puisque

ξ_j est une somme de $|\Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}|$ termes, on a donc

$$E \left[\xi_j | \tilde{\mathcal{F}}_k \right] \geq \inf_{B \in \Gamma_{B_{jk}, \alpha_{k+1}}} P \left(\phi_B - \phi_{B_{jk}} \geq \alpha \left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2} \right) \log N | \tilde{\mathcal{F}}_k \right). \quad (3.45)$$

Ainsi, par (3.32), le Lemme 3.9 et en rappelant que $g = \frac{2}{\pi}$, on a

$$\begin{aligned} \text{var}_{\tilde{\mathcal{F}}_k}(\phi_B - \phi_{B_{jk}}) &= \text{var}_{B_{jk}}(\phi_B) \\ &= g(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \log(N) + c. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left(\frac{K-k+1}{K} \right) \alpha - \left(\frac{K-(k+1)+1}{K} \right) \alpha = \frac{\alpha}{K}$, on a que

$$\begin{aligned} \text{var}_{\tilde{\mathcal{F}}_k}(\phi_B - \phi_{B_{jk}}) &= \text{var}_{B_{jk}}(\phi_B) \\ &= \frac{g\alpha}{K} \log(N) + c. \end{aligned}$$

Avec (3.45), le Lemme 1.1 sur l'estimé gaussien standard avec la variance conditionnelle calculée précédemment et $K > \frac{1}{2\sqrt{g}}$, on a que

$$\begin{aligned} E \left[\xi_j | \tilde{\mathcal{F}}_k \right] &\geq N^{-\left(\frac{2\alpha}{K} - \frac{2\alpha}{\sqrt{g}K^2} + \frac{\alpha}{2gK^3} \right)} \\ &\geq N^{-\frac{2\alpha}{K} + \frac{\alpha}{\sqrt{g}K^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} C_k \cap C_{k+1}^c &\subset C_k \cap \left\{ \sum_{j=1}^{N^\kappa} \xi_j \leq \frac{4N^\kappa}{N^{2\alpha/K} - 2} \right\} \\ &\subset C_k \cap \left\{ \sum_{j=1}^{N^\kappa} \xi_j - E[\xi_j | \tilde{\mathcal{F}}_k] \leq \frac{4N^\kappa}{N^{2\alpha/K} - 2} - N^\kappa N^{-\frac{2\alpha}{K} + \frac{\alpha}{\sqrt{g}K^2}} \right\} \\ &\subset C_k \cap \left\{ \left| \sum_{j=1}^{N^\kappa} \xi_j - E[\xi_j | \tilde{\mathcal{F}}_k] \right| \geq \frac{1}{2} N^\kappa N^{-\frac{2\alpha}{K} + \frac{\alpha}{\sqrt{g}K^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Donc en appliquant le lemme sur la valeur absolue d'une somme de variables aléatoires i.i.d. (Lemme 1.3), on a sur C_k ,

$$P(C_{k+1}^c | \tilde{\mathcal{F}}_k) \leq 2 \exp \left[-c N^{\kappa - \frac{4\alpha}{K} + \frac{2\alpha}{\sqrt{g}K^2}} \right]. \quad (3.46)$$

Maintenant, soit $\eta > 0$, alors il possible de choisir $\alpha < 1$ tel que $2\sqrt{g} - \eta < 2\sqrt{g}\alpha$. Ensuite, on choisit $\kappa(\alpha)$ qui respecte les conditions du Lemme 3.13 et on

choisit K suffisamment grand pour avoir $\kappa(\alpha) - 2\alpha/K > 0$, $(K-1)\alpha(2\sqrt{g}/K - 1/K^2) > 2\sqrt{g} - \eta$ et $K > \frac{1}{2\sqrt{g}}$. Alors, on a

$$P\left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\right) \leq P(C_K^c). \quad (3.47)$$

Pour le voir, supposons que dans V_N^δ , il y ait L points. Dans ce cas

$$\begin{aligned} P\left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\right) &= P(\text{card}\{\phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\} \geq L) \\ &\leq P(\text{card}\{\phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\} \geq L - N^\kappa) \\ &\Leftrightarrow P(\text{card}\{\phi_x \geq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\} \leq N^\kappa). \end{aligned}$$

Puisque ϕ_{B_K} est une moyenne sur une partie des $\phi_x \in V_N^\delta$, on a que

$$\begin{aligned} P(\text{card}\{\phi_x \geq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\} \leq N^\kappa) \\ &\leq P(\text{card}\{\phi_{B_K} \geq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\} \leq N^\kappa) \\ &\leq P\left(\text{card}\left\{\phi_{B_K} \geq (K-1)\alpha\left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2}\right) \log N\right\} \leq N^\kappa\right). \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par les conditions posées sur le choix des constantes. Puisque le nombre de boîtes ϕ_{B_K} est plus grand que le nombre de séquences $\underline{B}^{(K)}$, on a bien

$$\begin{aligned} P\left(\text{card}\left\{\phi_{B_K} \geq (K-1)\alpha\left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2}\right) \log N\right\} \leq N^\kappa\right) \\ &\leq P\left(\text{card}\left\{\underline{B}^{(K)} : \phi_{B_i} \geq (i-1)\alpha\left(\frac{2\sqrt{g}}{K} - \frac{1}{K^2}\right) \log N\right\} \leq N^\kappa\right) \\ &= P(C_K^c). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P\left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N\right) &\leq P(C_K^c) \\ &\leq E\left[P\left(C_K^c | \tilde{\mathcal{F}}_{K-1}\right); C_{K-1}\right] + P\left(C_{K-1}^c\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \leq P(C_1^c) + \sum_{i=2}^K E \left[P(C_i^c | \tilde{\mathcal{F}}_{i-1}); C_{i-1} \right] \\
& \leq \exp(-a(\delta, \alpha)(\log N)^2) + \sum_{i=2}^K E \left[P(C_i^c | \tilde{\mathcal{F}}_{i-1}); C_{i-1} \right],
\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de (3.47), la deuxième inégalité de (3.44) et le premier terme de la dernière inégalité de (3.42). Par (3.46), on a

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N \right) \\
& \leq \exp(-a(\delta, \alpha)(\log N)^2) + 2K \exp \left[-cN^{\kappa - \frac{4\alpha}{K} + \frac{2\alpha}{\sqrt{g}K^2}} \right].
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions imposées par le choix des constantes, on a finalement

$$\begin{aligned}
& P \left(\max_{x \in V_N^\delta} \phi_x \leq 2(\sqrt{g} - \eta) \log N \right) \\
& \leq \exp(-a(\delta, \alpha)(\log N)^2) + 2K \exp \left[-cN^{\kappa - \frac{2\alpha}{K}} \right] \\
& \leq \exp(-c(\delta, \eta)(\log N)^2).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

SIMULATIONS

Afin de confirmer les résultats théoriques présentés dans les sections précédentes, des simulations ont été effectuées.

4.1. MODÈLE HIÉRARCHIQUE

La simulation du modèle hiérarchique a été réalisée en prenant le cas particulier de l'arbre binaire (section 3.1, page 30). Les simulations ont été effectuées en C (version ISO/IEC 9899 :1999). La méthode utilisée pour générer les variables aléatoires standards est la méthode polaire^[19]. On peut trouver une bonne description dans la plupart des livres d'introduction aux probabilités, notamment dans [21].

Afin de générer un point (X_1, X_2) tel que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale standard et indépendantes, il suffit d'abord de générer un point (U_1, U_2) uniformément dans un carré unité. En transformant ce point en coordonnées polaires (R, Θ) , il apparaît que R^2 et Θ sont indépendantes. De plus, R^2 est de loi exponentielle avec paramètre 1/2 et Θ , de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. En constatant, par la méthode de la transformation inverse, que $-2 \log U_1$ et $2\pi U_2$ suivent les mêmes lois que R^2 et Θ , respectivement, on a que

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{-2 \log U_1} \cos 2\pi U_2, \\ X_2 &= \sqrt{-2 \log U_1} \sin 2\pi U_2, \end{aligned}$$

sont deux variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites. Cette approche est appelée l'approche de Box-Muller. Elle est cependant quelque peu inefficace, car le calcul des sinus et cosinus peut être long. Or en considérant $V_1 = 2U_1 - 1$ et $V_2 = 2U_2 - 1$, on a ainsi que le point (V_1, V_2) est uniformément distribué dans un carré d'aire 4 centré en 0. En générant des couples (V_1, V_2) jusqu'à ce qu'un couple soit à l'intérieur du cercle unité, on aura en considérant les coordonnées polaires (R, Θ) de (V_1, V_2) , que

$$\begin{aligned}\cos \Theta &= \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \\ \sin \Theta &= \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.\end{aligned}$$

Ainsi en posant $R^2 = V_1^2 + V_2^2$, on aura deux variables aléatoires normales centrées réduites données par

$$\begin{aligned}X_1 &= \sqrt{\frac{-2 \log R^2}{R^2}} V_1, \\ X_2 &= \sqrt{\frac{-2 \log R^2}{R^2}} V_2.\end{aligned}$$

4.1.1. Résultats

Une première simulation à été effectuée pour le cas de l'arbre binaire. Un échantillon de 1000 valeurs maximales a été généré pour des arbres binaires ayant des hauteurs m variant de 1 à 23. La méthode utilisée consiste à implémenter un arbre binaire dans un tableau à une dimension. Un algorithme récursif à été utilisé et les premières limitations sont reliées aux temps de calcul.

En rappelant les résultats (voir (3.23) à la page 41) pour le cas de l'arbre binaire^[5], donnés par

$$\begin{aligned}P\left(\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \geq m\sqrt{2 \log 2} - \frac{3}{2\sqrt{2 \log 2}} \log m + u\right) &\leq \exp(-cu), \\ P\left(\max_{\alpha \in T_m} X_\alpha \leq m\sqrt{2 \log 2} - \frac{3}{2\sqrt{2 \log 2}} \log m - u\right) &\leq \exp(-cu^2),\end{aligned}$$

on observe que les résultats de la simulation présentés dans la Figure 4.1 sont cohérents avec l'hypothèse de convergence en probabilité du maximum d'un ensemble de variables aléatoires corrélées selon le modèle de l'arbre binaire. En

effet, la valeur moyenne, représentée par les points ronds dans la Figure 4.1, semble converger vers 1. De plus, le minimum et le maximum de l'échantillon de 1000 valeurs maximales, représentés par + et *, respectivement, dans la Figure 4.1, se rapprochent de la valeur moyenne lorsque m augmente.

La convergence du premier ordre semble donc être la même que pour le cas i.i.d.. Cependant, la correction apportée ($-\frac{3}{2\sqrt{2}\log 2} \log m$) diffère de celle trouvée pour le cas i.i.d., soit $-\frac{1}{2\sqrt{2}\log 2} \log m$.

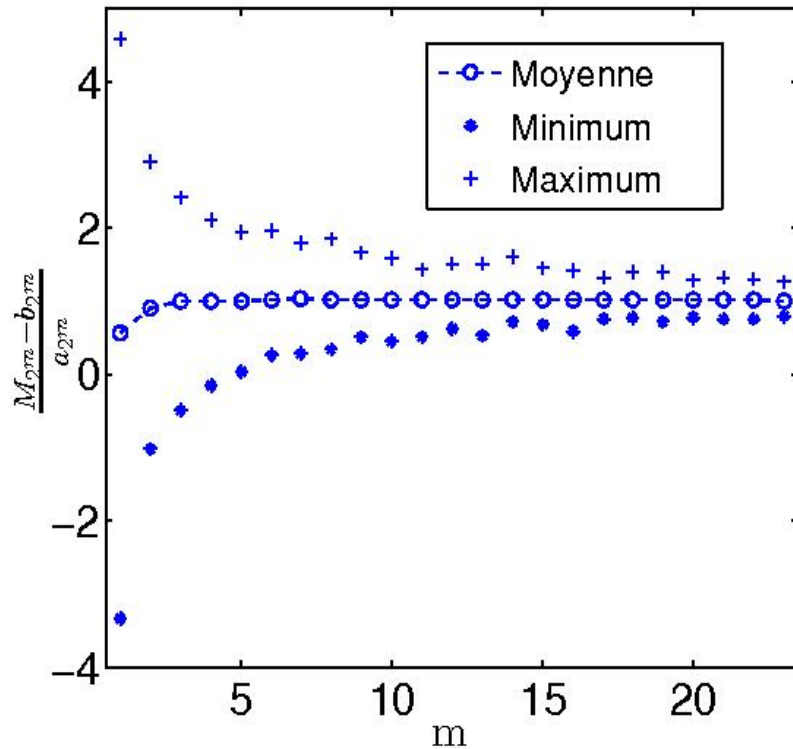


FIGURE 4.1. Convergence du deuxième ordre pour le maximum (M_{2^m}) d'un ensemble de 2^m variables aléatoires ($a_{2^m} = m\sqrt{2\log 2}$, $b_{2^m} = -\frac{3}{2\sqrt{2}\log 2} \log m$). Pour chaque m , *moyenne* est la valeur moyenne sur un échantillon de 1000 valeurs maximales. Les variables sont corrélées selon le modèle de l'arbre binaire ayant une hauteur m .

4.2. MODÈLE HARMONIQUE

4.2.1. Méthode de Cholesky

La covariance Γ du champ libre gaussien a été définie de façon abstraite comme l'inverse du laplacien discret, plus spécifiquement comme la fonction de Green G_N du laplacien discret. Afin de générer les variables aléatoires corrélées, considérons $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, où les x_i sont des variables normales standards réduites indépendantes. En posant $\Gamma^{-1} = DD^T$, avec D une matrice triangulaire et $X = YD$, on a $Y = XD^{-1}$ et donc la fonction de densité (f) est donnée par

$$\begin{aligned} f(Y) &= \frac{\exp -\frac{1}{2}YDD^TY^T}{norm} \\ &= \frac{\exp -\frac{1}{2}Y\Gamma^{-1}Y^T}{norm}, \end{aligned}$$

où *norm* est une constante de normalisation pour que f soit une fonction de densité. Ainsi, il suffit, pour générer un ensemble Y de variables aléatoires corrélées selon le modèle harmonique, de décomposer la matrice Γ^{-1} selon la méthode de Cholesky (c'est-à-dire, $\Gamma^{-1} = DD^T$) et de multiplier ensuite la matrice D^{-1} par un ensemble de variables aléatoires normales standards réduites indépendantes. Concrètement, on obtient un vecteur corrélé Y par

$$Y = XD^{-1}.$$

4.2.2. Résultats

Les simulations pour le modèle harmonique ont été réalisées avec Matlab (version R2012a). La méthode utilisée pour générer les nombres aléatoires est du type « twister ». La méthode de Cholesky a été utilisée pour simuler les surfaces selon le modèle harmonique (voir Figure 4.2). L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de générer rapidement un grand nombre de surfaces. Pour simuler une seule surface, on doit générer la matrice D^{-1} et cela peut prendre beaucoup de temps, même pour de petites dimensions. Mais une fois cette matrice obtenue, on peut générer rapidement d'autres surfaces de même dimension, car il suffit dès lors de générer un vecteur aléatoire et de le multiplier avec la matrice D^{-1} calculée précédemment. Les limitations de cette méthode sont sur la mémoire

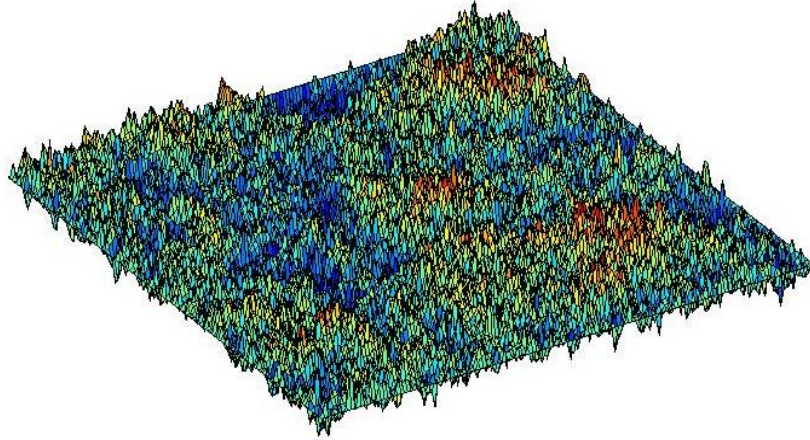


FIGURE 4.2. Simulation selon le modèle harmonique d'une surface (150×150) générée par la méthode de Cholesky.

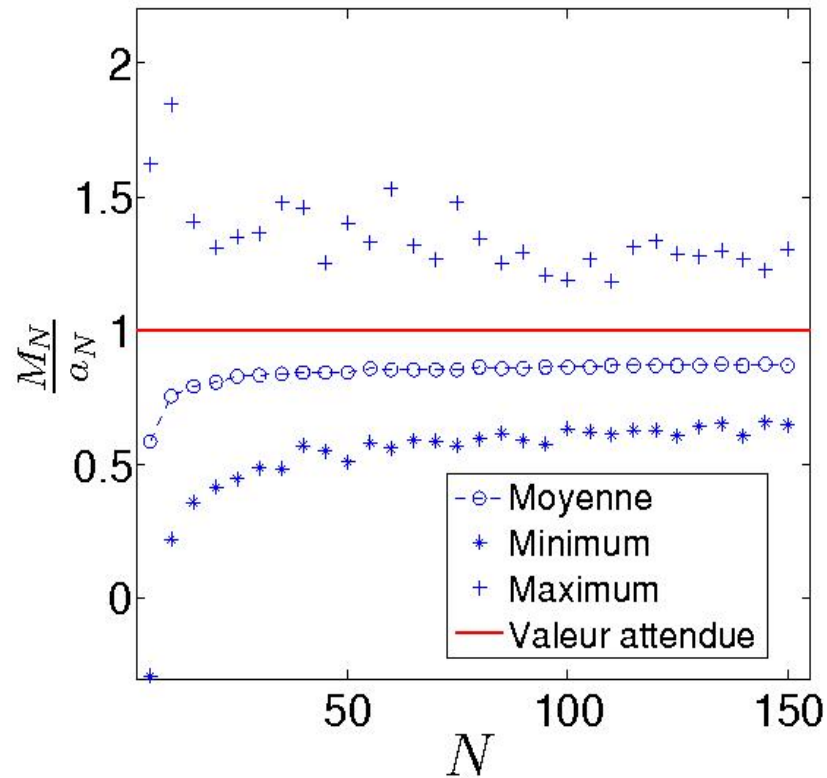


FIGURE 4.3. Convergence du premier ordre pour le maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls. Pour chaque N , *moyenne* est une moyenne sur un ensemble de 1000 valeurs. Simulation obtenue avec la méthode de Cholesky ($a_N = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N$).

disponible. En effet, pour générer une surface $N \times N$ par la méthode de Cholesky, on a besoin d'une matrice $N^2 \times N^2$.

La Figure 4.3 vérifie qualitativement la convergence en probabilité du premier ordre prédit par la théorie. En effet, on voit que l'ensemble des valeurs se rapproche de la valeur moyenne lorsque N augmente. Cette image montre également que la distribution du maximum n'est pas symétrique par rapport à la moyenne. On observe que le maximum des valeurs de M_N est plus éloigné de la valeur moyenne de M_N que les valeurs minimums de M_N . Ce résultat est en accord avec la distribution du maximum du DGFF. En effet, la distribution du maximum du DGFF n'est pas symétrique et la médiane de la distribution est inférieure à la moyenne (voir Figure 4.4). La convergence semble lente et peut-être

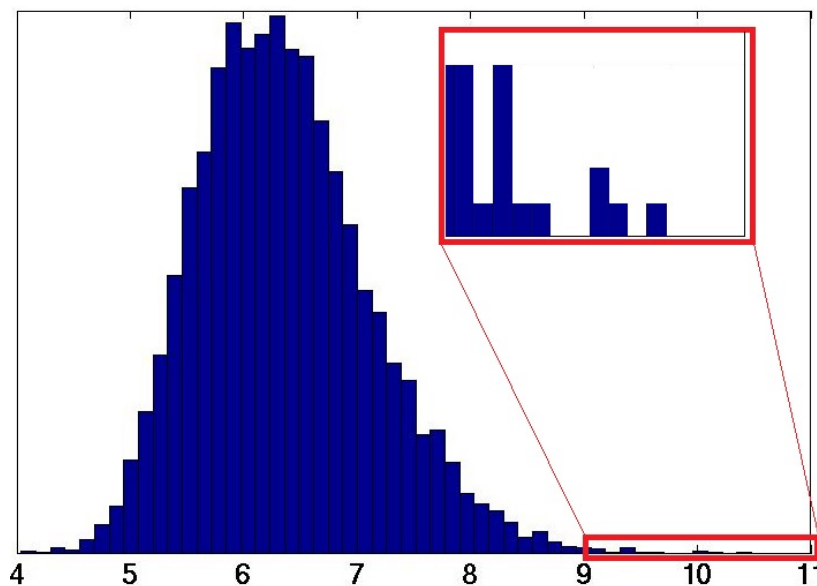


FIGURE 4.4. Distribution d'un échantillon de 10000 maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls et $N = 100$.

même indique que la valeur attendue ne sera pas atteinte. Cela est causé par le fait qu'un deuxième terme non-négligeable pour les petites valeurs de N utilisées durant les simulations, influence la convergence. Un résultat supplémentaire concernant ce deuxième terme est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.1 ^([6]).

Soit (M_N) le maximum d'un ensemble de N^2 variables aléatoires corrélées selon le modèle harmonique. On a

$$E[M_N] = \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \log N - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log \log N + O(1).$$

Ainsi, en tenant compte de ce deuxième terme, qui agit comme centralisateur, on observe une convergence beaucoup plus rapide (Figure 4.5).

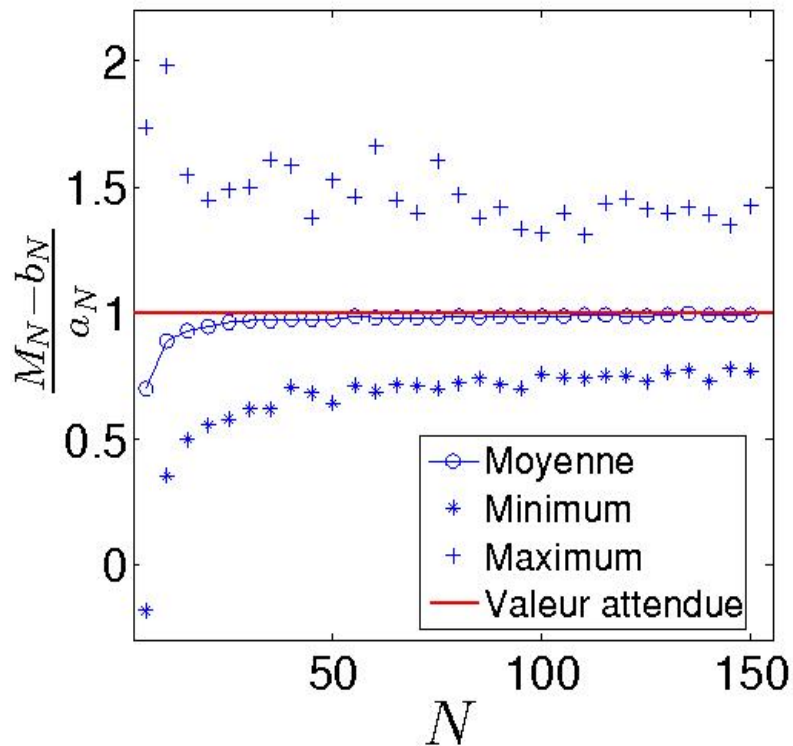


FIGURE 4.5. Convergence du deuxième ordre pour le maximum (M_N) d'un ensemble de N^2 variables aléatoires du DGFF avec bords nuls. Pour chaque N , *moyenne* est une moyenne sur un échantillon de 1000 valeurs maximales. Simulation obtenue avec la méthode de Cholesky $(a_N = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(N), b_N = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log(\log(N)))$.

Chapitre 5

CONCLUSION

Des résultats sur le comportement du maximum de trois modèles de champs gaussiens, le modèle i.i.d., le modèle hiérarchique et le champ libre gaussien, ont été présentés. Plus précisément, les résultats portent sur la convergence en loi, la convergence en probabilité du premier ordre et du deuxième ordre.

Dans le cas du modèle i.i.d., les trois types de convergence sont bien déterminés. En particulier, la convergence en loi obtenue est universelle, en ce sens qu'elle ne dépend pas de la fonction de distribution des variables aléatoires (voir Théorème 2.2, page 17).

Pour le modèle hiérarchique, les résultats connus de J. D. Biggins (voir Théorème 3.1, page 31) ont été obtenus avec la preuve de E. Bolthausen^[4] (voir Proposition 3.3, page 32). La conclusion de l'étude de ce modèle est que la convergence du premier ordre est la même que pour le modèle i.i.d. Le résultat obtenu par simulation est cohérent avec le résultat théorique.

Une méthodologie analogue à celle utilisée pour le modèle hiérarchique a permis d'obtenir la convergence en probabilité du premier ordre du maximum dans le cas du modèle harmonique (voir Théorème 3.10, page 52). La convergence du premier ordre s'est avérée être la même que pour le cas i.i.d. Le résultat obtenu par simulation pour la convergence du premier ordre est cohérent avec le résultat théorique. Toutefois, de meilleurs résultats ont été obtenus pour la convergence du deuxième ordre.

Enfin, le résultat principal de ce mémoire a été que la convergence en probabilité du premier ordre du maximum est la même pour les trois modèles, nonobstant

quelques changements pour tenir compte du nombre de variables et de la variance de chacun des modèles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BERNSTEIN : *Theory of Probability*, pages 159-165, Moscou, 1927.
- [2] J. D. BIGGINS : *Chernoff's Theorem in the Branching Random Walk*, J. Appl. Probab., 14 :630-636, 1997.
- [3] P. BILLINGSLEY : *Probability and Measure*, Wiley, New York, 1979.
- [4] E. BOLTHAUSEN : *Random Walk Representations and Entropic Repulsion for Gradients Models*, Publication en ligne :<http://www.zora.uzh.ch/22068/>.
- [5] E. BOLTHAUSEN, J.-D. DEUSHCEL ET G. GIACOMIN : *Entropic Repulsion and the Maximum of the Two-Dimensional Harmonic Crystal*, Ann. Probab., 29(4) :1670-1692, 2001.
- [6] M. BRAMSON ET O. ZEITOUNI : *Tightness of the Recentered Maximum of the Two-Dimensional Discrete Gaussian Free Field*, Commun. Pur. Appl. Math., 65(1) :1-20, 2011.
- [7] C. C. CRAIG : *On the Tchebychef Inequality of Bernstein*, Ann. Math. Stat., 4 :94-102, 1933.
- [8] H. CRAMER : *Mathematical Methods of Statistics*, section 24.3 et 10.7, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1946.
- [9] J. DUBÉDAT : *SLE and the Free Field : Partition Functions and Couplings*, Publication en ligne :<http://de.arxiv.org/abs/0712.3018v2> .
- [10] R. DURRETT : *Probability : Theory and Examples. Fourth Edition*, page 12, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [11] E. B. DYNKIN : *Markov Processes as a Tool in Field Theory*, J. Funct. Anal., 50(2) :167-187, 1983.
- [12] E. B. DYNKIN : *Gaussian and Non-Gaussian Random Field Associated with Markov Processes*, J. Funct. Anal., 55(3) :344-376, 1984.

- [13] E. B. DYNKIN : *Polynomials of the Occupation Field and Related Random Fields*, J. Funct. Anal., 58(1) :20-52, 1984.
- [14] R. FERNANDEZ, J. FRÖHLICH ET A. D. SOKAL : *Random Walks, Critical Phenomena and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [15] J. GLIMM, A. JAFFE : *Quantum Physics. Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [16] K. GAWEDZKI, A. KUPIAINEN : *Block Spin Renormalization Group for Dipole Gas and $(\Delta\phi)^4$* , Ann. Phys, 147(1) :198-243, 1983.
- [17] B. V. GNEDENKO : *Sur la Distribution Limité du Terme d'une Série Aléatoire*, Ann. Math, 44 :423-453, 1943.
- [18] G. F. LAWLER : *Intersections of Random Walks*, Birkhäuser, Boston, 1991.
- [19] G. MARSAGLIA ET T. A. BRAY : *A Convenient Method for Generating Normal Variables*, SIAM Rev., 6 :260-264, 1964.
- [20] S. I. RESNICK : *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [21] S. M. ROSS : *Initiation aux Probabilités. Traduction de la 7^{ème} Édition Américaine*, pages 517-519, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2007.
- [22] Y. A. ROZANOV : *Markov Random Fields*, pages 17, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [23] S. SHEFFIELD : *Gaussian Free Fields for Mathematicians*, Publication en ligne :<http://arXiv:math/0312099> [math.PR].
- [24] E. SENETA : *Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 1976.
- [25] A.V. SKOROHOD : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Theor. Prob. Appl., 1 :26-290, 1956.
- [26] D. SLEPIAN : *One-Sided Barrier Problem for Gaussian Noise*, Bell Syst. Tech. J., 41(2) :463-501, 1962.