

Université de Montréal

# **Modélisation dynamo des cycles d'activité stellaire**

par  
Caroline Dubé

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M. Sc.)  
en physique

Avril, 2013

© Caroline Dubé, 2013



## Résumé

Des décennies d'observation ont permis d'obtenir différentes relations liées à l'activité stellaire. Cependant, il est difficile de reproduire numériquement celles-ci à partir de modèles dynamo, puisqu'il n'y a pas de consensus sur le processus réellement présent dans les étoiles. Nous tentons de reproduire certaines de ces relations avec un modèle global 3D hydrodynamique qui nous fournit le profil de rotation différentielle et le tenseur- $\alpha$  utilisés en entrée dans un modèle de dynamo  $\alpha\Omega$ . Nous reproduisons ainsi efficacement la corrélation positive entre le rapport  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  et  $P_{\text{rot}}^{-1}$ . Par contre, nous échouons à reproduire les relations liant  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  et l'énergie magnétique au nombre de Rossby. Cela laisse croire que la variation de  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  avec la période de rotation est une caractéristique robuste du modèle  $\alpha\Omega$ , mais que l'effet- $\alpha$  ne serait pas le processus principal limitant l'amplitude du cycle. Cette saturation découlerait plutôt de la réaction magnétique sur l'écoulement à grande échelle.

**Mots clés: Étoiles, Champ magnétique, Cycle magnétique, Dynamo, Simulation**

# Abstract

Decades of stellar observations established various relationships related to stellar activity cycles. However, these are difficult to numerically reproduce using dynamo models, since flows important for dynamo action cannot be measured in stars other than the Sun. We model these relationships by extracting the differential rotation profile and the  $\alpha$ -tensor from a global 3D hydrodynamical simulation and use them as an input into a  $\alpha\Omega$  dynamo model. We succeed in reproducing the observed positive correlation between the ratio  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  and  $P_{\text{rot}}^{-1}$ . On the other hand, we fail to do so for the relationship linking  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  and the magnetic energy to the Rossby number. This indicates that the variation of  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  with the rotation period is a robust feature of the  $\alpha\Omega$  model, but that the  $\alpha$ -effect is probably not the main process limiting cycle amplitude. This saturation is most likely related to the magnetic backreaction on large-scale flows.

**Keywords:** Stars, Magnetic field, Magnetic cycle, Dynamo, Simulation

# Table des matières

<b>Résumé .....</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des annexes .....</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des sigles .....</b>	<b>x</b>
<b>Remerciements.....</b>	<b>xi</b>
<b>Chapitre 1 – Introduction.....</b>	<b>1</b>
1.1. Le Soleil en général .....	2
1.1.1. Caractéristiques.....	2
1.1.2. Structure.....	2
1.1.3. Rotation.....	5
1.2. L’activité solaire .....	6
1.2.1. Bref historique .....	7
1.2.2. Caractéristiques des taches et cycles d’activité .....	8
1.3. L’activité stellaire .....	11
1.3.1. Déterminer la période du cycle.....	12
1.3.2. Qu’est-ce que le nombre de Rossby?.....	14
1.4. Les simulations numériques .....	16
1.4.1. EULAG-HD.....	17
1.4.2. Dynamo $\alpha\Omega$ et modèle de champs moyens axisymétriques .....	18
1.5. Résultats en bref .....	23
1.6. Contribution.....	25
<b>Chapitre 2 – Stellar dynamos and cycles from numerical simulations of convection.....</b>	<b>27</b>

<b>Abstract</b> .....	<b>28</b>
2.1. Introduction.....	28
2.2. Stellar convection simulations using EULAG .....	31
2.3. Mean-field $\alpha\Omega$ dynamo .....	41
2.4. Results.....	44
2.4.1. Validation.....	44
2.4.2. More dynamo solutions across parameter space.....	45
2.4.3. Cycle relationships.....	49
2.5. Discussion.....	52
<b>Chapitre 3 – Conclusion</b> .....	<b>56</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>58</b>

## **Liste des tableaux**

Tableau I – Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations.....	17
Table II – Physical parameters extracted or used for each simulation .....	33

## Liste des figures

Figure 1 – Observation de la granulation solaire .....	3
Figure 2 – Observations du Soleil obtenues avec SDO à différentes longueurs d’onde .....	4
Figure 3 – Profil de la rotation différentielle solaire en coupe polaire et courbes de vitesse à plusieurs latitudes en fonction de la profondeur .....	6
Figure 4 – Image d’une tache solaire prise le 15 juillet 2002 à l’aide du SST .....	6
Figure 5 – Diagramme papillon et pourcentage de la surface recouverte de taches solaires pour la période de 1874 à janvier 2013 .....	9
Figure 6 – Représentation schématique de l’émergence des taches solaires selon les lois de polarité de Hale .....	10
Figure 7 – Évolution du nombre de taches solaires en fonction du temps sur une période de 400 ans .....	11
Figure 8 – Données des flux d’émission relatifs du Ca II en unité de S .....	13
Figure 9 – Représentation schématique de l’effet- $\Omega$ et de l’effet- $\alpha$ .....	19
Figure 10 – Variation du rapport $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$ avec $\text{Ro}^{-1}$ .....	23
Figure 11 – Variation du rapport $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$ avec $1/P_{\text{rot}}$ .....	24
Figure 12 – Variation de l’émission chromosphérique moyenne H-K avec l’inverse du nombre de Rossby .....	25
Figure 13 – Rapport de la luminosité en rayons X sur la luminosité bolométrique ( $R_X$ ) en fonction du nombre de Rossby .....	25
Figure 14 – Variation of the mean rms radial convective flow speed, at mid-convection zone depth, versus rotation rate in our twenty HD simulations .....	35
Figure 15 – Variation of the convective thermal flux at mid-convection zone depth versus inverse Rossby number, for our twenty simulations .....	35
Figure 16 – Differential rotation profiles in a meridional plane for a subset of 9 out of the 20 hydrodynamical simulations .....	37



Figure 17 – Differential rotation contrast versus rotation rate.....	38
Figure 18 – Variation of $\Delta\Omega$ with $Ro^{-1}$ .....	39
Figure 19 – Kinetic helicity profiles in a meridional plane for the same subset of 9 simulations as on Figure 16.....	40
Figure 20 – Spatiotemporal evolution of the zonally-averaged toroidal magnetic field for the $\alpha\Omega$ model constructed from reference solution r1t20 .....	45
Figure 21 – Spatiotemporal evolution of the zonally-averaged toroidal magnetic field for a EULAG-MHD simulation .....	46
Figure 22 – Time-latitude diagram of the zonally-averaged toroidal magnetic field for simulations (A) r0.5t5, (B) r0.5t20, (C) r1t50 and (D) r3t20.....	48
Figure 23 – Variation of the ratio $P_{cyc}/P_{rot}$ with $1/P_{rot}$ .....	50
Figure 24 – Ratio $\omega_{cyc}/\Omega_0$ vs. $Ro^{-1}$ .....	51
Figure 25 – $E_{mag}$ vs. $Ro^{-1}$ .....	53

## Liste des annexes

Annexe 1 – Équation d'induction dans l'approximation des champs moyens .....	xii
Annexe 2 – Équations de la dynamo.....	xiii
Annexe 3 – Figures résumées des vingt simulations .....	xvii

## Liste des sigles

AIA	Advanced Imaging Assembly
EULAG	Eulerian-Lagrangian
GONG	Global Oscillation Network Group
GRPS	Groupe de Recherche en Physique Solaire
HD	Hydrodynamique
HMI	Helioseismic and Magnetic Imager
MHD	Magnétohydrodynamique
RMS	Root Mean Square
RQCHP	Réseau Québécois de Calcul de Haute Performance
SDO	Solar Dynamics Observatory
SOCA	Second-Order Correlation Approximation
SST	Swedish Solar Telescope

## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche Paul Charbonneau, car sans lui, rien de ceci n'aurait pu voir le jour. Il m'a supportée tout au long de cette étape importante qu'est la maîtrise et son enthousiasme et sa passion pour le sujet m'ont grandement aidée à garder un intérêt vif pour ma recherche.

Je veux aussi remercier mon amour, Martin, qui m'a épaulée et encouragée à poursuivre. Son opinion et ses commentaires sur la première version de ce mémoire ont été très appréciés.

Je remercie aussi mes parents, ma petite sœur (Cocotte!) et son mari, Alex, pour l'appui qu'ils m'ont apporté et leur intérêt pour ma recherche.

Je remercie mes collègues de bureau qui ont su m'aider, m'encourager ou me distraire selon le moment. Sans vous, ces deux années auraient été bien différentes.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres du GRPS, en particulier Patrice et Corinne, pour le soutien qu'ils m'ont apporté, autant académiquement que moralement. Je n'oublierai pas nos discussions autour de bières solaires.

# Chapitre 1 – Introduction

L'activité stellaire de plusieurs étoiles est observée régulièrement depuis le milieu des années 1960. Cela demande énormément de temps puisqu'il faut plusieurs années, voire décennies pour étudier un cycle complet. Diverses relations entre la période de rotation, la période du cycle d'activité, le nombre de Rossby (voir §1.3.2) et l'émission chromosphérique ou dans les rayons X ont été obtenues grâce à une quarantaine d'années d'observation. L'article au centre de ce mémoire présente les résultats obtenus lorsque nous tentons de reproduire numériquement certaines de ces relations en utilisant un modèle de dynamo le plus simplifié possible. Cependant, les premières pages de ce mémoire ne sont pas consacrées à l'article, mais à une large introduction présentant les notions de base de ce domaine de recherche.

Tout d'abord, le Soleil en général (§1.1), puisque nous avons beaucoup plus de 40 ans de données pour cette étoile. Il est pertinent de présenter ses caractéristiques (§1.1.1), sa structure (§1.1.2) et sa rotation particulière (§1.1.3) avant de se lancer dans ce qui nous intéresse vraiment, soit son activité (§1.2). Ce sujet est présenté en deux parties, soit l'évolution historique des connaissances dans ce domaine (§1.2.1) et le cycle d'activité tel qu'étudié à partir des taches solaires (§1.2.2).

Par la suite, l'activité stellaire (§1.3) avec une introduction aux différents paramètres et méthodes utilisés pour calculer la période des cycles (§1.3.1) et une brève parenthèse sur ce qu'est le nombre de Rossby (§1.3.2).

Puis, les modèles numériques employés (§1.4), soit une simulation hydrodynamique 3D globale (§1.4.1) et un modèle de dynamo  $\alpha\Omega$  dans le contexte de champs moyens axisymétriques (§1.4.2).

Une brève présentation des résultats (§1.5) et de ma contribution personnelle (§1.6) clôt cette grande introduction.

Le chapitre suivant est entièrement consacré à l'article « Stellar dynamos and cycles from numerical simulations of convection » (§2) et il est suivi d'une brève conclusion à ce mémoire (§3).

## 1.1. Le Soleil en général<sup>1</sup>

Le Soleil est l'étoile la mieux connue, car elle est la plus près de nous (149 597 871 km de distance). Même s'il reste encore beaucoup de phénomènes à comprendre, des siècles d'observation de cet astre nous ont permis de connaître un grand nombre de ses caractéristiques.

### 1.1.1. Caractéristiques

Le Soleil est une naine jaune (type spectral G2 V) de 4.57 milliards d'années qui en est à la moitié de sa vie sur la séquence principale (c.-à-d. la phase stable d'évolution de l'étoile durant laquelle elle transforme son hydrogène en hélium par la fusion nucléaire). Cet astre a un rayon moyen de 696 000 km et une masse de  $1.989 \times 10^{30}$  kg. Celle-ci est composée à 74% d'hydrogène, à 24% d'hélium et à 2% d'éléments plus lourds. La température effective du Soleil (c.-à-d. la température qu'aurait un corps noir de même taille émettant la même quantité totale de radiation électromagnétique) est de 5778 K et sa luminosité est de  $3.846 \times 10^{26}$  J/s.

### 1.1.2. Structure

La structure du Soleil peut se diviser en cinq grandes régions : le cœur, la zone radiative, la zone convective, la photosphère et l'atmosphère.

Le cœur (ou noyau) s'étend du centre à environ 25% du rayon solaire. C'est à cet endroit que l'énergie est produite par la fusion nucléaire. Au centre, la densité est très élevée ( $150 \text{ g/cm}^3$ ) et la température aussi ( $1.57 \times 10^7 \text{ K}$ ).

La zone radiative s'étend du noyau à 70% du rayon approximativement. Dans cette région, la température est suffisamment élevée pour que la chaleur soit transmise vers les couches supérieures du Soleil par la simple radiation thermique. Cependant, puisque la densité de particules est aussi très élevée, un photon peut prendre plusieurs centaines de milliers d'années pour traverser cette zone. En s'éloignant du cœur, la température varie de  $8 \times 10^6 \text{ K}$  à  $2 \times 10^6 \text{ K}$  tandis que la densité passe de  $20 \text{ g/cm}^3$  à  $0.2 \text{ g/cm}^3$ .

La zone convective couvre les 30% extérieurs du rayon solaire. Dans cette région, le transport de la chaleur s'effectue par convection puisque la température et la densité ne sont

---

<sup>1</sup> Informations tirées des sites web <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html> et [http://mynasa.nasa.gov/worldbook/sun\\_worldbook.html](http://mynasa.nasa.gov/worldbook/sun_worldbook.html) en janvier 2013

plus suffisamment élevées. Le plasma chauffé par la zone radiative s'élève vers la surface où il se refroidit. Le plasma froid redescend vers la base de la zone convective où il sera chauffé de nouveau. C'est cette convection qui génère le phénomène de granulation observable à la surface du Soleil. Les cellules brillantes (de l'ordre de 1000 km de diamètre), visibles sur la Figure 1, sont formées par le plasma chaud montant vers la surface tandis que les zones sombres entre les cellules sont formées par le plasma froid descendant vers l'intérieur.

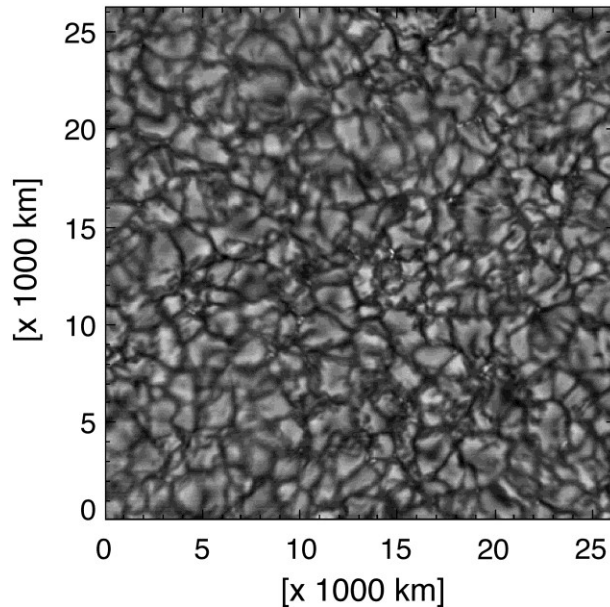


Figure 1 – Observation de la granulation solaire. Les régions claires correspondent au plasma chaud transporté à la surface par la convection tandis que les zones sombres correspondent au plasma froid retournant vers l'intérieur. Figure tirée de [http://www.noao.edu/image\\_gallery/html/im0381.html](http://www.noao.edu/image_gallery/html/im0381.html) en janvier 2013.

La photosphère, souvent associée à la surface du Soleil, correspond à la couche à partir de laquelle l'étoile devient transparente à la lumière visible. Elle possède une épaisseur d'environ 500 km et sa température varie de 6400 K à sa base à 4400 K à sa surface. C'est à cause de cette différence de température que l'assombrissement centre-bord (c.-à-d. que le centre du Soleil apparaît plus brillant que les bords) est observé. Ce phénomène est visible sur le 3<sup>e</sup> Soleil en haut de la Figure 2.

Enfin, l'atmosphère solaire s'étend de la photosphère à la limite extérieure de notre système solaire. Elle est elle-même constituée de cinq sous-régions : la zone de température minimale, la chromosphère, la région de transition, la couronne et l'héliosphère.

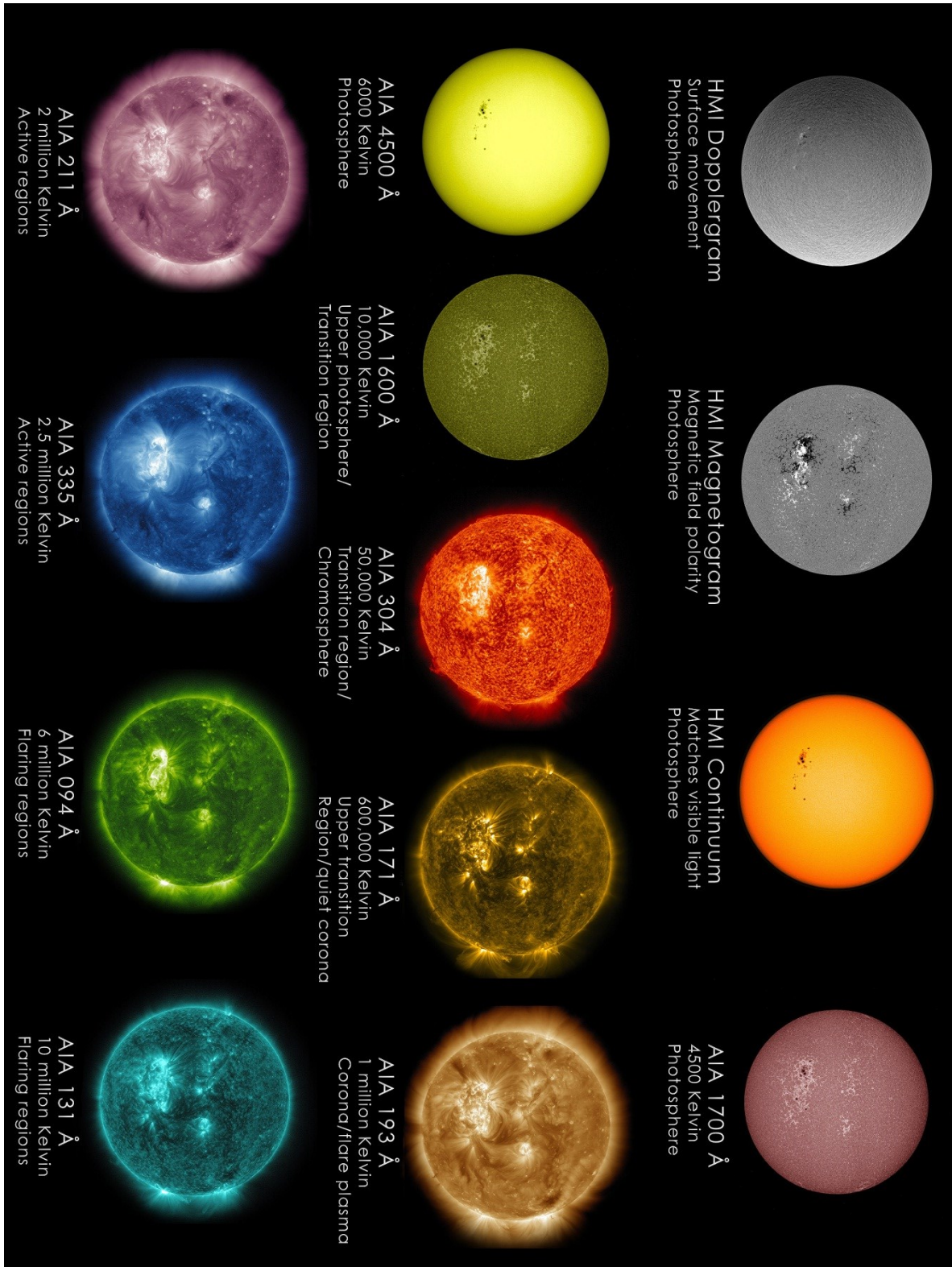


Figure 2 – Observations du Soleil obtenues avec SDO à différentes longueurs d’onde. Les différentes bandes d’observation permettent de cibler certaines régions de l’étoile. Image téléchargée en janvier 2013 à partir de [http://www.nasa.gov/mission\\_pages/sunearth/news/light-wavelengths.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/news/light-wavelengths.html).



Comme son nom l'indique, la zone de température minimale est l'endroit le plus froid du Soleil. La température (environ 4100 K) y est suffisamment basse pour permettre l'existence de molécules simples. La chromosphère (du grec *chroma* qui signifie couleur) correspond à la couche colorée visible lors des éclipses solaires totales. Sa température augmente pour atteindre jusqu'à 20 000 K à sa surface. La région de transition est une couche relativement mince (quelques centaines de kilomètres) où la température augmente extrêmement rapidement. Celle-ci peut atteindre le million de kelvins à la base de la couronne. Cette dernière correspond à la zone observable lors des éclipses solaires et elle est aussi bien visible sur la Figure 2 (à droite sur la ligne centrale et en bas à gauche). Réchauffée entre autres par la reconnexion magnétique, elle est extrêmement chaude. Sa température dépasse le million de kelvins et peut atteindre  $2 \times 10^7$  K par endroits. Finalement, l'héliosphère correspond à la région occupée par les vents solaires et qui peut s'étendre jusqu'à l'orbite de Pluton.

### 1.1.3. Rotation

Puisque le Soleil n'est pas une sphère solide, mais plutôt un plasma, il possède une rotation dite différentielle. Cela signifie que la vitesse angulaire de rotation varie avec la latitude et le rayon sur les derniers 30% du rayon. En surface par exemple, la période de rotation des pôles est de 34.35 jours alors que celle de l'équateur est de 25.05 jours. Cette variation en vitesse a été observée à l'aide de l'héliosismologie (c.-à-d. l'étude des modes d'oscillation du Soleil). La Figure 3 représente le profil de rotation différentielle solaire. En moyenne, la période de rotation de l'intérieur solaire est d'environ 27 jours.

Il est aussi important de noter en observant la Figure 3 que la rotation différentielle ne s'étend que dans la zone convective. En effet, les couches inférieures à 70% du rayon possèdent une rotation uniforme qui ne varie pas avec la latitude ou le rayon. Pour cette raison, cette zone sera qualifiée de « zone stable » par la suite. La fine couche (environ 4% du rayon [11]) séparant la zone stable de la zone convective est appelée la tachocline. C'est une région caractérisée par un très fort cisaillement puisque la rotation à sa base est uniforme tandis que la vitesse angulaire varie avec la latitude à sa surface.

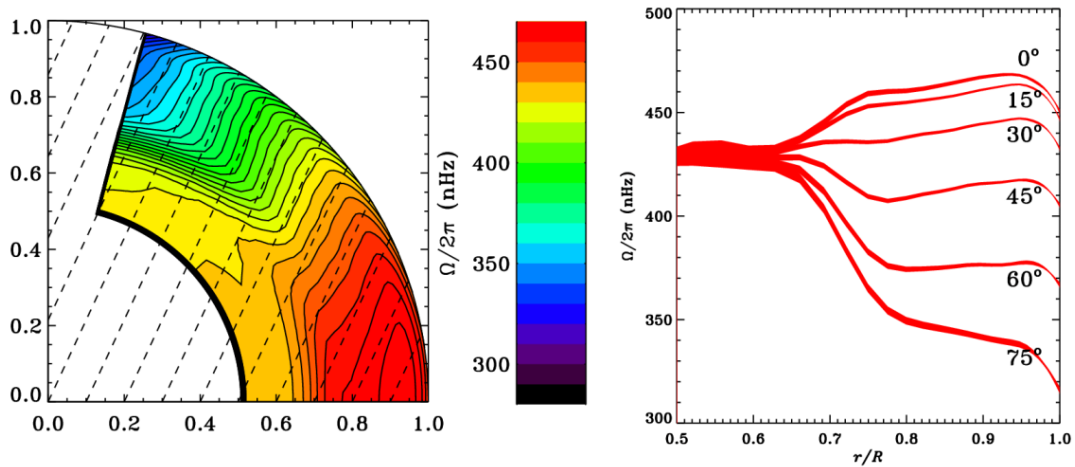


Figure 3 – Profil de la rotation différentielle solaire en coupe polaire (gauche) et courbes de vitesse à plusieurs latitudes en fonction de la profondeur (droite). À gauche, la vitesse augmente du noir au rouge. Figure provenant des observations de GONG, <http://gong.nso.edu/gallery/disk2k10/data/resource/torsional/torsional.html>, et téléchargée en octobre 2012.

### 1.2.L'activité solaire

Nous savons depuis plus d'un siècle que l'activité magnétique du Soleil et les taches solaires sont intimement liées. Ces dernières sont des zones d'apparence sombre (l'ombre) entourées d'une région un peu moins sombre (la pénombre) visible sur la photosphère. Leur émergence et leur mouvement sont régulés selon un cycle de 11 ans. La Figure 4 est un exemple de l'une de ces taches.

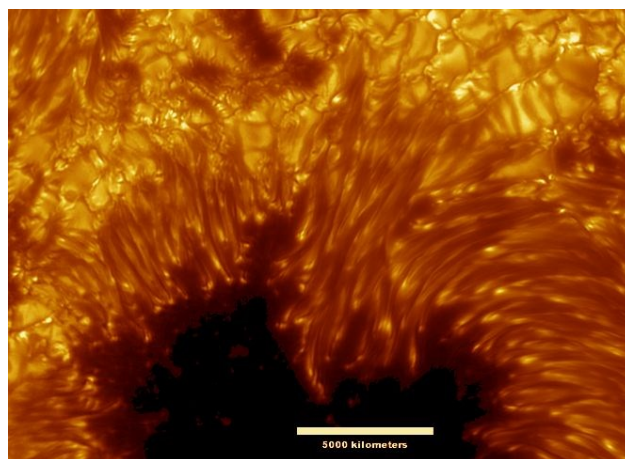


Figure 4 – Image d'une tache solaire prise le 15 juillet 2002 à l'aide du SST. L'ombre, la pénombre et la granulation y sont bien visibles. Image tirée du site <http://apod.nasa.gov/apod/ap021114.html> en janvier 2013.

### 1.2.1. Bref historique

La première mention d'une tache solaire remonte à plusieurs siècles avant notre ère. Les Chinois de l'époque observaient le ciel à des fins astrologiques et divinatoires et leurs écrits comprennent certaines mentions de nuages ou de zones sombres devant le Soleil. En effet, bien que la plupart des taches nous soient invisibles sans télescope, les plus grandes d'entre elles sont observables à l'œil nu.

Bien qu'il y ait eu, pendant des centaines d'années, des observations éparses du Soleil par de nombreux observateurs, le premier dessin connu d'une tache solaire remonte à 1128. Cette représentation apparaît dans les chroniques du moine bénédictin anglais John de Worcester.

Il faut par la suite attendre quelques siècles, jusqu'à l'invention du télescope, pour que les observations deviennent plus systématiques. Au début du 17<sup>e</sup> siècle, quatre astronomes sont en compétition quant à l'observation et l'interprétation des taches solaires : l'Anglais Thomas Harriot, le Hollandais Johannes Fabricius, l'Italien Galileo Galilei et l'Allemand Christoph Scheiner. Bien que Harriot fût probablement le premier à observer les taches solaires à l'aide d'un télescope, c'est Fabricius qui publia le premier ses résultats (1611). Son étude du mouvement apparent des taches sur l'astre lui permit de conclure à la rotation du Soleil autour d'un axe. Contrairement à Galilée et à Scheiner, ces deux astronomes se détournèrent ensuite de la physique solaire. C'est Galilée qui démontra que les taches étaient situées sur la surface du Soleil alors que Scheiner croyait que celles-ci étaient les ombres de nuages ou de planètes se trouvant entre le Soleil et Mercure. À l'époque, l'idée « d'imperfections » à la surface de notre étoile allait à l'encontre des croyances de l'Église et des écrits d'Aristote. Les observations sur une longue période par ces deux physiciens permirent de caractériser un peu plus les taches solaires. Elles n'apparaissent que près de l'équateur (de  $-40^{\circ}$  à  $40^{\circ}$  de latitude) et sont accompagnées de zones plus brillantes (les facules) sur la surface du Soleil.

La prochaine grande avancée dans ce domaine est attribuable à l'astronome amateur Heinrich Schwabe. Ce dernier observa le Soleil durant 17 ans (de 1826 à 1843) en espérant apercevoir un passage de la planète Vulcain (planète hypothétique située à l'intérieur de l'orbite de Mercure). Il n'atteignit jamais son but, mais documenta méticuleusement les taches

solaires qu'il observa durant cette période. Ce sont ses observations qui permirent la découverte du cycle des taches solaires (variation sur 11 ans en moyenne).

En 1848, Rudolf Wolf eut l'idée de reconstruire les cycles précédents à partir de la documentation disponible sur les observations passées. Pour ce faire, il inventa un paramètre qui est aujourd'hui appelé « nombre Wolf ». Ce dernier permet de comparer et de caractériser les observations de différents astronomes puisqu'il tient compte du nombre de taches, du nombre de groupes de taches ainsi que de l'observateur et de l'instrument qu'il utilisait. Ce nombre est encore utilisé aujourd'hui pour la reconstruction de cycles solaires.

Les physiciens du début du 19<sup>e</sup> siècle utilisaient le mouvement apparent des taches pour obtenir une approximation de la période de rotation du Soleil. Cette méthode était utilisée depuis Galilée, mais les résultats obtenus variaient entre 25 et 28 jours. C'est à Richard Christopher Carrington que nous devons la résolution de ce problème. Il observa que les latitudes auxquelles apparaissent les taches diminuent de 40° à 5° au fur et à mesure que le cycle avance (d'un minimum à un autre) et que, pour une latitude donnée, la période d'observation ne varie pas. Il en conclut donc que les couches externes du Soleil sont fluides et que la rotation y est différentielle.

C'est finalement en 1908 que la nature physique des taches solaires est découverte grâce à George Ellery Hale et ses collaborateurs. Ils étudièrent la séparation de certaines raies dans le spectre des taches et conclurent que ce phénomène était dû à l'effet Zeeman. La preuve était donc faite, les taches solaires sont magnétiques.

### **1.2.2. Caractéristiques des taches et cycles d'activité<sup>2</sup>**

Nous savons aujourd'hui que les taches solaires sont des régions caractérisées par un très fort champ magnétique et une température inférieure à la photosphère environnante. C'est à cet endroit que les lignes du champ magnétique traversent la surface, bloquant ainsi la convection. Puisqu'il y a moins de transport de chaleur, la zone se refroidit jusqu'à une température de l'ordre de 3000 ou 4000 K. C'est pour cette raison qu'elle apparaît plus sombre que la surface de l'étoile.

---

<sup>2</sup> Informations tirées des sites web <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml> et [http://www.asc-csa.gc.ca/fra/sciences/taches\\_solaires2.asp](http://www.asc-csa.gc.ca/fra/sciences/taches_solaires2.asp) en janvier 2013

Ces taches émergent à une latitude d'environ  $40^\circ$  au début d'un cycle puis l'émergence se rapproche de l'équateur plus le cycle avance. Lorsque nous reportons sur un graphique le nombre de taches solaires (ou l'aire qu'elles couvrent) à chaque latitude en fonction du temps, nous obtenons ce qui est communément appelé un « diagramme papillon ». La partie supérieure de la Figure 5 présente un tel diagramme pour la période de 1874 à janvier 2013. La variation de l'émergence des taches sur une période d'environ 11 ans y est bien visible.

**DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS**

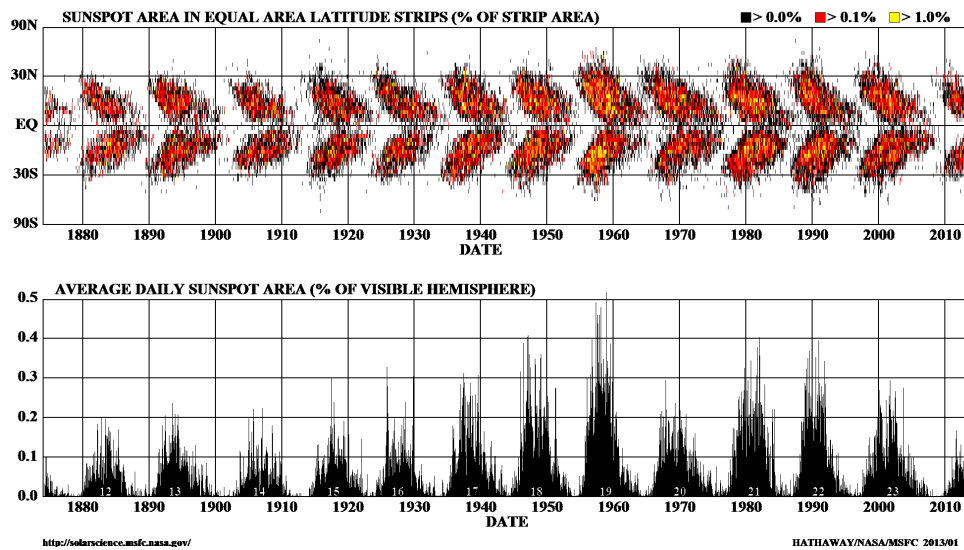


Figure 5 – Diagramme papillon et pourcentage de la surface recouverte de taches solaires pour la période de 1874 à janvier 2013. Image tirée de <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml> en janvier 2013.

Puisque ces objets ont une nature magnétique, il est aisé de relier le cycle des taches à l'activité magnétique sous-jacente à la surface. Les observations de Hale au 20<sup>e</sup> siècle lui permirent d'établir trois lois aujourd'hui connues sous le nom de « Lois de polarité de Hale ». Premièrement, les taches solaires apparaissent par paire de polarités opposées et dans le même ordre pour chaque hémisphère. Deuxièmement, cet ordre est inversé dans l'autre hémisphère. Finalement, cette polarité s'inverse d'un cycle à l'autre.

Il est important que les taches apparaissent par paire puisque si les lignes de champs magnétiques traversent la surface vers l'extérieur en un endroit, elles doivent la traverser de nouveau vers l'intérieur en un autre. La Figure 6 schématise ce phénomène.

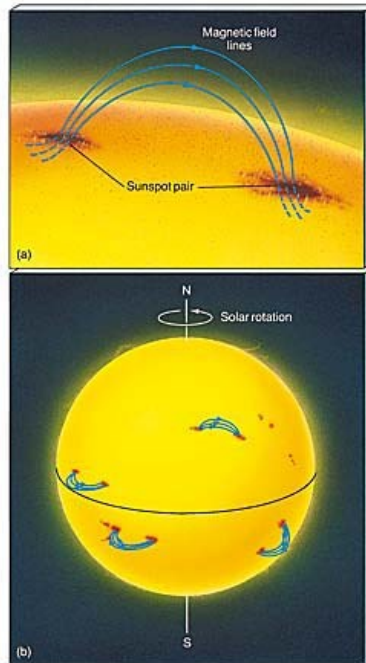


Figure 6 – Représentation schématique de l'émergence des taches solaires selon les lois de polarité de Hale. Schéma pris sur le site [http://faculty.uncfsu.edu/aumantsev/active\\_sun.htm](http://faculty.uncfsu.edu/aumantsev/active_sun.htm) en date de janvier 2013.

Le fait que la polarité s'inverse d'un cycle à l'autre signifie que le champ magnétique toroïdal à grande échelle présent sous la surface subit la même inversion. Le cycle d'activité magnétique solaire possède donc une période de 22 ans (deux fois 11 ans pour retrouver la même polarité). La section inférieure de la Figure 5 présente le pourcentage de la surface couvert par des taches solaires. Plus ce pourcentage est élevé, plus le magnétisme est important. Le maximum du cycle des taches correspond à un maximum (de polarité positive ou négative) de l'activité magnétique. L'étude de la Figure 5 permet aussi de constater que l'intensité de ces maxima varie d'un cycle à l'autre et n'est donc pas stable temporellement. En effet, la Figure 7, qui présente le nombre de taches solaires en fonction du temps sur une période de 400 ans, nous montre d'importantes variations selon le cycle observé. Le minimum de Maunder, qui s'étend de 1645 à 1715 environ, est un exemple d'un grand minimum durant lequel les taches solaires sont majoritairement absentes et l'activité magnétique est quasiment inexistante. Plusieurs de ces événements ce sont produits par le passé, mais ils ne surviennent pas de manière périodique. Pour l'instant, ce phénomène reste incompris et imprévisible.

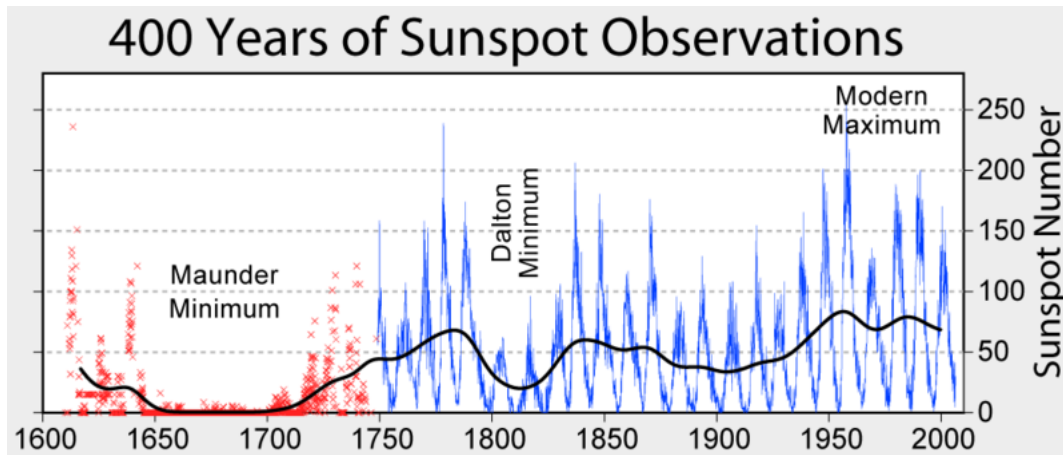


Figure 7 – Évolution du nombre de taches solaires en fonction du temps sur une période de 400 ans. Figure tirée de <http://www.stuffintheair.com/alternative-explanation-for-global-warming.html> en janvier 2013.

Bref, l'activité magnétique du Soleil est liée au cycle des taches solaires. Celles-ci apparaissent sur la photosphère à une latitude donnée selon le moment du cycle et leur émergence s'approche de l'équateur d'un minimum à l'autre. Elles sont regroupées par paires de polarités opposées et sont ordonnées de façon précise dans chaque hémisphère. Cet ordre est opposé dans l'autre hémisphère et il s'inverse à chaque nouveau cycle. Nous sommes donc en présence d'un champ magnétique à grande échelle antisymétrique par rapport à l'équateur dont le cycle d'activité s'étend sur 22 ans. Bien que sa période soit connue, son intensité quant à elle demeure très variable.

### 1.3.L'activité stellaire

Historiquement, le Soleil était considéré comme un astre particulier qu'il fallait différencier de ce qui était appelé à l'époque « les étoiles fixes ». Cependant, nous savons depuis le 17<sup>e</sup> siècle que le Soleil n'est qu'une étoile comme les autres. Son cycle d'activité ne lui est pas non plus unique, ce n'est pas une anomalie. En effet, plusieurs étoiles de type solaire (luminosité et type spectral similaires au Soleil) présentent aussi un cycle d'activité de période connue. Elles possèdent aussi des « taches stellaires » dont l'existence est confirmée depuis les années 1970, initialement par photométrie, puis par diverses techniques modernes comme la spectroscopie et l'imagerie Zeeman-Doppler (voir [5] pour plus de détails sur les différentes techniques d'observation). Malheureusement, comme ces astres se trouvent très

éloignés de nous, il nous est impossible de suivre l'évolution du cycle d'activité par l'observation de ces taches stellaires. Il nous faut donc utiliser un autre paramètre observable.

### 1.3.1. Déterminer la période du cycle

Au milieu des années soixante, l'astronome Olin C. Wilson s'intéressait depuis quelque temps déjà aux cycles d'activité stellaires, mais la technologie ne permettait pas d'effectuer les observations spectroscopiques désirées. Il est le fondateur de ce qui est aujourd'hui appelé le « projet H-K ». Depuis 1966, le relevé de l'observatoire du Mont Wilson (aucun lien avec O. C. Wilson) enregistre le flux d'émission en Ca II dans les bandes H et K (3968.5 Å et 3933.7 Å respectivement) de nombreuses étoiles de type solaire. Originellement, cette mesure était prise chaque mois, mais depuis 1980, elle est enregistrée presque chaque nuit. En 1978, Wilson publie un article historique [48] qui répertorie l'émission en Ca II de 91 étoiles sur une période de 12 ans. Il fut le premier astronome à découvrir les cycles d'activité stellaire.

Cette technique d'observation est encore utilisée et le nombre d'étoiles ciblées par ce projet a augmenté depuis cette première publication (voir Baliunas et coll. (1995) [1]). Nous savons que dans le cas du Soleil, l'activité chromosphérique, dont l'émission H-K du Ca II, est étroitement liée à l'activité magnétique de surface. Nous n'avons aucune raison de croire qu'il en soit autrement pour les autres étoiles de type solaire. Le flux d'émission H-K du Ca II est donc le paramètre observable dont nous avons besoin. La Figure 8, tirée de Baliunas et coll. (1995) [1], montre six exemples, dont le Soleil, de l'observation de ce paramètre (en unité de S) en fonction du temps. La quantité S est définie par

$$S = \alpha \frac{H+K}{V+R}, \quad (1)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de calibration variant à chaque observation,  $H$  et  $K$  correspondent à l'émission combinée dans les bandes du Ca II et  $V$  et  $R$  correspondent à l'émission dans le violet et le rouge du spectre continu. Sur le Soleil, c'est un excellent indicateur de l'activité magnétique.

Il est important de noter, en observant la Figure 8, que certaines étoiles présentent des périodes de cycles bien définies et d'autres semblent avoir plus d'un cycle. Certaines encore ont un niveau d'activité constant alors que d'autres ont une activité variable aperiodique. Il est clair qu'il n'y a pas un type d'activité s'appliquant simplement à toutes les étoiles de la séquence principale.



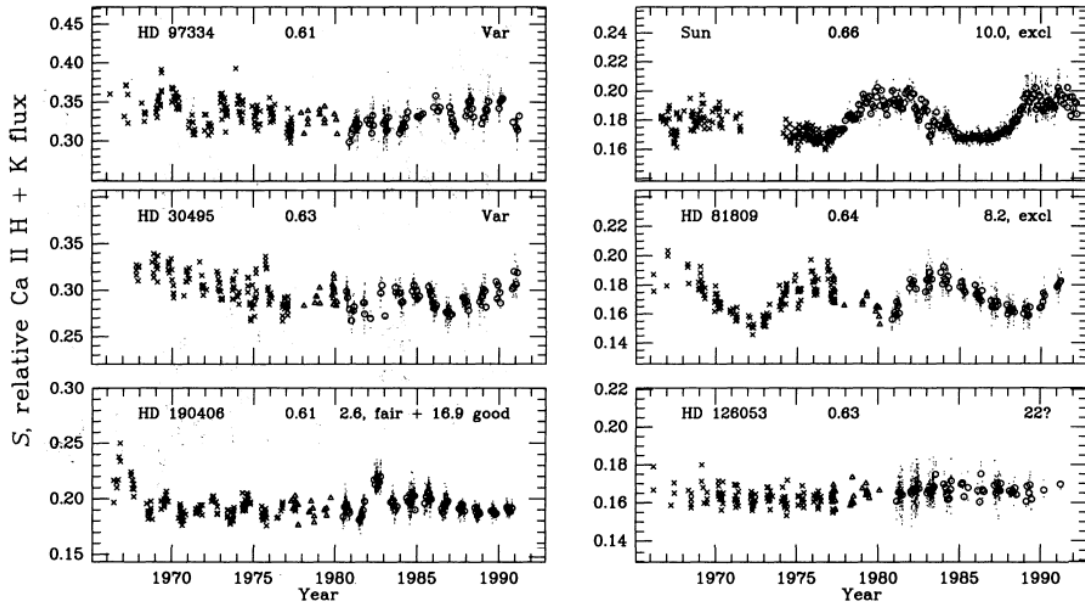


Figure 8 – Données des flux d'émission relatifs du Ca II en unité de S. Extrait de la figure 1d de Baliunas et coll. (1995) [1].

Puisque l'activité coronale est aussi étroitement liée à l'activité magnétique près de la surface, il existe un autre paramètre permettant d'observer les cycles d'activité stellaire. Il s'agit de l'émission en rayons X qui est un bon indicateur de l'activité coronale (voir par exemple [22], [38] et [49]).

Il est donc possible de déterminer la période du cycle d'activité à partir d'observations à long terme (au moins la durée d'un cycle). Cependant, ce genre d'étude demande plusieurs années d'observation et il serait vraiment utile de pouvoir déterminer la période à partir d'autres caractéristiques observables à court terme. Il serait intéressant d'établir, par exemple, une relation entre l'émission chromosphérique ou coronale et la période de rotation ou entre la durée d'un cycle et la période de rotation de l'étoile, la luminosité ou le type spectral. Quelques articles ont déjà abordé ce sujet (voir [32], [33], [2], [6], [43], [38], [34] et [49] par exemple) et tenté d'obtenir de telles relations. Dans la plupart des cas, relier la période du cycle ou le flux d'émission à la période de rotation ou au type spectral donne une corrélation faible, voire nulle. Il existe un paramètre offrant une corrélation plus forte, car il tient compte de la période de rotation et du type spectral, donc des propriétés de la convection de l'étoile. Faisons une petite parenthèse pour bien comprendre ce qu'est ce paramètre : le « nombre de Rossby ».

### 1.3.2. Qu'est-ce que le nombre de Rossby?

Retournons aux équations de base de la magnétohydrodynamique (c.-à-d. la mécanique des fluides avec un champ magnétique). L'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (voir par exemple [10]), ce qui est une bonne approximation pour le plasma stellaire, est définie comme

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (2)$$

où  $p$  représente la pression,  $\rho$  la densité,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $t$  le temps et  $\mathbf{u}$  la vitesse. Un caractère gras signifie qu'il s'agit d'un vecteur. Le terme  $\frac{D}{Dt}$ , qui est appelé la dérivée lagrangienne, est défini par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (3)$$

L'équation (2) est valide dans un référentiel inertiel, mais elle subit des transformations si nous passons à un référentiel en rotation, une étoile par exemple. La vitesse du référentiel inertiel (indice  $I$ ) se transforme comme suit dans un référentiel en rotation (indice  $R$ ) à vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{r}$  est un vecteur position. Il en va de même pour les dérivées lagrangienne.

Appliquons cette transformation à l'équation (3) et développons les termes inertiels :

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \quad (5)$$

$$= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (6)$$

$$= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (7)$$

Substituons cette équation dans l'équation (2) et modifions un peu l'ordre des termes. Nous obtenons alors l'équation de Navier-Stokes dans un référentiel en rotation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \quad (8)$$

Le second terme à droite de l'égalité représente l'accélération de Coriolis tandis que le troisième terme correspond à l'accélération centrifuge.

Une simple analyse dimensionnelle<sup>3</sup> nous permet d'évaluer l'importance relative du terme de Coriolis  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  par rapport au terme inertiel  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  :

$$\frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}} = \frac{U^2/L}{\Omega U} = \frac{U}{\Omega L} \equiv \text{Ro}, \quad (9)$$

où  $U$  et  $L$  sont des valeurs caractéristiques de vitesse et de longueur respectivement. Nous venons de définir le nombre de Rossby qui, dans le cas qui nous intéresse, permet de déterminer l'importance relative de la rotation sur la convection. En général, dans le cadre de l'étude des cycles stellaires, ce nombre est plus petit que l'unité.

L'article de Noyes et coll. (1984b) [33] présente une première relation entre la période du cycle d'activité ( $P_{\text{cyc}}$ ) et le nombre de Rossby que les auteurs définissent comme le rapport de la période de rotation de l'étoile ( $P_{\text{rot}}$ ) sur le temps de retournement convectif ( $\tau_c$ ) à la base de la zone convective. Ce dernier paramètre varie selon le type spectral et ils l'obtiennent à partir de la longueur de mélange (voir [32] pour plus de détails). Selon cet article,  $P_{\text{cyc}} \approx (P_{\text{rot}}/\tau_c)^{1.25}$  donc la période du cycle croît avec le nombre de Rossby.

Au début des années 1990, c'est plutôt le rapport  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  qui est utilisé plutôt que  $P_{\text{cyc}}$  seul. Plusieurs articles présentent différentes relations entre ce rapport et le type spectral, l'émission chromosphérique et le nombre de Rossby (voir par exemple [2] et [47]). Dans Baliunas et coll. (1996) [2], les auteurs présentent un graphique de ce rapport en fonction de l'inverse de la période de rotation. Ils montrent que, selon leurs données,  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  croît lorsque la période diminue.

En 1998, Brandenburg et coll. [6] publient un premier papier présentant une nouvelle relation entre  $P_{\text{cyc}}$  et Ro. Selon leurs résultats, la dépendance de  $P_{\text{rot}}/P_{\text{cyc}} (= \omega_{\text{cyc}}/\Omega)$  par rapport à Ro serait divisée en deux branches de mêmes pentes ( $\omega_{\text{cyc}}/\Omega \propto \text{Ro}^{-0.7}$ ). Les étoiles jeunes (jusqu'à 2-3 milliards d'années) auraient un rapport  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  croissant avec l'inverse du nombre de Rossby. Les étoiles plus vieilles auraient la même dépendance, mais avec un rapport  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  environ six fois plus important.

En 1999, Saar & Brandenburg [43] publient un nouvel article avec un échantillon d'étoiles plus grand et plus varié. Ils obtiennent toujours des résultats semblables, soit

---

<sup>3</sup> Démonstration inspirée de *The theory of rotating fluids* [19].

$\omega_{cyc}/\Omega \propto Ro^{-0.5}$  environ et deux branches séparées par un facteur six. Ce papier montre aussi que la période du cycle d'activité tend à décroître légèrement avec la période de rotation et qu'il existe une corrélation positive entre le flux moyen d'émission chromosphérique  $\langle R'_{HK} \rangle$  et l'inverse du nombre de Rossby.

Enfin, Oláh et coll. (2009) [34] présentent un graphique de  $P_{cyc}/P_{rot}$  en fonction de  $1/P_{rot}$  comme celui présenté dans Baliunas et coll. (1996) [2]. Leurs résultats sont cohérents avec ce qui avait été publié précédemment, soit une croissance du rapport  $P_{cyc}/P_{rot}$  avec une décroissance de la période de rotation.

Tous ces résultats ont été obtenus à partir d'observations et de modèles théoriques. Il serait fort intéressant d'aborder cette question numériquement. Cela a déjà été tenté (voir par exemple [12]), mais à partir de supposition sur plusieurs paramètres, dont le profil de rotation différentielle d'étoiles différentes du Soleil. En effet, les modèles actuels demandent de connaître a priori les profils de la rotation différentielle, du tenseur  $\alpha$  (explications à la §1.4.2) et, dans certains cas, de la circulation méridionale (c.-à-d. dans le plan  $r, \theta$ ) alors que nous ignorons comment ils varient avec la luminosité et la vitesse de rotation.

En 2010, Jouve et coll. [24] utilisent un modèle hydrodynamique 3D pour déterminer comment varie l'amplitude et le profil de la circulation méridionale avec le taux de rotation. Ils utilisent ensuite ces résultats dans un modèle de dynamo de type Babcock-Leighton (voir [9] pour plus de détails sur ce type de modèles) basé sur le transport du flux. Ils ont tenté de reproduire la relation reliant  $P_{cyc}$  et  $P_{rot}$ , mais sans succès.

Nous avons aussi tenté de reproduire les relations obtenues à partir des observations en utilisant un modèle global hydrodynamique tridimensionnel et un modèle de dynamo bidimensionnel simplifié dont les détails sont présentés dans la section suivante.

## 1.4. Les simulations numériques

Dans le cas du Soleil, il nous manque encore plusieurs éléments afin de réellement comprendre le fonctionnement de sa dynamo (c.-à-d. le mécanisme utilisé pour maintenir l'activité magnétique). Plusieurs modèles mathématico-physiques (voir [9] pour un survol)

tentent d'expliquer ce phénomène, mais, bien que certains d'entre eux se démarquent, il n'y en a pas un qui soit totalement accepté. De plus, plusieurs de ces modèles sont très complexes et ne peuvent être abordés analytiquement. C'est pourquoi les simulations numériques entrent en jeu. Avec la technologie actuelle, il est possible de simuler l'évolution temporelle d'un modèle du Soleil sur une maille spatiale donnée dans un temps relativement court. Cette approche numérique permet, en outre, d'améliorer les modèles existants en les comparant avec les observations.

Puisque nous en savons encore moins sur les autres étoiles que sur le Soleil, il est très difficile de les modéliser. La recherche présentée ici est une tentative de modélisation des cycles d'activité stellaire à partir de modèles solaires. Dans un premier temps, les profils de la rotation différentielle et l'hélicité cinétique (voir §1.4.2 pour une description mathématique) sont obtenus à partir d'une simulation hydrodynamique tridimensionnelle solaire. Seuls deux paramètres, la vitesse de rotation de la zone stable et une échelle de temps liée au forçage de la convection, sont modifiés pour différencier cette nouvelle étoile du Soleil. Les différentes valeurs utilisées pour ces paramètres sont présentées dans le Tableau I. Dans un deuxième temps, ces profils sont utilisés comme entrées dans un modèle  $\alpha\Omega$  de dynamo de champs moyens axisymétriques pour obtenir des cycles d'activité magnétique. Nous voulons ainsi obtenir un échantillon de différents régimes convectifs et rotationnels pour des étoiles de type solaire. Des figures résumées des vingt simulations sont présentées à l'Annexe 3.

Vitesse angulaire $\Omega_0$ ( $\times 10^{-6}$ rad/s)	Échelle temporelle (jours solaires)
1.2986	1
1.9479	5
2.5972*	20
3.8958	50
7.7916	

Tableau I – Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations. Chaque vitesse est jumelée à chaque échelle de temps pour un total de 20 simulations. \*Valeur solaire.

### 1.4.1. EULAG-HD

Les simulations hydrodynamiques 3D ont été effectuées à l'aide du code EULAG ([39] pour une description et [14] pour une première application au Soleil). Il permet de résoudre les équations d'un écoulement hydrodynamique en coordonnées polaires pour une coquille

sphérique. Dans le cas présent, nous l'utilisons pour simuler la zone convective à l'aide d'une maille spatiale de 128 points en longitude, 64 points en latitude et 47 points en rayon. La coquille s'étend de 60.2% à 95.8% du rayon solaire.

Piotr K. Smolarkiewicz et Paul Charbonneau [46] ont modifié le code EULAG pour l'étendre à la MHD. Comme le Soleil présente un champ magnétique, il semble naturel d'utiliser cette version du code plutôt que le modèle HD. Cependant, l'obtention de cycles d'activité magnétique stables est ardue et le processus est beaucoup plus long. Dans le cadre d'une maîtrise, il n'aurait pas été réaliste d'envisager un projet d'une telle envergure. L'utilisation d'un modèle  $\alpha\Omega$ , par contre, ne nécessite que le profil de rotation différentielle et le tenseur  $\alpha$  lié à l'étoile. Mathématiquement, ce dernier correspond, au premier ordre, à un coefficient de proportionnalité entre la force électromotrice turbulente  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  et le champ magnétique à grande échelle  $\langle \mathbf{B} \rangle$  (plus de détails à la section suivante). De plus, l'article de Racine et coll. [40] montre que l'évaluation de  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  au premier ordre de  $\langle \mathbf{B} \rangle$  est très satisfaisante et que l'approximation SOCA (Second-Order Correlation Approximation) permet d'obtenir une très bonne estimation de la composante principale du tenseur  $\alpha$ , et ce, même si la turbulence n'est pas homogène et isotrope. Cela justifie donc l'utilisation d'une version HD d'EULAG et d'un modèle  $\alpha\Omega$  de dynamo de champs moyens axisymétriques.

#### 1.4.2. Dynamo $\alpha\Omega$ et modèle de champs moyens axisymétriques

L'approximation des champs moyens est répandue dans le domaine de l'électrodynamique. Il consiste en la séparation en deux composantes indépendantes : le champ moyen à grande échelle et une fluctuation à petite échelle. Dans le cas présent, cette séparation est appliquée à la vitesse  $\mathbf{u}$  et au champ magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}'. \quad (10)$$

Les composantes  $\langle \mathbf{u} \rangle$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$  correspondent aux champs moyennés et  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{b}'$  correspondent aux fluctuations. Ils sont définis tels que  $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$ . Dans le cas présent,  $\langle \cdot \rangle$  correspond à une moyenne zonale (c.-à-d. en longitude).

Si nous appliquons cela à l'équation d'induction MHD suivante

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (11)$$

nous obtenons cette équation pour les champs moyens

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle), \quad (12)$$

où  $\eta$  est la diffusivité magnétique et  $\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$  est la force électromotrice moyenne. Les développements mathématiques menant à cette équation sont présentés à l'Annexe 1.

Avant de poursuivre ce développement, il serait important de faire une brève parenthèse pour expliquer ce que sont l'effet- $\alpha$  et l'effet- $\Omega$ . Le champ magnétique solaire peut se diviser en deux composantes : un champ toroïdal (en  $\phi$ ) et un champ poloïdal (en  $r$  et  $\theta$ ). Ces mécanismes permettent de transformer l'un en l'autre et inversement, ce qui joue un rôle important dans le maintien de la dynamo solaire. Un schéma illustrant ces deux effets est présenté à la Figure 9.

La rotation différentielle crée un cisaillement important qui étire les lignes de champ poloïdales plus rapidement à l'équateur qu'aux pôles. Ce phénomène, l'effet- $\Omega$ , permet ainsi d'enrouler les lignes de champ autour de l'étoile dans la direction toroïdale.

L'effet- $\alpha$ , quant à lui, tord les lignes de champ toroïdales ce qui induit un courant moyen parallèle au champ toroïdal à grande échelle. C'est ce courant qui génère à son tour un champ poloïdal.

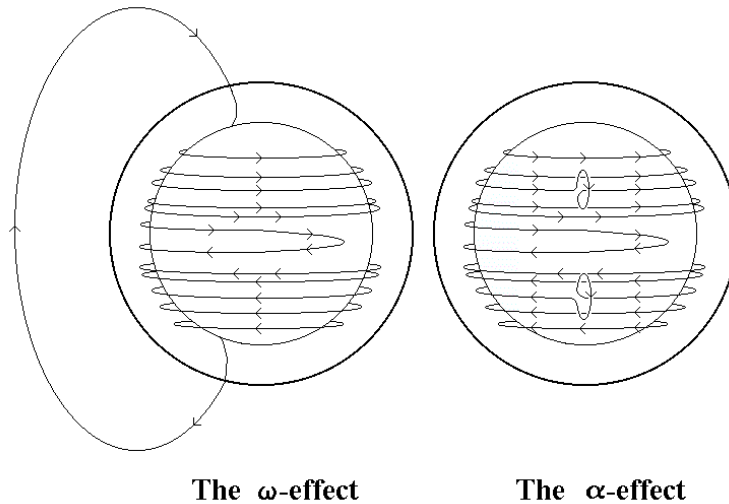


Figure 9 – Représentation schématique de l'effet- $\Omega$  et de l'effet- $\alpha$ . Le premier étire les lignes de champs autour de l'étoile pour amplifier son champ toroïdal tandis que le second tord les lignes de champs sur elles-mêmes pour amplifier le champ poloïdal. Image tirée de <http://solarscience.msfc.nasa.gov/dynamo.shtml> en février 2013.

Retournons à notre développement mathématique de l'équation d'induction. Pour l'instant, la force électromotrice est exprimée en fonction de  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{b}'$ , mais il faut l'exprimer

en fonction des variables moyennées pour pouvoir résoudre l'équation (12). Il existe une relation linéaire entre  $\mathbf{B}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  qui peut être exprimée ainsi

$$\varepsilon_i = \alpha_{ij}\langle B \rangle_j + \beta_{ijk}\partial_k\langle B \rangle_j + \text{termes d'ordre supérieur.} \quad (13)$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont des tenseurs ne dépendant que des propriétés statistiques de  $\mathbf{u}'$  et peut-être de  $\eta$ . Selon l'approximation SOCA, qui suppose une turbulence quasi-isotrope et quasi-homogène, le tenseur  $\alpha$  devient diagonal ( $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ ) et peut être exprimé par

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{3}\tau\langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle = -\frac{1}{3}\tau h_v, \quad (14)$$

où  $\tau$  est le temps de corrélation dans la zone convective (c.-à-d. un rapport entre l'échelle de stratification en densité et la moyenne RMS de  $\mathbf{u}'$ ) et  $h_v$  est l'hélicité cinétique. Si nous substituons cette expression dans l'équation (12) nous obtenons

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (15)$$

Dans le cas où les champs moyens sont axisymétriques, ce qui est le cas en bonne approximation pour les étoiles, le champ magnétique et l'écoulement peuvent être exprimés comme

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\theta, r, t) = \nabla \times (A(\theta, r, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi) + B(\theta, r, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (16)$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle(\theta, r) = \mathbf{u}_p(\theta, r) + \varpi\Omega(\theta, r)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (17)$$

où  $\nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_\phi)$  représente la partie poloïdale du champ magnétique et  $B$  la partie toroïdale,  $\mathbf{u}_p$  la vitesse dans le plan méridional ( $\hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_r$ ),  $\varpi = r \sin \theta$  et  $\Omega(\theta, r)$  la vitesse angulaire de rotation.

En substituant les équations (16) et (17) dans l'équation (15) et en exprimant le résultat sous sa forme adimensionnelle (c.-à-d. en exprimant les longueurs en unités de  $R$ , le rayon solaire, et les temps en unités du temps de diffusion  $R^2/\eta_0$ , où  $\eta_0 = \eta + \beta$  est la diffusivité magnétique turbulente) nous obtenons les deux équations de dynamo suivantes :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla(\varpi A) + C_\alpha \alpha B, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \left( \frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} - R_m \varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \\ & + C_\Omega \varpi [\nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_\phi)] \cdot (\nabla \Omega) + C_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \nabla \times [\alpha \nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_\phi)]. \end{aligned} \quad (19)$$



Nous avons aussi supposé que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes et que  $\eta$  ne dépend que de la profondeur radiale  $r$ . Il y a alors trois nombres adimensionnels qui apparaissent lors de ce développement :

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}, \quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0}, \quad R_m = \frac{u_0 R}{\eta_0}, \quad (20)$$

avec  $\alpha_0$ ,  $u_0$  et  $\Omega_0$  des valeurs de références pour l'effet- $\alpha$ , l'écoulement méridional et la vitesse de rotation respectivement. Les deux quantités  $C_\alpha$  et  $C_\Omega$  sont des nombres dynamos mesurant l'importance de l'effet- $\alpha$  et de la rotation différentielle respectivement et  $R_m$  est le nombre de Reynolds magnétique qui mesure l'importance de l'advection dans le plan méridional par rapport à la diffusion. Le développement mathématique complet est présenté à l'Annexe 2.

Lorsque le cisaillement dû à la rotation différentielle (4<sup>e</sup> terme du côté droit de l'équation (19)) domine sur l'effet- $\alpha$ , le dernier terme de l'équation (19) devient négligeable. Les équations (18) et (19), sans ce dernier terme, correspondent aux équations dynamo d'un modèle  $\alpha\Omega$ . De plus, dans le cas présent, nous avons complètement négligé la circulation dans le plan méridional en posant  $R_m = 0$ . Cela ne pose pas problème puisque d'après les simulations HD, il n'apparaît pas de circulation méridienne cohérente spatialement, mais seulement de nombreuses petites cellules qui varient temporellement. Ce sont donc les expressions

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A + C_\alpha \alpha B, \quad (21)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \left( \frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} + C_\Omega \varpi [\nabla \times (A \hat{e}_\phi)] \cdot (\nabla \Omega), \quad (22)$$

qui sont résolues par la simulation.

Il est important de noter que le tenseur  $\alpha$  apparaît explicitement à l'équation (21) et qu'il en est de même pour la rotation différentielle à l'équation (22). C'est pour cette raison qu'il est impossible de résoudre le système (c.-à-d. trouver  $A$  et  $B$ ) sans connaître a priori  $\alpha$  et  $\Omega$ . Pour plus de détails sur les modèles de champ moyen et la dynamo  $\alpha\Omega$ , voir [10].

Revenons finalement à la méthode numérique utilisée. Tout d'abord, nous exécutons les simulations EULAG en mode HD jusqu'à ce que l'énergie cinétique de la solution soit

stabilisée, soit entre 3000 et 6000 jours solaires selon les cas. Cela nous fournit, entre autres, les trois composantes (c.-à-d. longitudinale, latitudinale et radiale) de la vitesse à grande échelle. Il est alors aisé d'obtenir la rotation différentielle  $\Omega(\theta, r)$  moyennée sur 500 jours solaires. De même, la simulation nous fournit les trois composantes de la fluctuation à petite échelle de la vitesse qui nous permettent de calculer l'hélicité cinétique  $h_v$ . À partir de celle-ci, nous pouvons obtenir une bonne approximation des composantes diagonales du tenseur  $\alpha$  (voir équation (14) ci-haut). Ce dernier est aussi moyenné sur 500 jours et ne dépend donc que de la latitude et de la profondeur radiale. Nous possédons alors deux matrices bidimensionnelles qui sont ensuite utilisées comme entrée pour le modèle  $\alpha\Omega$ .

Cette simulation numérique en deux dimensions est basée sur la méthode des éléments finis et résout le système d'équations (21)-(22) avec le dernier terme en moins dans la deuxième expression (voir [13] pour plus de détails sur le modèle numérique). Cette résolution s'effectue sur une maille spatiale de 96 points en latitude et de 128 points en rayon afin de couvrir le domaine  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0.5R_\odot \leq r \leq 1R_\odot$ . Puisque ce maillage ne correspond pas à celui des simulations EULAG, nous avons recours à une interpolation bilinéaire pour les profils de  $\alpha$  et  $\Omega$ . Par souci de cohérence, l'interface entre la zone stable et la zone convective se situe à  $r = 0.718R_\odot$  dans les deux modèles numériques. Chacune des vingt simulations numériques avec le modèle 2D a été effectuée à 1.5 fois le nombre dynamo critique  $D_{\text{crit}} = C_\alpha \times C_\Omega$  (c.-à-d. nombre dynamo en-dessous duquel le champ magnétique disparaît). Il y a une erreur d'au plus 5% sur  $D_{\text{crit}}$ . Les modélisations numériques ont été exécutées jusqu'à ce que l'énergie magnétique soit stabilisée. À partir de ces résultats, il nous est possible de produire un diagramme papillon du champ magnétique toroïdal (voir la Figure 20 pour un exemple) et de déterminer la période des cycles d'activité stellaire. Pour une latitude donnée, nous recherchons les moments auxquels il y a une inversion de polarité du champ magnétique. La moyenne du temps entre deux inversions correspond à la demi-période du cycle d'activité magnétique. La moyenne est toujours effectuée sur au moins une dizaine de demi-cycles.

## 1.5. Résultats en bref

Nous ne présentons ici que les tendances générales observées dans les résultats. Les analyses et interprétations physiques plus poussées sont présentées au chapitre suivant, soit dans l'article « Stellar dynamos and cycles from numerical simulations of convection » qui a été soumis à l'*Astrophysical Journal*.

Selon nos modélisations, le rapport  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  semble décroître avec le nombre de Rossby ( $\omega_{\text{cyc}}/\Omega \propto \text{Ro}^{0.96}$ ), contrairement à ce qui était présenté dans Saar & Brandenburg (1999) [43] (Figure 10). Ceux-ci obtenaient la relation  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega \propto \text{Ro}^{-0.5}$  pour la plupart des étoiles et  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega \propto \text{Ro}^{0.4}$  pour les étoiles les plus actives ( $P_{\text{rot}} < 3$  jours).

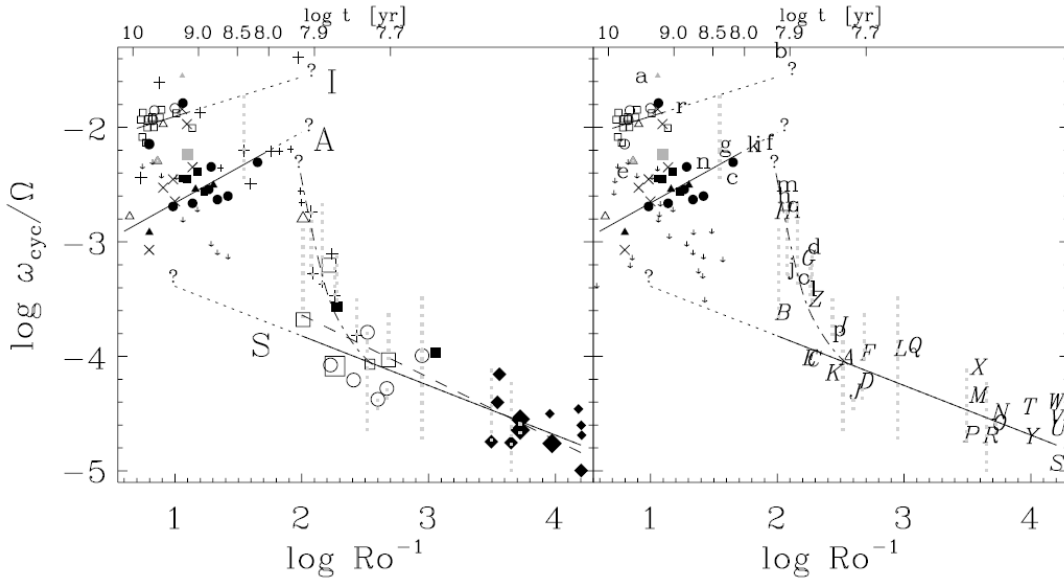


Figure 10 – Variation du rapport  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  avec  $\text{Ro}^{-1}$  (calculé à partir d'un  $\tau_c$  semi-empirique). À gauche, les étoiles de type F, G, K et M et les RS CVn sont indiquées par des triangles, des cercles, des carrés, des losanges et des signes plus respectivement. Les flèches indiquent des variations à long terme ( $P_{\text{cyc}} > 25$  ans) associées à un autre cycle. À droite, la même chose, mais incluant toutes les variations à long terme. Les étoiles sont identifiées avec des lettres pour correspondre à un tableau de l'article. Figure tirée de Saar & Brandenburg (1999) [43].

Cependant, le rapport  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  croît avec l'inverse de la période de rotation ( $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-1.47}$ ) ce qui concorde avec les résultats de Baliunas et coll. (1996) [2], de Saar & Brandenburg (1999) [43] et de Oláh et coll. (2009) [34] (voir Figure 11). Nos résultats présentent par contre une croissance plus rapide que ce qui avait été obtenu précédemment, soit ( $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-0.74}$ ) pour [2] et ( $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-0.81 \pm 0.05}$ ) pour [34].

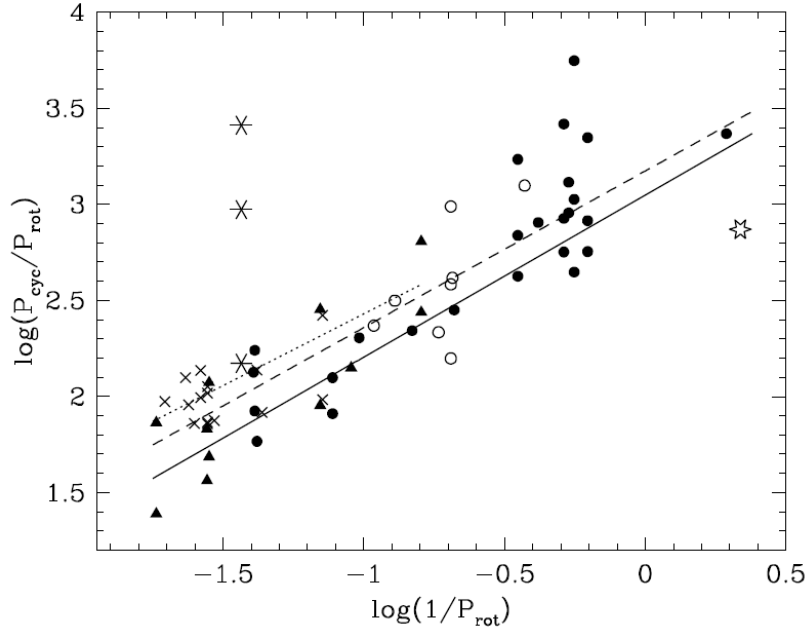


Figure 11 – Variation du rapport  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  avec  $1/P_{\text{rot}}$ . La ligne pointillée correspond à la relation trouvée par Baliunas et coll. (1996) [2], la ligne en tiret est un ajustement à tous les résultats (incluant des résultats de la littérature) et la ligne pleine est un ajustement aux résultats des auteurs. Figure tirée de Oláh et coll. (2009) [34].

Enfin, puisque l'émission chromosphérique et coronale peut être liée à l'activité magnétique, il serait normal d'obtenir des relations qualitativement similaires pour l'émission chromosphérique moyenne H-K, l'émission en rayons X et l'énergie magnétique en fonction du nombre de Rossby. Ce n'est cependant pas le cas puisque nous obtenons que l'énergie magnétique décroît quand  $Ro^{-1}$  augmente ( $E_{\text{mag}} \propto Ro^{0.73}$ ) tandis que, selon [43] (Figure 12), l'émission chromosphérique augmente avec  $Ro^{-1}$ . De même, selon [49], l'émission coronale augmente avec  $Ro^{-1}$  jusqu'à un certain point à partir duquel il y a saturation (voir Figure 13).

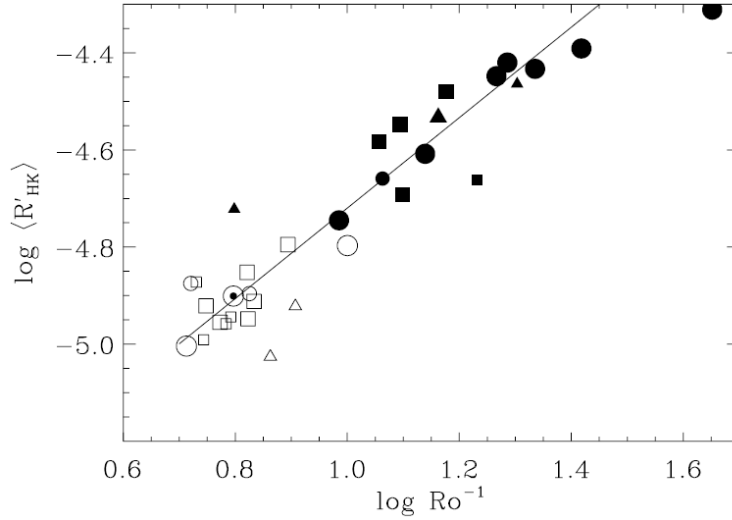


Figure 12 – Variation de l’émission chromosphérique moyenne H-K avec l’inverse du nombre de Rossby (calculé à partir d’un  $\tau_c$  semi-empirique). Les étoiles de type F, G et K sont indiquées par des triangles, des cercles et des carrés respectivement. Figure tirée de Saar & Brandenburg (1999) [43].

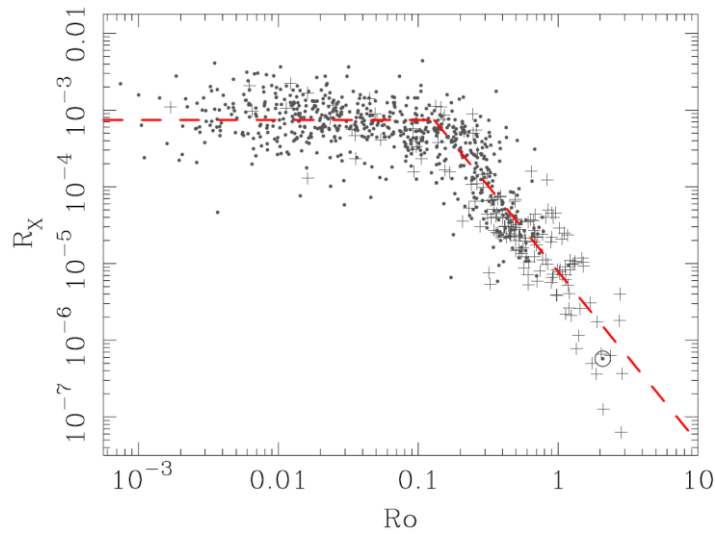


Figure 13 – Rapport de la luminosité en rayons X sur la luminosité bolométrique ( $R_X$ ) en fonction du nombre de Rossby. Les signes + représentent les étoiles binaires. Le trait pointillé rouge est le meilleur fit obtenu pour les étoiles dans les régimes saturé et non-saturé. Figure tirée de Wright et coll. (2011) [49].

## 1.6. Contribution

Puisque je ne suis pas la seule auteure de l’article et que j’ai effectué ma recherche au sein du GRPS, il serait bon de clarifier quelle part de cette modélisation des cycles stellaires est réellement la mienne.

En ce qui concerne l'article, j'ai écrit le premier jet en grande majorité. Mon superviseur, Paul Charbonneau, et moi avons ensuite modifié cette première version en collaboration. De même, les interprétations physiques qui y sont présentées ont été discutées lors de nos rencontres quasi hebdomadaires. J'ai produit toutes les figures présentées dans l'article à l'aide de codes que j'ai écrit, parfois en m'inspirant de programmes déjà écrits par Patrice Beaudoin et Corinne Simard.

Pour ce qui a trait aux deux modèles numériques utilisés, je n'ai en rien participé à leur conception. J'ai exécuté chacune des simulations EULAG sur le serveur *Briarée* du RQCHP. Je n'ai eu qu'à modifier quelques lignes du programme existant. Par contre, j'ai rédigé le code permettant d'extraire certaines variables en m'inspirant d'un programme écrit par Étienne Racine. J'ai aussi écrit le code permettant de déterminer le niveau d'énergie cinétique et sa stabilisation s'il y a lieu. De la même façon, j'ai écrit plusieurs petits programmes me permettant de calculer la valeur numérique de certains paramètres comme le nombre de Rossby ou la diffusivité magnétique turbulente. De plus, j'ai conçu le code permettant d'obtenir le profil du tenseur- $\alpha$  à partir de l'hélicité cinétique.

Ma participation au 2<sup>e</sup> modèle numérique est très similaire. Il a été écrit à la base par Paul Charbonneau [13] puis modifié par Corinne Simard [44]. Je n'ai fait que l'exécuter avec les paramètres requis pour mes différentes modélisations. J'ai modifié en partie le programme produisant les diagrammes papillon et j'ai écrit un code permettant d'extraire la période principale (et secondaire s'il y a lieu) du cycle d'activité stellaire pour une latitude donnée.

La suite de ce mémoire est composée de l'article «Stellar dynamos and cycles from numerical simulations of convection» qui a été à l'*Astrophysical Journal* le 22 mai 2013. Il sera suivi d'une brève conclusion et de quelques annexes présentant des développements mathématiques trop lourds pour être incorporés au corps du texte et des figures résumées pour chacune des vingt simulations. La notation des figures, tableaux et références de l'article a été modifiée pour faire suite à la numérotation de ce premier chapitre.

# **Chapitre 2 – Stellar dynamos and cycles from numerical simulations of convection**

Caroline Dubé<sup>4</sup> & Paul Charbonneau<sup>4</sup>

Submitted to *The Astrophysical Journal*

May 22<sup>nd</sup>, 2013

---

<sup>4</sup> Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

# Abstract

We present a series of kinematic axisymmetric mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo models applicable to solar-type stars, for 20 distinct combinations of rotation rates and luminosities. The internal differential rotation and kinetic helicity profiles required to calculate source terms in these dynamo models are extracted from a corresponding series of global three-dimensional hydrodynamical simulations of solar/stellar convection, so that the resulting dynamo models end up involving only one free-parameter, namely the turbulent magnetic diffusivity in the convecting layers. Even though the  $\alpha\Omega$  dynamo solutions exhibit a broad range of morphologies, and sometimes even double cycles, these models manage to reproduce relatively well the observationally-inferred relationship between cycle period and rotation rate. On the other hand, they fail in capturing the observed increase of magnetic activity levels with rotation rate. This failure is due to our use of a simple algebraic  $\alpha$ -quenching formula as the sole amplitude-limiting nonlinearity. This suggests that  $\alpha$ -quenching is not the primary mechanism setting the amplitude of stellar magnetic cycles, with magnetic-reaction on large-scale flows emerging as the more likely candidate. This inference is coherent with analyses of various recent global magnetohydrodynamical simulations of solar/stellar convection.

*Subject headings:* Convection – Dynamo – Magnetohydrodynamics (MHD) – Stars: activity – Stars: magnetic field

## 2.1. Introduction

For now well over a century the sun has stood as the prototypical star of astrophysics, serving as the benchmark for theories of stellar structure, evolution, seismology, and, more recently, magnetic activity. Evidence for solar-like magnetically-driven radiative emission and flare-like eruptive events is detected in essentially all lower main-sequence star observed with sufficient sensitivity (for a review see Hall (2008) [21]). In particular, outstanding data on cyclic magnetic activity has been obtained from a remarkable survey, begun half a century ago at Mt Wilson observatory, of chromospheric emission in the core of the H and K spectral lines of calcium in a sample of nearby, solar-type stars (Wilson (1978) [48]; see also Baliunas et al.



(1995) [1]; Saar (2011) [42]). Analyses of these data (Noyes et al. 1984a,b [32], [33]) has led to the determination of various empirical relationships linking fundamental stellar parameters such as mass, luminosity and rotation periods ( $P_{\text{rot}}$ , or frequency  $\Omega_0 = 2\pi/P_{\text{rot}}$ ) to cycle periods ( $P_{\text{cyc}}$ , or frequency  $\omega_{\text{cyc}} = 2\pi/P_{\text{cyc}}$ ), mean chromospheric H-K flux ratio ( $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$ ), and more recently X-ray-to-bolometric luminosity ratio ( $R_X$ ). These last two quantities are usually taken as proxy of the overall strength of surface magnetism. Interestingly, the tightest relationships typically result from correlating cycle characteristics to the Rossby number  $\text{Ro} = P_{\text{rot}}/\tau_c$ , where  $\tau_c$  is the convective turnover time. Using mixing length theory of convection to estimate  $\tau_c$ , Noyes et al. (1984a) [32] could show that  $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$  decreases with increasing  $\text{Ro}$ , and Noyes et al. (1984b) [33] obtained a well-defined power law relation  $P_{\text{cyc}} \approx (P_{\text{rot}}/\tau_c)^{1.25}$  for a sample of 13 slowly rotating lower main-sequence star with well-defined regular cycles.

Later analyses of observational data have refined (and complexified) this picture. For example, Saar & Brandenburg (1999) [43] showed that stars older than 0.1 Gyr respect the relation  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{-0.5}$ , but on two quasi-parallel branches separated by a factor of 6 in  $P_{\text{cyc}}$  (see their Figure 5). Rapidly rotating stars, with a rotation period smaller than three days, tend to occupy a third branch with  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{0.4}$ . These authors also show that  $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$  increases with  $\text{Ro}^{-1}$  and that  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0$  decreases when  $\Omega_0$  increases. Baliunas et al. (1996) [2] and Oláh et al. (2009) [34] report a similar positive correlation between the ratio  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  and  $P_{\text{rot}}^{-1}$ . Pizzolato et al. (2003) [38] present a relation between  $R_X$  and an empirical Rossby number obtained for different stellar masses.  $R_X$  is constant for  $\text{Ro} \lesssim 0.1$  (saturated regime) and decreases when  $\text{Ro}$  increases for  $\text{Ro} \gtrsim 0.1$  (unsaturated regime). Finally, Wright et al. (2011) [49] showed that  $R_X$  is constant at  $-3.13 \pm 0.08$  for  $\text{Ro} \lesssim 0.13$  then decreases according to the relation  $R_X \propto \text{Ro}^\beta$ , where  $\beta = -2.55 \pm 0.15$ . They used the same empirical Rossby number as in Pizzolato et al. (2003) [38], but for a larger sample of 824 stars.

The link between stellar cycle properties and the Rossby number is believed to arise as a consequence of the fact that the latter measures the influence of rotation on convective flows, and in particular the degree of cyclonicity imparted by the Coriolis force on convection. This cyclonicity, in turn, is an essential aspect of the regenerative process powering solar and stellar dynamos, as it can provide the mean electromotive force (emf) necessary to regenerate the

large-scale poloidal magnetic component (Parker 1955 [37]), and in doing so circumvent Cowling's theorem. In kinematic mean-field stellar dynamo models relying in this manner on the turbulent emf, a relationship between cycle properties and  $Ro$  is thus expected.

Many conceptual difficulties soon arise in attempting to confront quantitatively stellar cycle observations to dynamo models. Even in the case of the sun, no consensus currently exists as to the exact nature of the dynamo mechanism powering the solar cycle and setting its period. Mean-field models relying on the turbulent emf are still alive and well, but appealing alternatives known as flux-transport dynamos, where the cycle period is set primarily by the speed of the meridional flow pervading the solar convection zone, have also been shown to compare favorably to observations. For a comprehensive review of these (and other) classes of solar dynamo models, see e.g. Charbonneau (2010) [9]. Moreover, an essential “ingredient” in all these dynamo models is the internal differential rotation, which is responsible for generating the toroidal magnetic component. Helioseismology has provided good measurements of the solar internal differential rotation (e.g., Howe (2009) [23], and references therein), but for stars other than the sun only the surface (latitudinal) differential rotation has been determined in a few stars, either from Doppler imaging (e.g., Barnes et al. (2005) [4]) or photometric measurements of light curve variations due to starspots. These observational determinations have yielded mixed conclusions, with the latitudinal differential rotation ( $\Delta\Omega$ ) showing no significant dependency on rotation rate, while other analyses suggest a non-monotonic dependency on the Rossby number (for a concise, critical review, see Saar (2011) [42]). Theoretical models of internal differential rotations (e.g., Kitchatinov & Rüdiger (1999) [26]) and numerical simulations of solar/stellar convection (e.g., Ballot et al. (2007) [3], Brown et al. (2008) [7]) have also yielded conflicting results, with the magnitude of differential rotation showing no significant dependence on rotation rate in the former case, and a significant increase with rotation in the latter.

Not surprisingly, attempts to model stellar cycles using dynamo models can lead to a wide variety of results, depending on the assumptions made regarding the dependence of differential rotation, meridional flow, and cyclonicity of convection on stellar parameters such as rotation rate, mass, luminosity, etc (see, e.g., Baliunas et al. (1996) [2]; Charbonneau & Saar (2001) [12]; Nandy & Martens (2007) [31]; Jouve et al. (2010) [24]). We adopt here the general strategy already introduced by Jouve et al. (2010) [24], which is to use

hydrodynamical simulations of stellar convection to produce large-scale flow profiles that are then used as input to kinematic mean-field dynamo models. Jouve et al. (2010) [24] carried out their dynamo analysis in the context of Babcock-Leighton flux transport models, and so had to further specify a surface source term for their dynamo model. In contrast here we capitalize on a remarkable result obtained by Racine et al. (2011) [40]. Working off a global MHD simulation of the sun producing a large-scale magnetic component undergoing regular polarity reversals (see also Ghizaru et al. (2010) [16]), these authors could fit the turbulent emf extracted from the simulation to the large-scale magnetic component, and in doing so compute the full  $\alpha$ -tensor linking these two quantities. The  $\alpha_{\phi\phi}$  tensor component, the sole poloidal source term in classical  $\alpha\Omega$  mean-field model (more on this in §3 below), was found to closely resemble the expression predicted by the so-called Second-Order Correlation Approximation, which predicts  $\alpha \propto h_v$ , where  $h_v = \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle$  is the mean kinetic helicity of the small-scale flow component. Since the latter can be extracted from hydrodynamical simulations, it becomes possible to construct a mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo model where all large-scale flows and source terms can be computed directly from the simulation.

The remainder of this paper is organized as follows. In the next section we briefly introduce the global hydrodynamical simulations used as input into our mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo models, a brief description of which being provided in §3. We then present a series of kinematic  $\alpha\Omega$  dynamo solutions obtained at different rotation rates and convective regimes (§4), from which we construct relationships linking cycle characteristics to stellar parameters (including the Rossby number), in principle comparable to observational inferences. We conclude in §5 with a critical discussion of dynamo modelling of stellar cycles, in light of our results.

## 2.2. Stellar convection simulations using EULAG

The first step in our modelling is to generate an ensemble of hydrodynamical numerical simulations of stellar convection, pertaining to solar-type stars of varying luminosities and rotation rates. Towards this end we make use of the multiscale flow simulation model EULAG

(Prusa et al. (2008) [39]; see also [www.mmm.ucar.edu/eulag](http://www.mmm.ucar.edu/eulag)). Here we run EULAG in the so-called Implicit Large Eddy Simulation (ILES) mode, in which dissipation is delegated to the underlying advection scheme, which effectively provides a flow-adaptive subgrid scale models. Such EULAG-based ILES global hydrodynamical simulations of solar convection have been reported in Elliott & Smolarkiewicz [14]; Racine et al. (2011) [40] and Guerrero et al. (2013) [20]. The fluid equations are expressed in a rotating frame (angular velocity  $\Omega_0$ ) and solved in the anelastic approximation, subjected to stress-free upper and lower boundary conditions. We adopt here a setup similar to that described in Racine et al. (2011) [40], in which a convectively unstable fluid layer ( $0.718 \leq r/R \leq 0.96$ ) overlays a strongly stably stratified layer ( $0.602 \leq r/R \leq 0.718$ ). Convection is driven by a volumetric forcing term in the energy equation, which continuously forces the stratification to a mildly superadiabatic, solar-like stratification in the convecting layers in a specified timescale  $t_s$ ; the shorter this timescale, the stronger the convection. This procedure, combined with the low dissipative properties of the numerical scheme, allows to drive vigorous convection even under mild superadiabaticity. A drawback is that the model's luminosity in the statistically stationary state is not an input parameter, but results from the final balance reached between the volumetric forcing and convective energy transport. All simulations reported upon below are convectively subluminoous as compared to the Sun.

Columns 2 and 3 of Table II list the input parameter values of the 20 simulations used in what follows, the code name for each being given in the first column. In all cases the simulations pertain to a sun-like sphere, are executed on a (relatively) coarse grid of  $N_\phi \times N_\theta \times N_r = 128 \times 64 \times 47$  in longitude, latitude and radius, with a time step of 30 minutes for all but simulations `r1t50` and `r1.5t50`, where the time step was halved to ensure stability. We considered five values for the rotation rate, going from half to three times the solar rotation rate, and four values for the thermal forcing timescale. Starting from a static state subjected to a small velocity perturbation, each simulation was run until the kinetic energy reached a statistically stationary state persisting for at least 500 solar days (one solar day = 30 Earth days), adding up to anywhere between 3000 and 8000 solar days including the spinup phase. Even though convection sets in quite rapidly, the establishment of a stationary differential rotation profile typically takes much longer, especially in the outer part of the

Name <sup>a</sup>	$\Omega_0/\Omega_\odot$	$t_s$ [s.d.]	$u'_{r\text{ rms}}$ [m s <sup>-1</sup> ] <sup>b</sup>	Ro <sup>c</sup>	$u'_{\text{rms}}$ [m s <sup>-1</sup> ] <sup>d</sup>	$f_c$ [m s <sup>-1</sup> K] <sup>e</sup>	$\eta_0$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ] <sup>f</sup>	$D_{\text{crit}}$ ( $\pm 5\%$ ) <sup>g</sup>	$P_{\text{cyc}}$ [d] <sup>h</sup>	$P_{\text{cyc}}(2)$ [d] <sup>h</sup>	$E_{\text{mag}}$ [ $\times 10^{27}$ J] <sup>i</sup>
r0.5t1	0.5	1	40.8	0.1884	90.2	32.5	1.6e9	185	-	-	2153
r0.5t5	0.5	5	25.1	0.1158	55.1	10.7	1.0e9	3050	41.86	-	260
r0.5t20	0.5	20	16.4	0.0756	34.6	8.7	6.3e8	16500	84.54	-	405
r0.5t50	0.5	50	10.7	0.0494	29.5	13.2	5.3e8	17500	33.22	-	5
r0.75t1	0.75	1	31.8	0.0981	58.8	22.9	1.1e9	3600	58.94	-	813
r0.75t5	0.75	5	24.8	0.0763	47.7	11.2	8.6e8	9250	36.55	54.13	294
r0.75t20	0.75	20	13.9	0.0430	30.7	8.1	5.5e8	7350	119.22	-	158
r0.75t50	0.75	50	9.8	0.0303	27.4	12.0	5.0e8	13500	126.65	-	179
r1t1	1	1	29.5	0.0683	52.1	19.8	9.4e8	5750	57.82	33.00	303
r1t5	1	5	19.8	0.0457	38.6	9.1	7.0e8	5500	87.98	-	196
r1t20	1	20	12.8	0.0296	28.2	7.5	5.1e8	8750	108.22	29.61	63
r1t50	1	50	12.6	0.0291	58.0	12.6	1.0e9	42500	43.47	262.87	2886
r1.5t1	1.5	1	21.1	0.0324	36.7	10.9	6.6e8	9500	133.72	-	485
r1.5t5	1.5	5	16.5	0.0255	32.1	7.3	5.8e8	8750	108.93	-	133
r1.5t20	1.5	20	12.0	0.0186	28.0	6.1	5.1e8	10000	165.82	-	226
r1.5t50	1.5	50	11.6	0.0179	55.3	9.9	1.0e9	43000	76.57	76.57	824
r3t1	3	1	14.0	0.0108	21.4	4.5	3.9e8	13000	-	-	25
r3t5	3	5	11.1	0.0086	20.0	3.0	3.6e8	26500	258.50	-	561
r3t20	3	20	9.5	0.0073	19.5	3.5	3.5e8	19000	73.31	-	16
r3t50	3	50	9.4	0.0072	23.0	4.7	4.2e8	25500	74.82	-	35

Table II – Physical parameters extracted or used for each simulation

<sup>a</sup>Simulation code name. The first number corresponds to the rotation rate of the stable layer (column 2) and the last number corresponds to the thermal forcing timescale (column 3).

<sup>b</sup>rms (zonal, latitudinal and temporal) average of the radial small-scale flow at mid-convective zone

<sup>c</sup>Rossby number defined by eq. (25)

<sup>d</sup>rms (zonal, latitudinal and temporal) average of the total small-scale flow at mid-convection zone

<sup>e</sup>Convective thermal flux at mid-convection zone

<sup>f</sup>(Turbulent) magnetic diffusivity defined by eq. (35)

<sup>g</sup>Critical dynamo number

<sup>h</sup>Main and secondary cycle period

<sup>i</sup>Magnetic energy

stably stratified fluid layer underlying the convecting layers, where a tachocline-like rotational shear layer slowly spreads inwards. Since the pole-to-equator temperature difference developing there as a consequence of rotational variation has a strong impact on the form of rotational isocontour in the overlying convective envelope (Miesch et al. 2006 [28]), it is important to ensure a statistically stationary state has been attained also in the outer reaches of the stable layer.

Working in spherical polar coordinates  $(r, \theta, \phi)$  and using only the stabilized segment of each simulation (duration  $T$ , between 500 and 1000 s.d.), we first compute the zonally- and temporally-averaged mean flow at each grid point in the meridional (radius-latitude) plane:

$$\langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta) \equiv \frac{1}{2\pi T} \int_T \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) d\phi dt \quad (23)$$

which we then subtract from the simulation output to produce the ‘‘turbulent’’ component:

$$\mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta). \quad (24)$$

With the mean and turbulent flow components so-defined, we first extract a number of global quantities, namely the rms latitudinal, zonal and temporal average of the radial and total small-scale flow components at mid-depth within the convecting layer, respectively denoted hereafter  $u'_{r \text{ rms}}$  and  $u'_{\text{rms}}$ . The former is then used to compute a Rossby number:

$$\text{Ro} = \frac{u'_{r \text{ rms}}}{\Omega_0 L}, \quad (25)$$

where  $L$  is the thickness of the convective zone, and  $\Omega_0$  is an input parameter to the EULAG simulations. As a proxy of luminosity, we also compute a mean convective thermal flux proxy, denoted  $f_c$ , in the middle of the convecting layer, by averaging in time, longitude and latitude the product  $u_r \Theta'$ , where  $u_r$  is the radial component of the total fluid velocity and  $\Theta'$  is the fluctuation in temperature about the background stratification. Numerical values for these various quantities are listed in the fourth to seventh column of Table II.

At a fixed rotation rate,  $u'_{\text{rms}}$  and  $u'_{r \text{ rms}}$  (and thus Ro) increase with decreasing thermal forcing timescale, as one would expect from convection being driven more vigorously. However, it is also clear from Table II that rotation affects convective velocities. This is illustrated on Figure 14, showing the variation of  $u'_{r \text{ rms}}$  with rotation rate, for our set of 20 simulations. At a given forcing timescale, convective velocities decrease by up to a factor of two as rotation increases from half to three times solar. This has a number of consequence, the

most noteworthy in the present context being illustrated on Figure 15: even at a fixed thermal

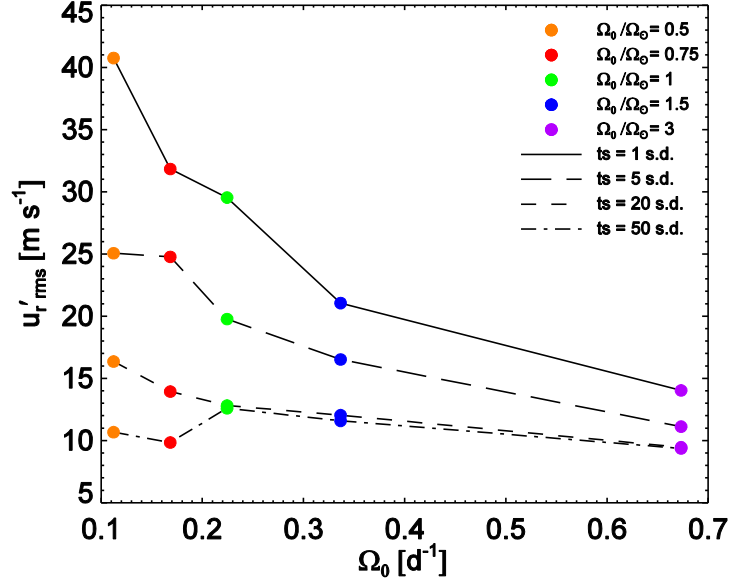


Figure 14 – Variation of the mean rms radial convective flow speed ( $u'_{r,rms}$ ), at mid-convection zone depth, versus rotation rate  $\Omega_0$  in our twenty HD simulations. Here as on subsequent Figures, the color of symbols codes the rotation rate, and are connected by line segment styled according to value of the thermal forcing timescale.  $u'_{r,rms}$  is found to decrease along each sequence of increasing rotation for fixed forcing timescale, indicating that in these simulations rotation significantly affects convection.

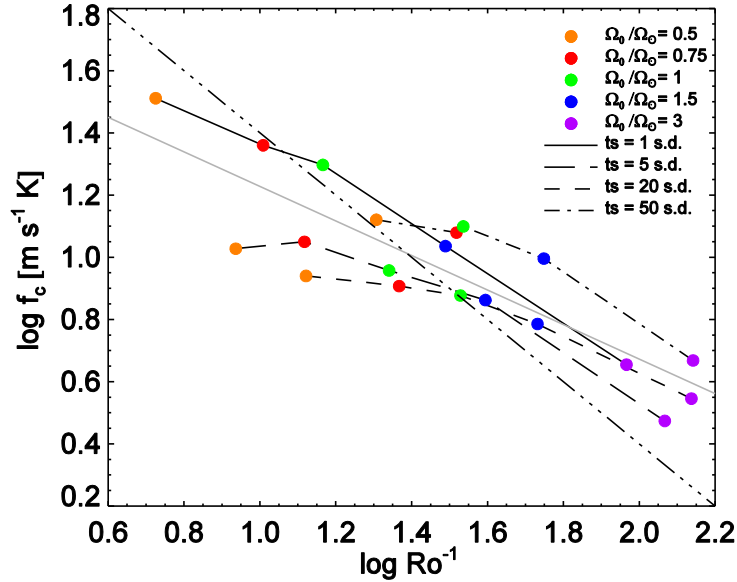


Figure 15 – Variation of the convective thermal flux  $f_c$  at mid-convection zone depth versus inverse Rossby number  $Ro^{-1}$ , for our twenty simulations. Despite large scatter, the ensemble of simulation data can be reasonably well-fit by a power-law with index  $-0.56$  (grey line). That this slope differs from  $-1$  (dashed-triple-dot straight line) is again an indication that convective energy transport is significantly affected by rotation.

forcing timescale, the convective energy flux increases with increasing  $Ro$  more slowly than one would expect from its rotational dependence, with a best-fit power law relationship  $f_c \propto Ro^{0.56}$ . Moreover, at a given  $Ro$ , the convective energy flux can vary by up to a factor of four across the set of simulations. In other words, rotation impacts convection, with the consequence that convective velocities (or energy fluxes) cannot be taken as a rotation-independent proxy of luminosity. This also explains why in Table II, at a given rotation rate,  $u'_{r\text{ rms}}$  decreases monotonically with increasing forcing timescale, but  $f_c$  does not at long forcing times.

Our next task is now to extract from these simulations results the large-scale flows important for dynamo action. Figure 16 presents a subset of mean differential rotation profiles, i.e. zonal and temporal average of the longitudinal flow component, corresponding to three values of the rotation rate (0.5, 1 and 3 times solar, from left to right) and thermal forcing timescale (20, 5 and 1 solar days from top to bottom). In all cases the angular velocity is normalized to that of the base of the stable fluid layer. The tendency for rotational isocontours to align with the rotation axis and the appearance of equatorial acceleration beyond  $\Omega_0/\Omega_\odot \simeq 0.75$  both reflects the growing dominance of the Coriolis force over buoyancy in the internal redistribution of angular momentum (see Gilman (1977) [17]; Kitchatinov & Rüdiger (1999) [26]; Brown et al. (2008) [7]; Käpylä et al. (2011) [25] and references therein).

The magnitude of differential rotation is found here to vary with both thermal forcing timescale and rotation rate. We define an angular velocity contrast  $\Delta\Omega$  over the convection zone as:

$$\Delta\Omega = \max(\Omega(r, \theta)) - \min(\Omega(r, \theta)). \quad (26)$$

For simulations showing equatorial acceleration, this typically measures the equator-to-pole surface angular velocity contrast (cf. Figure 16). It is interesting to examine the variation of this quantity with the rotation rate and the Rossby number. As can be seen on Figure 17,  $\Delta\Omega/\Omega_0$  decreases with  $\Omega_0$ . Using all data points, a power law fit yields  $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \Omega_0^{-0.56}$  (grey solid line). Alternately, omitting simulations that do not show equatorial acceleration leads to a slightly steeper decrease, namely  $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \Omega_0^{-0.69}$  (fit not shown). In both cases the slope is shallower than -1, implying that the equator-to-pole angular velocity contrast increases moderately with increasing rotation. This scaling is similar to the  $\Delta\Omega \propto \Omega_0^{0.3}$  relation obtained



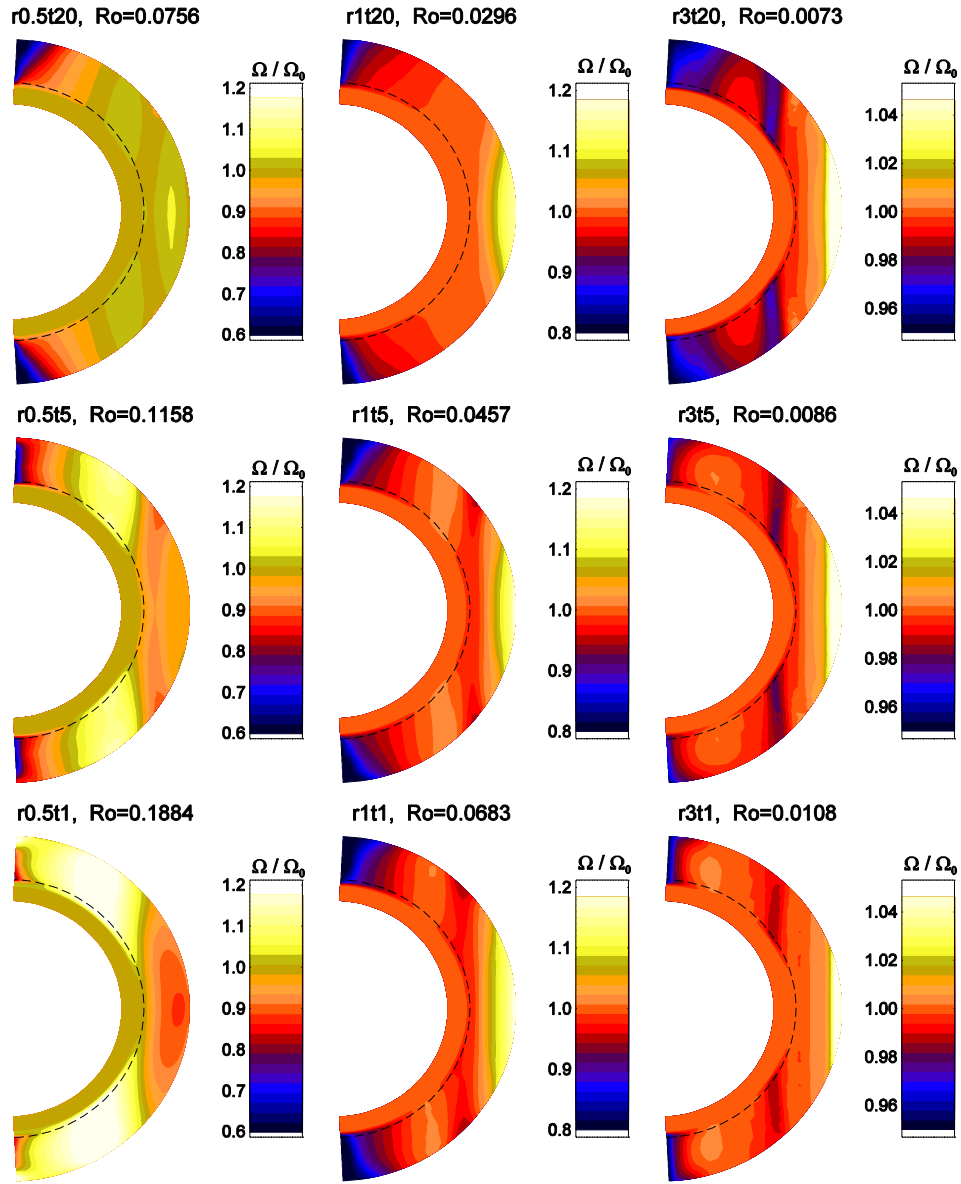


Figure 16 – Differential rotation profiles in a meridional plane for a subset of 9 out of the 20 hydrodynamical simulations. All profiles are normalized according to the rotation rate of their stable layer  $\Omega_0$ . The rotation rate increases from left to right ( $\Omega_0/\Omega_\odot = 0.5; 1$  and  $3$ ) and the timescale for thermal forcing from bottom to top ( $t_s = 1; 5$  and  $20$ ). The colorscale goes from black (slower than the stable layer) to white (faster than the stable layer). Note the use of a different colorscale for each rotation rate. The Rossby number is indicated above each panel. The dashed line indicates the base of the convectively unstable fluid layers. Most simulations present solar-like surface differential rotation profile characterized by polar deceleration and equatorial acceleration, but isocontours of angular velocity show too strong an alignment with the rotation axis, as compared to helioseismic inversions of the solar internal differential rotation. This alignment is most pronounced at small thermal forcing timescales or high rotation rates, but here does not show a clear relationship to Rossby number.

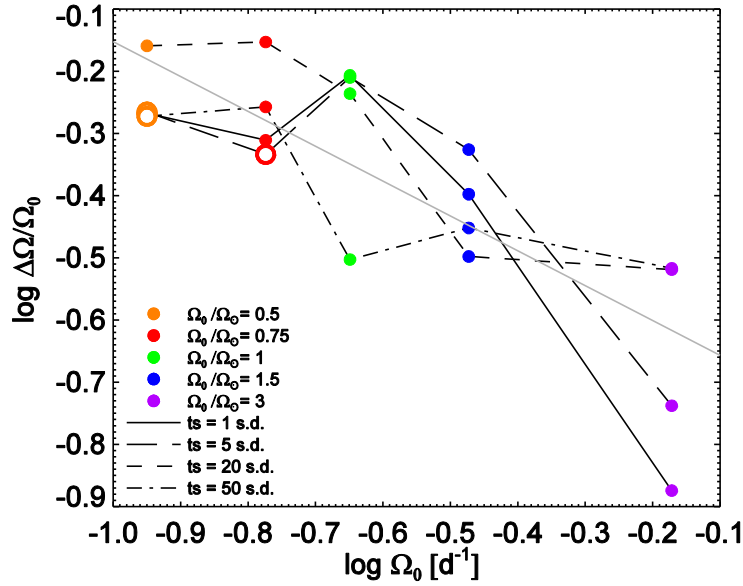


Figure 17 – Differential rotation contrast  $\Delta\Omega/\Omega_0$  versus rotation rate  $\Omega_0$ . Coding of symbols and lines as in Figure 14, with the few open symbols identifying simulations without equatorial acceleration. The best power law fit is  $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \Omega_0^{-0.56}$  with all points, and  $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \Omega_0^{-0.69}$  (fit not shown) if simulations without equatorial acceleration are omitted.

by Brown et al. (2008) [7] on the basis of numerical simulations conceptually similar to ours, but remains steeper than the very weak scaling predicted by the Kitchatinov & Rüdiger (1999) [26] model (see also Küker et al. (2011) [27]). Likewise, Figure 18 shows that  $\Delta\Omega$  also increases with  $\text{Ro}^{-1}$ , with a best-fit power law of the form  $\Delta\Omega \propto \text{Ro}^{-0.27}$  if all simulations are used, or  $\Delta\Omega \propto \text{Ro}^{-0.19}$  if only simulations showing equatorial acceleration are retained in the fit. The large scatter and restricted range in  $\log(\Delta\Omega)$  renders the fit dubious, but it should be noted that the tendency for  $\Delta\Omega$  to first increase, then decrease with increasing inverse Rossby number finds an analog in the observational analysis of Saar (2011) [42] (see his Figure 2).

None of these simulations generates a spatially well-organized large-scale meridional flow, the zonal+temporal averages  $\langle u_r \rangle$  and  $\langle u_\theta \rangle$  defining a weak and spatially complex multi-cell pattern. Consequently, the large-scale meridional flow will be set to zero in all dynamo calculations to follow.

Another quantity which will be used in what follows is the mean kinetic helicity associated with the small-scale, “turbulent” component of the flow:

$$h_v(r, \theta) = \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle, \quad (27)$$

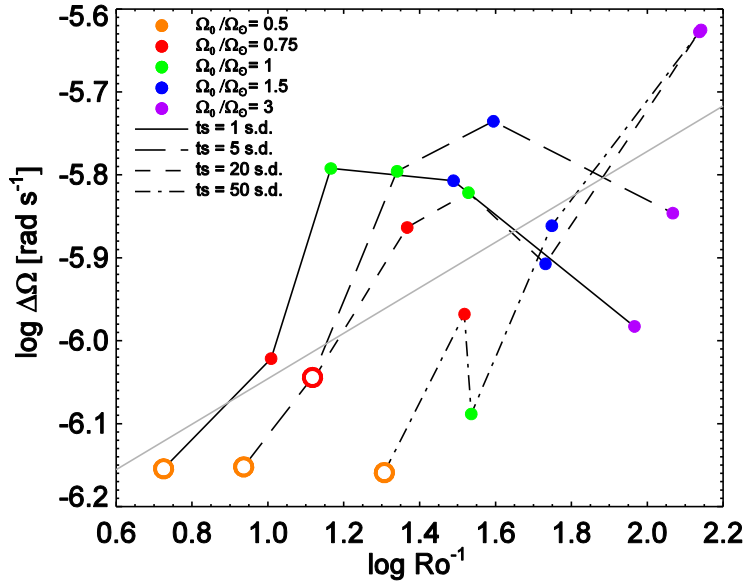


Figure 18 – Variation of  $\Delta\Omega$  with  $Ro^{-1}$ . Colors, symbols and lines as in Figure 17. The best power law fit is  $\Delta\Omega \propto Ro^{-0.27}$  including all points, or  $\Delta\Omega \propto Ro^{-0.19}$  neglecting simulations without equatorial acceleration (fit now shown). The relatively small range in  $\log(\Delta\Omega)$  and large scatter gives limited meaning to these fits, but the non-monotonic variation of  $\log(\Delta\Omega)$  with  $Ro^{-1}$  has an observational counterpart (see text).

where, as before, angular brackets indicate an average in longitude and time over the statistically stationary phase of the simulations. Figure 19 shows kinetic helicity profiles for the same subset of nine simulations as on Figure 16. In all cases, kinetic helicity is predominantly negative (positive) in the Northern (Southern) hemisphere, as expected from the hemispheric dependency of the Coriolis force imparting cyclonicity on convective updrafts and downdrafts. A sign change is also present at the base of the convection zone, reflecting the spreading of convective downdrafts impinging on the stable fluid layer underlying the convection zone. Helicity increases with increasing thermal forcing, and typically peaks at high latitudes, with a secondary extremum at low latitudes that gradually disappears as rotation increases.

We now have in hand the ingredients required for the construction of kinematic mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo models, to which we now turn.

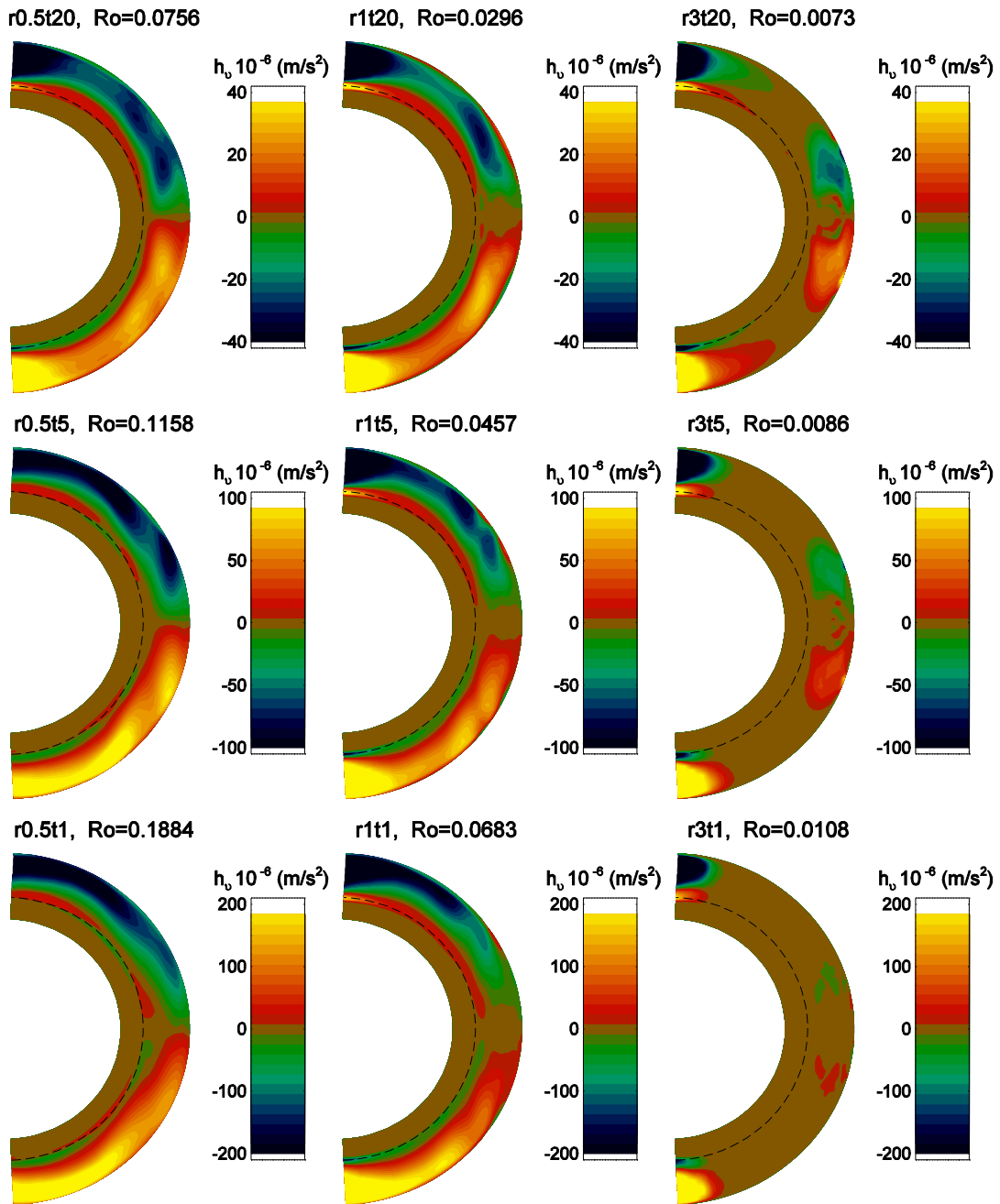


Figure 19 – Kinetic helicity profiles in a meridional plane for the same subset of 9 simulations as on Figure 16:  $\Omega_0/\Omega_\odot = 0.5; 1; 3$  from left to right, and forcing timescale 20; 5; 1 solar days from top to bottom. The colorscale indicates the magnitude and sign of  $h_v$  in  $\text{m s}^{-2}$ , with the range increasing from top to bottom. The Rossby number is indicated above each panel. Typically, helicity peaks in polar regions, with secondary extrema appearing at low latitudes. Helicity is negative (positive) in the Northern (Southern) hemisphere, and changes sign near the base of the convection zone, due to the shearing of downward plumes impinging on the underlying stably stratified fluid layer.

### 2.3. Mean-field $\alpha\Omega$ dynamo

We restrict ourselves here to the simplest form of mean-field dynamo applicable to the Sun, namely a kinematic axisymmetric  $\alpha\Omega$  model. The mean (large-scale and axisymmetric) magnetic field is first expressed through a large-scale toroidal magnetic component  $B(r, \theta, t)$  and toroidal vector potential  $A(r, \theta, t)$  defining the poloidal magnetic component:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t) = \nabla \times (A(r, \theta, t) \hat{e}_\phi) + B(r, \theta, t) \hat{e}_\phi \quad (28)$$

Similarly, the mean (axisymmetric) zonal flow is retained as the only large-scale flow in the model, and is expressed in terms of an angular velocity of (differential) rotation :

$$\langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta) = \varpi \Omega(r, \theta) \hat{e}_\phi \quad (29)$$

with  $\varpi = r \sin \theta$ . This mean differential rotation profile is considered steady in the dynamo solutions computed below. In the  $\alpha\Omega$  limit, the dimensionless evolution equations for  $A$  and  $B$  then take the form:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A + C_\alpha \alpha B, \quad (30)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \left( \frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot (\nabla \Omega), \quad (31)$$

with all lengths expressed in units of the solar radius  $R$ , and time in units of the magnetic diffusion time  $\tau_D = R^2/\eta_0$ ,  $\eta_0$  being a reference value for the (turbulent) magnetic diffusivity in the convective envelope. The above form of the  $\alpha\Omega$  dynamo equations leaves open the possibility that the net (turbulent) magnetic diffusivity depends on depth in the model.

In this so-called  $\alpha\Omega$  framework, shearing by differential rotation is the sole source term for the toroidal magnetic component, while the  $\alpha B$  term in eq. (30) is the sole source contribution for the poloidal magnetic field, and corresponds to the turbulent electromotive force provided by the small-scale flow. In terms of the full tensorial relation linking the turbulent emf to the mean magnetic field in the more general case, the coefficient  $\alpha$  corresponds to the  $\phi\phi$  component of the full  $\alpha$ -tensor (see, e.g, Moffatt (1978) [29], §9; Charbonneau (2010) [9], §4.2; and references therein). The strength of the two source terms is measured by the dimensionless dynamo numbers

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}, \quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0}, \quad (32)$$

where  $\alpha_0$ ,  $\Omega_0$  and  $\eta_0$  are characteristic scaling values.

In the present context the differential rotation profile are extracted directly from the hydrodynamical simulations described in the preceding section (viz. Figure 16). For the  $\alpha$ -coefficient in eq. (30) we make use of an analytical result obtained under the so-called Second-Order Correlation Approximation (SOCA; Rempel (2009) [41], §3.4.3; Ossendrijver et al. (2001) [36]; Ossendrijver (2003) [35]), which links the diagonal, isotropic component of the  $\alpha$ -tensor to the kinetic helicity:

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle = -\frac{\tau}{3} h_v, \quad (33)$$

with  $\tau$  the correlation time of the turbulence and  $h_v$  the mean kinetic helicity, which is also extracted from our hydrodynamical simulations (viz. Figure 19). Following Brown et al. (2010) [8] and Racine et al. (2011) [40], the correlation time is estimated as:

$$\tau(r) = \frac{H_\rho(r)}{u'_{\text{rms}}(r)} \quad (34)$$

where  $H_\rho$  is the density scale of the background stratification and  $u'_{\text{rms}}$  is the rms average (zonally, latitudinally and temporally) of the small-scale part of the velocity. Working with a simulation of solar convection computed with the magnetohydrodynamical version of EULAG (see Smolarkiewicz & Charbonneau (2013) [46]), Racine et al. (2011) [40] could show that eq. (33) yields a surprisingly good representation of the  $\alpha_{\phi\phi}$  tensor component directly extracted from their simulation (see their Figure 15 and accompanying discussion). The simulation analyzed by these authors is otherwise identical to our simulation r1t20 in Table II. In what follows we assume that this good agreement carries over to other values of rotation rate and thermal forcing.

The only remaining unknown in the model is the turbulent diffusivity. SOCA also provides an estimate for this quantity, namely:

$$\eta_0 = \frac{\tau}{3} (u'_{\text{rms}})^2 \quad (35)$$

This value, here taken at mid-convective zone depth and listed in the eight column of Table II, is assumed constant throughout the convection zone, and is smoothly matched to a lower diffusivity in the underlying core (see Simard et al. (2013) [44], §2.3). For numerical convenience we set this turbulent diffusivity contrast  $\Delta\eta = 10$ .

The  $\eta_0$  values listed in Table II are at the very high end of the range of values obtained by mixing-length estimates for  $u'_{\text{rms}}$ . Simard et al. (2013) [44], by an order-of-magnitude analysis of the turbulent emf expansion characterizing the MHD simulation analyzed in Racine et al. (2011) [40], estimated that the above SOCA expression for  $\eta_0$  overestimates the true diffusivity by a factor of about twenty. The difference is important, because the value of diffusivity sets the magnetic diffusion time  $\tau_D = R^2/\eta_0$ , in turn used as a time unit in scaling the dynamo equation. Consequently, the cycle periods characterizing the dynamo solutions to be discussed in the following section scale inversely with the adopted value of  $\eta_0$ .

With the turbulent diffusivity in hand, the  $\alpha\Omega$  dynamo model defined by eqs. (30) – (31) no longer involves any adjustable parameters or functionals. However, with an  $\alpha$ -coefficient independent of the magnetic field strength, the  $\alpha\Omega$  dynamo equations are linear in  $A$  and  $B$ , and dynamo action will lead to exponential growth or decay, according to the numerical value of the total dynamo number  $D \equiv C_\Omega \times C_\alpha$ . We adopted the following strategy. First, for each set of differential rotation and kinetic helicity profile extracted from a simulation, we determine the critical dynamo number  $D_{\text{crit}}$  at which an initial field neither grows or decays (listed in ninth column in Table II and determined to an accuracy of  $\pm 5\%$ ). Then, we arbitrarily fix  $C_\alpha = 12.5$  and choose  $C_\Omega$  such that  $D = C_\alpha C_\Omega = 1.5D_{\text{crit}}$ . Finally, we introduce an *ad hoc* amplitude-limiting nonlinearity known as algebraic  $\alpha$ -quenching:

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{1 + (B/B_{\text{eq}})^2}, \quad (36)$$

where  $B_{\text{eq}} \propto u'_{\text{rms}}$  is the equipartition field strength, the numerical value of which setting the absolute scale of the magnetic field amplitude in the dynamo calculations. For an  $\alpha\Omega$  model with  $\alpha$ -quenching, the value of  $B_{\text{eq}}$  does not affect cycle period, but only its magnitude. We adopt a value  $B_{\text{eq}} = 5$  kG for the reference simulation  $r1t20$ , and scale it according to the ratio of rms convective flow velocity in the other simulations.

The numerical solution of eqs. (30) – (31) in the meridional plane is carried out using the finite element-based model described in Charbonneau et al. (2005) [13] and Simard et al. (2013) [44], on a spatial mesh of  $N_\theta \times N_r = 96 \times 128$  bilinear elements. Bilinear interpolation is used to evaluate on this mesh the angular velocity and  $\alpha$ -coefficient profiles extracted from the numerical simulations. The dynamo simulations are initialized using a very

weak toroidal magnetic field, and are integrated in time until the magnetic energy stabilizes. All analyses reported upon below extract cycle characteristics from this stationary phase, excluding the initial transient phase of exponential growth.

## 2.4. Results

### 2.4.1. Validation

We first examine in some detail the  $\alpha\Omega$  model constructed from our reference “solar” simulation `r1t20` ( $\Omega_0 = 2.5972 \times 10^{-6}$  rad/s ( $\Rightarrow P_{\text{rot}} = 28$  d.) and  $t_s = 20$  s.d.). Figure 20 shows a time-latitude diagram of the mean toroidal field at mid-convection depth ( $r/R = 0.85$ ) and a radius-time diagram of the same at latitude +22.5 degrees. This solution exhibits two distinct dynamo modes, both of roughly the same amplitude and peaking within the convection zone at  $r/R \approx 0.9$ , the first at low latitudes and the other, with a frequency almost four times higher, in the polar region. The origin of this “double-dynamo” behavior can be traced to the spatial profiles of differential rotation and kinetic helicity: the former usually show a strong shear region at low latitudes, and a weaker shear near the poles (viz. top-center panel on Figure 16), while the latter peak in polar regions, and often show a secondary peak at mid to low latitudes (see top-center panel on Figure 19). The low (high) latitude mode exhibits poleward (equatorward) propagation, which is precisely the pattern expected from the Parker-Yoshimura sign rule for dynamo waves feeding on positive (negative) radial shear and a positive (negative)  $\alpha$ -effect in the Northern (Southern) hemisphere. Both modes also exhibit propagation directed radially outward, again as expected from the sign of the local latitudinal shear.

Figure 21 shows, in the same format as Figure 20, the spatiotemporal evolution of the zonally-averaged toroidal magnetic component in a EULAG-MHD simulation carried out at the solar rotation rate and using the same thermal forcing timescale as our reference HD simulation `r1t20`. This global MHD simulation generates a large-scale magnetic cycle within its convection zone that shows some striking similarities to the mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo solution of Figure 20: a dynamo mode concentrated in equatorial regions, peaking at latitude  $\sim 25$  degrees and depth  $r/R \approx 0.9$ , antisymmetric about the equator and propagating poleward



and upward. Close examination of Figure 21 also reveals a low amplitude polar mode, although now with a frequency comparable to its low latitude counterpart, and showing at best a hint of equatorward propagation. These dissimilarities notwithstanding, the morphological resemblance between the fully dynamical 3D global MHD simulation and the much simpler axisymmetric kinematic  $\alpha\Omega$  dynamo solution remains striking. It also lends confidence to our adopted modelling approach.

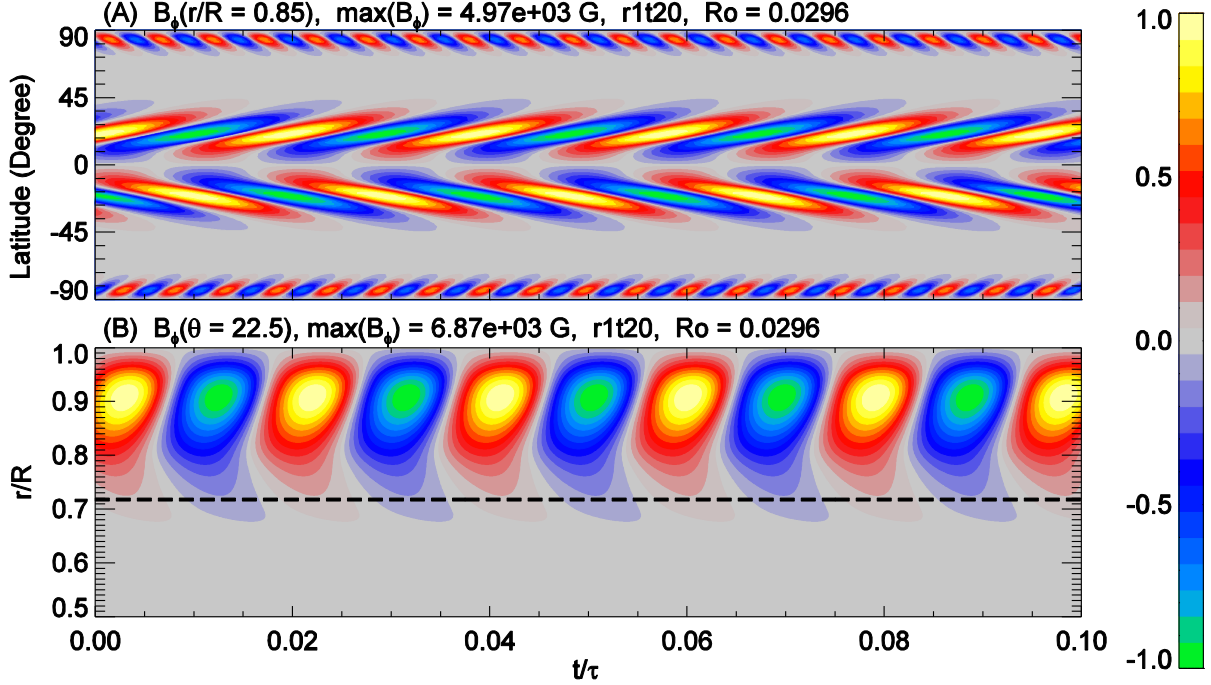


Figure 20 – Spatiotemporal evolution of the zonally-averaged toroidal magnetic field for the  $\alpha\Omega$  model constructed from reference solution  $r1t20$ . The top panel shows a time-latitude diagram at  $r/R = 0.85$  and the bottom panel shows a time-radius diagram at  $22.5^\circ$  latitude, where the dashed line indicates the base of the convective zone. The color scale codes the magnetic field strength, normalized to the maximum absolute value shown above each panel. The input parameter values used are  $C_\Omega = 1050$ ,  $C_\alpha = 12.5$ , and  $\Delta\eta = 10$ . The resolution used is  $N_\theta \times N_r = 96 \times 128$ . The primary dynamo mode (greater magnetic intensity) is concentrated at low latitudes, is antisymmetric with respect to the equator, and migrates poleward in the course of the cycle. There is a second, shorter cycle at polar latitudes. Both modes behave similarly in a time-radius diagram, peaking around  $r/R \approx 0.9$  and migrating upward through the bulk of the convection zone.

#### 2.4.2. More dynamo solutions across parameter space

Henceforth the strategy is in principle simple: we compute  $\alpha\Omega$  dynamo solutions using the differential rotation profiles and  $\alpha$ -coefficients constructed from the helicity profiles associated with each of our twenty HD simulations of convection. We then extract time-latitude diagrams of the axisymmetric mean toroidal magnetic component at mid-convection

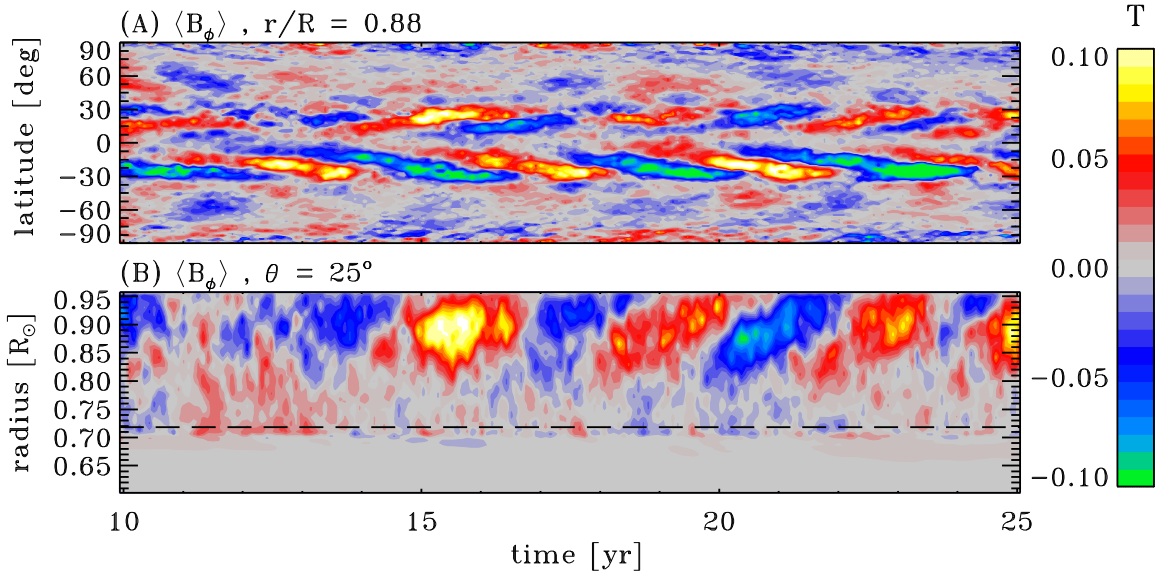


Figure 21 – Spatiotemporal evolution of the zonally-averaged toroidal magnetic field for a EULAG-MHD simulation otherwise identical to the  $r1t20$  simulation used to generate the  $\alpha\Omega$  dynamo solution of Figure 20. The top panel shows a time-latitude diagram at  $r/R = 0.88$  and the bottom panel a time-radius diagram at  $25^\circ$  latitude; the dashed line indicates the base of the convective zone. The color scale denotes the magnetic field strength in Tesla. A small explicit magnetic dissipation of  $\eta = 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  is included in this MHD simulation, executed at a resolution of  $N_\phi \times N_\theta \times N_r = 256 \times 128 \times 97$ . The cycle is located at low latitudes and is also antisymmetric relative to the equator. In a time-radius diagram, the cycle reaches maximum intensity around  $r/R \approx 0.9$ . Comparing this figure to Figure 20 suggests that our simplified  $\alpha\Omega$  model can capture the main features of a global MHD simulation.

zone depth in each model. From these time-latitude diagrams we then measure the cycle period,  $P_{\text{cyc}}$  (half the magnetic period). This is listed in the tenth column of Table II. In some cases, as with the  $r1t20$  solution of Figure 20, there are two distinct activity cycles, in which case the secondary cycle period is denoted  $P_{\text{cyc}}(2)$  and is listed in the eleventh column of Table II. The periods are all much shorter than observed, but this is a direct consequence of the very high magnetic diffusivity values used in the  $\alpha\Omega$  dynamo model, as per eq. (35). Reducing it by a factor of twenty, as suggested by the analysis of Simard et al. (2013) [44], would bring them much closer to observations. Two  $\alpha\Omega$  models actually generate non-oscillatory, steady magnetic solutions, in which case no period is listed in Table II. Finally, for each solution, we also compute the temporally-averaged magnetic energy  $E_{\text{mag}}$ , the result being listed in the rightmost column of Table II.

All that remain is to correlate cycle period and magnetic energy to global model properties such as rotation rates, Rossby numbers, etc. This seemingly straightforward approach is complicated by the fact that the morphology of the dynamo mode(s) can vary significantly across our parameter space, even though the latter is relatively restricted in span (a factor of 6 in rotation rate, and approximately 8 in convective luminosity). This is illustrated on Figure 22, showing dynamo solutions for a subset of our simulations, namely  $r_{0.5 \pm 5}$ ,  $r_{0.5 \pm 20}$ ,  $r_{1 \pm 50}$  and  $r_{3 \pm 20}$ . Figure 22A illustrates a single-cycle dynamo solution peaking at mid-latitudes and exhibiting equatorward propagation, symmetric about the equatorial plane. As with the solution of Figure 20, the dynamo mode peaks around  $r/R \simeq 0.9$  and shows upwards propagation. Figure 22B, in contrast, shows a solution characterized by a cycle peaking at high latitudes. Moreover, this dynamo mode now peaks slightly below the core-envelope interface, and shows only mild upward propagation. Figure 22C shows a dual-mode dynamo solution, as on Figure 20, this time with the high latitude mode having a period some 6 times longer than the low latitude mode and modulating the latter's amplitude. Here the low latitude cycle peaks at mid-depth within the convection zone, while the high latitude mode peaks again slightly beneath the core-envelope interface, propagating upwards in the convection zone and penetrating deeply into the tachocline. Figure 22D, finally, shows a short period, equatorially-concentrated single-mode dynamo solution symmetric about the equatorial plane, propagating poleward and peaking at  $r/R \simeq 0.95$ , in the outer reaches of the convection zone.

How can this wide disparity in spatiotemporal evolution be explained? The most prominent variation occurs with the appearance of equatorial acceleration as one transits from slowly rotating models ( $\Omega_0/\Omega_\odot \lesssim 0.75$ ) to more rapid rotation. The peak rotational shear, and thus the dynamo mode, transits from mid to low latitudes (cf. panels A, B and C, D of Figure 22). The  $r_{1 \pm 50}$  dynamo solution of Figure 22C is unique amongst the set in producing a low latitude dynamo mode propagating towards and peaking at the equator; this can be traced to the (non-solar) differential rotation profile, where the region of equatorial acceleration peaks deep in the convection zone, leading to a negative radial gradient of angular velocity in the outer half of the convection zone. In conjunction with a positive  $\alpha$ -effect in the N-hemisphere, this leads to equatorward propagation of dynamo waves, as per the Parker-

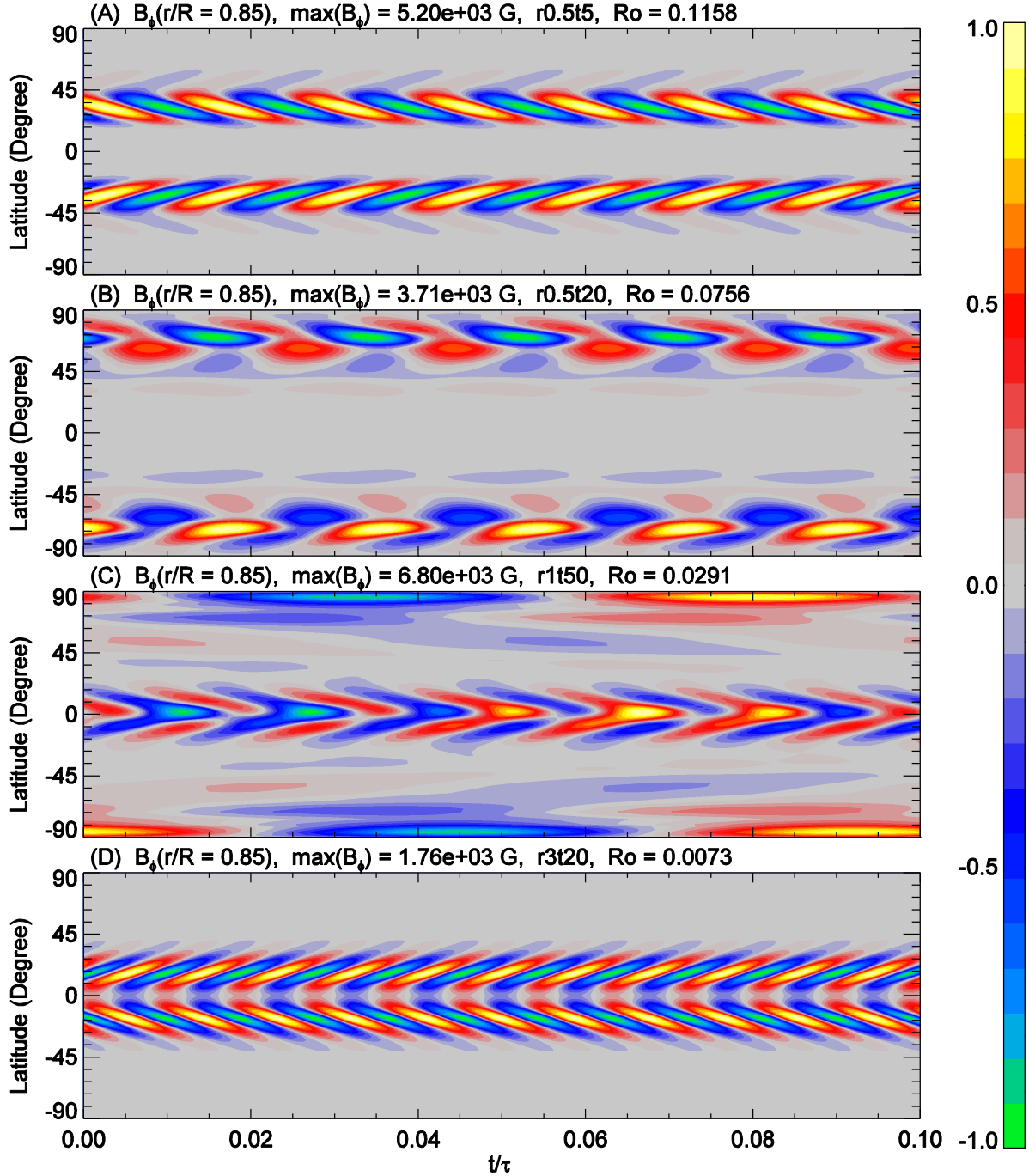


Figure 22 – Time-latitude diagram of the zonally-averaged toroidal magnetic field for simulations (A)  $r0.5t5$ , (B)  $r0.5t20$ , (C)  $r1t50$  and (D)  $r3t20$ . Each panel shows a time-latitude diagram at  $r/R = 0.85$ . The color scale denotes the magnetic field strength normalized to the peak value given above each panel. The input parameter values used are the same as in Figure 20 except for  $C_\Omega$  which is equal to 366 for (A), 1980 for (B), 5100 for (C) and 2280 for (D). Even in the context of our very simple  $\alpha\Omega$  formulation, and even with the relatively limited range of our two dimensional parameter space, a wide variety of dynamo modes can be produced, with varying cycle lengths, modes peaking at low, mid or high latitudes, propagating either poleward or equatorward, symmetric or antisymmetric with respect to the equatorial plane.

Yoshimura sign rule. Dual high+low dynamo modes occur in five simulations, all at rotation rates solar or close (viz. Table II). Their absence at high rotation rate is likely associated with the disappearance of polar deceleration in the most rapidly rotating simulations (see rightmost panels on Figure 16). Secondary modes, when they occur, tend to peak at high latitudes and near the base of the convection zone, reflecting the action of the strong radial shear often present there (see Figure 16). No particular pattern is apparent regarding the amplitude and period ratios on rotation rate or thermal forcing. Equatorial symmetry/antisymmetry also varies across parameter space, again with no obvious pattern with rotation rate or thermal forcing. Observational evidence for a “double dynamo” actually exists in the case of the sun, in the form of a  $\sim 2$  yr modulation superimposed on the primary 11 yr activity cycle detected in a variety of solar activity measures (see, e.g., Mursula et al. (2003) [30]; Fletcher et al. (2010) [15]; Simoniello et al. (2013) [45]; and references therein). However, whether this solar behavior can be legitimately linked to that observed in the  $\alpha\Omega$  dynamo calculations considered here remains to be investigated.

Most simulations produce peak toroidal field of a few kiloGauss. This constancy, a priori surprising given the wide range of morphology seen in the dynamo modes, is a direct consequence of the algebraic  $\alpha$ -quenching formulae introduced to limit the cycle amplitude. The relatively wide range in magnetic energy apparent in the rightmost column of Table II reflects primarily the spatial extent of the dynamo modes, in particular the presence or absence of magnetic fields in the radiative core underlying the convection zone, rather than variations on overall magnetic field strength.

### 2.4.3. Cycle relationships

We now turn to the relationships existing – or not – between cycle characteristics such as cycle period and magnetic energy on fundamental parameters such as the rotation rate, and their derivatives such as the Rossby number  $Ro$ . We do so in a manner resembling as much as possible the relationships established observationally. Except when considering magnetic energies, in what follows we exclude from consideration the two simulations  $r0.5t1$  and  $r3t1$ , which produce non-oscillatory dynamo modes.

Figure 23 shows the variation of the ratio  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  with  $1/P_{\text{rot}}$ . On this and following plots, as before symbols are color-coded according to rotation rate and linked with lines styled according to the value of the thermal forcing timescale. Our numerical data can be reasonably well-fit by a power law of the form

$$\frac{P_{\text{cyc}}}{P_{\text{rot}}} \propto P_{\text{rot}}^{-1.47} \quad (37)$$

(grey solid line on Figure 23). This ratio is clearly increasing with increasing rotation rate, which is similar to the variation established observationally by Baliunas et al. (1996) [2] and Oláh et al. (2009) [34] and is also consistent with Saar & Brandenburg (1999) [43]. However, our power law fit yields an index of  $-1.47$ , which is significantly steeper than the results of Baliunas et al. (1996) [2] (index  $-0.74$ ) and Oláh et al. (2009) [34] (index  $-0.81 \pm 0.05$ ). That such a relatively well-defined power law relationship should arise in our model is a priori surprising, given the wide range of dynamo morphologies occurring across our parameter space. This indicates that the general decrease of the cycle period with increasing rotation rate is a very robust property of  $\alpha\Omega$  dynamo models, which does not depend sensitively on details

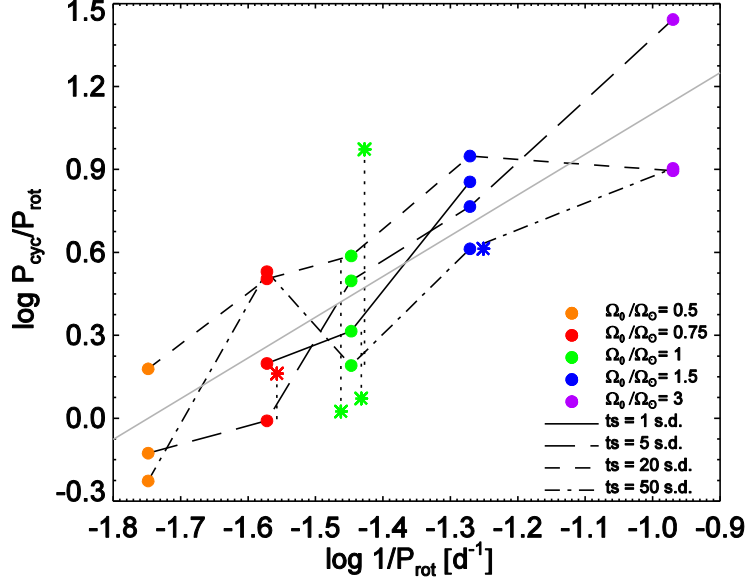


Figure 23 – Variation of the ratio  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  with  $1/P_{\text{rot}}$ . Circles and asterisks represent main and secondary cycle ( $P_{\text{cyc}}$  and  $P_{\text{cyc}}(2)$  in Table II) respectively. The vertical dotted lines link secondary cycles to primary ones. Asterisks were displaced horizontally for clarity. Other colors and lines as in Figure 15. The power law fit (grey line) neglects secondary cycles and yields  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-1.47}$ . This is coherent with, but steeper than, the results of Baliunas et al. (1996) [2] (slope of  $-0.74$ ) and Oláh et al. (2009) [34] (slope of  $-0.81 \pm 0.05$ ).

of the dynamo mode. Figure 24 shows the variation of effectively the same ratio, now expressed in terms of frequencies rather than periods, with the inverse Rossby number. Saar & Brandenburg (1999) [43] constructed similar plots and obtained  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{-0.5}$  for most stars, but  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{0.4}$  for very active stars ( $P_{\text{rot}} < 3$  d.). Here one observes significant scatter in the simulation data, although a clear downward trend is present. A power law fit now yields:

$$\frac{\omega_{\text{cyc}}}{\Omega_0} \propto \text{Ro}^{0.96} \quad (38)$$

The discrepancy is curious, given that our model succeeds rather well in reproducing the observed trend in the  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  versus  $P_{\text{rot}}$  relationship. It probably hinges on the aforementioned complex dependency of our Rossby number, as defined by eq. (25), which contains an implicit dependency on rotation hidden within  $u'_{r, \text{rms}}$  (viz. Table II and Figure 14).

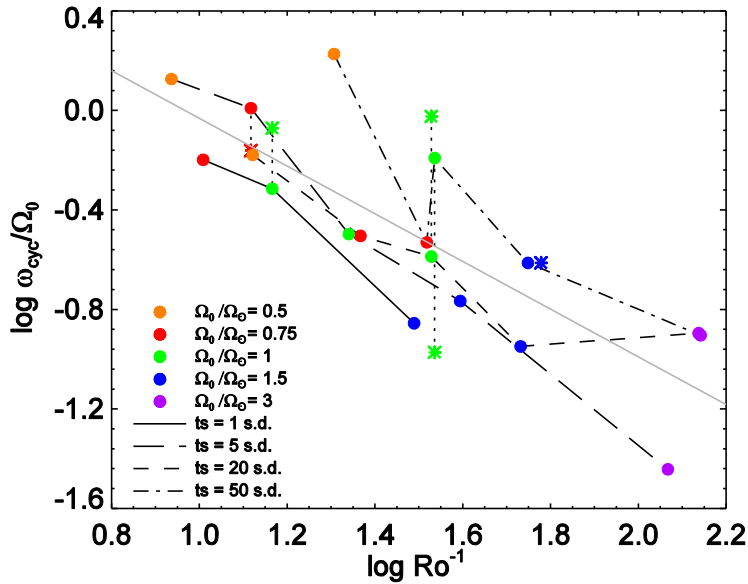


Figure 24 – Ratio  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0$  vs.  $\text{Ro}^{-1}$ . Symbols and lines as in Figure 23. One asterisk (blue) was displaced horizontally for clarity. Again, the power law fit neglects secondary cycles and gives the result  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{0.96}$ . This is different from what was previously found by Saar & Brandenburg (1999) [43]: two almost parallel branches with  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{-0.5}$  and a third branch with  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega_0 \propto \text{Ro}^{0.4}$  for very active stars ( $P_{\text{rot}} < 3$  days).

We also investigated the dependence of magnetic energy on the Rossby number. Since chromospheric and coronal activity can be linked to stellar magnetic activity, we would expect

to obtain at least qualitatively similar relationships for the magnetic energy, the mean chromospheric H-K flux ratio  $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$ , and the X-ray to bolometric luminosity ratio  $R_X$ . Numerous observational studies (Noyes et al. 1984a [32]; Saar & Brandenburg 1999 [43]; Pizzolato et al. 2003 [38]; Wright et al. 2011 [49]) have revealed an increase of  $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$  and  $R_X$  with increasing  $\text{Ro}^{-1}$  holding up to a saturation value beyond which the dependence on  $\text{Ro}$  effectively vanishes.

Despite wide scatter in our simulation data, Figure 25 shows that our magnetic energies tend to *decrease* with increasing  $\text{Ro}^{-1}$ . A power law fit on these simulation data gives

$$E_{\text{mag}} \propto \text{Ro}^{0.73} \quad (39)$$

This trend is completely incoherent with the aforesaid observational inferences. This discrepancy is in all likelihood due to the simple kinematic  $\alpha$ -quenching algebraic nonlinearity used to limit the amplitude of the dynamo modes (viz. eq. (36)). In the  $\alpha\Omega$  model defined in §3 above, the magnetic amplitude is entirely set by the adopted equipartition field strength in eq. (36), implying that the reduction of the  $\alpha$ -effect is the only nonlinear feedback mechanism present. Recent global magnetohydrodynamical simulations of solar convection (e.g., Racine et al. (2011) [40]) have uncovered no compelling evidence for  $\alpha$ -quenching, and suggest instead that magnetic backreaction on large-scale flows, including differential rotation, may be in fact the primary amplitude-limiting nonlinearity (cf. Brown et al. (2008) [7]; Brown et al. (2010) [8]).

## 2.5. Discussion

In this paper, we have extracted profiles of differential rotation and kinetic helicity from a set of twenty global hydrodynamical simulations of stellar convection at varying rotation rates and luminosity, and have used these profiles as input into a simple kinematic axisymmetric  $\alpha\Omega$  mean-field dynamo model subjected to algebraic  $\alpha$ -quenching. This procedure is validated by comparing one of our dynamo solutions to the magnetic cycle developing in a fully magnetohydrodynamical global simulation of convection carried out at the same rotation rate and thermal forcing. Extracting magnetic cycles periods from these dynamo solutions then allows us to construct the equivalent of some observationally-inferred



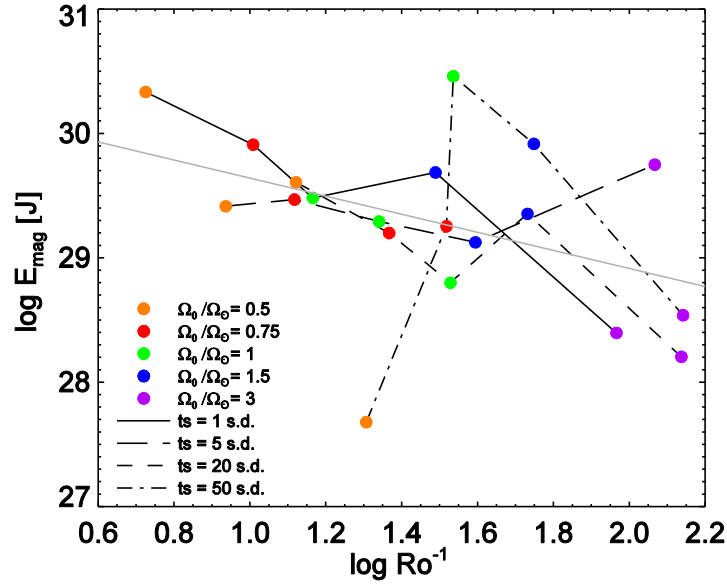


Figure 25 –  $E_{\text{mag}}$  vs.  $Ro^{-1}$ . Colors and lines as in Figure 15. The best power law fit is  $E_{\text{mag}} \propto Ro^{0.73}$ . We would have expected this relationship to be similar to those linking  $\langle R'_{\text{HK}} \rangle$  or  $R_X$  to the Rossby number since those parameters are linked to the magnetic activity cycle. Our correlation is opposite to what was previously found in literature (see Noyes et al. (1984a) [32]; Saar & Brandenburg (1999) [43]; Pizzolato et al. (2003) [38]; Wright et al. (2011) [49]).

relationships linking cycle period and amplitude to stellar parameters such as rotation rate, luminosity and associated Rossby number.

Through this modelling approach we do manage to capture some important characteristics of stellar activity cycles, in particular the observationally-inferred power-law relationship linking the ratio  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  to the rotation rate (Baliunas et al. 1996 [2]; Saar & Brandenburg 1999 [43]; Oláh et al. 2009 [34]). However we fail to capture the observationally-inferred dependence on Rossby number (Noyes et al. 1984a [32]; Pizzolato et al. 2003 [38]; Saar 2011 [42]; Wright et al. 2011 [49]). At least two factors likely contribute to this failure: our use of a fixed background structural model for the numerical simulations (more on this below), and the observational or semi-empirical definition of the Rossby number used in observational analyses, which is typically obtained from turning luminosity into convective flow speed, or estimating convective turnover times from models or simulations, under the assumption that convection is unaffected by rotation. This is certainly not the case in our hydrodynamical simulations (viz. Figure 14 – Figure 15 herein).

Clearly, much could be improved in our overall modelling approach, in order to improve the comparison to stellar cycle observations. The use of differential rotation profiles extracted from a purely hydrodynamical simulation was motivated in part by the fact that these are much less demanding computationally and attain a statistically stationary state much more rapidly than their MHD equivalent. Yet, many published simulations of solar convection have shown that even when no large-scale magnetic cycle develops, the Maxwell stresses associated with small-scale magnetic field reduce the magnitude of differential rotation, as compared to purely hydrodynamical simulations otherwise identical (e.g., Brown et al. (2010) [8] and references therein). Since we run all our  $\alpha\Omega$  dynamo models at 1.5 times the critical dynamo number, a general decrease of differential rotation should not affect critically the results presented here as long as this decrease is more or less homogeneous spatially. This issue nonetheless deserves further investigation.

Another potentially important aspect we have not explored in the present work is the influence of global stellar structural parameters. More specifically, all hydrodynamical simulations and dynamo models considered here, are executed in fluid spheres of fixed solar radius, gravity, and convection zone depth. Working with the Kitchatinov & Rüdiger (1999) [26] model for differential rotation and meridional flow, Küker et al. (2011) [27] have shown that relatively small variations in the depth of the convection zone can produce large departure from the  $\Delta\Omega$  vs  $\Omega_0$  relationship characterizing their model at fixed convection zone depth. Investigating these structural effects is possible within the modelling approach developed here, and should definitely be carried out.

Despite the wide range of morphologies for the  $\alpha\Omega$  dynamo modes generated from our ensemble of simulations, the variations of magnetic cycles with rotation rate are found to follow a power-law relationship of the same general form as inferred observationally. More specifically, an increase of the simulations' rotation rate leads to a marked decrease of the  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  ratio, although more pronounced than observed. Our results thus indicate that this trend is a very robust property of kinematic mean-field  $\alpha\Omega$  dynamo models. Interestingly, this relationship is one that could not be reproduced, not even as a general trend, in the similar numerical experiments carried out by Jouve et al. (2010) [24], using a flux-transport dynamo model, where the primary determinant of the cycle period is the meridional flow speed. Taken

jointly, these results highlight the fact that determinations of stellar cycle periods in well-characterized samples (in terms of mass, age, rotation rate) can potentially provide strong discriminant on various classes of dynamo models.

To the extent that magnetic energy computed from the dynamo solution can be taken as a proxy of the amplitude of surface magnetic activity, the present modelling work fails in capturing the observed rise of activity level with decreasing Rossby number or increasing rotation rate, as inferred observationally. The origin of this discrepancy lies in part with the fact that we opted to run all  $\alpha\Omega$  dynamo simulations at 1.5 times the critical dynamo number, but the primary cause is more likely our use of algebraic  $\alpha$ -quenching as the sole amplitude-limiting nonlinearity. Racine et al. (2011) [40] attempted to measure  $\alpha$ -quenching in a MHD version of simulation `r1t20` herein, which produced a large-scale magnetic cycle, but found that the components of  $\alpha$ -tensor extracted from the simulation showed very little, if any, temporal variation on the timescale of their large-scale magnetic cycle. On the other hand, the pole-to-equator angular velocity contrast was found to decrease by a factor of three in going from the purely hydrodynamical simulation to its MHD descendant. A similar pattern was observed in many other global numerical simulations of solar convection (e.g., Brown et al. (2010) [8], and references therein), and is coherent with the idea, established already by Gilman (1983) [18] on the basis of his pioneering convection simulations, that backreaction on the large-scale flows is the primary amplitude limiting mechanism for this type of convective dynamo. Once again, this highlights the importance of well-characterized stellar samples in measuring stellar surface magnetic activity, as this holds important clue regarding the nonlinear saturation of the underlying dynamos.

This work was made possible by the *Réseau québécois de calcul de haute performance* and supported by Canada's Natural Sciences and Engineering Research Council, Research Chair Program, and by the Canadian Space Agency's Space Science Enhancement Program (grant \#9SCIGRA-21). CD is also supported in part through a graduate fellowship from the Université de Montréal's Physics department and through a graduate fellowship from the *Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies*.

## Chapitre 3 – Conclusion

Malgré plusieurs décennies d’observation, le processus dynamo sous-jacent à l’activité stellaire est toujours inconnu. Même dans le cas du Soleil, il n’y a pas, à ce jour, de consensus sur le type de dynamo impliqué. Plusieurs modèles mathématico-numériques tentent de reproduire les observations solaires et stellaires et les relations liant la période du cycle, l’émission chromosphérique ou coronale et l’énergie magnétique à des paramètres physiques comme la période de rotation et le nombre de Rossby. Le principal problème avec les modèles numériques, c’est qu’ils demandent en général de connaître à priori la variation de la rotation différentielle, du tenseur- $\alpha$  et de la circulation méridienne. Bien que, grâce à l’héliosismologie, nous connaissions ces profils dans le cas du Soleil, il en est tout autrement pour les autres étoiles.

Jouve et coll. [24] ont tenté de reproduire, mais sans succès, la relation liant la période du cycle à la période de rotation en utilisant un modèle dynamo bidimensionnel de type Babcock-Leighton basé sur le transport du flux, donc sur la circulation méridienne. Ils ont utilisé un modèle hydrodynamique tridimensionnel pour voir comment variait l’amplitude de cette circulation avec la vitesse de rotation. La variation d’échelle obtenue avec le modèle 3D était ensuite appliquée à la simulation 2D.

Notre approche est similaire puisque nous employons une simulation hydrodynamique globale tridimensionnelle pour obtenir la variation de la rotation différentielle et du tenseur- $\alpha$  (en utilisant l’approximation SOCA), mais nous utilisons ensuite un modèle dynamo bidimensionnel  $\alpha\Omega$  plutôt que Babcock-Leighton. Nous allons même jusqu’à négliger complètement la circulation méridienne puisqu’elle ne présente aucune cohérence spatiale dans les modélisations hydrodynamiques.

La comparaison de notre simulation de référence (rotation solaire, temps de forçage de 20 jours solaires) avec une modélisation équivalente obtenue avec EULAG-MHD montre la capacité de notre modèle simplifié à capturer les caractéristiques importantes du cycle d’activité. De plus, nous réussissons à reproduire efficacement la variation du rapport  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  avec la période de rotation. Nous obtenons la loi de puissance  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-1.47}$ , ce qui, bien que plus abrupt, concorde avec les résultats de Baliunas et coll. (1996) [2]

( $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-0.74}$ ) et de Oláh et coll. (2009) [34] ( $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}} \propto P_{\text{rot}}^{-0.81 \pm 0.05}$ ). Il est surprenant d'obtenir une loi de puissance aussi bien définie avec ce modèle vu la variété des dynamos obtenues. Cela signifie que la croissance générale de  $P_{\text{cyc}}/P_{\text{rot}}$  avec l'inverse de  $P_{\text{rot}}$  est une caractéristique robuste des modèles de dynamo  $\alpha\Omega$ .

Cependant, nous sommes incapables de reproduire les relations liant  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega$  et l'énergie magnétique au nombre de Rossby. La littérature donne des relations de croissance entre ces paramètres et l'inverse du nombre de Rossby,  $Ro^{-1}$ , tandis que nous obtenons  $\omega_{\text{cyc}}/\Omega \propto Ro^{0.96}$  et  $E_{\text{mag}} \propto Ro^{0.73}$ . Cette importante différence provient probablement du fait que, dans notre modèle, la seule limitation imposée à l'amplitude des cycles est due à la non-linéarité algébrique imposée par l'équation (36). Racine et coll. [40] ont montré que dans leur simulation globale MHD, ce type de limitation est très faible et ne représente pas plus de 10 à 20% du processus de saturation. Cela laisse croire que cette saturation de la dynamo serait plutôt due à une réaction magnétique sur l'écoulement à grande échelle.

Il reste donc encore beaucoup à faire pour tenter de comprendre le processus dynamo responsable de l'activité stellaire. La prochaine étape serait de refaire chacune des simulations présentées ici, mais en utilisant EULAG-MHD directement, ce qui demanderait beaucoup plus de temps de calcul. La stabilisation des simulations serait plus longue et l'obtention de cycles magnétiques stables serait incertaine. Cependant, cet exercice de longue durée en vaudrait le coup, car il pourrait permettre de restreindre le nombre d'hypothèses quant à la saturation de l'amplitude des cycles. Le fait que la simulation `r1t20` ait déjà un analogue MHD est un point encourageant pour la suite.

## Bibliographie

- [1] Baliunas, S. L., Donahue, R. A., Soon, W. H. et coll., Chromospheric variations in main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, vol. 438, p. 269, janvier 1995
- [2] Baliunas, S. L., Nesme-Ribes, E., Sokoloff, D. & Soon, W. H., A dynamo interpretation of stellar activity cycles. *The Astrophysical Journal*, vol. 460, p. 848, avril 1996
- [3] Ballot, J., Brun, A. S. & Turck-Chièze, S., Simulations of turbulent convection in rotating young solarlike stars: Differential rotation and meridional circulation. *The Astrophysical Journal*, vol. 669, p. 1190, novembre 2007
- [4] Barnes, J. R., Collier Cameron, A., Donati, J.-F. et coll., The dependence of differential rotation on temperature and rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 357, p. L1, février 2005
- [5] Berdyugina, S. V., Starspots: A Key to the Stellar Dynamo. *Living reviews in solar physics*, vol. 2, décembre 2005
- [6] Brandenburg, A., Saar, S. H. & Turpin, C. R., Time evolution of magnetic activity cycle period. *The Astrophysical Journal*, vol. 498, p. L51, mai 1998
- [7] Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S. & Toomre, J., Rapidly rotating suns and active nests of convection. *The Astrophysical Journal*, vol. 689, p. 1354, décembre 2008
- [8] Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S. & Toomre, J., Persistent magnetic wreaths a rapidly rotating sun. *The Astrophysical Journal*, vol. 711, p. 424, mars 2010
- [9] Charbonneau, P., Dynamo models of the solar cycle. *Living reviews in solar physics*, vol. 7, septembre 2010
- [10] Charbonneau, P., *Solar and Stellar Dynamos: Saas-Fee Advanced Course 39 Swiss Society for Astrophysics and Astronomy*. Springer, 2012
- [11] Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R. et coll., Helioseismic constraints on the structure of the solar tachocline. *The Astrophysical Journal*, vol. 527, p. 445, décembre 1999

- [12] Charbonneau, P. & Saar, S. H., Stellar dynamos: a modeling perspective. *Magnetic Fields Across the Hertzsprung-Russell Diagram, ASP Conference Proceedings*. Vol. 248, Edited by G. Mathys, S. K. Solanki, & D. T. Wickramasinghe, p. 189, 2001
- [13] Charbonneau, P., St-Jean, C., & Zacharias, P., Fluctuations in Babcock-Leighton Dynamos. I. Period doubling and transition to chaos. *The Astrophysical Journal*, vol. 619, p. 613, janvier 2005
- [14] Elliott, J. R. & Smolarkiewicz, P. K., Eddy resolving simulations of turbulent solar convection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 39, p. 855, juillet 2002
- [15] Fletcher, S. T., Broomhall, A.-M., Salabert, D. et coll., A Seismic Signature of a Second Dynamo? *The Astrophysical Journal*, vol. 718, p. L19, juillet 2010
- [16] Ghizaru, M., Charbonneau, P. & Smolarkiewicz, P. K., Magnetic cycles in global large-eddy simulations of solar convection. *The Astrophysical Journal*, vol. 715, p. L133, juin 2010
- [17] Gilman, P. A., Nonlinear dynamics of boussinesq convection in a deep rotating spherical shell. I. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 8, p. 93, 1977
- [18] Gilman, P. A., Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. II - Dynamos with cycles and strong feedbacks. *The Astrophysical Journal Supplement*, vol. 53, p. 243, octobre 1983
- [19] Greenspan, H. P., *The theory of rotating fluids*. Breukelen Press, 1990
- [20] Guerrero, G., Smolarkiewicz, P. K., Kosovichev, A. & Mansour, N., Solar differential rotation: hints to reproduce a near-surface shear layer in global simulations. *Solar and Astrophysical Dynamos and Magnetic Activity, Proceedings of IAUS 294*. Editors A.G. Kosovichev, E.M. de Gouveia Dal Pino and Y. Yan, Cambridge University Press, À paraître (2013)
- [21] Hall, J. C., Stellar chromospheric activity. *Living reviews in solar physics*, vol. 5, mars 2008
- [22] Hempelmann, A., Schmitt, J. H. M. M. & Stępień, K., Coronal X-ray emission of cool stars in relation to chromospheric activity and magnetic cycles. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 305, p. 284, janvier 1996

- [23] Howe, R., Solar interior rotation and its variation. *Living reviews in solar physics*, vol. 6, février 2009
- [24] Jouve, L., Brown, B. P. & Brun, A. S., Exploring the Péclet vs. Prot relation with flux transport dynamo models of solar-like stars. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 509, A32, janvier 2010
- [25] Käpylä, P. J., Mantere, M. J., Guerrero, G., Brandenburg, A. & Chatterjee, P., Reynolds stress and heat flux in spherical shell convection. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 531, A162, juillet 2011
- [26] Kitchatinov, L. L. & Rüdiger, G., Differential rotation models for late-type dwarfs and giants. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 344, p. 911, avril 1999
- [27] Küker, M., Rüdiger, G., & Kitchatinov, L. L., The differential rotation of G dwarfs. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 530, A38, juin 2011
- [28] Miesch, M., Brun, A. S. & Toomre, J., Solar differential rotation influenced by latitudinal entropy variations in the tachocline. *The Astrophysical Journal*, vol. 641, p. 618, avril 2006
- [29] Moffatt, H. K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, 1978
- [30] Mursula, K., Zieger, B. & Vilppola, J. H., Mid-term quasi-periodicities in geomagnetic activity during the last 15 solar cycles: Connection to solar dynamo strength - To the memory of Karolen I. Paularena (1957-2001). *Solar Physics*, vol. 212, p. 201, janvier 2003
- [31] Nandy, D. & Martens, P. C. H., Space Climate and the Solar Stellar connection: What can we learn from the stars about long-term solar variability? *Advances in Space Research*, vol. 40, p. 891, 2007
- [32] Noyes, R. W., Hartmann, L. W., Baliunas, S. L., Duncan, D. K. & Vaughan, A. H., Rotation, convection, and magnetic activity in lower main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, vol. 279, p. 763, avril 1984a
- [33] Noyes, R. W., Weiss, N. O. & Vaughan, A. H., The relation between stellar rotation rate and activity cycle periods. *The Astrophysical Journal*, vol. 287, p. 769, décembre 1984b
- [34] Oláh, K., Kolláth, Z., Granzer, T. et coll., Multiple and changing cycles of active stars. II. Results. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 501, p. 703, juillet 2009



- [35] Ossendrijver, M., The solar dynamo. *Astronomy & Astrophysics Review*, vol. 11, p. 287, août 2003
- [36] Ossendrijver, M., Stix, M. & Brandenburg, A., Magnetoconvection and dynamo coefficients: Dependence of the alpha effect on rotation and magnetic field. *Astronomy & Astrophysics*, v. 376, p. 713, septembre 2001
- [37] Parker, E. N., Hydromagnetic dynamo models. *The Astrophysical Journal*, vol. 122, p. 293, septembre 1955
- [38] Pizzolato, N., Maggio, A., Micela, G., Sciortino, S. & Ventura, P., The stellar activity-rotation relationship revisited: Dependence of saturated and non-saturated X-ray emission regimes on stellar mass for late-type dwarfs. *Astronomy & Astrophysics*, vol. 397, p. 147, janvier 2003
- [39] Prusa, J. M., Smolarkiewicz, P. K. & Wyszogrodzki, A. A., EULAG, a computational model for multiscale flows. *Computers & Fluids*, Vol. 37, p. 1196, octobre 2008
- [40] Racine, É., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A. & Smolarkiewicz, P. K., On the mode of dynamo action in a global large-eddy simulation of solar convection. *The Astrophysical Journal*, vol. 735, p. 46, juillet 2011
- [41] Rempel, M., Creation and destruction of magnetic field. *Heliophysics: plasma physics of the local cosmos*, Cambridge University Press, p. 42, 2009
- [42] Saar, S. H., Starspots, cycles, and magnetic fields. *The Physics of Sun and Star Spots, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium*, vol. 273, p. 61, 2011
- [43] Saar, S. H. & Brandenburg, A., Time evolution of magnetic activity cycle period. II. Results for an expanded stellar sample. *The Astrophysical Journal*, vol. 524, p. 295, octobre 1999
- [44] Simard, C., Charbonneau, P. & Bouchat, A., MHD simulation-driven kinematic mean field model of the solar cycle, *The Astrophysical Journal*, vol. 768, id. 16, mai 2013
- [45] Simoniello, R., Jain, K., Tripathy, S. C. et coll., The quasi-biennial periodicity as a window on the solar magnetic dynamo configuration. *The Astrophysical Journal*, vol. 765, id. 100, mars 2013

- [46] Smolarkiewicz, P. K. & Charbonneau, P., EULAG, a computational model for multiscale flows: An MHD extension. *Journal of Computational Physics*, vol. 236, p. 608, mars 2013
- [47] Soon, W. H., Baliunas, S. L. & Zhang, Q., An interpretation of cycle periods of stellar chromospheric activity. *The Astrophysical Journal*, vol. 414, p. L33, septembre 1993
- [48] Wilson, O. C., Chromospheric variations in main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, vol. 226, p. 379, décembre 1978
- [49] Wright, N. J., Drake, J. J., Mamajek, E. E. & Henry, G. W., The stellar-activity–rotation relationship and the evolution of stellar dynamos. *The Astrophysical Journal*, vol. 743, p. 48, décembre 2011

# Annexe 1 – Équation d'induction dans l'approximation des champs moyens

L'équation d'induction MHD est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (\text{A1})$$

Substituons à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{B}$  les expressions

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}' \quad (\text{A2})$$

et nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}') = \nabla \times ((\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}') - \eta \nabla \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}')). \quad (\text{A3})$$

Distribuons les produits pour obtenir

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{b}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \nabla \times \mathbf{b}'). \quad (\text{A4})$$

Prenons ensuite la moyenne de l'équation (A4) en gardant en tête que  $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$ .

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (\text{A5})$$

Finalement, soustrayons l'équation moyennée (A5) à l'équation totale (A4) pour obtenir la partie fluctuante.

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{b}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle - \eta \nabla \times \mathbf{b}'). \quad (\text{A6})$$

## Annexe 2 – Équations de la dynamo

Repartons de l'équation

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle \quad (\text{A7})$$

et substituons à  $\langle \mathbf{u} \rangle$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$  les expressions

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\theta, r, t) = \nabla \times (A(\theta, r, t) \hat{e}_\phi) + B(\theta, r, t) \hat{e}_\phi \quad (\text{A8})$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle(\theta, r) = \mathbf{u}_p(\theta, r) + \varpi \Omega(\theta, r) \hat{e}_\phi \quad (\text{A9})$$

en supposant que  $\eta = \eta(r)$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. Nous obtenons alors

$$\nabla \times \left( \hat{e}_\phi \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \hat{e}_\phi \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \left[ \begin{array}{l} (\mathbf{u}_p + \varpi \Omega \hat{e}_\phi) \times (\nabla \times A \hat{e}_\phi + B \hat{e}_\phi) \\ + \alpha (\nabla \times A \hat{e}_\phi + B \hat{e}_\phi) - \eta \nabla \times (\nabla \times A \hat{e}_\phi + B \hat{e}_\phi) \end{array} \right] \quad (\text{A10})$$

Cette équation peut se diviser selon ses composantes toroïdale et poloïdale. Nous obtenons alors les deux équations suivantes.

$$\nabla \times \left( \hat{e}_\phi \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \nabla \times [\mathbf{u}_p \times \nabla \times A \hat{e}_\phi + \alpha B \hat{e}_\phi - \eta \nabla \times \nabla \times A \hat{e}_\phi] \quad (\text{A11})$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\phi \frac{\partial B}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{u}_p \times B \hat{e}_\phi + \nabla \times (\varpi \Omega \hat{e}_\phi \times \nabla \times A \hat{e}_\phi) \\ &\quad + \nabla \times \alpha \nabla \times A \hat{e}_\phi - \nabla \times \eta \nabla \times B \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

Observons d'abord l'équation (A11). Elle est composée de trois termes entre crochets du côté droit de l'égalité. Étudions le premier de ces termes en se rappelant que nous travaillons en coordonnées sphériques et que  $\varpi = r \sin \theta$ .

$$\mathbf{u}_p \times \nabla \times A \hat{e}_\phi = \mathbf{u}_p \times \left[ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) \hat{e}_r - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial r} (A \varpi) \hat{e}_\theta \right] \quad (\text{A13})$$

$$= (u_{p_r} \hat{e}_r + u_{p_\theta} \hat{e}_\theta) \times \left[ \left( \frac{A}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \hat{e}_r - \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \right] \quad (\text{A14})$$

$$= - \left[ \frac{u_{p_r} A}{r} + \frac{u_{p_\theta} A}{r} \cot \theta + (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) A \right] \hat{e}_\phi \quad (\text{A15})$$

Cependant,

$$(\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A) \hat{e}_\phi = \left[ (u_{p_r} \hat{e}_r + u_{p_\theta} \hat{e}_\theta) \cdot \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (\varpi A) \hat{e}_\phi \quad (\text{A16})$$

$$= \left[ u_{p_r} \left( A \sin \theta + \varpi \frac{\partial A}{\partial r} \right) + u_{p_\theta} \left( A \cos \theta + \frac{\varpi}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \right] \hat{e}_\phi \quad (\text{A17})$$

$$= \left[ \varpi (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) A + u_{p_r} A \sin \theta + u_{p_\theta} A \cos \theta \right] \hat{e}_\phi \quad (\text{A18})$$

Donc, si nous retournons à l'équation (A15),

$$\mathbf{u}_p \times \nabla \times A \hat{e}_\phi = - \left[ \frac{u_{p_r} A}{r} + \frac{u_{p_\theta} A}{r} \cot \theta \right] \hat{e}_\phi + \left[ -\frac{1}{\varpi} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A) + \frac{u_{p_r} A}{r} + \frac{u_{p_\theta} A}{r} \cot \theta \right] \hat{e}_\phi \quad (\text{A19})$$

$$= -\frac{1}{\varpi} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A) \hat{e}_\phi \quad (\text{A20})$$

Développons maintenant le 3<sup>e</sup> terme entre crochets à droite de l'équation (A11).

$$-\eta \nabla \times \nabla \times A \hat{e}_\phi = -\eta \nabla (\nabla \cdot A \hat{e}_\phi) + \eta \nabla^2 (A \hat{e}_\phi) \quad (\text{A21})$$

$$= \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A \hat{e}_\phi \quad (\text{A22})$$

En insérant les expressions (A20) et (A22) dans l'équation (A11) et, en laissant tomber les rotationnels et l'orientation, nous obtenons ceci.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{\varpi} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A) + \alpha B + \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A \quad (\text{A23})$$

Si nous réexprimons toutes les longueurs en terme de  $R$  et tous les temps en terme de  $R^2/\eta_0$  et que nous réarrangeons l'ordre des termes, nous trouvons

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A) + C_\alpha \alpha B \quad (\text{A24})$$

avec  $C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}$  et  $R_m = \frac{u_0 R}{\eta_0}$ .

Procédons de la même manière pour l'équation (A12) en commençant par le premier terme à droite.

$$\nabla \times \mathbf{u}_p \times B \hat{e}_\phi = \mathbf{u}_p (\nabla \cdot B \hat{e}_\phi) - B \hat{e}_\phi (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + (B \hat{e}_\phi \cdot \nabla) \mathbf{u}_p - (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) B \hat{e}_\phi \quad (\text{A25})$$

$$= -B \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{p_r}) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{p_\theta} \sin \theta) \right) \hat{e}_\phi \quad (\text{A26})$$

$$+ \left( \frac{B u_{p_r}}{r} + \frac{B u_{p_\theta}}{r} \cot \theta \right) \hat{e}_\phi - (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) B \hat{e}_\phi$$

$$= -B \left( \frac{2u_{p_r}}{r} + \frac{\partial u_{p_r}}{\partial r} + \frac{u_{p_\theta}}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{p_\theta}}{\partial \theta} - \frac{u_{p_r}}{r} - \frac{u_{p_\theta}}{r} \cot \theta \right) \hat{e}_\phi \quad (\text{A27})$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{u_{p_r}}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{u_{p_\theta}}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi \\
& = -B \left( \frac{u_{p_r}}{r} + \frac{\partial u_{p_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{p_\theta}}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi - \left( \frac{u_{p_r}}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{u_{p_\theta}}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{A28}$$

Cependant,

$$-\varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \hat{e}_\phi = -\varpi \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{B}{\varpi} u_{p_r} \right) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{B}{\varpi} u_{p_\theta} \sin \theta \right) \right] \hat{e}_\phi \tag{A29}$$

$$= -\varpi \left[ \frac{B u_{p_r}}{r \varpi} + \frac{u_{p_r}}{\varpi} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{\varpi} \frac{\partial u_{p_r}}{\partial r} + \frac{B}{r \varpi} \frac{\partial u_{p_\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_{p_\theta}}{r \varpi} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \tag{A30}$$

$$= -B \left( \frac{u_{p_r}}{r} + \frac{\partial u_{p_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{p_\theta}}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi - \left( \frac{u_{p_r}}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{u_{p_\theta}}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi \tag{A31}$$

Donc,

$$\nabla \times \mathbf{u}_p \times B \hat{e}_\phi = -\varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \hat{e}_\phi \tag{A32}$$

Développons ensuite le 2<sup>e</sup> terme à droite de l'équation (A12).

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\varpi \Omega \hat{e}_\phi \times \nabla \times A \hat{e}_\phi) & = \varpi \Omega \hat{e}_\phi (\nabla \cdot \nabla \times A \hat{e}_\phi) - (\nabla \times A \hat{e}_\phi) (\nabla \cdot \varpi \Omega \hat{e}_\phi) \\
& \quad + ((\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \nabla) \varpi \Omega \hat{e}_\phi - (\varpi \Omega \hat{e}_\phi \cdot \nabla) (\nabla \times A \hat{e}_\phi)
\end{aligned} \tag{A33}$$

$$\begin{aligned}
& = (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \nabla (\varpi \Omega) \hat{e}_\phi \\
& \quad - \left( \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_r}{r} + \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{A34}$$

$$\begin{aligned}
& = (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} (\varpi \Omega) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varpi \Omega) \hat{e}_\theta \right) \hat{e}_\phi \\
& \quad - \left( \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_r}{r} + \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{A35}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{(\nabla \times A \hat{e}_\phi)_r \varpi \Omega}{r} \hat{e}_\phi + \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \hat{e}_\phi \\
& \quad + \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_\theta}{r} \cot \theta \hat{e}_\phi + \frac{\varpi}{r} (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \hat{e}_\phi \\
& \quad - \left( \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_r}{r} + \frac{\varpi \Omega (\nabla \times A \hat{e}_\phi)_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{A36}$$

$$= [\varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \nabla \Omega] \hat{e}_\phi \tag{A37}$$

Finalement, développons le 4<sup>e</sup> terme du côté droit de l'équation (A12).

$$-\nabla \times \eta \nabla \times B \hat{e}_\phi = -\eta \nabla \times \nabla \times B \hat{e}_\phi - \frac{d\eta}{dr} \hat{e}_r \times (\nabla \times B \hat{e}_\phi) \tag{A38}$$

$$\begin{aligned}
&= -\eta \nabla (\nabla \cdot B \hat{e}_\phi) + \eta \nabla^2 (B \hat{e}_\phi) \\
&\quad - \frac{d\eta}{dr} \hat{e}_r \times \left( \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) \hat{e}_r - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial r} (B \varpi) \hat{e}_\theta \right)
\end{aligned} \tag{A39}$$

$$= \left[ \eta \nabla^2 B - \eta \frac{B}{\varpi^2} + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (B \varpi) \right] \hat{e}_\phi \tag{A40}$$

Insérons les équations (A32), (A37) et (A40) dans l'équation (A12) et laissons tomber l'orientation pour obtenir l'expression pour  $B$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= -\varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) + \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \nabla \Omega + \hat{e}_\phi \cdot \nabla \times (\alpha \nabla \times A \hat{e}_\phi) \\
&\quad + \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (B \varpi)
\end{aligned} \tag{A41}$$

Réorganisons les termes et adimensionnons cette équation comme précédemment. Nous trouvons finalement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (B \varpi) - R_m \varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \\
&\quad + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot \nabla \Omega + C_\alpha \hat{e}_\phi \cdot \nabla \times (\alpha \nabla \times A \hat{e}_\phi)
\end{aligned} \tag{A42}$$

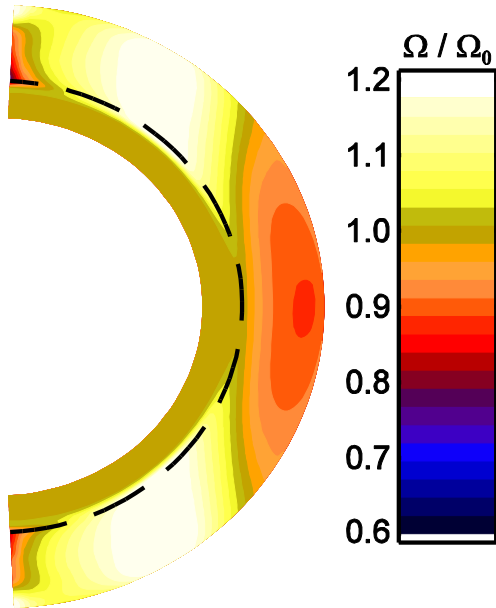
avec  $C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0}$ ,  $C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}$  et  $R_m = \frac{u_0 R}{\eta_0}$ .

## **Annexe 3 – Figures résumées des vingt simulations**

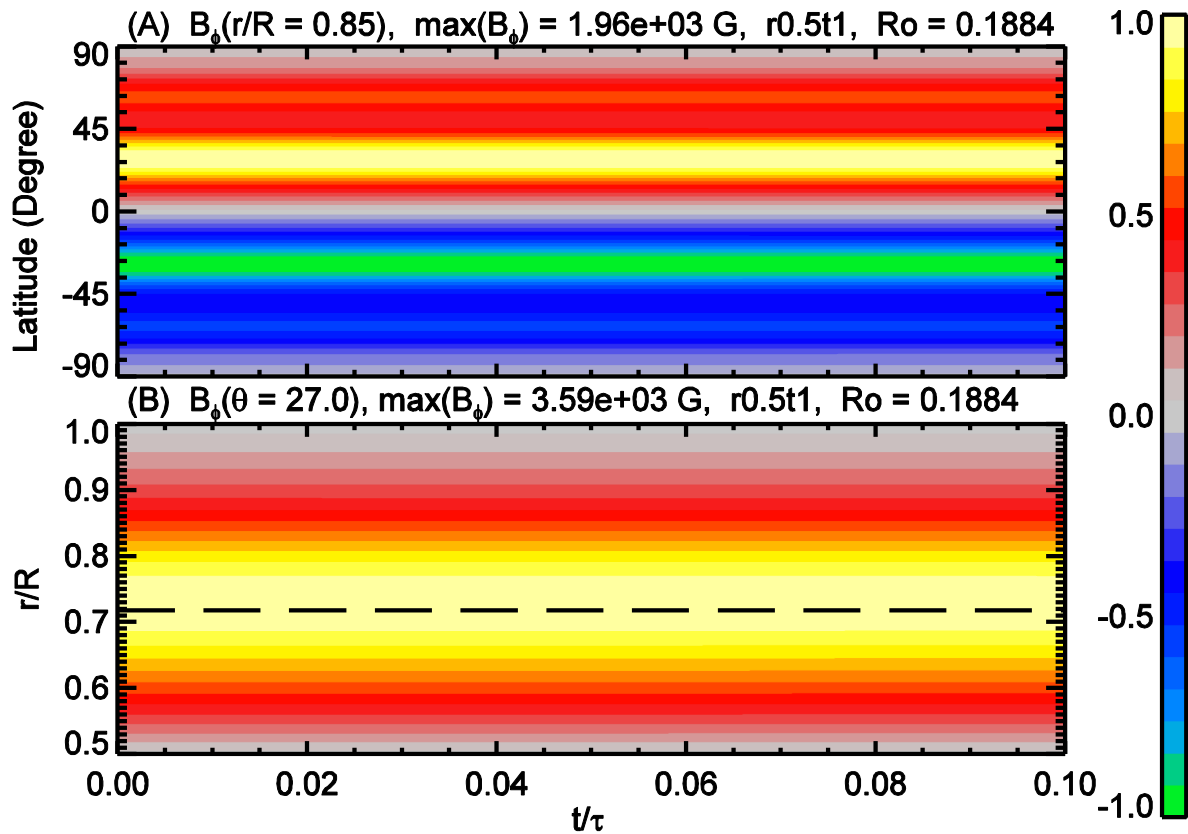
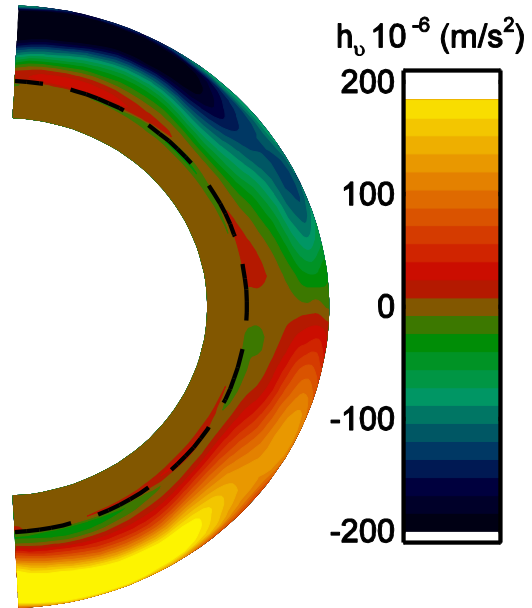
Chacune des vingt pages suivantes représente une simulation. Elles sont identifiées par leur nom de code (voir première colonne Table II) et sont présentées dans le même ordre. Chaque figure est séparée en 4 panneaux, soit le profil de rotation différentielle, en haut à gauche, le profil de l'hélicité cinétique, en haut à droite, l'évolution spatiotemporelle du champ toroïdal en coupe latitude-temps, au centre et l'évolution spatiotemporelle du champ toroïdal en coupe rayon-temps, en bas. Le nom de la simulation et le nombre de Rossby sont inscrits au-dessus de chaque panneau. L'amplitude maximale du champ magnétique est inscrite au-dessus des deux derniers panneaux. C'est cette valeur qui a servi à la normalisation.



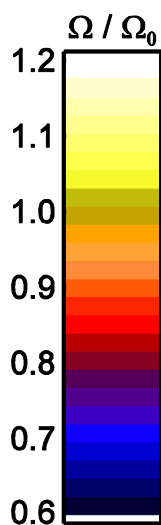
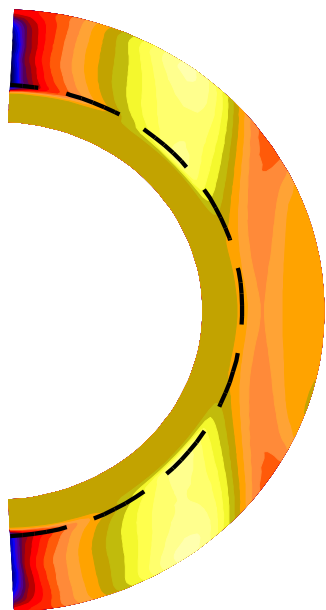
$r0.5t1$ ,  $Ro = 0.1884$



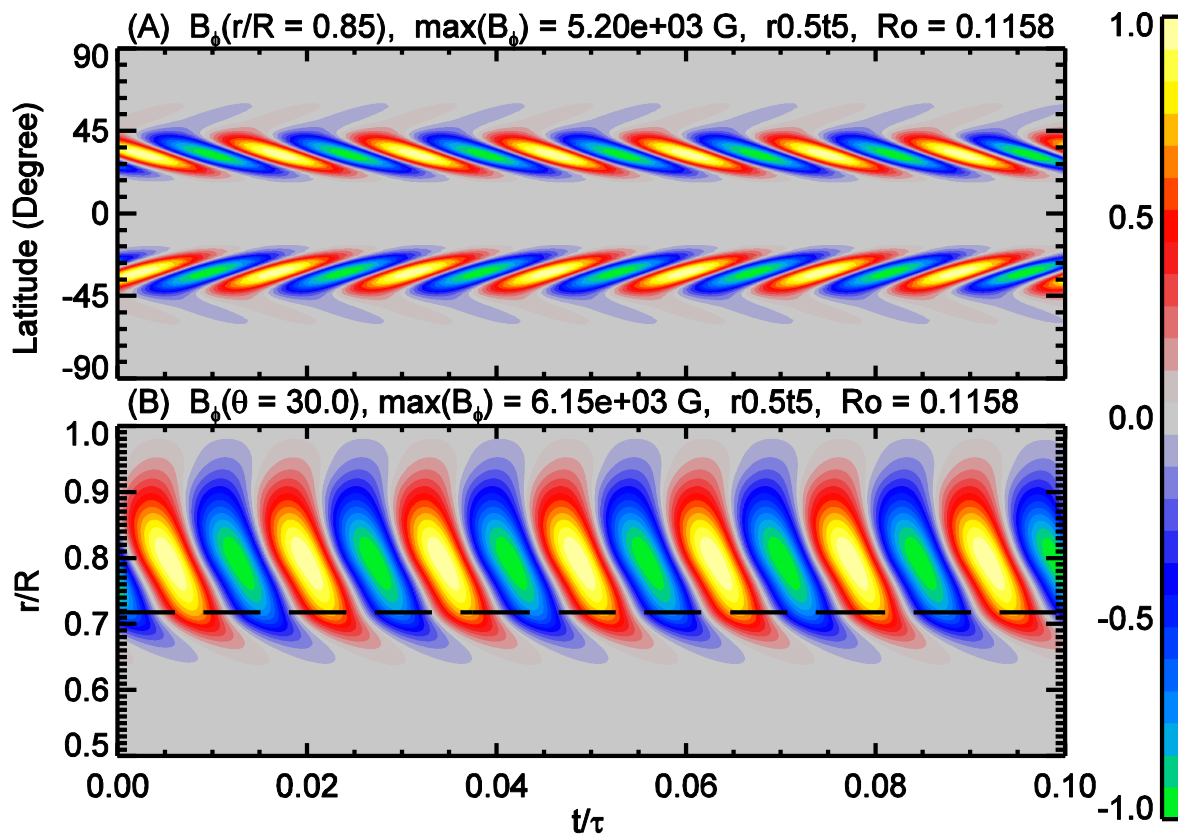
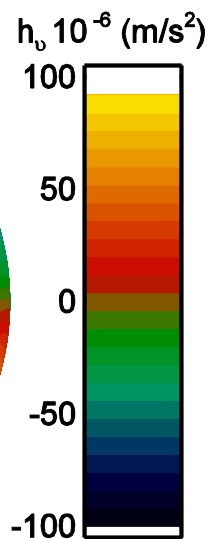
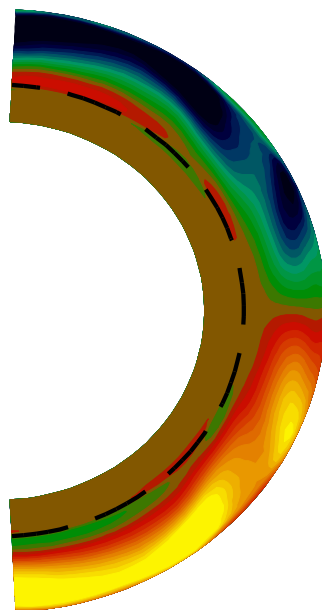
$r0.5t1$ ,  $Ro = 0.1884$



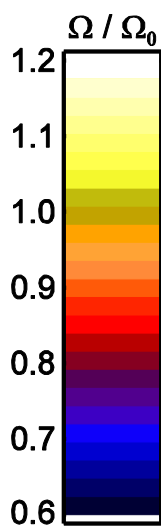
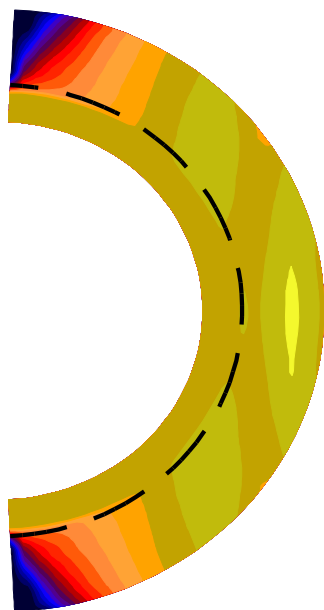
r0.5t5, Ro = 0.1158



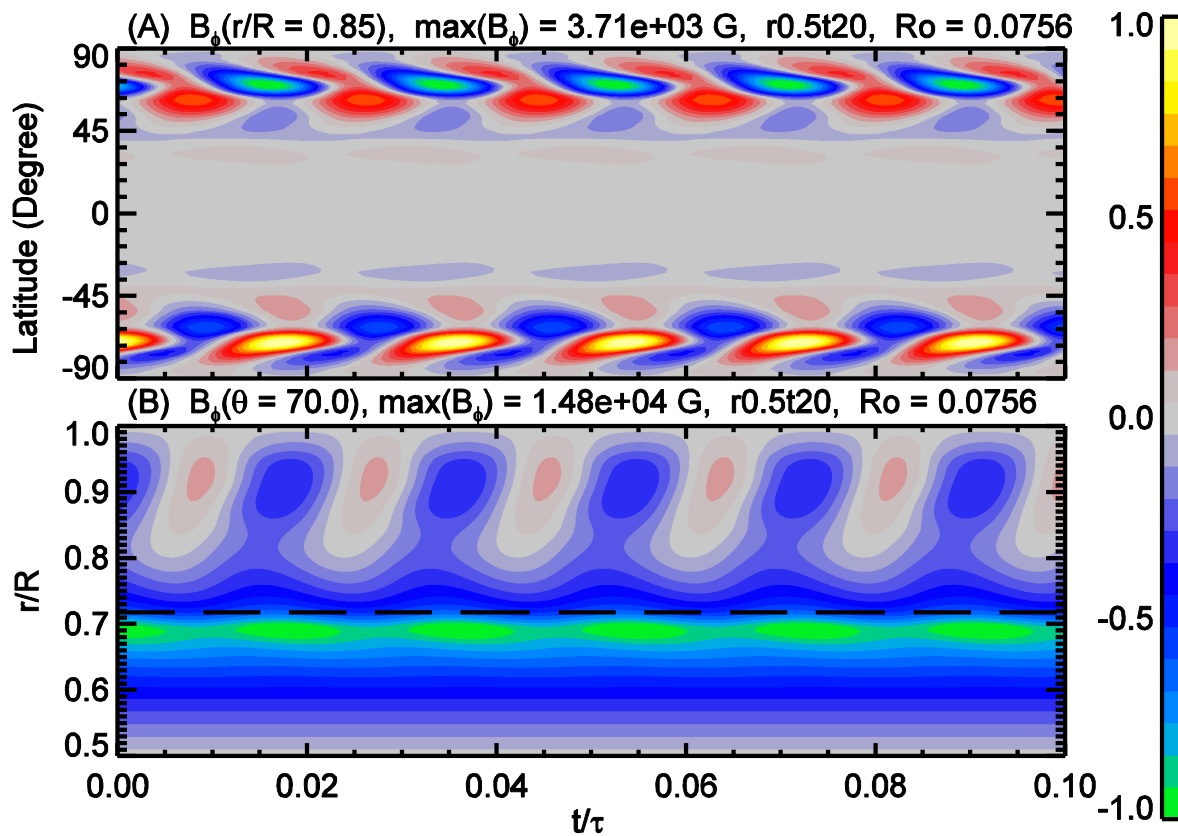
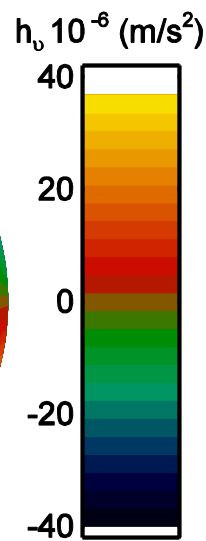
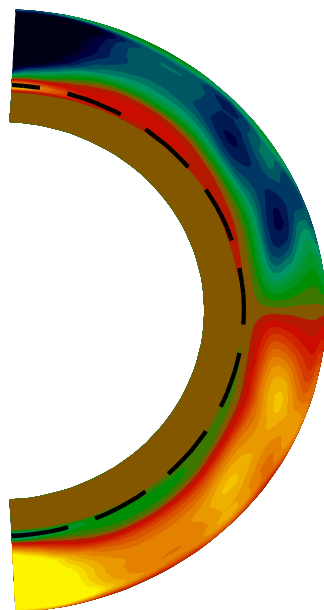
r0.5t5, Ro = 0.1158



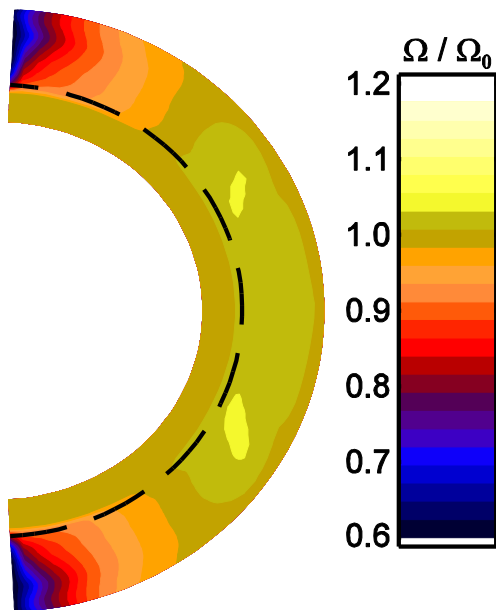
r0.5t20, Ro = 0.0756



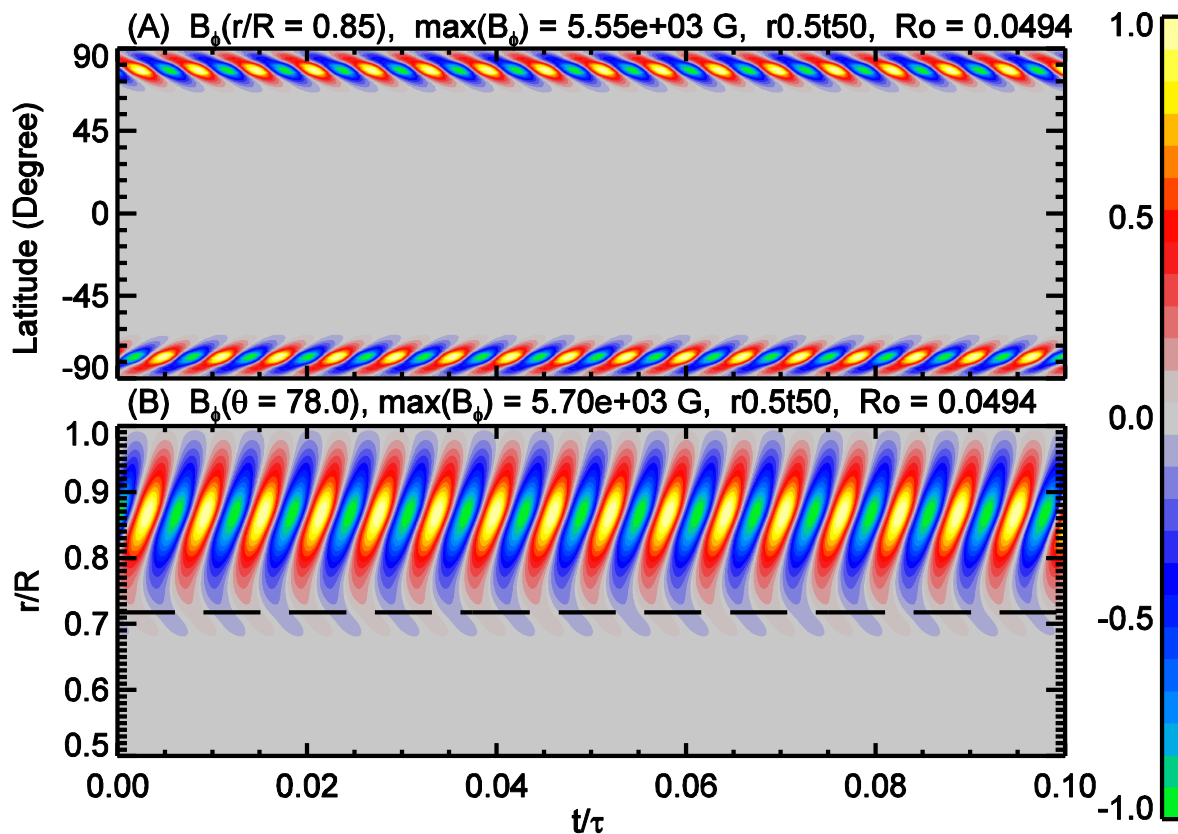
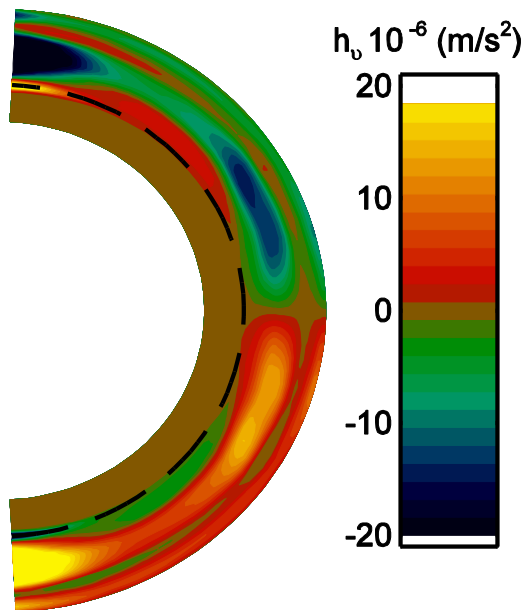
r0.5t20, Ro = 0.0756



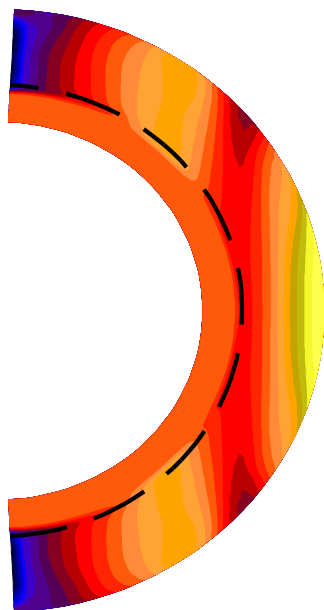
r0.5t50, Ro = 0.0494



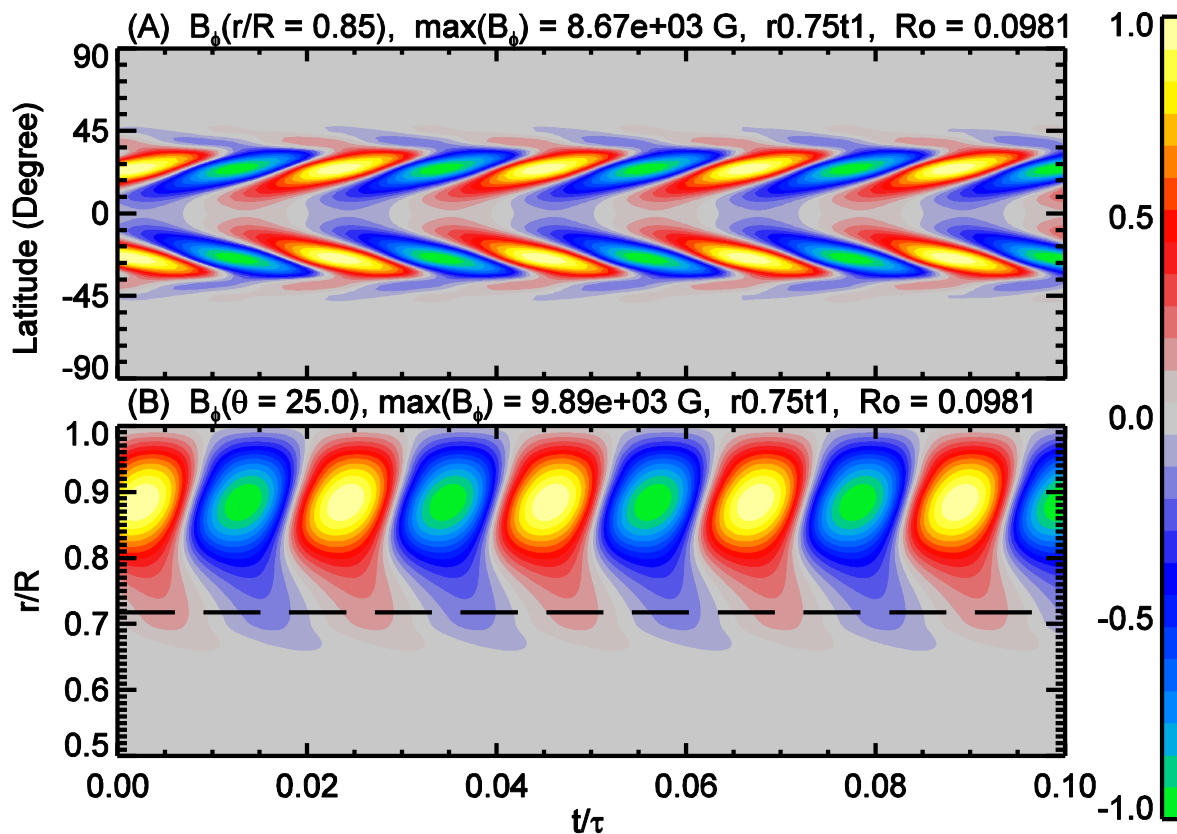
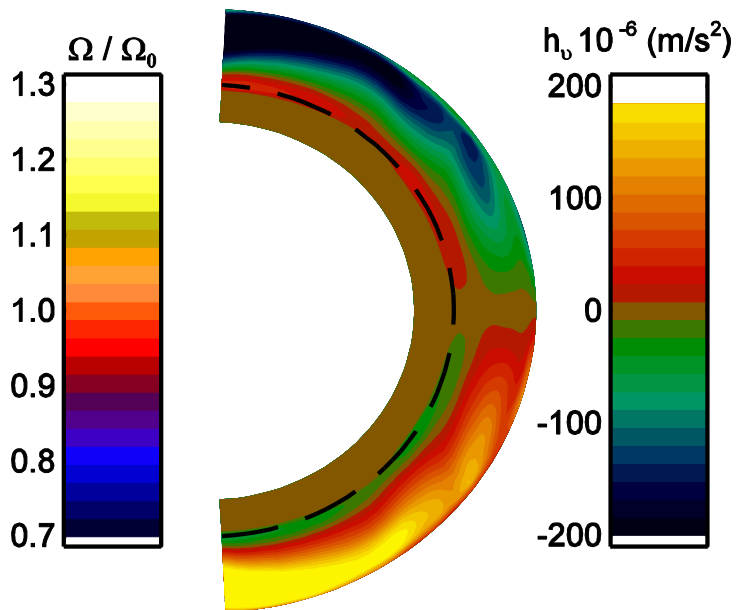
r0.5t50, Ro = 0.0494



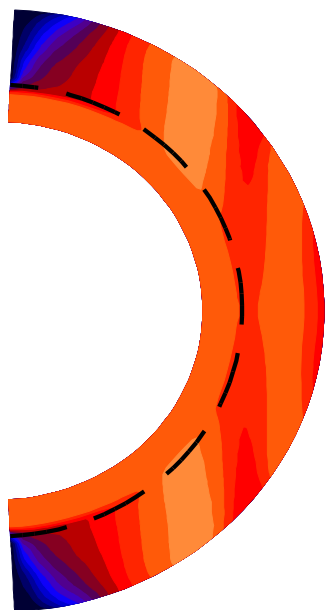
$r0.75t1$ ,  $Ro = 0.0981$



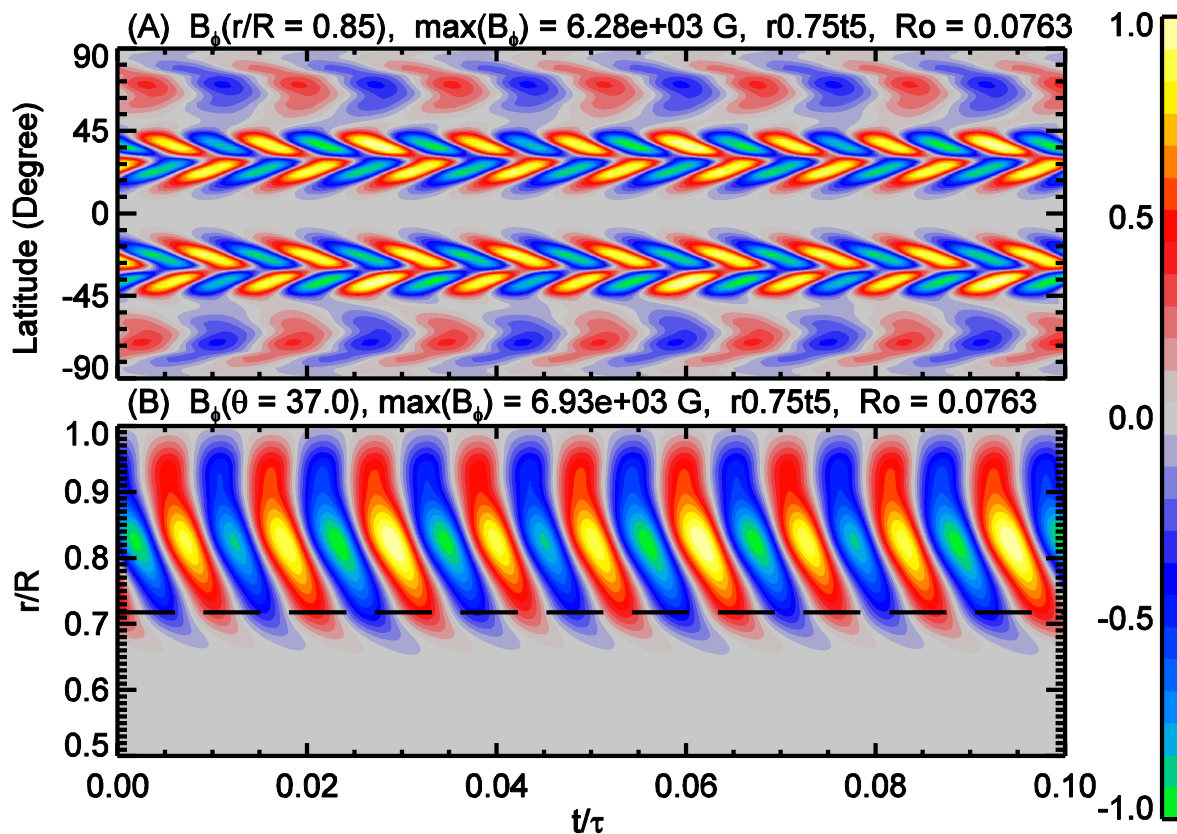
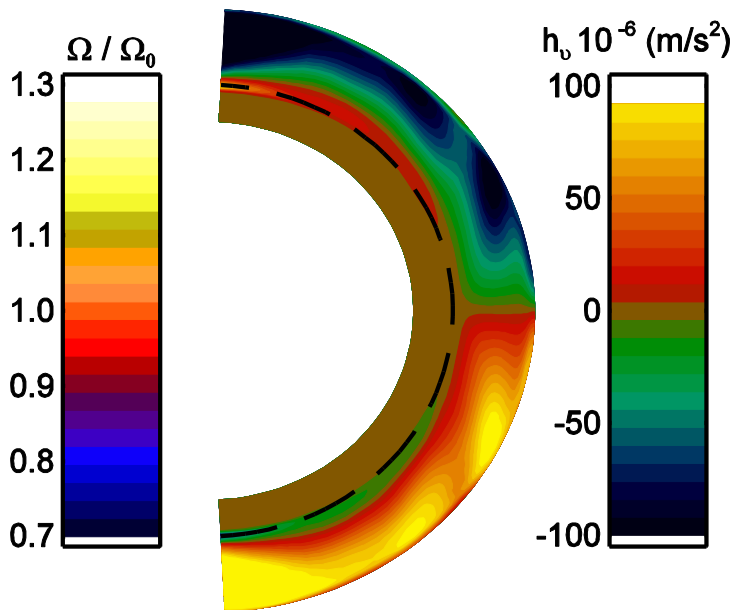
$r0.75t1$ ,  $Ro = 0.0981$



$r0.75t5$ ,  $Ro = 0.0763$

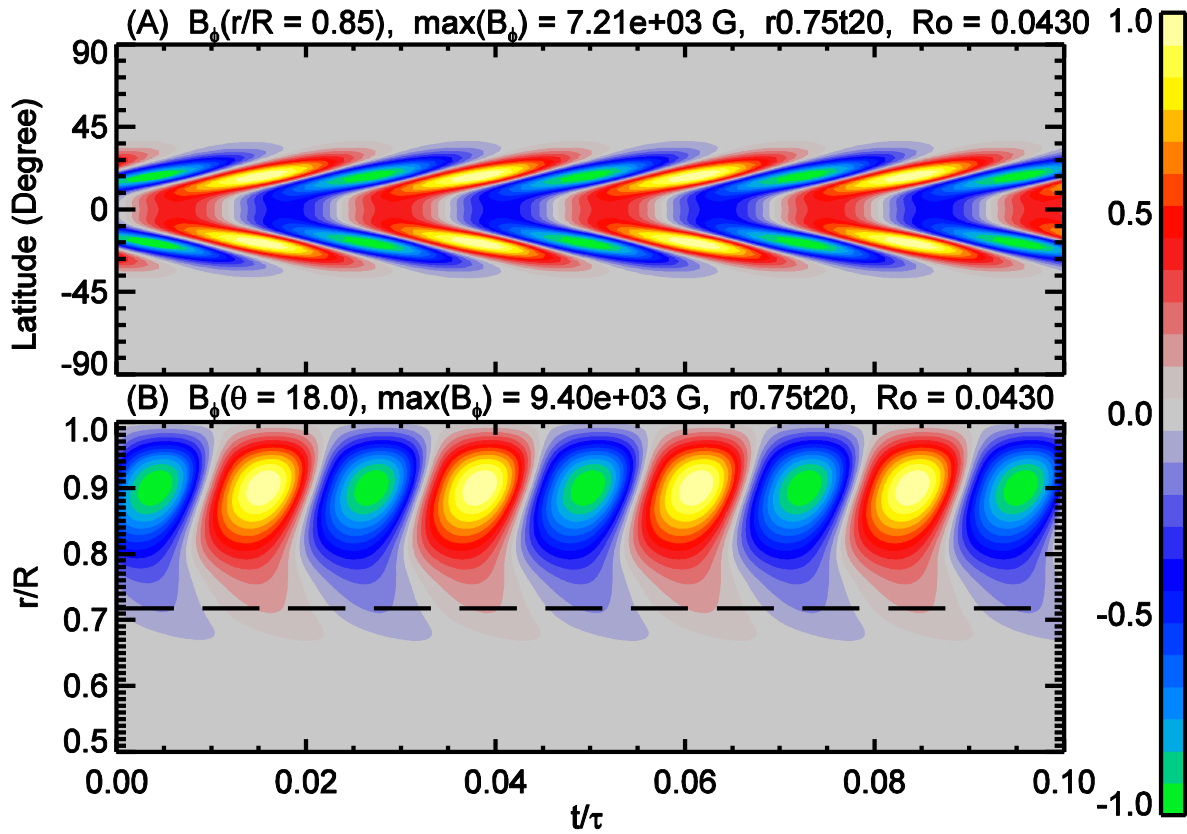
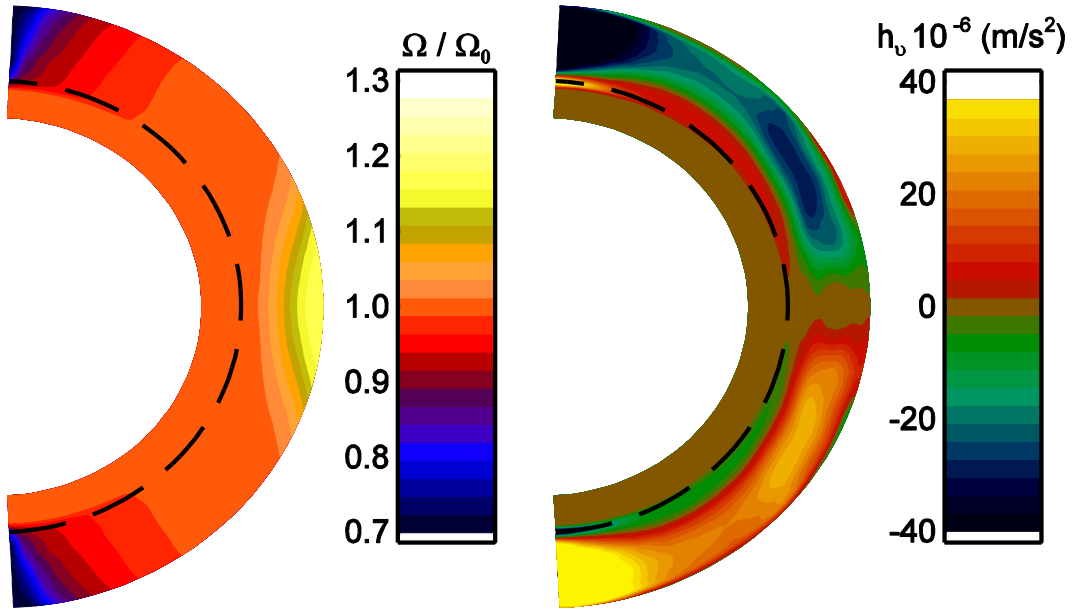


$r0.75t5$ ,  $Ro = 0.0763$



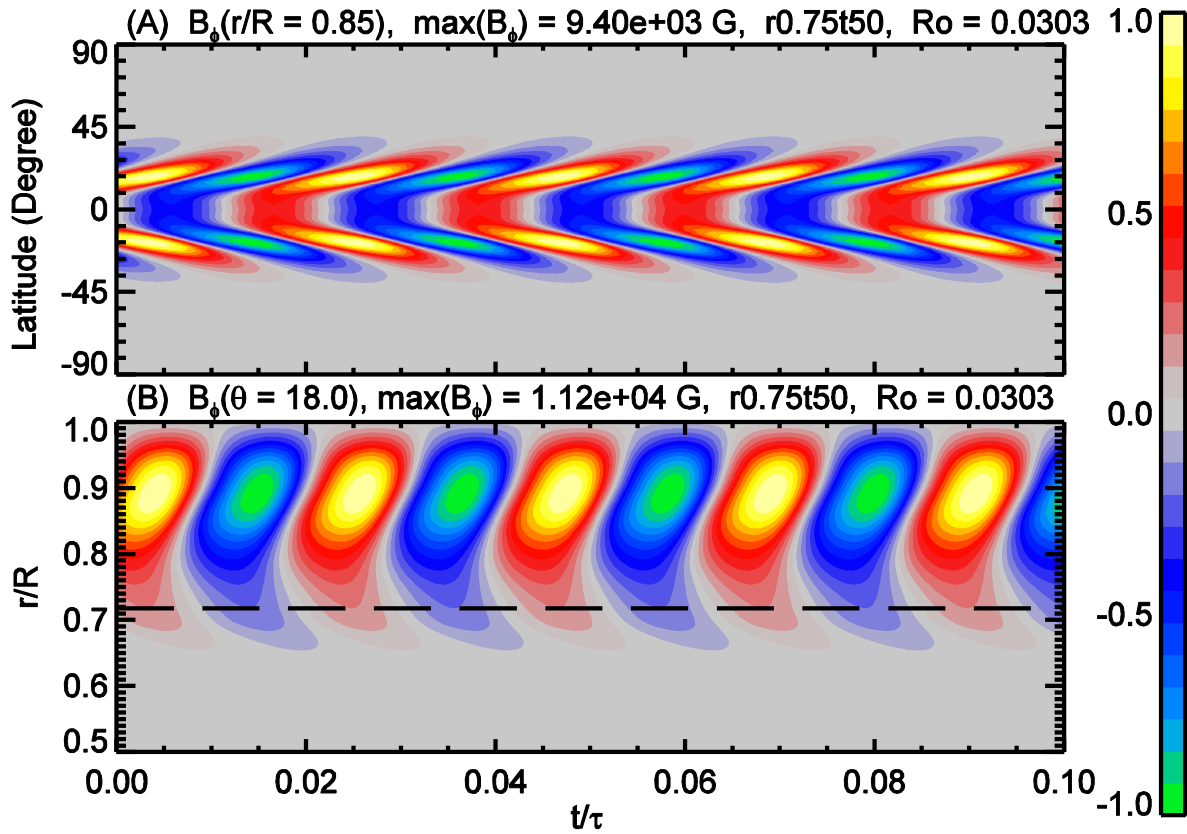
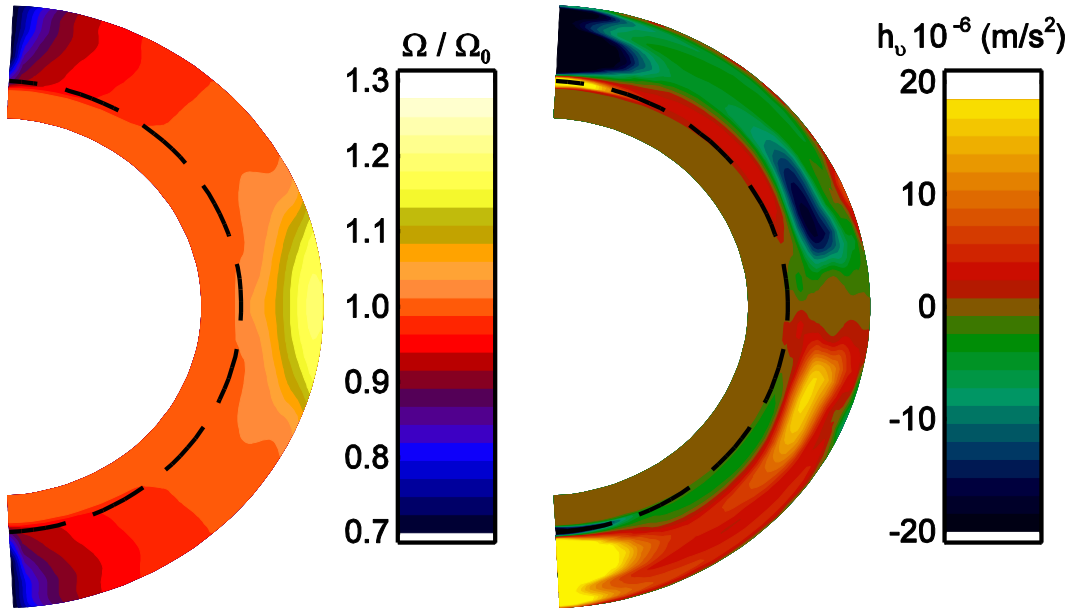
r0.75t20, Ro = 0.0430

r0.75t20, Ro = 0.0430



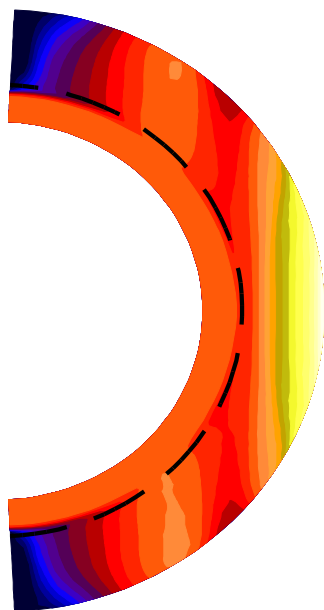
r0.75t50, Ro = 0.0303

r0.75t50, Ro = 0.0303

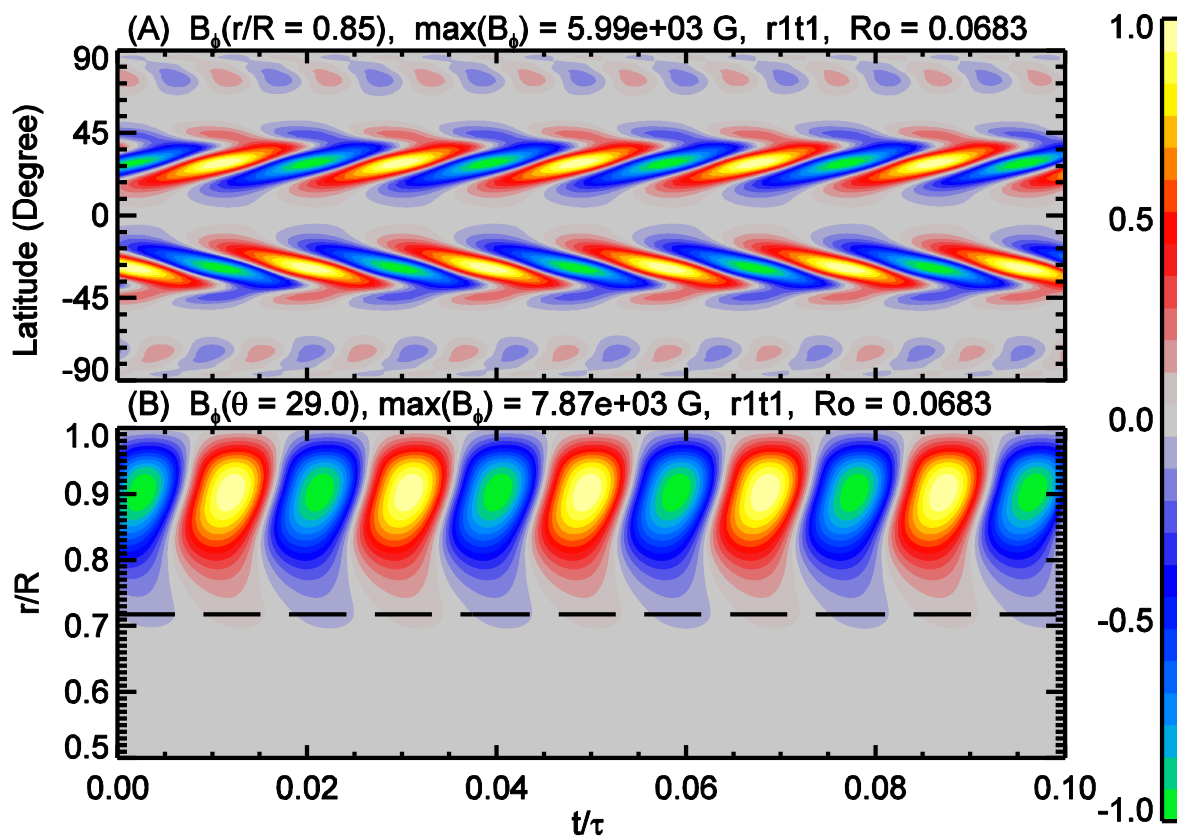
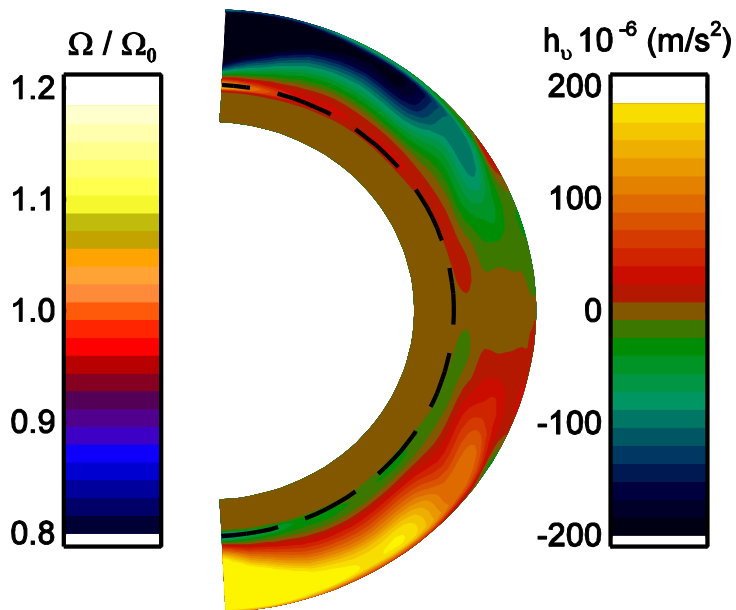




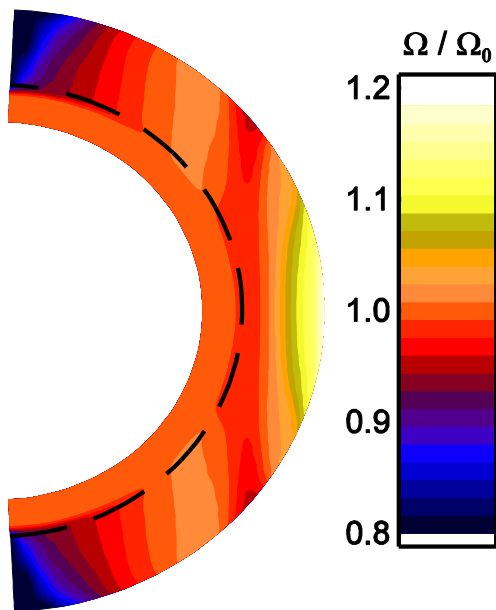
r1t1, Ro = 0.0683



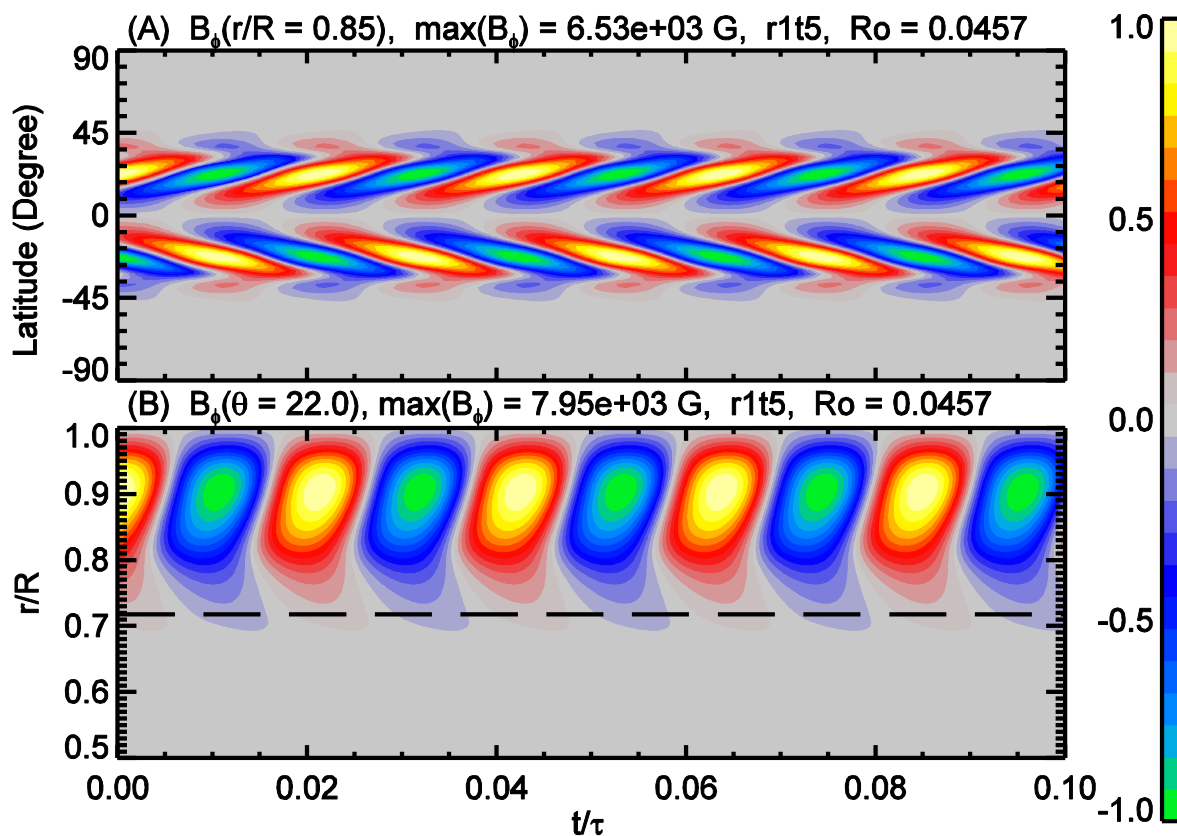
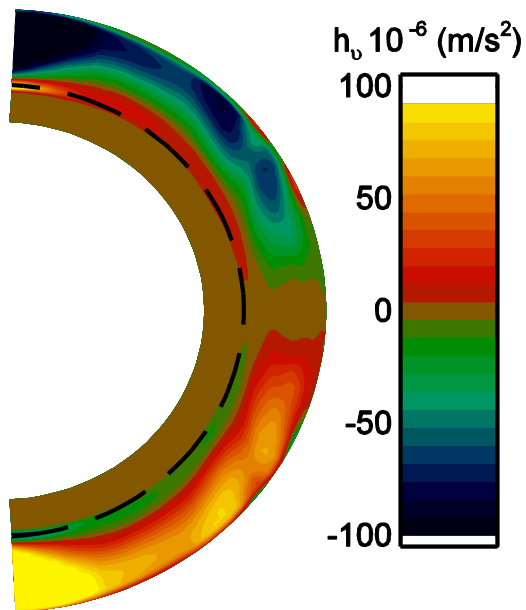
r1t1, Ro = 0.0683



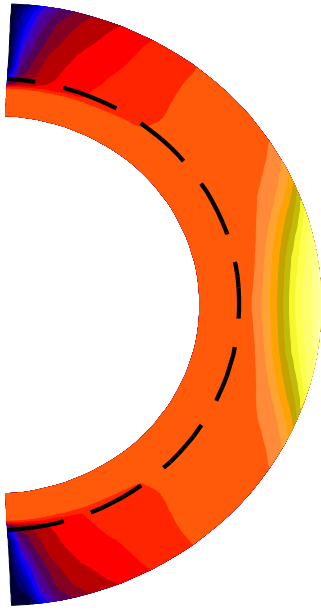
r1t5, Ro = 0.0457



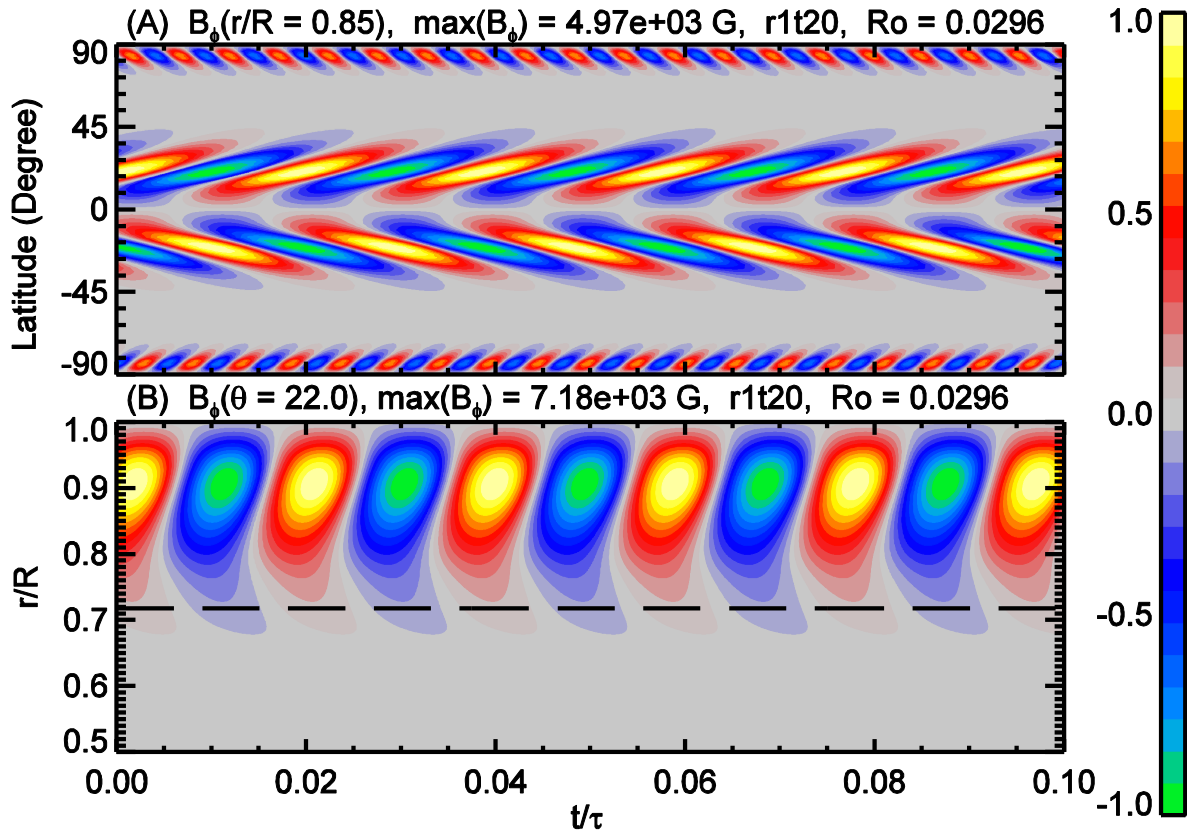
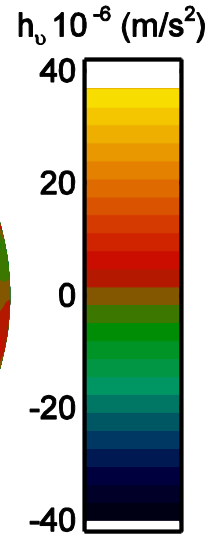
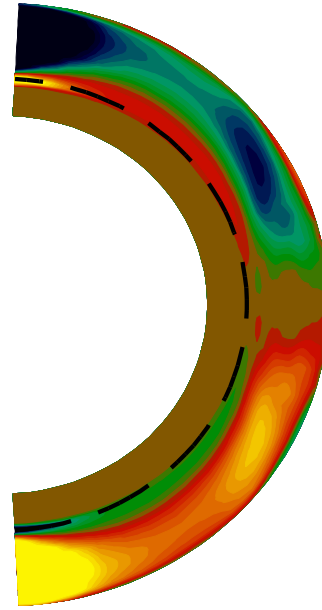
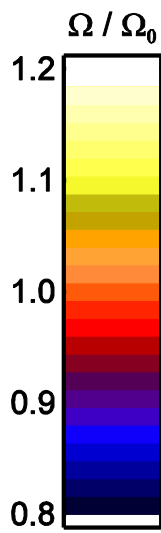
r1t5, Ro = 0.0457



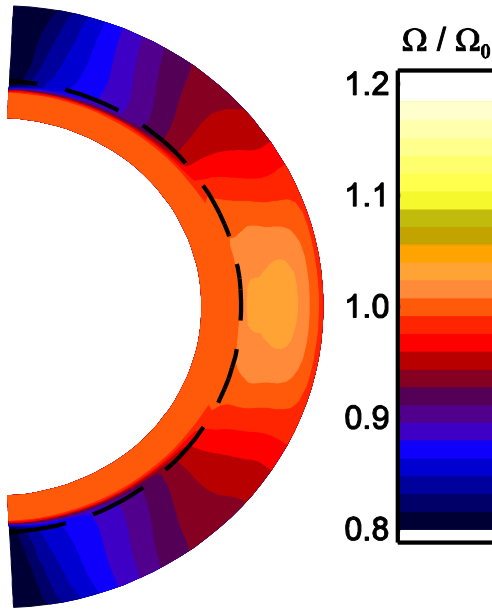
r1t20, Ro = 0.0296



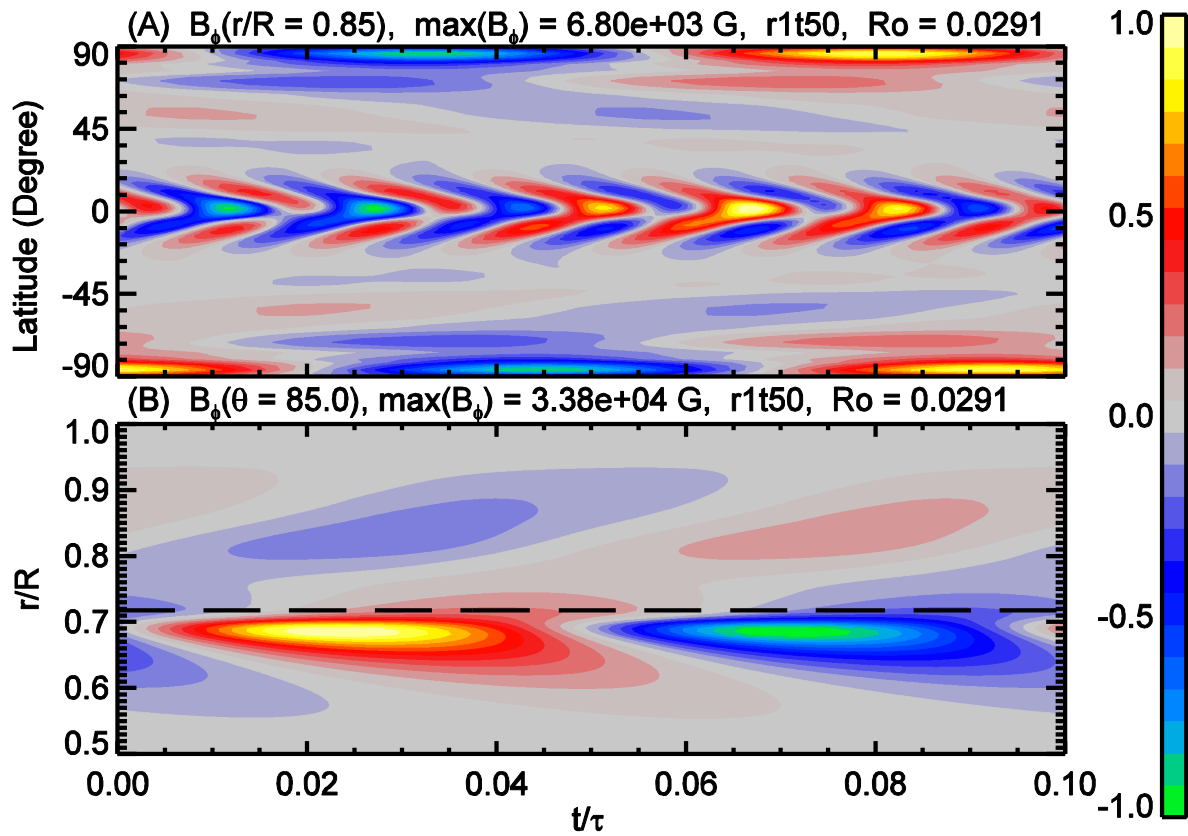
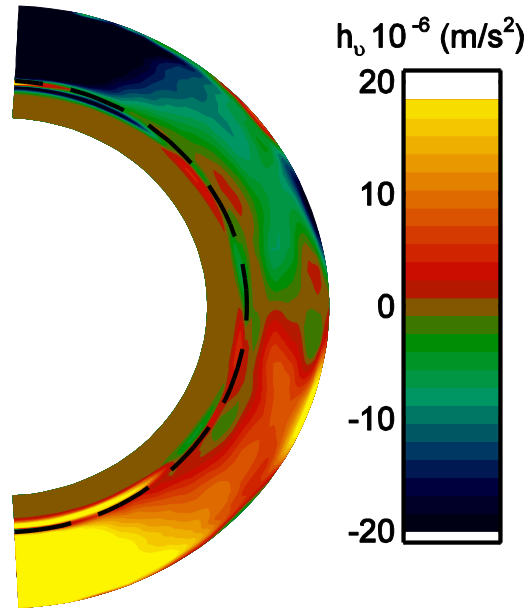
r1t20, Ro = 0.0296



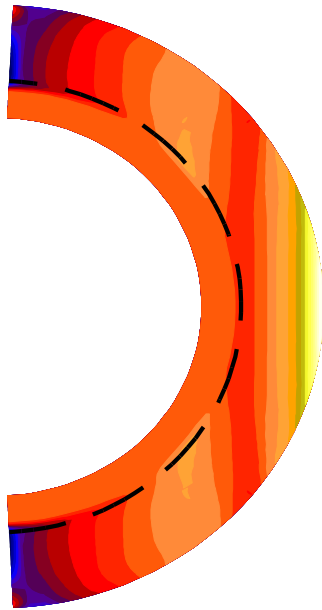
r1t50, Ro = 0.0291



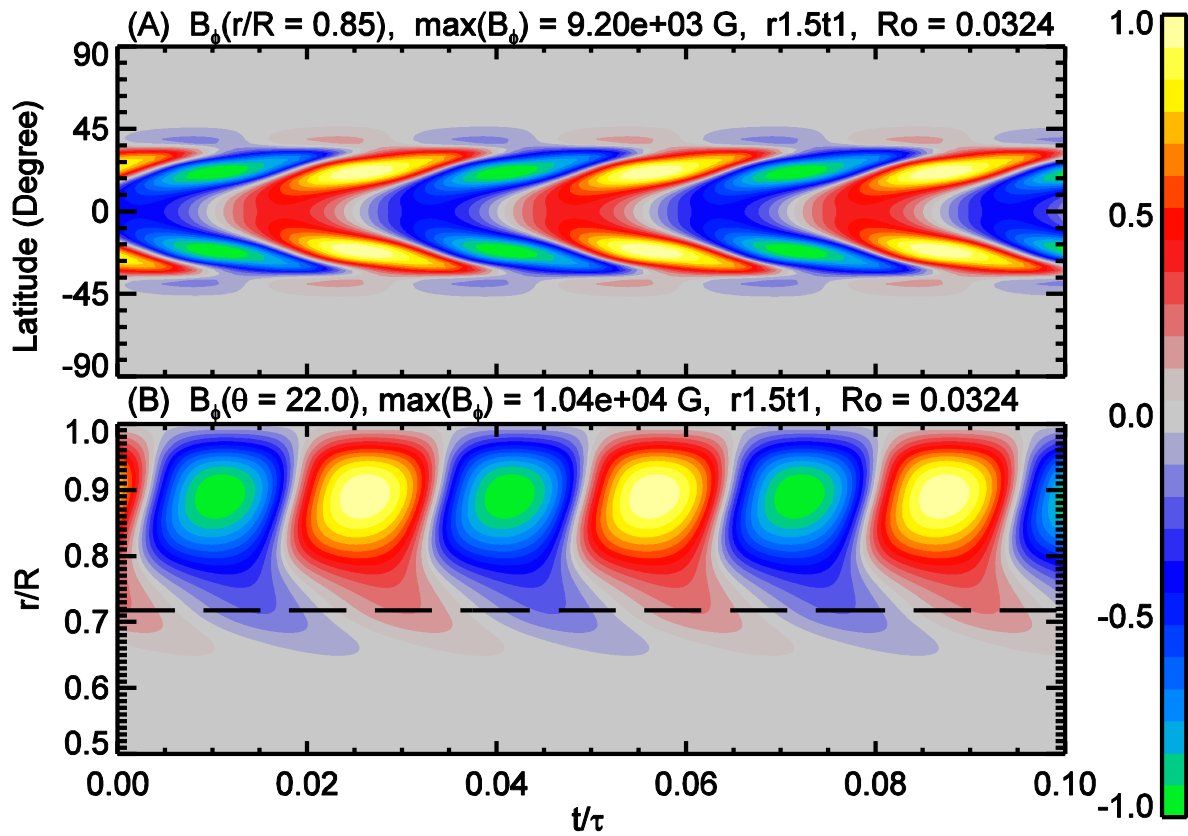
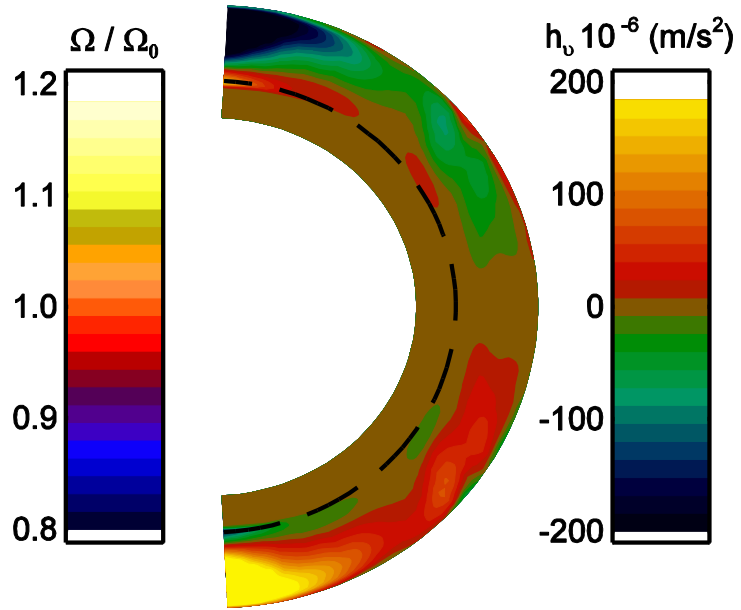
r1t50, Ro = 0.0291



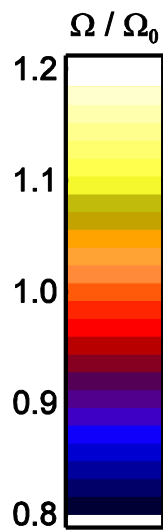
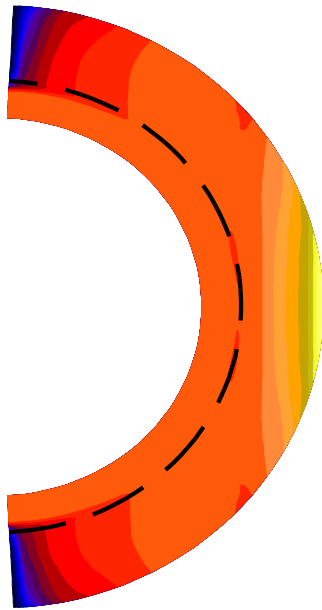
r1.5t1, Ro = 0.0324



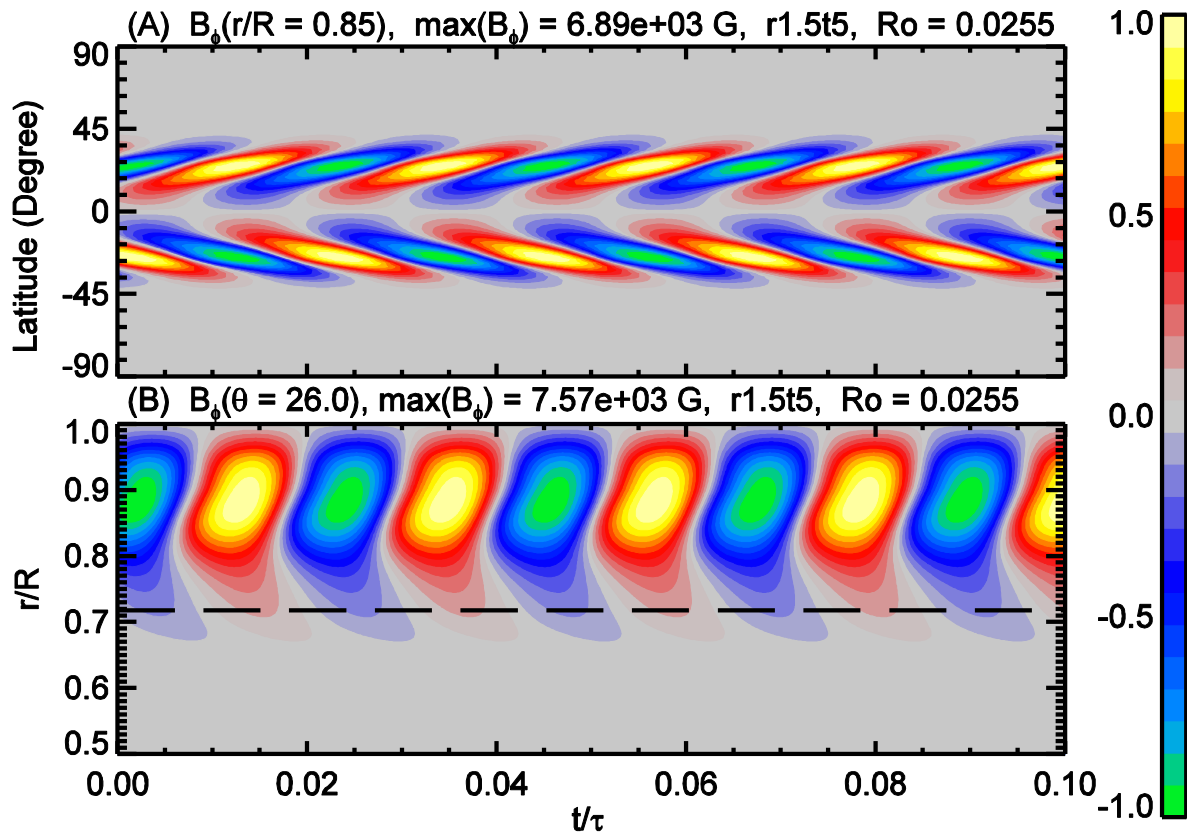
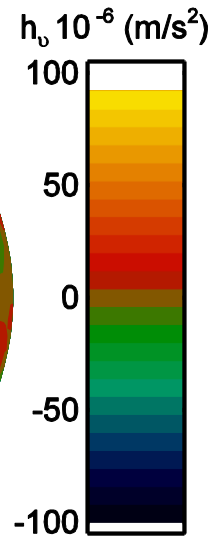
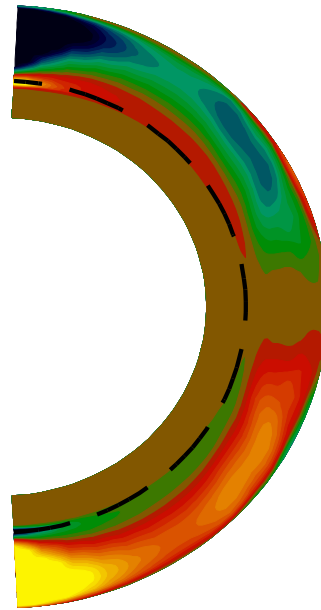
r1.5t1, Ro = 0.0324



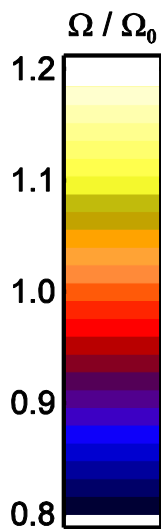
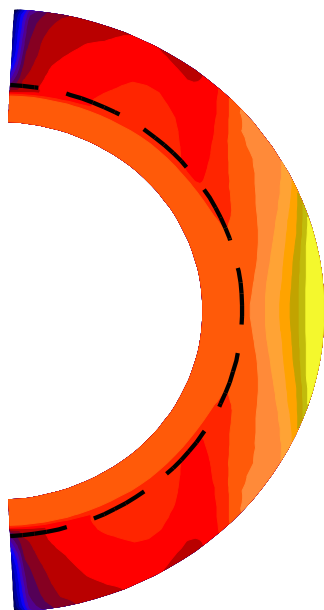
r1.5t5, Ro = 0.0255



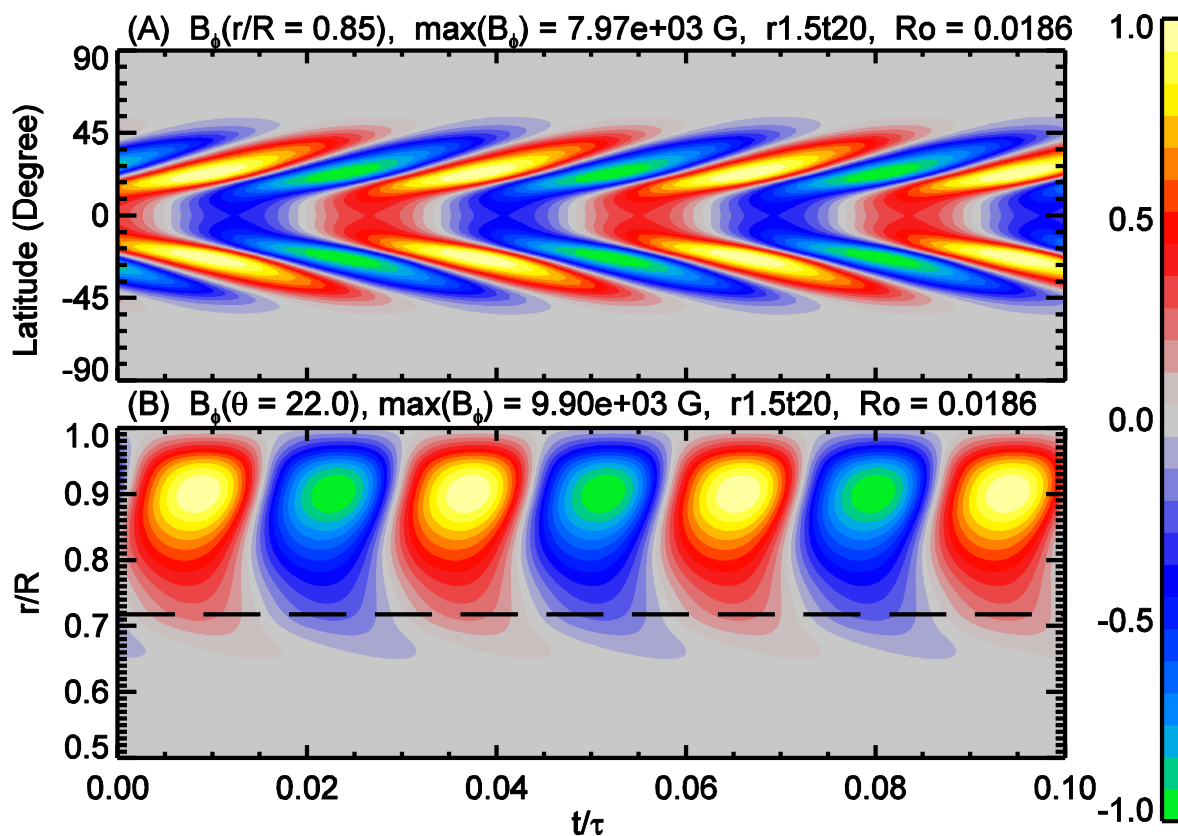
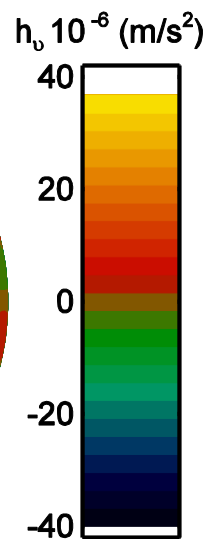
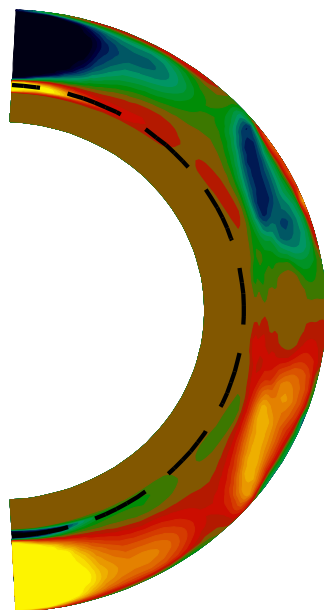
r1.5t5, Ro = 0.0255



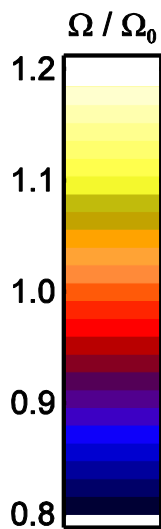
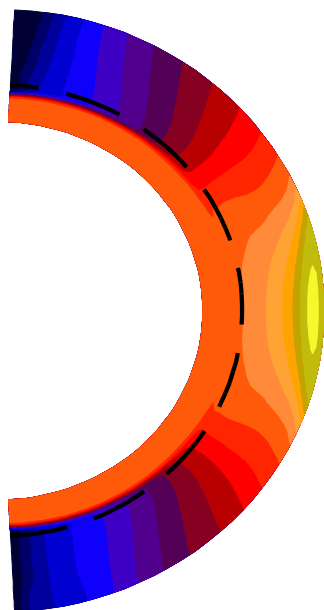
r1.5t20, Ro = 0.0186



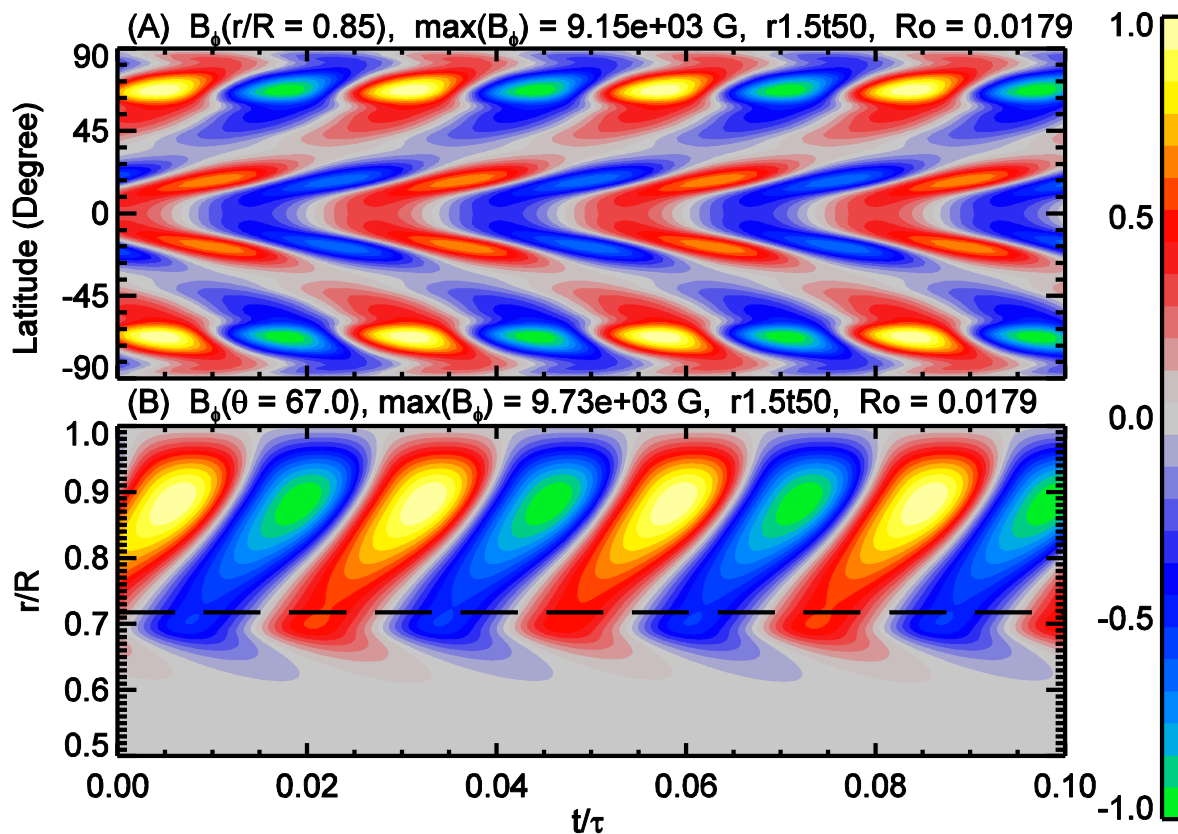
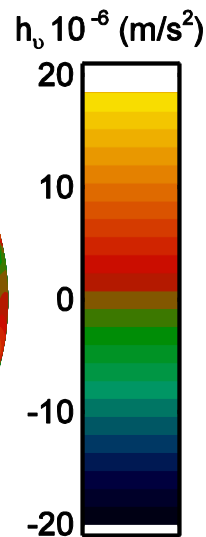
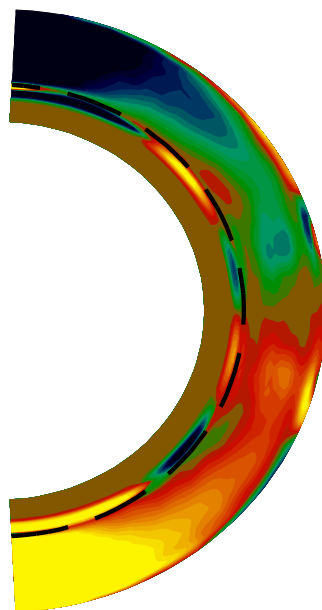
r1.5t20, Ro = 0.0186



r1.5t50, Ro = 0.0179

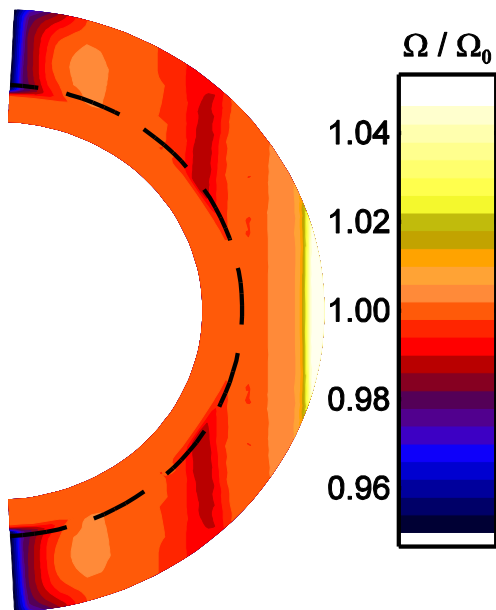


r1.5t50, Ro = 0.0179

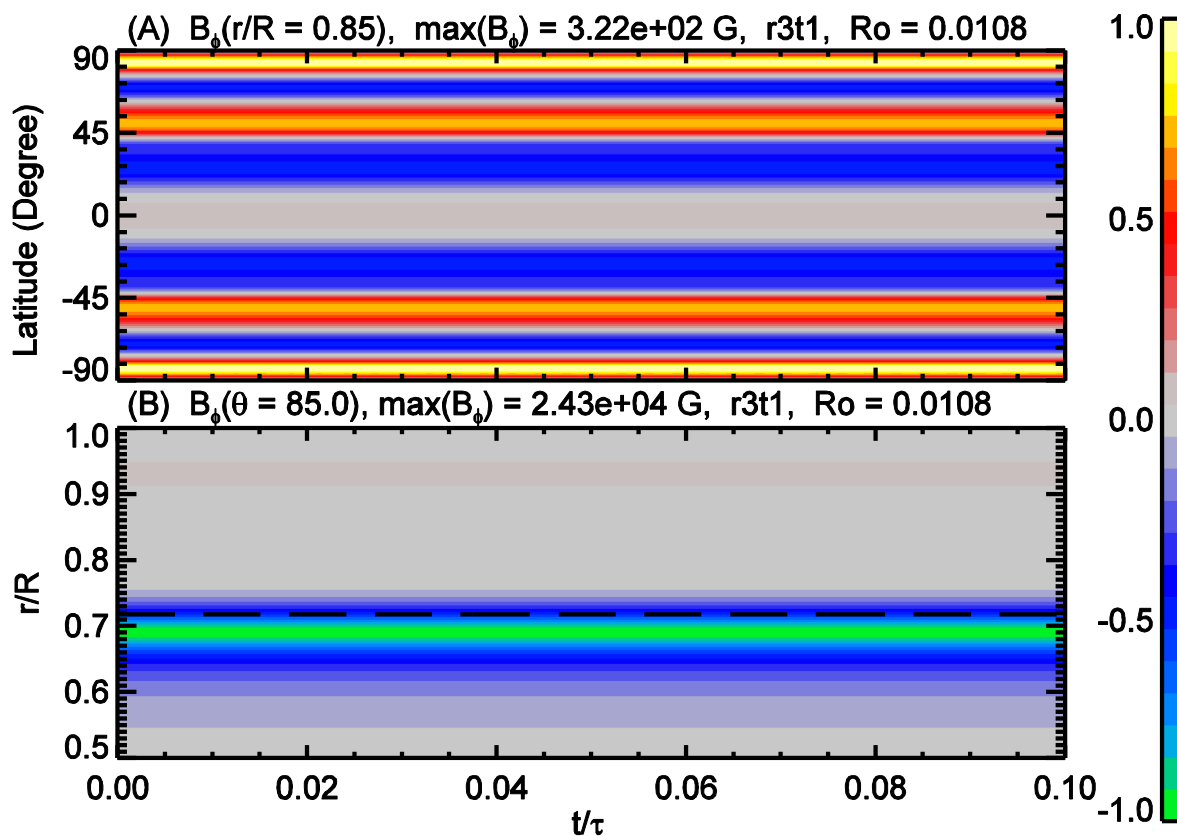
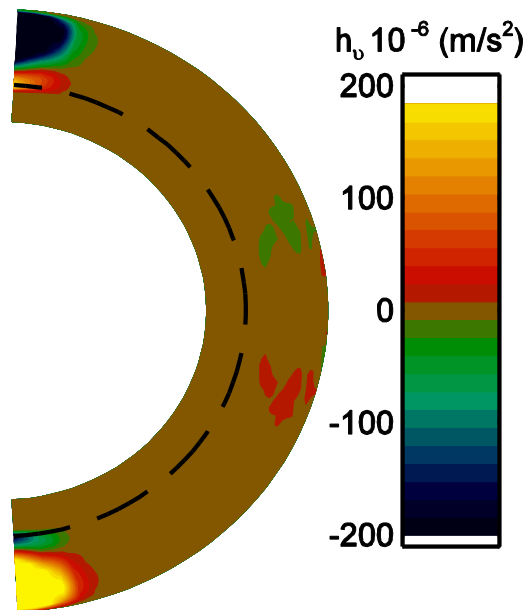




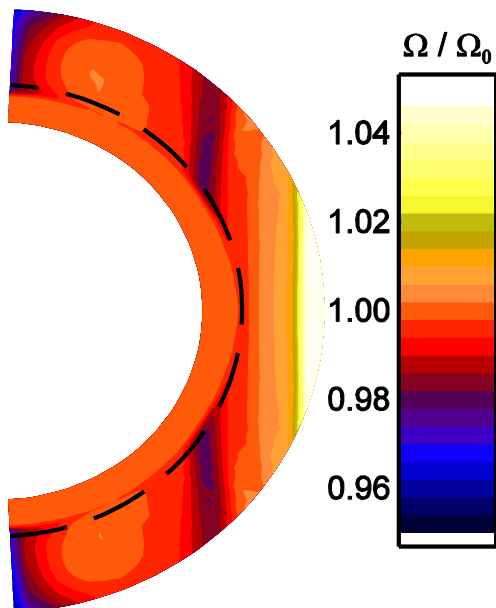
r3t1, Ro = 0.0108



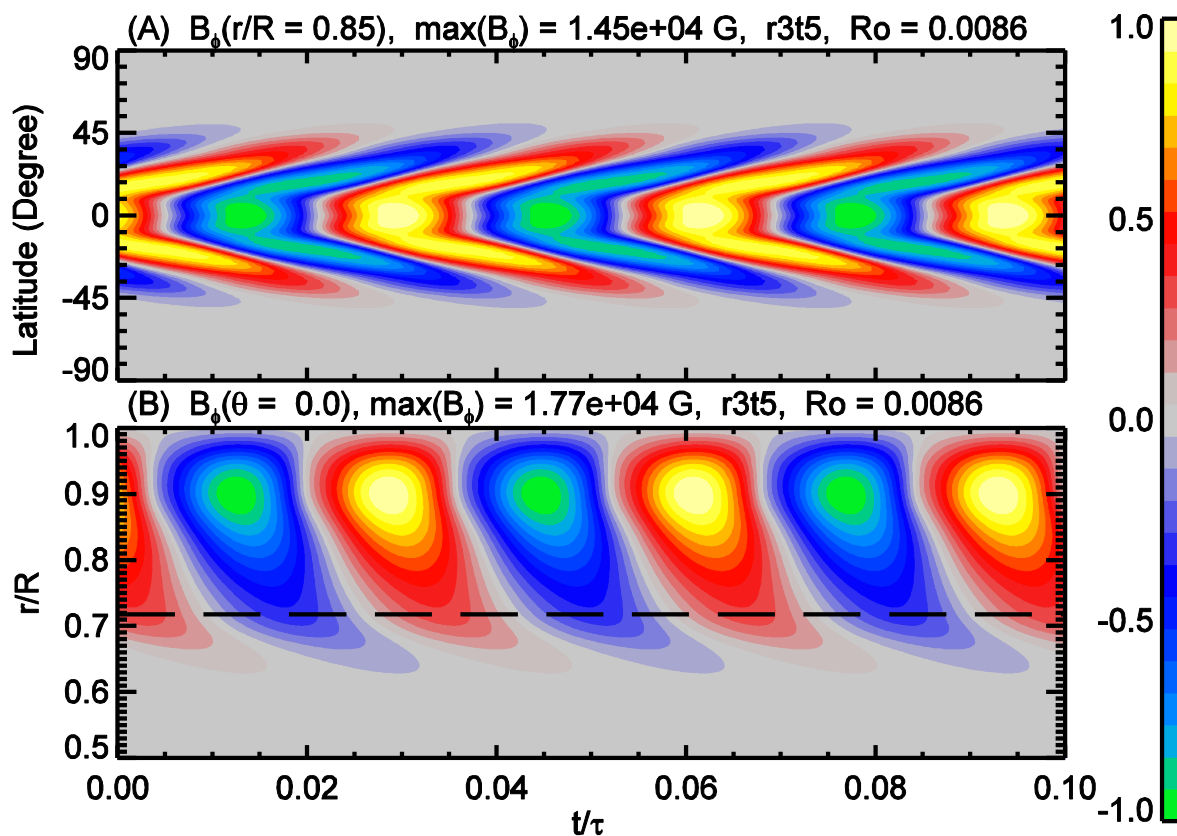
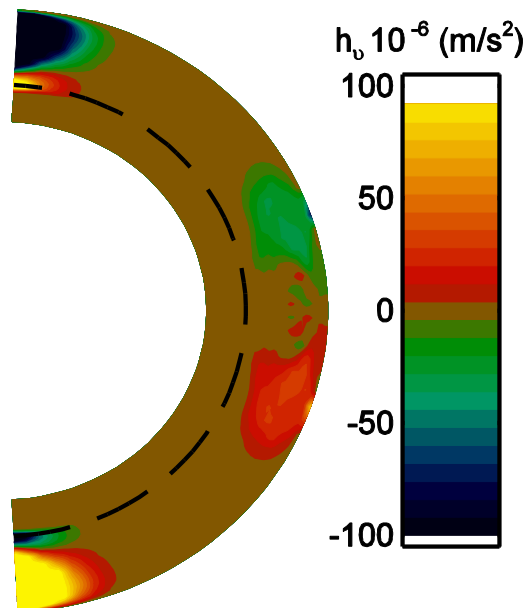
r3t1, Ro = 0.0108



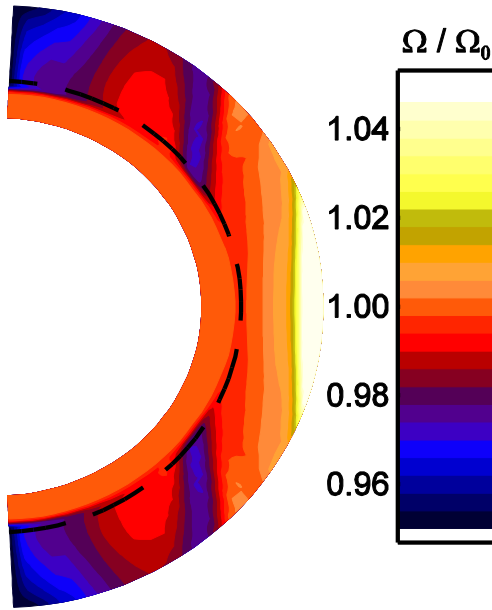
r3t5, Ro = 0.0086



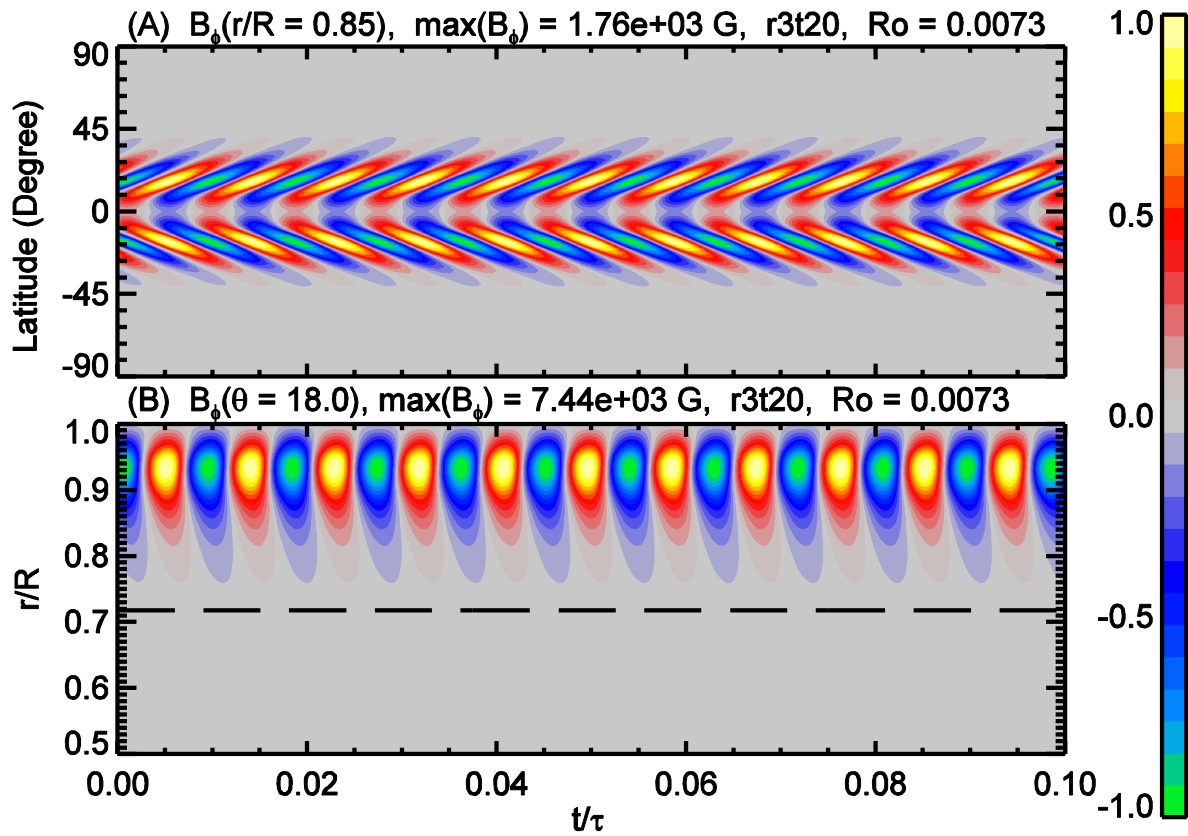
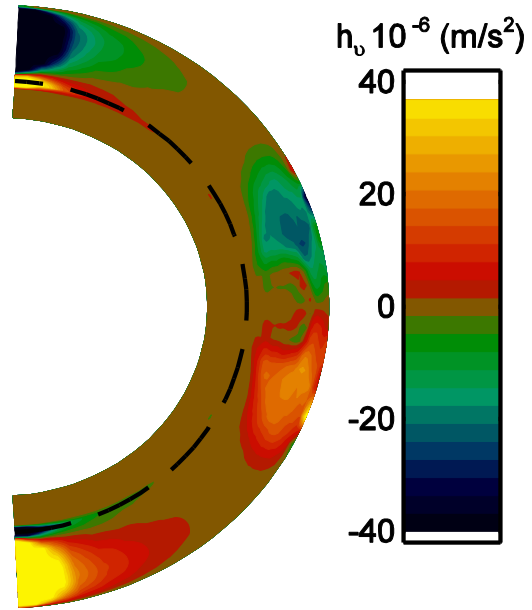
r3t5, Ro = 0.0086



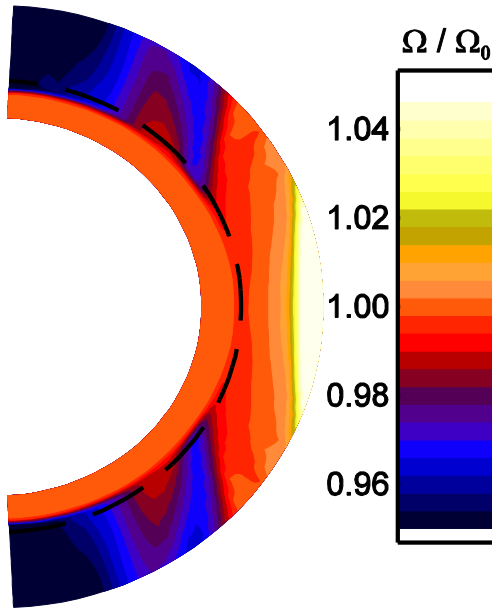
r3t20, Ro = 0.0073



r3t20, Ro = 0.0073



r3t50,  $Ro = 0.0072$



r3t50,  $Ro = 0.0072$

