

Université de Montréal

L'effet des erreurs dans les variables dans les modèles de régression avec autocorrélation des erreurs résiduelles.

par

Jean Lavoie

Sciences Économiques

Faculté des arts et sciences

Rapport de recherche présenté  
à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en sciences économiques

Septembre, 1990

© Jean Lavoie, 1990

## TABLES DES MATIÈRES

|  | Pages |
|--|-------|
| TABLE DES MATIÈRES.....                                    | I     |
| LISTE DES TABLES.....                                      | II    |
| LISTE DES FIGURES.....                                     | III   |
| REMERCIEMENTS.....   | IV    |
| INTRODUCTION.....  | 1     |
| SECTION 2: MOINDRES CARRÉS ORDINAIRES.....                 | 2     |
| SECTION 3: CORRECTION D'AUTOCORRÉLATION.....               | 11    |
| SECTION 4: SIMULATION MONTE CARLO.....                     | 23    |
| SECTION 5: QUANTIFICATION DES RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES..... | 51    |
| CONCLUSIONS.....   | 56    |
| BIBLIOGRAPHIE.....   | V     |
| ANNEXE MATHÉMATIQUE.....                                   | VI    |

## LISTE DES TABLES

TABLE 4.1: Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$ ,  $\sigma_v^2=5\%$

TABLE 4.2: Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$ ,  $\sigma_v^2=10\%$

TABLE 4.3: Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$ ,  $\sigma_v^2=20\%$

TABLE 4.4: Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$ ,  $\sigma_v^2=50\%$

TABLE 5.1: Résultats asymptotiques,  $\sigma_v^2=5\%$

TABLE 5.2: Résultats asymptotiques,  $\sigma_v^2=10\%$

TABLE 5.3: Résultats asymptotiques,  $\sigma_v^2=20\%$

TABLE 5.4: Résultats asymptotiques,  $\sigma_v^2=50\%$

## LISTE DES FIGURES

- FIGURE 4.1 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\rho$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 1
- FIGURE 4.2 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\beta$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 1
- FIGURE 4.3 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, scénario 1
- FIGURE 4.3 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 1
- FIGURE 4.4 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, scénario 1
- FIGURE 4.4 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 1
- FIGURE 4.5 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\rho$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 2
- FIGURE 4.6 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\beta$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 2
- FIGURE 4.7 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, scénario 2
- FIGURE 4.7 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 2
- FIGURE 4.8 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, scénario 2
- FIGURE 4.8 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 2
- FIGURE 4.9 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\rho$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 3
- FIGURE 4.10 : Graphique de la sommes des erreurs au carré en fonction de  $\beta$ , méthode Hildreth-Lu, scénario 3
- FIGURE 4.11 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, scénario 3
- FIGURE 4.11 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\rho$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 3
- FIGURE 4.12 a) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, scénario 3
- FIGURE 4.12 b) : Graphique de la fonction de vraisemblance en fonction de  $\beta$ , méthode balayage, précision augmentée, scénario 3

## REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier M. Marcel Dagenais d'avoir accepté de diriger ce rapport de recherche. Par son expérience et son savoir faire, il a su m'inculquer une soif pour l'économétrie et je lui en suis très reconnaissant. Je tiens aussi à remercier mes parents d'avoir été à mes côtés durant toutes mes années d'étude.

## 1. INTRODUCTION

Depuis 1950, beaucoup de recherches ont été effectuées dans la modélisation économétrique de variables mesurées avec erreurs. Grether et Maddala (1973), ont étudié les modèles à retards échelonnés en présence d'erreurs de mesures dans les variables exogènes, ceci dans le but d'expliquer pourquoi certaines études empiriques indiquent l'existence de taux d'ajustement trop lents. Entre autres, ils ont examiné le biais asymptotique des paramètres causé par les erreurs de mesures et l'autocorrélation des erreurs de régression. Ils n'ont pas étudié les seconds moments des estimateurs, ainsi que leur écarts quadratiques moyens, et la littérature sur les erreurs dans les variables ne contient aucun résultat théorique sur ce sujet précis.

L'objectif de ce rapport est d'analyser l'effet des erreurs de mesures dans les variables indépendantes sur les méthodes de correction d'autocorrélation des erreurs résiduelles dans les modèles de régressions linéaires. Pour ce faire, nous définirons un modèle simple d'erreurs dans les variables ( une variable explicative ) et d'autocorrélation des erreurs de régression. Pour chaque méthode ( sans correction d'autocorrélation et avec correction d'autocorrélation ), nous établirons les différences analytiques sur le biais asymptotique, la variance asymptotique et l'écart quadratique moyen asymptotique de l'estimateur du paramètre ( section 2 et 3. ). Ensuite, à

l'aide de simulations par méthode de Monte Carlo ( section 4 ) nous examinerons cinq méthodes d'estimations: les moindres carrés, Cochrane-Orcutt, Hildreth-lu et Maximum de vraisemblance ( par procédure itérative et par procédure de balayage ). Étant donné que ces simulations seront basées sur des échantillons finis, les expériences de Monte Carlo nous donneront une bonne indication du lien entre les résultats théoriques asymptotiques établis aux sections 2 et 3, et les résultats des simulations à la section 4. Finalement, dans la section 5 nous établirons certaines similarités entre les résultats théoriques et ceux obtenus à la section 4.

## *2. MOINDRES CARRÉS ORDINAIRES*

Dans la modélisation qui suit, nous envisageons la possibilité que la variable explicative contient de l'autocorrélation d'ordre 1, dans le but d'étudier le phénomène d'autocorrélation des erreurs de régression et d'erreurs de mesures qui se rapproche le plus de la réalité rencontrées par les chercheurs empiriques<sup>1</sup>. De plus, dans certains des cas étudiés, nous allouons aussi pour une autocorrélation d'ordre 1 dans les erreurs de mesures ( Section 3 ), sans toutefois imposer une structure spécifique sur cette autocorrélation. Dans les sections 2 et 3, nous utilisons une forme générale du modèle pour être en mesure

---

<sup>1</sup> En général, des séries chronologiques contiennent une composante AR1 non-négligeable et habituellement l'autocorrélation est positive, ce qui justifie l'utilisation d'une variable explicative autocorrélée dans cette analyse.

d'analyser des cas particuliers dans les sections subséquentes.

Soit le modèle:

$$Y_t = X_t \beta + u_t,$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (-1 < \rho < 1; t=1, \dots, T),$$

$$\tilde{X}_t = X_t + v_t \quad \Rightarrow X_t = \tilde{X}_t - v_t,$$

$$X_t = \delta X_{t-1} + \xi_t \quad (-1 < \delta < 1; t=1, \dots, T),$$

où  $Y$  est la variable dépendante,  $X$  est un vecteur  $n \times 1$  d'une variable exogène,  $\beta$  est le paramètre d'intérêt avec  $u$  et  $X$  suivant un processus AR1. Nous faisons l'hypothèse que l'on tire un échantillon au hasard sur  $Y$ ,  $X$  et  $v$ , avec  $X$  étant non-observable. De plus:

$$E(X) = 0, V(X) = V(X_{-1}) = E(XX^T) = \sigma_X^2 \mathbf{E},$$



avec  $E(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$  donné par:

$$\sigma_X^2 \mathbf{\Xi} = \frac{\sigma_\xi^2}{1-\delta^2} \begin{pmatrix} 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 & \dots & \delta^{T-1} \\ \delta & 1 & \delta & \delta^2 & \dots & \delta^{T-2} \\ \delta^2 & \delta & 1 & \delta & \dots & \delta^{T-3} \\ & & & \vdots & \ddots & \delta \\ \delta^{T-1} & \delta^{T-2} & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où le paramètre  $\delta$  n'est pas nécessairement connu. Les hypothèses sur les erreurs sont données par:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &\sim N(0, \sigma_e^2 I), \quad V(\mathbf{e}_t) = V(\mathbf{e}_{t-j}) = \sigma_e^2, \quad \forall j \\ \mathbf{v} &\sim N(0, \sigma_v^2 I), \quad V(\mathbf{v}_t) = V(\mathbf{v}_{t-j}) = \sigma_v^2, \quad \forall j \\ \xi &\sim N(0, \sigma_\xi^2 I), \quad V(\xi_t) = V(\xi_{t-j}) = \sigma_\xi^2, \quad \forall j \end{aligned}$$

Il est à noter qu'il n'y a pas d'autocorrélation dans les erreurs de mesures  $\mathbf{v}$ .  $X$  est indépendant de  $\mathbf{u}$ , de  $\mathbf{v}$  et de  $\mathbf{e}$ , c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_t \mathbf{v}_t) &= E(\mathbf{e}_t \mathbf{v}_t) = 0, \quad E(\mathbf{u}_t X_t) = E(\mathbf{e}_t X_t) = 0 \quad \forall t \\ E(\mathbf{e}_t X_{t-j}) &= E(\mathbf{v}_t X_{t-j}) = E(\mathbf{u}_t X_{t-j}) = E(\mathbf{v}_t \mathbf{u}_{t-j}) = E(\mathbf{v}_t \mathbf{e}_{t-j}) = 0, \quad \forall j \end{aligned}$$

de plus,  $\xi$  est indépendant de  $u$ , de  $v$  et de  $\varepsilon$ , ce qui implique:

$$\begin{aligned} E(u_t \xi_t) &= E(\varepsilon_t \xi_t) = E(v_t \xi_t) = 0, \quad \forall t \\ E(u_t \xi_{t-j}) &= E(\varepsilon_t \xi_{t-j}) = E(v_t \xi_{t-j}) = 0, \quad \forall j \end{aligned}$$

Nous faisons l'hypothèse que la structure d'autocorrélation sur les  $u$  est donnée par  $E(uu^T) = \sigma_u^2 \Omega$  ayant la forme usuelle, soit:

$$\sigma_u^2 \Omega = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-3} \\ & & & \vdots & \ddots & \rho \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour justifier ce modèle, nous pourrions envisager un chercheur empirique faisant face au problème d'estimer le paramètre  $\beta$ , tout en sachant à priori que les séries utilisées produiront de l'autocorrélation d'ordre 1 dans les erreurs

résiduelles  $u_t$ . Ne se doutant pas que la variable exogène est mesurée avec erreur et qu'elle est autocorrélée d'ordre 1, le chercheur utilisera des méthodes pour corriger l'autocorrélation d'ordre 1, à l'aide de transformation des variables en quasi-différence à l'aide du paramètre  $\rho$  qui est calculé à l'aide d'une formule asymptotique dérivée à la section 3. Notre objectif est de comparer le comportement asymptotique de la variance et de l'écart quadratique moyen du paramètre  $\beta$ , obtenus à la suite d'usage de ces méthodes avec les résultats analogues obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires. Le vrai modèle devient donc :

$$Y = \beta \tilde{X} + u - \beta v$$

Nous pouvons constater que la méthode des moindres carrés ordinaires ne pourra pas produire un estimateur convergent de  $\beta$ , car la présence de l'erreur de mesure  $v$  dans le modèle fait en sorte que la variable exogène  $\tilde{X}$  observée est corrélée avec l'erreur de régression ( $u - \beta v$ ) du vrai modèle. L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est donné par :

$$\beta'' = \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\beta'' &= \frac{(X^T + v^T)(\beta X + u) / T}{(X^T + v^T)(X + v) / T} \\
&= \frac{(\delta X_{-1}^T + \xi^T + v^T)(\delta \beta X_{-1} + \beta \xi + u) / T}{(\delta^2 X_{-1}^T + \xi^T \xi + v^T v) / T} \\
&= \frac{(\delta^2 \beta X_{-1}^T X_{-1} + \beta \xi^T \xi) / T}{(\delta^2 X_{-1}^T X_{-1} + \xi^T \xi + v^T v) / T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \text{Plim} \beta'' &= \frac{\delta^2 \beta \sigma_X^2 + \beta \sigma_\xi^2}{\delta^2 \sigma_X^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_v^2} \\
&= \frac{\delta^2 \beta \sigma_X^2 + \beta (1 - \delta^2) \sigma_X^2}{\delta^2 \sigma_X^2 + (1 - \delta^2) \sigma_X^2 + \sigma_v^2} \\
&= \frac{\beta \sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_v^2} \\
&= \beta (1 - \lambda) \quad \text{où } \lambda = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_X^2 + \sigma_v^2}
\end{aligned}$$

Nous constatons aussi que si il n'y a pas d'autocorrélation d'ordre 1 dans la variable explicative ( i.e.  $\delta=0$  ), le biais asymptotique sera le même et ceci illustre un résultat bien connu, c'est-à-dire la méthode des MCO produira un estimateur de  $\beta$  non-convergent avec biais asymptotique égal à:

$$BIAIS(\beta'') = PLIM(\beta'' - \beta) = -\beta \lambda$$

Maintenant, l'écart quadratique moyen de  $\beta''$  est donné par :

$$EQM(\beta'') = E \left[ \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \right] \left[ \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \right]^T$$

Additionnant et soustrayant le terme :

$$\beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} \quad \text{nous obtenons :}$$

$$\begin{aligned} EQM(\beta'') &= E \left[ \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} + \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \right] \left[ \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} + \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \right]^T \\ &= E(\Lambda_1 \Lambda_1^T) + E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) + 2E(\Lambda_1 \Lambda_2^T) \end{aligned}$$

$$\text{où } \Lambda_1 = \frac{\tilde{X}^T Y}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}}$$

$$\text{et } \Lambda_2 = \beta \frac{X^T X}{\tilde{X}^T \tilde{X}} - \beta$$

Lorsque T tend vers l'infini, nous observons que :

$$E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) \rightarrow E[\beta \sigma_x^2 / (\sigma_x^2 + \sigma_u^2) - \beta]^2$$

donc

$$E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) \rightarrow [Plim \beta'' - \beta]^2$$

ce qui nous donne l'expression du biais asymptotique de  $\beta''$ .

L'approximation asymptotique de  $E(\Lambda_1 \Lambda_1^T)$  s'obtient en dérivant l'espérance mathématique asymptotique de  $\Lambda_1 \Lambda_1^T$ ,

$$\text{où } \Lambda_1 = \sqrt{T} \left[ \frac{\tilde{X}^T Y / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \beta \frac{X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right] \text{ et ensuite l'on divise } E(\Lambda_1 \Lambda_1^T) \text{ par } T.$$

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons l'expression de l'écart quadratique moyen de  $\beta''$ <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \text{asy } EQM(\beta'') &= (\text{BIAIS}(\beta''))^2 + \text{VAR}(\beta'') \\ &= (-\beta \lambda)^2 + \text{VAR}(\beta'') \\ &= [-\beta \lambda]^2 + \frac{1}{T(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_u^2 \left[ 1 + \frac{2 \delta \rho}{(1 - \delta \rho)} \right] + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sigma_u^2 \right\} \end{aligned}$$

et nous obtenons pour la variance de  $\beta''$ , l'expression suivante:

---

<sup>2</sup>Voir l'annexe mathématique pour les calculs détaillés de l'EQM de  $\beta''$  (i.e.  $E(\Lambda_1 \Lambda_1^T)$  et  $E(\Lambda_2 \Lambda_2^T)$ ).

$$asy \quad VAR(\beta'') = \frac{1}{T(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_u^2 \left[ 1 + \frac{2\delta\rho}{(1-\delta\rho)} \right] + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sigma_u^2 \right\}$$

Maintenant, si la variable explicative n'est pas autocorrélée, l'écart quadratique moyen de  $\beta''$ , est donnée par<sup>3</sup>:

$$asy \quad EQM(\beta'') = [-\beta\lambda]^2 + \frac{1}{T(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_u^2 + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sigma_u^2 \right\}$$

De façon similaire, la variance est donné par:

$$asy \quad VAR(\beta'') = \frac{1}{T(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)^2} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_u^2 + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sigma_u^2 \right\}$$

Dans la prochaine section, nous allons étudier le cas de correction de l'autocorrélation des erreurs de régression tout en supposant que la variable explicative est mesurée avec erreur et autocorrélée d'ordre 1.

---

<sup>3</sup> Nous obtenons cette expression en remplaçant  $\delta$  par 0 dans l'expression de l'EQM( $\beta''$ ) obtenu plus haut.

### 3. CORRECTION D'AUTOCORRÉLATION

Nous utilisons le même modèle et les mêmes hypothèses qu'à la section 2, mais transformons le modèle de façon à mettre en évidence l'autocorrélation des erreurs de régression en supposant  $\rho$  connu:

$$Y = \beta \tilde{X} + u - \beta v$$

$$\rightarrow Y = \beta \tilde{X} + \eta,$$

$$\text{où } \eta_t = \rho \eta_{t-1} + \omega_t \quad (-1 < \rho < 1, t = 1, \dots, T),$$

avec  $E(uu^T) = \sigma_u^2 \Omega$  ayant la même structure qu'à la section 2. La forme exacte de l'erreur de régression dans le modèle transformé est donnée par:

$$\begin{aligned} \eta_t &= u_t - \beta v_t = \rho u_{t-1} - \beta v_t + e_t \\ &= \rho u_{t-1} + \rho \beta v_{t-1} - \rho \beta v_{t-1} - \beta v_t + e_t \\ &= \rho \eta_{t-1} + \rho \beta v_{t-1} - \beta v_t + e_t \\ &= \rho \eta_{t-1} + \omega_t \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega_t = e_t + \rho \beta v_{t-1} - \beta v_t$$



La covariance entre  $\eta_t$  et  $\eta_{t-1}$  est donnée par:

$$\begin{aligned}
 E(\eta_t \eta_{t-1}) &= E[(\rho \eta_{t-1} + \omega_t) \eta_{t-1}] \\
 &= E[(\rho u_{t-1} - \beta v_t + \varepsilon_t) (u_{t-1} - \beta v_{t-1})] \\
 &= E(\rho u_{t-1} u_{t-1}) \\
 &= \rho \sigma_u^2 \\
 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}
 \end{aligned}$$

Pour utiliser une méthode de correction d'autocorrélation,  $\eta_t - \rho \eta_{t-1}$  doit être égale à une erreur identiquement et indépendamment distribuée avec une moyenne de zéro et une variance constante. La forme de l'erreur de régression  $\omega_t$  viole cette condition car si l'on exprime  $\omega$  de délai 1, nous obtenons:  $\omega_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \rho \beta v_{t-2} - \beta v_{t-1}$ . Ceci montre que  $\omega_t$  et  $\omega_{t-1}$  sont autocorrélées d'ordre 1, car la covariance de ces deux termes n'est pas zéro:

$$\begin{aligned}
 COV(\omega_t \omega_{t-1}) &= E(\omega_t \omega_{t-1}) \\
 &= E[(\varepsilon_t + \rho \beta v_{t-1} - \beta v_t) (\varepsilon_{t-1} + \rho \beta v_{t-2} - \beta v_{t-1})] \\
 &= \rho \beta^2 E(v_{t-1})^2 \\
 &= \rho \beta^2 \sigma_v^2
 \end{aligned}$$

Donc, l'utilisation d'une méthode de correction de corrélation sérielle d'ordre 1 est erronée dans ce contexte, car la présence d'erreur de mesure dans la variable exogène et l'autocorrélation d'ordre 1 dans l'erreur  $\omega$  violent deux conditions nécessaires à l'usage de cette méthode (i.e. la corrélation de  $\omega$  et de la variable exogène, ainsi que l'autocorrélation d'ordre 1 dans l'erreur  $\omega$ ).

Nous allons maintenant établir une expression asymptotique générale pour les erreurs résiduelles obtenues à la suite d'une régression MCO, car nous utiliserons cette formule pour dériver l'écart quadratique moyen de l'estimateur de  $\beta$  lorsque l'on corrige l'autocorrélation des erreurs résiduelles et cela peut aussi aider à vérifier si une méthode de correction d'autocorrélation d'ordre 1 est justifiée. Dénotons par  $e_t$ , les résidus de la régression de Y sur  $X^4$ :

$$\rightarrow e_t = Y_t - \hat{Y}_t = \beta X_t + u_t - \beta' \tilde{X}_t$$

où  $\beta'$  est l'estimateur MCO obtenu à la section précédente.

$$\begin{aligned} \text{et } \rightarrow e_t &= u_t + \left( 1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} \right) \beta X_t - \frac{\beta \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} u_t \\ &= u_t + \beta \lambda X_t - \beta (1 - \lambda) u_t \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> Ces résultats sont des limites de probabilités, mais nous omettons l'opérateur de limite en probabilité (Plim) pour alléger le texte.

Nous utilisons la notation suivante pour ce qui suit<sup>5</sup>:

$$\text{COV}(X_t, Y_{t-j}) = \sigma_{XY}(j), \quad j \neq 0,$$

$$= \sigma_{XY}, \quad j = 0,$$

$$\frac{\sigma_{XY}(j)}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho_{XY}(j).$$

L'autocorrélation de premier ordre de  $e_t$  est donné par:

$$\rho_{ee}^*(1) = \frac{\text{COV}(e_t, e_{t-1})}{\sigma_{e_t} \sigma_{e_{t-1}}}$$

où

$$\text{COV}(e_t, e_{t-1}) = E[(e_t - E(e_t))(e_{t-1} - E(e_{t-1}))]$$

$$= E(e_t e_{t-1}) \quad \because \quad E(u_t) = E(X_t) = E(v_t) = 0$$

$$E(u_{t-1}) = E(X_{t-1}) = E(v_{t-1}) = 0$$

$$= E[u_t u_{t-1} + \beta^2 \lambda^2 X_t X_{t-1} + \beta^2 (1-\lambda)^2 v_t v_{t-1}]$$

$$\because E(u_t X_{t-1}) = E(v_t X_{t-1}) = E(v_t u_{t-1}) = 0$$

---

<sup>5</sup> Voir Grether et Maddala [2], page 256, pour la démarche qui suit.

$$\therefore \text{COV}(e_t, e_{t-1}) = \sigma_{uu}(1) + \beta^2 \lambda^2 \sigma_{xx}(1) + \beta^2 (1-\lambda)^2 \sigma_{vv}(1)$$

$$\text{et } \sigma_e^2 = \sigma_{e_t} \sigma_{e_{t-1}} \quad \because \text{VAR}(e_t) = \text{VAR}(e_{t-1})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma_e^2 &= E[e_t - E(e_t)]^2 \\ &= \sigma_u^2 + \beta^2 \lambda^2 \sigma_x^2 + \beta^2 (1-\lambda)^2 \sigma_v^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \rho_{ee}^*(1) = \left[ \frac{\sigma_{uu}(1) + \beta^2 \lambda^2 \sigma_{xx}(1) + \beta^2 (1-\lambda)^2 \sigma_{vv}(1)}{\sigma_u^2 + \beta^2 \lambda^2 \sigma_x^2 + \beta^2 (1-\lambda)^2 \sigma_v^2} \right]$$

En premier, nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'autocorrélation du premier ordre dans la variable explicative  $X$  et dans les erreurs de mesures  $v$ . Ceci implique que  $\sigma_{xx}(1) = \sigma_{vv}(1) = 0$ . Nous constatons que si  $\sigma_v^2 \neq 0$ , l'effet d'autocorrélation des  $u$  pourrait être réduit par la présence d'erreurs de mesure. Maintenant, si les  $v_t$  ne sont pas indépendants dans le temps (i.e.  $\sigma_{vv}(1) \neq 0$ ), la présence simultanée d'erreurs de régression autocorrélées et d'erreurs de mesures dans la variable explicative augmentera ou diminuera l'autocorrélation d'ordre 1 dans les résidus  $e_t$  (cela dépendra si le signe de  $\sigma_{vv}$  est positif ou négatif, respectivement). Supposons que les erreurs de mesure sont autocorrélées positivement, alors si la variable explicative est autocorrélée positivement (i.e.  $\sigma_{xx}(1) > 0$ ), un fait empirique fréquemment rencontré quand l'on travaille avec des séries temporelles, l'autocorrélation des résidus  $e_t$  sera

d'autant plus augmentée<sup>6</sup> ou d'autant plus diminuée (i.e. si l'autocorrélation dans la variable explicative et dans les erreurs de mesure sont tous deux négatives). Nous examinerons le cas, de correction d'autocorrélation des résidus en supposant que la variable explicative contient aussi de l'autocorrélation d'ordre 1, de façon plus détaillée dans l'analyse qui suit. Donc, nous constatons que l'analyse des résidus pourrait s'avérer inefficace, car nous ne pouvons pas isoler les facteurs composant les résidus et par le fait même ceci pourrait fausser toutes conclusions tirées à partir de ce genre d'étude.

Si l'on veut estimer  $\beta$  en tenant compte de l'autocorrélation des erreurs de régression nous devons utiliser une transformation de quasi-différence avec le paramètre  $\rho^*$  calculé à la page 14, c'est-à-dire:

$$Y - \rho^* Y_{-1} = \beta (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) + \eta - \rho^* \eta_{-1}$$

et l'estimateur MCO sur les variables transformées, devient alors:

---

<sup>6</sup> Voir Grether et Maddala [2], page 256.

$$\begin{aligned} \rightarrow \beta^{\bullet} &= \frac{(\tilde{X}^T - \rho^* \tilde{X}_{-1}^T) (Y - \rho^* Y_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} \\ &= \frac{(\tilde{X}^T - \rho^* \tilde{X}_{-1}^T) (\beta X + u - \rho^* \beta X_{-1} - \rho^* u_{-1})}{(\tilde{X}^T - \rho^* \tilde{X}_{-1}^T) (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} \end{aligned}$$

et<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \text{Plim} \beta^{\bullet} &= \frac{\beta \sigma_X^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \rho^* \rho_{XX}(1))}{\sigma_X^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \rho^* \rho_{XX}(1)) + \sigma_u^2 (1 + \rho^{*2} - \rho^* \rho_{uu}(1))} \\ &= \frac{\beta}{1 + \frac{\sigma_u^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \rho^* \rho_{uu}(1))}{\sigma_X^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \rho^* \rho_{XX}(1))}} \end{aligned}$$

Pour un  $\rho^*$  positif, nous remarquons que si  $\rho_{XX}(1)$  est plus grand que  $\rho_{uu}(1)$  ( un cas possible ou l'autocorrélation d'ordre 1 dans la variable explicative est plus élevée que celle dans les erreurs de mesure.), le biais asymptotique obtenu plus haut est plus élevé que celui obtenu à la section 2. Si l'erreur de mesure n'est pas autocorrélée nous obtenons pour l'expression de la limite en probabilité du nouvel estimateur  $\beta^{\bullet}$ :

---

<sup>7</sup> Voir l'annexe mathématique pour la dérivation complète de  $\text{Plim} \beta^{\bullet}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Plim}\beta^{--} &= \frac{\beta \sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*)}{\sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*) + \sigma_v^2 (1 + \rho^{*2})} \\
 &\quad \because = \sigma_{vv} (1) = 0 \\
 &\quad \text{avec } \rho_{xx}(1) = \delta
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Plim}\beta^{--} = \frac{\beta \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \left( \sigma_v^2 \frac{(1 + \rho^{*2})}{(1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*)} \right)}$$

et le biais asymptotique est donné par :

$$\text{BIAIS}(\beta^{--}) = \frac{-\beta \sigma_v^2 (1 + \rho^{*2})}{\sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*) + \sigma_v^2 (1 + \rho^{*2})}$$

Si  $\delta$  et  $\rho^{\dagger}$  sont de mêmes signes, le biais asymptotique de  $\beta^{--}$  sera plus élevé en valeur absolue que celui de  $\beta^{--}$  trouvé à la section 2 et moins élevé si  $\delta$  et  $\rho^{\dagger}$  sont de signes contraires. Étant donné que les biais ne sont pas égaux asymptotiquement nous devons utiliser les écarts quadratiques moyens des estimateurs obtenus à la section 2 et cette section, et non leur variance, pour être capable de déterminer quel estimateur est le meilleur parmi ces deux mauvais<sup>8</sup> estimateurs. Il est plausible de supposer que  $\delta$  et  $\rho^{\dagger}$  sont de

---

<sup>8</sup> C'est-à-dire, l'estimateur de  $\beta$  dérivé à la section 2. et l'estimateur de  $\beta$  dérivé dans cette section sont tous deux biaisés asymptotiquement, et c'est pour cette raison que l'on utilise le terme mauvais pour qualifier ces deux estimateurs.

signes positifs<sup>9</sup>, donc on devrait s'attendre à obtenir un biais asymptotique de  $\beta^{**}$  plus élevé dans cette section ( pour des valeurs positives données de  $\rho^*$  ), que  $\beta''$  dans la sections 2. Finalement, si il n'y a pas d'autocorrélation d'ordre 1 dans la variable explicative et les erreurs de mesure, l'expression de la limite en probabilité du nouvel estimateur  $\beta^{**}$  devient:

$$\begin{aligned} Plim\beta^{**} &= \frac{\beta \sigma_X^2(1+\rho^{*2} - 2\rho^* \rho_{XX}(1))}{\sigma_X^2(1+\rho^{*2} - 2\rho^* \rho_{XX}(1)) + \sigma_v^2(1+\rho^{*2} - \rho^* \rho_{vv}(1))} \\ &= \beta(1-\lambda) \quad \because \sigma_{XX}(1) = \sigma_{vv}(1) = 0 \end{aligned}$$

Donc, nous observons le même biais asymptotique que dans le cas des moindres carrés ordinaires, ceci nous permettra de comparer soit la variance ou l'écart quadratique moyen obtenu à la section 2 avec ceux dérivés dans cette section, pour être capable de déterminer quel estimateur est le meilleur parmi ces deux mauvais estimateurs.

Suivant le même raisonnement qu'à la section 2, nous allons dériver l'écart quadratique moyen de l'estimateur de  $\beta$  allouant pour la correction de l'autocorrélation des erreurs résiduelles et où seulement la variable explicative contient de l'autocorrélation d'ordre 1 et non les erreurs de mesure:

$$EQM(\beta^{**}) = E \left[ \frac{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (Y - \rho^* Y_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \beta \right] \left[ \frac{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (Y - \rho^* Y_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \beta \right]^T$$

Additionnant et soustrayant le terme:

---

<sup>9</sup> Car, la plupart des séries temporelles contiennent une composante AR1 positive non-négligeable.



$$\beta \frac{(X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} \quad \text{nous obtenons:}$$

$$EQM(\beta^{--}) = E \left[ \frac{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (Y - \rho^* Y_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} + \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \beta \right]$$

$$\times \left[ \frac{\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} + \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \beta \right]^T$$

$$= E(\Lambda_1 \Lambda_1^T) + E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) + 2 E(\Lambda_1 \Lambda_2^T)$$

$$\text{où } \Lambda_1 = \frac{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (Y - \rho^* Y_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})}$$

$$\text{et } \Lambda_2 = \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1})}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})} - \beta$$

Lorsque T tend vers l'infini, nous observons que:

$$E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) \rightarrow E[\beta \sigma_X^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \delta \rho^*) / D_3 - \beta]^2$$

$$\text{où } D_3 = \sigma_X^2 (1 + \rho^{*2} - 2 \delta \rho^*) + \sigma_\epsilon^2 (1 + \rho^{*2})$$

$$\text{donc } E(\Lambda_2 \Lambda_2^T) \rightarrow [Plim \beta^{--} - \beta]^2$$

ce qui nous donne l'expression du biais asymptotique de  $\beta^{**}$ . L'approximation asymptotique de  $E(\Lambda_1 \Lambda_1^T)$  s'obtient en dérivant l'espérance mathématique asymptotique de  $\Lambda_1 \Lambda_1^T$ ,

$$\text{où } \Lambda_1 = \sqrt{T} \left[ \frac{(\bar{X} - \rho^* \bar{X}_{-1})^T (Y - \rho^* Y_{-1}) / T}{(\bar{X} - \rho^* \bar{X}_{-1})^T (\bar{X} - \rho^* \bar{X}_{-1}) / T} - \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1}) / T}{(\bar{X} - \rho^* \bar{X}_{-1})^T (\bar{X} - \rho^* \bar{X}_{-1}) / T} \right]$$

et ensuite l'on divise  $E(\Lambda_1 \Lambda_1^T)$  par  $T$ . Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons l'expression de l'écart quadratique moyen de  $\beta^{**}$ :<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \text{asy EQM}(\beta^{**}) &= (\text{BIAIS}(\beta^{**}))^2 + \text{VAR}(\beta^{**}) \\ &= [\beta \sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*) / D_3 - \beta]^2 + \text{VAR}(\beta^{**}) \\ &= [\beta \sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\delta \rho^*) / D_3 - \beta]^2 + \frac{1}{D_3^2 T} \left\{ \frac{\sigma_x^2 \sigma_u^2}{(1 - \delta \rho)} \right. \\ &\quad \times [1 + \delta \rho - 4\rho^* (\delta + \rho) + \rho^{*2} (4 + 6\delta \rho - 2\delta^2 \rho^2 + 2\delta^2 \\ &\quad \left. + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} (\delta + \rho) + \rho^{*4} (1 + \delta \rho)] + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 \\ &\quad \times [1 - 4\delta \rho^* + \rho^{*2} (4 + 2\delta^2) - 4\delta \rho^{*3} + \rho^{*4}] + \sigma_u^2 \sigma_u^2 \\ &\quad \left. \times [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}] \right\} \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Voir l'annexe mathématique pour les calculs détaillés de l'EQM de  $\beta^{**}$  (i.e.  $E(\Lambda_1 \Lambda_1^T)$  et  $E(\Lambda_1 \Lambda_2^T)$ ).

et nous obtenons pour la variance de  $\beta^{**}$ , l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \text{asy } \text{VAR}(\beta^{**}) &= \frac{1}{D_3^2 T} \left\{ \frac{\sigma_x^2 \sigma_u^2}{(1-\delta\rho)} [1 + \delta\rho - 4\rho^* (\delta + \rho) + \rho^{*2} (4 + 6\delta\rho - 2\delta^2\rho^2 + 2\delta^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} (\delta + \rho) + \rho^{*4} (1 + \delta\rho)] + \beta^2 \sigma_u^2 \sigma_x^2 \right. \\ &\quad \left. \times [1 - 4\delta\rho^* + \rho^{*2} (4 + 2\delta^2) - 4\delta\rho^{*3} + \rho^{*4}] + \sigma_u^2 \sigma_v^2 \right. \\ &\quad \left. \times [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}] \right\} \end{aligned}$$

Maintenant, si la variable explicative n'est pas autocorrélée, l'écart quadratique moyen de  $\beta^{**}$ , est donnée par<sup>11</sup> :

$$\begin{aligned} \text{asy } \text{EQM}(\beta^{**}) &= (\text{BIAIS}(\beta^{**}))^2 + \text{VAR}(\beta^{**}) \\ &= (-\beta\lambda)^2 + \text{VAR}(\beta^{**}) \\ &= (-\beta\lambda)^2 + \frac{1}{(1+\rho^2)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_v^2)^2 T} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_u^2 [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho \right. \\ &\quad \left. + \rho^{*4}] + \beta^2 \sigma_v^2 \sigma_x^2 [1 + 4\rho^{*2} + \rho^{*4}] + \sigma_u^2 \sigma_v^2 [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}] \right\} \end{aligned}$$

De façon similaire, la variance est donné par:

---

<sup>11</sup> Nous obtenons cette expression en remplaçant  $\delta$  par 0 dans l'expression de l'EQM( $\beta^{**}$ ) obtenu plus haut.

$$asy \quad VAR(\beta^{**}) = \frac{1}{(1+\rho^2)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_v^2)^2 T} \left\{ \sigma_x^2 \sigma_v^2 [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}] + \beta^2 \sigma_v^2 \sigma_x^2 [1 + 4\rho^{*2} + \rho^{*4}] + \sigma_v^2 \sigma_v^2 [1 - 4\rho^* \rho + \rho^{*2} (4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}] \right\}$$

Dans la prochaine section, nous analyserons les résultats des expériences Monte Carlo, pour ensuite essayer<sup>12</sup> de les lier aux résultats théoriques développés aux sections 2 et 3. Dans la section 5, nous utiliserons les paramètres de ces expériences Monte Carlo et les résultats asymptotiques ( i.e. biais, variance et EQM ) dérivés aux sections 2 et 3, dans le but de comparer les écarts quadratiques moyens des estimateurs avec ou sans correction d'autocorrélation.

##### 5. SIMULATION MONTE CARLO

Dans cette section nous étudierons le comportement, pour un nombre de réalisation donné, des moyennes et des variances des estimateurs de  $\beta$  à l'aide de simulation Monte Carlo. Pour ce faire, deux séries temporelles seront utilisées, soit: la série des importations canadiennes et la série du produit intérieur brut canadien. Les deux séries sont en données trimestrielles de 1947:1 à 1988:4<sup>13</sup>. De plus, elles sont tous deux désaisonnalisées avec le filtre X-11-ARMII utilisé par

---

<sup>12</sup> Étant donné que les résultats des sections 2, 3 et 4 sont pour des échantillons infinis et que les résultats des expériences Monte Carlo sont pour des échantillons finis, une comparaison directe des résultats ne sera pas possible.

<sup>13</sup> Source des données: Base de données informatique CANSIM.

Statistique Canada, ce qui en soi ne garantit pas une désaisonnalisation parfaite, mais satisfait les besoins de notre recherche. Les deux séries sont aussi en dollars constants de 1981, ce qui nous permet d'éviter de se servir de séries contenant des effets inflationnistes. Le choix de ces séries est arbitraire jusqu'à un certain degré, car il est important de s'assurer que la causalité entre les deux séries est unidirectionnelle pour éviter un effet de rétroaction souvent rencontré quand l'on régresse deux variables endogènes l'une sur l'autre. Dans notre cas, le PIB cause les importations (IMP), donc les simulations seront basées sur la régression des importations (variable endogène) sur le produit intérieur brut (variable exogène).

L'accomplissement des expériences de Monte Carlo est divisé en trois étapes. La première étape consiste à utiliser le modèle défini à la section 2 pour générer un nombre de vecteurs d'importations<sup>14</sup> contenant de l'autocorrélation du premier ordre. Pour réaliser ceci, nous devons traiter de façon isolée la première observation, car le processus AR1 implique  $u_1 = \rho u_0 + \varepsilon_1$  et nous ne savons pas quelle est la valeur de  $u_0$  étant donné que  $u_0$  ne fait pas partie de l'échantillon. La première observation a incité un grand débat économétrique auparavant et cette question n'est pas encore réglée à savoir si: 1)  $u_0 = c$ , une constante, avec probabilité 1; 2)  $u_0$  a une certaine distribution spécifiée; 3)  $u_0 = u_T$ , où  $T$  = la taille de l'échantillon<sup>15</sup>. Pour les besoins de nos simulations nous allons faire abstraction de ces possibilités et nous spécifions que  $u_1 \sim N(0, \sigma_u^2)$  où  $\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \rho^2)$ , et ceci, sans modifier le bien fondé de nos expériences. Pour la première

---

<sup>14</sup> Ce nombre est déterminé par le nombre de réalisations (ou le nombre de répliques) de l'échantillon en question.

<sup>15</sup> Voir P.C.B. Phillips [3], p.279.

observation de la série des importations, nous avons:

$$\text{IMP}_1 = \beta \text{PIB}_1 + u_1.$$

Il est à noter que PIB est en déviation de sa moyenne. Pour les observations suivantes ( i.e.  $t=2$  à  $t=T$  ), nous obtenons:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\rightarrow \text{IMP}_t = \beta \text{PIB}_t + u_t \quad \text{pour } t=2, \dots, T.$$

Les erreurs  $u_t$  et  $\varepsilon_t$ , pour  $t=2, \dots, T$ , sont générées utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoires ayant une distribution normale centrée à zéro et ayant les variances constantes  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  respectivement.

La seconde étape consiste à introduire les erreurs de mesures dans la séries du PIB. Pour ce faire, nous utilisons la relation suivante:

$$\text{PIBE}_t = \text{PIB}_t + v_t \quad \text{pour } t=1, \dots, T,$$

où  $\text{PIBE}_t$  représente la variable contenant les erreurs de mesures.

Finalement, dans la troisième étape, il s'agit d'estimer les paramètres  $\beta$ 's à l'aide de cinq méthodes d'estimation: la méthode des moindres carrés, la méthode Cochrane-Orcutt, la méthode Hildreth-Lu et les méthodes de maximum de vraisemblance ( itérative et balayage ). Pour chaque méthode, nous obtenons  $N$   $\beta$ 's, où  $N$  est le nombre de réalisation de chaque échantillon des importations et du produit intérieur

brut mesuré avec erreur<sup>16</sup>.

Pour s'assurer de la validité de ces expériences, chacune d'entre elles se différencie par une semence qui amorce le générateur de nombres pseudo-aléatoires, pour ainsi garantir que chaque expérience est réellement un phénomène pseudo-aléatoire. Nous devons effectuer ceci, car par défaut, certains programmes génèrent toujours la même séquence de nombres pseudo-aléatoires tandis que d'autres programmes ont leur générateur lié à l'horloge interne de l'ordinateur, qui donne une semence selon la date et l'heure exacte de la journée. L'utilisation d'une semence connue nous permet cependant de répéter l'expérience s'il nous manque certaines informations non-récupérées lors de l'expérience initiale. Il est à noter que les semences sont elles-mêmes obtenues à l'aide du générateur de nombres pseudo-aléatoires à partir d'une distribution uniforme ( i.e.  $0 < s < 1$ , où  $s$  représente la semence ) et ensuite multipliées par une constante pour garantir que les semences se situent toutes entre 0 et 2<sup>31</sup>.

Pour déterminer la valeur théorique du paramètre  $\beta$ , nous avons effectué une simple régression des importations sur le produit intérieur brut ( avec les deux séries en déviation de leur moyenne ). Cette estimation MCO du paramètre  $\beta$  produit une valeur de  $\beta$  égale à 0.31, que l'on pourrait considérer comme étant une propension marginale à importer. Nous pourrions choisir n'importe quelle autre valeur pour  $\beta$ , mais ceci enlèverait l'intuition économique attachée aux résultats des expériences.

---

<sup>16</sup> C'est-à-dire, nous régressons séquentiellement les  $N$  vecteurs de  $IMP_t$  sur les  $N$  vecteurs de  $PIBE_t$ .

En plus de la semence, chaque expérience est caractérisée par différentes valeurs des paramètres:  $\rho$ ,  $R^2$  et EM. EM est le pourcentage d'erreurs de mesures qui détermine la valeur de  $\sigma_v^2$ . Plus spécifiquement,  $\sigma_v^2$  est obtenu par la relation suivante:

$$\sigma_v^2 = \frac{EM}{100} \times \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T PIB_t^2,$$

avec  $PIB_t$  exprimée en déviation de sa moyenne. En imposant une valeur de  $R^2$  pour les régressions, nous obtenons par le fait même des valeurs pour les paramètres  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_\epsilon^2$ , à l'aide de l'expression suivante:

$$\sigma_u^2 = \frac{\beta PIB^T PIB \beta (1 - R^2)}{R^2 T}$$

avec  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 (1 - \rho^2)$ .

Dans les tables 4.1 à 4.4 nous retrouvons les résultats de 48 expériences Monte Carlo. Chaque simulation a été faite pour un nombre de réalisation égal à 200. Bien qu'un nombre de réplique plus élevé serait souhaitable, les contraintes de temps d'ordinateurs ne nous permettraient pas d'effectuer autant d'expériences, et par le fait même, nous ne pourrions pas réellement capter le phénomène des erreurs de mesures et des erreurs de régression autocorrélées, car le nombre possible de permutation des paramètres EM,  $\rho$  et  $R^2$  serait



limité. Malgré ce compromis, ces expériences peuvent quand même nous éclairer sur le phénomène étudié.

Chaque estimation a été effectuée avec le logiciel TSP. La méthode des moindres carrés et les méthodes de correction d'autocorrélation d'ordre 1 mentionnées plus haut sont toutes offertes par ce logiciel. Elles sont contrôlées ( sauf la méthode MCO ) par des paramètres tels, la tolérance permise pour l'optimisation des fonctions de vraisemblances et des fonctions de sommes des erreurs au carré et la valeur des incréments du paramètre  $\rho$  pour les méthodes de recherches ( i.e. maximum de vraisemblance balayage et Hildreth-Lu ). La tolérance a été fixée à 0.005 tandis que les incréments de  $\rho$ , à 0.01, dans le but de tenir à un minimum le temps d'exécution des simulations. Dans le cas des méthodes d'estimation balayage ( i.e. Hildreth-Lu et maximum de vraisemblance balayage ), une contrainte du logiciel TSP fait en sorte que le balayage effectué sur les valeurs de  $\rho$  est compris dans l'interval fermé  $[-0.9, 0.9]$  et ceci même si les incréments de  $\rho$  sont de 0.01. Donc il serait possible d'obtenir une valeur de  $\rho$  égale à 0.9, par exemple, même si la valeur optimale de  $\rho$  se situe entre 0.90 et 1.00. Ces choix ( incrément de  $\rho$  et tolérance ) ainsi que la contrainte du logiciel semblent sans doute indiquer une faible précision dans les estimations, mais comme nous allons constater lors de l'analyse des résultats des simulations, plus de précision dans les estimations ne modifierait pas l'essentiel des conclusions tirées à ce stade de recherche.

Les table 4.1 à 4.4 contiennent les résultats des expériences E-1 à E-48 avec les erreurs de mesures imposées égales à 5%, 10%, 20% et 50% de la variance du produit intérieur brut. Nous dénotons par BMCO les estimateurs des moindres carrés, par BCO les estimateurs Cochrane-Orcutt, par

TABLE 4.1 Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$  (expériences E-1 à E-12) $\sigma_{\beta}^2 = 5\%$  de la variance du produit intérieur brut,  $N=200$ ,  $T=168$ .

| Expérience et variable | Valeurs des Paramètres |          | BMCO     | BCO      | BMVI     | BHL      | BMVS     |
|------------------------|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| E-1                    | $\rho=0.75$            | moyenne  | 0.294471 | 0.032359 | 0.037309 | 0.042336 | 0.049098 |
|                        | $R^2=0.7$              | variance | 0.00159  | 0.002756 | 0.002972 | 0.001717 | 0.001361 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.001832 | 0.079841 | 0.077333 | 0.073361 | 0.069931 |
| E-2                    | $\rho=0.75$            | moyenne  | 0.296478 | 0.013145 | 0.016419 | 0.038085 | 0.043197 |
|                        | $R^2=0.95$             | variance | 0.00018  | 0.002467 | 0.003203 | 0.000177 | 0.000178 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000363 | 0.09059  | 0.089392 | 0.074115 | 0.071362 |
| E-3                    | $\rho=0.75$            | moyenne  | 0.295736 | 0.095121 | 0.098633 | 0.036831 | 0.041895 |
|                        | $R^2=0.98$             | variance | 0.00009  | 0.017756 | 0.018093 | 0.000076 | 0.00008  |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000293 | 0.063929 | 0.062769 | 0.074697 | 0.07196  |
| E-4                    | $\rho=0.75$            | moyenne  | 0.295807 | 0.256357 | 0.25942  | 0.036621 | 0.041726 |
|                        | $R^2=0.9946$           | variance | 0.000036 | 0.008848 | 0.008188 | 0.000036 | 0.000042 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000238 | 0.011726 | 0.010747 | 0.074772 | 0.072013 |
| E-5                    | $\rho=0.85$            | moyenne  | 0.288782 | 0.015646 | 0.018091 | 0.038923 | 0.044159 |
|                        | $R^2=0.7$              | variance | 0.002803 | 0.000949 | 0.000962 | 0.000737 | 0.000729 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.003053 | 0.087593 | 0.086173 | 0.07422  | 0.0714   |
| E-6                    | $\rho=0.85$            | moyenne  | 0.292578 | 0.003828 | 0.004346 | 0.037425 | 0.042385 |
|                        | $R^2=0.95$             | variance | 0.00034  | 0.000119 | 0.000119 | 0.000127 | 0.000131 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000643 | 0.09386  | 0.093543 | 0.074424 | 0.071749 |
| E-7                    | $\rho=0.85$            | moyenne  | 0.296033 | 0.070426 | 0.073391 | 0.036438 | 0.041485 |
|                        | $R^2=0.98$             | variance | 0.000139 | 0.015002 | 0.015343 | 0.000055 | 0.000059 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000334 | 0.072398 | 0.071327 | 0.074892 | 0.072159 |
| E-8                    | $\rho=0.85$            | moyenne  | 0.295949 | 0.235945 | 0.241834 | 0.036636 | 0.041741 |
|                        | $R^2=0.9946$           | variance | 0.000052 | 0.01288  | 0.011787 | 0.000028 | 0.000033 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.00025  | 0.018365 | 0.016434 | 0.074756 | 0.071995 |
| E-9                    | $\rho=0.95$            | moyenne  | 0.300034 | 0.004395 | 0.005209 | 0.038074 | 0.04292  |
|                        | $R^2=0.7$              | variance | 0.00674  | 0.00026  | 0.000259 | 0.000361 | 0.000389 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.00684  | 0.093655 | 0.093156 | 0.074305 | 0.071721 |
| E-10                   | $\rho=0.95$            | moyenne  | 0.294966 | 0.003721 | 0.004084 | 0.03645  | 0.041477 |
|                        | $R^2=0.95$             | variance | 0.000765 | 0.000435 | 0.000442 | 0.00005  | 0.000055 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000991 | 0.094242 | 0.094027 | 0.07488  | 0.07216  |
| E-11                   | $\rho=0.95$            | moyenne  | 0.294981 | 0.075132 | 0.082133 | 0.03714  | 0.042209 |
|                        | $R^2=0.98$             | variance | 0.000347 | 0.015748 | 0.016512 | 0.000035 | 0.00004  |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000572 | 0.070911 | 0.068436 | 0.074487 | 0.071752 |
| E-12                   | $\rho=0.95$            | moyenne  | 0.295848 | 0.234468 | 0.238845 | 0.036907 | 0.042    |
|                        | $R^2=0.9946$           | variance | 0.0001   | 0.013189 | 0.01238  | 0.000026 | 0.000032 |
| PIB <sub>t</sub>       | $\beta=0.31$           | BQM      | 0.000301 | 0.018894 | 0.017443 | 0.074606 | 0.071856 |

BHL les estimateurs Hidreth-Lu et, par BMVI et BMVS les estimateurs des méthodes de maximum de vraisemblance itérative et balayage respectivement. Chaque expérience produit des biais analogues aux biais asymptotiques du paramètre  $\beta$  obtenus aux sections 2 et 3, c'est-à-dire toutes les moyennes des estimateurs de  $\beta$  sont inférieures à la vraie valeur de  $\beta=0.31$ . Il est à noter que les résultats des sections 2 et 3 dérivés avec la variable explicative autocorrélée sont les plus pertinentes, car la série temporelle du produit intérieur brut contient de l'autocorrélation d'ordre 1.

Les écarts quadratiques moyens des estimateurs MCO sont tous inférieurs à ceux des méthodes de correction d'autocorrélation. Les méthodes de correction d'autocorrélation font preuve d'une grande sensibilité aux valeurs de  $R^2$  imposées sur les régressions, ainsi qu'aux valeurs de EM.

Plus le  $R^2$  est élevé et plus la valeur de EM est basse, plus les méthodes de correction d'autocorrélation itératives BCO et BMVI produisent des résultats se rapprochant de la réalité correspondant aux paramètres de simulation. Par réalité, nous voulons dire que les méthodes de correction itératives donnent des résultats qui sont attendus a priori, c'est-à-dire: biais des estimateurs plus élevé que dans le cas des MCO sans toutefois être trop élevé, au point de produire des résultats contre-intuitifs ( ex: expériences E-4, E-8, E-12 ).

Dans ce sous-ensemble d'expériences, un scénario ( appelons le scénario 1 ) intéressant saute aux yeux. Chaque méthode de correction d'autocorrélation de " type balayage " produit une moyenne de l'estimateur de  $\beta$  qui diverge de façon importante de la vraie valeur de  $\beta=0.31$ , contrairement aux méthodes de correction itérative. Ce phénomène est dû à

TABLE 4.2 Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$  (expériences E-13 à E-24) $\sigma_b^2 = 10\%$  de la variance du produit intérieur brut, N=200, T=168.

| Expérience<br>et variable | Valeurs des<br>Paramètres |          | BMCO     | BCO      | BMVI     | BHL      | BMVS     |
|---------------------------|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| E-13<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,75$             | moyenne  | 0,28285  | 0,016158 | 0,018196 | 0,022519 | 0,02526  |
|                           | $R^2 = 0,7$               | variance | 0,001445 | 0,000936 | 0,000943 | 0,000734 | 0,000718 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,002182 | 0,087279 | 0,086092 | 0,083379 | 0,081795 |
| E-14<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,75$             | moyenne  | 0,283425 | 0,002432 | 0,001329 | 0,019088 | 0,02199  |
|                           | $R^2 = 0,95$              | variance | 0,00022  | 0,000497 | 0,000109 | 0,000099 | 0,000099 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000927 | 0,095095 | 0,095386 | 0,084729 | 0,083048 |
| E-15<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,75$             | moyenne  | 0,282975 | 0,02917  | 0,029436 | 0,019818 | 0,02276  |
|                           | $R^2 = 0,98$              | variance | 0,000102 | 0,006818 | 0,00685  | 0,000047 | 0,000049 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000832 | 0,085684 | 0,085566 | 0,084252 | 0,082555 |
| E-16<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,75$             | moyenne  | 0,282346 | 0,087012 | 0,095467 | 0,019377 | 0,02292  |
|                           | $R^2 = 0,9946$            | variance | 0,000052 | 0,01659  | 0,017375 | 0,000014 | 0,000016 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000817 | 0,066313 | 0,063399 | 0,084476 | 0,082792 |
| E-17<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,85$             | moyenne  | 0,284966 | 0,008074 | 0,009219 | 0,021528 | 0,024575 |
|                           | $R^2 = 0,7$               | variance | 0,002386 | 0,000485 | 0,000494 | 0,000408 | 0,000403 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,003013 | 0,091645 | 0,090963 | 0,083624 | 0,081871 |
| E-18<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,85$             | moyenne  | 0,282855 | 0,000619 | 0,000864 | 0,018854 | 0,021753 |
|                           | $R^2 = 0,95$              | variance | 0,000237 | 0,000047 | 0,000048 | 0,000047 | 0,000049 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000974 | 0,095764 | 0,095612 | 0,084813 | 0,083135 |
| E-19<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,85$             | moyenne  | 0,282128 | 0,021698 | 0,023302 | 0,019422 | 0,022316 |
|                           | $R^2 = 0,98$              | variance | 0,000141 | 0,005248 | 0,005617 | 0,000025 | 0,000027 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000917 | 0,088367 | 0,087812 | 0,084461 | 0,082789 |
| E-20<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,85$             | moyenne  | 0,282493 | 0,085995 | 0,097168 | 0,019704 | 0,022619 |
|                           | $R^2 = 0,9946$            | variance | 0,000062 | 0,016401 | 0,017433 | 0,000011 | 0,000013 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000818 | 0,066579 | 0,062731 | 0,084283 | 0,082601 |
| E-21<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,95$             | moyenne  | 0,266537 | 0,003999 | 0,004463 | 0,020518 | 0,023148 |
|                           | $R^2 = 0,7$               | variance | 0,005757 | 0,000124 | 0,000125 | 0,000139 | 0,00014  |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,007646 | 0,093761 | 0,093478 | 0,083939 | 0,082424 |
| E-22<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,95$             | moyenne  | 0,284094 | 0,001581 | 0,00174  | 0,01983  | 0,022856 |
|                           | $R^2 = 0,95$              | variance | 0,000607 | 0,000018 | 0,000018 | 0,000028 | 0,00003  |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,001279 | 0,095141 | 0,095043 | 0,084227 | 0,082482 |
| E-23<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,95$             | moyenne  | 0,282006 | 0,016332 | 0,020225 | 0,019645 | 0,022596 |
|                           | $R^2 = 0,98$              | variance | 0,000296 | 0,003857 | 0,004676 | 0,000014 | 0,000016 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,00108  | 0,090098 | 0,088646 | 0,08432  | 0,082617 |
| E-24<br>PIB <sub>t</sub>  | $\rho = 0,95$             | moyenne  | 0,282399 | 0,092472 | 0,092694 | 0,019586 | 0,022497 |
|                           | $R^2 = 0,9946$            | variance | 0,000087 | 0,016998 | 0,017022 | 0,000009 | 0,000011 |
|                           | $\beta = 0,31$            | BQM      | 0,000849 | 0,064317 | 0,064243 | 0,084349 | 0,082669 |

TABLE 4.3 Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$  (expériences E-25 à E-36) $\sigma_v^2 = 20\%$  de la variance du produit intérieur brut,  $N=200$ ,  $T=168$ .

| Expérience<br>et variable | Valeurs des<br>Paramètres |          | BMCO     | BCO      | BMVI     | BHL      | BMVS     |
|---------------------------|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| E-25                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.257785 | 0.006736 | 0.007851 | 0.010338 | 0.011926 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.000304 | 0.000378 | 0.000382 | 0.000331 | 0.000331 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.00363  | 0.092347 | 0.091797 | 0.090129 | 0.089179 |
| E-26                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.259996 | 0.001125 | 0.001274 | 0.010399 | 0.011978 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000183 | 0.000047 | 0.000047 | 0.000049 | 0.00005  |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002684 | 0.09545  | 0.095359 | 0.08981  | 0.088867 |
| E-27                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.258852 | 0.000881 | 0.000987 | 0.010258 | 0.011842 |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000104 | 0.000016 | 0.000016 | 0.000017 | 0.000018 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.00272  | 0.09557  | 0.095505 | 0.089862 | 0.088916 |
| E-28                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.259608 | 0.000911 | -0.00544 | 0.010359 | 0.011928 |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000065 | 0.000005 | 0.012294 | 0.000007 | 0.000007 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002604 | 0.095541 | 0.111794 | 0.089791 | 0.088854 |
| E-29                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.263087 | 0.00322  | 0.003796 | 0.010632 | 0.012118 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.002548 | 0.000204 | 0.000207 | 0.000195 | 0.000193 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.004749 | 0.094319 | 0.093968 | 0.089816 | 0.088927 |
| E-30                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.258123 | 0.001178 | 0.001295 | 0.010509 | 0.012066 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000286 | 0.000025 | 0.000025 | 0.000025 | 0.000025 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002977 | 0.095396 | 0.095324 | 0.08972  | 0.08879  |
| E-31                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.258171 | 0.000389 | 0.000481 | 0.0098   | 0.01135  |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000151 | 0.00001  | 0.00001  | 0.000012 | 0.000012 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002837 | 0.095869 | 0.095812 | 0.090132 | 0.089204 |
| E-32                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.2591   | 0.007141 | 0.007272 | 0.01018  | 0.011739 |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000077 | 0.001616 | 0.001646 | 0.000004 | 0.000005 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002668 | 0.09334  | 0.093291 | 0.089897 | 0.088964 |
| E-33                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.26369  | 0.000787 | 0.000981 | 0.010065 | 0.011681 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.003704 | 0.000062 | 0.000062 | 0.000068 | 0.000072 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.005849 | 0.095675 | 0.095555 | 0.090029 | 0.089067 |
| E-34                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.256703 | 0.000661 | 0.000755 | 0.010069 | 0.011594 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000632 | 0.000009 | 0.000009 | 0.000011 | 0.000012 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.003473 | 0.095699 | 0.095641 | 0.08997  | 0.089058 |
| E-35                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.259611 | 0.000578 | 0.001721 | 0.010035 | 0.01161  |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000291 | 0.000004 | 0.000237 | 0.000007 | 0.000007 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.00283  | 0.095746 | 0.095273 | 0.089386 | 0.089044 |
| E-36                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.259284 | 0.004744 | 0.004835 | 0.010226 | 0.011795 |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000107 | 0.001043 | 0.001054 | 0.000004 | 0.000005 |
|                           | $\beta=0.31$              | EQM      | 0.002879 | 0.094224 | 0.09418  | 0.089869 | 0.088931 |

TABLE 4.4 Moyennes, variances et écarts quadratiques moyens de  $\beta$  (expériences B-37 à B-48)
 $\sigma_{\beta}^2 = 50\%$  de la variance du produit intérieur brut,  $N=200$ ,  $T=168$ .

| Expérience<br>et variable | Valeurs des<br>Paramètres |          | BMCO     | BCO      | BMVT     | BHL      | BMVS     |
|---------------------------|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| B-37                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.209709 | 0.002519 | 0.002889 | 0.004238 | 0.004905 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.000768 | 0.000131 | 0.000132 | 0.000124 | 0.000124 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010826 | 0.094676 | 0.094449 | 0.093584 | 0.093207 |
| B-38                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.207004 | 0.000663 | 0.000731 | 0.004438 | 0.005096 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000156 | 0.000018 | 0.000018 | 0.000018 | 0.000018 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010764 | 0.095704 | 0.095665 | 0.093386 | 0.092984 |
| B-39                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.206967 | 0.000232 | 0.000276 | 0.004079 | 0.004734 |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000101 | 0.000007 | 0.000007 | 0.000007 | 0.000007 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010717 | 0.095963 | 0.095936 | 0.093595 | 0.093195 |
| B-40                      | $\rho=0.75$               | moyenne  | 0.206851 | 0.000141 | 0.000174 | 0.003985 | 0.004643 |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000074 | 0.000002 | 0.000002 | 0.000002 | 0.000003 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010714 | 0.096014 | 0.095994 | 0.093648 | 0.093246 |
| B-41                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.207105 | -0.00005 | 0.000166 | 0.002963 | 0.003645 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.001337 | 0.000077 | 0.000077 | 0.000073 | 0.000074 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.011925 | 0.09621  | 0.096074 | 0.094345 | 0.093927 |
| B-42                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.206433 | 0.00018  | 0.00023  | 0.003989 | 0.004653 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000239 | 0.000011 | 0.000011 | 0.000011 | 0.000011 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010965 | 0.096    | 0.095969 | 0.093654 | 0.093248 |
| B-43                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.208085 | 0.000339 | 0.000375 | 0.004201 | 0.004856 |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000122 | 0.000004 | 0.000004 | 0.000005 | 0.000005 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010509 | 0.095894 | 0.095872 | 0.093518 | 0.093118 |
| B-44                      | $\rho=0.85$               | moyenne  | 0.206869 | 0.000251 | 0.000283 | 0.004097 | 0.004755 |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000077 | 0.000001 | 0.000001 | 0.000002 | 0.000002 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010713 | 0.095945 | 0.095926 | 0.093578 | 0.093176 |
| B-45                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.213539 | -0.00042 | -0.00033 | 0.003449 | 0.004108 |
|                           | $R^2=0.7$                 | variance | 0.003448 | 0.000023 | 0.000023 | 0.000023 | 0.000023 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.012753 | 0.096381 | 0.096329 | 0.093997 | 0.093593 |
| B-46                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.207151 | 0.000052 | 0.000085 | 0.003913 | 0.004575 |
|                           | $R^2=0.95$                | variance | 0.000416 | 0.000004 | 0.000004 | 0.000004 | 0.000004 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010994 | 0.096071 | 0.096051 | 0.093693 | 0.093289 |
| B-47                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.209228 | 0.000387 | 0.00042  | 0.004277 | 0.004939 |
|                           | $R^2=0.98$                | variance | 0.000214 | 0.000002 | 0.000002 | 0.000002 | 0.000002 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010369 | 0.095862 | 0.095842 | 0.093469 | 0.093064 |
| B-48                      | $\rho=0.95$               | moyenne  | 0.207816 | 0.000246 | 0.000275 | 0.004114 | 0.00477  |
|                           | $R^2=0.9946$              | variance | 0.000098 | 5.29e-07 | 5.29e-07 | 9.56e-07 | 0.000001 |
|                           | $\beta=0.31$              | BQM      | 0.010539 | 0.095948 | 0.09593  | 0.093568 | 0.093166 |

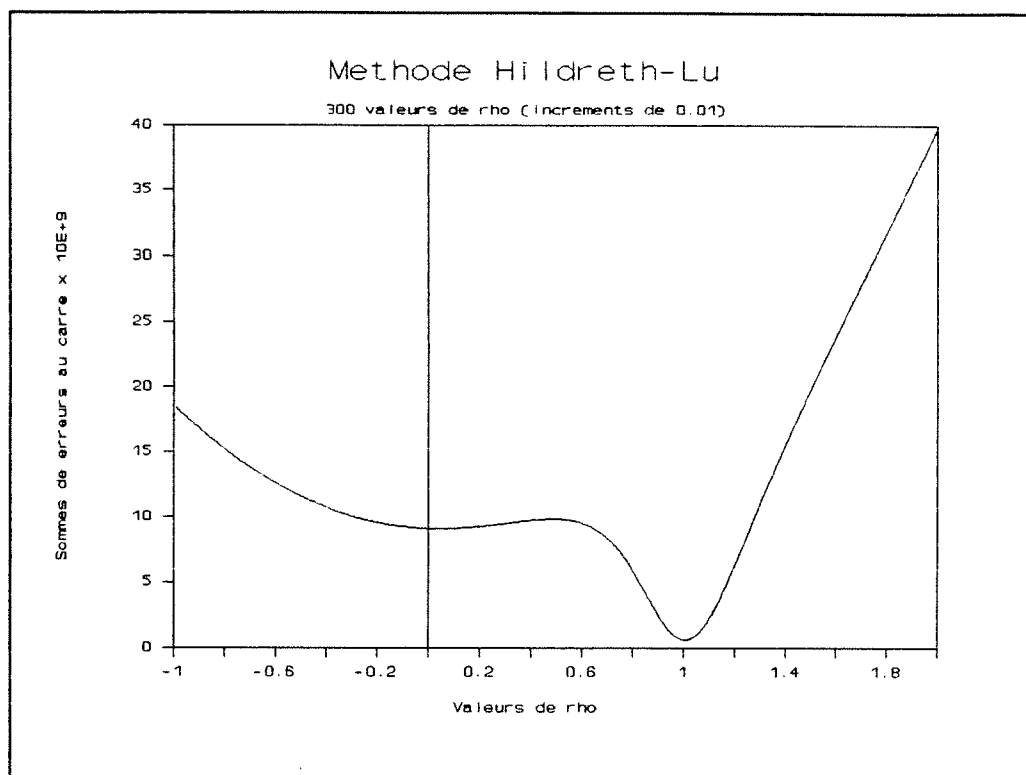
l'existence de deux points optimaux dans les fonctions de sommes des erreurs au carré et dans les fonctions de vraisemblance.

Spécifiquement, la méthode Hildreth-Lu produit deux minimums, l'un local et l'autre global, tandis que la méthode de maximum de vraisemblance balayage donne deux maximums, l'un local et l'autre global. Il est à noter que les méthodes de balayage garantissent la convergence des procédures aux optimums globaux, si ils existent, contrairement aux méthodes itératives, qui sont plus rapides, mais ne convergent pas nécessairement aux optimums globaux. La méthode itérative Cochrane-Orcutt utilise des valeurs initiales des paramètres obtenus par la méthode des MCO, tandis que la méthode de maximum de vraisemblance itérative consiste à maximiser la fonction de vraisemblance par rapport à  $\beta$ , avec  $\rho$  fixé à une valeur, alternant ensuite en maximisant la fonction par rapport à  $\rho$ , avec  $\beta$  fixé à une valeur. La procédure débute habituellement avec une valeur de  $\rho=0$  pour ensuite se terminer lorsque deux valeurs successives de  $\rho$  sont suffisamment près l'une de l'autre<sup>17</sup>. Si les paramètres de départ font en sorte que les procédures atteignent les optimaux locaux, alors les procédures s'arrêtent donnant l'impression que les valeurs des estimateurs finales sont le résultat de convergence aux optimums globaux.

---

<sup>17</sup> Voir Beach et Mackinnon [1], page 53.

Figure 4.1



Dans la figure 4.1, nous avons tracé la fonction de la sommes des erreurs au carré en fonction du paramètre  $\rho$ . Cette fonction est donnée par:

$$SE^2 = \sum_{t=2}^T (IMP_t - \rho IMP_{t-1} - \beta PIB_t + \beta \rho PIB_{t-1})^2$$

Pour générer ce graphique, nous avons choisi le premier échantillon de l'expérience E-4 obtenu par l'expérience de Monte Carlo ( i.e.  $\rho=0.75$  et  $R^2=0.9946$  ), car celui-ci est représentatif du scénario 1 énoncé plus haut. Pour ce faire, nous avons récupéré un vecteur d'importation contenant de



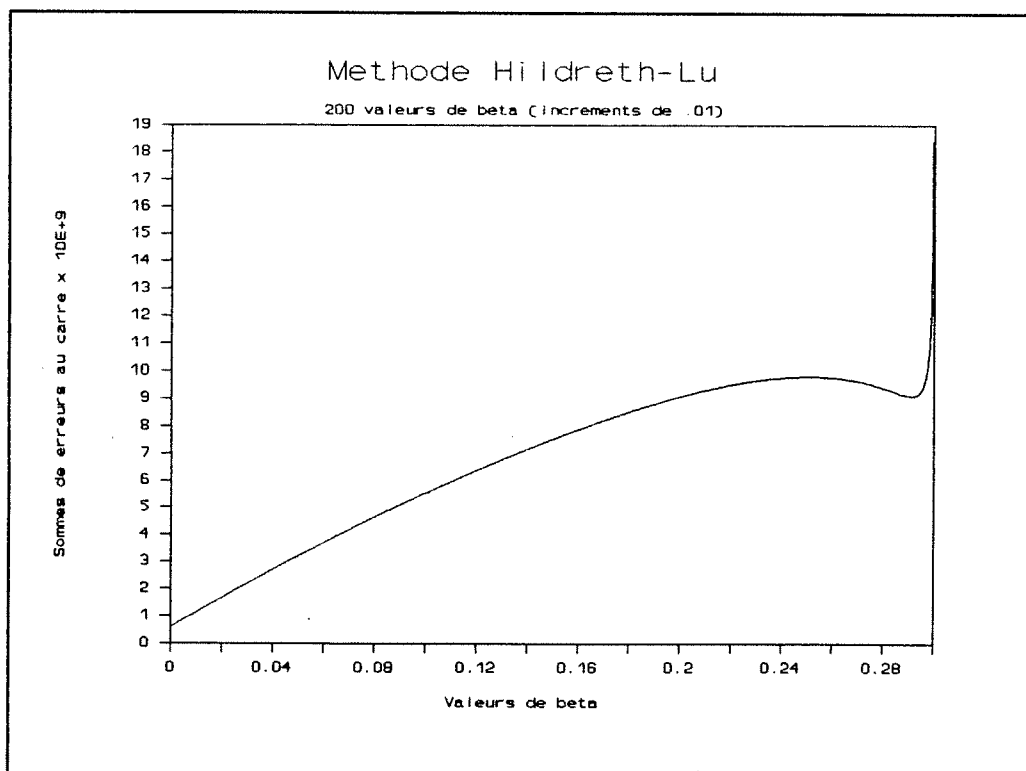
l'autocorrélation d'ordre 1, ainsi qu'un vecteur du produit intérieur brut mesuré avec erreur, tous deux produits par l'expérience, avec des valeurs des estimateurs ( Hildreth-Lu ) de  $\beta$  et  $\rho$  égales à 0.03684 et 0.9 respectivement. Ensuite, pour des valeurs de  $\rho$  allant de -0.99 à 2 ( incréments de 0.01 ), nous avons effectué les régressions de  $(IMP_t - \rho IMP_{t-1})$  sur  $\beta(PIB_t - \beta \rho PIB_{t-1})$  pour chacune des 300 valeurs de  $\rho$ , ainsi obtenant 300 valeurs de  $SE^2$  après avoir substitué les valeurs, de  $\beta$  et de  $\rho$ , dans la fonction.

La figure 4.1 montre un minimum global se situant aux alentours de  $SE^2=6.3 E+8$  et  $\rho=1.01$ . Les incréments de  $\rho$  dans cette procédure d'estimation sont fixés à 0.01, donc l'on devrait s'attendre à une valeur de l'estimateur de  $\rho$  ayant une précision à deux décimales près (i.e.  $\rho = 0.99$  ). Ceci est dû à la contrainte du logiciel TSP énoncée plus haut qui fait en sorte que nous obtenons des estimateurs de  $\beta$  et de  $\rho$  donnés par  $\beta=0.03684$ , et  $\rho=0.9$ , qui n'est pas très éloigné de la vraie valeur de  $\rho=0.85$ . Faute de temps, nous devons nous satisfaire de la précision sur le paramètre  $\rho$  ( i.e.  $\rho=0.9$  ), bien que la figure 4.1 montre que la valeur optimale de  $\rho$  tend plus vers 1 que vers 0.9. Le minimum local se situe aux alentours de  $SE^2=9.1 E+9$  et  $\rho=0.04$ .

Dans la figure 4.2, nous avons tracé la la somme des erreurs au carré en fonction de  $\beta$  pour le même échantillon de l'expérience E-4, mais cette fois-ci, pour 200 valeurs de  $\rho$  ( allant de -0.99 à 1.00, incrément de 0.01 ). Pour des valeurs de  $\rho$  entre 1.01 et 2.00, le graphique illustre une correspondance et non une fonction, car pour une valeur de  $\beta$  nous observons deux valeurs de  $SE^2$ . Étant donné que l'on s'intéresse plus à l'interval stationnaire de  $\rho$ , une analyse du comportement de cette correspondance sur la partie non-

stationnaire de l'intervall de  $\rho$  ( i.e.  $\rho \in [1.01, 2.00]$  ) dépasserait le cadre de nos recherches à ce stade. La figure 4.2 montre un minimum global se situant aux alentours de  $SE^2 = 6.3 \text{ E}+8$  et  $\beta = 0.0004$  et un minimum local aux alentours de  $SE^2 = 9.1 \text{ E}+9$  et  $\beta = 0.29126$ . Ceci nous permet de constater le fait intéressant du scénario 1, c'est-à-dire, le minimum local produit un estimateur de  $\beta$  qui se rapproche le plus de  $\beta = 0.31$  ( i.e. paramètre de la simulation ) et intuitivement, l'on s'attendrait plus à obtenir un estimateur de  $\beta$  qui est plus petit que  $\beta = 0.31$  ( i.e.  $\beta = 0.29126$  au minimum local ), mais qui ne divergerait pas de façon aussi importante qu'illustré au minimum global ( i.e.  $\beta = 0.0004$  ).

Figure 4.2



D'ailleurs, la méthode Cochrane-Orcutt ( l'analogue itératif de la méthode Hildreth-Lu ) produit, pour le même

échantillon de l'expérience E-7, un estimateur de  $\beta$  égal à 0.29133 ( i.e convergence au minimum local ), un résultat que l'on pourrait s'attendre à priori ( étant donné que l'on connaît la vraie valeur de  $\beta$ , qui est très rare dans une situation réelle ), contrairement au résultat obtenu avec la méthode de balayage ( i.e. convergence au minimum global ). Il est à noter que pour le même échantillon, la méthode des MCO a produit un estimateur de  $\beta$  égal à 0.29318, plus près de  $\beta=0.31$ , mais aussi très près du minimum local dans la figure 4.2.

Dans les figures 4.3 et 4.4 nous avons le même scénario, sauf que nous étudions la fonction de vraisemblance pour le même échantillon de l'expérience E-4. La fonction concentrée est donné par<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & \text{const} - \frac{1}{2} \log(1-\rho^2) - \frac{T}{2} \log[(1-\rho^2) (IMP_1 - \beta PIB_1)^2 \\ & + \sum_{t=2}^T (IMP_t - \beta PIB_t - \rho IMP_{t-1} + \beta \rho PIB_{t-1})^2] \end{aligned}$$

Contrairement à la méthode Hildreth-Lu, la méthode de maximum de vraisemblance balayage utilise la première observation en faisant appel à un terme de transformation du Jacobien. Toutefois, ceci ne modifie pas les résultats de nos expériences de façon importante. La procédure à suivre pour générer ces graphiques suit le même raisonnement que pour la fonction de la somme des erreurs au carré.

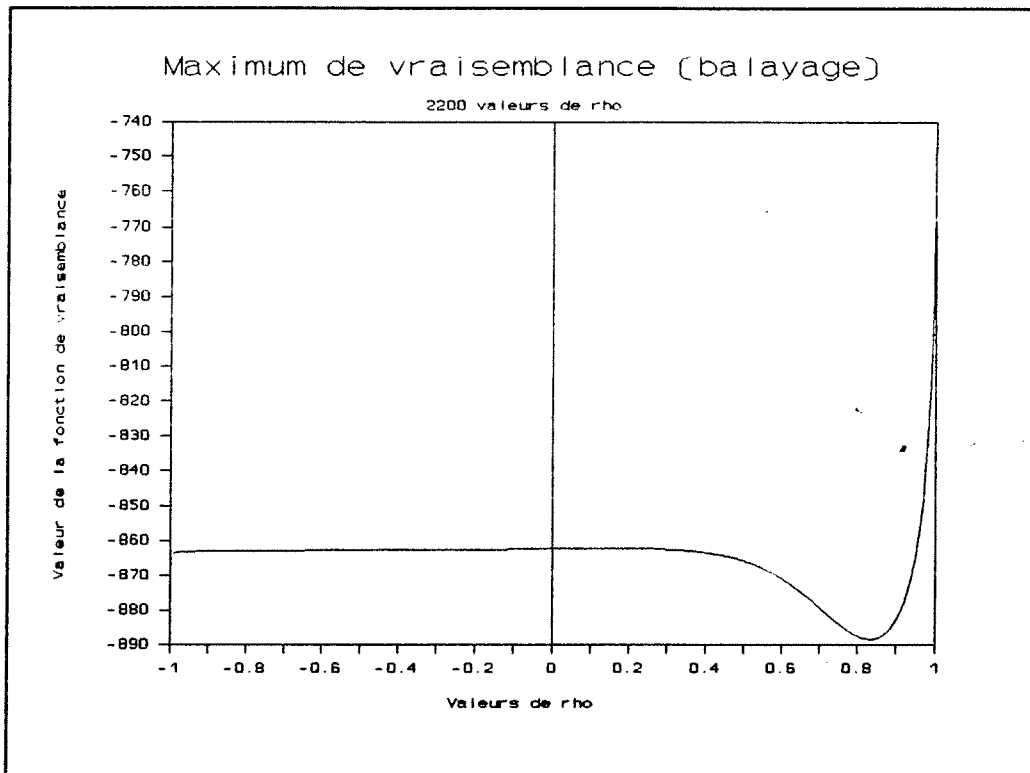
La méthode de maximum de vraisemblance a produit les

---

<sup>18</sup> Voir Beach et Mackinnon [1], page 52.

estimateurs  $\beta=0.04112$  et  $\rho=0.9^{19}$ , qui sur le graphique 4.3 a) est difficile à retrouver, car les incréments du paramètres  $\rho$  ne sont pas assez petits, mais nous pouvons constater l'existence d'un maximum local aux alentours de  $\mathcal{L}=-862$  et  $\rho=0.16$ .

Figure 4.3 a)



Pour nous permettre de bien distinguer le maximum global, la figure 4.3 b) trace les valeurs de  $\mathcal{L}$  pour des valeurs de  $\rho$  allant de 0.99999001 à 0.99999999, et l'on peut maintenant

<sup>19</sup> Nous constatons que le problème de contrainte du logiciel TSP est le même que pour l'estimateur de  $\rho$  obtenu par la méthode Hildreth-Lu énoncée plus haut.

bien constater l'existence d'un maximum global aux alentours de  $\varrho = -742$  et  $\rho = 0.999991$ . De plus, la figure 4.3 b) vérifie que la fonction de vraisemblance tend vers  $-\infty$  lorsque  $\rho$  tend vers 1. Dans la figure 4.4 a), nous observons un maximum local aux alentours de  $\beta = 0.29$ , tandis qu'à la figure 4.4 b), le maximum global se trouve aux alentours de  $\beta = 0.00070$ , pour les mêmes valeurs de  $\varrho$  qu'aux figures 4.3 a) et 4.3 b).

Figure 4.3 b)

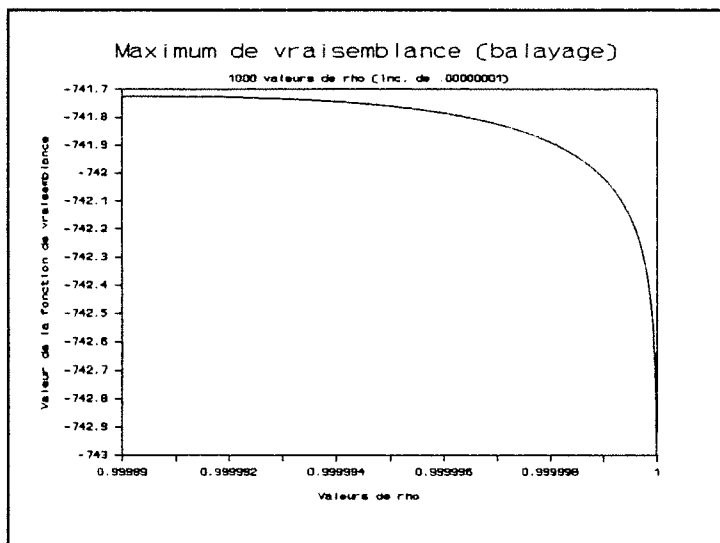


Figure 4.4 a)

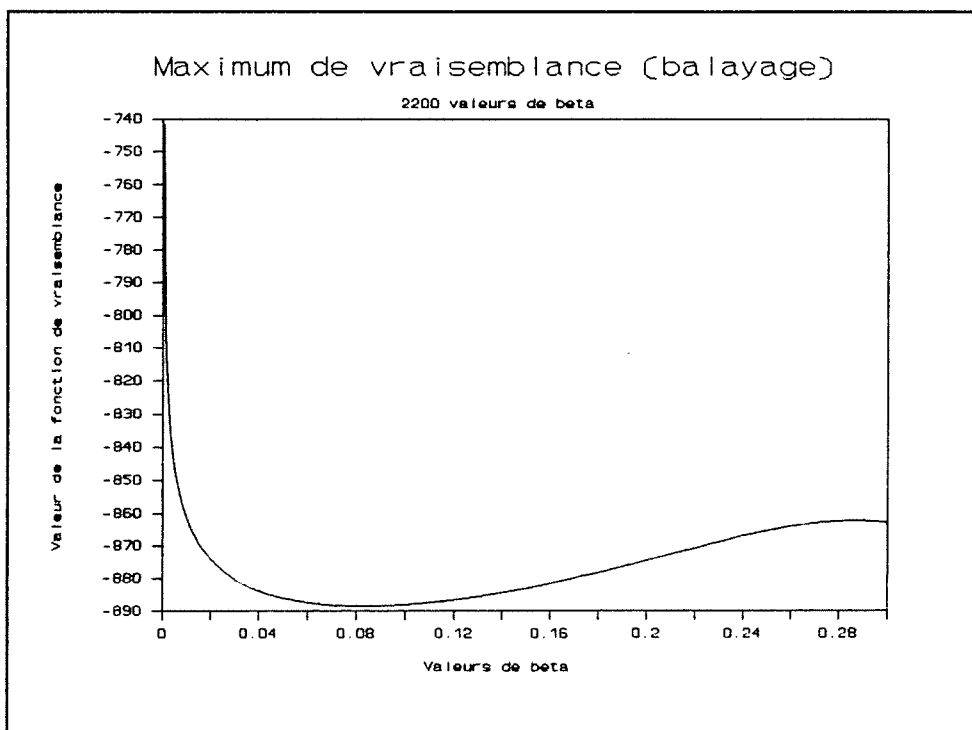
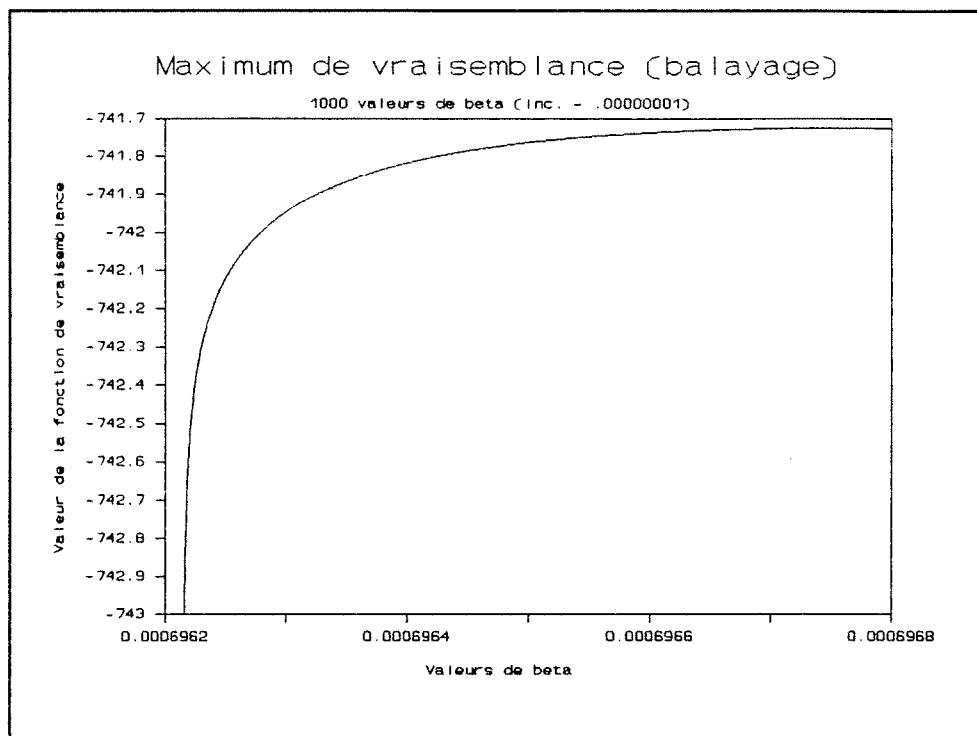


Figure 4.4 b)

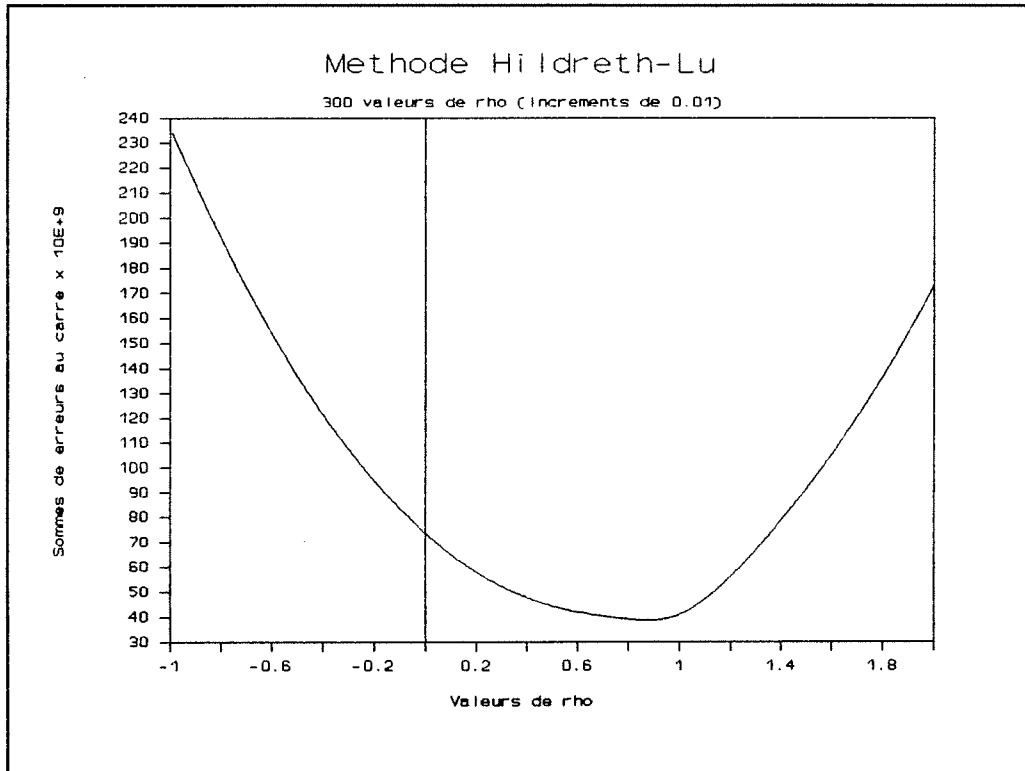


Malgré une erreur de mesure imposée à 5%, les expériences E-1, E-2, E-3, E-5, E-6, E-7, E-9, E-10 et E-11 dans la table 5.1 ( scénario 2 ) nous montrent jusqu'à quel point les résultats sont sensibles à des relativement petites baisses dans la valeur de  $R^2$  ( i.e.  $R^2=0.7$ ,  $R^2=0.95$  et  $R^2=0.98$  comparativement à  $R^2=0.9946$  ). En plus des moyennes des estimateurs de méthodes de balayage, les moyennes des estimateurs des méthode itératives divergent considérablement de la vraie valeur du paramètre.

Pour illustrer le scénario 2, nous avons choisi le premier échantillon de l'expérience E-1 ( i.e.  $\rho=0.75$  et  $R^2=0.7$  ). La réalisation choisie pour cette étude a produit, pour les méthodes MCO, CO, HL, MVI et MVS, les estimateurs suivants:  $\beta=0.27247$ ,  $\beta=0.0697$  et  $\rho=0.86773$ ,  $\beta=0.06288$  et  $\rho=0.88$ ,  $\beta=0.07483$  et  $\rho=0.86509$ ,  $\beta=0.07198$  et  $\rho=0.87$

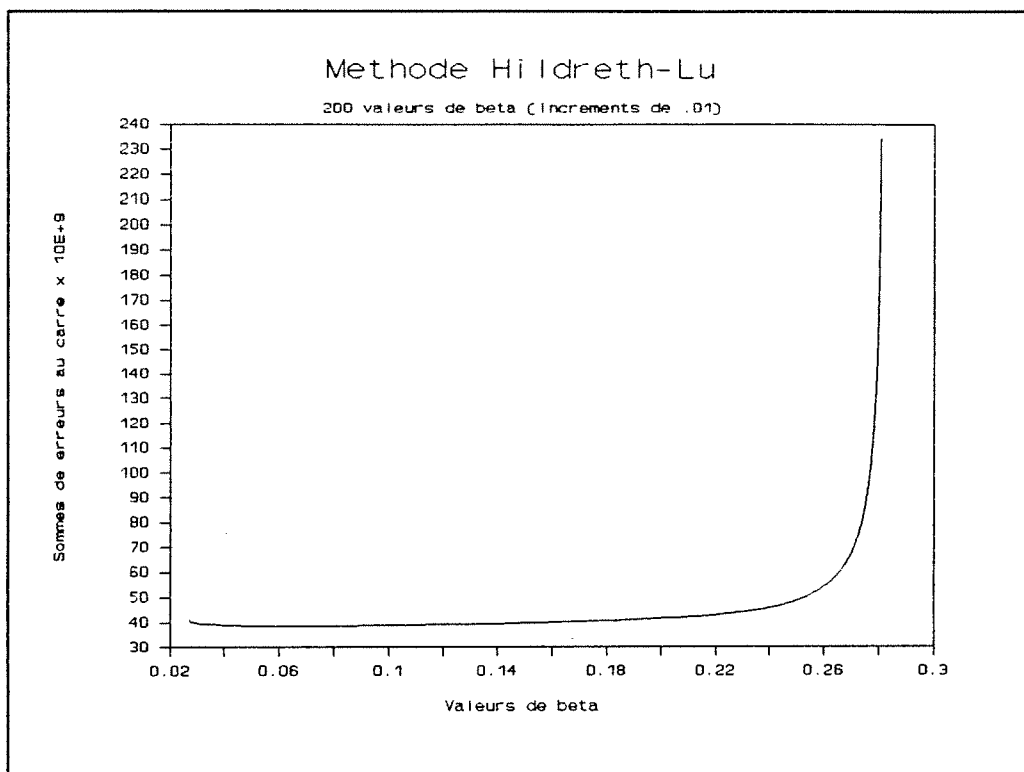
respectivement. Dans la figure 4.5, nous avons tracé la somme des erreurs au carré en fonction du paramètre  $\rho$ .

Figure 4.5



La figure 4.5 montre seulement qu'un minimum ( global ) se situant aux alentours de  $SE^2=3.9 E+10$  et  $\rho=0.88$ . L'estimateur du paramètre  $\rho$  est relativement éloigné de sa vraie valeur ( i.e.  $\rho=0.75$  ). Cependant, nous remarquons l'absence du minimum local qui était un des fait marquant du scénario 2.

Figure 4.6

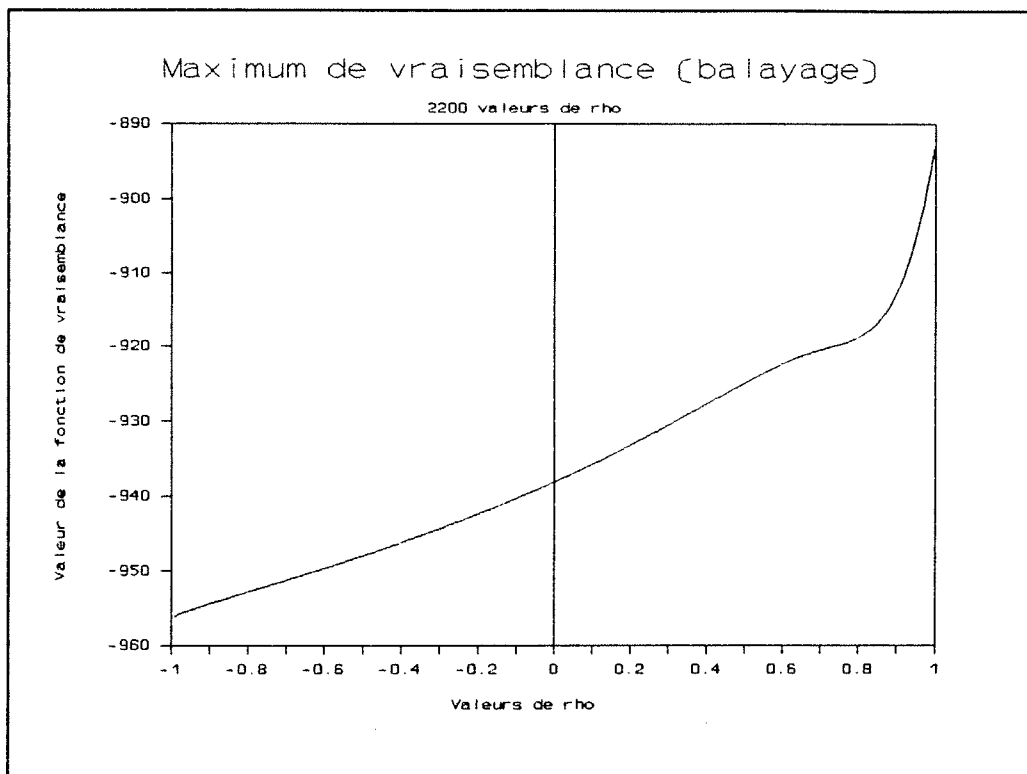


Dans la figure 4.6, nous avons tracé la la somme des erreurs au carré en fonction de  $\beta$  pour le même échantillon de l'expérience E-1, pour 200 valeurs de  $\rho$  ( allant de -0.99 à 1.00, incrément de 0.01 ). De façon analogue au scénario 1, le graphique illustre une correspondance et non une fonction pour des valeurs de  $\rho$  entre 1.01 et 2.00. La figure 4.6 montre le minimum ( global ) se situant aux alentours de  $SE^2=3.9 E+10$  et  $\beta=0.027$ .

Dans les figures 4.7 et 4.8 nous avons le même scénario, sauf que nous étudions la fonction de vraisemblance pour le même échantillon de l'expérience E-1.

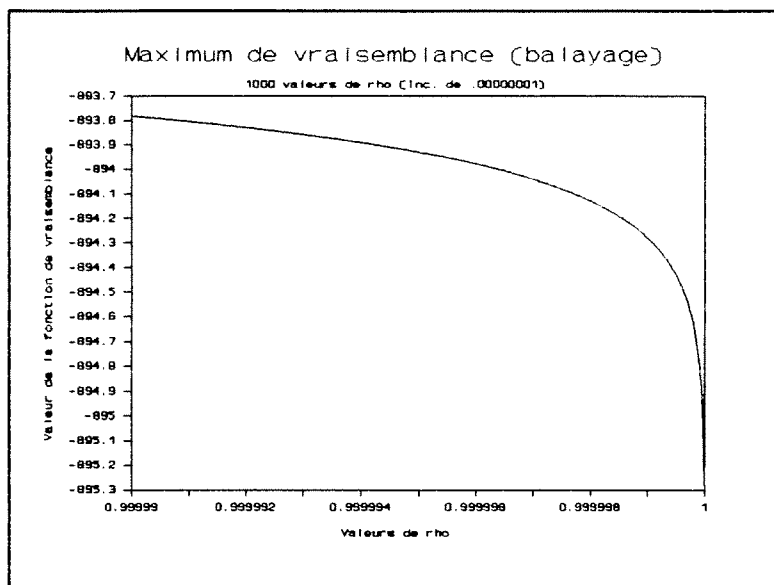


Figure 4.7 a)



Dans la figure 4.7 a), il est difficile de distinguer le maximum ( global ), mais de façon similaire, nous pouvons constater l'absence du minimum local comme à la figure 4.5. Cependant, la figure 4.7 b) nous permet de bien distinguer le maximum ( global ); elle trace les valeurs de  $\mathcal{Q}$  pour des valeurs de  $\rho$  allant de 0.99999001 à 0.99999999, et l'on peut maintenant bien constater l'existence d'un maximum unique aux alentours de  $\mathcal{Q}=-893$  et  $\rho=0.99934$ . De plus, la figure 4.7 b) vérifie que la fonction de vraisemblance tend vers  $-\infty$  lorsque  $\rho$  tend vers 1.

Figure 4.7 b)



Comme à la figure 4.7 a), nous n'observons pas de maximum local dans la figure 4.8 a), tandis qu'à la figure 4.8 b), le maximum global se trouve aux alentours de  $\beta=0.0272$ , pour les mêmes valeurs de  $\varrho$  qu'aux figures 4.7 a) et 4.7 b).

Figure 4.8 a)

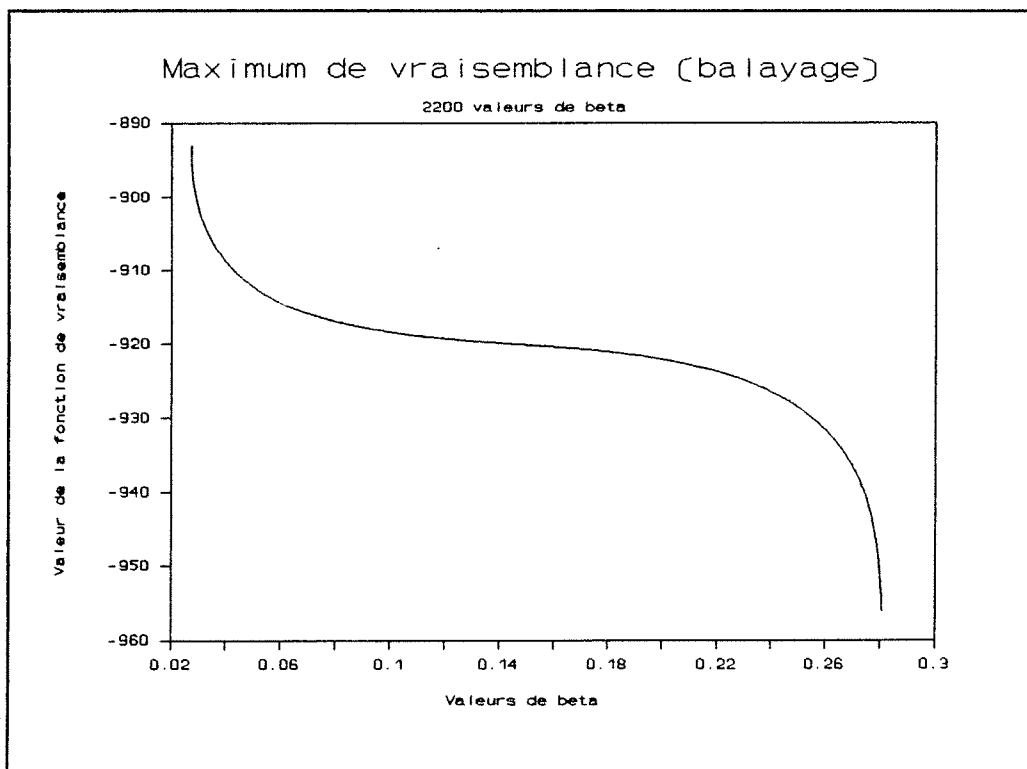
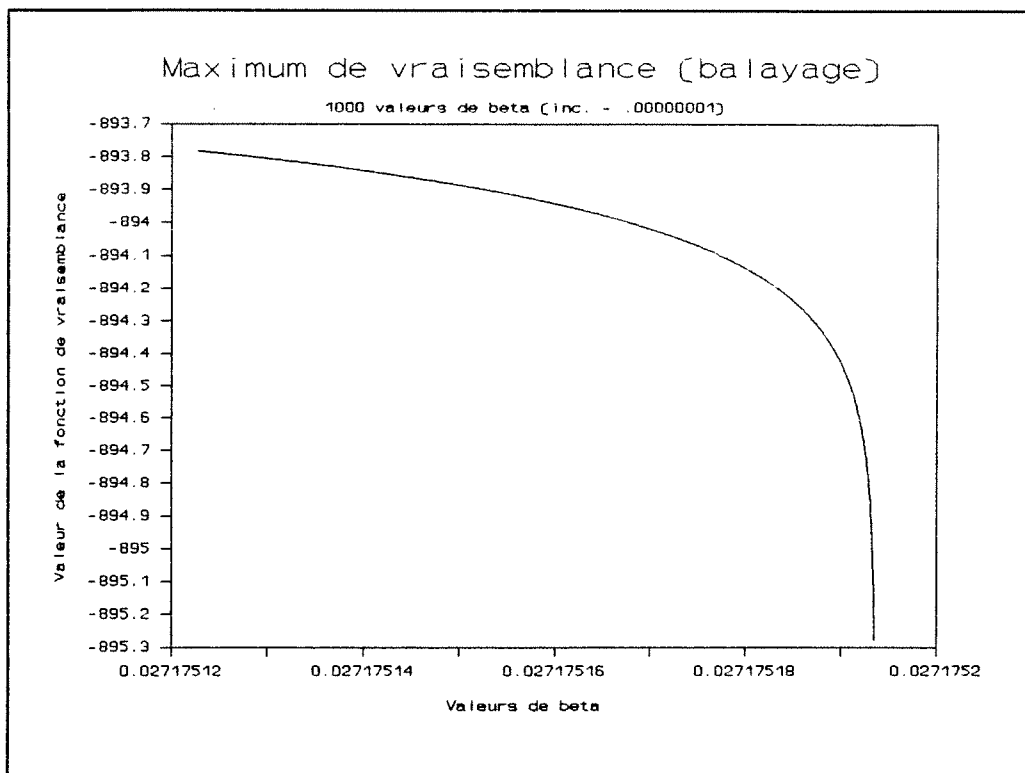


Figure 4.8 b)



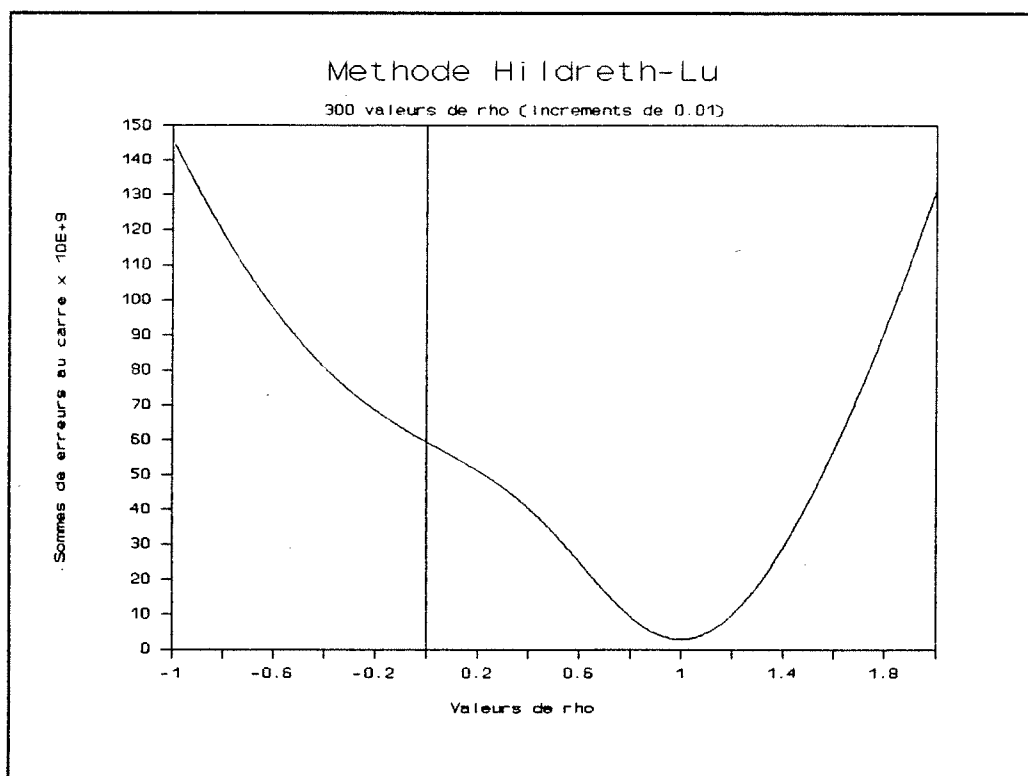
Donc, le deuxième scénario nous montre comment les résultats sont sensibles aux valeurs de  $R^2$  et ceci pour une valeur de EM=5%.

Maintenant, plus le pourcentage d'erreur est élevé, peu importe la valeur de  $R^2$ , nous observons le même phénomène que dans le scénario 2 ( troisième scénario: i.e. expériences E-13 à E-48 ).

Pour mettre en évidence l'influence de l'erreur de mesure, nous avons choisi le premier échantillon de l'expérience E-42 ( i.e. EM=50%,  $\rho=0.85$  et  $R^2=0.95$  ) afin d'effectuer l'étude des fonctions de sommes des erreurs au carré et de vraisemblance. L'expérience E-42 illustre bien le cas où tous les moyennes divergent de la vraie valeur de  $\beta=0.31$ . La réalisation choisie pour cette étude a produit, pour les méthodes MCO, CO, HL, MVI et MVS, les estimateurs

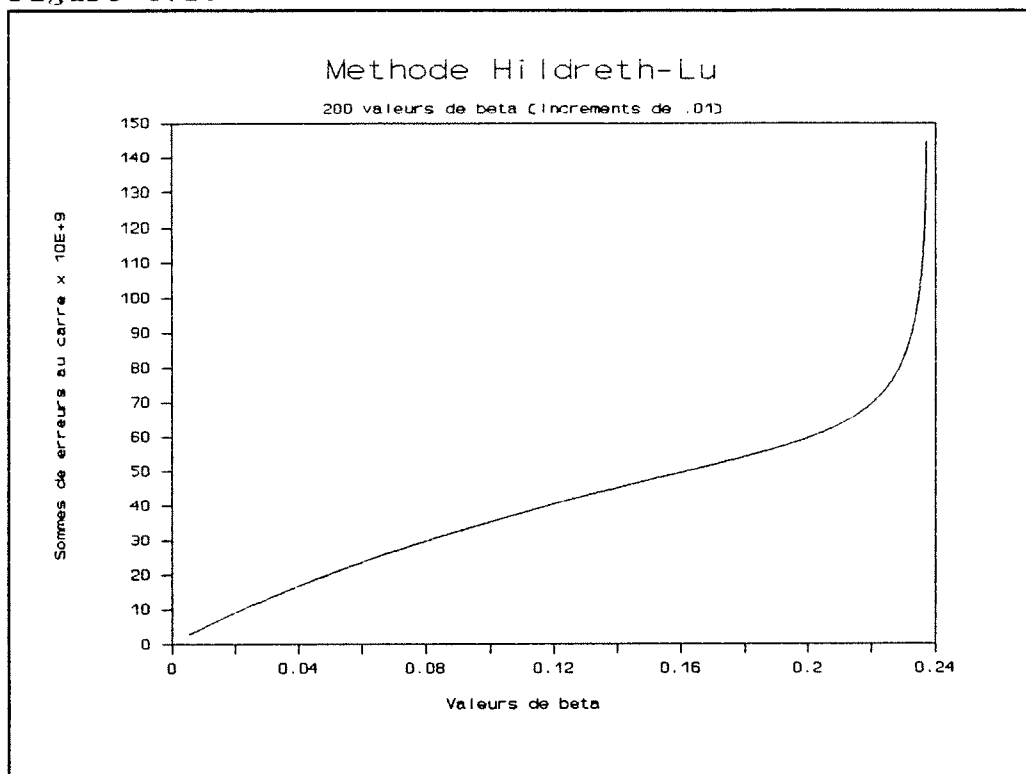
suivants:  $\beta=0.20029$ ,  $\beta=0.00527$  et  $\rho=.99813$ ,  $\beta=0.00924$  et  $\rho=0.9$ ,  $\beta=0.00535$  et  $\rho=0.99103$ ,  $\beta=0.00936$  et  $\rho=0.9$  respectivement. La figure 4.9 montre le comportement de la somme des erreurs au carré en fonction du paramètre  $\rho$ . Au lieu d'observer deux minimums, l'on observe ( comme dans le scénario 2 ) plutôt un minimum global dans ce graphique (  $SE^2=2.9 E+9$  et  $\rho=1.00$  ), ce qui explique pourquoi, même la méthode Cochrane-Orcutt produit un estimateur de  $\beta$  divergeant de façon non-négligeable.

Figure 4.9



Dans la figure 4.10, nous avons tracé la somme des erreurs au carré en fonction de  $\beta$  pour le même échantillon de l'expérience E-42, pour 200 valeurs de  $\rho$  ( allant de -0.99 à 1.00, incrément de 0.01 ). De façon analogue au scénario 1 et 2, le graphique illustre une correspondance et non une fonction pour des valeurs de  $\rho$  entre 1.01 et 2.00. La figure 4.10 montre le minimum ( global ) se situant aux alentours de  $SE^2=2.9 E+9$  et  $\beta=0.0053$ .

Figure 4.10



De façon analogue, nous avons tracé la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$  en fonction de  $\rho$  dans la figure 4.11. Dans les figures 4.11 a) et 4.11 b), l'unique maximum se situe aux alentours de  $\mathcal{L} = -797$  et  $\rho = 0.99995$ .

Figure 4.11 a)

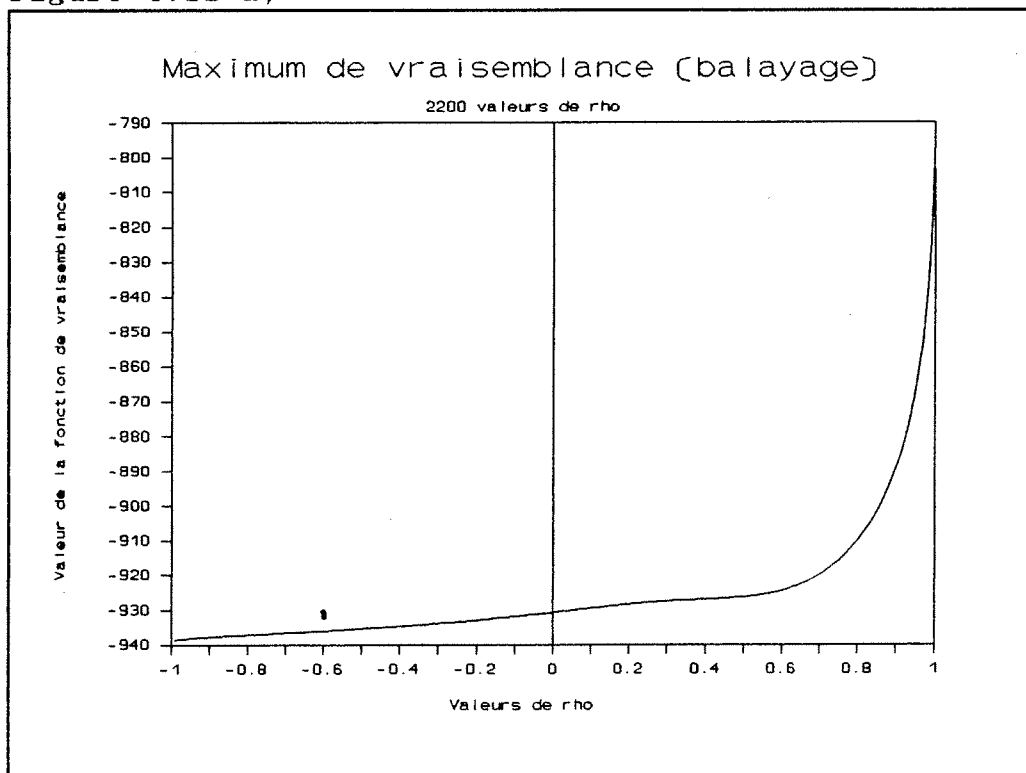
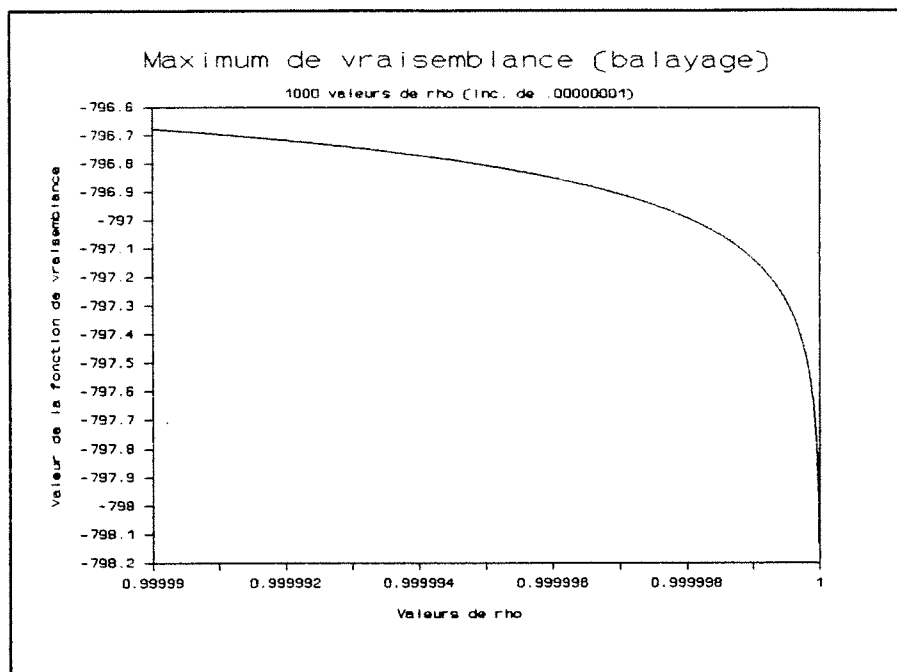


Figure 4.11 b)



Comme à la figure 4.11 a), nous n'observons pas de maximum local dans la figure 4.12 a), tandis qu'à la figure 4.12 b), le maximum global se trouve aux alentours de  $\beta=0.0053$ , pour les mêmes valeurs de  $\varrho$  qu'aux figures 4.11 a) et 4.11 b).

Figure 4.12 a)

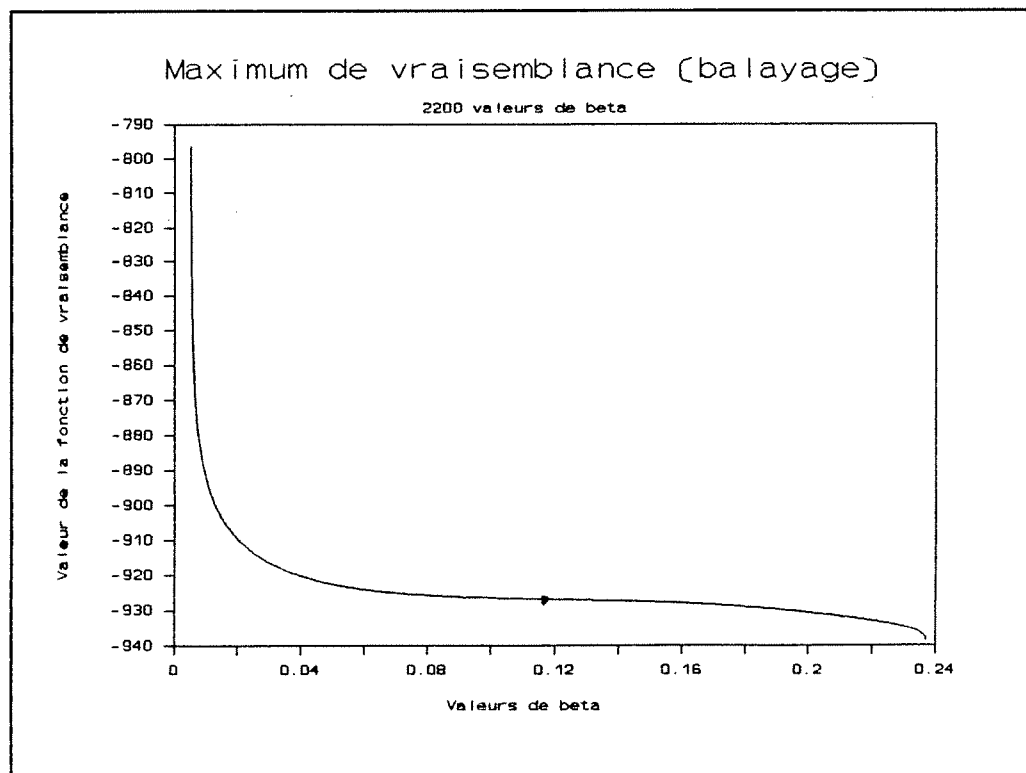
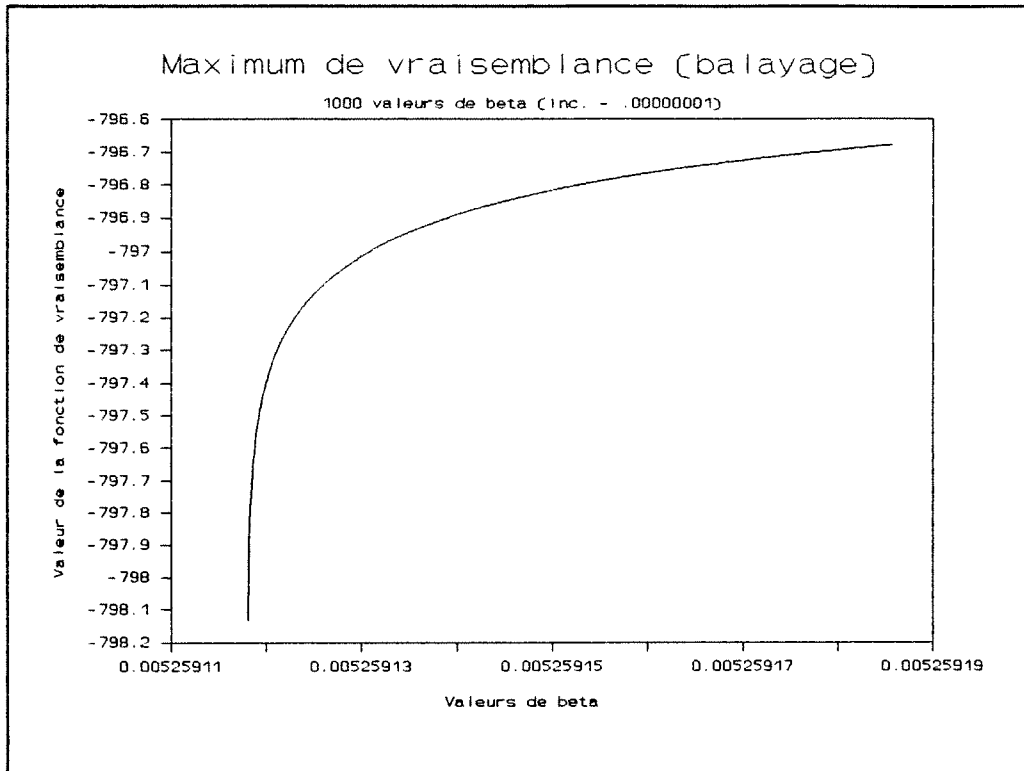


Figure 4.12 b)



Donc, l'existence d'erreurs de mesure très prononcées peuvent entraîner ces procédures de correction d'autocorrélation à produire des résultats " farfelus ", qui peuvent avertir le chercheur empirique de la présence du phénomène. Dans la section qui suit, nous utiliserons les paramètres des simulations E-1 à E-48 pour quantifier les résultats asymptotiques établis aux sections 2 et 3, ainsi permettant d'avoir une idée du comportement comparatif des variances et des écarts quadratiques moyens dans des échantillons finis et dans leurs équivalents asymptotiques.

## 5. QUANTIFICATION DES RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES

Dans les tables 5.1 à 5.4, nous retrouvons les biais, les variances et les écarts quadratiques moyens des estimateurs  $\beta',^{20}$ ,  $\beta''$  et  $\beta^{**}$  établis aux sections 2 et 3 pour les valeurs des paramètres des expériences E-1 à E-48. Les abréviations, MCO, MCOX, MC et MCXA veulent dire, la méthode des moindres carrés, la méthode des moindres carrés en présence d'une variable exogène autocorrélée d'ordre 1, celle de correction d'autocorrélation en présence d'une variable exogène indépendante dans le temps et celle de correction d'autocorrélation en présence d'une variable exogène autocorrélée d'ordre 1, respectivement.

Le paramètre  $\sigma_X^2$  a été calculé par la relation suivante:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{T} \times \sum_{t=1}^T PIB_t^2$$

avec  $PIB_t$  exprimé en déviation de sa moyenne. Cette valeur donne:  $\sigma_X^2 = 1.25 \text{ E}+10$ . La valeur de  $\delta$  a été fixée à 0.8, qui est raisonnable pour une série temporelle. Ceci implique pour la valeur de  $\sigma_\xi^2$ :

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_X^2 \times (1 - \delta^2) = 4.5 \text{ E}+9.$$

Le calcul des autres paramètres,  $\rho^*$ ,  $R^2$  et EM ainsi que  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_\epsilon^2$  et  $\sigma_v^2$  a été expliqué aux sections 3 et 4.

---

<sup>20</sup> L'on se souviendra que l'estimateur  $\beta'$  tel que défini à la page 6 a été utilisé dans le cas d'une variable exogène autocorrélée d'ordre 1 et aussi dans le cas d'une variable exogène non-autocorrélée.



Table 5.1 Résultats asymptotiques utilisant les paramètres  
des expériences de Monte Carlo E-1 à E-12.

| Expérience | Résultats | MCOX     | MCXA     | MCO      | MC       |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| E-1        | biais     | -0.01476 | -0.05028 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000869 | 0.000303 | 0.000245 | 0.000098 |
|            | EQM       | 0.001087 | 0.002831 | 0.000463 | 0.000316 |
| E-2        | biais     | -0.01476 | -0.03112 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.00013  | 0.000088 | 0.000053 | 0.000041 |
|            | EQM       | 0.000347 | 0.001056 | 0.000271 | 0.000259 |
| E-3        | biais     | -0.01476 | -0.02265 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000066 | 0.000057 | 0.000036 | 0.000033 |
|            | EQM       | 0.000284 | 0.00057  | 0.000254 | 0.000251 |
| E-4        | biais     | -0.01476 | -0.01759 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000037 | 0.000035 | 0.000029 | 0.000028 |
|            | EQM       | 0.000255 | 0.000345 | 0.000247 | 0.000246 |
| E-5        | biais     | -0.01476 | -0.05572 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.00113  | 0.00023  | 0.000245 | 0.000073 |
|            | EQM       | 0.001348 | 0.003335 | 0.000463 | 0.000291 |
| E-6        | biais     | -0.01476 | -0.03442 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000161 | 0.000091 | 0.000053 | 0.000039 |
|            | EQM       | 0.000379 | 0.001276 | 0.000271 | 0.000257 |
| E-7        | biais     | -0.01476 | -0.02397 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000078 | 0.000063 | 0.000036 | 0.000033 |
|            | EQM       | 0.000296 | 0.000638 | 0.000254 | 0.000251 |
| E-8        | biais     | -0.01476 | -0.01789 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.00004  | 0.000038 | 0.000029 | 0.000028 |
|            | EQM       | 0.000258 | 0.000358 | 0.000247 | 0.000246 |
| E-9        | biais     | -0.01476 | -0.05962 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.001563 | 0.000143 | 0.000245 | 0.00005  |
|            | EQM       | 0.001781 | 0.003698 | 0.000463 | 0.000268 |
| E-10       | biais     | -0.01476 | -0.03794 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000215 | 0.000095 | 0.000053 | 0.000036 |
|            | EQM       | 0.000433 | 0.001534 | 0.000271 | 0.000254 |
| E-11       | biais     | -0.01476 | -0.02539 | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000099 | 0.000073 | 0.000036 | 0.000032 |
|            | EQM       | 0.000317 | 0.000718 | 0.000254 | 0.00025  |
| E-12       | biais     | -0.01476 | -0.0182  | -0.01476 | -0.01476 |
|            | variance  | 0.000045 | 0.000043 | 0.000029 | 0.000028 |
|            | EQM       | 0.000263 | 0.000374 | 0.000247 | 0.000246 |

Table 5.2 Résultats asymptotiques utilisant les paramètres  
des expériences de Monte Carlo E-13 à E-24.

| Expérience | Résultats | MCOX     | MCXA     | MCO      | MC       |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| E-13       | biais     | -0.02818 | -0.08138 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000825 | 0.000302 | 0.000256 | 0.000125 |
|            | EQM       | 0.001619 | 0.006924 | 0.00105  | 0.000919 |
| E-14       | biais     | -0.02818 | -0.04795 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000143 | 0.000107 | 0.000073 | 0.000065 |
|            | EQM       | 0.000937 | 0.002407 | 0.000867 | 0.000859 |
| E-15       | biais     | -0.02818 | -0.03846 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000084 | 0.000075 | 0.000057 | 0.000055 |
|            | EQM       | 0.000879 | 0.001554 | 0.000851 | 0.00085  |
| E-16       | biais     | -0.02818 | -0.0334  | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000057 | 0.000055 | 0.00005  | 0.00005  |
|            | EQM       | 0.000851 | 0.00117  | 0.000844 | 0.000844 |
| E-17       | biais     | -0.02818 | -0.0896  | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.001062 | 0.000243 | 0.000256 | 0.000102 |
|            | EQM       | 0.001857 | 0.008271 | 0.00105  | 0.000896 |
| E-18       | biais     | -0.02818 | -0.05119 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000172 | 0.000116 | 0.000073 | 0.000063 |
|            | EQM       | 0.000966 | 0.002736 | 0.000867 | 0.000857 |
| E-19       | biais     | -0.02818 | -0.03968 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000096 | 0.000082 | 0.000057 | 0.000055 |
|            | EQM       | 0.00089  | 0.001656 | 0.000851 | 0.000849 |
| E-20       | biais     | -0.02818 | -0.03369 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.00006  | 0.000057 | 0.00005  | 0.00005  |
|            | EQM       | 0.000854 | 0.001192 | 0.000844 | 0.000844 |
| E-21       | biais     | -0.02818 | -0.09622 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.001458 | 0.000171 | 0.000256 | 0.00008  |
|            | EQM       | 0.002252 | 0.009429 | 0.00105  | 0.000875 |
| E-22       | biais     | -0.02818 | -0.05462 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.00022  | 0.000128 | 0.000073 | 0.000061 |
|            | EQM       | 0.001015 | 0.003112 | 0.000867 | 0.000855 |
| E-23       | biais     | -0.02818 | -0.04094 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000114 | 0.000093 | 0.000057 | 0.000055 |
|            | EQM       | 0.000909 | 0.001769 | 0.000851 | 0.000849 |
| E-24       | biais     | -0.02818 | -0.03399 | -0.02818 | -0.02818 |
|            | variance  | 0.000065 | 0.000061 | 0.00005  | 0.00005  |
|            | EQM       | 0.000859 | 0.001217 | 0.000844 | 0.000844 |

Table 5.3 Résultats asymptotiques utilisant les paramètres  
des expériences de Monte Carlo E-25 à E-36.

| Expérience | Résultats | MCOX     | MCXA     | MCO      | MC       |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| E-25       | biais     | -0.05167 | -0.12104 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000749 | 0.000281 | 0.000271 | 0.000163 |
|            | EQM       | 0.003419 | 0.014931 | 0.00294  | 0.002832 |
| E-26       | biais     | -0.05167 | -0.07827 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000162 | 0.000123 | 0.000103 | 0.000098 |
|            | EQM       | 0.002831 | 0.00625  | 0.002772 | 0.002767 |
| E-27       | biais     | -0.05167 | -0.06913 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000111 | 0.000096 | 0.000089 | 0.000088 |
|            | EQM       | 0.002781 | 0.004875 | 0.002758 | 0.002757 |
| E-28       | biais     | -0.05167 | -0.06439 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000088 | 0.000081 | 0.000082 | 0.000082 |
|            | EQM       | 0.002757 | 0.004226 | 0.002751 | 0.002751 |
| E-29       | biais     | -0.05167 | -0.13089 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000948 | 0.000236 | 0.000271 | 0.000143 |
|            | EQM       | 0.003618 | 0.017368 | 0.00294  | 0.002812 |
| E-30       | biais     | -0.05167 | -0.08121 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000186 | 0.000131 | 0.000103 | 0.000096 |
|            | EQM       | 0.002856 | 0.006727 | 0.002772 | 0.002766 |
| E-31       | biais     | -0.05167 | -0.07027 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000121 | 0.000101 | 0.000089 | 0.000087 |
|            | EQM       | 0.00279  | 0.005039 | 0.002758 | 0.002757 |
| E-32       | biais     | -0.05167 | -0.06469 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.00009  | 0.000082 | 0.000082 | 0.000082 |
|            | EQM       | 0.00276  | 0.004266 | 0.002751 | 0.002751 |
| E-33       | biais     | -0.05167 | -0.13945 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.001281 | 0.000182 | 0.000271 | 0.000124 |
|            | EQM       | 0.00395  | 0.019629 | 0.00294  | 0.002794 |
| E-34       | biais     | -0.05167 | -0.08425 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000227 | 0.000144 | 0.000103 | 0.000095 |
|            | EQM       | 0.002896 | 0.007243 | 0.002772 | 0.002765 |
| E-35       | biais     | -0.05167 | -0.07143 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000137 | 0.00011  | 0.000089 | 0.000087 |
|            | EQM       | 0.002806 | 0.005213 | 0.002758 | 0.002756 |
| E-36       | biais     | -0.05167 | -0.06498 | -0.05167 | -0.05167 |
|            | variance  | 0.000095 | 0.000085 | 0.000082 | 0.000082 |
|            | EQM       | 0.002764 | 0.004308 | 0.002751 | 0.002751 |

Table 5.4 Résultats asymptotiques utilisant les paramètres  
des expériences de Monte Carlo E-37 à E-48.

| Expérience | Résultats | MCOX     | MCXA     | MCO      | MC       |
|------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| E-37       | biais     | -0.10333 | -0.18508 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000586 | 0.000207 | 0.00028  | 0.000209 |
|            | EQM       | 0.011264 | 0.034462 | 0.010958 | 0.010887 |
| E-38       | biais     | -0.10333 | -0.15121 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000184 | 0.000117 | 0.000146 | 0.000143 |
|            | EQM       | 0.010861 | 0.022981 | 0.010824 | 0.010821 |
| E-39       | biais     | -0.10333 | -0.14507 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000149 | 0.000105 | 0.000134 | 0.000134 |
|            | EQM       | 0.010827 | 0.021152 | 0.010812 | 0.010812 |
| E-40       | biais     | -0.10333 | -0.1419  | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000133 | 0.000098 | 0.000129 | 0.000129 |
|            | EQM       | 0.010811 | 0.020234 | 0.010807 | 0.010807 |
| E-41       | biais     | -0.10333 | -0.19316 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000714 | 0.000179 | 0.00028  | 0.000195 |
|            | EQM       | 0.011392 | 0.037489 | 0.010958 | 0.010873 |
| E-42       | biais     | -0.10333 | -0.15342 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000199 | 0.000119 | 0.000146 | 0.000143 |
|            | EQM       | 0.010877 | 0.023656 | 0.010824 | 0.010821 |
| E-43       | biais     | -0.10333 | -0.14599 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000155 | 0.000106 | 0.000134 | 0.000134 |
|            | EQM       | 0.010833 | 0.021419 | 0.010812 | 0.010812 |
| E-44       | biais     | -0.10333 | -0.14215 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000135 | 0.000099 | 0.000129 | 0.000129 |
|            | EQM       | 0.010812 | 0.020306 | 0.010807 | 0.010807 |
| E-45       | biais     | -0.10333 | -0.20037 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000926 | 0.000148 | 0.00028  | 0.000182 |
|            | EQM       | 0.011604 | 0.040296 | 0.010958 | 0.01086  |
| E-46       | biais     | -0.10333 | -0.15564 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000225 | 0.000123 | 0.000146 | 0.000142 |
|            | EQM       | 0.010903 | 0.024346 | 0.010824 | 0.01082  |
| E-47       | biais     | -0.10333 | -0.14691 | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000165 | 0.000109 | 0.000134 | 0.000134 |
|            | EQM       | 0.010843 | 0.021691 | 0.010812 | 0.010812 |
| E-48       | biais     | -0.10333 | -0.1424  | -0.10333 | -0.10333 |
|            | variance  | 0.000137 | 0.0001   | 0.000129 | 0.000129 |
|            | EQM       | 0.010815 | 0.020378 | 0.010807 | 0.010807 |

Les tables 5.1 à 5.4 offrent toutes les mêmes conclusions, c'est-à-dire, les écarts quadratiques moyens des estimateurs MCOX sont tous inférieurs à ceux obtenus avec les méthodes de correction d'autocorrélation (MCXA), sans doute parce que l'effet de corriger l'autocorrélation des erreurs de régression et la présence d'une variable exogène autocorrélée d'ordre 1, augmentent substantivement ( et sûrement de façon évitable ) la variation de l'estimateur du paramètre  $\beta$ . Toutefois, les écarts quadratiques moyens MCO sont tous plus grands ou égaux aux écarts quadratiques moyens MC, ce qui n'est pas vraiment alarmant car il est très rare de travailler avec des séries temporelles ne contenant pas une composante d'autocorrélation de première ordre non-négligeable. Si l'on considère seulement le scénario 1, c'est-à-dire, les expériences: E-4, E-8 et E-12, la méthode des MCO et les méthodes de correction itératives semblent confirmer les résultats des expériences analogues dans les tables 5.1 à 5.4.

## 6. CONCLUSIONS

Étant donné que ces résultats ne sont pas établis pour les mêmes grandeurs d'échantillons, il est difficile d'affirmer avec certitude, que les simulations ont parfaitement capté le phénomène asymptotique étudié aux sections 2 et 3. Cependant, l'exercice démontre jusqu'à quel point la présence simultanée, d'erreurs de mesure et d'erreurs de régression autocorrélées d'ordre 1, peut causer de sérieux problèmes si le modèle n'est pas identifié de façon

adéquate. Nous avons certainement réussi à isoler certains symptômes caractérisant ce problème.

La méthode des moindres carrés semble performer aussi bien, sinon mieux, que les méthodes itératives de correction d'autocorrélation d'ordre 1, car le biais et la variance asymptotique sont respectivement inférieurs l'un de l'autre. Les contraintes de financement et de temps alloué pour des projets peuvent faire en sorte que l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaires ( très rapide et non-coûteuse ) est un compromis équitable. Cette recherche avait comme objectif premier de mettre le phénomène en évidence, et par le fait même d'offrir une mise en garde aux chercheurs utilisant, de façon mécanique, des méthodes de correction d'autocorrélation d'ordre 1. Quand il y a erreur de mesure, dans des échantillons finis ou asymptotiques, la correction d'autocorrélation peut accentuer le biais et l'écart quadratique moyen des estimateurs. Dans beaucoup de recherche où les erreurs de mesure sur agrégats sont probablement non-négligeables, si l'on utilise souvent des techniques de correction d'autocorrélation ou si l'on fonctionne en première différence, à la lumière de nos expériences, nous ne sommes pas certain du gain à procéder ainsi. Une plus grande attention au phénomène d'erreur sur variable montrerait qu'une méthode d'estimation de variables instrumentales serait probablement indiquée dans beaucoup de cas.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Beach, C.M. et Mackinnon, J.G.(1978), " A Maximum Likelihood Procedure for Regression with Autocorrelated errors ", *Econometrica* 46, No. 1, 51-58.
- [2] Grether, D.M. et Maddala, G.S.(1973), " Errors in Variables and Serially Correlated Disturbances in Distributed Lag Models ", *Econometrica* 41, No. 2, 255-262.
- [3] Phillips, P.C.B.(1987), " Time Series Regression with a Unit Root ", *Econometrica* 55, No. 2, 277-301.

## ANNEXE MATHÉMATIQUE

Note 2.

$$\begin{aligned}
E(\Lambda_4 \Lambda_4^T) &= \frac{1}{T} E \left\{ \sqrt{T} \left( \frac{(X+u)^T (\beta X+u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right) \right\} \\
&\quad \times \left[ \sqrt{T} \left( \frac{(X+u)^T (\beta X+u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right)^T \right] \\
&= \frac{1}{T} E \left\{ \sqrt{T} \left( \frac{(\beta X^T X + X^T u + \beta X^T v + v^T u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right) \right\} \\
&\quad \times \left[ \sqrt{T} \left( \frac{(\beta X^T X + X^T u + \beta X^T v + v^T u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right)^T \right] \\
&= \frac{1}{T} E \left[ T \left( \frac{(X^T u u^T X + \beta^2 X^T v v^T X + v^T u u^T v) / T^2}{(\tilde{X}^T \tilde{X})^2 / T^2} \right) \right] \\
&= \Lambda_5
\end{aligned}$$

alors  $\Lambda_5$  et  $\Lambda_6$  où

$$\Lambda_6 = \frac{1}{T} E \left[ T \left( \frac{(X^T u u^T X + \beta^2 X^T v v^T X + v^T u u^T v) / T^2}{(\sigma_X^2 + \sigma_v^2)^2} \right) \right]$$

ont la même loi de distribution asymptotique.

$$\rightarrow E(\Lambda_6) = \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_v^2)^2} \left[ E \left( \frac{X^T u u^T X}{T^2} \right) + \left( \frac{\beta^2 X^T v v^T X}{T^2} \right) + \left( \frac{v^T u u^T v}{T^2} \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
E\left\{\frac{X^T u u^T X}{T^2}\right\} &= \frac{1}{T^2} \text{tr} E(X X^T u u^T) \\
&= \frac{1}{T^2} \text{tr} (\sigma_u^2 \sigma_X^2 \Xi \Omega) \\
&= \frac{\sigma_u^2 \sigma_X^2}{T} \left[1 + 2 T^{-1} \sum_{i=1}^{T-1} (T-i) (\delta \rho)^i\right]
\end{aligned}$$

car pour  $T=4$ , nous avons :

$$\text{tr} (\Xi \Omega) = \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccc} 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ \delta & 1 & \delta & \delta^2 \\ \delta^2 & \delta & 1 & \delta \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{array} \right) \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \delta \rho + \delta^2 \rho^2 + \delta^3 \rho^3 \\
&+ 1 + 2 \delta \rho + \delta^2 \rho^2 \\
&+ 1 + 2 \delta \rho + \delta^2 \rho^2 \\
&+ 1 + \delta \rho + \delta^2 \rho^2 + \delta^3 \rho^3 \\
&= 4 + 6 \delta \rho + 4 \delta^2 \rho^2 + 2 \delta^3 \rho^3 \\
&= 4 + 2 \sum_{i=1}^3 (4-i) (\delta \rho)^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{E(X^T u u^T X)}{T^2} &= \frac{\sigma_u^2 \sigma_X^2}{T^2} \left[ T + 2 \sum_{i=1}^{T-1} (T-i) (\delta \rho)^i \right] \\
&= \frac{\sigma_u^2 \sigma_X^2}{T} + \frac{2 \sigma_u^2 \sigma_X^2}{T} \left[ \sum_{i=1}^{T-1} (T \gamma^i - i \gamma^i) \right] \quad \text{où } \gamma = \delta \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sigma_u^2 \sigma_X^2 T}{T} \sum_{i=1}^{T-1} \gamma^i &= \frac{2 \sigma_u^2 \sigma_X^2 \gamma}{(1-\gamma)} \\ &= \frac{2 \sigma_u^2 \sigma_X^2 \delta \rho}{(1-\delta \rho)} \end{aligned}$$

Maintenant

$$\lim_{T \rightarrow \infty} -2 \frac{\sigma_u^2 \sigma_X^2}{T} \sum_{i=1}^{T-1} i \gamma^i = 0 \quad \text{car}$$

$$\text{Soit } S = \sum_{i=1}^{T-1} i \gamma^i = \gamma + 2\gamma^2 + 3\gamma^3 + \dots + (T-1) \gamma^{T-1}$$

$$\Rightarrow S\gamma = \gamma^2 + 2\gamma^3 + \dots + (T-2) \gamma^{T-1} + (T-1) \gamma^T$$

$$\text{et } S - S\gamma = \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{T-1} + (T-1) \gamma^T$$

alors, si  $T$  tend vers l'infini, nous obtenons:

$$\begin{aligned} S - S\gamma &= \frac{\gamma}{(1-\gamma)} + (T-1) \gamma^T \\ &= \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} + \frac{(T-1) \gamma^T}{(1-\gamma)} \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{S - S\gamma}{T} \rightarrow 0$$

$$E\left\{\frac{\beta^2 X v v^T X}{T^2}\right\} = \frac{1}{T^2} \text{tr}(\beta^2 \sigma_X^2 \sigma_v^2 I)$$

$$= \frac{\beta^2 \sigma_v^2 \sigma_X^2}{T}$$

$$E\left\{\frac{v^T u u^T v}{T^2}\right\} = \frac{1}{T^2} \text{tr}(\sigma_u^2 \sigma_v^2 \Omega)$$

$$= \frac{\sigma_u^2 \sigma_v^2}{T}$$

$$\therefore E(\Lambda_6) = \frac{1}{T(\sigma_X^2 + \sigma_v^2)^2} \left\{ \sigma_u^2 \sigma_X^2 \left[ 1 + \frac{2\delta\rho}{(1-\delta\rho)} \right] + \beta^2 \sigma_v^2 \sigma_X^2 + \sigma_u^2 \sigma_v^2 \right\}$$

Finalemment, l'approximation asymptotique de  $E(\Lambda_1 \Lambda_2^T)$  est obtenu en dérivant:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \text{asy} E(\Lambda_4 \Lambda_2^T)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{asy} E(\Lambda_4 \Lambda_2^T) &= \text{asy} E \left[ \left( \frac{(X+v)^T (\beta X + u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right) \left( \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \beta \right)^T \right] \\ &= \text{asy} E \left[ \frac{(X^T u + \beta X^T v + v^T u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \left( \frac{\beta X^T X / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} - \beta \right)^T \right] \\ &= \text{asy} E \left[ \frac{\beta X^T u X^T X + \beta^2 X^T v X^T X + \beta v^T u X^T X}{(\tilde{X}^T \tilde{X})^2 / T^2} - \frac{\beta (X^T u + \beta X^T v + v^T u) / T}{\tilde{X}^T \tilde{X} / T} \right] \end{aligned}$$

l'intérieur des parenthèses a la même distribution asymptotique que:

$$\text{asyE} \left[ \frac{\beta X^T u X^T X + \beta^2 X^T v X^T X + \beta v^T u X^T X}{(\sigma_X^2 + \sigma_v^2)^2} / T^2 - \frac{\beta (X^T u + \beta X^T v + v^T u) / T}{\sigma_X^2 + \sigma_v^2} \right]$$

et par inspection de ce terme nous constatons que:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \text{asyE} (\Lambda_1 \Lambda_2^T) = E (\Lambda_1 \Lambda_2^T) = 0$$

Donc

$$\text{asy EQM}(\beta'') = [-\beta \lambda]^2 + \frac{1}{T(\sigma_X^2 + \sigma_v^2)^2} \left\{ \sigma_X^2 \sigma_u^2 \left[ 1 + \frac{2\delta\rho}{(1-\delta\rho)} \right] + \beta^2 \sigma_v^2 \sigma_X^2 + \sigma_u^2 \sigma_v^2 \right\}$$

Note 7.

$$\begin{aligned} \text{Plim} \frac{1}{T} (\tilde{X}^T - \rho \tilde{X}_{-1}^T) (\beta X + u - \rho \beta X_{-1} - \rho u_{-1}) &= \text{Plim} \frac{1}{T} (X^T + v^T - \rho X_{-1}^T - \rho v_{-1}^T) \\ &\quad \times (\beta X + u - \rho \beta X_{-1} - \rho u_{-1}) \\ &= \text{Plim} \frac{1}{T} (\beta X^T X - \rho \beta X^T X_{-1} \\ &\quad - \rho \beta X_{-1}^T X + \rho^2 \beta X_{-1}^T X_{-1}) \\ &= \beta \sigma_X^2 - \rho \beta \sigma_{XX}(1) - \rho \beta \sigma_{XX}(1) + \rho^2 \beta \sigma_X^2 \\ &= \beta \sigma_X^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{XX}(1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } Plim \frac{1}{T} (\tilde{X}^T - \rho \tilde{X}_{-1}^T) (\tilde{X} - \rho \tilde{X}_{-1}) &= Plim \frac{1}{T} (X^T + v^T - \rho X_{-1}^T - \rho v_{-1}^T) (X + v - \rho X_{-1} - \rho v_{-1}) \\
 &= Plim \frac{1}{T} (X^T X - \rho X^T X_{-1} + v^T v - \rho X_{-1}^T X + \rho^2 X_{-1}^T X_{-1} \\
 &\quad - \rho v^T v_{-1} - \rho v_{-1}^T v + \rho^2 v_{-1}^T v_{-1}) \\
 &= \sigma_X^2 - 2\rho \sigma_{XX}(1) + \sigma_v^2 - 2\rho \sigma_{vv}(1) + \rho^2 \sigma_X^2 + \rho^2 \sigma_v^2 \\
 &= \sigma_X^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{XX}(1)) + \sigma_v^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{vv}(1))
 \end{aligned}$$

$$\therefore Plim \beta^* = \frac{\beta \sigma_X^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{XX}(1))}{\sigma_X^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{XX}(1)) + \sigma_v^2 (1 + \rho^2 - 2\rho \rho_{vv}(1))}$$

Note 10.

$$\begin{aligned}
 E(\Lambda_4 \Lambda_4^T) &= \frac{1}{T} E \left\{ \sqrt{T} \left( \frac{(X + v - \rho^* X_{-1} - \rho^* v_{-1})^T (\beta X + u - \rho^* \beta X_{-1} - \rho^* u_{-1}) / T}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1}) / T}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right) \right\} [\cdot]^T \\
 &= \frac{1}{T} E \left\{ \sqrt{T} \left( \frac{(X^T u - \rho^* X^T u_{-1} + \beta v^T X + v^T u - \rho^* \beta v^T X_{-1} - \rho^* v^T u_{-1} - \rho^* X_{-1}^T u}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\rho^{*2} X_{-1}^T u_{-1} - \rho^* \beta v_{-1}^T X - \rho^* v_{-1}^T u + \rho^{*2} \beta v_{-1}^T X_{-1} + \rho^{*2} v_{-1}^T u_{-1}) / T}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right) \right\} [\cdot]^T
 \end{aligned}$$

Définissons :

$$\Lambda_7 = \left( \frac{(X^T u - \rho^* X^T u_{-1} + \beta v^T X + v^T u - \rho^* \beta v^T X_{-1} - \rho^* v^T u_{-1} - \rho^* X_{-1}^T u}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right. \\ \left. + \frac{\rho^{*2} X_{-1}^T u_{-1} - \rho^* \beta v_{-1}^T X - \rho^* v_{-1}^T u + \rho^{*2} \beta v_{-1}^T X_{-1} + \rho^{*2} v_{-1}^T u_{-1}}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} \right)$$

et

$$\Lambda'_7 = (X^T u - \rho^* X^T u_{-1} + \beta v^T X + v^T u - \rho^* \beta v^T X_{-1} - \rho^* v^T u_{-1} - \rho^* X_{-1}^T u \\ + \rho^{*2} X_{-1}^T u_{-1} - \rho^* \beta v_{-1}^T X - \rho^* v_{-1}^T u + \rho^{*2} \beta v_{-1}^T X_{-1} + \rho^{*2} v_{-1}^T u_{-1}) / T$$

$$\begin{aligned} 10.1_4 &= \frac{1}{T} E(T(X^T u u^T X - \rho^* X^T u u_{-1}^T X - \rho^* X^T u u^T X_{-1} + \rho^{*2} X^T u u_{-1}^T X_{-1} \\ 10.2_4 &- \rho^* X^T u_{-1} u^T X + \rho^{*2} X^T u_{-1} u_{-1}^T X + \rho^{*2} X^T u_{-1} u^T X_{-1} - \rho^{*3} X^T u_{-1} u_{-1}^T X_{-1} \\ 10.3_4 &+ \beta^2 v^T X X^T v - \rho^* \beta^2 v^T X X_{-1}^T v - \rho^* \beta^2 v^T X X^T v_{-1} + \rho^{*2} \beta^2 v^T X X_{-1}^T v_{-1} \\ 10.4_4 &+ v^T u u^T v - \rho^* v^T u u_{-1}^T v - \rho^* v^T u u^T v_{-1} + \rho^{*2} v^T u u_{-1}^T v_{-1} \\ 10.5_4 &- \rho^* \beta^2 v^T X_{-1} X^T v + \rho^{*2} \beta^2 v^T X_{-1} X_{-1}^T v + \rho^{*2} \beta^2 v^T X_{-1} X^T v_{-1} - \rho^{*3} \beta^2 v^T X_{-1} X_{-1}^T v_{-1} \\ 10.6_4 &- \rho^* v^T u_{-1} u^T v + \rho^{*2} v^T u_{-1} u_{-1}^T v + \rho^{*2} v^T u_{-1} u^T v_{-1} - \rho^{*3} v^T u_{-1} u_{-1}^T v_{-1} \\ 10.7_4 &- \rho^* X_{-1}^T u u^T X + \rho^{*2} X_{-1}^T u u_{-1}^T X + \rho^{*2} X_{-1}^T u u^T X_{-1} - \rho^{*3} X_{-1}^T u u_{-1}^T X_{-1} \\ 10.8_4 &+ \rho^{*2} X_{-1}^T u_{-1} u^T X - \rho^{*3} X_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T X - \rho^{*3} X_{-1}^T u_{-1} u^T X_{-1} + \rho^{*4} X_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T X_{-1} \\ 10.9_4 &- \rho^* \beta^2 v_{-1}^T X X^T v + \rho^{*2} \beta^2 v_{-1}^T X X_{-1}^T v + \rho^{*2} \beta^2 v_{-1}^T X X^T v_{-1} - \rho^{*3} \beta^2 v_{-1}^T X X_{-1}^T v_{-1} \\ 10.10_4 &- \rho^* v_{-1}^T u u^T v + \rho^{*2} v_{-1}^T u u_{-1}^T v + \rho^{*2} v_{-1}^T u u^T v_{-1} - \rho^{*3} v_{-1}^T u u_{-1}^T v_{-1} \\ 10.11_4 &+ \rho^{*2} \beta^2 v_{-1}^T X_{-1} X^T v - \rho^{*3} \beta^2 v_{-1}^T X_{-1} X_{-1}^T v - \rho^{*3} \beta^2 v_{-1}^T X_{-1} X^T v_{-1} + \rho^{*4} \beta^2 v_{-1}^T X_{-1} X_{-1}^T v_{-1} \end{aligned}$$

$$10.12_4 \quad +\rho^{*2} \mathbf{v}_{-1}^T \mathbf{u}_{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{v} - \rho^{*3} \mathbf{v}_{-1}^T \mathbf{u}_{-1} \mathbf{u}_{-1}^T \mathbf{v} - \rho^{*3} \mathbf{v}_{-1}^T \mathbf{u}_{-1} \mathbf{u}^T \mathbf{v}_{-1} + \rho^{*4} \mathbf{v}_{-1}^T \mathbf{u}_{-1} \mathbf{u}_{-1}^T \mathbf{v}_{-1} / T^2 \\ \times [(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T]^{-2} = \Lambda_8$$

Il est à noter que  $\Lambda_8$  et  $\Lambda_9$  ont la même distribution asymptotique où :

$$\Lambda_9 = \frac{1}{T} \left\{ \frac{[\cdot]}{T} (D_3)^{-2} \right\}$$

où  $D_3$  est défini comme à la page 20 du texte.

$$10.1.1) \quad \frac{1}{T} E(X^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T X) = \sigma_u^2 \sigma_x^2 \left[ 1 + \frac{2\delta\rho}{(1-\delta\rho)} \right] \text{ lorsque } T \rightarrow \infty, \text{ voir note 2, page VIII.}$$

$$10.1.2) \quad \frac{-\rho^*}{T} E(X^T \mathbf{u} \mathbf{u}_{-1}^T X) = \frac{-\rho^*}{T} \text{tr} E(X X^T \mathbf{u} \mathbf{u}_{-1}^T) \\ = \frac{-\rho^*}{T} \text{tr} (\sigma_u^2 \sigma_x^2 \Xi \Omega^*)$$

où pour  $T=4$ , nous avons :

$$\text{tr} (\Xi \Omega^*) = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ \delta & 1 & \delta & \delta^2 \\ \delta^2 & \delta & 1 & \delta \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\delta + 4\rho + 3\delta\rho^2 + 2\delta^2\rho^3 + \delta^3\rho^4 + 2\delta^2\rho + \delta^3\rho^2 \\
&= \delta(3 + 2\delta\rho + \delta^2\rho^2) + \rho(4 + 3\delta\rho + 2\delta^2\rho^2 + \delta^3\rho^3) \\
&= \delta \sum_{i=0}^{T-2} (T-1-i)\gamma^i + \rho \sum_{i=0}^{T-1} (T-i)\gamma^i \quad \text{où } \gamma = \delta\rho \\
&= \delta \sum_{i=0}^{T-2} (T\gamma^i - \gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty - i\gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty) + \rho \sum_{i=0}^{T-1} (T\gamma^i - i\gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

voir note 2.

$$\begin{aligned}
&= \frac{T\delta}{(1-\gamma)} + \frac{T\rho}{(1-\gamma)} = \frac{T(\delta+\rho)}{(1-\delta\rho)} \\
\therefore \frac{-\rho^*}{T} E(X^T u u_{-1}^T X) &= -\frac{\sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^* (\delta+\rho)}{(1-\delta\rho)}
\end{aligned}$$

$$10.1.3) \quad \frac{-\rho^*}{T} E(X^T u u_{-1}^T X_{-1}) = \frac{-\sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^* (\delta+\rho)}{(1-\delta\rho)} \quad \text{voir 10.1.2)}$$

$$\begin{aligned}
10.1.4) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(X^T u u_{-1}^T X_{-1}) &= \frac{\rho^{*2}}{T} \text{tr} E(X_{-1} X^T u u_{-1}^T) \\
&= \frac{\rho^{*2}}{T} \text{tr} (\sigma_u^2 \sigma_X^2 \Xi^{*T} \Omega^*)
\end{aligned}$$

où pour  $T=4$ , nous avons :

$$\text{tr} (\Xi^{*T} \Omega^*) = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \delta & \delta^2 & \delta^3 & \delta^4 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ \delta & 1 & \delta & \delta^2 \\ \delta^2 & \delta & 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho \end{pmatrix} \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= 6 \delta \rho + 4 \delta^2 \rho^2 + 2 \delta^3 \rho^3 + \delta^4 \rho^4 + 3 \\
&= (T-1) + \delta \rho \sum_{i=0}^{T-2} (T-1-i) \gamma^i + \delta \rho \sum_{i=0}^{T-1} (T-1-i) \gamma^i \quad \text{où } \gamma = \delta \rho \\
&= (T-1_{-0} \text{ quand } T \rightarrow \infty) \delta \rho \sum_{i=0}^{T-2} (T\gamma^i - \gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty - i\gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty) \\
&\quad + \delta \rho \sum_{i=0}^{T-1} (T\gamma^i - \gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty - i\gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

voir note 2.

$$\therefore \frac{\rho^{*2}}{T} E(X^T u u_{-1}^T X_{-1}) = \sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^{*2} \left[ 1 + \frac{2 \delta \rho}{(1 - \delta \rho)} \right]$$

$$10.2.1) \quad \frac{-\rho^*}{T} E(X^T u_{-1} u^T X) = 10.1.2)$$

$$10.2.2) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(X^T u_{-1} u_{-1}^T X) = \sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^{*2} \left[ 1 + \frac{2 \delta \rho}{(1 - \delta \rho)} \right] \quad \text{voir } 10.1.1)$$

$$\begin{aligned}
10.2.3) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(X^T u_{-1} u^T X_{-1}) &= \frac{\rho^{*2}}{T} \text{tr} E(X_{-1} X^T u_{-1} u^T) \\
&= \frac{\rho^{*2}}{T} \text{tr} (\sigma_u^2 \sigma_X^2 \Xi^{*T} \Omega^{*T})
\end{aligned}$$

où pour  $T=4$ , nous avons :

$$\text{tr} (\Xi^{*T} \Omega^{*T}) = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \delta & \delta^2 & \delta^3 & \delta^4 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ \delta & 1 & \delta & \delta^2 \\ \delta^2 & \delta & 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\delta\rho + 3\delta^2 + 2\delta^3\rho + \delta^4\rho^2 + 3\rho^2 + 2\delta\rho^3 + \delta^2\rho^4 \\
&= T\delta\rho + (\delta^2 + \rho^2)(3 + 2\delta\rho + \delta^2\rho^2) \\
&= T\gamma + (\delta^2 + \rho^2) \sum_{i=0}^{T-2} (T-1-i)\gamma^i \quad \text{où } \gamma = \delta\rho \\
&= T\gamma + (\delta^2 + \rho^2) \sum_{i=0}^{T-2} (T\gamma^i - \gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty - i\gamma_{-0}^i \text{ quand } T \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

voir note 2.

$$\therefore \frac{\rho^{*2}}{T} E(X^T u_{-1} u_{-1}^T X_{-1}) = \sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^{*2} \left[ \delta\rho + \frac{(\delta^2 + \rho^2)}{(1 - \delta\rho)} \right]$$

$$10.2.4) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(X^T u_{-1} u_{-1}^T X_{-1}) = \frac{-\sigma_u^2 \sigma_X^2 \rho^{*3} (\delta + \rho)}{(1 - \delta\rho)} \quad \text{voir 10.1.2)}$$

$$10.3.1) \quad \frac{\beta^2}{T} E(v^T X X^T v) = \sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \quad \text{comme 10.1.1) sauf que } \alpha = 0$$

$$10.3.2) \quad \frac{-\rho^* \beta^2}{T} E(v^T X X_{-1}^T v) = -\sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \rho^* \rho \quad \text{comme 10.1.2) sauf que } \alpha = 0$$

$$10.3.3) \quad \frac{-\rho^* \beta^2}{T} E(v^T X X^T v_{-1}) = -\sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \rho^* \rho \quad \text{comme 10.1.2) sauf que } \alpha = 0$$

$$10.3.4) \quad \frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(v^T X X_{-1}^T v_{-1}) = \sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \rho^{*2} \quad \text{comme 10.1.4) sauf que } \alpha = 0$$

$$10.4.1) \quad \frac{1}{T} E(v^T u u^T v) = \sigma_u^2 \sigma_v^2 \quad \text{comme 10.1.1) sauf que } \alpha = 0$$

$$10.4.2) \quad \frac{-\rho^*}{T} E(v^T u u_{-1}^T v) = -\sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^* \rho \quad \text{comme 10.1.2) sauf que } \alpha = 0$$

- 10.4.3)  $\frac{-\rho^*}{T} E(v^T u u_{-1}^T v_{-1}) = -\sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^* \rho$  comme 10.1.2) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.4.4)  $\frac{\rho^{*2}}{T} E(v^T u u_{-1}^T v_{-1}) = \sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^{*2}$  comme 10.1.4) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.5.1)  $\frac{-\rho^* \beta^2}{T} E(v^T X_{-1} X_{-1}^T v) = -\sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \rho^* \rho$  comme 10.1.2) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.5.2)  $\frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(v^T X_{-1} X_{-1}^T v) = \sigma_v^2 \sigma_X^2 \rho^{*2} \beta^2$  comme 10.1.1) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.5.3)  $\frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(v^T X_{-1} X_{-1}^T v_{-1}) = \sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \delta^2 \rho^{*2}$  comme 10.2.3) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.5.4)  $\frac{-\rho^{*3} \beta^2}{T} E(v^T X_{-1} X_{-1}^T v_{-1}) = -\sigma_v^2 \sigma_X^2 \beta^2 \rho^{*3} \delta$  comme 10.1.2) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.6.1)  $\frac{-\rho^*}{T} E(v^T u_{-1} u_{-1}^T v) = -\sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^* \rho$  comme 10.1.2) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.6.2)  $\frac{\rho^{*2}}{T} E(v^T u_{-1} u_{-1}^T v) = \sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^{*2}$  comme 10.1.1) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.6.3)  $\frac{\rho^{*2}}{T} E(v^T u_{-1} u_{-1}^T v_{-1}) = \sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^{*2} \rho^2$  comme 10.2.3) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.6.4)  $\frac{-\rho^{*3}}{T} E(v^T u_{-1} u_{-1}^T v_{-1}) = -\sigma_u^2 \sigma_v^2 \rho^{*3} \rho$  comme 10.1.2) sauf que  $\alpha = 0$
- 10.7.1)  $\frac{-\rho^*}{T} E(X_{-1}^T u u^T X) = 10.1.2)$
- 10.7.2)  $\frac{\rho^{*2}}{T} E(X_{-1}^T u u_{-1}^T X) = 10.2.3)$
- 10.7.3)  $\frac{\rho^{*2}}{T} E(X_{-1}^T u u^T X_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.1.1)$

$$10.7.4) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(X_{-1}^T u u_{-1}^T X_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.1.2)$$

$$10.8.1) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(X_{-1}^T u_{-1} u^T X) = 10.1.4)$$

$$10.8.2) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(X_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T X) = 10.2.4)$$

$$10.8.3) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(X_{-1}^T u_{-1} u^T X_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.1.2)$$

$$10.8.4) \quad \frac{\rho^{*4}}{T} E(X_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T X_{-1}) = \rho^{*4} \times 10.1.1)$$

$$10.9.1) \quad \frac{-\rho^{*} \beta^2}{T} E(v_{-1}^T X X^T v) = 10.3.3)$$

$$10.9.2) \quad \frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(v_{-1}^T X X_{-1}^T v) = 10.5.3)$$

$$10.9.3) \quad \frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(v_{-1}^T X X^T v_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.3.1)$$

$$10.9.4) \quad \frac{-\rho^{*3} \beta^2}{T} E(v_{-1}^T X X_{-1}^T v_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.3.2)$$

$$10.10.1) \quad \frac{-\rho^{*}}{T} E(v_{-1}^T u u^T v) = 10.4.3)$$

$$10.10.2) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(v_{-1}^T u u_{-1}^T v) = 10.6.3)$$

$$10.10.3) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(v_{-1}^T u u^T v_{-1}) = 10.6.2)$$

$$10.10.4) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(v_{-1}^T u u_{-1}^T v_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.4.2)$$

$$10.11.1) \quad \frac{\rho^{*2} \beta^2}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T X_{-1} X^T \mathbf{v}) = 10.3.4)$$

$$10.11.2) \quad \frac{-\rho^{*3} \beta^2}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T X_{-1} X_{-1}^T \mathbf{v}) = 10.5.4)$$

$$10.11.3) \quad \frac{-\rho^{*3} \beta^2}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T X_{-1} X^T \mathbf{v}_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.3.2)$$

$$10.11.4) \quad \frac{\rho^{*4} \beta^2}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T X_{-1} X_{-1}^T \mathbf{v}_{-1}) = \rho^{*4} \times 10.3.1)$$

$$10.12.1) \quad \frac{\rho^{*2}}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T u_{-1} u^T \mathbf{v}) = 10.4.4)$$

$$10.12.2) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T \mathbf{v}) = 10.6.4)$$

$$10.12.3) \quad \frac{-\rho^{*3}}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T u_{-1} u^T \mathbf{v}_{-1}) = \rho^{*2} \times 10.6.1)$$

$$10.12.4) \quad \frac{\rho^{*4}}{T} E(\mathbf{v}_{-1}^T u_{-1} u_{-1}^T \mathbf{v}_{-1}) = \rho^{*4} \times 10.4.1)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E(\Lambda_4 \Lambda_4^T) = & \frac{1}{D_3^2 T} \left\{ \frac{\sigma_u^2 \sigma_x^2}{(1-\delta\rho)} (1 + \delta\rho - 2\rho^* \rho - 2\rho^* \delta + \rho^{*2} + \rho^{*2} \delta \rho - \rho^* \rho - \rho^* \delta + \rho^{*2} + \rho^{*2} \delta \rho \right. \\ & + \rho^{*2} (\rho^2 + \delta^2) + \rho^{*2} \delta \rho - \rho^{*3} \rho - \rho^{*3} \delta - \rho^* \rho - \rho^* \delta + \rho^{*2} (\rho^2 + \delta^2) + \rho^{*2} \delta \rho + \rho^{*2} + \rho^{*2} \delta \rho \\ & - \rho^{*3} \rho - \rho^{*3} \delta + \rho^{*2} + \rho^{*2} \delta \rho - 2\rho^{*3} \rho - 2\rho^{*3} \delta + \rho^{*4} + \rho^{*4} \delta \rho - 2\rho^{*2} \delta^2 \rho^2) \\ & + \sigma_u^2 \sigma_x^2 \beta^2 (1 - 2\rho^* \delta + \rho^{*2} - \rho^* \delta + \rho^{*2} + \rho^{*2} \delta^2 - \rho^{*3} \delta - \rho^* \delta + \rho^{*2} \delta^2 + \rho^{*2} - \rho^{*3} \delta + \rho^{*2} - 2\rho^{*3} \delta + \rho^{*4}) \\ & \left. + \sigma_u^2 \sigma_v^2 (1 - 2\rho^* \rho + \rho^{*2} - \rho^* \rho + \rho^{*2} + \rho^{*2} \rho^2 - \rho^{*3} \rho - \rho^* \rho + \rho^{*2} \rho^2 + \rho^{*2} - \rho^{*3} \rho + \rho^{*2} - 2\rho^{*3} \rho + \rho^{*4}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore E(\Lambda_4 \Lambda_4^T) &= \frac{1}{D_3^2 T} \left\{ \frac{\sigma_x^2 \sigma_u^2}{(1-\delta\rho)} \times [1 + \delta\rho - 4\rho^*(\delta + \rho) + \rho^{*2}(4 + 6\delta\rho - 2\delta^2\rho^2 + 2\delta^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\rho^2) - 4\rho^{*3}(\delta + \rho) + \rho^{*4}(1 + \delta\rho)] + \beta^2 \sigma_v^2 \sigma_x^2 \right. \\
&\quad \times [1 - 4\delta\rho^* + \rho^{*2}(4 + 2\delta^2) - 4\delta\rho^{*3} + \rho^{*4}] + \sigma_u^2 \sigma_v^2 \\
&\quad \left. \times [1 - 4\rho^*\rho + \rho^{*2}(4 + 2\rho^2) - 4\rho^{*3}\rho + \rho^{*4}] \right\}
\end{aligned}$$

Finalemment, l'approximation asymptotique de  $E(\Lambda_1 \Lambda_2^T)$  est obtenu en dérivant :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \text{asy}E(\Lambda_4 \Lambda_2^T)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \text{asy}E(\Lambda_4 \Lambda_2^T) = \text{asy}E \left[ \Lambda_7 \left( \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1}) / T}{(\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1})^T (\tilde{X} - \rho^* \tilde{X}_{-1}) / T} - \beta \right) \right]$$

où  $\Lambda_7$  est défini à la page 11. L'intérieur des parenthèses a la même distribution asymptotique que :

$$\text{asy}E \left[ \frac{\Lambda'_7}{D_3} \left( \frac{\beta (X - \rho^* X_{-1})^T (X - \rho^* X_{-1}) / T}{D_3} - \beta \right) \right] \quad \text{où } \Lambda'_7 \text{ est défini à la page 12.}$$

et par inspection de ce terme nous constatons que:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \text{asy} E(\Lambda_4 \Lambda_2^T) = E(\Lambda_1 \Lambda_2^T) = 0$$

Donc

$$MSE(\beta^{--}) = \left[ \frac{\beta \sigma_x^2 (1 + \rho^{*2} - 2\rho^* \delta)}{D_3} - \beta \right]^2 + E(\Lambda_4 \Lambda_4^T)$$

