

Université de Montréal

**Problèmes de premier passage et de commande
optimale pour des chaînes de Markov à temps
discret**

par

Moussa Kounta

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

mars 2013

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Problèmes de premier passage et de commande
optimale pour des chaînes de Markov à temps
discret**

présentée par

Moussa Kounta

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Louis-Pierre Arguin

(président-rapporteur)

Mario Lefebvre

(directeur de recherche)

Sabin Lessard

(membre du jury)

Lea Popovic

(examineur externe)

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

Date d'acceptation

SOMMAIRE

Nous considérons des processus de diffusion, définis par des équations différentielles stochastiques, et puis nous nous intéressons à des problèmes de premier passage pour les chaînes de Markov en temps discret correspondant à ces processus de diffusion. Comme il est connu dans la littérature, ces chaînes convergent en loi vers la solution des équations différentielles stochastiques considérées. Notre contribution consiste à trouver des formules explicites pour la probabilité de premier passage et la durée de la *partie* pour ces chaînes de Markov à temps discret. Nous montrons aussi que les résultats obtenus convergent selon la métrique euclidienne (i.e topologie euclidienne) vers les quantités correspondantes pour les processus de diffusion.

En dernier lieu, nous étudions un problème de commande optimale pour des chaînes de Markov en temps discret. L'objectif est de trouver la valeur qui minimise l'espérance mathématique d'une certaine fonction de coût. Contrairement au cas continu, il n'existe pas de formule explicite pour cette valeur optimale dans le cas discret. Ainsi, nous avons étudié dans cette thèse quelques cas particuliers pour lesquels nous avons trouvé cette valeur optimale.

Mots clés : Chaînes de Markov en temps discret, mathématiques financières, processus de diffusion, problèmes d'absorption, équations aux différences, processus de Wiener, fonctions spéciales, contrôle optimal, principe d'optimalité.

SUMMARY

We consider diffusion processes, defined by stochastic differential equations, and then we focus on first passage problems for Markov chains in discrete time that correspond to these diffusion processes. As it is known in the literature, these Markov chains converge in distribution to the solution of the stochastic differential equations considered. Our contribution is to obtain explicit formulas for the first passage probability and the duration of the *game* for the discrete-time Markov chains. We also show that the results obtained converge in the Euclidean metric to the corresponding quantities for the diffusion processes.

Finally we study an optimal control problem for Markov chains in discrete time. The objective is to find the value which minimizes the expected value of a certain cost function. Unlike the continuous case, an explicit formula for this optimal value does not exist in the discrete case. Thus we study in this thesis some particular cases for which we found this optimal value.

Key Words : Discrete-time Markov chains, financial mathematics, diffusion processes, absorption problems, difference equations, Wiener process, special functions, optimal control, principle of optimality.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Remerciements	1
Introduction	3
Chapitre 1. Préliminaires	7
1.1. Processus stochastiques	7
1.2. Martingale, processus de Markov et probabilités de transition en temps continu.....	7
1.2.1. Martingales	8
1.2.2. processus de Markov et probabilités de transition.....	9
1.3. Processus de Markov à temps discret.....	10
1.3.1. Noyau de transition	10
1.3.2. Propriété de Markov faible	12
1.4. Équations différentielles stochastiques et approximations binomiales simples	13
1.5. Équations différentielles stochastiques.....	13
1.5.1. Mouvement Brownien géométrique	14
1.5.2. Équations aux différences non homogènes	16
1.5.3. Solution particulière d'une équation aux différences non homogènes	

1.5.4.	La transformée en Z	21
1.5.5.	La transformée en Z inverse	21
1.5.6.	Problèmes de premier passage	22
1.6.	Approximations binomiales simples	24
1.6.1.	Convergence d'une Chaîne de Markov vers un processus de diffusion	24
1.6.2.	Approximation binomiale d'un processus de diffusion	27
1.7.	Simplification des calculs par la transformée en X	31
1.8.	Le processus CIR	33
1.9.	conclusion	36
Chapitre 2. Problème de premier passage des chaînes de Markov qui convergent vers le mouvement Brownien géométrique		37
2.1.	Introduction	37
2.2.	Calcul de la probabilité p_j	47
2.3.	Calcul du nombre moyen d_j de transitions nécessaires pour finir le jeu	55
2.3.1.	Cas spécial : $\mu = 0$	57
2.4.	Conclusion	67
Chapitre 3. Une version discrète du processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR)		69
3.1.	Calcul des probabilités p_j	70
3.1.1.	Calcul de p_j dans le cas où $\Delta x = 1$	75
3.1.2.	Calcul de p_j dans le cas où $\Delta x > 0$	77
3.2.	Calcul du nombre de transitions nécessaires d_j pour finir le jeu ..	81
3.2.1.	Le cas où $\Delta x = 1$	82
3.2.2.	Le cas où $\Delta x > 0$	84

3.3. Conclusion.....	88
Chapitre 4. Commande optimale stochastique en temps discret.....	89
4.1. Introduction	89
4.2. programmation dynamique.....	91
4.2.1. Formule générale.....	92
4.3. Maximiser le temps de survie	93
4.4. Réduire au minimum le temps passé dans la région de continuation 98	
4.5. Un problème avec u_0^* non constant.....	102
4.6. Conclusion.....	106
Chapitre 5. Conclusion.....	109

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu mon directeur, le professeur Mario Lefebvre. Je tiens également à lui exprimer ma profonde gratitude pour ses conseils et son aide qui m'ont permis d'effectuer cette thèse dans les meilleures conditions possibles.

Je remercie aussi la directrice du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal, la professeure Véronique Hussin, pour son soutien financier et son aide. J'exprime toute ma reconnaissance aux professeurs : Sabin Lessard, Louis-Pierre Arguin et Lea Popovic, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter ce travail. Je leur suis également très reconnaissant pour les nombreuses remarques et suggestions qu'ils m'ont apportées.

Au moment où s'achève l'écriture de ce manuscrit, j'aurai passé presque quatre années au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal. Mes remerciements vont à Messieurs les professeurs Khalid Benabdallah et Louis-Pierre Arguin pour leur disponibilité ainsi qu'à l'ensemble des professeurs qui m'ont enseigné durant mes études à l'Université de Montréal. Merci à tous mes collègues doctorants. Je remercie aussi Mme Anne-Marie Dupuis, Mme Julie Collette et l'ensemble du corps administratif du département de mathématiques et de statistique pour les divers services que j'ai reçus de leur part et pour leur appui et coopération.

Merci également à la Faculté des études supérieures pour leur appui financier. J'adresse mes remerciements à mon père, ma mère ainsi qu'à toute ma famille et mes amis, qui, de près comme de loin m'ont aidé et encouragé aux moments

2

opportuns.

INTRODUCTION

La théorie des processus stochastiques étudie des systèmes qui se développent dans le temps ou l'espace, conformément aux lois probabilistes. Elle a beaucoup d'applications dans de nombreuses branches de la science et la technologie, notamment en physique, en informatique et en finance ; la liste est loin d'être exhaustive.

Un processus stochastique en temps discret est habituellement représenté par une équation aux différences stochastiques définissant une marche aléatoire simple. L'analogie en temps continu est une équation différentielle stochastique.

Le travail présenté dans cette thèse porte sur des problèmes de premier passage pour des chaînes de Markov à temps discret. Les problèmes de premier passage pour les chaînes de Markov ont de nombreuses applications : par exemple, dans des réseaux neuronaux, une quantité importante est le temps entre les pics, qui est le temps entre les pointes d'un neurone qui *fait feu*, ce qui signifie que le neurone envoie un signal aux autres neurones. Les chaînes de Markov en temps discret ont été utilisées comme modèles dans ce contexte, et le temps entre les pics est le nombre d'étapes que prend la chaîne pour atteindre le seuil à partir duquel se produit le tir.

En mathématiques financières, les processus stochastiques sont utilisés pour modéliser le prix des actions. Il n'est pas très difficile d'avoir l'expression de la probabilité et de la durée du temps de premier passage connaissant l'équation différentielle stochastique qui décrit le processus. Cependant, dans la pratique, le prix des actions ou des matières premières ne varie pas complètement continuellement dans le temps. Ainsi, pour avoir les expressions de la probabilité et

de la durée du temps de premier passage, nous construisons la chaîne de Markov, qui est la version discrète du processus de diffusion, à partir de l'équation différentielle, et cette chaîne converge faiblement vers la solution de l'équation différentielle considérée. Nous calculons explicitement les probabilités de premier passage et la durée, ce qui nous donne une expression plus fiable des probabilités et de la durée, d'une part, et, d'autre part, comme la chaîne converge simplement l'erreur commise est mieux maîtrisée.

Cette thèse est structurée en trois chapitres comme suit :

- (1) Le premier chapitre porte sur des rappels de certains théorèmes qui sont utiles pour la suite de la thèse.
- (2) Dans le deuxième chapitre, nous considérons le mouvement brownien géométrique $\{X(t), t \geq 0\}$ défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dB(t), \quad (0.0.1)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $\{B(t), t \geq 0\}$ est le mouvement brownien standard. En posant $X(0) = x \in (1, N)$, où $N \in \mathbb{N}$ soit

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = 1 \text{ ou } N \mid X(0) = x\}. \quad (0.0.2)$$

Comme il est bien connu dans la littérature (voir le chapitre 1), la probabilité $p(x) := P[X[\tau(x)] = N]$ et la durée moyenne $m(x) := E[\tau(x)]$ vérifient certaines équations différentielles dont la résolution est directe. Avec la variance infinitésimale et la dérive de l'équation 0.0.1, nous construisons une chaîne de Markov en temps discret avec espace des états :

$$\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x\}$$

qui converge faiblement vers la solution de l'équation différentielle 0.0.1. Notre contribution consiste à prendre la chaîne de Markov ainsi construite, calculer explicitement les probabilités p_j que la chaîne, commençant en $1 + j\Delta x$, va frapper N avant 1; de même nous calculons le nombre moyen de transitions nécessaires, d_j , où $n = 1 + j\Delta x$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$,

quand $\Delta x = 1$ dans un premier temps. Et puis nous montrons que lorsque $\Delta x \neq 0$, alors $\lim_{\Delta x \downarrow 0} p_n = P[X[\tau(x)] = N]$; de même, $\lim_{\Delta x \downarrow 0} d_n = E[\tau(x)]$.

- (3) Dans le troisième chapitre, nous effectuons le même travail que dans le chapitre 2 en considérant le processus de diffusion Cox-Ingersoll-Ross (CIR).
- (4) En dernier lieu, nous étudions un problème de commande optimale pour des chaînes de Markov en temps discret. Plus précisément, nous considérons la chaîne définie par :

$$X_{n+1} = X_n + u_n + \epsilon_n \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots,$$

où u_n est la commande, et les ϵ_n , $n = 0, 1, \dots$, sont des variables aléatoires indépendantes.

L'objectif est de trouver la valeur u_n^* de u_n qui minimise l'espérance mathématique d'une certaine fonction de coût. Contrairement au cas continu, il n'existe pas de formule explicite pour u_n^* . Ainsi, nous avons étudié dans cette thèse quelques cas particuliers pour lesquels nous avons obtenu la valeur de u_n^* .

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1. PROCESSUS STOCHASTIQUES

[?]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, et un intervalle $\mathcal{T} = [0, T]$ de \mathbb{R} (ou $\mathcal{T} = [0, \infty)$) qu'on munit de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ Un processus stochastique peut être défini comme étant une famille paramétrisée $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ de variables $X_t : \Omega \rightarrow E$

telle que l'application :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} \times \Omega, \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{F}) &\longrightarrow E \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

soit mesurable. $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ étant la tribu des boréliens de \mathcal{T}

$X(t; \omega)$ peut être vue de deux manières possibles :

$X(t, \omega) = X_t(\omega)$: pour t fixé est alors une variable aléatoire.

$X(t, \omega) = X_{\omega}(t)$: pour ω fixé est une trajectoire. On dira que le processus X est continu si toutes ses trajectoires sont continues

1.2. MARTINGALE, PROCESSUS DE MARKOV ET PROBABILITÉS DE TRANSITION EN TEMPS CONTINU

(Voir D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan [?].)

Dans ce chapitre nous avons les notations suivantes :

$$\psi \in (\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)} = \{\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi \text{ fonction continue}\}.$$

$-\psi(t)$ est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}$ donnant la position de ψ au temps t .

$-E$ est un ensemble de points non vide q .

$-\mathcal{F}$ est un σ -algèbre de sous ensembles de E , et $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ est une famille non décroissante de sous σ -algèbre de \mathcal{F} .

(1) Pour $s \geq 0$ une application $\theta : [s, \infty) \rightarrow (X, D)$ où (X, D) est un espace métrique séparable, nous allons dire que θ est **continue à droite** si $\theta(., q)$ est continue à droite pour tout $q \in E$.

(2) Si \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{F}) $\theta : [s, \infty) \rightarrow X$, nous allons dire que θ est **\mathbb{P} -presque sûrement continue à droite** si il existe un ensemble négligeable $N \in \mathcal{F}$ tel que $\theta(., q)$ est continue à droite pour $q \notin N$

(3) Soit $\theta : [s, \infty) \rightarrow M$ où M espace mesurable, θ est dit **progressivement mesurable par rapport** $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ après le temps s si pour tout $t \geq s$ la restriction de θ à $[s, t] \times E$ est $\mathcal{B}_{[s,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable

1.2.1. Martingales

Définition 1.2.1. Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{F}) , $s \geq 0$, et $\theta : [s, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, nous dirons que $(\theta(t), \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est une **martingale après le temps s** si θ est progressivement mesurable, θ une fonction \mathbb{P} -presque sûrement continue à droite telle que $\theta(t, .)$ est \mathbb{P} -intégrable pour tout $t \geq s$ et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\theta(t_2) | \mathcal{F}_{t_1}] = \theta(t_1) \quad \mathbb{P}.p.s \quad s \leq t_1 < t_2$$

Le triplet $(\theta(t), \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est appelé sous martingale après le temps s si θ une fonction à valeur réelle progressivement mesurable, \mathbb{P} -presque sûrement continue à droite telle que $\theta(t)$ est \mathbb{P} -intégrable pour $t \geq s$ et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\theta(t_2) | \mathcal{F}_{t_1}] \geq \theta(t_1) \quad \mathbb{P}.p.s \quad s \leq t_1 < t_2$$

1.2.2. processus de Markov et probabilités de transition

Ici $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ désigne le tribu de Borel des sous-ensembles de \mathbb{R}^d . **La probabilité de transition d'une fonction** $P(s; x; t, \Gamma)$, $0 \leq s < t$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ est une mesure de probabilité, satisfaisant :

- (1) $P(s, x, t, \cdot)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ pour tout $0 \leq s < t$ et $x \in \mathbb{R}^d$,
- (2) $P(s, \cdot, t, \Gamma)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ mesurable pour $0 \leq s < t$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$,
- (3) si $0 \leq s < t < u$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, alors

$$P(s, x; u, \Gamma) = \int P(t, y; u, \Gamma) P(s, x; t, dy). \quad (1.2.1)$$

L'équation 1.2.1 est appelée équation de **Chapman-Kolmogorov**.

Définition 1.2.2. Soit $P(s; x; t, \Gamma)$ une fonction de probabilité de transition et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$. Une mesure de probabilité \mathbb{P} sur $(\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}}$ est appelée **processus de Markov** avec fonction de transition $P(s, x; t, \cdot)$ et distribution initiale μ si :

(1)

$$\mathbb{P}(\psi(0) \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$$

pour tout $0 \leq s < t$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$,

(2)

$$\mathbb{P}(\psi(t) \in \Gamma \mid \sigma[\psi(u) : 0 \leq u \leq s]) = P(s, \psi(s); t, \Gamma)$$

(presque sûrement \mathbb{P}) Si $P(s, x; t, \cdot) = P(t - s, x, \cdot)$, le processus de Markov correspondant est dit homogène par rapport au temps.

Remarque 1.2.1. Un processus stochastique markovien à temps continu et à état continu, $\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ (si elles existent), est complètement déterminé par sa fonction de densité (si elle existe) du premier ordre :

$$f(x; t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}[X(t) \leq x]$$

et par sa fonction de densité de transition conditionnelle, définie par :

$$p(x, x_0; t, t_0) = f_{X(t)|X(t_0)}(x \mid x_0) \quad (1.2.2)$$

$$= \lim_{dx \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}[X(t) \in (x, x + dx] \mid X(t_0) = x_0]}{dx} \quad (1.2.3)$$

pour $t > t_0$.

Définition 1.2.3. Soit $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\{\mathcal{F}_t : t \leq 0\}$ une famille décroissante de sous σ -algèbre de \mathcal{F} . Pour $s \geq 0$ et $\beta : [0, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$, nous allons dire que $(\beta(t), \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est **un s -mouvement Brownien de dimension d** si :

- (1) β est continue à droite et progressivement mesurable après le temps s
- (2) β est \mathbb{P} -presque sûrement continue,
- (3) $\mathbb{P}(\beta(t)) = 0$ pour $0 \leq t \leq s) = 1$,
- (4) pour tout $s \leq t_1 < t_2$ et $\Gamma \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$

$$\mathbb{P}(\beta(t_2) \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{t_1}) = \int_{\Gamma} g_d(t_2 - t_1, y - \beta(t_1)) dy \quad \text{p.s.} - \mathbb{P}$$

où $g_d = \frac{1}{2\pi s} e^{-|x|^2/2s}$ Si $s = 0$, nous allons appeler $(\beta(t), \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un mouvement Brownien.

Définition 1.2.4. La **moyenne infinitésimale** $m(x; t)$ et la **variance infinitésimale** $v(x, t)$ du processus stochastique à temps continu et à état continu $\{X(t, s), t \in T\}$ sont définies respectivement par :

$$m(x; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} \{[X(t + \Delta t) - X(t)] \mid X(t) = x\}}{\Delta t},$$

$$v(x; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[V\{X(t + \Delta t) - X(t)\} \mid X(t) = x]}{\Delta t}.$$

1.3. PROCESSUS DE MARKOV À TEMPS DISCRET

1.3.1. Noyau de transition

Définition 1.3.1. Étant donné un ensemble fini ou infini dénombrable S , on appelle **noyau de transition sur S** toute application :

$$p : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que, pour tout $x \in S$, $p(x, \cdot)$ est une loi de probabilité sur S .

Définition 1.3.2. Étant donné un ensemble fini ou infini dénombrable S , une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans S est appelée **chaîne de Markov d'espace d'états S** lorsqu'il existe une

famille de noyaux de transition $(p_n(\cdot, \cdot))_{n \geq 0}$ et une loi de probabilité ν sur \mathcal{S} tels que, pour toute suite x_0, x_1, \dots d'éléments de \mathcal{S} :

$$\mathbb{P}((X_0, X_1, \dots, X_n) = (x_0, x_1, \dots, x_n)) = \nu(x_0) \prod_{i=0}^{n-1} p_i(x_i, x_{i+1}).$$

On dit alors que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale ν et de famille de noyaux de transition $(p_n(\cdot, \cdot))_{n \geq 0}$.

Remarque 1.3.1. La loi de la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est complètement déterminée par la donnée de la loi initiale et de la famille de noyaux de transition.

Nous adoptons la notation suivante.

Notation :

$$x_{m:n} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

Proposition 1.3.1. Etant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur un ensemble fini ou infini dénombrable \mathcal{S} défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour tous $n \geq 0$ et $n \geq m + 1$, et toute suite x_0, \dots, x_n d'éléments de \mathcal{S} telle que $\mathbb{P}(X_{0:m} = x_{0:m}) > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{m+1:n} = x_{m+1:n} \mid X_{0:m} = x_{0:m}) &= \mathbb{P}(X_{m+1:n} = x_{m+1:n} \mid X_m = x_m) \\ &= p_m(x_m, x_{m+1}) \dots p_{n-1}(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Définition 1.3.3. Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ dont l'espace des états \mathcal{S} est fini ou infini dénombrable est une **chaîne de Markov stationnaire** (ou **homogène par rapport au temps**) si :

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_{0:n} = i_{0:n}] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = p_{i,j},$$

pour tous les états $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n = i, j$ et pour tout $n \geq 0$.

La matrice des probabilités de transition en une étape de la chaîne de Markov est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \dots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

où $p_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1 \quad \forall i$.

Notation : La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes (ou transitions) est donnée par :

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}[X_{m+n} = j \mid X_m = i].$$

1.3.2. Propriété de Markov faible

(1) Temps d'atteinte d'une classe

Définition 1.3.4. *Étant donnée une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de distribution initiale μ et de matrice de transition P , si \mathcal{A} est un sous-ensemble de S , la variable aléatoire $\tau_{\mathcal{A}}$ définie par*

$$\tau_{\mathcal{A}}(\omega) = \inf \{n \geq 0, X_n(\omega) \in \mathcal{A}\}$$

pour $\omega \in \Omega$, est appelée temps d'atteinte de \mathcal{A} .

Notons la probabilité d'atteindre un état de \mathcal{A} depuis i par :

$$p_{\mathcal{A}|i} = \mathbb{P}(\tau_{\mathcal{A}} < \infty \mid X_0 = i)$$

et

$$d_{\mathcal{A}|i} = \mathbb{E}(\tau_{\mathcal{A}} \mid X_0 = i)$$

le temps moyen d'atteinte de la classe \mathcal{A} à partir de i .

Remarque 1.3.2. *Notons que ce temps moyen est infini si $p_{\mathcal{A}|i} < 1$*

Proposition 1.3.2. [?] *Le vecteur des probabilités $P_{\mathcal{A}} = (p_{\mathcal{A}|i})_{i \in S}$ est la solution minimale positive du système*

$$\begin{cases} p_{\mathcal{A}|i} = 1, & \text{si } i \in \mathcal{A}; \\ p_{\mathcal{A}|i} = \sum_{j \in I} p_{i,j} p_{\mathcal{A}|j} & \text{si } i \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Proposition 1.3.3. [?] *Le vecteur des temps moyen d'atteinte de la classe \mathcal{A} $d_{\mathcal{A}} = (d_{\mathcal{A}|i})_{i \in I}$ est la solution minimale positive du système*

$$\begin{cases} d_{\mathcal{A}|i} = 0, & \text{si } i \in \mathcal{A}; \\ d_{\mathcal{A}|i} = 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{i,j} d_{\mathcal{A}|j} & \text{si } i \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

(2) Convergence faible des probabilités

Proposition 1.3.4. [?] Soient Q_n et Q des probabilités sur $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k))$. On dit que Q_n **converge faiblement** vers Q et on note $Q_n \Rightarrow Q$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- (a) $\int f dQ_n \xrightarrow[n]{} \int f dQ$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.
- (b) $\int f dQ_n \xrightarrow[n]{} \int f dQ$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée.
- (c) $\int f dQ_n \xrightarrow[n]{} \int f dQ$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- (d) $\limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq Q(F)$ pour tout fermé F .
- (e) $\liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(O) \geq Q(O)$ pour tout ouvert O .
- (f) $Q_n(A) \xrightarrow[n]{} Q(A)$ pour tout borélien A dont la frontière ∂ est de Q -mesure nulle.

1.4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET APPROXIMATIONS BINOMIALES SIMPLES

1.5. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Motivation Nous considérons l'exemple du livre [?] qui nous donne une application en finance.

Exemple 1.5.1. Un capital investi a une valeur $X(t)$ à l'instant t . S'il est investi dans un actif sans risque, il évolue selon l'équation différentielle

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t),$$

où $\alpha > 0$ est le taux d'intérêt. Mais s'il est investi dans un actif risqué, ou si le taux d'intérêt fluctue, l'évolution de la valeur X n'est qu'approximativement gouvernée par cette équation, que l'on doit corriger par un terme aléatoire décrivant les facteurs extérieurs de risque et/ou les fluctuations. Par exemple :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) + X(t)N(t),$$

avec N un bruit blanc qui fait que le taux d'intérêt instantané $\alpha + N(t)$ est à présent fluctuant autour de sa valeur moyenne α . Plus précisément et de manière générale, le

bruit blanc devrait répondre aux exigences suivantes : les variables aléatoires réelles $N(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, sont indépendantes de même loi centrée.

Définition 1.5.1. Une équation différentielle stochastique (EDS) décrit l'incrément d'une variable, par exemple X , qui est entraînée par un ou plusieurs processus aléatoires sous-jacents. Ici ces sources de hasard sont le mouvement Brownien. Quand il y a un mouvement brownien, la spécification générale est de la forme

$$dX(t) = \mu[t, X(t)]dt + \sigma[t, X(t)]dB(t), \quad X(0) = X_0,$$

où μ et σ sont des fonctions continues de t et X .

Lemme 1.5.1. (Lemme d'Itô) Pour un processus de diffusion définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dy(t) = \mu(y(t), t)dt + \sigma(y(t), t)dB(t), \quad (1.5.1)$$

pour toute fonction $X(y, t)$ deux fois différentiable en y et une fois différentiable en t nous avons :

$$\begin{aligned} dX(y(t), t) = & \left(\mu(y(t), t) \frac{\partial X(y(t), t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(y(t), t)}{\partial y^2} + \frac{\partial X(y(t), t)}{\partial t} \right) dt \\ & + \left(\sigma(y(t), t) \frac{\partial X(y(t), t)}{\partial y} \right) dB(t). \end{aligned}$$

1.5.1. Mouvement Brownien géométrique

Définition 1.5.2. Un processus stochastique $Y(t)$ qui s'écrit de la forme

$$Y(t) = Y_0 \exp(\alpha t + \beta B_t),$$

où α, β des constantes est appelé mouvement Brownien géométrique.

Exemple 1.5.2.

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X_0 = \zeta > 0$$

En utilisant la règle de Itô en $\log X(t)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X(t)^2} \right)^2 (dX(t))^2, \\ &= \frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \\ &= \mu X(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt + \sigma dB(t), \\ \text{Log}X(t) &= \text{Log}X(0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t), \\ X(t) &= X_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi $X(t)$ est un mouvement Brownien géométrique.

Le mouvement Brownien est utilisé pour la modélisation de l'évolution de prix d'action (souvent appelé prix d'action dynamique) de la manière suivante :

Soit Δt un intervalle de temps $S(t)$ le prix d'action actuel au temps t et $S(t + \Delta t)$ le prix d'action du futur au temps $t + \Delta t$. Un modèle largement adopté pour la dynamique des prix d'actions, est :

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta B(t),$$

Où μ , σ des constantes. Cette équation aux différences stochastique nous informe sur le changement de prix d'action, par rapport à sa valeur actuelle au temps t .

Dans le cas où le temps est continu, le modèle ci-dessous devient une équation différentielle stochastique.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t),$$

qui est équivalent à

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB(t).$$

d'après l'exemple précédent :

$$S(t) = S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right],$$

d'où $S(t)$ mouvement Brownien.

1.5.2. Équations aux différences non homogènes

(Voir *An Introduction to Linear Difference Equations*, par Paul Batchelder [?].)

Considérons l'équation aux différences suivantes :

$$\Delta y(n) = \psi(n) \quad \text{avec} \quad \Delta y(n) = y(n+1) - y(n).$$

Nous allons noter par Δ^{-1} l'opérateur inverse de Δ ; plus précisément :

$$\Delta y(n) = \psi(n) \implies y(n) = \Delta^{-1}\psi(n).$$

Remarque 1.5.1. L'opérateur inverse Δ^{-1} de Δ correspond dans le cas continu à l'intégrale; autrement dit, si on a :

$$\frac{dy(x)}{dx} = \psi(x) \implies y(x) = \int \psi(x) dx.$$

Exemple 1.5.3.

$$\Delta^{-1}1 = n, \quad \Delta^{-1}\sin(n) = -\frac{\cos(n - \frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

1.5.3. Solution particulière d'une équation aux différences non homogènes

Soit

$$a_n(x)y(x+n) + a_{n-1}(x)y(x+n-1) + \dots + a_0(x)y(x) = b(x). \quad (1.5.2)$$

l'équation obtenue en posant $b(x) = 0$ est appelée **équation homogène associée**. La solution de l'équation 1.5.2 peut être obtenue à partir de l'équation non homogène par une méthode analogue à la variation des constantes des équations différentielles.

Soient $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ le système fondamental de solution associé à l'équation homogène 1.5.2.

Posons

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x).$$

Nous cherchons à trouver les fonctions $c_1(x), \dots, c_n(x)$ telles que $y(x)$ soit solution de 1.5.2. En remplaçant x par $x+1$ et $c_k(x+1) = c_k(x) + \Delta c_k(x)$, nous

avons :

$$y(x+1) = c_1(x)y_1(x+1) + c_2(x)y_2(x+1) + \dots + c_n(x)y_n(x+1) \\ + [\Delta c_1(x)y_1(x+1) + \Delta c_2(x)y_2(x+1) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+1)].$$

Supposons que les c_i sont telles que l'expression entre les crochets est identiquement nulle.

En remplaçant de nouveau x par $x+1$ sur 1.5.3 nous obtenons

$$y(x+2) = c_1(x)y_1(x+2) + c_2(x)y_2(x+2) + \dots + c_n(x)y_n(x+2) \\ + [\Delta c_1(x)y_1(x+2) + \Delta c_2(x)y_2(x+2) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+2)].$$

Nous supposons encore l'expression entre les crochets est identiquement nulle.

En continuant de cette manière, nous obtenons finalement :

$$y(x+n) = c_1(x)y_1(x+n) + c_2(x)y_2(x+n) + \dots + c_n(x)y_n(x+n) \\ + [\Delta c_1(x)y_1(x+n) + \Delta c_2(x)y_2(x+n) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+n)].$$

Pour cette équation (1.5.3) nous allons garder le terme entre les crochets. En multipliant les $n+1$ équations par $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ respectivement et en additionnant, tenant compte que les $y_i(x), i = 1, \dots, n$ sont des solutions de l'équation homogène associée à 1.5.2, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta c_1(x)y_1(x+1) + \Delta c_2(x)y_2(x+1) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+1) = 0 \\ \Delta c_1(x)y_1(x+2) + \Delta c_2(x)y_2(x+2) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+2) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Delta c_1(x)y_1(x+n) + \Delta c_2(x)y_2(x+n) + \dots + \Delta c_n(x)y_n(x+n) = \frac{b(x)}{a_n(x)}. \end{cases} \quad (1.5.3)$$

Le déterminant $D(x+1)$ (du système 1.5.3 dont les inconnues sont les $\Delta c_i(x)$), n'est pas identiquement nulle puisque les $y_i, i = 1, \dots, n$ forment un système fondamental de solutions. Ainsi en utilisant la méthode de Gausse Jordan (algèbre linéaire), nous obtenons l'unique solution $\Delta c_k(x) \quad k = 1, \dots, n$

$$\Delta c_k(x) = \frac{M_{nk}(x)}{D(x+1)} \frac{b(x)}{a_n(x)},$$

où $M_{nk}(x)$ est le cofacteur du dernier élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne de $D(x+1)$.

En passant par l'inverse, nous obtenons :

$$c_k(x) = \Delta^{-1} \frac{M_{nk}(x)}{D(x+1)} \frac{b(x)}{a_n(x)}.$$

Ainsi nous obtenons une solution particulière de 1.5.2 de la forme

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) \Delta^{-1} \frac{M_{nk}(x)}{D(x+1)} \frac{b(x)}{a_n(x)}.$$

Exemple 1.5.4. Soit

$$y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = n,$$

l'équation homogène $y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = 0$ à deux solutions linéairement indépendantes $1, 6^n$. En effet en remplaçant n par $n-2$ l'équation devient :

$$y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = 0. \quad (1.5.4)$$

En posant

$$X_n = \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n-1) \end{pmatrix}.$$

Alors 1.5.4 devient :

$$X_n = AX_{n-1} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après diagonalisation A devient :

$$A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous obtenons

$$X_n = A^{n-1} X_1 = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 - 6^n(-5) & -6 + 6^n \\ 1 + 5 \times 6^{n-1} & -6 + 6^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous obtenons les deux solutions linéairement indépendantes $1, 6^n$ Maintenant nous allons chercher la solution particulière.

On a :

$$D(n+1) = \begin{vmatrix} 1 & 6^{n+1} \\ 1 & 6^{n+2} \end{vmatrix},$$

nous avons $M_{21}(n) = -6^{n+1}$, $M_{22}(n) = 1$.

D'où :

$$\begin{aligned} y(n) &= \Delta^{-1} \left(\frac{-n6^{n+1}}{30 \times 6^n} \right) + 6^n \Delta^{-1} \left(\frac{n}{30 \times 6^n} \right), \\ &= -\frac{1}{5} \Delta^{-1} + \frac{6^n}{30} \Delta^{-1} \left(\frac{n}{6^n} \right), \\ &= -\frac{1}{5} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{6^n}{30} \left(-\frac{30n+6}{25 \times 6^n} \right), \\ &= -\frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{125}. \end{aligned}$$

Nous avons le cas spécial suivant :

Théorème 1.5.1. (Voir Batchelder [?].) Soit

$$y(n+1) - r_1(n)y(n) = r_2(n), \quad (1.5.5)$$

où $r_1(n), r_2(n)$ sont des fonctions rationnelles. Si y_1 est une solution de l'équation homogène 1.5.5, alors :

$$\eta(n) = y_1(n) \Delta^{-1} \frac{r_2(n)}{y_1(n+1)},$$

est une solution particulière de l'équation non homogène. Donc la solution générale de l'équation non homogène est de la forme :

$$y(n) = \eta(n) + p(n)y_1(n), \quad (1.5.6)$$

où $p(n)$ est une fonction rationnelle arbitraire dépendant des conditions initiales.

Proposition 1.5.1. À partir de 1.5.1, nous obtenons :

la solution symbolique rationnelle :

$$y_r(n) = y_1(n) \left\{ -\frac{r_2(n)}{y_1(n+1)} - \frac{r_2(n+1)}{y_1(n+2)} \cdots \right\},$$

et la solution symbolique linéaire :

$$y_l(n) = y_1(n) \left\{ +\frac{r_2(n-1)}{y_1(n)} + \frac{r_2(n-2)}{y_1(n-1)} \cdots \right\},$$

qui s'écrivent encore après simplification :

$$\begin{aligned} y_r(n) &= -\frac{r_2(n)}{r_1(n)} - \frac{r_2(n+1)}{r_1(n)r_1(n+1)} - \frac{r_2(n+2)}{r_1(n)r_1(n+1)r_1(n+2)} \cdots \\ y_l(n) &= r_2(n-1) + r_1(n-1)r_2(n-2) + r_1(n-1)r_1(n-2)r_2(n-3) \dots \end{aligned}$$

respectivement.

DÉMONSTRATION. Les formules 1.5.7, 1.5.7 découlent en remplaçant $\Delta_l^{-1}, \Delta_r^{-1}$ sur

$$\eta(n) = y_1(n) \Delta^{-1} \frac{r_2(n)}{y_1(n+1)},$$

D'autre part nous avons l'équation homogène

$$y_i(n+1) - r_1(n)y_i(n) = 0 \implies y_i(n) = r_1(n)y_i(n) \quad i = 1, 2.$$

□

Remarque 1.5.2. Nous obtenons les deux solutions particulières rationnelles et linéaires de la manière suivante :

On a

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) = \phi(x) \implies y(x) = \Delta^{-1} \phi(x),$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \phi(x-1) + y(x-1), \\ &= \phi(x-1) + \phi(x-2) + y(x-2), \\ &= \dots \quad \dots \quad \dots, \\ &= \phi(x-1) + \phi(x-2) + y(x-2) + \dots + \phi(x-n) + y(x-n). \end{aligned}$$

de manière similaire.

$$\begin{aligned} y(x) &= -\phi(x) + y(x+1), \\ &= -\phi(x) - \phi(x+1) + y(x+2), \\ &= \dots \quad \dots \quad \dots \\ &= -\phi(x) - \phi(x+1) - \dots - \phi(x+n) + y(x+n+1), \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons les deux séries suivantes :

$$y_l(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x-n), \quad y_r(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi(x+n).$$

Nous allons travailler davantage avec la solution rationnelle.

Nous allons faire un passage bref sur les transformées en Z et leurs inverses qui sont efficaces pour résoudre les équations aux différences.

1.5.4. La transformée en Z

Définition 1.5.3. La transformée en Z d'une suite $f(n)$ notée par $Z(f(n))$ ou $F(z)$ est définie par :

$$Z(f(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n},$$

lorsque la série converge.

Propriétés

(1) Linéarité :

$$Z(c_1f_1(n) + c_2f_2(n)) = c_1Z(f_1(n)) + c_2Z(f_2(n)),$$

(2) Translation :

$$Z(f(n+m)) = z^m \left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

1.5.5. La transformée en Z inverse

Soit $Z(f(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ avec rayon de convergence R , la Z transformée de f . Alors la transformée inverse est donnée par :

$$Z^{-1}(F(z)) = f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} F(z) dz,$$

où C une courbe fermée contenant le disque $|z| \leq R$.

Exemple 1.5.5. Résolvons l'équation aux différences suivantes :

$$2f(n) - f(n+1) - f(n+2) = c \quad \text{où } c = \text{constante},$$

on a par la translation :

$$Z(f(n+1)) = zF(z) \quad Z(f(n+2)) = z^2(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}),$$

et

$$Z(1) = \frac{z}{z-1}.$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{cz - z^2(z-1)f(0) - z(z-1)f(1)}{-z^2 - z + 2}, \\ &= \frac{z^3f(0) + (f(1) - f(0))z^2 + (f(1) + c)z}{(z-1)^2(z+2)}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(n) &= \text{Res}(z^{n-1}F(z); z = -2) + \text{Res}(z^{n-1}F(z); z = 1), \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)z^{n-1}F(z) + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 z^{n-1}F(z), \\ &= k_0 + k_1(-2)^n - \frac{c}{3}n \quad \text{où } k_0, k_1 \text{ des constantes.} \end{aligned}$$

1.5.6. Problèmes de premier passage

(voir Lefebvre [?] p. 248.)

Soit T_d la variable aléatoire qui désigne le temps que prend un mouvement brownien standard pour passer de $B(0) = 0$ à $B(t) = d \neq 0$, noté par :

$$T_d = \inf\{t > 0 : B(t) = d\}.$$

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion homogène par rapport au temps, dont les moyennes et variances infinitésimales sont $m(x)$ et $v(x)$. Sa fonction de densité de transition conditionnelle, $p(x, x_0; t, t_0)$, satisfait à :

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} + m(x_0) \frac{\partial p}{\partial x_0} + \frac{1}{2} v(x_0) \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2} = 0 \quad \text{équation « backward»}.$$

Si $t_0 = 0$, on peut utiliser le fait que le processus est homogène par rapport au temps, de sorte que :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} p(x, x_0; t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} p(x, x_0; t - t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} p(x, x_0; t - t_0),$$

pour écrire que :

$$\frac{1}{2} v(x_0) \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2} + m(x_0) \frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.5.7)$$

Soit $\rho(t; x_0)$ la fonction de densité de

$$T_{c,d} (= T_{c,d}(x_0)) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (c, d) \mid X(0) = x_0 \in [c, d]\},$$

C'est-à-dire que :

$$\rho(t; x_0) = \lim_{dt \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{T_{c,d} \in (t, t + dt] \mid X(0) = x_0 \in [c, d]\}}{dt},$$

On trouve que la fonction $\rho(t; x_0)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles 1.5.7. De plus, comme les coefficients $m(x_0)$ et $v(x_0)$ ne dépendent pas de t , on peut prendre la transformée de Laplace de l'équation pour la réduire à une équation différentielle ordinaire. Soit :

$$L(x_0; \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \rho(t; x_0) dt,$$

où α est une constante réelle positive.

On peut vérifier que la fonction $L(x_0; \alpha)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}v(x_0) \frac{\partial^2 L}{\partial x_0^2} + m(x_0) \frac{\partial L}{\partial x_0} = \alpha L \quad (1.5.8)$$

Une fois que l'on a trouvé la fonction $L(x_0; \alpha)$, il faut inverser la transformée de Laplace pour obtenir la fonction de densité de $T_{c,d}$.

Le moment d'ordre n de la variable aléatoire $T_{c,d}$ est :

$$E[T_{c,d}^n] = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} L(x_0; \alpha) \Big|_{\alpha=0}. \quad (1.5.9)$$

Remarque 1.5.3. (Voir Lefebvre [?] p. 252.)

On peut aussi essayer de résoudre l'équation différentielle ordinaire que vérifie la fonction

$$m_{n,d}(x_0) = E[T_d^n] \text{ pour } n = 1, 2, \dots, \quad (1.5.10)$$

soit

$$\frac{1}{2}v(x_0) \frac{d^2}{dx_0^2} m_{n,d}(x_0) + m(x_0) \frac{d}{dx_0} m_{n,d}(x_0) = -n m_{n-1,d}(x_0), \quad (1.5.11)$$

avec la condition limite $m_{n,d} = 0$. En particulier, on a :

$$\frac{1}{2}v(x_0) \frac{d^2}{dx_0^2} m_{1,d}(x_0) + m(x_0) \frac{d}{dx_0} m_{1,d}(x_0) = -1. \quad (1.5.12)$$

Dans le cas où il y a deux frontières, si l'on désire calculer la probabilité que le processus frappe la frontière en d avant celle en c , il suffit de résoudre l'équation différentielle

ordinaire

$$\frac{1}{2}v(x_0) \frac{d^2}{dx_0^2} p_d(x_0) + m(x_0) \frac{d}{dx_0} p_d(x_0) = 0,$$

où

$$p_d(x_0) = \mathbb{P}[X(T_{c,d}) = d \mid X(0) = x_0]$$

Cette équation différentielle est obtenue à partir de l'équation 1.5.8 en posant que $\alpha = 0$.

1.6. APPROXIMATIONS BINOMIALES SIMPLES

1.6.1. Convergence d'une Chaîne de Markov vers un processus de diffusion

. Dans cette partie (voir [?]) nous allons faire un passage bref sur le **problème martingale** après l'avoir défini, qui nous permettra d'énoncer le théorème fondamental de convergence d'une certaine chaîne de Markov vers un processus de diffusion.

L'approche par la théorie des martingales des processus de Markov.

Soit $x(\cdot)$ un processus de Markov à valeur dans \mathbb{R}^d , alors pour $t \geq 0$ et pour toute fonction test $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a la propriété forte de Markov :

$$\mathbb{E}\{\phi(x(t+h)) - \phi(x(t)) \mid x(s), s \leq t\} = hL_t\phi(x(t)) + o(h), \quad h > 0$$

où, pour $t \geq 0$, L_t est un opérateur linéaire (**générateur**) défini de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $C_b(\mathbb{R}^d)$ par :

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t, \cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b^i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2} \mathbb{E}\{\phi(x(t_2)) \mid x(s), s \leq t_1\} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\phi(x(t_2+h)) - \phi(x(t_2)) \mid x(s), s \leq t_2\} \\ &\quad - \phi(x(t_2)) \mid x(s), s \leq t_1\} \\ &= \mathbb{E}\{L_{t_2}\phi(x(t_2)) \mid x(s), s \leq t_1\}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\{\phi(X(t_2)) - \phi(x(t_1)) - \int_{t_1}^{t_2} L_t \phi(x(t)) dt \mid x(s), s \leq t_1\} = 0;$$

autrement dit

$$X_\phi(t) = \phi(x(t)) - \int_0^t L_s \phi(x(s)) ds,$$

est une martingale pour toutes les fonctions testes.

Soit L_t un générateur donné, considérons le problème suivant :

- (1) existe-t-elle pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ une mesure de probabilité \mathbb{P} sur $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbb{P}(x(0) = x) = 1$, et $X_\phi(\cdot)$ est une martingale pour toute fonction teste ϕ ?
- (2) Une telle probabilité \mathbb{P} est-elle unique pour tout x ?

Définition 1.6.1. Soient $a : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow S_d$ et $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ où S_d est l'ensemble des matrices symétriques non-négatives de taille $d \times d$, une fonction mesurable localement bornée définie par :

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t, \cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b^i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Etant donné $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, **une solution du problème martingale pour L_t (ou a , et b) commençant en (s, x)** est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{M}) satisfaisant :

$$\mathbb{P}(x(t) = x, 0 \leq t \leq s) = 1,$$

telle que

$$M_t^f = f(x(t)) - \int_s^t (L_u f)(x(u)) du,$$

est une \mathbb{P} -martingale après le temps s pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Construction générale du problème martingale.

Pour tout $h > 0$, posons $\Pi_h(x, \cdot)$ une fonction de transition sur \mathbb{R}^d Etant donné $x \in \mathbb{R}^d$, soit \mathbb{P}_x^h une mesure de probabilité sur Ω caractérisée par les propriétés suivantes :

- (1) $\mathbb{P}_x^h(x(0) = x) = 1$,
- (2) $\mathbb{P}_x^h \left[x(t) = \frac{(k+1)h-t}{h} x(kh) + \frac{t-kh}{h} x((k+1)h), \right. \\ \left. kh \leq t < (k+1)h \right] = 1$, pour $k \geq 0$

(3) $\mathbb{P}_x^h(x((k+1)h) \in \Gamma \mid \mathcal{M}_{kh}) = \Pi_h(x(kh), \Gamma)$ (p.s., \mathbb{P}_x^h) pour tout $k \geq 0$ et $\Gamma \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Dans [?] ils montrent que cela est équivalent à :

$$\left(f(x(kh)) - \sum_{h=0}^{k-1} L_h f(x(jh)), \mathcal{M}_{kh}, \mathbb{P}_x^h \right),$$

est une martingale pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, où

$$L_h f(x) = \int (f(y) - f(x)) \Pi_h(x, dy).$$

Soient :

$$a_h^{ij}(x) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq 1} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \Pi_h(x, dy),$$

$$b_h^i(x) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq 1} (y_i - x_i) \Pi_h(x, dy),$$

$$\Delta_h^\epsilon(x) = \frac{1}{h} \Pi_h(x, \mathbb{R}^d \setminus B(x, \epsilon)),$$

où $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < \epsilon\}$, et

$$L_h f(x) = \int (f(y) - f(x)) \Pi_h(x, dy).$$

Nous allons faire les suppositions suivantes pour tout $R > 0$:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \|a_h(x) - a(x)\| = 0,$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} |b_h(x) - b(x)| = 0,$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \Delta_h^\epsilon(x) = 0, \epsilon > 0,$$

où $a : \mathbb{R}^d \rightarrow S_d$ et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont des fonctions continues.

Théorème 1.6.1. [?] *Supposons que les coefficients a, b ont la propriété que $\forall x \in \mathbb{R}^d$ le problème martingale pour a, b a exactement une solution \mathbb{P}_x commençant en x . Alors $\mathbb{P}_x^h \rightarrow \mathbb{P}_x$ quand $h \downarrow 0$ uniformément sur un sous ensemble compact de \mathbb{R}^d .*

Ce théorème montre qu'il existe une chaîne de Markov qui converge vers un processus de diffusion.

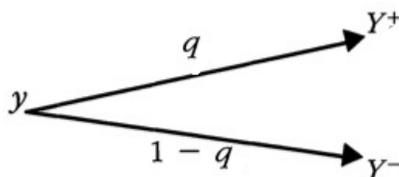


FIGURE 1.1. Exemple de saut binomiale

1.6.2. Approximation binomiale d'un processus de diffusion.

Cette section est tirée de [?]. Nous énonçons des conditions pour une suite de processus binomiaux (c'est à dire le processus passe d'une valeur y à Y^+ ou Y^- avec les probabilités respectives q , et $1 - q$ voir figure 1.1) qui converge faiblement vers un processus de diffusion. Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dy(t) = \mu(y, t)dt + \sigma(y, t)dB(t), \quad (1.6.1)$$

où $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard, $\mu(y, t) \geq 0$ et $\sigma(y, t) \geq 0$ sont la dérive instantanée et l'écart-type infinitésimal de y_t respectivement et y_0 est une constante. Nous construisons une suite de processus binomiaux qui converge en distribution vers le processus (1.6.1) sur l'intervalle $[0, T]$.

Construction de la suite

Prenons l'intervalle $[0, T]$, et découpons-le en n intervalles de même longueur b . Pour tout b , considérons le processus stochastique $\{y_t\}$ dans l'intervalle de temps $[0, T]$, qui passe d'un noeud $y_{kb} = Y_b$ à un autre $y_{(k+1)b} = Y_b^+$ en sautant vers le haut ($y_{(k+1)b} = Y_b^-$ bas) avec une distance $|Y_b^\pm - Y_b|$ avec les probabilités q_b (respectivement $1 - q_b$) et qui est constante quand il reste sur le même noeud Y_b avec une probabilité 0. Les tailles et les probabilités de sauts vers le haut ou

vers le bas sont spécifiées comme suit :

$$\begin{aligned} q_b &: \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, 1] \\ &(x, kb) \longmapsto q_b(x, kb), \\ Y_b^\pm &: \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty) \\ &(x, kb) \longmapsto Y_b^\pm(x, kb), \end{aligned}$$

avec

$$Y_b^-(x, kb) \leq Y_b^+(x, kb). \quad (1.6.2)$$

Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ le processus stochastique $\{y_t\}$ est donné par :

$$y_0 = y_0 \quad \text{pour tout } b, \quad (1.6.3)$$

$$y_t = y_{kb} \quad kb \leq t < (k+1)b, \quad (1.6.4)$$

$$\mathbb{P} [y_{(k+1)b} = Y_b^+(y_{kb}, kb) \mid bk, y_{kb}] = q_b(y_{kb}, kb), \quad (1.6.5)$$

$$\mathbb{P} [y_{(k+1)b} = Y_b^-(y_{kb}, kb) \mid bk, y_{kb}] = 1 - q_b(y_{kb}, kb), \quad (1.6.6)$$

$$\mathbb{P} [y_{(k+1)b} = y_{kb} = c \mid y_{kb}, kb] = 0, \quad (1.6.7)$$

$$\text{où } c \text{ est une constante, } c \neq Y_b^\pm(y_{kb}, kb). \quad (1.6.8)$$

Le processus stochastique $\{y_t\}$ est une fonction en escalier de valeur initiale y_0 qui saute seulement aux instants $b, 2b, 3b, \dots$. À chaque saut le processus a deux possibilités de déplacement : en haut avec la valeur Y_b^+ ou en bas avec la valeur Y_b^- ; q_b est la probabilité d'un mouvement vers le haut. Dans [?] nous trouvons que $\{y_t\}_{b \downarrow 0}$ converge faiblement vers le processus de (1.6.1) sous les hypothèses ci-dessous.

hypothèse 1.6.1. *Les fonctions $\mu(y, t)$ et $\sigma(y, t)$ sont continues et $\sigma(y, t)$ est non négative.*

hypothèse 1.6.2. Avec une probabilité de 1, la solution $\{y_t\}$ de l'équation intégrale stochastique

$$y_t = y_0 + \int_0^t \mu(y_s, s) ds + \int_0^t \sigma(y_s, s) ds. \quad (1.6.9)$$

existe pour $0 < t < \infty$ et elle est unique et identiquement distribuée.

Sous l'hypothèse 1.6.2, la distribution du processus $\{y_t\}_{0 \leq t < T}$ est caractérisée par :

- par le point initial y_0 ;
- la continuité de y_t (avec une probabilité de 1) comme une fonction aléatoire de t ;
- la fonction dérive $\mu(y, t)$;
- la fonction diffusion $\sigma^2(y, t)$.

Si $\{{}_b y_t\}_{b \downarrow 0}$ converge en distribution vers $\{y_t\}$ les propriétés ci-dessus doivent correspondre avec les limites. Autrement dit nous avons besoin de :

- (1) ${}_b y_0 = y_0$, pour tout b ;
- (2) la taille du saut de ${}_b y_t$ devient petit à une vitesse suffisamment rapide que $b \downarrow 0$;
- (3) la dérive de ${}_b y_t$ converge vers $\mu(y, t)$;
- (4) la variance locale de ${}_b y_t$ converge vers $\sigma^2(y, t)$.

hypothèse 1.6.3. Pour tout $\delta > 0$ et pour tout $t > 0$:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta \\ 0 \leq t \leq T}} |Y_b^+(y, t) - y| = 0, \quad (1.6.10)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta \\ 0 \leq t \leq T}} |Y_b^-(y, t) - y| = 0. \quad (1.6.11)$$

(3) et (4), nous permettent de définir pour tout $b > 0$ la dérive locale $\mu_b(y, t)$ et le second moment local $\sigma_b^2(y, t)$ du processus binomial 1.6.3-1.6.8 par :

$$\mu_b(y, t) = (q_b(y, t^*) [Y_b^+(y, t^*) - y] \quad (1.6.12)$$

$$+ (1 - q_b(y, t^*)) [Y_b^-(y, t^*) - y]) / b, \quad (1.6.13)$$

$$\sigma_b^2(y, t) = (q_b(y, t^*) [Y_b^+(y, t^*) - y]^2 \quad (1.6.14)$$

$$+(1 - q_b(y, t^*)) [Y_b^-(y, t^*) - y]^2)/b, \quad (1.6.15)$$

avec $t^* = b[t/n]$, où $[t/n]$ est la partie entière de $[t/n]$. La prochaine hypothèse exige que μ_b et σ_b^2 convergent vers μ et σ^2 sur l'ensemble de la forme $|y| \leq \delta$, $0 \leq t < T$. Alors la moyenne et la variance infinitésimales de changement de position sont données respectivement par :

$$\beta(y) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{E [\{Y_b^\pm(b y_{t^*}, t^*) - b y_{t^*}\} | b y_{t^*} = y]}{b}, \quad (1.6.16)$$

$$\alpha(y) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{V [\{Y_b^\pm(b y_{t^*}, t^*) - b y_{t^*}\} | b y_{t^*} = y]}{b}. \quad (1.6.17)$$

hypothèse 1.6.4. Pour tout $T > 0$ et pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta \\ 0 \leq t \leq T}} |\mu_b(y, t) - \mu(y, t)| = 0, \quad (1.6.18)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sup_{\substack{|y| \leq \delta \\ 0 \leq t \leq T}} |\sigma_b^2(y, t) - \sigma^2(y, t)| = 0. \quad (1.6.19)$$

Théorème 1.6.2. [?] Sous les hypothèses (1.6.1)-(1.6.2), $\{b y_t\} \Rightarrow \{y_t\}$ où y_t est solution de (1.6.1).

Exemple 1.6.1. [?] Considérons le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dy(t) = \beta(\alpha - y_t)dt + \sigma dB(t) \quad (1.6.20)$$

où β est non négative, et y_0 fixé. Définissons la suite d'approximations $\{b y_t\}_{b \downarrow 0}$ de 1.6.20 comme suit :

$$Y_b^+(y, t) = y + \sigma\sqrt{b}, \quad (1.6.21)$$

$$Y_b^-(y, t) = y - \sigma\sqrt{b}, \quad (1.6.22)$$

et posons :

$$q_b = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{b}\beta(\alpha - y)/2\sigma, & \text{si } 0 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{b}\beta(\alpha - y)/2\sigma \leq 1, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} + \sqrt{b}\beta(\alpha - y)/2\sigma < 0, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6.23)$$

La probabilité est choisie de telle sorte que la dérive locale définie par :

$$\mu_b(y) = \begin{cases} \beta(\alpha - y), & \text{si } 0 \leq q_b \leq 1, \\ \sigma/\sqrt{b}, & \text{si } q_b = 1, \\ -\sigma/\sqrt{b}, & \text{si non,} \end{cases} \quad (1.6.24)$$

converge uniformément vers la dérive instantanée de l'équation 1.6.20 tout en conservant $q_b \in [0, 1]$. En posant $\sigma_b^2(y) = \sigma^2$, alors il s'ensuit que $\{y_t\} \Rightarrow \{y_t\}$.

1.7. SIMPLIFICATION DES CALCULS PAR LA TRANSFORMÉE EN X

Nous utilisons la transformée en X des processus de diffusion défini par une équation différentielle, afin d'avoir leur représentation binomiale plus simple. Considérons la transformée $X(y_t, t)$ de (1.5.1), qui est deux fois différentiable en y et une fois différentiable en t . Nous avons par le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} dX(y_t, t) &= \left(\mu(y_t, t) \frac{\partial X(y_t, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X(y_t, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial X(y_t, t)}{\partial t} \right) dt \\ &+ \left(\sigma(y_t, t) \frac{\partial X(y_t, t)}{\partial y} \right) dB(t). \end{aligned}$$

En choisissant :

$$X(y, t) = \int^y \frac{dz}{\sigma(z, t)} \quad (1.7.1)$$

autrement dit $X(y, t)$ est une primitive de $\frac{1}{\sigma(y, t)}$, alors

$$\sigma(y_t, t) \frac{\partial X(y_t, t)}{\partial y} dB(t) = 1.$$

Ainsi la volatilité instantanée du processus transformé $X_t = X(y_t, t)$ est constante. Dans ce cas nous pouvons construire un arbre binomial plus simple de $X(y, t) = x$ où le deuxième moment local de la transformée x est constant sur chaque noeud.

Pour retourner à la suite du processus binomial de départ y , nous utilisons la transformée inverse de X définie par :

$$Y(x, t) = \{y; X(y, t) = x\}. \quad (1.7.2)$$

Il est facile de vérifier que $\partial Y/\partial x = \sigma(y, t)$ et par, l'hypothèse 1, cela veut dire que $Y(x, t)$ converge faiblement de façon monotone pour t fixé.

En utilisant la transformée 1.7.1, nous définissons l'arbre de y comme suit :

$$Y_b^+(x, t) = Y(x + \sqrt{b}, t + b), \quad (1.7.3)$$

$$Y_b^-(x, t) = Y(x - \sqrt{b}, t + b). \quad (1.7.4)$$

Notons que l'arbre de y hérite de la simplicité calculatoire de l'arbre de x .

En utilisant le fait que :

$$\partial Y/\partial x = \sigma(y, t)$$

la série de Taylor de Y_b^\pm au voisinage de 0 donne :

$$Y_b^\pm(x, t) = Y(x, t) \pm \sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b} + O(b), \quad (1.7.5)$$

$$\sigma_b^2(Y(x, t), t) = \sigma^2(Y(x, t), t) + O(\sqrt{b}). \quad (1.7.6)$$

où $O(\sqrt{b}), O(b)$ sont des fonctions de b qui tendent vers zéro lorsque b tend vers zéro (notation de Landeau). Ce qui montre que le second moment local σ_b^2 de ${}_b y_t$ converge vers la variance instantanée de $\sigma^2(y, t)$ quand $b \downarrow 0$.

Finalement en posant :

$$q_b = \frac{b\mu(Y(x, t), t) + Y(x, t) - Y_b^-(x, t)}{Y_b^+(x, t) - Y_b^-(x, t)}, \quad (1.7.7)$$

nous obtenons

$$\mu_b(y, t) \rightarrow \mu(y, t) \quad (1.7.8)$$

uniformément sur $\{(y, t) : |y|, t < \delta\}$ pour tout $\delta > 0$

En effet :

$$Y(x, t) - Y_b^-(x, t) \sim \sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b},$$

$$Y_b^+(x, t) - Y(x, t) \sim \sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b},$$

$$Y_b^+(x, t) - Y_b^-(x, t) \sim 2\sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}.$$

alors

$$\begin{aligned} q_b &= \frac{b\mu(Y(x, t), t) + Y(x, t) - Y_b^-(x, t)}{Y_b^+(x, t) - Y_b^-(x, t)} \\ &\sim \frac{b\mu(Y(x, t), t) + \sigma(Y(x, t), t)}{2\sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

En remplaçant sur l'expression de μ_b

$$\begin{aligned} \mu_b(y, t) &= (q_b(y, t) [Y_b^+(y, t) - y], \\ &\quad + (1 - q_b(y, t)) [Y_b^-(y, t) - y]) / b, \\ &\sim \left(\frac{b\mu(Y(x, t), t) + \sigma(Y(x, t), t)}{2\sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}} \sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}, \right. \\ &\quad \left. + (1 - \frac{b\mu(Y(x, t), t) + \sigma(Y(x, t), t)}{2\sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}}) (-\sigma(Y(x, t), t)\sqrt{b}) \right) / b, \\ &\sim \mu(y, t). \end{aligned}$$

Remarque 1.7.1. *La probabilité définie ci-dessus n'est pas définie dans certaines situations ; dans ce cas, nous utilisons le saut multiple. Voir la section suivante.*

1.8. LE PROCESSUS CIR

Dans cette section, nous considérons le processus utilisé en économie financière par Cox, Ingersoll, et Ross [?] :

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dw(t), \quad (1.8.1)$$

avec $k \geq 0$, $\mu \geq 0$ et valeur initiale $r = r_0$. Nous allons décrire sa version discrète afin de l'utiliser dans le chapitre 3.

La transformation nécessaire est :

$$X(r) = \int^r \frac{dz}{\sigma\sqrt{z}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sigma} \quad (1.8.2)$$

avec $x_0 = X(r_0)$.

La transformée inverse est donnée par :

$$R(x) = \begin{cases} \sigma^2 x^2 / 4, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.8.3)$$

$$q_b : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad (1.8.4)$$

$$(x) \longmapsto q_b(x), \quad (1.8.5)$$

$$J_b^\pm : \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, +\infty) \quad (1.8.6)$$

$$(x) \longmapsto J_b^\pm(x), \quad (1.8.7)$$

où

$$J_b^-(x) \leq J_b^+(x). \quad (1.8.8)$$

Pour tout $r_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ le processus stochastique $\{{}_b r_t\}$ est donné par :

$${}_b r_0 = r_0 \quad \text{pour tout } b \quad (1.8.9)$$

$${}_b r_t = {}_b r_{kb} \quad kb \leq t < (k+1)b, \quad (1.8.10)$$

$$\mathbb{P} [{}_b r_{(k+1)b} = J_b^+({}_b r_{kb}, kb) \mid bk, {}_b r_{kb}] = q_b({}_b r_{kb}, kb), \quad (1.8.11)$$

$$\mathbb{P} [{}_b r_{(k+1)b} = J_b^-({}_b r_{bk}, bk) \mid bk, {}_b r_{kb}] = 1 - q_b({}_b r_{bk}, bk), \quad (1.8.12)$$

$$\mathbb{P} [{}_b r_{(k+1)b} = {}_b r_{kb} = c \mid {}_b r_{bk}, bk] = 0, \quad (1.8.13)$$

pour $c \neq Y_b^-({}_b r_{bk}, bk)$ et $c \neq J_b^+({}_b r_{bk}, bk)$, où les J_b^\pm , appelés sauts multiples, sont définis par :

$$J_b^+ = \begin{cases} \text{le plus petit entier positif impair } j \text{ tel que} \\ 4b\mu/\sigma^2 + x^2(1 - kb) < (x + j\sqrt{b})^2, \end{cases} \quad (1.8.14)$$

$$J_b^- = \begin{cases} \text{le plus petit entier positif impair } j \text{ tel que} \\ 4b\mu/\sigma^2 + x^2(1 - kb) \geq (x + j\sqrt{b})^2, \\ \text{ou } x - j\sqrt{b} \leq 0 \end{cases} \quad (1.8.15)$$

$$R_b^\pm(x) = R(x \pm J_b^\pm \cdot \sqrt{b}). \quad (1.8.16)$$

En utilisant le fait que :

$$\partial R(x)/\partial x = \begin{cases} \sigma^2 x/2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

la série de Taylor de R_b^\pm au voisinage de 0 donne :

$$R_b^\pm(x) = R(x) \pm J_b^\pm \sigma^2 x/2\sqrt{b} + O(b), \quad (1.8.17)$$

$$\sigma_b^2(R(x)) = \sigma^2(R(x) + O(\sqrt{b})). \quad (1.8.18)$$

$J_b^\pm(x)$ est choisi de telle sorte que :

$$q_b(x) = \begin{cases} \left[\frac{bk(\mu - R(x)) + R(x) - R_b^-(x)}{R_b^+(x) - R_b^-(x)} \right], & \text{si } R_b^+(x) > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.8.19)$$

appartient à l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi nous avons la dérive qui converge vers la limite de la diffusion

En effet :

$$R(x) - R_b^-(x) \sim J_b^- \sigma^2 x/2\sqrt{b},$$

$$R_b^+(x) - R(x) \sim J_b^+ \sigma^2 x/2\sqrt{b},$$

$$R_b^+(x) - R_b^-(x) \sim (J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x/2\sqrt{b}.$$

alors

$$\begin{aligned} q_b(x) &= \left[\frac{bk(\mu - R(x)) + R(x) - R_b^-(x)}{R_b^+(x) - R_b^-(x)} \right], \\ &\sim \frac{bk(\mu - R(x)) + J_b^- \sigma^2 x/2\sqrt{b}}{(J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x/2\sqrt{b}}, \end{aligned}$$

En remplaçant sur l'expression de μ_b

$$\begin{aligned}
\mu_b(x) &\sim \left[\left(\frac{bk(\mu - R(x)) + J_b^- \sigma^2 x / 2\sqrt{b}}{(J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b}} \right) J_b^+ \sigma^2 x / 2\sqrt{b} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{bk(\mu - R(x)) + J_b^- \sigma^2 x / 2\sqrt{b}}{(J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b}} \right) J_b^- \sigma^2 x / 2\sqrt{b} \right] / b, \\
&\sim \left[\left(\frac{bk(\mu - R(x))}{(J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b}} \right) (J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b} - J_b^- \sigma^2 x / 2\sqrt{b} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{J_b^- \sigma^2 x / 2\sqrt{b}}{(J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b}} \right) (J_b^+ + J_b^-) \sigma^2 x / 2\sqrt{b} \right] / b, \\
&\sim k(\mu - R(x)).
\end{aligned}$$

voir [?].

Corollaire 1.8.1. [?]

La suite de processus $\{r_t\}$ définie par (1.8.2-1.8.19), quand $b \downarrow 0$, converge vers $\{r_t\}$, qui est solution de (1.8.1).

1.9. CONCLUSION

Ce chapitre introductif a permis de dresser la liste des outils mathématiques qui seront utilisés par la suite. Il s'agit des préalables qui permettent de construire une chaîne de Markov à partir d'une équation différentielle stochastique. Dans le chapitre suivant, nous allons donner une version discrète du mouvement brownien géométrique qui converge vers ce processus.

Chapitre 2

PROBLÈME DE PREMIER PASSAGE DES CHAÎNES DE MARKOV QUI CONVERGENT VERS LE MOUVEMENT BROWNIEN GÉOMÉTRIQUE

2.1. INTRODUCTION

Nous considérons une chaîne de Markov à temps discret avec espace des états $\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N\}$. Nous calculons explicitement les probabilités p_j que la chaîne, qui part de $1 + j\Delta x$, frappe N avant 1 ; de la même manière nous calculons la durée d_j du nombre de transitions nécessaires pour finir le jeu. En passant à la limite quand Δx et le temps Δt entre les transitions décroissent vers zéro convenablement, la chaîne de Markov tend vers le mouvement brownien géométrique. Nous montrerons que p_j et $d_j\Delta t$ tendent vers les quantités correspondantes du mouvement brownien géométrique. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$, un mouvement brownien géométrique de dimension un défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dB(t)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $\{B(t), t \geq 0\}$ est le mouvement brownien standard. Supposons que $X(0) = x \in (1, N)$, où $N \in \mathbb{N}$ (pour simplifier), et définissons

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = 1 \text{ ou } N \mid X(0) = x\} \quad (2.1.1)$$

D'une manière générale nous avons en dimension d le théorème suivant

Théorème 2.1.1. [?] Soit $X(t)$ une solution de

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t)$$

Alors X est un processus de Markov dont le générateur est donné par :

$$L_t f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t, \cdot) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d \mu_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

lorsque f est C^2 à support compact où $\alpha = \sigma\sigma^*$. On dit que X est une diffusion.

Remarque 2.1.1. Soient $\mu(x) = (\mu_i(x))_{1 \leq i \leq d}$, et $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq d}$ des fonctions mesurables, et $(B(t))_{t \geq 0} = (B(t)^{(1)}, \dots, B(t)^{(d)})_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien Standard de dimension d . Soit X solution de l'équation différentielle Stochastique

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t)$$

$$dX(t)^{(i)} = b_i(X(t))dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(X(t))dB(t)^{(j)} \quad 1 \leq i \leq d$$

$$X(t)^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t \mu_i(X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)dB_s^{(j)} \quad 1 \leq i \leq d$$

alors, par la formule de Itô, pour $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_i} dX(t)^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial x_i \partial x_j} d \langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_i} \mu_i(X(t))dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^d \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma\sigma^t)_{ij}(X(t))dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_i} \sigma_{ij}(X(t))dB(t)^{(j)} \end{aligned}$$

Posons

$$L_t f(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(X(t))}{\partial x_i} \mu_i(X(t))dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^d \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma\sigma^t)_{ij}(X(t))dt$$

$$\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^d) \quad M_t f = f(X(t)) - \int_0^t L_s f(X(s))ds$$

$M_t f$ est une martingale. Ainsi nous avons un problème martingale.

Remarque 2.1.2. [?]. Dans le cas où $d = 1$ et $L_t = \frac{d^2}{2dx^2}$ la mesure de probabilité \mathbb{P} sur $C([0, \infty), \mathbb{R}^1)$ telle que $\mathbb{P}(x(0) = 0) = 1$ est unique.

Dans notre situation $d = 1$ on a :

$$L_t = \sigma^2 \frac{d^2}{2dx^2} + \mu \frac{d}{dx}$$

Dans [?] nous voyons que la situation est la même que précédemment.

Comme dans le chapitre 1 (remarque 1.5.3)

$$p(x) := P[X[\tau(x)] = N]$$

satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 p''(x) + \mu x p'(x) = 0$$

avec les conditions aux frontières :

$$p(1) = 0 \quad \text{et} \quad p(N) = 1$$

Nous trouvons facilement que, si $c := \mu/\sigma^2 \neq 1/2$,

$$p(x) = \frac{x^{1-2c} - 1}{N^{1-2c} - 1} \quad \text{pour } 1 \leq x \leq N. \quad (2.1.2)$$

Quand $c = 1/2$, la solution est

$$p(x) = \frac{\ln x}{\ln N} \quad \text{pour } 1 \leq x \leq N. \quad (2.1.3)$$

De plus, la fonction

$$m(x) := E[\tau(x)]$$

satisfait l'équation différentielle ordinaire (voir le chapitre 1, remarque (1.5.3))

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 m''(x) + \mu x m'(x) = -1$$

avec les conditions initiales :

$$m(1) = m(N) = 0.$$

Si $c \neq 1/2$ nous trouvons que :

$$m(x) = \frac{2}{(1-2c)\sigma^2} \left\{ \ln x - \ln N \frac{x^{1-2c} - 1}{N^{1-2c} - 1} \right\} \quad \text{pour } 1 \leq x \leq N \quad (2.1.4)$$

et, pour $c = 1/2$,

$$m(x) = \frac{\ln x}{\sigma^2} (\ln N - \ln x) \quad \text{pour } 1 \leq x \leq N \quad (2.1.5)$$

Construction

Prenons la période de temps $[0, T]$, partitionnons la en n intervalles de mêmes longueurs $\Delta t = T/n$. Ces intervalles vont avoir comme extrémités $t_m = m\Delta t$ $m = 0, \dots, k$.

Nous allons construire une suite de processus binomiaux qui converge en distribution vers le processus 2.1.

Soit $\{X_{t_m} = x_{t_m}, m = 0, 1, \dots, k\}$ le processus à temps discret avec espace d'états

$$\{1 - k\Delta x, \dots, 1 - j\Delta x, \dots, 1 - \Delta x, 1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + j\Delta x, \dots, 1 + k\Delta x\}$$

où :

$$(\Delta x)^2 = A \Delta t \quad (2.1.6)$$

et

$$(j \Delta x)^2 < A \quad \forall j \in \{0, \dots, k\} \quad (2.1.7)$$

qui est constant entre les nœuds. Et, à un nœud donné, le processus saute vers le haut (bas) avec une distance Δx , ($-\Delta x$) avec la probabilité θ (respectivement, ϕ), et avec une probabilité $1 - \theta - \phi$ si il bouge pas du nœud. voir figure 2.1.

Remarque 2.1.3. Par symétrie nous allons travailler plus avec l'espace d'état $\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N\}$ au lieu de $\{1 - k\Delta x, \dots, 1 - j\Delta x, \dots, 1 - \Delta x, 1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + j\Delta x, \dots, 1 + k\Delta x\}$

Soient :

$$X_{\Delta x}^+(X_{t_m}, t_m) = 1 + (m + 1)\Delta x$$

$$X_{\Delta x}^-(X_{t_m}, t_m) = 1 + (m - 1)\Delta x$$

$$X_{t_m} = 1 + m\Delta x$$

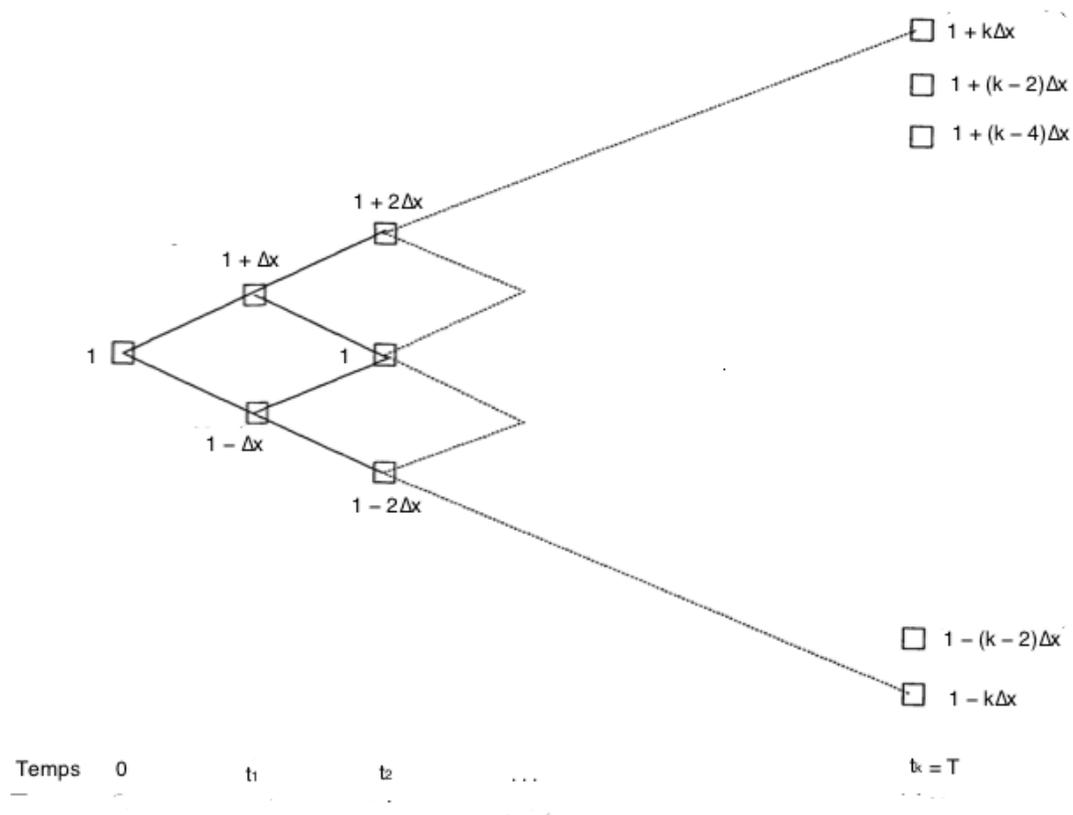


FIGURE 2.1. Arbre binomiale simple

$$\theta : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x_{t_m}, t_m) \longmapsto \theta(x_{t_m}, t_m)$$

$$\phi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x_{t_m}, t_m) \longmapsto \phi(x_{t_m}, t_m)$$

$$X^\pm : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$(x_{t_m}, t_m) \longmapsto X^\pm(x_{t_m}, t_m)$$

avec

$$X^-(x_{t_m}, \Delta x) \leq X^+(x_{t_m}, t_m) \tag{2.1.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} [X_{t_{m+1}} = X^+(x_{t_m}, t_m) \mid X_{t_m} = x_{t_m}] &= \phi(x_{t_m}, t_m) \\
\mathbb{P} [X_{t_{m+1}} = X^-(x_{t_m}, t_m) \mid X_{t_m} = x_{t_m}] &= \theta(x_{t_m}, t_m) \\
\mathbb{P} [X_{t_{m+1}} = X_{t_m} = c \mid X_{t_m} = x_{t_m}] &= 1 - \phi(x_{t_m}, t_m) \\
&\quad - \theta(x_{t_m}, t_m)
\end{aligned}$$

Maintenant nous allons exprimer les probabilités de transition (θ , ϕ) en fonction de la variance infinitésimale, et la dérive locale de l'équation 2.1, Pour cela nous allons utiliser la technique de calcul qui se trouve dans *Cox et Miller*.

Supposons que le processus à un instant donné est sur un nœud avec la valeur $X_{t_m} = x_{t_m}$, et dans un intervalle de temps assez petit qui suit elle change de position, et qu'elle soit à la position $X^+(x_{t_m}, t_m)$, (resp $X^-(x_{t_m}, t_m)$) avec les probabilités $\phi(x_{t_m}, t_m)$, (resp $\theta(x_{t_m}, t_m)$). Et avec une probabilité $1 - \phi(x_{t_m}, t_m) - \theta(x_{t_m}, t_m)$ il reste sur la même position. Le pas des déplacements sont respectivement $X^+(x_{t_m}, t_m) - X_{t_m} = t_m$, $X^-(x_{t_m}, t_m) - X_{t_m} = -t_m$ et $X_{t_m} - X_{t_m} = 0$. Ainsi nous obtenons la moyenne de changement de position :

$$\begin{aligned}
\theta(x_{t_m}, t_m)\Delta x - \phi(x_{t_m}, t_m)\Delta x + 0(1 - \phi(x_{t_m}, t_m) - \theta(x_{t_m}, t_m)) \\
= \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\} \Delta x
\end{aligned}$$

et la variance de changement de position est :

$$\begin{aligned}
\theta(x_{t_m}, t_m)(\Delta x)^2 - \phi(x_{t_m}, t_m)(\Delta x)^2 + 0^2(1 - \phi(x_{t_m}, t_m) \\
- \theta(x_{t_m}, t_m)) - [(\theta(x_{t_m}, t_m) \\
- \phi(x_{t_m}, t_m))\Delta x]^2 \\
= [\theta(x_{t_m}, t_m) + \phi(x_{t_m}, t_m) \\
- \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\}^2] (\Delta x)^2
\end{aligned}$$

D'autre part : La **moyenne infinitésimale** $m(x; t)$ et la **variance infinitésimale** $v(x, t)$ du processus stochastique à temps continu et à état continu $\{X(t, s), t \in T\}$

sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} [\{X_{t_{m+1}} - X_{t_m}\} | X_{t_m} = x_{t_m}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{dX(t)}{dt} \right] \\ &= \mu X_{t_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V [\{X_{t_{m+1}} - X_{t_m}\} | X_{t_m}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} [\theta(x_{t_m}, t_m) + \phi(x_{t_m}, t_m) - \\ &\quad - \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\}^2] \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \\ &= V \left[\frac{dX(t)}{dt} \right] \\ &= \sigma^2 X_{t_m}^2 \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{cases} \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu X_{t_m} \\ \left[\theta(x_{t_m}, t_m) + \phi(x_{t_m}, t_m) - \{\theta(x_{t_m}, t_m) - \phi(x_{t_m}, t_m)\}^2 \right] \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 X_{t_m}^2 \end{cases} \quad (2.1.9)$$

En résolvant le système ci-dessous nous obtenons :

$$\theta(x_{t_m}, t_m) = \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 + \Delta x \mu x_{t_m} + \Delta t (\mu x_{t_m})^2]$$

$$\phi(x_{t_m}, t_m) = \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 - \Delta x \mu x_{t_m} + \Delta t (\mu x_{t_m})^2]$$

mais comme les x_{t_m} sont bornées alors on peut écrire $\Delta t (\mu x_{t_m})^2 = O(\Delta t)$ ainsi nous obtenons :

$$\theta(x_{t_m}, t_m) = \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 + \Delta x \mu x_{t_m} + O(\Delta t)]$$

$$\phi(x_{t_m}, t_m) = \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 - \Delta x \mu x_{t_m} + O(\Delta t)]$$

Ainsi en faisant l'approximation suivante :

$$\theta(x_{t_m}, t_m) \simeq \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 + \Delta x \mu x_{t_m}]$$

et

$$\phi(x_{t_m}, t_m) \simeq \frac{1}{2A} [\sigma^2 x_{t_m}^2 - \Delta x \mu x_{t_m}]$$

Nous voyons que θ, ϕ vérifient le système 2.1.9

Théorème 2.1.2. *La chaîne de Markov $X_{m\Delta t}$ $m = 0, 1, 2, \dots$ ainsi construite converge vers la solution de 2.1 qui est un mouvement Brownien géométrique*

DÉMONSTRATION. **Idée de la preuve**

La preuve vient directement du théorème [?] en faisant la considération suivante. Soit $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$, $\tilde{\Omega} = (\mathbb{R})^{\mathcal{N}}$ et pour $n \in \mathcal{N}$ et $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ posons $x(n, \tilde{\omega})$ le $n^{\text{ième}}$ de $\tilde{\omega}$. Soit $\tilde{\mathcal{M}}_k = \sigma(x_{t_m} : 0 \leq m \leq k)$ et $\tilde{\mathcal{M}} = \sigma(x_{t_m} : m \geq 0)$

Soit la suite de transition de fonction $\Pi_m(x, \cdot)$, $m \in \mathcal{N}$ définie par :

$$\Pi_m(x_{t_m}, \cdot) = \begin{cases} \phi(x_{t_m}, \cdot), & \text{si } X_{t_{m+1}} = X^+(x_{t_m}, t_m) \\ \theta(x_{t_m}, \cdot), & \text{si } X_{t_{m+1}} = X^-(x_{t_m}, t_m) \\ 1 - \phi(x_{t_m}, \cdot) - \theta(x_{t_m}, \cdot), & \text{si } X_{t_{m+1}} = X_{t_m} = c \\ 0. & \text{si non} \end{cases}$$

Soit $\mathbb{P}_{\Delta t}$ l'unique mesure de probabilité sur $\tilde{\Omega}$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Delta t} [X_{t_0} = x_{t_0}] &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Delta t} [X_t = x_{t_m}, m\Delta t \leq t < (m+1)\Delta t] &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Delta t} [X_{t_{m+1}} = X^+(x_{t_m}, t_m) \mid \mathcal{M}_{t_m}] &= \phi(X_{t_m}, t_m) \\ \mathbb{P}_{\Delta t} [X_{t_{m+1}} = X^-(x_{t_m}, t_m) \mid \mathcal{M}_{t_m}] &= \theta(X_{t_m}, t_m) \\ \mathbb{P}_{\Delta t} [X_{t_{m+1}} = X_{t_m} = c \mid \mathcal{M}_{t_m}] &= 1 - \theta(X_{t_m}, t_m) - \phi(X_{t_m}, t_m) \end{aligned}$$

Pour

$$c \neq X^\pm(x_{t_m}, t_m)$$

posons

$$A_n f(x) = \int (f(y) - f(x)) \Pi_n(x, dy)$$

pour $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. La mesure de probabilité sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{M}})$ résoud le problème martingale pour A_m commençant en (k, x) si $\mathbb{P}(x_{t_m} = x, 0 \leq m \leq k) = 1$ et

$$(f(x_{t_m}) - \sum_{j=k}^{m-1} A_j f(x_{t_j}), \mathcal{M}_{t_m}, \mathbb{P})$$

est une martingale (à paramètre discrète) après le temps $(m+1)$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Soient :

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta t}^2(x) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq 1} (y-x)^2 \Pi_{\Delta t}(x, dy) - \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{|y-x| \leq 1} (y-x) \Pi_{\Delta t}(x, dy) \right)^2 \\ \mu_{\Delta t}(x) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq 1} (y-x) \Pi_{\Delta t}(x, dy) \\ \Delta_{\Delta t}^\epsilon(x) &= \frac{1}{\Delta t} \Pi_{\Delta t}(x, \mathbb{R} \setminus B(x, \epsilon)) \end{aligned}$$

où $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \epsilon\}$.

En supposant que :

- (1) $\lim_{\Delta t \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R} |\sigma_{\Delta t}^2(x) - \sigma^2 x^2| = 0,$
- (2) $\lim_{\Delta t \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R} |\mu_{\Delta t}(x) - \mu x| = 0,$
- (3) $\lim_{\Delta t \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \Delta_{\Delta t}^\epsilon(x) = 0, \epsilon > 0,$

où σ, μ sont des réels positifs. Le théorème 2.1.1 d'une part nous montre que l'équation 2.1 peut se transformer à un problème martingale, d'autre part La remarque 2.1.2 nous garantie l'existence d'une solution unique à ce problème. Ainsi le théorèmes 1.6.2, nous voyons que la chaîne ainsi construite converge vers la solution de 2.1 qui est un mouvement Brownien géométrique d'après l'exemple 1.5.2. [?]. [?] □

Par abus de notation :

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j+1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ (1+j\Delta x)^2 \sigma^2 + (1+j\Delta x) \mu \Delta x \} \quad (2.1.10)$$

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j-1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ (1+j\Delta x)^2 \sigma^2 - (1+j\Delta x) \mu \Delta x \} \quad (2.1.11)$$

et

$$p_{1+j\Delta x, 1+j\Delta x} = 1 - \frac{1}{A} (1+j\Delta x)^2 \sigma^2 \quad (2.1.12)$$

où $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Remarques.

(i) Nous supposons que les probabilités définies dans (2.1.10), (2.1.11) et (2.1.12) sont bien définies, et qu'elle appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

(ii) La condition dans (2.1.7) implique que $(\Delta x)^2 < A/k^2$. Soit

$$T_j := \inf\{m > 0 : X_{m\Delta t} = 1 \text{ ou } N \mid X_0 = 1 + j\Delta x\} \quad (2.1.13)$$

et

$$p_j = P[X_{T_j} = N]. \quad (2.1.14)$$

Dans la prochaine section, nous allons calculer les quantités p_j pour $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Nous allons montrer que p_j converge vers la fonction $p(x)$ pour le mouvement brownien géométrique quand Δx décroît vers zéro et quand k tend vers l'infini de telle sorte que $1 + k\Delta x$ reste égal à N . Dans la section 3, nous allons calculer le nombre de transitions nécessaires pour finir le jeu, c'est-à-dire :

$$d_j := E[T_j] \quad (2.1.15)$$

En faisant un changement de variable, nous transformons le processus de diffusion $\{X(t), t \geq 0\}$ en un mouvement brownien géométrique avec une moyenne infinitésimale égale à zéro, et en considérant la chaîne de Markov discrète correspondante, nous obtenons une expression explicite et exacte de d_j qui, en la multipliant par Δt , tend vers $m(x)$ si le temps Δt entre les transitions est choisi de manière appropriée.

La motivation de notre travail est la suivante :

- (1) Lefebvre [?] a calculé les probabilités $p(x)$ et la durée $m(x)$ pour les processus de Wiener asymétriques dans un intervalle $(-d, d)$, soit un processus de Wiener pour lequel les moyennes infinitésimales μ_+ et μ_- , et les variances infinitésimales σ_+^2 et σ_-^2 , ne sont pas nécessairement les mêmes quand $x > 0$ ou $x < 0$. Pour confirmer ses résultats, il a considéré une marche aléatoire qui converge vers le processus de Wiener. Les

résultats de Lefebvre ont été étendus par Abundo [?] pour les processus de diffusion généraux à une dimension. Cependant Abundo n'a pas obtenu les quantités p_j et d_j correspondantes pour la chaîne de Markov discrète.

- (2) Ensuite, [?] et [?] ont calculé p_j et d_j (respectivement) pour une chaîne de Markov discrète qui tend vers le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les auteurs ont calculé aussi les quantités p_j dans les cas où la chaîne de Markov est asymétrique (comme dans Lefebvre [?]).

Les processus asymétriques peuvent être utilisés en mathématiques financières pour modéliser le prix d'une action lorsque, en particulier, la variance infinitésimale (qui est la volatilité) tend à augmenter avec le prix de l'action. En effet, il semble logique que la volatilité soit plus grande lorsque le prix de l'action $X(t)$ est très élevé que quand il est proche de zéro. Les prix des produits de base, tels que l'or et le pétrole, sont aussi plus volatils quand ils atteignent un certain niveau. Afin de vérifier la validité des expressions obtenues par [?] pour $p(x)$ et $m(x)$, il est important d'obtenir les quantités correspondantes pour la chaîne de Markov en temps discret et puis en prenant la limite quand Δx et Δt tendent vers zéro de manière appropriée.

Par ailleurs, les formules qui seront obtenues sont intéressantes en elles-mêmes, car en réalité le prix des actions et des produits de base ne varie pas complètement de façon continue.

2.2. CALCUL DE LA PROBABILITÉ p_j

Supposons que $\Delta x = 1$, de sorte que l'espace des états est $\{1, 2, \dots, N\}$, et les probabilités de transition deviennent :

$$p_{j,j+1} = \frac{1}{2A} \{j^2 \sigma^2 + j\mu\}, \quad p_{j,j-1} = \frac{1}{2A} \{j^2 \sigma^2 - j\mu\} \quad \text{et} \quad p_{j,j} = 1 - \frac{j^2 \sigma^2}{A},$$

pour $j \in \{2, \dots, N-1\}$. La probabilité définie par $p_j = P[X_{T_j} = N]$ satisfait l'équation aux différences suivante (voir la proposition 1.3.2) :

$$p_j = p_{j,j+1} p_{j+1} + p_{j,j-1} p_{j-1} + p_{j,j} p_j \quad (2.2.1)$$

qui s'écrit encore après simplification de A ,

$$2j p_j = (j + c) p_{j+1} + (j - c) p_{j-1}, \quad (2.2.2)$$

où $c = \mu/\sigma^2$. Les conditions aux frontières sont :

$$p_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_N = 1. \quad (2.2.3)$$

Dans le cas spécial où $\mu = 0$, l'équation 2.2.2 se réduit à une équation aux différences du second ordre avec coefficients constants :

$$p_{j+1} = 2p_j - p_{j-1}. \quad (2.2.4)$$

Nous trouvons facilement que l'unique solution qui satisfait les conditions aux frontières 2.2.3 est :

$$p_j = \frac{j-1}{N-1} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, N.$$

Supposons maintenant que $\mu \neq 0$. En posant :

$$w_j := p_{j+1} - p_j$$

l'équation 2.2.2 peut s'écrire :

$$(j + c)w_j = (j - c)w_{j-1}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *L'équation aux différences suivante :*

$$(j + c)w_j = (j - c)w_{j-1}$$

admet comme solution :

$$w_j = -\frac{p_2}{\pi} \sin[(2 + c)\pi] c(c^2 - 1) \Gamma^2(c - 1) \frac{\Gamma(j + 1 - c)}{\Gamma(j + 1 + c)}.$$

DÉMONSTRATION. On a :

$$(c)_j = c(c + 1) \dots (c + j - 1) = \frac{\Gamma(c + j)}{\Gamma(c)}$$

(symbole de Pochhammer [?]), où Γ est la fonction gamma. On trouve

$$\begin{aligned}
 w_j &= \prod_{k=2}^j \frac{(k-c)}{(k+c)} w_1 \\
 &= \frac{\prod_{k=2}^j (k-c)}{\prod_{k=2}^j (k+c)} w_1 \\
 &= \frac{(-c)_j (c)(j-c)(1+c)}{(c)_j (-c)(j+c)(1-c)} w_1 \\
 &= -\frac{(1+c)\Gamma(c)}{(1-c)\Gamma(-c)} \frac{\Gamma(j-c)}{\Gamma(j+c)} w_1.
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(c)(1+c)}{\Gamma(-c)(c-1)} &= \frac{\Gamma(c)(c^2-1)\Gamma^2(c-1)}{\Gamma(-c)(c-1)^2\Gamma^2(c-1)} \\
 &= \frac{\Gamma(c)(c^2-1)\Gamma^2(c-1)}{\Gamma(-c)\Gamma^2(c)} \\
 &= \frac{\Gamma(c)(c^2-1)\Gamma^2(c-1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(-c)\Gamma^2(c)\Gamma(1-c)} \\
 &= \frac{(c^2-1)\Gamma^2(c-1)\Gamma(1-c)}{\Gamma(-c)\Gamma(c)\Gamma(1-c)}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\Gamma(c)\Gamma(1-c) = \frac{\pi}{\sin(\pi c)}.$$

En remplaçant dans l'expression ci-dessus nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(c)(1+c)}{\Gamma(-c)(c-1)} &= \frac{(c^2-1)\Gamma^2(c-1)\Gamma(1-c)\sin\pi c}{\Gamma(-c)\pi} \\
 &= \frac{-c(c^2-1)\Gamma^2(c-1)\sin\pi c}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant dans l'expression de w_j ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}
 w_j &= -\frac{p_2}{\pi} \sin(\pi c) c (c^2-1) \Gamma^2(c-1) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)}, \\
 &= -\frac{p_2}{\pi} \sin[(2+c)\pi] c (c^2-1) \Gamma^2(c-1) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)}.
 \end{aligned}$$

où $w_1 = p_2$

□

Dans ce qui suit nous allons poser :

$$f(c) := -\frac{p_2}{\pi} \sin[(2+c)\pi] c (c^2-1) \Gamma^2(c-1)$$

ce qui donne :

$$w_j = p_{j+1} - p_j = f(c) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)}.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *L'équation aux différences suivante :*

$$p_{j+1} - p_j = f(c) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)},$$

où c est une constante et $c \neq 1/2$, admet comme solution :

$$p_j = \frac{f(c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2c)} \left[\frac{(c+1)\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)} - \frac{(j+c)\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c+1)} \right]$$

En appliquant les conditions dans (2.2.3), nous obtenons :

$$p_j = \frac{(j+c) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} - (1+c) \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}}{(N+c) \frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+1+c)} - (1+c) \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N.$$

Avant de commencer la preuve un petit rappel sur les fonctions gamma et bêta :

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\Re(z) > 0) \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} &= a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n) \\ &= (a)_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0) \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \\ &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \\ &= B(w, z). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} &= \frac{\Gamma(2c)\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(2c)\Gamma(j+1-c+2c)}, \\
&= \frac{B(j+1-c, 2c)}{\Gamma(2c)}, \\
&= \frac{1}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^{j+1-c-1} (1-t)^{2c-1} dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^j t^{-c} (1-t)^{2c-1} dt. \\
p_{j+1} - p_j &= f(c) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} = \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^j t^{-c} (1-t)^{2c-1} dt, \\
p_j - p_1 &= \sum_{k=1}^{j-1} (p_{k+1} - p_k), \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^k t^{-c} (1-t)^{2c-1} dt, \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 \frac{t - t^j}{1-t} t^{-c} (1-t)^{2c-1} dt.
\end{aligned}$$

Comme $p_1 = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
p_j &= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^{1-c} (1-t)^{2c-2} dt - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^{j-c} (1-t)^{2c-2} dt, \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^{(-c+2)-1} (1-t)^{(2c-1)-1} dt - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \int_0^1 t^{(j+1-c)-1} (1-t)^{(2c-1)-1} dt, \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} B(2-c, 2c-1) - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} B(j+1-c, 2c-1), \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(c+1)} - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{\Gamma(j+1-c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(j+1-c+2c-1)}, \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{\Gamma(2-c)(c+1)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(c+1)(c+1)} - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{\Gamma(j+1-c)\Gamma(2c-1)(j+c)}{\Gamma(j+c)(j+c)}, \\
&= \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{(c+1)\Gamma(2-c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2+c)} - \frac{f(c)}{\Gamma(2c)} \frac{(j+c)\Gamma(j+1-c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(j+c+1)}, \\
&= \frac{f(c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2c)} \left[\frac{(c+1)\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)} - \frac{(j+c)\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c+1)} \right].
\end{aligned}$$

En appliquant les conditions aux frontières (2.2.3), nous obtenons :

$$1 = p_N = \frac{f(c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2c)} \left[\frac{(c+1)\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)} - \frac{(N+c)\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+c+1)} \right],$$

$$\frac{f(c)\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2c)} = \frac{1}{\frac{(c+1)\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)} - \frac{(N+c)\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+c+1)}},$$

ce qui donne le résultat :

$$p_j = \frac{(j+c)\frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} - (1+c)\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}}{(N+c)\frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+1+c)} - (1+c)\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N$$

□

Maintenant si $c \neq 1/2$.

Lemme 2.2.3. *Quand c tends vers $1/2$, la solution devient*

$$p_j = \frac{\Psi(j + \frac{1}{2}) - 2 + \gamma + 2 \ln 2}{\Psi(N + \frac{1}{2}) - 2 + \gamma + 2 \ln 2}, \quad (2.2.5)$$

où γ est la constante d' Euler et Ψ est la fonction digamma définie par

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

DÉMONSTRATION. En effet nous avons :

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{(j+c)\frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} - (1+c)\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}}{(N+c)\frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+1+c)} - (1+c)\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2+c)}} \\ &= \frac{(j+c)\frac{\Gamma(j+1-c)}{(j+c)\Gamma(j+c)} - \frac{(1+c)\Gamma(2-c)}{(1+c)\Gamma(1+c)}}{\frac{(N+c)\Gamma(N+1-c)}{(N+c)\Gamma(N+c)} - \frac{(1+c)\Gamma(2-c)}{(1+c)\Gamma(1+c)}} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} p_j = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

Appliquons alors la règle de l'Hôpital pour lever l'indétermination :

$$\lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} p_j = \lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{d}{dc} \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} - \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)}}{\frac{d}{dc} \frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+c)} - \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)}},$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} &= -\frac{\frac{d}{dc}(\Gamma(j+1-c))\Gamma(j+c) + \frac{d}{dc}(\Gamma(j+c))\Gamma(j+1-c)}{(\Gamma(j+c))^2} \\ &= -\frac{\frac{d}{dc}(\Gamma(j+1-c))\Gamma(j+c)}{(\Gamma(j+c))^2} - \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} \frac{\frac{d}{dc}(\Gamma(j+c))}{\Gamma(j+c)}. \end{aligned}$$

Mais comme $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, nous avons :

$$\frac{d}{dc} \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} = -\frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} \{\psi(j+1-c) + \psi(j+c)\}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} p_j &= \lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{d}{dc} \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} - \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)}}{\frac{d}{dc} \frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+c)} - \frac{d}{dc} \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)}} \\ &= \lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-\frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+c)} \{\psi(j+1-c) + \psi(j+c)\} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)} \{\psi(2-c) + \psi(1+c)\}}{-\frac{\Gamma(N+1-c)}{\Gamma(N+c)} \{\psi(N+1-c) + \psi(N+c)\} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1+c)} \{\psi(2-c) + \psi(1+c)\}} \\ &= \frac{-\frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(j+\frac{1}{2})} \{\psi(j+\frac{1}{2}) + \psi(j+\frac{1}{2})\} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \{\psi(\frac{3}{2}) + \psi(\frac{3}{2})\}}{-\frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\Gamma(N+\frac{1}{2})} \{\psi(N+\frac{1}{2}) + \psi(N+\frac{1}{2})\} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \{\psi(\frac{3}{2}) + \psi(\frac{3}{2})\}} \\ &= \frac{\Psi(j+\frac{1}{2}) - \Psi(\frac{3}{2})}{\Psi(N+\frac{1}{2}) - \Psi(\frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\Psi(3/2) = 2 - \gamma - 2 \ln 2$$

(voir [?]), d'où :

$$\lim_{c \rightarrow \frac{1}{2}} p_j = \frac{\Psi(j+\frac{1}{2}) - 2 + \gamma + 2 \ln 2}{\Psi(N+\frac{1}{2}) - 2 + \gamma + 2 \ln 2}.$$

□

Maintenant nous allons étudier le cas général, c'est-à-dire le cas où $\Delta x > 0$.

Alors nous devons résoudre l'équation aux différences suivante :

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{1}{2A} \{(1+j\Delta x)^2 \sigma^2 + (1+j\Delta x) \mu \Delta x\} p_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{2A} \{(1+j\Delta x)^2 \sigma^2 - (1+j\Delta x) \mu \Delta x\} p_{j-1} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{A} (1+j\Delta x)^2 \sigma^2\right) p_j \end{aligned}$$

qui, après simplification, s'écrit :

$$2(1+j\Delta x)p_j = [(1+j\Delta x) + c\Delta x]p_{j+1} + [(1+j\Delta x) - c\Delta x]p_{j-1}.$$

où $c = \mu/\sigma^2$.

Les conditions aux frontières deviennent :

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad p_k = 1.$$

Quand $\mu = 0$ (ce qui implique $c = 0$), l'équation aux différences ci-dessus est la même que l'équation 2.2.4. La solution est :

$$p_j = \frac{j}{k} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k.$$

Posons :

$$n = 1 + j\Delta x.$$

En utilisant le fait que (par hypothèse) $N = 1 + k\Delta x$, nous obtenons :

$$p_n = \frac{n-1}{N-1} \quad \text{pour } n = 1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N. \quad (2.2.6)$$

Remarquons que la solution ne dépend pas de Δx . Donc, si Δx décroît vers zéro et k tend vers l'infini tel que $1 + k\Delta x$ reste égal à N , nous avons alors :

$$p_n \longrightarrow \frac{n-1}{N-1} \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N,$$

qui est la même fonction que $p(x)$ dans 2.1.2 lorsque $c = 0/\sigma^2 = 0$. En procédant comme ci-dessus, si $c \neq 1/2$, nous obtenons que la probabilité p_j est donnée par :

$$p_j = \frac{(1 + j\Delta x + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+(j+1)\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+(j+1)\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)} - (1 + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)}}{(1 + k\Delta x + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+(k+1)\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+(k+1)\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)} - (1 + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)}}.$$

En fonction de n et N , cette expression devient :

$$p_n = \frac{(n + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{n+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)} - (1 + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)}}{(N + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{N+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)} - (1 + c\Delta x) \frac{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x - c\Delta x}{\Delta x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\Delta x + c\Delta x}{\Delta x}\right)}}, \quad (2.2.7)$$

pour $n \in \{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N\}$. La solution se réduit à :

$$p_n = \frac{\Psi\left(\frac{2n+\Delta x}{2\Delta x}\right) - \Psi\left(\frac{2+\Delta x}{2\Delta x}\right)}{\Psi\left(\frac{2N+\Delta x}{2\Delta x}\right) - \Psi\left(\frac{2+\Delta x}{2\Delta x}\right)} \quad \text{si } c = 1/2. \quad (2.2.8)$$

Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. Soit $n = 1 + j\Delta x$ pour $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, avec k tel que $1 + k\Delta x = N$. La probabilité p_n que la chaîne de Markov à temps discret définie dans la section 2.1, commençant en n , frappe N avant 1 est donnée par l'équation 2.2.6 si $\mu = 0$, et par 2.2.7 si $c = \mu/\sigma^2 \neq 0$.

Pour compléter cette section, nous allons considérer le cas où Δx décroît vers zéro. Nous avons mentionné que quand $c = 0$, la probabilité p_n ne dépend pas de Δx , et elle correspond à la fonction $p(x)$ dans 2.1.2 avec $c = 0$. Quand $c = 1/2$, en utilisant la formule :

$$\Psi(z) \sim \ln z \quad \text{pour } z \text{ assez grand,}$$

nous pouvons écrire que

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} p_n = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\ln(2n + \Delta x) - \ln(2 + \Delta x)}{\ln(2N + \Delta x) - \ln(2 + \Delta x)} = \frac{\ln n}{\ln N} \quad \text{pour } n \in [1, N].$$

Encore une fois, cette expression correspond à la fonction $p(x)$ donnée dans 2.1.3, obtenue quand $c = 1/2$. Finalement, nous avons :

$$\frac{\Gamma(z + a)}{\Gamma(z + b)} \propto z^{a-b} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

quand $|z|$ tend vers l'infini (avec $|\text{Arg}(z + a)| < \pi$; voir [?]). D'où, dans le cas où $c \neq 0, 1/2$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \downarrow 0} p_n &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{(n + c\Delta x)(n + \Delta x)^{-2c} - (1 + c\Delta x)(1 + \Delta x)^{-2c}}{(N + c\Delta x)(N + \Delta x)^{-2c} - (1 + c\Delta x)(1 + \Delta x)^{-2c}} \\ &= \frac{n^{1-2c} - 1}{N^{1-2c} - 1} \end{aligned}$$

pour $1 \leq n \leq N$. Il s'ensuit que nous retrouvons la formule pour $p(x)$ dans 2.1.2. Dans la prochaine section, nous allons retrouver les formules qui correspondent à la fonction $m(x)$ dans la section 2.1.

2.3. CALCUL DU NOMBRE MOYEN d_j DE TRANSITIONS NÉCESSAIRES POUR FINIR LE JEU

Comme dans la section 2.2, nous allons supposer que $\Delta x = 1$, avec $n = 1 + j$ pour $j = 0, 1, \dots, k$ (et $1 + k = N$). La fonction $d_n := E[T_n]$ satisfait l'équation aux différences du second ordre non homogène suivante (voir la proposition 1.3.3, chapitre 1) :

$$d_n = p_{n,n+1} d_{n+1} + p_{n,n-1} d_{n-1} + p_{n,n} d_n + 1 \quad \text{pour } n = 2, \dots, N - 1, \quad (2.3.1)$$

avec les conditions aux frontières qui sont :

$$d_1 = d_N = 0. \quad (2.3.2)$$

Nous trouvons que cette équation aux différences peut se réécrire comme suit :

$$(n + c) d_{n+1} - 2n d_n + (n - c) d_{n-1} = -\frac{2A}{n\sigma^2}. \quad (2.3.3)$$

En utilisant le changement variable,

$$w_j = d_{j+1} - d_j, \quad a = 1 + c, \quad b = 1 - c,$$

l'équation 2.3.1 devient :

$$w_j - \frac{(j - c)}{(j + c)} w_{j-1} = \frac{-2A}{j(j + c)}$$

ou encore :

$$w_{j+1} - \frac{(j + b)}{(j + a)} w_j = -\frac{2A}{(j + 1)(j + a)}. \quad (2.3.4)$$

Posons : $r_2(j) = -\frac{2A}{(j+1)(j+a)}$, $r_1(j) = \frac{j+b}{j+a}$.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{r_2(j)}{r_1(j)} &= \frac{\frac{-2A}{(j+1)(j+a)}}{\frac{(j+b)}{(j+a)}} = \frac{-2A}{(j+1)(j+b)}, \\ \frac{r_2(j+1)}{r_1(j+1)r_1(j)} &= \frac{\frac{-2A}{(j+2)(j+1+a)}}{\frac{(j+1+b)}{(j+1+a)} \frac{(j+b)}{(j+a)}} = \frac{-2A(j+a)}{(j+2)(j+b+1)(j+b)}, \\ \frac{r_2(j+2)}{r_1(j+2)r_1(j+1)r_1(j)} &= \frac{\frac{-2A}{(j+3)(j+2+a)}}{\frac{(j+2+b)}{(j+2+a)} \frac{(j+1+b)}{(j+1+a)} \frac{(j+b)}{(j+a)}} = \frac{-2A(j+a+1)(j+a)}{(j+3)(j+2+b)(j+1+b)(j+b)}. \end{aligned}$$

De là, nous obtenons la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{r_2(j+k)}{r_1(j+k) \dots r_1(j)} &= \frac{-2A(j+a+k-1) \dots (j+a)}{(j+k+1)(j+b+k) \dots (j+b)} \\ &= \frac{\Gamma(j+b)\Gamma(j+a+k)}{\Gamma(j+a)(j+k+1)\Gamma(j+b+k+1)}. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 1.3.1, on obtient ainsi une solution particulière de 2.3.4 donnée par :

$$w_j = \frac{2A}{(j+1)(j+b)} + 2A \frac{\Gamma(j+b)}{\Gamma(j+a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+a+k)}{(j+k+1)\Gamma(j+b+k+1)},$$

d'où la solution particulière de 2.3.1 :

$$d_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2A}{(j+1)(j+b)} \quad (2.3.5)$$

$$+ 2A \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(j+b)}{\Gamma(j+a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+a+k)}{(j+k+1)\Gamma(j+b+k+1)}. \quad (2.3.6)$$

La solution générale s'obtient en faisant une combinaison linéaire de la solution particulière de l'équation homogène 2.3.1, qui est semblable à celle de l'équation 2.2.1), donc de la forme :

$$d_j = \frac{f(c)}{1-2c} (j+c) \frac{\Gamma(j+1-c)}{\Gamma(j+1+c)} + f(c) \frac{c}{2c-1} \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+c)},$$

et de la solution particulière 2.3.6. Ainsi nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *L'unique solution de l'équation aux différences satisfaisant aux conditions aux frontières est donnée par :*

$$d_n = \left\{ \frac{n+c}{1-2c} \frac{\Gamma(n+1-c)}{\Gamma(n+1+c)} + \frac{c}{2c-1} \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+c)} \right\} \\ + 2A \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)(j+b)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(j+b)}{\Gamma(j+a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+a+k)}{(j+k+1)\Gamma(j+b+k+1)}.$$

2.3.1. Cas spécial : $\mu = 0$

Supposons que $\mu = 0$; alors l'équation 2.3.1 devient une équation aux différences non homogène à coefficients constants :

$$d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1} = -\frac{2A}{n^2 \sigma^2}. \quad (2.3.7)$$

Remarque 2.3.1. *Dans le cas $\mu \neq 0$ nous pouvons faire un changement de variable, et puis effectuer les techniques de calcul du chapitre 3. Mais dans ce chapitre nous n'avons pas besoin d'étudier le cas $\mu \neq 0$. En effet nous utilisons les propriétés du mouvement Brownien et puis le cas $\mu = 0$ pour effectuer le travail.*

Dans le cas $\mu \neq 0$ nous u Avant de passer à la recherche de la solution de cette équation aux différences, démontrons le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit*

$$\Psi(1, z) = \frac{d}{dz} \Psi(z) = - \int_0^{\infty} \frac{te^{-zt}}{1-e^t} dt \quad \text{si } \Re(z) > 0$$

(la dérivée de la fonction digamma). Alors on a :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Psi(1, p+1) = -\Psi(1, 1) + n\Psi(1, n) + \Psi(n) - \Psi(1).$$

DÉMONSTRATION. On a :

$$\Psi(1, z) = -\int_0^{\infty} \frac{te^{-zt}}{1-e^{-t}} dt.$$

Alors en posant $x = e^{-t}$, cette expression devient :

$$\Psi^1(z) = \Psi(1, z) = -\int_0^1 \frac{x^{z-1} \ln x}{1-x} dx,$$

d'où

$$\Psi^1(p+1) = \Psi(1, p+1) = -\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x} dx$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n-1} \Psi(1, p+1) &= -\int_0^1 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{x^p \ln x}{1-x} dx \\ &= -\int_0^1 \frac{(x - x^n) \ln x}{(1-x)^2} dx \\ &= -\left\{ \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 1}} \left[\frac{(x - x^n) \ln x}{1-x} \right]_a^b - \int_0^1 \frac{(1 - nx^{n-1}) \ln x + 1 - x^{n-1}}{1-x} dx \right\} \\ &= -\left\{ -\int_0^1 \frac{1 \ln x}{1-x} dx \right. \\ &\quad \left. + n \int_0^1 \frac{x^{n-1} \ln x}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{1 - x^{n-1}}{1-x} dx \right\} \\ &= -\left\{ \Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-2} x^p dx \right\} \\ &= -\left\{ \Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \sum_{p=0}^{n-2} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 \right\} \\ &= -\left\{ \Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} \right\} \\ &= -\left\{ \Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Remarquons que [?] :

$$\Psi(k+1) - \Psi(k) = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \Psi(n) - \Psi(1),$$

d'où :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Psi(1, p+1) = -\{\Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \Psi(n) + \Psi(1)\}.$$

□

Nous pouvons trouver la solution de l'équation 2.3.7 à l'aide du lemme 2.3.1 :

Proposition 2.3.2. *L'unique solution satisfaisant l'équation 2.3.7 avec les conditions aux frontières données par 2.3.2 est :*

$$\begin{aligned} d_n = & -\frac{n-1}{N-1} \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \Psi(N) + N\Psi(1, N) - N\frac{\pi^2}{6} + \gamma \right\} \\ & + n \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\frac{\pi^2}{6} + \gamma \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\Psi(1, x) := \frac{d}{dx} \Psi(x)$$

est la fonction polygamma de première espèce.

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned} d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1} &= -\frac{2A}{\sigma^2 n^2} \\ \Leftrightarrow (d_{n+1} - d_n) - (d_n - d_{n-1}) &= -\frac{2A}{\sigma^2 n^2}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $w_{n+1} = d_{n+1} - d_n$, l'équation 2.3.7 devient

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{2A}{\sigma^2 n^2}.$$

Nous avons aussi [?] :

$$\Psi(1, p+1) - \Psi(1, p) = -\frac{1}{p^2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (w_{p+1} - w_p) &= \frac{-2A}{\sigma^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{-2A}{\sigma^2} (\Psi(1, 1) - \Psi(1, 1+n)), \end{aligned}$$

$$d_{n+1} - d_n = d_1 - d_0 + \frac{-2A}{\sigma^2}(\Psi(1, 1) - \Psi(1, 1 + n)),$$

$$d_{k+1} - d_k = d_1 - d_0 + \frac{-2A}{\sigma^2}(\Psi(1, 1) - \Psi(1, 1 + k)).$$

D'après le lemme 2.3.1

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Psi(1, p+1) = -\Psi(1, 1) + n\Psi(1, n) + \Psi(n) - \Psi(1).$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (d_{k+1} - d_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (d_1 - d_0) + \frac{-2A}{\sigma^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(1, 1) - \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(1, 1 + k) \right\} \\ &= (n-1)(d_1 - d_0) - \frac{2A}{\sigma^2} \{ (n-1)\Psi(1, 1), \\ &\quad + \Psi(1, 1) - n\Psi(1, n) - \Psi(n) + \Psi(1) \} \end{aligned}$$

$$d_n = (n-1)(d_1 - d_0) + \frac{2A}{\sigma^2} \{ \Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\Psi(1, 1) - \Psi(1) \}.$$

Notons que $n-1, c$ où c est une constante sont des solutions de l'équation homogène :

$$d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1} = 0.$$

En effet

$$([n-1] + 1) - 2[n-1] + ([n-1] - 1) = 0, \quad \text{et } c - 2c + c = 0.$$

Nous obtenons la solution générale :

$$\begin{aligned} d_n &= (n-1)(d_1 - d_0) + \frac{2A}{\sigma^2} \{ \Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\Psi(1, 1) - \Psi(1) \} + \beta \\ &= (n-1)(d_1 - d_0 + \alpha) + \frac{2A}{\sigma^2} \{ \Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\Psi(1, 1) - \Psi(1) \} + \beta \end{aligned}$$

qui est une combinaison linéaire de la solution particulière et de la solution générale.

En tenant compte des conditions initiales, $d_1 = d_N = 0$,

$$- d_1 = 0 \text{ alors } \beta = 0,$$

– $d_N = 0$ alors nous obtenons :

$$\alpha - d_0 = -\frac{1}{N-1} \frac{2A}{\sigma^2} \{\Psi(N) + N\Psi(1, N) - N\Psi(1, 1) - \Psi(1)\}.$$

Donc

$$d_n = -\frac{n-1}{N-1} \frac{2A}{\sigma^2} \{\Psi(N) + N\Psi(1, N) - N\Psi(1, 1) - \Psi(1)\} \\ + \frac{2A}{\sigma^2} \{\Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\Psi(1, 1) - \Psi(1)\}.$$

Mais $\Psi(1, 1) = \frac{\pi^2}{6}$, $\Psi(1) = -\gamma$, d'où :

$$d_n = -\frac{n-1}{N-1} \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \Psi(N) + N\Psi(1, N) - N\frac{\pi^2}{6} + \gamma \right\} \\ + n \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \Psi(n) + n\Psi(1, n) - n\frac{\pi^2}{6} + \gamma \right\}.$$

□

Dans le cas général, c'est-à-dire $\Delta x > 0$, nous pouvons résoudre l'équation suivante (avec $c = 0$) :

$$d_{j+1} - 2d_j + d_{j-1} = -\frac{2A}{(1+j\Delta x)^2 \sigma^2}, \quad (2.3.8)$$

pour $j = 0, 1, \dots, k$. La solution qui satisfait les conditions aux frontières

$$d_0 = d_k = 0,$$

est donnée par :

$$d_j = -\frac{j}{k} \frac{2A}{\sigma^2 (\Delta x)^3} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{1+k\Delta x}{\Delta x} \right) + (1+k\Delta x) \Psi \left(1, \frac{1+k\Delta x}{\Delta x} \right) \right. \\ \left. - (1+k\Delta x) \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ + \frac{2A}{\sigma^2 (\Delta x)^3} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{1+j\Delta x}{\Delta x} \right) + (1+j\Delta x) \Psi \left(1, \frac{1+j\Delta x}{\Delta x} \right) \right. \\ \left. - (1+j\Delta x) \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\}. \quad (2.3.9)$$

En fonction de $n := 1 + j\Delta x$ et $N = 1 + k\Delta x$, cette expression devient :

$$\begin{aligned} d_n = & -\frac{n-1}{N-1} \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \Delta x \Psi\left(\frac{N}{\Delta x}\right) + N \Psi\left(1, \frac{N}{\Delta x}\right) \right. \\ & \left. - N \Psi\left(1, \frac{1}{\Delta x}\right) - \Delta x \Psi\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right\} \\ & + \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \Delta x \Psi\left(\frac{n}{\Delta x}\right) + n \Psi\left(1, \frac{n}{\Delta x}\right) \right. \\ & \left. - n \Psi\left(1, \frac{1}{\Delta x}\right) - \Delta x \Psi\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Finalement, la durée moyenne du jeu est obtenue en multipliant d_n par Δt . Utilisant le fait que (voir 2.1.6) $\Delta t = (\Delta x)^2/A$, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.3.3. *Quand $\Delta x > 0$ et $\mu = 0$, la durée moyenne $D_n = (\Delta x)^2 d_n$ du jeu est donnée par :*

$$\begin{aligned} D_n = & -\frac{n-1}{N-1} \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi\left(\frac{N}{\Delta x}\right) + N \Psi\left(1, \frac{N}{\Delta x}\right) \right. \\ & \left. - N \Psi\left(1, \frac{1}{\Delta x}\right) - \Delta x \Psi\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right\} \\ & + \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi\left(\frac{n}{\Delta x}\right) + n \Psi\left(1, \frac{n}{\Delta x}\right) \right. \\ & \left. - n \Psi\left(1, \frac{1}{\Delta x}\right) - \Delta x \Psi\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right\}, \end{aligned}$$

pour $n = 1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N$.

Calculons la limite de D_n lorsque $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
D_n &= -\frac{n-1}{N-1} \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{N}{\Delta x} \right) + N \Psi \left(1, \frac{N}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad \left. - N \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{n}{\Delta x} \right) + n \Psi \left(1, \frac{n}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad \left. - n \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\
&= -\frac{n-1}{N-1} \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{N}{\Delta x} \right) + N \Psi \left(1, \frac{N}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad \left. - N \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) + (N-1) \Delta x \right\} \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2 \Delta x} \left\{ \Delta x \Psi \left(\frac{n}{\Delta x} \right) + n \Psi \left(1, \frac{n}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad \left. - n \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) + (n-1) \Delta x \right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\Psi(x) \sim \ln x \quad \text{et} \quad \Psi(1, x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \text{ assez grand,} \quad (2.3.10)$$

nous obtenons, quand Δx décroît vers zéro et $1 + k\Delta x$ reste égal à N ,

$$D_n \longrightarrow \frac{2}{\sigma^2} \left\{ - \left(\frac{n-1}{N-1} \right) \ln N + \ln n \right\} \quad \text{pour } n \in [1, N].$$

Remarquons que D_n correspond aussi à la fonction $m(x)$ donnée dans 2.1.4 si $c = 0$. Pour finir le travail, nous aurons besoin de trouver la valeur de la moyenne du nombre de transitions d_j dans le cas où $\mu \neq 0$ et $\Delta x > 0$. Pour cela, nous devons résoudre l'équation aux différences non homogène avec coefficients non constants 2.3.3. Nous pouvons obtenir la solution correspondant à l'équation non homogène. Cela implique un calcul très compliqué. Ainsi, nous allons utiliser le fait que nous savons calculer la durée d_j quand $\mu = 0$. Retournons au mouvement brownien géométrique $\{X(t), t \geq 0\}$ défini dans (2.1), et définissons, pour $c \neq 1/2$,

$$Y(t) = [X(t)]^{1-2c}.$$

Alors nous trouvons (voir Karlin et Taylor [?], p. 173) que $\{Y(t), t \geq 0\}$ reste encore un mouvement brownien géométrique, avec variance infinitésimale $\sigma_Y^2 =$

$(1 - 2c)^2 \sigma^2 y^2$, et avec une moyenne infinitésimale $\mu_Y = 0$. Dans le cas où $c = 1/2$, nous définissons :

$$Y(t) = \ln[X(t)]$$

et nous obtenons que $\{Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener avec $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y^2 = \sigma^2$.

Remarque. Quand $c = 1/2$, nous trouvons que $\{X(t), t \geq 0\}$ peut être exprimé comme l'exponentielle d'un processus de Wiener $\{W(t), t \geq 0\}$ ayant une moyenne infinitésimale $\mu_W = 0$ et variance infinitésimale $\sigma_W^2 = \sigma^2$. Quand nous faisons la transformation $Y(t) = [X(t)]^{1-2c}$, l'intervalle $[1, N]$ devient $[1, N^{1-2c}]$ (respectivement $[N^{1-2c}, 1]$) si $c < 1/2$ (respectivement $c > 1/2$). Supposons en premier lieu que $c < 1/2$. Nous avons (voir 0.0.2) :

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : Y(t) = 1 \text{ ou } N^{1-2c} \mid Y(0) = x^{1-2c}\}.$$

Maintenant, nous considérons la chaîne de Markov à temps discret avec espace des états $\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N^{1-2c}\}$ et avec probabilités de transition données par 2.1.10, 2.1.11 et 2.1.12. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons l'expression dans 2.3.8 pour le nombre moyen de transitions d_j à partir de l'état $1 + j\Delta x$. Cependant, nous remplaçons $1 + j\Delta x$ par n^{1-2c} et $1 + k\Delta x$ par N^{1-2c} , afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} d_n = & -\frac{n^{1-2c} - 1}{N^{1-2c} - 1} \frac{2A}{\sigma^2 (\Delta x)^3} \left\{ N^{1-2c} \Psi \left(1, \frac{N^{1-2c}}{\Delta x} \right) + \Delta x \Psi \left(\frac{N^{1-2c}}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ & + \frac{2A}{\sigma^2 (\Delta x)^3} \left\{ n^{1-2c} \Psi \left(1, \frac{n^{1-2c}}{\Delta x} \right) + \Delta x \Psi \left(\frac{n^{1-2c}}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

pour $n = 1, (1 + \Delta x)^{\frac{1}{1-2c}}, \dots, (1 + k\Delta x)^{\frac{1}{1-2c}} = N$. Supposons que chaque déplacement prend :

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{(1 - 2c)^2 A}$$

unité(s) de temps. En prenant la limite quand Δx décroît vers zéro (et $k \rightarrow \infty$), nous obtenons (en utilisant la formule dans 2.3.10) que :

$$D_n \longrightarrow \frac{2}{(1-2c)\sigma^2} \left\{ - \left(\frac{n^{1-2c} - 1}{N^{1-2c} - 1} \right) \ln N + \ln n \right\} \quad \text{pour } n \in [1, N]$$

Cette formule correspond à la fonction $m(x)$ dans 2.1.4 quand $c < 1/2$. Maintenant, si $c > 1/2$, nous considérons la chaîne de Markov ayant comme espace des états :

$$\left\{ \frac{1}{N^{2c-1}} = \frac{1}{1+k\Delta x}, \frac{1}{1+(k-1)\Delta x}, \dots, \frac{1}{1+\Delta x}, 1 \right\}$$

(et les probabilités de transition données par 3.1.5, 2.1.11 et 2.1.12). Pour obtenir d_j , nous devons encore résoudre l'équation aux différences dans 2.3.8, soumise aux conditions aux frontières $d_0 = d_k = 0$. Cependant, une fois que nous avons obtenu la solution, nous pouvons remplacer $1+j\Delta x$ par $(1+j\Delta x)^{-1}$ (et $1+k\Delta x$ par $(1+k\Delta x)^{-1}$). De plus, parce que :

$$j = \frac{(1+j\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

nous remplaçons j par

$$\frac{\frac{1}{1+j\Delta x} - 1}{\Delta x} = -\frac{j}{1+j\Delta x}$$

(et de manière similaire pour k).

Remarque. La quantité d_j représente ici la durée moyenne du nombre de transitions nécessaires pour finir le jeu quand la chaîne de Markov commence en $1/(1+j\Delta x)$, avec $j \in \{0, \dots, k\}$. Nous obtenons que :

$$\begin{aligned} d_j = & -\frac{j}{1+j\Delta x} \frac{1+k\Delta x}{k} \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \frac{1}{1+k\Delta x} \Psi \left(1, \frac{1}{(1+k\Delta x)\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \Delta x \Psi \left(\frac{1}{(1+k\Delta x)\Delta x} \right) - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ & + \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \frac{1}{1+j\Delta x} \Psi \left(1, \frac{1}{(1+j\Delta x)\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \Delta x \Psi \left(\frac{1}{(1+j\Delta x)\Delta x} \right) - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $N^{2c-1} = 1 + k\Delta x$, en posant $n^{2c-1} = 1 + j\Delta x$, nous déduisons de l'expression précédente que

$$\begin{aligned} d_n = & -\frac{n^{2c-1} - 1}{n^{2c-1}} \frac{N^{2c-1}}{N^{2c-1} - 1} \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \frac{1}{N^{2c-1}} \Psi \left(1, \frac{N^{1-2c}}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \Delta x \Psi \left(\frac{N^{2c-1}}{\Delta x} \right) - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ & + \frac{2A}{\sigma^2(\Delta x)^3} \left\{ \frac{1}{n^{2c-1}} \Psi \left(1, \frac{n^{1-2c}}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \Delta x \Psi \left(\frac{n^{2c-1}}{\Delta x} \right) - \Psi \left(1, \frac{1}{\Delta x} \right) - \Delta x \Psi \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \right\}, \quad (2.3.12) \end{aligned}$$

pour $n \in \{1, (1 + \Delta x)^{\frac{1}{2c-1}}, \dots, (1 + k\Delta x)^{\frac{1}{2c-1}} = N\}$. Finalement, si nous supposons, comme ci-dessus, que chaque étape de la chaîne de Markov prend

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{(2c-1)^2 A}$$

unité(s) de temps, nous trouvons que, quand Δx décroît vers zéro, la durée moyenne du jeu tend vers :

$$D_n = \frac{2}{(2c-1)\sigma^2} \left\{ \ln n - \left(\frac{1 - n^{1-2c}}{1 - N^{1-2c}} \right) \ln N \right\} \quad \text{pour } n \in [1, N].$$

Cette dernière expression est équivalente à la formule de $m(x)$ dans 2.1.4 quand $c > 1/2$.

Remarque. En fait, la formule de $m(x)$ est la même quand $c < 1/2$ ou $c > 1/2$.

En dernier lieu, dans les cas où $c = 1/2$, nous considérons la marche aléatoire avec espace des états $\{0, \Delta x, \dots, k\Delta x = \ln N\}$ et les probabilités de transition :

$$p_{j\Delta x, (j+1)\Delta x} = p_{j\Delta x, (j-1)\Delta x} = \frac{\sigma^2}{2A} \quad (2.3.13)$$

et

$$p_{j\Delta x, j\Delta x} = 1 - \frac{\sigma^2}{A}. \quad (2.3.14)$$

Alors nous pouvons résoudre l'équation aux différences non homogène :

$$d_{j+1} - 2d_j + d_{j-1} = -\frac{2A}{\sigma^2},$$

soumise aux conditions aux frontières $d_0 = d_k = 0$. Nous trouvons que :

$$d_j = -\frac{j}{k} \frac{A}{\sigma^2} k(1-k) + \frac{A}{\sigma^2} j(1-j).$$

Avec $\ln n := j \Delta x$ et $\ln N = k \Delta x$, nous obtenons que :

$$d_n = \frac{A}{\sigma^2 (\Delta x)^2} \{\ln n (\ln N - \ln n)\}, \quad (2.3.15)$$

pour $n \in \{1, e^{\Delta x}, \dots, e^{k \Delta x} = N\}$. En supposant que $\Delta t = (\Delta x)^2 / A$, nous déduisons encore une fois que, quand Δx décroît vers zéro :

$$D_n \longrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \{\ln n (\ln N - \ln n)\} \quad \text{pour } n \in [1, N]$$

Ainsi, nous retrouvons la formule 2.1.5 pour $m(x)$ quand $c = 1/2$. Nous pouvons montrer la proposition suivante :

Proposition 2.3.4. *Si l'espace des états de la chaîne de Markov est donné par :*

$$\{1, (1 + \Delta x)^{\frac{1}{1-2c}}, \dots, (1 + k \Delta x)^{\frac{1}{1-2c}} = N\}$$

(respectivement)

$$\{1, (1 + \Delta x)^{\frac{1}{2c-1}}, \dots, (1 + k \Delta x)^{\frac{1}{2c-1}} = N\},$$

où $c < 1/2$ (respectivement $c > 1/2$), et les probabilités de transition sont comme dans 2.1.10, 2.1.11 et 2.1.12, alors la valeur de la durée moyenne du nombre de transitions d_n nécessaires est donnée par 2.3.11 (respectivement 2.3.12). Si $n \in \{1, e^{\Delta x}, \dots, e^{k \Delta x} = N\}$ et les probabilités de transition sont celles dans 2.3.13 et 2.3.14, alors la valeur de d_n est donnée par 2.3.15.

2.4. CONCLUSION

Nous avons obtenu des formules explicites et précises pour les quantités p_j et d_j définies respectivement dans 2.1.14 et 2.1.15 pour diverses chaînes de Markov à temps discret qui convergent, au moins dans un intervalle fini, vers un mouvement brownien géométrique. Dans le cas de la probabilité p_j de frapper la frontière N avant 1, parce que l'équation aux différences appropriée est homogène, nous avons pu calculer cette probabilité pour n'importe quelle valeur de $c = \mu/\sigma^2$ en considérant une chaîne de Markov d'espace des états $\{1, (1+\Delta x), \dots, (1+k \Delta x) = N\}$. Cependant, pour obtenir d_j nous avons d'abord résolu l'équation aux différences appropriée lorsque $c = 0$. Puis, faisant usage de la formule que nous avons obtenue, nous avons pu déduire la solution pour

tout $c \in \mathbb{R}$ en considérant une chaîne de Markov qui converge vers un mouvement brownien géométrique transformé. Le processus transformé reste encore un mouvement brownien géométrique avec $\mu = 0$ (si $c \neq 1/2$), ou un processus de Wiener avec $\mu = 0$ (si $c = 1/2$). Dans chaque cas, nous avons montré que l'expression que nous avons dérivée tend vers la quantité correspondante pour le mouvement brownien géométrique. Dans le cas de la durée moyenne du jeu, l'incrément du temps Δt devait être choisi convenablement. Comme c'est bien connu, le mouvement brownien géométrique est un modèle très important en mathématiques financières. En pratique, les cours des actions ou des produits de base varient discrètement dans le temps. Par conséquent, il est intéressant de trouver des formules pour p_j et d_j pour les chaînes de Markov qui sont aussi proches que nous voulons du processus de diffusion. Maintenant que nous avons calculé explicitement la valeur de p_j et d_j pour les chaînes de Markov ayant des probabilités de transition qui impliquent des paramètres μ et σ^2 qui sont les mêmes pour tous les états, nous pourrions envisager des chaînes de Markov asymétriques. Par exemple, dans un premier temps l'espace des états pourrait être $\{1, \dots, N_1, \dots, N_2\}$, et nous pourrions avoir :

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } n \in \{1, \dots, N_1 - 1\} \\ \mu_2 & \text{si } n \in \{N_1 + 1, \dots, N_2\} \end{cases}$$

(et de même pour σ^2). Lorsque la chaîne de Markov frappe N_1 , elle va à $N_1 + 1$ (respectivement $N_1 - 1$) avec une probabilité de p_0 (respectivement de $1 - p_0$). En augmentant l'espace des états à $\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k_1 \Delta x = N_1, \dots, 1 + k_2 \Delta x = N_2\}$, et en prenant la limite quand Δx décroît vers zéro (avec k_1 et k_2 allant à l'infini de façon appropriée), on obtiendrait les quantités qui correspondent à p_j et d_j pour un mouvement brownien géométrique asymétrique. Les différentes valeurs possibles de σ^2 , dépendant de l'état n de la chaîne de Markov, reflètent le fait que la volatilité est susceptible de dépendre du prix de l'action ou de la marchandise. Enfin, nous pourrions essayer de trouver les formules pour p_j et d_j pour d'autres chaînes de Markov à temps discret qui convergent vers des processus de diffusion importants.

Chapitre 3

UNE VERSION DISCRÈTE DU PROCESSUS COX-INGERSOLL-ROSS (CIR)

En mathématiques financières, le processus stochastique qui est largement utilisé pour modéliser les taux d'intérêt est le processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) $\{r(t), t \geq 0\}$ défini par l'équation différentielle stochastique :

$$dr(t) = \theta (\mu - r(t)) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dB(t) \quad (3.0.1)$$

où θ , μ et σ sont des paramètres positifs, et $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard. Ce processus est un processus de diffusion particulier. Par conséquent, il est supposé que les taux d'intérêt varient de façon continue et qu'ils peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle, à savoir ici l'intervalle $[0, \infty)$. Cependant, dans la pratique, les taux d'intérêt ne varient pas de façon complètement continue dans le temps, et leurs valeurs sont arrondies à un nombre fini de nombres décimaux. Par conséquent, il est intéressant d'examiner les versions discrétisées de ce processus. Des versions discrètes du processus CIR ont été déjà proposées dans la littérature. Voir, par exemple, Sun (1992) [?] et Alfonsi (2005)[?] et (2010) [?]. Dans cette thèse, nous considérons une chaîne de Markov à temps discret $\{X_{m\Delta t}, m = 0, 1 \dots\}$ qui converge faiblement vers le processus de CIR. Nous sommes intéressés par *le soi-disant problème de la ruine du joueur* pour la chaîne de Markov en question. Nous supposons que la valeur initiale x_0 du processus appartient à un ensemble d'états

$\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x = N\}$, et nous allons déterminer la probabilité que le processus frappe N avant 1 , et aussi le nombre moyen de transitions nécessaires pour finir le *jeu*, ce qui arrive quand $X_{m\Delta t}$ prend la valeur N ou 1 .

Remarque 3.0.1. *En fait, dans le problème de la ruine du joueur classique, on tente de trouver la probabilité que la chaîne frappera 0 avant un entier positif N . Cependant, nous pouvons définir la ruine différemment selon le contexte, ou simplement faire un changement de variable.*

Dans la prochaine section, nous allons définir la chaîne de Markov $\{X_{m\Delta t}, m = 0, 1, \dots\}$ qui converge vers le processus de CIR et nous allons calculer explicitement la probabilité

$$p_j := P[X_{T_j} = N] \quad (3.0.2)$$

où

$$T_j := \inf\{m > 0 : X_{m\Delta t} = 1 \text{ ou } N \mid X_0 = 1 + j\Delta x\}, \quad (3.0.3)$$

pour $j = 1, \dots, k - 1$. Cela revient à résoudre une équation aux différences homogène du second ordre avec coefficients non constants. Puis, dans la section 3.3, nous allons obtenir une formule exacte pour

$$d_j := E[T_j]. \quad (3.0.4)$$

Cette fois, l'équation aux différences du second ordre avec coefficients non constants que nous devons résoudre n'est plus homogène. Dans les deux cas, nous allons montrer que la formule obtenue pour la chaîne de Markov tend vers la quantité correspondante pour le processus de CIR. Enfin, nous terminerons ce travail par quelques remarques finales de la section 3.4.

3.1. CALCUL DES PROBABILITÉS p_j

Prenons la période du temps $[0, T]$, partitionnons la en n intervalles de mêmes longueurs $\Delta t = T/n$. Ces intervalles vont avoir comme extrémités $t_m = m\Delta t$ $m = 0, \dots, k$.

Nous allons construire une suite de processus binomiales qui converge en distribution vers le processus 3.0.1.

Soit $\{R_{t_m} = r_{t_m}, m = 0, 1, \dots, k\}$ le processus à temps discret avec espace d'état

$$\{1 - k\Delta x, \dots, 1 - \Delta x, 1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x\} \quad \text{où } (\Delta x)^2 = A\Delta t.$$

décrit comme suit :

il est constant sur un nœud. Et, à un nœud donné, le processus saute vers le haut (bas) avec une distance Δx , $(-\Delta x)$ avec les probabilités θ (respectivement, ϕ), et avec une probabilité $1 - \theta - \phi$ si il ne bouge pas du nœud. voir figure ci-dessous.

$$R_{\Delta x}^+(R_{t_m}, t_m) = 1 + (m + 1)\Delta x$$

$$R_{\Delta x}^-(R_{t_m}, t_m) = 1 + (m - 1)\Delta x$$

$$R_{t_m} = 1 + m\Delta x,$$

$$\theta : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$(r_{t_m}, t_m) \longmapsto \theta(r_{t_m}, t_m)$$

$$\phi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$$

$$(r_{t_m}, t_m) \longmapsto \phi(r_{t_m}, t_m)$$

$$R^\pm : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$(r_{t_m}, t_m) \longmapsto R^\pm(r_{t_m}, t_m),$$

avec

$$R^-(r_{t_m}, t_m) \leq R^+(r_{t_m}, t_m), \quad (3.1.1)$$

$$\mathbb{P} [R_{t_{m+1}} = R^+(r_{t_m}, t_m) \mid R_{t_m} = r_{t_m}] = \phi(r_{t_m}, t_m)$$

$$\mathbb{P} [R_{t_{m+1}} = R^-(r_{t_m}, t_m) \mid R_{t_m} = r_{t_m}] = \phi(r_{t_m}, t_m)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [R_{t_{m+1}} = R_{t_m} = c \mid R_{t_m} = r_{t_m}] &= 1 - \phi(r_{t_m}, t_m) \\ &\quad - \theta(r_{t_m}, t_m). \end{aligned}$$

Maintenant nous allons exprimer les probabilités de transition θ , ϕ en fonction de la variance infinitésimale, et la dérive locale de l'équation 3.0.1, Pour cela nous allons utiliser la technique de calcul qui se trouve dans *Cox et Miller*.

Supposons que le processus à un instant donné est sur un nœud avec la valeur $R_{t_m} = r_{t_m}$, et dans un intervalle de temps assez petit qui suit elle change de position, et elle est à la position $R^+(r_{t_m}, t_m)$, (resp $R^-(r_{t_m}, t_m)$) avec les probabilités $\phi(r_{t_m}, t_m)$, (resp $\theta(r_{t_m}, t_m)$) et avec une probabilité $1 - \phi(r_{t_m}, t_m) - \theta(r_{t_m}, t_m)$ si il reste sur la même position le pas des déplacements sont respectivement $R^+(r_{t_m}, t_m) - R_{t_m} = \Delta x$, $R^-(r_{t_m}, t_m) - R_{t_m} = -\Delta x$ et $R_{t_m} - R_{t_m} = 0$. Ainsi nous obtenons la moyenne de changement de position :

$$\begin{aligned} \theta(r_{t_m}, t_m)\Delta x - \phi(r_{t_m}, t_m)\Delta x + 0(1 - \phi(r_{t_m}, t_m) - \theta(r_{t_m}, t_m)) \\ = \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\}\Delta x. \end{aligned}$$

et la variance de changement de position est :

$$\begin{aligned} \theta(r_{t_m}, t_m)(\Delta x)^2 - \phi(r_{t_m}, t_m)(\Delta x)^2 + 0^2(1 - \phi(r_{t_m}, t_m) \\ - \theta(r_{t_m}, t_m)) - [(\theta(r_{t_m}, t_m) \\ - \phi(r_{t_m}, t_m))\Delta x]^2 \\ = [\theta(r_{t_m}, t_m) + \phi(r_{t_m}, t_m) \\ - \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\}^2] (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

D'autre part : La **moyenne infinitésimale** $m(r; t)$ et la **variance infinitésimale** $v(r; t)$ du processus stochastique à temps continu et à état continu $\{R(t, s), t \in T\}$ sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} [\{R_{t_{m+1}} - R_{t_m}\} | R_{t_m} = r_{t_m}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{dR(t)}{dt} \right] \\ &= \theta(\mu - R_{t_m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V[\{R_{t_{m+1}} - R_{t_m}\} | R_{t_m}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} [\theta(r_{t_m}, t_m) + \phi(r_{t_m}, t_m) - \\
&\quad - \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\}^2] \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \\
&= V\left[\frac{dR(t)}{dt}\right] \\
&= \sigma^2 R_{t_m}.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{cases} \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \theta(\mu - R_{t_m}) \\ \left[\theta(r_{t_m}, t_m) + \phi(r_{t_m}, t_m) - \{\theta(r_{t_m}, t_m) - \phi(r_{t_m}, t_m)\}^2 \right] \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 R_{t_m}. \end{cases}$$

En résolvant le système ci-dessous nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\theta(r_{t_m}, t_m) &= \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} + \Delta x \theta(\mu - r_{t_m}) + \Delta t (\theta(\mu - r_{t_m}))^2], \\
\phi(r_{t_m}, t_m) &= \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} - \Delta x \theta(\mu - r_{t_m}) + \Delta t (\theta(\mu - r_{t_m}))^2].
\end{aligned}$$

Mais comme les r_{t_m} sont bornées alors on peut écrire

$$\Delta t (\theta(\mu - r_{t_m}))^2 = O(\Delta t).$$

ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\theta(r_{t_m}, t_m) &= \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} + \Delta x \theta(\mu - r_{t_m}) + O(\Delta t)], \\
\phi(r_{t_m}, t_m) &= \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} - \Delta x \theta(\mu - r_{t_m}) + O(\Delta t)].
\end{aligned}$$

Ainsi en faisant l'approximation suivante :

$$\theta(r_{t_m}, t_m) \simeq \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} + \Delta x \theta(\mu - r_{t_m})],$$

et

$$\phi(r_{t_m}, t_m) \simeq \frac{1}{2A} [\sigma^2 r_{t_m} - \Delta x \theta(\mu - r_{t_m})].$$

par abus de notation nous avons :

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j+1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ \theta \mu \Delta x + (\sigma^2 - \theta \Delta x)(1 + j\Delta x) \} \quad (3.1.2)$$

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j-1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ -\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 + \theta \Delta x)(1 + j\Delta x) \} \quad (3.1.3)$$

et

$$p_{1+j\Delta x, 1+j\Delta x} = 1 - \frac{\sigma^2}{A}(1 + j\Delta x) \quad (3.1.4)$$

où $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

En utilisant le corollaire 1.8.1, nous voyons que la chaîne de Markov converge faiblement vers le processus CIR $\{r(t), t \geq 0\}$ quand Δx and Δt décroissent vers zéro, pourvu que

$$(\Delta x)^2 = A\Delta t \text{ et } (1 + j\Delta x)\sigma^2 < A \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}$$

Supposons que les probabilités de transition pour la chaîne de Markov discrète $\{X_{m\Delta t}, m = 0, 1, \dots\}$ ayant l'espace des états $\{1, 1 + \Delta x, \dots, 1 + k\Delta x\}$, où k est tel que $1 + k\Delta x = N$, sont données par :

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j+1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ \theta\mu\Delta x + (\sigma^2 - \theta\Delta x)(1 + j\Delta x) \}, \quad (3.1.5)$$

$$p_{1+j\Delta x, 1+(j-1)\Delta x} = \frac{1}{2A} \{ -\theta\mu\Delta x + (\sigma^2 + \theta\Delta x)(1 + j\Delta x) \}, \quad (3.1.6)$$

et

$$p_{1+j\Delta x, 1+j\Delta x} = 1 - \frac{\sigma^2}{A}(1 + j\Delta x), \quad (3.1.7)$$

où $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Remarque 3.1.1. Les constantes θ , μ et σ doivent être telles que les probabilités définies ci-dessus, c'est-à-dire en 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, appartiennent toutes à l'intervalle $[0, 1]$. Pour Δx assez petit, cela sera vrai si $N\sigma^2 < A$.

Supposons pour ce qui suit que :

$$(\Delta x)^2 = A\Delta t \quad (3.1.8)$$

et

$$(1 + j\Delta x)\sigma^2 < A \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}. \quad (3.1.9)$$

Remarque 3.1.2. Remarquons que la condition 3.1.9 est satisfaite si et seulement si (puisque $1 + k\Delta x = N$)

$$N\sigma^2 < A,$$

ce qui est la même condition que dans la remarque précédente pour s'assurer que les probabilités définies en 3.1.2, 3.1.3 et 3.1.4 appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$ (pour Δx assez petit).

3.1.1. Calcul de p_j dans le cas où $\Delta x = 1$

Pour obtenir la probabilité p_j définie par 3.0.2, nous allons supposer que $\Delta x = 1$. Alors, l'espace des états devient $\{1, 2, \dots, N\}$, et les probabilités de transition peuvent être réécrites comme suit :

$$p_{j,j+1} = \frac{1}{2A} \{ \theta \mu + (\sigma^2 - \theta)j \}, \quad (3.1.10)$$

$$p_{j,j-1} = \frac{1}{2A} \{ -\theta \mu + (\sigma^2 + \theta)j \}. \quad (3.1.11)$$

et

$$p_{j,j} = 1 - \frac{\sigma^2 j}{A}, \quad (3.1.12)$$

pour $j \in \{2, \dots, N-1\}$, où nous supposons que les paramètres θ , μ et σ sont tels que les probabilités appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. En conditionnant sur la première transition de la chaîne de Markov ou en utilisant la proposition 1.3.2, on obtient que la probabilité p_j satisfait l'équation aux différences :

$$p_j = p_{j,j+1}p_{j+1} + p_{j,j-1}p_{j-1} + p_{j,j}p_j, \quad (3.1.13)$$

pour $j = 2, \dots, N-1$. Les conditions aux frontières sont :

$$p_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_N = 1. \quad (3.1.14)$$

En substituant les probabilités ci-dessus et en simplifiant, nous trouvons que cette équation 3.1.13 peut être réécrite comme suit :

$$0 = \{ \theta \mu + (\sigma^2 - \theta)j \} (p_{j+1} - p_j) + \{ -\theta \mu + (\sigma^2 + \theta)j \} (p_{j-1} - p_j). \quad (3.1.15)$$

Posons :

$$w_j = p_{j+1} - p_j \quad (3.1.16)$$

et :

$$\alpha = \frac{\theta \mu}{\sigma^2 - \theta}, \quad \beta = -\frac{\theta \mu}{\sigma^2 + \theta}, \quad \rho = \frac{\sigma^2 + \theta}{\sigma^2 - \theta}, \quad (3.1.17)$$

où nous supposons que $\sigma^2 \neq \theta$. Alors l'équation 3.1.15 devient :

$$w_j = \rho \left(\frac{j + \beta}{j + \alpha} \right) w_{j-1}, \quad (3.1.18)$$

pour $j = 2, \dots, N - 1$. Nous trouvons facilement la solution satisfaisant la condition aux frontières :

$$w_1 = p_2 - p_1 = p_2 - 0$$

est :

$$w_j = \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(j + \alpha + 1)} p_2 \rho^{j-1}. \quad (3.1.19)$$

Il s'ensuit alors :

$$1 = p_N = \sum_{j=1}^{N-1} w_j = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(j + \alpha + 1)} p_2 \rho^{j-1}.$$

Nous déduisons de cette expression que :

$$p_2 = \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(j + \alpha + 1)} \rho^{j-1} \right\}^{-1}.$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Quand $\Delta x = 1$, la probabilité p_j définie en 3.0.2 est donnée par :*

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \rho^{i-1}}{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \rho^{i-1}}, \quad (3.1.20)$$

pour $j = 1, \dots, N$, où, par convention, la somme $\sum_{i=1}^{j-1}$ est égale à 0 si $j = 1$.

Remarque 3.1.3. Nous pouvons exprimer p_j sous la forme d'une fonction spéciale.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^{i-1} &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^i - \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^i - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\beta + 1)_i}{(\alpha + 1)_i} \rho^i - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1)_i (\beta + 1)_i}{i! (\alpha + 1)_i} \rho^i - 1 \right\} \\
&:= \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ {}_2F_1(1, \beta + 1, \alpha + 1, \rho)_{\text{tr}(j)} - 1 \right\},
\end{aligned}$$

où

$$(a)_i := a(a + 1) \cdots (a + i - 1)$$

et ${}_2F_1(1, \beta + 1, \alpha + 1, \rho)_{\text{tr}(j)}$, pour tout entier j , est la série hypergéométrique tronquée (voir [?]). Il s'ensuit que :

$$p_j = \frac{{}_2F_1(1, \beta + 1, \alpha + 1, \rho)_{\text{tr}(j)} - 1}{{}_2F_1(1, \beta + 1, \alpha + 1, \rho)_{\text{tr}(N)} - 1}.$$

Remarque 3.1.4. Dans le cas particulier où $\mu = 0$, nous avons que $\alpha = \beta = 0$, et la probabilité p_j devient :

$$p_j = \frac{\rho^{j-1} - 1}{\rho^{N-1} - 1}.$$

3.1.2. Calcul de p_j dans le cas où $\Delta x > 0$

Dans le cas général où $\Delta x > 0$, la probabilité p_j satisfait à l'équation aux différences :

$$\begin{aligned}
p_j &= \frac{1}{2A} \left\{ \theta \mu \Delta x + (\sigma^2 - \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \right\} p_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{2A} \left\{ -\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 + \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \right\} p_{j-1} \\
&\quad + \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{A}(1 + j \Delta x) \right\} p_j,
\end{aligned}$$

qui s'écrit encore :

$$0 = \{ \theta \mu \Delta x + (\sigma^2 - \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \} (p_{j+1} - p_j) \\ + \{ -\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 + \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \} (p_{j-1} - p_j),$$

qui, en effectuant le changement de variable $w_j := p_{j+1} - p_j$, devient :

$$w_j = \frac{-\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 + \theta \Delta x)(1 + j \Delta x)}{\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 - \theta \Delta x)(1 + j \Delta x)} w_{j-1}.$$

Cette équation est valable pour $j = 1, 2, \dots, k-1$. De plus,

$$w_0 = p_1 - p_0 = p_1 - 0 = p_1.$$

Posons :

$$\rho_{\Delta x} := \frac{\sigma^2 + \theta \Delta x}{\sigma^2 - \theta \Delta x}. \quad (3.1.21)$$

Nous trouvons que :

$$w_j = \rho_{\Delta x}^j \frac{\Gamma(\frac{1}{\Delta x} + \frac{\theta \mu}{\sigma^2 - \theta \Delta x} + 1) \Gamma(\frac{1+j\Delta x}{\Delta x} - \frac{\theta \mu}{\sigma^2 + \theta \Delta x} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{\Delta x} - \frac{\theta \mu}{\sigma^2 + \theta \Delta x} + 1) \Gamma(\frac{1+j\Delta x}{\Delta x} + \frac{\theta \mu}{\sigma^2 - \theta \Delta x} + 1)} p_1. \quad (3.1.22)$$

En utilisant la condition initiale $p_k = 1$, et le fait que $p_j = \sum_{i=0}^{j-1} w_i$, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *Dans le cas général où $\Delta x > 0$, nous pouvons écrire la probabilité p_j définie en 3.0.2 comme suit :*

$$p_j = \frac{\sum_{i=0}^{j-1} \rho_{\Delta x}^i \frac{\Gamma(\frac{1+i\Delta x}{\Delta x} - \frac{\theta \mu}{\sigma^2 + \theta \Delta x} + 1)}{\Gamma(\frac{1+i\Delta x}{\Delta x} + \frac{\theta \mu}{\sigma^2 - \theta \Delta x} + 1)}}{\sum_{i=0}^{k-1} \rho_{\Delta x}^i \frac{\Gamma(\frac{1+i\Delta x}{\Delta x} - \frac{\theta \mu}{\sigma^2 + \theta \Delta x} + 1)}{\Gamma(\frac{1+i\Delta x}{\Delta x} + \frac{\theta \mu}{\sigma^2 - \theta \Delta x} + 1)}}, \quad \text{pour } j = 0, \dots, k, \quad (3.1.23)$$

où, par convention, la somme $\sum_{i=0}^{j-1}$ est nulle si $j = 0$.

Remarque 3.1.5. *La formule 3.1.20 dans le cas où $\Delta x = 1$ ne s'obtient pas directement de la formule 3.1.23 ci-dessus, parce que l'indice j varie de 0 à k , tandis que dans 3.1.20 il appartient à l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$.*

Pour conclure cette section, nous allons montrer que l'expression de p_j dans la proposition précédente converge vers la quantité correspondante pour le processus CIR défini en 3.0.1. Soit

$$\tau(r) := \inf\{t > 0 : r_t = 1 \text{ ou } N \mid r_0 = r\}, \quad (3.1.24)$$

où $r \in (1, N)$. La fonction :

$$p(r) := P[r_{\tau(r)} = N]$$

satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante (voir, par exemple, Lefebvre [?], p. 220) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r p''(r) + \theta(\mu - r)p'(r) = 0,$$

soumise aux conditions aux frontières :

$$p(1) = 0 \quad \text{et} \quad p(N) = 1.$$

Il vient directement que :

$$p(r) = \frac{\int_1^r t^{-2\theta\mu/\sigma^2} e^{2t\theta/\sigma^2} dt}{\int_1^N t^{-2\theta\mu/\sigma^2} e^{2t\theta/\sigma^2} dt}, \quad (3.1.25)$$

pour $1 \leq r \leq N$. Notons que quand μ décroît vers zéro, la probabilité $p(r)$ tend vers :

$$\lim_{\mu \downarrow 0} p(r) = \frac{e^{2r\theta/\sigma^2} - e^{2\theta/\sigma^2}}{e^{2N\theta/\sigma^2} - e^{2\theta/\sigma^2}}.$$

Cependant quand $\mu = 1$, $p(r)$ peut être exprimée à l'aide de la fonction gamma incomplète.

Remarque 3.1.6. Si la relation $2\theta\mu \geq \sigma^2$ est vérifiée, alors le processus $\{r_t, t \geq 0\}$ reste toujours positif (si $r_0 > 0$). Dans le cas contraire, le processus CIR peut atteindre l'origine. Il s'ensuit que nous pouvons considérer ce processus dans un intervalle quelconque $[a, b]$, avec $a \geq 0$ ou $a > 0$, dépendant de la valeur des paramètres θ , μ et σ . Cependant, dans le cas de la chaîne de Markov, il est naturel de commencer en 0 ou 1.

Maintenant, posons $x := 1 + j\Delta x$. Nous pouvons dénoter p_j par $p(x)$. Alors $p_{j+1} = p(x + \Delta x)$, de sorte que

$$w_j = p(x + \Delta x) - p(x) \simeq p'(x)\Delta x$$

(l'égalité sera obtenue à la limite lorsque Δx décroît vers 0). De plus, puisque $p_1 = p(1 + \Delta x)$ et $p(1) = p_0 = 0$, l'équation 3.1.22 devient :

$$\begin{aligned} p'(x)\Delta x &\simeq \rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + 1\right)\Gamma\left(\frac{x}{\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} + 1\right)\Gamma\left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + 1\right)} \\ &\quad \times [p(1 + \Delta x) - p(1)]. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Soit :

$$f(x) := \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + 1\right)}.$$

Pour une quantité Δx assez petite, nous pouvons écrire :

$$f(x) \propto \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{-\frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x}} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right].$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x)}{f(1)} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} x^{-\frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x}} \frac{[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)]}{[1 + O(\Delta x)]} = x^{-2\theta\mu/\sigma^2}.$$

Finalement, lorsque Δx décroît vers zéro :

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} &= \exp \left\{ \ln \left(\rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{x-1}{\Delta x} \left[\ln \left(1 + \frac{\theta\Delta x}{\sigma^2} \right) - \ln \left(1 - \frac{\theta\Delta x}{\sigma^2} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ (x-1)(2\theta/\sigma^2) + O(\Delta x) \right\}, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} = \exp \left\{ (x-1)(2\theta/\sigma^2) \right\}.$$

Ainsi, en divisant les deux côtés de 3.1.26 par Δx et en prenant la limite lorsque Δx décroît vers zéro, nous obtenons que :

$$p'(x) = \exp \left\{ (x-1)(2\theta/\sigma^2) \right\} x^{-2\theta\mu/\sigma^2} p'(x)|_{x=1},$$

ce qui implique que :

$$p(x) = \kappa \int_1^x e^{2\theta y/\sigma^2} y^{-2\theta\mu/\sigma^2} dy,$$

où κ est une constante. En utilisant la condition limite $p(N) = 1$, nous concluons que :

$$p(x) = \frac{\int_1^x e^{2\theta y/\sigma^2} y^{-2\theta\mu/\sigma^2} dy}{\int_1^N e^{2\theta y/\sigma^2} y^{-2\theta\mu/\sigma^2} dy},$$

pour $1 \leq x \leq N$. Ainsi, nous retrouvons la formule 3.1.25 du processus CIR.

3.2. CALCUL DU NOMBRE DE TRANSITIONS NÉCESSAIRES d_j POUR FINIR LE JEU

Nous passons maintenant au problème de calculer le nombre moyen d_j de transitions que prend la chaîne de Markov $\{X_{m\Delta t}, m = 0, 1, \dots\}$, débutant en $X_0 = 1 + j\Delta x$, pour atteindre 1 ou $1 + k\Delta x = N$. En premier lieu, nous calculons la quantité correspondante pour le processus CIR, c'est-à-dire :

$$m(r) := E[\tau(r)],$$

où la variable aléatoire $\tau(r)$ est définie en 3.1.24. La fonction $m(r)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire du second ordre (voir Lefebvre [?], p. 220) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r m''(r) + \theta(\mu - r)m'(r) = -1,$$

soumise aux conditions limites

$$m(1) = m(N) = 0.$$

La solution générale est de la forme :

$$m(r) = \int r^{-\omega\mu} e^{\omega r} \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} \int r^{\omega\mu-1} e^{-\omega r} dr + c_1 \right\} dr + c_2,$$

où

$$\omega := \frac{2\theta}{\sigma^2},$$

et nous trouvons que la solution particulière qui satisfait les conditions limites est :

$$m(r) = \frac{2}{\sigma^2} \int_1^r x^{-\omega\mu} e^{\omega x} \left\{ \int_x^N y^{\omega\mu-1} e^{-\omega y} dy + c_0 \right\} dx, \quad (3.2.1)$$

où

$$c_0 := -\frac{\int_1^N x^{-\omega\mu} e^{\omega x} \left\{ \int_x^N y^{\omega\mu-1} e^{-\omega y} dy \right\} dx}{\int_1^N x^{-\omega\mu} e^{\omega x} dx}.$$

3.2.1. Le cas où $\Delta x = 1$

Lorsque $\Delta x = 1$, l'espace des états de la chaîne de Markov est l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. En conditionnant sur le résultat de la première transition de la chaîne de Markov, et en tenant compte de cette première transition, on obtient que la quantité d_j définie en 3.0.4 satisfait l'équation aux différences linéaire non homogène :

$$d_j = p_{j,j+1}d_{j+1} + p_{j,j-1}d_{j-1} + p_{j,j}d_j + 1, \quad \text{pour } j = 2, \dots, N-1,$$

où les probabilités $p_{j,j+1}$, $p_{j,j-1}$ et $p_{j,j}$ sont définies respectivement en 3.1.10, 3.1.11 et 3.1.12. Les conditions limites sont :

$$d_1 = d_N = 0. \quad (3.2.2)$$

Nous avons :

$$d_j = \frac{1}{2A} \{ \theta\mu + (\sigma^2 - \theta)j \} d_{j+1} + \frac{1}{2A} \{ -\theta\mu + (\sigma^2 + \theta)j \} d_{j-1} \\ + \left(1 - \frac{j\sigma^2}{A} \right) d_j + 1.$$

Après un réarrangement, nous obtenons :

$$-2A = \{ \theta\mu + (\sigma^2 - \theta)j \} d_{j+1} + \{ -\theta\mu + (\sigma^2 + \theta)j \} d_{j-1} - 2j\sigma^2 d_j \quad (3.2.3) \\ = \{ \theta\mu + (\sigma^2 - \theta)j \} (d_{j+1} - d_j) - \{ -\theta\mu + (\sigma^2 + \theta)j \} (d_j - d_{j-1}).$$

Puisque l'équation homogène correspondant à 3.2.3 est la même qu'en 3.1.15, nous n'avons qu'à trouver la solution particulière de l'équation non homogène.

Posons :

$$v_{j+1} := d_{j+1} - d_j.$$

Nous avons donc besoin d'une solution particulière de l'équation :

$$-2A = \{ \theta\mu + (\sigma^2 - \theta)j \} v_{j+1} - \{ -\theta\mu + (\sigma^2 + \theta)j \} v_j, \quad (3.2.4)$$

qui peut être réécrite comme suit :

$$v_{j+1} - \rho \left(\frac{j + \beta}{j + \alpha} \right) v_j = \frac{\lambda}{j + \alpha}, \quad (3.2.5)$$

où

$$\lambda := -\frac{2A}{\sigma^2 - \theta}$$

(avec $\sigma^2 \neq \theta$) et α , β et ρ sont définis en 3.1.17. Maintenant, en utilisant le théorème 1.5.1, nous obtenons la solution particulière v_j^* de 3.2.5, qui est donnée par :

$$v_j^* = -\frac{\lambda \Gamma(j + \beta)}{\rho \Gamma(j + \alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + \alpha + m)}{\Gamma(j + \beta + m + 1)} \frac{1}{\rho^m}. \quad (3.2.6)$$

Proposition 3.2.1. *Dans le cas où $\Delta x = 1$, le nombre moyen d_j de transitions nécessaires pour que la chaîne de Markov, commençant en j , atteigne soit 1 ou N peut être exprimé comme suit :*

$$d_j = \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^{i-1} - \frac{\lambda}{\rho} \frac{1}{i + \beta} F(1, i + \alpha; i + \beta + 1; \rho^{-1}) \right\} \quad (3.2.7)$$

pour $j = 1, \dots, N$, où la constante k_0 est donnée par :

$$k_0 = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i + \beta} F(1, i + \alpha; i + \beta + 1; \rho^{-1})}{\rho \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^{i-1}},$$

et

$$F(a, b; c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(b + n)}{\Gamma(c + n)} \frac{z^n}{n!}$$

est la fonction ou série hypergéométrique de Gauss (Abramowitz et Stegun [?], p. 556), qui est aussi dénotée par ${}_2F_1(a, b; c; z)$. De plus, comme ci-dessus, la somme $\sum_{i=1}^{j-1}$ est égale à 0 si $j = 1$.

DÉMONSTRATION. En utilisant la solution 3.1.19 de l'équation 3.1.18, et le fait que $d_1 = 0$, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i=1}^{j-1} v_i = \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^{i-1} + v_i^* \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(i + \alpha + 1)} \rho^{i-1} - \frac{\lambda \Gamma(i + \beta)}{\rho \Gamma(i + \alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i + \alpha + m)}{\Gamma(i + \beta + m + 1)} \frac{1}{\rho^m} \right\}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
d_j &= \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha+2) \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(\beta+2) \Gamma(i+\alpha+1)} \rho^{i-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda \Gamma(i+\beta)}{\rho \Gamma(i+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m) \Gamma(i+\alpha+m)}{\Gamma(i+\beta+m+1)} \frac{1}{m! \rho^m} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha+2) \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(\beta+2) \Gamma(i+\alpha+1)} \rho^{i-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda \Gamma(i+\beta)}{\rho \Gamma(i+\alpha)} \frac{\Gamma(1) \Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+\beta+1)} F(1, i+\alpha; i+\beta+1; \rho^{-1}) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha+2) \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(\beta+2) \Gamma(i+\alpha+1)} \rho^{i-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{\rho} \frac{1}{i+\beta} F(1, i+\alpha; i+\beta+1; \rho^{-1}) \right\}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.1. *Il est important de mentionner que les séries hypergéométriques de Gauss convergent si $|z| < 1$ (voir à nouveau Abramowitz and Stegun [?], p. 556). Comme la valeur absolue de ρ est en effet supérieure à 1, la solution formelle ci-dessus est la solution exacte de notre problème.*

3.2.2. Le cas où $\Delta x > 0$

Pour obtenir la solution de notre problème dans le cas où $\Delta x > 0$, nous devons trouver une solution particulière de :

$$\begin{aligned}
d_j &= \frac{1}{2A} \{ \theta \mu \Delta x + (\sigma^2 - \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \} d_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{2A} \{ -\theta \mu \Delta x + (\sigma^2 + \theta \Delta x)(1 + j \Delta x) \} d_{j-1} \\
&\quad + \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{A} (1 + j \Delta x) \right\} d_j + 1,
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

pour $j = 1, \dots, k-1$, avec $d_0 = d_k = 0$. En procédant comme ci-dessus, nous pouvons réécrire cette équation aux différences non homogène du deuxième ordre comme suit :

$$v_{j+1} - \rho_{\Delta x} \left(\frac{j+\beta^*}{j+\alpha^*} \right) v_j = \frac{\lambda^*}{j+\alpha^*}, \tag{3.2.9}$$

où $\rho_{\Delta x}$ est défini en 3.1.21 et

$$\alpha^* := \frac{1}{\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x}, \quad \beta^* := \frac{1}{\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} \quad \text{et} \quad \lambda^* := -\frac{2A/\Delta x}{\sigma^2 - \theta\Delta x}.$$

Notons que $\sigma^2 > \theta\Delta x$ pour Δx assez petit. Nous déduisons de la sous-section précédente que :

$$v_j^* = -\frac{\lambda^*}{\rho_{\Delta x}} \frac{\Gamma(j + \beta^*)}{\Gamma(j + \alpha^*)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + \alpha^* + m)}{\Gamma(j + \beta^* + m + 1)} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m}$$

est la solution particulière formelle de 3.2.9. De plus, puisque la valeur de $\rho_{\Delta x}$ est plus grande que 1, la série infinie ci-dessus converge, de sorte que cette solution est valable. Finalement, en utilisant les résultats dans la sous-section 3.1.2, nous pouvons réécrire la solution de 3.2.9 sous la forme :

$$\begin{aligned} v_j &= k_0 \rho_{\Delta x}^j \frac{\Gamma(\alpha^* + 1)}{\Gamma(\beta^* + 1)} \frac{\Gamma(j + \beta^* + 1)}{\Gamma(j + \alpha^* + 1)} \\ &\quad - \frac{\lambda^*}{\rho_{\Delta x}} \frac{\Gamma(j + \beta^*)}{\Gamma(j + \alpha^*)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + \alpha^* + m)}{\Gamma(j + \beta^* + m + 1)} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

où k_0 est une constante (par rapport à j , mais qui dépend de Δx), et nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Dans le cas général $\Delta x > 0$, la moyenne d_j du nombre de transitions nécessaires pour que la chaîne de Markov $\{X_{m\Delta t}, m = 0, 1, \dots\}$, partant de $X_0 = 1 + j\Delta x$, atteigne 1 ou $1 + k\Delta x = N$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ k_0 \frac{\Gamma(\alpha^* + 1)}{\Gamma(\beta^* + 1)} \frac{\Gamma(i + \beta^* + 1)}{\Gamma(i + \alpha^* + 1)} \rho_{\Delta x}^i \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda^*}{\rho_{\Delta x}} \frac{1}{i + \beta^*} F(1, i + \alpha^*; i + \beta^* + 1; \rho_{\Delta x}^{-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

pour $j = 0, \dots, k$, où la constante

$$k_0 = \frac{\lambda^*}{\rho_{\Delta x}} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i + \beta^*} F(1, i + \alpha^*; i + \beta^* + 1; \rho_{\Delta x}^{-1})}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha^* + 1)}{\Gamma(\beta^* + 1)} \frac{\Gamma(i + \beta^* + 1)}{\Gamma(i + \alpha^* + 1)} \rho_{\Delta x}^i}$$

a été choisie de manière à satisfaire la condition limite $d_k = 0$, et, par convention, la somme $\sum_{i=0}^{j-1}$ est égale à zéro si $j = 0$.

Pour terminer, nous allons montrer que $d_j \times \Delta t$ converge vers la fonction $m(r)$ quand nous choisissons $\Delta t = (\Delta x)^2/A$. Pour ce faire, nous allons exprimer la solution générale 3.2.10 de l'équation 3.2.9 en fonction de $x := 1 + j\Delta x$, et dénoter d_j par $d(x)$:

$$\begin{aligned} d'(x) &\simeq \rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} \frac{\Gamma(\alpha^* + 1)\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^* + 1)}{\Gamma(\beta^* + 1)\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^* + 1)} \frac{k_0(\Delta x)}{\Delta x} \\ &\quad - \frac{\lambda^*}{\Delta x \rho_{\Delta x}} \frac{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^*)}{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^*)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^* + m)}{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^* + m + 1)} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m}. \end{aligned}$$

En procédant comme dans la sous-section 3.1.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \downarrow 0} \rho_{\Delta x}^{(x-1)/\Delta x} \frac{\Gamma(\alpha^* + 1)\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^* + 1)}{\Gamma(\beta^* + 1)\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^* + 1)} \frac{k_0(\Delta x)}{\Delta x} \\ = \exp\left\{ (x-1)(2\theta/\sigma^2) \right\} x^{-2\theta\mu/\sigma^2} \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{k_0(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^*)}{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^*)} \propto \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{-\frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - \frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x}} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right],$$

lorsque Δx décroît vers zéro. Posons :

$$S(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \alpha^* + m)}{\Gamma(\frac{x-1}{\Delta x} + \beta^* + m + 1)} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m}.$$

Pour Δx assez petit, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} S(x) &\propto \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\Delta x} + m\right)^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - 1} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right] \\ &:= \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x}} S_1(x), \end{aligned}$$

où :

$$S_1(x) := \sum_{m=0}^{\infty} (x + m\Delta x)^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - 1} \frac{1}{\rho_{\Delta x}^m} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right] \Delta x$$

et :

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta x}^m &= \exp\{\ln(\rho_{\Delta x}^m)\} \\ &= \exp\left\{m \left[\ln\left(1 + \frac{\theta\Delta x}{\sigma^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{\theta\Delta x}{\sigma^2}\right)\right]\right\} \\ &= \exp\{m(2\theta/\sigma^2)\Delta x + O(\Delta x)\}, \\ &= \exp\{m\omega\Delta x + O(\Delta x)\}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons supposer que Δx est choisi tel que $l := \frac{N-x}{\Delta x}$ soit un entier. Alors, pour Δx petit, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^l (x + m\Delta x)^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - 1} \\
&\quad \times \exp\{-m\omega\Delta x + O(\Delta x)\} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right] \Delta x \\
&= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^l (x + m\Delta x)^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - 1} \\
&\quad \times \exp\{x\omega - (x + m\Delta x)\omega + O(\Delta x)\} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right] \Delta x \\
&= \int_x^N y^{\frac{\theta\mu}{\sigma^2 - \theta\Delta x} + \frac{\theta\mu}{\sigma^2 + \theta\Delta x} - 1} e^{(x-y)\omega + O(\Delta x)} \left[1 + O\left(\frac{\Delta x}{x}\right)\right] dy.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, nous déduisons que :

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} d'(x)\Delta t = e^{(x-1)\omega} x^{-\omega\mu} \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{k_0(\Delta x)}{\Delta x} \Delta t + \frac{2}{\sigma^2} x^{-\omega\mu} e^{\omega x} \int_x^N y^{\omega\mu-1} e^{-\omega y} dy.$$

Si nous posons $D(r) := \lim_{\Delta x \downarrow 0} d(r)\Delta t$, nous pouvons écrire (en utilisant la condition limite $D(1) = 0$) que :

$$\begin{aligned}
D(r) &= \int_1^r \left\{ e^{x\omega} x^{-\omega\mu} e^{-\omega} \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{k_0(\Delta x)}{A} \Delta x \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\sigma^2} x^{-\omega\mu} e^{\omega x} \int_x^N y^{\omega\mu-1} e^{-\omega y} dy \right\} dx.
\end{aligned}$$

Finalement, pour satisfaire la condition limite $D(N) = 0$, nous trouvons que la constante $k_0(\Delta x)$ doit être choisie telle que $D(r) = m(r)$. Ainsi, nous retrouvons la formule 3.2.1 pour la fonction $m(r)$.

Remarque 3.2.2. *Il est intéressant de voir à quelle vitesse $d_j \times \Delta t$ converge vers $m(r)$, où $r = 1 + j\Delta x$, quand Δx décroît vers zéro. Avec $\theta = \mu = 1$, $\sigma^2 = 2$ et $N = 5$, nous trouvons que $m(3) \simeq 0,7607$; cependant, $d_j \times \Delta t$, avec $j = \frac{2}{\Delta x}$, est approximativement égal à 1,6808, 0,8136, 0,7657 et 0,7632 quand Δx est égal à 1, 0,1, 0,01 et 0,005, respectivement. Il s'ensuit que nous pouvons conclure qu'utiliser un processus de diffusion au lieu d'une chaîne de Markov à temps discret fait une différence significative.*

3.3. CONCLUSION

Nous avons résolu explicitement des problèmes de temps et d'endroit de premier passage pour une chaîne de Markov à temps discret qui converge vers un processus de diffusion qui est important en mathématiques financières, à savoir le processus CIR. Au chapitre précédent nous avons considéré ces problèmes pour une chaîne de Markov à temps discret qui converge vers un mouvement brownien géométrique, qui est aussi un processus fondamental en mathématiques financières. Pour leur part, Lefebvre et Guilbault [?], ainsi que Guilbault et Lefebvre [?], ont traité le cas des chaînes de Markov qui convergent vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous pourrions généraliser notre travail en supposant que les paramètres θ , μ et σ qui apparaissent dans le modèle peuvent en fait dépendre de l'état de la chaîne de Markov. En effet, si nous utilisons le processus CIR pour modéliser les variations des taux d'intérêt, alors il est plus réaliste de prendre en compte le fait que ces variations ne sont pas nécessairement les mêmes lorsque les taux sont élevés ou faibles. Les processus de diffusion avec des paramètres qui dépendent de l'état sont parfois appelés asymétriques. Lefebvre [?] a étudié les processus asymétriques de Wiener. Son travail a été généralisé par Abundo [?]. Nous pourrions essayer de déterminer la valeur des quantités comme p_j et d_j définies dans le présent chapitre pour des chaînes de Markov ayant des probabilités de transition dépendant de l'état, et, en prenant la limite lorsque Δx décroît vers zéro, nous obtiendrions les quantités correspondantes pour les processus de diffusion asymétriques.

Chapitre 4

COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE EN TEMPS DISCRET

4.1. INTRODUCTION

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion contrôlé défini par l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = m[X(t)] dt + b[X(t)]u[X(t)] dt + \{v[X(t)]\}^{1/2} dB(t),$$

où $u(\cdot)$ est la variable de contrôle, $m(\cdot)$, $b(\cdot) \neq 0$ et $v(\cdot) > 0$ sont des fonctions réelles, et $\{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard. Le but de ce chapitre est de trouver le contrôle u^* qui minimise la valeur de l'espérance mathématique de la fonction coût :

$$C(x) = \int_0^{T_d(x)} \left\{ \frac{1}{2} q[X(t)] u^2[X(t)] + \lambda \right\} dt,$$

où $q(\cdot)$ est strictement positive, $\lambda \neq 0$ est une constante, et $T_d(x)$ est l'instant de premier passage défini par :

$$T_d(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = d \text{ ou } -d \mid X(0) = x\},$$

où $x \in (-d, d)$.

Ce problème a été appelé *LQG homing (en anglais)* par Whittle [?], p. 289. Quand le paramètre λ est positif (respectivement négatif), l'optimiseur veut minimiser (respectivement maximiser) le temps de survie du processus contrôlé dans l'intervalle $(-d, d)$, compte tenu des coûts de contrôle quadratiques.

Nous pouvons prendre λ aussi grand que l'on veut. Cependant, en général, λ

ne peut pas prendre n'importe quelle valeur négative. Si la valeur absolue de λ (< 0) devient assez grande, alors la récompense attendue devient infinie. Whittle a montré qu'il est parfois possible d'obtenir le contrôle optimal u^* en considérant le processus non contrôlé $\{\xi(t), t \geq 0\}$ qui correspond à $\{X(t), t \geq 0\}$. En effet, si la relation :

$$\alpha v[X(t)] = \frac{b^2[X(t)]}{q[X(t)]}$$

est vérifiée pour une valeur constante positive α , et si $P[\tau_d(x) < \infty] = 1$, où τ_d est définie comme $T_d(x)$, mais pour le processus non contrôlé $\{\xi(t), t \geq 0\}$, alors la valeur de la fonction :

$$G(x) := \inf_{u[X(t)], 0 \leq t \leq T_d(x)} E[C(x)]$$

peut être exprimée en fonction d'une espérance mathématique pour $\{\xi(t), t \geq 0\}$. De plus, le contrôle optimal est donné par :

$$u^*(x) = -\frac{b(x)}{q(x)} G'(x).$$

Le résultat de Whittle à été utilisé, et généralisé, dans de nombreux articles par plusieurs auteurs ; voir, par exemple [?] ou [?]. Comme l'avait souligné Whittle, il est impossible d'étendre son résultat dans le cas des processus contrôlés à temps et état discrets. Cependant, on peut néanmoins considérer ce type de problème pour des chaînes de Markov en temps discret.

Dans ce chapitre, nous allons énoncer et résoudre explicitement des problèmes de type *LGQ homing* pour diverses marches aléatoires. Soit $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ une chaîne de Markov contrôlée, commençant en $X_0 = x$, définie par :

$$X_{n+1} = X_n + u_n + \epsilon_n, \quad (4.1.1)$$

où u_n peut prendre un nombre fini de valeurs, et ϵ_n est le terme de bruit qui peut prendre l'une ou l'autre de deux valeurs avec une probabilité de 1/2. Notre objectif est de minimiser la valeur de l'espérance mathématique de la fonction coût :

$$J(x, \mathbf{u}) = \sum_{n=0}^{T(x)-1} (u_n^2 + \lambda), \quad (4.1.2)$$

où $\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots\}$; $T(x)$ est un instant de premier passage défini par rapport à la chaîne de Markov contrôlée. Trois problèmes particuliers vont être résolus explicitement dans la suite. Finalement, nous allons donner quelques remarques, y compris des extensions possibles de ces résultats.

4.2. PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Vocabulaire et notation

On désigne par :

- (1) \mathcal{X} espace d'état de la chaîne X_n .
- (2) \mathcal{U} l'ensembles des contrôles \mathbf{u} .
- (3) \mathcal{T} espace de temps.
- (4) $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ telle que $X_{n+1} = f(X_n, U_n, \epsilon_n)$ **fonction de transition**.
- (5) $R : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ **fonction de récompense**

La sortie η , est une fonction de politique $\eta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ maximisant certaine mesure de performance.

Exemple 4.2.1. *Par exemple nous pourrions choisir η pour maximiser la valeur de la fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ où $V = V_n$ pour un certain n . Alors V_n est définie par :*

$$V_i(x) = R(x, \eta(x)) + V_{i-1}(f(x, \eta(x))) \quad \text{pour } 1 < i \leq n,$$

et

$$V_1(x) = R(x, \eta(x)).$$

Dans la plupart des cas, nous sommes intéressés par les processus dont les transitions d'état responsable, sont stochastiques. Dans le cas stochastique au lieu d'une fonction de transition d'état, nous avons un ensemble de probabilités de transition d'état.

$$\rho_{x,x'}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}(x(t+1) = x' \mid x(t) = x, \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}).$$

En décrivant une suite de décision stochastique pour faire le problème nous avons besoin d'une fonction de récompense un peu plus compliqué $R : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi nous avons

$$V_i(x) = Q(x) + \sum_{x' \in X} \rho_{x,x'}(\eta(x)) [V_{i-1}(x')], \quad 1 < i \leq n,$$

où

$$Q(x) = \sum_{x' \in X} \rho_{x,x'}(\eta(x)) R(x, \eta(x), x').$$

4.2.1. Formule générale

Soient :

$$T_i = \inf\{n \geq i : |X_n| \geq k \mid X_i = x\}$$

$$J_i(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{T_i(x)-1} u_k^2 + \lambda$$

$$V_{X_i}^i(x) = \mathbb{E}(J_i(x, \mathbf{u}))$$

$$F_i(x) = \min_{u_i, u_{i+1}, \dots, u_{T_i(x)-1}} \mathbb{E}(J_i(x, \mathbf{u}))$$

Proposition 4.2.1.

$$\mathbb{E}(J_p(x, \mathbf{u})) = u_p^2 + \lambda + \sum_{y \in \epsilon} \mathbb{P}(X_{p+1} = y \mid X_p = x) V_{X_{p+1}}^{p+1} \quad (4.2.1)$$

$$F_p(x) = \min_{u_p} \left\{ u_p^2 + \lambda + \sum_{y \in \epsilon} \mathbb{P}(X_{p+1} = y \mid X_p = x) F_{p+1}(y) \right\}$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J_p(x, \mathbf{u})) &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=p}^{T_p(x)-1} u_k^2 + \lambda \right] \\
&= u_p^2 + \lambda + \mathbb{E} \left[\sum_{k=p}^{T_p(x)-1} u_k^2 + \lambda \mid X_p = x \right] \\
&= u_p^2 + \lambda + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{k=p}^{T_p(x)-1} u_k^2 + \lambda \mid X_{p+1}, X_p = x \right] \mid X_p = x \right\} \\
&= u_p^2 + \lambda + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{k=p+1}^{T_p(x)-1} u_k^2 + \lambda \mid X_{p+1} \right] \mid X_p = x \right\} \\
&= u_p^2 + \lambda + \mathbb{E} \left[V_{X_{p+1}}^{p+1} \mid X_p = x \right] \\
&= u_p^2 + \lambda + \sum_{y \in \epsilon} \mathbb{P}(X_{p+1} = y \mid X_p = x) V_{X_{p+1}}^{p+1} \\
F_p(x) &= \min_{u_p, u_{p+1}, \dots, u_{T_p(x)-1}} \mathbb{E}(J_p(x, \mathbf{u})) \\
&= \min_{u_p} \left\{ u_p^2 + \lambda + \sum_{y \in \epsilon} \mathbb{P}(X_{p+1} = y \mid X_p = x) \min_{u_{p+1}, \dots, u_{T_p(x)-1}} V_{X_{p+1}}^{p+1} \right\} \\
&= \min_{u_p} \left\{ u_p^2 + \lambda + \sum_{y \in \epsilon} \mathbb{P}(X_{p+1} = y \mid X_p = x) F_{p+1}(y) \right\}
\end{aligned}$$

□

Dans la suite nous allons noter par : $T_0 = T$, $F_0 = F$ et $J_0 = J$.

4.3. MAXIMISER LE TEMPS DE SURVIE

Le premier problème que nous considérons est celui pour lequel l'espace des états de la chaîne de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ est l'ensemble $\{-k, \dots, 0, \dots, k\}$, où $k \in \mathbb{N}$. En outre, le contrôle u_n doit appartenir à $\{-1, 0, 1\}$, et $\epsilon_n = \pm 1$ avec une probabilité de 1/2. Finalement, le paramètre λ dans la fonction 4.1.2 est supposé négatif, et :

$$T(x) := \min\{n \geq 0 : |X_n| \geq k \mid X_0 = x\}. \quad (4.3.1)$$

Donc, l'optimiseur veut maximiser le temps de survie de la chaîne de Markov contrôlée dans $C := \{-k+1, \dots, 0, \dots, k-1\}$. Soit $F(x)$ la fonction valeur définie par :

$$F(x) = \min_{u_n, n=0, \dots, T(x)-1} \mathbb{E}[J(x, \mathbf{u})]. \quad (4.3.2)$$

En faisant usage du principe d'optimalité, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *La fonction valeur $F(x)$ définie en 4.3.2 satisfait à l'équation de programmation dynamique :*

$$F(x) = \min_{u_0} \left\{ u_0^2 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x + u_0 - 1) + F(x + u_0 + 1)] \right\} \quad (4.3.3)$$

avec la condition limite :

$$F(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq k \quad (4.3.4)$$

.

DÉMONSTRATION. On a :

$$T_1(y) = \inf\{n \geq 1 : |X_n| \geq k \mid X_1 = y\} \text{ et}$$

$$T_0(y) = \inf\{n \geq 0 : |X_n| \geq k \mid X_0 = y\}$$

$$T_0(y) = 0 + \inf\{n \geq 1 : |X_n| \geq k \mid X_0 = y\}$$

$$T_0(y) = T_1(y).$$

Il s'en suit que $J_0(y) = J_1(y)$.

d'autre part

$$\begin{aligned} F_1(y) &= \min_{u_1, u_2, \dots, u_{T_1(y)-1}} \mathbb{E}(J_1(y, \mathbf{u})) \\ &= \min_{u_0, u_1, \dots, u_{T_1(y)-1}} \mathbb{E}(J_1(y, \mathbf{u})) \\ &= \min_{u_0, u_1, \dots, u_{T_0(y)-1}} \mathbb{E}(J_0(y, \mathbf{u})) \\ &= F_0(y). \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant la proposition 4.2.1 pour $p = 1$ nous avons le résultat □

Maintenant, par symétrie, nous pouvons affirmer que le contrôle optimale $u_0^*(-x) = -u_0^*(x)$. Par conséquent, on peut supposer que $x \in \{0, \dots, k\}$. En

outre, parce que nous voulons que le processus contrôlé demeure dans la région de continuation aussi longtemps que possible, compte tenu des coûts de contrôle quadratiques, il est clair que $u_0^*(x)$ doit être soit égal à -1 ou 0 si x est positif. Ensuite, notons que la fonction valeur $F(x)$ est négative pour tout $x \in C$. En effet, si nous choisissons $u_n \equiv 0$, alors nous avons :

$$E[J(x, \mathbf{u})] = E \left[\sum_{n=0}^{T(x)-1} \lambda \right] = \lambda E[T(x)] < 0.$$

En fait, en utilisant les résultats connus sur le *problème de la ruine du joueur*, nous pouvons écrire que si $u_n \equiv 0$, alors $P[T(x) < \infty] = 1$ et

$$E[T(x)] = k^2 - x^2 \quad \text{pour } x = -k, \dots, k$$

(voir, par exemple, Feller [?], p. 348). Donc

$$F(x) \leq \lambda(k^2 - x^2).$$

Si la valeur absolue de λ est trop grande, alors la fonction valeur est égale à $-\infty$ (c'est-à-dire que la récompense attendue est infinie), comme nous allons le prouver dans le lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Si le paramètre λ dans la fonction de coût 4.1.2 est inférieur à -1 , alors nous avons $F(x) = -\infty$.*

DÉMONSTRATION. Lorsque $\lambda < -1$, nous recevons une récompense pour survivre dans la région de continuation C , même si nous prenons $u_n = \pm 1$. Mais, parce que $\epsilon_n = \pm 1$, en choisissant $u_0 = -1$ (respectivement $+1$) lorsque $X_0 = x \in C$ est positif (respectivement négatif), nous pouvons demeurer dans C aussi longtemps que nous le désirons. Il s'ensuit que $F(x) = -\infty$. \square

Nous allons désormais supposer que $\lambda \in [-1, 0)$. La fonction valeur est alors nécessairement finie, parce qu'il y a un coût positif lorsqu'on contrôle la chaîne de Markov, et si nous choisissons $u_n \equiv 0$, alors le processus va atteindre l'une ou l'autre des frontières en un temps fini. Maintenant, quelle que soit la valeur de $\lambda (< 0)$, nous pouvons affirmer que $u_0^*(0) = 0$. En effet, la position idéale pour maximiser le profit, c'est lorsque la marche aléatoire est à l'origine, de

sorte que l'optimiseur doit essayer de rester près de là. Puisque $E[X_1] = 0$, si l'on prend $u_0(0) = 0$, c'est certainement la meilleure option à choisir. Par conséquent, on déduit de l'équation de programmation dynamique (4.3.3) que :

$$F(0) = \lambda + \frac{1}{2} [F(-1) + F(1)].$$

En outre, par symétrie, $F(-x) = F(x)$ pour tout $x \in C$. Il s'ensuit que :

$$F(1) = F(0) - \lambda.$$

Ensuite, on peut écrire que

$$F(1) = \min_{u_0} \left\{ u_0^2 + \lambda + \frac{1}{2} [F(u_0) + F(u_0 + 2)] \right\}.$$

Ainsi, nous avons soit (avec $u_0 = 0$) :

$$F(1) = \lambda + \frac{1}{2} [F(0) + F(2)]. \quad (4.3.5)$$

ou (avec $u_0 = -1$) :

$$F(1) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(-1) + F(1)]$$

Toutefois, cette dernière équation conduit à $0 = 1 + \lambda$, ce qui contredit l'hypothèse que nous avons faite ci-dessus (à savoir, $\lambda \in [-1, 0)$), à moins que $\lambda = -1$. Il s'ensuit que, lorsque $\lambda \in (-1, 0)$, nous devons choisir $u_0^*(1) = 0$. Ainsi, en substituant la valeur de $F(1)$ en fonction de $F(0)$ dans l'équation 4.3.5, nous obtenons que :

$$F(2) = F(0) - 4\lambda.$$

Proposition 4.3.1. *Pour le problème considéré dans cette section, le contrôle optimal est $u_0^*(x) \equiv 0$ et la fonction valeur est donnée par :*

$$F(x) = \lambda(k^2 - x^2).$$

En outre, si $\lambda = -1/(2x - 1)$ (avec $x > 0$), alors nous pouvons choisir $u_0^(x) = 0$ ou -1 indifféremment.*

DÉMONSTRATION. Nous allons prouver, par induction, que

$$F(x) = F(0) - x^2\lambda \quad \text{pour } x \in \{-k, \dots, k\}.$$

En effet, on déduit de l'équation de programmation dynamique 4.3.3 que, si $x \in C$, alors nous avons :

$$F(x) = \lambda + \frac{1}{2} [F(x-1) + F(x+1)] \quad (\text{avec } u_0 = 0) \quad (4.3.6)$$

ou

$$F(x) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x-2) + F(x)] \quad (\text{avec } u_0 = -1). \quad (4.3.7)$$

En utilisant 4.3, cette dernière équation peut être réécrite sous la forme :

$$F(0) - x^2\lambda - [F(0) - (x-2)^2\lambda] = 2(1 + \lambda),$$

qui n'est possible que si x est tel que :

$$\lambda = -\frac{1}{2x-1}.$$

Pour tout $\lambda \in [-1, 0)$ différent de cette valeur, nous devons prendre $u_0^* = 0$, et on déduit alors de l'équation 4.3.6 que :

$$\begin{aligned} F(x+1) &= 2[F(x) - \lambda] - F(x-1) \\ &= 2[F(0) - x^2\lambda - \lambda] - [F(0) - (x-1)^2\lambda] \\ &= F(0) - (x+1)^2\lambda, \end{aligned}$$

Puisque λ est une constante, nous pouvons conclure que $u_0^*(x) = 0$ pour tout x , sauf que s'il existe une valeur de x pour laquelle $\lambda = -1/(2x-1)$, alors $u_0^*(x)$ est aussi égal à -1 . Enfin, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, dans le cas non contrôlé, nous savons que :

$$E[J(x, \mathbf{u})] = \lambda(k^2 - x^2) \quad \text{for } x = -k, \dots, k.$$

C'est en fait la récompense maximale espérée lorsque le processus démarre à partir de $X_0 = x$. C'est-à-dire que :

$$F(x) = \lambda(k^2 - x^2) \quad \text{pour } x = -k, \dots, k,$$

ce qui complète la preuve. □

Remarque 4.3.1. Remarquons que, avec $F(x) = \lambda(k^2 - x^2)$, l'équation 4.3.6 est satisfaite pour $\lambda \in [-1, 0)$. De plus, les deux équations 4.3.6 et 4.3.7 sont satisfaites en même temps si et seulement si $\lambda = -1/(2x - 1)$.

4.4. RÉDUIRE AU MINIMUM LE TEMPS PASSÉ DANS LA RÉGION DE CONTINUATION

Dans cette section, l'espace des états de la chaîne de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ est l'ensemble $\{0, \dots, k\}$. L'optimiseur doit choisir $u_n = 0$ ou $u_n = 1$, la variable aléatoire ϵ_n est égale à 0 ou 1 avec une probabilité de 1/2, le paramètre λ dans la fonction de coût 4.1.2 est strictement positif, et l'instant de premier passage $T(x)$ est défini par :

$$T(x) := \min\{n \geq 0 : X_n \geq k \mid X_0 = x\}. \quad (4.4.1)$$

Ainsi, l'objectif de l'optimiseur est de minimiser le temps passé dans la région de continuation par la chaîne de Markov contrôlée, compte tenu des coûts de commande quadratiques. La fonction valeur $F(x)$ définie dans l'équation 4.3.2 satisfait désormais à l'équation de programmation dynamique :

$$F(x) = \min_{u_0} \left\{ u_0^2 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x + u_0) + F(x + u_0 + 1)] \right\}, \quad (4.4.2)$$

soumise à la condition limite $F(x) = 0$ si $x \geq k$. Puisque $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, cette équation peut être réécrite comme suit :

$$F(x) = \min \left\{ \lambda + \frac{1}{2} [F(x) + F(x + 1)], 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x + 1) + F(x + 2)] \right\}. \quad (4.4.3)$$

Pour résoudre notre problème, nous allons d'abord considérer le cas où $x = k - 1$. Alors l'équation 4.4.3 devient :

$$\begin{aligned} F(k - 1) &= \min \left\{ \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 1) + F(k)], 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k) + F(k + 1)] \right\} \\ &= \min \left\{ \lambda + \frac{1}{2} F(k - 1), 1 + \lambda \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'optimiseur choisit $u_0 = 0$, alors $F(k-1) = 2\lambda$, tandis que $F(k-1) = 1 + \lambda$ si $u_0 = 1$ est choisi. Il s'ensuit que :

$$u_0^*(k-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 1, \\ 1 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Lorsque $x = k-2$, nous avons :

$$F(k-2) = \min \left\{ \lambda + \frac{1}{2} [F(k-2) + F(k-1)], 1 + \lambda + \frac{1}{2} F(k-1) \right\}.$$

Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $F(k-1) = 2\lambda$, tandis que $F(k-1) = 1 + \lambda$ si $\lambda > 1$. Ainsi, nous allons considérer deux cas :

(1) premièrement, si $0 < \lambda \leq 1$, nous pouvons écrire :

$$F(k-2) = \min \left\{ 2\lambda + \frac{1}{2} F(k-2), 1 + 2\lambda \right\}.$$

Par conséquent, si l'optimiseur choisit $u_0 = 0$ (respectivement $u_0 = 1$), la fonction valeur $F(k-2)$ est égale à 4λ (respectivement $1 + 2\lambda$). Alors nous concluons que $u_0^*(k-2) = 0$ si $0 < \lambda \leq 1/2$, et $u_0^*(k-2) = 1$ si $1/2 < \lambda \leq 1$.

(2) Deuxièmement, dans le cas où $\lambda > 1$, nous avons :

$$F(k-2) = \min \left\{ \lambda + \frac{1}{2} [F(k-2) + (1 + \lambda)], 1 + \lambda + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \right\}.$$

Ainsi, nous comparons $F(k-2) = 1 + 3\lambda$ (avec $u_0 = 0$) à $F(k-2) = \frac{3}{2}(1 + \lambda)$ (avec $u_0 = 1$). Puisque $\lambda > 1$, nous trouvons que $u_0^*(k-2) = 1$. Ainsi, nous pouvons écrire que :

$$u_0^*(k-2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } \lambda > 1/2. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Il s'avère que cette valeur optimale de la variable de contrôle est en fait valable pour tout $x \in \{0, \dots, k-2\}$, comme nous allons le prouver par induction.

Proposition 4.4.1. *Pour le problème considéré dans cette section, le contrôle optimal est donné par 4.4.4 si $x = k-1$, et par :*

$$u_0^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \lambda \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } \lambda > 1/2. \end{cases}$$

pour $x \in \{0, \dots, k-2\}$.

DÉMONSTRATION. En général, pour déterminer si $u_0^*(x) = 0$ ou 1, il faut comparer :

$$F(x) = \lambda + \frac{1}{2} [F(x) + F(x+1)] \quad (\text{si } u_0 = 0), \quad (4.4.6)$$

à

$$F(x) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x+1) + F(x+2)] \quad (\text{si } u_0 = 1). \quad (4.4.7)$$

Tout d'abord, nous allons montrer que $u_0^*(x) \equiv 0$ si $0 < \lambda \leq 1/2$. Nous avons déjà trouvé (voir 4.4.4) que $u_0^*(k-1) = 0$ si $0 < \lambda \leq 1/2$. Si nous supposons que $u_0^*(y) = 0$ pour $y = x, x+1, \dots, k-2$, alors nous déduisons de 4.4.6 que la fonction valeur $F(x)$ satisfait l'équation aux différences du premier ordre :

$$F(x) = 2\lambda + F(x+1).$$

Nous trouvons facilement que :

$$F(x) = c_0 - 2\lambda x.$$

En utilisant la condition limite $F(k) = 0$, nous obtenons la constante c_0 qui doit être égale à $2\lambda k$, de sorte que

$$F(x) = 2\lambda(k-x). \quad (4.4.8)$$

Ensuite, avec $X_0 = x-1$, 4.4.6 et 4.4.7 deviendraient

$$F(x-1) = \lambda + \frac{1}{2} [F(x-1) + 2\lambda(k-x)] \implies F(x-1) = 2\lambda(k-x+1)$$

et

$$F(x-1) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [2\lambda(k-x) + 2\lambda(k-x-1)] = 1 + 2\lambda(k-x).$$

Nous trouvons tout de suite que :

$$2\lambda(k-x+1) \leq 1 + 2\lambda(k-x) \iff \lambda \leq 1/2.$$

Alors nous pouvons conclure que $u_0^*(x-1) = 0$, ce qui prouve, par induction, que $u_0^*(x) \equiv 0$ si $0 < \lambda \leq 1/2$. Maintenant, si nous supposons que $u_0^*(x) \equiv 1$, alors la fonction valeur $F(x)$ satisfait à 4.4.7 pour toutes les valeurs de x . La

solution générale de cette équation aux différences linéaire du second ordre peut être écrite comme suit (voir exemple 1.5.5 chapitre 1) :

$$F(x) = c_0 + c_1(-2)^x - \frac{2}{3}(1 + \lambda)(x + 1). \quad (4.4.9)$$

La condition limite $F(k) = 0$ implique que :

$$F(x) = c_1 [(-2)^x - (-2)^k] - \frac{2}{3}(1 + \lambda)(x - k).$$

Pour déterminer la valeur de la constante c_1 , nous pouvons utiliser le fait que $F(k + 1)$ est aussi égal à zéro, ce qui implique que :

$$F(x) = -\frac{2}{9}(1 + \lambda) [(-2)^{x-k} - 1 + 3(x - k)]. \quad (4.4.10)$$

Remarque 4.4.1. *Quand nous choisissons $u_0(x) \equiv 1$, le processus contrôlé peut traverser la frontière à $x = k$. Par conséquent, nous devons poser $F(k + 1)$ égal à 0. Cependant, avec $u_0(x) \equiv 0$, il n'y a pas de dépassement. En fait, il n'y a pas de dépassement tant que $u_0(k - 1) = 0$.*

Si $\lambda > 1$, nous savons (voir 4.4.4) que $u_0^*(k - 1) = 1$. Si nous faisons l'hypothèse que $u_0^*(y) = 1$ pour $y = x, x + 1, \dots, k - 2$, alors l'expression dans l'équation 4.4.10 pour la fonction valeur $F(x)$ est valable pour $y = x, x + 1, \dots, k - 1$. En substituant cette expression dans 4.4.6 et 4.4.7, avec x remplacé par $x - 1$, nous trouvons (en simplifiant) que la valeur de $F(x - 1)$ lorsque $u_0(x - 1) = 0$ est supérieure ou égale à la valeur de $F(x - 1)$ quand $u_0(x - 1) = 1$ si et seulement si :

$$\lambda - 1 \geq -\frac{1}{3}(1 + \lambda) [1 - (-2)^{x-k}].$$

Puisque :

$$1 \geq (-2)^{x-k} \quad \text{for } x = k, k - 1, k - 2, \dots, 0,$$

nous pouvons affirmer que $u_0^*(x - 1) = 1$. Ainsi, par induction, $u_0^*(x) \equiv 1$ si $\lambda > 1$. Finalement, lorsque $1/2 < \lambda \leq 1$, nous avons trouvé (voir 4.4.4) que $u_0^*(k - 1) = 0$, mais (voir 4.4.5) $u_0^*(k - 2) = 1$. On trouve que $u_0^*(k - 3) = u_0^*(k - 4) = 1$ également. Si nous supposons que $u_0^*(y) = 1$ pour $y = x, x + 1, \dots, k - 3$, alors 4.4.10 est valable pour $y = x, x + 1, \dots, k - 2$. En procédant comme ci-dessus, on peut montrer que $u_0^*(x - 1) = 1$. Donc, par induction mathématique, $u_0^*(x) \equiv 1$ pour $x = 0, \dots, k - 2$ si $1/2 < \lambda \leq 1$, ce qui complète la preuve. \square

Remarque 4.4.2. On déduit de 4.4.6 et 4.4.7 que $u_0^*(x) = 1$ si et seulement si

$$F(x) \geq 2 + F(x + 2).$$

Par conséquent, pour prouver que $u_0^*(x) \equiv 1$ si $\lambda > 1$, on peut aussi utiliser le fait que le meilleur coût pour passer de x à $x + 2$ est soit : 2λ (si $u_0 = u_1 = 0$ et $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 1$) ou $1 + \lambda$ (si $u_0 = \epsilon_0 = 1$). Par conséquent, la fonction $F(x)$ sera en effet supérieure ou égale à $2 + F(x + 2)$ si $\lambda > 1$.

Corollaire 4.4.1. Pour le problème considéré dans cette section, la fonction valeur est donnée par 4.4.8 si $0 < \lambda \leq 1/2$, par 4.4.10 si $\lambda > 1$, et par :

$$F(x) = \frac{1}{3} \left[2\lambda - \frac{2}{3}(1 + \lambda) \right] (-2)^{x+1-k} + \frac{4}{3}\lambda - \frac{2}{3}(1 + \lambda) \left(x + \frac{2}{3} - k \right) \quad (4.4.11)$$

si $1/2 < \lambda \leq 1$.

4.5. UN PROBLÈME AVEC u_0^* NON CONSTANT

Dans la section 4.2, le contrôle optimal $u_0^*(x)$ est identique à zéro pour toutes les valeurs admissibles du paramètre λ . Dans la section 4.3, nous avons eu $u_0^*(x) \equiv 0$ si $0 < \lambda \leq 1/2$, et $u_0^*(x) \equiv 1$ si $\lambda > 1$. Le seul cas pour lequel $u_0^*(x)$ n'est pas une constante est lorsque $1/2 < \lambda \leq 1$. Alors $u_0^*(x) \equiv 1$ pour $x = 0, \dots, k - 2$, mais $u_0^*(k - 1) = 0$. Dans cette section, le contrôle optimal dépendra plus fortement de x et de λ . Supposons que l'espace des états de la chaîne de Markov contrôlée $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ est, comme dans la section 4.2, l'ensemble $\{-k, \dots, k\}$, la variable de contrôle u_n appartient à $\{-2, -1, 1, 2\}$, le terme de bruit ϵ_n est égal à ± 1 avec une probabilité de $1/2$, le paramètre λ dans l'équation 4.1.2 est strictement positif, et l'instant de premier passage $T(x)$ est défini comme dans l'équation 4.3.1. Par conséquent, comme dans la section 4.3, l'optimiseur veut minimiser le temps passé par la chaîne de Markov contrôlée dans $C = \{-k + 1, \dots, k - 1\}$, avec les coûts de contrôle quadratiques pris en compte. L'équation de programmation dynamique satisfaite par la fonction $F(x)$ définie en 4.3.2 est :

$$F(x) = \min_{u_0} \left\{ u_0^2 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x + u_0 - 1) + F(x + u_0 + 1)] \right\}. \quad (4.5.1)$$

Elle est soumise à la condition limite $F(x) = 0$ si $|x| \geq k$. Parce que λ est positif nous pouvons affirmer, par symétrie, que $u_0^*(-x) = -u_0^*(x)$. Par conséquent, nous pouvons nous limiter au cas où $x \in \{0, 1, \dots, k\}$. En outre, le fait que λ soit positif implique également que $u_0^*(x) > 0$ quand $x > 0$. Lorsque $x = 0$, l'optimiseur peut choisir $u_0^*(x)$ positif ou négatif indifféremment. Autrement dit, le signe de $u_0^*(x)$ n'est pas pertinent. Puisque $E[T(x)]$ est fini dans le cas non contrôlé (voir la section 4.2), il est intuitivement évident que l'optimiseur doit choisir $u_n(x) \equiv 1$ si λ est assez proche de zéro et $x > 0$. De même, si λ est très grand, comparé à u_n^2 , alors l'optimiseur doit choisir $u_n(x) \equiv 2$ (si x est positif) pour quitter la région continuation dès que possible. Le contrôle optimal étant égal à 1 ou 2 quand x est non négatif, l'équation de programmation dynamique 4.5.1 peut être écrite comme suit :

$$F(x) = \min\left\{1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x) + F(x + 2)], 4 + \lambda + \frac{1}{2} [F(x + 1) + F(x + 3)]\right\}. \quad (4.5.2)$$

Nous allons essayer de déterminer la valeur de $u_0^*(x)$, à partir de $x = k - 1$. Nous avons alors :

$$F(k - 1) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 1) + F(k + 1)] \quad (\text{si } u_0 = 1)$$

et

$$F(k - 1) = 4 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k) + F(k + 2)] \quad (\text{si } u_0 = 2).$$

D'où, si $u_0 = 1$, nous obtenons que :

$$F(k - 1) = 2(1 + \lambda)$$

tandis que :

$$F(k - 1) = 4 + \lambda$$

quand $u_0 = 2$. Il s'ensuit que :

$$u_0^*(k - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq 2, \\ 2 & \text{si } \lambda > 2. \end{cases}$$

Remarque 4.5.1. Lorsque $X_0 = k - 1$, l'optimiseur est certain de quitter la région de continuation en choisissant $u_0 = 2$, mais pas avec $u_0 = 1$.

Ensuite, lorsque $x = k - 2$, il faut comparer la valeur de $F(k - 2)$ obtenue à partir de :

$$F(k - 2) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 2) + F(k)] \quad (\text{si } u_0 = 1), \quad (4.5.3)$$

à celle déduite de :

$$F(k - 2) = 4 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 1) + F(k + 1)] \quad (\text{si } u_0 = 2). \quad (4.5.4)$$

L'équation 4.5.3 implique que :

$$F(k - 2) = 2(1 + \lambda) \quad (\text{si } u_0 = 1)$$

Dans le cas de 4.5.4, nous pouvons écrire que :

$$F(k - 2) = \begin{cases} 4 + \lambda + (1 + \lambda) & \text{si } 0 < \lambda \leq 2 \\ \frac{3}{2}(4 + \lambda) & \text{si } \lambda > 2 \end{cases} \quad (\text{si } u_0 = 2).$$

Par conséquent, cette fois-ci, nous concluons que :

$$u_0^*(k - 2) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \leq 8, \\ 2 & \text{if } \lambda > 8. \end{cases}$$

Remarque 4.5.2. Notons que $F(k - 2) = F(k - 1)$ si $0 < \lambda \leq 2$.

Quand $x = k - 3$, nous avons soit :

$$F(k - 3) = 1 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 3) + F(k - 1)] \quad (\text{si } u_0 = 1)$$

ou

$$F(k - 3) = 4 + \lambda + \frac{1}{2} [F(k - 2) + F(k)] \quad (\text{si } u_0 = 2).$$

Nous devons alors considérer trois cas : $0 < \lambda \leq 2$, $2 < \lambda \leq 8$ et $\lambda > 8$. Avec $u_0 = 1$, nous trouvons que :

$$F(k - 3) = \begin{cases} 4(1 + \lambda) & \text{si } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2(1 + \lambda) + (4 + \lambda) = 6 + 3\lambda & \text{si } \lambda > 2. \end{cases}$$

Quand $u_0 = 2$, nous obtenons que :

$$F(k - 3) = \begin{cases} 4 + \lambda + \frac{1}{2}[2(1 + \lambda)] = 5 + 2\lambda & \text{si } 0 < \lambda \leq 8, \\ 4 + \lambda + \frac{1}{2}[\frac{3}{2}(4 + \lambda)] = 7 + \frac{7}{4}\lambda & \text{si } \lambda > 8. \end{cases}$$

En comparant les diverses expressions ci-dessus, nous constatons que :

$$u_0^*(k-3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq 1/2, \\ 2 & \text{si } \lambda > 1/2. \end{cases}$$

Pour obtenir la valeur de $u_0^*(x)$ quand $x = k-4$, nous devons maintenant examiner quatre cas : $0 < \lambda \leq 1/2$, $1/2 < \lambda \leq 2$, $2 < \lambda \leq 8$ et $\lambda > 8$. En procédant comme ci-dessus, nous pouvons montrer que :

$$u_0^*(k-4) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \leq 3, \\ 2 & \text{if } \lambda > 3. \end{cases}$$

Pour k petit, nous pouvons calculer le contrôle optimal $u_0^*(x)$ pour toutes les valeurs de $x \in \{-k+1, \dots, k-1\}$. Cependant, de ce qui précède, nous devons conclure qu'il est difficile d'obtenir une formule générale pour $u_0^*(x)$. Dans le cas de la fonction valeur, nous pouvons au moins donner une équation aux différences qu'elle vérifie.

Proposition 4.5.1. *La fonction valeur $F(x)$ dans le problème considéré dans cette section satisfait à l'équation aux différences non linéaire du troisième ordre :*

$$\begin{aligned} 0 = & 2F^2(x) + F(x) [-F(x+1) + 2F(x+2) - F(x+3) - 12 + 6\lambda] \\ & + 2(4 + \lambda)F(x+2) + 2(1 + \lambda) [F(x+1) + F(x+3)] \\ & + F(x+1)F(x+2) + F(x+2)F(x+3), \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

pour $x = 0, 1, \dots, k-1$. Les conditions limites sont $F(x) = 0$ si $x = k, k+1, k+2$.

DÉMONSTRATION. Puisque u_0 est égal à 1 ou 2, nous pouvons utiliser la formule :

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}\{x + y - |x - y|\}$$

dans l'équation de programmation dynamique 4.5.1. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \lambda + \frac{1}{2}[F(x) + F(x+2)] \right] \right. \\ & + \left[4 + \lambda + \frac{1}{2}[F(x+1) + F(x+3)] \right] \\ & \left. - \left| -3 + \frac{1}{2}[F(x) + F(x+2) - F(x+1) - F(x+3)] \right| \right\}, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}F(x) - (5 + 2\lambda) - \frac{1}{2}[F(x+1) + F(x+2) + F(x+3)] \\ &= - \left| -3 + \frac{1}{2}[F(x) + F(x+2) - F(x+1) - F(x+3)] \right|. \end{aligned}$$

En élevant au carré chaque côté de l'équation précédente, et en simplifiant, nous obtenons l'équation 4.5.5. \square

Lorsque $x = k - 1$, l'équation 4.5.5 se réduit à :

$$F^2(k-1) - 3(2 + \lambda)F(k-1) + 2(\lambda^2 + 5\lambda + 4) = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$F(k-1) = 4 + \lambda \quad \text{ou} \quad F(k-1) = 2(1 + \lambda),$$

de sorte que la fonction valeur est donnée par $F(k-1) = 2(1 + \lambda)$ si $0 < \lambda \leq 2$ et par $F(k-1) = 4 + \lambda$ si $\lambda > 2$, comme nous l'avons obtenu ci-dessus.

4.6. CONCLUSION

Nous avons étendu le problème proposé par Whittle au cas des chaînes de Markov à temps et état discrets contrôlées. Dans les sections 4.2 et 4.3, nous avons pu obtenir des expressions générales pour à la fois le contrôle optimal $u_0^*(x)$ et la fonction valeur $F(x)$. Cependant, dans la section 4.3, nous n'avons pas pu trouver une formule générale pour $u_0^*(x)$ ou $F(x)$. En fait, nous pouvons nous attendre à ce qu'il soit très difficile de trouver des formules générales explicites dans la plupart des cas. On pourrait évidemment généraliser à la fois 4.1.1 et 4.1.2. Par exemple, on pourrait définir le processus stochastique contrôlé $\{X_n, n = 0, 1 \dots\}$ par :

$$X_{n+1} = aX_n + bu_n + \epsilon_n$$

où a et b sont des constantes non nulles, et prendre :

$$J(x, \mathbf{u}) = \sum_{n=0}^{T(x)-1} (q_0 u_n^2 + \lambda),$$

où $q_0 > 0$. Pour tous les problèmes considérés dans cette thèse, l'optimiseur a dû choisir entre deux valeurs possibles de u_0 . Le problème de contrôle optimal serait évidemment encore plus compliqué s'il y avait trois candidats ou plus pour le contrôle optimal. Par exemple, dans la section 4.3, si nous supposons que $u_n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, alors $u_0^*(x)$ pourrait être égal à 0, 1 ou 2 lorsque x est positif. En particulier, $u_0^*(x)$ devrait être égal à 0 (et non pas à 1, comme ci-dessus) lorsque λ est très proche de zéro. Enfin, on pourrait supposer que ϵ_n a une distribution gaussienne de moyenne 0 et de variance σ^2 , plutôt que d'être une variable aléatoire discrète. Alors la variable de contrôle u_n devrait aussi être une variable continue.

Chapitre 5

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons considéré des problèmes d'instant de premier passage pour des chaînes de Markov à temps discret basées sur des processus stochastiques définis par des équations différentielles stochastiques, d'une part, et, d'autre part, un problème de commande optimale pour ces chaînes de Markov, dans lequel nous avons aussi défini une variable aléatoire qui est un instant de premier passage.

La première partie repose essentiellement sur la résolution d'équations aux différences avec coefficients non constants, que nous avons réussi à résoudre, ce qui nous a permis d'avoir des formules explicites pour la probabilité de premier passage et la durée de la *partie* pour ces chaînes de Markov à temps discret. Nous avons aussi réussi à montrer que les résultats obtenus convergent selon la métrique euclidienne vers les quantités correspondantes pour les processus de diffusion. Remarquons que nous pouvons utiliser également la théorie des martingales pour résoudre ce genre de problème. Ainsi nous essaierons d'étendre ce résultat pour d'autres processus de diffusion.

Dans la dernière partie, nous avons étudié un problème de commande optimale pour des chaînes de Markov en temps discret. L'objectif était de trouver la valeur qui minimise l'espérance mathématique d'une certaine fonction de coût. Bien que, contrairement au cas continu, il n'existe pas de formule explicite pour cette valeur optimale dans le cas discret, nous avons étudié dans cette thèse quelques cas particuliers pour lesquels nous avons trouvé cette valeur optimale.

En faisant usage de l'algèbre max-plus qui est un algèbre défini par le demi-corps :

$$\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

où pour tout $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, les opérations sont définies comme suit :

$$a \oplus b = \min(a, b), \quad a \otimes b = a + b,$$

de ce fait $-\infty$ va être l'élément neutre de l'addition tandis que 1 sera l'élément neutre de la multiplication.

Dans cette algèbre l'équation classique de la programmation dynamique s'écrit :

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \leq \sigma \leq n} (M_{i\sigma} + v_{\sigma j}(k-1)),$$

ce qui correspond ainsi à une équation linéaire matricielle min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1),$$

qui peut être résolue sans difficulté. Ainsi nous essaierons d'utiliser cette algèbre max-plus pour voir s'il est possible de trouver cette formule explicite.