

Université de Montréal

**Cohomologie de fibrés en droite sur le fibré
cotangent de variétés grassmanniennes généralisées**

par

Isabelle Ascah-Coallier

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

avril 2013

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Cohomologie de fibrés en droite sur le fibré
cotangent de variétés grassmanniennes généralisées**

présentée par

Isabelle Ascah-Coallier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

François Lalonde

(membre du jury)

Jochen Kuttler

(examineur externe)

Neil Frederick Stewart

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

3 avril 2013

SOMMAIRE

Cette thèse s'intéresse à la cohomologie de fibrés en droite sur le fibré cotangent de variétés projectives. Plus précisément, pour G un groupe algébrique simple, connexe et simplement connexe, P un sous-groupe maximal de G et ω un générateur dominant du groupe de caractères de P , on cherche à comprendre les groupes de cohomologie $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L})$ où \mathcal{L} est le faisceau des sections d'un fibré en droite sur $T^*(G/P)$. Sous certaines conditions, nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme, à graduation près, entre $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L})$ et $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}^\vee)$

Après avoir travaillé dans un contexte théorique, nous nous intéresserons à certains sous-groupes paraboliques en lien avec les orbites nilpotentes. Dans ce cas, l'algèbre de Lie du radical unipotent de P , que nous noterons \mathfrak{n} , a une structure d'espace vectoriel préhomogène. Nous pourrions alors déterminer quels cas vérifient les hypothèses nécessaires à la preuve de l'isomorphisme en montrant l'existence d'un P -covariant f dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ et en étudiant ses propriétés. Nous nous intéresserons ensuite aux singularités de la variété affine $V(f)$. Nous serons en mesure de montrer que sa normalisation est à singularités rationnelles.

MOTS CLÉS

Sous-groupe parabolique maximal, application moment, groupe de classe, module réflexif, cohomologie, espace vectoriel préhomogène, covariant.

SUMMARY

In this thesis, we study the cohomology of line bundles on cotangent bundle of projective varieties. To be more precise, let G be an semisimple algebraic group which is simply connected, P a maximal subgroup and ω a dominant weight that generates the character group of P . Our goal is to understand the cohomology groups $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L})$ where \mathcal{L} is the sheaf of sections of a line bundle on $T^*(G/P)$. Under some conditions, we will show that there exists an isomorphism, up to grading, between $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L})$ and $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}^\vee)$.

After we worked in a theoretical setting, we will focus on maximal parabolic subgroups related to nilpotent varieties. In this case, the Lie algebra of the unipotent radical of P has a structure of prehomogeneous vector spaces. We will be able to determine which cases verify the hypothesis of the isomorphism by showing the existence of a P -covariant f in $\mathbb{C}[n]$ and by studying its properties. We will be interested by the singularities of the affine variety $V(f)$. We will show that the normalisation of $V(f)$ has rational singularities.

KEYWORDS

Maximal parabolic subgroup, moment map, class group, reflexive module, cohomology, prehomogeneous vector spaces, covariant.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xvii
Remerciements	1
Introduction	3
Chapitre 1. Sous-groupes paraboliques maximaux et isomorphismes en cohomologie	9
1.1. Notations	9
1.2. Sous-groupe parabolique maximal et application moment	12
1.2.1. Étude de l'application moment	12
1.2.2. Généralisation de l'application moment	13
1.2.3. Factorisation de Stein	14
1.2.4. Sous-groupe parabolique maximal	15
1.3. Annulation de groupes de cohomologie	17
1.3.1. Le théorème de Borel-Weil-Bott	17
1.3.2. Un théorème de Kempf	19
1.3.3. Le théorème de Grauert-Riemenschneider	19
1.3.4. Annulation sur le fibré cotangent	20

1.4. Groupe de classe et modules réflexifs	21
1.4.1. Le groupe de classe d'un ouvert	21
1.4.2. Groupe de classe et modules réflexifs	22
1.4.3. Cohomologie et modules réflexifs	23
1.5. Diviseurs P-invariants de n	25
1.5.1. Espace vectoriel préhomogène	25
1.5.2. Existence et unicité d'un P-covariant dans n	26
1.5.3. Groupe de classe et existence de covariants	27
1.6. Isomorphisme	30
Annexe : Dualité de Grothendieck	39
1.7. Complexe et homotopie	39
1.8. Localisation d'un catégorie	40
1.9. Catégories dérivées et dualité	42
1.9.1. Catégorie dérivée	42
1.9.2. Foncteur dérivé	43
1.9.3. Étude des foncteurs $R\phi_*$ et $RHom$	44
1.9.4. Complexe dualisant	45
1.9.5. Dualité	46
Chapitre 2. Diagramme de Dynkin pondéré et sous-groupe parabolique maximal	47
2.1. Définitions et premières constructions	47
2.1.1. Application moment	49
2.1.2. Codimension deux	50
2.2. Orbite nilpotente et diagramme de Dynkin pondéré officiel	51
2.2.1. Espace préhomogène et covariant	52

2.3.	Normalité de l'espace des zéros d'un covariant	55
2.3.1.	Critère de normalité	56
2.3.2.	Critère de non normalité	57
2.4.	Singularités rationnelles	58
2.4.1.	Faisceau canonique	59
2.4.2.	Complexe de Koszul	60
2.4.3.	Un autre type de résolution	63
2.5.	Résultats	64
2.6.	Généralisation du théorème d'isomorphisme	75
Chapitre 3.	Les diagrammes USD officiels	81
3.1.	Diagrammes USD officiels	82
3.1.1.	Diagrammes USD officiels dans A_n	82
3.1.2.	Diagrammes USD officiels dans B_n	83
3.1.3.	Diagrammes USD officiels dans C_n	84
3.1.4.	Diagrammes USD officiels dans D_n	85
3.1.5.	Diagrammes USD officiels dans les algèbres de Lie exceptionnelles	
	86	
3.2.	Description de f	86
3.3.	Structure de $G_n^D \setminus Ge$	89
3.3.1.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type A_n	90
3.3.2.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type B_n	90
3.3.3.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type C_n	92

3.3.4.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type D_n	94
3.3.5.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie exceptionnelles	95
3.4.	Étude de la normalité	95
3.4.1.	Résolution des singularités	97
3.4.2.	Normalité et action complètement réductible d'un sous-groupe parabolique	102
3.4.3.	Absence d'orbites en codimension deux	104
3.4.4.	La variété $V(f)$ n'est pas normale	108
3.4.5.	Autres méthodes	110
3.5.	Singularités rationnelles	112
3.5.1.	Faisceau canonique	113
3.5.2.	Complexe de Koszul	115
3.5.3.	Singularités rationnelles dans les algèbres de Lie classiques ...	116
3.5.4.	Singularités rationnelles dans E_6	119
3.5.5.	Singularités rationnelles dans E_7	121
3.5.6.	Singularités rationnelles dans E_8	124
3.5.7.	Singularités rationnelles dans F_4	127
3.5.8.	Singularités rationnelles dans G_2	128
3.6.	Résumé et théorème	129
Annexe : Calculs dans le cas classique		131
3.7.	Le cas de D_n	131
3.8.	Le cas de B_n	139
3.9.	Le cas de C_n	142
Chapitre 4. Les diagrammes USD non officiels		151

4.1.	Diagrammes USD non officiels et existence d'un covariant.....	152
4.2.	Groupe de classe et covariants.....	154
4.2.1.	Les diagrammes USD non officiels dans A_n	155
4.2.2.	Les diagrammes USD non officiels dans B_n	155
4.2.3.	Les autres diagrammes USD non officiels dans C_n	161
4.2.4.	Les autres diagrammes USD non officiels dans D_n	164
4.2.5.	Les diagrammes USD non officiels dans E_8	167
4.2.6.	Le diagramme USD non officiel dans F_4	174
4.2.7.	Le diagramme USD non officiel dans G_2	178
4.2.8.	Résumé des résultats obtenus.....	183
4.3.	Autres types d'isomorphismes.....	189
4.3.1.	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels \hat{D}	189
4.3.2.	Séries de Hilbert équivariantes.....	190
4.3.3.	Calculs de séries de Hilbert P-équivariantes.....	191
4.3.4.	Cohomologie.....	194
	Annexe : Série de Hilbert et induction.....	203
4.4.	Série de Hilbert dans A_n	203
4.4.1.	Les orbites de $M(m_1 \times m_2, \mathbb{C})$	204
4.4.2.	L'orbite des matrices de rang 1.....	205
4.4.3.	Cohomologie.....	208
4.4.4.	Induction.....	210
4.4.5.	Passage aux matrices 3×3 et $m \times m$	211
4.4.6.	Action d'un seul groupe.....	212
4.5.	Série de Hilbert dans D_n	213
4.5.1.	Action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espaces des matrices antisymétriques.....	214
4.5.2.	Action d'un seul groupe.....	217

Bibliographie.....219

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Résumés des résultats, A_n	66
2.2	Résumés des résultats, B_n	68
2.3	Résumés des résultats, C_n	70
2.4	Résumés des résultats, D_n	72
2.5	Résumés des résultats, algèbres exceptionnelles.....	74
3.1	Poids et degré des covariants f	89
3.2	Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D et D'	96
3.3	Certains diagrammes de Dynkin pondérés \tilde{D} pour les cas où $\tilde{D} \neq D'$	102
3.4	Les poids λ vérifiant $\omega_X \simeq \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\lambda)^*$	114
3.5	Diagrammes USD officiels pour lesquels le faisceau canonique nous permet de conclure que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles	115
3.6	Dans D_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^{\sim}))$.	116
3.7	Dans D_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^{\sim}))$.	117
3.8	Dans B_3 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^{\sim}))$.	118
3.9	Dans C_3 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^{\sim}))$.	118

3.10	Dans C_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		119
3.11	Dans E_6 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		120
3.12	Dans E_6 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		120
3.13	Dans E_7 , avec $D(\alpha_3) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		121
3.14	Dans E_7 , avec $D(\alpha_3) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		122
3.15	Dans E_7 , avec $D(\alpha_5) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		122
3.16	Dans E_7 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		123
3.17	Dans E_8 , avec $D(\alpha_7) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		124
3.18	Dans E_8 , avec $D(\alpha_6) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		125
3.19	Dans E_8 , avec $D(\alpha_5) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		126
3.20	Dans F_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		127
3.21	Dans G_2 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{\tilde{D}})^*))$.	
		128
3.22	Diagrammes USD officiels D pour lesquels $H^j(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbf{C}_{-\omega_k})^*) \simeq H^j(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbf{C}_{\omega_k})^*)[-m]$.	130
3.23	Plus hauts poids des modules $\wedge^j W$	136

3.24	Plus hauts poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$	136
3.25	Plus hauts poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mu$	137
3.26	Plus hauts poids de $H^i(P^D/Q, (\wedge^j V^*)^\sim)$	139
3.27	Poids de V et valeurs de a, b, c, d et e	148
4.1	Les diagrammes de Dynkin pondérés dans A_n	184
4.2	Les diagrammes de Dynkin pondérés dans D_n	185
4.3	Les diagrammes de Dynkin pondérés dans B_n	186
4.4	Les diagrammes de Dynkin pondérés dans C_n	187
4.5	Les diagrammes de Dynkin pondérés dans les algèbres exceptionnelles	
	188	

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier mon directeur, Abraham Broer. Sans lui ce projet n'aurait pas pu avoir lieu. Il a su me pousser quand il le fallait et m'amener à me dépasser.

Un gros merci à Colin avec qui j'ai pu échanger tout au long de ma maîtrise et de mon doctorat. J'ai appris beaucoup grâce à nos super séminaires en tête à tête.

Merci à John qui a été là lors des deux dernières années. Ton support jour après jour et ta compréhension quand j'étais un peu moins patiente ont été remarquables. I love you John.

Merci à ma famille qui a toujours cru en moi.

Je tiens aussi à remercier le CRSNG qui m'a permis de travailler sur cette thèse à temps plein et cela sans souci financier.

Une pensée à Hugues dont le souvenir ne m'a jamais quitté.

INTRODUCTION

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur le corps des complexes. Soit P un sous-groupe propre fermé de G tel que l'espace homogène G/P soit une variété projective. On dit dans ce cas que P est un sous-groupe parabolique de G . Nous étudions plus particulièrement le fibré cotangent de la variété G/P . Il est noté $T^*(G/P)$. Il existe un morphisme, appelé l'application moment, $\mu : T^*(G/P) \rightarrow \mathfrak{g}$, où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G . Le groupe G agit sur son algèbre de Lie à travers sa représentation adjointe et sur son fibré cotangent faisant de l'application moment un morphisme G -équivariant. De plus, ce morphisme a des fibres génériquement finie.

Un théorème de Richardson nous apprend que G agit avec une orbite dense sur $T^*(G/P)$. L'image de μ , qui est un fermé irréductible de \mathfrak{g} , comporte donc par le fait même une orbite dense. C'est une orbite nilpotente et nous appelons $N := \mu(T^*(G/P))$ une variété nilpotente.

Plaçons nous dans la situation où le groupe G est en plus simple et simplement connexe et P est un sous-groupe parabolique maximal de G . Dans ce cas, la variété G/P est une variété grassmannienne généralisée. Le groupe de Picard de $T^*(G/P)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . Notons \mathcal{L} , un générateur positif de ce groupe.

Dans cette thèse, nous classifions les cas où le complément de l'orbite dense dans $T^*(G/P)$ contient une composante irréductible de codimension un. Notons la Z . Nous montrons alors que Z consiste en la variété des zéros d'une section globale de $\mathcal{L}^{-\alpha}$ avec $\alpha \in \{1, 2\}$. De plus, nous montrons que la normalisation de Z est à singularités rationnelles sauf peut-être pour un seul exemple

dans F_4 . Nous déterminons aussi si le diviseur Z est normal ou non et si le morphisme μ est birationnel ou non.

Finalement, dans le cas où $\alpha = 2$, nous montrons que

$$H^0(T^*(G/P), \mathcal{L}) \simeq H^0(T^*(G/P), \mathcal{L}^{-1})$$

comme $\mathbb{C}[T^*(G/P)]$ -modules et G -modules et que

$$H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}) \simeq H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}^{-1}) = 0$$

pour $i \geq 1$.

Ces résultats sur la cohomologie d'un fibré en droite sur le fibré cotangent peuvent aussi être utilisés dans le cas où P n'est pas un sous-groupe parabolique maximal. Soit P un sous-groupe parabolique de G . Alors, il existe une chaîne de sous-groupes paraboliques :

$$P = P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_m = G$$

tels que P_{i+1}/P_i est une variété projective et P_i est un sous-groupe parabolique maximal de P_{i+1} pour $1 \leq i \leq m-1$. On peut alors utiliser nos résultats sur les sous-groupes paraboliques maximaux et les transférer sur G/P en utilisant un processus d'induction qui fait intervenir des suites spectrales de Leray. C'est l'objet du théorème 2.6.1.

Des résultats sur la cohomologie de fibrés en droites sur le fibré cotangent de G/P permettent d'étudier la normalité de variétés nilpotentes dans l'algèbre de Lie de G . Afin d'expliquer comment cela est possible, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

Soit P un sous-groupe parabolique de G qui agit sur un espace vectoriel V . Dans ce cas, P agit sur le produit $G \times V$ par $p(g, v) = (gp^{-1}, pv)$. Nous notons $G \times^P V$ le quotient de $G \times V$ par cette action. L'espace $G \times^P V$ est un fibré vectoriel sur la variété projective G/P . Nous notons le faisceau des sections de ce fibré $\mathcal{L}_{G/P}(V)$. Le fibré cotangent de G/P a une expression intéressante à l'aide de cette construction. Notons \mathfrak{n} l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . D'après [19], $T^*(G/P) \simeq G \times^P \mathfrak{n}$.

Soit U un autre P -module. Il est possible de construire le fibré vectoriel $G \times^P U$. La projection $\pi : G \times^P V \rightarrow G/P$ permet alors de définir le fibré $\pi^*(G \times^P U)$ sur $G \times^P V$. Nous notons $\mathcal{L}_{G \times^P V}(U)$ les sections de ce fibré. Afin d'étudier la normalité de variété nilpotente, nous sommes intéressés par les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P V, \mathcal{L}_{G \times^P V}(U))$ lorsque U est de dimension un et V est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P .

Considérons une variété nilpotente N_1 pour laquelle il existe un morphisme birationnel et surjectif $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow N_1$ pour un certain sous-groupe parabolique P de G . Supposons que N_1 soit normale. Alors $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}] \simeq \mathbb{C}[N_1]$. Soit N_2 une variété nilpotente dans le bord de N_1 . Il arrive qu'il existe un fibré en droite \mathcal{L} sur $G \times^P \mathfrak{n}$ et une section globale s de degré m de \mathcal{L} telle N_2 soit l'image par μ de la variété $Z(s)$ définie par l'annulation de cette section. Nous obtenons alors une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^\vee[-m] \rightarrow \mathcal{O}_{G \times^P \mathfrak{n}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{Z(s)} \rightarrow 0$$

où $\iota : Z(s) \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$ est l'inclusion et $[-m]$ est un changement de graduation dont on discutera plus précisément dans la section 1.1. On passe ensuite à la suite exacte longue en cohomologie. En montrant l'annulation de $H^1(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}^\vee)$, on obtient une surjection $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[Z(s)]$. Dans le cas où $Z(s)$ est une variété normale, cela est suffisant pour obtenir la normalité de la variété nilpotente N_2 . En effet, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z(s) & \hookrightarrow & G \times^P \mathfrak{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_2 & \hookrightarrow & N_1 \end{array}$$

Celui-ci induit un diagramme sur les anneaux de coordonnées :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[Z(s)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}] \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{C}[N_2] & \lll & \mathbb{C}[N_1]. \end{array}$$

Mais nous avons supposé que $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ se surjecte dans $\mathbb{C}[Z(s)]$. Ainsi, $\mathbb{C}[N_2] \simeq \mathbb{C}[Z(s)]$ et comme N_2 est une variété affine dont l'anneau de coordonnées est normal, c'est une variété normale.

Notons que nous allons étudier les fibrés en droite sur $G \times^P \mathfrak{n}$ qui prennent la forme $G \times^P (\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\mu) \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$ où μ est un caractère de P . Nous notons alors le faisceau des sections de ce fibré $\mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_\mu)$. Si μ est dominant, Broer a montré dans [14] que les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_\mu)^*)$ s'annulent pour tout $i \geq 1$. Si μ n'est pas dominant, une idée est d'essayer de le rendre plus dominant pour appliquer le résultat de Broer. C'est ce que nous faisons dans cette thèse, mais en considérant seulement des sous-groupes paraboliques maximaux.

Donnons maintenant un aperçu des différents chapitres composant cet exposé. Nous nous plaçons dans le cadre où G est un groupe algébrique simple, connexe et simplement connexe. Nous choisissons P un sous-groupe parabolique maximal de G . Comme nous l'avons remarqué, le fibré cotangent de G/P s'écrit sous la forme $G \times^P \mathfrak{n}$ où \mathfrak{n} est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Il existe un élément e dans \mathfrak{n} tel que la fermeture de l'orbite Pe est \mathfrak{n} . Supposons que la codimension de $\mathfrak{n} \setminus Pe$ dans \mathfrak{n} soit un. Alors, nous montrons dans la proposition 1.5.4, qu'il existe un P -covariant irréductible $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ qui permet de décrire le fermé $\mathfrak{n} \setminus Pe$. Cela nous permettra de déduire par le fait même que dans le cas où la codimension de $\mathfrak{n} \setminus Pe$ dans \mathfrak{n} est un, le bord de l'orbite dense est irréductible.

Lorsque P est maximal, le groupe de classe du fibré cotangent de G/P est isomorphe à \mathbb{Z} et est engendré par un caractère de P qui est un poids dominant. Notons ω ce poids. Supposons que f est de poids 2ω . Il est alors possible de construire une suite exacte courte de faisceaux qui engendre une suite exacte longue liant les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_{-\omega})^*)$ et $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_\omega)^*)$. En utilisant entre autre le théorème de dualité de Grothendieck, on parvient à montrer le théorème ci-dessous, ce qui est le but du chapitre 1 de cette thèse.

Théorème 0.0.1. *Soit G un groupe semi-simple et simplement connexe. Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et ω le générateur dominant de son groupe de caractères. Soit e un élément régulier dans \mathfrak{n} l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Supposons que $\mathfrak{n} \setminus Pe$ soit de codimension un dans \mathfrak{n} et que le poids de l'unique P -covariant de P dans \mathfrak{n} soit 2ω . Alors, il existe un isomorphisme comme $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ -modules gradués avec une action de G compatible :*

$$H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_\omega)^*)[-m],$$

où m est le degré de f . En particulier, $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Les trois chapitres suivants sont dédiés à construire des exemples de sous-groupes paraboliques maximaux pour lesquels le théorème 0.0.1 s'applique. Pour cela, il est possible d'utiliser la notion de diagramme de Dynkin pondéré. Nous décrivons en détail cette notion dans le chapitre 2, mais nous la présentons sommairement ici.

Les groupes algébriques simples sont classifiés par des diagrammes de Dynkin. Étant donné un tel diagramme, on peut associer un entier positif à chaque noeud, par exemple dans E_6 , on pourrait prendre $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{smallmatrix}$. Nous appelons un tel diagramme, un diagramme de Dynkin pondéré. À partir de D , on peut attribuer un poids à chacune des racines de G et construire les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{p}^D := \mathfrak{g}_{\geq 0}^D$, respectivement $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$, ayant comme base les vecteurs dont les poids sont supérieurs ou égaux à 0, respectivement supérieurs ou égaux à 2. On construit également le sous-groupe parabolique P^D de G dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{p}^D . Dans le cas où le diagramme de Dynkin pondéré a une unique entrée non nulle et celle-ci est un deux, le sous-groupe parabolique P^D est maximal et l'algèbre de Lie de son radical unipotent est $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. Ce sont ces diagrammes que nous étudierons.

À chaque orbite nilpotente est associé un diagramme de Dynkin pondéré privilégié que nous appelons diagramme de Dynkin pondéré officiel. Ceux-ci peuvent être trouvés dans [18]. Nous nous intéressons plus particulièrement aux diagrammes de Dynkin pondérés D qui sont formés d'un seul deux. Rappelons qu'il existe un élément $e \in \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ tel que $P^D e$ est dense dans $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. Dans le

chapitre 2, nous montrons à l'aide de la théorie des espaces préhomogènes que $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D \setminus \mathbb{P}^D e$ est de codimension un dans $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. Il existe donc un unique, à multiplication scalaire près, \mathbb{P}^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}^D]$. Nous montrons que ce covariant est irréductible et donc que $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D \setminus \mathbb{P}^D e$ est aussi irréductible. Le chapitre 3 est utilisé afin d'étudier ce covariant et la variété affine $V(f)$. Nous y calculons le degré et le poids du \mathbb{P}^D -covariant f . Nous déterminons aussi si la variété $V(f)$ est normale ou non. Nous montrons finalement que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Si un diagramme de Dynkin pondéré D est formé d'un seul deux, mais n'est pas un diagramme de Dynkin pondéré officiel, nous ne savons pas directement si $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D \setminus \mathbb{P}^D e$ est de codimension un dans \mathfrak{n}^D et donc s'il existe $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}^D]$ un \mathbb{P}^D -covariant. Le chapitre 4 est consacré à cette question. Pour chacun des diagrammes de Dynkin pondérés formés d'un seul deux et n'étant pas officiel, nous déterminons s'il existe un \mathbb{P}^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}^D]$ en utilisant entre autre des techniques développées dans le chapitre 1 et en lien avec le groupe de classe de Ge . Dans le cas où un \mathbb{P}^D -covariant existe, nous calculons son degré et son poids. Comme dans le chapitre 3, nous sommes intéressés à déterminer si la variété $V(f)$ est normale ou non et si sa normalisation est à singularités rationnelles. Malheureusement, un seul exemple nous échappe toujours. C'est celui où $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \Rightarrow & 2 & 0 \end{smallmatrix}$ dans F_4 pour lequel nous pouvons montrer qu'il existe un \mathbb{P}^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\geq 2}^D]$, mais nous ne pouvons pas déterminer si $V(f)$ est une variété normale et si sa normalisation est à singularités rationnelles. Dans tous les autres cas, nous pouvons montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Nous conjecturons que dans le cas où $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \Rightarrow & 2 & 0 \end{smallmatrix}$, la normalisation de $V(f)$ est aussi à singularités rationnelles.

Chapitre 1

SOUS-GROUPES PARABOLIQUES MAXIMAUX ET ISOMORPHISMES EN COHOMOLOGIE

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 1.6.1 que nous avons déjà présenté dans l'introduction. Nous consacrons une première section à présenter les notations et le vocabulaire que nous utilisons tout au long du chapitre. Nous introduisons ensuite la notion de sous-groupe parabolique maximal et discutons de certaines de ses propriétés. La section 1.3 est consacrée à la présentation de différents théorèmes d'annulation de groupes de cohomologie, en particulier les théorèmes de Borel-Weil-Bott et de Grauert-Riemenschneider. Dans la section 1.4, nous parlons de groupes de classe et d'une définition moins habituelle de ces derniers en termes de modules réflexifs. Cette définition provient de [79]. La section 1.5 traite de covariants à l'aide de la théorie des espaces vectoriels préhomogènes. Tout cela nous donne les outils pour prouver le théorème 1.6.1, ce qui constitue la dernière section de ce chapitre.

1.1. NOTATIONS

Tout au long de ce document, à moins d'indications contraires, G est un groupe algébrique complexe, connexe, simple et simplement connexe. On choisit T un tore maximal de G et on note r la dimension de ce tore qui sera aussi appelé le rang de G . Le groupe des caractères du tore est noté $X(T)$ et est défini comme le groupe des morphismes algébriques de T à valeur dans \mathbb{C}^\times . L'ensemble des racines de G par rapport à T est noté ϕ . C'est un sous-ensemble

de $X(T)$. De façon plus générale, nous noterons $X(H)$ le groupe des caractères d'un groupe algébrique H . L'algèbre de Lie d'un groupe sera noté par la lettre gothique correspondante, ainsi \mathfrak{g} désignera l'algèbre de Lie de G .

Le groupe G agit sur son algèbre de Lie à travers la représentation adjointe. Cette représentation est notée ad . Pour $x \in \mathfrak{g}$, le centralisateur dans G de x est noté G_x . C'est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gx := \text{ad}(g)(x) = x$.

Soit B un sous-groupe de Borel, c'est-à-dire un sous groupe fermé, résoluble maximal et connexe de G . On suppose que B contient le tore maximal T . Le choix de B permet de définir parmi l'ensemble des racines de G par rapport à T , l'ensemble des racines positives ϕ^+ . Cela permet du même coup de définir l'ensemble des poids dominants dans le groupe $X(T)$ qui est noté X^+ et l'ensemble de racines simples $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ de G . Toute racine s'écrit comme combinaison \mathbb{Z} -linéaire à coefficients tous de même signe des racines simples.

Le caractère de T défini comme la demie somme de toutes les racines positives de G revient souvent. Il est noté $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \phi^+} \beta$. Tout au long du document, la numérotation de Bourbaki sera utilisée pour énumérer les racines simples des groupes simples. Elle peut être trouvée dans les planches I-IX de [6].

Le groupe de Weyl de G est noté $W = N_G(T)/T$. Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire W -invariant sur $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. À chaque racine simple α_i , correspond une réflexion simple s_{α_i} dans le groupe de Weyl. Chaque élément ω du groupe de Weyl s'écrit comme produit de réflexions simples. La longueur d'un élément $\omega \in W$ est définie comme le nombre minimum de réflexions simples dans l'écriture de ω . Elle est notée $l(\omega)$.

Le produit scalaire W -invariant permet de définir les coracines $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ et les poids fondamentaux ω_i , pour $1 \leq i \leq r$, vérifiant $(\alpha_i^\vee, \omega_j) = \delta_{ij}$. Tout caractère dominant est une combinaison $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -linéaire des poids fondamentaux.

Le groupe G étant simple, il est associé à un diagramme de Dynkin. Les caractères de T s'écrivent comme combinaison linéaire à coefficients rationnels des poids fondamentaux ou comme combinaison des racines simples. Les poids fondamentaux et les racines simples étant en correspondance avec les

noeuds du diagramme de Dynkin, cela nous donne une façon imagée d'écrire les caractères en faisant correspondre à chaque noeud le coefficient correspondant. Par exemple, si G est un groupe de type E_6 et $\lambda = \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$, nous notons $\lambda = \{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \}_\omega = \{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & & & \end{smallmatrix} \}_\alpha$.

Les G -modules irréductibles sont déterminés par leur plus haut poids λ qui est un caractère dominant. Le G -module irréductible de plus haut poids λ est noté $V_{G,\lambda}$ ou tout simplement V_λ si le groupe G est clair par le contexte. L'anneau des représentations de G est noté $R(G)$. Pour λ un poids dominant de G , la classe du G -module V_λ dans $R(G)$ est notée $[V_\lambda]$ ou e^λ .

Soit $M = \oplus_i M_i$ un module gradué. Le module $M[-j]$ est aussi un module gradué pour lequel la graduation a été modifiée. On définit $M[-j]_i := M_{i+j}$.

Un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe fermé de G contenant un sous-groupe de Borel de G . Il est aussi possible de le définir comme un sous-groupe fermé P de G tel que G/P est une variété projective, les sous-groupes de Borel étant les plus petits sous-groupes ayant cette propriété. Soit P un sous-groupe parabolique. Il se décompose $P = LU$ où L est un groupe réductif et U est le radical unipotent de P . Cette décomposition s'appelle la décomposition de Levi de P .

Soit V un P -module. Le sous-groupe parabolique P agit sur $G \times V$ de la façon suivante $p(g, v) = (gp^{-1}, pv)$. On dit que $(g_1, v_1) \sim (g_2, v_2)$ si ces deux éléments sont dans la même orbite sous l'action de P . Le quotient $G \times V$ sous l'action de P est noté $G \times^P V$. Cet espace est un fibré en vectoriel sur G/P . La classe de (g, v) dans $G \times^P V$ est notée $[g, v]$. On définit $\pi : G \times^P V \rightarrow G/P$ par $\pi([g, v]) = gP$. Le groupe G agit sur ce fibré avec l'action $h[g, v] = [hg, v]$. Le faisceau des sections de ce fibré est noté $\mathcal{L}_{G/P}(V)$ ou tout simplement $\mathcal{L}(V)$ lorsque la base du fibré est claire d'après le contexte. Si W est un second P -module, on peut construire le fibré vectoriel $G \times^P W$ sur G/P , puis le fibré vectoriel image réciproque $\pi^*(G \times^P W)$ sur $G \times^P V$. Il est intéressant de noter que $\pi^*(G \times^P W) \simeq G \times^P (V \oplus W)$. Le faisceau des sections de ce fibré est noté $\mathcal{L}_{G \times^P V}(W)$

Soit X une variété. On note \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions régulières sur X . Si X est affine, les faisceaux de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents sur X sont en correspondance avec les $\mathbb{C}[X]$ -modules. Soit M un $\mathbb{C}[X]$ -module, alors \tilde{M} est le faisceau de \mathcal{O}_X -modules associé à M .

On s'intéresse aux groupes de cohomologie $H^i(G \times^P V, \mathcal{L}_{G \times^P V}(W))$. Il est intéressant de noter qu'ils ont une structure de $\mathbb{C}[G \times^P V]$ -modules gradués et de G -modules et que celles-ci sont compatibles. La graduation vient de l'isomorphisme :

$$H^i(G \times^P V, \mathcal{L}_{G \times^P V}(W)) \simeq \bigoplus_n H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n V^* \otimes W)).$$

Celui-ci est obtenu à partir de la projection du fibré vectoriel $G \times^P V$ sur G/P et de la formule de projection.

1.2. SOUS-GROUPE PARABOLIQUE MAXIMAL ET APPLICATION

MOMENT

Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant le sous-groupe de Borel B . L'espace homogène G/P est une variété projective dont le fibré cotangent est noté $T^*(G/P)$. Il existe un isomorphisme entre $T^*(G/P)$ et $G \times^P \mathfrak{n}$ où \mathfrak{n} est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Dans un premier temps, nous voulons étudier l'application moment. Pour cela, nous utiliserons la description du fibré cotangent de G/P comme $G \times^P \mathfrak{n}$. Puis, nous étudierons la structure d'un sous-groupe parabolique de G . Cela nous permettra de comprendre le groupe de classe du fibré cotangent de G/P et d'en construire un générateur, si P est maximal.

1.2.1. Étude de l'application moment

En identifiant le fibré cotangent de G/P avec $G \times^P \mathfrak{n}$, l'application moment a une forme très simple :

$$\begin{aligned} \mu : G \times^P \mathfrak{n} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ [g, x] &\mapsto gx, \end{aligned}$$

où G agit sur \mathfrak{g} à travers la représentation adjointe. Cette application est projective. En effet, elle se factorise

$$G \times^P \mathfrak{n} \hookrightarrow G \times^P \mathfrak{g} \simeq G/P \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Ainsi, l'image de l'application moment $\mu(G \times^P \mathfrak{n})$ est un fermé de \mathfrak{g} . Notons N cette variété.

Les éléments de \mathfrak{n} sont nilpotents. Ainsi, N est une sous-variété fermée de \mathcal{N} le cône nilpotent de \mathfrak{g} . De plus, puisque $G \times^P \mathfrak{n}$ est une variété irréductible, c'est aussi le cas de son image N . Finalement, le cône nilpotent étant formé d'un nombre fini d'orbites, voir par exemple [55], on conclut que N est la fermeture d'une orbite nilpotente. Un élément $e \in \mathfrak{n}$ est appelé **régulier** dans \mathfrak{n} si $G e$ est la fermeture de l'orbite Ge .

Le théorème de Richardson est en lien avec l'application moment et permet aussi de mieux comprendre l'action de G sur le fibré cotangent de G/P . Nous l'énonçons ici.

Proposition 1.2.1 (Richardson). [65] *Soit P un sous-groupe parabolique de G et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Alors*

- (1) *L'application moment $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G \mathfrak{n}$ est à fibres génériquement finies.*
- (2) *Il existe $e \in \mathfrak{n}$ tel que Pe est un ouvert dense de \mathfrak{n} .*
- (3) $Ge \cap \mathfrak{n} = Pe$.

En particulier, l'orbite $G[1, e]$ est dense dans $G \times^P \mathfrak{n}$.

1.2.2. Généralisation de l'application moment

Soit V un G -module et $W \subset V$ un sous-espace de V qui est fermé sous l'action de P . On peut construire le fibré vectoriel $G \times^P W$ sur G/P . Il existe alors un morphisme G -équivariant $G \times^P W \rightarrow V$ donné par $[g, w] \mapsto gw$. De la même façon que pour l'application moment, on peut se demander sous quelles conditions est-ce que les fibres de ce morphisme sont génériquement finies ou encore, quelles sont les conditions nécessaires afin que le morphisme soit birationnel sur son image. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1.2.1. [20] *Supposons qu'il existe $x \in W$ vérifiant*

$$(1) \dim G \times^P W = \dim GW;$$

$$(2) G_x \subset P;$$

$$(3) G_x \cap W = P_x.$$

Alors, le morphisme $G \times^P W \rightarrow GW$ est birationnel.

1.2.3. Factorisation de Stein

L'application moment a une factorisation bien utile. Nous allons commencer par énoncer le théorème général de factorisation d'une application propre, puis nous expliquerons comment il est possible de l'utiliser dans le cas particulier de l'application moment.

Théorème 1.2.1 (Théorème de factorisation de Stein). (*Chapitre III.11 [30]*)

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre des schémas noethériens. Alors, il existe une factorisation $f = g \circ f'$ où $g : Z \rightarrow Y$ est un morphisme fini et $f' : X \rightarrow Z$ a des fibres connexes. De plus, $g_*(\mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à $f_*(\mathcal{O}_X)$ et $f'_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à \mathcal{O}_Z .

Corollaire 1.2.1. Soit V un G -module et $W \subset V$ un sous- P -module. Alors, le morphisme $f : G \times^P W \rightarrow V$ se factorise :

$$\begin{array}{ccc} G \times^P W & \xrightarrow{f'} & \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P W]) \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & V \end{array}$$

et cette factorisation est la factorisation de Stein.

DÉMONSTRATION. Le morphisme $f : G \times^P W \rightarrow V$ est projectif et donc propre. On peut donc utiliser le théorème ci-dessus. La variété Z est $\text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$ qui est tout simplement $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P W])$. \square

Ce théorème de factorisation permet de construire la normalisation de la variété nilpotente $G \mathfrak{n}$ ou encore un revêtement de cette dernière.

Proposition 1.2.2. Soit P un sous-groupe parabolique de G et \mathfrak{n} , l'algèbre de Lie de son radical unipotent. Si l'application moment $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G \mathfrak{n}$ est birationnelle, alors $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ est la normalisation de $G \mathfrak{n}$. Si l'application moment n'est pas birationnelle, alors $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ est un revêtement fini de la normalisation de $G \mathfrak{n}$.

DÉMONSTRATION. Considérons $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G \mathfrak{n}$ l'application moment. Le théorème de factorisation de Stein, théorème 1.2.1, permet d'obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]) & \\
 \hat{\mu} \nearrow & & \searrow \pi \\
 G \times^P \mathfrak{n} & \xrightarrow{\mu} & G \mathfrak{n}
 \end{array}$$

où π est un morphisme fini. Notons \tilde{N} la normalisation de $G \mathfrak{n}$. Puisque la variété $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ est normale, la propriété universelle de \tilde{N} assure l'existence d'un morphisme $\phi : \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]) \rightarrow \tilde{N}$.

Soit $e \in \mathfrak{n}$ un élément régulier et $x = \hat{\mu}([1, e])$. Alors, $\overline{Gx} = \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ et $G_x = P_e$, puisque μ est birationnelle. Notons que $\hat{\mu}$ est un isomorphisme entre les orbites ouvertes $G[1, e]$ et Gx . De plus, la codimension de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]) \setminus Gx$ est supérieure ou égale à deux. En effet, d'après Kostant, toutes les orbites nilpotentes sont de dimension paire. De plus, le morphisme π étant fini, toutes les G orbites de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ sont de dimension paire. Ainsi, la codimension de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]) \setminus Gx$ est supérieure ou égale à deux. Ceci avec la normalité de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ permet de conclure que $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}] \simeq \mathbb{C}[G]^{P_e}$. Similairement, on trouve que $\mathbb{C}[\tilde{N}] = \mathbb{C}[G]^{G_e}$.

Le morphisme ϕ provient de l'inclusion de $\phi^\# : \mathbb{C}[G]^{G_e} \hookrightarrow \mathbb{C}[G]^{P_e}$. Dans le cas où μ est birationnelle, $G_e = P_e$ et $\phi^\#$ est un isomorphisme. Ainsi, $\tilde{N} \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$. Dans le cas, où ce n'est pas un isomorphisme, nous savons que G_e/P_e est un groupe fini et $\mathbb{C}[G]^{G_e}$ est un facteur direct de $\mathbb{C}[G]^{P_e}$. Ce qui fait de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ un revêtement fini de \tilde{N} .

□

1.2.4. Sous-groupe parabolique maximal

Un sous-groupe parabolique P de G est dit **maximal** s'il n'est inclus strictement dans aucun sous-groupe de G autre que G lui-même. Dans un premier temps, nous allons décrire la structure d'un sous-groupe parabolique maximal

P de façon à pouvoir comprendre son groupe de caractères et par le fait même le groupe de classe du fibré cotangent $T^*(G/P)$.

Soit P un sous-groupe parabolique maximal d'un groupe simple G et contenant le sous-groupe de Borel B . Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples de G . Soit $P = LU$ la décomposition de Levi de P avec L un sous-groupe réductif de P et U le radical unipotent de P . D'après la maximalité de P , on peut choisir L de façon à ce qu'il existe i tel que l'ensemble des racines simples de L est $\Delta \setminus \{\alpha_i\}$.

Le groupe des caractères de P est lié à α_i . En effet, si P est un sous-groupe parabolique maximal, $X(P) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, le groupe des caractères de P est engendré par l'unique poids fondamental de G qui est un caractère de P . Par exemple, si l'ensemble des racines simples de L est $\Delta \setminus \{\alpha_i\}$, $X(P)$ est engendré par ω_i .

Donnons quelques précisions sur ce que nous entendons par le caractère ω_i vu sur P . Nous savons que ω_i est un caractère de T qui est un poids dominant. Il est alors possible de définir le G -module V_{G, ω_i} . Soit $v \in V_{G, \omega_i}$ un vecteur non nul de poids ω_i . Alors, le sous-groupe parabolique P agit sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}v$ avec un caractère qui est une extension de ω_i à P . D'où le fait que nous appelons aussi ce caractère ω_i .

Nous avons avec cela assez d'informations pour comprendre le groupe de classe du fibré cotangent de G/P .

Lemme 1.2.2. *Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G un groupe simple et simplement connexe. Alors le groupe de classe du fibré cotangent de G/P est isomorphe à \mathbb{Z} .*

DÉMONSTRATION. Le fibré cotangent de G/P est un fibré vectoriel sur G/P . On sait donc que $Cl(T^*(G/P)) \simeq Cl(G/P)$. Mais G/P est une variété lisse. Ainsi, son groupe de classe est isomorphe à son groupe de Picard. D'après [49], il existe une suite exacte :

$$X(G) \rightarrow X(P) \rightarrow \text{Pic}(G/P) \rightarrow \text{Pic}(G).$$

Puisque G est simple le groupe de caractères de G est trivial et puisqu'il est simplement connexe son groupe de Picard est aussi trivial. Ainsi le groupe de Picard de G/P est isomorphe au groupe des caractères de P qui lui est isomorphe à \mathbb{Z} . \square

Nous voulons trouver un générateur du groupe de Picard du fibré vectoriel $T^*(G/P)$ qui comme nous venons de le montrer est isomorphe au groupe des caractères de P . Nous savons que $X(P)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . Il est engendré par l'unique poids fondamental de G qui est aussi un caractère de P . Notons ce caractère ω . On construit le fibré en droite correspondant à cet élément du groupe de Picard de $T^*(G/P)$. Nous avons identifié $T^*(G/P)$ avec le fibré $G \times^P \mathfrak{n}$. Notons $\pi : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G/P$ la projection de $G \times^P \mathfrak{n}$ sur G/P et \mathbb{C}_ω le P -module de dimension un sur lequel P agit avec le poids ω . On peut construire le fibré en droite $G \times^P \mathbb{C}_\omega^*$ sur G/P , puis le fibré image réciproque $\pi^*(G \times^P \mathbb{C}_\omega^*)$ que nous noterons plutôt $G \times^P (\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\omega^*)$. Un générateur du groupe de Picard de $T^*(G/P)$ est ce fibré en droite.

1.3. ANNULATION DE GROUPES DE COHOMOLOGIE

Nous présentons ici quatre théorèmes d'annulation. Le premier est le théorème de Borel-Weil-Bott, qui est plus qu'un théorème d'annulation. Il décrit aussi la structure de G -module de $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(\mathbb{C}_\lambda^*))$ pour λ un caractère de P . Le second est un théorème de Kempf et nous donne de l'information sur $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n V^*))$ dans le cas où V est un P -module complètement réductible. Nous présentons ensuite le théorème de Grauert-Riemenschneider qui fait intervenir le faisceau canonique d'une variété lisse. Puis nous terminons avec un théorème de Broer sur l'annulation de groupes de cohomologie de fibrés en droite sur des fibrés cotangents de variétés projectives. La preuve de ce théorème repose sur le théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider.

1.3.1. Le théorème de Borel-Weil-Bott

Nous allons maintenant énoncer le théorème de Borel-Weil-Bott. Celui-ci décrit la structure de G -module de $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(W^*))$ si W est un P -module

complètement réductible. Il permet aussi de construire toutes les représentations irréductibles de G .

Théorème 1.3.1. [22] *Soit G un groupe réductif et P un sous-groupe parabolique de G . Soit μ un poids dominant pour le sous-groupe de Levi L et $V_{P,\mu}$ le P -module irréductible de plus haut poids μ . S'il existe un poids dominant λ de G et un élément σ du groupe de Weyl de G tel que $\sigma(\mu + \rho) - \rho = \lambda$, alors*

$$H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V_{P,\mu})^*) = \begin{cases} V_{G,\lambda}^* & \text{si } i = l(\sigma) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si une telle paire (σ, λ) n'existe pas, alors tous les groupes de cohomologie sont nuls.

Nous dirons qu'un caractère μ d'un sous-groupe P est ρ -régulier s'il existe un poids dominant λ de G et un élément σ du groupe de Weyl de G tel que $\sigma(\mu + \rho) - \rho = \lambda$. Ainsi, si μ n'est pas ρ -régulier $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V_{P,\mu})^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Remarque 1.3.1. *Si V est un P -module qui n'est pas complètement réductible, il n'est pas possible en général de calculer les groupes de cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)^*)$ à partir du théorème de Borel-Weil-Bott. Il est cependant possible de calculer la **caractéristique d'Euler** du faisceau $\mathcal{L}_{G/P}(W)$ que nous notons $\chi(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))$. Celle-ci est définie par*

$$\chi(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)) := \sum_i (-1)^i [H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))].$$

où $[H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))]$ est vu comme un élément de l'anneau des représentations de G .

Pour la calculer, il faut d'abord construire une filtration de V en termes de P -modules

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_n = 0$$

telle que pour tout $i \geq 0$, $M_i = V_i/V_{i+1}$ est un P -module irréductible. Le théorème 1.3.1 nous permet de calculer les groupes de cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(M_i))$ et la caractéristique d'Euler de G/P par rapport au faisceau $\mathcal{L}_{G/P}(M_i)$ est soit zéro, soit la classe dans $R(G)$ de l'unique groupe de cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(M_i))$ qui est non nul et qui consiste, comme nous le savons, en un G -module irréductible. Nous allons noter $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)^\sim)$ la cohomologie du module gradué $M = \bigoplus_i M_i$ à ne

pas confondre avec la notation du faisceau associé à un module. Le contexte rend la notation claire.

Des propriétés d'additivité assurent que

$$\chi(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(M_i)).$$

De plus, $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)^\sim)$ est une borne supérieure sur $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))$. En effet, si $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)^\sim) = 0$, alors c'est aussi le cas pour $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))$. Finalement, tout G -module apparaissant dans $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))$ apparaît aussi dans $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V)^\sim)$ avec une multiplicité plus grande ou égale à celle dans $H^j(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(V))$.

1.3.2. Un théorème de Kempf

Soit P un sous-groupe parabolique de G , V un G -module et $W \subset V$ un P -module complètement réductible. Un premier résultat d'annulation porte sur les groupes de cohomologie de la forme $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n W^*))$. Notons qu'il est équivalent de demander qu'un P -module soit complètement réductible ou de demander que le radical unipotent de P agisse trivialement sur ce module.

Théorème 1.3.2. [31] *Soit W un P -module complètement réductible qui est un sous- P -module d'un G -module V . Alors,*

$$\mathbb{C}[GW] \simeq \bigoplus_{n \geq 0} H^0(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n W^*))$$

et $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(S^n W^*)) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout $n \geq 0$.

Remarque 1.3.2. *La preuve du théorème 1.3.2 se base sur le théorème de Borel-Weil-Bott.*

1.3.3. Le théorème de Grauert-Riemenschneider

Le théorème de Grauert-Riemenschneider est un théorème d'annulation sur les groupes de cohomologie élevés de faisceaux cohérents. La version que nous allons présenter provient d'un article de Kempf [44]. Elle fait intervenir le faisceau canonique d'une variété lisse ou plus généralement, le faisceau des formes différentielles absolument régulières.

Soit Y une variété lisse. On dit qu'un morphisme $\phi : Y \rightarrow X$ est une **résolution de singularités** si ϕ est birationnel et propre. Il a été prouvé par Hironaka que pour toute variété X , il existe une variété lisse Y et une résolution de singularités $\phi : Y \rightarrow X$. Si X est lisse, on définit le **faisceau des formes différentielles absolument régulières** sur X , qu'on note $K(X)$, comme le faisceau canonique ω_X . Sinon, on construit une résolution de singularités $\phi : Y \rightarrow X$ et on définit $K(X) := \phi_*\omega_Y$.

Théorème 1.3.3 (Grauert-Riemenschneider). [44] *Soit Y une variété lisse et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme surjectif et propre. Alors, $R^i f_* K(Y) = 0$ si i est supérieur à la dimension relative de f . De plus, si f est un morphisme birationnel, alors $f_* K(Y) \simeq K(X)$.*

Remarque 1.3.3. *Le théorème de Grauert-Riemenschneider n'est vrai qu'en caractéristique zéro. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons demandé que G soit un groupe complexe.*

Il y a une autre façon de généraliser la notion de faisceau canonique à une variété qui n'est pas lisse. Soit X une sous-variété fermée de codimension c d'une variété lisse Y et notons $\iota : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion. On peut alors définir $\iota_*\omega_X = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^c(\iota_*\mathcal{O}_X, \omega_Y)$. Cette définition sera particulièrement utile dans les sections 1.5 et 1.6.

1.3.4. Annulation sur le fibré cotangent

Dans [14], Broer a montré que pour P un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif G et λ un caractère de P qui est G -dominant, les groupes de cohomologie $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_\lambda)^*)$ sont nuls pour tout $i \geq 1$. Sa preuve permet de donner un énoncé plus général de son théorème, ce que nous ferons ici. Il est intéressant de noter que la preuve de ce résultat se base sur le théorème de Grauert-Riemenschneider que nous venons de présenter.

Commençons par fixer quelques notations et définitions. Soit P et Q des sous-groupes paraboliques de G en position standard avec $Q \subset P$. Notons $P = LU$ une décomposition de Levi de P et $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ l'ensemble des indices des racines simples de G qui sont aussi des racines simples de L . Soit V une

sous-algèbre de Lie Q -stable de \mathfrak{n} l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Soit λ un caractère de Q et $\omega_{P \times^Q V}$ le faisceau canonique de $P \times^Q V$. Alors $\omega_{P \times^Q V}$ peut être identifié à un caractère de Q . Plus précisément, on peut construire explicitement un caractère λ de Q tel que $\omega_{P \times^Q V} \simeq \mathcal{L}_{P \times^Q V}(\mathbb{C}_\lambda)^*$. Il existe un isomorphisme de Q -module $\mathbb{C}_\lambda^* \simeq \bigwedge^{\text{top}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})^* \otimes \bigwedge^{\text{top}}(V)^*$. Ainsi, pour obtenir le caractère λ , il suffit de faire la somme μ_1 de tous les poids de $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$, puis la somme μ_2 de tous les poids de V et $\lambda = \mu_1 + \mu_2$.

Soit ξ un caractère de Q et notons $\xi - \lambda = \sum_{i=1}^r n_i \omega_i$. Nous dirons que le caractère ξ de Q est **plus grand ou égal à $\omega_{P \times^Q V}$ par rapport à P** et nous noterons $\xi \geq_P \omega_{P \times^Q V}$ si $n_i \geq 0$ pour tout $i \in I$.

Théorème 1.3.4. *Soit P et Q des sous-groupes paraboliques de G avec $Q \subset P$. Soit V un sous-espace Q -stable de \mathfrak{n} , l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Si $\xi \geq_P \omega_{P \times^Q V}$,*

$$H^i(P \times^Q V, \mathcal{L}_{P \times^Q V}(\mathbb{C}_\xi)^*) = 0$$

pour tout $i \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Bien que l'énoncé soit plus général que le théorème 2.2 de [14], la preuve suit directement. La différence réside dans le fait que le fibré canonique sur $P \times^Q V$ n'est pas nécessairement trivial, ce qui nous oblige à remplacer la condition ξ dominant par la condition $\xi \geq_P \omega_{P \times^Q V}$. \square

1.4. GROUPE DE CLASSE ET MODULES RÉFLEXIFS

Dans cette section, nous introduirons certains résultats sur les groupes de classe qui permettent entre autre de lier le groupe de classe d'une variété X , d'un ouvert U de X et du complément de U dans X . Nous introduirons aussi une définition moins standard du groupe de classe d'une variété affine en termes de modules réflexifs.

1.4.1. Le groupe de classe d'un ouvert

Commençons par introduire une proposition qui lie le groupe de classe d'une variété X , d'un ouvert U de X et du complément $Z = X \setminus U$.

Proposition 1.4.1 (Prop. II.6.5 [30]). *Soit X une variété irréductible séparée et régulière en codimension un. Soit Z un sous-ensemble fermé propre de X et $U = X \setminus Z$. Alors :*

- (1) *il existe un homomorphisme surjectif $Cl(X) \rightarrow Cl(U)$;*
- (2) *si la codimension de Z dans X est supérieure ou égale à deux, alors cet homomorphisme est aussi injectif ;*
- (3) *si Z est un sous-ensemble irréductible de codimension un, alors il existe une suite exacte*

$$Z \rightarrow Cl(X) \rightarrow Cl(U) \rightarrow 0,$$

où le premier morphisme est défini par $1 \mapsto 1[Z]$.

1.4.2. Groupe de classe et modules réflexifs

La définition usuelle du groupe de classe d'une variété normale X met en jeu les sous-variétés de codimension un dans X : les diviseurs de X . Nous souhaitons donner une définition alternative qui sera plus algébrique. L'approche ici suit celle de [5] et [79]. Nous allons commencer par un traitement du groupe de classe d'un anneau, puis nous passerons à celui des variétés affines.

Soit A un domaine noethérien normal, K son corps des fractions et M un A -module de type fini. On définit le dual de M , noté M^* , comme l'ensemble des homomorphismes de A -modules de M à valeur dans A . Cet ensemble a une structure de A -module évidente. On dit qu'un M -module de type fini est **réflexif** si le morphisme :

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M^{**} \\ m &\mapsto "\phi \mapsto \phi(m)" \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Exemple 1.4.1. (1) *Soit M un A -module libre de rang fini. Alors M est un module réflexif.*

(2) *Soit M un A -module de rang fini. Alors le module dual M^* est réflexif.*

Il est possible de construire le double dual d'un module à l'aide de l'intersection et de la localisation de modules. Notons X_1 l'ensemble de tous les

idéaux premiers de A de hauteur un, c'est-à-dire qui contiennent proprement un unique idéal premier (l'idéal $\{0\}$ si A est un domaine).

Proposition 1.4.2. [79] *Soit A un domaine normal noethérien et M un A -module de type fini libre de torsion. Alors*

$$M^{**} = \bigcap_{p \in X_1} M_p.$$

Nous voulons étudier les morphismes entre les modules réflexifs. Pour cela la notion du support d'un A -module M est nécessaire. Soit A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. On définit le **support** de M , noté $\text{Supp}(M)$, comme l'ensemble des idéaux premiers p de A tels $M_p \neq 0$.

Proposition 1.4.3. [5] *Soit A un anneau normal et M et N des A -modules réflexifs. Soit $\phi : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules dont les supports du noyau et du conoyau sont de codimension supérieures ou égales à deux dans $\text{Spec}(A)$. Alors, ϕ est un isomorphisme.*

On définit le **rang** d'un module comme la dimension du K -espace vectoriel $M \otimes_K A$. Le **groupe de classe** de A , noté $\text{Cl}(A)$, est défini comme l'ensemble des A -modules réflexifs de rang un à isomorphisme près. La multiplication dans le groupe de classe est une modification du produit tensoriel. Soit M et N des A -modules réflexifs de type fini et de rang un, alors le produit de M et N est défini comme suit : $M \odot N := (M \otimes_A N)^{**}$.

Finalement, nous pouvons définir le groupe de classe d'une variété affine à l'aide de modules réflexifs. Soit X une variété affine normale. Alors $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des fonctions régulières sur X est un domaine noethérien normal et on peut définir le groupe de classe de X comme le groupe de classe de l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

1.4.3. Cohomologie et modules réflexifs

Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de son radical unipotent. On note $X = G \times^P \mathfrak{n}$ le fibré cotangent de G/P . Soit ω le poids dominant générateur du groupe des caractères de P . Pour tout entier $i \geq 0$, on construit le fibré $G \times^P \mathbb{C}_{i\omega}^*$ sur G/P et le fibré réciproque associé sur

$G \times^P n$. On note le faisceau des sections de ce dernier fibré $\mathcal{O}_X(i)$. Finalement, on note \hat{N} la variété affine $\hat{N} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X])$ et $\hat{\mu} : X \rightarrow \hat{N}$ le morphisme qui provient de la factorisation de Stein de l'application moment.

Lemme 1.4.1. *Soit $i \geq 0$, un entier. Le $\mathbb{C}[\hat{N}]$ -module $H^0(X, \mathcal{O}_X(-i))$ est réflexif et le faisceau canonique $\omega_{\hat{N}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\hat{N}]^\sim$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que $H^0(X, \mathcal{O}_X(-i)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(i))^*$. Un module dual étant toujours réflexif, cela permettra de conclure.

D'après le théorème 1.3.4, $H^j(X, \mathcal{O}_X(i)) = 0$ pour tout $j \geq 1$. L'application $\hat{\mu}$ a des fibres connexes qui sont génériquement finies. C'est donc un morphisme birationnel. Nous savons aussi que c'est un morphisme projectif et par le fait même propre. Finalement, puisque X est le fibré cotangent de G/P , c'est une variété symplectique, voir [19], et son faisceau canonique ω_X est isomorphe à \mathcal{O}_X .

On utilise maintenant la dualité de Grothendieck. Cela nous permet d'obtenir un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\begin{aligned} R\hat{\mu}_* \mathcal{O}_X(-i) &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\hat{N}}} (R\hat{\mu}_* \mathcal{O}_X(i), \omega_{\hat{N}}) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\hat{N}}} (H^\bullet(X, \mathcal{O}_X(i))^\sim, \omega_{\hat{N}}). \end{aligned}$$

En prenant la cohomologie de degré zéro de part et d'autre de l'isomorphisme et en se rappelant que $H^j(X, \mathcal{O}_X(i)) = 0$ pour tout $j > 0$, on obtient :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-i))^\sim \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\hat{N}]^\sim} (H^0(X, \mathcal{O}_X(i))^\sim, \omega_{\hat{N}}).$$

Prenons maintenant $i = 0$. À gauche, on obtient :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[\hat{N}].$$

À droite, on obtient :

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\hat{N}]^\sim} (H^0(X, \mathcal{O}_X)^\sim, \omega_{\hat{N}}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\hat{N}]^\sim} (\mathbb{C}[\hat{N}]^\sim, \omega_{\hat{N}}) \simeq \omega_{\hat{N}}.$$

Ceci nous permet de conclure que $\omega_{\hat{N}} \simeq \mathbb{C}[\hat{N}]^\sim$. Ainsi,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-i)) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{C}[\hat{N}]} (H^0(X, \mathcal{O}_X(i)), \mathbb{C}[\hat{N}]) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(i))^*.$$

□

1.5. DIVISEURS P-INVARIANTS DE \mathfrak{n}

Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de son radical unipotent. Le but de cette section est de montrer que sous certaines conditions, il existe une unique fonction irréductible $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ telle que pour tout $p \in P$ et pour tout $x \in \mathfrak{n}$, $f(px) = \lambda(p)f(x)$ où λ est un caractère de P . Une telle fonction est appelé un **covariant** de P . Plus généralement, un P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ est une fonction $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ telle que pour tout $p \in P$ et pour tout $x \in \mathfrak{n}$, $f(px) = \lambda(p)f(x)$ où $\lambda \in \chi(P)$. Le caractère λ est appelé le **poïds** du covariant f . On dit aussi que la fonction zéro est un P -covariant sans poïds. Dans la suite, nous nous intéresserons seulement aux P -covariants irréductibles et non nuls.

Il faut faire attention à cette définition de poïds de f qui peut porter à confusion. Le groupe P agit sur $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ avec l'action définie par $p \cdot h(x) = h(p^{-1}x)$ pour $p \in P$, $h \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ et $x \in \mathfrak{n}$. Ainsi, si f est un P -covariant de poïds λ , $p \cdot f(x) = f(p^{-1}x) = \lambda(p^{-1})f(x)$. Nous préférons toutefois cette définition de poïds de f qui fait en sorte qu'un P -covariant f engendre un morphisme de P -variétés $\mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ et réciproquement.

Dans un premier temps, nous discuterons de la notion d'espace vectoriel préhomogène. Nous utiliserons cette théorie afin de montrer l'existence et l'unicité de ce covariant sous certaines conditions. Puis, nous aborderons la question de son poïds.

1.5.1. Espace vectoriel préhomogène

Soit G un groupe algébrique connexe, il n'est pas nécessaire ici que G soit un groupe simple, et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de dimension finie de G . On dit que le triplet (G, ρ, V) est un **espace vectoriel préhomogène**, que nous allons abrévier un EVP, s'il existe une orbite dense dans V selon la topologie de Zariski. Soit x un élément de cette orbite dense. Alors $\overline{Gx} = V$. Nous appelons $S = V \setminus Gx$ l'**ensemble singulier** de l'EVP. Une orbite étant toujours ouverte dans sa fermeture, l'orbite Gx est un ouvert de V . L'existence

d'une orbite dense dans V est donc équivalente à l'existence d'une orbite ouverte dans V . Finalement, on dit qu'un EVP est **irréductible** si la représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ l'est.

Plusieurs articles ont été écrits sur le sujet, permettant entre autre de classer les espaces préhomogènes [67] ou de comprendre la décomposition orbitale de ces représentations [46], [59], [60], [68] par exemple. Le livre de Kimura [47] est aussi une excellente référence sur le sujet.

Nous allons nous intéresser à la notion de covariant dans un EVP. Plus précisément, nous cherchons quelles conditions nous assurent l'existence et l'unicité d'un covariant de G dans $\mathbb{C}[V]$.

Proposition 1.5.1. [67] *Soit (G, ρ, V) un EVP et S son ensemble singulier. Alors il existe un covariant de G dans $\mathbb{C}[V]$ ssi S a une composante irréductible de codimension un.*

Proposition 1.5.2. [67] *Soit (G, ρ, V) un EVP irréductible. Alors il existe à une constante près, au plus un covariant irréductible $f \in \mathbb{C}[V]$ et tous les covariants sont de la forme cf^m avec $c \in \mathbb{C}$ et m un entier.*

Avant de terminer, nous allons énoncer un résultat liant l'existence d'un covariant et le centralisateur d'un élément régulier.

Proposition 1.5.3. [47] *Soit (G, ρ, V) un EVP pour lequel G est réductif. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'ensemble singulier S est une hypersurface ;*
- (2) *Tous les sous-groupes isotropiques génériques G_v , pour $v \in V \setminus S$, sont réductifs ;*
- (3) *Toutes les sous-algèbres isotropiques génériques $\text{Lie}(G_v)$, pour $v \in V \setminus S$ sont réductives.*

Si ces conditions sont vérifiées, le polynôme f définissant S est un G -covariant non nul.

1.5.2. Existence et unicité d'un P -covariant dans \mathfrak{n}

Notons ad , la représentation adjointe de G , un groupe algébrique simple, sur \mathfrak{g} . Nous allons garder la même notation pour ses restrictions. Le triplet

$(P, \text{ad}, \mathfrak{n})$ est un EVP. En effet, d'après le théorème de Richardson, proposition 1.2.1, il existe un élément e dans \mathfrak{n} tel que Pe est dense dans \mathfrak{n} .

Proposition 1.5.4. *Soit P un sous-groupe parabolique maximal et soit $e \in \mathfrak{n}$ un élément de Richardson. Supposons que $\mathfrak{n} \setminus Pe$ soit de codimension un dans \mathfrak{n} . Alors, il existe un P -covariant f irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ et celui-ci est unique à multiplication par un scalaire près.*

DÉMONSTRATION. L'existence découle directement de la proposition 1.5.1 et de l'hypothèse que $\mathfrak{n} \setminus Pe$ soit de codimension un dans \mathfrak{n} . Passons maintenant à l'unicité. Supposons qu'il existe deux covariants irréductibles f_1 et f_2 de poids respectivement $\alpha_1\omega$ et $\alpha_2\omega$. On considère les covariants $g_1 = f_1^{\alpha_2}$ et $g_2 = f_2^{\alpha_1}$ qui ont le même poids $\alpha_1\alpha_2\omega$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g_1(e) = g_2(e)$. Ainsi, pour tout élément x dans l'orbite Pe , $g_1(x) = g_2(x)$. Cette orbite étant dense dans \mathfrak{n} , on conclut que $g_1 = g_2$. Ainsi, les covariants f_1 et f_2 sont égaux à multiplication par une constante près. \square

Remarque 1.5.1. *Pour l'unicité du P covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$, nous n'avons pas utilisé la proposition 1.5.2 qui demande que \mathfrak{n} soit un P -module irréductible, mais plutôt la structure particulière du groupe de caractères de P .*

Corollaire 1.5.1. *Soit P un sous-groupe parabolique maximal et soit $e \in \mathfrak{n}$ un élément de Richardson. Supposons que $\mathfrak{n} \setminus Pe$ soit de codimension un dans \mathfrak{n} . Alors, $\mathfrak{n} \setminus Pe$ est irréductible.*

DÉMONSTRATION. Cela découle directement de l'unicité du P -covariant f irréductible. \square

1.5.3. Groupe de classe et existence de covariants

Soit P un sous-groupe parabolique de G , \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de son radical unipotent et e un élément de Richardson dans \mathfrak{n} . Nous allons utiliser les propositions 1.4.1 et 1.5.4 afin de lier l'existence d'un covariant dans \mathfrak{n} et le groupe de classe de G_e .

Proposition 1.5.5. *Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de son radical unipotent. Notons e un élément régulier de \mathfrak{n} et ω le générateur dominant du groupe de caractères de P . Supposons que l'application moment $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G \mathfrak{n}$ soit birationnelle et que le groupe de classe de Ge soit isomorphe à $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \neq 0$. Alors, il existe un P -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ de poids $\alpha\omega$.*

DÉMONSTRATION. Notons $U := G \times^P Pe$. C'est un ouvert dense de $X := G \times^P \mathfrak{n}$. On définit le fermé $Z := X \setminus U$. D'après la proposition 1.4.1, il existe une suite exacte :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0,$$

où le premier morphisme consiste en $1 \mapsto [Z] \in \text{Cl}(X)$. De plus, comme nous l'avons vu dans le lemme 1.2.2, il existe un isomorphisme : $\text{Cl}(X) \simeq X(P) \simeq \mathbb{Z}$. En comprenant $\text{Cl}(U)$, on saura comment $[Z]$ se comporte dans $\text{Cl}(X)$.

L'ouvert $U = G \times^P Pe$ est la G -orbite de $[1, e]$. Puisque l'application moment μ est birationnelle, elle consiste en un isomorphisme entre U et son image Ge . Ainsi $\text{Cl}(U) \simeq \text{Cl}(Ge)$. Mais par hypothèse, $\text{Cl}(Ge) \simeq \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \neq 0$. D'après 1.4.1, on conclut que Z doit être de codimension un dans X et que l'image de $[Z]$ dans $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$ est α . Ainsi, $\mathfrak{n} \setminus Pe$ est de codimension un dans \mathfrak{n} . D'après la proposition 1.5.4, il existe un unique P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ et celui-ci est de poids $\alpha\omega$.

□

Corollaire 1.5.2. *Plaçons nous dans la même situation que pour l'énoncé de la proposition, mais en supposant que le groupe de classe de Ge est isomorphe à \mathbb{Z} . Alors, il n'y a pas de P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$.*

DÉMONSTRATION. En reprenant les notations de la proposition 1.5.5, $\text{Cl}(U) \simeq \text{Cl}(X) = \mathbb{Z}$. Ainsi, Z est de codimension plus grande ou égale à deux dans X et il n'y a donc pas de P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$.

□

Nous allons maintenant énoncer et montrer une proposition qui donne une condition pour la non-existence d'un covariant dans le cas où l'application moment n'est pas birationnelle.

Proposition 1.5.6. *Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et \mathfrak{n} le radical unipotent de son algèbre de Lie. Soit e un élément de Richardson dans \mathfrak{n} . Supposons que la restriction de l'application moment $\mu : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G/\mathfrak{n}$ soit génériquement $2 : 1$, que $G_e/G_e^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que \mathbb{Z} soit un sous-groupe du groupe des caractères de G_e° . Alors, il n'y a pas de P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$.*

DÉMONSTRATION. Soit $e \in \mathfrak{n}$ un élément de Richardson. Supposons qu'un P -covariant f non identiquement nul de poids $a\omega$ existe dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$. Puisque P_e est dense dans \mathfrak{n} , on sait que $f(e) \neq 0$ et plus encore, pour tout $x \in P_e$, $f(x) \neq 0$. Ainsi, $V(f) \subset \mathfrak{n} \setminus P_e$ et $V(f)$ est un sous-espace de codimension un dans \mathfrak{n} .

Notons $U = G \times^P P_e$ l'ouvert dense de $G \times^P \mathfrak{n}$ qui consiste en la G -orbite de $[1, e]$. Notons $Z = G \times^P \mathfrak{n} \setminus U$. D'après le théorème 1.4.1, il existe une suite exacte :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(G \times^P \mathfrak{n}) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0, \quad (1.5.1)$$

où le premier morphisme consiste en $1 \mapsto [Z] \in \text{Cl}(G \times^P \mathfrak{n})$. Or, nous savons que $\text{Cl}(G \times^P \mathfrak{n}) \simeq \mathbb{Z}$.

L'ouvert $U = G[1, e] \simeq G/P_e$. Ainsi, $\text{Cl}(U) \simeq \text{Cl}(G/P_e) \simeq \text{Pic}(G/P_e)$. De plus, comme G est simple et simplement connexe, $\text{Pic}(G/P_e) \simeq X(P_e)$. Il nous faut donc comprendre le groupe des caractères de P_e .

Il est évident que $P_e \subset G_e$. De plus, nous avons supposé que la restriction de l'application moment μ est génériquement $2 : 1$. Ainsi, on sait que G_e/P_e est formé de seulement deux translatés. De plus, puisque G_e/P_e est fini, nous savons que $G_e^\circ < P_e$ et par hypothèse $G_e/G_e^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On conclut que $P_e = G_e^\circ$. Mais par hypothèse $\mathbb{Z} < X(G_e^\circ)$. D'où, $\mathbb{Z} < X(P_e)$. Or, on sait que $X(P_e)$ est un quotient de \mathbb{Z} en raison de la suite exacte 1.5.1. On conclut que $X(P_e) \simeq \mathbb{Z}$.

La suite exacte 1.5.1 devient alors,

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

ce qui veut dire que le premier morphisme est le morphisme nul. D'où le fait qu'il ne peut pas exister de covariants.

□

1.6. ISOMORPHISME

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.6.1. *Soit G un groupe simple et simplement connexe. Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G et ω le générateur dominant de son groupe de caractères. Soit e un élément régulier dans \mathfrak{n} , l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Supposons que $\mathfrak{n} \setminus Pe$ soit de codimension un et que le poids de l'unique P -covariant de P dans \mathfrak{n} soit 2ω . Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}[T^*(G/P)]$ -modules gradués avec une action de G compatible :*

$$H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_\omega)^*)[-m],$$

où m est le degré de f . En particulier, $H^i(T^*(G/P), \mathcal{L}_{T^*(G/P)}(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Posons $X = T^*(G/P)$. La preuve se fait en deux étapes. Tout d'abord, nous allons montrer que $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-m]$. Puis, nous allons montrer l'annulation des groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*)$ pour tout $i \geq 1$. Or, le théorème 1.3.4 nous assure que $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On obtient alors que pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-m].$$

Soit $f : \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}_{2\omega}$ le morphisme P -équivariant de degré m . Ce morphisme induit une section globale s du fibré $\pi : G \times^P (\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_{2\omega}) \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$ définie par : $s([g, x]) = [g, (x, f(x))]$. Notons Z les zéros de cette section et $\iota : Z \hookrightarrow X$ son inclusion dans X . La variété Z est un fibré qui s'écrit $Z = G \times^P V(f)$, définit de façon analogue au fibré vectoriel $G \times^P V$ si V est un P -module. Le dual de la

section s engendre une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{2\omega})^*[-m] \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_*\mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

On peut tensoriser chacun des \mathcal{O}_X -modules de cette suite par $\mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*$. C'est le faisceau des sections d'un fibré en droite, il est donc plat et la suite reste exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*[-m] \rightarrow \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^* \rightarrow \iota_*\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^* \rightarrow 0.$$

On remarque d'abord que $\iota_*\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^* \simeq \iota_*\mathcal{L}_Z(\mathbb{C}_{-\omega})^*$. De plus, la suite exacte courte engendre une suite exacte longue en cohomologie. D'après le théorème 1.3.4, $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On se retrouve ainsi avec une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*[-m]) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \rightarrow H^0(X, \iota_*\mathcal{L}_Z(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \rightarrow 0.$$

D'après le lemme 1.4.1, $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*)$ est un $\mathbb{C}[X]$ -module réflexif. De plus, le $\mathbb{C}[X]$ -module $H^0(X, \iota_*\mathcal{L}_Z(\mathbb{C}_{-\omega})^*)$ a un support de codimension deux. Cela vient du fait que les orbites nilpotentes sont de dimension paire d'après Kostant et que $\text{Spec}(\mathbb{C}[X]) \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est un morphisme fini. En montrant que $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est un $\mathbb{C}[X]$ -module réflexif, nous pouvons utiliser la proposition 1.4.3 et nous obtenons alors un isomorphisme :

$$H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*[-m]).$$

Remarque 1.6.1. *Cela nous permettra de conclure du même coup que*

$$H^0(Z, \mathcal{L}_Z(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^0(X, \iota_*\mathcal{L}_Z(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0.$$

Lemme 1.6.1. *Soit $e \in \mathfrak{n}$ un élément de Richardson. Alors pour tout $p \in P_e$, $\omega(p) \in \{-1, 1\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $[1, e] \in G \times^P \mathfrak{n}$. On sait que l'orbite de $[1, e]$ est isomorphe à G/P_e . De plus, nous avons discuté du fait que $\text{Cl}(G \times^P \mathfrak{n}) \simeq \mathbb{Z}$. Puisque le poids de f est 2ω , on déduit en utilisant la proposition 1.4.1 que

le groupe de classe de G/P_e qui se trouve être le groupe des caractères de P_e est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cela nous donne le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(G \times^P \mathfrak{n}) & \longrightarrow & \text{Cl}(G[1, e]) \\ \parallel & & \parallel \\ X(P) & \longrightarrow & X(P_e) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{array}$$

où les flèches horizontales correspondent à des restrictions. Ainsi, si χ est un caractère de P et $p \in P_e$, $\chi(p)^2 = 1$. De sorte que $\chi(p) \in \{-1, 1\}$. Or, ω est un caractère de P . Ce qui nous permet de conclure. \square

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f(e) = 1$ puisque nous savons que $f(e) \neq 0$. Notons s la fonction coordonnée sur \mathbb{C}_ω . On construit $\tilde{f} = f - s^2$ définie sur $\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\omega$.

Lemme 1.6.2. *Soit $v \in \mathbb{C}_\omega$ tel que $s(v) = 1$ et $(e, v) \in \mathfrak{n} \times \mathbb{C}_\omega$. Alors, $\overline{P(e, v)} = V(\tilde{f})$.*

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que $\overline{P(e, v)} \subset V(\tilde{f})$. Soit $p \in P$, en prenant les notations multiplicatives, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{f}(pe, pv) &= \tilde{f}(pe, \omega(p)v) \\ &= f(pe) - \omega(p)^2 \\ &= \omega(p)^2 - \omega(p)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{P(e, v)} \subset V(\tilde{f})$.

Nous voulons maintenant montrer qu'on a bien égalité $\overline{P(e, v)} = V(\tilde{f})$. Puisque $\overline{P(e, v)} \subset V(\tilde{f})$ et que les variétés $\overline{P(e, v)}$ et $V(\tilde{f})$ sont irréductibles, il nous suffit de montrer qu'elles ont la même dimension. La dimension de $V(\tilde{f})$ est $\dim \mathfrak{n} + \dim \mathbb{C} - 1 = \dim \mathfrak{n}$ alors que $\dim \overline{P(e, v)} \geq \dim \overline{Pe} = \dim \mathfrak{n}$. \square

Notre prochaine étape est de montrer que la variété $V(\tilde{f})$ est normale. Ce sera l'objet du lemme 1.6.4. Ce résultat est un peu surprenant puisque dans

bien des cas, la variété $V(f)$ elle-même n'est pas normale. La preuve se base sur un résultat provenant du livre de Matsamura que nous énonçons ici.

Lemme 1.6.3. [57] *Soit A un domaine de factorisation unique dans lequel 2 est un unité. Soit f un élément de A qui ne se divise pas par le carré d'un élément premier de A . Alors, l'anneau $A[\sqrt{f}]$ est un domaine intégralement fermé.*

Lemme 1.6.4. *La variété $V(\tilde{f})$ est normale.*

DÉMONSTRATION. La variété $V(\tilde{f})$ étant affine, il suffit de montrer que l'anneau des fonctions régulières $\mathbb{C}[V(\tilde{f})]$ est intégralement fermé. Pour cela nous commençons par remarquer que $\mathbb{C}[V(\tilde{f})] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][\sqrt{f}]$. En effet, l'anneau des fonctions régulières sur $\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\omega \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][s]$. Ainsi, $\mathbb{C}[V(\tilde{f})] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][s]/(f - s^2) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][\sqrt{f}]$. Pour utiliser le lemme 1.6.3, il faut nous assurer que $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ est un domaine de factorisation unique dans lequel 2 est un carré, ce qui est évident. Il faut aussi s'assurer que f ne se divise pas par un carré. Mais f est premier. Ainsi, les hypothèses du lemme 1.6.3 sont vérifiées et on conclut que l'anneau $\mathbb{C}[V(\tilde{f})]$ est intégralement fermé. \square

Étudions maintenant le morphisme $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow GV(\tilde{f}) \subset \mathfrak{g} \oplus V_\omega$.

Lemme 1.6.5. *Les fibres du morphisme $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow GV(\tilde{f})$ sont génériquement finies.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\dim Ge = \dim G - \dim P + \dim \mathfrak{n} = 2 \dim \mathfrak{n}$. De plus, $\dim G \times^P V(\tilde{f}) = \dim G - \dim P + \dim V(\tilde{f}) = 2 \dim \mathfrak{n}$. Ainsi $\dim Ge = \dim G \times^P V(\tilde{f})$. On sait donc que le morphisme $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow G \mathfrak{n}$ est à fibres génériquement finies puisqu'il est surjectif. Mais celui-ci est factorisé par le morphisme $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow GV(\tilde{f})$. Ce qui nous permet de conclure que ce morphisme a des fibres génériquement finies. \square

Posons maintenant $\tilde{V} = G \times^P V(\tilde{f})$. En omettant le terme \mathbb{C}_ω , nous avons un morphisme $\pi : \tilde{V} \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$.

Lemme 1.6.6. *Le morphisme π ci-dessus est fini de degré deux.*

DÉMONSTRATION. Nous devons comprendre l'anneau des fonctions régulières sur $V(\tilde{f})$. Par définition, $\mathbb{C}[V(\tilde{f})] = \mathbb{C}[\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\omega]/(\tilde{f})$. Or, $\mathbb{C}[\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}_\omega]/(\tilde{f}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][s]/(f - s^2)$. Ceci nous donne un isomorphisme de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ -modules :

$$\mathbb{C}[V(\tilde{f})] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}]\bar{s}.$$

On obtient donc que le morphisme π est de degré deux. □

Avant de pouvoir montrer que le $\mathbb{C}[X]$ -module $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est réflexif, nous devons comprendre un peu mieux l'anneau des fonction régulières sur $G \times^P V(\tilde{f})$. Nous nous servirons bien sûr de notre compréhension de l'anneau des fonctions régulières sur $V(\tilde{f})$

Lemme 1.6.7. *L'anneau des fonctions régulières sur $G \times^P V(\tilde{f})$ est isomorphe à $H^0(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-\frac{1}{2}\mathfrak{m}]$.*

DÉMONSTRATION. Afin d'alléger les notations, si W est un P -module, nous noterons $H^i(G/P, W)$ pour $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(W))$.

Nous savons que

$$\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})] \simeq H^0(G \times^P V(\tilde{f}), \mathcal{O}_{G \times^P V(\tilde{f})}) \simeq H^0(G/P, \mathbb{C}[V(\tilde{f})]).$$

Or, nous venons d'obtenir une décomposition de $\mathbb{C}[V(\tilde{f})]$:

$$\mathbb{C}[V(\tilde{f})] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}]\bar{s}.$$

Or, $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]\bar{s} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}][-\frac{1}{2}\mathfrak{m}] \otimes \mathbb{C}_\omega^*$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})] &\simeq H^0(G/P, \mathbb{C}[\mathfrak{n}] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}][-\frac{1}{2}\mathfrak{m}] \otimes \mathbb{C}_\omega^*) \\ &\simeq H^0(G/P, \mathbb{C}[\mathfrak{n}]) \oplus H^0(G/P, \mathbb{C}[\mathfrak{n}] \otimes \mathbb{C}_\omega^*)[-\frac{1}{2}\mathfrak{m}] \\ &\simeq H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{O}_{G \times^P \mathfrak{n}}) \oplus H^0(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_\omega)^*)[-\frac{1}{2}\mathfrak{m}]. \end{aligned}$$

□

Tout cela nous permet d'obtenir la réflexivité du $\mathbb{C}[X]$ -module $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$.

Proposition 1.6.1. *Soit $X = G \times^P \mathfrak{n}$. Le $\mathbb{C}[X]$ -module $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est réflexif.*

DÉMONSTRATION. Nous savons que la variété $V(\tilde{f})$ est normale d'après le lemme 1.6.4. Cela nous permet de conclure que le fibré $G \times^P V(\tilde{f})$ est normal. Puisque $\pi : G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$ est un morphisme fini, l'inclusion $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})]$ fait de $\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})]$ un $\mathbb{C}[X]$ -module fini. Mais ces deux anneaux sont normaux. Ce qui nous permet de déduire que $\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})]$ est un $\mathbb{C}[X]$ -module réflexif.

On sait que

$$\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})] \simeq H^0(G \times^P V(\tilde{f}), \mathcal{O}_{G \times^P V(\tilde{f})}) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-\frac{1}{2}m].$$

Ainsi, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-\frac{1}{2}m]$ est un $\mathbb{C}[X]$ -module réflexif. Ce qui nous permet de conclure que $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est un $\mathbb{C}[X]$ -module réflexif. \square

Corollaire 1.6.1. *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ -modules $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)[-m]$.*

Cela termine la première partie de la preuve du théorème 1.6.1. Nous voulons maintenant montrer que $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. La preuve se base sur la notion d'anneau de Cohen-Macaulay et sur le théorème de dualité de Grothendieck. Pour plus d'informations sur les anneaux et les modules de Cohen-Macaulay, les livres [17] et [23] sont de bonnes références.

Lemme 1.6.8. *La variété affine $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})])$ est à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Nous avons vu dans le lemme 1.6.6 que le morphisme $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow G \times^P \mathfrak{n}$ est fini. Le morphisme $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G \mathfrak{n}$ étant aussi fini, la composition $G \times^P V(\tilde{f}) \rightarrow G \mathfrak{n}$ est finie ce qui nous donne à l'aide de la factorisation de Stein, théorème 1.2.1, un morphisme fini $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})]) \rightarrow G \mathfrak{n}$. D'après Broer [15], puisque $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})])$ est une variété normale, elle est aussi à singularités rationnelle. \square

Corollaire 1.6.2. *La variété affine $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})])$ est Cohen-Macaulay.*

DÉMONSTRATION. Les singularités rationnelles sont Cohen-Macaulay, voir par exemple [45]. \square

Corollaire 1.6.3. *Le $\mathbb{C}[X]$ -module $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est Cohen-Macaulay.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1.6.7,

$$\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})] \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*)[-\frac{1}{2}m].$$

Or, $\mathbb{C}[G \times^P V(\tilde{f})]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des $\mathbb{C}[X]$ -modules Cohen-Macaulay. On conclut que $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est aussi un module Cohen-Macaulay. \square

D'après le lemme de normalisation de Noether, il existe f_1, \dots, f_l des éléments de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{C}[X]$ soit un module de type fini sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_l]$. Notons $R = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_l]$ cet anneau de polynômes. Puisque $R \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$, les $\mathbb{C}[X]$ -modules gradués $\mathbb{C}[X]$ et $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ sont aussi des R -modules. Puisqu'ils sont Cohen-Macaulay, ils sont libres sur R .

Proposition 1.6.2. $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Le morphisme $G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow G/\mathfrak{n}$ factorise à travers $\text{Spec}(R)$. Notons $\gamma : G \times^P \mathfrak{n} \rightarrow \text{Spec}(R)$ ce morphisme. Celui-ci est projectif, on peut donc utiliser le théorème de dualité de Grothendieck :

$$R\gamma_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*, \omega_X) \simeq \mathcal{H}om_{\text{Spec}(R)}(R\gamma_* \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*, \omega_{\text{Spec}(R)}).$$

Le faisceau canonique sur X étant trivial, la partie gauche de l'isomorphisme est simplement $R\gamma_* \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*$. Du côté droit, puisque $\text{Spec}(R)$ est une variété affine $R^i \gamma_* \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^* \simeq H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$, qui est nul pour tout $i \geq 1$. Cela nous permet d'avoir un isomorphisme :

$$H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) \simeq \text{Ext}_{\text{Spec}(R)}^i(H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)^\sim, \omega_{\text{Spec}(R)}).$$

Mais nous avons montré que $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)$ est un R -module libre. Ainsi,

$$\text{Ext}_{\text{Spec}(R)}^i(H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*)^\sim, \omega_{\text{Spec}(R)}) = 0$$

pour tout $i \geq 1$. On conclut que $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. \square

Corollaire 1.6.4. *Plaçons nous dans le cas où les hypothèses du théorème 1.6.1 sont vérifiées. Alors $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(\mathbb{C}[\mathfrak{n}]/(f) \otimes \mathbb{C}_{-\omega}^*)) = 0$ pour tout $i \geq 0$.*

Remarque 1.6.2. *Plaçons nous dans le cadre du théorème 1.6.1 : P est une sous-groupe parabolique maximal de G et il existe f un P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ de poids 2ω , où ω est le générateur dominant du groupe des caractères de P . Notons $X = G \times^P \mathfrak{n}$. Dans ce cas, le groupe de classe de $\text{Spec}(\mathbb{C}[X])$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a donc deux classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}[X]$ -modules réflexifs. Un représentant d'une de ces classes est le $\mathbb{C}[X]$ -module trivial. Un représentant de l'autre classe est $H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\omega)^*) \simeq H^0(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_{-\omega})^*)$.*

Dans le cas où le groupe de classe de $\text{Spec}(\mathbb{C}[X])$ est trivial, l'anneau $\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}]$ est factoriel. Finalement, s'il n'y a pas de P -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$, le groupe de classe de $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^P \mathfrak{n}])$ est formé de tous les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P \mathfrak{n}, \mathcal{L}_{G \times^P \mathfrak{n}}(\mathbb{C}_{j\omega})^)$ pour $j \in \mathbb{Z}$.*

ANNEXE : DUALITÉ DE GROTHENDIECK

Nous voulons donner ici un petit aperçu du théorème de dualité de Grothendieck qui est nécessaire dans les preuves du lemme 1.4.1 et du théorème 1.6.1. Nous allons aborder brièvement la notion de catégorie dérivée présente dans l'énoncé du théorème de dualité. La référence traditionnelle pour le sujet est [29]. Nous avons aussi consulté [43]. Avant de discuter de catégories dérivées, nous ferons quelques rappels sur la notion de complexe et celle de localisation d'une catégorie.

1.7. COMPLEXE ET HOMOTOPIE

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Un **complexe** A^\bullet dans \mathcal{A} est une suite d'objets A^i et de morphismes ∂_A^i :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_A^{-1}} A^0 \xrightarrow{\partial_A^0} A^1 \xrightarrow{\partial_A^1} A^2 \xrightarrow{\partial_A^2} \cdots$$

vérifiant $\partial_A^{i+1} \circ \partial_A^i = 0$. Nous appelons les morphismes ∂_A^i les **différentielles** du complexe A^\bullet . Un **morphisme de complexe** $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est une famille de morphismes $f^i : A^i \rightarrow B^i$ qui commutent avec les différentielles de A^\bullet et de B^\bullet , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute pour tout entier i :

$$\begin{array}{ccc} A^i & \xrightarrow{\partial_A^i} & A^{i+1} \\ f^i \downarrow & & \downarrow f^{i+1} \\ B^i & \xrightarrow{\partial_B^i} & B^{i+1} \end{array}$$

De façon générale, on note $C(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes sur \mathcal{A} .

On définit la cohomologie du complexe comme

$$H^i(A^\bullet) = \ker(\partial_A^i) / \text{im}(\partial_A^{i-1}).$$

Un morphisme $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ induit un morphisme en cohomologie $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$.

On dit qu'un homomorphisme de complexe $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est **homotopiquement nul** et on note $f \sim 0$, s'il existe une famille d'applications $s^i : A^i \rightarrow B^{i-1}$ telles que $f^i = \partial_B^{i-1} s^i + s^{i+1} \partial_A^i$. On dit que deux morphismes de complexes f et g sont **homotopes** si $f - g$ est homotopiquement nul.

Proposition 1.7.1. *Soit $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ deux morphismes de complexes. Si f et g sont homotopes, alors ils génèrent le même morphisme en cohomologie.*

1.8. LOCALISATION D'UN CATÉGORIE

Nous allons ici introduire la notion de localisation d'une catégorie. Nous ne donnerons pas les détails nécessaires pour justifier l'existence de la localisation, mais seulement une idée de sa construction. Une bonne référence sur le sujet est [43].

Nous allons commencer par définir la notion de système multiplicatif. Soit Σ une collection de morphismes dans $\text{Mor}(\mathcal{A})$. On dit que Σ est un **système multiplicatif** de $\text{Mor}(\mathcal{A})$ s'il vérifie les quatre conditions suivantes :

- (1) Pour tout $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, le morphisme identité sur X est dans Σ ;
- (2) Si $f, g \in \Sigma$ et $f \circ g \in \text{Mor}(\mathcal{A})$, alors $f \circ g \in \Sigma$;

- (3) Tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow s & \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

avec $s \in \Sigma$ peut être complété à l'aide de deux morphismes $t \in \Sigma$ et $v \in \text{Mor}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Z \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Similairement, tout diagramme Z avec $s \in \Sigma$ peut être com-

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \uparrow s \\ & X \xleftarrow{u} & Y \\ \text{plété} & W \xleftarrow{v} & Z \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ X \xleftarrow{u} & & Y \end{array}$$

avec $t \in \Sigma$ et $v \in \text{Mor}(\mathcal{A})$.

(4) Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont des morphismes dans $\text{Mor}(\mathcal{A})$, les énoncés suivants sont équivalents :

- Il existe $s : Y \rightarrow Y'$ dans Σ tel que $s \circ f = s \circ g$;
- Il existe $t : X' \rightarrow X$ dans Σ tel que $f \circ t = g \circ t$.

Soit \mathcal{A} une catégorie Σ un système multiplicatif dans $\text{Mor}(\mathcal{A})$. La **localisation de \mathcal{A} par rapport à Σ** est une catégorie \mathcal{A}_Σ avec un foncteur $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma$ vérifiant :

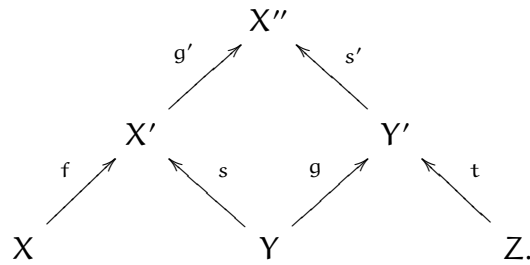
- (1) $Q(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in \Sigma$;
- (2) Pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $F(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in \Sigma$, il existe un unique foncteur $G : \mathcal{A}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $F = G \circ Q$.

Avant de terminer cette section, nous allons donner une idée de la construction de la catégorie \mathcal{A}_Σ pour un système multiplicatif Σ . Les objets de \mathcal{A}_Σ sont tout simplement les objets de \mathcal{A} . Si X et Y sont des objets de \mathcal{A}_Σ , un morphisme de X dans Y est représenté par un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ X & & Y \end{array}$$

où X' est un objet de \mathcal{A} , $s \in \Sigma$ et f est un morphisme dans la catégorie \mathcal{A} . Nous notons un tel morphisme par la paire (f, s) . On veut définir la composition $(g, t) \circ (f, s)$. On utilise la propriété (3) des systèmes multiplicatifs pour obtenir

les morphismes g' et s' du diagramme suivant :



On peut alors définir $(g, t) \circ (f, s) := (g' \circ f, s' \circ t)$.

1.9. CATÉGORIES DÉRIVÉES ET DUALITÉ

Nous sommes maintenant prêt à définir la notion de catégorie dérivée. Avec celle-ci, vient le concept de foncteur dérivé. Nous en étudierons deux plus particulièrement dans la sous-section 1.9.3. Nous définirons ensuite les complexes dualisants, ce qui nous permettra d'énoncer le théorème de dualité de Grothendieck.

1.9.1. Catégorie dérivée

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Par exemple, étant donné une variété X , on peut prendre \mathcal{A} la catégorie des \mathcal{O}_X -modules. Notons $K(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les complexes sur \mathcal{A} et les morphismes sont les morphismes de complexes à homotopie près. Si A est un objet de la catégorie \mathcal{A} , on peut le voir comme un objet de $K(\mathcal{A})$ en prenant le complexe dont toutes les différentielles sont nulles et dont le seul terme non nul est A positionné en degré 0 :

$$\dots \xrightarrow{\partial^{-2}} 0 \xrightarrow{\partial^{-1}} A \xrightarrow{\partial^0} 0 \xrightarrow{\partial^1} \dots$$

Un complexe $C^\bullet \in \text{Obj}(K(\mathcal{A}))$ est dit **borné en dessous** s'il existe N tel que pour tout $n \leq N$, $C^n = 0$. Similairement, on dit qu'un complexe est **borné au-dessus** s'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $C^n = 0$. On note $K^-(\mathcal{A})$, respectivement $K^+(\mathcal{A})$, la sous-catégorie des complexes bornés en dessous, resp. au-dessus. On note $K^b(\mathcal{A}) = K^-(\mathcal{A}) \cap K^+(\mathcal{A})$ la sous-catégorie des complexes bornés.

Parmi les morphismes de complexes, certains nous intéressent plus particulièrement. On dit qu'un morphisme de complexe est un **quasi-isomorphisme** s'il induit un isomorphisme au niveau cohomologie. Notons Q_{is} la collection des quasi-isomorphismes dans la $K(\mathcal{A})$. Cette collection de morphisme forme un système multiplicatif. Il est donc possible de localiser la catégorie $K(\mathcal{A})$ par rapport au système multiplicatif Q_{is} .

La catégorie dérivée de \mathcal{A} , notée $D(\mathcal{A})$, est justement définie comme la localisation de $K(\mathcal{A})$ par rapport au système multiplicatif Q_{is} . Cela nous permet d'obtenir un foncteur :

$$K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})_{Q_{is}} =: D(\mathcal{A}).$$

On peut définir de façon similaire les catégories dérivées $D^-(\mathcal{A})$, $D^+(\mathcal{A})$ et $D^b(\mathcal{A})$. Comme nous en avons discuté dans la section 1.8, un morphisme d'un complexe A^\bullet dans un complexe B^\bullet dans la catégorie dérivée est donné par une fraction à gauche, c'est-à-dire une classe d'équivalence de diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & B^\bullet & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{array}$$

avec B^\bullet un objet de la catégorie $K(\mathcal{A})$, $s \in Q_{is}$ et f un morphisme dans $K(\mathcal{A})$.

1.9.2. Foncteur dérivé

Afin de comprendre la notion de foncteurs dérivés, nous allons commencer par dire quelques mots sur les résolutions injectives. Nous allons supposer que la catégorie \mathcal{A} a assez d'objets injectifs, c'est-à-dire que pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, il existe une résolution $0 \rightarrow A \rightarrow I^\bullet$ où tous les objets I^i sont injectifs. Les complexes A et I^\bullet sont égaux dans $D(\mathcal{A})$ puisqu'ils ont la même cohomologie. L'application qui à un objet $A \in \mathcal{A}$ associe une résolution injective I^\bullet s'étend à un foncteur :

$$D^+(\mathcal{A}) \rightarrow K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$$

où $\text{Inj}(\mathcal{A})$ est la catégorie des objets injectifs dans \mathcal{A} . Ce foncteur est en fait une équivalence de catégories.

Soit maintenant un foncteur exact à gauche $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des catégories abéliennes. Nous voulons définir la notion de foncteur dérivé à droite de F . Le foncteur F induit un foncteur de la catégorie des complexes sur \mathcal{A} dans la catégorie des complexes sur \mathcal{B} en l'appliquant composante par composante. Similairement, il induit un foncteur de $K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$. Cependant, le foncteur F n'envoie pas nécessairement des quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes. On ne peut donc pas étendre simplement la définition de F sur la catégorie dérivée. C'est pourquoi nous devons passer par les résolutions injectives. Le foncteur dérivé $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ est donné par la composition

$$RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \xrightarrow{F} K^+(\mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B}).$$

1.9.3. Étude des foncteurs $R\phi_*$ et RHom

Soit X et Y des variétés algébriques, \mathcal{A} la catégorie des \mathcal{O}_X -modules et \mathcal{B} la catégorie des \mathcal{O}_Y -modules. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme. Il induit un foncteur exact à gauche $\phi_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Nous sommes intéressés à étudier le foncteur dérivé $R\phi_* : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$.

Soit M un \mathcal{O}_X -module. On peut le voir comme un objet de $D(\mathcal{A})$. Considérons $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ une résolution injective. On applique le foncteur ϕ_* au complexe I^\bullet . Le complexe obtenu est ce que nous avons défini comme $R\phi_*M$. En prenant la cohomologie de ce complexe on retombe sur $R^i\phi_*$. Ainsi le complexe $R\phi_*M$ encapsule l'information de tous les foncteurs $R^i\phi_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Passons maintenant au foncteur dérivé RHom . On reste dans la situation où X est une variété algébrique et \mathcal{A} est la catégorie des \mathcal{O}_X -modules. Soit M un \mathcal{O}_X -module. Le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est exact à gauche. Il va induire un foncteur dérivé $\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M, \cdot) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$. Plutôt que de prendre M un \mathcal{O}_X -module, on peut aussi prendre M^\bullet un complexe de \mathcal{O}_X -modules et construire le foncteur dérivé $\text{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M^\bullet, \cdot) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$.

Le cas le plus simple à étudier est si on considère M_1 et M_2 deux \mathcal{O}_X -modules qu'on voit comme complexe dans $D(\mathcal{A})$. On prend $0 \rightarrow M_2 \rightarrow I^\bullet$ une résolution injective du module M_2 . On applique le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M_1, \cdot)$

à la résolution I^\bullet vu comme un complexe dans $D(\mathcal{A})$. Le complexe obtenu est $\mathrm{RHom}_{\mathcal{O}_X}(M_1, M_2)$. En prenant sa cohomologie, on obtient $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(M_1, M_2)$.

1.9.4. Complexe dualisant

Nous allons prendre l'approche de [78] afin de définir la notion de complexe dualisant.

Soit X une variété et \mathcal{A} la catégorie des \mathcal{O}_X -modules. Notons $D(X)$ la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$. Un complexe I^\bullet de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents est appelé un **complexe dualisant** si

- (1) I^\bullet est un complexe borné ;
- (2) Tous les termes de I^\bullet sont des \mathcal{O}_X -modules injectifs ;
- (3) Chaque groupe de cohomologie $H^i(I^\bullet)$ est un module cohérent ;
- (4) Le morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(I^\bullet, I^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme.

Puisque nous sommes dans la catégorie dérivée, tout complexe qui est isomorphe à un complexe dualisant est aussi appelé complexe dualisant.

Soit I^\bullet un complexe dualisant pour une variété X . Celui-ci permet de définir le faisceau canonique sur X . Commençons par noter $r = \min\{i \mid H^i(I^\bullet) \neq 0\}$. On définit le **faisceau canonique** sur X comme $\omega_X := H^r(I^\bullet)$. Cette définition est équivalente à celle habituellement donnée en termes de faisceau des différentielles, si X est lisse.

Avant de passer au théorème de dualité, nous allons énoncé une proposition qui fait le lien entre le faisceau canonique, le complexe dualisant et le faisceau des fonctions régulières dans le cas où la variété X a de bonnes propriétés.

Proposition 1.9.1. *Soit X une variété. Si X est Cohen-Macaulay, alors le complexe dualisant I^\bullet de X a seulement un groupe de cohomologie non nul et donc $\omega_X = I^\bullet$ dans la catégorie dérivée.*

Étant donné le lien entre le faisceau canonique et le complexe dualisant, nous allons noter ω_X^\bullet le complexe dualisant de X .

1.9.5. Dualité

Nous avons maintenant tous les outils afin d'énoncer une version du théorème de dualité de Grothendieck.

Théorème 1.9.1. *Soit X et Y deux variétés, ω_X^\bullet et ω_Y^\bullet leurs complexes dualisants, $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme propre et \mathcal{M}^\bullet un complexe de \mathcal{O}_X -modules cohérents. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée :*

$$R\phi_* \mathrm{RHom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}^\bullet, \omega_X^\bullet) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{O}_Y}(R\phi_* \mathcal{M}^\bullet, \omega_Y^\bullet).$$

Remarque 1.9.1. *Dans toute sa généralité, le théorème de dualité de Grothendieck s'énonce avec un second complexe \mathcal{N}^\bullet de \mathcal{O}_X -modules cohérents plutôt qu'avec les complexes dualisants ω_X^\bullet et ω_Y^\bullet . Il fait alors intervenir un foncteur $\phi^!$. Ce dont nous nous servons ici est que $\phi^! \omega_Y^\bullet \simeq \omega_X^\bullet$.*

Ce théorème est une généralisation du théorème de dualité de Serre. On peut retrouver ce dernier en considérant un morphisme d'une variété projective lisse dans un point.

Chapitre 2

DIAGRAMME DE DYNKIN PONDÉRÉ ET SOUS-GROUPE PARABOLIQUE MAXIMAL

Dans la section 2.1, nous définissons la notion de diagramme de Dynkin pondéré et faisons un lien avec celle de sous-groupe parabolique maximal. Parmi les diagrammes de Dynkin pondérés, certains ont été utilisés pour classer les orbites nilpotentes. Nous appelons ces derniers des diagrammes de Dynkin pondérés officiels. Dans le cas d'un sous-groupe parabolique maximal défini à l'aide d'un diagramme de Dynkin pondéré officiel, les hypothèses de la proposition 1.5.4 sont vérifiées et il existe donc un P -covariant f dans $\mathbb{C}[n]$ où n est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Tout cela est fait dans la section 2.2.1. Les sections 2.3 et 2.4 sont consacrées à énoncer des critères qui permettent d'étudier les singularités de $V(f)$ dans le cas où un tel covariant existe. Nous sommes plus particulièrement intéressés à déterminer si $V(f)$ est une variété normale et si sa normalisation est à singularités rationnelles. Un résumé des résultats que nous obtenons dans les chapitres 3 et 4 est donné dans la section 2.5. Finalement, dans la section 2.6, nous introduisons une généralisation du théorème 1.6.1.

2.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES CONSTRUCTIONS

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple de rang r . Elle est caractérisée par son diagramme de Dynkin. Chacun des points du diagramme correspond à une

racine simple de \mathfrak{g} , racines que nous avons notées $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. On associe à chacun de ces points un nombre entier d_i positif. On appelle une telle fonction un **diagramme de Dynkin pondéré**. De façon général, on note un diagramme de Dynkin pondéré par la lettre D . On dit qu'un tel diagramme est pair si tous les d_i sont pairs. On peut généraliser D à une fonction sur toutes les racines de \mathfrak{g} . Soit $\beta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$ une racine de \mathfrak{g} . On définit le poids de β par rapport au diagramme de Dynkin pondéré D comme $D(\beta) := \sum_{i=1}^r n_i d_i$. De plus, le poids de 0 par rapport au diagramme de Dynkin pondéré D est nul. Cela nous donne une graduation sur \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i^D,$$

où $\mathfrak{g}_i^D = \bigoplus_{\beta: D(\beta)=i} \mathfrak{g}_\beta$. En particulier, \mathfrak{g}_0 contient la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Notons que la graduation respecte la structure d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} au sens où $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$. On définit $\mathfrak{p}^D := \mathfrak{g}_{\geq 0} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ et plus généralement $\mathfrak{g}_{\geq n} := \bigoplus_{i \geq n} \mathfrak{g}_i$. On construit un sous-groupe parabolique P^D de G dont l'algèbre de Lie est la sous-algèbre \mathfrak{p}^D . L'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D est $\mathfrak{g}_{>0}^D$. Comme sous-groupe de Levi L^D de P^D , nous prenons le sous-groupe réductif dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{g}_0^D .

Nous voulons déterminer les diagrammes de Dynkin pondérés D pour lesquels le sous-groupe parabolique P^D est maximal et la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ est égale à l'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D . Puisqu'on s'intéresse à la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$, on peut simplement considérer les diagrammes de Dynkin pondérés avec des entiers dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Afin d'alléger le texte nous noterons dans le futur $\mathfrak{n}^D = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$.

Proposition 2.1.1. *Soit D un diagramme de Dynkin pondéré avec des entiers dans $\{0, 1, 2\}$. Alors, le sous-groupe parabolique P^D est maximal et la sous-algèbre \mathfrak{n}^D est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D ssi le diagramme de Dynkin pondéré a une seule valeur non nulle sur les racines simples et celle-ci est deux.*

DÉMONSTRATION. Afin d'alléger les notations, nous allons omettre les D dans P^D , \mathfrak{n}^D et \mathfrak{g}_m^D tout au long de cette preuve.

(\Rightarrow) Supposons que \mathfrak{n} est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P . Alors $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\geq 1}$. Ainsi, $\mathfrak{g}_1 = 0$ et donc le diagramme de Dynkin pondéré n'est formé que de zéros et de deux. De plus, P est un sous-groupe parabolique maximal. Il est clair que si le diagramme de Dynkin pondéré est formé de plusieurs deux, il suffit d'en enlever un et le remplacer par un zéro afin d'obtenir un parabolique plus grand. Ainsi, le diagramme de Dynkin pondéré doit être formé d'au plus un deux pour que P soit maximal. S'il est formé seulement de zéros, $P = G$ qui n'est pas un sous-groupe parabolique maximal de G .

(\Leftarrow) Clair. □

Nous travaillerons beaucoup avec les diagramme de Dynkin pondéré D pour lesquels D a une seule valeur non nulle sur les racines simples et celle-ci est deux. Nous dirons alors que D est un **diagramme USD** (un seul deux).

Nous avons discuté dans la section 1.2 du fait que le groupe des caractères d'un sous-groupe parabolique maximal P est isomorphe à \mathbb{Z} . Nous voulons maintenant trouver un générateur de ce groupe si P est le sous-groupe parabolique associé à un diagramme USD D .

Proposition 2.1.2. *Supposons que D est un diagramme USD dont l'unique deux se trouve en position α_i , c'est-à-dire que $D(\alpha_i) = 2$ et $D(\alpha_j) = 0$ pour $j \neq i$. Alors le générateur de $X(P^D)$ est le poids fondamental ω_i .*

Remarque 2.1.1. *Nous avons supposé ici que les valeurs $D(\alpha_i)$ sont des entiers positifs. On pourrait faire le même traitement avec des diagrammes de Dynkin pondérés par des nombres rationnels positifs. Notons que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} se trouve alors à avoir une graduation rationnelle. Nous travaillerons avec des diagrammes de Dynkin pondérés avec des valeurs rationnelles dans le chapitre 3.*

2.1.1. Application moment

Soit D un diagramme de Dynkin pondéré. Nous ne demandons pas ici que D soit un diagramme USD. Nous pouvons construire le fibré vectoriel $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$ sur G/P^D . De façon générale, ce fibré vectoriel est distinct du fibré cotangent de G/P^D qui s'écrit sous la forme $G \times^{P^D} \mathfrak{g}_{>0}^D$. Cependant, si le diagramme de Dynkin pondéré est pair, c'est-à-dire si $D(\alpha_i)$ est pair pour $1 \leq i \leq r$, alors le

fibré cotangent de G/P^D et le fibré vectoriel $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$ sont isomorphes puisque dans ce cas, \mathfrak{n}^D est bien l'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D .

Dans tous les cas, on peut construire un morphisme qui est une restriction de l'application moment :

$$\begin{aligned} \mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D &\rightarrow \mathfrak{g} \\ [g, x] &\mapsto gx. \end{aligned}$$

L'image de ce morphisme est $G \mathfrak{n}^D$. La discussion de la section 1.2 sur l'image de l'application moment est encore valide ici. Ainsi, l'image de μ est une variété nilpotente, c'est-à-dire la fermeture d'une orbite nilpotente. Nous allons noter cette variété $N(D)$.

De façon générale, on ne peut rien dire sur la dimension des fibres de l'application μ . Nous savons cependant que dans le cas où le diagramme de Dynkin pondéré est pair, les fibres génériques de μ sont de cardinalités finies. Cela vient du fait que dans ce cas, \mathfrak{n}^D est bien l'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D et le théorème de Richardson, proposition 1.2.1, s'applique.

2.1.2. Codimension deux

Soit D un diagramme USD. Notons e un élément régulier de \mathfrak{n}^D . Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'existence d'un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Nous avons montré dans la proposition 1.5.4 qu'un P^D -covariant irréductible existe ssi la variété $\mathfrak{n}^D \setminus P^D e$ est de codimension un dans \mathfrak{n}^D . Le cas échéant, ce covariant est unique à multiplication par un scalaire près.

Supposons qu'un tel covariant existe et notons le f . On peut étudier la restriction du morphisme $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ à $G \times^{P^D} V(f)$. L'image $GV(f)$ est une variété irréductible dans $G \mathfrak{n}^D$. Il existe donc une orbite nilpotente O' telle que $GV(f)$ soit la fermeture de O' . Nous allons montrer que O' est de codimension deux dans $G \mathfrak{n}^D$.

Proposition 2.1.3. [62] *Soit D un diagramme USD. Supposons en plus, qu'il existe un élément régulier e dans \mathfrak{n}^D tel que la codimension de $\mathfrak{n}^D \setminus P^D e$ dans \mathfrak{n}^D soit un. Notons f l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Alors $GV(f)$ est de codimension deux dans $G \mathfrak{n}^D$.*

DÉMONSTRATION. Notons \mathcal{O}' l'orbite telle que $\text{GV}(f) = \overline{\mathcal{O}'}$. Soit \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel vérifiant $\mathfrak{n}^D \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}^D$. Soit x un élément de l'orbite \mathcal{O}' . Il est clair que $V(f) \subset \overline{\mathcal{O}'} \cap [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. Or, d'après [18], $Gx \cap [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ est de dimension $\frac{1}{2} \dim Gx$. En particulier, $G \mathfrak{n}^D$ est de dimension supérieure à $2 \dim V(f) = 2 \dim \mathfrak{n}^D - 2$. Mais on sait aussi que

$$\dim(G \mathfrak{n}^D) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_0^D - \dim \mathfrak{g}_1^D = 2 \dim \mathfrak{n}^D.$$

Ainsi, Gx est de codimension inférieure ou égale à deux dans $G \mathfrak{n}^D$. Or puisque c'est une orbite nilpotente, on sait qu'elle est de codimension au moins deux par Kostant. On conclut que sa codimension est exactement deux. \square

2.2. ORBITE NILPOTENTE ET DIAGRAMME DE DYNKIN PONDÉRÉ OFFICIEL

Soit $e \in \mathfrak{b}$ un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Le théorème de Jacobson-Morozov nous assure de l'existence de h un élément semi-simple de \mathfrak{g} et de f un autre élément nilpotent tels que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ et $[e, f] = h$. On appelle un tel triplet un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -**triplet** puisque l'algèbre de Lie engendrée par ce triplet est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. L'élément h étant semi-simple, on peut décomposer l'algèbre de Lie \mathfrak{g} comme

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$$

où $\mathfrak{g}_i := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = ix\}$. Prenons un tore T de G dont l'algèbre de Lie contient h . L'action de T sur \mathfrak{g} nous donne une décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Chaque espace \mathfrak{g}_{α} est invariant sous l'action de h . Ainsi, $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}_i$ pour un certain i . On associe à chaque racine simple α l'entier i pour lequel $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}_i$. Ces entiers sont dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Cela nous donne un diagramme de Dynkin pondéré que nous notons D .

Pour chacune des orbites nilpotentes, il existe un diagramme de Dynkin pondéré qui est privilégié. Nous appelons ce diagramme le **diagramme de**

Dynkin pondéré officiel d'une orbite nilpotente. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels peuvent être trouvés dans [18]. Ils ont la propriété intéressante que l'application $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ est birationnelle et $G \mathfrak{n}^D = \overline{Ge}$. Dans le cas où le diagramme de Dynkin pondéré officiel est un diagramme USD, nous parlerons de diagramme USD officiel.

2.2.1. Espace préhomogène et covariant

Le but de cette section est de montrer que pour D un diagramme USD officiel, il existe $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ qui est un P^D -covariant. Pour cela nous allons utiliser la théorie des espaces vectoriels préhomogènes dont nous avons discuté dans la section 1.5.

Tout au long de cette sous-section, D est un diagramme USD officiel. Nous allons maintenant travailler avec le L^D -module \mathfrak{g}_2^D . Notons e un élément régulier de \mathfrak{g}_2^D .

Proposition 2.2.1. *Le L^D -module \mathfrak{g}_2^D est un espace vectoriel préhomogène. L'espace singulier $\mathfrak{g}_2^D \setminus L^D e$ est une hypersurface et elle est définie comme l'espace des zéros d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$ qui est un L^D -covariant non nul.*

DÉMONSTRATION. Il existe un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ triplet associé au diagramme de Dynkin pondéré officiel D : plus précisément, il existe $\{e, f, h\} \subset \mathfrak{g}$ tel que $e \in \mathfrak{g}_2^D$, $f \in \mathfrak{g}_{-2}^D$, $h \in \mathfrak{g}_0^D$ et où h définit le diagramme de Dynkin pondéré officiel D . La théorie des $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -modules, nous assure que $L^D e$ est dense dans \mathfrak{g}_2^D , voir par exemple [21]. Ainsi, \mathfrak{g}_2^D est un espace vectoriel préhomogène.

De plus, toujours dans [21], on trouve que L_e^D le centralisateur de e dans L^D est un groupe réductif. Ainsi, d'après la proposition 1.5.3, l'espace singulier est une hypersurface. Ce qui garantit d'après la proposition 1.5.1, l'existence d'un L^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$. \square

Corollaire 2.2.1. *Le L^D -covariant f défini dans la proposition 2.2.1 est irréductible. C'est l'unique L^D -covariant irréductible de \mathfrak{g}_2^D à multiplication par un scalaire près.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que \mathfrak{g}_2^D est un EVP irréductible sous l'action de L^D . Pour cela, nous allons montrer qu'il existe un unique poids minimal dans cette représentation. En effet, si D vérifie $D(\alpha_i) = 2$, c'est la racine simple α_i . Il est évidemment clair que pour tout μ poids de \mathfrak{g}_2^D , $\mu \geq \alpha_i$. Notons ω_0 l'élément de longueur maximale dans le groupe de Weyl de L . Puisque $\mu - \alpha_i \geq 0$ comme poids dans L^D , $\omega_0(\mu - \alpha_i) \leq 0$. Ainsi, $\omega_0\alpha_i$ est le plus haut poids de la représentation \mathfrak{g}_2 de L^D et celui-ci est unique. D'où, \mathfrak{g}_2^D est un EVP irréductible sous l'action de L^D . \square

Nous voulons prolonger le L^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$ en un P^D -covariant sur \mathfrak{n}^D , que nous noterons aussi f . Nous allons montrer que l'ensemble $\mathfrak{n}^D \setminus P^D e$ est l'ensemble des zéros de f .

Proposition 2.2.2. *Il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ ssi il existe un L^D -covariant $\hat{f} \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$. Le poids du covariant f lorsque restreint à L^D est le poids du covariant \hat{f} .*

DÉMONSTRATION. Dire qu'il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ de poids λ est équivalent à dire qu'il existe une application P^D -équivariante $f : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$. Nous allons utiliser cette deuxième formulation dans la preuve. Nous allons reprendre la notation $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ pour la durée de la preuve plutôt que \mathfrak{n}^D .

(\Leftarrow) Supposons qu'il existe une application L^D -équivariante $\hat{f} : \mathfrak{g}_2^D \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$. Définissons $\mu : \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow \mathfrak{g}_{\geq 2}^D / \mathfrak{g}_{> 2}^D$ le morphisme quotient. Il existe un isomorphisme de L^D -modules entre $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D / \mathfrak{g}_{> 2}^D$ et \mathfrak{g}_2^D . Cela induit un isomorphisme de P^D -modules en faisant agir trivialement le radical unipotent de P^D sur \mathfrak{g}_2^D comme il le fait sur $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D / \mathfrak{g}_{> 2}^D$. Notons α cet isomorphisme de P^D -modules. Alors, $\hat{f} \circ \alpha \circ \mu : \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ est une application P^D -équivariante.

(\Rightarrow) Réciproquement, supposons qu'il existe une application P^D -équivariante $f : \mathfrak{g}_{\geq 2}^D \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$. On peut définir \hat{f} comme la restriction à \mathfrak{g}_2^D de f . Reste à voir que l'application \hat{f} est non nulle. Soit e un élément régulier dans \mathfrak{g}_2^D . Puisque $P^D e$ est dense dans $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ et que $f(pe) = \lambda(p)f(e)$, il est certain que $f(e) \neq 0$. Ainsi, \hat{f} n'est pas identiquement nulle. \square

Reste maintenant à voir que $V(f) = \mathfrak{n}^D \setminus \mathcal{P}^D e$. Ce sera l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Soit f l'unique \mathcal{P}^D -covariant irréductible sur \mathfrak{n}^D . Alors $V(f) = \mathfrak{n}^D \setminus \mathcal{P}^D e$.*

DÉMONSTRATION. Pour éviter la confusion, nous notons \hat{f} le \mathcal{P}^D -covariant restreint à \mathfrak{g}_2^D .

Soit $x \in \mathfrak{n}^D$. On peut décomposer $x = y + z$ avec $y \in \mathfrak{g}_2^D$ et $z \in \mathfrak{g}_{>2}^D$. Notons $\mathcal{O}(D)$ l'orbite nilpotente Ge . D'après [42], $\mathcal{P}^D e = \mathcal{O}(D) \cap (\mathfrak{g}_2^D \oplus \mathfrak{g}_{>2}^D)$.

Supposons que x soit dans $V(f)$. Cela veut dire que $\hat{f}(y) = 0$ et donc que $y \in \mathfrak{g}_2^D \setminus L^D e$. Mais $\mathcal{P}^D e \cap \mathfrak{g}_2^D = L^D e$. Ainsi, $x = y + z \notin \mathcal{P}^D e$.

Réciproquement, si $x \in \mathfrak{n}^D \setminus \mathcal{P}^D e$, on déduit que $y \in \mathfrak{g}_2^D \setminus L^D e$. D'où $\hat{f}(y) = 0$ et $f(x) = 0$. \square

Nous savons déjà d'après la proposition 2.1.3, que $GV(f)$ est de codimension deux dans $G \mathfrak{n}^D$. Nous voulons montrer en plus que $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge = GV(f)$.

Proposition 2.2.4. *Soit D un diagramme USD officiel. Soit $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ l'unique \mathcal{P}^D -covariant irréductible, à multiplication par un scalaire près. Soit e un élément de Richardson de \mathfrak{n}^D . Alors $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge = GV(f)$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.2.3, $V(f) = \mathfrak{n}^D \setminus \mathcal{P}^D e$. De plus, le théorème de Richardson, proposition 1.2.1, assure que $Ge \cap \mathfrak{n}^D = \mathcal{P}^D e$. Ainsi $GV(f) \subset G \mathfrak{n}^D \setminus Ge$. Soit maintenant $y \in G \mathfrak{n}^D \setminus Ge$. Alors, il existe $x \in \mathfrak{n}^D$ et $g \in G$ tels que $y = gx$. Mais puisque $Ge \cap \mathfrak{n}^D = \mathcal{P}^D e$, il est certain que $x \in \mathfrak{n}^D \setminus \mathcal{P}^D e = V(f)$. D'où $y \in GV(f)$. \square

Remarque 2.2.1. *Avant d'avoir une preuve générale de ce résultat, nous avons remarqué qu'il était vérifié pour presque tous les diagrammes USD officiels en utilisant les diagrammes de Hesse sur l'ordre partiel des orbites nilpotentes dans [18]. Il y avait cependant une exception. Dans E_8 , en prenant le diagramme de Dynkin pondéré officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}$, il y avait deux orbites maximales dans $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge$. Toutefois, dans une article [74], Sommers montre qu'il y a certaines erreurs dans les diagrammes*

représentant l'ordre partiel dans le livre de Carter. En particulier, contrairement à ce qui y est indiqué, il y a une seule orbite maximale dans $G \mathfrak{n}^D \backslash Ge$. Ceci donnait une preuve de la proposition 2.2.4 par observation et il a été possible, par la suite, de trouver une preuve générale.

Nous allons finir cette section avec une proposition qui lie le poids d'un covariant avec son degré.

Proposition 2.2.5. *Soit D un diagramme USD officiel. Soit f l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Notons d son degré et λ son poids. Alors, $D(\lambda) = 2d$.*

DÉMONSTRATION. Puisque D est un diagramme de Dynkin pondéré officiel, il existe un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e, f, h\}$ tel que h définit le diagramme de Dynkin pondéré officiel D , e est un élément régulier de \mathfrak{n}^D et $[h, e] = 2e$. On considère $f(\exp(h)e)$ et on calcule sa valeur de deux façons différentes. Dans un premier temps, on remarque que $\exp(h)e = \exp(2)e$. Puis on utilise le fait que f est homogène de degré d pour obtenir que $f(\exp(h)e) = \exp(2d)f(e)$. Dans un deuxième temps, on utilise le fait que f est un P^D -covariant de poids λ . On obtient alors que $f(\exp(h)e) = \lambda(\exp(h))f(e)$. Puisque $f(e) \neq 0$, on trouve donc que $\exp(2d) = \lambda(\exp(h))$. Mais $\lambda(\exp(h)) = \exp(d\lambda(h))$ où $d\lambda$ représente la différentielle de λ et $d\lambda(h) = D(\lambda)$ puisque h définit le diagramme de Dynkin pondéré officiel D . Ainsi, $D(\lambda) = 2d$. \square

Remarque 2.2.2. *Cette proposition peut être énoncée de façon plus générale dans le cas où D est un diagramme USD (pas nécessairement officiel) pour lequel un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ existe. Ce dont nous avons besoin est un élément h qui définit le diagramme de Dynkin pondéré D et un élément $e \in \mathfrak{g}_2^D$ pour lequel $f(e) \neq 0$. Lorsque D est un diagramme de Dynkin pondéré officiel, ces deux conditions sont vérifiées.*

2.3. NORMALITÉ DE L'ESPACE DES ZÉROS D'UN COVARIANT

Plaçons nous dans la situation où D est un diagramme USD pour lequel il existe un P^D -covariant irréductible f dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Nous ne demandons pas que D soit un diagramme de Dynkin pondéré officiel. Une question naturelle

est de déterminer si la variété $V(f)$ est normale. Nous allons exposer ici deux méthodes qui nous permettent d'établir que cette variété est normale dans un premier temps et non normale dans un deuxième temps. La première méthode se base sur le fait que $V(f)$ est une intersection complète. La deuxième méthode repose sur l'étude de la normalité des variétés nilpotentes $G \mathfrak{n}^D$ et $GV(f)$.

2.3.1. Critère de normalité

La proposition suivante donne un critère simple en termes d'orbites afin de montrer la normalité de $V(f)$. Ce n'est cependant pas une condition nécessaire. La preuve se base sur le critère de Serre dont nous prenons l'énoncé dans [50].

Proposition 2.3.1. *Soit D un diagramme USD et supposons qu'il existe $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ un \mathbb{P}^D -covariant irréductible. Supposons qu'il y ait un nombre fini de \mathbb{P}^D -orbites dans \mathfrak{n}^D et qu'il n'y ait pas de \mathbb{P}^D -orbites de codimension deux. Alors $V(f)$ est une variété normale.*

DÉMONSTRATION. La variété $V(f)$ est l'hypersurface définie par l'annulation du polynôme f dans \mathfrak{n}^D . C'est donc une intersection complète. Or, si $X \subset \mathfrak{n}^D$ est une intersection complète et si l'ensemble des points non réguliers de X est de codimension supérieure ou égale à deux, alors X est une variété normale [50]. Ainsi, il suffit de montrer que l'ensemble des points singuliers de $V(f)$ est de codimension au moins deux.

La variété $V(f)$ comporte une unique \mathbb{P}^D -orbite dense puisqu'il y a un nombre fini d'orbites dans \mathfrak{n}^D et $V(f)$ est irréductible. Notons cette orbite \mathcal{O}' . Elle est de codimension un dans \mathfrak{n}^D . La variété $V(f)$ est régulière dans l'orbite dense. Ainsi, les points singuliers de $V(f)$ sont dans $V(f) \setminus \mathcal{O}'$. Nous savons que $V(f) \setminus \mathcal{O}'$ est une union d'orbites de codimension supérieure ou égale à deux dans \mathfrak{n}^D . Mais par hypothèse, il n'y a pas d'orbites de codimension deux. D'où $V(f)$ n'a pas de singularités en codimension un et donc c'est une variété normale. \square

2.3.2. Critère de non normalité

Nous donnons ici un critère qui permet de montrer qu'une variété $V(f)$ n'est pas normale. Il se base sur l'étude de la normalité des variétés nilpotentes $G \mathfrak{n}^D$ et $GV(f)$. Puisque $GV(f)$ est une variété nilpotente, il existe un diagramme de Dynkin pondéré officiel D' telle que $G \mathfrak{n}^{D'} = GV(f)$. Dans certains cas, il est possible que $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$ et le cas échéant, on peut alors avoir $V(f) = P \mathfrak{n}^{D'}$. Nous discuterons de cas où les algèbres de Lie \mathfrak{n}^D et $\mathfrak{n}^{D'}$ se comportent de cette façon dans le chapitre suivant, en particulier dans la proposition 3.3.1 et dans le lemme 3.4.1.

Proposition 2.3.2. *Supposons que $N(D) := G \mathfrak{n}^D$ soit normale, mais que $N(D') := G \mathfrak{n}^{D'}$ ne le soit pas. Supposons aussi que $P \mathfrak{n}^{D'} = V(f)$. Alors, la variété $V(f)$ n'est pas normale.*

DÉMONSTRATION. Notons m le degré de f , $\lambda = a\omega$ avec $a > 0$ son poids, $X = G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$ et $Z = G \times^{P^D} V(f)$. Notons $\iota : Z \rightarrow X$ l'inclusion de Z dans X . Il existe une suite exacte courte de \mathcal{O}_X -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\lambda)^*[-m] \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Celle-ci engendre une suite exacte longue en cohomologie. Or, puisque D est pair, $X \simeq T^*(G/P^D)$. De plus, $\lambda = a\omega$ est un poids dominant. Ainsi, le théorème 1.3.4 nous donne l'annulation des groupes supérieurs de cohomologie $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^i(X, \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\lambda)^*)$ pour tout $i \geq 1$. Nous obtenons alors une surjection $H^0(X, \mathcal{O}_X) \twoheadrightarrow H^0(X, \iota_* \mathcal{O}_Z) \simeq H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$, c'est-à-dire l'injection de ι de Z dans X engendre une surjection de l'anneau de coordonnées de X sur l'anneau de coordonnées de Z .

Notons μ l'application moment $\mu : X \rightarrow G \mathfrak{n}^D$. Puisque la variété $N(D)$ est normale, μ engendre un isomorphisme sur les anneaux de coordonnées de X et de $N(D)$. La restriction de μ à Z nous permet d'obtenir le diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times^{\text{pD}} V(f) & \xrightarrow{\iota} & G \times^{\text{pD}} \mathfrak{n}^D \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ GV(f) & \longrightarrow & G \mathfrak{n}^D. \end{array}$$

On peut alors passer aux anneaux de coordonnées :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G \times^{\text{pD}} V(f)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[G \times^{\text{pD}} \mathfrak{n}^D] \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{C}[GV(f)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]. \end{array}$$

On obtient donc un isomorphisme entre $\mathbb{C}[GV(f)] = \mathbb{C}[N(D')]$ et $\mathbb{C}[Z]$. Or si $V(f)$ est normale, on déduit que le fibré Z est normal et donc que son anneau de coordonnées $\mathbb{C}[Z]$ l'est aussi. Mais $\mathbb{C}[Z] \simeq \mathbb{C}[N(D')]$ et comme la variété $N(D')$ est affine, il suffit que son anneau de coordonnées soit normal pour qu'elle le soit aussi. Mais par hypothèse, $N(D')$ n'est pas normale. On conclut que $V(f)$ n'est pas une variété normale.

□

2.4. SINGULARITÉS RATIONNELLES

Nous avons étudié dans la section 2.3 des critères afin de déterminer si la variété $V(f)$ est normale ou non. Nous allons continuer ici notre étude des singularités de $V(f)$. Nous allons discuter de différentes méthodes afin d'établir si la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Notons $\widetilde{V(f)}$ la normalisation de $V(f)$. Supposons qu'il existe une **résolution de singularités** $\nu : X \rightarrow \widetilde{V(f)}$, c'est-à-dire le morphisme ν est propre, birationnel et surjectif et la variété X est lisse. Alors, $\widetilde{V(f)}$ est à singularités rationnelles si $R^i \nu_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Avant d'aller plus loin, remarquons que $R^i \nu_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$ ssi $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i \geq 1$. En effet, $V(f)$ est une variété affine et donc sa normalisation aussi. Dans ce cas, d'après [30], $R^i \nu_* \mathcal{O}_X \simeq H^i(X, \mathcal{O}_X)^\sim$. Ainsi, une fois la résolution de singularités trouvée, il suffit de montrer que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$

pour tout $i \geq 1$ pour déduire que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Nous allons utiliser trois approches pour montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Dans deux cas, nous utilisons l'existence d'une résolution de singularités de $V(f)$ de la forme $\nu : P^D \times^Q V \rightarrow V(f)$ où Q est un sous-groupe parabolique de P^D et V est un sous-espace Q -stable de \mathfrak{n}^D . La factorisation de Stein assure l'existence de morphisme $\tilde{\nu} : P^D \times^Q V \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^Q V])$ et $\pi : \text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^Q V]) \rightarrow V(f)$ tels que $\nu = \pi \circ \tilde{\nu}$. Puisque ν est un morphisme birationnel, le corps de l'anneau des fonctions régulières sur $P^D \times^Q V$ et $V(f)$ sont les mêmes, ce qui nous permet de déduire que $\text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^Q V]) = \widetilde{V(f)}$. Le morphisme $\tilde{\nu}$ est une résolution de singularités de $\widetilde{V(f)}$. Ainsi, pour montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles, il suffit de montrer que $H^i(P^D \times^Q V, \mathcal{O}_{P^D \times^Q V}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Dans le troisième cas, nous utilisons plutôt l'existence d'un morphisme birationnel $Y \rightarrow V(f)$ avec Y une variété qui est à singularités rationnelles. Ce n'est donc pas une résolution de singularités en tant que tel.

2.4.1. Faisceau canonique

Soit $Y = P^D \times^Q V$ où Q est un sous-groupe parabolique de P^D et V une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{n}^D qui a une structure de Q -module. Supposons que le morphisme $\nu : Y \rightarrow V(f)$ induit par l'action de Q sur V soit une résolution de singularités de $V(f)$. Notons ω_Y le faisceau canonique de $P^D \times^Q V$.

Comme nous avons vu dans le théorème 1.3.4, si ξ est un caractère de Q et $\xi \geq_{P^D} \omega_Y$, alors $H^i(Y, \mathcal{L}_Y(\mathbb{C}_\xi^*)) = 0$ pour tout $i \geq 1$. En particulier dans le cas où le caractère trivial est plus grand que ω_Y par rapport à P^D , $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ceci prouve la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Supposons que $\nu : P^D \times^Q V \rightarrow V(f)$ soit une résolution de singularités de $V(f)$ et que le caractère trivial soit plus grand que $\omega_{P^D \times^Q V}$ par rapport à P^D . Alors, la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.*

Nous utilisons cette proposition dans la sous-section 3.5.1 du chapitre 3.

2.4.2. Complexe de Koszul

Une seconde approche afin de déterminer si la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles utilise les complexes de Koszul et les suites spectrales. Cette approche provient du chapitre 3 de [12].

Soit D un diagramme de Dynkin pondéré pair et \tilde{D} un autre diagramme de Dynkin pondéré tel que $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$ et tel que la restriction de l'application moment $\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ soit birationnelle où Q est l'intersection entre \mathbb{P}^D et $\mathbb{P}^{\tilde{D}}$. Notons $X = \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^D$ et $Y = \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. Il y a une inclusion $\iota : Y \rightarrow X$. Nous allons donner une résolution de $\iota_* \mathcal{O}_Y$ en termes de \mathcal{O}_X -modules localement libres, ce qui permettra de calculer $H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Considérons le fibré vectoriel $\mathbb{P}^D \times^Q (\mathfrak{n}^D \times (\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}}))$ sur $X = \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^D$. Ce fibré a une section \mathbb{P}^D -équivariante : $[g, x] \mapsto [g, (x, x + \mathfrak{n}^{\tilde{D}})]$. Les zéros de cette section sont tous les points $[g, x]$ pour lesquels $x \in \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$, ce qui est précisément l'image de Y dans X . Cette section induit une résolution de Koszul de $\iota_* \mathcal{O}_Y$:

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{-i} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}^0 \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

où $\mathcal{F}^{-i} = \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)[-i]$ pour tout $i \geq 0$. On se rappelle que si M est un module gradué, on a défini $M[i]_j := M_{i+j}$.

Nous obtenons alors une suite d'isomorphismes de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -modules gradués avec une action de \mathbb{P}^D compatible :

$$\begin{aligned} H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) &\simeq H^j(\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^D, \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)[-i]) \\ &\simeq \bigoplus_{\mathbb{C}} H^j(\mathbb{P}^D/Q, S^k(\mathfrak{n}^D)^* \otimes \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)[-i]) \\ &\simeq \bigoplus_{\mathbb{C}} H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)[-i]) \otimes S^k(\mathfrak{n}^D)^* \\ &\simeq H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-i]. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de construire deux suites spectrales qui convergeront vers $H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$. Pour la première de ces suites, on connaît la deuxième page $'E_2^{-ij} = H^i(X, \mathcal{H}^j(\mathcal{F}^\bullet))$, où \mathcal{H} correspond à la cohomologie d'un complexe de faisceaux, alors qu'on connaît la première page de la seconde $'E_1^{-ij} = H^j(X, \mathcal{F}^{-i})$.

Étant donné que \mathcal{F} a une forme bien particulière, on peut donner plus de précisions sur ${}''E_2$ et ${}'E_1$. Dans le cas de ${}''E_2$, nous obtenons :

$${}''E_2^{-ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ H^i(X, \iota_* \mathcal{O}_Y) & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Or, $H^i(X, \iota_* \mathcal{O}_Y) \simeq H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$ puisque ι est un morphisme affine. De plus, la suite spectrale est dégénérée et ${}''E_2^{-ij} = {}''E_\infty^{-ij}$.

Dans le cas de la deuxième suite spectrale, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}'E_1^{-ij} &= H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) \\ &= H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}_X(\wedge^i(\mathfrak{n}^D/\mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-i]. \end{aligned}$$

Mais comme les deux suites spectrales ${}'E$ et ${}''E$ convergent vers la même suite, on conclut que la suite spectrale ${}'E_1^{-ij} = H^j(X, \mathcal{F}^{-i})$ converge vers $H^{-i+j}(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Proposition 2.4.2. *Supposons que $H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ pour tout $j > i > 0$. Alors, la normalisation de $V(f)$ a des singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Nous avons choisi \tilde{D} de telle sorte que $\mu : \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ soit une résolution de singularités. Le morphisme μ se factorise en passant par $\text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}])$, qui est la normalisation de $V(f)$. Notons $\widehat{\mu} : \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}])$. Ce morphisme est birationnel et est donc une résolution de singularités. Afin de montrer que $\text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}])$ a des singularités rationnelles, il suffit de montrer que $H^i(\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Or, la suite spectrale ${}'E_1^{-ij} = H^j(X, \mathcal{F}^{-i})$ converge vers $H^{-i+j}(Y, \mathcal{O}_Y)$, où $Y = \mathbb{P}^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. Ainsi, si $H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ pour tout $j > i > 0$ on conclut que $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour tout $i \geq 1$. D'où la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. \square

Les suites spectrales ${}'E$ et ${}''E$ donnent plus d'informations que ce qui est dit dans la proposition 2.4.2. Elles permettent aussi de déterminer si $V(f)$ est normale ou non et d'obtenir une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V(f)}]$ comme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -modules.

Proposition 2.4.3. [12] *Notons*

$$F^i = \bigoplus_j H^{i+j}(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^j(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][{-j}].$$

Si $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour tout $i > 0$, alors il existe une résolution minimale P^D -équivariante et libre de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ comme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -module :

$$\dots \rightarrow F^{-i} \rightarrow \dots \rightarrow F^{-1} \rightarrow F^0 \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0.$$

Corollaire 2.4.1. Si $H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ pour tout $j > i > 0$, alors $V(f)$ est normale ssi $H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ pour tout $j \geq i > 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la variété $V(f)$ soit normale. Dans ce cas $\mathbb{C}[V(f)] \simeq \mathbb{C}[Y]$ et il existe une résolution minimale de $\mathbb{C}[V(f)]$:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]f \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \rightarrow \mathbb{C}[V(f)] \rightarrow 0.$$

Or, toutes les résolutions minimales P^D -équivariante par des $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -modules libres sont isomorphes comme complexes. Ainsi, pour tout $i > 0$, on doit avoir $H^i(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*)) = 0$ et donc $H^i(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$.

Si $H^j(X, \mathcal{F}^{-i}) = 0$ pour tout $j \geq i > 0$, il existe une résolution minimale de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ qui est de la forme :

$$\dots \rightarrow F^{-1} \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}^0) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0.$$

Ainsi, $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}[P^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}]$ est un quotient de $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. L'injection de Y dans X nous permet de construire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}} & \hookrightarrow & P^D \times^Q \mathfrak{n}^D \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ V(f) & \hookrightarrow & \mathfrak{n}^D. \end{array}$$

En passant aux anneaux de coordonnées, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[P^D \times^Q \mathfrak{n}^{\tilde{D}}] & \longleftarrow & \mathbb{C}[P^D \times^Q \mathfrak{n}^D] \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{C}[V(f)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]. \end{array}$$

Il y a donc un isomorphisme entre $\mathbb{C}[P^D \times^Q n^D]$ et $\mathbb{C}[V(f)]$. Ainsi, $V(f)$ est une variété normale. \square

2.4.3. Un autre type de résolution

Dans certains cas, il peut être difficile de trouver une résolution de singularités de $V(f)$. En particulier, si D est un diagramme de Dynkin pondéré qui n'est pas officiel, il peut arriver qu'il n'y ait pas de résolutions de singularités de la forme $P^D \times^Q V \rightarrow V(f)$ où V est un sous Q -module de n^D . Il est cependant parfois possible de trouver une variété Y à singularités rationnelles et un morphisme propre, birationnel et surjectif $\nu : Y \rightarrow V(f)$ tel que $R^i \nu_* \mathcal{O}_Y = 0$ pour tout $i \geq 1$. Dans ce cas, nous pouvons aussi conclure que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.4.4. *Soit Y une variété à singularités rationnelles et Z une variété normale. Supposons qu'il existe un morphisme propre, birationnel et surjectif $\nu : Y \rightarrow Z$ tel que $R^i \nu_* \mathcal{O}_Y = 0$ pour tout $i \geq 1$. Alors Z est à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. La variété Y étant à singularités rationnelles, il existe une variété lisse X et un morphisme propre, birationnel et surjectif $\mu : X \rightarrow Y$ tel que $R^i \mu_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$. La composition $\nu \circ \mu : X \rightarrow Z$ est birationnelle, propre et surjective. Il nous suffit donc de montrer que $R^i (\nu \circ \mu)_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Or, il existe une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{i,j} = (R^i \nu_*) (R^j \mu_* \mathcal{O}_X) \Rightarrow R^{i+j} (\nu \circ \mu)_* \mathcal{O}_X.$$

Puisque $R^j \mu_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $j \geq 1$, la suite spectrale dégénère et il existe un isomorphisme $(R^i \nu_*) (\mu_* \mathcal{O}_X) \simeq R^i (\nu \circ \mu)_* \mathcal{O}_X$. Mais μ étant un morphisme birationnel et Y une variété normale, $\mu_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$. Ainsi, $R^i \nu_* \mathcal{O}_Y \simeq R^i (\nu \circ \mu)_* \mathcal{O}_X$. Finalement, par hypothèse $R^i \nu_* \mathcal{O}_Y = 0$ pour tout $i \geq 1$. On conclut que $R^i (\nu \circ \mu)_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$ et donc que Z est à singularités rationnelles. \square

2.5. RÉSULTATS

Nous allons donner ici un résumé des résultats que nous obtiendrons dans les chapitres 3 et 4. Ces deux chapitres sont consacrés à l'étude de tous les diagrammes USD et des covariants qui s'y rattachent le cas échéant.

Nous allons commencer par présenter des tableaux qui exposent un grand nombre d'exemples de diagramme USD. Ces exemples permettent d'avoir une idée des résultats généraux pour chacun des types d'algèbre de Lie.

Pour chacun de ces diagrammes USD, nous allons dire s'il consiste en le diagramme de Dynkin pondéré officiel d'une orbite nilpotente ou non. Dans le cas où ce n'en est pas un, nous allons donner \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré officiel tel que $G \mathfrak{n}^D = G \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Nous savons que l'application moment $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ est à fibres génériquement finies. Dans les tableaux, N_1 représente la cardinalité d'une fibre générique. En particulier, dans le cas où D est un diagramme de Dynkin pondéré officiel, $N_1 = 1$. Nous donnerons D' les diagrammes de Dynkin pondéré officiels des orbites maximales dans le bord de $G \mathfrak{n}^D$. Dans le cas où il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$, il y en a une unique. Nous avons déjà vu que ce résultat est vrai si D est un diagramme USD officiel dans la proposition 2.2.4. À travers l'étude de tous les cas restants, on observe qu'elle est aussi vraie si D un diagramme USD non-officiel pour lequel il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Nous dirons ensuite si ce covariant existe ou non. Le cas échéant, nous donnerons son poids, son degré et dirons si la variété $V(f)$ est normale ou non.

Il y a ici cinq tableaux, un pour chacun des types d'algèbres de Lie simples classiques et un pour les algèbres de Lie de type exceptionnel. Remarquons que dans le cas de F_4 avec le diagramme USD $00 \Rightarrow 20$, nous avons pu déterminer qu'il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$, mais nous ne savons pas si $V(f)$ est une variété normale. Un point d'interrogation apparaît dans le tableau.

Pour les cas classiques, nous avons seulement donner des exemples de diagrammes USD et de leur comportement. La description générale des diagrammes USD non officiels se trouve dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4. Dans

le cas des diagrammes USD officiels, une partie de l'information générale se trouve dans le tableau 3.1.

Type	D	Officiel	\hat{D}	N_1	D'	Covariant	Poids	Degré	Normal
A_1	2	Oui	-	1	0	Oui	$2\omega_1$	1	Oui
A_2	20	Non	11	1	00	Non	-	-	-
A_3	200	Non	101	1	000	Non	-	-	-
	020	Oui	-	1	101	Oui	$2\omega_2$	2	Oui
A_4	2000	Non	1001	1	0000	Non	-	-	-
	0200	Non	0110	1	1001	Non	-	-	-
A_5	20000	Non	10001	1	00000	Non	-	-	-
	02000	Non	01010	1	10001	Non	-	-	-
	00200	Oui	-	1	01010	Oui	$2\omega_3$	3	Oui
A_6	200000	Non	100001	1	000000	Non	-	-	-
	020000	Non	010010	1	100001	Non	-	-	-
	002000	Non	001100	1	010010	Non	-	-	-

TAB. 2.1: Résumés des résultats, A_n

Type	D	Officiel	\hat{D}	N_1	D'	Covariant	Poids	Degré	Normal
B ₂	2 ⇒ 0	Oui	-	1	0 ⇒ 1	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 ⇒ 2	Non	2 ⇒ 0	2	0 ⇒ 1	Non	-	-	-
B ₃	2 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 ⇒ 0	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 2 ⇒ 0	Oui	-	1	1 0 ⇒ 1	Oui	2ω ₂	4	Non
	0 0 ⇒ 2	Non	1 0 ⇒ 1	1	2 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₃	2	Oui
B ₄	2 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 2 0 ⇒ 0	Oui	-	1	1 0 1 ⇒ 0	Oui	2ω ₂	4	Oui
	0 0 2 ⇒ 0	Oui	-	1	0 2 0 ⇒ 0	Oui	ω ₃	3	Oui
	0 0 0 ⇒ 2	Non	1 0 1 ⇒ 0	2	2 0 0 ⇒ 0	Non	-	-	-
					0 0 0 ⇒ 1				
B ₅	2 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 2 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	1 0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₂	4	Oui
	0 0 2 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 1 ⇒ 0	Oui	2ω ₃	6	Oui
	0 0 0 2 ⇒ 0	Non	0 0 2 0 ⇒ 0	2	0 1 0 1 ⇒ 0	Non	-	-	-
	0 0 0 0 ⇒ 2	Non	1 0 0 0 ⇒ 1	1	1 0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₅	3	Oui

B ₆	2 0 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 2 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	1 0 1 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₂	4	Oui
	0 0 2 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₃	6	Oui
	0 0 0 2 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 0 1 0 1 ⇒ 0	Oui	2ω ₄	8	Non
	0 0 0 0 2 ⇒ 0	Non	0 0 1 0 1 ⇒ 0	1	0 0 2 0 0 ⇒ 0	Oui	ω ₅	4	Oui
	0 0 0 0 0 ⇒ 2	Non	1 0 0 0 1 ⇒ 0	2	1 0 1 0 0 ⇒ 0	Non	-	-	-
				0 0 0 0 0 ⇒ 1					
B ₇	2 0 0 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 0 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₁	2	Oui
	0 2 0 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	1 0 1 0 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₂	4	Oui
	0 0 2 0 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 1 0 1 0 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₃	6	Oui
	0 0 0 2 0 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 0 1 0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₄	8	Oui
	0 0 0 0 2 0 ⇒ 0	Oui	-	1	0 0 0 2 0 0 ⇒ 0	Oui	ω ₅	5	Oui
	0 0 0 0 0 2 ⇒ 0	Non	0 0 1 0 1 0 ⇒ 0	2	0 1 0 0 0 1 ⇒ 0	Non	-	-	-
	0 0 0 0 0 0 ⇒ 2	Non	1 0 0 0 0 0 ⇒ 1	1	1 0 0 0 1 0 ⇒ 0	Oui	2ω ₇	4	Oui

TAB. 2.2: Résumés des résultats, B_n

Type	D	Officiel	\hat{D}	N_1	D'	Covariant	Poids	Degré	Normal
C ₃	2 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 \Leftarrow 0	1	1 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 2 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 0 \Leftarrow 2	Oui	ω_2	2	Oui
	0 0 \Leftarrow 2	Oui	-	1	0 1 \Leftarrow 0	Oui	2 ω_3	3	Oui
C ₄	2 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 \Leftarrow 0	1	1 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 2 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 0 0 \Leftarrow 2	Oui	ω_2	2	Oui
	0 0 2 \Leftarrow 0	Non	0 1 1 \Leftarrow 0	1	0 2 0 \Leftarrow 0	Oui	2 ω_3	5	Oui
	0 0 0 \Leftarrow 2	Oui	-	1	0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	2 ω_4	4	Oui
C ₅	2 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 0 \Leftarrow 0	1	1 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 2 0 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	ω_2	2	Oui
	0 0 2 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 1 \Leftarrow 0	1	0 1 1 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 0 0 2 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 1 \Leftarrow 0	1	0 1 1 0 \Leftarrow 0	Oui	2 ω_4	6	Oui
	0 0 0 0 \Leftarrow 2	Oui	-	1	0 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	2 ω_5	5	Oui
C ₆	2 0 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 0 0 \Leftarrow 0	1	1 0 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 2 0 0 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 0 0 1 0 \Leftarrow 0	Oui	ω_2	2	Oui
	0 0 2 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 1 0 \Leftarrow 0	1	0 1 1 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-

	0 0 0 2 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 1 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	ω_4	4	Oui
	0 0 0 0 2 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 0 1 \Leftarrow 0	1	0 1 0 1 0 \Leftarrow 0	Oui	$2\omega_5$	7	Oui
	0 0 0 0 0 \Leftarrow 2	Oui	-	1	0 0 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	$2\omega_6$	6	Oui
C_7	2 0 0 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 0 0 0 \Leftarrow 0	1	1 0 0 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 2 0 0 0 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 0 0 1 0 0 \Leftarrow 0	Oui	ω_2	2	Oui
	0 0 2 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 1 0 0 \Leftarrow 0	1	0 1 1 0 0 0 \Leftarrow 0	Non	-	-	-
	0 0 0 2 0 0 \Leftarrow 0	Oui	-	1	0 1 0 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	ω_4	4	Oui
	0 0 0 0 2 0 \Leftarrow 0	Non	0 0 0 1 1 0 \Leftarrow 0	1	0 0 0 2 0 0 \Leftarrow 0	Oui	$2\omega_5$	9	Oui
	0 0 0 0 0 2 \Leftarrow 0	Non	0 1 0 0 0 1 \Leftarrow 0	1	0 1 0 1 0 0 \Leftarrow 0	Oui	$2\omega_6$	8	Oui
	0 0 0 0 0 0 \Leftarrow 2	Oui	-	1	0 0 0 0 0 1 \Leftarrow 0	Oui	$2\omega_7$	7	Oui

TAB. 2.3: Résumés des résultats, C_n

Type	D	Officiel	\hat{D}	N_1	D'	Covariant	Poids	Degré	Normal
D_4	$2\ 0\ 0\ 0$	Oui	-	1	$0\ 1\ 0\ 0$	Oui	$2\omega_1$	2	Oui
	$0\ 2\ 0\ 0$	Oui	-	1	$1\ 0\ 1\ 1$	Oui	$2\omega_2$	4	Oui
D_5	$2\ 0\ 0\ 0$	Oui	-	1	$0\ 1\ 0\ 0$	Oui	$2\omega_1$	2	Oui
	$0\ 2\ 0\ 0$	Oui	-	1	$1\ 0\ 1\ 0$	Oui	$2\omega_2$	4	Oui
	$0\ 0\ 2\ 0$	Oui	-	1	$0\ 1\ 0\ 1$	Oui	$2\omega_3$	6	Non
	$0\ 0\ 0\ 2$	Non	$0\ 0\ 0\ 1$	1	$0\ 1\ 0\ 0$	Non	-	-	-
D_6	$2\ 0\ 0\ 0\ 0$	Oui	-	1	$0\ 1\ 0\ 0\ 0$	Oui	$2\omega_1$	2	Oui
	$0\ 2\ 0\ 0\ 0$	Oui	-	1	$1\ 0\ 1\ 0\ 0$	Oui	$2\omega_2$	4	Oui
	$0\ 0\ 2\ 0\ 0$	Oui	-	1	$0\ 1\ 0\ 1\ 0$	Oui	$2\omega_3$	6	Oui

0002_0^0	Oui	-	1	0020_0^0	Oui	ω_2	4	Oui
0000_2^0	Oui	-	1	0001_0^0	Oui	$2\omega_6$	3	Oui
D_7 20000_0^0	Oui	-	1	01000_0^0	Oui	$2\omega_1$	2	Oui
02000_0^0	Oui	-	1	10100_0^0	Oui	$2\omega_2$	4	Oui
00200_0^0	Oui	-	1	01010_0^0	Oui	$2\omega_3$	6	Oui
00020_0^0	Oui	-	1	00101_0^0	Oui	$2\omega_4$	8	Oui
00002_0^0	Non	00020_0^0	2	00101_0^0	Non	-	-	-
00000_2^0	Non	00000_1^1	1	00010_0^0	Non	-	-	-

TAB. 2.4: Résumés des résultats, D_n

	00_0^000200	Oui	-	1	00_0^010001	Oui	12	ω_6	Oui
	00_0^00020	Oui	-	1	00_0^000101	Oui	12	$2\omega_7$	Non
	00_0^00002	Oui	-	1	00_0^000010	Oui	4	$2\omega_8$	Oui
F_4	$20 \Rightarrow 00$	Oui	-	1	$01 \Rightarrow 00$	Oui	4	$2\omega_1$	Oui
	$02 \Rightarrow 00$	Oui	-	1	$10 \Rightarrow 10$	Oui	12	$2\omega_2$	Non
	$00 \Rightarrow 20$	Non	$02 \Rightarrow 00$	4	$10 \Rightarrow 10$	Oui	8	$2\omega_3$?
	$00 \Rightarrow 02$	Oui	-	1	$01 \Rightarrow 00$	Oui	2	ω_4	Oui
G_2	$2 \Rightarrow 0$	Oui	-	1	$0 \Rightarrow 1$	Oui	4	$2\omega_1$	Non
	$0 \Rightarrow 2$	Non	$2 \Rightarrow 0$	3	$0 \Rightarrow 1$	Oui	2	$2\omega_2$	Oui

TAB. 2.5: Résumés des résultats, algèbres exceptionnelles

Donnons un premier résultat sur les poids que peuvent prendre un P^D -covariant dans le cas où celui-ci existe.

Théorème 2.5.1. *Soit D un diagramme USD. Supposons qu'il existe un P^D -covariant irréductible $f \in \mathbb{C}[n^D]$. Alors le poids de f est $\alpha\omega_\kappa$ avec $\alpha \in \{1, 2\}$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons traiter tous les cas dans les chapitres 3 et 4. C'est ce que nous observerons. \square

Remarque 2.5.1. *Depuis la rédaction de la thèse, nous avons trouvé une preuve a priori de ce résultat. Elle se trouvera dans un article futur.*

Soit D un diagramme USD qui n'est pas $0 \circ \circ \Rightarrow 2 \circ$. Bien que la variété $V(f)$ ne soit pas toujours normale, sa normalisation a la propriété intéressante d'être à singularités rationnelles. Ce résultat peut rappeler celui sur les variétés nilpotentes montré indépendamment par Hinich et Panyushev dans [36] et [61].

Théorème 2.5.2. *Soit D un diagramme USD. Supposons que $D \neq 0 \circ \circ \Rightarrow 2 \circ$ et qu'il existe un P^D -covariant irréductible $f \in \mathbb{C}[n^D]$. Alors, la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.*

Remarque 2.5.2. (1) *Dans le cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de type F_4 et $D = 0 \circ \circ \Rightarrow 2 \circ$, nous ne savons pas si la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles ou non. Nous conjecturons que c'est le cas.*

(2) *Nous n'avons pas de preuve a priori de ce théorème. Nous avons obtenu ce résultat en observant qu'il est vrai dans tous les cas possibles. Il serait intéressant d'obtenir dans le futur une preuve, peut-être combinatoire, de cette proposition qui n'en soit pas une au cas par cas. Il est à noter qu'historiquement lorsqu'il a été question de montrer que la normalisation d'une variété nilpotente est à singularités rationnelles, plusieurs cas ont été montrés avant que Hinich et Panyushev arrivent à une preuve générale de ce fait.*

2.6. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'ISOMORPHISME

De façon générale, le théorème d'isomorphisme 1.6.1 est utilisé sous une forme généralisée. En fait, ce théorème reste vrai si G est un groupe simple

qui contient un facteur de Levi H pour lequel le théorème s'applique. Par exemple, prenons G un groupe algébrique de type de E_8 et supposons que $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. Dans D , on retrouve le diagramme de Dynkin pondéré $D_{\text{int}} = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ qui est encadré de 2. Or, on sait que pour ce diagramme de Dynkin pondéré, il existe un $P^{D_{\text{int}}}$ -covariant de degré 12 et de poids $2\omega_4$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{D_{\text{int}}}]$. Le théorème d'isomorphisme 1.6.1 s'applique alors au groupe G avec le diagramme de Dynkin pondéré D .

Nous allons introduire quelques notions afin d'énoncer correctement la généralisation du théorème d'isomorphisme 1.6.1. Soit D_1 et D_2 deux diagrammes de Dynkin pondérés de groupes semi-simples G_1 et G_2 de rang r et s respectivement. Notons $\Delta_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ les racines simples de G_1 et $\Delta_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ les racines simples de G_2 . On note $(,)_{G_1}$ et $(,)_{G_2}$ les produits scalaires invariants selon les groupes de Weyl de G_1 et de G_2 respectivement. Dans le même ordre d'idées, pour distinguer les poids fondamentaux de G_1 et de G_2 nous ajouterons le groupe en exposant. Ainsi, $\omega_i^{G_1}$ est le poids fondamental de G_1 vérifiant $(\omega_i^{G_1}, \alpha_j^\vee)_{G_1} = \delta_{i,j}$.

Nous dirons que D_2 est **inclus dans** D_1 si $s \leq r$ et s'il existe $\Delta = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$ un sous-ensemble de Δ_1 tels que $D_1(\alpha_{i_j}) = D_2(\beta_j)$ et $(\alpha_{i_j}, \alpha_{i_l})_{G_1} = (\beta_j, \beta_l)_{G_2}$ pour tout $j, l \in \{1, \dots, s\}$. On dit que D_2 inclus dans D_1 est **encadré de deux** si en plus, pour tout $\alpha_l \notin \Delta$ et $\alpha_{i_j} \in \Delta$, si $(\alpha_l, \alpha_{i_j})_{G_1} \neq 0$, alors $D_1(\alpha_l) = 2$.

Soit D un diagramme de Dynkin pondéré d'un groupe semi-simple G de rang r . Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines simples. Soit D_{int} un diagramme de Dynkin pondéré d'un groupe simple H de rang n . On suppose que D_{int} est un diagramme USD. Notons β_1, \dots, β_n les racines simples de H . On suppose que $D_{\text{int}}(\beta_k) = 2$ et qu'il existe un $P^{D_{\text{int}}}$ -covariant de degré m et de poids $2\omega_k^H$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{D_{\text{int}}}]$. Supposons que D_{int} est inclus dans D et est encadré de 2.

Notons $\Delta_{\text{int}} = \{\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{l+n}\}$ les n racines simples de G qui sont encadrées et supposons que $D(\alpha_{l+k}) = 2$. Il est possible que nous aillons besoins de renuméroter les racines de G pour cela. Supposons qu'il existe μ un caractère de P^D tel que $(\mu, \alpha_{l+k}^\vee)_G = -1$ et $(\mu, \alpha_{l+i}^\vee)_G = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$.

Finalement, si le poids $2\omega_k^H$ s'écrit sous la forme $2\omega_k^H = \sum_{i=1}^n c_i \beta_i$, alors on pose $\lambda = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{l+i}$.

Remarque 2.6.1. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour ce qui suit, on peut remarquer que $2\omega_k^H$ est un élément du réseau engendré par les racines $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ puisqu'il correspond au poids d'un covariant et donc à un caractère de $\mathbb{P}^{D_{\text{int}}}$.

Théorème 2.6.1. Soit D et D_{int} des diagrammes de Dynkin pondérés comme ci-dessus. Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe un isomorphisme comme $\mathbb{C}[G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D]$ -modules gradués avec une action de G compatible :

$$H^i(G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D, \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_\mu)^*) \simeq H^i(G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D, \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_{\mu+\lambda})^*)[-m].$$

DÉMONSTRATION. Soit $\nu = \sum_{i=1}^r c_i \alpha_i$ un caractère de T . On appelle le support de ν , qu'on note $\text{supp}(\nu)$, l'ensemble des racines simples de G pour lesquelles $c_i \neq 0$. On définit le diagramme de Dynkin pondéré D_L pour lequel $D_L(\alpha_{l+k}) = 0$ et $D_L(\alpha_j) = D(\alpha_j)$ pour tout $j \neq l+k$.

On veut construire un \mathbb{P}^D -covariant $F \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ de degré m et de poids λ . On remarque que $\mathbb{P}^D \subset \mathbb{P}^{D_L}$ et $\mathfrak{n}^{D_L} \subset \mathfrak{n}^D$. Ainsi, \mathfrak{n}^{D_L} et $\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D_L}$ sont des \mathbb{P}^D -modules. On remarque que $\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D_L} \simeq \mathfrak{n}^{D_{\text{int}}}$ sur lequel il existe un $\mathbb{P}^{D_{\text{int}}}$ -covariant de poids λ . Cela nous permet de définir :

$$F : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D_L} \rightarrow \mathfrak{n}^{D_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{C}_\lambda.$$

À partir de F , on obtient une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_\lambda)^*[-m] \rightarrow \mathcal{O}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{G \times^{\mathbb{P}^D} V(F)} \rightarrow 0$$

où $\iota : G \times^{\mathbb{P}^D} V(F) \hookrightarrow G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D$ est l'inclusion. On tensorise avec le faisceau $\mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_\mu)^*$. Pour obtenir l'isomorphisme désiré, il suffit donc de montrer que $H^i(G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D, \iota_* \mathcal{O}_{G \times^{\mathbb{P}^D} V(F)} \otimes \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_\mu)^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$. C'est-à-dire que $H^i(G \times^{\mathbb{P}^D} V(f), \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} V(f)}(\mathbb{C}_\mu)^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Par la suite, afin d'alléger les notations, pour V un Q -module, nous écrirons $H^i(P/Q, V)$ pour $H^i(P/Q, \mathcal{L}_{P/Q}(V))$.

Notons $\pi : G/P^D \rightarrow G/P^{D_L}$ la projection. Elle permet de construire une suite spectrale de Leray, voir par exemple [39] :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{D_L}, H^j(P^{D_L}/P^D, \mathbf{C}[n^D]/(F) \otimes \mathbf{C}_\mu^*)) \Rightarrow H^j(G/P^D, \mathbf{C}[n^D]/(F) \otimes \mathbf{C}_\mu^*).$$

On veut montrer que $H^j(P^{D_L}/P^D, \mathbf{C}[n^D]/(F) \otimes \mathbf{C}_\mu^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Les sous-groupes paraboliques P^D et P^{D_L} ont des décompositions de Levi $P^D = L^D U^D$ et $P^{D_L} = L^{D_L} U^{D_L}$. Notons

$$L_{\text{int}}^D = \langle U_\beta \mid D(\beta) = 0 \text{ et } \text{supp}(\beta) \subset \Delta_{\text{int}} \rangle$$

et

$$L_{\text{ext}}^D = \langle U_\beta \mid D(\beta) = 0 \text{ et } \text{supp}(\beta) \not\subset \Delta_{\text{int}} \rangle$$

où U_β est le sous-groupe T stable de G ayant \mathfrak{g}_β comme algèbre de Lie. De la même façon, on peut définir $L_{\text{int}}^{D_L}$ et $L_{\text{ext}}^{D_L}$. Notons $U_{\text{int}}^D = \langle U_\beta \mid D(\beta) > 0 \text{ et } \text{supp}(\beta) \subset \Delta_{\text{int}} \rangle$ et $U_{\text{ext}}^D = \langle U_\beta \mid D(\beta) > 0 \text{ et } \text{supp}(\beta) \not\subset \Delta_{\text{int}} \rangle$. De la même façon, on peut définir $U_{\text{int}}^{D_L}$ et $U_{\text{ext}}^{D_L}$. On peut aussi décomposer $\mu = \mu_{\text{int}} + \mu_{\text{ext}}$ et $n^D = n_{\text{int}}^D \oplus n_{\text{ext}}^D$. En effet, soit $\nu = \sum_{i=1}^r c_i \alpha_i$ un poids de T . Alors $\nu_{\text{int}} = \sum_{j: \alpha_j \in \Delta_{\text{int}}} c_j \alpha_j$ et $\nu_{\text{ext}} = \sum_{j: \alpha_j \notin \Delta_{\text{int}}} c_j \alpha_j$. La décomposition de n suit directement de la décomposition des poids de T .

On obtient la décomposition $L^D = (L_{\text{int}}^D \times L_{\text{ext}}^D) Z(L^D)$. Similairement, on obtient la décomposition $L^{D_L} = (L_{\text{int}}^{D_L} \times L_{\text{ext}}^{D_L}) Z(L^{D_L})$. On trouve alors que $P^{D_L}/P^D \simeq L_{\text{int}}^{D_L} Z(L^{D_L}) / L_{\text{int}}^D U_{\text{int}}^D Z(L^D)$.

En termes de P_{int}^D -modules

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[n^D]/(F) &\simeq \mathbf{C}[n_{\text{int}}^D \oplus n_{\text{ext}}^D]/(F) \\ &\simeq (\mathbf{C}[n_{\text{int}}^D] \otimes \mathbf{C}[n_{\text{ext}}^D])/ (F) \\ &\simeq \mathbf{C}[n_{\text{int}}^D]/(F) \otimes \mathbf{C}[n_{\text{ext}}^D]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H^j(P^{D_L}/P^D, \mathbf{C}[n^D]/(F) \otimes \mathbf{C}_\mu^*) &\simeq H^j(P^{D_L}/P^D, \mathbf{C}[n_{\text{int}}^D]/(F) \otimes \mathbf{C}[n_{\text{ext}}^D] \otimes \mathbf{C}_\mu^*) \\ &\simeq H^j(P^{D_L}/P^D, \mathbf{C}[n_{\text{int}}^D]/(F) \otimes \mathbf{C}_{\mu_{\text{int}}}^* \otimes \mathbf{C}[n_{\text{ext}}^D] \otimes \mathbf{C}_{\mu_{\text{ext}}}^*) \\ &\simeq 0 \end{aligned}$$

pour tout $j \geq 0$ en raison du corollaire 1.6.4.

De cela, on conclut que $H^i(G/P^D, \mathbb{C}[n^D]/(F) \otimes \mathbb{C}_\mu^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et

$$H^i(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbb{C}_\mu)^*) \simeq H^i(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbb{C}_{\mu+\lambda})^*)[-m].$$

□

Remarque 2.6.2. *Le corollaire 1.6.4 s'applique techniquement seulement au groupe semi-simple, mais il n'y a pas de problèmes à l'utiliser ici puisque plutôt que considérer les groupes de cohomologie sur P^{D_L}/P^D , on pourrait les considérer sur le quotient des groupes réductifs L^{D_L} et L^D , puis sur celui des groupes semi-simples $L^{D'_L}$ et $L^{D'}$ et obtenir les mêmes résultats en cohomologie. Utiliser directement le corollaire 1.6.4 permet de ne pas trop alourdir la preuve.*

Nous allons traiter un exemple afin d'illustrer comment ce théorème s'applique.

Exemple 2.6.1. *Reprenons l'exemple ci-dessus de $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$ dans E_8 . On considère le caractère $\mu = \{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega$. On veut étudier les groupe de cohomologie $H^i(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbb{C}_\mu)^*)$. Pour alléger les notations, on pose $H^i(\mu) := H^i(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{P^D} n^D}(\mathbb{C}_\mu)^*)$. Dans un premier temps, on considère $D_{\text{int}} = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \end{smallmatrix}$, diagramme pour lequel il existe un covariant dans $\mathbb{C}[n^{D_J}]$ de poids $2\omega_4$ et de degré 12. Dans E_6 , $2\omega_4 = \{\begin{smallmatrix} 4 & 8 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & & & & \end{smallmatrix}\}_\alpha$. Ainsi, $\lambda = \{\begin{smallmatrix} 4 & 8 & 12 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\alpha = \{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega$. On obtient donc un premier isomorphisme*

$$H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega) \simeq H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega)[-12].$$

On considère maintenant $D_{\text{int}} = 2$. Il existe un covariant de poids $2\omega_1$ et de degré 1. Dans A_1 , $2\omega_1 = \{1\}_\alpha$. Ainsi, $\lambda = \{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\alpha = \{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega$ On obtient un second isomorphisme :

$$H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega)[-12] \simeq H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega)[-13].$$

Finalement, puisque $\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega$ est dominant, on sait, d'après le théorème 1.3.4, que $H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi, $H^i(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et $H^0(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega) \simeq H^0(\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}\}_\omega)[-13]$.

Chapitre 3

LES DIAGRAMMES USD OFFICIELS

Dans le chapitre 1, nous avons discuté de l'existence d'un isomorphisme en cohomologie pour des fibrés en droite sur le fibré cotangent d'une variété projective G/P où P est un sous-groupe parabolique maximal de G . L'existence de cet isomorphisme était sujet à la présence d'un élément e dans l'algèbre de Lie du radical unipotent \mathfrak{n} de P pour lequel la codimension de $\mathfrak{n} \setminus Pe$ dans \mathfrak{n} est un.

Dans le chapitre 2, nous avons montré qu'une grande famille de sous-groupes paraboliques vérifient cette propriété. Soit D un diagramme de Dynkin pondéré officiel. Nous avons défini le sous-groupe parabolique P^D et la sous-algèbre de Lie \mathfrak{n}^D . Si D est un diagramme USD officiel, nous avons montré qu'il existe $e \in \mathfrak{n}^D$ tel que la codimension de $\mathfrak{n}^D \setminus P^D e$ dans \mathfrak{n}^D est un et qu'il existe un P^D -covariant irréductible $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Le but de ce chapitre est d'étudier le P^D -covariant f et la variété $V(f)$ dans ce contexte.

Dans la section 3.1, nous donnons la liste des diagrammes USD officiels. Pour chacun de ces diagrammes D , nous donnons une description du P^D -covariant f dans la section 3.2. La section 3.3 est consacrée à l'étude de la structure de $V(f)$ et de $GV(f)$. Nous déterminons entre autre quelle est l'orbite dont la fermeture est $GV(f)$. Finalement, dans les sections 3.4 et 3.5, nous étudions les singularités de $V(f)$ à l'aide des critères exposés dans les sections 2.3 et 2.4.

3.1. DIAGRAMMES USD OFFICIELS

Ce ne sont pas toutes les diagrammes USD qui sont officiels. Notre première tâche sera d'en faire la liste. Nous commencerons par le faire pour chacune des algèbres de Lie simples classiques. Puis nous ferons la liste pour les algèbres de Lie exceptionnelles en étudiant les tables de [18]

Pour décrire les orbites dans les algèbres de Lie classiques, nous avons besoin de quelques notions sur les partitions que nous allons présenter maintenant. Une **partition** μ d'un entier n est une liste d'entiers strictement positifs $\mu = (\mu_1 \dots \mu_m)$ vérifiant $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m > 0$ et tel que $\sum_{i=1}^m \mu_i = n$. Si μ est une partition, nous notons $|\mu|$ la somme des entiers composant μ . On définit la **longueur** d'une partition $\mu = (\mu_1 \dots \mu_m)$ comme l'entier m . C'est le nombre d'entiers non nuls composant cette partition.

3.1.1. Diagrammes USD officiels dans A_n

Proposition 3.1.1. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type A_n où $n = 2m + 1$. L'unique diagramme USD officiel D est de la forme :*

$$D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = m + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les orbites nilpotentes de A_n sont caractérisées par les partitions $\mu = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k)$ de $n+1$. À un entier μ_i , on associe les entiers $\mu_i - 1, \mu_i - 3, \dots, 3 - \mu_i, 1 - \mu_i$. Notons ξ_1, \dots, ξ_{n+1} la liste de ces entiers ordonnés tel que $\xi_i \geq \xi_{i+1}$. Alors, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est :

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_1 - \xi_2 & \xi_2 - \xi_3 & & & \xi_n - \xi_{n+1} \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ \end{array}$$

Pour qu'un tel diagramme de Dynkin pondéré ne comporte qu'un seul deux, il faut que tous les μ_i soient égaux à 2. Ainsi, $n + 1$ doit être pair et il existe un entier m tel que $n = 2m + 1$. \square

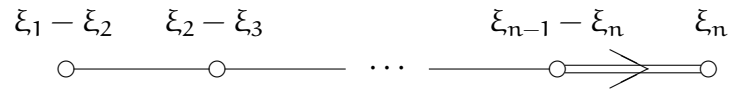
3.1.2. Diagrammes USD officiels dans B_n

Proposition 3.1.2. *Les diagrammes de Dynkin pondérés D de B_n qui sont des diagrammes USD officiels sont de la forme :*

$$D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

avec $3k \leq 2n + 1$.

DÉMONSTRATION. Les orbites nilpotentes de B_n sont définies par les paires de partitions (μ, ν) avec $2|\mu| + |\nu| = 2n + 1$ et ν est formée d'entiers impairs distincts. À un entier μ_i , on associe les entiers $\mu_i - 1, \mu_i - 1, \mu_i - 3, \mu_i - 3, \dots, 3 - \mu_i, 3 - \mu_i, 1 - \mu_i, 1 - \mu_i$ et pour un entier ν_i , on associe $\nu_i - 1, \nu_i - 3, \dots, 3 - \nu_i, 1 - \nu_i$. Notons ξ_1, \dots, ξ_n la liste de ces n premiers entiers ordonnés tel que $\xi_i \geq \xi_{i+1}$. Le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est :



Pour qu'un tel diagramme ne comporte qu'un seul deux parmi les $n - 1$ premières racines, les μ_i et les ν_i doivent être égaux à 3 ou à 1, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule différence $\xi_i - \xi_{i+1} = 2$. En effet, si un des μ_i est plus grand que 3, il existera plus d'un j pour lequel la différence $\xi_j - \xi_{j+1}$ est égale à deux. De plus, si un des μ_i est de valeur 2, il existera au moins un j tel que $\xi_j - \xi_{j+1} = 1$.

Aussi, pour B_n , le plus grand k tel que $D(\alpha_k)$ peut être différent de deux doit vérifier $3k \leq 2n + 1$. En effet, supposons que D soit un diagramme USD vérifiant $D(\alpha_k) = 2$, avec $k < n$. Alors $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k = 2$. Ainsi, $2|\mu| + |\nu| \geq 3k$. Mais on sait que $2|\mu| + |\nu| = 2n + 1$. On conclut que $3k \leq 2n + 1$.

Finalement, pour tous les k vérifiant cette inégalité, il existe un diagramme de Dynkin pondéré associé à une orbite nilpotente ayant un unique deux en position k .

L'autre possibilité est que $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 2$. Dans ce cas, les μ_i et les ν_i sont égaux à 3. Mais ceci est impossible puisqu'il faudrait alors avoir $3n \leq 2n + 1$, ce qui est évidemment impossible.

□

3.1.3. Diagrammes USD officiels dans C_n

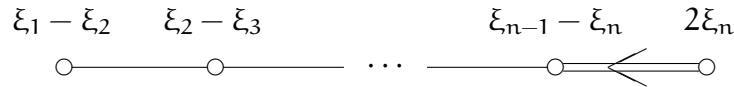
Proposition 3.1.3. *Soit D un diagramme USD officiel de C_n . Alors, D peut prendre deux formes :*

$$(1) D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 2m \text{ et } 3m \leq n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou

$$(2) D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les orbites nilpotentes de C_n sont paramétrisées par les paires de partitions (μ, ν) vérifiant $|\mu| + |\nu| = n$ et ν est formée d'entiers distincts. À un entier μ_i , on associe les entiers $\mu_i - 1, \mu_i - 1, \mu_i - 3, \mu_i - 3, \dots, 3 - \mu_i, 3 - \mu_i, 1 - \mu_i, 1 - \mu_i$ et pour un entier ν_i , on associe $2\nu_i - 1, 2\nu_i - 3, \dots, 3 - 2\nu_i, 1 - 2\nu_i$. Notons ξ_1, \dots, ξ_{n+1} la liste de ces $n + 1$ plus grands entiers ordonnés de telle sorte que $\xi_i \geq \xi_{i+1}$. Alors, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est :



Il y a deux possibilités de diagrammes USD officiels. Une première est si tous les ξ_i prennent la valeur 1. Cela correspond à la partition formée de n deux. Le diagramme de Dynkin pondéré associé vérifie $D(\alpha_n) = 2$ et $D(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \neq n$.

La seconde possibilité est si l'unique deux se trouve parmi les $n - 1$ premières racines. Dans ce cas, les μ_i et les ν_i doivent être égaux à 3 ou à 1, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule différence $\xi_i - \xi_{i+1} = 2$. Mais, la partition doit

être formée d'un nombre pair de 3, ce qui fait en sorte que l'unique 2 ne peut se trouver qu'en une position k paire. Finalement, $3k \leq 2n$.

□

3.1.4. Diagrammes USD officiels dans D_n

Proposition 3.1.4. *Soit D un diagramme USD officiel de D_n . Alors, D peut prendre deux ou trois formes dépendamment si n est impair ou pair. Dans tous les cas, n impair ou pair, D peut prendre la forme*

$$D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = k \text{ et } 3k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où n est pair, D peut aussi prendre les formes

$$D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou

$$D(\alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les orbites nilpotentes de D_n sont paramétrisées par les paires de partitions (μ, ν) avec $2|\mu| + |\nu| = 2n$ où ν est formée d'entiers impairs distincts. De plus, il y a deux classes d'orbites nilpotentes associées aux paires de partitions pour lesquelles μ n'est formée que d'entiers pairs et ν est la partition vide.

À un entier μ_i , on associe les entiers $\mu_i - 1, \mu_i - 1, \mu_i - 3, \mu_i - 3, \dots, 3 - \mu_i, 3 - \mu_i, 1 - \mu_i, 1 - \mu_i$ et pour un entier ν_i , on associe $\nu_i - 1, \nu_i - 3, \dots, 3 - \nu_i, 1 - \nu_i$. Notons ξ_1, \dots, ξ_{n+1} la liste de ces $n + 1$ premiers entiers ordonnés tel que $\xi_i \geq \xi_{i+1}$. Alors, le diagramme de Dynkin pondéré associé à cette partition est :



Pour qu'un tel diagramme ne comporte qu'un seul deux, les μ_i et les ν_i doivent être égaux à 3 ou à 1 ou encore on doit se trouver dans le cas où tous les μ_i sont égaux à deux. Ce dernier cas ne peut se produire que si $n = 2m$.

Ainsi, pour $k \notin \{n-1, n\}$ le plus grand k tel que $D(\alpha_k)$ puisse être non nul doit vérifier $3k \leq 2n$. De plus, pour tous les k vérifiant cette inégalité, il existe un diagramme de Dynkin pondéré associé à une orbite nilpotente ayant un unique deux en position k . Dans le cas où $n = 2m$, les deux diagrammes de Dynkin pondérés $D(\alpha_k) = 2$ pour $k \in \{n-1, n\}$ sont des diagrammes USD officiels.

□

3.1.5. Diagrammes USD officiels dans les algèbres de Lie exceptionnelles

On se contente de consulter les tables de [18] pour dresser la liste des diagrammes USD officiels.

Type	Diagrammes USD officiels				
E_6	$00\underset{2}{0}00$	$00\underset{0}{2}00$			
E_7	$20\underset{0}{0}000$	$00\underset{0}{0}002$	$00\underset{0}{0}020$	$00\underset{2}{0}000$	$02\underset{0}{0}000$
	$00\underset{0}{0}200$	$00\underset{0}{2}000$			
E_8	$20\underset{0}{0}0000$	$00\underset{0}{0}0002$	$00\underset{0}{0}0020$	$00\underset{2}{0}0000$	$00\underset{0}{0}0200$
	$00\underset{0}{0}2000$				
F_4	$20 \Rightarrow 00$	$00 \Rightarrow 02$	$02 \Rightarrow 00$		
G_2	$2 \Rightarrow 0$				

3.2. DESCRIPTION DE f

Pour chacun des diagrammes USD officiels D énumérés dans la section 3.1, nous avons montré dans la section 2.2 qu'il existe un P^D -covariant $f \in \mathbb{C}[n^D]$. Nous voulons déterminer le poids et le degré de ce covariant. Cela a été fait dans [38]. Nous allons tout de même donner un exemple de calculs. Les poids et les degrés pour tous les diagrammes USD officiels se trouvent

dans le tableau 3.1. Avant de commencer, introduisons une notation qui sera importante tout au long du chapitre : si H est un groupe, H' représente le sous-groupe dérivé de H .

Plaçons nous dans le cas où \mathfrak{g} est de type A_n avec $n = 2m + 1$. Considérons le diagramme de Dynkin pondéré officiel D vérifiant $D(\alpha_{m+1}) = 2$. Nous voulons trouver le degré de f et calculer le poids λ tel que $f : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ est \mathbb{P}^D -équivariant. Le plus haut poids de \mathfrak{n}^D est $\{1\ 1 \dots 1\ 1\}_\alpha = \{1\ 0 \dots 0\ 1\}_\omega$. Ainsi, \mathfrak{n}^D est isomorphe à $V_1 \otimes V_2$ en termes de $(L^D)'$ -module, où $(L^D)'$ est de type $A_m \times A_m$ et le premier groupe de type A_m agit sur V_1 avec plus haut poids ω_1 et le deuxième A_m agit sur V_2 avec plus haut poids ω_1 . Dans la suite, nous dirons simplement que \mathfrak{n}^D est isomorphe à $V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$ en termes de $(L^D)'$ -module afin d'alléger les notations. D'après [67], il existe un $(L^D)'$ -invariant f de degré $m + 1$ sur un tel espace préhomogène. En utilisant la formule de la proposition 2.2.5, on conclut que le poids de f est $2\omega_{m+1}$.

Type de \mathfrak{g}	D	Degré de f	Poids de f
A_n	$0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0$ le 2 en position $m + 1$ $n = 2m + 1$	$m + 1$	$2\omega_{m+1}$
B_n	$0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ le 2 en position k $3k < 2n + 1$	$2k$	$2\omega_k$
	$0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ le 2 en position $k = 2m + 1$ $3k = 2n + 1$	$m + 1$	ω_k
C_n	$0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0 \Leftarrow 0$ le 2 en position $k = 2m$ $3k \leq 2n$	k	ω_k
	$0 \dots 0 \Leftarrow 2$	n	$2\omega_n$

D_n	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$		
	le 2 en position k $3k \leq 2n - 1$	$2k$	$2\omega_k$
	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$		
	le 2 en position k $3k = 2n$	k	ω_k
	$0 \dots 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$		
	n pair	$\frac{n}{2}$	$2\omega_n$
E_6	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$	4	$2\omega_2$
	$0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	12	$2\omega_4$
E_7	$2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	4	$2\omega_1$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	3	$2\omega_7$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	4	ω_6
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$	7	$2\omega_2$
	$0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	12	$2\omega_3$
	$0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	15	$2\omega_5$
	$0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	12	ω_4
E_8	$2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	8	$2\omega_1$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	4	$2\omega_8$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	12	$2\omega_7$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$	16	$2\omega_2$
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	12	ω_6
	$0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$	40	$2\omega_5$
F_4	$2 \ 0 \Rightarrow 0 \ 0$	4	$2\omega_1$
	$0 \ 0 \Rightarrow 0 \ 2$	2	ω_4
	$0 \ 2 \Rightarrow 0 \ 0$	12	$2\omega_2$
G_2	$2 \Rightarrow 0$	4	$2\omega_1$

TAB. 3.1: Poids et degré des covariants f

3.3. STRUCTURE DE $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge$

Soit D un diagramme USD officiel. Nous avons vu dans la section 2.1 que $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge$ est de codimension deux dans $G \mathfrak{n}^D$ et est une variété nilpotente. Le but de cette section est de décrire le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' vérifiant $G \mathfrak{n}^D \setminus Ge = G \mathfrak{n}^{D'}$. Nous allons commencer par énoncer deux propositions qui décrivent les différents diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' et les algèbres $\mathfrak{n}^{D'}$. Nous prouverons ces deux propositions dans les sous-sections suivantes qui seront consacrées aux différents types d'algèbres de Lie simple, les preuves se faisant au cas par cas.

Proposition 3.3.1. *Pour tous les diagrammes USD officiels, sauf la liste d'exception que nous donnerons ci-dessous, $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$. Exceptions :*

- (1) B_n : Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels limites, c'est-à-dire $2n + 1$ est un multiple de 3 et l'unique deux est en position $k = \frac{2n+1}{3}$.
- (2) C_n : Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels avec un seul deux en position $k = 2l < n$.
- (3) D_n : Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels limites, c'est-à-dire $2n$ est un multiple de 3 et l'unique deux est en position $k = \frac{2n}{3}$.
- (4) E_7 : Le diagramme de Dynkin pondéré officiel : $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$.
- (5) E_8 : Le diagramme de Dynkin pondéré officiel : $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{matrix}$.
- (6) F_4 : Le diagramme de Dynkin pondéré officiel : $0 \ 0 \Rightarrow 0 \ 2$.

Proposition 3.3.2. *Pour tous les diagrammes USD officiels D vérifiant $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$, à une exception près, le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' est obtenu de D de la façon suivante : si $D(\alpha_i) = 2$, alors $D'(\alpha_j) = 1$ pour tout j tel que $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ et $D'(\alpha_k) = 0$ pour tous les autres k . La seule exception est le diagramme de Dynkin pondéré officiel : $D = \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$, pour lequel $D' = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$.*

3.3.1. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type A_n

Pour trouver le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' dans les cas classiques, il suffit de trouver un diagramme de Dynkin pondéré officiel D' pour lequel l'orbite associée est dans $G n^D$ et qui est de codimension deux. Par la proposition 2.2.4, cette orbite est unique. L'autre approche est d'utiliser la relation d'ordre sur les orbites, afin de trouver la plus grande orbites dans le bord de $N(D)$.

Dans le cas de A_n , il y a un seul cas à considérer : $n = 2m + 1$ et $D = 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 2 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0$ où l'unique deux est en position $m + 1$.

Proposition 3.3.3. *Le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' vérifie $D'(\alpha_m) = D'(\alpha_{m+2}) = 1$ et $D'(\alpha_i) = 0$ pour $i \notin \{m, m + 2\}$.*

DÉMONSTRATION. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D = n^D$ a ici une forme agréable. Elle consiste en l'ensemble des matrices de la forme $m(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec X une matrice carrée de taille $m + 1$.

Il est possible de montrer que le morphisme P^D -équivariant $f : n^D \rightarrow \mathbb{C}_{2\omega_{m+1}}$ est défini par $f(m(X)) = \det(X)$. Ainsi, $V(f)$ est l'ensemble des matrices de n^D tel que le rang de X est inférieur à $m + 1$. Cela se trouve à être $P^D n^{D'}$ où $D' = 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0$ avec les un en position m et $m + 2$. Il est clair ici que $n^D \setminus P^D e = V(f) = P^D n^{D'}$. On en déduit que $G n^D \setminus Ge = GV(f) = G n^{D'}$. On remarque aussi que $n^{D'} \subset n^D$. \square

3.3.2. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type B_n

L'ordre sur les orbites de B_n provient de l'ordre partiel sur les partitions. On dit que $\nu = (\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s) \geq \mu = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_t)$ si pour tout $i \leq \min(s, t)$, $\nu_1 + \dots + \nu_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$. De plus, comme nous l'avons vu les orbites nilpotentes de B_n sont caractérisées par les paires de partitions (μ, ν) avec $2|\mu| + |\nu| = 2n + 1$ et ν est formée d'entiers impairs distincts. La partition λ associée à une paire de partitions (μ, ν) où la longueur de μ est s et celle de β

est t est la partition obtenue en réordonnant de façon décroissante les entiers $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_s, \mu_s, \nu_1, \dots, \nu_t$. Ainsi, pour que λ soit la partition associée à une orbite nilpotente de B_n , chaque entrée paire doit apparaître avec cardinalité paire dans la partition λ .

Proposition 3.3.4. *Si $D = 0 \dots 0 2 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ avec le deux en position k , où $3k < 2n + 1$, alors $D' = 0 \dots 1 0 1 \dots 0 \Rightarrow 0$ avec les un en position $k - 1$ et $k + 1$ si $k \neq 1$ et $D' = 0 1 \dots 0 \Rightarrow 0$ si $k = 1$. Nous appelons ces cas, les **cas réguliers**. Dans le cas où $n = 1 \pmod 3$ et $D = 0 \dots 0 2 \dots 0 \Rightarrow 0$ avec le deux en position $\frac{2n+1}{3}$, $D' = 0 \dots 2 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ avec le deux en position $\frac{2n+1}{3} - 1$. Nous appelons ces cas, les **cas limites**.*

DÉMONSTRATION. Le diagramme USD officiel $D = 0 \dots 0 2 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ avec le deux en position k provient de la partition $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_k \underbrace{1 \dots 1}_{2n+1-3k})$. Si $k \neq \frac{2n+1}{3}$, alors la partition λ comporte des un. La partition $\lambda' = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-1} \underbrace{2 2}_{2n-3k} \underbrace{1 \dots 1}_{1})$ vérifie $\lambda' < \lambda$. De plus, si μ est une partition de $2n + 1$ associée à une orbite nilpotente de B_n et si $\mu < \lambda$, on doit nécessairement avoir $\mu \leq \lambda'$.

Dans le cas où $n = 1 \pmod 3$ et $k = \frac{2n+1}{3}$, la partition associée à D est $\lambda = (3 \dots 3)$ formée de $\frac{2n+1}{3}$ trois. Dans ce cas, la partition $\lambda' = (3 \dots 3 1 1 1)$ avec $\frac{2n+1}{3} - 1$ trois vérifie $\lambda' < \lambda$. De plus c'est l'unique partition maximale inférieure à λ .

□

On remarque dans les cas réguliers $n^{D'} \subset n^D$, propriété qui n'est pas vérifiée pour les cas limites.

Remarque 3.3.1. *Dans les cas où $D = 2 \Rightarrow 0$ et $D = 0 2 \Rightarrow 0$, nous aurions pu parler de **cas petit**. Cependant, les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' ont la même formulation que dans le cas régulier. C'est pourquoi nous les avons réunis ci-dessus. Cependant, lorsque nous étudierons les singularités de la normalisation de ces variétés, nous séparerons le traitement de ces cas.*

3.3.3. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type C_n

Il y a deux types de diagrammes USD officiels : ceux de la forme $D = 0\ 0 \dots 0 \Leftarrow 2$ et ceux qui s'écrivent sous la forme $D = 0\ 0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0 \Leftarrow 0$ où le deux est en position $k = 2l$ avec $3k \leq 2n$.

L'ordre sur les orbites provient encore une fois de l'ordre sur les partitions. On se rappelle que les orbites nilpotentes de C_n sont paramétrisées par les paires de partitions (μ, ν) vérifiant $|\mu| + |\nu| = n$ où ν est formée d'entiers distincts. La partition λ associée à cette paire de partitions (μ, ν) où la longueur de μ est s et celle de ν est t est la partition obtenue en réordonnant les entiers $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_s, \mu_s, 2\nu_1, \dots, 2\nu_t$. Si λ est une partition de $2n$ associée à une orbite nilpotente de C_n , alors toutes les entrées impaires apparaissent avec une cardinalité paire.

Proposition 3.3.5. *Si $D = 0\ 0 \dots 0 \Leftarrow 2$, alors $D' = 0\ 0 \dots 1 \Leftarrow 0$. De plus, $n^{D'} \subset n^D$.*

DÉMONSTRATION. La partition de $2n$ associée à D est $\lambda = (\underbrace{2 \dots 2}_n)$. La partition $\lambda' = (\underbrace{2 \dots 2}_{n-1} 11)$ vérifie $\lambda' < \lambda$. Le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' associé à cette partition est $D' = 0\ 0 \dots 1 \Leftarrow 0$. De plus, λ' est l'unique partition de $2n$ associée à une orbite nilpotente de C_n maximale inférieure à λ .

Il est clair que $n^{D'} \subset n^D$.

□

Nous voulons maintenant étudier la seconde situation, c'est-à-dire lorsque l'unique deux n'est pas en position $k = n$. Si n est trop petit $n = 3$ ou $n = 4$, D' a un comportement particulier. Nous nommerons ces deux cas, les **cas petits**. De plus, si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $k = \frac{2n}{3}$, la situation est aussi différente. Nous parlerons alors de **cas limites**. Dans le cas où $n \geq 5$ et que nous ne nous trouvons pas dans un cas petit ou un cas limite, nous parlerons de **cas réguliers**.

Proposition 3.3.6. *Soit $D = 0\ 0 \dots 0\ 2\ 0 \dots 0 \Leftarrow 0$ où le deux est en position $2k$. Supposons que nous soyons dans un cas régulier. Alors si $k = 1$, $D' = 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \dots 0 \Leftarrow 0$, si*

$k > 1$, $D' = 00 \dots 10001 \dots 0 \Leftarrow 0$ où les un sont en position $2k - 2$ et $2k + 2$. Dans ces deux cas, $n^{D'} \notin n^D$.

DÉMONSTRATION. La partition associée au diagramme USD officiel D est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{2k} \underbrace{1 \dots 1}_{2n-3k})$. On sait qu'il y a au moins deux un. Dans ce cas, la partition $\lambda' = (\underbrace{3 \dots 3}_{2k-2} 2222 \underbrace{1 \dots 1}_{2n-3k-2})$ vérifie $\lambda' < \lambda$ et correspond bien à la partition d'une orbite nilpotente. Le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' a la forme exprimée dans l'énoncé du théorème sous réserve que $\lambda' \neq (2222)$ qui est un des cas petits. On observe aussi que λ' est l'unique partition de $2n$ correspondant à une orbite nilpotente dans C_m maximale inférieure à λ .

□

Traitons maintenant les deux cas petits.

Proposition 3.3.7. *Si $D = 02 \Leftarrow 0$, alors $D' = 00 \Leftarrow 2$. Si $D = 020 \Leftarrow 0$, alors $D' = 000 \Leftarrow 2$. Pour ces deux cas, $n^{D'} \notin n^D$.*

DÉMONSTRATION. On remarque que dans le premier cas $\lambda = (33)$ et la partition $\lambda' = (222)$ vérifie $\lambda' < \lambda$, alors que dans le second cas, $\lambda = (3311)$ et $\lambda' = (2222)$ vérifie $\lambda' < \lambda$.

□

Il ne nous reste qu'à traiter le cas limite.

Proposition 3.3.8. *Soit $n = 0 \pmod 3$ et supposons $D = 0 \dots 020 \dots 0 \Leftarrow 0$, avec le deux en position $k = \frac{2n}{3}$. Alors, $D' = 0 \dots 01001 \dots 0 \Leftarrow 0$ où les un sont en position $k - 2$ et $k + 1$. Dans ce cas, $n^{D'} \notin n^D$.*

DÉMONSTRATION. La partition λ est formée de k trois. Ainsi, la partition $\lambda' = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-2} 222)$ vérifie $\lambda' < \lambda$ et correspond bien à la partition d'une orbite nilpotente.

□

3.3.4. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie de type D_n

Il y a ici plusieurs cas à étudier. Comme pour les autres algèbres de Lie classiques, la relation d'ordre sur les orbites nilpotentes provient de celle sur les partitions. On se rappelle que les orbites nilpotentes de D_n sont caractérisées par les paires de partitions (μ, ν) avec $2|\mu| + |\nu| = 2n$ où ν est formée d'entiers impairs distincts. La partition λ associée à cette paire de partitions (μ, ν) où la longueur de μ est s et celle de ν est t est la partition obtenue en réordonnant les entiers $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_s, \mu_s, \nu_1, \dots, \nu_t$. Ainsi, chaque entrée paire apparaît avec cardinalité paire dans la partition λ .

Commençons par étudier le cas du diagramme USD officiel D pour lequel $D(\alpha_{n-1}) = 2$ ou $D(\alpha_n) = 2$. Comme nous l'avons vu, ce diagramme de Dynkin pondéré est officiel ssi n est pair.

Proposition 3.3.9. *Supposons n pair. Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 2 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}$ ou $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 2 \end{smallmatrix}$. Alors, $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}$.*

DÉMONSTRATION. Le diagramme USD officiel D provient de la paire de partitions $(\mu, \nu) = (2 \dots 2, -)$ formée de $\frac{n}{2}$ deux. Cela nous donne la partition $\lambda = (\underbrace{2 \dots 2}_n)$ de $2n$. Pour obtenir une partition plus petite, il faut changer certains deux par des un, mais nous devons toujours retirer les deux en paires. Ainsi, la partition $\lambda' = (\underbrace{2 \dots 2}_{n-2} 1111)$ est bien la partition d'une orbite nilpotente et elle vérifie $\lambda' < \lambda$. De plus, si μ est une partition de $2n$ associée à une orbite nilpotente de D_n et si $\mu < \lambda$, alors $\mu \leq \lambda'$.

□

Nous allons maintenant traiter les deux cas petits.

Proposition 3.3.10. *Supposons $n \in \{4, 5\}$ et $D = \begin{smallmatrix} 0 & \dots & 2 \\ & & 0 \end{smallmatrix}$. Alors $D' = \begin{smallmatrix} \dots & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}$.*

DÉMONSTRATION. On remarque que les partitions associées à ces orbites nilpotentes sont $\lambda_1 = (3311)$ et $\lambda_2 = (3331)$. Il est clair que $\lambda'_1 = (3221)$ et

$\lambda'_2 = (3322)$ vérifient les propriétés des partitions associées aux orbites nilpotentes de D_n et $\lambda'_i < \lambda_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. \square

Traisons maintenant les cas limites. Ce sont les cas pour lesquels n est un multiple de 3 et l'unique deux du diagramme USD officiel est le plus à droite possible (en dehors des extrémités.)

Proposition 3.3.11. *Supposons que $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $k = \frac{2n}{3}$. Soit D le diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position k . Alors, D' est le diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position $k - 1$. Dans ce cas, $\mathfrak{n}^{D'} \not\subset \mathfrak{n}^D$.*

DÉMONSTRATION. Essentiellement le même raisonnement que le cas similaire dans B_n . \square

Finalement, nous pouvons traiter le cas régulier pour lequel l'approche est la même que pour l'algèbre de Lie de type B_n .

Proposition 3.3.12. *Supposons que n et k ne vérifient pas les propriétés de la proposition précédente et que D est le diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position k . Alors, D' est le diagramme de Dynkin pondéré officiel avec deux un en position $k - 1$ et $k + 1$ respectivement. Ici, $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$.*

3.3.5. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D' dans les algèbres de Lie exceptionnelles

Pour ces algèbres, il nous suffit d'étudier les tableaux de la section 13.1 et les diagrammes de Hasse se trouvant dans la section 13.4 de [18]. Notons cependant qu'il y a quelques erreurs dans les diagrammes de la section 13.4. Elles ont été répertoriées à la fin de la section 6 de [74]. Nous allons donner dans le tableau 3.2 les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D et D' et nous mentionnerons si $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$.

3.4. ÉTUDE DE LA NORMALITÉ

Soit D un diagramme USD officiel. Nous avons montré l'existence d'un \mathfrak{p}^D -covariant $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Nous nous intéressons maintenant à l'étude de ses

Type	D	D'	Inclusion
E ₆	$00\underset{0}{2}00$	$01\underset{1}{0}10$	oui
	$00\underset{2}{0}00$	$00\underset{0}{2}00$	oui
E ₇	$00\underset{0}{0}002$	$00\underset{0}{0}010$	oui
	$20\underset{0}{0}000$	$01\underset{0}{0}000$	oui
	$00\underset{0}{0}020$	$00\underset{0}{1}000$	non
	$00\underset{2}{0}000$	$00\underset{0}{1}000$	oui
	$02\underset{0}{0}000$	$10\underset{0}{1}000$	oui
	$00\underset{0}{0}200$	$00\underset{0}{1}010$	oui
	$00\underset{0}{2}000$	$10\underset{0}{1}010$	oui
E ₈	$00\underset{0}{0}0002$	$00\underset{0}{0}0010$	oui
	$20\underset{0}{0}0000$	$01\underset{0}{0}0000$	oui
	$00\underset{0}{0}0020$	$00\underset{0}{0}0101$	oui
	$00\underset{2}{0}0000$	$00\underset{0}{1}0000$	oui
	$00\underset{0}{0}0200$	$00\underset{0}{1}0001$	non
	$00\underset{0}{0}2000$	$00\underset{0}{1}0100$	oui
F ₄	$20 \Rightarrow 00$	$01 \Rightarrow 00$	oui
	$00 \Rightarrow 02$	$01 \Rightarrow 00$	non
	$02 \Rightarrow 00$	$10 \Rightarrow 10$	oui
G ₂	$2 \Rightarrow 0$	$0 \Rightarrow 1$	oui

TAB. 3.2. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels D et D'

singularités. Cette section sera consacrée à l'étude de la normalité de la variété $V(f)$. Nous sommes aussi intéressés à montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Nous commencerons à traiter certains cas dans cette section, mais l'essentiel de ce travail sera fait dans la section 3.5.

Afin d'étudier la normalité de la variété $V(f)$ nous utiliserons principalement les critères décrits dans la section 2.3. Nous appliquerons aussi le théorème de Kempf, théorème 1.3.2, sur l'annulation des groupes supérieurs de cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(\mathbb{C}[V]))$ dans le cas où V est un P -module complètement réductible.

Avant tout, nous allons trouver une résolution de singularités de $V(f)$, c'est-à-dire une variété lisse X et un morphisme propre et birationnel $X \rightarrow V(f)$. La variété X sera de la forme $P^D \times^Q n^{\tilde{D}}$ pour un certain diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} et Q un sous-groupe parabolique de G inclus dans P^D . L'existence d'une telle désingularisation provient de [34]. Elle se base sur le fait que f est le prolongement d'un L^D -covariant sur \mathfrak{g}_2^D et que L^D est un groupe réductif.

3.4.1. Résolution des singularités

Pour chaque diagramme USD officiel, on cherche un diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $n^{\tilde{D}} \subset n^D$;
- (2) $P^D n^{\tilde{D}} = V(f)$;
- (3) Il existe $Q \subset P^D$, un sous-groupe parabolique de G , tel que la restriction de l'application moment $P^D \times^Q n^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ soit birationnelle.

Dans ce cas, le morphisme $\mu : P^D \times^Q n^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités. Nous allons appeler ces trois propriétés, les propriétés (*).

Remarque 3.4.1. (1) *Le diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} n'est pas nécessairement officiel. Il peut aussi être pondéré avec des valeurs rationnelles.*

- (2) *Soit D un diagramme USD officiel. Il n'y a pas un unique diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} qui vérifie les propriétés (*). Nous sommes intéressés à en trouver un et non pas à énumérer toutes les possibilités.*

On se rappelle que pour D un diagramme USD officiel, il existe une unique orbite dense dans le bord de la fermeture de l'orbite associée à D . Nous avons noté D' le diagramme de Dynkin pondéré officiel de cette orbite. Nous avons aussi montré que $N(D')$ est de codimension deux dans $N(D)$ dans la proposition 2.1.3.

Lemme 3.4.1. *Supposons que $n^{D'} \subset n^D$. Notons Q l'intersection entre P^D et $P^{D'}$. Supposons aussi que $Q \neq P^{D'}$. Alors le diagramme de Dynkin pondéré officiel D' vérifie les propriétés (*) et on peut donc choisir $\tilde{D} = D'$. En particulier, $P^D \times^Q n^{D'} \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités.*

DÉMONSTRATION. La propriété (1) est vérifiée par hypothèse.

Montrons maintenant la propriété (2). Notons e un élément de \mathfrak{g}_2^D tel que Ge soit dense dans Gn^D . Puisque $Gn^{D'}$ est de codimension deux dans Gn^D , il est impossible que $n^{D'}$ intersecte P^De . Ainsi, $n^{D'} \subset V(f)$.

Pour obtenir l'égalité $P^D n^{D'} = V(f)$, nous allons montrer que les variétés irréductibles $P^D n^{D'}$ et $V(f)$ sont de même dimension. Puisque $P^D n^{D'} \subset V(f)$ nous pourrions alors conclure. L'inclusion $P^D n^{D'} \hookrightarrow V(f)$ et la restriction de l'application moment $G \times^{P^D} V(f) \rightarrow GV(f)$ nous permettent de construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times^{P^D} P^D n^{D'} & \longrightarrow & G \times^{P^D} V(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G n^{D'} & \xlongequal{\quad} & GV(f) \end{array}$$

Nous savons que les fibres de l'application $G \times^{P^D} V(f) \rightarrow GV(f)$ sont génériquement de dimension un. Notons m la dimension des fibres génériques du morphisme $G \times^{P^D} P^D n^{D'} \rightarrow G n^{D'}$. Alors,

$$\begin{aligned} \dim(G \times^{P^D} P^D n^{D'}) &= \dim(G n^{D'}) + m \\ &= \dim(GV(f)) + m \\ &= \dim(G \times^{P^D} V(f)) + m - 1. \end{aligned}$$

D'où $\dim(P^D n^{D'}) = \dim(V(f)) + m - 1$. Par conséquent, si $m \geq 1$, alors $\dim(P^D n^{D'}) \geq \dim(V(f))$. Mais nous savons que $P^D n^{D'} \subset V(f)$. On peut en déduire que $\dim(P^D n^{D'}) = \dim(V(f))$. D'où, $P^D n^{D'} = V(f)$. Il nous faut donc montrer que $m \geq 1$.

Étudions le diagramme commutatif suivant dans lequel nous avons noté $Q = P^D \cap P^{D'}$.

$$\begin{array}{ccccc} G \times^{P^{D'}} n^{D'} & \longleftarrow & G \times^Q n^{D'} & \longrightarrow & G \times^{P^D} P^D n^{D'} \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 \\ G n^{D'} & \xlongequal{\quad} & G n^{D'} & \xlongequal{\quad} & G n^{D'} \end{array}$$

Le premier morphisme ν_1 est birationnel puisque D' est un diagramme de Dynkin pondéré officiel. On en déduit que $\dim(G \times^{P^{D'}} \mathfrak{n}^{D'}) = \dim(G \mathfrak{n}^{D'})$, c'est-à-dire, $\dim G - \dim P^{D'} + \dim \mathfrak{n}^{D'} = \dim G \mathfrak{n}^{D'}$.

Du second morphisme ν_2 , on obtient que

$$\dim G - \dim Q + \dim \mathfrak{n}^{D'} = \dim G \mathfrak{n}^{D'} + \dim(\nu_2^{-1}(e')).$$

En combinant cette égalité avec la précédente, on obtient :

$$\dim P^{D'} - \dim Q = \dim \nu_2^{-1}(e').$$

Finalement, du troisième morphisme ν_3 , on obtient l'égalité

$$\dim G - \dim P^D + \dim P^D \mathfrak{n}^{D'} = \dim G \mathfrak{n}^{D'} + \dim \nu_3^{-1}(e').$$

Or, puisque $G \times^{P^{D'}} \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow G \mathfrak{n}^{D'}$ est un morphisme birationnel, les fibres de $P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow P^D \mathfrak{n}^{D'}$ sont génériquement finies. On en déduit que $\dim P^D \mathfrak{n}^{D'} = \dim P^D - \dim Q + \dim \mathfrak{n}^{D'}$.

Ainsi $\dim G - \dim Q + \dim \mathfrak{n}^{D'} = \dim G \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D'} + \dim(\nu_3^{-1}(e'))$ et donc les dimensions de $\nu_2^{-1}(e')$ et de $\nu_3^{-1}(e')$ sont égales. Or, $\dim \nu_2^{-1}(e') = \dim P^{D'} - \dim Q \geq 1$. Ce qui nous permet de conclure puisque le morphisme ν_3 est celui dont nous voulions montrer que la dimension d'une fibre générique est supérieure ou égale à un.

Reste maintenant à voir que $\mu : P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow V(f)$ est birationnelle. Cela se déduit directement du fait que le morphisme $G \times^{P^{D'}} \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow G \mathfrak{n}^{D'}$ est birationnel et en étudiant la préimage d'un élément $e' \in \mathfrak{n}^{D'}$ qui est régulier. \square

Remarque 3.4.2. *L'hypothèse $Q \neq P^{D'}$ peut sembler superflue. Cependant, dans le cas du diagramme USD officiel de E_7 $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & \end{smallmatrix}$, le diagramme D' a la forme suivante : $D' = \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & \end{smallmatrix}$. On remarque ici que $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$, mais $Q = P^{D'}$. Dans ce cas particulier, l'application $P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow V(f)$ n'est pas une résolution de singularité.*

Il y a cependant quelques diagrammes USD officiels pour lesquels $\mathfrak{n}^{D'} \not\subset \mathfrak{n}^D$ ou $P^{D'} \subset P^D$. Il faut alors travailler davantage pour trouver le diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} qui vérifie les propriétés (*). Nous allons commencer par faire le travail dans les cas de C_3 et C_4 qui se comportent de façons particulières, puis nous discuterons du cas de C_n de façon générale.

Lemme 3.4.2. Soit $D = 0\ 2 \Leftarrow 0$, alors on peut choisir $\tilde{D} = 0\ 1 \Leftarrow 1$. Pour $D = 0\ 2\ 0 \Leftarrow 0$, on peut choisir $\tilde{D} = 0\ 1\ 0 \Leftarrow 1$.

DÉMONSTRATION. Commençons avec le cas de $D = 0\ 2 \Leftarrow 0$. Le diagramme $\tilde{D} = 0\ 1 \Leftarrow 1$ vérifie $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$, mais aussi $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^{D'}$. De plus, il est facile de trouver une matrice dans $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ qui est de rang trois, ce qui décrit une matrice générique de $\mathfrak{n}^{D'}$. Ainsi, $G \mathfrak{n}^{D'} = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. De plus, on calcule que la dimension de $V(f)$ est cinq tout comme celle de $P^D \times^{P^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. Afin d'obtenir l'égalité $V(f) = P^D \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$, il suffit donc de montrer d'après le lemme 1.2.1 qu'il existe un élément $x \in \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ $P_x^D = P_x^{\tilde{D}}$ et $P^D x \cap \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = P^{\tilde{D}} x$.

Soit e' un élément générique de $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ et donc de $\mathfrak{n}^{D'}$. Le diagramme de Dynkin pondéré D' est officiel. On sait donc que la restriction de l'application moment $G \times^{P^{D'}} \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow G \mathfrak{n}^{D'}$ est birationnelle et donc que $G_{e'} \subset P^{D'}$. Ainsi $P_{e'}^D \subset P^D \cap P^{D'} = P^{\tilde{D}}$. Similairement, $G_{e'} \cap \mathfrak{n}^{D'} = P^{D'} e'$. Ainsi, $P^D e' \cap \mathfrak{n}^{D'} = (P^D \cap P^{D'}) e' = P^{\tilde{D}} e'$. D'où, $P^D e' \cap \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = P^{\tilde{D}} e'$. On conclut que les fibres du morphisme $P^D \times^{P^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ sont génériquement finies et comme $P^D \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ est un sous-espace fermé irréductible dans $V(f)$ qui a la même dimension que $V(f)$, on doit avoir égalité. On conclut que $P^D \times^{P^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ est un morphisme birationnel.

Passons maintenant au cas $D = 0\ 2\ 0 \Leftarrow 0$. Le diagramme $\tilde{D} = 0\ 1\ 0 \Leftarrow 1$ vérifie $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$ ainsi que $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^{D'}$. De plus, il est possible de trouver une matrice dans $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ qui est de rang quatre, ce qui décrit une matrice générique de $\mathfrak{n}^{D'}$ puisque sa partition associée est (2222). Ainsi, $G \mathfrak{n}^{D'} = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. On calcule ensuite la dimension de $V(f)$ qui est dix et celle de $P^D \times^{P^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ qui est aussi dix. Le même raisonnement que dans le cas de C_3 nous permet de conclure que $P^D \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = V(f)$ et le morphisme $P^D \times^{P^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ est birationnel. \square

Passons au cas général de C_n .

Lemme 3.4.3. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type C_n , où $n > 4$, avec le diagramme USD officiel D vérifiant $D(\alpha_{2l}) = 2$ avec $3l < n$. Si $2l > 2$, on peut choisir \tilde{D} vérifiant $\tilde{D}(\alpha_{2l-2}) = \tilde{D}(\alpha_{2l+2}) = \frac{1}{2}$, $\tilde{D}(\alpha_{2l}) = 1$ et $\tilde{D}(\alpha_i) = 0$ si $i \notin \{2l-2, 2l, 2l+2\}$. Dans

le cas où $2l = 2$, on peut choisir \tilde{D} qui vérifie $\tilde{D}(\alpha_4) = \frac{1}{2}$, $\tilde{D}(\alpha_2) = 1$ et $\tilde{D}(\alpha_i) = 0$ si $i \notin \{2, 4\}$.

DÉMONSTRATION. On se place dans la situation générale où $2l > 2$, le cas $2l = 2$ étant similaire. On remarque dans un premier temps que $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$. De plus, $\dim(\mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}}) = \dim(\mathfrak{n}^D) - 1$. On se rappelle que D' vérifie $D'(\alpha_{2l-2}) = D'(\alpha_{2l+2}) = 1$. Il existe un élément générique $e' \in \mathfrak{n}^{D'}$ qui est aussi dans $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ puisque $G \mathfrak{n}^{D'} = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$.

D' étant un diagramme de Dynkin pondéré officiel, $G_{e'} = \mathbb{P}_{e'}^{D'}$. Mais, $\mathbb{P}^D \cap \mathbb{P}^{D'} = \mathbb{P}^{\tilde{D}}$. On conclut que $\mathbb{P}_{e'}^D = \mathbb{P}_{e'}^{D'}$ et donc les fibres de $\mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ sont génériquement de cardinalité un.

On conclut que $\mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\tilde{D}}} \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$ est un morphisme birationnel. \square

Dans la situation où le diagramme USD officiel D est un cas limite d'une algèbre de Lie classique, nous savons aussi que $\mathfrak{n}^{D'} \not\subset \mathfrak{n}^D$. Cependant, il ne nous sera pas nécessaire de trouver une résolution de singularités afin de montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Reste à traiter le cas des algèbres de Lie exceptionnelles. Vladimir Popov a décrit un algorithme dans [63] qui peut permettre de trouver le diagramme de Dynkin pondéré \tilde{D} . Cet algorithme a été implémenté par Norbert A'Campo. C'est à partir de l'algorithme que M. A'Campo nous a transmis que nous avons pu trouver des diagrammes de Dynkin pondérés \tilde{D} vérifiant les propriétés (*) pour les derniers cas qu'il nous restait à étudier.

Lemme 3.4.4. *Dans le cas de l'algèbre de Lie simple de type E_7 et des diagrammes USD officiels $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}$, on peut choisir les diagrammes de Dynkin pondérés $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ & & & & & 1/3 \end{smallmatrix}$ respectivement. Dans le cas de l'algèbre de Lie simple de type E_8 et du diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix}$, on peut choisir $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix}$.*

Nous n'avons pas considéré le diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \Rightarrow & 0 & 2 \\ & & & & \end{smallmatrix}$ dans F_4 , puisque l'approche que nous utiliserons dans la sous-section 3.4.5 afin de montrer que dans ce cas, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles, ne nécessite pas de résolutions de singularités.

Nous allons regrouper l'information obtenue sur ces \tilde{D} bien particuliers dans le tableau 3.3

Type	D	D'	\tilde{D}
C_3	$0 \ 2 \Leftarrow 0$	$0 \ 0 \Leftarrow 2$	$0 \ 1 \Leftarrow 1$
C_4	$0 \ 2 \ 0 \Leftarrow 0$	$0 \ 0 \ 0 \Leftarrow 2$	$0 \ 1 \ 0 \Leftarrow 1$
C_n	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots \Leftarrow 0$ le 2 en position $k = 2m$ $3k < 2n$	$0 \dots 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \dots \Leftarrow 0$ les 1 en position $k - 2$ et $k + 2$	$0 \dots \frac{1}{2} \ 0 \ 1 \ 0 \ \frac{1}{2} \dots \Leftarrow 0$ le 1 en position k
E_7	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0$ 0	$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$ 0	$0 \ 0 \ 1/2 \ 0 \ 1 \ 0$ 0
	$0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0$ 0	$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$ 0	$1/3 \ 1/3 \ 1 \ 1/3 \ 1/3 \ 0$ 1
E_8	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0$ 0	$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$ 0	$0 \ 0 \ 1/2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1/2$ 0

TAB. 3.3. Certains diagrammes de Dynkin pondérés \tilde{D} pour les cas où $\tilde{D} \neq D'$

3.4.2. Normalité et action complètement réductible d'un sous-groupe parabolique

Soit D un diagramme USD officiel et D' l'unique diagramme de Dynkin pondéré officiel tel que $N(D')$ est de codimension deux dans $N(D)$. Notons $Q = P^D \cap P^{D'}$. Dans le cas où $n^{D'}$ est un Q -module complètement réductible et que $n^{D'} \subset n^D$, il est possible de montrer que la variété $V(f)$ est normale à singularités rationnelles.

Proposition 3.4.1. *Pour tous les diagrammes USD officiels énumérés ci-dessous, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Pour alléger les notations, nous allons donner la seule valeur non nulle de D .*

- (1) Dans A_n avec $n = 2m + 1$, $D(\alpha_{m+1}) = 2$;
- (2) Dans B_n , $D(\alpha_1) = 2$;
- (3) Dans C_n , $D(\alpha_n) = 2$;

- (4) Dans D_n , $D(\alpha_1) = 2$;
- (5) Dans D_n avec $n = 2m$, $D(\alpha_n) = 2$;
- (6) Dans E_7 , $D(\alpha_7) = 2$.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que pour tous les diagrammes USD officiels ci-dessus, $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$ et $Q = P^D \cap P^{D'} \subsetneq P^D$. Les hypothèses du lemme 3.4.1 sont donc vérifiées. Par conséquent $P^D \mathfrak{n}^{D'} = V(f)$ et la restriction de l'application moment $P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow V(f)$ est birationnelle.

Montrons maintenant que pour toutes les diagrammes USD officiels de l'énoncé, le radical unipotent de Q agit trivialement sur $\mathfrak{n}^{D'}$. Comme nous l'avons remarqué, pour tous les diagrammes USD officiels de la proposition, $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$. Ainsi, si le radical unipotent de P^D agit trivialement sur \mathfrak{n}^D , ce sera aussi le cas sur $\mathfrak{n}^{D'}$. Il sera suffisant de montrer que le radical unipotent de P^D agit trivialement sur \mathfrak{n}^D et que le radical unipotent de $P^{D'}$ agit trivialement sur $\mathfrak{n}^{D'}$. C'est le cas si $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D = \mathfrak{g}_2^D$ et $\mathfrak{g}_{\geq 2}^{D'} = \mathfrak{g}_2^{D'}$. Or, pour chacun des exemples de l'énoncé, la plus grande racine positive de \mathfrak{g} est dans \mathfrak{g}_2^D et dans $\mathfrak{g}_2^{D'}$. Ainsi, $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D = \mathfrak{g}_2^D$ et $\mathfrak{g}_{\geq 2}^{D'} = \mathfrak{g}_2^{D'}$.

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème de Kempf-Hesselink 1.3.2 afin de montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. La restriction de l'application moment $P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'} \rightarrow V(f)$ est birationnelle. Puisque le radical unipotent de Q agit trivialement sur $\mathfrak{n}^{D'}$, il induit un isomorphisme sur les anneaux de coordonnées $\mathbb{C}[P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'}]$ et $\mathbb{C}[V(f)]$. En particulier, nous obtenons la normalité de $V(f)$ puisque $P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'}$ est une variété régulière et $V(f)$ est affine.

La restriction de l'application moment est une résolution de singularités. Afin de montrer que $V(f)$ a des singularités rationnelles, il suffit d'obtenir l'annulation des groupes supérieurs de cohomologie $H^i(P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'}, \mathcal{O}_{P^D \times^Q \mathfrak{n}^{D'}})$ pour $i \geq 1$ ce qui fait partie de l'énoncé du théorème 1.3.2.

Nous pouvons donc conclure que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

□

3.4.3. Absence d'orbites en codimension deux

Dans la section 2.3, nous avons montré la proposition 2.3.1 qui dit que $V(f)$ est normale s'il n'y a pas de P^D -orbites dans \mathfrak{n} de codimension deux. Nous allons donner ici un corollaire de cette proposition qui est très utile dans notre cas. Ce corollaire est facile à utiliser parce que les orbites des espaces vectoriels préhomogènes ont été classifiées entre autre dans les articles [46], [59], [48] et [68].

Corollaire 3.4.1. *Soit D un diagramme USD officiel et soit $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ l'unique P^D -covariant irréductible. Considérons l'action de L^D sur \mathfrak{g}_2^D . Supposons qu'il n'y ait pas de L^D -orbites dans \mathfrak{g}_2^D en codimension deux et qu'il y ait un nombre fini d'orbites dans \mathfrak{g}_2^D . Alors $V(f)$ est une variété normale.*

DÉMONSTRATION. Notons $f|_{\mathfrak{g}_2^D}$ le P^D -covariant restreint à \mathfrak{g}_2^D . En fait, on se rappelle que f a été définie comme l'extension à $\mathfrak{g}_{\geq 2}^D$ d'un L^D -covariant irréductible sur \mathfrak{g}_2^D , qui est $f|_{\mathfrak{g}_2^D}$.

Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 2.2.3, $V(f) = V(f|_{\mathfrak{g}_2^D}) \times \mathfrak{g}_{> 2}^D$. Or si x et y sont des points normaux de variétés X et Y , alors (x, y) est un point normal dans $X \times Y$. Puisque $\mathfrak{g}_{> 2}^D$ est une variété lisse et donc normale, il suffit donc de montrer que la variété $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$ est normale.

Par hypothèse, \mathfrak{g}_2^D est composée d'un nombre fini d'orbites. Ainsi, puisque $f|_{\mathfrak{g}_2^D}$ est irréductible, il existe une L^D -orbite dense dans $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$ que nous noterons \mathcal{O}' . Les points singuliers de $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$ sont dans $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D}) \setminus \mathcal{O}'$ qui est une union d'orbites de codimension supérieure ou égale à deux dans \mathfrak{g}_2 . Or, par hypothèse, il n'y a pas d'orbites de codimension deux. Ainsi, les orbites dans le bord de $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$ sont de codimension au moins deux dans $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$. Ainsi, d'après le critère de Serre, $V(f|_{\mathfrak{g}_2^D})$ est une variété normale et on peut conclure que $V(f)$ est aussi une variété normale.

□

À partir de cette proposition, on obtient une liste considérable de diagrammes de Dynkin pondérés pour lesquels $V(f)$ est une variété normale.

Proposition 3.4.2. *Pour tous les diagrammes USD officiels suivants, le P^D -module n^D n'a pas d'orbites de codimension deux et donc la variété $V(f)$ est normale :*

- (1) *Dans B_n , les diagrammes USD officiels D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ où $3k \notin \{2n, 2n + 1\}$;*
- (2) *Dans C_n , les diagrammes USD officiels D vérifiant $D(\alpha_{2l}) = 2$ où $3l < n$;*
- (3) *Dans D_n , les diagrammes USD officiels D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ où $3k \notin \{2n - 1, 2n\}$;*
- (4) *Dans E_6 , le diagramme USD officiel D vérifiant $D(\alpha_2) = 2$;*
- (5) *Dans E_7 , les diagrammes USD officiels D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ où $k \in \{1, 2, 6, 7\}$;*
- (6) *Dans E_8 , les diagrammes USD officiels D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ où $k \in \{1, 2, 6, 8\}$;*
- (7) *Dans F_4 , le diagramme USD officiel D vérifiant $D(\alpha_1) = 2$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons traiter les cas des algèbres de Lie classiques dans des lemmes séparés. Une fois que nous aurons montré qu'il n'y a pas d'orbites en codimension deux, la normalité suit directement de la proposition 3.4.1 sous réserve que le nombre de L^D orbites dans \mathfrak{g}_2^D soit fini. Pour D un diagramme de Dynkin pondéré et L^D un sous-groupe de Levi de P^D , on notera $(L^D)'$ le sous-groupe dérivé de L^D . Dans chacun des cas, nous donnerons le nombre d'orbites de l'EVP, ce qui nous permettra d'observer qu'il y a bien un nombre fini d'orbites.

Dans le cas de E_6 avec $D(\alpha_2) = 2$, $(L^D)'$ est de type A_5 et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_3}$ comme $(L^D)'$ -modules. Dans la section 8 de [46], la décomposition orbitale de ce module nous est donnée. Il existe cinq orbites de codimension respectivement 0, 1, 5, 10 et 20. Ainsi, il n'y a pas d'orbites en codimension deux et il y a un nombre fini d'orbites.

Traisons maintenant les différents diagrammes USD officiels de E_7 de la proposition. Toutes les décompositions orbitales proviennent de [46]. Si $D(\alpha_1) = 2$, alors $(L^D)'$ est de type D_6 et il y a un isomorphisme de $(L^D)'$ -modules $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_6}$. Il y a cinq orbites de codimension respectivement 0, 1, 7, 16 et 32 dans ce module. Si $D(\alpha_2) = 2$, alors $(L^D)'$ est de type A_6 et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_3}$.

Il y a dix orbites, mais aucune de codimension deux. Si $D(\alpha_6) = 2$, $(L^D)'$ est de type $A_1 \times D_5$ et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_1 \otimes \omega_5}$. Il n'y a encore une fois aucune orbite de codimension deux. Finalement, si D vérifie $D(\alpha_7) = 2$, $(L^D)'$ est de type E_6 et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_1}$. Dans cette représentation, il existe quatre orbites de codimension 0, 1, 10 et 27.

Passons à l'algèbre de Lie E_8 . Si D vérifie $D(\alpha_1) = 2$ ou $D(\alpha_8) = 2$, l'article [46], nous donne les décompositions orbitales de \mathfrak{g}_2^D . Il y a dix orbites dans le premier cas, cinq dans le second et dans les deux cas, il n'y a pas d'orbites en codimension deux. Pour D vérifiant, $D(\alpha_2) = 2$, $(L^D)'$ est de type A_7 et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_3}$. On peut alors se référer à [59] pour obtenir la décomposition orbitale de \mathfrak{g}_2^D . Il y a 23 orbites et il n'y a pas d'orbites de codimension deux. Finalement, pour D vérifiant $D(\alpha_6) = 2$, $(L^D)'$ est de type $D_5 \times A_2$ et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_5 + \omega_1}$. L'article [48] est consacré à cette représentation. On peut vérifier qu'il y a 30 orbites et qu'il n'y a pas d'orbites de codimension deux.

Dans le cas de F_4 avec $D(\alpha_1) = 2$, $(L^D)'$ est de type C_3 et $\mathfrak{g}_2^D \simeq V_{(L^D)', \omega_3}$. Dans la section 9 de [46], on obtient la décomposition orbitale de cette représentation. Il existe cinq orbites de codimension 0, 1, 4, 7 et 14.

□

Passons maintenant aux cas classiques.

Lemme 3.4.5. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple de type B_n et soit $D = 0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ le diagramme USD officiel pour lequel l'unique deux est en position k où $3k \leq 2n + 1$. Si $3k \notin \{2n, 2n + 1\}$, alors la variété $V(f)$ est normale.*

DÉMONSTRATION. Ici, le sous-groupe dérivé de L^D est de type $B_{n-k} \times A_{k-1}$ et \mathfrak{g}_2^D est isomorphe à $V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$ comme $(L^D)'$ -module. Notons $p = 2(n-k) + 1$ et $q = k$. Remarquons que $q \leq p$. En effet $p - q = 2(n-k) + 1 - k = 2n + 1 - 3k \geq 0$ par hypothèse. De plus, $\mathfrak{g}_2^D \simeq \text{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ avec comme action $(g_1, g_2)X = g_1 X g_2^T$. La décomposition orbitale de $\text{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ est décrite dans l'exemple 9.2 de [68]. Les orbites sont de la forme $S_{\nu, \mu} = \{X \in \text{Mat}(p \times q, \mathbb{C}) \mid \text{rg}(X) = \nu \text{ et } \text{rg}(X^T X) = \mu\}$. Il y en a donc un nombre fini. De plus, la codimension de $S_{\nu, \mu}$ dans $\text{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ est $(p - \nu)(q - \nu) + \frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu - \mu + 1)$.

Remarque 3.4.3. Dans l'exemple 9.2 de [68], il y a comme hypothèse que $\frac{p}{2} \geq q$. Toutefois, les énoncés ci-dessus restent vrais avec l'hypothèse plus faible $p \geq q$.

Comme prévu, il existe une unique orbite de codimension zéro. Elle est obtenue lorsque $q = v = \mu$, c'est-à-dire, elle est formée des matrices X de rang maximal pour lesquelles $X^T X$ est aussi de rang maximal. Il existe aussi une unique orbite de codimension un. Si $p = q$, elle est obtenue lorsque $\mu = v = p - 1$. Si $p > q$, elle est obtenue si $v = q$ et $\mu = v - 1$. Ce cas n'est pas possible si $p = q$. Ainsi, les deux cas sont mutuellement exclusifs.

Nous voulons maintenant étudier les conditions sur p et q pour qu'il existe une orbite de codimension deux dans $\text{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$. Il y a deux cas possible :

- (1) $p = q, v = p - 1, \mu = p - 2$;
- (2) $p = q + 1, v = \mu = q - 1$.

Ces cas correspondent aux diagrammes USD officiels D pour lesquelles k vérifie

- (1) $3k = 2n + 1$;
- (2) $3k = 2n$.

Ainsi pour tous les diagrammes USD officiels D , nous savons que $V(f)$ est normale d'après la proposition 3.4.1.

□

Lemme 3.4.6. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type C_n et soit $D = 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 2 \ \dots \ 0 \ \leftarrow 0$ le diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position $2k$, où $3k < n$. Alors la variété $V(f)$ est normale.

DÉMONSTRATION. Dans ce cas, $L^D \simeq \text{SP}(p, \mathbb{C}) \times \text{GL}(q, \mathbb{C})$ où $p = n - k$ et $q = 2k$. Remarquons que $p \geq q$. En effet, $p - q = n - k - 2k = n - 3k \geq 0$ par hypothèse. De plus, \mathfrak{g}_2^D est isomorphe à $V = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$ comme L -module. Nous pouvons donc appliquer les résultats de la section 3 de [46]. La représentation $V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$ de L se trouve à être l'espace vectoriel des matrices de tailles $2p$ par $2k$ avec l'action $(g_1, g_2)X = g_1 X g_2^T$. Les orbites son déterminées par le rang de X et $X^T X$. Plus précisément, les orbites sont de la forme $S_{v, \mu} = \{X \in$

$\text{Mat}(2p, 2k) | \text{rg}(X) = \nu$ et $\text{rg}(X^T X) = \mu$ où μ est pair}. Il y en a donc un nombre fini. L'orbite $S_{\nu, \mu}$ est de codimension $\frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu - \mu - 1) + (2k - \nu)(2p - \nu)$ dans V .

Il y a encore une unique orbite de codimension zéro comme prévu. Elle est obtenue quand $\nu = \mu$ et $\nu = 2k$, c'est-à-dire quand X et $X^T X$ sont de rangs maximaux. Il y a aussi une unique orbite de codimension un. Nous voulons étudier quand il est possible d'avoir des orbites de codimension deux. Pour cela, on doit avoir $\frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu - \mu - 1) = 1$ et $(2k - \nu)(2p - \nu) = 1$ ou $\frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu - \mu - 1) = 0$ et $(2k - \nu)(2p - \nu) = 2$. Cela nous donne un unique cas possible $k = p$, $\nu = 2p - 1$ et $\mu = \nu - 2$ qui correspond à l'orbite dont le diagramme USD officiel D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k = p = n - 2k$, c'est-à-dire $3k = n$. Ainsi pour tous les autres diagrammes USD officiels D , nous savons que $V(f)$ est normale d'après la proposition 3.4.1. \square

Lemme 3.4.7. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type D_n et $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \dots & 2 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}$ le diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position $k < n - 1$ et $3k \notin \{2n, 2n - 1\}$. Alors, la variété $V(f)$ est normale.*

DÉMONSTRATION. Ce cas se traite exactement comme le cas de B_n . Nous savons à l'aide de l'article [68] et de la proposition 3.4.1 que la variété $V(f)$ est normale sauf potentiellement dans les cas où $3k = 2n$ ou $3k = 2n - 1$, cas pour lesquels il existe des orbites de codimension deux dans n^D .

\square

3.4.4. La variété $V(f)$ n'est pas normale

Nous avons énoncé dans la proposition 2.3.2 un critère qui permet de montrer qu'une variété $V(f)$ n'est pas normale. Ce critère se base sur l'étude de la normalité de la fermeture des orbites associées aux diagrammes de Dynkin pondérés officiels D et D' . Plus précisément, si la variété $G n^D$ est normale et la variété $G n^{D'}$ n'est pas normale, alors $V(f)$ n'est pas normale.

Proposition 3.4.3. *Les variétés affines $V(f)$ ne sont pas normales pour les diagrammes USD officiels suivants :*

- (1) Dans B_n , $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k = 2n$;
- (2) Dans D_n , $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k = 2n - 1$;
- (3) Dans E_6 , $D(\alpha_4) = 2$;
- (4) Dans F_4 , $D(\alpha_2) = 2$;
- (5) Dans G_2 , $D(\alpha_1) = 2$.

DÉMONSTRATION. Comme nous avons vu dans la proposition 2.3.2, il suffit de montrer que $N(D) = G \mathfrak{n}^D$ est normale alors que $N(D') = G \mathfrak{n}^{D'}$ ne l'est pas pour conclure. Nous utiliserons les différentes classifications de la normalité des variétés nilpotentes dans des algèbres de Lie simples. Nous devons aussi montrer que $P^D \mathfrak{n}^{D'} = V(f)$, ce qui est le cas pour tous les diagrammes USD officiels de l'énoncé, puisqu'ils vérifient les hypothèses du lemme 3.4.1.

Nous allons commencer par étudier les cas qui nous intéressent dans les algèbres de Lie de type B_n et D_n . Soit D le diagramme USD officiel vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k + \epsilon = 2n$ où $\epsilon = 0$ si \mathfrak{g} est de type B_n et $\epsilon = 1$ si \mathfrak{g} est de type D_n . La partition associée à l'orbite $\mathcal{O}(D)$ est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_k 1)$. L'orbite $\mathcal{O}(D')$ est associée à la partition $\lambda' = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-1} 22)$. Afin d'étudier la normalité de la variété nilpotente $N(D')$, nous devons connaître la ou les orbites maximales qui sont contenues dans la fermeture de $\mathcal{O}(D')$. On se rappelle que les partitions des orbites nilpotentes dans les algèbres B_n et D_n doivent contenir un nombre pair de chacune des valeurs paires. Ainsi, il y a une seule orbite inférieure maximale à celle associée à la partition λ' et c'est celle associée à la partition $\mu = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-1} 1111)$. Pour savoir si l'orbite associée à la partition λ' est normale, on se réfère à [53]. On retire toutes les entrées qui sont égales dans λ' et μ . On obtient alors les partitions (22) et (1111). Cela correspond à l'unique cas qui n'est pas normal, le cas (e) de le tableau 1 de [53]. Donc la fermeture de l'orbite associée à la partition λ' n'est pas normale.

Pour ce qui est de l'orbite associée à la partition λ , on compare λ et λ' . On retire les $k - 1$ premières entrées des deux partitions. Il nous reste (31) et (22). On peut ensuite soustraire un de chaque entrée puisque les deux partitions ont

la même longueur. Cela nous donne les partitions (2) et (11) qui est le cas (a) de le tableau 1 de [53]. Ce cas correspond à une orbite dont la fermeture est normale.

Passons maintenant à l'algèbre de type E_6 avec le diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & \end{smallmatrix}$. Nous savons que dans ce cas $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{smallmatrix}$. Or, d'après [72] la variété nilpotente associée à D est normale, alors que celle associée à D' ne l'est pas.

Dans le cas de F_4 avec le diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & \end{smallmatrix}$, nous savons que $D' = \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{smallmatrix}$. D'après [16], la variété nilpotente $N(D)$ est normale, alors que $N(D')$ ne l'est pas.

Finalement, pour l'algèbre de Lie de type G_2 , nous étudions le diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & & \end{smallmatrix}$ pour lequel $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & & \end{smallmatrix}$. D'après [51], la variété nilpotente $N(D)$ est normale alors que $N(D')$ ne l'est pas.

□

3.4.5. Autres méthodes

Il reste quelques diagrammes USD officiels pour lesquels les approches générales des dernières sous-sections n'ont pas permis de déterminer si la variété $V(f)$ est normale ou non. Cette sous-section fera l'étude spécifique de certains de ces diagrammes USD officiels.

Proposition 3.4.4. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type F_4 et $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ & & & \end{smallmatrix}$. Alors la variété $V(f)$ est normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. On sait que $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \end{smallmatrix}$. Notons $\lambda = \{0\ 0\ 1\ -1\}_\omega$ le plus grand poids de \mathfrak{g}_2^D . Soit Q le plus grand sous-groupe parabolique inclus dans P^D qui stabilise l'espace vectoriel engendré par le vecteur de plus haut poids dans \mathfrak{g}_2^D . Finalement, considérons $Z = P^D \times^Q (\mathbb{C}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_4^D)$ et μ la restriction de l'application moment de Z dans \mathfrak{n}^D (on voit $\mathbb{C}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_4^D$ comme un sous-espace de \mathfrak{n}^D). Nous allons montrer que :

- (1) $\mu(Z) = V(f)$;
- (2) μ est une application birationnelle sur son image ;

(3) $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Commençons par montrer que $\mu(Z) \subset V(f)$. Notons v_λ un élément non nul de \mathbb{C}_λ . Il suffit de montrer que $f(v_\lambda) = 0$. Or, pour tout élément t inclus dans le tore maximal de G , $f(tv_\lambda) = \lambda(t)f(v_\lambda)$ car f est un morphisme L^D -équivariant. Or $f(tv_\lambda) = f(\lambda(t)v_\lambda) = \lambda(t)^2 f(v_\lambda)$, car f est homogène de degré deux. On en conclut que $f(v_\lambda) = 0$ et donc $\mu(Z) \subset V(f)$.

Pour obtenir la deuxième inclusion, il suffit de montrer que μ est un morphisme birationnel puisque dans ce cas $\dim(\mu(Z)) = \dim(Z) = \dim P^D - \dim Q + 1 + \dim \mathfrak{g}_4^D = 14 = \dim \mathfrak{n}^D - 1 = \dim V(f)$ et $\mu(Z)$ est un sous-ensemble irréductible de $V(f)$. Or la birationalité se déduit directement de la définition de Q comme étant le plus grand sous-groupe de P^D stabilisant l'espace vectoriel engendré par v_λ . En effet, il est direct de montrer que la préimage de v_λ se limite au point $[1, (v_\lambda, 0)]$. Nous avons montré les deux premiers énoncés ci-dessus. Reste à déduire le troisième.

Il est clair que le radical unipotent de Q agit trivialement sur le module $\mathbb{C}_\lambda + \mathfrak{g}_4^D$ puisque \mathbb{C}_λ est de dimension un et $\mathfrak{g}_{>4}^D = 0$. On sait alors d'après le théorème 1.3.2 que le morphisme μ induit un isomorphisme entre $\mathbb{C}[\mu(Z)]$ et $\mathbb{C}[Z]$. Or, Z est une variété régulière. Ainsi l'anneau de coordonnées $\mathbb{C}[\mu(Z)]$ est normal et donc l'anneau $\mathbb{C}[V(f)]$ l'est aussi. Ce qui montre que $V(f)$ est une variété normale. De plus, le théorème 1.3.2 nous apprend aussi que les groupes de cohomologie supérieurs $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ s'annulent pour $i \geq 1$. Le morphisme μ étant birationnel, c'est une résolution de singularité et l'annulation des groupes de cohomologie permet de conclure que $V(f)$ est à singularités rationnelles. \square

Proposition 3.4.5. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type B_n, C_n ou D_n et D un diagramme USD officiel limite. Alors, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Nous allons faire la preuve dans le cas où l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est de type D_n , les autres cas se traitant de façon similaire. Nous allons nous placer dans le cas où le produit bilinéaire symétrique non-dégénéré sur \mathbb{C}^{2n}

utilisé pour définir \mathfrak{g} est de la forme $(u, v) \mapsto u^T J v$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et où I_n est la matrice identité n par n .

Si D est un diagramme USD officiel limite alors l'unique k pour lequel $D(\alpha_k) \neq 0$, vérifie $3k = 2n$. Les matrices de la sous-algèbre de Lie \mathfrak{n}^D sont de la forme

$$M(A, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & A & C & B \\ 0 & 0 & -B^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^T & 0 \end{pmatrix}$$

avec A et B dans $\text{Mat}(k \times (2n - k), \mathbb{C})$ et $C \in \text{Asym}(k \times k, \mathbb{C})$. L'algèbre \mathfrak{g}_2^D correspond à la sous-algèbre formée par les matrices $M(A, B, 0)$. Remarquons qu'on peut identifier \mathfrak{g}_2^D avec $\text{Mat}(2k, \mathbb{C})$ de la façon suivante : $M(A, B, 0) \mapsto (A|B)$ où $(A|B)$ consiste en la matrice obtenue en juxtaposant les matrices A et B . Puisque $3k = 2n$, on vérifie que $2n - k = 3k - k = 2k$ comme il se doit. Le covariant f se trouve à être simplement le déterminant de la matrice $(A|B)$. Or, nous savons que la variété de $\text{Mat}(2k \times 2k, \mathbb{C})$ définie par l'annulation du déterminant est une variété normale à singularités rationnelles, voir par exemple [54]. \square

Finalement, il reste des diagrammes USD officiels dans E_7 et dans E_8 pour lesquels nous n'avons pas encore pu déterminer si la variété $V(f)$ est normale ou non. Ce sont les diagrammes USD $\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ dans E_7 et $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ dans E_8 . Nous en discuterons dans la section suivante en montrant du même coup que la normalisation de $V(f)$ est toujours à singularités rationnelles.

3.5. SINGULARITÉS RATIONNELLES

Le but de cette section est de montrer que pour D un diagramme USD officiel et f l'unique P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[n^D]$, la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. En particulier, si $V(f)$ est une variété normale, alors elle est à singularités rationnelles.

Malheureusement, nous n'avons pas de preuve générale pour ce résultat. Nous l'avons obtenu en étudiant tous les diagrammes USD officiels pour chacune des algèbres de Lie simples. Il serait évidemment intéressant de trouver une preuve générale de ce fait, comme Hinich et Panyushev l'ont fait pour les variétés nilpotentes dans [36] et [61] respectivement.

Pour montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles, nous allons utiliser une résolution de singularités $\mu : X \rightarrow V(f)$ avec X une variété lisse et nous montrerons que $R^i \mu_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $i \geq 1$. Nous avons trouvé dans la section 3.4 des résolutions de singularités pour $V(f)$ de la forme $\mathbb{P}^D \times^Q \mathbb{n}^{\bar{D}} \rightarrow V(f)$. Ce sont ces résolutions que nous allons utiliser ici.

Deux approches seront utilisées. Dans un premier temps, nous allons travailler avec le faisceau canonique de X et la proposition 2.4.1. Puis, nous travaillerons avec les complexes de Koszul selon la méthode décrite dans la sous-section 2.4.2.

3.5.1. Faisceau canonique

Notre première approche est de calculer les poids λ tels que $\omega_X \simeq \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_\lambda)^*$ où $X = \mathbb{P}^D \times^Q \mathbb{n}^{\bar{D}}$ et de voir si $\lambda \leq_{\mathbb{P}^D} 0$ comme nous en avons discuté dans la sous-section 2.4.1. Puisque $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}_X(\mathbb{C}_0)^*$, on pourra alors conclure que $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$. Malheureusement, cela ne nous permettra que de couvrir quelques cas.

Il est assez simple de calculer ce poids λ . En effet, puisque $\mathbb{C}_\lambda^* \simeq \bigwedge^{\text{top}} (\mathfrak{p}^D / \mathfrak{q})^* \otimes \bigwedge^{\text{top}} (\mathfrak{n}^{\bar{D}})^*$, il suffit de faire la somme μ_1 de tous les poids de $\mathfrak{p}^D / \mathfrak{q}$, puis la somme μ_2 de tous les poids de $\mathfrak{n}^{\bar{D}}$ et $\lambda = \mu_1 + \mu_2$.

Les calculs ont été effectués dans les cas classiques B_n , C_n et D_n , mais le faisceau canonique est alors plus grand ou égal par rapport à \mathbb{P}^D au faisceau des fonctions régulières, sauf dans des cas où nous savons déjà que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Étant donné que ces calculs ne sont pas particulièrement intéressants et ne permettent pas de conclure quoique ce soit de nouveau en termes de régularité de $V(f)$, nous allons les omettre ici.

Les calculs pour les algèbres de Lie exceptionnelles ont été faits avec le logiciel Sage. Les poids obtenus se trouvent dans le tableau 3.4. Lorsque $D' = \tilde{D}$ nous avons seulement donné D' dans le tableau afin d'alléger le tout.

Type	D	D'	\tilde{D}	Poids du faisceau canonique
E_6	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0\}_\omega$
E_7	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -7 \ 16\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{15 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\{0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 12 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{6 \ 9 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ -1 \ 8 \ 3 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ & 1 & & & & \end{smallmatrix}$	$\{0 \ 1 \ 6 \ 0 \ -1 \ 0\}_\omega$
E_8	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8 \ 27\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{21 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -6 \ 17 \ 14\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\{0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 13 \ 0 \ 3\}_\omega$
	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$	-	$\{0 \ 0 \ 0 \ 9 \ 2 \ 0 \ 0\}_\omega$
F_4	$2 \ 0 \Rightarrow 0 \ 0$	$0 \ 1 \Rightarrow 0 \ 0$	-	$\{6 \ -1 \Rightarrow 0 \ 0\}_\omega$
	$0 \ 0 \Rightarrow 0 \ 2$	$0 \ 1 \Rightarrow 0 \ 0$	$0 \ 0 \Rightarrow 1/2 \ 1/2$	$\{0 \ 0 \Rightarrow -5 \ 15\}_\omega$
	$0 \ 2 \Rightarrow 0 \ 0$	$1 \ 0 \Rightarrow 1 \ 0$	-	$\{0 \ 3 \Rightarrow 2 \ 0\}_\omega$
G_2	$2 \Rightarrow 0$	$0 \Rightarrow 1$	-	$\{1 \Rightarrow 2\}_\omega$

TAB. 3.4. Les poids λ vérifiant $\omega_\lambda \simeq \mathcal{L}_\lambda(\mathbb{C}_\lambda)^*$

Nous avons réuni dans le tableau 3.5 les diagrammes USD officiels pour lesquels l'étude du faisceau canonique nous permet de déduire que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Type	D
E_6	00000 2
E_7	000002 200000 000000 000020 0 0 2
E_8	0000002 2000000 0000000 0 0 2
F_4	$20 \Rightarrow 00$ $00 \Rightarrow 02$

TAB. 3.5. Diagrammes USD officiels pour lesquels le faisceau canonique nous permet de conclure que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles

3.5.2. Complexe de Koszul

Nous avons décrit dans la sous-section 2.4.2 une méthode à l'aide des complexes de Koszul afin de montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Il existe une résolution de singularités $P^D \times^Q n^{\tilde{D}} \rightarrow V(f)$. D'après la proposition 2.4.2, il nous suffit de calculer $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(n^D/n^{\tilde{D}})^*)) \otimes \mathbb{C}[n^D][-i]$ pour $0 < i \leq (\dim n^D - \dim n^{\tilde{D}})$ et de voir que ces groupes de cohomologie sont nuls pour $j > i$.

Étant donné que le facteur $\mathbb{C}[n^D]$ n'intervient pas dans l'annulation des groupes de cohomologie nous allons l'omettre dans les calculs. Nous nous intéresserons ainsi à $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(n^D/n^{\tilde{D}})^*))$. Nous utiliserons le théorème de Borel-Weil-Bott, théorème 1.3.1, afin d'effectuer ces calculs.

Notons $V = n^D/n^{\tilde{D}}$. Les prochaines sous-sections seront dédiées au calcul de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(V)^*))$. Le P^D -module $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(V)^*))$ se décompose comme somme de P^D -modules irréductibles. Nous noterons $h^{(i,j)}$ la classe de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(V)^*))$ dans $R(P^D)$, l'anneau des représentations complètement réductibles de P^D . La méthode générale sera de trouver la décomposition de Levi de $Q = P^D \cap P^{\tilde{D}}$. Étant donné une telle décomposition $Q = LU$, on étudiera la structure de L -module de V . Ensuite, à l'aide du logiciel Lie, on peut comprendre la structure de L -module de $\wedge^i V$ et utiliser le théorème de Borel-Weil-Bott 1.3.1 afin de calculer $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(\wedge^i(V)^*))$. Nous présenterons le résultat de ces calculs sous forme de tableaux

Cela nous permettra de montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles avec la proposition 2.4.2. Finalement, nous calculerons $h^{(i,j)}$ afin d'obtenir une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ dans le cas où la variété $V(f)$ n'est pas normale.

3.5.3. Singularités rationnelles dans les algèbres de Lie classiques

Dans cette sous-section, nous allons nous contenter de traiter le cas de diagrammes USD officiels petits, ceux-ci ne se comportant pas comme les cas généraux. Dans le cas de ces derniers, nous avons regroupés la discussion dans l'annexe 3.6.

Commençons avec les cas petits de D_n . Pour $n = 4$, on doit étudier le cas de $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ & & 0 \end{smallmatrix}$. On sait alors que $D' = \begin{smallmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{smallmatrix}$. Le B-module $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'}$ est de dimension quatre avec des vecteurs de poids $\lambda_1 = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{smallmatrix}_\alpha = \begin{smallmatrix} -1 & 2 & -1 \\ & & -1 \end{smallmatrix}_\omega$, $\lambda_2 = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{smallmatrix}_\alpha = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & & -1 \end{smallmatrix}_\omega$, $\lambda_3 = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & & 0 \end{smallmatrix}_\alpha = \begin{smallmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & & -1 \end{smallmatrix}_\omega$ et $\lambda_4 = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}_\alpha = \begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 \\ & & 1 \end{smallmatrix}_\omega$. On étudie les poids apparaissant dans $\wedge^m V$ qui sont simplement les sommes de m poids distincts de V . Des poids sont ρ -réguliers seulement dans les cas où $m \in \{0, 2, 4\}$. Nous allons donner dans le tableau 3.6, les groupes de cohomologie qui survivent.

					4
$e^{2\omega_2}$					3
		$3e^{\omega_2}$			2
		$3e^{\omega_2}$			1
				1	0
4	3	2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.6. Dans D_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\widetilde{D}})^*))$.

Ainsi, $V(f)$ est à singularités rationnelles (nous savons déjà que c'est une variété normale).

Passons maintenant au cas de $n = 5$ avec $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & & 0 \end{smallmatrix}$. On sait alors que $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}$. L'espace vectoriel $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'}$ est de dimension cinq. Nous allons comme dans le cas précédent étudier la décomposition de $\wedge^m V$ comme B -module, c'est-à-dire calculer les sommes de m poids distincts de V . Des poids sont ρ -réguliers seulement dans les cas où $m \in \{0, 2, 3\}$. Le tableau 3.7, nous donne les groupes de cohomologie qui survivent.

					3
	$e^{\omega_4 + \omega_5}$	e^{ω_2}			2
					1
				1	0
4	3	2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.7. Dans D_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^*))$.

Étant donné qu'au plus une entrée par colonne est non nulle, le tableau 3.7 représente aussi les plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^*))$. On en déduit que $V(f)$ n'est pas normale, mais que sa normalisation est à singularités rationnelles. On obtient du même coup une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[n^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D][-3] \otimes V_{P^D, \omega_4 + \omega_5}^* \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \oplus \mathbb{C}[n^D][-2] \otimes V_{P^D, \omega_2}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

Passons maintenant à l'étude des diagrammes USD officiels petits dans B_n . Il y a deux diagrammes USD à étudier : $D = 2 \Rightarrow 0$ dans B_2 et $D = 0 \ 2 \Rightarrow 0$ dans B_3 . Nous n'avons cependant pas à traiter le premier des deux diagrammes USD puisque dans ce cas, le radical unipotent de P^D agit trivialement sur \mathfrak{n}^D et nous avons déjà discuté de cette situation et montré que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Passons donc à $D = 0 \ 2 \Rightarrow 0$ dans B_3 . Dans ce cas, on sait que $D' = 1 \ 0 \Rightarrow 1$. Le B -module V est de dimension trois et il est engendré par des vecteurs de plus haut poids $\lambda_1 = \{0 \ 1 \Rightarrow 0\}_\alpha = \{-1 \ 2 \Rightarrow -2\}_\omega$, $\lambda_2 = \{1 \ 1 \Rightarrow 0\}_\alpha = \{1 \ 1 \Rightarrow -2\}_\omega$ et

$\lambda_3 = \{0\ 1 \Rightarrow 1\}_\alpha = \{-1\ 1 \Rightarrow 0\}_\omega$. Le tableau 3.8 expose les différents groupes de cohomologie qui sont non nuls.

e^{ω_2}			2
$e^{\omega_2} + e^{2\omega_3}$	e^{ω_1}		1
		1	0
2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.8. Dans B_3 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

Nous voyons que $V(f)$ n'est pas normale, mais que sa normalisation est à singularités rationnelles.

Reste maintenant les cas petits dans C_n : dans le cas de C_3 , nous devons étudier $D = 0\ 2 \Leftarrow 0$, alors que dans le cas de C_4 , nous devons étudier $D = 0\ 2\ 0 \Leftarrow 0$. Nous savons que $D' = 0\ 0 \Leftarrow 2$ dans le premier cas et $D' = 0\ 0\ 0 \Leftarrow 2$ dans le second. Dans ces deux cas, $\mathfrak{n}^{D'} \not\subseteq \mathfrak{n}^D$. Cependant, nous avons déjà calculé \tilde{D} dans le lemme 3.4.2.

Commençons avec l'étude de $D = 0\ 2 \Leftarrow 0$ pour lequel nous pouvons choisir $\tilde{D} = 0\ 1 \Leftarrow 1$. Le $\mathbb{P}^{\tilde{D}}$ -module $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ est de dimension deux. Il est engendré par deux vecteurs de poids $\lambda_1 = \{0\ 1 \Leftarrow 0\}_\alpha = \{-1\ 2 \Leftarrow -1\}_\omega$ et $\lambda_2 = \{1\ 1 \Leftarrow 0\}_\alpha = \{1\ 1 \Leftarrow -1\}_\omega$. Ainsi, $\wedge^2 V \simeq \mathbb{C}_{3\omega_2 - 2\omega_3}$. La description des groupes de cohomologie qui survivent se trouve dans le tableau 3.9. On voit alors clairement que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

e^{ω_2}			1
		1	0
2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.9. Dans C_3 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

Passons maintenant à $D = 0\ 2\ 0 \Leftarrow 0$ dans C_4 . Comme nous l'avons vu dans le lemme 3.4.2, il est possible de choisir $\tilde{D} = 0\ 1\ 0 \Leftarrow 1$. Le \mathbb{Q} -module $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ est de dimension quatre. Il est engendré par des vecteurs de

pois $\lambda_1 = \{0\ 1\ 0 \leftarrow 0\}_\alpha = \{-1\ 2\ -1 \leftarrow 0\}_\omega$, $\lambda_2 = \{1\ 1\ 0 \leftarrow 0\}_\alpha = \{1\ 1\ -1 \leftarrow 0\}_\omega$, $\lambda_3 = \{0\ 1\ 1 \leftarrow 0\}_\alpha = \{-1\ 1\ 1 \leftarrow -1\}_\omega$ et $\lambda_4 = \{1\ 1\ 1 \leftarrow 0\}_\alpha = \{1\ 0\ 1 \leftarrow -1\}_\omega$. On prend une filtration de $\wedge^i V$ en termes de B-modules. La description des groupes de cohomologie qui survivent se trouve dans le tableau 3.10. On voit alors que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

e^{ω_2}			1
		1	0
2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.10. Dans C_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D/n^{\bar{D}})^*))$.

3.5.4. Singularités rationnelles dans E_6

On sait déjà que dans le cas où $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & & \end{smallmatrix}$, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Il reste à étudier le diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & \end{smallmatrix}$. Dans ce cas, $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{smallmatrix}$. Le sous-groupe parabolique Q a une décomposition de Levi $Q = LU$ avec L' de type $A_1 \times A_1$. La dimension du Q -module $V = n^D/n^{D'}$ est six. On veut obtenir la description de V comme L -module.

Parmi les espaces propres de V , deux ont des poids qui sont aussi des caractères de L : $\mu = \{0\ 0\ 1\ 0\ 0\}_\alpha$ et $\nu = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\}_\alpha$. Ainsi, C_μ et C_ν sont des L -modules. De plus, il y a deux espaces propres qui ont des poids maximaux : $\lambda_1 = \{1\ 1\ 1\ 0\ 0\}_\alpha$ et $\lambda_2 = \{0\ 0\ 1\ 1\ 1\}_\alpha$. Ceux-ci engendrent des espaces vectoriels de dimension deux. Ceci nous permet de conclure qu'il existe un isomorphisme de L -modules $V \simeq V_{L,\lambda_1} \oplus V_{L,\lambda_2} \oplus C_\mu \oplus C_\nu$.

On voit ici que $V(f)$ n'est pas normale comme nous l'avons déjà montré et que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Nous voulons maintenant calculer les $h^{(i,j)}$ afin d'obtenir une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$.

Supposons que $h^{(3,2)}$ soit non nul. Puisque $E_\infty^{(3,2)} = 0$, $h^{(3,2)}$ doit disparaître dans $E_n^{(3,2)}$ pour un certain n . Cependant, il n'est jamais atteint de sorte que la seule possibilité est que l'application de $h^{(3,2)}$ dans $\mathbb{C}[n^D]$ soit injective.

$e^{2\omega_2}$								5
								4
			$3e^{\omega_2}$					3
			$2e^{\omega_2}$					2
								1
						1		0
6	5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$	

TAB. 3.11. Dans E_6 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

La dimension du \mathbb{P}^D -module irréductible $V_{\mathbb{P}^D, \omega_2}$ étant deux, le $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -module $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \otimes V_{\mathbb{P}^D, \omega_2}$ est de rang supérieur à un. Il ne peut donc pas s'injecter dans un $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -module de rang un. D'où $h^{(3,2)} = 0$ et $h^{(3,3)} = e^{\omega_2}$ afin de garder la même caractéristique d'Euler.

Cela nous donne la résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-6] \otimes V_{\mathbb{P}^D, 2\omega_2}^* \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-3] \otimes V_{\mathbb{P}^D, \omega_2}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

$e^{2\omega_2}$								5
								4
			e^{ω_2}					3
								2
								1
						1		0
6	5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$	

TAB. 3.12. Dans E_6 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

3.5.5. Singularités rationnelles dans E_7

Nous avons déjà montré que $V(f)$ est normale à singularités rationnelles dans les cas ${}^2 0 0 0 0 0$, ${}^0 0 0 0 0 2$, ${}^0 0 0 0 0 0$ et ${}^0 0 0 0 2 0$.

Dans le cas du diagramme USD officiel $D = {}^0 2 0 0 0 0$, nous avons montré que $D' = {}^1 0 1 0 0 0$ permet de construire une résolution de singularité $P^D \times^Q n^{D'}$. Le sous-groupe parabolique Q se décompose sous la forme $Q = LU$ avec L' de type $A_3 \times A_1$. La dimension du L -module $V = n^D / n^{D'}$ est 10. On cherche maintenant la décomposition de V comme L -module.

Le plus haut poids de V est $\lambda_1 = \{ {}^0 1 1 1 1 1 \}_\alpha$ qui induit une représentation de dimension 8 de L . Le L -module contient aussi deux espaces propres dont les poids sont des caractères de L : $\mu = \{ {}^1 1 0 0 0 0 \}_\alpha$ et $\nu = \{ {}^0 1 0 0 0 0 \}_\alpha$. Ainsi, en termes de L -modules, V se décompose sous la forme $V \simeq V_{L,\lambda_1} \oplus C_\mu \oplus C_\nu$. On fait une filtration de V en termes de Q -modules. Les groupes de cohomologie $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{D'})^*))$ qui survivent sont présentés dans le tableau 3.13.

$3e^{2\omega_1}$							5
$2e^{2\omega_1}$							4
		e^{ω_1}					3
							2
							1
					1		0
6	5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.13. Dans E_7 , avec $D(\alpha_3) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{D'})^*))$.

Puisque $E_\infty^{(6,4)} = 0$, on peut déduire que $h^{(6,4)} = 0$. Ainsi, $h^{(6,5)} = e^{2\omega_1}$. Cela nous donne la résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[n^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D][-6] \otimes V_{PD, 2\omega_1}^* \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \oplus \mathbb{C}[n^D][-3] \otimes V_{PD, \omega_1}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

Dans le cas du diagramme USD officiel $D = {}^0 0 0 2 0 0$, il est possible de choisir $\tilde{D} = D' = {}^0 0 1 0 1 0$ et le parabolique Q se décompose sous la forme $Q = LU$ avec L' de type $A_2 \times A_1 \times A_1$. La dimension du L -module $V = n^D / n^{D'}$

$e^{2\omega_1}$							5
							4
		e^{ω_1}					3
							2
							1
					1		0
6	5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.14. Dans E_7 , avec $D(\alpha_3) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

est 9. Il y a deux espaces propres de poids maximaux dans V . Leur poids sont : $\lambda_1 = \{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\}_\alpha$ et $\lambda_2 = \{0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\}_\alpha$ qui induisent des représentations de dimension 6 et 2 respectivement. Le L -module V contient aussi un espace propre poids $\mu = \{0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\}_\alpha$. Ce poids est un caractère de L . Ainsi, en termes de L -modules, V se décompose sous la forme $V \simeq V_{L,\lambda_1} \oplus V_{L,\lambda_2} \oplus \mathbb{C}_\mu$. Les groupes de cohomologie $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$ qui survivent sont présentés dans le tableau 3.15.

$2e^{\omega_6}$							5
$2e^{\omega_6} + 2e^{2\omega_7}$							4
$e^{2\omega_7}$		e^{ω_1}					3
							2
							1
					1		0
5	4	3	2	1	0		$i \setminus j$

TAB. 3.15. Dans E_7 , avec $D(\alpha_5) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

Dans un premier temps, puisque $E_\infty^{(5,3)} = 0$, on déduit directement que $h^{(5,3)} = 0$. Il est plausible de penser que $h^{(5,4)} = e^{2\omega_7}$ et $h^{(5,5)} = 0$, mais nous n'avons pas pu montrer ce résultat. De sorte que nous savons qu'il existe une

résolution P^D -équivariante de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ avec des $\mathbb{C}[n^D]$ -modules libres,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D](-5) \otimes V_{p^D, 2\omega_7}^* \oplus \mathbb{C}[n^D](-5) \otimes V_{p^D, \omega_6}^* \oplus \mathbb{C}[n^D](-5) \otimes V_{p^D, \omega_6}^* \rightarrow \\ \mathbb{C}[n^D] \oplus \mathbb{C}[n^D](-3) \otimes V_{p^D, \omega_1}^* \oplus \mathbb{C}[n^D](-5) \otimes V_{p^D, \omega_6}^* \oplus \mathbb{C}[n^D](-5) \otimes V_{p^D, \omega_6}^* \rightarrow \\ \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

mais cette résolution n'est probablement pas minimale.

Il nous reste seulement à étudier le cas du diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \end{smallmatrix}$. Nous pouvons dans ce cas, utiliser le diagramme de Dynkin pondéré $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ & & 1/3 & & & \end{smallmatrix}$. Le L -module $V = n^D / n^{\tilde{D}}$ est de dimension dix. On considère la décomposition de V comme B -module, c'est-à-dire la décomposition de V en termes de T -modules de dimension un. On obtient le tableau 3.16.

	$2e^{\omega_1}$						4
	$3e^{\omega_1} + e^{\omega_1+2\omega_2-\omega_4}$	$e^{\omega_2-\omega_4+\omega_5}$					3
	e^{ω_1}						2
							1
					1		0
5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$	

TAB. 3.16. Dans E_7 , avec $D(\alpha_4) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D/n^{\tilde{D}})^*))$.

On conclut que $V(f)$ n'est pas normale, mais que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Il est certain que $h^{(4,2)} = 0$. De plus, la représentation adjointe de \mathfrak{g} a comme plus haut poids ω_1 et elle est de multiplicité un dans $\mathbb{C}[G \times^{P^D} n^D]_1$. Ainsi, V_{p^D, ω_1} peut seulement apparaître avec multiplicité un dans $\mathbb{C}[n^D]_1$. Ceci nous assure que $h^{(4,3)} = e^{\omega_1+2\omega_2-\omega_4}$ et $h^{(4,4)} = 0$. Nous obtenons une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[n^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D](-4) \otimes V_{p^D, \omega_1+2\omega_2-\omega_4}^* \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \oplus \mathbb{C}[n^D](-3) \otimes V_{p^D, \omega_2-\omega_4+\omega_5}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

3.5.6. Singularités rationnelles dans E_8

Nous n'avons pas à traiter le cas des trois diagrammes USD officiels $D = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$, $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$ et $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$ puisque nous avons montré dans la sous-section 3.5.1 que pour ces cas, la variété $V(f)$ est normale et à singularité rationnelles.

Dans le cas du diagramme USD officiel $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$, on peut prendre $\tilde{D} = D' = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \end{smallmatrix}$. Le parabolique Q se décompose sous la forme $Q = LU$ avec L' de type D_5 . La dimension du L -module $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'}$ est 18 et le plus haut poids de V est $\lambda_1 = \{1^2 2^3 2^1 1^0\}_\alpha$. Le L -module V contient aussi deux espaces propres dont les poids $\mu = \{0^0 0^0 0^0 1^1\}_\alpha$ et $\nu = \{0^0 0^0 0^0 1^0\}_\alpha$ sont des caractères de L . Ainsi, en termes de L -modules, V se décompose sous la forme $V \simeq V_{L,\lambda_1} \oplus \mathbb{C}_\mu \oplus \mathbb{C}_\nu$. Dans le tableau 3.17, on retrouve les groupes de cohomologie $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$ qui ne s'annulent pas.

$e^{2\omega_8}$								5
								4
			e^{ω_8}					3
								2
								1
						1		0
6	5	4	3	2	1	0	$i \setminus j$	

TAB. 3.17. Dans E_8 , avec $D(\alpha_7) = 2$, plus hauts poids de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}})^*))$.

Pour un i fixé, puisqu'il y a au plus un j pour lequel $h^{(i,j)}$ est non nul, on sait que le tableau 3.17 est aussi celui de $H^j(\mathbb{P}^D/Q, \wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^*)$. Cela nous donne une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V(f)}]$:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-6] \otimes V_{\mathfrak{p}^D, 2\omega_8}^* \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-3] \otimes V_{\mathfrak{p}^D, \omega_8}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V(f)}] \rightarrow 0.$$

Cela permet de montrer que la variété $V(f)$ n'est pas normale, mais que sa normalisation est à singularités rationnelles.

$E_\infty^{(5,4)} = 0$. Pour toute page k , il n'y a pas de différentielles ayant une image non nulle dans $E_k^{(5,4)}$. Ainsi, si $h^{(5,4)}$ est non nul, il faut qu'il y ait injection de $\mathbb{C}[n^D] \otimes V_{p^D, \omega_8}^*$ dans $\mathbb{C}[n^D]$. Mais cela est impossible en comparant le rang de ces $\mathbb{C}[n^D]$ -modules. Ainsi, $h^{(5,4)} = 0$ et $h^{(5,5)} = e^{\omega_8}$. Cela nous donne une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[n^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \otimes V_{p^D, 2\omega_8}^*[-10] \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \oplus \mathbb{C}[n^D] \otimes V_{p^D, \omega_8}^*[-5] \oplus \mathbb{C}[n^D] \otimes V_{p^D, \omega_1}^*[-8] \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

3.5.7. Singularités rationnelles dans F_4

Il y a seulement un diagramme USD officiel à étudier ici puisque nous avons déjà montré que dans les cas où $D = 20 \Rightarrow 00$ et $D = 00 \Rightarrow 02$, les variétés $V(f)$ sont normales à singularités rationnelles.

Pour $D = 02 \Rightarrow 00$, on peut choisir $\tilde{D} = D' = 10 \Rightarrow 10$. Le sous-groupe Q a une décomposition de Levi $Q = LU$ où L' est de type A_1 . Le L' -module $V = n^D / n^{D'}$ est de dimension quatre. En termes de L' -modules, $V \simeq V_{A_1, \omega_1} \oplus \mathbb{C}_\mu \oplus \mathbb{C}_\nu$ où $\mu = \{11 \Rightarrow 00\}_\alpha$, $\nu = \{01 \Rightarrow 00\}_\alpha$ et V_{A_1, ω_1} provient du vecteur de plus haut poids présent dans V et qui a comme poids $\lambda_1 = \{01 \Rightarrow 11\}_\alpha$. Les groupes de cohomologie $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{D'})^*))$ qui survivent se retrouvent dans le tableau 3.20.

$e^{2\omega_4}$	e^{ω_1}				3
		e^{ω_4}			2
					1
				1	0
4	3	2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.20. Dans F_4 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(n^D / n^{D'})^*))$.

Pour i fixé, il y a au plus un unique j pour lequel $h^{(i,j)}$ est non nul. On en conclut que le tableau 3.20 est aussi celui de $H^j(P^D/Q, \wedge^i(n^D / n^{D'})^*)$. Cela nous donne une résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[n^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-4] \otimes V_{2\omega_4}^* \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-3] \otimes V_{\omega_1}^* \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-2] \otimes V_{\omega_4}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

3.5.8. Singularités rationnelles dans G_2

Le seul diagramme USD officiel à étudier ici est $D = 2 \Rightarrow 0$ avec $D' = 0 \Rightarrow 1$. Le sous-groupe parabolique $Q = P^D \cap P^{D'}$ a une décomposition de Levi $Q = LU$ avec L' trivial. Le Q -module $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'}$ est de dimension deux et est engendré par deux vecteur ayant des Q -poids : $\mu = \{1 \Rightarrow 1\}_\alpha$ et $\nu = \{1 \Rightarrow 0\}_\alpha$. Les groupes de cohomologie qui survivent dans $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^{\sim}))$ se trouvent dans le tableau 3.21.

$e^{2\omega_2}$	e^{ω_2}		1
		1	0
2	1	0	$i \setminus j$

TAB. 3.21. Dans G_2 , avec $D(\alpha_2) = 2$, plus hauts poids de $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^{\sim}))$.

On a une seconde preuve que $V(f)$ n'est pas normale. Mais on conclut aussi que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Puisqu'il n'y a jamais plus d'un $h^{(i,j)}$ non nul pour un i donné et que les caractéristiques d'Euler de $(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^{\sim})^*$ et $\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^*$ sont les mêmes, on conclut que le tableau 3.21 est aussi le tableau de $H^j(P^D/Q, \wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^*)$. Ceci nous donne la résolution minimale de $\mathbb{C}[\widetilde{V}(f)]$ comme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ -module gradué :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-2] \otimes V_{2\omega_2}^* \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D] \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D][-1] \otimes V_{\omega_2}^* \rightarrow \mathbb{C}[\widetilde{V}(f)] \rightarrow 0.$$

Remarque 3.5.1. Dans tous les cas où $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$ et en travaillant avec une B -filtration de $\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})$, il n'y aucun groupe de cohomologie $H^j(P^D/Q, \mathcal{L}(\wedge^i(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{D'})^{\sim}))$ qui survit pour $j < i$. Cela nous donne espoir qu'il serait possible de montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles à l'aide d'une preuve combinatoire sous l'hypothèse $\mathfrak{n}^{D'} \subset \mathfrak{n}^D$.

3.6. RÉSUMÉ ET THÉORÈME

Nous allons résumer l'information contenue dans ce chapitre dans un théorème qui découle directement du théorème 1.6.1 du chapitre 1.

Théorème 3.6.1. *Soit D un diagramme USD officiel. Alors il existe un \mathbb{P}^D -covariant $f \in \mathbb{C}[n^D]$ et la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Notons k l'index tel que $D(\alpha_k) = 2$ et m le degré de f . Si le poids de f est $2\omega_k$, alors il existe un isomorphisme*

$$H^j(G \times^{\mathbb{P}^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} n^D}(\mathbb{C}_{-\omega_k})^*) \simeq H^j(G \times^{\mathbb{P}^D} n^D, \mathcal{L}_{G \times^{\mathbb{P}^D} n^D}(\mathbb{C}_{\omega_k})^*)[-m].$$

La liste des diagrammes USD officiels pour lesquels l'isomorphisme est vérifié est donnée dans le tableau 3.22.

Type de \mathfrak{g}	D	Degré de f
A_n	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0$ le 2 en position $m + 1$ $n = 2m + 1$	$m + 1$
B_n	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ le 2 en position k $3k \leq 2n$	$2k$
C_n	$0 \dots 0 \Leftarrow 2$	n
D_n	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ le 2 en position k $3k \leq 2n - 1$	$2k$
	$0 \dots 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}$ n pair	$\frac{n}{2}$
E_6	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 2$	4
	$0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	4
E_7	$2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	4
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2$ $\quad \quad \quad 0$	3
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 2$	7
	$0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	12
	$0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	15
E_8	$2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	8
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2$ $\quad \quad \quad 0$	4
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	12
	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 2$	16
	$0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0$ $\quad \quad \quad 0$	40
F_4	$2 \ 0 \Rightarrow 0 \ 0$	4
	$0 \ 2 \Rightarrow 0 \ 0$	23
G_2	$2 \Rightarrow 0$	4

TAB. 3.22. Diagrammes USD officiels D pour lesquels $H^j(G \times^{PD} \mathfrak{n}^D, \mathcal{L}_{G \times^{PD} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_{-\omega_k})^*) \simeq H^j(G \times^{PD} \mathfrak{n}^D, \mathcal{L}_{G \times^{PD} \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_{\omega_k})^*)[-m]$.

ANNEXE : CALCULS DANS LE CAS CLASSIQUE

Dans cette annexe, nous voulons montrer que pour D un diagramme USD officiel d'une algèbre de Lie de type classique, la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Cela se fera en suivant l'approche de la sous-section 3.5.2. Nous commencerons par traiter le cas de D_n , puis celui de B_n qui sera très similaire. Nous terminerons avec le cas de C_n . Tout au long de cette annexe, pour V un Q -module, nous noterons $H^i(P^D/Q, V) := H^i(P^D/Q, \mathcal{L}_{P^D/Q}(V))$.

3.7. LE CAS DE D_n

Le but de cette première section est de montrer que si G est de type D_n et D est un diagramme USD officiel vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ et $D(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \neq k$ avec $2 \leq k < \frac{2n}{3}$, alors la normalisation de la fermeture de l'orbite associée à D est à singularités rationnelles. On suppose ici que $n \geq 5$ et dans le cas où $n = 5, k = 2$. Il peut être intéressant pour un lecteur ayant moins travaillé sur le sujet d'aller directement à l'exemple 3.7.1 avant d'étudier le cas général présenté ci-dessous.

Notons D' le diagramme de Dynkin pondéré pour lequel les seules valeurs non nulles sont $D(\alpha_{k-1}) = D(\alpha_{k+1}) = 1$. Notons Q l'intersection des sous-groupes paraboliques P^D et $P^{D'}$. Le groupe parabolique Q a une décomposition de Levi $Q = LU$ avec L un sous-groupe réductif de G . Notons $L' = [L, L]$ le groupe dérivé de L qui est semi-simple. Ce groupe est de type $A_{k-2} \times D_{n-k-1}$.

Le Q -module $V = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D / \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D'}$ est de dimension $2n - k - 2$ et se décompose en termes de L -modules irréductibles sous la forme $V = U \oplus W \oplus C_\mu$ où U est le L -module de plus haut poids $\lambda_1 = \omega_1 + \omega_k - \omega_{k+1}$, W est le L -module de

plus haut poids $\lambda_2 = -\omega_{k-1} + \omega_k - \omega_{k+1} + \omega_{k+2}$ et μ est le caractère de P :
 $\mu = -\omega_{k-1} + 2\omega_k - \omega_{k+1}$.

On cherche à calculer les groupes de cohomologie $H^j(P^D/Q, \wedge^i V^*)$. En fait, nous voulons montrer que ces groupes sont nuls pour tout $j > i$. Nous obtenons une approximation avec $H^j(P^D/Q, (\wedge^i V^*)^\sim)$, où $(\wedge^i V^*)^\sim$ est le Q -module gradué complètement réductible associé à $\wedge^i V^*$. En particulier, nous savons que si $H^j(P^D/Q, (\wedge^i V^*)^\sim) = 0$ pour tout $j > i$, alors c'est aussi le cas pour $H^j(P^D/Q, \wedge^i V^*)$.

Nous devons comprendre la décomposition en termes de L -modules irréductibles de $\wedge^m V$ pour $m \in \{0, 1, \dots, 2n - k - 2\}$. La partie semi-simple de L est un produit $H_1 \times H_2$ où H_1 est un groupe simple de type A_{k-2} et H_2 est un groupe simple de type D_{n-k-1} . Les décompositions de U et W comme H_1 -module et comme H_2 -module respectivement sont classiques. Nous les utilisons pour comprendre comment $\wedge^m V$ se décompose comme L -module. On obtient :

$$\wedge^m V = \sum_{i=0}^m \wedge^i U \otimes \wedge^{m-i} W \oplus \sum_{i=0}^{m-1} \wedge^i U \otimes \wedge^{m-i-1} W \otimes \mathbb{C}_\mu$$

et comme H_2 agit trivialement sur $\wedge^i U$ et H_1 agit trivialement sur $\wedge^{m-i-1} W$ seules leurs décompositions respectives comme H_1 -module ou H_2 -module sont importantes pour comprendre $\wedge^i U \otimes \wedge^{m-i-1} W$.

Commençons avec $\wedge^i U$. Dans ce cas, $U \simeq V_{H_1, \omega_1}$ est la représentation standard de dimension $k - 1$. On sait alors, voir par exemple [25], que pour $1 \leq i \leq k-2$ $\wedge^i U \simeq V_{H_1, \omega_i}$ et $\wedge^{k-1} U \simeq \mathbb{C}$. En passant à la décomposition en termes de L -modules, nous devons ajouter l'action du centre de L . Ainsi, pour $1 \leq i \leq k-2$, $\wedge^i U \simeq V_{L', \omega_i + i\omega_k - i\omega_{k+1}}$ alors que $\wedge^{k-1} U \simeq \mathbb{C}_{\omega_{k-1} + (k-1)\omega_k - (k-1)\omega_{k+1}}$ comme L -modules.

Passons maintenant à l'étude de $\wedge^i W$. On sait alors que $W \simeq V_{H_2, \omega_1}$ est la représentation standard de H_2 de dimension $2(n - k - 1)$. D'après [25], la représentation $\wedge^i W$ est irréductible pour tout $i \neq n - k - 1$. Son plus haut poids est ω_i si $i < n - k - 2$, $\omega_{n-1} + \omega_n$ si $i \in \{n - k - 2, n - k\}$ et $\omega_{2n-k-i-1}$ si $n - k < i < 2(n - k - 1) - 1$ et 0 si $i = 2(n - k - 1)$. Dans le cas, où $i = n - k - 1$, elle

est la somme de deux représentations irréductibles de plus haut poids $2\omega_{n-1}$ et $2\omega_n$ respectivement. En passant à la décomposition en termes de L-modules, nous obtenons que

$$\wedge^i W \simeq \begin{cases} V_{L, \omega_{k+i+1} - i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq n - k - 3 \\ V_{L, \omega_{n-1} + \omega_n - i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1}} & \text{si } i \in \{n - k - 2, n - k\} \\ V_{L, 2\omega_{n-1} - i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1}} & \text{si } i = n - k - 1 \\ \oplus V_{L, 2\omega_n - i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1}} & \\ V_{L, \omega_{2n-k-i-1} - i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1}} & \text{si } n - k + 1 \leq i \leq 2(n - k - 1) - 1 \\ \mathbb{C}_{-i\omega_{k-1} + i\omega_k} & \text{si } i = 2(n - k - 1) \end{cases}$$

Avec cela, nous sommes maintenant prêts à étudier la décomposition de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ et de trouver son ou ses plus hauts poids. Remarquons que ce L-module est irréductible sauf si $j = n - k - 1$. Après avoir spécifié le ou les plus hauts poids λ_l de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$, nous allons déterminer la longueur r de l'élément s du groupe de Weyl tel que $s(\lambda_l + \rho)$ est dominant. Nous saurons alors d'après le théorème de Borel-Weil-Bott qu'il existe au plus un groupe de cohomologie non nul et c'est $H^r(P^D/Q, V_{\lambda_l}^*)$. Il suffit donc que $r \leq i + j$ afin d'obtenir l'annulation des groupes supérieurs de cohomologie de $H^i(P^D/Q, \mathbb{C}[n^{D'}])$. Dans le cas où nous savons que $\lambda + \rho$ n'est pas régulier, il n'est pas nécessaire de trouver la longueur de la réflexion s puisqu'aucun groupe de cohomologie ne survit.

Si $i = j = 0$, alors $\wedge^0 V \simeq \mathbb{C}$. De plus, $H^0(P^D/Q, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $H^s(P^D/Q, \mathbb{C}) = 0$ pour tout $s > 0$. Ainsi, seul le groupe de cohomologie de degré 0 est non nul.

Si $i > 0$ et $j = 0$, le plus haut poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ est $\lambda = \omega_i + i\omega_k - i\omega_{k+1}$. Dans le cas où $2n = 3k + 1$ et $i = k - 1$, le poids $\lambda + \rho$ est régulier. Il faut i réflexions pour le rendre dominant.

Si $i = 0$ et $j \leq 2(n - k - 1) - 1$, le plus haut poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ contient un $-\omega_{k+1}$. De sorte que $\lambda + \rho$ n'est pas régulier.

Si $1 \leq i \leq k - 1$ et $1 \leq j \leq n - k - 3$, le L-module $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ est irréductible et son plus haut poids est $\lambda = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j + i)\omega_k - (i + 1)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $(j - 1) + i$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(P^D/Q, V_{\lambda}^*)$ qui survit pour $r \geq i + j$. Si $n - k + 1 \leq j \leq 2(n - k - 1) - 1$, le L-module $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$

est irréductible et son plus haut poids est $\lambda = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{2n-k-j-1}$. Le même calcul fonctionne ici.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-2, n-k\}$, le L-module $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W}$ est irréductible et son plus haut poids est $\lambda = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{n-1} + \omega_n$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $(j-1) + i$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(\mathcal{P}^D/Q, V_\lambda^*)$ qui survit pour $r \geq i+j$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = n-k-1$, le L-module $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W}$ est une somme de deux modules irréductibles et ses plus hauts poids sont $\lambda_1 = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_{n-1}$ et $\lambda_2 = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $(j-1) + i$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(\mathcal{P}^D/Q, V_\lambda^*)$ qui survit pour $r \geq i+j$.

Finalement, si $i \geq 0$ et $j = 2(n-k-1)$, $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W}$ est un L-module irréductible de plus haut poids $\lambda = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - i\omega_{k+1}$. Il faut au plus $(j-1) + i$ réflexions pour rendre le poids $\lambda + \rho$ dominant.

Passons maintenant à l'étude de $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W} \otimes \mathbb{C}_\mu$. On se rappelle que μ est le caractère de \mathcal{P}^D : $\mu = -\omega_{k-1} + 2\omega_k - \omega_{k+1}$. Les plus hauts poids de $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W} \otimes \mathbb{C}_\mu$ seront simplement les plus hauts poids de $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W}$ auxquels on ajoute μ . L'étude sera donc assez rapide d'après celle des sept cas que nous venons de faire. Il faut montrer ici que les groupes de cohomologie qui apparaissent sont en $r \leq i+j+1$.

Si $i = j = 0$, le plus haut poids de $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W} \otimes \mathbb{C}_\mu$ est μ et $\mu + \rho$ n'est pas régulier.

Si $i > 0$ et $j = 0$, le plus haut poids de $\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W} \otimes \mathbb{C}_\mu$ est $\lambda = \omega_i + -\omega_{k-1} + (i+2)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1}$. Ainsi, $\lambda + \rho$ n'est jamais régulier en raison de la présence du $-\omega_{k-1}$.

Si $i = 0$ et $j \leq 2(n-k-1) - 1$, le poids λ est régulier si et seulement si $j = 1$ et dans ce cas il suffit d'une réflexion pour que $\lambda + \rho$ soit dominant. Ainsi, seul $H^1(\mathcal{P}^D/Q, (\wedge^i \mathcal{U} \otimes \wedge^j \mathcal{W} \otimes \mathbb{C}_\mu)^*)$ est non nul et $1 \leq i+j+1 = 2$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $1 \leq j \leq n-k-3$ ou $n-k+1 \leq j \leq 2(n-k-1)-1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est plus haut poids est $\lambda = \omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (j+i+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $j + (i+1)$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(\mathbf{P}^D/Q, V_\lambda^*)$ qui survit pour $r > i + j + 1$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-2, n-k\}$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est irréductible et son plus haut poids est $\lambda = \omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (j+i+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{n-1} + \omega_n$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $j + i + 1$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(\mathbf{P}^D/Q, V_\lambda^*)$ qui survit pour $r > i + j + 1$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = n-k-1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est une somme de deux modules irréductibles et ses plus hauts poids sont $\lambda_1 = \omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (j+i+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + 2\omega_{n-1}$ et $\lambda_2 = \omega_i - j\omega_{k-1} + (j+i)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Dans le cas où $\lambda + \rho$ est régulier, cela prend au plus $i + j + 1$ réflexions pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. Ainsi, il n'y a aucun groupe de cohomologie $H^r(\mathbf{P}^D/Q, V_\lambda^*)$ qui survit pour $r > i + j + 1$.

Finalement, si $i \geq 0$ et $j = 2(n-k-1)$, $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est le L-module irréductible de plus haut poids $\lambda = \omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (j+i+2)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1}$. Il faut au plus $j + i + 1$ réflexions pour rendre dominant le poids $\lambda + \rho$.

Nous avons donc montré que pour tout $r > s$, $H^r(\mathbf{P}^D/Q, (\wedge^s \mathbf{V}^*)^\sim) = 0$. Ce qui nous permet de conclure que $H^i(\mathbf{P}^D/Q, \mathbf{C}[\mathbf{n}^{D'}]) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et par le fait même que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Exemple 3.7.1. Nous allons traiter l'exemple de $n = 7$ avec $k = 3$, c'est-à-dire $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{smallmatrix}$ et $D' = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{smallmatrix}$. Notons $Q = \mathbf{P}^D \cap \mathbf{P}^{D'}$ et L le sous-groupe de Levi dans la décomposition de Q . On sait que $V = \mathbf{n}^D / \mathbf{n}^{D'}$ est un Q -module de dimension neuf qui a une décomposition $V = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W} \oplus \mathbf{C}_\mu$ où le plus haut poids de \mathbf{U} est $\lambda_1 = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0\}_\alpha = \{1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0\}_\omega$, le plus haut poids de \mathbf{W} est $\lambda_2 = \{0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2\}_\alpha = \{0 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1\}_\omega$ et μ est le caractère de $Q : \mu = \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}_\alpha = \{0 \ -1 \ 2 \ -1 \ 0\}_\omega$.

Le L-module \mathbf{U} est de dimension deux. Ses produits extérieurs $\wedge^i \mathbf{U}$ sont des modules irréductibles de plus haut poids, $0, \{1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0\}_\omega$ et $\{0 \ 1 \ 2 \ -2 \ 0\}_\omega$ pour $i = 0, 1$ et 2 respectivement. Le L-module \mathbf{W} est de dimension six. Ses produits extérieurs $\wedge^i \mathbf{U}$

j	<i>plus haut poids</i>
0	0
1	$\{0 -1 1 -1 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
2	$\{0 -2 2 -1 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$
3	$\{0 -3 3 -1 0 \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega, \{0 -3 3 -1 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega$
4	$\{0 -4 4 -1 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$
5	$\{0 -5 5 -1 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
6	$\{0 -6 6 0 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$

TAB. 3.23. Plus hauts poids des modules $\wedge^j W$

<i>Plus hauts poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$</i>			
$j \setminus i$	0	1	2
0	0	$\{1 0 1 -1 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 1 2 -2 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
1	$\{0 -1 1 -1 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -1 2 -2 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 0 3 -3 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
2	$\{0 -2 2 -1 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -2 3 -2 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -1 4 -3 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$
3	$\{0 -3 3 -1 0 \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -3 4 -2 0 \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -2 5 -3 0 \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
	$\{0 -3 3 -1 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -3 4 -2 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -2 5 -3 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega$
4	$\{0 -4 4 -1 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -4 5 -2 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -3 6 -3 0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$
5	$\{0 -5 5 -1 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -5 6 -2 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -4 7 -3 1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$
6	$\{0 -6 6 0 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{1 -6 7 -1 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$	$\{0 -5 8 -2 0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$

TAB. 3.24. Plus hauts poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$

sont des modules irréductibles si $j \neq 3$. Dans le où $j = 3$ cas, c'est une somme de deux modules irréductibles. Nous allons donner les plus hauts poids des modules $\wedge^j W$ dans le tableau 3.23 Nous allons maintenant indiquer les plus hauts poids des L -modules $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ et $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mathbb{C}_\mu$ dans les tableaux 3.24 et 3.25.

Nous pouvons constituer les tableaux décrivant les plus hauts poids λ de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ et $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mathbb{C}_\mu$ pour lesquels $\lambda + \rho$ est régulier.

Plus hauts poids de $\Lambda^i \mathbb{U} \otimes \Lambda^j \mathbb{W} \otimes \mathbb{C}_\mu$

$j \setminus i$	0	1	2
0	$\{0 \ -1 \ 2 \ -1 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{1 \ -1 \ 3 \ -2 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{0 \ 0 \ 4 \ -3 \ 0 \ 0\}_\omega$
1	$\{0 \ -2 \ 3 \ -2 \ 1 \ 0\}_\omega$	$\{1 \ -2 \ 4 \ -3 \ 1 \ 0\}_\omega$	$\{0 \ -1 \ 5 \ -4 \ 1 \ 0\}_\omega$
2	$\{0 \ -3 \ 4 \ -2 \ 0 \ 1\}_\omega$	$\{1 \ -3 \ 5 \ -3 \ 0 \ 1\}_\omega$	$\{0 \ -2 \ 6 \ -4 \ 0 \ 1\}_\omega$
3	$\{0 \ -4 \ 5 \ -2 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{1 \ -4 \ 6 \ -3 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ 0\}_\omega$
	$\{0 \ -4 \ 5 \ -2 \ 0 \ 2\}_\omega$	$\{1 \ -4 \ 6 \ -3 \ 0 \ 2\}_\omega$	$\{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ 2\}_\omega$
4	$\{0 \ -5 \ 6 \ -2 \ 0 \ 1\}_\omega$	$\{1 \ -5 \ 7 \ -3 \ 0 \ 1\}_\omega$	$\{0 \ -4 \ 8 \ -4 \ 0 \ 1\}_\omega$
5	$\{0 \ -6 \ 7 \ -2 \ 1 \ 0\}_\omega$	$\{1 \ -6 \ 8 \ -3 \ 1 \ 0\}_\omega$	$\{0 \ -5 \ 9 \ -4 \ 1 \ 0\}_\omega$
6	$\{0 \ -7 \ 8 \ -1 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{1 \ -7 \ 9 \ -2 \ 0 \ 0\}_\omega$	$\{0 \ -6 \ 10 \ -3 \ 0 \ 0\}_\omega$

TAB. 3.25. Plus hauts poids de $\Lambda^i \mathbb{U} \otimes \Lambda^j \mathbb{W} \otimes \mu$ Plus hauts poids ρ -réguliers de $\Lambda^i \mathbb{U} \otimes \Lambda^j \mathbb{W}$

$j \setminus i$	0	1	2
0	0		
1			
2			
3			
4			$\{0 \ -3 \ 6 \ -3 \ 0 \ 1\}_\omega$
5		$\{1 \ -5 \ 6 \ -2 \ 1 \ 0\}_\omega$	
6	$\{0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$		

Plus hauts poids ρ -réguliers de $\Lambda^i \mathbf{U} \otimes \Lambda^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$

$j \setminus i$	0	1	2
0			
1			
2			
3			$\{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$ $\{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega$
4		$\{1 \ -5 \ 7 \ -3 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$	
5	$\{0 \ -6 \ 7 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$		
6			

Reste à calculer le poids dominant et la longueur de la réflexion s telle que $s(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant. Il faut s'assurer que cette longueur soit inférieure ou égale à $i + j$ dans le cas du module $\Lambda^i \mathbf{U} \otimes \Lambda^j \mathbf{W}$ et $i + j + 1$ dans le cas de $\Lambda^i \mathbf{U} \otimes \Lambda^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$. Nous allons noter s_i la réflexion simple associée à la racine α_i .

Commençons avec le poids $\lambda = \{0 \ -3 \ 6 \ -3 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega$.

$$\begin{aligned} \{0 \ -3 \ 6 \ -3 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega &\xrightarrow{+\rho} \{1 \ -2 \ 7 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_2} \{-1 \ 2 \ 5 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_1} \{1 \ 1 \ 5 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega \\ &\xrightarrow{s_4} \{1 \ 1 \ 3 \ 2 \ -1 \ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_5} \{1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{-\rho} \{0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega. \end{aligned}$$

Ainsi, la réflexion s telle que le poids $s(\lambda + \rho) - \rho$ soit dominant est de longueur 4 qui est inférieur à $i + j = 2 + 4 = 6$.

Passons maintenant au poids $\lambda = \{1 \ -5 \ 6 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$.

$$\begin{aligned} \{1 \ -5 \ 6 \ -2 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega &\xrightarrow{+\rho} \{2 \ -4 \ 7 \ -1 \ 2 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_2} \{-2 \ 4 \ 3 \ -1 \ 2 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_1} \{2 \ 2 \ 3 \ -1 \ 2 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \\ &\xrightarrow{s_4} \{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{-\rho} \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega. \end{aligned}$$

La réflexion s pour laquelle le poids $s(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant est de longueur 3 qui est inférieur à $i + j = 1 + 5 = 6$.

Nous allons faire les calculs détaillés pour un dernier poids, soit $\lambda = \{0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega$.

$$\begin{aligned} \{0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega &\xrightarrow{+\rho} \{1 \ -5 \ 7 \ 1 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_2} \{-4 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \xrightarrow{s_1} \{4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\}_\omega \\ &\xrightarrow{-\rho} \{3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\}_\omega. \end{aligned}$$

La réflexion $s = s_4s_1s_2$ de longueur trois est telle que $s(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant. De plus, $3 < 0 + 6 = i + j$.

Pour les quatre prochains poids λ , nous allons nous contenter de donner la réflexion s et le poids dominant $s(\lambda + \rho) - \rho$. Dans le cas de $\lambda = \{1 \ -5 \ 7 \ -3 \ 0 \ 1\}_\omega$, $s_5s_4s_1s_2(\lambda + \rho) - \rho = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$. Dans le cas de $\lambda = \{0 \ -6 \ 7 \ -2 \ 1 \ 0\}_\omega$, $s_5s_4s_1s_2(\lambda + \rho) - \rho = \{3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$. Finalement dans les cas de $\lambda = \{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ 2\}_\omega$ et $\lambda = \{0 \ -3 \ 7 \ -4 \ 0 \ 2\}_\omega$, $s_1s_2s_7s_5s_4(\lambda + \rho) - \rho = \{0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0\}_\omega$.

Nous pouvons résumer tout cela dans le tableau 3.26 en donnant les groupes de cohomologie qui survivent dans $H^i(\mathbb{P}^D/Q, (\wedge^j V^*)^\sim)$ comme nous l'avons fait dans le chapitre 3.

$2e^{2\omega_2}$								5
$e^{2\omega_2} + e^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} + e^{3\omega_1+\omega_3}$								4
$e^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} + e^{3\omega_1+\omega_3}$								3
								2
								1
						1		0
6	5	4	3	2	1	0		$i \setminus j$

TAB. 3.26. Plus hauts poids de $H^i(\mathbb{P}^D/Q, (\wedge^j V^*)^\sim)$.

Nous avons donc montré que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

3.8. LE CAS DE B_n

Nous travaillons maintenant avec G un groupe de type B_n et D un diagramme USD officiel vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ et $D(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \neq k$ avec $2 \leq k < \frac{2n+1}{3}$. Nous supposons ici que $n \geq 4$ et $k \geq 2$.

Notons D' le diagramme de Dynkin pondéré pour lequel les seules valeurs non nulles sont $D(\alpha_{k-1}) = D(\alpha_{k+1}) = 1$. Comme à notre habitude, notons Q l'intersection des sous-groupes paraboliques P^D et $P^{D'}$. Le groupe parabolique Q a une décomposition de Levi $Q = LU$ avec L un sous-groupe réductif de G .

Notons $L' = [L, L]$ le groupe dérivé de L . Ce groupe semi-simple est de type $A_{k-2} \times B_{n-k-1}$.

Étudions maintenant la décomposition du Q -module $V = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D / \mathfrak{g}_{\geq 2}^{D'}$ en termes de L -modules irréductibles. On observe que $V \simeq U \oplus W \oplus \mathbb{C}_\mu \oplus \mathbb{C}_\nu$ où U est le L -module de plus haut poids $\lambda_1 = \omega_1 + \omega_k - \omega_{k+1}$, W est le L -module de plus haut poids $\lambda_2 = -\omega_{k-1} + \omega_k - \omega_{k+1} + \omega_{k+2}$, μ est le caractère de P^D : $\mu = -\omega_{k-1} + 2\omega_k - \omega_{k+1}$ et ν est le caractère $\nu = -\omega_{k-1} + \omega_k$.

La décomposition de $\wedge^i U$ est la même que dans le cas de D_n . Passons donc à l'étude de $\wedge^j W$. Notons ici que cette représentation est irréductible pour tout $i \geq 0$. En termes de poids de L ,

$$\wedge^i W \simeq \begin{cases} V_{L, -i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1} + \omega_{k+i+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq n - k - 2 \\ V_{L, -i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1} + 2\omega_n} & \text{si } i \in \{n - k - 1, n - k\} \\ V_{L, -i\omega_{k-1} + i\omega_k - \omega_{k+1} + \omega_{2n-k-i-1}} & \text{si } n - k + 1 \leq i \leq 2(n - k - 1) \\ \mathbb{C}_{-i\omega_{k-1} + i\omega_k} & \text{si } i = 2(n - k - 1) + 1. \end{cases}$$

Nous allons séparer l'étude de $\wedge^m V$ en quatre étapes. En premier, nous étudierons le plus haut poids du module $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$. Puis, celui de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mathbb{C}_\mu$. Ensuite, nous étudierons le plus haut poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mathbb{C}_\nu$. Nous finirons en étudiant le plus haut poids de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \otimes \mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_\nu$.

Commençons donc avec l'étude de $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$.

Si $i = j = 0$, $\wedge^i U \otimes \wedge^j W \simeq \mathbb{C}$ et seule la cohomologie $H^0(P^D/Q, (\wedge^i U \otimes \wedge^j W)^*)$ survit.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $1 \leq j \leq n-k-2$, alors $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ est un L -module de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j - 1 + i$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $n-k+1 \leq j \leq 2(n-k-1)$, alors $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ est un L -module de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{2n-k-j-1}$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j - 1 + i$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-1, n-k\}$, alors $\wedge^i U \otimes \wedge^j W$ est un L -module de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j - 1 + i$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = 2(n-k-1) + 1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W}$ est de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - i\omega_{k+1}$. La réflexion pour rendre le poids $\lambda + \rho$ dominant est de longueur au plus $j-1+i$.

Passons maintenant à l'étude de $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$.

Si $i = j = 0$, $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \simeq \mathbf{C}_\mu$ et $\mu + \rho$ n'est pas régulier.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $1 \leq j \leq n-k-2$ ou $n-k+1 \leq j \leq 2(n-k-1)$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$ ou de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{2n-k-j-1}$. Dans les deux cas, si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j+i+1$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-1, n-k\}$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+2)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j+i+1$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = 2(n-k-1) + 1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu$ est de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1}$. La réflexion pour rendre le poids $\lambda + \rho$ dominant est de longueur au plus $j+i+1$.

Nous pouvons passer à l'étude de $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\nu$.

Si $i = j = 0$, $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\nu \simeq \mathbf{C}_\nu$ et $\nu + \rho$ n'est pas régulier.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $1 \leq j \leq n-k-2$ ou $n-k+1 \leq j \leq 2(n-k-1)$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\nu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+1)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$ ou $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+1)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + \omega_{2n-k-j-1}$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j+i$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-1, n-k\}$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\nu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+1)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $j+i$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = 2(n-k-1) + 1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\nu$ est de plus haut poids $\omega_i - (j+1)\omega_{k-1} + (i+j+1)\omega_k - (i)\omega_{k+1}$. La réflexion pour rendre le poids $\lambda + \rho$ dominant est de longueur au plus $i+j$.

Il reste seulement à étudier $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\nu$.

Si $i = j = 0$, $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\nu \simeq \mathbf{C}_{\mu+\nu}$ et $\mu + \nu + \rho$ n'est pas régulier.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $1 \leq j \leq n-k-2$ ou $n-k+1 \leq j \leq 2(n-k-1)$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\nu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - (j+2)\omega_{k-1} + (i+j+3)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{k+1+j}$ ou de plus haut poids $\omega_i - (j+2)\omega_{k-1} + (i+j+3)\omega_k - (i+2)\omega_{k+1} + \omega_{2n-k-j-1}$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $i+j+2$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j \in \{n-k-1, n-k\}$, alors $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\nu$ est un L-module de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i+1)\omega_{k+1} + 2\omega_n$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, la réflexion pour rendre ce poids dominant est de longueur au plus $i+j+2$.

Si $1 \leq i \leq k-1$ et $j = 2(n-k-1) + 1$, le L-module $\wedge^i \mathbf{U} \otimes \wedge^j \mathbf{W} \otimes \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\nu$ est de plus haut poids $\omega_i - j\omega_{k-1} + (i+j)\omega_k - (i)\omega_{k+1}$. La réflexion pour rendre le poids $\lambda + \rho$ dominant est de longueur au plus $i+j+2$.

3.9. LE CAS DE C_n

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type C_n . Soit D un diagramme USD officiel dont l'unique deux est en position k ou k est pair et $3k < 2n$. Puisque k est pair, on doit donc avoir $3k \leq 2n - 2$. Soit f l'unique P^D -covariant irréductible, à multiplication par un scalaire près. Nous avons déjà montré que $V(f)$ est une variété normale. Nous voulons maintenant montrer que cette variété est à singularités rationnelles.

Soit \tilde{D} le diagramme de Dynkin pondéré vérifiant $\tilde{D}(\alpha_{k-2}) = \tilde{D}(\alpha_{k+2}) = \frac{1}{2}$ et $\tilde{D}(\alpha_k) = 1$. Notons $V = \mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. On considère la suite exacte de $P^{\tilde{D}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \rightarrow \mathfrak{n}^D \rightarrow V \rightarrow 0.$$

On passe au dual et au complexe de Koszul. On veut montrer l'annulation des groupes de cohomologie $H^i(P^D/P^{\tilde{D}}, \wedge^j V^*)$ pour tout $i > j$. Nous allons utiliser une approche combinatoire afin d'arriver à nos fins. Nous allons montrer que pour λ un poids dominant de $\wedge^j V$, alors $H^i(P^D/P^{\tilde{D}}, \mathbf{C}_\lambda^*) = 0$ pour tout $i > j$.

Mais avant tout, nous allons donner deux lemmes sur le nombre de réflexions nécessaires afin de rendre dominant certains poids dans A_n et dans C_n .

Lemme 3.9.1. *Soit λ un poids de A_n . Supposons qu'il existe ω dans le groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$.*

- (1) *Supposons que $\lambda = -a_1\omega_1 + \sum_{i=2}^n a_i\omega_i$ avec $a_1 > 0$ et $a_i \geq 0$. Alors, $l(\omega) \leq a_1 - 1$.*
- (2) *Supposons que $\lambda = a_1\omega_1 - a_2\omega_2 + \sum_{i=3}^n a_i\omega_i$ avec $a_2 > 0$ et $a_i \geq 0$.*
 - (a) *Si $a_2 - a_1 \leq 1$, $l(\omega) \leq a_2 - 1$;*
 - (b) *Si $a_2 - a_1 = 2$, $\lambda + \rho$ n'est pas régulier ;*
 - (c) *Si $a_2 - a_1 \geq 3$, $l(\omega) \leq 2a_2 - a_1 - 4$.*

DÉMONSTRATION. On commence par se placer dans la situation où $\lambda = -a_1\omega_1 + \sum_{i=2}^n a_i\omega_i$ avec $a_1 > 0$ et $a_i \geq 0$. Dans ce cas, $\lambda + \rho = (1 - a_1)\omega_1 + \sum_{i=2}^n (a_i + 1)\omega_i$. Si $1 - a_1 = 0$, le poids $\lambda + \rho$ n'est pas régulier. Il n'existe donc pas de ω dans le groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ soit dominant. Si $1 - a_1 < 0$, on fait la réflexion s_{α_1} . On obtient $s_{\alpha_1}(\lambda + \rho) = (a_1 - 1)\omega_1 + (a_2 + 2 - a_1)\omega_2 + \sum_{i=3}^n (a_i + 1)\omega_i$. Puisque $a_2 \geq 0$, $a_2 + 2 - a_1 > 1 - a_1$. On observe ainsi qu'une réflexion rend l'unique coefficient négatif, strictement plus positif. D'où le fait que si $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant, alors $l(\omega) \leq a_1 - 1$.

Avant d'aller plus loin, nous allons voir sous quelles conditions est-ce que $l(\omega) = a_1 - 1$. Si $a_2 > 0$, et que $a_1 - 1 = 1$, alors après la réflexion s_{α_1} , nous obtenons que $s_{\alpha_1}(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant. Si, $a_1 - 1 = 2$ le poids $\lambda + \rho$ n'est pas dominant. Finalement, si $a_1 - 1 \geq 3$, après la réflexion s_{α_1} , nous obtenons $s_{\alpha_1}(\lambda + \rho) = (a_1 - 1)\omega_1 + (a_2 + 2 - a_1)\omega_2 + \sum_{i=3}^n (a_i + 1)\omega_i$ avec $a_2 + 2 - a_1 \geq (1 - a_1) + 2$. Il nous faut alors au plus $a_2 + 2 - a_1$ réflexions en plus pour rendre $s_{\alpha_1}(\lambda + \rho)$ dominant, ce qui veut dire qu'il nous faut au plus $a_1 - 2$ réflexions au total pour rendre $\lambda + \rho$ dominant. De cela, on déduit que $l(\omega) = a_1 - 1$ si

$a_2 = a_3 = \dots = a_{a_1-1} = 0$ et $a_{a_1} > 0$ avec $a_1 \leq n$, ou

(b) $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$ et $n = a_1 - 1$.

Plaçons nous maintenant dans la situation où $\lambda = a_1\omega_1 - a_2\omega_2 + \sum_{i=3}^n a_i\omega_i$ avec $a_2 > 0$ et $a_i \geq 0$. Après la réflexion s_{α_2} , on trouve $s_{\alpha_2}(\lambda + \rho) = (a_1 + 2 - a_2)\omega_1 + (a_2 - 1)\omega_2 + (a_3 + 2 - a_2)\omega_3 + \sum_{i=4}^n a_i\omega_i$. Si $a_2 - a_1 \leq 1$, $a_1 + 2 - a_2 \geq 1$ et on se trouve dans la situation précédente avec un seul coefficient négatif qu'on doit rendre strictement positif. Si, $a_2 - a_1 = 2$, $a_1 + 2 - a_2 = 0$ et donc $\lambda + \rho$ n'est pas régulier. Reste donc à considérer le cas $a_2 - a_1 \geq 3$.

Dans ce cas, $a_1 + 2 - a_2 < 0$. On a ainsi besoin d'au plus $(a_2 - 1) + (a_2 - a_1 - 2)$ réflexions afin de rendre les deux coefficients négatifs positifs. Cependant, nous ne pouvons pas être dans la situation où on ait besoins du nombre de réflexions maximal pour le premier et le deuxième coefficient négatif puisque $a_1 + 2 - a_2 > 1 - a_2$. Ainsi, si $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ est dominant, $l(\omega) \leq 2a_2 - a_1 - 4$.

□

Afin de comprendre ce lemme un peu mieux, nous allons traiter quelques exemples.

Exemple 3.9.1. (1) *Considérons le poids $\lambda = -10\ 0\ 2\ 1$. Alors,*

$$\begin{array}{ccccccc} -10\ 0\ 2\ 1 & \xrightarrow{+\rho} & -9\ 1\ 3\ 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} & 9\ -8\ 3\ 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1\ 8\ -5\ 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ 1\ 3\ 5\ -3 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & 1\ 3\ 2\ 3 & \xrightarrow{-\rho} & 0\ 2\ 1\ 2. & & & \end{array}$$

Ainsi, $\omega = s_{\alpha_4} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$ et $l(\omega) = 4 \leq 10 - 1$.

(2) *Considérons le poids $\lambda = -5\ 0\ 0\ 0$. Alors,*

$$\begin{array}{ccccccc} -5\ 0\ 0\ 0 & \xrightarrow{+\rho} & -4\ 1\ 1\ 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} & 4\ -3\ 1\ 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1\ 3\ -2\ 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ 1\ 1\ 2\ -1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & 1\ 1\ 1\ 1 & \xrightarrow{-\rho} & 0\ 0\ 0\ 0. & & & \end{array}$$

Ainsi, $\omega = s_{\alpha_4} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$ et $l(\omega) = 4 = 5 - 1$. On est dans un cas où $l(\omega) = a_1 - 1$.

(3) On traite un dernier exemple. Considérons le poids $\lambda = 0 -5 0 0 0$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & \xrightarrow{+\rho} & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & -3 & 4 & -3 & 1 & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ -3 & 1 & 3 & -2 & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & -3 & 1 & 1 & 2 & -1 & \xrightarrow{s_{\alpha_5}} & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \end{array}$$

Ainsi, le poids $\lambda + \rho$ n'est pas régulier. Cet exemple illustre qu'on ne peut pas avoir un poids λ tel que $\lambda + \rho$ soit régulier et pour lequel on soit dans les cas limites $a_1 - 1$ et $a_1 - a_2 - 2$ réflexions simultanément.

Un résultat similaire est vrai dans le cas de C_n . Il faut cependant une condition supplémentaire sur a_2 dans cet énoncé. Avant d'énoncer le lemme, nous allons traiter quelques exemples afin de comprendre en quoi le comportement dans C_n est différent du comportement dans A_n .

Exemple 3.9.2. (1) Considérons le poids $\lambda = -10 0 2 \Leftarrow 1$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccccccc} -10 & 0 & 2 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{+\rho} & -9 & 1 & 3 & \Leftarrow & 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} & 9 & -8 & 3 & \Leftarrow & 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1 & 8 & -5 & \Leftarrow & 2 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ 1 & 3 & 5 & \Leftarrow & -3 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & 1 & 3 & -1 & \Leftarrow & 3 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & 1 & 2 & 1 & \Leftarrow & 2 & \xrightarrow{-\rho} & 0 & 1 & 0 & \Leftarrow & 1. \end{array}$$

Ainsi, $\omega = s_{\alpha_3} s_{\alpha_4} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1}$ et on observe que $l(\omega) = 5 \leq 10 - 1$.

(2) Considérons le poids $\lambda = -5 0 0 \Leftarrow 1$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccccccc} -5 & 0 & 0 & \Leftarrow & 0 & \xrightarrow{+\rho} & -4 & 1 & 1 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} & 4 & -3 & 1 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1 & 3 & -2 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ 1 & 1 & 2 & \Leftarrow & -1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & 1 & 1 & 0 & \Leftarrow & 1. \end{array}$$

Le poids $\lambda + \rho$ n'est donc pas régulier.

(3) On passe à un troisième exemple. On va modifier l'exemple de A_n pour qu'il soit plus intéressant. Considérons le poids $\lambda = 0 -7 0 0 0$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & -7 & 0 & 0 & \Leftarrow & 0 & \xrightarrow{+\rho} & 1 & -6 & 1 & 1 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & -5 & 6 & -5 & 1 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} \\ -5 & 1 & 5 & -4 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & -5 & 1 & 1 & 4 & \Leftarrow & -3 & \xrightarrow{s_{\alpha_5}} & -5 & 1 & 1 & -2 & \Leftarrow & 3 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} \\ -5 & 1 & -1 & 2 & \Leftarrow & 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & -5 & 0 & 1 & 1 & \Leftarrow & 1 \end{array}$$

Le poids $\lambda + \rho$ n'est pas régulier.

(4) Modifions un peu l'exemple en partant avec un poids dont le coefficient de ω_2 est plus petit. Prenons le poids $\lambda' = 0 -9 0 0 0$. Alors,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 -9 0 0 \Leftarrow 0 & \xrightarrow{+\rho} & 1 -8 1 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & -7 8 -7 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & \\
-7 1 7 -6 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & -7 1 1 6 \Leftarrow -5 & \xrightarrow{s_{\alpha_5}} & -7 1 1 -4 \Leftarrow 5 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & \\
-7 1 -3 4 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & -7 -2 3 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & -9 2 1 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_1}} & \\
9 -7 1 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 2 7 -6 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & 2 1 6 -5 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & \\
2 1 1 5 \Leftarrow -4 & \xrightarrow{s_{\alpha_5}} & 2 1 1 -3 \Leftarrow 4 & \xrightarrow{s_{\alpha_4}} & 2 1 -2 3 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_3}} & \\
2 -1 2 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{s_{\alpha_2}} & 1 1 1 1 \Leftarrow 1 & \xrightarrow{-\rho} & 0 0 0 0 \Leftarrow 0. & &
\end{array}$$

Dans ce cas, $l(\omega) = 15$ alors que $2a_2 - a_1 - 4 = 14$. On voit donc qu'il faut avoir une condition de plus sur a_2 si on veut que la même inégalité soit vérifiée dans le cas de C_n .

Lemme 3.9.2. Soit λ un poids de C_n . Supposons qu'il existe ω dans le groupe de Weyl de G tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$.

- (1) Supposons que $\lambda = -a_1\omega_1 + \sum_{i=2}^n a_i\omega_i$ avec $a_1 > 0$ et $a_i \geq 0$. Alors, $l(\omega) \leq a_1 - 1$.
- (2) Supposons que $\lambda = a_1\omega_1 - a_2\omega_2 + \sum_{i=3}^n a_i\omega_i$ avec $0 < a_2 \leq 2(n-2)$ et $a_i \geq 0$.
 - (a) Si $a_2 - a_1 \leq 1$, $l(\omega) \leq a_2 - 1$;
 - (b) Si $a_2 - a_1 = 2$, $\lambda + \rho$ n'est pas régulier ;
 - (c) Si $a_2 - a_1 \geq 3$, $l(\omega) \leq 2a_2 - a_1 - 4$.

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du lemme 3.9.1. La condition sur a_2 nous assure que si $a_2 - a_1 \geq 3$ alors $l(\omega) \leq 2a_2 - a_1 - 4$. \square

Avant de passer à la preuve que $V(f)$ est à singularités rationnelles, nous allons donner quelques inégalités que vérifient les poids de $\wedge^r V$.

Lemme 3.9.3. Soit $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ le poids d'un vecteur dans $\wedge^r V$. Notons $-a$ le coefficient de ω_{k-2} , b le coefficient de ω_{k-1} , d le coefficient de ω_{k+1} et $-c$ le coefficient de ω_{k+2} . Alors, les inégalités suivantes sont vérifiées :

- (1) $2a - b + 2c - d - r \leq 8$;

$$(2) 2a - b + c - r \leq 4;$$

$$(3) a + 2c - d - r \leq 5;$$

$$(4) a + c - r \leq 2;$$

$$(5) 2c - d - r \leq 2;$$

$$(6) 2a - b - r \leq 0.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons séparer les poids de V entre quatre familles. Pour chacune d'elles, nous allons donner les valeurs de a , b , c et d . Nous allons aussi donner la valeur e du coefficient de ω_k , mais celle-ci n'est pas utile. Toute l'information se trouve dans le tableau 3.27. Le résultat découle directement de l'étude des valeurs maximales apparaissant dans le tableau.

Racines	$-a$	b	e	d	$-c$	$2a-b+2c-d-1$	$2a-b+c-r$	$a+2c-d-1$	$a+c-1$	$2c-d-1$	$2a-b-1$
$0 \dots 1 \dots 11100 \dots 0 \Leftarrow 0$	0	0	1	1	0	0	-1	0	-1	0	-1
$0 \dots 1 \dots 11110 \dots 0 \Leftarrow 0$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1
$0 \dots 0 11100 \dots 0 \Leftarrow 0$	1	0	1	1	0	-2	-3	-1	-2	0	-3
$0 \dots 0 11110 \dots 0 \Leftarrow 0$	1	0	0	1	-1	-2	-2	-1	-1	0	-3
$0 \dots 0 00100 \dots 0 \Leftarrow 0$	0	-1	2	-1	0	1	0	0	-1	0	0
$0 \dots 0 01100 \dots 0 \Leftarrow 0$	-1	1	1	-1	0	1	0	1	0	0	0
$0 \dots 0 00110 \dots 0 \Leftarrow 0$	0	-1	1	1	-1	1	1	0	0	0	0
$0 \dots 0 01110 \dots 0 \Leftarrow 0$	-1	1	0	1	-1	1	1	1	1	0	0
$0 \dots 0 00111 2 \dots 2 \Leftarrow 1$	0	-1	1	0	-1	2	1	1	0	1	0
$0 \dots 0 01111 2 \dots 2 \Leftarrow 1$	-1	1	0	0	-1	2	1	2	1	2	0
$0 \dots 0 00111 1 \dots 2 \dots \Leftarrow 1$	0	-1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
$0 \dots 0 01111 1 \dots 2 \dots \Leftarrow 1$	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0
$0 \dots 0 00111 \dots 0 \Leftarrow 0$	0	-1	1	0	1	-2	-1	-3	-2	-3	0
$0 \dots 0 01111 \dots 0 \Leftarrow 0$	-1	1	0	0	1	-2	-1	-2	-1	-3	0

TAB. 3.27. Poids de V et valeurs de a, b, c, d et e

□

Avec les trois lemmes 3.9.1, 3.9.2 et 3.9.3, nous avons tous les ingrédients pour montrer que $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Proposition 3.9.1. *Soit λ le poids d'un vecteur dans $\wedge^r V$ qui est $P^{\tilde{D}}$ -dominant. Supposons qu'il existe un élément ω du groupe de Weyl de P^D tel que $\omega(\lambda + \rho) - \rho$ soit P^D dominant. Alors $l(\omega) \leq r$.*

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve du lemme 3.9.3, nous allons noter $-a$ le coefficient de ω_{k-2} , b le coefficient de ω_{k-1} , d le coefficient de ω_{k+1} et $-c$ le coefficient de ω_{k+2} . Il y a neuf cas à considérer.

$$(1) \quad -a < 0, -c < 0, b - a < -2, d - c < -2.$$

Dans ce cas, $l(\omega) \leq 2a - b + 2c - d - 8$. On veut montrer que $r - l(\omega) \geq 0$.
Or, $2a - b + 2c - d - r \leq 8$. D'où, $r - l(\omega) \geq 0$.

$$(2) \quad -a < 0, -c < 0, b - a < -2, d - c \geq -1.$$

Ici, $l(\omega) \leq 2a - b + c - 5$. Or, $2a - b + c - r \leq 4$. D'où, $r - l \geq 1 > 0$.

$$(3) \quad -a < 0, -c < 0, b - a \geq -1, d - c < -2.$$

Sous ces conditions, $l(\omega) \leq a + 2c - d - 5$. Or, $a + 2c - d - r \leq 5$. D'où $r - l \geq 0$.

$$(4) \quad -a < 0, -c < 0, b - a \geq -1, d - c \geq -1.$$

Dans cette situation, $l(\omega) \leq a + c - 2$. Or, $a + c - r \leq 2$. D'où $r - l \geq 0$.

$$(5) \quad -a \geq 0, -c < 0, d - c < -2.$$

Ici, $l(\omega) \leq 2c - d - 4$. Or, $2c - d - r \leq 2$. D'où, $r - l \geq 2 > 0$.

$$(6) \quad -a < 0, -c \geq 0, b - a < -2.$$

Dans ce cas, $l(\omega) \leq 2a - b - 4$. Or, $2c - d - r \leq 0$. D'où, $r - l \geq 4 > 0$.

$$(7) \quad -a \geq 0, -c < 0, d - c \geq 1.$$

Ici, $l(\omega) \leq c - 1$. Or, $c \leq r$. D'où, $r - l \geq 1 > 0$.

$$(8) \quad -a < 0, -c \geq 0, b - a \geq 1.$$

Dans ce cas, $l(\omega) \leq a - 1$. Mais $a \leq r$ D'où, $r - l \geq 1 > 0$.

$$(9) \quad -a \geq 0, -c \geq 0.$$

Sous ces conditions, λ est P^D -dominant. Ainsi, $l(\omega) = 0$.

□

Corollaire 3.9.1. *La variété $V(f)$ est à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Comme nous en avons discuté, il suffit de montrer que $H^i(P^D/P^{\tilde{D}}, \wedge^j V^*) = 0$ pour tout $i > j$ ou encore que $H^i(P^D/P^{\tilde{D}}, (\wedge^j V^*)^\sim) = 0$ pour tout $i > j$. Pour cela, il est suffisant de montrer que si λ est un poids $P^{\tilde{D}}$ -dominant de $\wedge^j V$, alors, $H^i(P^D/P^{\tilde{D}}, \mathbb{C}_\lambda^*) = 0$ pour tout $i > j$. On utilise la proposition 3.9.1 avec le théorème de Borel-Weil-Bott 1.3.1 pour conclure. □

Chapitre 4

LES DIAGRAMMES USD NON OFFICIELS

Nous poursuivons le travail du chapitre précédent en étudiant les diagrammes USD qui ne sont pas officiels. Dans cette situation, nous ne savons pas s'il existe une fonction régulière $f \in \mathbb{C}[n^{\mathbb{D}}]$ qui est un $P^{\mathbb{D}}$ -covariant. En effet, le théorème de Richardson assure l'existence d'un élément nilpotent e tel que $P^{\mathbb{D}}e$ est dense dans $n^{\mathbb{D}}$, mais nous ne savons pas si cet élément est dans $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{D}}$ ou non, ce qui était un point déterminant de la preuve de l'existence d'un covariant dans le cas d'un diagramme USD officiel.

Nous commençons par faire la liste des diagrammes USD non officiels. Pour chacun d'eux, nous déterminons s'il existe $f \in \mathbb{C}[n^{\mathbb{D}}]$ qui est un $P^{\mathbb{D}}$ -covariant. Le cas échéant, nous déterminons si la variété $V(f)$ est normale et si la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. L'approche est ici un peu différente à celle utilisée dans le chapitre précédent puisqu'il n'existe pas nécessairement une résolution de singularités de la variété $V(f)$ de la forme $P^{\mathbb{D}} \times^{\mathbb{Q}} V \rightarrow V(f)$ comme c'était le cas pour les diagrammes USD officiels.

Nous terminons avec une section où nous discutons d'un autre type d'isomorphisme qui apparaît seulement dans le cas où les diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie considérées sont symétriques. Nous reprenons les isomorphismes montrés par Sommers dans [72], [73] et [75] et nous utilisons une approche similaire afin d'obtenir des isomorphismes dans l'algèbre de Lie de type E_6 .

4.1. DIAGRAMMES USD NON OFFICIELS ET EXISTENCE D'UN CO-VARIANT

Dans un premier temps nous allons faire la liste des diagrammes USD non officiels. Pour les diagrammes des algèbres de Lie classiques, nous préciserons seulement où se trouve l'unique deux.

Dans A_n :

$$(1) D(\alpha_k) = 2, \text{ avec } n + 1 - k \neq k.$$

Dans B_n :

$$(1) D(\alpha_n) = 2;$$

$$(2) D(\alpha_k) = 2, \text{ avec } 3k > 2n + 1.$$

Dans C_n :

$$(1) D(\alpha_{2k+1}), \text{ avec } 3k < n - 1;$$

$$(2) D(\alpha_{2k+\epsilon}), \text{ avec } 3k \geq n - \epsilon, \epsilon \in \{0, 1\}, 3k \neq n \text{ et } 2k + \epsilon \neq n.$$

Dans D_n :

$$(1) D(\alpha_k) = 2, \text{ avec } 3k > 2n;$$

$$(2) D(\alpha_n) = 2 \text{ ou } D(\alpha_{n-1}) = 2 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Dans E_6 :

$$(1) \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{matrix};$$

$$(2) \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{matrix};$$

ou les diagrammes obtenus par automorphisme du diagramme de Dynkin.

Dans E_8 :

$$(1) \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{matrix};$$

$$(2) \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{matrix}.$$

Dans F_4 :

$$(1) 0 \ 2 \Rightarrow 0 \ 0.$$

Dans G_2 :

$$(1) 0 \Rightarrow 2.$$

Pour chacun de ces diagrammes de Dynkin pondérés, nous voulons déterminer s'il existe un morphisme P^D -équivariant $f : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathbb{C}_{a\omega_k}$ où $D(\alpha_k) = 2$ et a est un entier strictement positif.

Soit D un diagramme USD. Ce diagramme n'étant composé que d'entrées paires, l'algèbre de Lie du radical unipotent de P^D est tout simplement \mathfrak{n}^D . Comme nous l'avons vu dans la proposition 1.2.1, il existe un élément nilpotent $e \in \mathfrak{n}^D$ tel que $\overline{P^D e} = \mathfrak{n}^D$. Dans le cas où $e \in \mathfrak{g}_2^D$, nous avons montré dans la proposition 2.2.2 qu'un morphisme P^D -équivariant $f : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathbb{C}_{a\omega_k}$ existe si et seulement si un morphisme L^D -équivariant $f : \mathfrak{g}_2^D \rightarrow \mathbb{C}_{a\omega_k}$ existe. On sait aussi dans ce cas que \mathfrak{g}_2^D est un espace vectoriel préhomogène. L'article [67] nous permet alors de savoir si un tel P^D -covariant existe ou non.

Proposition 4.1.1. *Pour les diagrammes USD suivants, il n'existe pas de morphisme P^D -équivariant $f : \mathfrak{n}^D \rightarrow \mathbb{C}_{a\omega_k}$:*

- (1) Dans $C_n : D(\alpha_{2l+1}) = 2$ avec $3l < n - 1$;
- (2) Dans $D_{2l+1} : D(\alpha_{2l+1}) = 2$;
- (3) Dans $E_6 : D = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$ et $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$;

et tous les diagrammes obtenus des précédents pas un automorphisme du diagramme de Dynkin.

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de voir qu'il existe un élément de Richardson dans \mathfrak{g}_2^D et qu'il n'y a pas de L^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$. Commençons par discuter de l'existence d'un élément de Richardson $e \in \mathfrak{g}_2^D$. Dans le cas de D_n avec $D(\alpha_{2l+1}) = 2$, on remarque que $\mathfrak{g}_2^D = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. En ce qui concerne E_6 , les tables de [2] assurent que dans le cas des deux diagramme pondérés mentionnés ci-dessus, il existe un élément de Richardson dans \mathfrak{g}_2^D . Finalement, en ce qui concerne C_n , il suffit d'utiliser le théorème 1.3 de [2] pour conclure.

On cherche alors la décomposition de \mathfrak{g}_2^D comme L^D -module. Nous savons que ce sont des espaces vectoriels préhomogènes irréductibles. Dans le cas de C_n avec $D(\alpha_{2l+1}) = 2$ où $3l < n - 1$, le plus haut poids de \mathfrak{g}_2^D est $\lambda = \{1 \ 1 \dots 1 \ 2 \dots 2 \Rightarrow 1\}_\alpha$ où le premier deux est en position $2l + 2$ ce qui s'écrit dans

la base des poids fondamentaux comme $\{1\ 0 \dots 0\ -1\ 1 \dots 1 \dots 0 \Rightarrow 0\}_\omega$ avec le -1 en position $k = 2l + 1$. Nous savons que $(L^D)'$ est de type $A_{2l} \times C_{n-(2l-1)}$. De sorte que \mathfrak{g}_2^D est isomorphe à $V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$ comme $(L^D)'$ -module. On remarque ici qu'en raison de la condition sur l , $2(n - (2l - 1)) > 2l + 1$, ce qui nous assure avec [67] que \mathfrak{g}_2^D est un espace préhomogène sans covariant.

Dans le cas de D_{2l+1} avec $D(\alpha_{2l+1}) = 2$, le plus haut poids de \mathfrak{g}_2^D est $\lambda = \{1\ 2 \dots 2\ 1\}_\alpha = \{0\ 1\ 0 \dots 0\ 0\}_\alpha$. Ainsi, \mathfrak{g}_2^D est un $(L^D)'$ -module isomorphe à V_{ω_2} où $(L^D)'$ est de type A_{2l} . D'après [67], cet espace n'a pas d'invariants pour $(L^D)'$. Il n'y a donc pas de P^D -covariants sur n^D .

Dans le cas de E_6 avec $D = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$, le plus haut poids de \mathfrak{g}_2^D est $\lambda = \{1\ 2\ 3\ 2\ 2\ 1\}_\alpha = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}_\omega$. Ainsi, \mathfrak{g}_2^D est un $(L^D)'$ -module isomorphe à V_{ω_5} avec $(L^D)'$ de type D_5 . D'après [67], cette représentation n'a pas d'invariants.

Finalement, prenons le diagramme de Dynkin pondéré $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. Le plus haut poids de \mathfrak{g}_2^D est $\lambda = \{1\ 1\ 2\ 2\ 1\}_\alpha = \{1\ -1\ 0\ 1\ 0\}_\omega$. L'espace préhomogène \mathfrak{g}_2^D est isomorphe à $V_{\omega_1} \times V_{\omega_2}$ comme $(L^D)'$ -module, avec $(L^D)'$ de type $A_1 \times A_4$. Encore une fois, [67] nous permet de conclure qu'il n'y a pas de L^D -covariants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^D]$.

□

Pour les autres diagrammes USD non officiels, il nous sera nécessaire de pousser plus loin notre étude afin de déterminer l'existence ou non de covariants. Cela sera fait dans la section suivante.

4.2. GROUPE DE CLASSE ET COVARIANTS

Soit D un diagramme USD. Comme nous l'avons vu dans la section 1.5.3, il y a un lien entre l'existence d'un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$ et le groupe de classe de Ge où e est un élément de Richardson de n^D . Nous utiliserons les résultats la section 1.5.3 avec les connaissances que nous avons sur les groupes de classe des orbites nilpotentes afin de déterminer s'il existe un P^D -covariant f dans $\mathbb{C}[n^D]$. Le cas échéant, nous allons étudier certaines de ses propriétés. Plus précisément, nous sommes intéressés à calculer son poids et son degré. Comme

dans le chapitre précédent, nous voulons aussi déterminer si $V(f)$ est une variété normale et si la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Afin de comprendre le groupe de classe de $G \mathfrak{n}^D$ et d'étudier l'application moment $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$, il nous faudra connaître l'orbite dont la fermeture est $G \mathfrak{n}^D$ et le diagramme de Dynkin pondéré officiel associé à cette orbite. Nous noterons \hat{D} ce diagramme de Dynkin pondéré.

4.2.1. Les diagrammes USD non officiels dans A_n

Nous devons étudier tous les diagrammes de Dynkin pondérés D dans A_n pour lesquels $D(\alpha_k) = 2$ où $k \neq n + 1 - k$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $k < n + 1 - k$. Dans ces différents cas, le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} tel que $N(D) = N(\hat{D})$ vérifie $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{n+1-k}) = 1$ et $D(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \notin \{k, n + 1 - k\}$. Cette orbite correspond à la partition $\lambda = (2 \dots 2 \ 1 \dots 1)$ formée de k deux et de $n + 1 - 2k$ un. Soit $e \in \mathfrak{n}^D$ un élément de Richardson. On sait que dans le cas de A_n , l'application moment $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ est birationnelle. On conclut alors que pour G simplement connexe, $P_e^D = G_e$.

Il nous faut ensuite connaître le groupe de classe de G_e . D'après [40], on sait que $Cl(G_e) \simeq \mathbb{Z}$. Ainsi, le corollaire 1.5.2 nous permet de montrer qu'il n'y a pas de P^D -covariants dans $\mathbb{C}[n^D]$.

Nous reviendrons sur ce cas dans la section 4.3.

4.2.2. Les diagrammes USD non officiels dans B_n

Pour les types B_n et D_n , le groupe simplement connexe et le groupe adjoint associés à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} ne sont pas égaux. On ne peut donc pas utiliser directement les tables de Carter afin de calculer le groupe de caractères de G_e° . Nous pouvons toutefois nous baser sur la section 14 de [56] afin de comprendre le lien qui unit le centralisateur dans le groupe simplement connexe d'un élément de Richardson et son centralisateur dans $SO(2n + 1, \mathbb{C})$ ou $SO(2n, \mathbb{C})$.

Proposition 4.2.1. *Notons G le groupe simplement connexe de type B_n ou D_n et \bar{G} le groupe $SO(2n + 1, \mathbb{C})$ ou $SO(2n, \mathbb{C})$. Soit $e \in \mathfrak{g}$ un élément nilpotent où \mathfrak{g} est*

une algèbre de Lie simple de type B_n ou D_n . Supposons que $G_e/G_e^\circ \simeq \overline{G}_e/\overline{G}_e^\circ$ et que $\mathbb{Z} < X(\overline{G}_e^\circ)$. Alors, $\mathbb{Z} < X(G_e^\circ)$.

DÉMONSTRATION. Il existe un homomorphisme de groupe $\beta : G \rightarrow \overline{G}$ dont le noyau est formé de deux éléments $\{1_G, \epsilon\}$. Puisque nous travaillons sur le corps des complexes, cet homomorphisme est surjectif.

Soit e un élément régulier de n^D . Par hypothèse $G_e/G_e^\circ \simeq \overline{G}_e/\overline{G}_e^\circ$. En utilisant [56], on obtient que $\epsilon \in G_e^\circ$ et $G_e^\circ = \beta^{-1}(\overline{G}_e^\circ)$. Cela nous permet de construire une suite exacte :

$$1 \rightarrow \{1_G, \epsilon\} \rightarrow G_e^\circ \rightarrow \overline{G}_e^\circ \rightarrow 1.$$

En passant au groupe des caractères, on obtient :

$$0 \rightarrow X(\overline{G}_e^\circ) \rightarrow X(G_e^\circ) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Or, par hypothèse $\mathbb{Z} < X(\overline{G}_e^\circ)$. Ainsi, $\mathbb{Z} < X(G_e^\circ)$. □

Étudions les diagrammes de Dynkin pondérés D vérifiant $D(\alpha_n) = 2$. Nous séparerons l'étude en trois cas distincts : $n = 2$; $n \equiv 0 \pmod{2}$ et $n > 2$; $n \equiv 1 \pmod{2}$ et $n > 2$.

Proposition 4.2.2. *Soit D un diagramme USD de B_n vérifiant $D(\alpha_n) = 2$. Alors,*

- (1) si $n = 2$, $\hat{D} = 2 \Rightarrow 0$ et la partition associée est $\lambda = (311)$;
- (2) si $n > 2$ et $n \equiv 0 \pmod{2}$, $\hat{D} = 10 \dots 01 \Rightarrow 0$ et la partition associée est $\lambda = (32 \dots 211)$ avec $n - 2$ deux;
- (3) si $n > 2$ et $n \equiv 1 \pmod{2}$, $\hat{D} = 10 \dots 0 \Rightarrow 1$ et la partition associée est $\lambda = (32 \dots 2)$ avec $n - 1$ deux.

DÉMONSTRATION. (1) La dimension de $G n^D$ est six et il y a une seule orbite de dimension six dans B_2 , c'est celle dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\hat{D} = 2 \Rightarrow 0$.

- (2) Il suffit de voir qu'une matrice générique x de n^D vu dans $SO(2n + 1, \mathbb{C})$ est de rang n et que x^2 est de rang 1.

- (3) Puisque $\mathfrak{n}^{\hat{D}} \subset \mathfrak{n}^D$, il suffit de remarquer que les dimensions de $G \mathfrak{n}^{\hat{D}}$ et $G \mathfrak{n}^D$ sont les mêmes. On passe par la dimension de $G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$ et $G \times^{P^{\hat{D}}} \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Ces deux fibrés vectoriels sont de dimension $n(n+1)$.

□

Proposition 4.2.3. *Soit D un diagramme USD de B_n vérifiant $D(\alpha_n) = 2$. Alors l'application moment $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$ est birationnelle ssi $n > 2$ et $n \equiv 1 \pmod{2}$. Dans les autres cas, elle est génériquement $2 : 1$. Il existe un P^D -covariant seulement dans le cas où l'application moment est birationnelle. Notons f ce covariant. Il est de degré $\frac{n+1}{2}$ et de poids $2\omega_n$. De plus, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. L'article [32] nous donne la cardinalité N_1 d'une fibre générique de l'application μ . Soit $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)$ la partition d'une orbite nilpotente. Dans le cas qui nous intéresse, N_1 prend la forme $N_1 = 2^\nu$ avec $\nu = \frac{1}{2}(-1 + \#\{j \mid \lambda_j \equiv 1 \pmod{2}\})$. Ainsi, si $n \equiv 0 \pmod{2}$, il y a trois nombres impairs dans la partition associée à l'orbite nilpotente et $\nu = 1$. D'où $N_1 = 2$. Dans le cas où $n \equiv 1 \pmod{2}$, il y a seulement un nombre impair dans la partition. D'où $\nu = 0$ et $N_1 = 1$. On vient donc de montrer que l'application moment μ est birationnelle si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Montrons maintenant que dans le cas où $n \equiv 0 \pmod{2}$, il n'existe pas de P^D -covariant non nul dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Tout d'abord, en consultant [21], on remarque que $G_e/G_e^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, pour utiliser la proposition 1.5.6, il suffit de montrer que \mathbb{Z} est un sous-groupe du groupe des caractères de G_e° . On utilise la proposition 4.2.1. Pour cela, nous devons montrer que $G_e/G_e^\circ \simeq \overline{G}_e/\overline{G}_e^\circ$ où \overline{G} est le groupe $SO(2n+1, \mathbb{C})$ et que $\mathbb{Z} < \overline{G}_e^\circ$.

Remarquons que le groupe adjoint de type B_n est $SO(2n+1, \mathbb{C})$. On peut donc consulter la table de la page 92 de [21] afin d'obtenir l'isomorphisme : $G_e/G_e^\circ \simeq \overline{G}_e/\overline{G}_e^\circ$. On utilise ensuite la description de \overline{G}_e° de [18] afin de montrer que $\mathbb{Z} < X(\overline{G}_e^\circ)$.

Les hypothèses de 4.2.1 étant vérifiées, on obtient que $\mathbb{Z} < X(G_e^\circ)$ et il n'y a pas de P^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$.

Passons maintenant au cas où $n \equiv 1 \pmod{2}$. Puisque l'application moment est birationnelle, il suffit de montrer que pour e un élément de Richardson de n^D le groupe de classe de Ge est fini, comme nous l'avons vu dans la proposition 1.5.5. Or, d'après [40], $Cl(Ge) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, il existe un P^D -covariant de poids $2\omega_n$.

Il nous reste à montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Pour ce faire, nous allons décrire ce covariant explicitement en voyant \mathfrak{g} comme l'algèbre de Lie de $SO(2n+1, \mathbb{C})$. Nous allons nous placer dans le cas où le produit bilinéaire symétrique non-dégénéré sur $\mathbb{C}^{(2n+1)}$ utilisé pour définir \mathfrak{g} est de la forme $(u, v) \mapsto u^T J v$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & 1 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et où I_n est la matrice identité n par n .

L'algèbre n^D est formée des matrices carrées dans $\text{Mat}(2n+1, \mathbb{C})$ de la forme $m(v, X) = \begin{pmatrix} 0 & v & X \\ 0 & 0 & -v^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $v \in \mathbb{C}^n$ et X une matrice antisymétrique n par n . Le covariant f consiste à prendre le pfaffien de la matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} X & v \\ -v^T & 0 \end{pmatrix}$. Ce pfaffien ne sera pas identiquement nul puisque la matrice ainsi formée est de taille $n+1$ et $n+1$ est bien un nombre pair. Il est donc possible de former une matrice antisymétrique de rang maximal $n+1$. Cela nous permet de conclure que f est de degré $\frac{n+1}{2}$ et $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles, voir par exemple [54]. \square

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des diagrammes USD D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n+1$, mais $k \neq n$. Il y a trois types de diagrammes de Dynkin pondérés. Pour un seul de ces types, il existe un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$. Nous omettrons les preuves ici qui sont en tout point similaires à celles que nous ferons dans le cas de D_n . Il faut cependant faire attention à la parité qui n'est pas la même que dans le cas de D_n .

Proposition 4.2.4. *Soit D un diagrammes USD de B_n tel que $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n+1$ et $k \neq n$. Alors,*

- (1) Si $3k = 2n+2$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_{k-1}) = 2$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-1} 11)$.

(2) Si $k \equiv 0 \pmod{2}$ et $3k \neq 2n + 2$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_{k-1}) = \hat{D}(\alpha_{k-r-1}) = 1$ avec $r = 3k - 2n - 2$ et la partition associée à cette orbite est

$$\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r-1} \underbrace{2 \dots 2}_r 11).$$

(3) Si $k \equiv 1 \pmod{2}$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{k-r}) = 1$ avec $r = 3k - 2n - 1$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r} \underbrace{2 \dots 2}_r)$.

Proposition 4.2.5. Soit D un diagramme USD de B_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n + 1$ et $k \neq n$. Alors l'application moment $\mu : G \times^{P^D} n^D$ est birationnelle ssi $k \equiv 1 \pmod{2}$. Dans les autres cas, elle est génériquement $2 : 1$. De plus, il existe un P^D -covariant seulement dans le cas où l'application moment est birationnelle. Il est de poids ω_k .

Nous allons étudier la restriction du P^D -covariant f à $n^{\hat{D}}$. Le but est de construire un morphisme birationnel entre une variété de la forme $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(\hat{f})$, où \hat{f} est un $P^{\hat{D}}$ -covariant dans $\mathbb{C}[n^{\hat{D}}]$, et $V(f)$. Nous pourrons montrer à partir de cela que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Commençons par décrire le $L^{\hat{D}}$ -module $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$. Posons $s = k - r = 2(n - k) + 1$. Le $L^{\hat{D}}$ -module $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$ est formé de matrices de la forme :

$$m(A, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & v & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec C une matrice antisymétrique $(3k - 2n - 1) \times (3k - 2n - 1)$, $v \in \mathbb{C}^s$ et $A, B \in \text{Mat}(s \times (n - k), \mathbb{C})$. Il existe deux $L^{\hat{D}}$ -covariants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}]$. Un premier est défini comme le déterminant de la matrice $(A|v|B)$. Il est de poids ω_s . Le deuxième $L^{\hat{D}}$ -covariant est obtenu en prenant le pfaffien la matrice C . Il est de poids $-\omega_s + \omega_k$. Ces deux $L^{\hat{D}}$ -covariants induisent des $P^{\hat{D}}$ -covariants sur $\mathbb{C}[n^{\hat{D}}]$ que nous noterons f_1 et f_2 .

Le P^D -covariant f lorsque restreint à $n^{\hat{D}}$ est un $P^{\hat{D}}$ -covariant et doit être un produit de f_1 et de f_2 . En comparant les poids de f , f_1 et f_2 , on déduit que $f|_{n^{\hat{D}}} = f_1 f_2$.

Proposition 4.2.6. *Soit D un diagramme USD de B_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n + 1$, $k \neq n$ et $k \equiv 1 \pmod{2}$. Soit f l'unique P^D -covariant irréductible, à multiplication par un scalaire près. Alors, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Nous savons que $G n^D = G n^{\hat{D}}$. Puisque $n^{\hat{D}} \subset n^D$, on conclut que $P^D n^{\hat{D}} = n^D$. Ainsi, si $y \in V(f)$, il existe $x \in n^{\hat{D}}$ et $p \in P^D$ tels que $y = px$. De sorte que $f(x) = f(p^{-1}x) = 0$. Puisque $f|_{n^{\hat{D}}} = f_1 f_2$, on doit avoir $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x) = 0$. On conclut que $P^D V(f_1) \cup P^D V(f_2) = V(f)$. Or, $V(f)$ est une variété irréductible et $P^D V(f_1)$ et $P^D V(f_2)$ sont des fermés. Il faut donc que $P^D V(f_1) = V(f)$ ou $P^D V(f_2) = V(f)$. Ce qui veut dire qu'au moins un des deux morphismes $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_1) \rightarrow V(f)$ ou $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est surjectif.

Le $P^{\hat{D}}$ -covariant f_1 permet de construire la suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}\omega_s)^*[-s] \rightarrow \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_1)} \rightarrow 0,$$

alors que le $P^{\hat{D}}$ -covariant f_2 permet de construire la suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_s + \omega_k})^*[-\frac{k+s}{2}] \rightarrow \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)} \rightarrow 0.$$

On montre maintenant l'annulation des groupes de cohomologie

$H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}, \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}\omega_s)^*)$, $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}, \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}})$ et $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}, \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_s + \omega_k})^*)$ pour $i \geq 1$. Pour cela, on calcule le faisceau canonique de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}$. On trouve que

$$\omega_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \simeq \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}_{-(k+s)\omega_s + (2n-k)\omega_k})^*.$$

Avec le théorème 1.3.4, on obtient les résultats souhaités. Ainsi, les groupes de cohomologie $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_j), \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_j)})$ s'annulent pour tout $i \geq 1$ et pour $j \in \{1, 2\}$.

Soit f_i le $P^{\hat{D}}$ -covariant tel que $P^D V(f_i) = V(f)$. Puisque $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i) \rightarrow V(f)$ est surjectif et que les dimensions de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)$ et $V(f)$ sont les mêmes, le

morphisme induit par la factorisation de Stein $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)])$ est propre et birationnel. D'après la proposition 2.4.4, la normalisation de la variété $\text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)])$ est à singularités rationnelles. Mais $V(f_j)$ est une variété normale pour $j \in \{1, 2\}$ d'après [54]. Ainsi, $\text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)])$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i) & \longrightarrow & P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^D V(f_i) = V(f) & \hookrightarrow & P^D n^{\hat{D}} = n^D \end{array}$$

induit un second diagramme commutatif au niveau des anneaux des fonctions régulières :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}] \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{C}[V(f)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[n^D] \end{array}$$

On conclut que $\mathbb{C}[V(f)] \simeq \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)]$ et donc $V(f) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_i)])$ est une variété normales à singularités rationnelles. \square

4.2.3. Les autres diagrammes USD non officiels dans C_n

Il nous reste à étudier les diagrammes de Dynkin pondérés D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k = 2l + \epsilon$, $3l \geq n - \epsilon$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$, $3l \neq n$ et $k \neq n$, le cas où $k = 2l + 1$ avec $3l < n - 1$ ayant été traité dans la proposition 4.1.1. Dans un premier temps, on cherche le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} tel que $N(D) = N(\hat{D})$.

Proposition 4.2.7. *Soit D un diagramme USD de C_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k = 2l + \epsilon$, $3l \geq n - \epsilon$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$, $3l \neq n$ et $k \neq n$. Alors le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_{2l+\epsilon-r}) = \hat{D}(\alpha_{2l+\epsilon}) = 1$ où $r = 3k - 2n$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r} \underbrace{2 \dots 2}_r)$.*

DÉMONSTRATION. Ici, comme $n^{\hat{D}} \subset n^D$, il suffit de vérifier que les dimensions de $G n^{\hat{D}}$ et $G n^D$ sont les mêmes. Cela se fait en comparant $2 \dim n^D$ qui est la dimension de $G n^D$ et la dimension de l'orbite donnée par la partition λ trouvée dans [18].

□

Nous pouvons utiliser la description de \hat{D} et de la partition associée à cette orbite nilpotente pour démontrer l'existence d'un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$.

Proposition 4.2.8. *Soit D un diagramme USD de C_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k = 2l + \epsilon$, $3l \geq n - \epsilon$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$ et $k \neq n$. Alors il existe un P^D -covariant f dans $\mathbb{C}[n^D]$ de poids $2\omega_k$.*

DÉMONSTRATION. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'application moment $\mu : G \times^{P^D} n^D$ est birationnelle. Pour cela, on étudie la cardinalité N_1 d'une fibre générique de l'application μ toujours en utilisant [32]. On note $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)$ la partition associée à l'orbite de D . Ici, N_1 prend la forme $N_1 = 2^\nu$ où $\nu = -\frac{1}{2}(-2n - 2k) + \#\{j \mid \lambda_j \equiv 1 \pmod{2}\}$. Ainsi, $\nu = -\frac{1}{2}(-2n + 2k + k - r) = 0$. D'où, $N_1 = 2^\mu = 1$. On conclut que l'application moment μ est birationnelle.

Pour utiliser la proposition 1.5.5, nous devons montrer que pour e un élément de Richardson de n^D , le groupe de classe $Cl(Ge)$ est un groupe fini. Plus précisément, nous voulons montrer que $Cl(Ge) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On utilise les résultats de [40] en se rappelant que la partition associée à l'orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r} \underbrace{2 \dots 2}_r)$.

□

Nous voulons maintenant montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Nous allons utiliser la même approche que dans le cas de B_n . Dans un premier temps, nous allons étudier la restriction du P^D -covariant f à $n^{\hat{D}}$. Nous trouverons alors que $f|_{n^{\hat{D}}} = f_1 f_2$ où f_1 et f_2 sont des $P^{\hat{D}}$ -covariants. Cela nous permettra de construire un morphisme birationnel $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow$

$V(f)$. En utilisant le théorème 1.3.4 et le faisceau canonique de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}$, nous pourrons déduire que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Notons $s = 2(n - k)$. Le $L^{\hat{D}}$ -module $g_2^{\hat{D}}$ est formé de matrices de la forme :

$$m(A, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec C une matrice symétrique $(3k-2n) \times (3k-2n)$ et $A, B \in \text{Mat}(s \times (n-k), \mathbb{C})$. Comme dans le cas de B_n , il existe deux $L^{\hat{D}}$ -covariants dans $\mathbb{C}[g_2^{\hat{D}}]$. Le premier est défini comme le déterminant de la matrice $(A|B)$. Il est de poids ω_s . Le deuxième est le déterminant de la matrice C . Il est de poids $-2\omega_s + 2\omega_k$. Il induisent des $P^{\hat{D}}$ -covariants sur $\mathbb{C}[n^{\hat{D}}]$ que nous noterons f_1 et f_2 .

Le P^D -covariant f lorsque restreint à $n^{\hat{D}}$ est un $P^{\hat{D}}$ -covariant non identiquement nul et doit être un produit de f_1 et de f_2 . Pour que les poids concordent, on trouve que $f|_{n^{\hat{D}}} = f_1^2 f_2$. En particulier, on déduit f est de degré $2(2(n-k)) + 3k - 2n = 2n - k$.

Proposition 4.2.9. *Soit D un diagramme USD de C_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k = 2l + \epsilon$, $3l \geq n - \epsilon$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$ et $k \neq n$. Soit f l'unique covariant irréductible à multiplication par un scalaire près. Alors, la variété $V(f)$ est normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. La preuve reprend les mêmes arguments que ceux de la proposition 4.2.6. La seule différence est dans le calcul du faisceau canonique de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}$. On trouve que $\omega_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \simeq \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}_{-(k-s)\omega_s + (2n-k+1)\omega_k})^*$. On utilise le théorème de 1.3.4 pour conclure. \square

4.2.4. Les autres diagrammes USD non officiels dans D_n

Il nous reste à étudier les diagrammes USD D vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$. Le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} dépend de la parité de k . Nous allons donner les différentes possibilités dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.10. *Soit D un diagramme USD de D_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$ et $k \notin \{n-1, n\}$. Alors,*

- (1) *Si $3k = 2n + 1$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_{k-1}) = 2$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-1} 11)$.*
- (2) *Si $k \equiv 0 \pmod{2}$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{k-r}) = 1$ avec $r = 3k - 2n$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r} \underbrace{2 \dots 2}_r)$.*
- (3) *Si $k \equiv 1 \pmod{2}$ et $3k \neq 2n + 1$, alors \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_{k-1}) = \hat{D}(\alpha_{k-r-1}) = 1$ avec $r = 3k - 2n - 1$ et la partition associée à cette orbite est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r-1} \underbrace{2 \dots 2}_r 11)$.*

DÉMONSTRATION. (1) On commence par voir que les dimensions de $N(D)$ et de $N(\hat{D})$ sont les mêmes en calculant les dimensions de $G \times^{pD} n^D$ et $G \times^{p\hat{D}} n^{\hat{D}}$. On remarque ensuite qu'une matrice générique X de n^D est de rang $2k - 2$ et X^2 est de rang $k - 1$.

(2) Dans ce cas, $n^{\hat{D}} \subset n^D$. Il suffit donc de vérifier que les dimensions de $N(D)$ et de $N(\hat{D})$ sont les mêmes, ce qui est le cas.

(3) On vérifie encore une fois que les dimensions de $N(D)$ et de $N(\hat{D})$ sont les mêmes. Puis on vérifie qu'un élément générique de n^D dans $SO(2n, \mathbb{C})$ est de rang $2k - r - 2$ et son carré de rang $k - 1$.

□

Nous devons maintenant déterminer dans quels cas est-ce que l'application moment $\mu : G \times^{pD} n^D \rightarrow G n^D$ est birationnelle. Pour cela, nous utilisons les résultats de Hesselink provenant de [32]. Dans le cas, où μ n'est pas birationnelle, nous savons que c'est un morphisme génériquement fini. Il nous faut savoir quelle est la cardinalité d'une fibre générique.

Lemme 4.2.1. *Soit D un diagramme USD de D_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$ et $k \notin \{n-1, n\}$. Alors, l'application moment $\mu : G \times^{P^D} n^D \rightarrow G n^D$ est birationnelle ssi $k \equiv 0 \pmod{2}$. Dans les autres cas, elle est génériquement $2 : 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit D un diagramme pondéré comme dans l'énoncé et dont la partition associée est $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)$. Selon [32], la cardinalité générique d'une fibre de l'application moment est dans ce cas $N_1 = 2^\nu$ où $\nu = \frac{1}{2}(- (2n - 2k) + \#\{j \mid \lambda_j \equiv 1 \pmod{2}\})$.

Dans le cas où $3k = 2n + 1$, $\nu = \frac{1}{2}(- (2n - 2k) + k + 1) = 1$; d'où $N_1 = 2$. Dans le cas où $k \equiv 0 \pmod{2}$, $\nu = \frac{1}{2}(- (2n - 2k) + k - r) = 0$; d'où $N_1 = 1$. Finalement, dans le cas où $k \equiv 1 \pmod{2}$ et $3k \neq 2n + 1$, $\nu = \frac{1}{2}(- (2n - 2k) + k - r - 1 + 2) = 1$; d'où $N_1 = 2$.

Ainsi, l'application moment μ est birationnelle ssi $k \equiv 0 \pmod{2}$ et dans les autres cas, elle est génériquement $2 : 1$. \square

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de P^D -covariant non nul dans $\mathbb{C}[n^D]$ dans le cas où $k \equiv 1 \pmod{2}$.

Proposition 4.2.11. *Soit D un diagramme USD de D_n tel que $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$ et $k \equiv 1 \pmod{2}$. Alors, il n'existe pas de P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 4.2.1, l'application moment $\mu : G \times^{P^D} n^D \rightarrow G n^D$ est génériquement $2 : 1$. En consultant [21], on remarque que $G_e/G_e^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour utiliser la proposition 1.5.6, il suffit donc de montrer que \mathbb{Z} est un sous-groupe du groupe des caractères de G_e° . On utilise encore une fois la proposition 4.2.1. Comme on se le rappelle, nous devons montrer que $G_e/G_e^\circ \simeq \overline{G}_e/\overline{G}_e^\circ$ où \overline{G} est le groupe $SO(2n, \mathbb{C})$ et que $\mathbb{Z} < \overline{G}_e^\circ$.

Puisqu'il y a deux un dans la partition associée à l'orbite définie par D , [56] nous assure que le premier isomorphisme est vérifié. Dans le même article, une description de \overline{G}_e est donnée. En prenant la partie connexe, on trouve bien que $\mathbb{Z} < \overline{G}_e^\circ$.

Les hypothèses de 4.2.1 étant vérifiées, on obtient que $\mathbb{Z} < X(G_e^\circ)$ et il n'y a pas de P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$. \square

Reste à montrer l'existence d'un covariant dans le cas où $k \equiv 0 \pmod{2}$.

Proposition 4.2.12. *Soit D un diagramme USD de D_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$, $k \notin \{n-1, n\}$ et $k \equiv 0 \pmod{2}$. Alors, il existe un P^D -covariant de poids ω_k .*

DÉMONSTRATION. Nous avons montré que dans ce cas, l'application moment μ est birationnelle. Afin d'utiliser la proposition 1.5.5, il suffit de montrer que pour e un élément de Richardson de n^D , le groupe de classe de Ge est trivial.

Nous savons que la partition associée à e un élément de Richardsons dans n^D est $\lambda = (\underbrace{3 \dots 3}_{k-r} \underbrace{2 \dots 2}_r)$, où $r = 3k - 2n$. En utilisant les résultats de [40], on déduit que $Cl(Ge) \simeq 1$. Ainsi, il existe un P^D -covariant irréductible f dans $\mathbb{C}[n^D]$ de poids ω_k . \square

Mous prenons ici la même approche que dans le cas de B_n afin de montrer que la variété $V(f)$ est normale à singularités rationnelles. Dans un premier temps, nous allons donner un peu d'information sur la restriction f à $n^{\hat{D}}$. Cela nous permettra du même coup de trouver un morphisme birationnel entre une variété normale à singularités rationnelles et $V(f)$. Ce morphisme sera ensuite utilisé afin de montrer que $V(f)$ est aussi une variété normale à singularités rationnelles.

Notons $s = 2(n - k)$. Il existe deux $P^{\hat{D}}$ -covariants dans $\mathbb{C}[n^{\hat{D}}]$. Pour les trouver, on commence par décrire l'algèbre $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$ et on trouve deux $L^{\hat{D}}$ -covariants. Les matrices dans $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$ sont de la forme :

$$m(A, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec C une matrice antisymétrique $(3k - 2n) \times (3k - 2n)$ et $A, B \in \text{Mat}(2(n - k) \times (n - k), \mathbb{C})$. Un premier $P^{\hat{D}}$ -covariant f_1 consiste à prendre le déterminant de la matrice $(A|B)$. Il est de poids ω_s . Le deuxième $P^{\hat{D}}$ -covariant f_2 est obtenu en prenant le pfaffien la matrice C . Il est de poids $-\omega_s + \omega_k$.

Le P^D -covariant f lorsque restreint à $n^{\hat{D}}$ est un $P^{\hat{D}}$ -covariant et doit être un produit de f_1 et de f_2 . La seule possibilité pour obtenir le bon poids est que $f|_{n^{\hat{D}}} = f_1 f_2$. On en déduit que f est de degré $\frac{1}{2}(2n - k)$.

Proposition 4.2.13. *Soit D un diagramme USD de D_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $3k > 2n$, $k \notin \{n - 1, n\}$ et $k \equiv 0 \pmod{2}$. Soit f l'unique P^D -covariant irréductible, à multiplication par un scalaire près dans $\mathbb{C}[n^D]$. Alors, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. On suit exactement la preuve de la proposition 4.2.6. La seule différence est le faisceau canonique de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}$ qui est ici $\omega_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \simeq \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}_{-(k-s)\omega_s + (2n-k-1)\omega_k})^*$. \square

4.2.5. Les diagrammes USD non officiels dans E_8

Il y a seulement deux diagrammes de Dynkin pondérés à étudier : $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$ et $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$.

Nous allons introduire une notation que nous conserverons tout au long de cette section. Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes de G et supposons que $H_1 < H_2$. Soit V un H_1 -module. Nous notons $H^i(H_2/H_1, V)$ le groupe de cohomologie $H^i(H_2/H_1, \mathcal{L}_{H_1/H_2}(V))$.

Commençons avec $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$. On cherche le diagramme de Dynkin pondéré officiel d'une orbite nilpotente \hat{D} pour lequel $N(D) = N(\hat{D})$. Remarquons dans un premier temps que $G n^D$ est de dimension 196. En étudiant les tables de [18], on observe qu'il y a trois orbites qui ont cette dimension :

- (1) A_5 dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$;
- (2) $D_5(\alpha_1) + A_1$ dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$;
- (3) $A_4 + A_2 + A_1$ dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \end{smallmatrix}$.

Notons \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré officiel de cette troisième orbite. On remarque que $\mathfrak{n}^{\hat{D}} \subset \mathfrak{n}^D$. Ainsi, $G \mathfrak{n}^{\hat{D}} \subset G \mathfrak{n}^D$. Mais ce sont deux variétés irréductibles de même dimension. On conclut que $G \mathfrak{n}^{\hat{D}} = G \mathfrak{n}^D$.

On veut maintenant savoir si l'application moment $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ est birationnelle. Nous pouvons consulter les tables du chapitre 8 de [21]. Puisque $G_e/(G_e)^\circ$ est trivial, on conclut que l'application moment est birationnelle.

Nous voulons maintenant montrer qu'il existe un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Pour cela, il suffit de montrer que le groupe de classe de G_e est fini. On sait que pour une algèbre de Lie de type E_8 , le groupe adjoint et le groupe semi-simple correspondant sont isomorphes. On peut donc utiliser les tables de [18] afin de déterminer le groupe de classe de G_e . On trouve que $Cl(G_e) = 1$. Ainsi, d'après 1.5.5, il existe un P^D -covariant irréductible f de poids ω_3 .

Nous allons commencer par calculer le degré de f obtenant du même coup une meilleure description de ce covariant. Puis nous allons montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Proposition 4.2.14. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix}$. Alors, l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant f irréductible de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ est de degré 13.*

DÉMONSTRATION. D'après [38], il existe deux $P^{\hat{D}}$ -covariants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$, un premier f_1 de degré 12 et un second f_2 de degré 1. Ils sont de poids $\lambda_1 = \{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix} \}_\omega$ et $\lambda_2 = \{ \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix} \}_\omega$. Puisque $f|_{\mathfrak{n}^{\hat{D}}}$ est un $P^{\hat{D}}$ -covariant non identiquement nul de poids ω_3 , on conclut que $f|_{\mathfrak{n}^{\hat{D}}} = f_1 f_2$ et donc que f est de degré 13. \square

Passons maintenant à l'étude des singularités de $V(f)$. Pour cela, nous allons commencer par trouver une résolution de singularités pour $V(f)$.

Lemme 4.2.2. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{smallmatrix}$ et f l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Alors, la restriction de l'application moment $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités.*

DÉMONSTRATION. Remarquons dans un premier temps que $V(f_2)$ est une variété lisse puisque f_2 est linéaire. Ainsi, $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)$ est aussi une variété lisse.

Afin de montrer que $\mu : P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités, nous devons montrer que les fibres de ce morphisme sont génériquement de cardinalité un et que l'image est bien $V(f)$. Si la première condition est vérifiée, il suffit de montrer que les dimensions de $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)$ et de $V(f)$ sont égales, ce qui est le cas. Reste donc à voir que les fibres de μ sont génériquement de cardinalité un.

On peut écrire $\mathfrak{n}^{\hat{D}} = \mathbb{C}_{\omega_3 - \omega_6} \oplus V(f_2)$. Cette décomposition respecte la structure de $P^{\hat{D}}$ -module de $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$. De plus, $V(f_2)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$.

Notons $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. C'est le diagramme de Dynkin pondéré officiel de l'unique orbite maximale dans $G \mathfrak{n}^{\hat{D}} \setminus G\hat{e}$ où \hat{e} est un élément régulier de $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$. On remarque que $V(f_2) \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Nous voulons montrer que $G \mathfrak{n}^{\hat{D}} = GV(f_2)$.

Le morphisme $\pi : G/P^{\hat{D}} \rightarrow G/P^{\tilde{D}}$ induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{\tilde{D}}, H^j(P^{\tilde{D}}/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)])) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]).$$

Des calculs dans Sage nous permettent de montrer que $H^j(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et $H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$. Ainsi, la suite spectrale dégénère et $H^i(G/P^{\tilde{D}}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]) \simeq H^i(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)])$. De cela, on déduit que $GV(f_2) = G \mathfrak{n}^{\hat{D}}$.

Il existe ainsi $\tilde{e} \in V(f_2) \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$ un élément générique de $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Puisque \tilde{D} est un diagramme de Dynkin pondéré officiel, $G_{\tilde{e}} = P_{\tilde{e}}^{\tilde{D}}$. Afin de prouver que les fibres de μ sont génériquement de cardinalité un, il faut montrer que $P_{\tilde{e}}^D = P_{\tilde{e}}^{\hat{D}}$. Mais $P^D \cap P^{\tilde{D}} = P^{\hat{D}}$. D'où $P_{\tilde{e}}^D \subset P^{\hat{D}}$ et donc $P_{\tilde{e}}^D = P_{\tilde{e}}^{\hat{D}}$. Reste à voir que $P^D \tilde{e} \cap V(f_2) = P^{\hat{D}} \tilde{e}$. On sait que $V(f_2) \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Ainsi, $(P^D \tilde{e} \cap V(f_2)) \subset (P^D \cap P^{\tilde{D}}) \tilde{e}$ et donc $P^D \tilde{e} \cap V(f_2) = P^{\hat{D}} \tilde{e}$. Cela nous permet de conclure que $\mu : P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est un morphisme birationnel à l'aide du lemme 1.2.1. \square

Cette résolution de singularités nous permet maintenant de montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Proposition 4.2.15. Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \end{smallmatrix}$ et f le P^D -covariant irréductible de degré 13 et de poids ω_3 (unique à multiplication par un scalaire près). Alors, $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

DÉMONSTRATION. L'application moment $P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités. Nous voulons montrer que $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2), \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Le covariant f_2 induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}\omega_3 - \omega_6)^*[-1] \rightarrow \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)} \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte courte induit une suite longue exacte en cohomologie. Or, $\omega_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}} \simeq \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}^*_{13\omega_3 - \omega_6})$. Ainsi, d'après le théorème 1.3.4, $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}, \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}, \mathcal{L}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}}(\mathbb{C}\omega_3 - \omega_6)^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ce qui nous permet de conclure que les groupes de cohomologie $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2), \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)})$ sont nuls pour tout $i \geq 1$ et par le fait même que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Reste à montrer que $V(f)$ est une variété normale. L'inclusion $\iota : P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}$ permet de construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2) & \xrightarrow{\iota} & P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^D V(f_2) & \xrightarrow{\iota} & P^D n^{\hat{D}} = n^D. \end{array}$$

En passant aux anneaux des fonctions régulières, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}] \\ \uparrow & & \uparrow \iota \\ \mathbb{C}[V(f)] & \longleftarrow & \mathbb{C}[n^D]. \end{array}$$

Mais puisque $\mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} n^{\hat{D}}] \rightarrow \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)]$ est surjectif, on conclut que $\mathbb{C}[V(f)] \simeq \mathbb{C}[P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)]$ et donc $V(f)$ est une variété normale. \square

Le deuxième diagramme pondéré que nous voulons étudier s'écrit sous la forme $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \end{smallmatrix}$. Comme ci-haut, on calcule la dimension de $G n^D$ qui est 212. Il y a deux orbites ayant cette dimension :

- (1) $A_6 + A_1$ dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel $\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix}$;
- (2) $E_7(\alpha_4)$ dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix}$.

Notons \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré officiel de la première de ces deux orbites. Puisque $\mathfrak{n}^{\hat{D}} \subset \mathfrak{n}^D$, on conclut que $G \mathfrak{n}^{\hat{D}} = G \mathfrak{n}^D$.

On veut maintenant savoir si l'application moment $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$ est birationnelle. Soit e un élément régulier de \mathfrak{n}^D . On consulte les tables du chapitre 8 de [21] pour comprendre la structure de G_e/G_e° . On trouve que ce groupe est trivial. Ainsi, l'application moment est birationnelle.

Nous voulons maintenant montrer qu'il existe un P^D -covariant dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Pour cela, il suffit de montrer que le groupe de classe de G_e est fini. En utilisant les tables de Carter [18], on voit que $Cl(G_e) = 1$. Ainsi, d'après 1.5.5, il existe un P^D -covariant irréductible de poids ω_4 .

Nous allons obtenir une meilleure description du P^D -covariant f , calculant entre autre son degré. Puis nous allons montrer que $V(f)$ n'est pas normale. Finalement, nous montrerons que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.

Proposition 4.2.16. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix}$. Alors, l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible f est de degré 29.*

DÉMONSTRATION. D'après [38], il existe trois $P^{\hat{D}}$ -covariants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$ de degré 2, 1 et 6 respectivement. Notons les f_1 , f_2 et f_3 . Ils sont en correspondance avec les trois plus hauts poids de $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$ qui sont respectivement $\lambda_1 = \{ \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix} \}_\omega$, $\lambda_2 = \{ \begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix} \}_\omega$ et $\lambda_3 = \{ \begin{smallmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix} \}_\omega$.

Considérons $f|_{\mathfrak{n}^D}$. C'est un $P^{\hat{D}}$ -covariant non identiquement nul de poids ω_4 . Il doit donc être un produit de f_1 , f_2 et f_3 . Mais un seul produit est de poids ω_4 , c'est $f_1^5 f_2 f_3^3$. Ainsi, $f|_{\mathfrak{n}^D} = f_1^5 f_2 f_3^3$ et f est de degré 29. \square

Passons maintenant à l'étude de la normalité de la variété $V(f)$.

Proposition 4.2.17. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{smallmatrix}$ et f l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ de poids ω_4 . Alors $V(f)$ n'est pas une variété normale.*

DÉMONSTRATION. Soit f le P^D -covariant dans $\mathbb{C}[n^D]$ de poids ω_4 . L'inclusion de $n^{\hat{D}}$ dans n^D nous permet d'obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} n^{\hat{D}} & \xrightarrow{\iota} & n^D \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & \mathbb{C}_{\omega_4} . \end{array}$$

Soit $e \in n^{\hat{D}} \subset n^D$ un élément de Richardson. Alors $f(e) \neq 0$. En effet, si $f(e) = 0$, on obtient l'inclusion $Ge \subset GV(f)$ qui est un fermé. Mais alors $\overline{Ge} = G n^D \subset GV(f)$, ce qui est impossible. On conclut que $f(e) \neq 0$.

Il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[n^D](-m) \otimes \mathbb{C}_{\omega_4}^* \rightarrow \mathbb{C}[n^D] \rightarrow \mathbb{C}[n^D]/(f) \rightarrow 0,$$

où m est le degré de f . Cela nous donne une suite exacte longue en cohomologie. D'après [14], $H^i(G/P^D, \mathbb{C}[n^D](-m) \otimes \mathbb{C}_{\omega_4}^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On obtient donc une suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G \times^{P^D} n^D, \mathbb{C}_{\omega_4}^*)(-m) &\rightarrow H^0(G \times^{P^D} n^D, \mathcal{O}_{G \times^{P^D} n^D}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(G \times^{P^D} V(f), \mathcal{O}_{G \times^{P^D} V(f)}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la restriction de l'application moment $\mu : G \times^{P^D} V(f) \rightarrow GV(f)$. Elle se factorise par $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^{P^D} V(f)])$:

$$\begin{array}{ccc} G \times^{P^D} V(f) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^{P^D} V(f)]) \\ & \searrow \mu & \downarrow \\ & & GV(f). \end{array}$$

Mais $GV(f) \simeq G n^{\tilde{D}}$, où $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. D'après Richardson, $\mathbb{C}[G \times^{P^D} n^D] \simeq \mathbb{C}[\widetilde{G n^{\tilde{D}}}]$ contient une copie de \mathfrak{g} , alors que $\mathbb{C}[\widetilde{G n^{\tilde{D}}}]$ en contient deux.

Supposons maintenant que $V(f)$ soit normale. Alors, $G \times^{P^D} V(f)$ l'est aussi, ainsi que $\mathbb{C}[G \times^{P^D} V(f)]$. D'après la propriété universelle de la normalisation, il existe un morphisme surjectif $\text{Spec}(\mathbb{C}[G \times^{P^D} V(f)]) \rightarrow \widetilde{G n^{\tilde{D}}}$. Ainsi, il existe une injection $\mathbb{C}[\widetilde{G n^{\tilde{D}}}] \hookrightarrow \mathbb{C}[G \times^{P^D} V(f)]$. Mais, $\mathbb{C}[\widetilde{G n^{\tilde{D}}}]$ contient deux copies de \mathfrak{g} ,

alors que $\mathbb{C}[G \times^{\mathbb{P}^D} \mathfrak{n}^D]$ qui se surjecte dans $\mathbb{C}[G \times^{\mathbb{P}^D} V(f)]$ en contient une seule. Ce qui est une contradiction. Ainsi $V(f)$ ne peut pas être normale.

□

Reste à montrer que la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles. Pour cela nous avons besoin d'une résolution de singularités de $V(f)$.

Lemme 4.2.3. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$ et f l'unique, à multiplication par un scalaire près, \mathbb{P}^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Alors, la restriction de l'application moment $\mu : \mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est une résolution de singularités.*

DÉMONSTRATION. La preuve est vraiment similaire à celle du lemme 4.2.2. On se rappelle que f_2 est un $\mathbb{P}^{\hat{D}}$ -covariant linéaire. Ainsi, $V(f_2)$ est une variété lisse. D'où $\mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\hat{D}}} V(f_2)$ est lisse.

Les dimensions de $\mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\hat{D}}} V(f_2)$ et $V(f)$ sont les mêmes. Afin de montrer que μ est birationnel, il suffit de voir que génériquement, les fibres de μ sont de cardinalité un.

Notons $\tilde{D} = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. C'est le diagramme de Dynkin pondéré officiel de l'unique orbite maximale dans le bord de $G \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Il est important de noter que $V(f_2) \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$. Comme dans la preuve du lemme 4.2.2, la prochaine étape est de montrer que $G \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = GV(f_2)$.

Le morphisme $\pi : G/\mathbb{P}^{\hat{D}} \rightarrow G/\mathbb{P}^{\tilde{D}}$ induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/\mathbb{P}^{\tilde{D}}, H^j(\mathbb{P}^{\hat{D}}/\mathbb{P}^{\tilde{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)])) \Rightarrow H^{i+j}(G/\mathbb{P}^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]).$$

À l'aide de Sage, nous pouvons montrer que $H^j(G/\mathbb{P}^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et $H^0(G/\mathbb{P}^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)]) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$. On en déduit que la suite spectrale dégénère et $H^i(G/\mathbb{P}^{\tilde{D}}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]) \simeq H^i(G/\mathbb{P}^{\hat{D}}, \mathbb{C}[V(f_2)])$. Ainsi, $GV(f_2) = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$.

Il existe $\tilde{e} \in V(f_2) \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$ un élément générique de $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$, élément dont le centralisateur vérifie $G_{\tilde{e}} = \mathbb{P}_{\tilde{e}}^{\tilde{D}}$. Reste à en déduire que $\mathbb{P}_{\tilde{e}}^D = \mathbb{P}_{\tilde{e}}^{\hat{D}}$. Or $\mathbb{P}^D \cap \mathbb{P}^{\hat{D}} = \mathbb{P}^{\hat{D}}$. D'où $\mathbb{P}_{\tilde{e}}^D \subset \mathbb{P}^{\hat{D}}$ et donc $\mathbb{P}_{\tilde{e}}^D = \mathbb{P}_{\tilde{e}}^{\hat{D}}$. Finalement, on veut montrer que $\mathbb{P}^D \tilde{e} \cap V(f_2) = \mathbb{P}^{\hat{D}} \tilde{e}$. Ceci découle directement du fait que $\mathbb{P}^D \cap \mathbb{P}^{\hat{D}} = \mathbb{P}^{\hat{D}}$. Ceci permet de conclure à l'aide du lemme 1.2.1 que $\mu : \mathbb{P}^D \times^{\mathbb{P}^{\hat{D}}} V(f_2) \rightarrow V(f)$ est birationnel et donc, c'est une résolution de singularités de $V(f)$. □

Proposition 4.2.18. *Soit $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \end{smallmatrix}$ et f l'unique, à multiplication par un scalaire près, P^D -covariant irréductible dans $\mathbf{C}[n^D]$. Alors, la normalisation de $V(f)$ est à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2), \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On utilise la même approche que dans la section 3.5.2. On considère la suite exacte de $P^{\hat{D}}$ -modules :

$$0 \rightarrow V(f_2) \rightarrow n^D \rightarrow n^D/V(f_2) \rightarrow 0.$$

On passe au dual, puis au complexe de Koszul. Le $P^{\hat{D}}$ -module $n^D/V(f_2)$ est de dimension neuf. Nous allons étudier la décomposition de $\wedge^m(n^D/V(f_2))$ comme B -module. Un seul poids est ρ -régulier, c'est dans le cas où $m = 5$. Nous obtenons que $H^5(P^D/P^{\hat{D}}, \mathcal{L}_{P^D/P^{\hat{D}}}(\wedge^m(n^D/V(f_2)))^*) \simeq V_{P^D, \omega_8}^*$. Ce qui nous permet de conclure que $H^i(P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2), \mathcal{O}_{P^D \times^{P^{\hat{D}}} V(f_2)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. \square

4.2.6. Le diagramme USD non officiel dans F_4

Il n'y a qu'un diagramme pondéré à étudier : $D = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \Rightarrow & 2 & 0 \end{smallmatrix}$. La dimension de $G n^D$ est 40. Il y a une unique orbite nilpotente de dimension 40 dans l'algèbre de Lie de type F_4 et c'est celle dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\hat{D} = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & \Rightarrow & 0 & 0 \end{smallmatrix}$. Il y a donc nécessairement égalité $G n^D = G n^{\hat{D}}$.

Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il existe un P^D -covariant dans $\mathbf{C}[n^D]$. Soit $\hat{e} \in n^{\hat{D}}$ un élément de Richardson. Notons C le sous-groupe de Levi de la composante connexe de $G_{\hat{e}}$. Dans le cas de F_4 , le groupe adjoint et le groupe simplement connexe se confondent. On peut donc utiliser les tables de [18], afin d'obtenir la structure de C et de $G_{\hat{e}}/G_{\hat{e}}^\circ$.

On observe que $G_{\hat{e}}/G_{\hat{e}}^\circ \simeq S_4$ le groupe de symétrie sur quatre éléments. Ceci nous permet de déduire que le groupe des caractères $X(G_{\hat{e}}/G_{\hat{e}}^\circ)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, le groupe C étant trivial, on conclut que le groupe des caractères de $G_{\hat{e}}^\circ$ est lui aussi trivial. On construit la suite exacte :

$$0 \rightarrow G_{\hat{e}}^\circ \rightarrow G_{\hat{e}} \rightarrow G_{\hat{e}}/G_{\hat{e}}^\circ \rightarrow 0.$$

On passe à la suite exacte formée des groupes de caractères :

$$0 \rightarrow X(G_{\hat{e}}/G_{\hat{e}}^{\circ}) \rightarrow X(G_{\hat{e}}) \rightarrow X(G_{\hat{e}}^{\circ}).$$

Avec l'information trouvée ci-dessus, on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow X(G_{\hat{e}}) \rightarrow 0,$$

d'où $X(G_{\hat{e}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $e \in \mathfrak{n}^D$ un élément de Richardson. Puisque $\overline{Ge} = \overline{G\hat{e}}$, on sait que les orbites Ge et $G\hat{e}$ sont les mêmes. On conclut que $X(G_e) \simeq X(G_{\hat{e}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Notons $X = G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D$, $U = G \times^{P^D} P^De$ et $Z = X \setminus U$. D'après la proposition 1.4.1, il existe un morphisme surjectif $Cl(X) \rightarrow Cl(U)$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si Z est de codimension plus grande ou égale à deux. Or, $Cl(X) \simeq \mathbb{Z}$ et $Cl(U) \simeq X(P_e)$. Pour montrer qu'il existe un covariant, il suffit de montrer que $Cl(U)$ est un groupe fini. Or, $G_e^{\circ} \triangleleft P_e$. On construit la suite exacte :

$$0 \rightarrow G_e^{\circ} \rightarrow P_e \rightarrow P_e/G_e^{\circ} \rightarrow 0.$$

On passe à la suite exacte formée des groupes de caractères :

$$0 \rightarrow X(P_e/G_e^{\circ}) \rightarrow X(P_e) \rightarrow X(G_e^{\circ}).$$

Mais $X(G_e^{\circ}) = 0$. Ainsi $X(P_e/G_e^{\circ}) \simeq X(P_e)$. Finalement, puisque P_e/G_e° est un sous-groupe de S_4 , on conclut que son groupe des caractères est fini et est donc le groupe quotient $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ avec a un entier strictement positif. Ce qui nous permet de conclure qu'il existe un P^D -covariant f dans \mathfrak{n}^D .

Proposition 4.2.19. *Soit $D = 0 \ 0 \Rightarrow 2 \ 0$. Alors, le $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]$ -module $\mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$ est de rang quatre.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$ est un $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]$ -module de type fini en raison de la factorisation de Stein de $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$. On veut connaître son rang. Considérons le diagramme pondéré $\tilde{D} = 0 \ 1 \Rightarrow 1 \ 0$. Il y a inclusion $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$ et $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$.

Dans un premier temps, remarquons que $H^0(P^D \times^{P^D} \mathfrak{n}^{\tilde{D}}, \mathcal{O}_{P^D \times^{P^D} \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. En effet, $\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ est un $P^{\tilde{D}}$ -module de dimension deux dont les poids sont $\lambda_1 =$

$\{0 -1 \Rightarrow 2 -1\}_\omega$ et $\lambda_2 = \{0 -1 \Rightarrow 1 1\}_\omega$. Or $\lambda_1 + \rho$, $\lambda_2 + \rho$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \rho$ ne sont pas des poids réguliers de P^D .

Notons $\pi_1 : G/P^{\hat{D}} \rightarrow G/P^D$ le morphisme quotient. Celui-ci induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^D, H^j(P^D/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}])) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]).$$

Mais $H^j(P^D/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]) = 0$ pour tout $j > 0$ et $H^0(P^D/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^D]$. Ainsi la suite spectrale dégénère et nous obtenons un isomorphisme :

$$H^i(G/P^D, \mathbb{C}[n^D]) \simeq H^i(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]).$$

Étudions maintenant $H^i(P^{\hat{D}} \times^{P^D} n^{\hat{D}}, \mathcal{O}_{P^{\hat{D}} \times^{P^D} n^{\hat{D}}})$. Le $P^{\hat{D}}$ -module $n^{\hat{D}}/n^{\hat{D}}$ est de dimension deux et ces poids sont $\gamma_1 = \{-1 2 \Rightarrow -2 0\}_\omega$ et $\gamma_2 = \{1 1 \Rightarrow -2 0\}_\omega$. Les poids $\gamma_1 + \rho$ et $\gamma_2 + \rho$ ne sont pas réguliers alors que $\gamma_1 + \gamma_2 + \rho$ est un poids de $P^{\hat{D}}$ régulier et deux réflexions sont nécessaires afin de le rendre dominant. Ainsi,

$$H^0(P^{\hat{D}}/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\hat{D}}, \gamma'}^*$$

où $\gamma' = \{0 0 \Rightarrow 0 1\}_\omega$.

Considérons l'application quotient $\pi_2 : G/P^{\hat{D}} \rightarrow G/P^{\hat{D}}$, qui induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{\hat{D}}, H^j(P^{\hat{D}}/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}])) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]).$$

Les groupes de cohomologie $H^j(P^{\hat{D}}/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}])$ s'annulent pour tout $i \geq 1$ de sorte que la suite spectrale dégénère. Puisque $H^0(P^{\hat{D}}/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\hat{D}}, \gamma'}^*$, nous obtenons l'isomorphisme :

$$H^i(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\hat{D}}, \gamma'}^*) \simeq H^i(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]).$$

En combinant les deux isomorphismes, on obtient que

$$H^0(G/P^D, \mathbb{C}[n^D]) \simeq H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}]) \oplus H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\hat{D}}, \gamma'}^*).$$

Mais $H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\hat{D}}, \gamma'}^*)$ est un $\mathbb{C}[G n^D]$ -module de rang trois. Ce qui fait de $H^0(G/P^D, \mathbb{C}[n^D])$ un $\mathbb{C}[G n^D]$ -module de rang quatre. \square

On veut maintenant trouver le degré et le poids du P^D -covariant f .

Proposition 4.2.20. *Soit $D = 0 \ 0 \Rightarrow 2 \ 0$. Alors l'unique P^D -covariant irréductible f de $\mathbb{C}[n^D]$, à multiplication par un scalaire près, est de degré 8 et de poids $2\omega_3$.*

DÉMONSTRATION. On travaille encore avec le diagramme de Dynkin pondéré $\tilde{D} = 0 \ 1 \Rightarrow 1 \ 0$. Il existe deux $P^{\tilde{D}}$ -covariants dans $n^{\tilde{D}}$. Un premier est de degré deux et provient d'un $L^{\tilde{D}}$ -covariant sur $\mathfrak{g}_2^{\tilde{D}}$ dont le plus haut poids est $\{1 \ 1 \Rightarrow 1 \ 1\}_\alpha = \{1 \ 0 \Rightarrow -1 \ 1\}_\omega$. Nous le notons f_1 . Le poids de ce covariant est $\{0 \ 1 \Rightarrow -1 \ 0\}_\omega$. Nous ne connaissons pas le deuxième covariant. Nous allons le noter f_d , où d représente son degré. Son poids est de la forme $\lambda(a, b) = \{0 \ -a \Rightarrow b \ 0\}_\omega$ avec $a, b > 0$. Le but est de trouver quelles sont les valeurs de a, b et d .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, il existe un $P^{\tilde{D}}$ -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[n^{\tilde{D}}]$ de degré 12 et de poids $2\omega_3$. Notons \hat{f} ce $P^{\tilde{D}}$ -covariant. Par restriction, il induit un $P^{\tilde{D}}$ non nul dans $\mathbb{C}[n^{\tilde{D}}]$ qui est un produit de puissance de f_1 et de f_d . Plus précisément, il existe $r, s > 0$ tels que $\hat{f}|_{n^{\tilde{D}}} = f_1^r f_d^s$. Les égalités $2r + sd = 12$ et $r\{0 \ 1 \Rightarrow -1 \ 0\}_\omega + s\{0 \ -a \Rightarrow b \ 0\}_\omega = \{0 \ 2 \Rightarrow 0 \ 0\}_\omega$ doivent être vérifiés. Un travail combinatoire avec les poids de $n^{\tilde{D}}$ permet de montrer que $d = 6$ et le poids de f_d est $\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega$.

Notons $\phi : G \times^{P^{\tilde{D}}} n^{\tilde{D}} \rightarrow G \times^{P^D} n^D$. Le $P^{\tilde{D}}$ -covariant f_6 induit un fibré en droite sur $G \times^{P^{\tilde{D}}} n^{\tilde{D}}$ et un faisceau $\mathcal{L}_{G \times^{P^{\tilde{D}}} n^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_2+3\omega_3}^*)$. On veut faire l'étude de $\phi_* \mathcal{L}_{G \times^{P^{\tilde{D}}} n^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_2+3\omega_3}^*)[-6]$.

Notons $F(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega})^i := \bigoplus_j H^{i+j}(P^D/P^{\tilde{D}}, \wedge^j(n^D/n^{\tilde{D}})^* \otimes \mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega}^*) \otimes \mathbb{C}[n^D][-j]$. D'après [12], $F(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega})^\bullet$ est un complexe de $\mathbb{C}[n^D]$ -modules tels que $H^i(F(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega})^\bullet) \simeq R^i \phi_* \mathcal{L}_Y(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega}^*)$. De plus, si le faisceau $R^i \phi_* \mathcal{L}_Y(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega}^*) = 0$ pour tout $i > 0$, alors

$$F(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega})^\bullet \rightarrow \phi_* \mathcal{L}_Y(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega}^*) \rightarrow 0$$

est une résolution minimale P^D -équivariante de $\phi_* \mathcal{L}_Y(\mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_\omega}^*)$ en termes de $\mathbb{C}[n^D]$ -modules gradués.

Dans notre cas, le $P^{\tilde{D}}$ -module $n^D/n^{\tilde{D}}$ est de dimension deux et donc les $P^{\tilde{D}}$ -modules $\wedge^j(n^D/n^{\tilde{D}})$ sont non nuls seulement lorsque $j \in \{0, 1, 2\}$. Lorsque $j =$

0, c'est le $P^{\bar{D}}$ -module trivial. Lorsque $j = 1$, c'est le $P^{\bar{D}}$ -module de dimension deux de plus haut poids $\{0 \ -1 \Rightarrow 1 \ 1\}_{\omega}$. Finalement, $\wedge^2(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\bar{D}}) \simeq \mathbb{C}_{\{0 \ -2 \Rightarrow 3 \ 0\}_{\omega}}$. Avec cela, on trouve que

$$H^r(P^D/P^{\bar{D}}, \wedge^j(\mathfrak{n}^D / \mathfrak{n}^{\bar{D}})^* \otimes \mathbb{C}_{\{0 \ -1 \Rightarrow 3 \ 0\}_{\omega}}^*) \simeq \begin{cases} V_{P^D, 2\omega_3}^* & \text{si } r = 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que $\phi_* \mathcal{L}_{G \times P^{\bar{D}} / \mathfrak{n}^{\bar{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_2 + 3\omega_3}^*)[-6] \simeq \mathcal{L}_{G \times P^D / \mathfrak{n}^D}(\mathbb{C}_{2\omega_3}^*)[-8]$. Ainsi, il existe un P^D -covariant de poids $2\omega_3$ et de degré 8. La dernière étape est de voir que ce P^D -covariant est irréductible. Pour cela, il suffit de voir qu'il serait impossible d'avoir un P^D -covariant de poids ω_3 et de degré 4. Si c'était le cas, sa restriction à $\mathfrak{n}^{\bar{D}}$ serait un $P^{\bar{D}}$ -covariant non nul. Il devrait alors être un produit de puissance de f_1 et de f_6 , ce qui est impossible. On conclut que le P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ est de degré 8 et de poids $2\omega_3$. \square

Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure de déterminer si $V(f)$ est une variété normale, ni si sa normalisation est à singularités rationnelles.

4.2.7. Le diagramme USD non officiel dans G_2

Ici aussi, il n'y a qu'un seul diagramme de Dynkin pondéré à étudier : $D = 0 \Rightarrow 2$. La dimension de $G \mathfrak{n}^D$ est $2 \dim \mathfrak{n}^D = 10$. Il y a une unique orbite de dimension dix et c'est celle dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\hat{D} = 2 \Rightarrow 0$. On doit donc avoir égalité $G \mathfrak{n}^D = G \mathfrak{n}^{\hat{D}}$.

Nous allons construire explicitement un P^D -covariant f de degré deux. De par sa forme, nous serons capable de montrer que $V(f)$ est une variété normale à singularités rationnelles. Notons α_1 la racine longue de \mathfrak{g} , α_2 la petite et choisissons $e_{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}$ des vecteurs non nuls de $\mathfrak{g}_{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}$ vérifiant

$$[e_{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}, e_{b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2}] = e_{(a_1 + b_1) \alpha_1 + (a_2 + b_2) \alpha_2},$$

si $(a_1 + b_1) \alpha_1 + (a_2 + b_2) \alpha_2$ est une racine de \mathfrak{g} . Si ce n'est pas le cas, alors $[e_{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}, e_{b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2}] = 0$.

Proposition 4.2.21. *Soit $x = c_{01}e_{\alpha_2} + c_{11}e_{\alpha_1 + \alpha_2} + c_{12}e_{\alpha_1 + 2\alpha_2} + c_{13}e_{\alpha_1 + 3\alpha_2} + c_{23}e_{2\alpha_1 + 3\alpha_2} \in \mathfrak{n}^D$ et soit f la fonction définie sur \mathfrak{n}^D par $f(x) = c_{11}c_{13} - c_{23}c_{01} - \frac{1}{2}c_{12}^2$. Alors f est un P^D -covariant de poids $2\omega_2$. De plus, $V(f)$ est une variété normale.*

DÉMONSTRATION. Dans un premier temps, on remarque que f est un L^D -covariant. En effet, on peut décomposer $\mathfrak{n}^D = (\mathfrak{g}_2^D \oplus \mathfrak{g}_6^D) \oplus \mathfrak{g}_4^D$. La partie semi-simple L' du groupe L^D agit trivialement sur \mathfrak{g}_4^D . De plus, on peut voir le morphisme f restreint à $\mathfrak{g}_2^D \oplus \mathfrak{g}_6^D$ comme un déterminant.

Il suffit donc de vérifier que f est un P^D -covariant. On veut calculer la valeur de $f(\exp(se_{\alpha_2})x)$. On remarque que $\exp(se_{\alpha_2})x = c_{01}e_{\alpha_2} + c_{11}e_{\alpha_1+\alpha_2} + (sc_{11} + c_{12})e_{\alpha_1+2\alpha_2} + (\frac{s^2}{2}c_{11} + sc_{12} + c_{13})e_{\alpha_1+3\alpha_2} + c_{23}e_{2\alpha_1+3\alpha_2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\exp(se_{\alpha_2})x) &= c_{11}(\frac{s^2}{2}c_{11} + sc_{12} + c_{13}) - c_{23}c_{01} - \frac{1}{2}(sc_{11} + c_{12})^2 \\ &= c_{11}c_{13} - c_{23}c_{01} - \frac{1}{2}c_{12}^2. \end{aligned}$$

Ainsi f est bien un P^D -covariant. Son poids est $2\alpha_1 + 4\alpha_2$ qui est bien $2\omega_2$. Reste à voir que $V(f)$ est une variété normale. Soit $x_{a_1\alpha_1+b_2\alpha_2}$ les fonctions de coordonnées sur les vecteurs de base $e_{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2}$. En termes de ces fonctions de coordonnées, f s'écrit sous la forme suivante :

$$f = x_{11}x_{13} - x_{23}x_{01} - \frac{1}{2}x_{12}^2.$$

Les points singuliers de $V(f)$ sont définis par l'annulation de toutes les dérivées partielles, c'est-à-dire par l'annulation du vecteur : $(x_{13}, x_{11}, -x_{01}, -x_{23}, -x_{12})$. Cela consiste seulement à l'origine. Ainsi, la variété $V(f)$ est normale puisqu'elle est une intersection complète et n'a pas de singularités en codimension deux. \square

Nous voulons étudier la structure de $\mathbb{C}[G \mathfrak{g}_{\geq 2}^D]$ -module de $\mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$. Nous nous intéressons plus particulièrement à son rang.

Proposition 4.2.22. *Soit $D = 0 \Rightarrow 2$. Alors, le $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]$ -module $\mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$ est de rang trois.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$ est un $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]$ -module de type fini en raison de la factorisation de Stein de $\mu : G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \rightarrow G \mathfrak{n}^D$. On veut connaître son rang. Considérons le diagramme pondéré $\tilde{D} = 1 \Rightarrow 1$. Il y a inclusion $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$ et $\mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^{\hat{D}}$.

Dans un premier temps, nous remarquons que $H^0(P^D \times^{P^D} n^{\bar{D}}, \mathcal{O}_{P^D \times^{P^D} n^{\bar{D}}}) \simeq \mathbb{C}[n^D]$. En effet, $n^D / n^{\bar{D}}$ est un $P^{\bar{D}}$ -module de dimension un avec poids $\lambda = \{-1 \Rightarrow 2\}_\omega$. Or $\lambda + \rho$ n'est pas régulier comme poids de P^D . Ceci nous donne donc directement l'isomorphisme souhaité.

Notons $\pi_1 : G/P^{\bar{D}} \rightarrow G/P^D$ le morphisme quotient. Celui-ci induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^D, H^j(P^D/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}])) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]).$$

Mais $H^j(P^D/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) = 0$ pour tout $j > 0$ et $H^0(P^D/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^D]$ comme nous venons de voir. Ainsi la suite spectrale dégénère et nous obtenons un isomorphisme :

$$H^i(G/P^D, \mathbb{C}[n^D]) \simeq H^i(G/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]).$$

Étudions maintenant $H^i(P^{\hat{D}} \times^{P^{\hat{D}}} n^{\bar{D}}, \mathcal{O}_{P^{\hat{D}} \times^{P^{\hat{D}}} n^{\bar{D}}})$. Le $P^{\bar{D}}$ -module $n^{\hat{D}} / n^{\bar{D}}$ est isomorphe au module de dimension un \mathbb{C}_γ avec $\gamma = \{2 \Rightarrow -3\}_\omega$. Mais, $\gamma + \rho$ est un poids de $P^{\hat{D}}$ régulier et cela prend une réflexion pour le rendre dominant. Ainsi,

$$H^0(P^{\hat{D}}/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\bar{D}}, \gamma'}^*$$

où $\gamma' = \{0 \Rightarrow 1\}_\omega$.

Considérons l'application quotient $\pi_2 : G/P^{\hat{D}} \rightarrow G/P^{\bar{D}}$, qui similairement induit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{\bar{D}}, H^j(P^{\hat{D}}/P^{\bar{D}}, \text{comp}[n^{\bar{D}}])) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]).$$

Ici encore, $H^i(P^{\hat{D}}/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) = 0$ pour tout $i \geq 1$, mais $H^0(P^{\hat{D}}/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) \simeq \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\bar{D}}, \gamma'}^*$ comme nous venons de le voir. De sorte que nous obtenons l'isomorphisme :

$$H^i(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}] + \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\bar{D}}, \gamma'}^*) \simeq H^i(G/P^{\bar{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]).$$

En combinant les deux isomorphismes, on obtient que

$$H^0(G/P^D, \mathbb{C}[n^D]) \simeq H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\bar{D}}]) \oplus H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[n^{\hat{D}}] \otimes V_{P^{\bar{D}}, \gamma'}^*).$$

Mais $H^0(G/P^{\hat{D}}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}] \otimes V_{\mathfrak{p}^{\hat{D}}, \gamma'}^*)$ est un $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^{\hat{D}}]$ -module de rang deux. On conclut que $H^0(G/P^D, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D])$ est un $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]$ -module de rang trois. \square

Continuons à travailler avec le diagramme de Dynkin pondéré $\tilde{D} = 1 \Rightarrow 1$. Dans ce cas, $P^{\tilde{D}} = B$. Il existe deux B -covariants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\tilde{D}}]$. Le premier f_1 est linéaire et peut être défini en termes de fonctions de coordonnées sous la forme $f_1 = x_{11}$. Le deuxième est quadratique. Il consiste en la restriction à $\mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ de f . En termes de de fonctions de coordonnées, il s'écrit sous la forme $f_2 = x_{11}x_{13} - \frac{1}{2}x_{12}^2$. Avec un changement de coordonnées, on peut voir $V(f_2)$ comme le cône nilpotent dans A_1 . Ainsi, $V(f_2)$ est une variété normale à singularités rationnelles.

Lemme 4.2.4. *Soit $D = 0 \Rightarrow 2$ et f l'unique P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ à multiplication par un scalaire près. Alors, la restriction de l'application moment $\mu : P^D \times^B V(f_2) \rightarrow V(f)$ est surjective et a des fibres génériquement finies.*

DÉMONSTRATION. On remarque dans un premier temps que les dimensions de $P^D \times^B V(f_2)$ et $V(f)$ sont les mêmes puisque

$$\dim P^D - \dim B = 1 = \dim \mathfrak{n}^D - \dim \mathfrak{n}^{\tilde{D}}.$$

Nous allons maintenant montrer que $P^D V(f_2) = V(f)$. Nous saurons alors que μ est à fibres génériquement finies. Dans un premier temps, on remarque que $G \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = G \mathfrak{n}^D$. En effet, dans la preuve de la proposition 4.2.22, nous avons montré que $H^0(G/B, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\tilde{D}}]) \simeq H^0(G/P^D, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^D])$. Ainsi, $\mathbb{C}[G \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}] \simeq \mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D]$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}} & \longrightarrow & G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \mathfrak{n}^{\tilde{D}} & \hookrightarrow & G \mathfrak{n}^D \end{array}$$

induit un second diagramme commutatif au niveau des anneaux des fonctions régulières :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}] & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{C}[G \times^{P^D} \mathfrak{n}^D] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}[G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}] & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D]. \end{array}$$

Ainsi, $\mathbb{C}[G \mathfrak{n}^D] \simeq \mathbb{C}[G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}]$ et donc $G \mathfrak{n}^D = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$.

On en déduit que $P^D \mathfrak{n}^{\tilde{D}} = \mathfrak{n}^D$. En effet, soit $\nu : P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. L'image de ν est $P^D \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ qui est un fermé de \mathfrak{n}^D . Mais $G \mathfrak{n}^D = G \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ et il existe $e \in \mathfrak{n}^{\tilde{D}} \subset \mathfrak{n}^D$ générique tel que $\overline{Ge} = G \mathfrak{n}^D$. D'après le théorème de Richardson, $\overline{P^D e} = \mathfrak{n}^D$.

Soit $x \in V(f)$, il existe $y \in \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$ et $p \in P^D$ tels que $py = x$. Ainsi, $y = p^{-1}x$ et $f(y) = 0$. Mais $f|_{\mathfrak{n}^{\tilde{D}}} = f_2$. D'où $y \in V(f_2)$ et $P^D V(f_2) = V(f)$. De sorte que μ est une application surjective et puisque $\dim(P^D \times^B V(f_2)) = \dim(V(f))$, on conclut que ses fibres sont génériquement finies. \square

Proposition 4.2.23. *Soit $D = 0 \Rightarrow 2$ et f l'unique P^D -covariant irréductible dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ à multiplication par un scalaire près. Alors, la variété $V(f)$ est à singularités rationnelles.*

DÉMONSTRATION. Le P^D -covariant f_2 permet de construire une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{2\omega_2})^*[-2] \rightarrow \mathcal{O}_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{P^D \times^B V(f_2)} \rightarrow 0.$$

On veut montrer l'annulation de tous les groupes de cohomologie $H^i(P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}, \mathcal{L}_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{2\omega_2})^*)$ et $H^i(P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}, \mathcal{O}_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}})$ pour $i \geq 1$. Pour cela, on calcule le faisceau canonique de $P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}$. On trouve que $\omega_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}} \simeq \mathcal{L}_{P^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{-\omega_1 + 6\omega_2})^*$. Avec le théorème 1.3.4, on obtient les résultats d'annulation souhaités. Ainsi, $H^i(P^D \times^B V(f_2), \mathcal{O}_{P^D \times^B V(f_2)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. De cela, on conclut à l'aide de la proposition 2.4.4 que $\text{Spec}(\mathbb{C}[P^D \times^B V(f_2)])$ est une variété normale à singularités rationnelles, la variété $P^D \times^B V(f_2)$ l'étant puisque f_2 est un déterminant.

De l'annulation de $H^1(\mathbb{P}^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}, \mathcal{L}_{\mathbb{P}^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}}(\mathbb{C}_{2\omega_2})^*)$, on conclut que $\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^B \mathfrak{n}^{\tilde{D}}]$ se surjecte dans $\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^B V(f_2)]$. Cela nous permet d'obtenir un isomorphisme entre $\mathbb{C}[V(f)]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^B V(f_2)]$. On déduit que $V(f) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{P}^D \times^B V(f_2)])$ et donc c'est une variété normale à singularités rationnelles.

□

4.2.8. Résumé des résultats obtenus

Nous allons faire un résumé des résultats obtenus dans différentes tables afin de rendre le tout un peu plus visuel. Pour chacun des diagrammes USD non officiels, nous allons noter \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré officiel tel que $N(D) = N(\hat{D})$. Nous dirons s'il existe un \mathbb{P}^D -covariant f dans $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$. Le cas échéant, nous donnerons son poids, son degré et indiquerons si $V(f)$ est une variété normale et si sa normalisation est à singularités rationnelles. Dans la dernière colonne de la table, nous spécifions la cardinalité N d'une fibre générique de l'application moment.

D	\hat{D}	Covariant	Poids	Degré	Normalité	Sing. rat.	N
$0 \dots 0200 \dots 0$	$0 \dots 0100 \dots 0010 \dots 0$						
$k \neq \frac{n+1}{2}$	les 1 en position k et $n+1-k$	Non	-	-	-	-	1

TAB. 4.1. Les diagrammes de Dynkin pondérés dans A_n

D	\hat{D}	Covariant	Poids	Degré	Normalité	Sing. rat.	N
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \ 0$ $3k = 2n + 1$	$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0$ le 2 en position $k - 1$	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \ 0$ $k \equiv 0 \pmod{2}$ $3k > 2n + 1$	$0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 0$ les 1 en position $2(n - k)$ et k les 1 en position $2(n - k)$ et k	Oui	ω_k	$\frac{1}{2}(2n - k)$	Oui	Oui	1
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \ 0$ $k \equiv 1 \pmod{2}$ $3k > 2n + 1$	$0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 0$ les 1 en position $2(n - k)$ et $k - 1$ les 1 en position $2(n - k)$ et k	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \ 0$ n impair	$0 \dots 0 \ 1 \dots 0 \ 1$	Non	-	-	-	-	1

TAB. 4.2. Les diagrammes de Dynkin pondérés dans D_n

D	\hat{D}	Covariant	Poids	Degré	Normalité	Sing. rat.	N
$0 \Rightarrow 2$	$2 \Rightarrow 0$	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 \Rightarrow 2$ $n \equiv 1 \pmod{2}$	$1 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 1$	Oui	$2\omega_n$	$\frac{n+1}{2}$	Oui	Oui	1
$0 \dots 0 \Rightarrow 2$ $n \equiv 0 \pmod{2}$	$1 \ 0 \dots 0 \ 1 \Rightarrow 0$	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ $3k = 2n + 2$	$0 \dots 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ le 2 en position $k-1$	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ $k \equiv 1 \pmod{2}$ $3k > 2n + 2$	$0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ les 1 en position $2(n-k) + 1$ et k	Oui	ω_k	$\frac{1}{2}(2n + 1 - k)$	Oui	Oui	1
$0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ $k \equiv 0 \pmod{2}$ $3k > 2n + 2$	$0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \Rightarrow 0$ les 1 en position $2(n-k) + 1$ et $k-1$	Non	-	-	-	-	2

TAB. 4.3. Les diagrammes de Dynkin pondérés dans B_n

D	\hat{D}	Covariant	Poids	Degré	Normalité	Sing. rat.	N
$0 \dots 0 2 0 \dots 0 \notin 0$	$0 \dots 1 0 1 \dots 0 \notin 0$						
$k = 2m + 1$ et $3m < n - 1$	les 1 en position $k - 1$ et $k + 1$	Non	-	-	-	-	2
$0 \dots 0 2 0 \dots 0 \notin 0$	$0 \dots 0 1 0 \dots 0 1 0 \dots 0 \notin 0$						
$k = 2m + e$	les 1 en position $2(n - k)$ et k	Oui	$2\omega_k$	$2n - k$	Oui	Oui	1

TAB. 4.4. Les diagrammes de Dynkin pondérés dans C_n

Type de \mathfrak{g}	D	\hat{D}	Covariant	Poids	Degré	Normalité	Sing. rat.	N
E_6	$2 \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{0}$	$1 \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{1}$	Non	-	-	-	-	1
	$0 \underset{0}{2} \underset{0}{0} \underset{0}{0}$	$0 \underset{0}{1} \underset{0}{0} \underset{0}{1} \underset{0}{0}$	Non	-	-	-	-	1
E_8	$0 \underset{0}{0} \underset{0}{2} \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{0}$	$1 \underset{0}{0} \underset{0}{1} \underset{0}{0} \underset{0}{1} \underset{0}{0}$	Oui	ω_4	29	Non	oui	1
	$0 \underset{0}{2} \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{0}$	$0 \underset{0}{1} \underset{0}{0} \underset{0}{0} \underset{0}{1} \underset{0}{0}$	Oui	ω_3	13	Oui	Oui	1
F_4	$0 \underset{0}{0} \Rightarrow 2 \underset{0}{0}$	$0 \underset{0}{2} \Rightarrow 0 \underset{0}{0}$	Oui	$2\omega_3$	8	?	?	4
G_2	$0 \Rightarrow 2$	$2 \Rightarrow 0$	Oui	$2\omega_2$	2	Oui	Oui	3

TAB. 4.5. Les diagrammes de Dynkin pondérés dans les algèbres exceptionnelles

4.3. AUTRES TYPES D'ISOMORPHISMES

Nous voulons revenir sur des diagrammes USD dans A_n , D_n et E_6 pour lesquels le diagramme de Dynkin pondéré officiel associé \hat{D} est symétrique. Pour chacun de ces diagrammes USD D , nous avons montré qu'il n'existe pas de P^D -covariant dans $C[n^D]$. Cependant, il est possible de trouver un $P^{\hat{D}}$ -covariant qui nous permettra de construire un isomorphisme en cohomologie. Dans les cas de A_n et de D_n , ces isomorphismes ont déjà été démontrés par Sommers dans [72], [73] et [75]. Nous prendrons tout de même le temps de discuter de ces isomorphismes ici, notre approche étant différente.

4.3.1. Les diagrammes de Dynkin pondérés officiels \hat{D}

Nous nous intéressons ici à trois diagrammes USD D . Le but de cette sous-section est de trouver les diagrammes de Dynkin pondérés officiels \hat{D} tels que $N(D) = N(\hat{D})$. Cela se fera souvent en comparant les dimensions des variétés $N(D)$ et $N(\hat{D})$. La dimension de $N(\hat{D})$ se trouve dans la littérature, par exemple dans [18]. Pour calculer la dimension de $N(D)$, il suffit de calculer la dimension du fibré cotangent $G \times^{P^D} n^D$ puisque l'application moment $\mu : G \times^{P^D} n^D \rightarrow N(D)$ a des fibres génériquement finies.

Dans un premier temps, on étudie le diagramme pondéré D dans A_n vérifiant $D(\alpha_k) = 2$ avec $k \neq n+1-k$. Nous avons déjà vu dans la sous-section 4.2.1 que le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} vérifie $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{n+1-k}) = 1$.

Passons au diagramme de Dynkin pondéré de D_n , où n est impair, vérifiant $D(\alpha_n) = 2$. Dans ce cas, le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} pour lequel $\hat{D}(\alpha_{n-1}) = \hat{D}(\alpha_n) = 1$ vérifie $N(D) = N(\hat{D})$. En effet, les dimensions de $N(\hat{D})$ et de $N(D)$ sont les mêmes et $n^{\hat{D}} \subset n^D$. Ainsi, $G n^{\hat{D}} \subset G n^D$ et puisque ce sont deux variétés irréductibles de même dimension, on conclut que $G n^{\hat{D}} = G n^D$.

Passons maintenant au diagramme de Dynkin pondéré $D = \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{smallmatrix}$. La dimension de $N(D)$ est 32. Il y a une seule orbite nilpotente de dimension 32

dans l'algèbre de Lie de type E_6 et c'est celle dont le diagramme de Dynkin pondéré officiel est $\hat{D} = \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$. On doit donc avoir $N(D) = N(\hat{D})$.

Avant de conclure cette sous-section, remarquons que dans tous ces cas, le diagramme de Dynkin pondéré officiel \hat{D} est stable sous l'automorphisme non trivial du diagramme de Dynkin.

Remarque 4.3.1. *Il y aurait un autre diagramme USD non officiel pour lequel \hat{D} est stable sous l'automorphisme non trivial du diagramme de Dynkin. C'est le diagramme de Dynkin pondéré $D = \begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$ dans E_6 pour lequel $\hat{D} = \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & \end{smallmatrix}$. Malheureusement, pour ce diagramme de Dynkin pondéré nous ne sommes pas en mesure de montrer le même type de résultats que pour les trois autres énumérés ci-dessous. C'est pourquoi nous n'allons pas en parler davantage ici.*

4.3.2. Séries de Hilbert équivariantes

Soit P un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif G . Soit $M = \bigoplus_i M_i$ un P -module gradué sur lequel le radical unipotent de P agit trivialement. Dans ce cas M est un P -module complètement réductible. Pour calculer la cohomologie $H^i(G/P, \mathcal{L}_{G/P}(M))$, le théorème de Borel-Weil-Bott 1.3.1 nous apprend qu'il suffit de connaître la décomposition de M en termes de P -modules irréductibles. Plus précisément, nous devons connaître les plus haut poids de ces P -modules irréductibles.

Une façon d'y parvenir est en calculant la série de Hilbert du P -modules gradué M . Cette série encapsule toute la structure de P -module de M_i pour chaque degré i . Plus précisément, on définit la **série de Hilbert P -équivariante** de M comme

$$\mathcal{H}_P(M, t) = \sum_i \sum_{\lambda \in X^+} \dim(\text{Hom}_P(V_{P,\lambda}, M_i) e^\lambda t^i,$$

où e^λ est la classe du P -module V_λ dans $R(P)$ comme nous l'avions mentionné dans la section 1.1. Nous sommes plus particulièrement intéressés à la série de Hilbert de M^* . Nous notons cette série $\mathcal{H}_P^*(M, t)$ et nous l'appelons la **série de Hilbert P -équivariante duale** de M .

Commençons par remarquer que la série de Hilbert est **additive**.

Proposition 4.3.1. *Soit M, V et W des G -modules gradués complètement réductibles. Supposons que $M = V \oplus W$. Alors,*

$$\mathcal{H}_G(M, t) = \mathcal{H}_G(V, t) \oplus \mathcal{H}_G(W, t).$$

En particulier, si

$$0 \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow W \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de G -modules gradués, alors

$$\mathcal{H}_G(M, t) = \mathcal{H}_G(V, t) \oplus \mathcal{H}_G(W, t).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est directe d'après la définition. Il suffit de remarquer que $\text{Hom}_G(V_{G,\lambda}, (V \oplus W)_i) = \text{Hom}_G(V_{G,\lambda}, V_i) \oplus \text{Hom}_G(V_{G,\lambda}, W_i)$. \square

4.3.3. Calculs de séries de Hilbert P -équivariantes

Soit \hat{D} un diagramme de Dynkin pondéré officiel pour lequel le $P^{\hat{D}}$ -module $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ est complètement réductible. Nous allons calculer la série de Hilbert duale $P^{\hat{D}}$ -équivariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$. Nous nous limiterons aux diagrammes de Dynkin pondérés officiels suivants :

- (1) Dans A_n , les diagrammes de Dynkin pondérés \hat{D} tels que $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{n+1-k}) = 1$, où $k < n + 1 - k$;
- (2) Dans D_n , les diagrammes de Dynkin pondérés \hat{D} tels que $\hat{D}(\alpha_{n-1}) = \hat{D}(\alpha_n) = 1$ où $n = 2m + 1$;
- (3) Dans E_6 , le diagramme de Dynkin pondéré \hat{D} tel que $\hat{D} = \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}$.

Remarquons que pour chacun de ces diagrammes de Dynkin pondérés officiels $\mathfrak{g}_2^{\hat{D}} = \mathfrak{g}_{\geq 2}^{\hat{D}}$. Cela nous assure que $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ est un $P^{\hat{D}}$ -module complètement réductible.

Cas 1 : Dans A_n , $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{n+1-k}) = 1$.

La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}^{\hat{D}} = \mathfrak{g}_2^{\hat{D}}$ s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{n}^{\hat{D}} = \left\{ \mathfrak{m}(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in \text{Mat}(k, \mathbb{C}) \right\},$$

alors que le sous-groupe parabolique est décrit par

$$P^{\hat{D}} = \left\{ p(A, L) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} p(A, L) \in SL(n+1, \mathbb{C}), C \in \text{Mat}(k, \mathbb{C}) \\ A, L \in GL(k, \mathbb{C}), E \in GL(n+1-2k, \mathbb{C}) \\ B, F^T \in \text{Mat}(k \times (n+1-2k), \mathbb{C}) \end{array} \right\},$$

avec $\det(A) \det(E) \det(L) = 1$. L'action adjointe de $P^{\hat{D}}$ sur $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ peut être décrite par $p(A, L) \cdot m(X) = m(AXL^{-1})$.

Proposition 4.3.2. Soit \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré de A_n vérifiant $\hat{D}(\alpha_k) = \hat{D}(\alpha_{n+1-k})$ avec $k < n+1-k$. Alors,

$$\mathcal{H}_{P^{\hat{D}}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}], t) = \frac{1}{(1 - e^{\omega_1 + \omega_n t})(1 - e^{\omega_2 + \omega_{n-1} t^2}) \dots (1 - e^{\omega_k + \omega_{n+1-k} t^k})}$$

DÉMONSTRATION. Cela se déduit de l'étude de l'action de $G = GL(k, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices $\text{Mat}(k, \mathbb{C})$ donnée par $(A, B)X = AXB^{-1}$. Une discussion plus poussée sur l'action de G sur l'espace $\text{Mat}(k, \mathbb{C})$ se trouve dans l'annexe 4.3.4. \square

Cas 2 : Dans D_n , $\hat{D}(\alpha_{n-1}) = \hat{D}(\alpha_n) = 1$ avec $n = 2m + 1$.

Plaçons nous dans la situation où l'algèbre de Lie de type D_n est définie à partir de la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, où I_n est la matrice identité de taille n . Notons $\text{Asym}(n, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille n . Le $P^{\hat{D}}$ -module $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ est décrit par :

$$\mathfrak{n}^{\hat{D}} = \left\{ m(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in \text{Asym}(n, \mathbb{C}) \text{ et } X_{ni} = X_{in} = 0 \forall i \right\}.$$

On peut donc voir X comme une matrice dans $\text{Asym}(n-1, \mathbb{C})$. Le sous-groupe parabolique est quand à lui décrit par

$$P = \left\{ p(A) = \begin{pmatrix} A & v & B & w \\ 0 & x & z^T & 0 \\ 0 & 0 & A^{-T} & 0 \\ 0 & 0 & u^T & x^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} p(A) \in SO(2n, \mathbb{C}) \\ A \in GL(n-1, \mathbb{C}) \\ v, w, z, u \in \mathbb{C}^{n-1}, x \in \mathbb{C}^\times \\ B \in \text{Mat}(n-1, \mathbb{C}) \end{array} \right\}.$$

L'action adjointe de $P^{\hat{D}}$ sur $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ est décrite par $p(A) \cdot m(X) = m(AXA^T)$.

Nous voulons obtenir la description de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$ en termes de $P^{\hat{D}}$ -modules irréductibles.

Proposition 4.3.3. *Soit \hat{D} le diagramme de Dynkin pondéré de D_n vérifiant $\hat{D}(\alpha_{n-1}) = \hat{D}(\alpha_n) = 1$ avec $n = 2m + 1$. Alors*

$$\mathcal{H}_{P^{\hat{D}}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}], t) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{m-1} (1 - e^{\omega_{2i}} t^i)\right) (1 - e^{(\omega_{2m} + \omega_{2m+1})} t^m)}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de comprendre l'action du groupe $GL(n-1, \mathbb{C})$ sur $Asym(n-1, \mathbb{C})$ et de transférer cela en terme de poids de $SO(2n, \mathbb{C})$. Plus de détails sur cette action se trouvent dans l'annexe 4.3.4. \square

Cas 3 : Dans E_6 , $\hat{D} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \end{matrix}$.

Afin de calculer la série de Hilbert $P^{\hat{D}}$ -équivariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$, nous allons utiliser une approche différente que pour les cas de A_n et D_n puisque l'algèbre de Lie de type E_6 n'a pas une représentation matricielle aussi évidente. Notons LU la décomposition de Levi de $P^{\hat{D}}$ avec L réductif. La partie semi-simple L' de L est de type D_4 . La plus longue racines de E_6 étant ω_2 , L' agit sur $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ avec plus haut poids ω_1 dans la base de D_4 . Ainsi, L' agit sur $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ avec plus haut poids $\frac{1}{2}\{0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0\}_{\alpha}$. On en déduit que le centre de L agit sur $\mathfrak{n}^{\hat{D}}$ comme un scalaire avec le poids $\frac{1}{2}\{2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2\}_{\alpha} = \frac{1}{2}\{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}_{\omega}$.

D'après [10], nous savons que $(\mathbb{C}[V_{L', \lambda}]^*)^U$ est engendré par un covariant de degré un et de poids $\frac{1}{2}\{0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0\}_{\alpha} = \frac{1}{2}\{-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1\}_{\omega}$ et un covariant de degré deux et de poids nul. Ainsi, l'algèbre $(\mathbb{C}[V_{L, \lambda} \otimes \mathbb{C}_{\mu}^*])^U$ est engendrée par le covariant de degré un et de poids $\frac{1}{2}\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}_{\omega}$ et le covariant de degré deux et de poids $\{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}_{\omega}$. Nous pouvons maintenant conclure que la série de Hilbert $P^{\hat{D}}$ -équivariante duale de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}]$ est

$$\mathcal{H}_{P^{\hat{D}}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{\hat{D}}], t) = \frac{1}{(1 - e^{\omega_2} t)(1 - e^{\omega_1 + \omega_6} t^2)}.$$

4.3.4. Cohomologie

Nous sommes maintenant prêts à obtenir nos isomorphismes en cohomologie. La particularité ici, c'est que le diagramme de Dynkin pondéré va changer pour obtenir un isomorphisme.

Dans chacun des trois cas, nous allons travailler avec trois diagrammes de Dynkin pondérés D_1 , D_2 et D_3 . Nous noterons $P^{(i)}$ le sous-groupe parabolique associé au diagramme pondéré D_i et $\mathfrak{n}^{(i)}$ la sous-algèbre de Lie \mathfrak{n}^{D_i} .

Afin d'alléger les notations, pour M un $P^{(i)}$ -module, H un sous-groupe de G qui contient $P^{(i)}$ et μ un caractère de P^i , nous allons noter $H^p(H/P^{(i)}, M \otimes \mu)$ le groupe de cohomologie $H^p(H/P^{(i)}, \mathcal{L}_{H/P^{(i)}}(M \otimes \mathbb{C}_\mu))$.

L'architecture des trois preuves est la même. On décompose la preuve en trois étapes. Dans un premier temps, on remarque que le sous-groupe parabolique $P^{(2)}$ est inclus dans $P^{(1)}$. Cela nous permet de construire un morphisme $\pi : G/P^{(2)} \rightarrow G/P^{(1)}$. On obtient alors une suite spectrale, la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{(1)}, H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*)) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*),$$

où μ est un caractère de $P^{(1)}$. On montre ensuite que $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*) = 0$ pour tout $j > 0$ et donc que la suite spectrale est dégénérée. Il nous faut alors montrer que $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes \mu^*$ pour obtenir l'isomorphisme

$$H^i(G/P^{(1)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes \mu^*) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*).$$

La deuxième étape de la preuve consiste à trouver un isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \mu^*)$ et $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \tilde{\mu}^*)$ pour $\tilde{\mu}$ un poids "plus dominant" que μ .

Finalement, la troisième étape nous permet de conclure la preuve en utilisant la symétrie du problème pour obtenir l'isomorphisme

$$H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes \tilde{\mu}^*) \simeq H^i(G/P^{(3)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes \tilde{\mu}^*).$$

Cas 1 : A_n

Nous reprenons ici un résultat de Sommers [75], notre approche étant sensiblement différente de la sienne. Notons cependant que son résultat est plus

général puisqu'il considère des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique p , alors que de notre côté, nous nous intéressons seulement à des algèbres sur le corps des complexes.

Nous allons travailler avec les trois diagrammes de Dynkin pondérés : $D_1 = 0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0$ où le 2 est en position $k < \frac{n}{2}$, $D_2 = 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0$ où les 1 sont en position k et $n + 1 - k$ et $D_3 = 0 \dots 0 \ 2 \ 0 \dots 0$ où le 2 est en position $n + 1 - k$.

Proposition 4.3.4. [75] *Soit $k < \frac{n}{2}$ et $1 \leq r \leq n - 2k + 2$. Alors, pour tout entier $p \geq 0$,*

$$H^p(G/P^{(1)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes (-r\omega_k)^*) \simeq H^p(G/P^{(3)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes (r\omega_{n+1-k})^*)[-rk].$$

DÉMONSTRATION. **Étape 1**

Le sous-groupe parabolique $P^{(2)}$ est inclus dans $P^{(1)}$. En effet, soit $\mathfrak{p}^{(1)}$ et $\mathfrak{p}^{(2)}$ les sous-algèbres paraboliques associées aux diagrammes de Dynkin pondérés D_1 et D_2 respectivement. Soit $\beta = \sum_j c_j \alpha_j$ une racine de \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{p}^{(2)}$, alors $D_2(\beta) = c_k + c_{n+k-1} \geq 0$. Ainsi, c_k et c_{n-k+1} sont des entiers positifs. Nous en concluons que $D_1(\beta) = 2c_k \geq 0$ et $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{p}^{(1)}$.

L'inclusion de $P^{(2)}$ dans $P^{(1)}$ nous permet de construire la projection $\pi : G/P^{(2)} \rightarrow G/P^{(1)}$. Il existe alors une suite spectrale, la suite spectrale de Leray :

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H^p(G/P^{(1)}, H^q(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) \\ &\Rightarrow H^{p+q}(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)). \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que $H^q(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Le poids ω_k étant un caractère de $P^{(1)}$, la formule de projection nous permet d'obtenir l'isomorphisme $H^q(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) \simeq H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*))$. Mais comme nous le savons, le radical unipotent de $P^{(2)}$ agit trivialement sur $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$. On utilise alors le théorème 1.3.2 qui nous assure de l'annulation de tous les groupes de cohomologie $H^q(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}])$ pour $q \geq 1$. Ceci nous permet de conclure que $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et donc que la suite spectrale de Leray est dégénérée. En particulier, nous

savons que $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Nous obtenons alors l'isomorphisme

$$H^i(G/P^{(1)}, H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)).$$

Pour terminer la première étape de la preuve, il nous faut montrer que $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k^*)) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes (-r\omega_k^*)$. Encore une fois, en utilisant la formule de projection, il nous suffit de montrer que $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}]$. Considérons la restriction de l'application moment $\mu : P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)} \rightarrow P^{(1)} \mathfrak{n}^{(2)} \subset \mathfrak{n}^{(1)}$. On utilise de nouveau le théorème 1.3.2 afin de conclure que l'application $\mu^\sharp : \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \rightarrow \mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)}]$ est surjective. Or, l'étude de l'action de $GL(k, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices complexes de taille k , nous assure que $P^{(1)} \mathfrak{n}^{(2)} = \mathfrak{n}^{(1)}$. Ainsi, μ est surjective sur $\mathfrak{n}^{(1)}$ et donc μ^\sharp est injective. Nous obtenons ainsi l'isomorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \simeq \mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)}]$. Nous pouvons conclure en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)}] \simeq H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}])$. Ceci termine la première étape de la preuve.

Étape 2

Le but de cette étape est de construire l'isomorphisme

$$H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_k)^*) \simeq H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_{n+1-k})^*)[-rk]. \quad (4.3.1)$$

Pour ce faire, nous montrerons que

$$\begin{aligned} & H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^*) \\ & \simeq H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((s+1)\omega_{n+1-k} + (1-r)\omega_k)^*)[-k], \end{aligned}$$

pour $1 \leq r \leq n - 2k + 2$, et s un entier positif qui est nul si $r = n - 2k + 2$. En appliquant r fois cet isomorphisme, nous obtiendrons alors le résultat souhaité.

Notons \det le déterminant de la sous-matrice (X_{ml}) pour $1 \leq m \leq k$ et $n - k + 1 \leq l \leq n$. C'est une fonction de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$. Cette fonction nous permet d'obtenir une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \det \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\det) \rightarrow 0.$$

Le déterminant est un covariant de $P^{(2)}$ de degré k et de poids $(\omega_k + \omega_{n+1-k})^*$. Ainsi, nous avons un isomorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \det \simeq (\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (\omega_{n+1-k} + \omega_k)^*)[-k]$.

En tensorisant avec $(s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^*$, nous obtenons la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((s+1)\omega_{n+1-k} + (1-r)\omega_k)^*[-k] &\rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^* \\ &\rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\det) \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Cette suite exacte courte nous donne une suite exacte longue en cohomologie.

Nous voulons montrer que $H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\det) \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^*) = 0$ pour tout $p \geq 0$. Nous obtiendrons alors l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((s+1)\omega_{n+1-k} + (-r+1)\omega_k)^*[-k] \\ \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k)^*). \end{aligned}$$

Comme nous avons montré dans la proposition 4.3.2, la série de Hilbert duale $P^{(2)}$ -équivariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$ est

$$\mathcal{H}_{P^{(2)}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}], t) = \frac{1}{(1 - e^{\omega_1 + \omega_n} t)(1 - e^{\omega_2 + \omega_{n-1}} t^2) \dots (1 - e^{\omega_k + \omega_{n+1-k}} t^k)}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{H}_{P^{(2)}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\det) \otimes (s\omega_{n+1-k} - r\omega_k), t) = \frac{e^{s\omega_{n+1-k} - r\omega_k}}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 - e^{\omega_i + \omega_{n+1-i}} t^i)}.$$

Les sous- $P^{(2)}$ -modules irréductibles de $(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\det) \otimes (s\omega_{n+1-i} - r\omega_i))^*$ ont des plus haut poids de la forme $\lambda = n_1(\omega_1 + \omega_n) + n_2(\omega_2 + \omega_{n-1}) + \dots + n_{k-1}(\omega_{k-1} + \omega_{n+2-k}) - r\omega_k + s\omega_{n+1-k}$. Dans ce cas, $\lambda + \rho$ n'est pas régulier si les conditions sur r et s sont vérifiées. Le théorème de Borel-Weil-Bott nous assure alors que tous les groupes de cohomologie s'annulent.

Étape 3

Il reste à montrer que $H^p(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_{n+1-k})^*) \simeq H^p(G/P^{(3)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes (r\omega_{n+1-k})^*)$. On peut calquer la preuve de la première étape. On peut aussi remarquer que c'est une version duale de l'isomorphisme de l'étape 1.

□

Cas 2 : D_n

Nous allons travailler avec les trois diagrammes de Dynkin pondérés : $D_1 = 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \overset{0}{2}$, $D_2 = 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \overset{1}{1}$ et $D_3 = 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \overset{2}{0}$.

Proposition 4.3.5. [73] *Supposons que n soit un entier impair, c'est-à-dire $n = 2l+1$ avec $l \geq 2$. Alors, pour $1 \leq r \leq 3$*

$$H^i(G/P^{(1)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) \simeq H^i(G/P^{(3)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes (r\omega_{2l})^*)[-r].$$

DÉMONSTRATION. **Étape 1**

Le sous-groupe parabolique $P^{(2)}$ est inclus dans $P^{(1)}$. Cela nous permet de construire une projection $\pi : G/P^{(2)} \rightarrow G/P^{(1)}$. Il existe une suite spectrale,

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &= H^i(G/P^{(1)}, H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*)) \\ &\Rightarrow H^{i+j}(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*). \end{aligned}$$

Remarquons que $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) = 0$ pour tout $j \geq 1$. En effet, puisque ω_{2l+1} est un caractère de $P^{(1)}$, nous pouvons utiliser la formule de projection pour obtenir l'isomorphisme $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) \simeq H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]) \otimes (-r\omega_{2l+1})^*$. Or, le radical unipotent de $P^{(2)}$ agit trivialement sur $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$. Le théorème 1.3.2 nous donne alors l'annulation de tous les groupes de cohomologie $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}])$ pour $j \geq 1$. On conclut à l'annulation de tous les groupes de cohomologie $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-k\omega_{2l+1})^*)$ pour tout les $j \geq 1$. Ainsi, la suite spectrale de Leray est dégénérée. Plus précisément, $E_2^{i,j} = E_\infty^{i,j}$. Ceci nous permet de déduire que

$$H^i(G/P^{(1)}, H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*).$$

Il nous reste à montrer que $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*$. On suit la même démarche que dans le cas A_n . Par la formule de projection, il suffit de montrer que $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}]$. On considère la restriction de l'application moment $\mu : P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)} \rightarrow P^{(1)} \mathfrak{n}^{(2)} \subset \mathfrak{n}^{(1)}$. On utilise de nouveau le théorème 1.3.2 pour conclure que $\mu^\sharp : \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \rightarrow \mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)}]$ est surjective. Or, l'étude de l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices antisymétriques nous assure que $P^{(1)} \mathfrak{n}^{(2)} = \mathfrak{n}^{(1)}$. Ainsi, μ est surjective sur $\mathfrak{n}^{(1)}$ et μ^\sharp est injective. Nous obtenons alors l'isomorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \simeq \mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} \mathfrak{n}^{(2)}]$. Ce qui permet de terminer la preuve de cette première étape.

Étape 2

Nous voulons maintenant construire un isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^*)$ et $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((s+1)\omega_{2l} + (-r+1)\omega_{2l+1})^*)[-l]$, pour $1 \leq r \leq 3$, et s un entier positif qui est nul si $r = 3$. En appliquant r fois cet isomorphisme, nous obtiendrons

$$H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1})^*) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_{2l})^*)[-rl]. \quad (4.3.2)$$

Reprenons les notations de la sous-section 4.3.3. Soit $m(X)$ une matrice dans $\mathfrak{n}^{(2)}$. Notons pf , la fonction qui consiste en le Pfaffien de la matrice antisymétrique X de taille $2l$ formant $m(X)$. Considérons $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]\text{pf}$, l'idéal principal de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$ engendré par la fonction $\text{pf} \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$. En tensorisant avec $(s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^*$, nous obtenons une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (\text{pf}) \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^* &\rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^* \\ &\rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\text{pf}) \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La fonction pf est un $P^{(2)}$ -covariant de degré l et de poids $(\omega_{2l} + \omega_{2l+1})^*$. Ainsi, il existe un isomorphisme de $P^{(2)}$ -modules

$$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]\text{pf} \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^* \simeq (\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((s+1)\omega_{2l} + (-r+1)\omega_{2l+1})^*)[-l].$$

Reste à montrer que tous les groupes de cohomologie $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\text{pf}) \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^*)$ sont nuls.

Nous savons que la série de Hilbert duale $P^{(2)}$ -équivariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$ est

$$\mathcal{H}_{P^{(2)}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}], t) = \frac{1}{(1 - e^{\omega_2 t})(1 - e^{\omega_4 t^2}) \dots (1 - e^{\omega_{2l} + \omega_{2l+1}} t^l)}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{H}_{P^{(2)}}^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\text{pf}) \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^*, t) = \frac{e^{s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1}}}{(1 - e^{\omega_2 t}) \dots (1 - e^{\omega_{2l-2}} t^{l-1})}.$$

Ainsi, les sous- $P^{(2)}$ -modules irréductibles de $(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(\text{pf}) \otimes (s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1})^*)^*$ ont comme plus haut poids $\lambda = n_1\omega_2 + n_2\omega_4 + \dots + n_{l-2}\omega_{l-2} + s\omega_{2l} - r\omega_{2l+1}$. Il est alors clair $\lambda + \rho$ n'est pas régulier si les conditions sur r et s sont vérifiées. Le théorème de Borel-Weil-Bott nous assure alors que tous les groupes de cohomologie s'annulent.

En utilisant à r reprise l'isomorphisme 4.3.2, nous obtenons le résultat souhaité, c'est-à-dire

$$H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_{2l+1}^*)) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_{2l}^*))[-r].$$

Étape 3

On peut calquer la preuve de la première étape. On peut aussi seulement remarquer que c'est la version symétrique de l'isomorphisme de l'étape 1.

□

Cas 3 : E_6 avec le diagramme de Dynkin pondéré officiel $\hat{D} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{matrix}$

Nous allons maintenant travailler avec les trois diagrammes de Dynkin pondérés : $D_1 = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{matrix}$, $D_2 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{matrix}$ et $D_3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{matrix}$.

Proposition 4.3.6. *Pour $1 \leq r \leq 5$,*

$$H^i(G/P^{(1)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(1)}] \otimes (-r\omega_1)^*) \simeq H^i(G/P^{(3)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes (r\omega_6)^*)[-2r].$$

DÉMONSTRATION. Étape 1

Le sous-groupe parabolique $P^{(2)}$ est inclus dans $P^{(1)}$. Cela nous permet de construire une projection $\pi : G/P^{(2)} \rightarrow G/P^{(1)}$. Nous obtenons alors une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(G/P^{(1)}, H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)) \Rightarrow H^{i+j}(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)).$$

Nous voulons comprendre $H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*))$. Puisque ω_1 est un caractère de $P^{(1)}$, nous savons que

$$H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)) \simeq H^j(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)).$$

De plus, le radical unipotent de $P^{(2)}$ agit trivialement sur $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]$ ce qui nous permet de conclure que tous les groupes de cohomologie supérieurs s'annulent. Ainsi la suite spectrale dégénère à la deuxième page et

$$H^i(G/P^{(1)}, H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)) \simeq H^{i+j}(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)).$$

Il reste donc à comprendre $H^0(P^{(1)}/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}])$.

Notons $\mu : P^{(1)} \times^{P^{(2)}} n^{(2)} \rightarrow P^{(1)} n^{(2)} \subset n^{(1)}$, la restriction de l'application moment. Puisque le radical unipotent de $P^{(2)}$ agit trivialement sur $n^{(2)}$, nous savons que le morphisme $\mu^\sharp : \mathbb{C}[n^{(2)}] \rightarrow \mathbb{C}[P^{(1)} \times^{P^{(2)}} n^{(2)}]$ est surjectif. Nous voulons montrer que cette application est un isomorphisme. Pour ce faire, il nous suffit de montrer que $P^{(1)} n^{(2)}$ est dense dans $n^{(1)}$. En effet, dans ce cas, le morphisme μ est dominant sur $n^{(1)}$, ce qui nous permet de conclure que μ^\sharp est injectif.

Maintenant nous voulons montrer que $P^{(1)} n^{(2)}$ est dense dans $n^{(2)}$ en utilisant le fait que $G n^{(1)} = G n^{(2)}$. Nous montrerons que $\dim(P^{(1)} n^{(2)}) = \dim(n^{(1)})$. Puisque $P^{(1)} n^{(2)} \subset n^{(1)}$ et que ce sont deux variétés irréductibles, nous pourrions déduire que $P^{(1)} n^{(2)} = n^{(1)}$ qui est même plus fort que ce que nous avons besoin.

Le fibré $G \times^{P^{(1)}} P^{(1)} n^{(2)}$ s'injecte dans $G \times^{P^{(1)}} n^{(1)}$. Le diagramme pondéré D_1 étant pair, nous savons aussi que l'application moment $G \times^{P^{(1)}} n^{(1)} \rightarrow G n^{(1)}$ a des fibres finies, voir [18] par exemple. En particulier, les dimensions de $G \times^{P^{(1)}} n^{(1)}$ et de $G n^{(1)}$ sont les mêmes. Mais l'image de $G \times^{P^{(1)}} P^{(1)} n^{(2)}$ par l'application moment est $G n^{(2)} = G n^{(1)}$. Ainsi, la dimension de $G \times^{P^{(1)}} P^{(1)} n^{(2)}$ doit être supérieure ou égale à la dimension de $G \times^{P^{(1)}} n^{(1)}$. On en conclut que les dimensions de $P n^{(2)}$ et de $n^{(1)}$ sont égales.

Étape 2

Nous voulons montrer que pour $1 \leq r \leq 5$, il existe un isomorphisme $H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[n^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[n^{(2)}] \otimes (r\omega_6^*)) [2r]$. Pour ce faire, nous montrerons que pour $1 \leq r \leq 5$ et s un entier positif qui est nul si $r = 5$,

$$H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[n^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^* + s\omega_6)) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbb{C}[n^{(2)}] \otimes ((1-r)\omega_1^* + (s+1)\omega_6^*)) [2]. \quad (4.3.3)$$

Nous avons montré en utilisant [10] que l'algèbre $\mathbb{C}[n^{(2)}]$ possède un covariant f de degré deux et de poids $\omega_1 + \omega_6$. Ceci nous permet de construire la

suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]f \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^* &\rightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^* \\ &\rightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(f) \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Notons que nous avons un isomorphisme $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]f \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^* \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes ((-r+1)\omega_1 + (s+1)\omega_6)^*[2]$. Nous voulons montrer que $H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(f) \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^*) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Ceci nous permettra d'obtenir l'isomorphisme souhaité en passant par la suite exacte longue en cohomologie.

En se référant à la sous-section 4.3.3, on constate que

$$\mathcal{H}_{P^{(2)}}^*(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(f) \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^*, t) = \frac{e^{-r\omega_1 + s\omega_6}}{1 - e^{\omega_2 t}}.$$

En particulier, les sous- $P^{(2)}$ -modules irréductibles de $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}]/(f) \otimes (-r\omega_1 + s\omega_6)^*$ ont comme plus haut poids $\lambda(r, s) = n\omega_2 - r\omega_1 + s\omega_6$. Sous réserve des conditions ci-haut sur r et s , il est possible de trouver $\beta(r, s)$, une racine positive, telle que $(\lambda(r, s) + \rho, \beta(r, s)) = 0$, c'est-à-dire $\lambda(r, s) + \rho$ n'est pas un poids régulier. On obtient alors l'annulation de tous les groupes de cohomologie avec le théorème de Borel-Weil-Bott. Ce qui démontre l'isomorphisme 4.3.3

En utilisant à r répétitions l'isomorphisme 4.3.3, nous obtenons que

$$H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (-r\omega_1^*)) \simeq H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_6^*))[-2r].$$

Étape 3

Il suffit de constater que $H^i(G/P^{(2)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(2)}] \otimes (r\omega_6^*)) \simeq H^i(G/P^{(3)}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^{(3)}] \otimes (r\omega_6^*))$ soit en calquant la preuve de la première étape, soit en remarquant la symétrie du problème.

□

ANNEXE : SÉRIE DE HILBERT ET INDUCTION

Nous présentons ici le calcul des séries de Hilbert qui nous ont permis d'obtenir les propositions 4.3.4 et 4.3.5. Nous nous intéresserons tout d'abord à l'action par conjugaison du groupe $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices de taille n . Puis nous discuterons d'une action de ce groupe sur l'espace des matrices antisymétriques de taille n .

4.4. SÉRIE DE HILBERT DANS A_n

Soit D un diagramme de Dynkin pondéré. Nous allons noter $\mathfrak{n}^D = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous allons omettre les D afin d'alléger la notation. Le but de cette section est de montrer la proposition 4.4.1.

Proposition 4.4.1. *Soit D le diagramme de Dynkin pondéré officiel de A_n dont les seules entrées non nulles sont $D(\alpha_k) = D(\alpha_{n+1-k}) = 1$ où $k \neq n+1-k$. Alors la série de Hilbert P -équivariante duale de $\mathbb{C}[n]$ a la forme suivante :*

$$\mathcal{H}_P^*(\mathbb{C}[n], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 - t^i e^{\omega_i + \omega_{n+1-i}})}.$$

La preuve se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, pour des entiers quelconques m_1 et m_2 , on étudie les orbites du groupe $GL(m_1, \mathbb{C}) \times GL(m_2, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices complexes $Mat(m_1 \times m_2, \mathbb{C})$. On se restreint ensuite au groupe $G = GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})$ et à l'étude de la série de Hilbert G -équivariante sur la fermeture de l'orbite des matrices de rang un dans $Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$. Pour cela, on étudie la restriction de l'application moment. On pourra alors passer aux matrices 3×3 et $m \times m$ par induction. Cela nous permettra finalement de calculer la série de Hilbert P -équivariante de $\mathbb{C}[n]$.

qui ont cette forme. Par conséquent, ces matrices sont dans $\overline{\mathcal{O}}_i$ qui est G -stable, ce qui veut dire que leur orbite est aussi dans cet ensemble. \square

On sait que la fermeture de l'orbite \mathcal{O}_i est une variété affine. On voudrait décrire l'idéal qui la définit comme fermé dans M . La preuve de la proposition précédente nous assure que l'idéal $I(\overline{\mathcal{O}}_i)$ est le radical de l'idéal formé par tous les mineurs d'ordre $i + 1$. En effet, cette proposition affirme que la variété définie par l'annulation de tous les mineurs d'ordre $i + 1$ est la fermeture de l'orbite \mathcal{O}_i . Le théorème des zéros de Hilbert nous permet alors de conclure. Notons I cet idéal

L'idéal I est premier dans l'anneau des fonctions régulières sur M . Soit $X \in \mathcal{O}_i$. Il existe un morphisme surjectif de G dans \mathcal{O}_i qui à un élément (A, B) de G , associe AXB^{-1} . Le groupe G étant une variété irréductible, l'image du morphisme l'est aussi. On sait aussi que si un ensemble est irréductible, alors sa fermeture l'est. Ceci nous assure que $\overline{\mathcal{O}}_i$ est irréductible. Ainsi, l'idéal qui définit $\overline{\mathcal{O}}_i$ est premier.

Nous allons faire une dernière remarque générale sur les orbites. Si $j \leq i$, il est clair que $\overline{\mathcal{O}}_j \subset \overline{\mathcal{O}}_i$. Nous avons alors l'inclusion inverse au niveau des idéaux : $I(\overline{\mathcal{O}}_i) \subset I(\overline{\mathcal{O}}_j)$. Mais nous aurions pu le voir directement puisqu'un mineur d'ordre $i + 1$ est une combinaison linéaire de mineurs d'ordre i .

4.4.2. L'orbite des matrices de rang 1

Plaçons nous maintenant dans la situation où $m_1 = m_2 = 2$. Nous voulons étudier $\overline{\mathcal{O}}_1$ la fermeture de l'orbite des matrices de rang 1 dans l'espace des matrices 2 par 2. Nous savons que cet espace est l'ensemble des matrices de $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ de rang inférieur ou égal à 1. Notons $X(c)$ la matrice définie par $X(c)_{12} = c$ et $X(c)_{ij} = 0$ pour tous les autres i et j . Notons W l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par $X(1)$. Nous savons que

$$\overline{\mathcal{O}}_1 = GX(1) \cup \{0\} = GW.$$

Le groupe $P = B(2, \mathbb{C}) \times B(2, \mathbb{C})$, où $B(2, \mathbb{C})$ est le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures, est le plus grand sous-groupe de G qui stabilise W .

Notons T_2 l'ensemble des matrices diagonales de $GL(2, \mathbb{C})$. Le tore $T = T_2 \times T_2$ est inclus dans P . Nous voulons étudier son action sur W .

Un élément de T s'écrit sous la forme $t = (r, s)$ où r et s sont des matrices diagonales dans $GL(2, \mathbb{C})$. Notons ϵ_i , pour $i \in \{1, 2\}$, le caractère de T_2 qui a une matrice diagonale s associe l'entrée s_{ii} . Nous utiliserons les notations additives pour les caractères de T_2 et de T . Ainsi, par $-\epsilon_i(s)$, nous entendons $\epsilon_i(s)^{-1}$.

Soit maintenant $t = (r, s) \in T$ et $w \in W$. Alors $t \cdot w = t_1 s_2^{-1} w$. Ainsi, le tore agit avec le caractère $\chi = (\epsilon_1, -\epsilon_2)$.

Puisque pour un couple de matrices dans P , seuls les éléments sur la diagonale agissent non trivialement sur W , on peut étendre χ à un caractère de P et identifier les P -modules W et \mathbb{C}_χ . On peut aussi définir $G \times^P W$ un fibré en droite sur G/P . Nous sommes intéressés à comprendre ce fibré, plus précisément le morphisme $G \times^P W \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_1$ et sa cohomologie par rapport au faisceau des fonctions régulières.

Considérons le morphisme :

$$\begin{aligned} \mu: \quad G \times^P W &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\ [(A, B), X] &\mapsto AXB^{-1}. \end{aligned}$$

Son image est exactement $\overline{\mathcal{O}}_1$. On veut étudier les fibres de cette application. Ce sera l'objet des lemmes suivants.

Le cas le plus simple est la préimage de la matrice 0.

Lemme 4.4.1. *La préimage de la matrice 0 par le morphisme μ est isomorphe à la variété projective G/P .*

DÉMONSTRATION. La préimage $\mu^{-1}(0)$ est

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(0) &= \{[(A, B), X] \mid AXB^{-1} = 0\} \\ &= \{[(A, B), 0]\} \\ &= G \times^P \{0\} \\ &\simeq G/P.\end{aligned}$$

□

Passons maintenant à l'étude de la préimage d'une matrice dans l'orbite de $X(1)$.

Lemme 4.4.2. *Soit X une matrice dans l'orbite de $X(1)$. Alors la préimage de X par l'application μ est constituée d'un seul point.*

DÉMONSTRATION. Commençons par étudier la préimage de $X(1)$. Supposons que $[(A, B), X(c)]$ soit dans $\mu^{-1}(X(1))$. Alors $AX(c)B^{-1} = X(1)$. En particulier, (A, B) stabilise l'espace vectoriel W . Par conséquent, $(A, B) \in P$ par définition de P qui est le plus grand sous-espace de G stabilisant W . Ainsi,

$$[(A, B), X(c)] = [1, (A, B) \cdot X(c)] = [1, X(1)].$$

De sorte que la fibre de $X(1)$ est un seul point.

Soit X une matrice dans l'orbite de $X(1)$, c'est-à-dire $X = AX(1)B^{-1}$. Nous voulons voir que dans ce cas $\mu^{-1}(X)$ est aussi un seul point. Puisque μ est un morphisme G -équivariant, on observe que

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(X) &= \mu^{-1}(AX(1)B^{-1}) \\ &= \mu^{-1}((A, B) \cdot X(1)) \\ &= (A, B)\mu^{-1}(X(1)) \\ &= (A, B)[1, X(1)] \\ &= [(A, B), X(1)].\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout point X de \mathcal{O}_1 , c'est-à-dire sur $\overline{\mathcal{O}_1} \setminus \{0\}$, $\mu^{-1}(X)$ est constitué d'un seul point. □

On pourrait se demander ici si l'effondrement μ est une application birationnelle. C'est en effet le cas. Ce sera l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4.3. *Le morphisme $\mu : G \times^P W \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_1$ est birationnel.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu que sur un ouvert dense de $\overline{\mathcal{O}}_1$ cette application est bijective. Puisque la préimage d'un ouvert est un ouvert et que $G \times^P W$ est irréductible, nous savons que l'application μ est bijective d'un ouvert dense de $G \times^P W$ dans un ouvert dense de $\overline{\mathcal{O}}_1$. Il faudrait voir que l'application inverse est régulière sur ces ouverts. En fait, on peut définir $\nu : \overline{\mathcal{O}}_1 \rightarrow G \times^P W$ par

$$\nu \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right) = \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{w}{y} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Cette application est régulière sur les matrices X de $\overline{\mathcal{O}}_1$ pour lesquelles $X_{12} \neq 0$. Ces matrices forment un ouvert dense de $\overline{\mathcal{O}}_1$. De plus, l'application ν est l'inverse de μ . Ainsi, μ est un morphisme birationnel. \square

Nous allons faire une dernière remarque sur le morphisme μ avant de passer à l'étude de la cohomologie. Considérons la composition de morphismes :

$$G \times^P W \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_1 \hookrightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Si on passe aux anneaux des fonctions régulières, cela nous donne :

$$\mathbb{C}[G \times^P W] \hookrightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1] \hookleftarrow \mathbb{C}[\text{Mat}(2, \mathbb{C})]. \quad (4.4.1)$$

En particulier, $G \times^P W$ et $\overline{\mathcal{O}}_1$ ont le même corps de fonctions rationnelles et $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1] \simeq \mathbb{C}[\text{Mat}(2, \mathbb{C})]/I$, où I est l'idéal engendré par la fonction déterminant sur $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$.

4.4.3. Cohomologie

Le but de cette section est de comprendre la structure de G -module de l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]$. Cela se fera en calculant les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P W, \mathcal{O}_{G \times^P W})$.

Proposition 4.4.4. *La série de Hilbert G -équivariante duale de $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]$ est :*

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1], t) = \frac{1}{1 - te^{(\epsilon_1, -\epsilon_2)}}.$$

DÉMONSTRATION. Nous savons que

$$H^i(G \times^P W, \mathcal{O}_{G \times^P W}) \simeq \bigoplus_{j \geq 0} H^i(G/P, S^j W^*).$$

Puisque le radical unipotent de P agit trivialement sur W , il agit aussi trivialement sur $S^j W^*$. Cela veut dire que l'action de P sur $S^j W^*$ est complètement réductible. D'après le théorème 1.3.2, on peut conclure que les groupes de cohomologie $H^i(G \times^P W, \mathcal{O}_{G \times^P W})$ sont nuls pour tout $i \geq 1$. De plus, pour tout entier positif j , il existe une surjection sur les fonctions régulières de degré j :

$$\mathbb{C}[\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})]_j \twoheadrightarrow \mathbb{C}[W]_j. \quad (4.4.2)$$

Passons à l'étude de la structure de G -module de $H^0(G/P, S^j W^*)$. Nous devons comprendre comment T , le tore maximal de G , agit sur $S^j W^*$. Nous savons que l'action de T sur W se fait par le caractère $\chi = (\epsilon_1, -\epsilon_2)$. Puisque W est un espace vectoriel de dimension 1, c'est aussi le cas de $S^j W^*$ et le poids de $S^j W^*$ est $j\chi = (j\epsilon_1, -j\epsilon_2)^*$. Cela nous donne un isomorphisme de P -modules : $S^j W^* \simeq \mathbb{C}_{j\chi}^*$. Le théorème de Borel-Weil-Bott nous permet alors de conclure que

$$H^0(G/P, S^j W^*) \simeq V_{G, j\chi}^*.$$

Remarque 4.4.1. *Dans ce cas, nous n'aurions pas eu besoin de passer par l'article de Kempf pour montrer l'annulation des groupes supérieurs de cohomologie. Le théorème de Borel-Weil-Bott aurait fait l'affaire puisque les poids $j\chi$ sont G -dominants.*

Nous avons donc un isomorphisme :

$$\mathbb{C}[G \times^P W]_j \simeq V_{G, j\chi}^*.$$

Nous voulons utiliser les connaissances que nous avons sur l'anneau des fonctions régulières sur le fibré $G \times^P W$ afin de comprendre l'anneau des fonctions sur la fermeture de l'orbite O_1 . À partir des morphismes 4.4.1 et 4.4.2 on déduit que $\mathbb{C}[\overline{O}_1]_j \simeq \mathbb{C}[G \times^P W]_j \simeq V_{G, j\chi}^*$. \square

4.4.4. Induction

Dans la section précédente, nous avons compris la structure de G -module de $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]$. Nous voulons maintenant utiliser cela pour étudier la structure de G -module de $\mathbb{C}[V]$ où $V = \text{Mat}(2, \mathbb{C})$.

Il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1] \rightarrow 0,$$

où I est l'idéal engendré par la fonction déterminant sur $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$, fonction que nous noterons \det_V . Or, en termes de G -modules,

$$I = \mathbb{C}[V] \det_V \simeq \mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}.$$

En termes d'anneaux gradués :

$$(\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)})_{i+2} = \mathbb{C}[V]_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}.$$

On sait que $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]_i = V_{G, i\chi}^*$. On veut calculer $\mathbb{C}[V]_i$. Nous obtenons inductivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[V]_0 &= \mathbb{C} \\ \mathbb{C}[V]_1 &= \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]_1 = V_{\chi}^* \\ \mathbb{C}[V]_2 &= \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1]_2 \oplus (\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)})_2 = V_{2\chi}^* \oplus \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)} \\ \mathbb{C}[V]_3 &= V_{3\chi}^* \oplus V_{\chi + (\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}^* \\ &\dots \\ \mathbb{C}[V]_{2n+\delta} &= V_{(2n+\delta)\chi}^* \oplus V_{(2(n-1)+\delta)\chi + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}^* \oplus \dots \oplus V_{\delta\chi + n(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}^* \end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) &= \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1], t) + \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*_{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}, t) \\ &= \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1], t) + t^2 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)} \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}_G(\mathbb{C}[V], t) = \frac{\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}_1], t)}{1 - t^2 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)}} = \frac{1}{(1 - t e^{(\epsilon_1, -\epsilon_2)})(1 - t^2 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_1 - \epsilon_2)})}.$$

4.4.5. Passage aux matrices 3×3 et $m \times m$

Considérons maintenant $V = \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ et W l'espace des matrices dont la première colonne et la dernière ligne sont nulles. Posons $G = \text{GL}(3, \mathbb{C}) \times \text{GL}(3, \mathbb{C})$ et $T = T(3, \mathbb{C}) \times T(3, \mathbb{C})$ un tore maximal de G . L'espace W est stable sous l'action du sous-groupe parabolique $P = P_1 \times P_2$ où P_1 est le sous-groupe parabolique de $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ qui consiste en les matrices X pour lesquelles les entrées X_{31} et X_{32} sont nulles et P_2 consiste en les matrices X pour lesquelles les entrées X_{21} et X_{31} sont nulles. Le radical unipotent de P agit trivialement sur W , ce qui en fait un P -module complètement réductible. La G -saturation de W , la variété GW , est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à 2 dans V . C'est le fermé défini par l'annulation de la fonction déterminant sur V .

Proposition 4.4.5. *La série de Hilbert G -équivariante duale de $\mathbb{C}[V]$ est :*

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{(1 - te^{(\epsilon_1, -\epsilon_2)})(1 - te^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_2 - \epsilon_3)})(1 - te^{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)}}.$$

DÉMONSTRATION. On sait encore une fois que

$$\mathbb{C}[GW] \simeq \mathbb{C}[G \times^P W] \simeq \bigoplus_{j \geq 0} H^0(G/P, S^j W^*).$$

D'après le théorème de Borel-Weil-Bott, la multiplicité du P -module $V_{P, \lambda}^*$ dans $S^j W^* = \mathbb{C}[W]_j$ est la même que celle du G -module $V_{G, \lambda}^*$ dans $H^0(G/P, S^j W^*)$ pour λ un caractère de P qui est G -dominant.

Puisque le radical unipotent de P agit trivialement sur W , il agit aussi trivialement sur l'anneau des fonctions régulières sur W . Notons $P = LU$ une décomposition de Levi de P où L est un sous-groupe réductif de P et U le radical unipotent de P . Nous devons donc comprendre comment L agit sur $\mathbb{C}[W]$. Le groupe L se décompose comme produit $L = (\text{GL}(2, \mathbb{C}) \times \text{GL}(1, \mathbb{C})) \times (\text{GL}(1, \mathbb{C}) \times \text{GL}(2, \mathbb{C}))$. Les groupes $\text{GL}(1, \mathbb{C})$ agissent trivialement sur W et donc sur $\mathbb{C}[W]$. Ainsi, seule l'action de $G' = \text{GL}(2, \mathbb{C}) \times \text{GL}(2, \mathbb{C})$ est importante. Or, nous venons de calculer comment $\mathbb{C}[W]$ se décompose en termes de $\text{GL}(2, \mathbb{C}) \times \text{GL}(2, \mathbb{C})$ -modules. Il faut seulement faire un saut sur les poids du deuxième

tore. En remarquant que les poids $(\epsilon_1, -\epsilon_3)$ et $(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_2 - \epsilon_3)$ sont G-dominants, on obtient :

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\text{GW}], t) = \frac{1}{(1 - t e^{(\epsilon_1, -\epsilon_3)})(1 - t^2 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_2 - \epsilon_3)})}.$$

On construit alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[\text{GW}] \rightarrow 0,$$

où I est l'idéal engendré par la fonction déterminant sur $\text{Mat}(3, \mathbb{C})$. Encore une fois, il existe un isomorphisme de G-modules

$$I = \mathbb{C}[V] \underset{V}{\det} \simeq \mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)}^*.$$

Ce qui nous donne au niveau des anneaux gradués :

$$I_{i+3} = (\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)}^*)_{i+3} = \mathbb{C}[V]_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)}^*.$$

Par le même raisonnement que dans la sous-section 4.4.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) &= \frac{\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[\text{GW}], t)}{1 - t^3 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)}} \\ &= \frac{1}{(1 - t e^{(\epsilon_1, -\epsilon_3)})(1 - t^2 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon_2 - \epsilon_3)})(1 - t^3 e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)})}. \end{aligned}$$

□

On comprends comment on peut passer inductivement aux matrices $m \times m$. En posant $V = \text{Mat}(m \times m, \mathbb{C})$ et $G = \text{GL}(m, \mathbb{C})$, on obtient :

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{(1 - t e^{(\epsilon_1, -\epsilon_m)}) \dots (1 - t^m e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m, -\epsilon_1 - \dots - \epsilon_m)})}.$$

4.4.6. Action d'un seul groupe

Nous pouvons maintenant passer au but réel de cette section. Soit D le diagramme de Dynkin pondéré avec seulement deux entrées non nulles : $D(\alpha_k) = D(\alpha_{n+1-k}) = 1$ avec $k < n + 1 - k$. Notons P le sous-groupe parabolique P^D et $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\geq 2}^D$. Nous voulons calculer la série de Hilbert P-équivariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$.

Soit g une matrice de P . Alors $g = \begin{pmatrix} A & D_1 & D_2 \\ 0 & C & D_3 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des

matrices dans $GL(k, \mathbb{C})$, C est une matrice dans $GL(n + 1 - 2k, \mathbb{C})$, $D_1, D_3^T \in M(k \times (n + 1 - 2k), \mathbb{C})$ et $D_2 \in Mat(k \times k, \mathbb{C})$. Il faut aussi demander que le produit des déterminants des matrices A , B et C soit un.

Nous avons déjà vu que les matrices dans \mathfrak{n} s'écrivent sous la forme

$$m(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $X \in Mat(k, \mathbb{C})$. Seules les matrices A et B agissent sur \mathfrak{n} . En fait, si $m(X) \in \mathfrak{n}$, $gm(X) = m(AXB^{-1})$.

D'après le résultat de la sous-section 4.4.5, nous obtenons une description agréable de la série de Hilbert de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$:

$$\mathcal{H}_p^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 - t^i e^{\lambda_i})},$$

où $\lambda_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i - \epsilon_{n+1-i} - \dots - \epsilon_{n+1}$. Il ne nous reste qu'à donner cette série sous forme de poids fondamentaux ω_i . On se rappelle pour $i = 1, \dots, n$, $\omega_i = \sum_{j=1}^i \epsilon_j$. De plus, $\epsilon_{n+1} = -\sum_{j=1}^n \epsilon_j$. On obtient :

$$\mathcal{H}_p^*(\mathbb{C}[\mathfrak{n}], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 - t^i e^{\omega_i + \omega_{n+1-i}})}.$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 4.4.1.

4.5. SÉRIE DE HILBERT DANS D_n

Dans la section 4.4, nous avons calculé la série de Hilbert P^D -équivariante duale de $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^D]$ pour un certain diagramme de Dynkin pondéré de A_n . Dans cette section, nous allons nous intéresser à un diagramme de Dynkin pondéré de D_n et faire le même type d'étude. Le but de cette section est de montrer la proposition 4.5.1.

Proposition 4.5.1. *Soit D le diagramme de Dynkin pondéré officiel de D_n dont les seules entrées non nulles sont $D(\alpha_{n-1}) = D(\alpha_n) = 1$ où $n = 2m + 1$. Alors la série de Hilbert P^D -équivariante duale de $\mathbb{C}[n^D]$ a la forme suivante :*

$$\mathcal{H}_p^*(\mathbb{C}[n^D], t) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{m-1} (1 - t^i e^{\omega_{2i}})\right) (1 - t^m e^{\omega_{2m} + \omega_{2m+1}})}.$$

On commence par étudier l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. En suivant la même approche d'induction que celle de la section 4.4, on peut calculer la série de Hilbert de l'anneau des fonctions sur l'espace des matrices antisymétriques. Puis on passe à l'étude de la série de Hilbert P^D -équivariante de $\mathbb{C}[n^D]$.

4.5.1. Action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espaces des matrices antisymétriques

Le groupe $G = GL(n, \mathbb{C})$ agit sur l'espace des matrices antisymétriques $Asym(n, \mathbb{C})$. Pour $g \in G$ et $X \in Asym(n, \mathbb{C})$, on définit $g \cdot X := gXg^T$. On vérifie alors que $(gXg^T)^T = gX^Tg^T = -gXg^T$. Ainsi, $g \cdot X$ est bien un élément de $Asym(n, \mathbb{C})$. Cette action de G sur $Asym(n, \mathbb{C})$ induit une action de G sur $\mathbb{C}[Asym(n, \mathbb{C})]$. Nous voulons décrire la décomposition de cette algèbre en termes de G -modules irréductibles en calculant sa série de Hilbert.

Proposition 4.5.2. *Soit G le groupe des matrices inversibles de taille n et V l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille n . Supposons que $n = 2m$. Alors,*

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i})} t^i)}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par induction. Commençons par étudier la situation où $n = 2$. Dans ce cas, $V = Asym(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ et $G = GL(2, \mathbb{C})$ agit sur V par l'action $g \cdot v = gvg^T$. Plus précisément, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \in V$, $g \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & \det(v)x \\ -\det(v)x & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, l'espace vectoriel V est de dimension un et le tore maximal formé des matrices diagonales dans G agit sur un élément non nul de V avec poids $\epsilon_1 + \epsilon_2$. On peut identifier V avec $\mathbb{C}_{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ et plus généralement

$\mathbb{C}[V]_i = \mathbb{C}_{i(\epsilon_1 + \epsilon_2)}^*$. On obtient ainsi

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{(1 - e^{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} t)}.$$

Étudions maintenant le cas où $V = \text{Asym}(2(m+1), \mathbb{C})$ et $G = \text{GL}(2(m+1), \mathbb{C})$ en supposant que la forme de la série de Hilbert est valide dans le cas $n = 2m$. Considérons $W \subset V$, l'espace des matrices asymétriques ayant des entrées nulles sur les deux dernières lignes et sur les deux dernières colonnes. On peut voir W comme l'injection de l'espace des matrices antisymétriques de taille $2m$ dans V . L'espace W n'est pas stable sous l'action de G , mais il est stable sous l'action d'un sous-groupe parabolique P de G qui a comme éléments les matrices p pour lesquelles $p_{2(m+1),j} = p_{2(m+1)-1,j} = 0$ pour $j \in \{1, \dots, 2m\}$. De façon visuelle, les matrices de P sont de la forme $p = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \text{GL}(2m, \mathbb{C})$, $C \in \text{Mat}(2m \times 2, \mathbb{C})$ et $B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$. Les matrices de W sont quant à elles de la forme $M(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $X \in \text{Asym}(2m, \mathbb{C})$.

L'action de P sur W est donnée par $p \cdot M(X) = M(AXA^T)$ qui est vraiment l'action de $\text{GL}(2m, \mathbb{C})$ sur $\text{Asym}(2m, \mathbb{C})$. Par induction, nous savons que

$$\mathcal{H}_P^*(\mathbb{C}[W], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i})} t^i)}.$$

Il existe un morphisme birationnel $G \times^P W \rightarrow GW \subset V$. De plus, on remarque que le radical unipotent de P agit trivialement sur W . On peut donc utiliser le théorème 1.3.2 pour obtenir un isomorphisme entre $\mathbb{C}[GW]$ et $\mathbb{C}[G \times^P W]$. Des calculs de dimension assurent que GW est une hypersurface de V . On sait que tous les éléments de GW s'annulent sur la fonction déterminant. La variété GW étant l'image d'une variété irréductible, elle est elle-même irréductible. Nous pouvons donc conclure que GW est la sous-variété de V déterminée par l'annulation du déterminant. Mais le déterminant d'une matrice antisymétrique est un carré. On appelle le pfaffien la racine carrée du déterminant. Le pfaffien est un polynôme irréductible. Cela nous donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[V]_{\text{pf}} \rightarrow \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[GW] \rightarrow 0.$$

Le pfaffien est un semi-invariant sous l'action de G . En effet, pour $g \in G$ et $M \in V$, $g \cdot \text{pf}(M) = \text{pf}(g^{-1} M g^{-T}) = \det(g^{-1}) \text{pf}(M)$. Cela nous donne la suite

exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[V][-(m+1)] \otimes \mathbb{C}_{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2(m+1)})}^* \rightarrow \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[GW] \rightarrow 0.$$

De cela, on obtient que $\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[GW], t)}{1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2(m+1)})} t^{m+1}}$. Il nous faut donc calculer $\mathcal{H}_G(\mathbb{C}[GW], t)$. Mais puisque

$$\mathbb{C}[GW] = \mathbb{C}[G \times^P W] = H^0(G/P, S^*W^*)$$

et que nous connaissons la décomposition de S^*W^* en termes de P -modules irréductibles, nous pouvons utiliser le théorème de Borel-Weil-Bott pour calculer $\mathbb{C}[GW]$. Les poids $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i}$ étant tous G -dominants, on peut conclure que

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1} (1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i})} t^i)}.$$

□

La proposition 4.5.2 nous donnait le comportement de la série de Hilbert de $\mathbb{C}[V]$ lorsque V était un espace vectoriel de matrices antisymétriques de taille paire. Mais nous devons aussi comprendre ce qui se passe pour les matrices symétriques de taille impaire.

Corollaire 4.5.1. *Soit $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ et V l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille n où $n = 2m + 1$. Alors,*

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[V], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i})} t^i)}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $X \in \mathrm{Asym}(2m+1, \mathbb{C})$. Alors, le déterminant de la matrice X est nul. Elle est donc de rang au plus $2m$. Les orbites pour l'action de G sont déterminées par le rang des matrices qui les composent. Notons $W \subset V$ le sous-espace des matrices antisymétriques dont la dernière ligne et la dernière colonne sont nulles. La variété GW est tout simplement V . Ainsi, $\mathbb{C}[GW] = \mathbb{C}[V]$. Mais,

$$\mathcal{H}_G^*(\mathbb{C}[GW], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2i})} t^i)}.$$

Ce qui nous permet de conclure. □

4.5.2. Action d'un seul groupe

Passons maintenant au problème qui nous intéresse vraiment. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type D_n avec n impair et soit D le diagramme de Dynkin pondéré dont les seules entrées non nulles sont $D(\alpha_{n-1}) = D(\alpha_n) = 1$. Nous considérons $G = SO(2n, \mathbb{C})$ défini à l'aide de la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{C}^{2n} : (u, v)_J = u^T J v$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices de \mathfrak{n} sont de la forme $m(X) = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2n, \mathbb{C})$ avec X une matrice antisymétrique de taille $n - 1$ positionnée de telle sorte que $m(X)_{1n+1} = X_{11}$. Le sous-groupe parabolique P a une décomposition de Levi $P = LU$. Le radical unipotent de P agissant trivialement sur \mathfrak{n} , on ne s'intéresse qu'à l'action de L sur \mathfrak{n} . Les matrices de L sont de la forme $l(A, b) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \in SO(2n, \mathbb{C})$ avec A une matrice de $GL(n-1, \mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^\times$. L'action de L sur \mathfrak{n} se décrit par $l(A, b)M(X) = M(AXA^T)$. On retrouve donc l'action de $GL(n-1, \mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille $n-1$. Notons ici que puisque n est un entier impair, $n-1$ est pair. Nous avons décrit cette action dans la sous-section précédente.

Afin de comprendre $\mathcal{H}_p^*(\mathbb{C}[n], t)$, il suffit de traduire la proposition 4.5.1 en termes de poids de G . On se rappelle que dans le cas de D_n , pour $1 \leq i \leq n-2$, $\omega_i = \sum_{j=1}^i \epsilon_j$, alors que $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j - \epsilon_n)$ et $\omega_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \epsilon_j$. En posant $n = 2m + 1$, on obtient :

$$\mathcal{H}_p^*(\mathbb{C}[n], t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} (1 - t^i e^{\omega_{2i}})(1 - t^m e^{\omega_{2m} + \omega_{2m+1}})}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH, M. F. ET MACDONALD, I. G. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [2] BAUR, K. ET WALLACH, N. *Nice parabolic subalgebras of reductive Lie algebras*, Represent. Theory, 9, p. 1-29, 2005.
- [3] BEYNON, W.M. ET SPALTENSTEIN, N. *Green functions of finite Chevalley groups of type E_n ($n = 6,7,8$)*, J. Algebra, 88, p. 584-614, 1984.
- [4] BORHO, W. *Recent advances in enveloping algebras of semisimple Lie-algebras*, Sémin. Bourbaki, 29e année, no 489, 1976-1977.
- [5] BOURBAKI, N. *Algèbre commutative*, Chapitre 7, Hermann, Paris, 1965.
- [6] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5, 6, Masson, 1981.
- [7] BREMNER, M. R. ; MOODY, R. V. ET PATERA, J. *Tables of dominant weight multiplicities for representations of simple Lie algebras*, New York : M. Dekker, 1985.
- [8] BOREL, A. *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, no 126, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [9] BOUTOT, J.-F. *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs*, Invent. Math., 88, p. 65-68, 1987.
- [10] BRION, M. *Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple*, Ann. Inst. Fourier, 33, p. 1-27, 1983.
- [11] BRION, M. *Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples*, Ann. Scient, Éc. Norm. Sup., 18, p. 345-387, 1985.
- [12] BROER, A. *Hilbert series in invariant theory*, Ph.D thesis, Faculteit der Wetenschappen en Informatica, Rijksuniversiteit te Utrecht, 1990.

- [13] BROER, A. *Line bundles on the cotangent bundle of the flag variety*, *Invent. Math.*, 113, p. 1-20, 1993.
- [14] BROER, A. *Normality of some nilpotent varieties and cohomology of line bundles on the cotangent bundle of the flag variety*, J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin, V. Kac (Ed.), *Lie theory and geometry*, *Progr. Math.*, 123, Birkhäuser Boston, Boston, p.1-19, 1994.
- [15] BROER, A. *Decomposition varieties in semisimple Lie algebras*, *Can. J. Math.*, 50, no 5, p. 929-97, 1998.
- [16] BROER, A. *Normal nilpotent varieties in F_4* , *J. Algebra*, 207, p. 427-448, 1998.
- [17] BRUNS, W. ET HERZOG, J. *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [18] CARTER, R. W. *Finite Groups of Lie Type : conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [19] CHRISS, N. ET GINZBURG, V. *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1997.
- [20] CHRISTOPHERSEN, A. L. *A classification of the normal nilpotent varieties for groups of type E_6* , PhD Thesis, Department of mathematical sciences, University of Aarhus, 2006.
- [21] COLLINGWOOD, D. H. ET MCGOVERN, W. M. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [22] DEMAZURE, M. *A very simple proof of Bott's theorem*, *Invent. Math.*, 33, p. 271-272, 1976.
- [23] EISENBUD, D. *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no 150. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [24] FRANK, G. *Über nilpotente Orbitalen und Schichten in klassischen komplexen Lie-Algebren*, Bergische Universität Wuppertal, 2004.
- [25] FULTON, W. ET HARRIS J. *Representation theory. A first course*. Graduate Texts in Mathematics, no 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

- [26] GEL'FAND, I. M. ; KAPRANOV, M. M. ET ZELEVINSKY, A. V. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, 1994.
- [27] DE GRAAF, W. A. *Computing with nilpotent orbits in simple Lie algebras of exceptional type*, LMS J. Comput. Math., 11, p. 280-297, 2008.
- [28] GROSSHANS, F. D. *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, Lecture notes in mathematics, 1673, Springer, Berlin, 1977.
- [29] HARTSHORNE, R. *Residues and duality. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne.* Lecture Notes in Mathematics, no 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [30] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no 52, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [31] HESSELINK, W. H. *Cohomology and the Resolution of Nilpotent Variety*, Math Ann, 223, no 3, p.249-252, 1976.
- [32] HESSELINK, W. H. *Polarizations in the classical group*, Math Z., 160, p. 217-234, 1978.
- [33] HESSELINK, W. H. *The normality of closures of orbits in a Lie algebra*, Comment. Math. Helv., 54, p. 105-110, 1979.
- [34] HESSELINK, W. H. *Desingularization of varieties of nullform*, Invent. Math., 55, p. 141-163, 1979.
- [35] HILLE, L. ET RÖHRLE, G. *A classification of parabolic subgroups of classical groups with a finite number of orbits on the unipotent radical*, Transf. groups, 4, no 1, p. 35-52, 1999.
- [36] HINICH, V. *On the singularities of nilpotent orbits*, Israel Journal of Mathematics, 3, no 3, p. 297-308, 1991.
- [37] HUMPHREYS, JAMES E. *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, no 21, Springer-Verlag, New-York, 1975.
- [38] JACKSON, S. G. ET NOËL, A. G. *Prehomogeneous spaces associated with complex nilpotent oprbits*, Journal of Algebra, 289, p. 515-557, 2005.
- [39] JANTZEN, J.C. *Representations of Algebraic Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2007.

- [40] JAUFFRET, C. *Groupe de Picard des orbites nilpotentes dans des groupes algébriques de type classique*, À paraître.
- [41] JÜRGENS, U ET RÖHRLE, G. *Algorithmic modality analysis for parabolic group actions*, *Geom. Dedicata.*, 73, p. 317-337, 1998.
- [42] KAWANAKA, N. *Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semi-simple Lie algebra*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34, no 3 p. 573-597, 1987.
- [43] KELLER, B. *Derived categories and their uses*, Chapter of the Handbook of algebra, 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier 1996.
- [44] KEMPF, G. R. *On the collapsing of homogeneous bundles*, *Invent. Math.*, 37, p. 229-239, 1976.
- [45] KEMPF, G. ; KNUDSEN, F. F. ; MUMFORD, D. ET SAINT-DONAT, B. *Toroidal embeddings*, *Lecture Notes in Mathematics*, 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [46] KIMURA, T. *The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces*, *Nagoya Math. J.*, 85, p 1-80, 1982.
- [47] KIMURA, T. *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author. *Translations of Mathematical Monographs*, 215. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [48] KIMURA, T. ET OZEKI, I. *On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with $\text{Spin}(10) \times \text{GL}(3)$* . *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 58, no 6, p. 239-242, 1982.
- [49] KNOP, F. ; KRAFT, H. ET VUST, T. *The Picard group of a G-variety*, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., 13, p. 77-87, 1989.
- [50] KOSTANT, B. *Lie group representations on polynomial rings*, *Amer. J. Math.*, 85, p. 327-404, 1963.
- [51] KRAFT, H. *Closures of conjugacy classes in G_2* , *J. Algebra*, 126, p. 454-465, 1989.
- [52] KRAFT, H. ET PROCESI, C. *Closures of conjugacy classes of matrices are normal*, *Invent. Math.*, 53, p. 227-247, 1979.

- [53] KRAFT, H. ET PROCESI, C. *On the geometry of conjugacy classes in classical groups*, Comment. Math. Helv., 57, p. 539-602, 1982.
- [54] LASCOUX, A. *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. in Math., 30, p. 202-237, 1978.
- [55] LUSZTIG, G. *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Invent. Math., 34, p. 201-213, 1976.
- [56] LUSZTIG, G. *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. 75, no 2, p. 205-272, 1984.
- [57] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [58] MUMFORD, D. *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1965.
- [59] OZEKI, I. *On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with $GL(8)$* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 56, no 1, p. 18-21, 1980.
- [60] OZEKI, I. *On the microlocal structure of the regular prehomogeneous vector space associated with $SL(5) \times GL(4)$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci., 26 no 3, p. 539-584, 1990.
- [61] PANYUSHEV, D.I. *Rationality of singularities and the Gorenstein property for nilpotent orbits*, Funct. Anal. Appl., 25, p. 225-226, 1991.
- [62] PANYUSHEV, D. I. *On reachable elements and the boundary of nilpotent orbits in simple Lie algebras*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 128, no 10, p. 859-870, 2004.
- [63] POPOV, V. L. *The cone of Hilbert nullforms*, Proc. Steklov Inst. Math., 241, no 2, p. 177-194, 2003.
- [64] RICHARDSON, R. W. JR. *Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups*, Ann. of Mathematics, 86, p. 1-15, 1967.
- [65] RICHARDSON, R. W. JR. *Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups*, Bull. London Math. Soc., 6, p. 21-24, 1974.

- [66] RICHARDSON, R.W. JR. *Derivatives of invariant polynomials on a semisimple Lie algebra*, Harmonic analysis and operator theory, Proc. Cent. Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 15, 1987.
- [67] SATO M. ET KIMURA T. *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Mathematical Journal, 65, p. 1-155, 1977.
- [68] SATO, M. ; KASHIWARA, M. ; KIMURA, T. ET OSHIMA, T. *Microlocal analysis of prehomogeneous vector spaces*, Invent. Math., 62, no 1, p. 117-179, 1980.
- [69] SCHWARZ, G. W. *Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. Math., 49, p. 167-191, 1978.
- [70] SCHWARZ, G. W. *Representations of simple Lie groups with a free module of covariants*, Invent. Math., 50, p. 1-12, 1978.
- [71] SERVEDIO, F. J. *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. of the AMS, 176, p. 421-443, 1973.
- [72] SOMMERS, E. N. *Normality of nilpotent varieties in E_6* , J. Algebra, 270, no 1, p. 288-306, 2003.
- [73] SOMMERS, E. N. *Normality of very even nilpotent varieties in D_{2l}* , Bull. London Math. Soc., 37, p. 351-360, 2005.
- [74] SOMMERS, E. N. *Equivalence classes of ideals in the nilradical of a Borel subalgebras*, Nagoya Math. J., 183, p. 161-185, 2006.
- [75] SOMMERS, E. N. *Cohomology of line bundles on the cotangent bundle of a Grassmannian*, Proc. Amer. Math. Soc., 137, no 10, p. 3291-3296, 2009.
- [76] THOMSEN, J. F.. *Normality of certain nilpotent varieties in positive characteristic*, J. Algebra, 227, p. 595-613, 2000.
- [77] VINBERG, E. B. *The Weyl group of a graded Lie algebra*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 40, no 3, p. 488-526, 1976.
- [78] WEYMAN, J. M. *Cohomology of vector bundles and syzygies*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [79] YUAN, S. *Reflexive modules and algebra class groups over noetherian integrally closed domains*, J. Algebra, 32, p. 405-417, 1974.