

Université de Montréal

**Construction d'un Atlas 3D numérique de la cornée
humaine par recalage d'images**

par
Akram Haddeji

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des arts et sciences
en vue de l'obtention du grade de Maître ès (M.Sc)
en informatique

Décembre, 2012

© Akram Haddeji, 2012

Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé:

**Construction d'un Atlas 3D numérique de la cornée
humaine par recalage d'images**

Présenté par:
Akram Haddeji

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Max Mignotte
Jean Meunier
Sébastien Roy

Mémoire accepté le
30 janvier 2013

Résumé

Nous proposons de construire un atlas numérique 3D contenant les caractéristiques moyennes et les variabilités de la morphologie d'un organe. Nos travaux seront appliqués particulièrement à la construction d'un atlas numérique 3D de la totalité de la cornée humaine incluant la surface antérieure et postérieure à partir des cartes topographiques fournies par le topographe Orbscan II. Nous procédons tout d'abord par normalisation de toute une population de cornées. Dans cette étape, nous nous sommes basés sur l'algorithme de recalage ICP (*iterative closest point*) pour aligner simultanément les surfaces antérieures et postérieures d'une population de cornée vers les surfaces antérieure et postérieure d'une cornée de référence. En effet, nous avons élaboré une variante de l'algorithme ICP adapté aux images (cartes) de cornées qui tient compte de changement d'échelle pendant le recalage et qui se base sur la recherche par voisinage via la distance euclidienne pour établir la correspondance entre les points. Après, nous avons procédé pour la construction de l'atlas cornéen par le calcul des moyennes des élévations de surfaces antérieures et postérieures recalées et leurs écarts-types associés. Une population de 100 cornées saines a été utilisée pour construire l'atlas cornéen normal. Pour visualiser l'atlas, on a eu recours à des cartes topographiques couleurs similairement à ce qu'offrent déjà les systèmes topographiques actuels. Enfin, des observations ont été réalisées sur l'atlas cornéen reflétant sa précision et permettant de développer une meilleure connaissance de l'anatomie cornéenne.

Mots-clés : Atlas cornéen, Recalage 3D, Alignement, Iterative Closet Point, transformation affine, SVD.

Abstract

We propose to build a 3D digital atlas which contains the average characteristics and variability of the morphology of an organ. In particular our work consists in the construction of a 3D digital atlas of the entire human cornea including anterior and posterior surfaces. The atlas was built using topographies provided by the Orbscan II system. First, we normalized the given population of corneas using a variant of the ICP (*iterative closest point*) algorithm for shape registration to fit simultaneously the anterior and posterior surfaces with the anterior and posterior surfaces of a reference cornea. Indeed, we developed a specific algorithm for corneas topographies that considers scaling during registration and which is based on neighborhood search via the Euclidean distance to find the correspondence between points. After that, we built the corneal atlas by averaging elevations of anterior and posterior surfaces and by calculating their associated standard deviations. A population of 100 healthy corneas was used to construct the normal corneal atlas. To illustrate the atlas, we used topographic color maps like those already offered by existing topographic systems. Finally, observations were made on the corneal atlas that reflects its precision and allows to develop a better understanding of corneal anatomy.

Keywords : Corneal Atlas, 3D Registration, Alignment, Iterative Closet Point, affine transformation, SVD.

Table des matières

Chapitre 1: Introduction.....	1
Chapitre 2: Mise en contexte	3
2.1. Introduction	3
2.2. Physiologie de l'œil humain et de la cornée	3
2.3. Anomalies de la vision	8
2.4. Chirurgie réfractive	10
2.5. Mesure de la géométrie de la cornée.....	10
2.6. Conclusion.....	22
Chapitre 3: Problème de recalage et l'algorithme ICP	23
3.1. Introduction	23
3.2. Problème de recalage 2/3D	23
3.2.1. Introduction et description.....	23
3.2.2. Formulation mathématique du problème de recalage 2/3D	24
3.3. Calcul et estimation de la transformation.....	24
3.3.1. La méthode <i>SVD</i>	25
3.3.2. Matrices orthogonales	29
3.3.3. Quaternion unitaire.....	34
3.3.4. Dual quaternion	40
3.3.5. Discussion et comparaison	46
3.4. Iterative closet point.....	47
3.4.1. Introduction	47
3.4.2. Description	48
3.4.3. Algorithme.....	48
3.4.4. Convergence.....	49
3.4.5. Discussion	50
3.5. Variantes d'ICP.....	50
3.5.1. Introduction	50
3.5.2. Sélection des points.....	51
3.5.3. Techniques d'appariement.....	52

3.5.4. Pondération des points	53
3.5.5. Rejet des mauvais paires	54
3.5.6. Autres	55
3.6. Scaling itertative closest point	55
3.6.1. Introduction	55
3.6.2. ICPS isotrope	56
3.6.3. ICPS non-isotrope	58
3.6.4. Discussion	60
3.7. Conclusion.....	61
Chapitre 4: Implémentation et test	62
4.1. Introduction	62
4.2. Scènes de test	62
4.2.1. Données synthétiques.....	62
4.2.2. Données réelles	67
4.3. Tests	70
4.3.1. Implémentations.....	70
4.3.2. Tests effectués sur des données synthétiques.....	70
4.3.3. Tests effectués sur des données réelles	83
4.4. Algorithme adopté.....	98
4.4.1. Discussion et description.....	98
4.4.2. Algorithme	98
4.5. Conclusion.....	100
Chapitre 5: Atlas Cornéen	101
5.1. Introduction	101
5.2. Méthodologie adoptée pour la construction de l'atlas cornéen.....	101
5.2.1. Normalisation.....	102
5.2.2. Construction de l'Atlas	107
5.3. Résumé de la méthode	114
5.4. Autres méthodes.....	116
5.4.1. Normalisation par rapport au sommet.....	116
5.4.2. Normalisation par rapport à la BFS standard.....	117

5.4.3. Normalisation par rapport à la BFS moyenne.....	117
5.5. Discussion	118
5.6. Conclusion.....	120
Chapitre 6: Conclusion.....	121

Liste des tableaux

Tableau 4.1 Résultat d'alignement de deux surfaces antérieures	84
Tableau 4.2 Résultat d'alignement de deux surfaces antérieures avec ICP, ICPS isotrope et non isotropes	86
Tableau 4.3 Résultat d'alignement de deux cornées entières avec ICP, ICPS isotrope et non isotrope en fusionnant les surfaces antérieures et postérieures	90
Tableau 4.4 Résultat d'alignement de deux cornées entières avec ICP, ICPS isotrope et non isotrope en séparant la mise en correspondance des surfaces antérieures et postérieures	93
Tableau 4.5 Comparaison des différents méthodes de mise en correspondance utilisées dans les tests antérieurs	97
Tableau 5.1 Statistiques sur les surfaces antérieures de cornées de la base	103
Tableau 5.2 Statistiques sur les surfaces postérieures de cornées de la base	103
Tableau 5.3 Résumé sur les caractéristiques des images de la cornée de référence	104
Tableau 5.4 Statistiques sur les résultats de recalage des images de la base	105
Tableau 5.5 Statistiques sur les transformations optimales obtenues par l'algorithme de recalage	105
Tableau 5.6 Paramètres des BFS associées aux surfaces moyennes de l'atlas cornéen	109
Tableau 5.7 Écarts-types au sommet	112

Liste des figures

Figure 2.1 Coupe latérale de l'œil	4
Figure 2.2 Coupe latérale de la cornée.....	6
Figure 2.3 Schéma d'un œil myope.....	9
Figure 2.4 Schéma d'un œil hypermétrope	9
Figure 2.5 Principe de Scheimpflug.....	14
Figure 2.6 Principe du microscope confocal [10].....	15
Figure 2.7 Tomographie par cohérence optique de la cornée.....	16
Figure 2.8 informations fournis par l'Orbscan II	18
Figure 2.9 Principe des disques de Placido [3].....	19
Figure 2.10 Système de balayage à fentes [59].....	19
Figure 2.11 Triangulation d'un point.....	20
Figure 2.12 Schéma de la mesure de la surface postérieure [59].....	20
Figure 4.1 Ellipsoïde général défini à partir de ses 3 semi-axes a, b et c.....	64
Figure 4.2 Échantillon de scène de test représenté comme un nuage de points 3D composé de 2601 points pour $r_h=7,85\text{ mm}$, $r_v=7,70\text{ mm}$ et $p_v=p_h=7,85\text{ mm}$	66
Figure 4.3 Échantillon de scène de test représenté comme une carte topographique de résolution 51x51 pour $r_h=7,85\text{ mm}$, $r_v=7,70\text{ mm}$ et $p_v=p_h=7,85\text{ mm}$	66
Figure 4.4 Échantillon réel d'une carte topographique qui correspond à l'élévation réelle d'une surface antérieure d'une cornée	68
Figure 4.5 Échantillon réel d'une carte topographique qui correspond à l'élévation réelle d'une surface postérieure d'une cornée.....	68
Figure 4.6 Exemple d'une matrice qui correspond à l'élévation d'une surface antérieure ou postérieure d'une cornée.....	69
Figure 4.7 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur dans la transformation (translation et rotation) en fonction du nombre de points en absence de bruit pour les méthodes UQ et SVD.....	71
Figure 4.8 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur dans la transformation (translation et rotation) en fonction du nombre de points en présence de différents niveaux bruit pour les méthodes SVD (colonne gauche) et UQ (colonne droite).....	73
Figure 4.9 Évolution de la différence entre les erreurs algorithmiques et la différence entre les solutions (rotation et translation) en fonction de nombre de points en présence de différents niveaux de bruit pour les méthodes UQ et SVD	74
Figure 4.10 Évolution de temps d'exécution en fonction de nombre de points pour les méthodes UQ et SVD.....	75
Figure 4.11 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur de transformation dans ICP en fonction d'itérations pour différents tailles de données en absence de bruit	77

Figure 4.12 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur de transformation dans ICP en fonction du nombre d'itérations pour une surface de résolution égale à 51×51 de bruit de différents niveaux de bruit	78
Figure 4.13 Évolution de l'erreur algorithmique et de l'erreur de la transformation dans ICP sans échantillonnage, avec échantillonnage uniforme et aléatoire deux différents niveau de bruit $\sigma = 0.1$ (colonne gauche) et $\sigma = 1$ (colonne droite).....	80
Figure 4.14 Évolution de l'erreur algorithmique et de l'erreur de la transformation dans ICP avec tous les paires, en rejetant les paires dont la distance qu'il sépare est supérieur a 2.5 sigma uniforme et en rejetant les 10% plus mauvais paires pour deux différents niveaux de bruit ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$).....	82
Figure 4.15 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée modèle(2,773 mm au sommet).....	84
Figure 4.16 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée donnée(2,709 mm au sommet).....	84
Figure 4.17 Évolution de l'erreur dans ICP en alignant deux surfaces antérieures	85
Figure 4.18 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage ICP	85
Figure 4.19 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	85
Figure 4.20 Évolution de l'erreur dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux surfaces antérieures.....	87
Figure 4.21 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage.....	87
Figure 4.22 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	87
Figure 4.23 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope	88
Figure 4.24 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage ICP	88
Figure 4.25 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée modèle (2,773 mm au sommet).....	89
Figure 4.26 Élévation réelle de la surface postérieure de la cornée modèle (2,246 mm au sommet).....	89
Figure 4.27 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée donnée (2,458 mm au sommet).....	89
Figure 4.28 Élévation réelle de la surface postérieure de la cornée donnée (1,812 mm au sommet).....	89
Figure 4.29 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage.....	90

Figure 4.30 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface postérieure donnée avant recalage.....	90
Figure 4.31 Évolution de l'erreur dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux cornées entières en fusionnant les surfaces antérieures et postérieures.....	91
Figure 4.32 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	91
Figure 4.33 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	91
Figure 4.34 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP non isotrope.....	92
Figure 4.35 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP non isotrope.....	92
Figure 4.36 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP isotrope.....	92
Figure 4.37 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface postérieure donnée après recalage ICP isotrope.....	92
Figure 4.38 Évolution de l'erreur antérieure, postérieure et totale dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux cornées entières en séparant la mise en correspondance des surfaces antérieures et postérieures.....	94
Figure 4.39 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	95
Figure 4.40 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP.....	95
Figure 4.41 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS non isotrope	95
Figure 4.42 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS non isotrope	95
Figure 4.43 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope	95
Figure 4.44 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope	95
Figure 4.45 Principe de la recherche par voisinage	96
Figure 5.1 Les éléments fondamentaux pour la construction d'un atlas anatomique numérique 3D.....	102
Figure 5.2 carte topographique de la surface antérieure de la cornée de référence	104
Figure 5.3 carte topographique de la surface postérieure de la cornée de référence	104
Figure 5.4 Matrices avant et après l'application de recalage	106
Figure 5.5 Comparaison entre les distances entre les images de la base et l'image de référence avant et après recalage	106
Figure 5.6 Élévation réelle de la surface antérieure moyenne	108

Figure 5.7 Nombre de carte topographiques à chaque point utilisé pour construire la surface antérieure moyenne	108
Figure 5.8 Élévation réelle de la surface postérieure moyenne	108
Figure 5.9 Nombre de carte topographiques à chaque point utilisé pour construire la surface postérieure moyenne	108
Figure 5.10 Élévation moyenne par rapport au BFS de la surface antérieure	109
Figure 5.11 Élévation moyenne par rapport au BFS de la surface postérieure.....	109
Figure 5.13 Forme de la cornée	110
Figure 5.12 La différence de la cornée normale par rapport au BFS.....	110
Figure 5.14 Écart-type associé à l'élévation moyenne de la surface antérieure	111
Figure 5.15 Écart-type associé à l'élévation moyenne de la surface postérieure	111
Figure 5.16 Coupe de profil méridien horizontal et verticale de l'Atlas cornéen construit ..	112
Figure 5.17 Carte de l'épaisseur de l'atlas cornéen normale.....	113
Figure 5.18 Schémas général de la méthode adoptée pour la construction de l'atlas cornéen	115

Liste des abréviations

BFS	Best-Fit Sphere
ICP	Iterative Closest Point
ICPS	Iterative Closest Point with scaling
SVD	Singular Values Decomposition
UQ	Unit Quaternion

Remerciements

Je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont apporté une aide si précieuse dans le cadre de la rédaction de mon mémoire, une aide sans laquelle je n'aurais probablement jamais pu fournir un travail aussi pertinent et précis. Ces personnes ont en effet concouru à affiner mes connaissances tant au niveau de la matière en elle-même que de la présentation.

Je remercie en premier lieu Mr Jean Meunier pour m'avoir encadré tout le long de ma maîtrise, faisant preuve d'une gentillesse et d'une serviabilité exemplaires.

Je remercie également Mr Édouard Auvinet, qui en sa qualité de thésard, m'a fait profiter de son expérience sur le sujet, pour me fournir les connaissances adéquates nécessaires à la rédaction d'un mémoire pertinent.

De plus, je remercie mes professeurs, Mme Esma Aimeur, Mr Louis Salvail, Mr Pierre Poulin et Mr Max Mignotte pour m'avoir formé, formation grâce à laquelle j'ai pu acquérir une base solide, ce qui m'a permis d'effectuer mon travail dans les meilleures conditions.

Je voudrais aussi remercier mes parents pour m'avoir soutenu durant cette épreuve. Sans leur soutien quotidien, je n'aurais jamais eu la combativité et donc la régularité requise pour fournir un travail aussi complet.

Enfin, je voudrais remercier mes colocataires et mes amis pour avoir veillé à ce qu'une ambiance de travail encourageante soit de mise dans mon quotidien.

Chapitre 1

Introduction

Suite au développement des nouvelles technologies d'acquisition des images numériques médicales, il est devenu possible de construire des atlas anatomiques numériques tridimensionnels d'une haute précision. Plusieurs atlas médicaux ont été construits pour différents organes humains (cerveau, cœur, crane , colonne vertébrale, etc.).

En particulier, de nombreux appareils ont été inventés récemment qui permettent d'obtenir des informations précises sur la forme de cornée humaine. C'est dans ce cadre que nous nous proposons de construire un atlas de la cornée humaine à partir des données acquises par un des membres de la famille des topographes cornéens à savoir l'Orbscan II. Ce dernier génère une représentation 3D des faces antérieure et postérieure de la cornée. Notre atlas cornéen représentera en 3D la forme d'une cornée ainsi que ses variations normales. Nous allons alors essayer de construire ces atlas pour plusieurs objectifs. Un premier objectif informatif: offrir aux chirurgiens et aux ophtalmologistes des atlas cornéens qui décrivent la forme moyenne de la cornée d'une population particulière ainsi que d'autres informations précieuses (l'épaisseur moyenne, rayon moyen de courbure des surfaces antérieures et postérieures, etc.). Un deuxième objectif médical: ces atlas seront un outil très intéressant pour distinguer les cornées (intactes) des cornées pathologiques ou opérées (par exemple: par une chirurgie réfractive).

Ce mémoire de maîtrise sera structuré de la façon suivante:

Le premier chapitre sera une mise en contexte où l'on expose dans une première partie l'anatomie de l'œil, plus précisément la cornée humaine et les pathologies qui peuvent l'affecter pouvant entraîner une chirurgie réfractive ou une transplantation cornéenne . Dans sa deuxième partie, on s'intéressera aux appareils et aux techniques pour obtenir les informations sur les cornées humaines. On tentera de détailler davantage la technologie Orbscan.

Dans le deuxième chapitre, on va s'intéresser à un des problèmes très connu dans le domaine de Vison par ordinateur: le recalage 2/3D. En effet, le recalage des représentations

3D des cornées est une étape indispensable pour la construction des atlas. L'algorithme *Iterative closest point* connu comme une solution à ce genre de problème sera rigoureusement détaillé ainsi que les variantes les plus populaires de ce dernier.

Le troisième chapitre illustre les réalisations des différents tests sur les algorithmes implémentés. Ensuite, les résultats seront utilisés pour argumenter le choix de la méthodologie pour la construction des atlas.

Dans le dernier chapitre, on expliquera la méthodologie adoptée pour la construction des différents atlas cornéens puis on présentera ces atlas et on les comparera avec d'autres déjà existants.

En conclusion, nous passerons en revue de façon succincte l'objectif du départ et les différentes étapes réalisées afin d'obtenir les résultats finaux et on terminera avec les différentes perspectives envisageables.

Chapitre 2

Mise en contexte

2.1. Introduction

Pour mieux situer le problème, on commencera tout d'abord par une mise en contexte où l'on présente l'anatomie et la physiologie de l'œil humain, on détaillera davantage la structure de la cornée, sa forme, ses caractéristiques, son fonctionnement, etc.

Puis, on verra les erreurs réfractives qui touchent la cornée, les maladies et les problèmes qui affectent le bon fonctionnement de la cornée qui peuvent mener à une chirurgie réfractive (par laser) ou encore une transplantation coréenne.

Ensuite, on présentera les différentes techniques et les appareils utilisés pour obtenir les informations importantes et effectuer toute sorte de mesures touchant la cornée. On s'intéressera davantage à la technologie Orbscan II puisque cette dernière a été utilisée pour recueillir les données pour la création de l'atlas cornéen.

Enfin, on conclura ce chapitre par l'évocation de l'utilité de la création des différents types d'atlas notamment l'atlas cornéen.

2.2. Physiologie de l'œil humain et de la cornée

Toutes les informations sur l'œil et la cornée qui suivent sont tirées des sources suivantes: le site web de l'Institut national de la santé [1], le site web dédié à l'ophtalmologie «*Ophthazone*» [2], la thèse de Phd [3] et l'encyclopédie en ligne «*Wikipédia*» [4].

2.2.1. L'anatomie de l'œil

L'œil est un organe sensoriel de forme sphérique dont le diamètre est d'environ 25 *mm*, le poids est d'ordre de 7 *gr* et le volume est égal approximativement à 6,5 *cm*³. L'œil est capable de percevoir les ondes émises par une source lumineuse. C'est l'organe récepteur de l'appareil de la vision.

C'est un organe mobile contenu dans une cavité appelée globe oculaire, qui lui empêche tout mouvement de translation, mais qui lui permet la rotation grâce à des muscles permettant d'orienter le regard suivant trois degrés de liberté. Ce qui permet un champ visuel qui peut atteindre 200 degrés.

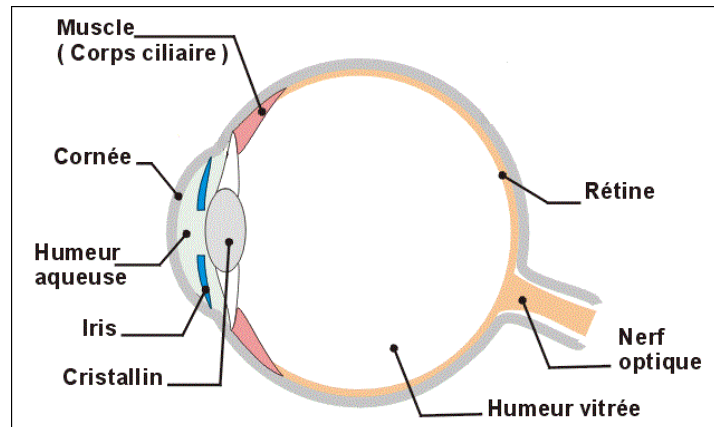


Figure 2. 1 Coupe latérale de l'œil¹

Anatomiquement, l'œil est constitué de deux cavités (la chambre antérieure et la chambre postérieure) remplies par l'humeur aqueuse qui sert à nourrir la cornée et l'humeur vitrée. Le passage de la lumière se fait par l'intermédiaire de la pupille (le trou au centre de l'iris). Le cristallin situé en arrière de l'iris matérialise ainsi la frontière entre la chambre antérieure et la chambre postérieure. Le cristallin est relié au muscle ciliaire permettant d'accommoder la vision en agissant sur le cristallin. Les connexions nerveuses de la rétine effectuent des prétraitements avant de transmettre ces informations au cerveau via le nerf optique comme la détection des points de contour, analyse de texture, etc. Le cerveau va interpréter les images des deux yeux et les fusionner pour reconstruire la scène 3D observée.

2.2.1.1. L'humeur aqueuse

C'est un liquide transparent, filtré et renouvelé en permanence (chaque deux ou 3 heures). Avec le vitré, il maintient la pression et donc la forme du globe oculaire. Il passe de la chambre postérieure vers la chambre antérieure à travers la pupille. L'humeur aqueuse est composée essentiellement d'eau, mais aussi de vitamine C, de glucose, d'acide lactique et de

¹ http://ns12.freeheberg.com/~tpesens/photo_oeil.php

protéines. Son rôle est surtout nourricier la cornée et l'iris, réparateur et régulateur de la pression intraoculaire, ainsi que du maintien de la forme de l'œil.

2.2.1.2. L'iris

L'iris est un diaphragme circulaire percé en son centre par la pupille (similaire à celui d'un appareil photographique). C'est un muscle qui permet de régler automatiquement la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil. En pleine lumière, l'iris est fermé afin d'éviter l'aveuglement, dans l'obscurité, il est ouvert pour capter le maximum de rayons. La couleur de l'iris est déterminée par la présence d'un pigment, la mélanine. L'iris est bleu si la mélanine est peu concentrée, il est plus foncé quand la concentration augmente. La nutrition de l'iris est assurée par l'humeur aqueuse dans laquelle elle baigne.

2.2.1.3. Le Cristallin

Le cristallin est la lentille transparente biconvexe de l'œil. Il est maintenu par des ligaments qui sont liés à des muscles (corps ciliaire). Le corps ciliaire modifie ainsi la courbure du cristallin et permet donc la mise au point sur un objet proche (on appelle cette mise au point l'accommodation). Au repos, le cristallin forme l'image d'un objet éloigné sur la rétine.

2.2.1.4. L'humeur vitré

L'humeur vitrée (appelé aussi corps vitré) est une masse gélatineuse et transparente. Son rôle est de maintenir la rigidité du globe oculaire et de bien coller la rétine contre le fond du globe oculaire. Il définit également la forme de l'œil et représente 90 % de son volume.

2.2.1.5. La rétine

La rétine est une membrane nerveuse tapissant le fond de l'œil d'une épaisseur d'environ quelques dixièmes de millimètre. C'est un tissu sensible sur lequel viennent se former les images. Elle est constituée de plus de 130 millions de cellules nerveuses (125 millions de bâtonnets et 5 millions de cônes). Elle transforme la lumière en signaux électriques qui sont acheminés vers le cerveau.

2.2.1.6. Le nerf optique

Le nerf optique est d'une longueur de 35 à 55 *mm* et comporte environ un million de fibres divisées en faisceaux. Son rôle est de transmettre l'image formée sur la rétine au cerveau.

2.2.1.7. La cornée

Définition

La cornée est la membrane transparente située devant l'œil. C'est un tissu clair, semblant manquer de substance. Pourtant, c'est un groupe de cellules et de protéines hautement organisées. La cornée ne contient aucun vaisseau sanguin pour se nourrir. Elle reçoit sa nourriture grâce aux larmes et à l'humeur aqueuse remplissant la chambre oculaire. La cornée doit rester transparente pour réfracter la lumière correctement. Elle a la structure qui a la plus grande sensibilité du corps humain. Ce qui explique que même d'infimes particules (des corps étrangers) qui s'y déposent soient aussi douloureuses. Heureusement, il ne reste aucune cicatrice suite à une blessure grâce à la résistance et la rapidité de réparation des fibres qui constituent la cornée. Ainsi, la vision sera préservée.

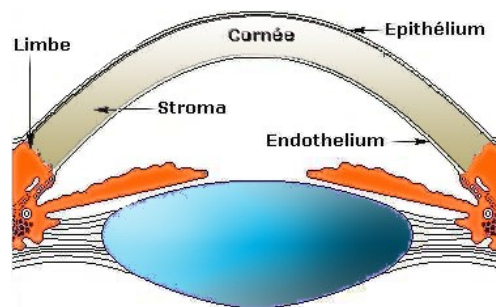


Figure 2. 2 Coupe latérale de la cornée²

Forme

De face, la cornée apparaît légèrement elliptique à grand axe horizontal (11 à 12,5 *mm*) et à axe vertical plus faible (10 à 11,5 *mm*).

² http://www.perret-optic.ch/optometrie/anatomie_oeil/opto_anato_oeil_2_f.htm

Épaisseur

L'épaisseur de la cornée n'est pas constante en tous points de la surface. Il est plus important en périphérie qu'au centre. L'épaisseur centrale est estimée à $0,52 \text{ mm}$ tandis que l'épaisseur aux périphéries (au limbe) peut atteindre $0,7 \text{ mm}$. Elle est généralement mesurée par le pachymètre à ultrasons.

Rayon de courbure

Le rayon de courbure de la surface antérieure est en moyenne de $7,8 \text{ mm}$, la surface postérieure est plus courbée de rayon égal à $6,5 \text{ mm}$. On le mesure grâce au kératomètre.

Surface

Elle représente seulement 7% de la surface de la sphère oculaire humaine (l'œil). Elle est d'environ $1,3 \text{ cm}^2$.

Pouvoir réfractif

La cornée possède environ deux tiers du pouvoir réfractif de l'œil et du cristallin constitue le un tiers restant. La puissance réfractive de la cornée dépend de son rayon de courbure et de l'index réfractif des différents milieux que la lumière va traverser. L'indice de réfraction de la cornée est égal à $1,377$. Les pouvoirs réfractifs des couches antérieure et postérieure sont respectivement de $48,6 \text{ dioptries}$ et $-6,8 \text{ dioptries}^3$ en moyenne. Dans la pratique, on substitue ces deux surfaces par une seule dont le pouvoir réfractif est d'environ 42 dioptries .

Rôle

On peut considérer que la cornée joue 3 rôles :

- Rôle de protection: la cornée c'est la partie de l'œil qui est directement en contact avec l'extérieur. C'est une barrière qui protège le reste l'œil contre des germes, de la poussière, et de tous les autres corps étrangers. Cette tâche est partagée avec les paupières, les larmes, et la sclérotique (partie blanche de l'œil).
- Rôle d'un filtre: La cornée réagit comme un filtre qui empêche les rayons ultra-violet les plus dommageables du soleil de passer. Sans cette protection, le cristallin et la rétine seraient hautement susceptibles aux blessures par radiations ultra-violettes.

³ la dioptrie est une unité de vergence homogène à l'inverse d'une longueur

- Rôle optique: La cornée réagit comme une lentille externe et contribue jusqu'à 75 % de pouvoir réfractif de l'œil. Lorsque les rayons lumineux frappent la cornée, ils sont réfractés sur le cristallin. Le cristallin réfracte ensuite ces rayons lumineux sur la rétine.

Composition

Le tissu coréen est composé de 5 couches de base, chacune ayant une fonction particulière et importante:

- Épithélium: c'est la région externe de la cornée, il forme environ 10 % de l'épaisseur du tissu cornéen (environ 32 μm). Ses fonctions principales sont d'empêcher le passage des corps étrangers et de fournir une surface lisse qui absorbe l'oxygène et les nutriments cellulaires des larmes puis les distribue au reste de la cornée.
- Couche de Bowman: la couche de Bowman est située directement sous la membrane basale de l'épithélium. C'est une couche de transition de 12 μm d'épaisseur, de nature conjonctive.
- Stroma: situé sous la couche de Bowman, il compose environ 90 % de l'épaisseur de la cornée (environ 400 μm). Il est composé principalement d'eau.
- Membrane Descemet: la membrane Descemet se situe sous le stroma. C'est une mince couche solide d'une épaisseur de 6 μm mais solide couche de tissu servant de barrière protectrice contre les infections et les blessures.
- Endothélium: est la couche intérieure, extrêmement mince (6 μm d'épaisseur), de la cornée. Les cellules endothéliales sont essentielles pour garder la cornée claire.

2.3. Anomalies de la vision

Les erreurs réfractives sont les problèmes les plus courants qui peuvent affecter la cornée. Ils se produisent lorsque la courbure de la cornée devient de forme irrégulière (trop aplatie ou trop abrupte).

Pour une cornée ayant une forme et courbure normale, les rayons lumineux réfractés sur cette dernière convergent exactement sur la rétine. À l'inverse, pour une forme et courbure irrégulière, les rayons lumineux convergent d'une façon imprécise et n'atteignent pas la rétine, ce qui engendre des troubles dans la vision.

2.3.1. Myopie

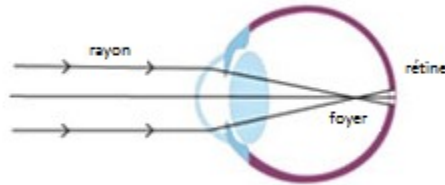


Figure 2.3 Schéma d'un œil myope⁴

Elle se caractérise par une trop grande convergence de l'œil ou par un rayon antéropostérieur de l'œil trop long (une courbure trop importante). L'image des objets éloignés se forme avant d'atteindre la rétine. Par conséquent, les objets éloignés apparaissent flous pour les gens qui souffrent de la myopie. Elle affecte 25 % de la population adulte.

2.3.2. L'hypermétropie

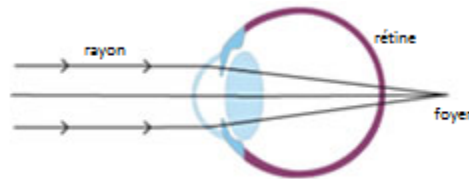


Figure 2.4 Schéma d'un œil hypermétrope⁴

À l'inverse de l'anomalie précédente, celle-ci se caractérise par une convergence trop faible des milieux transparents ou par un rayon antéropostérieur de l'œil trop court. L'image se forme en arrière de la rétine pour les objets rapprochés. Par conséquent, les objets rapprochés apparaissent flous pour les gens qui souffrent de l'hypermétropie

2.3.3. L'astigmatisme

Elle se caractérise par une autre variation de la courbure moyenne. La cornée est formée plutôt comme le dos d'une cuillère, plus courbée dans une direction que dans l'autre, ce qui engendre occasionnellement plus d'un point focal pour les rayons lumineux réfractés. Ces différents points focaux forment le foyer à des endroits séparés sur la rétine donnant des images visuelles floues et distordues pour les objets rapprochés et distants.

⁴ <http://www.cliniquelamartine.fr/votre-vue.html>

2.3.4. Presbytie

Cette anomalie affecte tôt ou tard toute la population humaine. Contrairement aux défauts de réfraction précédents, il ne s'agit pas d'une mauvaise puissance dioptrique de la cornée, mais d'un épaissement et d'une rigidification du cristallin entraînant une vue floue en vision rapproché.

2.3.5. Kératocône

Le kératocône correspond à une déformation en cône du centre de la cornée avec amincissement. Cette courbure anormale change le pouvoir réfractif de la cornée et entraîne une myopie et un astigmatisme évolutifs. Dans les premiers temps, la correction de la vision peut se faire par des lunettes ou mieux par des lentilles de contact rigides adaptées. Une transplantation cornéenne peut être requise à cause de l'évolution du kératocône.

2.4. Chirurgie réfractive

La chirurgie réfractive est une chirurgie visant à modifier le rayon de courbure cornéen antérieur pour corriger les erreurs réfractives. Elle fait appel à des techniques microchirurgicales, c'est-à-dire qui se pratiquent sous microscope et également au laser. Grâce à l'amélioration de l'instrumentation, la chirurgie réfractive ne cesse de se progresser et de développer.

La chirurgie réfractive est appliquée aux sujets intolérants aux systèmes traditionnels (surtout les lentilles de contact en raison d'une sécheresse de l'œil) et permet actuellement de corriger chirurgicalement les affections suivantes :

- La myopie.
- L'astigmatisme congénital ou acquis (par exemple après une intervention de cataracte, après une greffe ou après un accident).
- La myopie associée à un astigmatisme.
- L'hypermétropie.
- L'hypermétropie associée à un astigmatisme.
- La presbytie dans certaines conditions.

2.5. Mesure de la géométrie de la cornée

Après la présentation de l'anatomie de la cornée ainsi que les différents problèmes (erreurs réfractives) qui peuvent la toucher, on va s'intéresser maintenant aux différentes

informations et mesures qu'on peut obtenir pour caractériser la cornée. Par la suite, on présentera les différentes techniques utilisées pour obtenir ces informations. On détaillera davantage la technologie Orbscan II puisque cette dernière a été utilisée pour recueillir les données dans ce projet.

2.5.1. Caractéristiques mesurées de la cornée

Différents concepts sont utilisés pour caractériser les propriétés optiques de la cornée [5] parmi lesquels on peut citer:

- La courbure de la face antérieure ainsi que la surface postérieure de la cornée. Ils peuvent être exprimés comme étant des rayons de courbure en millimètre ou plus souvent en dioptries kératométriques cliniquement.
- La forme de la surface antérieure et postérieure. Elles peuvent également être exprimées en micromètres comme étant l'élévation de la surface réelle (l'abscisse x , l'ordonnée y et l'élévation z). Généralement, l'élévation est donnée par rapport à une surface de référence choisie (par exemple, une sphère). Ces deux notions peuvent caractériser la forme générale et les macro-irrégularités de la surface cornéenne.
- Changements locaux de la surface peuvent être exprimée en micromètres. La rugosité de la surface est optiquement très importante, et toute micro-irrégularité de la surface de la cornée peut considérablement dégrader l'image.
- Pouvoir réfractif de la cornée exprimée en dioptries. C'est une propriété optique dépendant de la forme de la surface et de son indice de réfraction
- L'épaisseur et la structure 3D de la cornée exprimée aussi en micromètres. Les changements dans la structure 3D (par exemple, après la chirurgie réfractive) peuvent induire d'autres changements de sa forme en raison des changements biomécaniques, comme modifier l'élasticité du tissu restant.

2.5.2. Topographe cornéen

La topographie cornéenne est un examen essentiel (et obligatoire avant toute chirurgie réfractive) qui permet de recueillir des informations relatives à la courbure ou au relief (élévation) de la cornée. L'instrument de mesure utilisé dans cet examen est appelé topographe cornéen.

Diverses technologies sont utilisées pour décrire et étudier la géométrie de la cornée qui fournissent généralement des données complémentaires. Les instruments qui mesurent et décrivent avec le plus de précision les propriétés topographiques de la surface cornéenne peuvent être classés en deux grands types [6] :

- Les disques de Placido
- Les enregistreurs de l'élévation/dépression

2.5.2.1. Topographie conventionnelle de type Placido

Tous les membres de cette famille de topographes cornéens ont été inspirés du disque de Placido (voir la section système de Placido dans le paragraphe 2.5.2.2). On peut trouver dans cette famille de topographes: le kératomètre, le kératoscope et la vidéokératographe.

Kératomètre

La kératométrie est une méthode permettant de mesurer le rayon de courbure de la cornée. Le kératomètre mesure la courbure de la cornée le long d'une série de méridiens, en y faisant réfléchir un cercle lumineux centré sur le sommet de la cornée. Pour se faire, il mesure simplement l'écartement entre deux paires de points se réfléchissant sur la surface antérieure de la cornée. Cette méthode donne de bons résultats dans le cas d'une surface sphérique, mais reste insuffisante pour une surface plus complexe comme celle de la cornée [3].

Kératoscope

Le Kératoscope (aussi appelé ophtalmomètre) fait réfléchir une série d'anneaux concentriques sur la surface de la cornée pour visualiser la surface de la cornée. La qualité de la détection des perturbations topographiques dépend du nombre d'anneaux. Parmi les modèles existants, on peut citer le «*Cornéoscope*» qui utilise 12 anneaux et couvre 70 % de la surface de la cornée et de «*Corneal modeling system*» qui utilise 32 anneaux et couvre 95 % de la surface. Par ailleurs, ces instruments utilisent des algorithmes calculant le rayon de courbure le long de méridiens donnés, en s'appuyant sur l'hypothèse d'une cornée sphérique [3].

Vidéokératographe

La vidéokératographie est une amélioration du processus de mesure qui s'appuie sur le principe des disques de Placido. C'est un procédé qui permet d'évaluer la forme de la cornée. Un système vidéokératographique fonctionne généralement comme suit: un objet lumineux de test (en général un ensemble d'anneaux concentriques, souvent appelés mires) est réfléchi par la cornée. Par la suite, l'image vidéo est captée par une caméra CCD (charged coupled device). Une fois que l'alignement correct est atteint, une caméra (capteur) capture une image, appelée vidéokératographe. Ainsi, le vidéokératographe est une image vidéo numérisée d'un objet

lumineux de test correctement aligné après réflexion par le film lacrymal de la cornée. Une fois analysées, les données peuvent être manipulées pour créer une variété de graphiques en fonction des besoins de l'utilisateur. Le vidéokératographe, les données analysées, et l'information du patient sont enregistrées, et des options pour l'utilisateur peuvent être utilisées pour générer des copies de dossiers de patients [7].

2.5.2.2. Topographie en élévation :

Les systèmes topographiques basés sur le principe des disques de Placido sont des outils précieux dans l'évaluation de la courbure et le pouvoir réfractif de la cornée. Cependant, ces systèmes ne sont pas capables de décrire directement la forme spatiale réelle de la cornée.

Les topographes d'élévation font partie d'autres catégories de topographes qui sont capables de fournir une estimation directe de l'élévation de la cornée, établissant ainsi une vraie carte en trois dimensions de la forme de la surface cornéenne antérieure ou postérieure. Dans ce qui suit, on va présenter les topographes d'élévation les plus populaires.

La rasterstéréographie

La rasterstéréographie est une technique non invasive de mesure de la cornée. Cette technique consiste à projeter une grille sur la cornée à travers un filtre cobalt bleu. Le film lacrymal est teinté à la fluorescéine. L'élévation est calculée en évaluant la déformation des lignes de la grille. La courbure et l'élévation sont obtenues pour toute la surface cornéenne par cette méthode. La précision et la reproductibilité sont de l'ordre des systèmes de Placido, mais l'avantage est que ce système ne nécessite pas une surface épithéliale intacte [8].

Pentacam

L'imagerie par Pentacam est une technique qui utilise une méthode différente pour obtenir l'image de la cornée appelée l'imagerie de Scheimpflug. Cette dernière est basée sur le principe de Scheimpflug qui se produit quand un objet planaire n'est pas parallèle au plan d'image.

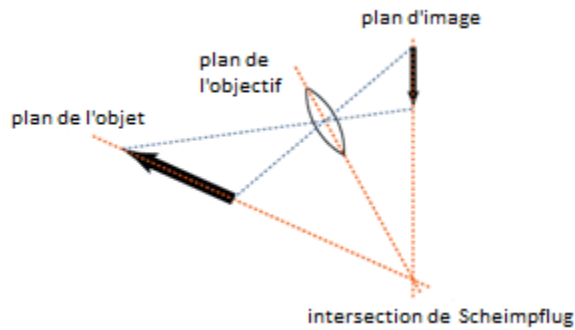


Figure 2.5 Principe de Scheimpflug⁵

Dans ce scénario, une tangente oblique peut être tirée de l'image, l'objet et le plan de l'objectif. Le point d'intersection de ces tangentes est appelé l'intersection de Scheimpflug, c'est exactement où l'image a le meilleure mise au point (focus). Avec une caméra Scheimpflug rotative, la Pentacam est capable d'obtenir 50 images Scheimpflug en moins de 2 secondes. Chaque image possède 500 points de vraie élévation (élévation réelle), donc un total de 25000 points d'élévation réelle pour la surface de la cornée. Grâce aux deux caméras qu'elle possède, la Pentacam est en mesure d'effectuer l'image de la cornée de façon à pouvoir visualiser la topographie de la surface antérieure et postérieure.

La Pentacam comprend un certain nombre d'avantages : haute résolution de la cornée entière, y compris le centre de la cornée, la capacité à mesurer les cornées avec des irrégularités graves, telles que le kératocône et la capacité de calculer la pachymétrie (mesure de l'épaisseur de la cornée) de limbe à limbe [9].

Microscopie confocale

Un microscope confocal est un microscope optique qui peut réaliser des images de très faible profondeur de champ. Il est possible de réaliser des séries d'images à partir desquelles on peut obtenir une représentation tridimensionnelle de l'objet.

Le microscope conventionnel recueille toute la lumière réfléchiée par un objet incluant celle au dessus et au dessous du plan focal. Cela crée des images floues et bruyantes avec une résolution limitée. Par conséquent, l'échantillon doit être finement coupé. Il est clair que ce besoin de couper physiquement l'échantillon n'est pas permis dans l'imagerie in vivo (à l'intérieur du corps humain). La microscopie confocale a permis d'éviter cet inconvénient.

⁵ <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Scheimpflug.gif>

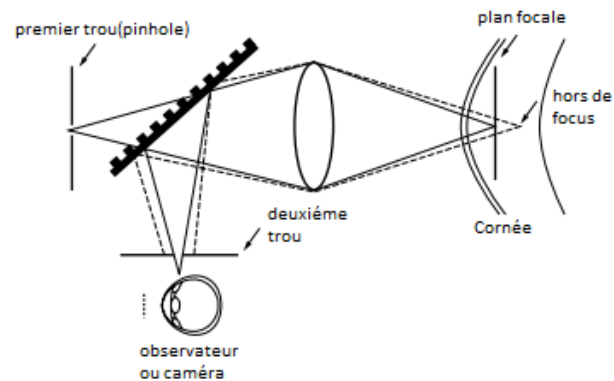


Figure 2.6 Principe du microscope confocal [10]

En microscopie confocale, la source ponctuelle de lumière et son détecteur conjugué limitent le passage de la lumière en dehors du plan focal et ne parvient pas au système d'observation [10]. Le champ de vision d'une telle conception est très faible, et un champ de vision complet doit être mis en place. Il peut être obtenu en faisant tourner des disques avec beaucoup de sources-détecteurs conjuguées comme le *TSCM (Tandem Scanning Confocal Microscope)*, ou par un système de balayage comme le *SSCM (Slit-Scanning Confocal Microscope)* ou *LSCM (Laser Scanning Confocal Microscope)* [11].

La microscopie confocale permet d'obtenir des images d'une grande résolution longitudinale (de 1,5 à 4 μm) et a la capacité d'obtenir des images de cellules de l'image de l'épithélium cornéen, nerf épithélial du plexus, les différentes parties du stroma, et l'endothélium sans la nécessité de sectionner mécaniquement la cornée [11].

Tomographie par cohérence optique

Tomographie par cohérence optique (OCT) de la cornée et du segment antérieure de l'œil et est une méthode optique d'acquisition des images en coupe transversale.

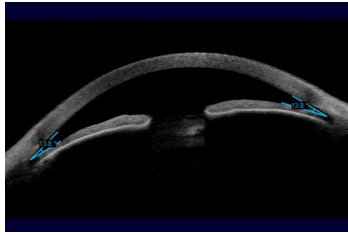


Figure 2.7 Tomographie par cohérence optique de la cornée⁶

Elle est basée sur la réflexion et la diffusion de la lumière à partir des structures à l'intérieur de la cornée. La mesure des différentes réflectivités des structures à l'intérieur de la cornée par un procédé d'interférométrie optique produit une image en coupe de la cornée et d'autres structures du segment antérieur.

En interférométrie optique, la source de lumière est divisée en deux faisceaux: faisceaux de référence et faisceaux de mesure. Le faisceau de mesure est réfléchi par les structures oculaires et interagit avec la lumière de référence réfléchi par le miroir de référence, ce phénomène est appelé interférence. L'interférence cohérente ou positive est caractérisée par une augmentation du signal résultant qui peut être mesuré par l'interféromètre. Par la suite, la position de la structure réfléchissante de l'œil peut être déterminée. De cette façon, la cornée et les structures du segment antérieur peut être visualisé avec un haut degré de résolution (actuellement $18 \mu\text{m}$ axiales et $60 \mu\text{m}$ transversale). Cette technologie est également utilisée pour visualiser certaines pathologies comme les tumeurs, les kystes de l'iris ainsi que des anneaux intra-cornéens [12].

Orbscan II

Le topographe Orbscan II de *Bausch & Lomb* relève d'une technologie plus récente qui permet aux chirurgiens et ophtalmologues de non seulement détecter les irrégularités de la surface cornéenne, mais également de la cartographier. C'est vraiment un instrument révolutionnaire pour l'étude de la cornée.

Afin de mesurer la surface cornéenne, le topographe Orbscan II combine un système de balayage à fentes avec un système avancé des disques de Placido. Le système Orbscan II emploie un balayage de faisceau et triangulation directe pour déterminer et mesurer les surfaces

⁶ <http://www.oct-ophtalmo.fr/tomey/tomey-oct.html>

antérieure et postérieure de la cornée. Selon les trois grandes étapes de l'examen Orbscan, le dispositif comporte 3 unités [13]: unité d'acquisition de données, une unité pour le traitement de données et une unité pour la sortie.

Une tête de capture de données est la partie principale de l'appareil. Elle combine une projection d'un système avancé des disques de Placido et un appareil de balayage à fentes. Cette combinaison permet de surmonter l'un des désavantages principaux de topographe cornéen standard à base des disques de Placido seulement : l'incapacité de tracer et de prévoir la topographie de la surface postérieure de la cornée. L'acquisition de données dans l'Orbscan II inclut deux types d'images: d'abord, une capture des images virtuelles de la projection de disques concentriques de Placido, puis 40 images de faisceaux verticaux entrelacés de 0,3 mm projetés à un angle de 45 degrés (20 images de faisceaux sont projetées de chaque côté pour balayer la cornée horizontalement de limbe à limbe).

Le scanneur Orbscan II capture et analyse 240 points de chaque faisceau projeté. Le traitement de données acquis ne dure que quelques secondes après lequel les informations issues de plus de 9000 points numérisés sont traitées en utilisant des algorithmes complexes. Théoriquement, le nombre de points numérisés est égal à 9600. Mais les images en périphérie contiennent des données provenant de paupières et de la sclérotique donc, pratiquement, on aboutit à un nombre de points utile inférieur à 9600. Un logiciel de lissage déduit la forme et l'épaisseur cornéenne entre chaque section.

Le résultat du traitement des données par l'Orbscan II est présenté comme des cartes à code couleur.

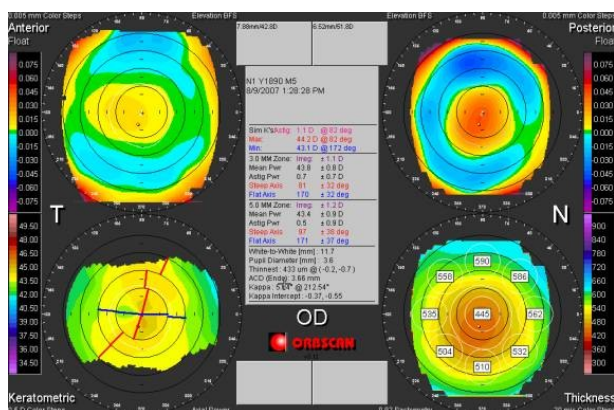


Figure 2.8 informations fournies par l'Orbscan II⁷

Parmi les informations les plus importantes fournies par l'Orbscan II, il y a: carte de la surface antérieure et sa courbure, carte de la surface postérieure et sa courbure, carte de kératométrie et carte de pachymétrie (mesure de l'épaisseur de la cornée). Les cartes de la surface antérieure et postérieure affichées par l'Orbscan II ne sont pas élévations réelles de chacune des surfaces, mais plutôt des élévations calculées à partir d'une surface de référence (sphère) appelée BFS (*Best-fit sphere*). Les cartes d'élévation sont représentées en colorant les différences entre la surface d'intérêt et la BFS où la couleur verte montre les zones les plus proches de la BFS, les couleurs chaudes (rouge et jaune) représentent les zones au-dessus de la BFS et les couleurs froides (bleu et violet) indiquent les zones au-dessous de la BFS. La carte de pachymétrie (d'épaisseur) est calculée à partir des différences entre la surface antérieure et postérieure de la cornée.

Système Placido

Comme la plupart des topographes cornéens, l'Orbscan II emploie le système des disques de Placido (40 anneaux). C'est une technique, apparue à la fin du XIXe siècle. Il s'agissait d'un disque plat, doté d'un trou d'observation central, sur lequel figuraient des anneaux concentriques (mires) alternativement blancs et noirs, et qui était maintenu devant l'œil du sujet. Cette technique part du principe que la cornée agit comme un miroir convexe. Lorsque la cornée est observée à travers l'orifice des disques de Placido, la grandeur, la forme

⁷ <http://www.urmc.rochester.edu/eye-institute/lasik/technology/orbscan-corneal-topographer.cfm>

et la position des mires reflétées peuvent être analysées et utilisées comme mesures indirectes de la forme cornéenne.

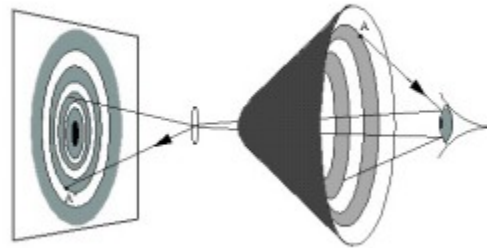


Figure 2.9 Principe des disques de Placido [3]

Balayage à fentes

La technologie de l'Orbscan II utilise le principe de triangulation pour construire la topographie de la cornée. Les informations obtenues par les différentes unités de l'Orbscan sont traitées comme des données télémétriques (range data processing). La télémétrie est la mesure de la distance par procédé optique ou radioélectrique. Il s'agit principalement d'algorithmes de reconstruction permettant de recréer l'image 3D de la cornée à partir des points obtenus.

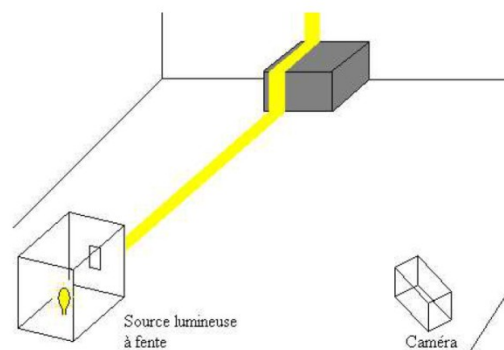


Figure 2.10 Système de balayage à fentes [59]

La technique utilisée par l'Orbscan II pour acquérir les données télémétriques consiste à projeter un rayon lumineux sur l'objet à numériser. Après, une caméra est utilisée pour numériser l'image résultante. On appelle un tel système un «*système de balayage à fentes*» (*slit-scanning*). Pour obtenir l'information en 3 dimensions, ce dernier utilise le principe de la

vision binoculaire qui consiste à observer une image de deux points de vue différents. Dans le cas du système de balayage à fentes, l'œil gauche est remplacé par la source lumineuse et l'œil droit par une caméra.

L'estimation des différentes distances se fait par triangulation. Le système de balayage à fentes dispose d'informations de base et d'un référentiel. Le calibrage du système Orbscan II est effectué en fixant une plaque à une distance connue de la source et du détecteur. Grâce à cette plaque de calibrage, la réponse de référence de chacune des fentes d'éclairage peut être enregistrée. Par la suite la variation de la réponse de chaque fente par rapport au référentiel peut être interprétée pour évaluer la position de l'objet telle que la cornée lorsqu'il est éclairé.

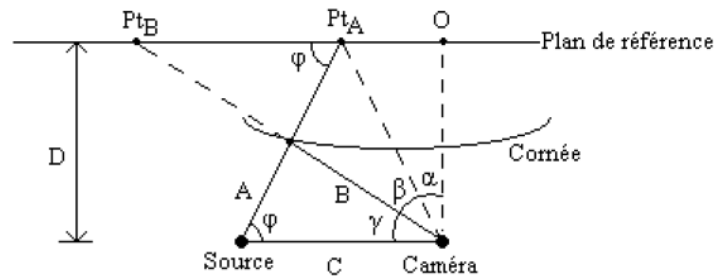


Figure 2.11 Triangulation d'un point [59]

La surface postérieure de la cornée peut elle aussi être évaluée grâce au reflet de la partie du rayon traversant la couche antérieure (rayon réfracté). Une partie de rayon réfracté sur la surface antérieure se reflète aussi sur la couche postérieure. Ainsi, pour chaque rayon envoyé par la source, deux rayons sont reçus. Le premier rayon utilisé pour évaluer d'abord la couche antérieure, puis le deuxième rayon est utilisé pour mesurer la surface postérieure et le point de contact avec la surface postérieure peut être calculé par suivi de rayon en tenant compte de l'indice de réfraction de la cornée et de la position.

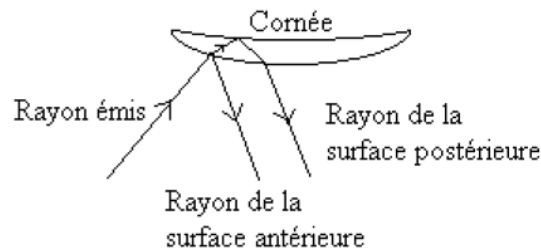


Figure 2.12 Schéma de la mesure de la surface postérieure [59]

Une fois les points déterminés, il ne reste qu'à reconstruire l'image finale. Cette étape est probablement réalisée par un algorithme de reconstruction, mais ces informations ne sont pas disponibles puisqu'elles sont gardées confidentielles par *Bausch & Lomb*, le fabricant de l'appareil.

Discussion

L'Orbscan II a ajouté un nouveau paradigme à la topographie cornéenne. Cet instrument, comme son prédécesseur, l'Orbscan, est capable de cartographier la totalité de la surface cornéenne et peut fournir plus d'informations sur les composantes optiques de l'œil. L'Orbscan II est une synergie de deux techniques de vidéokératographie assistée par ordinateur à savoir les disques de Placido et le balayage à fentes. Il permet à la fois de topographier la cornée et d'en mesurer l'épaisseur en quelques secondes. De plus, il est parmi les rares topographes cornéens permettant de topographier la surface postérieure de la cornée.

La précision des mesures a été évaluée et vérifiée par plusieurs équipes de recherche. Une étude menée par [14] sur le système de calibrage de l'Orbscan II. Cette étude montre que l'amplitude de l'erreur dans les mesures effectuées par l'Orbscan II est très faible. L'erreur dans les mesures d'élévations centrales est égale à $0,20 \mu m$. Pour les élévations en périphérie, l'erreur est évaluée à $0,70 \mu m$. Ceci montre que les mesures centrales prises par l'Orbscan II sont significativement plus précises que celles de la périphérie.

D'autres équipes de recherche ont étudié et comparé les mesures de la surface cornéenne obtenue par l'Orbscan II, aux systèmes basés uniquement sur les disques de Placido, rasterstéréographie [8] ainsi que la Pentacam [9]. Dans ces études, il a été démontré que les résultats obtenus par l'Orbscan II sont plus lisses et plus précis.

Par ailleurs, d'autres équipes ont étudié les différences entre la pachymétrie mesurée par l'Orbscan II et par la référence du domaine, la pachymétrie ultrasonore [15] [16]. Dans ces études, il a été trouvé que la technologie Orbscan est utile, rapide et fiable pour les tests de pachymétrie mais nécessite un facteur de correction de 0.92 pour être comparables. En plus, La pachymétrie optique (technologie de l'Orbscan) n'est pas affectée par les changements d'hydratation et ne nécessite pas un contact direct avec la cornée contrairement à la pachymétrie classique.

Malheureusement, le système Orbscan II est limité par un problème commun à tous les systèmes de topographie non invasive. Ce problème est lié à la specularité de la surface observée. En effet, la surface observée doit absolument être spéculaire, ce qui n'est pas toujours le cas. Plusieurs cornées ont de larges régions qui réfléchissent la lumière de manière diffuse. Il serait aussi utile de pouvoir mesurer la topographie cornéenne suite à une cicatrice résultant d'un traumatisme ou d'une pathologie ou l'enlèvement de l'épithélium de la cornée pendant la kératométrie photo-ablative. Dans ces cas, l'image spéculaire n'est pas détectable [7].

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a effectué tout d'abord un bref résumé sur l'anatomie de la cornée humaine, et on a expliqué le fonctionnement et le rôle optique que la cornée joue dans la vision.

Puis, on a vu les différents troubles et les erreurs réfléchives touchant la cornée qui peuvent nécessiter une chirurgie réfractive ou même une transplantation cornéenne pour correction de la vue.

Ensuite, on s'est intéressé à toute sorte de mesure qu'on peut effectuer sur la cornée ainsi que les techniques utilisées pour collecter ces informations.

Enfin, on a présenté l'un des systèmes les plus avancés technologiquement parmi les topographes cornéens disponibles: l'Orbscan II

Dans le prochain chapitre, on s'intéressera au problème de recalage 3D et au fameux algorithme ICP «*iterative closest point*» et ses variantes qui sera utilisé ultérieurement pour la construction de l'atlas cornéen.

Chapitre 3

Problème de recalage et l'algorithme ICP

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va s'intéresser au problème de recalage 2/3D qui très connu dans le domaine de vision par ordinateur. Tout d'abord, on va décrire et formuler le problème mathématiquement. Puis, on va présenter les quatre méthodes populaires pour estimer la transformation géométrique entre deux ensembles de points. Ensuite, on va présenter et détailler le célèbre algorithme ICP ainsi que ces variantes connu comme la solution efficace pour le raclage des formes 2/3D. Enfin, on va présenter les deux algorithmes ICPS isotrope et non isotrope.

3.2. Problème de recalage 2/3D

3.2.1. Introduction et description

Suite à l'évolution et au développent des nouvelles technologies d'acquisition des images numériques, le problème de recalage 2/3D est devenu un problème très intéressant à résoudre. En faite, le problème de recalage 2/3D (connu aussi sous le nom de l'orientation absolue, alignement 2/3D et estimation de la position 2/3D) consiste à aligner ou ajuster deux formes d'une façon optimale ce qui revient à déterminer la transformation géométrique optimale qui permet un meilleur alignement entre une première forme appelée souvent «*Donnée*» et une deuxième forme appelée «*Modèle*».

L'opération de recalage 2/3D s'avère nécessaire dans de nombreuses situations. Par exemple; lors de l'acquisition de plusieurs images d'un objet par différents capteurs (scanneurs ou cameras), les données obtenues sont représentées dans différents systèmes de coordonnées. Par conséquent, toutes les images doivent être transformées dans un repère commun afin de mieux les visualiser ou traiter. Un deuxième cas dans lequel le recalage est indispensable; lors de la construction des modèles d'un objet, plusieurs vues de cet objet sont nécessaires. Ces vues ne peuvent pas être obtenues par une seule acquisition, donc plusieurs acquisitions

doivent être effectuées sur cet objet. Il en résulte des images représentées dans différents repères, d'où la nécessité de recalibrer partiellement tous les vues de cet objet pour construire les modèles.

Les domaines d'application touchés par le recalage 2/3D sont très nombreux, on peut citer: Reconnaissance des formes, Robotique, Reconstruction 3D, Calibration des caméras, Imagerie médicale, imagerie satellite, Archéologie, etc....[17], [18], [19].

3.2.2. Formulation mathématique du problème de recalage 2/3D

Le problème de recalage 2/3D est généralement considéré comme un problème de minimisation vu que l'estimation de la transformation optimale s'achève en minimisant une fonction d'erreur basée sur la distance entre les différentes formes à aligner. Ainsi ce problème de minimisation peut être formulé comme suit : étant donné deux ensembles de points dans R^m ($m = 2$ ou $m = 3$) dont la correspondance est inconnue; $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ la forme donnée et $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ la forme modèle où $N_p \leq N_x$, alors pour obtenir le meilleur alignement de la forme donnée P avec la forme modèle X , la transformation optimale \hat{T} doit être trouvée en minimisant la fonction d'erreur suivante :

$$f(T) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - T(p_i)\|^2 \quad \text{i.e.}$$

$$\hat{T} = \arg \min_T \left(\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - T(p_i)\|^2 \right)$$

Cette fonction d'erreur décrit un recalage général entre les deux ensembles de points X et P . La transformation \hat{T} à trouver peut être une seule transformation où la composée de plusieurs transformations variées.

3.3. Calcul et estimation de la transformation

Le problème de recalage peut être divisé en deux sous-problèmes: le premier consiste à déterminer la bonne correspondance entre les points la forme donnée et les points du modèle (qui est souvent inconnue). Le deuxième consiste à trouver la transformation entre les ensembles de points à aligner. Avant de se lancer dans la résolution du problème de recalage

2/3D énoncé ci-dessus, on va s'intéresser tout d'abord au problème lié à la recherche de la transformation T entre deux ensembles de points. Ce dernier est un problème bien étudié dans la littérature. En effet plusieurs méthodes ont été développées afin d'estimer la transformation entre deux ensembles de points exprimés dans deux systèmes de coordonnées différents. Une première solution [20] que nous appellerons «*SVD*» se base sur la décomposition en valeurs singulières d'une matrice calculée en utilisant la représentation standard des transformations. Une deuxième méthode [21] que nous appellerons «*Matrices orthogonales*» se base sur le calcul des vecteurs propres et les vecteurs propres d'une matrice un peu différente générée en utilisant les propriétés orthogonales de la transformation. La troisième méthode [18] appelée «*Quaternion unitaire*» dans laquelle un quaternion est utilisé pour représenter la transformation calculée à partir d'un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre d'une matrice de dimension quatre. La quatrième méthode [22] appelée «*Quaternion dual*» qui utilise un dual quaternion pour calculer et représenter la transformation.

Dans ce qui suit, on va détailler chacune des quatre méthodes mentionnées ci-dessus, la représentation de la transformation qu'elles utilisent ainsi que les algorithmes pour calculer la transformation.

3.3.1. La méthode *SVD*

Cette méthode a été développée par Arun [20] et a été conçue pour minimiser une fonction d'erreur de minimisation de cette forme :

$$f(T) = f(R, t) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - Rp_i - t\|^2$$

$$\text{i.e. } \hat{T} = (\hat{R}, \hat{t}) = \arg \min_{R, t} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - Rp_i - t\|^2 \right)$$

où $T = (R, t)$ est la composée d'une rotation R et une translation t , $\hat{T} = (\hat{R}, \hat{t})$ est la transformation optimale qui assure le meilleur alignement de $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ avec $X = \{x_i\}_1^{N_x}$.

3.3.1.1. Représentation de la transformation

Dans cette méthode, la Rotation R est représentée par une matrice orthogonale ($RR' = I_m$ et $\det(R) = 1$) d'ordre $m \times m$ tandis que la translation t est représentée par un vecteur de dimension m .

3.3.1.2. Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières est un outil très fort en algèbre linéaire qui permet la factorisation d'une matrice complexe en un produit des matrices plus simples afin de faciliter l'extraction de caractéristiques intéressantes de cette dernière.

Théorème

Soit M une matrice d'ordre $m \times n$ dont les coefficients sont complexes ou réels alors il existe trois matrices U , Σ et V tel que $M = U\Sigma V^*$ où U est une matrice orthogonale d'ordre $m \times m$, V est une matrice orthogonale d'ordre $n \times n$ et Σ est une matrice d'ordre $m \times n$ dite «pseudo-diagonale» qui contient les valeurs singulières de la matrice M .

Interprétation

On peut interpréter géométriquement cette décomposition comme suit: Pour l'application linéaire g dérivée de la matrice M , il existe une base orthonormée de K^n et une base orthonormée de K^m tel que g associe l' i ème vecteur de base de K^n à un multiple d' i ème vecteur de base de K^m , ainsi g sera représenté par une matrice d'ordre $m \times n$ où les coefficients non nuls sont ceux sur la diagonale principale de la matrice. En effet si on note u_1, \dots, u_m et v_1, \dots, v_n les vecteurs colonnes respectifs de U et V alors la l'application $g : x \rightarrow Mx$ va avoir une expression très simple dans ces bases orthonormées puisque $g(v_i) = \sigma_i u_i$ où σ_i est l' i ème coefficient de la diagonal principale de Σ .

3.3.1.3. Estimation de la rotation et la translation optimale

Comme mentionné précédemment, la fonction d'erreur atteint son minimum en \hat{R} et \hat{t} . Par conséquent, le modèle et la donnée après transformation vont avoir le même centroïde. En

définissant tout d'abord les deux centroïdes (ou centre de masse), on obtient les deux termes q_i et q'_i :

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} p_i & ; & & \bar{x} &= \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} x_i \\ q_i &= p_i - \bar{p} & ; & & q'_i &= x_i - \bar{x} .\end{aligned}$$

Alors la fonction d'erreur peut être encore plus réduite:

$$\begin{aligned}f(R, t) &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - Rp_i - t\|^2 \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|q'_i + \bar{x} - R(q_i + \bar{p}) - t\|^2 \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|(q'_i - Rq_i) + \bar{x} - R(\bar{p} + t)\|^2\end{aligned}$$

En utilisant la contrainte que le centroïde du modèle est confondu au centroïde de la donnée après qu'il a subit la transformation (i.e. $\bar{x} - (R\bar{p} + t) = 0$) alors $f(R)$ sera réduit à :

$$f(R) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|q'_i - Rq_i\|^2 .$$

Rotation optimale

L'algorithme pour calculer \hat{R} est décrit ci dessous :

- Étape 1: Calculer les deux centres de masses \bar{x} et \bar{p} ainsi que les nouvelles coordonnées q_i et q'_i pour i de 1 à N_p .
- Étape 2: Calculer la matrice H d'ordre $m \times m$ ($m = 2$ ou $m = 3$) donnée par la formule suivante: $H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i q_i^t$.
- Étape 3: Décomposer la matrice H en valeurs singulières : $H = U \Sigma V^t$
- Étape 4: Calculer la matrice W donnée par : $W = VU^t$
- Étape 5: Si le déterminant de matrice W est égale a 1 alors la rotation optimale $\hat{R} = W$ Si le déterminant de matrice W est égale à -1 alors W est une réflexion el l'algorithme échoue (ce cas ne se produit presque jamais. Ceci est démontré expérimentalement).

Preuve et démonstration

Reprenant la fonction d'erreur réduite $f(R) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|q'_i - Rq_i\|^2$ alors on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(R) &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (q'_i - Rq_i)^t (q'_i - Rq_i) \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (q_i^t q'_i - q_i^t Rq_i - q_i^t R^t q'_i + q_i^t R^t Rq_i) \end{aligned}$$

Or R est une matrice orthogonale ($R^t R = I_m$) et en utilisant les propriétés de la transposition on a $q_i^t R^t q'_i = q_i^t Rq_i$ (car $q_i^t R^t q'_i$ est un réel donc $q_i^t R^t q'_i = (q_i^t R^t q'_i)^t$), alors la fonction d'erreur sera égale à :

$$f(R) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (q_i^t q'_i + q_i^t q_i - 2q_i^t Rq_i).$$

En examinant la nouvelle expression de la fonction d'erreur $f(R)$, on peut déduire que minimiser cette dernière revient à maximiser le terme $F(R) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t Rq_i$.

Or $F(R)$ est un réel, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(R) &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t Rq_i \\ &= \text{tr} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t Rq_i \right) \\ &= \text{tr} \left(R \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i q_i^t \right) \\ &= \text{tr}(RH) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i q_i^t.$$

Lemme: pour toute matrice définie positive et symétrique AA^t , pour toute matrice orthogonale B on a : $\text{tr}(AA^t) \geq \text{tr}(BAA^t)$. (Ceci peut être démontré en utilisant l'inégalité de Cauchy Swartz)

Soit la décomposition de la matrice H en valeurs singulière alors on a $H = U\Sigma V^t$ et la matrice $W = VU^t$. Calculons le produit de deux matrice W et H :

$$\begin{aligned} WH &= VU^t U \Sigma V^t \\ &= V \Sigma V^t \end{aligned}$$

Puisque WH est une matrice définie positive et symétrique alors on peut appliquer le lemme énoncé ci-dessus: pour toute matrice orthogonale B on a $tr(WH) \geq tr(BWH)$ ce qui signifie que parmi toutes les matrices orthogonales, W est celle qui maximise $F(R)$.

Translation optimale

En utilisant la contrainte citée précédemment concernant la superposition des deux centres de masse lors de l'alignement de $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ avec $X = \{x_i\}_1^{N_x}$, on peut calculer le vecteur de translation optimale par la formule suivante : $\hat{t} = \bar{x} - \hat{R}\bar{p}$.

3.3.2. Matrices orthogonales

Cette solution a été développée par Horn [21] et ressemble à la première méthode décrite précédemment avec une légère différence dans la définition de la fonction d'erreur à

minimiser:
$$f(T) = f(R, t, s) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - sRp_i - t\|^2$$

i.e.
$$\hat{T} = (\hat{R}, \hat{t}, \hat{s}) = \arg \min_{R, t} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - sRp_i - t\|^2 \right)$$

Cette fonction d'erreur fait intervenir aussi le changement d'échelle s . La résolution de ce problème de minimisation va traiter s d'une manière indépendante de R et t .

3.3.2.1. Représentation de la transformation

Cette approche utilise la même représentation que la méthode «SVD» pour la rotation et la translation (la Rotation R est représentée par une matrice orthogonale d'ordre $m \times m$ et la translation est représentée par un vecteur t de dimension m) tandis que le changement d'échelle est représenté par un scalaire s .

3.3.2.2. Décomposition en produit d'une matrice orthogonale et une matrice symétrique

D'après la méthode [21], toute matrice carrée d'ordre $m \times m$ peut être décomposée en produit d'une matrice orthogonale et une matrice semi-définie positive (toutes ses valeurs

propres sont positives), ainsi toute matrice réelle M d'ordre $m \times m$ peut être écrite sous la forme $M = US$ avec $S = (M^t M)^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée définie positive de la matrice symétrique $M^t M$ et $U = M(M^t M)^{-\frac{1}{2}}$ est la matrice orthogonale d'ordre $m \times m$. La matrice S est déterminée d'une manière unique tandis que U est unique si et seulement si M est non singulière (invertible).

3.3.2.3. Racine carrée d'une matrice définie positive

La matrice définie positive et symétrique $M^t M$ peut être exprimée en fonction de ses valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ et les vecteurs propres associés $\{v_i\}_{i=1}^m$ comme suit :

$$M^t M = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i v_i^t .$$

Puisque $M^t M$ est une matrice définie positive, alors toutes ses valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ sont positives. Par conséquent, les racines carrées des $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ sont bien réelles et on peut

définir la matrice S par : $S = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} v_i v_i^t$. Calculons S^2 :

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} v_i v_i^t \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i v_i^t \\ &= M^t M \end{aligned}$$

Ceci est facile à démontrer en détaillant les calculs pour $m=2$ et $m=3$. Par ailleurs, pour tout vecteur $z \in \mathbb{R}^m$ non nul on a $z^t S z > 0$. Il en résulte que la matrice S définie positive est la racine carrée de la matrice symétrique $M^t M$ définie par : $S = (M^t M)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} v_i v_i^t$.

3.3.2.4. Calcul de la matrice orthogonale dans la décomposition

Soit W la matrice définie par $W = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} v_i v_i^t$ avec $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\{v_i\}_{i=1}^m$ de la matrice symétrique définie positive $M^t M$. Alors on

a $W = S^{-1} = (M' M)^{-\frac{1}{2}}$. Ceci peut être vérifié en effectuant la multiplication de W par S (i.e. $WS = I_m$). Ainsi la matrice U qui apparait dans la décomposition de M peut être calculée par : $U = MS^{-1} = M(M' M)^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.2.5. Estimation du changement d'échelle, de la rotation et de la translation optimale

Soient \bar{x} et \bar{p} les centres de masse des ensembles respectifs $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ et $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ ainsi que les nouvelles coordonnées q'_i et q_i définies de la même manière que la méthode précédente. Alors la fonction d'erreur peut être réduite à :

$f(R, s) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|q'_i - sRq_i\|^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|e_i\|^2$ avec $e_i = q'_i - sRq_i$ est la distance qui sépare le point q'_i et le point q_i après qu'il a subit la rotation R puis le changement d'échelle s , e_i est aussi égale à la distance entre le point q'_i qui a subit un changement d'échelle $s^{-\frac{1}{2}}$ et le point q_i après qu'il a subit la rotation R puis le changement d'échelle $s^{\frac{1}{2}}$ i.e. $e_i = \frac{1}{\sqrt{s}} q'_i - \sqrt{s} Rq_i$.

Une telle expression de la fonction erreur s'appelle une expression symétrique utilisée pour éviter l'asymétrie dans le changement d'échelle. Reprenons la fonction d'erreur $f(R, s)$ et développons:

$$\begin{aligned}
 f(R, s) &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|e_i\|^2 \\
 &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left\| \frac{1}{\sqrt{s}} q'_i - \sqrt{s} Rq_i \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} q'_i - \sqrt{s} Rq_i \right)' \left(\frac{1}{\sqrt{s}} q'_i - \sqrt{s} Rq_i \right) \\
 &= \frac{1}{N_p} \left(\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{s} \|q'_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{N_p} q_i' Rq_i + s \sum_{i=1}^{N_p} \|q_i\|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{N_p} \left(\frac{1}{s} S_r - 2D + sS_l \right)
 \end{aligned}$$

avec $S_r = \sum_{i=1}^{N_p} \|q'_i\|^2$, $D = \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t R q_i$ et $S_l = \sum_{i=1}^{N_p} \|q_i\|^2$.

Changement d'échelle optimal

Le changement d'échelle \hat{s} est déterminé sans de la rotation et donné par la formule suivante: $\hat{s} = \frac{\sqrt{S_r}}{\sqrt{S_l}}$. Le choix de la valeur du facteur d'échelle \hat{s} dans cette solution est

indépendant de la rotation et n'affecte pas sa détermination.

Preuve et démonstration

On peut écrire la fonction d'erreur $f(R, s)$ comme un début de produit remarquable en

s : $f(R, s) = \frac{1}{N_p} \left(\left(\sqrt{s} \sqrt{S_l} - \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{S_r} \right)^2 + 2(\sqrt{S_l S_r} - D) \right)$. Alors, afin de minimiser $f(R, s)$ le

premier terme doit être nul, d'où $\hat{s} = \frac{\sqrt{S_r}}{\sqrt{S_l}}$.

Rotation optimale

L'algorithme pour calculer la rotation optimale \hat{R} est énoncé ci dessous :

- Étape 1: Calculer les deux centres de masses \bar{x} et \bar{p} ainsi que les nouvelles coordonnées q_i et q'_i pour i de 1 à N_p .
- Étape 2: Calculer la matrice M d'ordre $m \times m$ ($m=2$ ou $m=3$) donnée par la formule suivante: $M = H^t = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q'_i q_i^t$.
- Étape 3: Décomposer la matrice M en produit d'une matrice orthogonale U et une matrice symétrique S ; $M = US$ alors la rotation optimale $\hat{R} = U = MS^{-1}$.

Preuve

Reprenons la fonction d'erreur à minimiser définie par l'équation:

$$f(R, s) = \frac{1}{N_p} \left(\frac{1}{s} S_r - 2D + sS_l \right), \text{ alors pour minimiser } f(R, s) \text{ on doit maximiser le terme}$$

$$F(R) = \frac{1}{N_p} D = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t R q_i. \text{ Or } F(R) \text{ est un réel donc on peut écrire}$$

$$F(R) = \text{tr}(RM^t) = \text{tr}(R^t M) \text{ avec } M = H^t = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i' q_i'. \text{ Par conséquent, pour trouver la}$$

rotation qui minimise l'erreur $f(R, s)$, on doit trouver la matrice orthogonale R qui maximise $\text{tr}(R^t M)$. Soit la décomposition de la matrice M en produit d'une matrice orthogonale U et une matrice symétrique S i.e. $M = US$ et soit $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ les valeurs propres associés aux vecteurs propres $\{v_i\}_{i=1}^m$ de la matrice S . Alors on a:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R^t M) &= \text{tr}(R^t US) \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} \text{tr}(R^t U v_i v_i^t) \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la transposition et le produit scalaire, on peut écrire chaque terme comme suit:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R^t U v_i v_i^t) &= \text{tr}(v_i^t R^t U v_i) \\ &= \text{tr}(\langle R v_i | U v_i \rangle) \\ &= \langle R v_i | U v_i \rangle \end{aligned}$$

Puisque $\{v_i\}_{i=1}^m$ sont des vecteurs unitaires et R et U sont des matrices orthogonales alors on a $\langle R v_i | U v_i \rangle \leq 1$. Donc $\text{tr}(R^t US) \leq \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} = \text{tr}(S)$. Ainsi le maximum du terme $\text{tr}(R^t US)$ est atteint si et seulement si $R^t U = I_m$ ce qui implique $\hat{R} = U$. La matrice de rotation optimale \hat{R} est alors celle qui apparait dans la décomposition de M en produit de matrice orthogonale et de matrice symétrique.

Translation optimale

La translation optimale est calculée tout en respectant la contrainte définie dans la méthode précédente et le vecteur de translation \hat{t} est donné par : $\hat{t} = \bar{x} - \hat{s}\hat{R}\bar{p}$.

3.3.3. Quaternion unitaire

Cette méthode à été développée aussi par Horn [18] et a été conçue pour minimiser la même fonction d'erreur définie dans la méthode «*Matrices orthogonales*» dans le cas de dimension 3 ($m = 3$).

$$\hat{T} = (\hat{R}, \hat{t}, \hat{s}) = \arg \min_{R,t,s} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|x_i - sRp_i - t\|^2 \right)$$

3.3.3.1. Représentation de la transformation

Dans cette approche une représentation plus élégante de la transformation a été utilisée en exploitant la relation entre les quaternions et les rotations dans IR^3 . On sait que les rotations en dimension 3 sont caractérisées par un angle θ et un axe dirigé par un vecteur unitaire $w = [w_x, w_y, w_z]^T$. Alors un quaternion unitaire $\overset{\circ}{q} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_x, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_y, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_z \right]$ est construit et utilisé pour représenter la rotation. La translation et le changement d'échelle sont représentés respectivement par un vecteur t de dimension 3 et par un scalaire s .

3.3.3.2. Éléments sur les quaternions

Tous les éléments nécessaires sur les quaternions pour calculer la transformation optimale sont décrits ci-dessous.

Quaternion

Un quaternion $\overset{\circ}{q}$ est généralement défini par un vecteur de dimension 4 $\overset{\circ}{q} = [q_0, q_x, q_y, q_z]^T$ où un nombre complexe avec 3 parties imaginaires: $\overset{\circ}{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$

Multiplication des quaternions

La multiplication des deux quaternions est définie en fonction du produit de leurs composants. Si $\overset{\circ}{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$ et $\overset{\circ}{r} = r_0 + ir_x + jr_y + kr_z$ sont deux quaternions alors

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{r}\overset{\circ}{q} &= r_0q_0 - r_xq_x - r_yq_y - r_zq_z \\ &+ i(r_0q_x + r_xq_0 + r_yq_z - r_zq_y) \\ &+ j(r_0q_y - r_xq_z + r_yq_0 + r_zq_x) \\ &+ k(r_0q_z + r_xq_y - r_yq_x + r_zq_0) \end{aligned}$$

En utilisant la table suivante pour la multiplication :

*	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>
<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>
<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1

Le produit de deux quaternions peut être aussi exprimé en fonction d'une matrice orthogonale d'ordre 4×4 comme suit :

$$\overset{\circ}{r}\overset{\circ}{q} = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & -r_z & r_y \\ r_y & r_z & r_0 & -r_x \\ r_z & -r_y & r_x & r_0 \end{bmatrix} \overset{\circ}{q} = IR\overset{\circ}{q}$$

$$\overset{\circ}{r}\overset{\circ}{q} = \begin{bmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & r_z & -r_y \\ r_y & -r_z & r_0 & r_x \\ r_z & -r_y & -r_x & r_0 \end{bmatrix} \overset{\circ}{q} = I\bar{R}\overset{\circ}{q}$$

Avec IR et $I\bar{R}$ sont les matrices associés à $\overset{\circ}{r}$. On peut noter que IR et $I\bar{R}$ sont différentes ce qui montre que la multiplication des quaternions n'est pas commutative.

Produit scalaire et conjugué

Le produit scalaire de deux quaternions $\overset{\circ}{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$ et $\overset{\circ}{p} = p_0 + ip_x + jp_y + kp_z$ est défini par : $\langle \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q} \rangle = q_0 p_0 + q_x p_x + q_y p_y + q_z p_z$.

La norme d'un quaternion $\overset{\circ}{q}$ est donné par $\|\overset{\circ}{q}\|^2 = \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle$. Si la norme est égale 1 alors le quaternion est unitaire. Le conjugué d'un quaternion $\overset{\circ}{q}$ est noté et défini par $\overset{\circ}{q}^* = q_0 - iq_x - jq_y - kq_z$.

Les matrices associées au conjugué d'un quaternion $\overset{\circ}{q}$ ne sont que les transposées des matrices associées au quaternion lui-même. Étant donné que ces matrices sont orthogonales, les produits avec leurs transposées est $QQ' = \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle I_4$. D'une manière correspondante, le produit de $\overset{\circ}{q}$ et de son conjugué $\overset{\circ}{q}^*$ est réel :

$$\overset{\circ}{q} \overset{\circ}{q}^* = q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle.$$

En utilisant l'orthogonalité de matrices associées, on peut montrer que le produit scalaire est

conservé: $\langle \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{r} \end{pmatrix} \rangle = \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle \langle \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{r} \rangle$. Un résultat immédiat de cette propriété : la norme d'un

produit est égale au produit des normes i.e. $\langle \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{p} \end{pmatrix} \rangle = \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle \langle \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{p} \rangle$. Par conséquent:

$\langle \begin{pmatrix} \overset{\circ}{p} \\ \overset{\circ}{q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{\circ}{r} \\ \overset{\circ}{q} \end{pmatrix} \rangle = \langle \overset{\circ}{p}, \begin{pmatrix} \overset{\circ}{r} \\ \overset{\circ}{q} \end{pmatrix} \rangle$; un résultat très important qui va être utilisé pour calculer la

transformation optimale.

Quaternions et rotation

un vecteur $r = (x, y, z)^t$ peut être représenté par un quaternion $\overset{\circ}{r}$ imaginaire pure de la manière suivante: $\overset{\circ}{r} = 0 + ix + jy + kz$. Les matrices associées IR et \overline{IR} au quaternion imaginaire pure $\overset{\circ}{r}$ sont antisymétriques: $IR^t = -IR$ et $\overline{IR}^t = -\overline{IR}$.

Soit le produit composé défini par $\overset{\circ}{r}' = \overset{\circ}{q} \overset{\circ}{r} \overset{\circ}{q}^*$ avec $\overset{\circ}{r}$ imaginaire pure alors le résultat de ce produit $\overset{\circ}{r}'$ est imaginaire pure. En effet $\overset{\circ}{q} \overset{\circ}{r} \overset{\circ}{q}^* = \left(\overset{\circ}{Q} \overset{\circ}{r} \right) \overset{\circ}{q}^* = \overline{\overset{\circ}{Q}}' \left(\overset{\circ}{Q} \overset{\circ}{r} \right) = \left(\overline{\overset{\circ}{Q}}' \overset{\circ}{Q} \right) \overset{\circ}{r}$ avec $\overset{\circ}{Q}$ et $\overline{\overset{\circ}{Q}}$ les matrices associés de $\overset{\circ}{q}$ et on a :

$$\overline{\overset{\circ}{Q}}' \overset{\circ}{Q} = \begin{bmatrix} \langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 0 & 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 0 & 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix}$$

Si $\overset{\circ}{q}$ es unitaire alors la sous-matrice R d'ordre 3×3 qui se trouve en bat à droite de $\overline{\overset{\circ}{Q}}' \overset{\circ}{Q}$ n'est autre que la matrice de rotation qui transforme $r = (x, y, z)'$ en $r' = (x', y', z')'$ i.e. $r' = Rr$.

3.3.3.3. Estimation de changement d'échelle, de la rotation et de la translation optimale

Soit l'expression symétrique de la fonction d'erreur réduite à minimiser

$$f(R, s) = \frac{1}{N_p} \left(\frac{1}{s} S_r - 2D + s S_l \right) \text{ avec } S_r = \sum_{i=1}^{N_p} \|q_i'\|^2, \quad D = \sum_{i=1}^{N_p} q_i' R q_i \text{ et } S_l = \sum_{i=1}^{N_p} \|q_i\|^2.$$

Changement d'échelle optimal

En utilisant l'expression réduite de la fonction d'erreur, on peut déduire le changement d'échelle optimale \hat{s} de la même manière que la solution précédente :

$$\hat{s} = \frac{\sqrt{S_r}}{\sqrt{S_l}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \|q_i'\|^2}{\sum_{i=1}^{N_p} \|q_i\|^2}$$

Rotation optimale

L'algorithme pour calculer la rotation optimale \hat{R} est énoncé ci dessous :

- Étape 1: Calculer les deux centres de masses \bar{x} et \bar{p} ainsi les nouvelles coordonnées q_i et q_i' pour i de 1 à N_p .

- Étape 2: Calculer la matrice M d'ordre $m \times m$ ($m = 2$ ou $m = 3$) donnée par la formule

$$\text{suivante: } H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i q_i^t = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}.$$

- Étape 3: Calculer la matrice N donnée par:

$$N = \begin{bmatrix} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & (S_{xx} - S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} & (-S_{xx} + S_{yy} - S_{zz}) & S_{yz} - S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} - S_{xz} & S_{yz} - S_{zy} & (-S_{xx} - S_{yy} + S_{zz}) \end{bmatrix}$$

- Calculer λ_{max} la plus grande valeur propre de la matrice N ainsi que le vecteur propre associé $\hat{q} = [q_0, q_x, q_y, q_z]^t$.
- Générer la matrice \hat{R} de la rotation optimale à partir du quaternion $\hat{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$ par la formule suivante:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_y q_x + q_0 q_z) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & (q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \end{bmatrix}$$

Preuve

Comme vu précédemment minimiser une fonction d'erreur de la forme $f(R, s) = \frac{1}{N_p} \left(\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{s} \|q_i'\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t R q_i + s \sum_{i=1}^{N_p} \|q_i\|^2 \right)$ revient à maximiser le terme

$H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i^t R q_i$. Ce dernier peut être écrit sous forme d'un produit scalaire :

$H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \langle q_i', R(q_i) \rangle$ avec $R(q_i)$ est l'image de vecteur q_i par la rotation R . Maintenant, H

peut être exprimé à l'aide des quaternions correspondants :

$$H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \langle \hat{q} \hat{q}_i \hat{q}_i^* \hat{q}' \rangle.$$

Le problème consiste maintenant à déterminer le quaternion \hat{q} unitaire qui maximise le terme H . En utilisant les propriétés du produit scalaire et les quaternions énoncés

précédemment H peut être écrite sous la forme: $H = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \langle \overset{\circ}{q} \overset{\circ}{q}_i, \overset{\circ}{q}'_i \overset{\circ}{q} \rangle$. Soient

$q'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)^Y$ et $q_i = (x_i, y_i, z_i)^Y$ alors on a : $\overset{\circ}{q} \overset{\circ}{q}_i = \overline{IR} \overset{\circ}{q}$ et $\overset{\circ}{q}'_i \overset{\circ}{q} = IR' \overset{\circ}{q}$ avec

$$\overline{IR} = \begin{bmatrix} 0 & -x_i & -y_i & -z_i \\ r_x & 0 & z_i & -y_i \\ y_i & -z_i & 0 & x_i \\ z_i & y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad IR' = \begin{bmatrix} 0 & -x_i & -y_i & -z_i \\ r_x & 0 & -z_i & y_i \\ y_i & z_i & 0 & -x_i \\ z_i & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent l'expression de H sera égale a :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \langle \overline{IR} \overset{\circ}{q}, IR' \overset{\circ}{q} \rangle \\ &= \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \overset{\circ}{q}'^t \overline{IR}^t IR' \overset{\circ}{q} \\ &= \overset{\circ}{q}'^t \left(\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{N_p} \overline{IR}^t IR' \right) \overset{\circ}{q} \\ &= \overset{\circ}{q}'^t N \overset{\circ}{q} \end{aligned}$$

Avec N la matrice symétrique définie par $N = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{N_p} \overline{IR}^t IR' = \sum_{i=1}^{N_p} N_i$. La matrice symétrique N est diagonalisable et possède quatre valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ associées aux quatre vecteurs propres $\overset{\circ}{e}_1, \dots, \overset{\circ}{e}_4$. Puisque $\overset{\circ}{e}_1, \dots, \overset{\circ}{e}_4$ forment une base orthonormée alors tout quaternion $\overset{\circ}{q}$ peut être exprimé en comme une combinaison linéaire de vecteurs propres $\overset{\circ}{e}_1, \dots, \overset{\circ}{e}_4$: $\overset{\circ}{q} = \alpha_1 \overset{\circ}{e}_1 + \alpha_2 \overset{\circ}{e}_2 + \alpha_3 \overset{\circ}{e}_3 + \alpha_4 \overset{\circ}{e}_4$. la norme du quaternion $\overset{\circ}{q}$ est: $\langle \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q} \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$. Le quaternion $\overset{\circ}{q}$ qu'on cherche est unitaire (i.e. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$).

Calculons tout d'abord le produit $\overset{\circ}{q}'^t N \overset{\circ}{q}$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{q}'^t N \overset{\circ}{q} &= \langle \overset{\circ}{q}, N \overset{\circ}{q} \rangle \\ &= \langle \overset{\circ}{q}, \alpha_1 \lambda_1 \overset{\circ}{e}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \overset{\circ}{e}_2 + \alpha_3 \lambda_3 \overset{\circ}{e}_3 + \alpha_4 \lambda_4 \overset{\circ}{e}_4 \rangle \\ &= \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_3^2 \lambda_3 + \alpha_4^2 \lambda_4 \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que λ_1 est la plus grande valeur propre de N alors on a :

$\dot{q}' N \dot{q} \leq \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_1 + \alpha_3^2 \lambda_1 + \alpha_4^2 \lambda_1 = \lambda_1$. Ce qui signifie que la forme quadratique $\alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_3^2 \lambda_3 + \alpha_4^2 \lambda_4$ ne peut pas être supérieure à λ_1 puisqu'on cherche un quaternion unitaire. Ce maximum est atteint lorsqu'on fixe $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ c'est à dire $\dot{q} = \dot{e}_1$.

Par conséquent, le quaternion unitaire \dot{q} qui maximise le terme H est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice N .

Translation optimale

Une fois que la rotation optimale \hat{R} et le changement optimal \hat{s} sont connus la translation optimale peut être calculée et le vecteur \hat{t} est donné par : $\hat{t} = \bar{x} - \hat{R}\bar{p}$.

3.3.4. Dual quaternion

Cette solution a été développée par Walker [22] et a été conçue pour minimiser une fonction d'erreur très déférente des fonctions vu précédemment. Cette fonction est exprimée à l'aide des quaternions et donnée par :

$$f(r, s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (n_i - \tilde{n}_i)^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i (p_i^1 - \tilde{p}_i)^2$$

Avec $p_i^1 = W(r)^t s + W(r)^t Q(r) p_i^0$ et $n_i = W(r)^t Q(r) n_i^0$. Ou :

- \tilde{n}_i et \tilde{p}_i sont des quaternions générés à partir des coordonnées $X = \{x_i\}_1^{N_x}$
- n_i^0 et p_i^0 sont des quaternions générés à partir des coordonnées $P = \{p_i\}_1^{N_p}$
- W et Q sont deux matrices d'ordre 4×4 définies à partir des quaternions r et s pour appliquer la transformation.

Cette nouvelle approche propose de minimiser une fonction d'erreur qui intègre deux informations à la fois sur les ensembles $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ et $P = \{p_i\}_1^{N_p}$; la première c'est la position calculé à partir des coordonnées, la deuxième c'est l'orientation des points calculée à l'aide des vecteurs normaux des deux formes X et P .

3.3.4.1. Représentation de la transformation

La transformation dans un système de coordonnées de l'espace 3-D est traditionnellement caractérisée par un vecteur de translation t , un axe de rotation dirigé par un vecteur unitaire $w = [w_x, w_y, w_z]$, et un angle de rotation θ . L'image est formée d'abord en traduisant l'original le long du vecteur t , puis en le faisant tourner par rapport à w par un angle θ .

En utilisant la représentation quaternion dual, la même transformation peut être construite d'abord par une translation le long de la direction de vecteur w par une distance égale à d , puis en le faisant tourner d'un angle de θ par rapport à un axe ayant comme vecteur directeur w aussi et passant à travers le point $p(p_x, p_y, p_z)$. Dans cette méthode, la rotation et la translation sont représentées par un quaternion double. Comme son nom l'indique, il est constitué de deux parties $\hat{q} = [r, s]$; r et s deux quaternions définis par :

$$r = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_x \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_y \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w_z \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix},$$

$$s = \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)w + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(p \times w) \\ -\frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)w_x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(p_y w_z - p_z w_x) \\ \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)w_y + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(p_z w_x - p_x w_z) \\ \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)w_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(p_x w_y - p_y w_x) \\ -\frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

et qui satisferont les deux contraintes suivantes: $r^t r = 1$ et $s^t r = 0$.

3.3.4.2. Quaternion unitaire et quaternion dual

Dans cette approche, un quaternion est traité et noté différemment de ce qu'on a vu précédemment. Il est considéré comme étant un vecteur de 4 éléments et possède deux composants: un scalaire et un vecteur 3-D. Donc un quaternion r est écrit sous la forme :

$r = [r_1, r_2, r_3, r_4]^t = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ r_4 \end{bmatrix}$. Un quaternion r est utilisé pour représenter une rotation R d'angle

θ et d'axe dirigé par un vecteur unitaire $w = [w_x, w_y, w_z]^t$, alors il est interprété comme suit:

$$r = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Réciproquement la matrice de rotation R correspondant au quaternion r est donné par:

$R = (r_4^2 - \mathbf{r}^t \mathbf{r})I + 2\mathbf{r}^t \mathbf{r} + 2r_4 K(\mathbf{r})$ où est une matrice antisymétrique définie par :

$$K(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un quaternion dual est une paire de quaternions $\hat{q} = [r, s]$, donc il est construit à partir de huit paramètres réels. Un dual quaternion \hat{q} est souvent représenté sous la forme $\hat{q} = r + \varepsilon s$ où r et s sont deux quaternions réels et sont appelées respectivement partie réelle et la partie dual et ε est une unité duale définie tel que $\varepsilon^2 = 0$.

3.3.4.3. Quaternion dual et transformation

Les quaternions double sont aussi utilisés pour représenter les transformations dans l'espace. Un quaternion dual $\hat{q} = [r, s]$ possède une interprétation similaire à celle de quaternion réel :

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\hat{w} \\ \cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) \end{bmatrix},$$

où \hat{w} est un vecteur dual qui représente l'axe de la rotation et de la translation dans l'espace 3-D et $\hat{\theta}$ est l'angle dual de rotation et de translation avec $\hat{w} = w + \varepsilon p \times w$ et $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$ où w est un vecteur unitaire qui spécifie la direction de l'axe de rotation et également la direction de translation qui passe par le point p , θ est l'angle de la rotation et d est la distance de translation le long de la direction spécifiée par w .

En utilisant les propriétés des quaternions duals et la formule de *Taylor-Young*, on peut déterminer les expressions des quaternions r et s qui représentent la transformation qui satisferont les contraintes $r^t r = 1$ et $s^t r = 0$:

$$r = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)w \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \text{ et } s = \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)w + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(p \times w) \\ -\frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Soient les deux matrices W et Q définies par:

$$Q(r) = \begin{bmatrix} r_4 I + K(r) & r \\ -r^t & r_4 \end{bmatrix} \text{ et } W(r) = \begin{bmatrix} r_4 I - K(r) & r \\ -r^t & r_4 \end{bmatrix}.$$

À l'aide de ces deux matrices on peut facilement calculer la transformation connaissant le dual quaternion $\hat{q} = [r, s]$:

- La matrice de rotation R est donnée par: $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0^t & 1 \end{bmatrix} = W(r)^t Q(r)$.
- La translation est déterminée en calculant le quaternion $t = w(r)^t s$, puis en extrayant le vecteur de translation t depuis $t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.3.4.4. Estimation de la transformation

À partir de la forme donnée $P = \{p_i\}_1^{N_p}$, on calcule les quaternions positions $p_i^0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \end{bmatrix}$ et les quaternions qui définissent l'orientation $n_i^0 = \begin{bmatrix} n_i \\ 0 \end{bmatrix}$ où n_i est le vecteur normale à la forme au point p_i . On définit les quaternions \tilde{n}_i et \tilde{p}_i de la même manière à partir de la forme modèle $X = \{x_i\}_1^{N_x}$. Soient R la rotation et t la translation à déterminer alors l'image p_i^1 de p_i est donnée par l'équation: $p_i^1 = t + R p_i$ est équivalente à l'équation en

fonction des quaternions: $p_i^1 = W(r)^t s + W(r)^t Q(r) p_i^0$. De la même manière on obtient la relation suivante pour les quaternions de l'orientation: $n_i = W(r)^t Q(r) n_i^0$.

La méthode utilisée pour calculer les quaternions n_i, n_i^0, p_i^0 et p_i^1 qui correspondent la position et l'orientation des deux formes nous mènera à déterminer r et s les composant du dual quaternion $\hat{q} = [r, s]$ qui minimise une fonction d'erreur de la forme:

$$f(r, s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (n_i - \tilde{n}_i)^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i (p_i^1 - \tilde{p}_i)^2 \text{ où } p_i^1 = W(r)^t s + W(r)^t Q(r) p_i^0 \text{ et } n_i = W(r)^t Q(r) n_i^0$$

En développant les termes $(n_i - \tilde{n}_i)^2$ et $(p_i^1 - \tilde{p}_i)^2$ et en utilisant les propriétés des matrices W et Q décrites dans la table [22], on abouti à :

- $(n_i - \tilde{n}_i)^2 = 2(1 - r^t Q(\tilde{n}_i)^t W(n_i^0) r)$
- $(p_i^1 - \tilde{p}_i)^2 = s^t s + 2s^t (W(p_i^0) - Q(\tilde{p}_i)) r - 2r^t Q(\tilde{p}_i)^t W(p_i^0) r + ((p_i^0)^t p_i^0 + \tilde{p}_i^t \tilde{p}_i)$.

On introduit maintenant les trois matrices C_1, C_2 et C_3 et la constante Cte :

- $C_1 = -2 \sum_{i=1}^k \alpha_i Q(\tilde{n}_i)^t W(n_i^0) - 2 \sum_{i=1}^l \beta_i Q(\tilde{p}_i)^t W(n_i^0)$
- $C_2 = \left(\sum_{i=1}^l \beta_i \right) I$
- $C_3 = 2 \sum_{i=1}^k \beta_i (W(p_i^0) - Q(\tilde{p}_i))$
- $Cte = 2 \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^l \beta_i ((p_i^0)^t p_i^0 + \tilde{p}_i^t \tilde{p}_i)$

Alors la fonction d'erreur $f(r, s)$ peut être écrite comme une fonction quadratique en et sous la forme $f(r, s) = r^t C_1 r + s^t C_2 s + s^t C_3 r + Cte$.

Calcul de la transformation

L'algorithme pour calculer la transformation optimale est énoncé ci dessous :

- Étape 1: Calculer les quaternions n_i, n_i^0, p_i^0 et p_i^1 à partir des ensembles $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ et $P = \{p_i\}_1^{N_p}$.
- Étape 2: Calculer les matrices C_1, C_2 et C_3 données par:

$$C_1 = -2 \sum_{i=1}^k \alpha_i Q(\tilde{n}_i) W(n_i^0) - 2 \sum_{i=1}^l \beta_i Q(\tilde{p}_i) W(n_i^0)$$

$$C_2 = \left(\sum_{i=1}^l \beta_i \right) I$$

$$C_3 = 2 \sum_{i=1}^k \beta_i (W(p_i^0) - Q(\tilde{p}_i))$$

- Étape 3: Calculer la matrice symétrique A : $A = \frac{1}{2} [C_3^t (C_2 + C_2^t)^{-1} C_3 - C_1 - C_1^t]$
- Calculer le vecteur propre r qui corresponde à la plus grande valeur propre positive de la matrice A
- Calculer s .
- Calculer \hat{R} la matrice de rotation optimale et \hat{t} le vecteur de translation optimale à partir du quaternion dual $\hat{q} = [r, s]$.

Preuve

Pour obtenir le dual quaternion optimal $\hat{q} = [r, s]$, on ajoute les deux contraintes $r^t r = 1$ et $s^t r = 0$. L'expression de la fonction d'erreur devient: $f(r, s) = r^t C_1 r + s^t C_2 s + s^t C_3 r + C t e + \lambda_1 (r^t r - 1) + \lambda_2 (s^t r)$ où λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange. Calculons les dérivés partiels rapport à r et s :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r, s)}{\partial r} = (C_1 + C_1^t) r + C_3^t s + 2\lambda_1 r + \lambda_2 s = 0 \\ \frac{\partial f(r, s)}{\partial s} = (C_2 + C_2^t) s + C_3 r + \lambda_2 r = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on commence par déterminer λ_2 en résolvant la deuxième équation. Multipliant la deuxième équation par r , on obtient $\lambda_2 = -r^t C_3 r$ et puisque C_3 est une matrice antisymétrique (sommes des matrices antisymétriques) alors λ_2 est nulle. En remplaçant par sa valeur on obtient s en fonction de r : $s = -(C_2 + C_2^t)^{-1} C_3 r$. Reprenons la première équation et remplaçons s par son expression en fonction de r alors on obtient l'équation suivante :

$$Ar = \lambda_1 r$$

avec $A = \frac{1}{2} (C_3^t (C_2 + C_2^t)^{-1} C_3 - C_1 - C_1^t)$.

Par conséquent, le quaternion r correspond au vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 de la matrice A . Or la matrice A est diagonalisable et possède 4 valeurs propres réelles puisqu'elle est symétrique. Il faut maintenant choisir la bonne valeur propre de A qui minimise $f(r, s)$. Reprenons les deux équations :

$$\begin{cases} (C_1 + C_1^t)r + C_3^t s + 2\lambda_1 r + \lambda_2 s = 0 \\ (C_2 + C_2^t)s + C_3 r + \lambda_2 r = 0 \end{cases}$$

Multiplions la première équation par r^t et la deuxième équation par s^t alors on obtient:

$$\begin{cases} r^t C_1 r = -\frac{1}{2} s^t C_3 r - \lambda_1 \\ s^t C_2 s = -\frac{1}{2} s^t C_3 r \end{cases}$$

Reprenons l'expression de la fonction d'erreur à minimiser sous forme quadratique et on substitue maintenant les deux premiers termes alors on a :

$$\begin{aligned} f(r, s) &= r^t C_1 r + s^t C_2 s + s^t C_3 r + Cte \\ &= Cte - \lambda_1 \end{aligned}$$

Donc pour minimiser $f(r, s)$, on doit choisir λ_1 comme étant la plus grande valeur propre de A . Il s'ensuit que la partie réelle r du dual quaternion $\hat{q} = [r, s]$ correspond au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice A . Maintenant la partie duale s peut être calculée à partir de l'équation $s = -(C_2 + C_2^t)^{-1} C_3 r$.

3.3.5. Discussion et comparaison

Plusieurs méthodes ont été développées afin d'estimer et calculer la transformation entre deux ensembles de points dans le plan ou dans l'espace. On a détaillé quatre méthodes les plus connues: *quaternion unitaire*, *SVD*, *Matrices orthogonales* et *quaternion dual*. Différentes représentations de la transformation géométrique ont été utilisées par chacune de ces méthodes (Matrices orthogonales, quaternion, dual quaternion). Le calcul mathématique de la solution se base sur la décomposition en valeurs singulières ou la recherche des vecteurs et valeurs propres de différentes matrices générées à des ensembles de points à aligner.

Une comparaison de ces méthodes a été proposée par Eggert [23] selon plusieurs critères :

- La précision et la robustesse en présence de différents niveaux de bruit
- la stabilité de la réponse sur des ensembles des données erronées
- le temps de calcul relatif a chacune des méthodes pour déférente taille des ensembles de données

Cette étude montre qu'aucune de ces méthodes n'a été supérieure dans tous les cas. Cependant une supériorité est remarquée avec la méthode *SVD* en termes de stabilité et précision de la solution tandis que la méthode Matrices orthogonales est la plus rapide en terme d'exécution dans le cas d'un petite taille des données et la méthode quaternion dual dans le cas de traitement des grandes tailles des données.

3.4. Iterative closet point

3.4.1. Introduction

Plusieurs algorithmes ont été élaborés pour résoudre le problème de recalage 2/3D qui peuvent être classés en 3 familles [17] :

- Une première famille qui essaye de découpler les deux sous problèmes et tente de résoudre un sous-problème sans résoudre l'autre. Cette famille d'algorithme se base sur les propriétés géométriques invariantes soit par la transformation soit par la correspondance tels que l'alignement PCA [24] et correspondance modale et spectrale [25][26].
- Une deuxième famille qui adopte l'idée des hypothèses et des tests tels que la transformée de Hough généralisé et la technique de RANSAC.
- Une troisième classe d'algorithmes très populaire qui est les algorithmes de type EM (espérance-maximisation) qui essayent de résoudre la totalité du problème en résolvant d'une manière alternative les deux sous problèmes à partir d'une estimation initiale de la solution. Par exemple, le célèbre algorithme ICP (Iterative Closest Point) [27] et [28] et l'algorithme de SoftAssign [29] et leurs variantes.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'algorithme de ICP (iterative closest point) vu que ce dernier est très connu pour son efficacité et sa robustesse pour le recalage (alignement) des formes 2/3D.

3.4.2. Description

L'algorithme ICP a été introduit la première fois par Besl [27] et indépendamment par Chen [28] comme une solution pour recalibrer plusieurs types de données géométriques comme des ensembles de points, maillage triangulaire, surfaces implicites ou des surfaces paramétriques. Connue pour sa bonne précision et sa rapidité, l'algorithme ICP a été largement utilisé avec succès et est devenu rapidement la méthode dominante pour aligner des données 3D.

L'algorithme ICP est une méthode dite "itérative" de recalage 3-D. Cet algorithme consiste à calculer la transformation recalant le mieux deux ensembles de données 3D de façon itérative. Par ailleurs, une estimation initiale de cette transformation est nécessaire pour son initialisation. Le principe de cet algorithme est d'itérer sur deux étapes le recalage : la mise en correspondance des données et l'estimation de la transformation de repères entre les formes à recalibrer. Au bout de chaque itération, l'algorithme construit une liste de points appariés en établissant une correspondance point à point au moyen d'une distance euclidienne. Puis, il calcule (estime) la transformation de repère entre les points appariés qui minimise une mesure moyenne quadratique d'erreur définie entre eux. Cette transformation est utilisée, pour l'itération suivante pour la mise à jour la liste des points appariés. Ces derniers serviront, à leur tour, pour estimer la nouvelle transformation. Ces étapes sont répétées jusqu'à convergence de l'algorithme. La convergence est atteinte lorsque l'erreur résiduelle de distance entre les points appariés est inférieure à un certain seuil ou en fixant un nombre d'itérations maximal.

3.4.3. Algorithme

L'algorithme ICP [27] peut être énoncé comme suit:

- Entrée : deux ensembles de points $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ «Donnée» et $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ «Modèle».
- Sortie : la transformation qui aligne la donnée $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ sur le modèle $X = \{x_i\}_1^{N_x}$.
- initialisation : $k = 0, P_0 = P, R_0 = I$ et $t_0 = (0,0,0)$.
- itération k:
 - 1- Calculer les points les plus proches: En utilisant la distance euclidienne: $d(p, x) = \|p - x\|^2$, Calculer l'ensemble des N_p points les plus proches de $P_k = \{p_{i,k}\}$, $Y_k = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_p}$ définit comme suit:

$$y_{i,k} = x | \min_{x \in X} d(p_{i,k}, x).$$

2- Calculer le recalage: Définir l'erreur quadratique moyenne du couple $\{p_{i,0}, y_{i,k}\}$ en fonction de R_k et t_k :

$$e_k = f(R_k, t_k) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|y_{i,k} - (R_k p_{i,0} + t_k)\|^2$$

et calculer la transformation optimale (R_k, t_k) qui minimise $f(R_k, t_k)$ en utilisant la méthode quaternion unitaire.

3- Appliquer le recalage: Appliquer la transformation optimale pour obtenir l'ensemble $P_{k+1} = \{p_{i,k+1}\}$ défini par : $p_{i,k+1} = R_k p_{i,0} + t_k ; k = k + 1$.

4- fin d'itération: terminer l'itération quand le changement d'erreur devient inférieur à un certain seuil où un nombre d'itération maximale est atteint i.e. $\|e_{k+1} - e_k\|^2 \leq \varepsilon$ où $k = k_{\max}$.

3.4.4. Convergence

Théorème: L'algorithme ICP converge toujours vers un minimum local de façon monotone par rapport à la fonction d'erreur quadratique moyenne.

Ceci peut être démontré en utilisant le fait que le recalage réduit généralement la distance entre les points appariés à chaque itération et l'opération de déterminer les points les plus proches réduit la distance de chaque point individuellement. Une démonstration plus élaborée se trouve ci-dessous:

Pour une itération donnée k , on a la distance moyenne au carré d_k entre P_k et Y_k défini

par : $d_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|p_{i,k} - y_{i,k}\|^2$. En cherchant la transformation optimale (\hat{R}_k, \hat{t}_k) qui minimise

l'erreur e_k on a: $e_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|(R_k p_{i,0} + t_k) - y_{i,k}\|^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|p_{i,k+1} - y_{i,k}\|^2$. Par définition d_k

et e_k , on peut toujours établir que $e_k \leq d_k$. Si $e_k \geq d_k$ cela voudrait dire que la transformation d'identité (matrice d'identité) appliquée sur l'ensemble de points donnerait une erreur quadratique moyenne inférieure à celle de la transformation (\hat{R}_k, \hat{t}_k) , ce qui est absurde. Pour l'itération suivante $k + 1$, un nouveau ensemble Y_{k+1} de points les plus proches de P_{k+1} est

obtenu. Il est clair que: $\|p_{i,k+1} - y_{i,k+1}\|^2 \leq \|p_{i,k+1} - y_{i,k}\|^2 \quad \forall k$ simplement parce que $y_{i,k+1}$ est le point le plus proche de $p_{i,k+1}$ par définition et par conséquent, $d_{k+1} \leq e_k$. Enfin, on peut établir que $e_k \geq 0 \quad \forall k$ parce que l'erreur ne peut pas être négative. Il en résulte l'inégalité suivante:

$$0 \leq e_{k+1} \leq d_{k+1} \leq e_k \leq d_k \quad \forall k$$

Ceci montre que l'erreur quadratique moyenne est une suite décroissante et bornée. D'où, l'algorithme ICP converge d'une façon monotone vers un minimum.

3.4.5. Discussion

L'algorithme ICP, dans sa version originale, présente deux inconvénients principaux :

- une faible robustesse en présence des données aberrantes. En effet, la présence des données aberrantes favorise l'apparition des faux appariements dans l'étape de la mise en correspondance des points. Ceci entraîne le ralentissement de la convergence de l'algorithme ICP et dans le pire cas sa divergence. Donc, l'élimination des données aberrantes et des faux appariements ainsi qu'une mise en correspondance robuste est indispensable pour accélérer et garantir la convergence de l'algorithme ICP.
- Le coût élevé de calcul lié à la recherche des points les plus proches. En effet, l'opération de la recherche de point le plus proche est de complexité $O(N_x N_p)$, c'est l'étape la plus coûteuse en terme temps d'exécution dans l'algorithme ICP. Par conséquent, il est nécessaire d'accélérer cette opération surtout lors du traitement de grandes tailles de données.

Dans ce qui suit, on va décrire et classer plusieurs variantes d'ICP qui ont été proposées afin de résoudre ces défauts.

3.5. Variantes d'ICP

3.5.1. Introduction

Depuis l'introduction de l'algorithme ICP par Besl et Chen, de nombreuses variantes ont été proposées dans le but d'améliorer sa robustesse et accélérer sa vitesse de convergence. On peut classer ces variantes selon la modification apportée à chacune des étapes de l'algorithme [30]:

- Sélection des points à appairer dans l'un ou les deux formes à aligner.

- La technique de la mise en correspondance des points utilisée.
- La pondération appliquée aux points appariés.
- Rejet des mauvais ou faux appariements
- La définition de la fonction d'erreur à minimiser et la méthode utilisée pour estimer la transformation (déjà détaillée dans la première partie de ce chapitre).
- Autres.

3.5.2. Sélection des points

Une solution immédiate est facile pour réduire le temps de calcul de la mise en correspondance est de réduire la taille de l'ensemble des points de la donnée $P = \{p_i\}_1^{N_p}$. En Effet, on peut utiliser un sous-ensemble de $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ et parfois du modèle $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ aussi au lieu d'utiliser la totalité des points disponible dans le cas de recalage des grands ensembles de points. Les points sélectionnés de la donnée $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ sont souvent appelés des points de contrôle tandis que les points sélectionnés à partir du modèle sont appelés les points compatibles.

Plusieurs stratégies ont été proposées pour sélectionner les points de contrôle et sont présentés ci-dessous:

- utilisation de la totalité des points disponible par Besl [27].
- effectuer un échantillonnage aléatoire des points. Masuda propose un nouvel échantillonnage aléatoire à chaque itération [31].
- effectuer un échantillonnage uniforme des points. Turk a appliqué ce type d'échantillonnages sur des images de profondeur [32].
- Sélection des points en tenant compte des informations supplémentaires telles que la couleur, la distribution des normales, le gradient; sélection des points dont l'intensité du gradient est élevée [33]. Sélection des points ayant une distribution des normales aussi grande que possible [30].
- Sélection des points de contrôle à partir d'une zone lisse de l'ensemble de points de la forme donnée [28] afin de faciliter la mise en correspondance avec les points du modèle.

Les points compatibles sont des points construits à partir d'un sous-ensemble des points de $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ qui ont une distance caractéristique en dessous d'un certain seuil. Puisque la recherche des points compatibles s'effectue une seule fois alors les caractéristiques examinées doivent être indépendantes du système de coordonnées. Godin utilise comme

caractéristiques invariantes la couleur ou la courbure [34] [35]. La recherche du point le plus proche (en utilisant la distance géométrique) est effectué parmi ces candidats "compatibles".

3.5.3. Techniques d'appariement

L'algorithme ICP repose sur une bonne approximation des appariements utilisés pour estimer la transformation. En effet la présence des faux appariements peut causer la divergence de l'algorithme, ou dans le meilleur cas, ralentit sa convergence. Mieux sont les appariements, plus l'algorithme ICP converge rapidement. Donc une méthode de mise en correspondance robuste est indispensable. La distance euclidienne est parfois insuffisante pour établir la bonne correspondance et obtenir une convergence réussie de l'algorithme ICP. Des caractéristiques supplémentaires peuvent être parfois disponibles telles que la courbure locale, la couleur, la normale à la surface et peuvent être combinées avec la distance euclidienne pour appairer les points.

Plusieurs techniques d'appariement sont préposées ci-dessous:

- Besl [27] cherche les points les plus proches en utilisant la distance euclidienne.
- Chen [28] calcule q_i le point le plus proche de p_i en créant une intersection entre le rayon provenant de p_i dans la direction de la normale de la surface donnée et la surface du modèle.
- Utilisation du principe des points compatibles [34]. Pour calculer les points correspondants, on construit tout d'abord un sous ensemble de points qui ont une distance couleur au dessous d'un certain seuil. Puis on calcule les appariements finaux en utilisant la distance euclidienne.
- Utilisation du concept de point compatible le plus proche présenté ci-dessus, mais produire un sous-ensemble de points compatibles sur la base de courbures locales [36] ou sur les normales [37].
- Intégrer l'information du couleur dans le calcul de la distance pour déterminer les points les plus proches; Johnson [38] propose de définir la distance entre $p = (x_p, y_p, z_p, r_p, g_p, b_p)$ et $x = (x_x, y_x, z_x, r_x, g_x, b_x)$ repérés par leurs coordonnées et leurs composantes couleur par :

$$d(p, x) = (x_p - x_x)^2 + (y_p - y_x)^2 + (z_p - z_x)^2 + \Gamma_1 (r_p - r_x)^2 + \Gamma_2 (g_p - g_x)^2 + \Gamma_3 (b_p - b_x)^2$$

ou Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont des poids pour pondérer l'importance des couleurs contre la géométrie.

- L'ajout de l'information concernant la normale à la surface dans le calcul des points les plus proches. les normales peuvent s'intégrer au calcul de la distance de la même manière que la couleur présentée ci-dessus en échangeant les composante couleurs $c = (r, g, b)$ et pour les vecteurs normaux $n = (u, v, w)$ [39].
- L'intégration de plusieurs informations à la fois concernant la couleur, la normale, la géométrie dans la définition de la distance entre $\hat{p} = (p, n_p, c_p)$ et $\hat{x} = (x, n_x, c_x)$ repérés par leurs positions, composantes couleurs et les normales à la surface en ces points par: $d(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{1}{\alpha_g} \|p - x\|^2 + \frac{1}{\alpha_c} \|c_p - c_x\|^2 + \frac{1}{\alpha_n} \|n_p - n_x\|^2$ où α_g , α_c et α_n sont des poids pour pondérer les différents caractéristiques utilisées [40].

3.5.4. Pondération des points

Dans plusieurs cas, un certain nombre de points de la forme donnée n'a pas de correspondant dans la forme modèle. Ceci arrive quand la surface de la forme donnée n'est pas totalement incluse dans la surface de la forme modèle. On a mentionné précédemment que l'algorithme ICP est très sensible aux données bruitées et aberrantes. Une solution à ce problème consiste à affecter des poids aux appariements construits afin de renforcer les bonnes paires et pénaliser les fausses paires. Par conséquent l'erreur quadratique moyenne à minimiser devient:

$$e_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} w_i \left\| (\hat{R}_k p_{i,0} + t_k) - y_{i,k} \right\|^2$$

Ainsi une nouvelle étape est ajoutée à l'algorithme entre l'étape 1 et 2, mais cela n'affectera pas la manière dont la résolution est effectuée. Plusieurs stratégies de pondération existent qui peuvent être classées en deux types : une pondération binaire dans laquelle le poids affecté vaut 1 lorsque l'appariement est considéré comme correcte sinon le poids est évalué à 0 si l'appariement est faux. Par exemple; utilisation d'un seuillage selon les distances pour évaluer si l'appariement est correct ou faux; Masuda[31] et Zhang[41] utilisent des seuils respectifs $\tau = 2,5\sigma$ et $\tau = \mu + a\sigma$ pour évaluer les poids où μ est la moyenne des distances euclidiennes mesurées, σ est l'écart-type et a un entier qui dépend de μ .

Le deuxième type de pondération consiste à ne pas considérer les appariements totalement corrects ou faux, mais à considérer, également, l'appariement dont la qualité de l'appariement se situe entre les deux catégories. En règle générale, l'idée derrière est

l'assignation des poids différents selon la qualité d'appariement. Les solutions qui sont proposées à ce problème sont:

- Affecter des poids constants par Besl [27].
- utiliser la distance euclidienne pour le calcul des poids. Godin [34] a défini les poids comme suit: $w_i = 1 - \frac{d(p_i, y_i)}{d_{\max}}$ où d_{\max} est la distance plus grande des appariements.

L'idée revient à attribuer un poids inférieur aux paires qui sont plus distantes.

- Pondération basée sur la compatibilité des normales: $w_i = \langle n_p, n_x \rangle$ ou n_p et n_x sont les normales respectives aux deux surfaces en p et x . Une pondération sur la compatibilité de couleurs a été également proposée par Godin [34].
- Utiliser "l'incertitude" des points mesurés obtenus à partir d'un scanner. Une évaluation classique de l'incertitude de la mesure effectuée avec un scanner (range scanner) consiste à utiliser le cosinus de l'angle ϕ entre la direction de la vue v et n la normale de surface [30].

3.5.5. Rejet des mauvais paires

Cette solution est très similaire à la pondération binaire qui consiste à rejeter entièrement un certain nombre de paires dans le but d'éliminer les valeurs aberrantes et éviter leur effet négatif sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Plusieurs stratégies adoptées pour le rejet des mauvais appariements et les valeurs aberrantes sont citées ci-dessous:

- Rejet des paires ayant une distance qui les sépare supérieure à un seuil donné par l'utilisateur [30].
- Rejet des paires ayant une distance qui les sépare supérieure à un seuil adaptatif calculé en fonction des moyennes et écarts-types des distances [31] [41].
- Rejet des $l\%$ pires paires basée sur une mesure de distance, généralement une distance euclidienne. Pulli [37] propose de rejeter 10% des paires.
- Rejet des paires qui ne sont pas compatibles avec les paires voisines. Dorai [42] considère qu'une paire est incompatible si la distance entre les deux points qui la forme est supérieure à un certain seuil calculé en fonction des distances qui séparent les paires voisines.
- Rejet de paires contenant des points qui se trouvent sur les bordures [32].

3.5.6. Autres

D'autres techniques sont proposées pour réduire la complexité de l'algorithme ICP:

- La recherche des points le plus proches peut être accélérée en utilisant des structure de données adaptées; arbre binaire de recherche et arbre-kd [27] [41]. Ainsi, la recherche des points les plus proches est effectuée par la stratégie «*diviser pour régner*» réduit la complexité de $O(N_x N_p)$ à $O(N_x \log(N_p))$.
- Accélérer la recherche des points les plus proches en projetant les points en un ou plusieurs plans. Benjemma [43] et [44] propose d'effectuer une projection sur un ou plusieurs plan. Cela réduit le problème de recherche à une recherche dans un espace de dimension 2 et permet de passer d'une complexité polynomiale à une complexité linéaire.
- Réduire le nombre d'itérations de l'algorithme ICP en extrapolant les paramètres de recalage; Besl propose une version de l'algorithme ICP accéléré [27] qui permet un gain en nombre d'itérations égale à 3. Simon [45] propose une deuxième version accélérée d'ICP découplée qui donne un gain de facteur égale à 4.

3.6. Scaling iterative closest point

3.6.1. Introduction

La version originale de l'algorithme ICP introduite par Besl ne tient pas compte du facteur d'échelle dans la définition de l'erreur quadratique moyenne à minimiser. Cependant dans la pratique, le changement d'échelle existe dans l'opération de recalage. En effet les données acquises par différents Scanneurs ou capteurs diffèrent considérablement par les points de vue et la résolution de numération, d'où la nécessité que les algorithmes de recalage doivent être en mesure d'estimer les paramètres d'échelle. Ce problème peut être résolu par ICPS isotrope «*iterative closest point with Isotropic scaling*» point pour recalage les ensembles de points isotropes [46] et «*iterative closest with Non Isotropic scaling*» pour les ensembles de points non isotropes [19]. Dans ce qui suit, on va détailler chacune des versions de l'algorithme Scaling-ICP pour traiter les différents types de changement d'échelle.

3.6.2. ICPS isotrope

3.6.2.1. Introduction

ICPS isotrope à été développé par Shihui [46]. C'est une modification de l'algorithme standard ICP en introduisant le facteur d'échelle s avec une borne supérieure et inférieure. Ainsi la fonction d'erreur e_k définit entre $P = \{p_i\}_{i=1}^{N_p}$ et $Y_k = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_p}$ l'ensemble des points les plus proches associé calculé à partir de $X = \{x_i\}_{i=1}^{N_x}$ à l'itération k devient de la forme:

$$e_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|(s_k R_k p_{i,0} + t_k) - y_{i,k}\|^2$$

où s_k est le facteur d'échelle tel que $s_k \in [a, b]$ un intervalle de IR^+ , R_k est la matrice standard de rotation et t_k vecteur de translation.

3.6.2.2. Rotation et changement d'échelle

En définissant les deux centres de masse $\bar{p} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} p_{i,0}$ et $\bar{y}_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} y_{i,k}$ les nouvelles coordonnées $q'_{i,k} = y_{i,k} - \bar{y}_k$ et $q_i = p_{i,0} - \bar{p}$, L'expression de e_k peut être réduite à:

$$e_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} [s_k^2 \langle q_i, q_i \rangle - 2s_k \langle R_k q_i, q'_{i,k} \rangle + \langle q'_{i,k}, q'_{i,k} \rangle]$$

Alors, pour déterminer le facteur d'échelle optimale s_k on résout l'équation $\frac{\partial e_k(R_k, s_k)}{\partial s_k} = 0$;

d'où $s_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \langle R_k q_i, q'_{i,k} \rangle}{\sum_{i=1}^{N_p} \langle q_i, q_i \rangle}$, En ajoutant la contrainte que $s_k \in [a, b]$ alors \hat{s}_k est défini par:

$$\hat{s}_k = \begin{cases} a & s_k \leq a \\ b & s_k \geq b \\ \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \langle R_k q_i, q'_{i,k} \rangle}{\sum_{i=1}^{N_p} \langle q_i, q_i \rangle} & a \leq s_k \leq b \end{cases}$$

Pour le calcul de la rotation optimale, Shihui propose d'utiliser la méthode «SVD» pour déterminer \hat{R}_k (voir section 3.3.1).

$$\hat{R}_k = \begin{cases} VU^t & \text{si } \det(VU^t) = 1 \\ V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} U^t & \text{si } \det(VU^t) = -1 \end{cases}$$

où V et U sont les matrices qui apparaissent dans la décomposition de la matrice H en valeurs singulières défini par $H = U\Sigma V = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} q_i q_{i,k}^t$.

3.6.2.3. Initialisation :

Shihui propose d'utiliser la méthode des matrices de covariances pour estimer la transformation initiale dans le but d'éviter de converger vers un minimum local contrairement au Besl qui considère l'identité comme transformation initiale. Tout d'abord, on a besoin de calculer les deux matrices M_X et M_P de covariances de la forme modèle et de la forme donnée définis par: $M_P = \sum_{i=1}^{N_p} (p_i - \bar{p})(p_i - \bar{p})$ et $M_X = \sum_{i=1}^{N_x} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})$.

Soit $\{q_i\}_{i=1}^3$ et $\{p_i\}_{i=1}^3$ les vecteurs propres des matrices respectifs M_X et M_P ainsi que les valeurs propres associées $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ et $\{\mu_i\}_{i=1}^3$. Alors la rotation initiale R_0 est estimée par:

$R_0 = [q_1, q_2, q_3][p_1, p_1 p_1]^{-1}$, la translation initiale t_0 par: $t_0 = \bar{x} - \bar{p}$, le facteur d'échelle initial s_0 par: $s_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sqrt{\mu_i / \lambda_i}$ et les bornes a et b par: $a = \min_i \{\sqrt{\mu_i / \lambda_i}\}$ et $b = \max_i \{\sqrt{\mu_i / \lambda_i}\}$.

3.6.2.4. Algorithme

L'algorithme ICPS isotrope peut être maintenant énoncé:

Étape 1: initialisation R_0, t_0, s_0, a et b comme décrit dans la section 6.1.1.3, $k = 1$ et $P_0 = P$.

Étape 2: Itération k

- Calculer l'ensemble des N_p points les plus proches de $P_k = \{p_{i,k}\}$, $Y_k = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_p}$ définit comme suit: $y_{i,k} = x \mid \min_{x \in X} d(p_{i,k}, x)$.
- Calculer la transformation $(\hat{R}_k, \hat{t}_k, s_k)$ qui minimise l'erreur suivante :

$$e_k = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|(s_k R_k p_{i,0} + t_k) - y_{i,k}\|^2$$

- Appliquer la transformation optimale pour obtenir l'ensemble $P_{k+1} = \{p_{i,k+1}\}$ défini par : $p_{i,k+1} = s_k R_k p_{i,0} + t_k$;

Étape 3: fin de l'itération : calculer θ défini par $\theta = 1 - \frac{e_k(R_k, t_k, s_k)}{e_{k-1}(R_{k-1}, t_{k-1}, s_{k-1})}$

- si $\theta \leq \varepsilon$ alors on a $(\hat{R}, \hat{t}, \hat{s}) = (R_k, t_k, s_k)$
- sinon retourner à l'étape 2 et incrémenter k .

3.6.3. ICPS non-isotrope

3.6.3.1. Introduction

ICPS non isotrope a été proposé par Shaoyi [19], C'est une modification de l'algorithme de base ICP en introduisant la matrice diagonale d'échelle S dans l'erreur quadratique moyenne à minimiser avec la contrainte que la matrice d'échelle est bornée. Ainsi la fonction d'erreur e_k défini entre $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ et $Y_k = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_p}$ l'ensemble des points les plus proches associé calculé à partir de $X = \{x_i\}_1^{N_x}$ à l'itération k devient de la forme:

$$e_k(R_k, S_k, t_k) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \|(S_k R_k p_{i,0} + t_k) - y_{i,k}\|^2$$

ou $S_k = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_m)$ la matrice de changement d'échelle tel que $s_j \in [a_j, b_j]$ un intervalle de \mathbb{R}^+ , R_k est la matrice standard de rotation est le t_k vecteur de translation.

3.6.3.2. Rotation et changement d'échelle

L'estimation de la Rotation et le changement d'échelle qui minimisent l'erreur quadratique défini par ICPS non isotrope s'effectue en résolvant le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_k}{\partial S} = 0 \\ \frac{\partial e_k}{\partial R} = 0 \end{cases}$$

La solution est exprimée l'une en fonction de l'autre et donnée par:

- $s_j = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} q_i^t RE_j q_i}{\sum_{i=1}^{N_p} q_i^t E_j q_i}$ où E_j est une matrice diagonale dont tous les éléments sont nuls

sauf le j-ème élément est égale à 1. Si les bornes a_j et b_j sont spécifiées alors s_j est

$$\text{donné par } s_j = \arg \min_{s \in [a_j, b_j]} \left| s - \frac{\sum_{i=1}^{N_p} q_i^t RE_j q_i}{\sum_{i=1}^{N_p} q_i^t E_j q_i} \right| \text{ pour } j \in \{1, \dots, 3\}.$$

$$\bullet R = \begin{cases} VU^t & \text{si } \det(VU^t) = 1 \\ V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} U^t & \text{si } \det(VU^t) = -1 \end{cases}$$

où V et U sont les matrices qui apparaissent dans la décomposition de la matrice H en valeurs singulières défini par $H = U\Sigma V = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} S q_i q_i^t$.

3.6.3.3. Initialisation

L'initialisation des différents paramètres initiaux est effectué d'une manière identique à celle utilisée pour ICPS isotrope. La rotation R_0 et la translation t_0 est calculée de la même manière. Pour la matrice de changement d'échelle initiale S_0 , les éléments diagonaux sont tous égaux au changement d'échelle isotrope initial.

3.6.3.4. Algorithme

Entrée: deux ensembles de points $P = \{p_i\}_1^{N_p}$ et $X = \{x_i\}_1^{N_x}$.

Initialisation : initialisation de R_0, t_0 et S_0 comme décrit dans la section 6.1.2.3. $k = 1$

$P_0 = P$, la précision ε et les différentes bornes a_j et b_j .

Répéter:

- Calculer l'ensemble des N_p points les plus proches de $P_k = \{p_{i,k}\}$, $Y_k = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_p}$ défini comme suit: $y_{i,k} = x \mid \min_{x \in X} d(p_{i,k}, x)$.
- Initialisation: $S_k = S_{k,0}, R_k = R_{k,0}, n = 1$.

Répéter:

- Étant donné $S_{k,n-1}$, calculer $R_{k,n}$ qui minimise $e_k(R_{k,n}, S_{k,n-1}, t_k)$

- Étant donné $R_{k,n}$, calculer $S_{k,n}$ qui minimise $e_k(R_{k,n}, S_{k,n}, t_k)$
- $n = n + 1$

Jusqu'à $\|S_{k,n} - S_{k,n-1}\| \leq \varepsilon$ ou n atteint un nombre maximal d'itérations.

- Calculer la translation $t_k = \bar{y}_k - R_k S_k \bar{p}$ ou $R_k = R_{k,n}$ et $S_k = S_{k,n}$
- Appliquer la transformation optimale pour obtenir l'ensemble $P_{k+1} = \{p_{i,k+1}\}$ défini par : $p_{i,k+1} = S_k R_k p_{i,0} + t_k$;
- $k = k + 1$.

Jusqu'à $\|e_k - e_{k+1}\| \leq \varepsilon$ où k atteint un nombre maximal d'itérations.

Sortie: matrice de changement d'échelle $\hat{S} = S_k$, matrice de rotation $\hat{R} = R_k$ et le vecteur de translation $\hat{t} = t_k$.

3.6.4. Discussion

L'algorithme ICPS isotrope (respectivement non isotrope) converge d'une manière monotone vers un minimum local par rapport à l'erreur quadratique moyenne. Ceci peut être démontré d'une façon similaire à la convergence de l'algorithme standard ICP. Pour garantir la convergence vers un minimum global, Shaoyi (respectivement Shihui) propose une estimation des paramètres initiaux en fonction de valeurs et vecteurs propres associés aux matrices de covariances des formes à aligner.

Shaoyi (respectivement Shihui) propose d'utiliser la méthode «SVD» pour estimer la rotation qui est légèrement supérieure à la méthode «quaternion unitaire» employé par Besl dans la version standard d'ICP. Par ailleurs, il considère les paramètres d'échelle dans l'opération de recalage qui existe souvent et grâce aux bornes spécifiées pour les paramètres d'échelle, le phénomène qui consiste à la convergence du premier ensemble de points vers un sous-ensemble du deuxième peut être évité.

L'algorithme ICPS isotrope (respectivement non isotrope) est très similaire à l'algorithme standard ICP, qui est composé de deux étapes de base: établir la correspondance puis calculer la transformation. Bien que l'algorithme ICPS non isotrope comporte une boucle de plus pour raffiner l'estimation des paramètres d'échelle, il obtient un temps de calcul similaire à l'algorithme ICP et ICPS isotrope vu que le temps de calcul de la transformation est beaucoup moins que celui de la correspondance. Grâce à la similarité de l'algorithme ICPS

isotrope (respectivement non isotrope) avec l'algorithme standard d'ICP, la plupart des améliorations apportées sur ce dernier peuvent être aussi intégrées à ICPS afin d'améliorer sa robustesse et accélérer sa convergence.

3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on définit rigoureusement le problème de recalage 2/3D. Ensuite, on est intéressé au célèbre algorithme ICP qui est connu comme la solution la plus robuste au problème de recalage. Puis on a détaillé chacune des étapes de l'algorithme ICP et discuté les nombreuses modifications apporté à ce dernier à travers ses variantes. Enfin, deux nouveaux algorithmes: ICPS isotrope et non isotrope ont été décrits qui tiennent compte des paramètres de changement d'échelle dans le recalage.

Chapitre 4

Implémentation et test

4.1. Introduction

Une étape indispensable dans la construction de l'atlas cornéen 3D proposé est la normalisation. Dans cette étape, on a besoin d'aligner toute une population des cornées avec une cornée de référence par l'algorithme de recalage ICP ou une de ses variantes. Alors, on se propose dans ce chapitre d'effectuer différents tests élémentaires afin d'élaborer la variante d'ICP qui nous permet le meilleur alignement correspondant dans le cas de cornées humaines. Tout d'abord, on va générer des scènes de test de petite taille à partir de modèles mathématiques qui simulent la forme de la surface cornéenne. Puis, on effectuera une série de tests en utilisant ICP, ICPS isotrope et non isotrope et on étudiera l'impact de chacune de leurs variantes sur la qualité de l'alignement obtenu. Ensuite, on passera à traiter quelques échantillons de données réelles. On effectuera des tests d'alignement pour des surfaces postérieures et antérieures de cornées. Enfin, on conclura ce chapitre par une discussion des différents résultats obtenus et l'élaboration de la variante de l'algorithme ICP qui sera adopté dans la normalisation de la population de cornées humaines.

4.2. Scènes de test

Pour la mise au point de la variante de l'algorithme de recalage ICP qui sera adopté pour la normalisation de la population de cornée, des tests élémentaires ont été effectués sur deux types de données: des données synthétiques puis sur des données réelles.

4.2.1. Données synthétiques

4.2.1.1. Asphéricité de la cornée

La cornée humaine possède deux surfaces convexes (antérieure et postérieure) naturellement asphériques. En dehors de la région située immédiatement à proximité de son sommet, elles ne correspondent simplement pas à une surface sphérique. La courbure de la cornée diminue légèrement du sommet vers ses bords.

La cornée apparaît souvent légèrement torique. En effet, la région située à proximité de son sommet ne ressemble plus à la forme d'une sphère, mais celle d'un tore. La courbure du sommet cornéen (courbure apicale) varie selon le profil considéré entre deux valeurs extrêmes. Dans cette configuration, chaque méridien de la cornée considéré de façon isolée demeure asphérique, sa courbure variant du centre vers les bords [6].

Les surfaces purement sphériques ou asphériques (non toriques) présentent une symétrie de révolution (les propriétés géométriques et optiques sont invariantes par la rotation autour de l'axe central) tandis que les surfaces toriques ne présentent pas de symétrie de révolution.

4.2.1.2. Représentation tridimensionnelle de la cornée

Plusieurs modèles mathématiques sont proposés pour fournir une description proche de la réalité asphérique de la cornée humaine [47]. Parmi ces modèles, on peut trouver les sections coniques incluant l'ellipse, l'hyperbole et la parabole. Au moyen de deux paramètres : rayon de courbure apical et la valeur-p correspondante (paramètre qui permet de quantifier l'asphéricité), ces modèles permettent une description proche de la forme cornéenne. Dans ce qui suit, on va s'intéresser à la représentation tridimensionnelle de la cornée.

Surface ellipsoïdale générale

Tout comme une ellipse peut être considérée comme un cercle allongé ou comprimé, un ellipsoïde est essentiellement une sphère déformée de la même manière. Si la sphère est uniformément allongée ou comprimée dans une seule direction alors elle prend la forme d'un ellipsoïde de révolution. Si deux ou plusieurs déformations se produisent dans des directions différentes alors la forme résultante est celle d'une ellipsoïde général.

L'ellipsoïde général est toujours symétrique par rapport aux trois plans perpendiculaires qui passent par son centre et il peut être défini d'une manière unique par ses 3 semi-axes (a, b et c). Pour tout ellipsoïde général, il y a 6 points d'intersection avec les trois axes (X, Y et Z). Ces points d'intersection représentent une similarité avec le sommet de la cornée. Par conséquent, la surface de l'ellipsoïde général peut être adoptée comme un modèle de la cornée en plaçant l'origine à l'un de ces points.

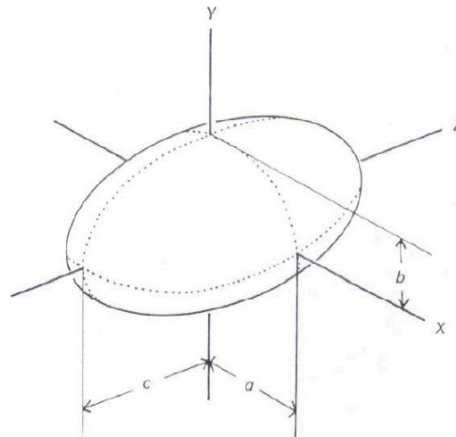


Figure 4.1 Ellipsoïde général défini à partir de ses 3 semi-axes a, b et c

Malgré que l'ellipsoïde général fournisse une surface assez proche de celle de la cornée, sa formulation est malheureusement trop limitée pour répondre aux exigences des paramètres d'un modèle général de la cornée. C'est-à-dire la capacité à spécifier les quatre paramètres (les deux rayons apicaux et les deux p-valeurs correspondantes). L'ellipsoïde général généralement spécifiée par trois paramètres ne répond pas à ces exigences. Bien qu'il possède deux rayons apicaux et les deux p-valeurs correspondantes pour ses méridiens principaux, seulement trois d'entre elles peuvent être indépendamment spécifiées, la quatrième est automatiquement déterminée par les trois autres valeurs.

Surface d'un ellipsoïde torique

De la même façon qu'un ellipsoïde peut être générée à partir de la déformation d'une sphère, une surface d'un ellipsoïde torique est générée en compressant ou allongeant d'une manière uniforme une surface torique le long de ses méridiens principaux. Puisque les méridiens principaux de la torique d'origine peuvent être spécifiée indépendamment et les deux peuvent être compressées ou étendues par des facteurs indépendants, la surface d'un ellipsoïde torique remplit l'obligation d'avoir spécifié indépendamment les méridiens elliptiques principaux.

À partir des équations de Churms [48] pour les surfaces toriques exprimées en coordonnées polaires, Burck [49] a développé 3 types de forme ellipsoïde torique qui

répondent aux exigences de la modélisation de la cornée par expansion uniforme ou en comprimant une surface torique le long de ses méridiens principaux.

Un premier ellipsoïde torique à axe vertical a été défini par l'équation :

$$z_v = \frac{r_h}{p_h} - \left(\frac{r_h}{p_h} - \frac{r_v}{p_v} + \left(\frac{r_v^2}{p_v^2} - \frac{y^2}{p_v} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{p_h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où r_v est le rayon apical du méridien vertical et p_v est la p-valeur correspondante. De la même manière, un ellipsoïde torique à axe horizontal a été défini par l'équation :

$$z_h = \frac{r_v}{p_v} - \left(\frac{r_v}{p_v} - \frac{r_h}{p_h} + \left(\frac{r_h^2}{p_h^2} - \frac{x^2}{p_h} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{p_v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où r_h est le rayon apical du méridien vertical et p_h est la p-valeur correspondante. Une troisième forme d'un ellipsoïde torique, ellipsoïde torique moyen, est la surface dont la profondeur en tout point est la moyenne des profondeurs de point d'ellipsoïdes toriques à axe vertical et à axe horizontal.

$$z = \frac{z_h + z_v}{2}$$

4.2.1.3. Génération des données synthétiques

Puisque la surface d'un ellipsoïde torique moyen est considérée parmi les formes les plus pratiques pour la modélisation de la cornée [50], le modèle de l'ellipsoïde torique moyen a été utilisé pour générer les différentes scènes pour tester l'algorithme de recalage ICP et ses variantes.

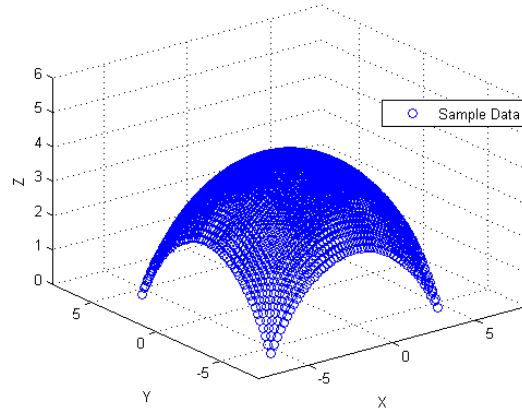


Figure 4.2 Échantillon de scène de test représenté comme un nuage de points 3D composé de 2601 points pour $r_h=7,85 \text{ mm}$, $r_v=7,70 \text{ mm}$ et $p_v=p_h=7,85 \text{ mm}$

Des nuages de points 3D ont été générés à partir de l'équation définissant la surface ellipsoïde torique. En faisant varier les coordonnées spatiales x et y de $-5,0$ à $5,0 \text{ mm}$ de différents pas ($0,1, 0,2, \dots, 0,5$), on évalue à chaque fois l'élévation (profondeur) z . Ainsi, on obtient des images de profondeur de différentes résolutions ($101 \times 101, 51 \times 51, \dots, 21 \times 21$) similaire aux cartes topographiques cornéennes fournies par l'Orbscan II.

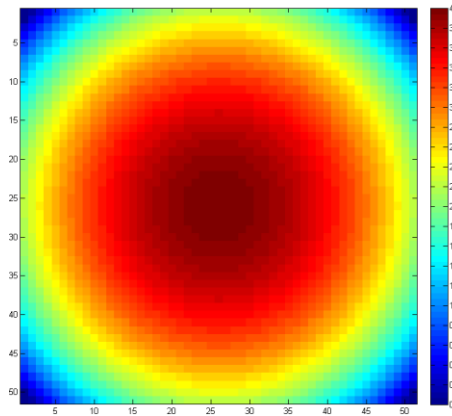


Figure 4.3 échantillon de scène de test représenté comme une carte topographique de résolution 51×51 pour $r_h=7,85 \text{ mm}$, $r_v=7,70 \text{ mm}$ et $p_v=p_h=7,85 \text{ mm}$

Pour obtenir une forme assez réelle et proche de la surface cornéenne, une estimation réaliste de la valeur des paramètres r_v , r_h , p_v et p_h est tirée de données présentées par Guillon [51].

$$r_h = 7,85 \pm 0,25 \text{ mm}, r_v = 7,70 \pm 0,40 \text{ mm} \text{ et } p_h = p_v = 0,85 \pm 0,15.$$

La motivation pour l'utilisation de données synthétiques (générées à partir de modèles mathématiques) pour les tests et les comparaisons est la connaissance exacte de la bonne

transformation. Ainsi, on peut évaluer la performance des algorithmes ICP par rapport à cet alignement correct. La métrique utilisée pour la mise en correspondance des points (les appariements) tout au long de tests effectués sur les données synthétiques est la distance euclidienne. Trois formes d'erreur sont généralement calculées et utilisées pour évaluer la réponse d'algorithmes de recalage ICP. Une première erreur est évaluée comme étant la distance moyenne quadratique entre les appariements formés (p_i, m_i) dans la forme modèle ou référence et la forme donnée recalée (ajustée) et en fonction de la transformation algorithmiquement trouvée $(\hat{R}_{alg}, \hat{t}_{alg})$: $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|m_i - \hat{R}_{alg} p_i - \hat{t}_{alg}\|^2$. La deuxième erreur correspond à une erreur de translation et est évaluée comme la norme de la différence entre le vecteur de translation estimé algorithmiquement \hat{t}_{alg} et le vecteur de translation réellement appliqué : $E_t = \|\hat{t}_{alg} - t_{réel}\|$. De la même façon, la troisième erreur est celle de rotation et est évaluée comme la norme de la différence de quaternion correspondant à la matrice de rotation estimée algorithmiquement et le quaternion de la matrice de rotation réellement appliquée : $E_q = \|\hat{q}_{alg} - q_{réel}\|$.

4.2.2. Données réelles

Comme mentionné dans le premier chapitre, les données sont acquises par le topographe coréen l'Orbscan II. Les informations fournies par l'Orbscan II qui sont utilisées dans le cadre de ce projet sont les élévations réelles (*true elevation*) de surfaces antérieures et postérieures de cornées humaines. Ces données sont présentées sous forme de cartes topographiques de résolution égale à 101×101 (10201 points).

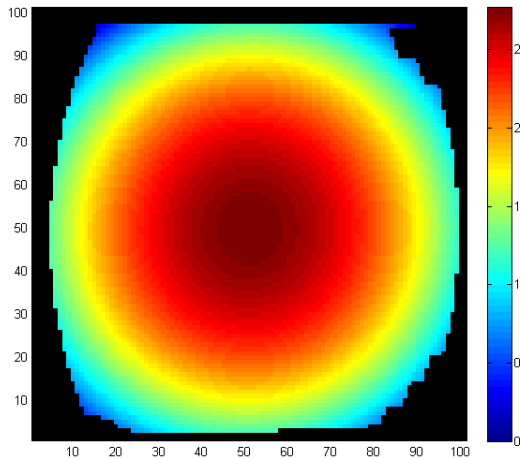


Figure 4.4 Échantillon réel d'une carte topographique qui correspond à l'élévation réelle d'une surface antérieure d'une cornée

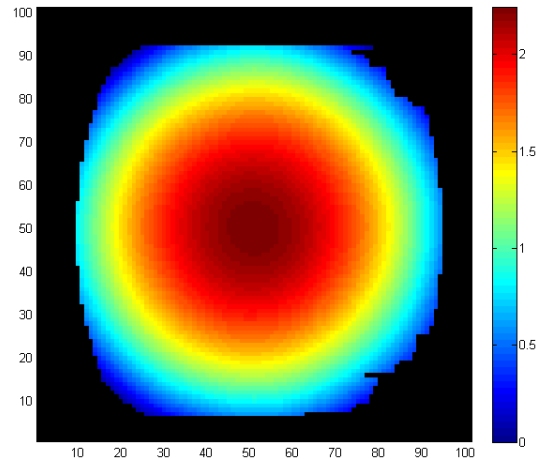


Figure 4.5 Échantillon réel d'une carte topographique qui correspond à l'élévation réelle d'une surface postérieure d'une cornée

Ces données peuvent être simplifiées à des matrices de 101×101 éléments (élevations) qui correspondent à des carrés de dimension égale à $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ centrés sur l'axe optique de la cornée. Les éléments de ces matrices sont les élevations z évaluées aux points de coordonnées respectives x (en mm) = $-5,0, -4,9, \dots, 0, \dots, 5,0$ et y (en mm) = $-5,0, -4,9, \dots, 0, \dots, 5,0$.

Théoriquement, on obtient 10201 points par surface. Mais dans la pratique, les images obtenues par Orbscan II sont construites d'un nombre de points bien inférieur à 10201. En effet, on remarque pas mal de points (élevations) qui sont manquants surtout sur les bordures d'images et sont marqués par la valeur NULL.

	-5.0	-4.9	-4.8	...			
-5.0	NULL	NULL	NULL	...	NULL	NULL	NULL
-4.9	NULL	NULL	0.49	...	0.42	NULL	NULL
-4.8	NULL	0.48	0.74	...	0.69	0.29	NULL
	0.15	...				⋮	0.17
	⋮						⋮
				⋮			
⋮	0.20	...		2.5		...	0.19
				⋮			
	⋮						⋮
	0.18	⋮				...	0.16
4.8	NULL	0.25	0.75	...	0.65	0.30	NULL
4.9	NULL	NULL	0.50	...	0.45	NULL	NULL
5.0	NULL	NULL	NULL	...	NULL	NULL	NULL

Figure 4.6 exemple d'une matrice qui correspond à l'élévation d'une surface antérieure ou postérieure d'une cornée

Dans le cas de tests effectués sur de données réelles, aucune information sur la transformation optimale qui donne le meilleur alignement entre la forme modèle et la forme donnée à l'exception qu'on attend a des faibles rotations (Matrice de rotation proche de l'identité), des translations de quelques pixels (dixième de millimètres) selon x, y et z et de changement d'échelle comprise entre 1,1 et 0,9.

L'évaluation de différentes variantes de l'algorithme ICP va être effectué en visualisant la différence de deux cartes topographiques qui correspondent aux images à aligner avant et après recalage, l'erreur algorithmique calculé par ICP ainsi que les distances d_{ant} et d_{post} évaluées avant et après recalage définies par :

$$d_{ant} = \frac{1}{101 \times 101} \sum_i \sum_j \| \text{élévation}_{ant_{donnée}}(i, j) - \text{élévation}_{ant_{modèle}}(i, j) \|^2$$

Et

$$d_{post} = \frac{1}{101 \times 101} \sum_i \sum_j \| \text{élévation}_{post_{donnée}}(i, j) - \text{élévation}_{post_{modèle}}(i, j) \|^2.$$

4.3. Tests

4.3.1. Implémentations

L'implémentation des différentes variantes de l'algorithme ICP ainsi que le code nécessaire pour les tests a été développé sous la version 7.10.0 de Matlab 2009 sous Windows 7. Les différents tests sont exécutés sur une machine dotée d'un processeur Core i5 (2,53 GHz) et de 4 Go de Ram.

4.3.2. Tests effectués sur des données synthétiques

La plupart des variantes de l'algorithme de recalage ICP utilisent soit SVD soit UQ pour estimer la transformation entre la forme modèle et la forme donnée après la mise en correspondance des points. Par ailleurs, l'étude réalisée par Eggert sur les méthodes d'estimation de la transformation entre deux ensembles de points dont la correspondance est connue montre une grande similarité entre SVD et UQ et aucune supériorité de l'une par rapport à l'autre n'a été remarquée dans tous les cas et les scénarios de tests effectués dans le cadre de cette étude. L'étude a été réalisée sur des nuages de points générés aléatoirement d'une distribution uniforme d'un cube de dimension $2 \times 2 \times 2$ centré à l'origine.

Pour toutes ces raisons, on se propose de comparer et tester chacune des méthodes SVD et UQ afin de déterminer laquelle d'entre elles sera utilisée dans l'algorithme ICP, pour aligner des surfaces antérieures et postérieures de cornée humaines. Les tests seront effectués d'abord sur les données synthétiques générées comme vu précédemment dans plusieurs scénarios incluant des données de différentes tailles et en présence de différents niveaux de bruit.

4.3.2.1. Tests sur des données synthétiques dont la correspondance est connue

Tests effectués sur des données de différentes tailles en absence de bruit

Pour différentes résolutions d'images créées synthétiquement, une transformation rigide (rotation + translation) est appliquée pour créer des images correspondantes qui vont constituer nos modèles. Dans ces cas la correspondance entre les points et la transformation optimale qui donne l'alignement correct sont connues. Après, *SVD* et *UQ* sont utilisées pour

retrouver la transformation entre les points correspondants ce qui permet de tracer les graphes ci-dessous :

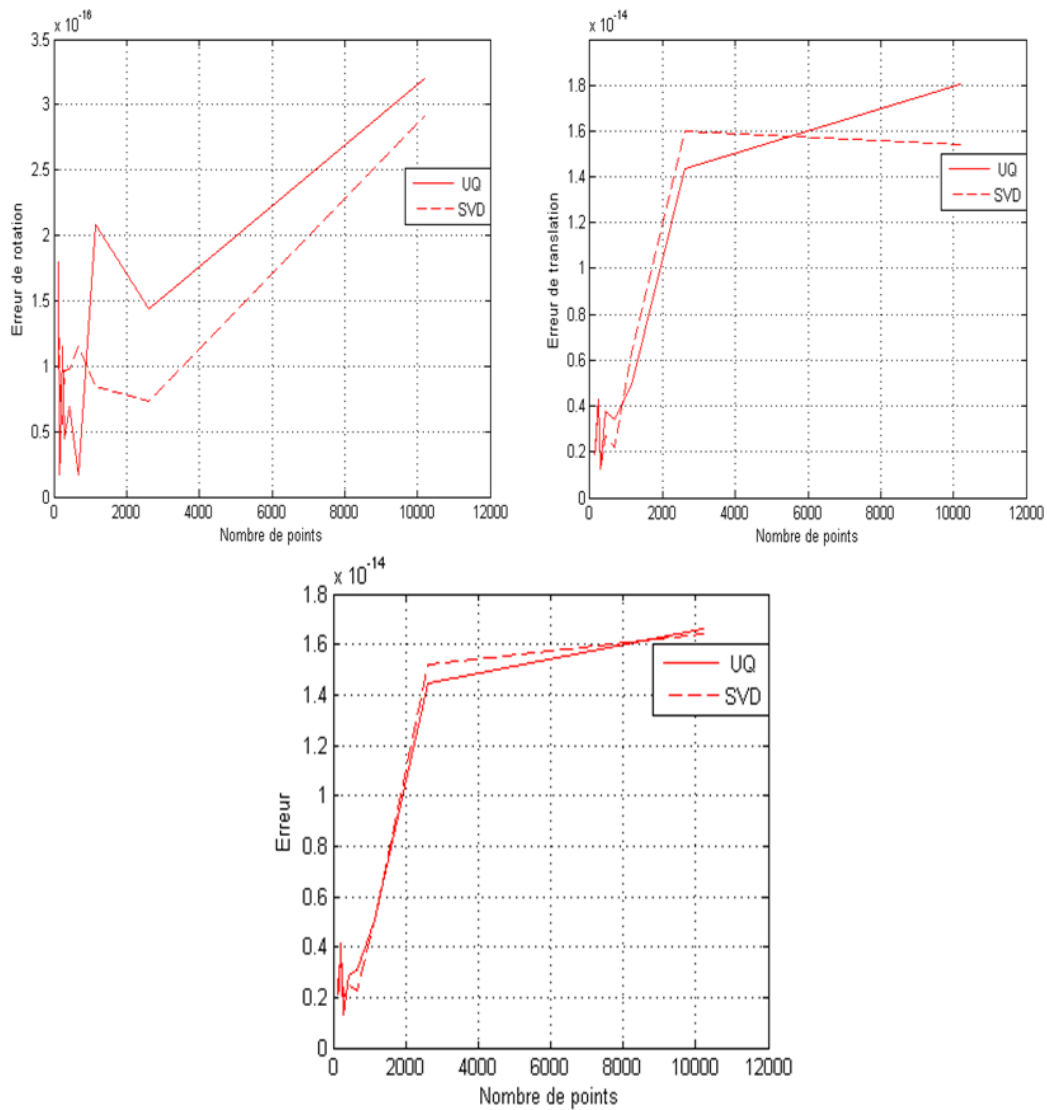


Figure 4.7 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur dans la transformation (translation et rotation) en fonction du nombre de points en absence de bruit pour les méthodes UQ et SVD

Comme attendu, les différentes erreurs mesurées dans ce cas sont de l'ordre de la précision de la machine (10^{-16} et 10^{-14}). On peut constater ici que les erreurs évaluées sont essentiellement nulles pour SVD (respectivement UQ). Le comportement de deux méthodes deux méthodes est très similaires dans notre cas.

Tests effectués sur des données de différentes tailles en présence de différent niveaux de bruit

Afin de pousser plus la comparaison, cette fois-ci, un bruit blanc gaussien de différentes variances a été ajouté aux formes données puis on estime la transformation entre les formes données bruitées et les formes modelés correspondantes ce qui permet de tracer les graphes ci-dessous :

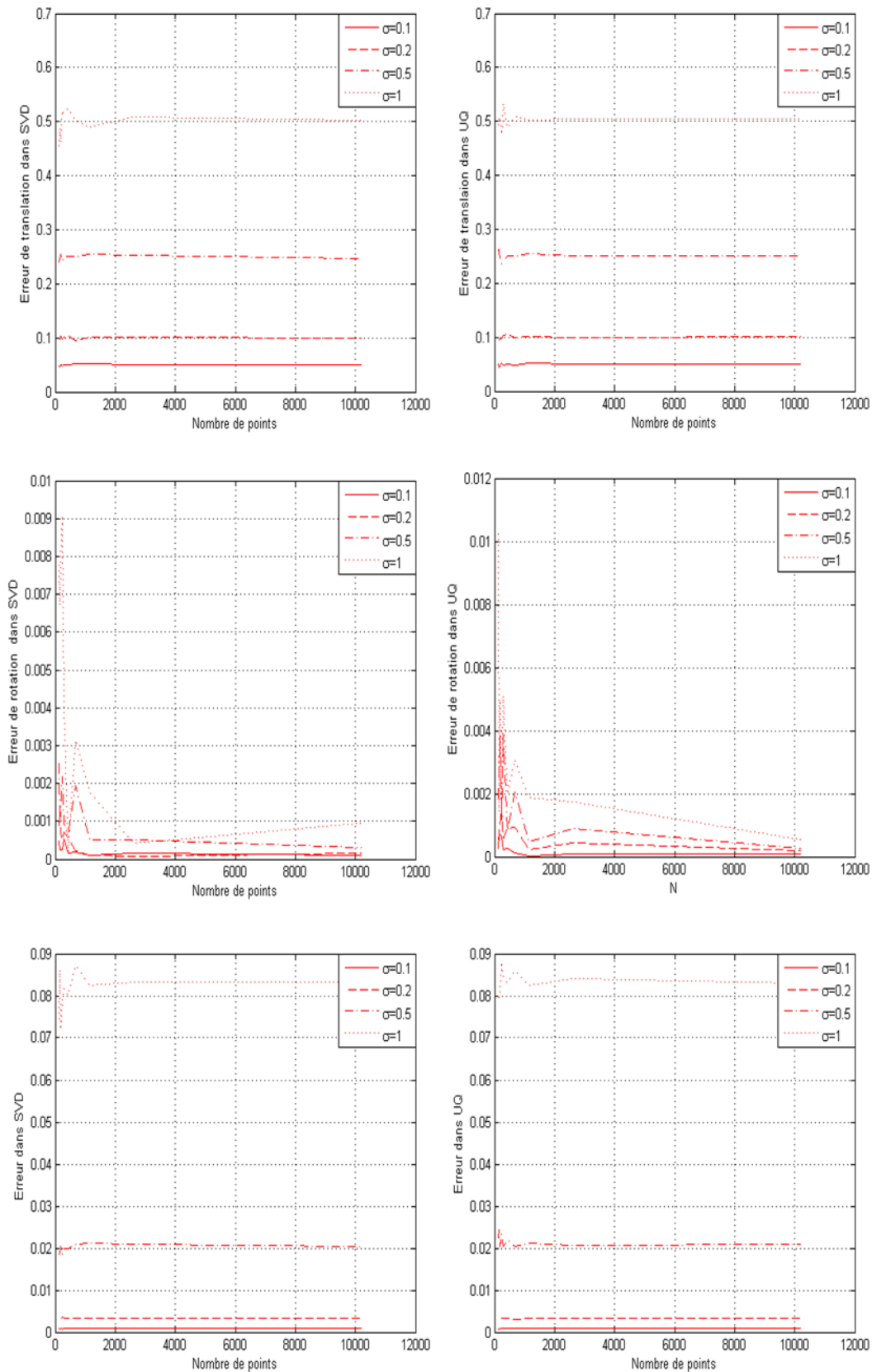


Figure 4.8 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur dans la transformation (translation et rotation) en fonction du nombre de points en présence de différents niveaux de bruit pour les méthodes SVD (colonne gauche) et UQ (colonne droite)

En présence de bruit, SVD et UQ montrent une précision élevée et une bonne robustesse en traitant différentes tailles de données. On peut noter aussi que l'erreur quadratique moyenne est quasi constante (à l'exception de petite taille de données) pour SVD et UQ.

Alors, pour mieux détecter la différence entre les solutions trouvées (transformations) par SVD et UQ, on a évalué la différence de translation $\|\hat{t}_{SVD} - \hat{t}_{UQ}\|$ ainsi que la différence entre les quaternions $\|\hat{q}_{SVD} - \hat{q}_{UQ}\|$ estimés par chacune des méthodes SVD et UQ, finalement on a évalué $E_{SVD} - E_{UQ}$.

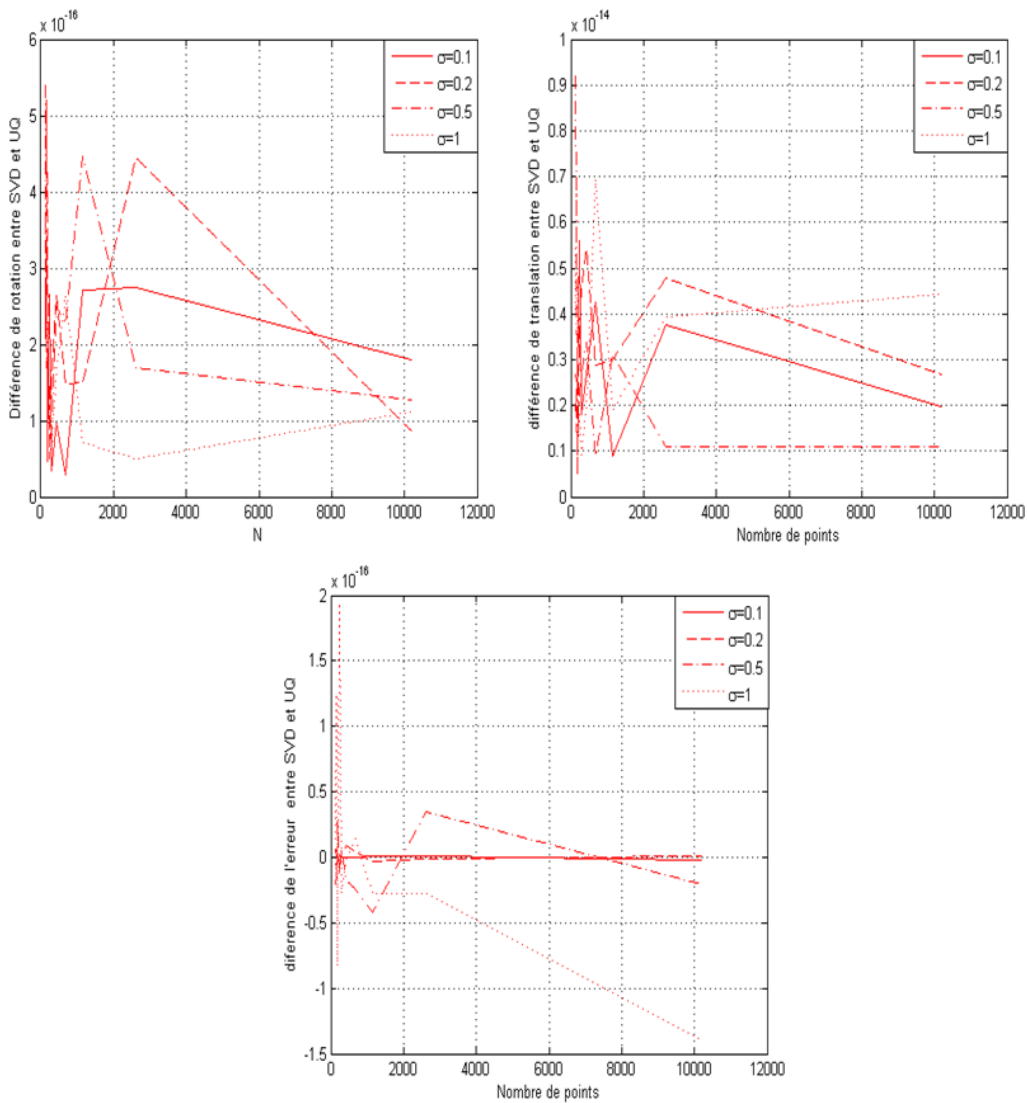


Figure 4.9 Évolution de la différence entre les erreurs algorithmiques et la différence entre les solutions (rotation et translation) en fonction du nombre de points en présence de différents niveaux de bruit pour les méthodes UQ et SVD

La différence de solutions calculée par SVD et UQ (différence de translation et de rotations) sont aussi de l'ordre de la précision de la machine ce qui rend vraiment la comparaison trop difficile à mesurer dans notre cas. Par ailleurs, la différence devient de plus en plus insignifiante lorsque la taille des données augmente. Cependant, une légère différence est remarquée entre SVD et UQ en examinant l'évolution de $E_{SVD} - E_{UQ}$. Cette dernière est négative pour un niveau de bruit élevé d'où on peut conclure que SVD est légèrement plus précise et robuste qu'UQ.

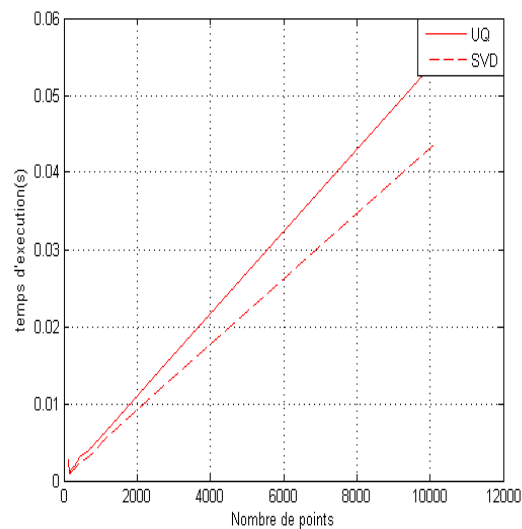


Figure 4.10 Évolution de temps d'exécution en fonction du nombre de points pour les méthodes UQ et SVD

Le dernier test est effectué pour évaluer le temps d'exécution pour chacune de méthode SVD et UQ en fonction de taille de données. La méthode SVD devient de plus en plus rapide par rapport a UQ lorsque la taille de données traitées devient plus importante.

Conclusion

Dans le cadre de ce projet, on va traiter des surfaces composées de 10201 points, d'où l'importance de connaitre le comportement de méthodes SVD et UQ particulièrement dans le cas des grandes tailles de données. Après la visualisation et l'examen de résultats de différents tests effectués, il est clair que SVD est légèrement supérieur à UQ dans notre cas. Par conséquent, SVD est la méthode adéquate pour estimer la transformation entre les points correspondants dans l'algorithme de recalage ICP à élaborer.

Alors, SVD est la méthode de calcul de transformation utilisée dans toutes les variantes ICP qui sont développées et testées dans le reste de tout ce chapitre.

4.3.2.2. Test effectué sur des données dont la correspondance est inconnue

L'étude et la comparaison des variantes d'ICP qui a été effectuée par Rusinkiewicz [30] a été réalisé dans le cas de scènes planaires, fractales et des scènes qui contiennent des vagues. Dans ces cas, l'impact des améliorations apporté sur l'algorithme ICP a été bien étudié. Cependant, aucune de scènes de test ne correspond à une forme similaire à celle de la cornée humaine. Alors, dans ce qui suit, on se propose d'étudier plusieurs variantes de l'algorithme ICP en effectuant des tests sur nos données synthétiques simulant la forme de la cornée **dont la correspondance est inconnue**.

Tests effectués sur des données de différentes tailles en absence de bruit

Le présent test est réalisé sur 5 images données de résolution respectives 101×101 , 51×51 , 34×34 , 26×26 , 21×21 en recalant avec ICP, dans sa version de base, vers les 5 images modèles correspondantes. La métrique utilisée pour le calcul du point le plus proche dans la phase de mise en correspondance des points est la distance euclidienne.

L'algorithme de recalage ICP montre une convergence rapide durant les quelques premières itérations indépendamment des tailles de données. Dans la plupart des cas, ICP converge vers la solution optimale ou une solution proche de cette dernière avec une erreur de translation de l'ordre de 10^{-1} et de translation de l'ordre 10^{-2} au pire des cas (dans le cas de $N = 2601$).

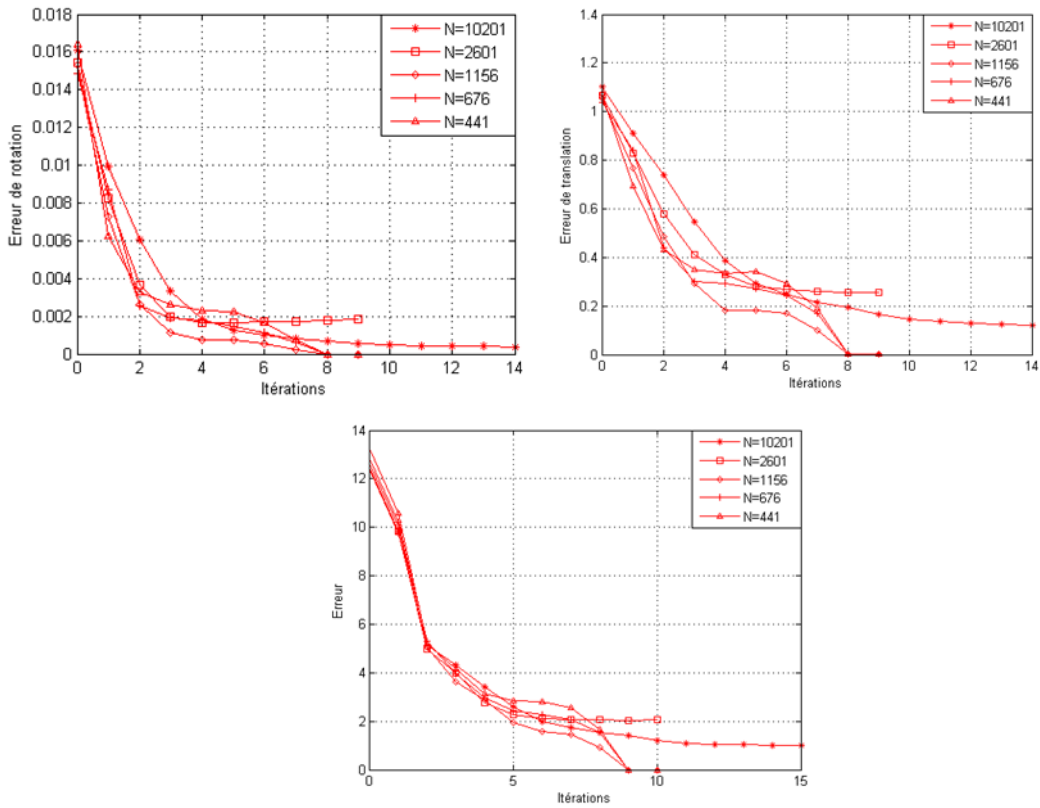


Figure 4.11 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur de transformation dans ICP en fonction du nombre d'itérations pour différents tailles de données en absence de bruit

Tests effectués sur une surface en présence de différent niveaux de bruit

Pour mieux connaître le comportement de l'algorithme de recalage ICP en présence de bruit dans le cas des surfaces simulant la forme cornéenne, un bruit blanc gaussien de différentes variances a été ajouté a une surface générée synthétiquement de résolution égale à 51×51 . Après, cette dernière a été recalée vers la surface modèle correspondante avec ICP.

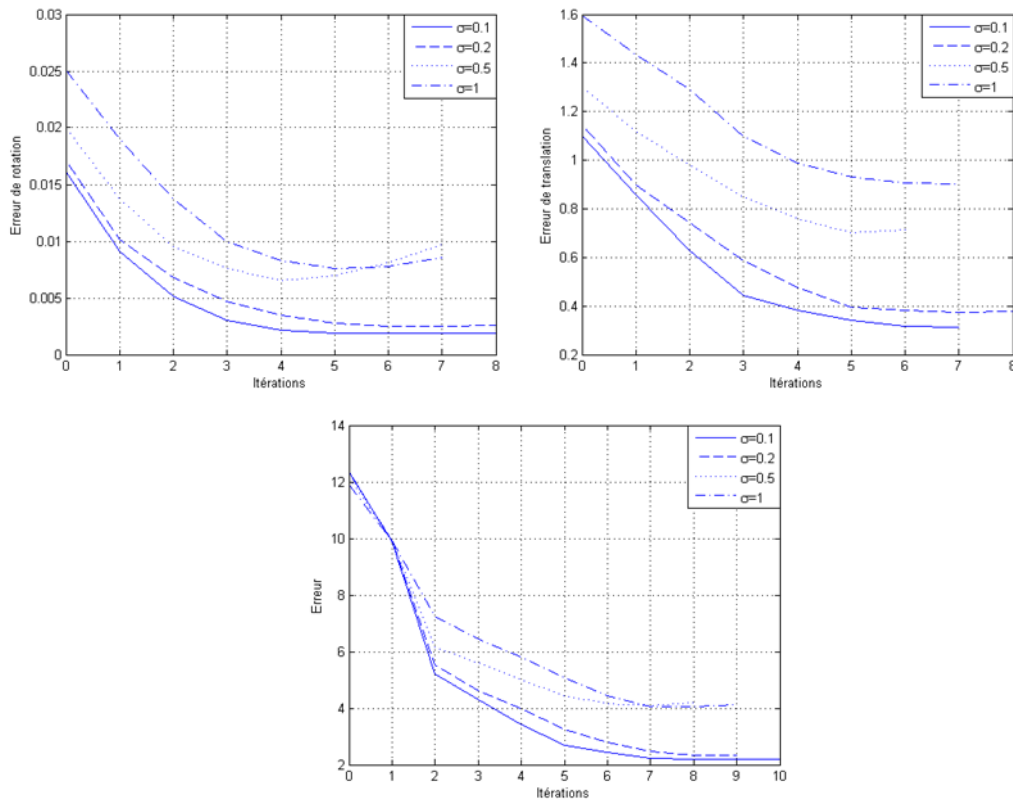


Figure 4.12 Évolution de l'erreur algorithmique et l'erreur de transformation dans ICP en fonction du nombre d'itérations pour une surface de résolution égale à 51×51 de bruit de différents niveaux de bruit

Les erreurs évaluées pour la transformation estimée sont très faibles (de l'ordre de 10^{-3} pour la rotation et de 10^{-1} pour la translation) en présence d'un niveau de bruit faible ($\sigma=0.1$ et $\sigma=0.2$). Par conséquent, la qualité d'alignement obtenu est légèrement affectée et peut être considérée fiable. Cependant, pour un niveau de bruit élevé ($\sigma=0.5$ et $\sigma=1$), les erreurs évaluées dans la transformation (surtout dans la translation) ne sont plus négligeables et sont relativement grandes. Ce qui engendre un alignement de mauvaise qualité et considéré comme erroné.

Dans les tests suivants, on va étudier des variantes d'ICP qui adoptent des stratégies de sélections des points ainsi que des stratégies de pondération dans plusieurs scénarios.

Tests effectués sur une surface en adoptant des stratégies de sélections

Dans ce qui suit, on va étudier différentes stratégies de sélections de points proposées en particulier l'échantillonnage aléatoire et uniforme [31][32].

D'abord, pour une surface synthétique de résolution égale 51×51 , on a étudié ICP avec échantillonnage uniforme en faisant varier la période d'échantillonnage et on a constaté que plus la période d'échantillonnage est grande, moins la solution est précise. Une période d'échantillonnage égale à 4 a été choisie pour effectuer le test suivant. Des tests similaires ICP avec échantillonnage aléatoire en faisant varier le taux de points échantillonnés et on a constaté que la solution n'est plus considérée précise lorsque le taux d'échantillonnage est inférieur à 25 %.

Pour le présent test, la surface générée précédemment (2601 points) a été recalée avec ICP sans échantillonnage, ICP avec échantillonnage uniforme (Période égale à 4) et ICP avec échantillonnage aléatoire (taux égal à 25 %) vers la surface correspondante avec deux différents niveaux de bruit ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$).

Dans ce test, l'erreur algorithmique évaluée après l'application de toute la transformation (composé de la rotation et la translation) ne cesse pas de diminuer malgré qu'on a constaté une faible augmentation (de l'ordre de 10^{-3}) pour l'erreur de la rotation.

En présence de différents niveaux de bruit ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$), les différentes solutions (transformations) obtenues sont très similaires. Pour un bruit faible ($\sigma = 0.1$), ICP avec échantillonnage nécessite un nombre d'itérations inférieur à celui d'ICP sans échantillonnage. Mais l'erreur obtenue après recalage ICP en utilisant toutes les pointes est légèrement inférieure à celle obtenue après recalage ICP avec échantillonnage. En présence d'un bruit important ($\sigma = 1$), ICP avec échantillonnage nécessite plus d'itération pour converger et l'erreur obtenue après ce recalage est encore légèrement supérieur à celle obtenue par ICP sans échantillonnage.

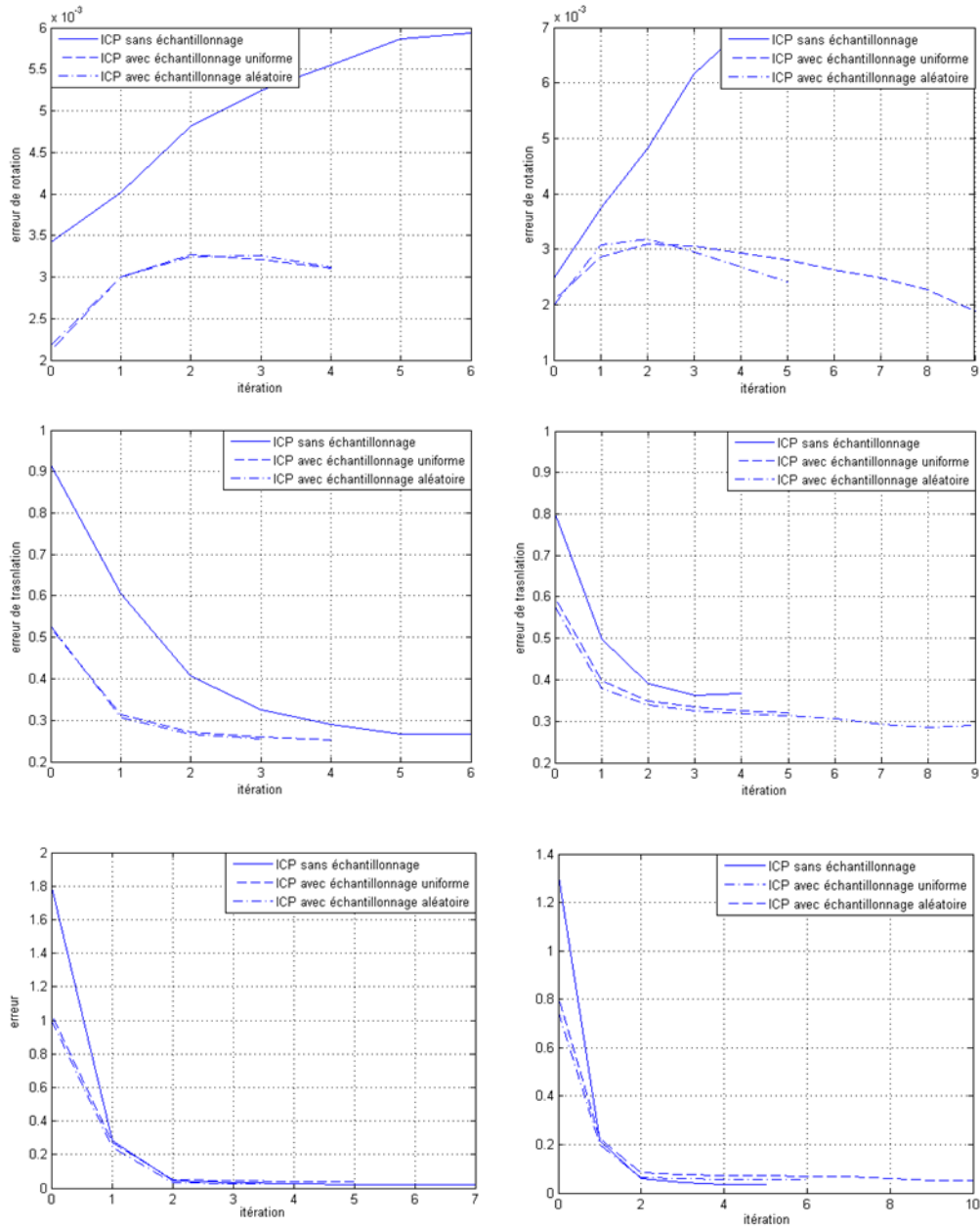


Figure 4.13 Évolution de l'erreur algorithmique et de l'erreur de la transformation dans ICP sans échantillonnage, avec échantillonnage uniforme et aléatoire deux différents niveaux de bruit $\sigma = 0.1$ (colonne gauche) et $\sigma = 1$ (colonne droite).

Tests effectués sur une surface en adoptant des stratégies de pondérations

Dans la plupart des études réalisées sur les variantes d'ICP qui adopte de stratégies de pondérations [30][52], il a été montré que les procédures de pondérations générales n'ont pas un grand impact sur le recalage et l'alignement obtenu à l'exception des cas particuliers comme le recalage partiel. Par ailleurs, la plupart des variantes ICP reposent seulement sur des stratégies de pondérations binaires (rejet ou non des appariements).

Dans ce qui suit, on se propose d'étudier deux stratégies de pondérations binaires. La première proposée par Puilli qui consiste à rejeter les 10% plus mauvais appariements et la deuxième est celle de Massuda qui consiste à éliminer les appariements dont la distance qui les sépare est supérieure à 2,5 la distance moyenne entre tous les appariements. Dans ce test, une surface synthétique de résolution égale à 51×51 a été recalée avec les variantes d'ICP présentées ci-dessus en présence de deux différents niveaux de bruit ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$).

En présence d'un niveau de bruit élevé $\sigma = 1$ (deuxième colonne de la Figure 4.14), les deux techniques de rejet donnent de meilleurs résultats en terme de précision et stabilité de solution que l'utilisation de la totalité des appariements disponibles.

Dans ce test on a constaté une augmentation de l'erreur évalué pour la rotation

Dans le cas absence de bruit ou en présence d'un niveau de bruit faible $\sigma = 0.1$ (première colonne de la Figure 4.14), les techniques de rejet utilisées sont inefficaces et conduit à une erreur dans la transformation estimée plus importante que l'utilisation de la totalité des appariements disponibles. Ceci est dû à l'élimination des appariements indispensable dans l'estimation de la transformation. Dans ce cas l'utilisation de la totalité des appariements disponibles donne de meilleurs résultats.

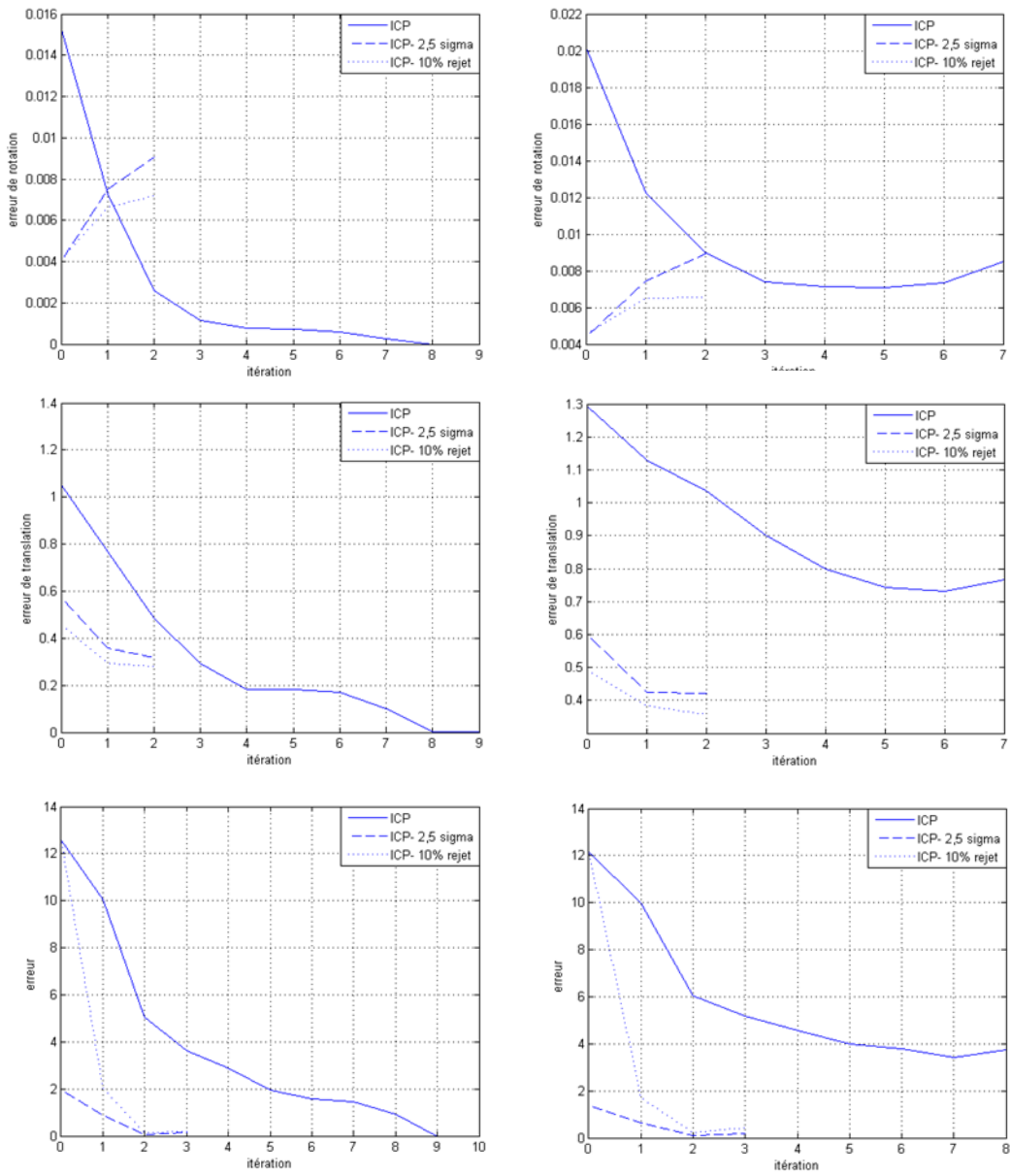


Figure 4. 14 Évolution de l'erreur algorithmique et de l'erreur de la transformation dans ICP avec tous les paires, en rejetant les paires dont la distance qu'il sépare est supérieur a 2.5 sigma uniforme et en rejetant les 10% plus mauvais paires pour deux différents niveaux de bruit ($\sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$).

4.3.2.3. Conclusion

La précision des images obtenues par Orbscan a été discutée dans le premier chapitre. On a vu que la grandeur de l'erreur dans les mesures du topographe Orbscan est de l'ordre de $0,7 \mu m$ qui est considéré très faible (par rapport à l'élévations de la cornée qui est de l'ordre de 2 millimètres). Ainsi, l'adoption des variantes d'ICP qui repose sur différentes stratégies de sélections ou de pondérations binaires pour recalibrer les images conduit à une solution qui manque de précision. En effet, l'élimination certains points en échantillonnant ou le rejet des appariements en pondérant d'une manière binaire dans notre cas affecte négativement l'estimation de la transformation et entraîne une mauvaise qualité d'alignement.

Par conséquent, aucune stratégie de sélections ou de pondérations binaires ne sera adoptée. Dans la variante d'ICP qu'on va élaborer, tous les points disponibles vont être utilisés afin de garantir une précision élevée et un meilleur alignement. Tous les appariements ont été traités avec même priorité; un poids constant égal à 1 est affecté à tous les appariements construits.

4.3.3. Tests effectués sur des données réelles

4.3.3.1. Test d'alignement de deux surfaces antérieures en considérant une transformation rigide

Dans ce premier test effectué sur des échantillons de données réelles, on n'a considéré qu'une transformation rigide pour aligner deux surfaces antérieures. Dans ce test, une surface antérieure d'une cornée donnée composée de 6493 points (Figure 3.15) a été alignée vers une surface antérieure d'une cornée modèle composée de 8138 points (Figure 3.16) en utilisant ICP.

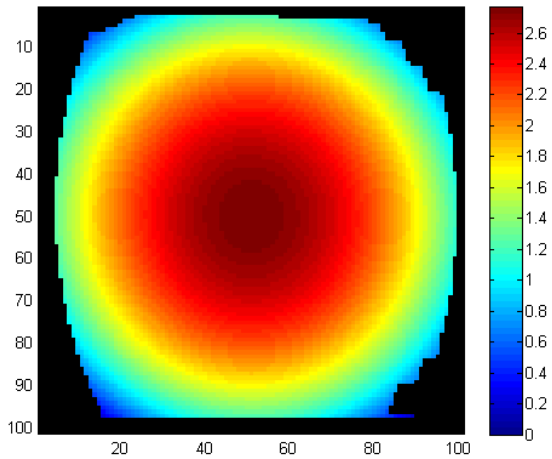


Figure 4.15 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée modèle(2,773 *mm* au sommet)

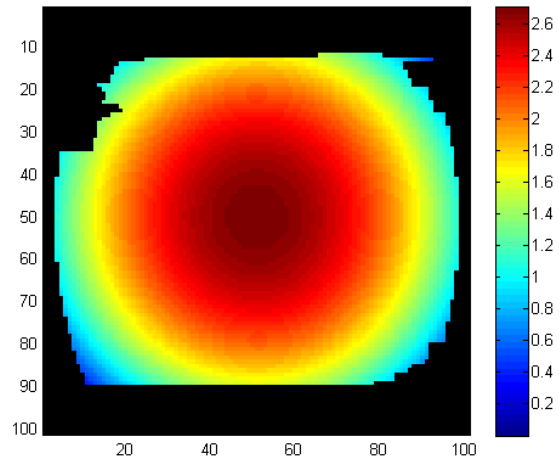


Figure 4.16 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée donnée(2,709 *mm* au sommet)

Initialement, les deux surfaces sont superposées et la distance moyenne qui les sépare est $d_{ant} = 0,1041 \text{ mm}$. Ainsi, on peut estimer qu'on déjà est assez proche de la solution finale (alignement optimal). Par conséquent, l'estimation initiale de la transformation qu'on a considérée est l'identité (la matrice de rotation initiale égale a l'identité et le vecteur de translation initial est nul).

Un nombre d'itérations égal à 4 a été nécessaire pour qu'ICP converge. La solution obtenue répond à nos attentes : une matrice de rotation très proche de l'identité est une translation de l'ordre de 1 ou 2 pixels (1 pixel=0,1 *mm*) suivant x, y et z. Un résumé de résultats obtenus est rapporté dans le tableau ci-dessous.

	ICP
Axe de rotation	(-0,3876 0,1883 0,9024)
Angle (radians)	0,0340
Translation (<i>pixels</i>)	(0,0555 0,0785 0,1012)
Changement d'échelle	-
Erreur _{algo}	0,0036
d_{ant} avant recalage (<i>mm</i>)	0,1041
d_{ant} après recalage (<i>mm</i>)	0,0205
itérations	4

Tableau 4.1 Résultat d'alignement de deux surfaces antérieures

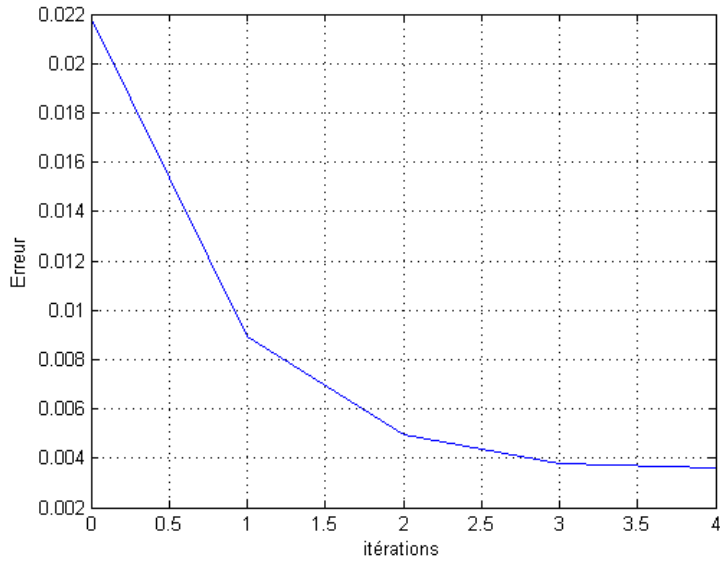


Figure 4.17 Évolution de l'erreur dans ICP en alignant deux surfaces antérieures

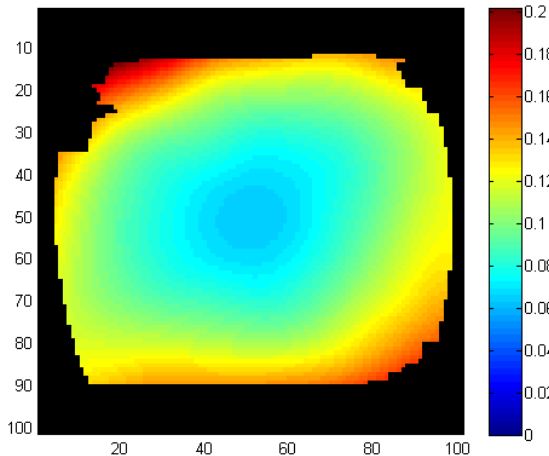


Figure 4.18 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage ICP

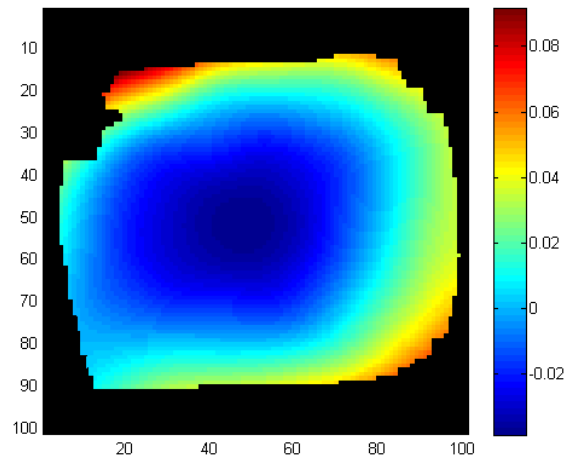


Figure 4.19 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

Après la réalisation de plusieurs tests similaires à ce dernier sur d'autres échantillons de données, on a remarqué que l'évolution de l'erreur devient insignifiante après un nombre d'itérations moyen égale à 15 (le changement de l'erreur devient de l'ordre de 10^{-6}). Par conséquent, le critère d'arrêt a été fixé par deux conditions : un nombre d'itération maximal égal à 15 ($k_{max} = 15$) et une évolution d'erreur inférieure à 10^{-6} ($\|e_k - e_{k-1}\| \leq 10^{-6}$).

4.3.3.2. Test d'alignement de deux surfaces antérieures en considérant le changement d'échelle

Dans le présent test réalisé sur des données réelles, on a considéré, l'existence de différent types de changement d'échelle dans le recalage (isotrope et non isotrope). Ce test a été réalisé sur le même échantillon de données que le test précédent. Le même critère d'arrêt a été fixé aussi pour ICPS isotrope et non isotrope et aucunes bornes n'ont été spécifiées pour le calcul de facteur d'échelle.

Un nombre d'itérations plus ou moins égal 4 a été nécessaire pour la convergence des algorithmes ICP, ICPS isotrope et non isotrope. Un résumé des différents résultats obtenus est rapporté dans le tableau ci-dessous ainsi que le résultat de test précédent pour comparer entre les algorithmes ICP, ICPS isotrope et non isotrope :

	ICP	ICPS non isotrope	ICPS isotrope
Axe de rotation	(-0,3876 0,1883 0,9024)	(0,3647 0,0567 0,9294)	(-0,3647 0,1857 0,9124)
Angle (radians)	0,0340	0,0255	0,0347
Translation (mm)	(0,0555 0,0785 0,1012)	(0,0306 0,0595 0,1740)	(0,0306 0,0595 0,1740)
Changement d'échelle	-	<i>diag</i> (1,0222 0,9932 0,9589)	0,9996
Erreur _{algo}	0,0036	0,0028	0,0035
d_{ant} (mm)	0,0205	0,0104	0,0204
itérations	4	3	4

Tableau 4.2 Résultat d'alignement de deux surfaces antérieures avec ICP, ICPS isotrope et non isotropes

D'après le tableau 4.2, l'algorithme ICPS fournit l'erreur algorithmique la plus faible ainsi qu'une distance d_{ant} inférieure à celle obtenue après recalage ICP et ICP isotrope. Par conséquent, le meilleur alignement est obtenu par l'algorithme ICPS non isotrope. Après, on trouve ICPS isotrope avec une erreur algorithmique égale à 0,0035 et une distance après recalage $d_{ant} = 0,0204$ mm. Finalement, ICP avec une erreur algorithmique égale à 0,0034 et une distance après recalage $d_{ant} = 0,0205$ mm. On peut noter que les solutions (transformations) obtenues par ICP et ICPS isotrope sont très proches et diffèrent largement avec celle obtenue par ICPS non isotrope.

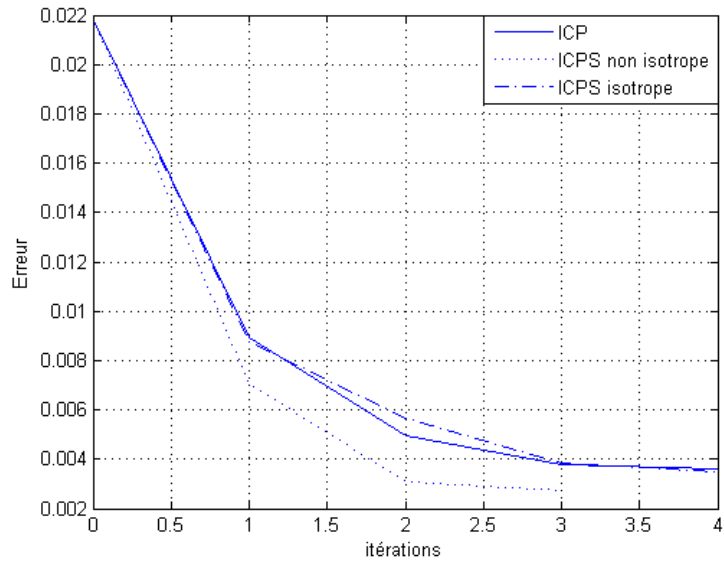


Figure 4.20 Évolution de l'erreur dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux surfaces antérieures

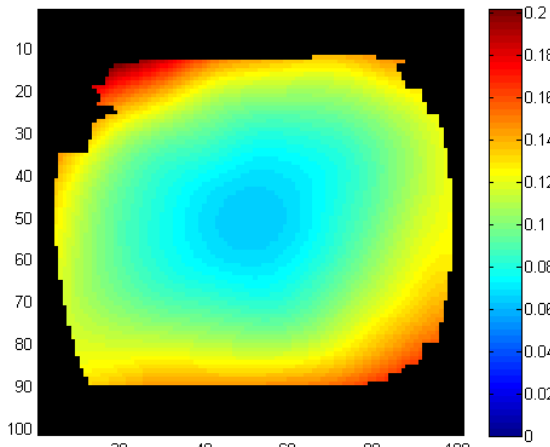


Figure 4.21 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage

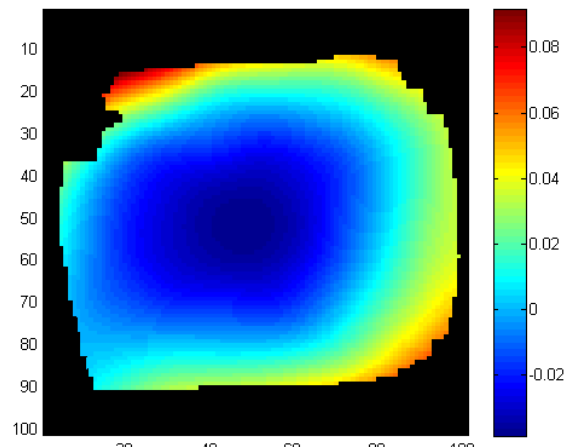


Figure 4.22 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

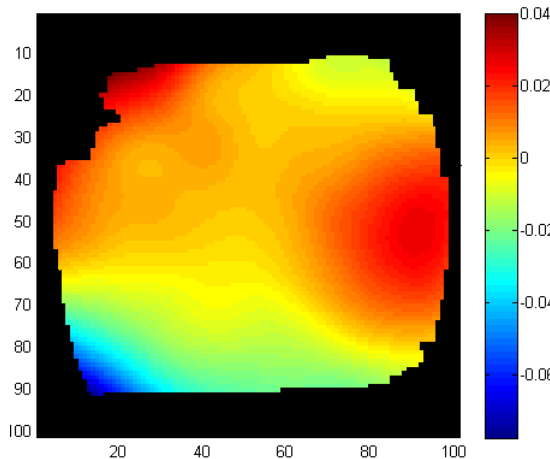


Figure 4.23 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope

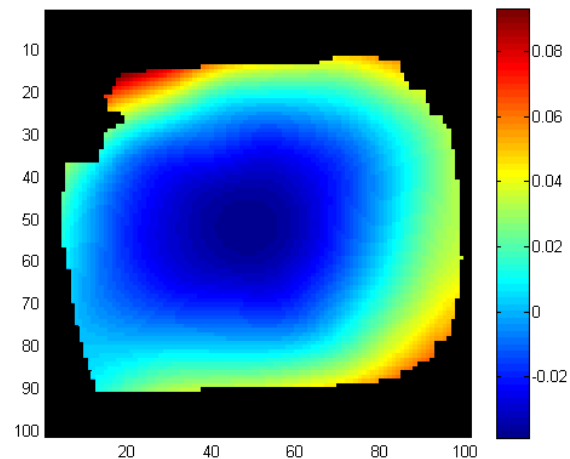


Figure 4.24 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage ICP

4.3.3.3. Tests d'alignement de deux cornées entières (incluant les deux surfaces antérieures et postérieures)

Test effectué en fusionnant les surface données et modèles

Dans ce test, deux surfaces antérieure (8193 points) et postérieure (6480 points) d'une cornée donnée ont été alignées simultanément vers deux surfaces antérieure (6670 points) et postérieure (5216 points) d'une cornée modèle avec les algorithmes de recalage ICP, ICPS isotrope et non isotrope. La distance d_{ant} qui sépare la surface antérieure de la cornée donnée et celle de la cornée modèle est égale à $0,3116\text{ mm}$ tandis que la distance d_{post} qui sépare la surface postérieure de la cornée donnée et celle de la cornée modèle est égale à $0,4658\text{ mm}$.

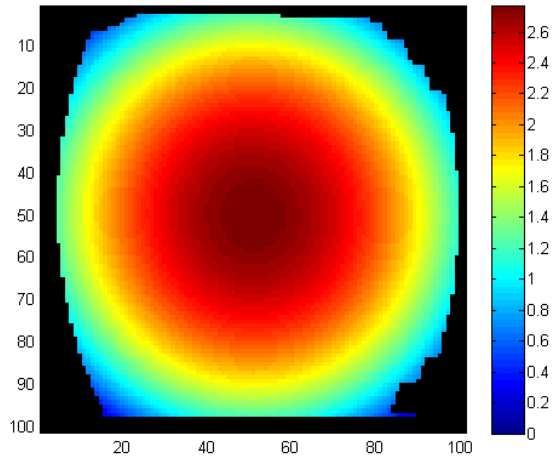


Figure 4.25 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée modèle (2,773 mm au sommet)

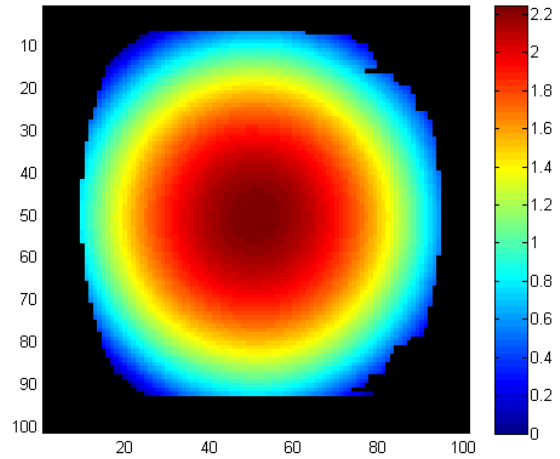


Figure 4.26 Élévation réelle de la surface postérieure de la cornée modèle (2,246 mm au sommet)

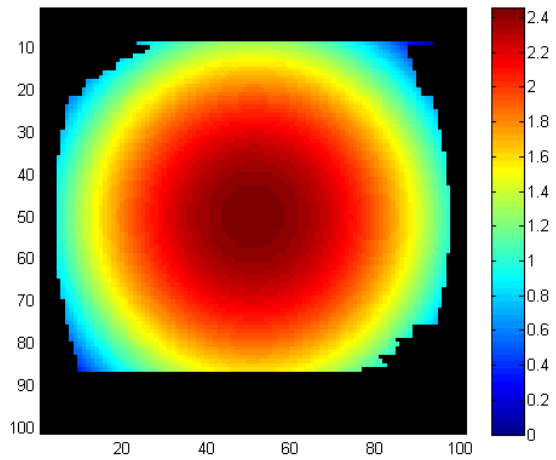


Figure 4.27 Élévation réelle de la surface antérieure de la cornée donnée (2,458 mm au sommet)

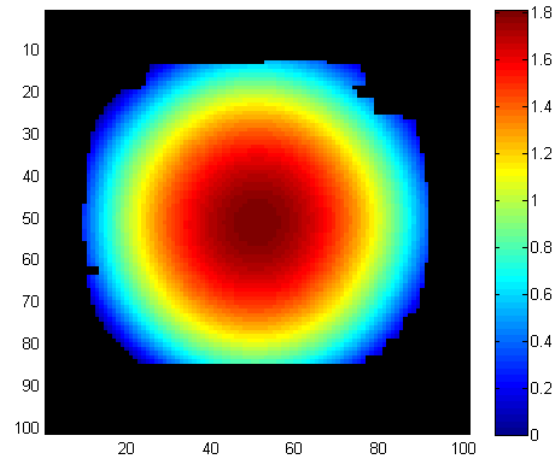


Figure 4.28 Élévation réelle de la surface postérieure de la cornée donnée (1,812 mm au sommet)

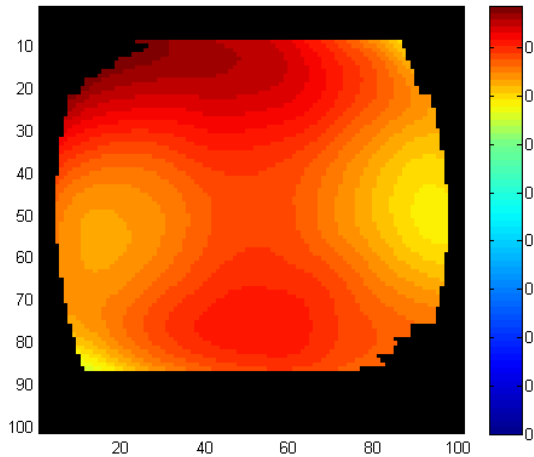


Figure 4.29 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée avant recalage

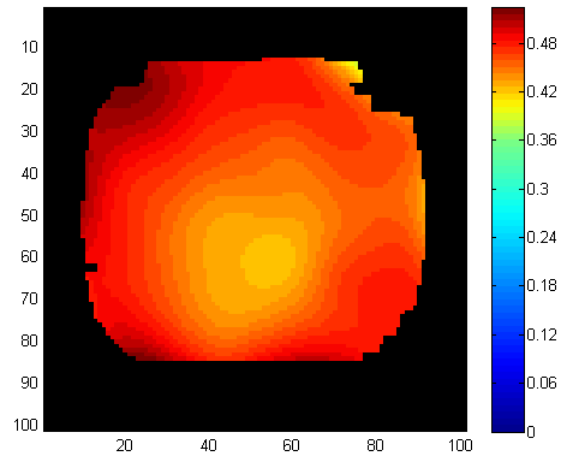


Figure 4.30 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface postérieure donnée avant recalage

Les deux surfaces antérieure et postérieure de chacune de deux cornées ont été traitées comme une seule entité (un seul objet). Tout d'abord, les deux surfaces antérieure et postérieure de la cornée donnée ont été **fusionnées** pour obtenir un seul objet donné. De la même manière, un objet modèle est construit en fusionnant les deux surfaces antérieure et postérieure de la cornée modèle. Après, les deux objets créés ont été recalés avec les trois algorithmes. Ensuite, en appliquant la transformation obtenue sur les deux surfaces antérieure et postérieure de la cornée donnée, on a obtenu les deux surfaces antérieure et postérieure recalées simultanément. Un résumé des résultats obtenus a été rapporté dans le tableau ci-dessous :

	ICP	ICPS non isotrope	ICPS isotrope
Axe de rotation	(-0,4691 0,0,6807 0,5627)	(-0,4287 0,5810 0,6919)	(-0,4302 0,5718 0,6985)
Angle(radians)	0,0358	0,0387	0,0445
Translation(mm)	(0,0596 0,0627 0,1352)	(0,1316 0,0827 0,3658)	(0,0654 0,0675 0,1316)
Changement d'échelle	-	<i>diag</i> (1,0672 1,0161 0,9636)	1,0267
Erreur _{algo}	0,0092	0,0083	0,0076
$d_{ant}(mm)$	0,0703	0,0616	0,0606
$d_{post}(mm)$	0,1037	0,0807	0,0948
itérations	3	4	3

Tableau 4.3 Résultat d'alignement de deux cornées entières avec ICP, ICPS isotrope et non isotrope en fusionnant les surfaces antérieures et postérieures

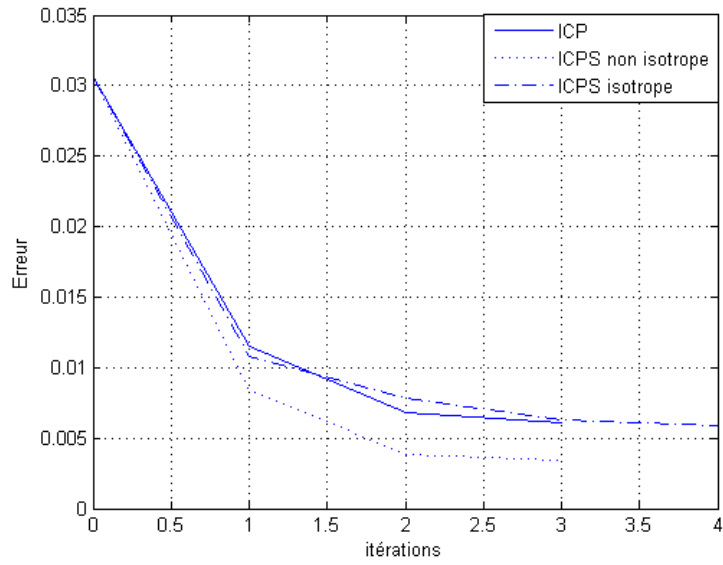


Figure 4.31 Évolution de l'erreur dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux cornées entières en fusionnant les surfaces antérieures et postérieures

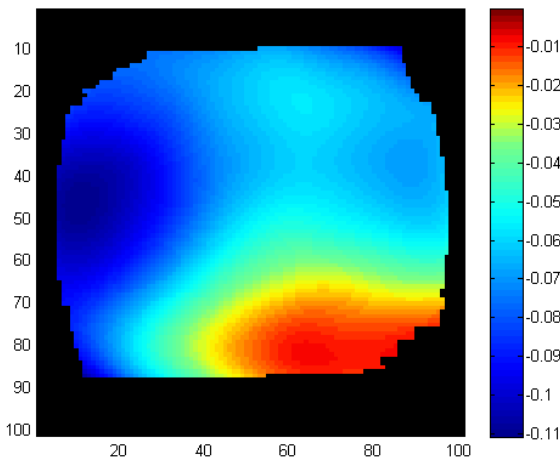


Figure 4.32 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

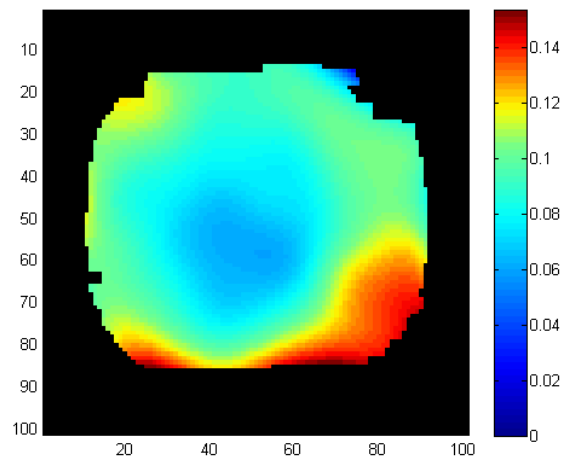


Figure 4.33 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

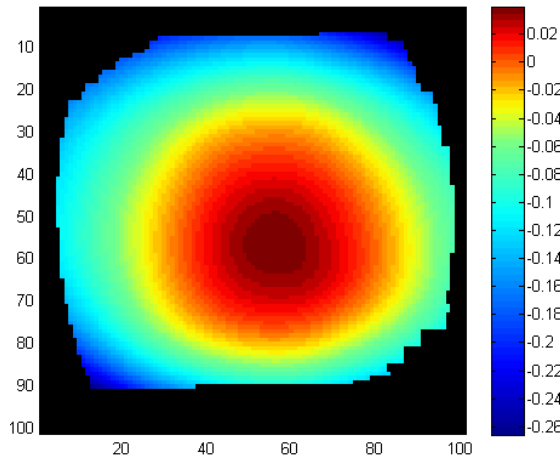


Figure 4.34 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP non isotrope

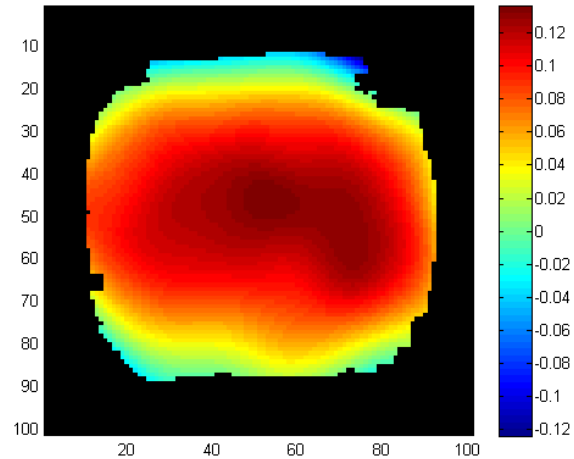


Figure 4.35 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP non isotrope

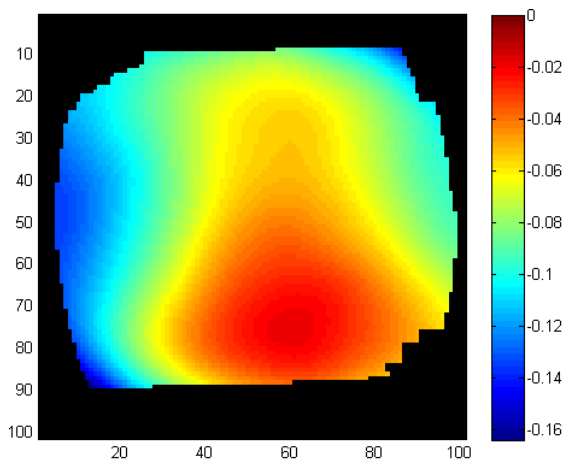


Figure 4.36 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP isotrope

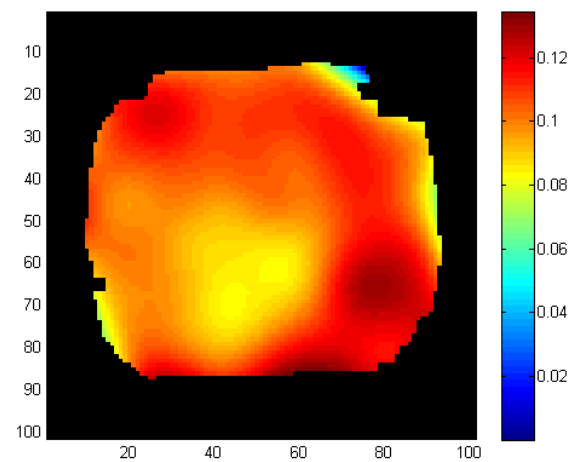


Figure 4.37 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface postérieure donnée après recalage ICP isotrope

Test effectué en séparant la mise en correspondances des surface données et modèles

Le test suivant est réalisé sur le même échantillon de données qui a été utilisé dans le test précédent. Cependant, la phase de la mise en correspondance des points a été modifiée pour les trois algorithmes de recalage de la façon suivante: pour chacune des surfaces antérieure et postérieure de la cornée donnée, on cherche le point le plus proche via la distance euclidienne **dans la surface correspondante**. C'est-à-dire, pour les points appartenant à la surface antérieure, la recherche de point correspondant s'effectue dans la surface antérieure du modèle (respectivement pour la surface postérieure). Après l'établissement des correspondances, on sauvegarde tous les appariements dans une seule liste. Cette dernière est

utilisée pour estimer la transformation entre tous les appariements simultanément. Puisque la mise en correspondance pour la surface antérieure et postérieure s'effectue **indépendamment**, on peut évaluer une erreur pour chacune de deux surfaces à l'intérieur de l'algorithme ainsi que l'erreur totale en considérant tous les appariements.

Les résultats obtenus dans ce test après recalage de différents algorithmes modifiés sont rapportés dans le tableau ci-dessous :

	ICP	ICPS non isotrope	ICPS isotrope
Axe de rotation	(-0,5439 0,3506 0,7624)	(-0,3065 -0,1672 0,9371)	(-0,3643 0,0442 0,9302)
Angle (radions)	0,0208	0,0213	0,0262
Translation	(0,0254 0,0431 0,3702)	(0,0409 0,0475 0,4320)	(0,0386 0,0507 0,3311)
Changement d'échelle	-	<i>diag</i> (1,0408 1,0064 0,9387)	1,0140
Erreur _{algo} (totale)	0,0083	0,0070	0,0081
Erreur _{algo} (ant)	0,0069	0,0073	0,0070
Erreur _{algo} (post)	0,0101	0,0067	0,0096
d_{ant} (mm)	0,0665	0,0535	0,0603
d_{post} (mm)	0,0978	0,0683	0,0940
itérations	5	4	3

Tableau 4.4 Résultat d'alignement de deux cornées entières avec ICP, ICPS isotrope et non isotrope en séparant la mise en correspondance des surfaces antérieures et postérieures

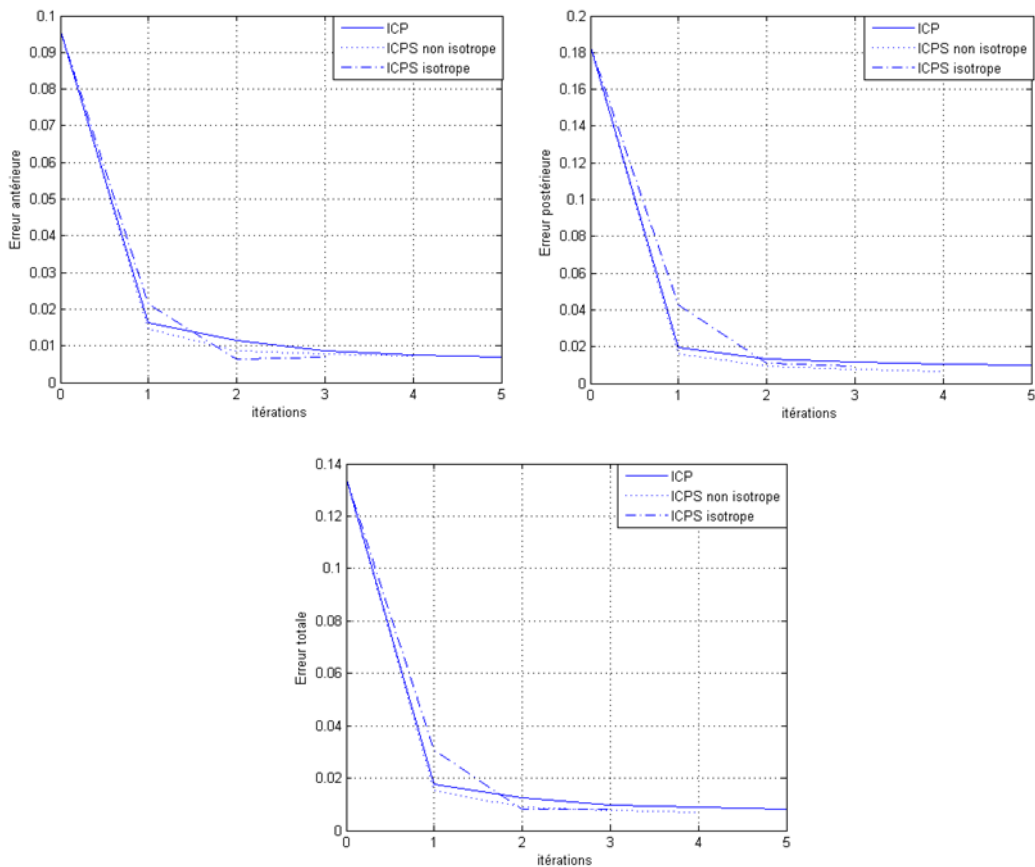


Figure 4.38 Évolution de l'erreur antérieure, postérieure et totale dans ICP, ICPS isotrope et non isotrope en alignant deux cornées entières en séparant la mise en correspondance des surfaces antérieures et postérieures

Le comportement des différents algorithmes est identique à celui du test précédent. La qualité d'alignement obtenue est dans l'ordre suivant : ICPS non isotrope, ICPS isotrope, ICP. Cependant, les erreurs algorithmiques et les distances d_{post} et d_{ant} calculées après recalage sont inférieures à celle obtenues dans le test précédent pour les trois algorithmes. Ces améliorations dans la qualité des alignements obtenus sont dues à la modification apportée sur l'étape de la mise en correspondance des points. En effet, la modification apportée élimine la possibilité d'établissement de mauvaises correspondances. Ainsi, on évite qu'un point d'une surface de la cornée donnée soit couplé avec un point de la mauvaise surface du modèle. Par ailleurs, cette modification réduit le temps nécessaire de recherche de point correspondant. La recherche du point le plus proche s'effectue dans une seule surface au lieu de deux surfaces de la cornée.

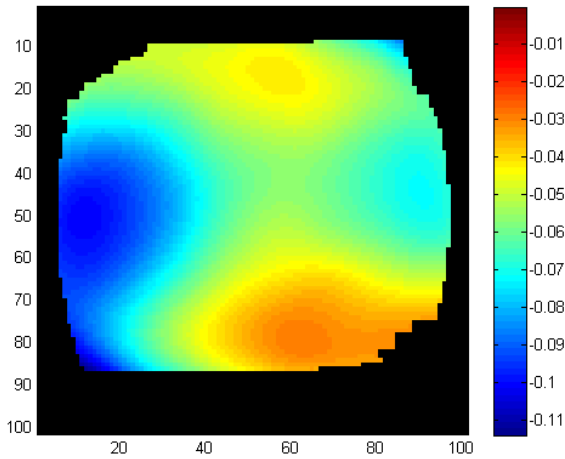


Figure 4.39 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

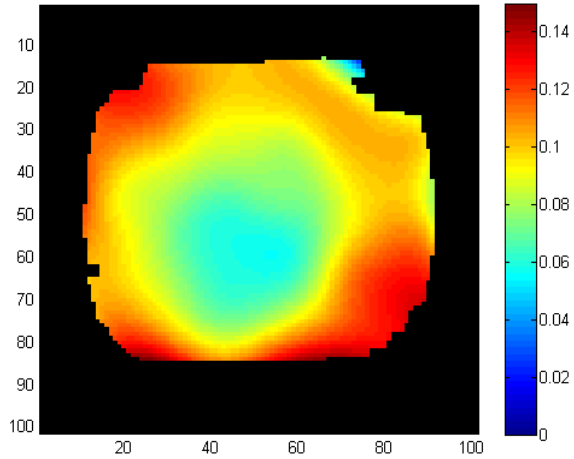


Figure 4.40 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICP

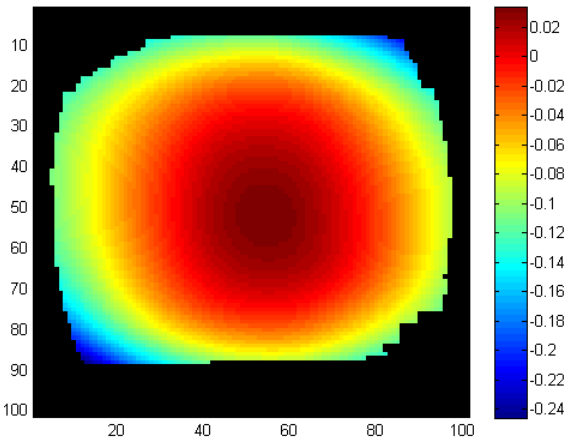


Figure 4.41 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS non isotrope

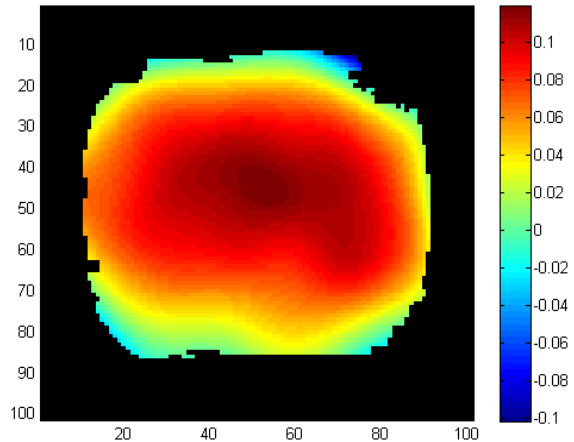


Figure 4.42 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS non isotrope

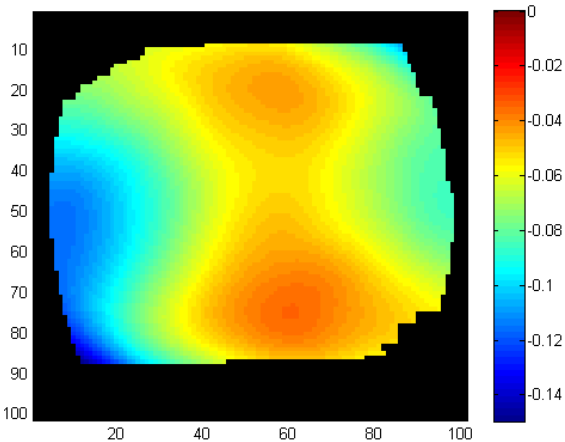


Figure 4.43 Différences entre la surface antérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope

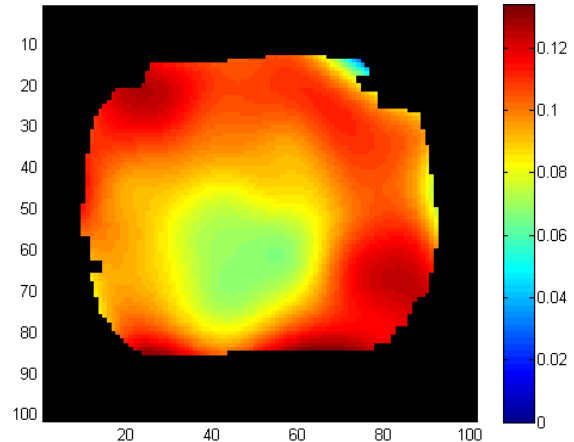


Figure 4.44 Différences entre la surface postérieure modèle et la surface antérieure donnée après recalage ICPS isotrope

Test effectué en séparant les surfaces données et modèles et en adoptant la stratégie de recherche par voisinage

Jusqu'à maintenant, la procédure utilisée pour établir la correspondance dans les différents algorithmes de recalage ICP, ICP isotrope et non isotrope est de calculer pour chaque point de la surface de la cornée donnée le point le plus proche via la distance euclidienne en balayant la totalité de la surface de la cornée modèle. Cette procédure révèle d'une complexité quadratique $O(N^2)$ comme mentionné précédemment.

Plusieurs méthodes proposées pour réduire la complexité de cette procédure ont été discutées dans le deuxième chapitre comme l'emploi des structures de données (kd_tree par exemple) ou les méthodes de projections, etc....

Dans ce qui suit, on propose dans ce projet une méthode pour établir la correspondance en exploitant le format des données utilisées et en s'inspirant des méthodes utilisées dans [52] et [42]. Cette méthode consiste à réduire l'espace recherche du point correspondant d'un point de la surface donnée à un voisinage du projeté de ce dernier sur la surface modèle. En d'autres mots, pour trouver le point correspondant, on effectue une recherche locale toujours en utilisant la distance euclidienne dans un voisinage de la surface modèle calculé en projetant le point de la surface donnée sur la surface modèle.

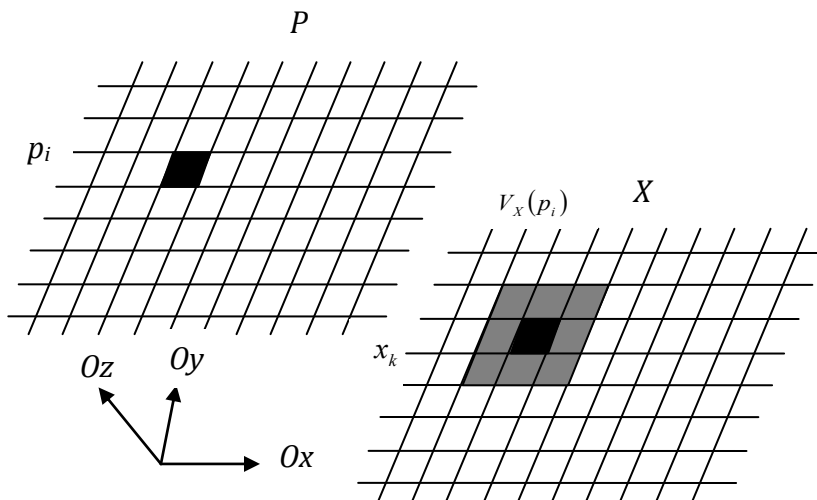


Figure 4.45 Principe de la recherche par voisinage

Pendant chaque itération de l'algorithme ICP, les deux surfaces (images) P et X sont bien superposées selon l'axe (Oz). Pour calculer le point correspondant du p_i on procède

comme suit : on calcule d'abord x_k le projeté selon l'axe (Oz) du p_i sur la surface X . Ensuite, on calcule x_i le point le plus proche du p_i en considérant le voisinage $V_X(p_i)$ (fenêtre de dimension $n \times n$ centré en x_k) via la distance euclidienne.

Il est clair que la taille de voisinage considéré influe directement sur l'exactitude de la correspondance établie. Le choix d'un voisinage de grande taille fournit une bonne approximation, mais un temps de recherche plus important. Par contre un voisinage de faible taille fournit une mauvaise approximation, mais un temps de recherche plus court.

Suite à des nombreux tests, on a trouvé qu'un voisinage de taille 10×10 fournit un bon compromis entre l'exactitude de la correspondance établie et le temps de recherche nécessaire.

Ici on présente une comparaison entre les méthodes utilisées pour calculer la correspondance dans les tests effectués précédemment sur des données réelles :

Méthodes de mise en correspondance	Temps d'exécution (s)
En fusionnant les surfaces antérieures et postérieures et en calculant le point le plus proche dans tout l'objet modèle	863,1311
En séparant les surfaces antérieures et postérieures et en calculant le point le plus proche dans toute la surface correspondante	416,5336
En séparant les surfaces antérieures et postérieures et en calculant le point le plus proche dans un voisinage de taille 10×10 de la surface correspondante	26,9695

Tableau 4.5 Comparaison des différents méthodes de mise en correspondance utilisées dans les tests antérieurs

On a effectué une deuxième fois le dernier test réalisé sur les données réelles, mais en adoptant la nouvelle méthode pour établir la correspondance entre la surface antérieure de la cornée donnée et la surface antérieure de la cornée modèle ainsi que la surface postérieure de la cornée donnée et la surface postérieure de la cornée modèle. On a obtenu le même recalage avec la même précision, mais dans un temps bien plus court que le test précédent comme le montre le tableau 3.5.

4.4. Algorithme adopté

4.4.1. Discussion et description

Dans l'étape de la normalisation de cornées humaines, on veut ramener toutes les cornées vers la même taille de la cornée référence sans modifier la forme des surfaces d'une manière irrégulière. Pendant cette étape, on veut éviter l'application des différents étirements ou compressions qui modifient considérablement (d'une manière irrégulière) la forme des cornées à aligner. On a besoin donc de déterminer un changement d'échelle uniforme suivant x , y et z .

Par conséquent, on va adopter l'algorithme de recalage ICPS isotrope. La transformation à considérer pour aligner la population de cornées est la composée d'un changement d'échelle, une rotation et une translation.

La construction de la liste de la correspondance entre la cornée référence et la cornée à aligner est effectuée en mettant en couples d'une manière indépendante les points de chacune des surfaces antérieures et postérieures de la cornée modèle et la cornée à aligner. Pour mettre les points en correspondance, on va utiliser la dernière méthode détaillée dans le paragraphe précédent. C'est-à-dire, effectuer une recherche locale sur le point le plus proche dans un voisinage dans la surface correspondante dans le modèle.

L'estimation de la transformation entre la cornée référence et la cornée à aligner est effectuée simultanément entre la correspondance établie entre chacune des surfaces antérieures et postérieures de deux cornées.

Le critère d'arrêt utilisé est la combinaison de deux conditions : un nombre d'itérations maximal égale à 15 et une précision de l'erreur égale à 10^{-6} .

4.4.2. Algorithme

La variante de l'algorithme utilisée pour la normalisation de la population des cornées humaines est énoncée ci-dessous:

- Entrée : deux cornées, $C = \{S_{ant}, S_{post}\}$ et $C' = \{S'_{ant}, S'_{post}\}$ avec $S_{ant} = \{p_i^{ant}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}}}$, $S_{post} = \{p_i^{post}\}_{i=1}^{N_{S_{post}}}$, $S'_{ant} = \{x_i^{ant}\}_{i=1}^{N'_{S_{ant}}}$ et $S'_{post} = \{x_i^{post}\}_{i=1}^{N'_{S_{post}}}$ tel que $N_{S_{post}} \leq N_{S'_{post}}$ et $N_{S_{ant}} \leq N_{S'_{ant}}$.

- Sortie : la transformation $\hat{T} = (\hat{R}, \hat{s}, \hat{t})$ qui donne le meilleur alignement de C vers C' .

- Initialisation : $k = 0$, $R_0 = I_3$, $s_0 = 1$, $t_0 = (0, 0, 0)^t$, $S_{ant_0} = S_{ant}$, $S_{post_0} = S_{post}$
 $S_0 = S_{ant_0} \cup S_{post_0} = \{p_{i,0}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}} + N_{S_{post}}}$, $k_{max} = 15$ et $\varepsilon = 10^{-6}$.

- Itération k :

1. Mise en correspondance :

- Utiliser la distance euclidienne pour construire la liste

$$L_k^{ant} = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}}}$$

définie par : $y_{i,k} = c(p_{i,k}^{ant}) = x^{ant} \left| \min_{x^{ant} \in V_{S_{ant}}(p_{i,k}^{ant})} d(p_{i,k}^{ant}, x^{ant}) \right.$ Ou $V_{S_{ant}}(p_{i,k}^{ant})$

est le voisinage de taille 10×10 de la surface S'_{ant} calculé en projetant le point $p_{i,k}^{ant}$ sur S'_{ant} suivant l'axe (Oz) .

- Utiliser la distance euclidienne pour construire la liste

$$L_k^{post} = \{z_{i,k}\}_{i=1}^{N_{S_{post}}}$$

définie par : $z_{i,k} = c(p_{i,k}^{post}) = x^{post} \left| \min_{x^{post} \in V_{S_{post}}(p_{i,k}^{post})} d(p_{i,k}^{post}, x^{post}) \right.$ où

$V_{S_{post}}(p_{i,k}^{post})$ est le voisinage de taille 10×10 de la surface S'_{post} calculé en projetant le point $p_{i,k}^{post}$ sur S'_{post} suivant l'axe (Oz) .

- Construire la liste $L_k = \{m_{i,k}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}} + N_{S_{post}}}$ en concaténant $L_k^{ant} = \{y_{i,k}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}}}$

$$\text{et } L_k^{post} = \{z_{i,k}\}_{i=1}^{N_{S_{post}}}$$

2. Calculer le recalage :

- Estimer la transformation $T_k = (R_k, s_k, t_k)$ qui minimise la fonction d'erreur suivante :

$$E_k = \min_{(R_k, s_k, t_k)} \frac{1}{N_{S_{ant}} + N_{S_{post}}} \sum_{i=1}^{N_{S_{ant}} + N_{S_{post}}} \|(R_k s_k p_{i,0} + t_k) - m_{i,k}\|^2.$$

3. Appliquer le recalage :

- Appliquer la transformation $T_k = (R_k, S_k, t_k)$ pour obtenir les deux nouvelles surfaces $S_{an_{k+1}} = \{p_{i,k+1}^{ant}\}_{i=1}^{N_{S_{ant}}}$ et $S_{pos_{k+1}} = \{p_{i,k+1}^{post}\}_{i=1}^{N_{S_{post}}}$ définies

$$\text{par : } \begin{cases} p_{i,k+1}^{ant} = R_k S_k p_{i,0}^{ant} + t_k \\ p_{i,k+1}^{post} = R_k S_k p_{i,0}^{post} + t_k \end{cases}.$$

4. Fin de l'itération :

- Arrêter lorsque $k = k_{max}$ où $\|E_k - E_{k+1}\| \leq \varepsilon$.
- $\hat{T} = T_k$.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a réalisé plusieurs tests dans le but d'élaborer la variante de l'algorithme de recalage ICP adéquate pour aligner des surfaces antérieures et postérieures. D'abord, des premiers tests sont effectués sur des données générées synthétiquement pour déterminer la méthode d'estimation de la transformation géométrique ainsi que des stratégies adoptées pour certaines variantes d'ICP pour améliorer ce dernier en terme de robustesse et de précision. Puis, des tests de recalage en considérant une transformation rigide, transformation avec changement d'échelle isotrope et non isotrope ont été réalisés sur des échantillons de données réelles. Ensuite, on a introduit une nouvelle méthode de mise en correspondance qui sera utilisée pour coupler les points entre chacune des surfaces antérieures et postérieures des cornées à aligner. Enfin, on a discuté les différents résultats obtenus et on a élaboré la variante de l'algorithme de recalage qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour aligner la population de cornées et construire l'atlas cornéen.

Chapitre 5

Atlas Cornéen

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode utilisée pour construire l’atlas numérique 3D de la cornée humaine entièrement incluant les deux surfaces antérieure et postérieure.

D’abord, on va détailler les différentes étapes de la méthodologie adoptée. Puis, on va appliquer la méthode pour construire les surfaces antérieure et postérieure moyennes et leurs variances d’une population de cornées saines. Ensuite, des résultats intermédiaires, statistiques et observations seront présentés durant la construction de l’atlas cornéen. Pour visualiser ce dernier, on aura recours à des cartes topographiques couleurs similaires à ce qu’offrent les topographes cornéens actuels. Enfin, on va comparer la méthode proposée dans ce projet avec autres méthodes qui ont été déjà utilisées pour construire des atlas cornéens et conclure ce chapitre par une discussion sur les avantages et les inconvénients de notre méthode.

5.2. Méthodologie adoptée pour la construction de l’atlas cornéen

La méthode adoptée pour construire l’atlas cornéen dans ce projet est très similaire aux méthodes existantes qui ont été utilisées pour construire des atlas anatomiques numériques 3D pour le crâne [53], le cerveau [54][55][56], le cœur [54] à partir des images médicales tridimensionnelles.

La méthode est décomposée généralement en deux grandes étapes:

- la normalisation des images obtenues à partir des observations de plusieurs individus. Cette dernière repose sur l’utilisation d’un algorithme de recalage (linéaire ou rigide, affine, non linéaire, etc...) dans le but de ramener toutes les images dans un référentiel commun. Le choix de l’algorithme de recalage dépend généralement de la transformation à considérer entre images et l’organe pour lequel on veut construire l’atlas.
- Construction de l’atlas en faisant généralement la moyenne des images recalées. Des études statistiques peuvent être alors réalisées sur la variabilité entre les populations (variances, etc...).

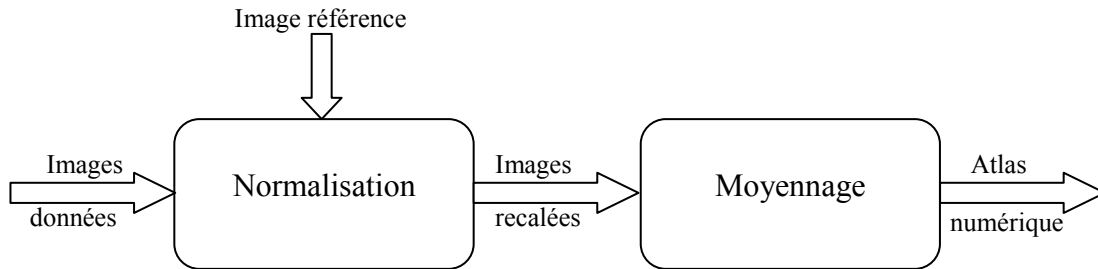


Figure 5.1 Les éléments fondamentaux pour la construction d'un atlas anatomique numérique 3D

5.2.1. Normalisation

Des traitements préliminaires sur les images données sont souvent appliqués avant de commencer l'étape de la normalisation. Des points caractéristiques ou des lignes sont extraits dans le cas des images de crâne [53] et une segmentation des images pour déterminer les régions d'intérêts dans le cas des images de cerveau [54]. Ces informations sont généralement utilisées dans la mise en correspondance pendant le recalage des images.

Dans le cas de la construction de l'atlas de la cornée humaine, aucun traitement préliminaire n'est nécessaire sur les images utilisées. On va procéder directement pour recaler toute une population de cornées humaines vers une cornée de référence. Pour effectuer le recalage, on va d'abord examiner les images données et déterminer la cornée qui va être utilisée comme référence.

5.2.1.1. Données

La population de cornées humaines utilisées dans ce projet provient de la Banque de données pour la caractérisation de la cornée du Réseau FRQS de Recherche en Santé de la Vision. Cent cornées ont été sélectionnées parmi les cornées qui ne souffrent d'aucune maladie et que n'ont pas été opérées par chirurgie oculaire puisqu'on veut construire un atlas cornéen pour les cornéens saines (normales).

Donc la base d'images qu'on a considérée est composée de cent cartes topographiques qui correspondent aux élévations réelles de surfaces antérieures et de cent cartes topographiques qui correspondent aux élévations réelles de surfaces postérieures de cornées saines.

Toutes les images sont acquises par le topographe cornéen Orbscan II. Les technologies sur lesquelles repose l'Orbscan II ont été détaillées dans le premier chapitre. Grâce aux options fournies dans le logiciel installé sur l'Orbscan II, les données ont été récupérées dans des fichiers textes. Le format des données extraites du topographe a été bien expliqué dans le troisième chapitre.

Dans le tableau ci-dessous, quelques observations sur la base d'images qui a été utilisée pour construire l'atlas cornéen :

	Moyenne \pm écart	(min ; médiane ; max)
Nombre de points (points)	7644 \pm 724 points	(5465; 7680; 8909)
Élévation réelle au sommet (<i>mm</i>)	2,7161 \pm 0,1464	(2,3878; 2,7188; 3,1362)
Rayon de la BFS (<i>mm</i>)	7,9371 \pm 0,2440	(7,2998 ; 7,9345;8,5519)

Tableau 5.1 Statistiques sur les surfaces antérieures de cornées de la base

	Moyenne \pm écart	(min ; médiane ; max)
Nombre de points (points)	5982 \pm 691	(4037; 6090; 7340)
Élévation réelle au sommet (<i>mm</i>)	2,1252 \pm 0,1461	(1,7954; 2,1115; 2,5571)
Rayon de la BFS (<i>mm</i>)	6,5379 \pm 0,2536	(5,9090; 6,5548; 7,1540)

Tableau 5.2 Statistiques sur les surfaces postérieures de cornées de la base

5.2.1.2. Cornée de référence

Après l'examen des images qui constituent notre base, on a sectionné les deux images (deux cartes topographiques de surfaces antérieure et postérieure) d'une cornée qui sera utilisée comme référence pour la normalisation (recalage). Le choix de cette dernière a été basé sur deux critères :

- L'élévation au sommet de la surface antérieure de la cornée sélectionnée est proche de l'élévation moyenne au sommet de toutes les surfaces antérieures des cornées présentes dans la base. L'élévation de la surface antérieure a été favorisée dans notre cas, car elle est évaluée avec plus de précision par le topographe Orbscan II.
- La surface antérieure et postérieure de la cornée sélectionnée est représentée par un nombre de points le plus grand possible. Ainsi, des images de la cornée sélectionnées sont les plus représentatives et descriptives.

On a adopté de tels critères pour la sélection de la cornée de référence pour deux raisons :

- Réduire le nombre de points qui ne seront pas appariés dans la phase de la mise en correspondance des points pendant le recalage.

- Pour avoir le moins de biais possible dans la construction de l'atlas.

Les cartes topographiques retenues de la surface antérieure et postérieure sont représentées ci-dessous ainsi que quelques observations :

	Surface antérieure	Surface postérieure
Nombre de points (points)	8756	7340
Élévation réelle au sommet (<i>mm</i>)	2,7952	2,2115
Rayon de la BFS (<i>mm</i>)	8,1656	7,0820
Centre de la BFS (<i>mm</i>)	(-0.1250, 0.0112, -5.3885)	(-0.1329, -0.0139, -4.8986)
L'épaisseur au sommet (<i>mm</i>)	0,5837	

Tableau 5.3 Résumé sur les caractéristiques des images de la cornée de référence

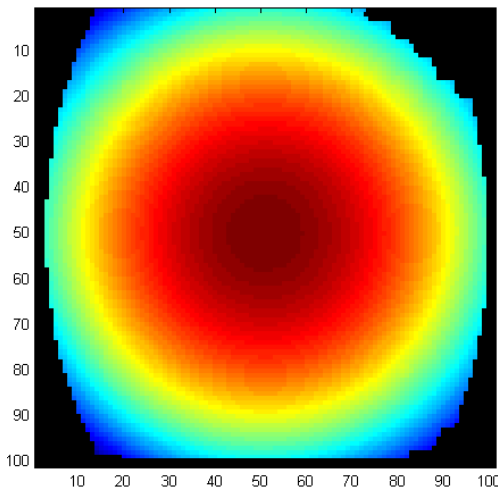


Figure 5.2 Carte topographique de la surface antérieure de la cornée de référence

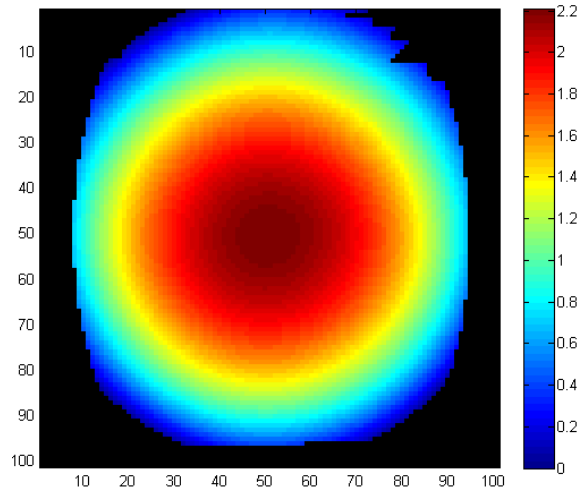


Figure 5.3 Carte topographique de la surface postérieure de la cornée de référence

5.2.1.3. Recalage

Après qu'on a examiné la base d'images utilisées dans ce projet et qu'on a effectué le choix des images de référence, on a procédé à la normalisation de la population des cornées humaine de notre base. La normalisation est effectuée en recalant toute la population des cornées vers la cornée de référence choisie par l'algorithme développé dans le troisième chapitre.

Dans le tableau ci-dessous on a rapporté un résumé sur les différentes erreurs évaluées par l'algorithme de recalage et le nombre d'itérations qui a été nécessaire pour sa convergence.

	Moyenne \pm écart	(min ; médiane ; max)
Erreur antérieure (algorithmique)	0,0742 \pm 0,1470	(0,0003 ; 0,0056; 0,6511)
Erreur postérieure (algorithmique)	0,0217 \pm 0,0529	(0,0010 ; 0,0066; 0,4429)
Erreur totale (algorithmique)	0,0513 \pm 0,0929	(0,0006; 0,0070; 0,4526)
Nombre d'itération	6 \pm 2	(3; 5; 10)

Tableau 5.4 Statistiques sur les résultats de recalage des images de la base

Un résumé sur les transformations optimales calculées par l'algorithme de recalage pendant cette étape est notée dans le tableau ci-dessous:

	Moyenne \pm écart	(min ; médiane ; max)
Changement d'échèle isotrope	1,0050 \pm 0,0144	(0,9561; 0,9995; 1,0419)
Angle de rotation (radians)	0,1080 \pm 0,0140	(0,0003; 0,0070; 0,0660)
Déplacement en x (mm)	0,0150 \pm 0,0307	(-0,0341; 0,0081; 0,1644)
Déplacement en y (mm)	0,0039 \pm 0,0152	(-0,0567; 0,0015; 0,0599)
Déplacement en z (mm)	0,1047 \pm 0,1126	(-0,2524; 0,1214; 0,3314)
Déplacement totale (mm)	0,1381 \pm 0,0774	(0,0079; 0,1389; 0,3323)

Tableau 5.5 Statistiques sur les transformations optimales obtenues par l'algorithme de recalage

5.2.1.4. Interpolation

Suite à l'estimation des transformations optimales (Changement d'échelle isotrope, rotation et translation) par l'algorithme de recalage, on a appliqué chacune des transformations obtenues sur les cartes topographiques de surface antérieure et postérieure de la cornée correspondante. Ainsi, on a obtenu toutes les images recalées.

Au départ, toutes les cartes correspondent à des grilles régulières en x et y . En effet, l'élévation z est évaluée aux points de coordonnées $x \in [5.0, -5.0]$ et $y \in [5.0, -5.0]$ séparés d'un pas de $0,1 mm$. Après recalage, toutes les images ont été déplacées et ne correspondent plus à des grilles régulières comme le montre la Figure 5.4.

	-5,0 -4,9 -4,8		-5,2136 -5,1136
-5,0	Z	-4,9614	Z
-4,9		-4,8614	
-4,8		-4,7614	
⋮		⋮	
⋮		⋮	

Figure 5.4 Matrices avant et après l'application de recalage

Par conséquent, pour représenter les nouvelles images recalées et pour être capable de comparer et calculer les différences entre les images, il faut retrouver les élévations z aux points de coordonnées réguliers en x et en y . Une interpolation bilinéaire a été réalisée pour chacune des images recalées et toutes les cartes topographiques ont été ramenées au format initial (standard).

Ici une comparaison entre les distances antérieures et postérieures évaluées entre la population des cornées de notre base et la cornée de référence avant et après recalage et interpolation :

	Moyenne \pm écart	(min ; médiane ; max)
d_{ant} avant recalage (mm)	0,1491 \pm 0,1032	(0,0157; 0,1258; 0,4153)
d_{ant} après recalage (mm)	0,0324 \pm 0,0163	(0,0000; 0,0298;0,1265)
d_{post} avant recalage (mm)	0,1864 \pm 0,1080	(0,0250; 0,1723;0,4873)
d_{post} après recalage (mm)	0,0520 \pm 0.0251	(0,0000; 0,0487; 0,1397)

Figure 5.5 Comparaison entre les distances entre les images de la base et l'image de référence avant et après recalage

Finalement, toutes cartes topographiques ont été normalisées, par rapport à la cornée de référence. Ainsi, tout est prêt pour la construction de l'atlas de la population des cornées saines.

5.2.2. Construction de l'Atlas

Puisque les notions de moyenne et écart-type sont largement utilisées dans les études statistiques et très faciles à comprendre par la communauté scientifique, on a choisi de générer un modèle moyen et l'écart-type associé d'une manière similaire aux atlas cornéens présentés dans [57] et [59].

Par ailleurs, on propose aussi de générer les cartes qui correspondent à la médiane, min et le max pour une description plus précise de la population de cornées utilisée. Cependant, plusieurs points sont manquants dans les cartes topographiques recalées qui sont utilisées dans la construction de l'atlas. Alors, on se propose aussi de construire l'image qui décrit le nombre de cartes topographiques utilisé pour chaque point construit dans l'atlas. En visualisant cette dernière, on peut apercevoir la dégradation de la précision de l'atlas en fonction nombre de cartes topographiques par point. Dans ce qui suit, on va présenter les différentes cartes de l'atlas cornéen construit à partir de notre base d'image.

5.2.2.1. Les moyennes

Élévations réelles

Nous commençons d'abord par estimer la forme moyenne de surfaces antérieure et postérieure de l'atlas. La moyenne à chaque point (x, y) de la surface antérieure de l'atlas (respectivement postérieure) est donnée par la formule suivante :

$$élévation_moyenne_{x,y} = \frac{1}{n_{x,y}} \sum_{i=1}^{n_{x,y}} élévation_{x,y}(i)$$

où $n_{x,y}$ est le nombre de cartes topographiques des surfaces antérieures (respectivement postérieures) par point donné par la Figure 5.7 (respectivement la Figure 5.9).

Les moyennes des surfaces antérieures et postérieures sont représentées par les Figures 5.6 et 5.8. L'image moyenne des surfaces antérieures est composée d'un nombre de points égal à 8862 au total et la valeur de l'élévation au sommet est égale à $2,8277\text{ mm}$. Pour l'image de la moyenne des surfaces postérieures, elle est composée d'un nombre de points égal à 7055 au total et la valeur de l'élévation au sommet est égale à $2,2331\text{ mm}$.

Les régions centrales d'images moyennes sont bien formées par un nombre de cartes topographiques par point plus important que les régions périphériques. Par conséquent, la précision de l'atlas se dégrade en se dirigeant de centre vers la périphérie.

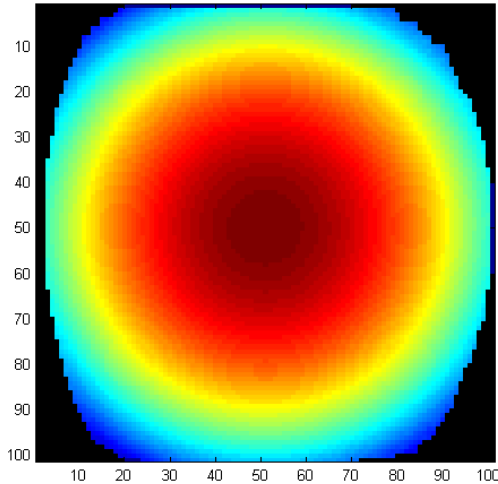


Figure 5.6 Élévation réelle de la surface antérieure moyenne

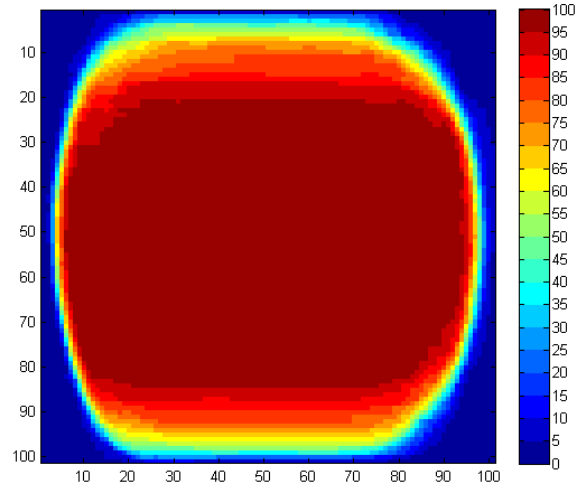


Figure 5.7 Nombre de carte topographiques à chaque point utilisé pour construire la surface antérieure moyenne

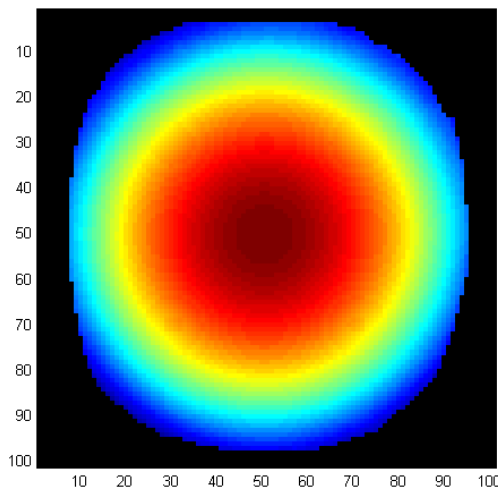


Figure 5.8 Élévation réelle de la surface postérieure moyenne

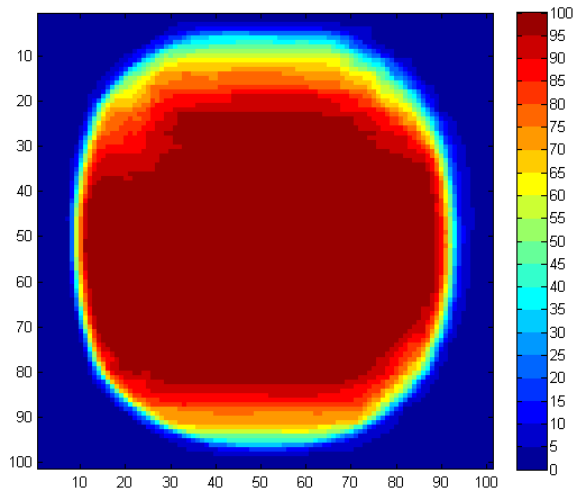


Figure 5.9 Nombre de carte topographiques à chaque point utilisé pour construire la surface postérieure moyenne

Élévations par rapport à une BFS

On a mentionné dans le premier chapitre que l'élévation de surfaces antérieure et postérieure sont calculées et représentées généralement par rapport une surface de référence.

La plupart du temps cette surface est une sphère appelée BFS (Best-Fit Sphere) obtenue en ajustant une sphère aux points formant les différentes surfaces de la cornée.

Pour cela, on se propose de calculer les BFS correspondantes aux élévations réelles moyennes de l'atlas construit. D'abord, on a estimé les paramètres initiaux des BFS (rayons et centres) par des moindres carrés. Ensuite, les paramètres ont été raffinés par la méthode de Gauss-Newton pour obtenir la solution finale. Les différentes étapes de l'algorithme utilisé pour déterminer les paramètres des BFS sont détaillées dans [59]. L'algorithme prend en moyenne 3 itérations pour obtenir une précision inférieure à 10^{-6} mm.

	Centre de la BFS calculée	Rayon de la BFS calculée
Élévation moyenne antérieure	(-0,1119 ; 0,0046; -5,1697)	7,9821 mm
Élévation moyenne postérieure	(-0,1162; -0,0204; -4,4746)	6,6699 mm

Tableau 5.6 Paramètres des BFS associées aux surfaces moyennes de l'atlas cornéen

Finalement, on a calculé les élévations moyennes des surfaces par rapport aux BFS correspondantes en soustrayant les surfaces des BFS calculées des élévations réelles moyennes des surfaces de l'atlas. Cela permet de mieux visualiser les variations de la forme de la cornée.

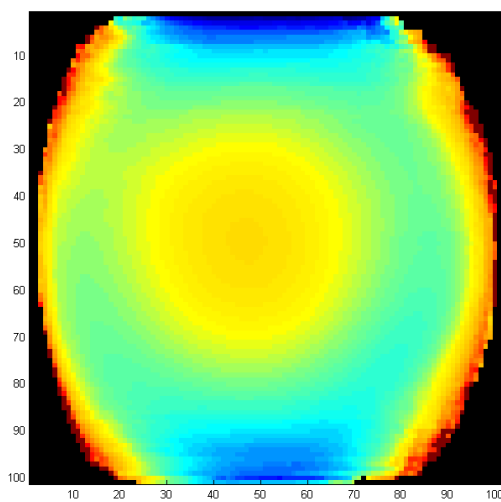


Figure 5.10 Élévation moyenne par rapport au BFS de la surface antérieure

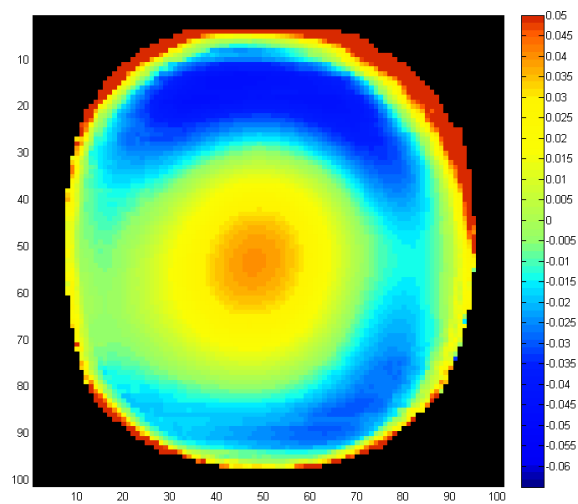


Figure 5.11 Élévation moyenne par rapport au BFS de la surface postérieure

Les Figures 5.10 et 5.11 représentent respectivement les élévations antérieures et postérieures de l’atlas par rapport aux BFS. Les élévations centrales ($-2,9\text{ mm} \leq x \leq 2,2\text{ mm}$ et $-2,7\text{ mm} \leq y \leq 2,5\text{ mm}$) sont légèrement positives (les points sont situés au-dessus de la BFS) et sont représentées par des couleurs chaudes (jaune, orange). Les élévations intermédiaires (entre les régions centrales et périphériques) sont légèrement négatives (les points sont situés au dessous de la BFS) et sont représentées par des couleurs froides (bleu). La couleur verte représente l’élévation de la BFS. L’élévation au sommet de la surface antérieure par rapport à la BFS de l’atlas est égale à $0,0162\text{ mm}$. Pour la surface postérieure de l’atlas, l’élévation au sommet par rapport à la BFS est évaluée à $0,0388\text{ mm}$.

Ceci concorde bien avec les résultats attendus. En effet, les cornées saines (normales), ont bien une forme cornéenne comme celle décrite ci-dessus.

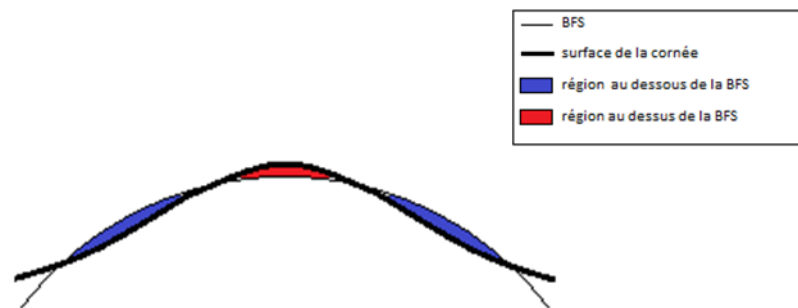


Figure 4. 12 La différence de la cornée normale par rapport au BFS

On peut constater aussi qu’on a plus de points dont les élévations sont positives situés dans la partie gauche de l’atlas (plus de couleurs chaudes à gauche de l’atlas). Ceci est expliqué par le fait que la courbure de la cornée normale est plus prononcée du côté nasal que du côté temporal. On s’attendait à de tels résultats puisque les cornées utilisées pour construire l’atlas sont toutes des cornées des yeux droits.

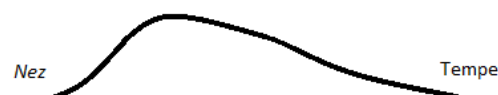


Figure 4. 13 Forme de la cornée

5.2.2.2. Les écarts-types

Pour mieux étudier la population des cornées normales utilisée dans ce projet, on va présenter les images des écarts-types antérieure et postérieure. Ceci permet de décrire la variabilité à l'intérieur de la base d'images utilisée pour construire l'atlas. L'écart-type de chaque point (x, y) de la surface antérieure de l'atlas (respectivement postérieure) est donné par la formule suivante :

$$\text{écart_type}_{x,y} = \frac{1}{n_{x,y}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{x,y}} (\text{élévation}_{x,y}(i) - \text{élévation_moyenne}_{x,y})^2}$$

Les écarts-types des surfaces antérieures et postérieures de l'atlas sont donnés par les cartes dans les Figures 5.14 et 5.15. Pour une meilleure visualisation de la variabilité autour des surfaces moyennes antérieure et postérieure, une représentation du profil méridien horizontale et verticale a été réalisée (Figure 5.16). Les intervalles d'écart-type représentés dans la figure sont multipliés par 10 pour la visualisation.

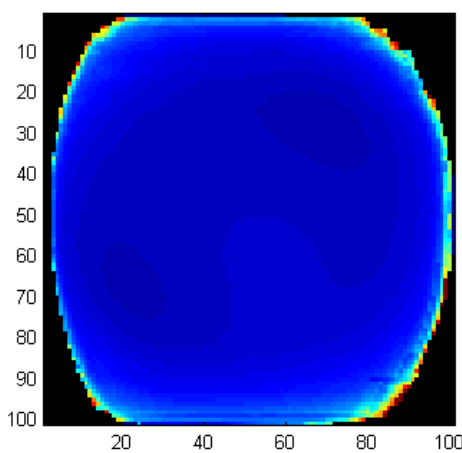


Figure 5.14 Écart-type associé à l'élévation moyenne de la surface antérieure

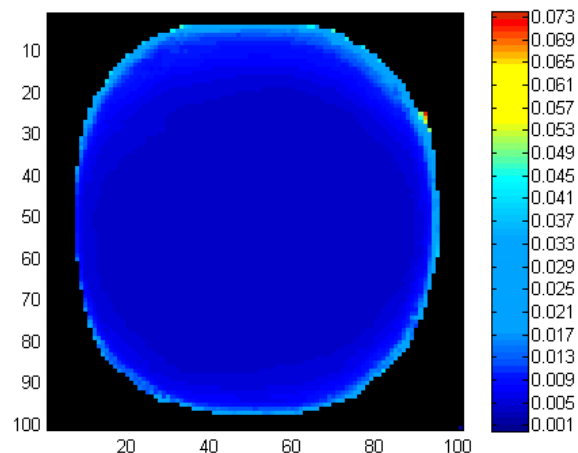


Figure 5.15 Écart-type associé à l'élévation moyenne de la surface postérieure

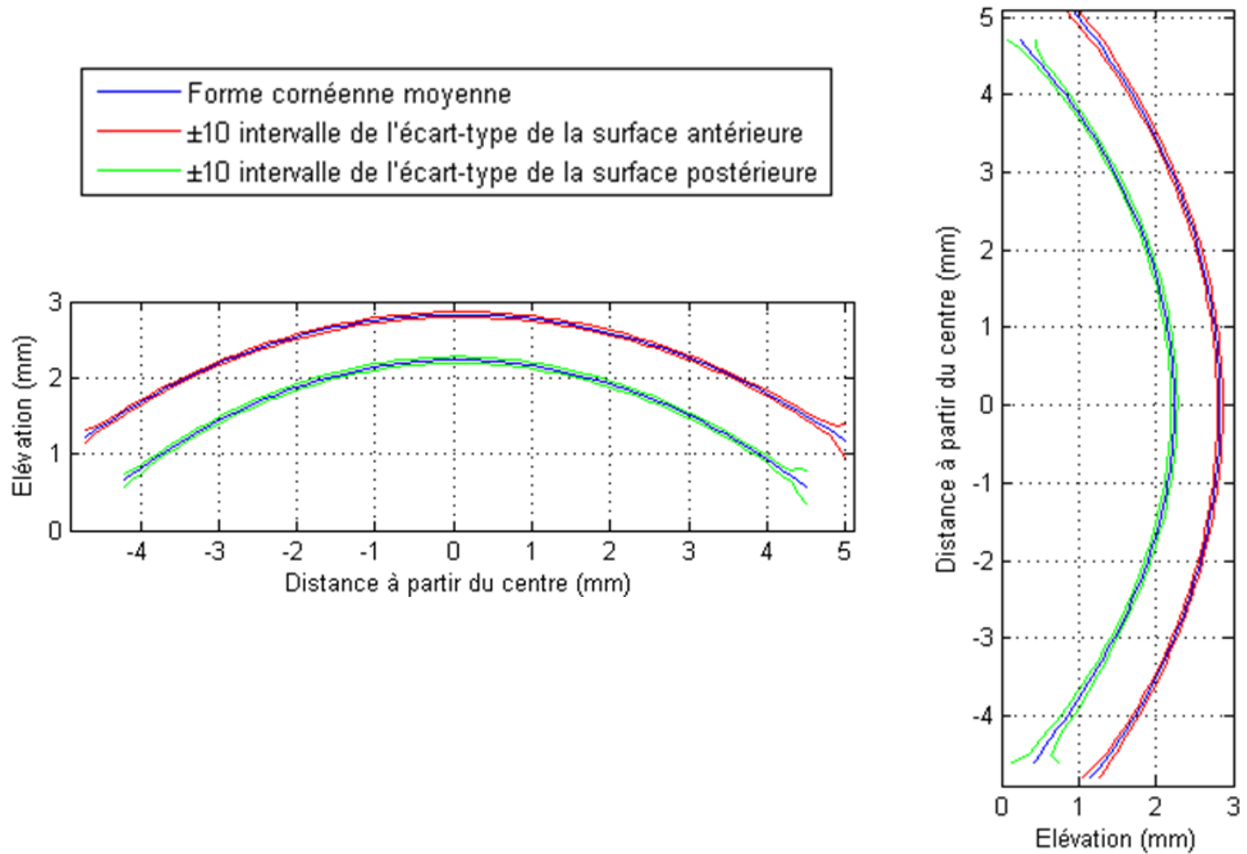


Figure 5.16 Coupe de profile méridien horizontal et verticale de l'Atlas cornéen construit

Les écart-types évalués aux sommets des surfaces moyennes antérieure et postérieure sont rapportés dans le tableau ci-dessous :

	Élévation réelle moyenne \pm écart
Surface antérieure de l'atlas (mm)	2,8277 \pm 0,0034
Surface postérieure de l'atlas (mm)	2,2331 \pm 0,0041

Tableau 5.7 Écarts-types au sommet

Les Figures montrent que l'écart-type de la surface postérieure moyenne a une variabilité légèrement supérieure à celle de la surface antérieure moyenne. Ceci est dû au fait que les élévations antérieures sont évaluées avec plus de précision que les élévations postérieures de l'Orbscan. On a un écart-type qui varie entre 0,0032 mm et 0,0036 mm pour la surface antérieure et 0,0040 mm et 0,0048 mm pour la surface postérieure dans les régions centrales et intermédiaires ($-4,5 \text{ mm} \leq x \leq 4,5 \text{ mm}$ et $-4,5 \text{ mm} \leq y \leq 4,5 \text{ mm}$). Pour ces

régions, une telle faible variabilité reflète la bonne qualité de recalage utilisé dans l'étape de la normalisation. Pour les zones périphériques, on a un écart-type très important pour les deux surfaces. Ceci est expliqué par le fait que l'Orbscan est moins précis pour l'évaluation des élévations en périphérie.

5.2.2.3. Pachymétrie

Puisque la mesure de l'épaisseur cornéenne (la pachymétrie) est indispensable avant la plupart des chirurgies (réfractives, laser,...) pour éviter toutes sortes d'accidents lorsqu'une partie de la cornée doit être creusée, on se propose de calculer l'épaisseur moyenne de l'atlas construit. Cette dernière est évaluée selon la méthode utilisée par l'Orbscan. D'abord, l'épaisseur à chaque point est évaluée comme la différence entre l'élévation de la surface antérieure moyenne et celle de la surface postérieure. Ensuite, le résultat est multiplié par le facteur de correction de l'Orbscan (appelé facteur acoustique égal à 0,92).

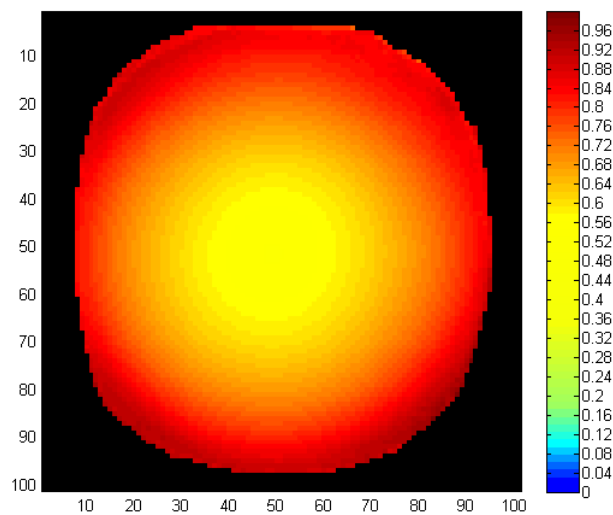


Figure 5.17 Carte de l'épaisseur de l'atlas cornéen normale

La Figure 5.17 représente la carte d'épaisseur moyenne en tout point de l'atlas. Comme on peut le constater l'épaisseur augmente en allant des régions centrales vers les périphériques. L'épaisseur au sommet est évaluée à $0,5470\text{ mm}$. Le point le plus mince est d'épaisseur $0,5465\text{ mm}$ et il est situé à $(-0,1\text{ mm}, 0,1\text{ mm})$. Des résultats similaires ont été rapportés dans [57].

5.3. Résumé de la méthode

La Figure 5.17 présentée ci-dessous donne une vue d'ensemble sur la méthode utilisée dans ce projet pour construire l'atlas numérique 3D de la cornée humaine.

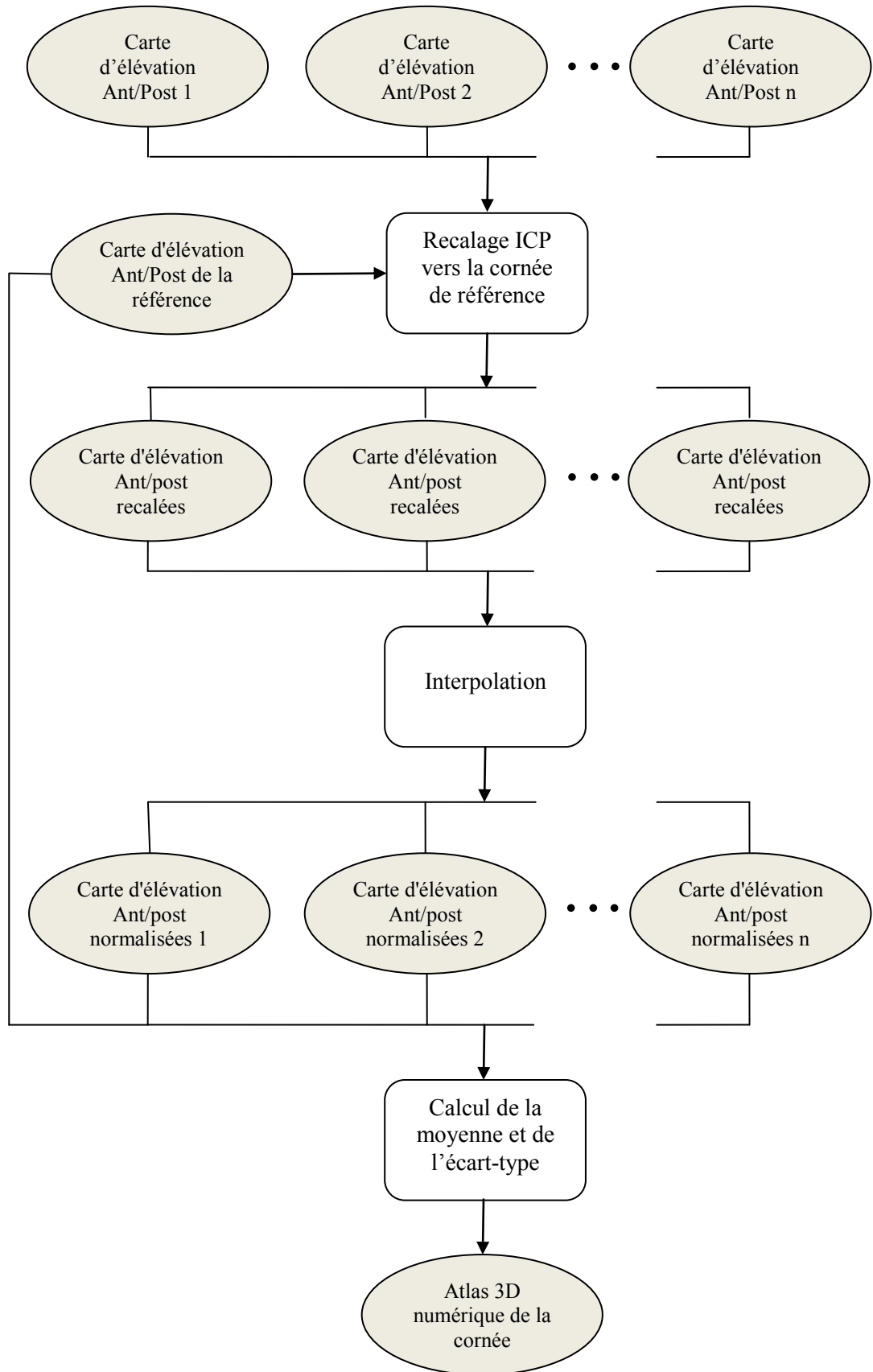


Figure 5.18 Schémas général de la méthode adoptée pour la construction de l'atlas cornéen

5.4. Autres méthodes

La plupart des méthodes de construction d'atlas 3D cornéens se compose généralement des mêmes étapes que la méthode qu'on a proposée dans ce travail. La construction de l'atlas s'effectue toujours par le calcul des images moyennes et les écarts-types associés. D'autres images peuvent être aussi ajoutées comme la médiane, le min, le max, etc....

Cependant, chacune de ces méthodes repose sur des techniques de recalage différentes pendant l'étape de la normalisation. Cette dernière est une étape indispensable dans la création de l'atlas cornéen et affecte considérablement la qualité de l'atlas obtenu surtout lorsqu'on travaille sur une base d'images hétérogène. Dans ce qui suit, on va discuter différentes techniques de normalisation qui ont été utilisées pour construire des atlas cornéens dans [58][59][57].

5.4.1. Normalisation par rapport au sommet

Cette méthode a été proposée dans le travail réalisé par [58]. Elle consiste à ramener les sommets de toutes les cornées de la population vers le même point. Cette façon simple de recalage introduit de grandes (fortes) variations dans les images des écarts-types de l'atlas construit.

L'atlas construit en utilisant une telle méthode souffre de hautes variations dès qu'on s'éloigne du sommet. Les images d'écarts-types de l'atlas ont été présentées dans [57] et montre qu'on a un écart-type important (supérieur à $0,0250\text{ mm}$) en sortant du cercle de rayon 2 mm et centré sur le sommet de la cornée. Cette méthode de recalage ne garantit pas l'estimation de la translation optimale. En plus, elle ne tient pas compte d'autres transformations qui existent réellement entre les images de cornées (changement d'échelle, rotation). Toute autre technique qui consiste à normaliser par rapport à un autre point ou région (par exemple: moyenne de l'élévation) souffre des mêmes problèmes.

5.4.2. Normalisation par rapport à la BFS standard

Cette méthode a été proposée dans le travail réalisé par [59]. Un recalage relativement plus fiable a été utilisé dans la normalisation d'images de cornées. Le recalage est effectué en estimant la transformation (changement d'échelle et translation) entre la BFS standard (sphère de centre $(0,0,-6)$ et de rayon 8 mm) et chacune des BFS correspondantes aux surfaces de cornées utilisées. La translation est évaluée en effectuant la différence entre le centre de chaque BFS et celui de la BFS standard. Le changement d'échelle est évalué en effectuant le rapport du rayon de chaque BFS par le rayon de la BFS standard. Les images de surface antérieure moyenne et l'écart-type associé ont été générés et présentés dans [58]. Ces résultats montrent que la qualité de l'atlas construit est supérieure à celui construit en normalisant par le sommet. Cependant, l'image de l'écart-type présentée montre une grande variabilité en dehors du cercle de rayon 3 mm centré sur le sommet de la cornée. Le changement d'échelle et la translation sont loin d'être optimaux.

5.4.3. Normalisation par rapport à la BFS moyenne

Cette approche de normalisation a été proposée par [57]. Cette méthode repose aussi sur l'utilisation de la BFS pour estimer la transformation. Cependant, la BFS référence utilisée dans ce travail est une BFS moyenne calculée en moyennant les BFS de surfaces antérieures de la population de cornées. Le recalage est effectué en appliquant la transformation (changement d'échelle et translation) estimée entre la BFS moyenne et chacune des BFS de cornées de la population. Le changement d'échelle et translation sont calculés d'une manière similaire à la technique précédente. Dans ce cas, les images d'écarts-types fournis dans ce travail [57] de l'atlas construit montre une faible variation (un écart-type inférieur à $6\ \mu\text{m}$) à l'intérieur d'un cercle (de rayon $4,4\text{ mm}$) plus large que celui construit en normalisant par la BFS standard. Grâce à des atlas construits par cette méthode, une classification des cornées a été réalisée avec succès. La transformation estimée pendant un tel recalage est très proche de la transformation optimale. Cependant, cette approche ne tient pas compte de la rotation (des faibles rotations existent souvent dans le recalage des images de cornées). Par ailleurs, elle repose aussi sur la BFS pour calculer la transformation (la BFS de la surface antérieure a été

favorisée dans ce travail) et pas directement sur les élévations réelles de surfaces antérieures et postérieures de cornées.

5.5. Discussion

Dans la méthode proposée dans notre travail, l'étape de normalisation repose sur tout un algorithme de recalage ICP pour aligner les images de la base vers l'image de référence sélectionnée. En effet, une variante de l'algorithme de recalage ICP qui tient compte du changement d'échelle a été adaptée au format d'images de cornées. L'estimation de la transformation s'effectue simultanément entre les surfaces antérieure et postérieure de chacune des cornées de la base et les surfaces antérieure et postérieure de la cornée de référence d'une manière itérative jusqu'à l'obtention de la transformation optimale. La transformation optimale estimée par la variante d'ICP élaboré tient compte de la translation, changement d'échelle et la rotation et assure un meilleur alignement en minimisant les distances entre les images de la base et l'image référence. En se reposant sur ce type de recalage précis et robuste, nous avons construit un atlas cornéen normal (à partir des cornées saines) numérique 3D composé des images moyennes et les écarts-types associés.

Dans ce projet, la normalisation a été réalisée en opérant directement sur les données (les élévations réelles de surfaces antérieures et postérieures de cornées) sans passer par l'intermédiaire de BFS. Nous avons considéré aussi la rotation, malgré que cette dernière soit faible, dans le recalage contrairement aux travaux dans [57], [58] et [59]. Par conséquent, la qualité d'alignement est supérieure dans notre travail et a permis un calcul plus exact et précis de la forme cornéenne moyenne et l'écart-type associé. Par ailleurs, nous avons obtenu une faible variabilité dans les images des écarts-types (un écart-type inférieur à $4.8 \mu m$ pour la surface postérieure et inférieur à $4.0 \mu m$ pour la surface antérieure) dans un cercle (de rayon $4,8 mm$) plus large que [57] et [59].

Les observations réalisées à partir de l'atlas qu'on a construit sont très similaires à celle présentées dans [57]. Ceci est expliqué par le fait que la transformation estimée en normalisant par BFS moyenne est très proche de la transformation optimale estimée par la variante d'ICP utilisé dans notre projet.

Pour la sélection de la cornée de référence, un choix logique a été réalisé parmi les cornées de la base utilisée en considérant l'image de la cornée qui a le moins de points manquants et qui a une forme qui peut approximer la forme moyenne de la cornée. Ce choix a conduit à la construction d'un atlas cornéen précis. Cependant, cette opération reste manuelle et dépendante de la base utilisée. Pour remédier à ceci, on peut procéder par sélection automatique de l'image référence comme étant l'image de la cornée qui minimise la somme des distances entre toutes les images comme a été fait pour la sélection de l'image de cerveau référence dans [60]. Une deuxième solution possible qui permet d'être complètement indépendant du choix de la cornée de référence : on applique sur l'atlas la transformation moyenne inverse obtenue en moyennant toutes les transformations sur n'importe quelle référence sélectionnée de la base comme montrée dans [55].

L'initialisation considérée lors de l'opération de recalage réalisée était l'identité puisque les images sont assez proches et superposées. Or on a mentionné que des résultats obtenus en normalisant par la BFS moyenne sont très proches aux résultats obtenus dans ce projet. Par conséquent, on peut considérer comme transformation initiale pour le recalage celle calculée à partir de la BFS moyenne. Après, on peut raffiner la solution en utilisant la variante d'ICP élaborée dans ce travail ce qui va permettre d'accélérer la convergence de ce dernier vers la solution finale.

Les surfaces antérieures et postérieures ont été traitées avec la même priorité durant l'étape de la normalisation. Or on a mentionné que l'Orbscan évalue d'une manière moins précise les élévations de la surface postérieure. Dans cette situation, il serait préférable d'affecter des poids pour donner plus d'importance aux points de la surface antérieure. Des poids w_i peuvent être affectés au point p_i de la cornée comme suit:

$$w_i = \begin{cases} w & \text{si } p_i \in S_{ant} \\ w' & \text{si } p_i \in S_{post} \end{cases}$$

Où w_i peut être évalué en fonction du nombre de points sur la surface ou tout autre critère qui reflète l'imprécision de la surface postérieure par rapport à la surface antérieure. De la

même manière, on pourrait aussi envisager des poids différents pour la région centrale et la périphérie puisque les points en périphérie sont légèrement moins précis.

Dans notre méthode, aucun traitement spécifique n'a été adopté pour les points aberrants qui se trouvent sur les régions périphériques. Une heuristique est requise soit pour corriger ces points ou les éliminer complètement.

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, l'atlas 3D cornéen normal a été construit. Ce dernier est composé des moyennes de surfaces antérieures et postérieures et les écarts-types associés. D'abord, on a présenté la démarche générale pour la construction de l'atlas 3D anatomique. Ensuite on a détaillé chacune des étapes suivies pour la construction de l'atlas cornéen. Quelques observations et résultats intermédiaires ont été présentés au fur et à mesure de la construction. Ensuite, on a présenté d'autres méthodes qui ont été utilisées pour la construction de l'atlas cornéen. Enfin, une discussion a été réalisée concernant les avantages et les inconvénients de notre approche.

Chapitre 6

Conclusion

Suite à l'évolution connue par les technologies dans l'acquisition des images médicales, il est devenu possible de construire des atlas anatomiques numériques tridimensionnels d'organes humains avec grande précision et une meilleure qualité. Dès ce moment, des atlas médicaux ont été construits et ont été largement utilisés. Ces atlas ont été reconnus comme des outils efficaces qui permettent une meilleure compréhension des caractéristiques anatomiques et fonctionnelles d'organes humains et aussi une caractérisation et une comparaison de différente population selon différents critères (âges, état : saines, affectés ...)

En particulier, plusieurs atlas de la cornée humaine ont été construits récemment afin de développer une meilleure connaissance de la forme cornéenne et être utilisés comme outils de diagnostic de pathologies ou anomalies de la forme cornéenne. Malheureusement, les méthodes adoptées pour la construction des atlas cornéens reposent sur des techniques de recalage primitives et imprécises. Le but de notre travail était de développer une nouvelle méthode de construction d'un atlas cornéen qui repose sur une technique de recalage plus robuste et précise.

Plus concrètement, dans ce mémoire, nous avons décrit une nouvelle démarche de construction d'un atlas anatomique numérique 3D de la cornée humaine. Nous nous sommes basés sur une variante de l'algorithme de recalage ICP qui a été adapté aux images de cornées. L'approche utilisée pour la normalisation dans ce projet est complètement indépendante de l'utilisation de la BFS pour l'alignement (recalage). L'alignement est assuré par une variante de l'algorithme ICP qui a été développé dans le cadre de ce projet qui tient compte de la rotation, changement d'échelle et translation pour une meilleure précision et robustesse. La précision et la robustesse sont requises dans la construction de l'atlas cornéen afin de rendre la détection de tout écart-type par rapport à la forme normale de la cornée significatif plus facile. Par conséquent, une classification plus robuste et fiable pour les cornées humaines.

Dans ce projet, des cartes topographiques acquises par le topographe cornéen l'Orbscan II ont été utilisées et un atlas cornéen normal (cornées saines) a été construit selon notre méthode composé de : surfaces antérieure et postérieure moyennes et les écarts-types associés. Ce mémoire présenté a la structure suivante :

Le premier chapitre a été une mise en contexte où on a exposé dans une première partie l'anatomie de l'œil, plus précisément la cornée. Dans sa deuxième partie, on s'est intéressé aux appareils et aux techniques pour obtenir les informations sur les cornées humaines.

Le deuxième chapitre a été consacré pour le problème classique dans le domaine de vision par ordinateur : le problème de recalage. L'algorithme ICP connu comme une solution à ce genre de problème a été rigoureusement détaillé ainsi que les variantes les plus populaires de ce dernier.

Le troisième chapitre a illustré les réalisations des différents tests sur les algorithmes implémentés afin d'élaborer une variante de l'algorithme ICP pour l'alignement des images de cornées.

Dans le dernier chapitre, on a détaillé la méthodologie adoptée pour la construction de l'atlas cornéen puis on a présenté et comparé ce dernier avec d'autres déjà existants.

Comme travaux futurs, nous comptons construire des atlas cornéens pour une population de cornées myopes, de cornées hypermétropes et des cornées qui souffrent de certaines pathologies. Nous allons caractériser ces derniers par différents attributs et essayer d'effectuer une classification sur une nouvelle base qui contient un mélange de cornées (saines, myopes, etc...) pour valider nos atlas.

Bibliographie

- [1] *Institut national de la santé* Available: <http://www.nei.nih.gov/health>
- [2] *site web dédié à l'ophtalmologie*. Available: <http://ophtazone.no-ip.com/Index.htm>
- [3] S. Richard, "Reconstruction géométrique de la cornée par vidéokératographie ", Faculté des sciences et techniques de Saint-Jérôme Université de Aix-Marseille III 2005.
- [4] <http://fr.wikipedia.org>
- [5] M. W. Fung, "Corneal Topography and Imaging," 2012.
- [6] D. D. Gatinel. Available: <http://www.gatinel.com/>
- [7] R. A. Applegate and H. C. Howland, "Noninvasive measurement of corneal topography," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 14, pp. 30-42, 1995.
- [8] F. A. Guarnieri and J. C. Guarnieri, "Comparison of Placido-based, rasterstereography, and slit-scan corneal topography systems," *Journal of Refractive Surgery*, vol. 18, pp. 169-76, 2002.
- [9] Y. S. Byun, S. H. Chung, Y. G. Park, and C. K. Joo, "Posterior corneal curvature assessment after Epi-LASIK for myopia: comparison of Orbscan II and Pentacam imaging," *Korean Journal of Ophthalmology*, vol. 26, pp. 6-9, 2012.
- [10] I. Jalbert, F. Stapleton, E. Papas, D. F. Sweeney, and M. Coroneo, "In vivo confocal microscopy of the human cornea," *British Journal of Ophthalmology*, vol. 87, pp. 225-36, 2003.
- [11] S. C. Kaufman, D. C. Musch, M. W. Belin, E. J. Cohen, D. M. Meisler, W. J. Reinhart, I. J. Udell, and W. S. Van Meter, "Confocal microscopy: a report by the American Academy of Ophthalmology," *Ophthalmology*, vol. 111, pp. 396-406, 2004.
- [12] B. E. Bouma and G. J. Tearney, *Optical Coherence Tomography*: Marcel Dekker, 2002.
- [13] M. D. Adel Barbara, *Textbook on Keratoconus: New Insights*: Jp Medical Pub, 2011.
- [14] G. Cairns, C. N. J. McGhee, M. J. Collins, H. Owens, and G. D. Gamble, "Accuracy of orbscan II slit-scanning elevation topography," *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, vol. 28, pp. 2181-2187, 2002.
- [15] M. J. Giraldez Fernandez, A. Diaz Rey, A. Cervino, and E. Yebra-Pimentel, "A comparison of two pachymetric systems: slit-scanning and ultrasonic," *CLAO Journal: official publication of the Contact Lens Association of Ophthalmologists*, vol. 28, pp. 221-3, 2002.
- [16] M. A. Fakhry, A. Artola, J. I. Belda, M. J. Ayala, and J. L. Alio, "Comparison of corneal pachymetry using ultrasound and Orbscan II," *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, vol. 28, pp. 248-52, 2002.
- [17] L. Hongdong and R. Hartley, "The 3D-3D Registration Problem Revisited," *11th IEEE International Conference on Computer Vision ICCV 2007*, pp. 1-8, 2007.
- [18] B. K. P. Horn, "Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions,"

- Journal of Optical Society of America*, vol. 4, pp. 629-642, 1987.
- [19] S. Du, N. Zheng, L. Xiong, S. Ying, and J. Xue, "Scaling iterative closest point algorithm for registration of m-D point sets," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 21, pp. 442-452, 2010.
- [20] K. S. Arun, T. S. Huang, and S. D. Blostein, "Least-Squares Fitting of Two 3-D Point Sets," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 9, pp. 698-700, 1987.
- [21] B. K. P. Horn, H. M. Hilden, and S. Negahdaripour, "Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices," *Journal of Optical Society of America*, vol. 5, pp. 1127-1135, 1988.
- [22] M. W. Walker, L. Shao, and R. A. Volz, "Estimating 3-D location parameters using dual number quaternions," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 54, pp. 358-367, 1991.
- [23] D. W. Eggert, A. Lorusso, and R. B. Fisher, "Estimating 3-D rigid body transformations: a comparison of four major algorithms," *Machine Vision and Applications*, vol. 9, pp. 272-290, 1997.
- [24] M. Kazhdan, T. Funkhouser, and S. Rusinkiewicz, "Shape matching and anisotropy," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 23, pp. 623-629, 2004.
- [25] M. Leordeanu and M. Hebert, "A Spectral Technique for Correspondence Problems Using Pairwise Constraints," presented at the Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision, vol. 2, 2005.
- [26] S. Sclaroff and A. P. Pentland, "Modal Matching for Correspondence and Recognition," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, pp. 545-561, 1995.
- [27] P. J. Besl and N. D. McKay, "A Method for Registration of 3-D Shapes," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, pp. 239-256, 1992.
- [28] Y. Chen and G. Medioni, "Object modeling by registration of multiple range images," *In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2724-2729 vol.3, 1991.
- [29] S. Gold, A. Rangarajan, C.-P. Lu, S. Pappu, and E. Mjolsness, "New algorithms for 2D and 3D point matching: pose estimation and correspondence," *Pattern Recognition*, vol. 31, pp. 1019-1031, 1998.
- [30] S. Rusinkiewicz and M. Levoy, "Efficient variants of the ICP algorithm," *In Proceedings of 3rd International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 145-152, 2001.
- [31] T. Masuda, K. Sakaue, and N. Yokoya, "Registration and integration of multiple range images for 3-D model construction," *In Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 879-883 vol.1, 1996.

- [32] G. Turk and M. Levoy, "Zippered polygon meshes from range images," presented at the Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 1994.
- [33] S. Weik, "Registration of 3-D partial surface models using luminance and depth information," *In Proceedings of International Conference on Recent Advances in 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 93-100, 1997.
- [34] G. Godin, M. Rioux, and R. Baribeau, "Three-dimensional registration using range and intensity information," pp. 279-290, 1994.
- [35] Guy Godin, Denis Laurendeau, and R. Bergevin, "A Method for the Registration of Attributed Range Images."
- [36] G. Godin and P. Boulanger, "Range Image Registration Through Viewpoint Invariant Computation of Curvature," Zurich, Switzerland, 1995.
- [37] K. Pulli, "Multiview registration for large data sets," *In Proceedings of 2nd International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 160-168, 1999.
- [38] A. E. Johnson and K. Sing Bing, "Registration and integration of textured 3-D data," *In Proceedings of International Conference on Recent Advances in 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 234-241, 1997.
- [39] J. Feldmar, N. Ayache, and F. Betting, "3D-2D Projective Registration of Free-Form Curves and Surfaces," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 65, pp. 403-424, 1997.
- [40] C. Schutz, T. Jost, and H. Hugli, "Multi-feature matching algorithm for free-form 3D surface registration," *In Proceedings of Fourteenth International Conference on Pattern Recognition*, pp. 982-984 vol.2, 1998.
- [41] Z. Zhang, "Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces," *International Journal of Computer Vision*, vol. 13, pp. 119-152, 1994.
- [42] C. Dorai, W. Gang, A. K. Jain, and C. Mercer, "From images to models: automatic 3D object model construction from multiple views," *In Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 770-774 vol.1, 1996.
- [43] R. Benjemaa and F. Scmitt, "Registering range views of complex objects," *In Proceedings of the 4th European Conferences on Rapid Prototyping*, Paris, p. 12, 1995.
- [44] R. Benjemaa and F. Schmitt, "Recalage rapide de surfaces 3D après projection dans des multi-zbuffers," *In Proceedings of the 5th European Conferences on Rapid Prototyping*, Paris, p. 11, 1996.
- [45] D. A. Simon, M. Hebert, and T. Kanade, "Techniques for fast and accurate intrasurgical registration," *Jornal Image Guided Surgery*, vol. 1, pp. 17-29, 1995.
- [46] Y. Shihui, P. Jigen, D. Shaoyi, and Q. Hong, "A Scale Stretch Method Based on ICP for 3D Data Registration," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 6, pp. 559-565, 2009.
- [47] D. GATINEL, M. HAOUAT and T. HOANG-XUAN, *étude des paramètres permettant*

- la description mathématique de l'asphéricité cornéenne*, vol. 25. Paris, FRANCE: Masson, 2002.
- [48] P. W. Churms, "The sagitta of a toroidal surface in an oblique meridian," *Ophthalmic Physiol Opt*, vol. 1, pp. 29-38, 1981.
- [49] H. Burek and W. A. Douthwaite, "Mathematical models of the general corneal surface," *Ophthalmic Physiol Opt*, vol. 13, pp. 68-72, 1993.
- [50] S. Talu and M. Talu, "An Overview on Mathematical Models of Human Corneal Surface," *In International Conference on Advancements of Medicine and Health Care through Technology*, vol. 26, S. Vlad, R. Ciupa, and A. Nicu, Eds., ed: Springer Berlin Heidelberg, pp. 291-294, 2009.
- [51] M. Guillon, D. P. Lydon, and C. Wilson, "Corneal topography: a clinical model," *Ophthalmic Physiol Opt*, vol. 6, pp. 47-56, 1986.
- [52] T. Jost and H. Hugli, "A multi-resolution ICP with heuristic closest point search for fast and robust 3D registration of range images," *In Proceedings of Fourth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 427-433, 2003.
- [53] G. SUBSOL, J.-P. THIRION and N. AYACHE, *Construction automatique d'atlas anatomiques morphométriques à partir d'images médicales tridimensionnelles : application à un atlas du crâne*. Cachan, FRANCE: Lavoisier, 1996.
- [54] L. Longtin, "Atlas Construction for Measuring the Variability of Complex Anatomical Structures," Département de génie informatique et génie logiciel, École Polytechnique de Montréal, 2012.
- [55] A. Guimond, J. Meunier, and J.-P. Thirion, "Average Brain Models: A Convergence Study," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 77, pp. 192-210, 2000.
- [56] O. Commowick, "Création et utilisation d'atlas anatomiques numériques pour la radiothérapie
- [57] J. F. Laliberte, J. Meunier, M. Chagnon, J. C. Kieffer, and I. Brunette, "Construction of a 3-D atlas of corneal shape," *Investigative Ophthalmology and Visual Science*, vol. 48, pp. 1072-8, 2007.
- [58] K. Mriss, "Atlas numérique tridimensionnel pour le dépistage des chirurgies laser de la cornée humaine ", Département d'informatique et de recherche opérationnelle Université de Montréal, 2003.
- [59] M.-E. Saint-Amour, "Atlas numérique 3D de la cornée humaine," Faculté des arts et des sciences Université de Montréal, 2004.
- [60] Marsland, S., C. Twining, et al. (2003). Groupwise Non-rigid Registration Using Polyharmonic Clamped-Plate Splines. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI*. R. Ellis and T. Peters, Springer Berlin Heidelberg. 2879: 771-779, 2003.