

Université de Montréal

Dynamo Magnétohydrodynamique en champ moyen

par
Corinne Simard

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Astrophysique

juin, 2012

© Corinne Simard, 2012.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Dynamo Magnétohydrodynamique en champ moyen

présenté par:

Corinne Simard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

René Doyon,	président-rapporteur
Paul Charbonneau,	directeur de recherche
Pierre Bastien,	membre du jury

Mémoire accepté le: 18 septembre 2012

RÉSUMÉ

De nos jours, il est bien accepté que le cycle magnétique de 11 ans du Soleil est l'oeuvre d'une dynamo interne présente dans la zone convective. Bien qu'avec la puissance de calculs des ordinateurs actuels il soit possible, à l'aide de véritables simulations magnétohydrodynamiques, de résoudre le champ magnétique et la vitesse dans toutes les directions spatiales, il n'en reste pas moins que pour étudier l'évolution temporelle et spatiale de la dynamo solaire à grande échelle, il reste avantageux de travailler avec des modèles plus simples. Ainsi, nous avons utilisé un modèle simplifié de la dynamo solaire, nommé modèle de champ moyen, pour mieux comprendre les mécanismes importants à l'origine et au maintien de la dynamo solaire.

L'insertion d'un tenseur- α complet dans un modèle dynamo de champ moyen, provenant d'un modèle global-MHD [Ghizaru *et al.*, 2010] de la convection solaire, nous a permis d'approfondir le rôle que peut jouer la force électromotrice dans les cycles magnétiques produits par ce modèle global. De cette façon, nous avons pu reproduire certaines caractéristiques observées dans les cycles magnétiques provenant de la simulation de Ghizaru *et al.* [2010].

Tout d'abord, le champ magnétique produit par le modèle de champ moyen présente deux modes dynamo distincts. Ces modes, de périodes similaires, sont présents et localisés sensiblement aux mêmes rayons et latitudes que ceux produits par le modèle global. Le fait que l'on puisse reproduire ces deux modes dynamo est dû à la complexité spatiale du tenseur- α . Par contre, le rapport entre les périodes des deux modes présents dans le modèle de champ moyen diffère significativement de celui trouvé dans le modèle global. Par ailleurs, on perd l'accumulation d'un fort champ magnétique sous la zone convective dans un modèle où la rotation différentielle n'est plus présente. Ceci suggère que la présence de rotation différentielle joue un rôle non négligeable dans l'accumulation du champ magnétique à cet endroit. Par ailleurs, le champ magnétique produit dans un modèle de champ moyen incluant un tenseur- α sans pompage turbulent global est très différent de celui produit par le tenseur original. Le pompage turbulent joue donc un rôle fondamental au sein de la distribution spatiale du champ magnétique. Il est important de souligner que les modèles dépourvus d'une rotation différentielle, utilisant le tenseur- α original ou n'utilisant pas de pompage turbulent, parviennent tous deux à produire une dynamo oscillatoire. Produire une telle dynamo à l'aide d'un modèle de ce type n'est pas évident, a priori. Finalement,

l'intensité ainsi que le type de profil de circulation méridienne utilisés sont des facteurs affectant significativement la distribution spatiale de la dynamo produite.

**Mots-clés : Effet alpha - Soleil : dynamo - Soleil : champ magnétique -
Pompage turbulent - Modèle en champ moyen - Modèle global**

ABSTRACT

It is generally agreed upon that the 11-year magnetic cycle of the Sun arises through the action of an internal dynamo operating in the convective zone, and perhaps also immediately beneath it. Although the computing power of current supercomputers is sufficient to allow fairly realistic magnetohydrodynamical simulations of this dynamo process, to study the temporal and spatial evolution of the large-scale solar magnetic field over long timescales, it remains advantageous to work with simpler models. Thus, to better understand the physical mechanisms at the origin and maintenance of the solar dynamo, we used a simplified formulation, known as a mean-field model.

By using a complete α -tensor extracted from a global MHD model of solar convection [Ghizaru *et al.*, 2010] as input to a kinematic axisymmetric mean-field dynamo model [Charbonneau & MacGregor, 1997], it becomes possible to study the effect of the electromotive force on the magnetic cycles produced by the global model. In this way, we are able to reproduce some of the observed characteristics of the Ghizaru *et al.* [2010] simulation, in particular magnetic cycles. The axisymmetric magnetic field produced by the mean-field dynamo model exhibits two distinct dynamo modes. These modes, with similar periods, are present and peak at substantially at the same radii and latitudes as the sonlly-averaged magnetic fields extracted from the global model. Thanks to the spatial complexity of the α -tensor, we can reproduce these two dynamo modes. In contrast, the ratio of the periods of the two modes present in the mean field model differs significantly from that found in the global model. In addition, the accumulation of strong magnetic fields at the base of the convective zone disappears in a model where differential rotation has been removed. This suggests that differential rotation plays a significant role in the accumulation of magnetic fields in this region. Furthermore, removing the turbulent pumping component of the α -tensor produces a very different magnetic field cycle. Therefore, turbulent pumping plays a crucial role in the spatial distribution of the magnetic field. It is important to underline that the models without differential rotation, with or without turbulent pumping, both succeed in producing an oscillatory dynamo using only the turbulent electromotive force. However, the dynamos materializing in these modified models are significantly different from that using the full α -tensor. Finally, both the intensity and form of meridional circulation profiles are significant factors affecting the dynamo modes.

Keywords: Alpha effect - Sun: dynamo - Sun: magnetic field - Turbulent

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SIGLES	xiii
NOTATION	xv
DÉDICACE	xvii
REMERCIEMENTS	xix
CHAPITRE 1 :INTRODUCTION	1
1.1 Le Soleil	2
1.1.1 Structure	2
1.1.2 Les taches solaires	3
1.1.3 Diagramme papillon et magnétogramme	5
1.1.4 Écoulements	6
1.1.5 Conditions physiques à l'intérieur de la zone convective	9
1.2 La dynamo solaire	10
1.3 Modèle de champ moyen	13
1.3.1 Historique des modèles de champ moyen	17
1.4 Le modèle global	18
1.4.1 Caractéristiques	19
1.4.2 Résultats	20
1.5 Du modèle global au modèle de champ moyen	21
1.6 Contributions	22
CHAPITRE 2 :MHD SIMULATION-DRIVEN KINEMATIC MEAN FIELD MODEL OF THE SOLAR CYCLE	25

ABSTRACT	27
2.1 Introduction	27
2.2 Mean-field analysis and dynamo model	29
2.2.1 Mean-field electrodynamics and the α -effect	29
2.2.2 Extracting the α -tensor	31
2.2.3 A kinematic mean-field $\alpha^2\Omega$ dynamo model	33
2.3 Mean-field dynamo models	36
2.3.1 An $\alpha\Omega$ model	37
2.3.2 An $\alpha^2\Omega$ model	39
2.3.3 An α^2 model	43
2.3.4 Turbulent pumping	44
2.4 Discussion and conclusion	46
 CHAPTER 3: CONCLUSION	 51
 BIBLIOGRAPHY	 55

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation du nombre de taches solaires en fonction du temps . . .	5
1.2	Diagramme papillon	6
1.3	Magnétogramme solaire	7
1.4	Profil de rotation différentielle du Soleil	8
1.5	Granulation à la surface du Soleil	9
1.6	Schématisation du cisaillement par la rotation différentielle	13
1.7	Schématisation de l'effet- α	14
1.8	Diagramme papillon du champ magnétique toroïdal avec un profil de $\alpha \propto \cos \theta$ provenant d'un modèle de champ moyen	18
1.9	Exemple de diagramme papillon du champ magnétique toroïdal pro- venant de la simulation globale EULAG-MHD	23
2.1	Representation of the nine components of the α -tensor	32
2.2	Meridional circulation and angular velocity profile	35
2.3	Time-latitude and time-radius diagrams for an $\alpha\Omega$ model	38
2.4	Variations of the dynamo frequency for the two dynamo modes co- existing in the $\alpha\Omega$ model	40
2.5	Time-latitude and time-radius diagrams for an $\alpha^2\Omega$ model	42
2.6	Time-latitude and radius diagrams for an α^2 model	44
2.7	Butterfly diagram in a α^2 regime with turbulent pumping turned off .	46
2.8	Meridional plane snapshots in four different regimes	47

LISTE DES SIGLES

MHD	Magnétohydrodynamique
HD	Hydrodynamique
UA	Unité astronomique
SOHO	Solar and Heliospheric Observatory
GRPS	Groupe de Recherche en Physique Solaire

NOTATION

R_{\odot} Rayon solaire

$\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ Dérivée lagrangienne

À Chantale Coté, Mario, Michèle et Maude Simard pour tout l'amour et le soutien qu'ils m'ont donné tout au long de mon cheminement.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je veux remercier mon directeur Paul Charbonneau pour m'avoir donné une place au sein du GRPS. Il a toujours été d'une grande patience et a vraiment bien su me diriger tout au long de mon projet. Je tiens aussi à remercier tous les galarneaux-physiciens (membres du GRPS) pour leur soutien et leur aide. Je veux plus particulièrement souligner l'aide de Patrice Beaudoin, mon compagnon de voyage, qui a toujours répondu avec patience à mes mille-et-une questions et qui m'a supporté lors de mes angoisses existentielles d'avant présentation. De plus, tous les amis du bureau m'ont été d'un grand soutien moral, grâce à eux j'ai eu un petit velour au coeur chaque matin en me rendant à l'école.

Merci à François Pednault pour m'avoir motivé d'étudier en physique et d'avoir vu du potentiel en moi. Merci à Jason Cormier de m'avoir traînée jusqu'à Montréal, merci pour les épiceries bien sympathiques et pour les ours. Il est important aussi de mentionner l'affection que mes chats, La Grande et La Petite, m'ont apporté tout au long de mes études, leurs ronronnements et leurs câlins m'ont toujours remplis d'amour et de joie. Merci à tous mes amis, plus particulièrement à Jonathan Belletête sans qui je n'aurais jamais fini mon BAC, à Amélie Simon pour tout le soutien et l'amour qu'elle m'a offert et à Dorian Pirot pour ses précieux conseils et pour ses jokes qui vont tant me manquer et lui aussi d'ailleurs. Maudit que je vous aime. Par chance que je vous ai eus.

Finalement, merci à ma famille, à ma famille Montréalaise Dorice Simon et Johanne lavoie et finalement à mon copain Nicolas Michaud pour tout. Sans eux, j'aurais fini dans un coin en boule. Ils ont toujours été d'un soutien inconditionnel et m'ont rempli d'amour. Vous allez toujours être dans mon coeur.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

On mesure une activité magnétique dans bon nombre de corps astronomiques. La Terre ne fait pas exception. Tout comme le Soleil, elle est plongée dans un champ magnétique. Toutefois, les caractéristiques de ces deux champs sont différentes. Ainsi, le champ magnétique solaire peut être par endroit jusqu'à mille fois plus intense. Ceci est dû au fait que les mécanismes d'entretien du magnétisme sont différents. De même, les conditions physiques sur Terre et dans l'intérieur solaire diffèrent fortement. Comprendre la nature et l'origine de l'activité magnétique du Soleil constitue un des problèmes fondamentaux concernant la dynamo solaire. Cette activité donne naissance à des phénomènes magnétiques bien particuliers tels que l'émergence de taches solaires, les éruptions, les éjections de masses coronales ainsi que le vent solaire. L'étude de ces phénomènes est essentielle afin de réduire les conséquences que ceux-ci peuvent avoir sur la Terre et sur les satellites.

En effet, pour pouvoir prévoir ces phénomènes, il est nécessaire de comprendre la dynamique interne des champs magnétiques solaires. Cependant, étant donné que l'intérieur du Soleil nous est inaccessible, il nous faut construire des modèles théoriques à partir de lois physiques s'appliquant au Soleil. Ces modèles nous permettent d'aller sonder le comportement du champ magnétique, des fluctuations de la température, ou bien encore des écoulements fluides à l'intérieur de celui-ci. Toutefois, même à l'aide des modèles numériques les plus réalistes, il n'est pas aisé d'isoler le rôle que jouent les différents mécanismes permettant la construction du champ magnétique solaire. Dans cette optique, il peut être avantageux de se servir de modèles simplifiés du Soleil : les modèles de champ moyen.

Dans ce mémoire de maîtrise, j'introduirai tout d'abord quelques concepts de base concernant la structure interne du Soleil (§1.1.1). En partant des observations faites au niveau de la surface solaire (§1.1.2), j'expliquerai pourquoi celles-ci peuvent être ponctuées par endroit par des régions plus sombres : les taches solaires (§1.1.3). Nous verrons que l'étude des diagrammes papillons, et des magnétogrammes (§1.1.4) révèle l'aspect cyclique de l'activité magnétique solaire. Ceci nous mènera à étudier les écoulements présents à l'intérieur du Soleil (§1.1.5), ainsi que les conditions physiques régissant la zone convective (§1.1.5). J'aborderai finalement certains concepts importants liés à la compréhension de la dynamo solaire (§1.2).

Par ailleurs, j'introduirai les modèles de champ moyen (§1.3) et en présenterai un bref historique (§1.3.1). Les modèles globaux seront décrits à la section 1.4. J'étudierai en détail un modèle global particulier : EULAG-MHD [Ghizaru *et al.*, 2010] et présenterai ses caractéristiques (§1.4.1), ainsi que quelques résultats (§1.4.2). J'expliquerai ensuite comment j'ai tenté d'isoler, à partir d'un modèle simplifié de la dynamo solaire, un mécanisme que l'on croit être à l'origine de la régénération du champ magnétique solaire (§1.5). La section 1.6 décrira finalement ma contribution à l'article présenté à la section 2.

1.1 Le Soleil

1.1.1 Structure

Le Soleil est une sphère magnétisée presque parfaite composée de plasma dominé par l'hydrogène. Il a un rayon de $R_{\odot} = 6.95 \times 10^5$ km et tourne à vitesse angulaire de 25.4 jours à l'équateur. Sa masse est de $M_{\odot} = 1.9884 \times 10^{30}$ kg et il compose à lui seul 99% de la masse du système solaire [Mullan, 2009][Chap. 1]. C'est une étoile de type spectral $G2-V$; $G2$ indique sa température de surface d'environ 5778 K et la lettre V le fait qu'elle évolue sur la séquence principale du diagramme Hertzsprung-Russell. L'étoile est globalement stable grâce à l'équilibre entre la pression gazeuse et la force gravitationnelle.

Le Soleil, comme toutes les autres étoiles, évolue temporellement. Il a une naissance, une vie et une mort. Sa naissance s'est produite il y a 4.57 milliards d'années à la suite de l'effondrement gravitationnel d'un nuage moléculaire composé principalement d'hydrogène et d'hélium. Présentement, il est à la moitié de sa vie sur la séquence principale. Il fusionne principalement de l'hydrogène et le transforme en hélium. Lorsque l'hydrogène viendra à manquer dans la région centrale, le Soleil passera dans la phase géante rouge. Durant cette phase, il commencera à brûler de l'hydrogène dans les couches périphériques au noyau. Puis, lorsque les réactions nucléaires dans le noyau cesseront, la pression ne sera plus assez forte pour équilibrer la force gravitationnelle, ce qui entraînera une contraction du noyau. Cette phase fera augmenter la pression et donc la température, permettant ainsi le brûlage de l'hydrogène dans les couches situées autour du noyau. Par la suite, les couches externes se dilateront, allant même jusqu'à englober la Terre, et seront expulsées de l'astre. Finalement, après avoir perdu une grande partie de sa masse, le cœur se refroidira doucement et deviendra une naine blanche.

C'est grâce à l'héliosismologie que nous avons confirmé que le Soleil possède une structure interne en couches telle que prédite par les modèles de structures et d'évolution. On

retrouve tout d'abord un cœur qui s'étend jusqu'à $0.25R_{\odot}$ et dont la température est d'environ 15.7 millions de Kelvin ; il s'agit du lieu où se produisent toutes les réactions nucléaires. De $0.25R_{\odot}$ à $0.7R_{\odot}$ se trouve la zone radiative. Puisque la matière y est très chaude, tout le transport de l'énergie se fait uniquement par radiation thermique. Ensuite se trouve la tachocline, couche d'environ 3000 km située à $0.7R_{\odot}$. Cette couche jouerait un rôle majeur dans l'amplification et l'organisation spatiale du champ magnétique. Elle constitue la zone de transition située entre la zone radiative, en état de rotation solide, et la zone convective, dont la rotation est différentielle. La zone convective se situe entre $0.7R_{\odot}$ et $1R_{\odot}$. Dans cette zone, étant donné que l'opacité radiative y est très élevée, le transport par radiation ne s'avère plus assez efficace et le plasma forme donc des cellules convectives. La zone convective et la tachocline constituent le lieu de création du champ magnétique ; c'est là que vit toute l'action dynamo du Soleil. C'est le champ magnétique situé dans ces deux couches que les modèles numériques tentent de reconstruire.

Viennent ensuite les couches externes du Soleil. On y retrouve entre autres la photosphère, qui constitue la partie visible des étoiles. Elle mesure seulement quelques centaines de kilomètres et est très irrégulière spatialement à cause de la présence de cellules convectives et de taches solaires. Finalement, on tombe dans les couches qui forment ce que l'on appelle l'atmosphère solaire. Celle-ci est constituée de trois sous-couches : la chromosphère, la couronne et l'héliosphère. La chromosphère est une zone d'environ 2000 km où l'on retrouve une température se situant entre 7000-10 000 K et montrant la présence de molécules. La couronne est beaucoup plus chaude que la photosphère et que la chromosphère, sa température pouvant monter jusqu'à 1.5 millions de Kelvins. Elle est constituée d'un plasma ionisé d'une très faible densité (10^{12} fois moins que la photosphère) et s'étend jusqu'à environ 0.1 UA. Finalement l'héliosphère s'étend sur tout le système solaire et est engendrée par les vents solaires.

1.1.2 Les taches solaires

Une bonne partie de notre compréhension de l'activité magnétique du Soleil est due à l'observation des taches solaires. Elles sont de loin la manifestation la plus frappante de son activité magnétique. Ces taches nous apparaissent sombres puisqu'elles sont plus froides que le plasma ambiant. Cette différence de température est due à leurs forts champs magnétiques, situées autour de 0.1–0.3 T, qui inhibent la convection et diminuent l'apport de chaleur venant de l'intérieur de Soleil. Ces taches viennent en une grande variété de

taillies et peuvent parfois être visibles de la Terre à l'œil nu. Elles ont une durée de vie allant de quelques heures pour les plus petites jusqu'à plusieurs jours, voire des semaines pour les plus grosses [Mullan, 2009, §16.1]. Les premières observations plausibles de taches remontent il y a environ 2000 ans dans des écrits chinois [Stephenson, 1990] mais ce n'est que depuis 400 ans que l'on peut bénéficier d'un registre plus ou moins continu du compte de ces taches.

Ce compte fait émerger un cycle ayant une période moyenne de 11 ans (Fig.1.1). On utilise majoritairement le nombre de Wolf R , connu aussi sous le nom de nombre de Zürich, pour compter les taches et les groupes de taches solaires. Ce nombre est défini comme :

$$R = k(10g + s) , \quad (1.1)$$

où s est le nombre de taches individuelles, g le nombre de groupes de taches et k un facteur qui varie selon la localisation et l'instrument prenant les mesures. Sur la Figure 1.1, on observe que le nombre de taches solaires fluctue selon un cycle d'environ 11 ans, passant par une phase de maximum suivie d'un minimum de manière assez régulière. Même si le nombre de taches solaires n'est pas une mesure linéaire de l'activité magnétique à grande échelle, il nous informe sur le flux magnétique au sein d'une tache. Il devient donc nécessaire de faire quelques suppositions sur sa relation avec le champ magnétique contenu à la base de la zone convective pour pouvoir avancer les théories sur la dynamo solaire. Il est d'ailleurs bien accepté que les taches solaires sont la manifestation de surface d'un fort champ magnétique toroïdal interne (en direction longitudinale) concentré près de la tachocline. De plus, on observe que le cycle des taches solaires est déphasé avec la composante dipolaire du champ magnétique. En effet, on remarque que cette composante passe par un maximum alors que le nombre de taches solaires, lui, est au minimum et vice versa.

La plupart du temps, les taches solaires viennent en paires bipolaires et suivent la loi de Hale-Nicholson stipulant que, après un minimum d'activité, la polarité de la tache se trouvant en tête par rapport à la rotation du Soleil, s'inverse avec celle de derrière. Cette même loi nous dit que la polarité des taches en tête est inversée par rapport à chaque hémisphère. Il faut donc deux cycles de 11 ans avant que la polarité des taches en tête revienne à ce qu'elle était un cycle auparavant, ce qui est cohérent avec le champ toroïdal interne antisymétrique par rapport à l'équateur, et inversant sa polarité de manière synchrone dans les deux hémisphères. De plus, on observe que les taches en tête se trouvent en moyenne à de plus petites latitudes que leurs partenaires de derrière, créant ainsi une

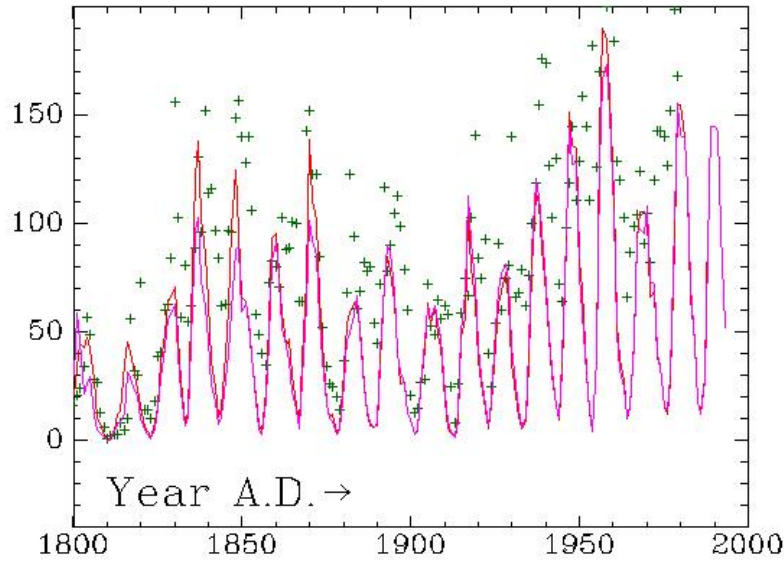


Figure 1.1: Variation du nombre de taches solaires en fonction du temps. La ligne rouge représente le nombre de Wolf, la mauve à une reconstruction basée sur des groupes de taches et les croix vertes représentent une reconstruction de la fréquence des aurores boréales faite par K. Krivsky and J.P. Legrand. Tiré de : http://www.astro.umontreal.ca/~paulchar/grps/histoire/newsite/history_e.html

inclinaison d'un angle d'environ 4° par rapport à l'équateur.

1.1.3 Diagramme papillon et magnétogramme

Si l'on s'intéresse plutôt au nombre de taches solaires en fonction du temps et de la latitude, on obtient ce qu'on appelle des diagrammes papillons. Dans ce genre de diagrammes (Fig.1.2), on peut constater une migration des latitudes d'émergence des taches solaires, passant d'environ 30° au maximum d'activité jusqu'à 8° lors du minimum. Ce phénomène est également connu comme la loi de Spörer, bien que remarqué pour la première fois par l'astronome Richard Christopher Carrington en 1861. De plus, on observe que la polarité du champ est inversée d'un hémisphère à l'autre pour chaque branche du diagramme papillon.

Les magnétogrammes présentent une carte du réseau magnétique à la surface du Soleil. On peut voir à la Figure 1.3 deux exemples de magnétogrammes pris à 10 ans d'intervalle dans un maximum (Fig. 1.3 à gauche) et un minimum (Fig. 1.3 à droite) du cycle solaire 23¹. On remarque d'abord à la Figure 1.3 de gauche les régions de champs intenses corres-

¹La numérotation des cycles a commencé en 1761 avec le cycle 1. Le cycle 23 a été entamé en 1996 et s'est terminé en 2008. Nous sommes présentement dans la phase ascendante du cycle 24.

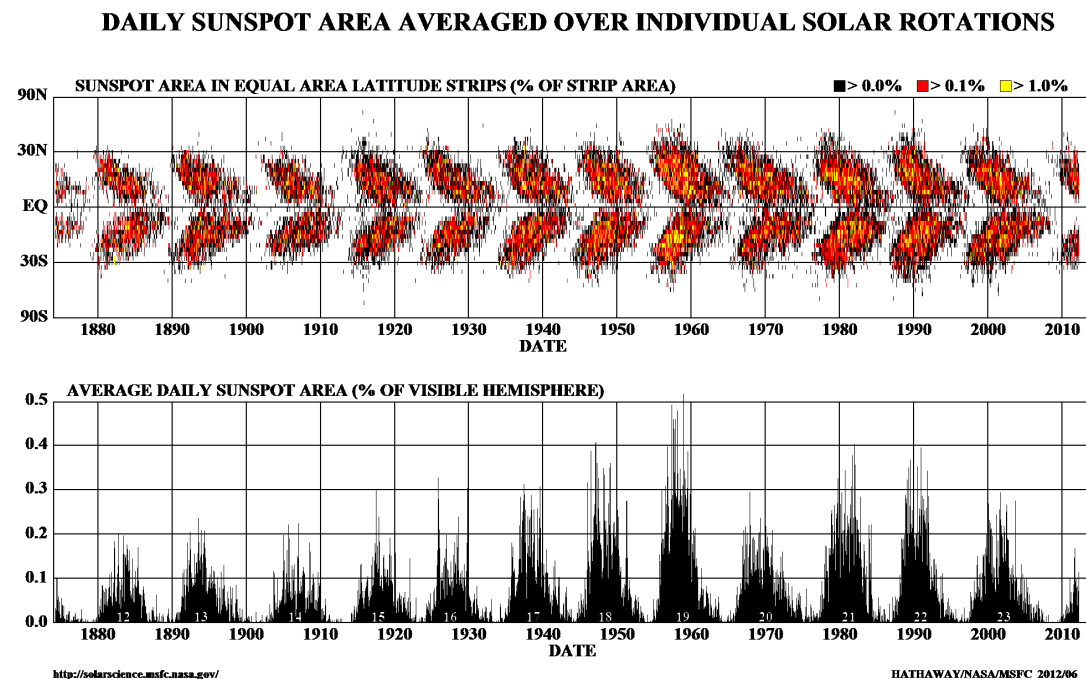


Figure 1.2: Diagramme papillon montrant la fraction de surface couverte par des taches solaires en fonction de la latitude et du temps. Le diagramme met en évidence la présence de cycle solaire et la migration des taches de la mi-latitude jusqu'à l'équateur pendant la progression d'un cycle. Tiré de : <http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2010-3/fulltext.html>

pendant aux taches solaires. On remarque que les taches en tête ont une polarité positive (négative) dans l'hémisphère Nord (Sud), comme l'indique la loi de Hale-Nicholson, et qu'elles sont concentrées dans une bande étroite entre 8° et 30° . Dans la Figure 1.3 de droite, on remarque plutôt un faible réseau magnétique ayant des polarités mixtes.

1.1.4 Écoulements

Pour bien comprendre quels sont les mécanismes dominants à l'origine du cycle solaire, il est important de savoir comment se déplace le plasma à l'intérieur du Soleil. S'il est très difficile de savoir exactement comment évolue un fluide convectif, on peut plus facilement percevoir les signes d'un écoulement à l'échelle du Soleil.

C'est avec l'arrivée de l'héliosismologie dans les années 1980 que les premières mesures de l'intérieur du Soleil ont pu être prises. Cette technique consiste à étudier la propagation des ondes. Les modes d'oscillation solaire peuvent être séparés en trois catégories : les modes- p (modes acoustiques), les modes- g (modes de gravité) et les modes- f (modes de

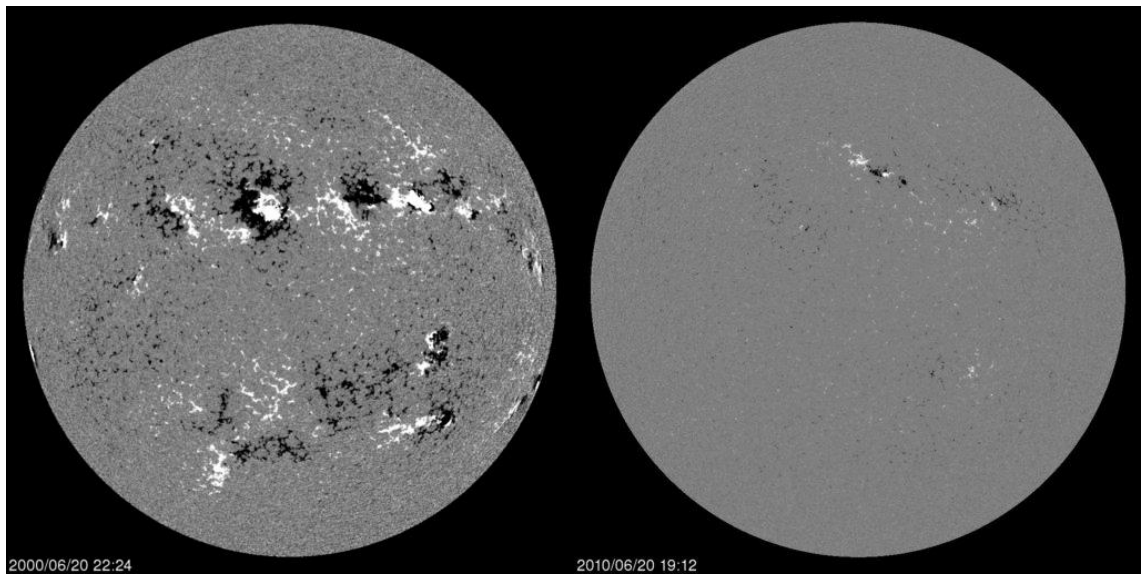


Figure 1.3: Magnétogrammes du disque complet acquis par l'instrument MDI à bord de l'observatoire spatial SOHO. Gauche : image prise le 20 juin 2000. Droite : image prise le 20 juin 2010. On peut remarquer la différence d'activité magnétique entre un maximum (à gauche) et un minimum (à droite) du cycle 23.

surface). Les modes- p sont les modes pour lesquels la pression est la force de rappel. Leur dynamique est contrôlée par la variation de la vitesse du son dans le Soleil. C'est grâce à ces modes, de l'ordre du MHz, que nous connaissons le profil de rotation différentielle du Soleil. Les modes- g , quant à eux, sont des ondes dont la force de rappel est la gravité et ont des fréquences très faibles (entre 0 – 0.4 MHz). Ces ondes sont confinées en dessous de la zone convective et sont pratiquement inobservables à la surface. Finalement, les modes- f sont également des modes de gravité, mais qui se produisent dans la photosphère.

Les écoulements à l'intérieur du Soleil peuvent se séparer en écoulements à grande échelle, comme la rotation différentielle ainsi que la circulation méridienne, et en écoulements à petite échelle, comme la convection.

Grâce à l'héliosismologie, on a pu découvrir le profil de vitesse angulaire à l'intérieur de la zone convective ; on l'appelle la rotation différentielle. Puisque le Soleil agit comme une grande cavité, les ondes mécaniques peuvent s'y propager et il est possible de mesurer les différents modes de pulsations acoustiques. Ces mesures sont faites à partir du décalage Doppler observé sur les raies d'absorption photosphériques. L'un des instruments les plus connus prenant ce genre de mesures est le Michelson Doppler Imager (MDI), se trouvant à bord du satellite SOHO. La Figure 1.4 en est un exemple ; on trouve en surface une période de rotation à l'équateur de 25 jours et de 36 aux pôles. À l'intérieur du Soleil, on

retrouve une zone de fort cisaillement latitudinal du plasma, couvrant toutes les latitudes, ainsi qu'un cisaillement radial à la base de la zone convective, comme le démontrent les isocontours de la Figure 1.4. Finalement, dans la zone radiative, le plasma présente une rotation solide à un taux correspondant environ aux vitesses de mi-latitudes en surface. Ce profil de rotation joue un rôle très important dans le processus de régénération du champ magnétique du Soleil.

À la rotation différentielle s'ajoute un profil de circulation méridienne. Cet écoulement, d'environ 15 m s^{-1} , transporte jusqu'aux pôles les éléments de fluide de la surface du Soleil situés à l'équateur. Ensuite, par conservation de la masse, le plasma doit replonger vers l'intérieur de la zone convective jusqu'à l'équateur pour fermer la boucle. C'est un écoulement de faible amplitude, en particulier face aux cellules convectives, mais tout de même observable en surface et ayant un impact sur l'évolution du champ magnétique sur des échelles temporelles comparables à la période du cycle.

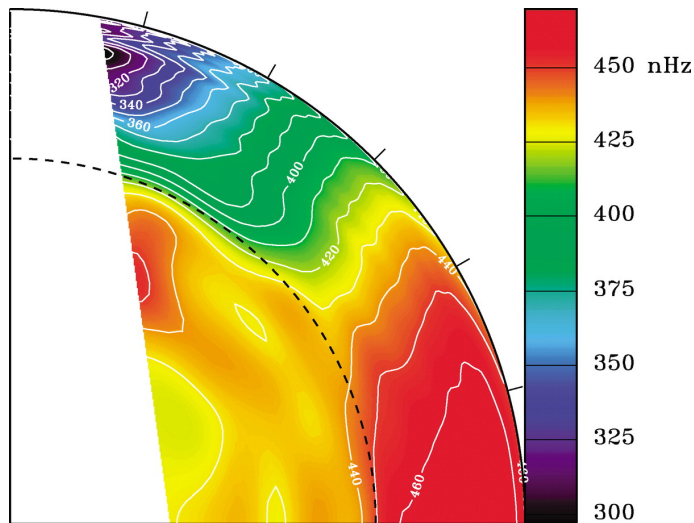


Figure 1.4: Vitesse angulaire en nHz en fonction de la latitude et de la profondeur. Le profil a été moyenné sur les deux hémisphères. Source : <http://www.hao.ucar.edu/research/lsv/lsvConvection.php>

Finalement, il y a la convection, qui se produit lorsqu'il y a un fort gradient de température. Plus précisément, elle a lieu lorsque le gradient de température local (dT/dz) est plus grand que le gradient de température adiabatique, qui est défini comme $(dT/dz)_{ad} = g/c_p$ où g est la gravité et c_p la chaleur spécifique à pression constante [Mullan, 2009, §6.8]. Ce critère de convection a été introduit pour la première fois par K. Schwarzschild en 1905 [Schwarzschild, 1906]. On sait que ce critère est respecté au bas de la zone convective. Dès

qu'il y a perturbation, des cellules de matière plus chaude que le plasma ambiant commenceront à monter vers la surface. Par la suite, ces cellules, en contact avec le plasma ambiant, se refroidiront par expansion et deviendront moins denses. Cependant, puisqu'elles sont dans un environnement ayant un fort gradient thermique, ces cellules resteront plus chaudes et moins denses que le milieu et continueront leur ascension. C'est ce que l'on appelle une instabilité convective. Ce phénomène est présent de manière turbulente dans toute la zone convective. On peut en voir la manifestation en observant les cellules produites à sa surface, que l'on voit à la Figure 1.5. On peut remarquer les formes polygonales que prennent les cellules délimitées par les zones sombres correspondant aux endroits où la matière plus froide coule vers l'intérieur. Une cellule solaire typique fait entre 900 et 1000 km de diamètre en surface [Mullan, 2009][§6.4].

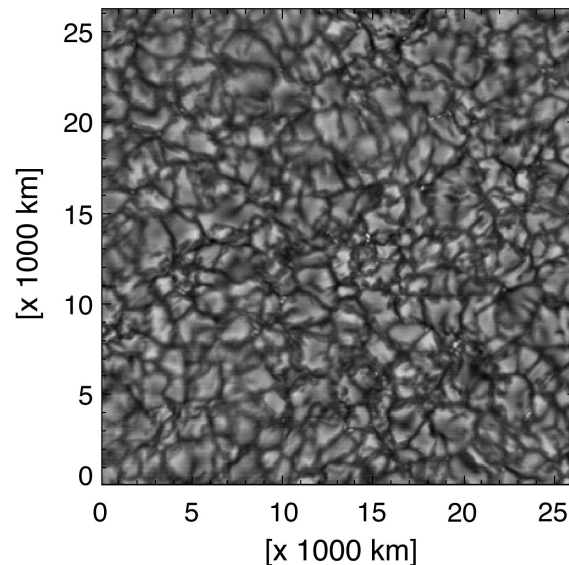


Figure 1.5: Image de la surface du Soleil (photosphère) à haute résolution. On peut remarquer les cellules convectives où les zones plus sombres correspondent à la matière plus froide qui coule vers l'intérieur du Soleil tandis que les cellules polygonales correspondent à la matière plus chaude qui émerge à la surface. Source : http://www.astro.uwo.ca/~jlandstr/planets/webfigs/sun/images/02641_granul.jpg

1.1.5 Conditions physiques à l'intérieur de la zone convective

Nous savons que le nombre de taches est une bonne indication du magnétisme solaire. Nous savons aussi de quelle façon se déplace globalement le plasma mais n'avons aucune mesure du champ magnétique à l'intérieur du Soleil. Pour bien comprendre d'où provient l'activité magnétique à l'origine du cycle, il faut savoir comment le champ évolue spa-

tialement et temporellement. C'est pour cette raison que nous utilisons des simulations numériques. Pour bien simuler l'intérieur solaire, il faut d'abord connaître les conditions physiques applicables.

On retrouve tout d'abord un plasma hautement ionisé globalement neutre où le taux de collisions est très élevé. De plus, la vitesse du plasma est non-relativiste, ce qui nous permet d'utiliser les transformations de Galilée et de négliger le courant de déplacement dans les équations de Maxwell. De plus, on suppose que, puisque le plasma possède une très faible résistivité et par conséquent une très grande conductivité, on peut le traiter comme un conducteur parfait (limite MHD idéale). Dans cette limite, on considère que les lignes de champ magnétique sont gelées dans le plasma [Stix, 2002, §8.1.3]. Finalement, il est important de mentionner que le plasma solaire est dans un régime hautement turbulent, créant ainsi des structures à petite échelle de l'ordre du millier de kilomètres. Il est donc difficile, dans le cadre d'une simulation numérique, de résoudre ces structures à des échelles aussi fines spatialement, tout en capturant l'évolution du champ magnétique global se développant sur des échelles spatiales de l'ordre du rayon solaire.

1.2 La dynamo solaire

La dynamo solaire est le processus physique qui est à l'origine de la régénération du champ magnétique du Soleil. Pour bien comprendre comment le Soleil régénère son champ, il est important de mentionner quels mécanismes peuvent le créer ou le détruire. Dans cette section, il sera question de la description des différents mécanismes présents dans la dynamo solaire et des différentes équations applicables dans la zone convective. Pour plus de détails mathématiques, voir Parker [1979], Moffatt [1978] et Krause & Raedler [1980].

En 1919, Larmor, dans un papier intitulé "How could a Rotating Body such as the Sun become a Magnet?" [Larmor, 1919], a été le premier à suggérer que le processus dynamo pouvait expliquer l'origine de la régénération du champ magnétique du Soleil. Son idée était que le champ magnétique solaire était maintenu par l'induction d'un courant électrique créé dans le Soleil. Cette induction provenant du fait que le plasma est un conducteur électrique en mouvement. La base du processus dynamo implique plusieurs interactions : tout d'abord, nous savons par l'héliosismologie qu'il y a des écoulements (\mathbf{u}) à l'intérieur du Soleil. Si nous avons un champ magnétique \mathbf{B} , nous aurons donc induction d'un champ électrique selon $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. De plus, la variation d'un champ magnétique induit un champ électrique par la loi de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$). Ce champ électrique induit une densité

de courant \mathbf{j} décrite par la loi d'Ohm dans un conducteur électrique par $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ où σ est défini comme la conductivité magnétique ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$). Cette densité de courant induit quant à elle un champ magnétique (loi d'Ampère) en négligeant les effets relativistes ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$). Finalement, le champ magnétique créé en présence d'une densité de courant est soumis à l'action de la force de Lorentz ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$). La dynamo solaire est donc définie par plusieurs interactions. Le défi est de trouver comment régénérer le champ magnétique à l'aide d'un fluide conducteur en mouvement tout en contrant la dissipation ohmique causée par la résistance du plasma. C'est l'une des principales questions auxquelles les physiciens solaires se sont attelés. Mais même avec les super-ordinateurs actuels, les conditions au sein du Soleil varient sur tant d'échelles spatiales et temporelles qu'il est encore très difficile d'avoir des simulations numériques décrivant bien ces conditions.

Le point de départ à la description mathématique de l'intérieur du Soleil commence avec les équations de Maxwell. C'est ainsi que l'on trouve l'équation d'induction (pour plus de détails voir Davidson [2001][§2.6]) :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (1.2)$$

où $\eta = 1/\mu_0\sigma$ [m^2s^{-1}] est la diffusivité magnétique. Le premier terme au coté droit de l'équation (1.2) représente l'induction due aux mouvement de fluides agissant sur le champ magnétique tandis que le deuxième terme représente la dissipation ohmique. Le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ peut agir, dans certaines situations, comme un terme source pour le champ, tandis que le terme dissipatif détruit \mathbf{B} . Dans sa forme simplifiée, le problème de la dynamo consiste à trouver où produire un écoulement \mathbf{u} qui est en mesure de combattre la dissipation ohmique tout en étant capable de construire un champ ayant les caractéristiques du Soleil. Cette question peut paraître simple, mais il aura fallu plusieurs dizaines d'années pour y répondre. En fait, on réussissait plutôt à démontrer le contraire, c'est-à-dire des écoulements qui ne pouvaient pas régénérer le champ magnétique. Un exemple connu a été trouvé par Cowling en 1933 grâce à son théorème anti dynamo [Cowling, 1933]. Il a su démontrer qu'un écoulement axisymétrique ne pouvait pas soutenir un effet dynamo axisymétrique, ce qui était d'ailleurs problématique puisqu'à l'époque on croyait que toute l'action dynamo était due à la rotation différentielle, qui est axisymétrique.

L'équation d'induction (eq. 1.2) n'est évidemment pas la seule à décrire l'intérieur du Soleil. En se plaçant dans un référentiel tournant à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ et en absorbant la force centrifuge dans le gradient de pression, on peut définir l'ensemble des équations

MHD (excluant l'équation d'induction) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} , \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot ((\chi + \chi_r) \nabla T)] + \phi_\nu + \phi_B . \quad (1.5)$$

Tout d'abord nous avons l'équation (1.3), qui représente la conservation de la masse et où ρ est défini comme la densité. Ensuite, l'équation de Navier-Stokes additionnée de la force de Lorentz (eq. 1.4) décrit l'évolution de l'écoulement \mathbf{u} à l'intérieur de la zone convective. Les quantités p , \mathbf{g} et $\boldsymbol{\tau}$ représentent la pression, la gravité et le tenseur de stress visqueux. Les deux termes au membre de gauche représentent la dérivée lagrangienne de \mathbf{u} ; ils définissent le taux de variation de \mathbf{u} en suivant un élément de fluide en mouvement. Au terme de droite, on retrouve en ordre : le gradient de pression, la gravité, le terme de force de Coriolis, la force de Lorentz et finalement le terme de dissipation visqueuse [Davidson, 2001, §3.1.2]. L'équation (1.5) représente le bilan d'énergie e de l'écoulement entrant et sortant d'un volume V par unité de masse. Les deux premiers termes au membre de gauche représentent de la même façon que dans l'équation (1.4) la dérivée lagrangienne de e . Le troisième terme de gauche représente le travail fait par (contre) la pression en dilatant (compressant) l'élément de volume où $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des chaleurs spécifiques. Le terme $(\chi + \chi_r) \nabla T$ représente le flux de chaleur entrant (sortant) de l'élément de volume avec χ et χ_r défini comme les coefficients de conductivité thermique et radiative en $\text{JK}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Finalement ϕ_ν représente la dissipation visqueuse et ϕ_B ² représente la dissipation du courant électrique dans un conducteur imparfait.

Additionnées à ces équations, on retrouve les contraintes suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (1.6)$$

$$p = f(\rho, T, \dots) , \quad (1.7)$$

où la solution du champ magnétique doit respecter en tout temps l'équation (1.6) et où

²Pour voir quelles formes prennent ces deux fonctions, voir [Charbonneau, 2012, §1.2.5 et 1.6].

l'équation d'état (1.7) relie la pression aux quantités telles que la densité, la température, la composition chimique, etc. Dans la plus part des modèles globaux, on utilise l'équation des gaz parfaits.

Avec les équations (1.2-1.7), il semble que nous ayons tout en main pour construire un modèle réaliste de l'intérieur solaire, mais cela n'est pas aussi simple. Ces équations, en plus d'être couplées, sont hautement non-linéaires. Pour ces raisons, les modèles numériques résolvant cet ensemble d'équations n'ont vu le jour qu'assez récemment avec l'arrivée des super-calculateurs (voir par exemple : Brown *et al.* [2010, 2011]; Browning *et al.* [2006]; Käpylä *et al.* [2010], ghizaru2010 et références s'y trouvant).

1.3 Modèle de champ moyen

Pour ces raisons, historiquement, on utilise des modèles solaires plus simples. C'est avec Parker, en 1955 [Parker, 1955], environ 20 ans après que Cowling ait démontré son théorème, qu'une solution fut trouvée au problème de l'écoulement axisymétrique. Sa proposition était que le bris de symétrie proviendrait de la force de Coriolis, qui donnerait une torsion au champ magnétique et aux éléments de fluides s'élevant dans la zone convective. C'est la naissance de l'électrodynamique de champ moyen, c'est-à-dire les tous premiers modèles de la dynamo solaire.

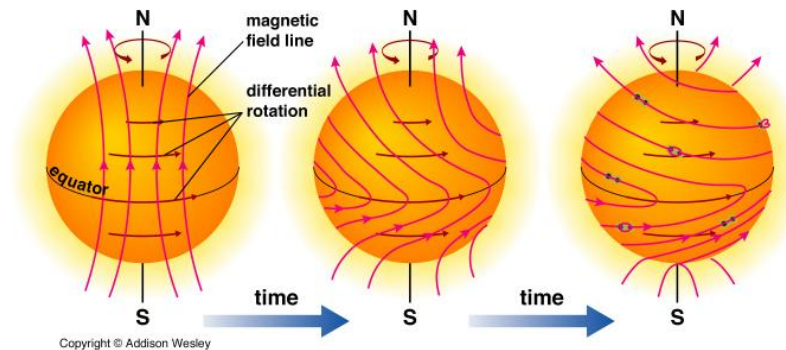


Figure 1.6: Représentation schématique de la création de la composante toroïdale à l'aide d'un champ magnétique poloïdal dû au cisaillement par la rotation différentielle. Source : <http://cseligman.com/text/sun/suncycle.jpg>

Dans un modèle de champ moyen, on sépare le champ en une composante toroïdale (ϕ) et poloïdale (r, θ). Ainsi, on peut voir la dynamo solaire comme un cycle : on doit régénérer, à partir de l'écoulement, la composante du champ poloïdale à l'aide de la composante toroïdale et vice-versa. Le mécanisme créant la composante toroïdale à partir d'un champ

poloïdal était assez bien connu, même à l'époque de Larmor ; on le nomme l'effet- Ω . Cet effet est dû à la rotation différentielle ; puisque les lignes de champs sont gelées dans le plasma et que l'équateur tourne plus vite que les pôles, on se retrouve avec un cisaillement et produisant ainsi la composante toroïdale (Fig. 1.6). Le mécanisme inverse découvert par Parker est loin d'être aussi bien compris. On le nomme l'effet- α et il est à l'origine de la régénération du champ magnétique poloïdal à l'aide de la composante toroïdale. L'idée de Parker était que les tourbillons convectifs, créés à la base de la zone convective, avaient un sens préférentiel de torsion causés par la présence de la force de Coriolis, comme c'est le cas pour les cyclones sur Terre. Puisqu'à cet endroit, il est assez bien admis qu'il y a présence d'un fort champ magnétique toroïdal et dans la limite de la MHD idéale, cela résulte en une torsion de la composante toroïdale, qui mènera à la création de la composante poloïdale (Fig. 1.7). Il s'agit d'un effet statistique, au sens où chaque tourbillon peut être plus ou moins « tordu » mais où globalement, il y aura une nette contribution à la composante poloïdale.

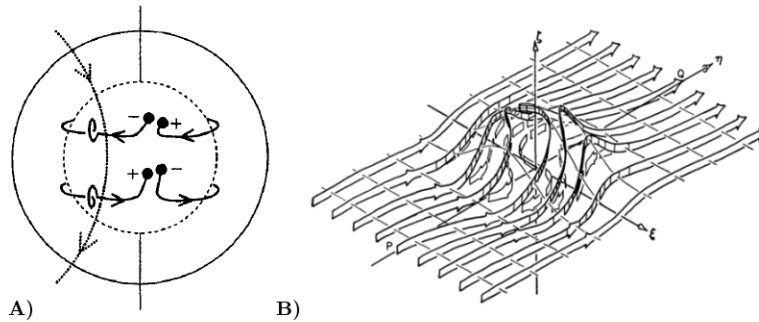


Figure 1.7: A) Représentation du champ magnétique toroïdal se faisant tordre par un cyclone turbulent et créant ainsi la composante poloïdale [Stix, 2001]. B) Visualisation locale d'un tourbillon où η pointe dans la direction toroïdale (ϕ) et $[\zeta, \xi]$ dans un plan méridional [Parker, 1955].

Le concept fondamental derrière les modèles dynamo de champ moyen est la séparation d'échelle. L'idée principale de ce développement est de se débarrasser des petites échelles car elles sont difficiles à gérer tant au niveau théorique que numérique. On voudra donc trouver une nouvelle forme à l'équation d'induction (eq. 1.2) qui ne fera intervenir que des quantités à grande échelle.

On sépare tout d'abord l'écoulement et le champ magnétique en un champ moyen et en une partie fluctuante. Il faut ensuite trouver un opérateur de moyenne qui peut être défini de plusieurs façons (temporellement, spatialement, etc.). De manière générale, on

définit l'opérateur de moyenne comme :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\lambda^3} \int_V A d\mathbf{x} . \quad (1.8)$$

Dans le cas de la dynamo solaire, en faisant une moyenne longitudinale (direction ϕ), on se retrouve avec un écoulement et un champ magnétique qui dépendent de r , θ et de t seulement. Ainsi, nous pouvons redéfinir le champ magnétique et l'écoulement comme :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) = \langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta, t) + \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) , \quad (1.9)$$

et

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) = \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t) + \mathbf{B}'(r, \theta, \phi, t) . \quad (1.10)$$

Les quantités $\langle \mathbf{u} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$ sont des champs moyennés longitudinalement variant sur une longueur caractéristique L , tandis que \mathbf{u}' et \mathbf{b}' varient sur une longueur caractéristique beaucoup plus petite (ℓ), et sont définies comme étant la partie fluctuante des champs. Cette séparation de champ est justifiée dans le cas où le moyennage est fait sur une longueur intermédiaire caractéristique λ respectant l'inégalité suivante :

$$\ell \ll \lambda \ll L . \quad (1.11)$$

En remplaçant les expressions (1.9) et (1.10) dans l'équation (1.2), on obtient une équation d'induction sous la forme qui suit :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times \mathcal{E} , \quad (1.12)$$

avec $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$ qui représente la force électromotrice moyenne induite par les parties fluctuantes de l'écoulement et du champ magnétique. Ainsi, l'équation ne dépend désormais plus que des quantités à grande échelle, sauf dans le cas de la force électromotrice. Il est important de noter que si la moyenne des quantités turbulentes ($\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ et $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$) est nulle, ceci n'implique pas nécessairement que le produit de quantités turbulents s'anule également ($\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle \neq 0$). En effet, dans le Soleil, il se trouve que la rotation et la stratification brisent l'homogénéité et la symétrie de réflexion des écoulements turbulents. Puisque le but de cette séparation est de se débarrasser des quantités fluctuantes afin de résoudre le champ magnétique moyen, on doit trouver une forme pour \mathcal{E} de manière à fermer l'équation (1.12). On redéfinit donc la force électromotrice comme (pour plus de

détail voir §2.2.1) :

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle , \quad (1.13)$$

où, de manière explicite :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_r \\ \mathcal{E}_\theta \\ \mathcal{E}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{rr} & \alpha_{r\theta} & \alpha_{r\phi} \\ \alpha_{\theta r} & \alpha_{\theta\theta} & \alpha_{\theta\phi} \\ \alpha_{\phi r} & \alpha_{\phi\theta} & \alpha_{\phi\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle B_r \rangle \\ \langle B_\theta \rangle \\ \langle B_\phi \rangle \end{bmatrix} ,$$

où α_{ij} est un tenseur de deuxième ordre 3×3 connu sous le nom de tenseur- α . L'idée de Parker est que la statistique de l'écoulement turbulent causé par la convection est décrite par le tenseur- α . Ainsi, le tenseur peut dépendre de $\langle \mathbf{u} \rangle$, de \mathbf{u}' et de η , mais pas de $\langle \mathbf{B} \rangle$. L'équation (1.12) devient alors fermée puisque dans ce type de modèle, l'écoulement à grande échelle $\langle \mathbf{u} \rangle$ est posé et fixe dans le temps ; on utilise un profil analytique de rotation différentielle et de circulation méridienne.

De plus, en introduisant la définition de la force électromotrice (eq. 1.13) à l'équation (1.12), on se retrouve avec une équation différentielle partielle (EDP) linéaire. Dans ce genre d'équation, lorsque les coefficients de l'EDP ne dépendent pas explicitement du temps (ce qui est le cas pour l'équation 1.12), il est possible de trouver une solution de type valeurs propres :

$$B(\vec{x}, t) = b(\vec{x}) e^{\lambda t} , \quad (1.14)$$

avec

$$\lambda = \sigma + i\omega , \quad (1.15)$$

et ou b est défini comme l'amplitude et est généralement complexe. On trouve que σ représente le taux de croissance de la solution et ω représente la fréquence d'oscillation. On nomme *sous-critique* une solution pour laquelle $\sigma < 0$, *super-critique* une solution pour laquelle $\sigma > 0$ et *nombre dynamo critique* une solution pour laquelle l'intensité des termes sources dans l'équation d'induction est telle que $\sigma = 0$.

La problématique de ce genre de modèles est le fait que certaines quantités utilisées comme entrées dans le modèle ne sont pas bien connues. Par exemple, le contraste de diffusivité magnétique entre la zone convective et la zone radiative ($\Delta\eta$) est utilisé comme paramètre libre (pour plus de détails sur le profil de diffusivité, voir §2.2.3). De plus, bien

que la solution avancée par Parker pour la régénération de la composante poléoïdale du champ semble justifiée, il n'en reste pas moins qu'il faille trouver une forme analytique au tenseur- α .

1.3.1 Historique des modèles de champ moyen

Les premiers modèles développés par Parker en 1955 utilisaient un profil de vitesse purement toroïdal. À ce moment, on croyait que le Soleil tournait en rotation solide sur des cylindres concentriques. De plus, pour fin de simplicité, on n'utilisait que la composante $\alpha_{\phi\phi}$ avec un profil $\propto \cos \theta$ qui est positif (négatif) dans l'hémisphère Nord (Sud), comme le suggère le terme de force de Coriolis. Ces modèles [Deinzer & Stix, 1971; Köhler, 1973; Steenbeck & Krause, 1969; Stix, 1976] eurent beaucoup de succès puisqu'ils pouvaient reproduire plusieurs caractéristiques du cycle solaire, notamment la propagation équatoriale du champ magnétique concentré à basse latitude. Ce n'est que vers la fin du XX^e siècle que les mesures de l'héliosismologie devinrent assez précises [Schou *et al.*, 1998] pour révéler un profil de rotation différentielle bien différent, présentant un cisaillement principalement latitudinal dans la zone convective et radial à sa base (Fig. 1.4). Ce nouveau profil combiné au profil de α eut comme effet majeur de changer la direction de propagation du cycle vers les pôles. Pour mieux correspondre aux observations, on modifia par la suite le profil de α , qui restait $\propto \cos \theta$ mais qui devenait maximal aux hautes latitudes. Cette nouvelle modification conduisit à la production d'un cycle magnétique se propageant vers l'équateur mais situé à de plus hautes latitudes, là où aucune tache solaire n'a été observée. Il est toutefois possible de remédier à ce problème en ajoutant un profil de circulation méridienne au modèle.

La Figure 1.8 illustre le champ magnétique généré par un profil de $\alpha \propto \cos \theta$ sans circulation méridienne. On peut voir dans cette figure l'évolution temporelle en fonction de la latitude de la composante toroïdale du champ magnétique mesuré en Gauss au centre de la zone convective ($r/R = 0.85$). Le rouge représente le champ allant dans le même sens que la rotation et le bleu illustre le champ allant dans le sens contraire. On remarque une propagation équatoriale du champ situé aux mi-latitudes. Comme mentionné plus haut, on sait que le champ est concentré à de trop hautes latitudes puisqu'aucune tache n'est observée dans cette bande.

Outre l'inclusion d'une circulation méridienne et d'une rotation différentielle de plus en plus solaire, il reste que tous les modèles discutés plus haut utilisent un profil spatial

très simples d'une seule des composantes du tenseur- α . Plusieurs tentatives ont été faites, tant au niveau théorique que numérique, pour trouver cette dépendance spatiale à l'effet- α [Brandenburg *et al.*, 1990; Ossendrijver *et al.*, 2001; Ruediger & Kichatinov, 1993]. Ces études ont montré que dans le cas d'un α scalaire ³, le profil est antisymétrique par rapport à l'équateur, positif (négatif) dans l'hémisphère Nord (Sud) sauf au bas de la zone convective où l'on peut voir un changement de signe. Plusieurs autres recherches ont été faites pour trouver un profil aux autres composantes du tenseur, comprendre quels rôles elles peuvent jouer et quelles sont leur importance dans la dynamo solaire [Käpylä *et al.*, 2006a,b; Pouquet *et al.*, 1976]. Encore aujourd'hui, la dépendance spatiale de ce tenseur est difficile, voire impossible à calculer à partir de principes premiers.

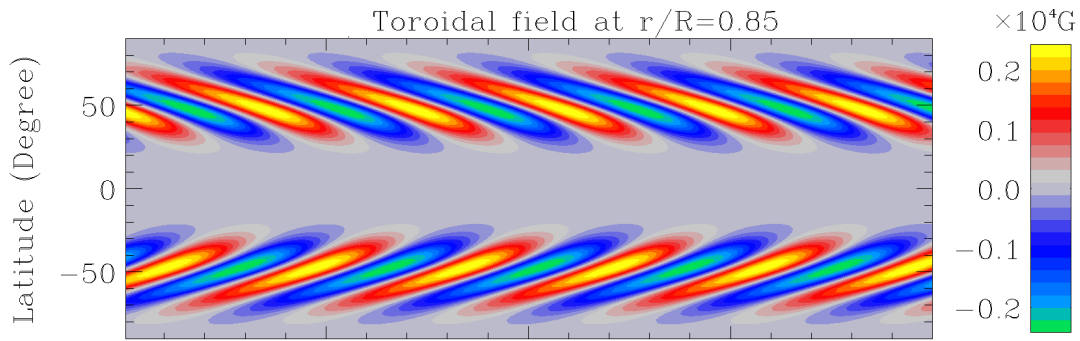


Figure 1.8: Diagrammes papillons de la composante toroïdale de $\langle \mathbf{B} \rangle$ en latitude-temps à $r/R=0.85$ avec $\alpha_{\phi\phi} \propto \cos \theta$.

Nous utiliserons ici un modèle de type champ moyen développé par Charbonneau & MacGregor [1997] en 1997. Ce modèle solutionne l'équation (1.12) sous sa forme poloïdale-toroïdale (voir §2.2.3 eq. 2.11-2.12) et trouve les composantes poloïdale et toroïdale du champ magnétique à grande échelle dépendantes du temps. Les caractéristiques du modèle utilisé sont décrites en détails à la section 2.2.3. De plus, on explique à la section 2.2.2 comment est extrait d'une simulation numérique MHD de la convection solaire un tenseur- α .

1.4 Le modèle global

Les modèles de champ moyen génèrent typiquement des champs magnétiques axisymétriques qui concordent bien avec les observations solaires. Toutefois, ces modèles sont très simples et possèdent plusieurs paramètres libres. Pour cette raison, une nouvelle classe de

³ Un α scalaire réfère à l'utilisation de la composante $\alpha_{\phi\phi}$ uniquement

modèle a pu voir le jour grâce au développement de la puissance de calcul des ordinateurs : les modèles globaux. Ces modèles solutionnent l'ensemble complet des équations MHD (eq. 1.2-1.5). Contrairement aux modèles de champ moyen qui résolvent uniquement le champ magnétique à grande échelle (eq. 1.12), les modèles globaux solutionnent non seulement le champ magnétique, mais peuvent également résoudre l'écoulement, la température ainsi que la pression à toutes les échelles spatio-temporelles résolubles. Ils ont vu le jour dans les années 1980 avec P. Gilman [Gilman, 1983; Gilman & Miller, 1986] et G. Glatzmaier [Glatzmaier, 1985] dans des régimes moyennement turbulents et très dissipatifs. Ce n'est que depuis la dernière décennie que ces modèles peuvent explorer des régimes de haute turbulence. Bien que les modèles globaux soient très complets, la production d'un champ magnétique organisé aux grandes échelles n'est pas facile à obtenir (Brun *et al.* [2004] par exemple). Le premier modèle global ayant réussi à générer ce type de champs et produisant des inversions de polarités régulières est la simulation de Ghizaru *et al.* [2010]. Nous discuterons dans cette section des différentes caractéristiques (§1.4.1) et des résultats généraux (§1.4.2) de ce modèle en particulier.

1.4.1 Caractéristiques

Ce modèle, développé par les membres du Groupe de Recherche en Physique Solaire (GRPS) de l'Université de Montréal en collaboration avec le National Center for Atmospheric Research (NCAR), utilise le code hydrodynamique EULAG [Prusa *et al.*, 2008; Smolarkiewicz & Szmelter, 2009], modifié de façon à être en régime MHD [Ghizaru *et al.*, 2010]. Ce modèle solutionne entre autres le champ magnétique et l'écoulement à l'intérieur de la zone convective dans une coquille stratifiée gravitationnellement allant de $0.6R_{\odot}$ à $0.96R_{\odot}$ et tournant à vitesse angulaire solaire $\Omega_{\odot} = 2.69 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$. Dans ce modèle, la version anélastique des équations MHD [Racine *et al.*, 2011, eq. 1-3] est résolue dans un régime assez turbulent sur un maillage ayant une faible résolution, soit $N_r \times N_{\theta} \times N_{\phi} = 47 \times 64 \times 128$. Cette basse résolution permet d'avoir une grande résolution temporelle d'environ 6×10^6 (quelques centaines d'années terrestres) pas de temps d'une demi-heure chacun. L'une des caractéristiques marquantes de ce modèle est l'absence de termes explicites de dissipation ohmique, visqueuse et thermique. Ces termes dissipatifs sont implicites dans le modèle et sont définis à l'aide du schéma non-oscillatoire d'advection MPDATA dans le cœur d'EULAG [Smolarkiewicz, 2006]. Pour l'implémentation numérique, les équations qui sont résolues dans ce modèle sont écrites sous forme de loi de

conservation eulérienne et retranscrites dans un système de coordonnées géosphériques.

1.4.2 Résultats

La Figure 1.9 montre quel type de champ magnétique le modèle EULAG-MHD peut produire. Tout d’abord, puisque ce modèle solutionne le champ magnétique \mathbf{B} dans les trois directions spatiales et que chacune de ces composantes peut dépendre de r , θ et ϕ , il devient difficile de visualiser ce champ sur une image. Pour cette raison, et à des fins de comparaison, nous ne présenterons que la composante B_ϕ moyennée en longitude ($\langle B_\phi \rangle$).

Les Figures 1.9 (A) et (B) expriment une représentation en diagramme latitude-temps de $\langle B_\phi \rangle$ à des rayons de $r/R = 0.72$ et de $r/R = 0.87$. Ces diagrammes montrent la présence d’un cycle dominant d’une demi-période d’environ 40 ans situé aux mi-latitudes. Tout d’abord, il est important de noter que ce cycle nous démontre que le code peut construire des structures magnétiques à l’échelle du Soleil, ce qui n’est pas trivial dans ce genre de simulations. Ensuite, ce cycle possède plusieurs caractéristiques solaires, notamment le fait qu’il se produit un changement de polarité antisymétrique par rapport à l’équateur et ayant une période de l’ordre de grandeur de celle du Soleil. Par contre, le champ magnétique produit est situé à de plus hautes latitudes (50° au lieu de 15°) que ce que nous suggèrent les observations solaires. Nous constatons aussi la présence d’un second cycle, de plus courte période. Ce deuxième mode est situé à de plus faibles latitudes et est surtout présent à des rayons plus proches de la surface. Les Figures 1.9 (C) et (D) montrent deux diagrammes rayon-temps à 30° et 70° où l’on peut voir une nette accumulation du champ au bas de la zone convective, ainsi que l’émergence du deuxième mode en surface à la Figure (C). Le champ magnétique toroïdal résultant de cette simulation est donc à plusieurs égards cohérent avec les observations solaires. Finalement, il est important de mentionner que les patrons de rotations différentielles et d’oscillations torsionnelles obtenues présentent aussi plusieurs caractéristiques solaires [Racine *et al.*, 2011][Fig. 3].

Un autre résultat important produit par cette simulation, cette fois publié par Racine *et al.* [2011], est l’extraction d’un tenseur- α à partir du champ magnétique et de l’écoulement à petite échelle (pour plus de détails, voir §2.2.2). Le résultat est présenté à la Figure 2.1 où chaque coupe méridionale représente une composante du tenseur. La structure 3×3 des sous-figures représente chacune des composantes puisque le tenseur- α dans sa forme complète est de dimension 3×3 . Les composantes sont représentées sur un demi-cercle dont le centre est vide étant donné que les limites de la simulation vont de

$0.6R_{\odot}$ à $0.96R_{\odot}$. Le tenseur est indépendant de ϕ et du temps. Il est à noter que chacune des composantes est du même ordre de grandeur, les composantes dominantes étant α_{rr} et $\alpha_{\phi\phi}$, toutes deux antisymétriques par rapport à l'équateur. L'élément α_{rr} est spatialement très complexe tandis que $\alpha_{\phi\phi}$ est beaucoup plus homogène, positif (négatif) dans l'hémisphère Nord (Sud) et maximal aux hautes latitudes.

1.5 Du modèle global au modèle de champ moyen

Plusieurs raisons peuvent justifier l'utilisation d'un modèle de champ moyen par rapport à un modèle global. Tout d'abord, il est important de mentionner que, dans un modèle global, on résoud pour toutes les quantités physiques importantes ; on solutionne à toutes les mailles temporelles, la densité, la température ainsi que la vitesse et le champ magnétique dans toutes les directions spatiales. De plus, on prend en compte la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement. On se retrouve donc avec un grand niveau de complexité tant au niveau de la résolution des équations différentielles partielles couplées que sur la quantité de données à traiter. Pour étudier le processus dynamo à grande échelle, il n'est pas nécessaire d'avoir autant de détails puisque l'on s'intéresse à l'aspect global du champ magnétique. De plus, il se trouve que les écoulements à l'intérieur du Soleil ne varient que très peu sur la durée d'un cycle ce qui nous permet d'utiliser des modèles cinématiques en bonne approximation. Finalement, les observations montrent que le champ magnétique du Soleil est globalement axisymétrique, ce qui nous permet de faire une moyenne longitudinale et ainsi diminuer encore la complexité des équations à résoudre.

Ainsi, bien que le code EULAG-MHD reproduit à bien des égards le cycle magnétique du Soleil, il demande beaucoup de temps de calcul. Une simulation de 8000 jours solaires (environ 650 années terrestres) ayant une résolution de $N_r \times N_{\theta} \times N_{\phi} = 47 \times 64 \times 128$ peut prendre jusqu'à 40 jours à rouler sur 128 processeurs. De plus, démêler et comprendre quels mécanismes jouent des rôles importants au cœur de la régénération du champ magnétique est loin d'être simple. Nous avons donc voulu voir quel impact aurait l'insertion du tenseur- α extrait de la simulation globale dans un modèle de champ moyen. L'idée est d'essayer de démêler les effets dus, entre autres, à la force électromotrice, des effets dus à la dynamique de l'écoulement (par exemple la force de Lorentz). Puisque les modèles de champs moyens sont simples et nécessitent de très courts temps de calcul (< 5 min), il est plus facile d'analyser les résultats et de voir à quel point on peut reproduire certaines caractéristiques du champ magnétique provenant de la simulation globale. De plus, il sera possible de voir

quel effet la symétrisation du tenseur peut avoir sur la dynamo produite et s'il est possible de soutenir un effet dynamo sans la présence d'un profil de rotation différentielle.

1.6 Contributions

Dans cette section, je discuterai de ma contribution à l'article présenté à la section 2. Ma première tâche a été de dériver analytiquement la forme complète du tenseur- α (voir annexe 1 eq. I.1-I.2). J'ai utilisé cette dérivation pour ensuite inclure les neuf composantes dans le modèle de champ moyen qui, originellement, utilisait un profil analytique de la composante $\alpha_{\phi\phi}$ seulement. J'ai développé tous les différents cas de modèles de champs moyens présentés à la section 2.3 ainsi que les analyses qui y sont associées. Toutes les figures présentées dans l'article ont été réalisées à partir de programmes que j'ai entièrement créés ou que j'ai modifiés en grande partie. L'analyse et les conclusions ont été faites par mon directeur Paul Charbonneau et moi-même. Finalement, je suis l'auteure d'un premier jet de certaines sections de l'article qui ont été complétées et modifiées par P. Charbonneau.

La simulation globale ayant fourni les données numériques desquelles a été extrait le tenseur- α a été faite par Mihai Ghizaru, Paul Charbonneau et Piotr K. Smolarkiewicz. Le calcul du tenseur- α a été réalisé par Amélie Bouchat et Étienne Racine. Le modèle de champ moyen utilisé dans l'article a été créé par Paul Charbonneau et Keith MacGregor, je n'y ai apporté que certaines modifications. Finalement, l'article a été écrit par Paul Charbonneau et moi-même.

La section qui suit est l'article soumis dans l'*Astrophysical Journal* le 18 septembre 2012. J'y présente en détails le modèle de champ moyen utilisé ainsi que certaines notions théoriques qui y sont associées, la façon dont le tenseur- α a été extrait des données de Racine *et al.* [2011] et les résultats obtenus dans différentes configurations du tenseur- α . Il est à noter que le format de l'article original a été modifié pour satisfaire aux critères de l'Université de Montréal. Une brève conclusion suivra l'article à la section 3.

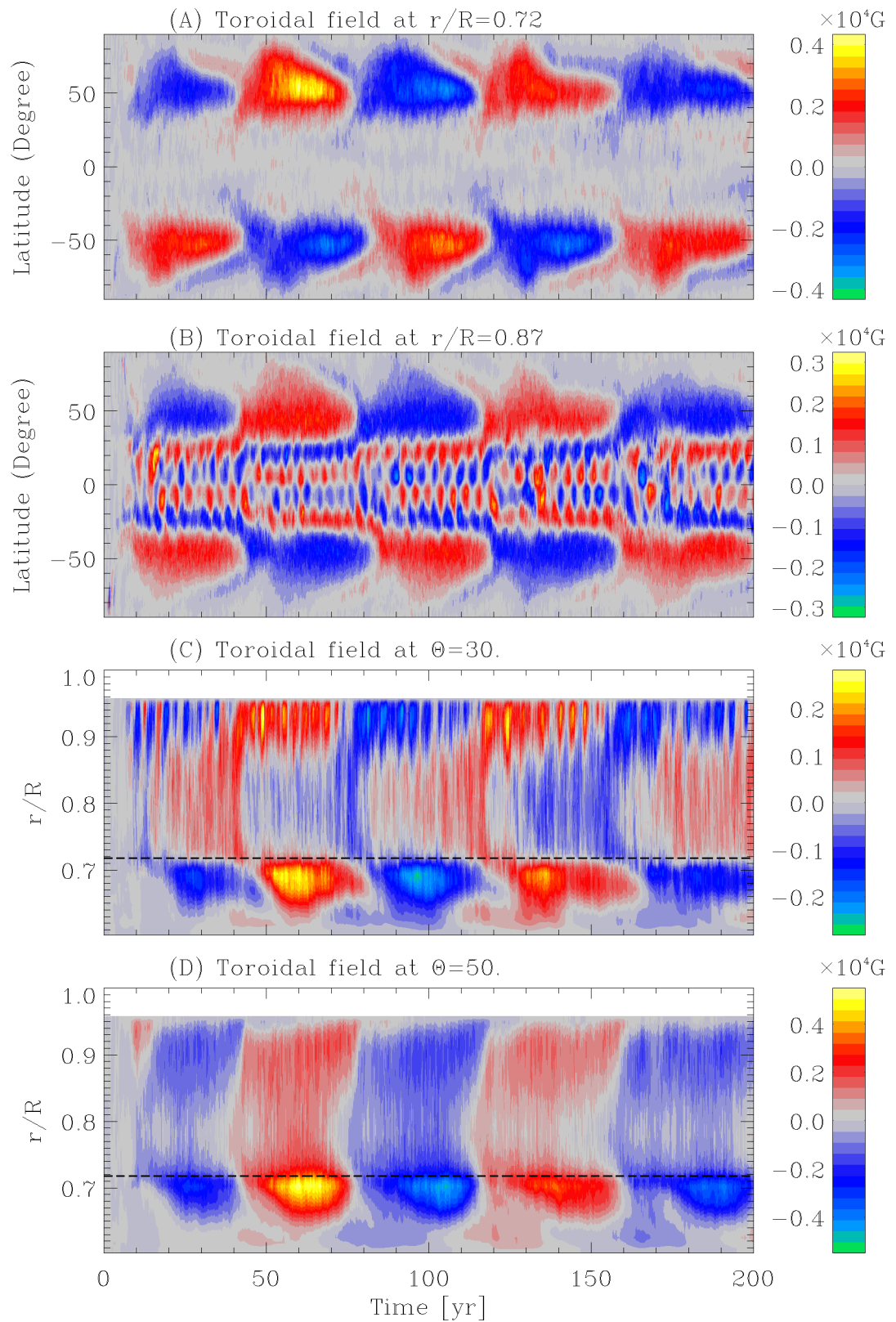


Figure 1.9: Représentation du champ magnétique toroïdal en Gauss provenant de la simulation globale EULAG-MHD [Racine *et al.*, 2011] moyenné en ϕ pour différents rayons et latitudes. La couleur rouge représente la composante toroïdale pointant dans la même direction que la rotation et inversement pour le bleu. La ligne pointillée représente l'interface entre la zone convective et la zone radiative.

CHAPITRE 2

MHD SIMULATION-DRIVEN KINEMATIC MEAN FIELD MODEL OF THE SOLAR CYCLE

C. Simard¹, P. Charbonneau¹, A. Bouchat²

Submitted 18 September 2012 to the *Astrophysical Journal*

¹Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

²Department of Atmospheric and Oceanic Sciences, McGill University, 805 Sherbrooke West, Montreal, Quebec H3A 2K6, Canada

ABSTRACT

We construct a series of kinematic axisymmetric mean-field dynamo models operating in the $\alpha\Omega$, $\alpha^2\Omega$ and α^2 regimes, all using the full α -tensor extracted from a global magnetohydrodynamical simulation of solar convection producing solar-like magnetic cycles in its large-scale magnetic field. We also include an internal differential rotation profile produced in a purely hydrodynamical parent simulation of solar convection, and a simple meridional flow profile described by a single cell per meridional quadrant. An $\alpha^2\Omega$ mean-field model, presumably closest to the mode of dynamo action characterizing the MHD simulation, produces a spatiotemporal evolution of magnetic fields that share some striking similarities with the zonally-averaged toroidal component extracted from the MHD simulation. Comparison with α^2 and $\alpha\Omega$ mean-field models operating in the same parameter regimes indicates that much of the complexity observed in the spatiotemporal evolution of the large-scale magnetic field in the simulation can be traced to the complexity of the α -tensor. Oscillating α^2 solutions are readily produced, and show some similarities with the observed solar cycle, including a deep-seated toroidal component concentrated at low latitudes and migrating equatorward in the course of the solar cycle. Various numerical experiments performed using the mean-field models reveal that turbulent pumping plays an important role in setting the global characteristics of the magnetic cycles.

2.1 Introduction

Recent years have witnessed the design of global magnetohydrodynamical (MHD) simulations of solar convecting layers producing magnetic fields of significant strength organized on spatial scales commensurate with the solar radius, i.e., the type of large-scale axisymmetric magnetic field one would associate with the solar eleven year activity cycle [Brown *et al.*, 2010; Browning *et al.*, 2006; Ghizaru *et al.*, 2010]. Some of these simulations even exhibit regular magnetic polarity reversals that are solar-like in a number of ways [Ghizaru *et al.*, 2010], opening a new window into the dynamo process(es) taking place in the solar interior.

Racine *et al.* [2011] have carried out a detailed dynamo analysis of one of the Ghizaru *et al.* [2010] simulations. Separating the total magnetic field produced by the simulation into a large-scale, slowly varying axisymmetric component and a residual, small-scale and rapidly varying “turbulent” component, they follow the standard mean-field electro-

dynamics approach, which consists in developing the longitudinally-averaged turbulent electromotive force (emf) as an expansion in terms of the mean magnetic field and its spatial derivative. With both the emf and mean-field computable from the simulation output, they then compute the full α -tensor (first term in the expansion) by a least-square fit of the emf and mean-field time series at each grid point in the meridional plane of the simulation domain. All nine components of the α -tensor so computed turn out to have comparable magnitude, indicating that turbulent pumping is an important transport agent for the mean magnetic field. Many of these findings are in agreement with earlier α -tensor measurements in local MHD simulations with an externally applied large-scale magnetic field [Käpylä *et al.*, 2006a].

One particularly remarkable result obtained by Racine *et al.* [2011] is the demonstration that the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component, a critical player in regenerating the poloidal magnetic component in classical mean-field dynamo models, can be very well represented in terms of the zonally-averaged kinetic helicity of the convective flow, a result expected to hold only for nearly isotropic, nearly homogeneous turbulence unaffected by the magnetic field. Yet in the simulation analyzed, convective turbulence is strongly inhomogeneous and anisotropic, and the magnetic energy density reaches a significant fraction of the kinetic energy density. Racine *et al.* [2011] could also show that the turbulent emf has a magnitude similar to induction by large-scale flows even for the toroidal magnetic component, suggesting that the simulation operates as what is known in mean-field theory as an $\alpha^2\Omega$ dynamo. Interestingly, these two inductive effects were found to oppose each other in the bulk of the convection zone, an unexpected situation but one that had been observed before in the global numerical simulations of Brown *et al.* [2010, 2011]

Racine *et al.* [2011] also analyzed separately the “minimum” and “maximum” phases of the magnetic cycles, obtaining almost identical α -tensors, from which they concluded that the α -effect is not being quenched significantly by the Lorentz force. Parallel analyses of a similar simulation by Passos *et al.* [2012] and Beaudoin *et al.* [2012] suggest instead that the saturation of the dynamo occurs through magnetically-mediated alterations of the large-scale flows developing in the simulation. In particular, Beaudoin *et al.* [2012] argue that magnetic energy is first channeled into the meridional flow, which in turn drives torsional oscillations that are resisted by the mean-magnetic field. While this scenario must be substantiated by further analyses, it certainly exemplifies the complexity of the flow-field interaction taking place in these simulations.

One very interesting question that immediately arises is: are such dynamical effects

only a means of saturating the magnetic cycle amplitude, or are they essential to the dynamo process per se? We attempt to answer this question here by carrying out conventional kinematic mean-field dynamo calculations using the full α -tensor extracted from the aforementioned global MHD simulations. Because we restrict ourselves to the kinematic regime, any magnetic backreaction on large-scale flows is de facto excluded. Comparing the properties and evolution of large-scale magnetic fields produced by such mean-field dynamo calculations with their counterparts directly extracted from the simulation offers the hope to disentangle aspects of large-scale dynamo action in the simulation associated with the complexity of turbulent induction, from those associated with magnetic backreaction on large-scale flows.

Accordingly, the remainder of this paper is organized as follows; we first (§2) briefly recall the formulation of the axisymmetric mean-field dynamo model, and give an overview of some of the salient features of the α -tensor to be introduced therein, as extracted from the simulation output. In §3 we present a series of axisymmetric dynamo models, progressively more complex in that each incorporates more elements of the full α -tensor, comparing the results along the way to the zonally-averaged magnetic field produced by a MHD simulation of the type presented in Ghizaru *et al.* [2010]. Then, we focus on two specific but interesting related issues, the first being the importance of turbulent pumping, the other the possibility to produce cyclic solutions even in the absence of differential rotation. We conclude in §4 with a critical discussion of our mean-field results, and what they reveal regarding the mode of dynamo action and saturation in the global MHD simulations of Ghizaru *et al.* [2010], and perhaps also in the Sun and other solar-type stars.

2.2 Mean-field analysis and dynamo model

2.2.1 Mean-field electrodynamics and the α -effect

In the solar/stellar dynamo context, the starting point of mean-field electrodynamics is the assumption that the magnetic field (\mathbf{B}) and flow (\mathbf{u}) can be separated into a spatially large-scale, slowly varying *mean* component, and a small-scale, rapidly varying *fluctuating* component:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}' , \quad (2.1)$$

where the prime quantities represent the fluctuating part and the brackets $\langle \rangle$ denote an intermediate averaging scale over which the fluctuating part vanishes, i.e., $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ and $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$ (see, e.g., Moffatt [1978] p.147 for details). Inserting eq. (2.1) into the magnetohydrodynamical induction equation and applying this averaging operator yields:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E}) + \eta \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle , \quad (2.2)$$

where

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle , \quad (2.3)$$

is the mean emf due to the fluctuation of the flow and the magnetic field, and $\eta = 1/\mu_0\sigma_e$ is the magnetic diffusivity. The next step is to express this emf as a Taylor series-type development in terms of the mean magnetic component. Because we are working here with vector fields, such a development is written as:

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \frac{\partial \langle B_j \rangle}{\partial x_k} + \text{higher order derivatives} , \quad (2.4)$$

where the tensors (α_{ij} and β_{ijk}) appearing in this expression are assumed to depend only on the statistical properties of the small-scale flow and field (see, e.g., Krause & Raedler [1980], Chap. 5).

The second term in the expansion embodies (among other effects) the destructive action of turbulent diffusion on the mean magnetic field. The first term in this series involves a rank-2 tensor usually named the α -effect, and can act as a source term for the mean-field. This α -tensor can be decomposed into its symmetrical and antisymmetrical contributions, according to:

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} \langle B_j \rangle + (\boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle)_i , \quad (2.5)$$

where

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) , \quad (2.6)$$

and

$$\gamma_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\alpha_{jk} . \quad (2.7)$$

This latter antisymmetric contribution takes the form of a non-solenoidal “flow” known as *general turbulent pumping*, adding to the large-scale flow $\langle \mathbf{u} \rangle$ in eq. (2.2) and effectively acting as an advective transport agent for the mean-magnetic field. The off-diagonal

components of the symmetric a_{ij} tensor embody the part of turbulent pumping which depends specifically on the orientation of the large-scale magnetic field (see Ossendrijver *et al.* [2002] for further details). For the α -tensor extracted by Racine *et al.* [2011], this component-dependent pumping has a magnitude comparable to the general pumping velocity associated with the antisymmetric part of the full α -tensor (cf. upper and lower diagonal plots on Fig. 9 in Racine *et al.* [2011]).

2.2.2 Extracting the α -tensor

The next step in mean-field dynamo modelling is usually to calculate the form of the α and β tensors using an appropriate statistical turbulence model for the small-scale flow and field. Here, we instead use the procedure presented in Racine *et al.* [2011] to extract the α -tensor component from global MHD simulations of solar convection of the type described in Ghizaru *et al.* [2010]. These simulations produce axisymmetric large-scale magnetic fields undergoing regular polarity reversals in a manner analogous in many ways to the solar large-scale magnetic field.

The starting point of the Racine *et al.* [2011] analysis is to define the averaging operator in eq. (2.1) as a zonal average, so that the mean magnetic field and flow are just the axisymmetric components of the total field and flow returned by the simulation, with the remainder defining the small-scale contributions. Racine *et al.* [2011] showed that this axisymmetry-based definition does satisfy the required separation of spatial and temporal scales to a reasonable degree. Thus knowing $\mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t)$ and $\mathbf{B}'(r, \theta, \phi, t)$, the next step is to directly compute the emf via eq. (2.3), and then to fit, at every grid point (r, θ) in the simulation's meridional plane, each component of this emf to the mean magnetic field $\langle \mathbf{B} \rangle$:

$$\mathcal{E}_i(r, \theta, t) = \alpha_{ij}(r, \theta) \langle B_j \rangle(r, \theta, t) , \quad (2.8)$$

spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) being used throughout. Note that this explicitly assumes that all cyclic dependency in the emf arises only from the cyclicity of the mean magnetic field, and that the α_{ij} should not depend on $\langle B_j \rangle$. Racine *et al.* [2011] carried out this (overdetermined) fitting problem using Singular Value Decomposition, and could show that the resulting fit yields a residual showing no sign of cyclic behavior. The results of this procedure are shown on Figure 2.1. The nine meridional slices are organized in a 3×3 matrix reflecting the nine components of the α -tensor. Note already that the tensor is full, with the off-diagonal components being roughly of the same order of magnitude as

the diagonal components, and shows no particular symmetry about the diagonal.

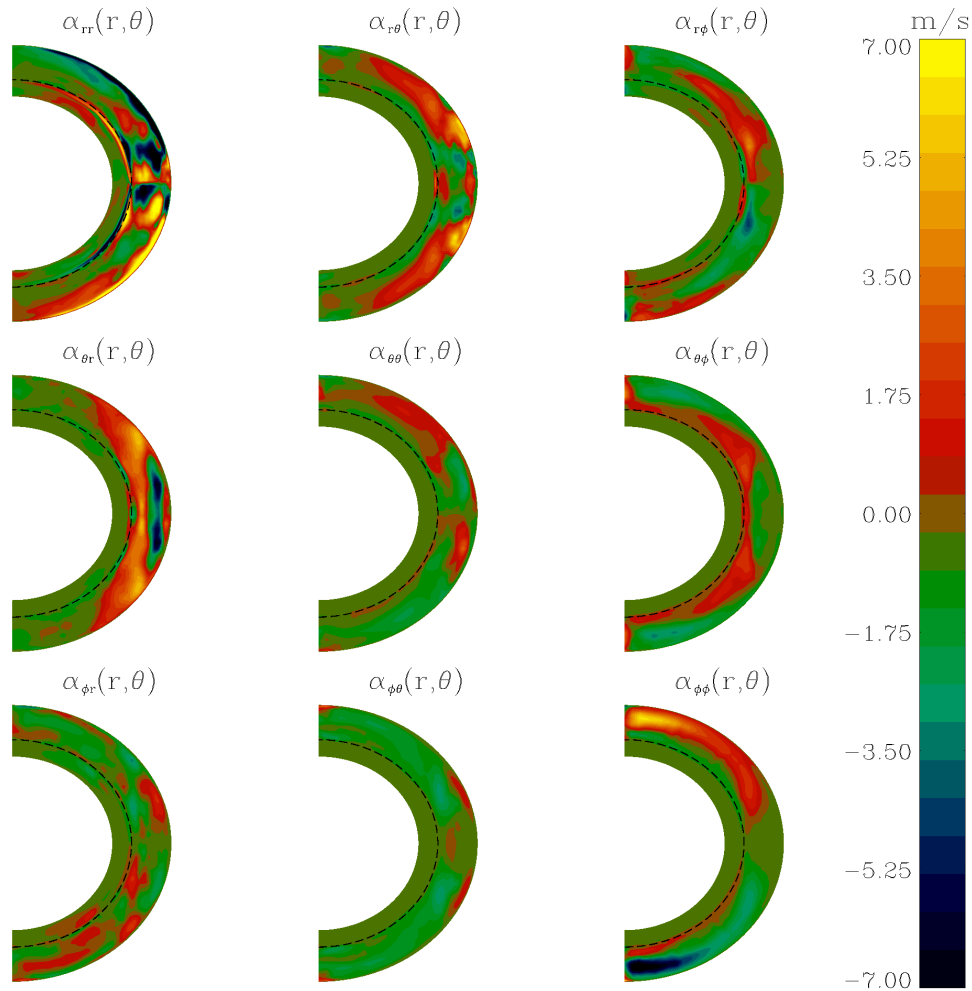


Figure 2.1: The nine component of the α -tensor in a meridional plane in $[\text{m s}^{-1}]$ extracted from the global simulation of Racine *et al.* [2011]. The dashed-line represents the core-envelope interface, located at $0.718R_{\odot}$. The analysis is based on a 337 yr simulation segment, spanning 5 full magnetic cycles.

The largest amplitudes are observed in the α_{rr} and $\alpha_{\phi\phi}$ components. The former peaks in the subsurface layers and at low latitudes, where it shows multiple sign changes with latitude and depth. The latter is much smoother, peaking at high latitudes and being positive (negative) in the northern (southern) hemisphere, except at the base of the convecting layers where it undergoes a sign change at all but equatorial latitudes. Racine *et al.* [2011] showed that the spatial profile of this $\alpha_{\phi\phi}$ component closely resembles the kinetic helicity profile (see their Fig. 15), as one might have expected from mildly anisotropic and mildly inhomogeneous turbulence in a stratified rotating thick fluid shell. This is somewhat sur-

prising, given that the assumptions of mild anisotropy and inhomogeneity are not realized in this simulation. Below the core-envelope interface ($r/R = 0.718$, dashed circular arcs on Fig. 2.1), the emf is very small, and therefore the fitting procedure becomes ill-behaved. For all dynamo models discussed further below, all tensor components have been set to zero below this depth.

2.2.3 A kinematic mean-field $\alpha^2\Omega$ dynamo model

With the α -tensor in hand, the next step is to incorporate it in a mean-field dynamo model. In what follows we restrict ourselves to the kinematic regime, in which all large-scale flows are considered given, and solve the axisymmetric form of the so-called $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo equations. Working in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) , the large-scale magnetic field and flow are expressed as:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t) = \nabla \times (A(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi) + B(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.9)$$

and

$$\langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta) = \mathbf{u}_p(r, \theta) + \varpi\Omega(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.10)$$

where $\nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_\phi)$ and B define respectively the poloidal and the toroidal magnetic field components, \mathbf{u}_p is the large-scale flow component in the meridional $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta)$ plane, $\Omega(r, \theta)$ the rotational angular velocity, and $\varpi = r \sin \theta$. Inserting eq. (2.9) and (2.10) into eq. (2.2) allows a separation into two evolution equations for toroidal vector potential and magnetic field, in the form:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla(\varpi A) + C_\alpha \mathcal{E}_\phi, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi^2} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} - R_m \varpi \nabla \cdot \left(\frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \\ & + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) + C_\alpha \nabla \times [\mathcal{E}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \mathcal{E}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta], \end{aligned} \quad (2.12)$$

where it was further assumed that the magnetic diffusivity η varies only with radius. The complete development of the two emf contributions in terms of A and B is given in the Appendix. The above expressions have been cast in non-dimensional form, by expressing all lengths in units of the solar radius R and time in units of the diffusion time R^2/η_0 .

This has lead to the appearance of three dimensionless quantities:

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}, \quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0}, \quad R_m = \frac{u_0 R}{\eta_0}, \quad (2.13)$$

where α_0 , η_0 , Ω_0 and u_0 represent typical values of the corresponding unsubscripted quantities. The three above dimensionless numbers are the primary control parameters of the model; C_α measures the overall amplitude of the α -effect, C_Ω the magnitude of differential rotation, the magnetic Reynolds number R_m measures the relative importance of advection by the meridional circulation versus the diffusive transport of the mean magnetic field, and η_0 is a representative value for the (turbulent) magnetic diffusivity in the convecting layers.

Because Racine *et al.* [2011] did not extract the β -tensor from the simulation output, here we use a simple, scalar magnetic diffusivity profile parametrized as:

$$\frac{\eta(r)}{\eta_0} = \Delta\eta^{-1} + \frac{1 - \Delta\eta^{-1}}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_c}{w} \right) \right). \quad (2.14)$$

Here $\Delta\eta = \eta_0/\eta_c$ (≥ 1) is the ratio between the envelope (turbulent) diffusivity (η_0) and the core diffusivity (η_c), $r_c/R = 0.718$ coincides with the core-envelope interface, and $w/R = 0.025$ is the half-width of the transition layer between core and envelope. The adopted value for the reference diffusivity η_0 being used to adimensionalize time in the model, its numerical value effectively sets the time scale of the dynamo solutions constructed in what follows. In anticipation of comparison with the results from the MHD numerical simulations, we set $\eta_0 = 6.7 \times 10^{10} [\text{cm}^2/\text{sec}]$, which will produce cycle periods of the same order of magnitude as observed in the simulations. This value is actually reasonable from the point of view of conventional estimates obtained through mean-field theory, which can yield values anywhere in the range 10^{11} – 10^{13} cm^2/sec for the bulk of the convection zone.

For the azimuthal flow, we use the temporally-averaged differential rotation extracted from a hydrodynamical simulation of solar convection, similar in overall numerical setup and forcing regime to the MHD simulation analyzed by Racine *et al.* [2011]. This profile is solar-like in many ways, and, in particular, includes a thin tachocline-like rotational shear layer immediately beneath the core-envelope interface (see Fig. 2.2). The corresponding profile in the MHD simulation is characterized by a pole-to-equator angular velocity contrast smaller by a factor of about 3, and a less well-defined tachocline at high latitude

(cf. Fig. 3 and 4 in Racine *et al.* [2011]). Moreover, it shows torsional oscillations of significant amplitudes [Beaudoin *et al.*, 2012]; being interested here in constructing kinematic mean-field models, we therefore opted to use the differential profile extracted from the HD parent simulation. For our adopted value of η_0 , the associated dynamo number value is $C_\Omega \simeq 2.5 \times 10^4$.

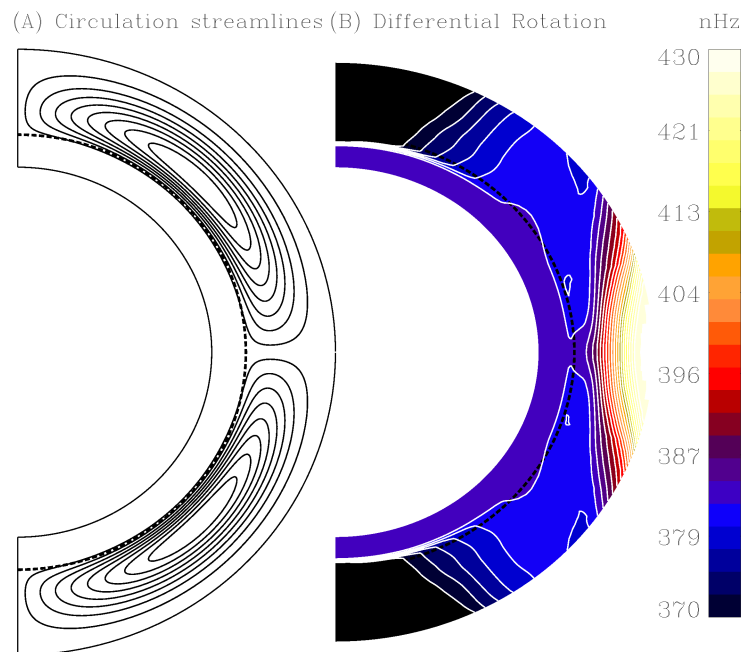


Figure 2.2: A) Meridional circulation streamlines with the flow poleward at the surface and equatorward at the core-envelope interface. B) Zonally and temporally (~ 100 years) averaged angular velocity in the purely hydrodynamical regime (see Racine *et al.* [2011] Fig. 3). The dashed line represents the core-envelop interface.

Unlike differential rotation, the azimuthally-averaged meridional flow in the simulation of Racine *et al.* [2011] is weak, time-dependent, and shows structures in equatorial regions that arise from a break of scale separation underlying the definition of large-scale flow and field in terms of azimuthal averages. Consequently, in all mean-field solutions reported upon below we adopted instead the parametric meridional flow profile of van Ballegoijen & Choudhuri [1988], using the same defining parameters as in the mean-field models presented in Dikpati & Charbonneau [1999] (see their eq. (5a) to (5f)), with the two following exceptions: we set the base parameter $r_b = 0.718$, and the polytropic index $m = 1$; these choices yield a meridional flow that most closely resembles that extracted

from the HD simulation of Racine *et al.* [2011]. More specifically, the depth variations of the latitudinal flow component at mid-latitude is very well-reproduced across the bulk ($0.76 \leq r/R \leq 0.94$) of the convective envelope ($0.718 \leq r/R \leq 0.96$) in the Racine *et al.* [2011] simulations. With a mean mid-latitude subsurface meridional flow speed of order $\sim 1 \text{ m s}^{-1}$ in the simulation of Racine *et al.* [2011] and our adopted $\eta_0 = 6.7 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, one gets a Reynolds number $R_m \simeq 100$. On the other hand, the $\simeq 15 \text{ m s}^{-1}$ observed on the solar surface at mid-latitudes would yield $R_m \simeq 1500$. In what follows we explore the parameter range $0 \leq R_m \leq 400$.

With the large-scale flow fixed in time, as per the kinematic approximation, a nonlinearity must be introduced “by hand” to avoid unbounded growth of the large-scale magnetic field. All mean-field solutions presented below use a standard algebraic “ α -quenching” expression, where the magnitude of all α -tensor component are quenched according to:

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{1 + (B_\phi(r, \theta, t)/B_0)^2}, \quad (2.15)$$

where the scale factor B_0 is deemed related to the equipartition field strength. Its value is set here at 10^5 G , without any loss of generality. With the α -tensor components having magnitudes of the order of a few meters per second, our adopted value of η_0 then leads to $C_\alpha \simeq 10^2$.

2.3 Mean-field dynamo models

Mean-field dynamo solutions are computed using the finite element-based numerical model of Charbonneau *et al.* [2005], which solves the kinematic axisymmetric dynamo equations (2.11)–(2.12) in a meridional $[r, \theta]$ plane ($0 \leq \theta \leq \pi$) spanning a radial range $0.5R_\odot \leq r \leq 1R_\odot$, with the solution matched to a potential field in the exterior. The transition between the convection zone and underlying radiative core is set at $0.718R_\odot$, to be consistent with the simulation setup of Racine *et al.* [2011]. All solutions use as an initial condition a weak toroidal magnetic field including dipolar and quadrupolar contributions of equal strength. All solutions are computed on a spatial mesh of dimensions $N_r \times N_\theta = 128 \times 96$, on which the components of the α -tensor and differential rotation extracted from the simulation are interpolated by bilinear Lagrangian interpolation in the $[r, \theta]$ plane, with the α -tensor components and rotational shear terms set to zero above $r/R = 0.96$, the upper boundary of the simulation analyzed by Racine *et al.* [2011].

We consider now a progressively more complex series of kinematic mean-field models,

starting (§3.1) with a simple $\alpha\Omega$ model, in which the only contribution retained is that of the $\alpha_{\phi\phi}$ component in eq. (2.11). We then examine an $\alpha^2\Omega$ model including the full α -tensor (§3.2). Also, in order to help disentangling the various contributions to magnetic field evolution, we consider α^2 mean-field models, in which differential rotation is turned off (§3.3), as well as $\alpha^2\Omega$ models in which turbulent pumping has been removed by artificially zeroing out the off-diagonal component of the α -tensor (§3.4). Finally we explore an α^2 mean-field model without turbulent pumping and differential rotation (§3.4). In all cases we also examine the impact of varying the speed of the meridional flow, by varying the Reynolds number R_m .

2.3.1 An $\alpha\Omega$ model

Our first model is an $\alpha\Omega$ model based on the differential rotation profile of Fig. 2.2 and the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component plotted on Fig. 2.1. The top two panels of Fig. 2.3A and B show time latitude diagrams of the toroidal magnetic component at $r/R = 0.85$ (middle of convection zone) and $r/R = 0.72$ (base of convection zone), and the bottom a radius-time diagram of the toroidal field at latitude 60° , all for a representative solution with parameter values $C_\Omega = 3 \times 10^4$, $C_\alpha = 35$, $R_m = 15$, and $\Delta\eta = 100$. For this model the critical dynamo number is $D = C_\alpha \times C_\Omega = 1.06 \times 10^5$, so that this reference solution is markedly supercritical.

Two dynamo modes coexist in this solution; the first originates very near the equator and propagates upwards and towards higher latitudes, essentially in a direction parallel to the symmetry axis. The second, of lower amplitude, is concentrated at high latitudes, originates in the middle of the convection zone and propagates upwards. Both modes are symmetric about the equatorial plane, and both penetrate diffusively below the core-envelope interface (dashed line on Fig. 2.3C), although they each reach their peak amplitudes in the outer half of the convection zone, near $r/R = 0.9$. These two dynamo modes are phase-locked, with the high latitude mode oscillating at twice the frequency of its low latitude counterpart.

The existence of two distinct dynamo modes is a direct consequence of the internal differential rotation profile used here (Fig. 2.2), which within the convection zone shows two more or less distinct shear regions; a region of primarily latitudinal shear at high latitude, and a strong shear with isocontours approximately parallel to the rotation axis at low latitudes. Indeed, the directions of propagation of the two dynamo modes are

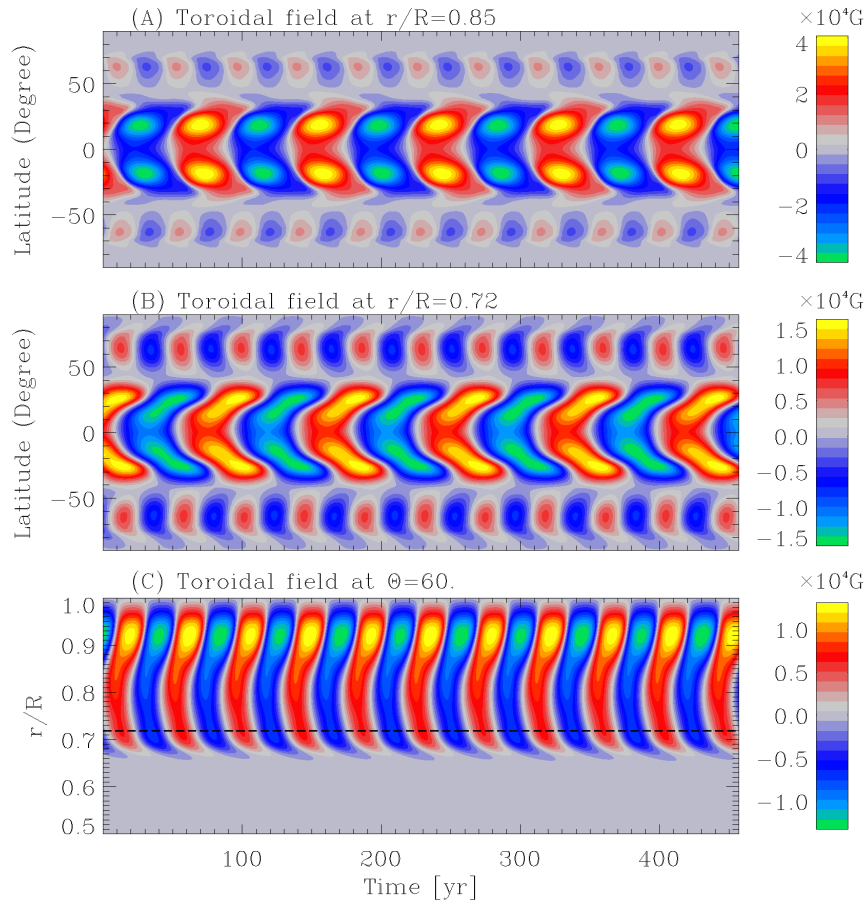


Figure 2.3: Butterfly diagram for the reference solutions of 2.11 and 2.12 with the $\alpha_{\phi\phi}$ component and the differential rotation profile shown in Figure 2.2. The top and middle panel shows B_ϕ in a time-latitude diagram at $r/R = 0.85$ and $r/R = 0.718$, the bottom panel show B_ϕ in a time-radius at 60° latitude where the dashed line indicates the core-envelope interface. The color scale denotes the magnetic field strength in Gauss. This solution is defined by the input parameter values $C_\Omega = 30000$, $R_m = 15$, $C_\alpha = 35$ and $\Delta\eta = 100$.

precisely what one would expect from the so-called Parker-Yoshimura sign rule, for a scalar α -effect that is positive in the northern hemisphere, which is the case here in the bulk of the convective envelope (see Fig. 2.1). Here the low-latitude shear is so strong that the equatorial mode ends up producing the larger magnetic amplitudes, even though the α -effect is quite weak at low latitudes (see Fig. 2.1, bottom right panel).

A solution closer to criticality ($C_\alpha = 5$) but otherwise identical in its parameter settings also show two modes, although the high-latitude mode is then of much smaller amplitude, some 40 times below its low-latitude counterpart at their respective peak, and

oscillates at the same frequency. A change of equatorial parity is observed around $C_\alpha \simeq 8$, with solutions under this value being antisymmetric about the equator, and those above symmetric, as on Fig. 2.3. This change in parity coincides with the onset of an increase in the frequency of the high-latitude mode, which locks again at twice the frequency of the low-latitude mode around $C_\alpha \simeq 35$. Figure 2.4 summarizes pictorially these various transitions.

Varying the envelope-to-core magnetic diffusivity has no significant impact on these dynamo modes. When $\Delta\eta$ approaches one, significant magnetic fields build up across the stable layer, as one would have expected, otherwise the most significant change is a 7% increase in the period of the high latitude mode. For $\Delta\eta \geq 50$, solutions are very nearly identical.

Varying the meridional circulation speed, via change in R_m , has more pronounced effects. The $R_m = 15$ solution plotted on Fig. 2.3 is essentially identical to a $R_m = 0$ solution with otherwise identical parameter values, except for the period of the high latitude mode being larger by 10%. However, increasing R_m beyond 25 or so has a more important impact. Beyond about $R_m = 35$, the periods of the two modes are no longer integer multiples of one another, leading to mild amplitude modulation and beat phenomena. By $R_m = 75$ the two modes are again phase-locked, but now at the same frequency, and, at the core-envelope interface, the high-latitude mode now has the highest amplitude. At $R_m = 200$ the field amplitude oscillates but without switching polarity in the bottom half of the convection zone, and above $R_m \simeq 400$ polarity reversals have ceased throughout the domain, even though oscillatory behavior superimposed on a steady field is still apparent. Interestingly, beyond $R_m \simeq 600$ the steady field switches to antisymmetric parity about the equatorial plane. Such complex behavior, as R_m is increased, is actually common in $\alpha\Omega$ models with a solar-like internal differential rotation (see, e.g., Charbonneau [2010][§4.4] for some specific examples).

2.3.2 An $\alpha^2\Omega$ model

We now turn to a true $\alpha^2\Omega$ model including all nine components of the α -tensor, as plotted on Fig. 2.1. Figure 2.5 shows in (A) a time-latitude diagram at $r/R = 0.85$ and in (B) a radius-latitude diagram at latitude $+70^\circ$, both for the toroidal magnetic component, in format similar to Fig. 2.3. Once again we observe two dynamo modes, the first being a poleward-propagating mode concentrated at low to mid-latitude in the upper half of

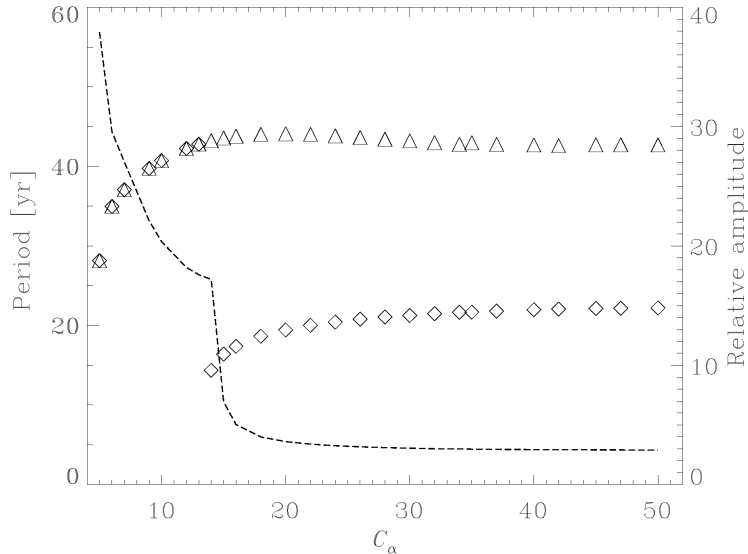


Figure 2.4: Variations of the dynamo period for the two dynamo modes co-existing in the $\alpha\Omega$ model. All dynamo solutions have $C_\Omega = 30000$, $R_m = 15$, and $\Delta\eta = 100$. At low C_α the high latitude mode (diamonds) is locked to the frequency of the low-latitude mode (triangles), but undergoes a sudden increase in frequency around $C_\alpha \simeq 14$, to lock again ($C_\alpha \simeq 35$) onto the high-latitude mode at twice its frequency. The variation with C_α of the peak amplitude ratio of the low-latitude mode over the high-latitude mode (right vertical axis) is plotted as a dashed line.

the convective envelope, and a second mode, of slightly longer period, peaking at high-latitudes at the nominal base of the convection zone at $r/R = 0.718$. The two modes interact with one another, leading to a beat-type phenomenon with significant variations in the amplitude and duration of the shorter period mode, readily apparent on Fig. 2.5A.

This model is, in principle, the one that should most resemble the simulation results of Racine *et al.* [2011]. The two bottom panels of Fig. 2.5 are the equivalents of panels (A) and (B), but this time computed as zonal averages of the toroidal magnetic component as extracted from the MHD simulation analyzed by Racine *et al.* [2011]. One can observe both similarities and differences. Two modes also coexist in the simulation, namely a short period mode restricted to the low-latitude part of the convection zone, and a much longer period mode peaking below the core-envelope interface. In both cases the high-latitude modes undergo polarity reversals in the bottom half of the convection zone, with subsequent upwards and downwards migration accompanied by amplification (cf. panels B and D), peak values being reached at (mean-field model) or immediately beneath (simulation)

the core-envelope interface. Within the convection zone, the simulation shows a dynamo mode peaking at mid-latitudes, showing little latitudinal propagation tendencies, and a fainter poleward propagating branch originating in the equatorial regions. This pattern resembles what is produced by the $\alpha^2\Omega$ model (cf. panels A and C), except that in the latter case the two modes are not phase locked. The simulation also shows a much shorter-period amplitude modulation at low latitude, superimposed on the more slowly evolving dynamo cycle. Whether this represents the imprint of yet another weak dynamo mode, presumably powered by the strong shear building in the equatorial regions, or a form of torsional oscillation, remains unclear at this juncture.

Note that such spatially-segregated, co-existing dynamo modes with widely different periods are not unique to the MHD simulations of Ghizaru *et al.* [2010]; Racine *et al.* [2011], but have also been observed in the spherical wedge MHD simulations of Käpylä *et al.* [2010].

The morphology and relative magnitude of the two dynamo modes present in this $\alpha^2\Omega$ model are sensitive to the adopted values for the dynamo number C_α and meridional flow speed, as measured by R_m . Near criticality, the low-latitude mode has by far the largest amplitude and is symmetric about the equator, but as C_α exceeds about 30, balance shifts rapidly towards the high-latitude mode and antisymmetric equatorial parity. Increasing the diffusivity contrast to $\Delta\eta = 1$ phase locks the two modes, and, naturally, favors deeper penetration beneath the core-envelope interface, particularly for the high latitude mode. The dynamo solutions also show a complex response to variations in the meridional flow speed. A solution without meridional flow ($R_m = 0$) shows a high-latitude mode similar to that observed on Fig. 2.5A and B, but the low-latitude mode is much weaker and phase-locked onto the dominant high-latitude mode. As R_m increases, the low-latitude mode undergoes a reduction in period and rise in amplitude, even peaking above its high-latitude counterpart around $R_m \simeq 30$. As R_m exceeds about 50 the period and amplitude of the low-latitude mode keep on decreasing until it becomes overwhelmed by its high-latitude cousin. Interestingly, the latter's period first decreases slightly with increasing R_m up to $R_m \simeq 100$, but subsequently increases markedly. In parallel, the peak in toroidal field amplitude is pushed slightly beneath the core-envelope interface, reaching $r/R = 0.7$ at $R_m = 200$.

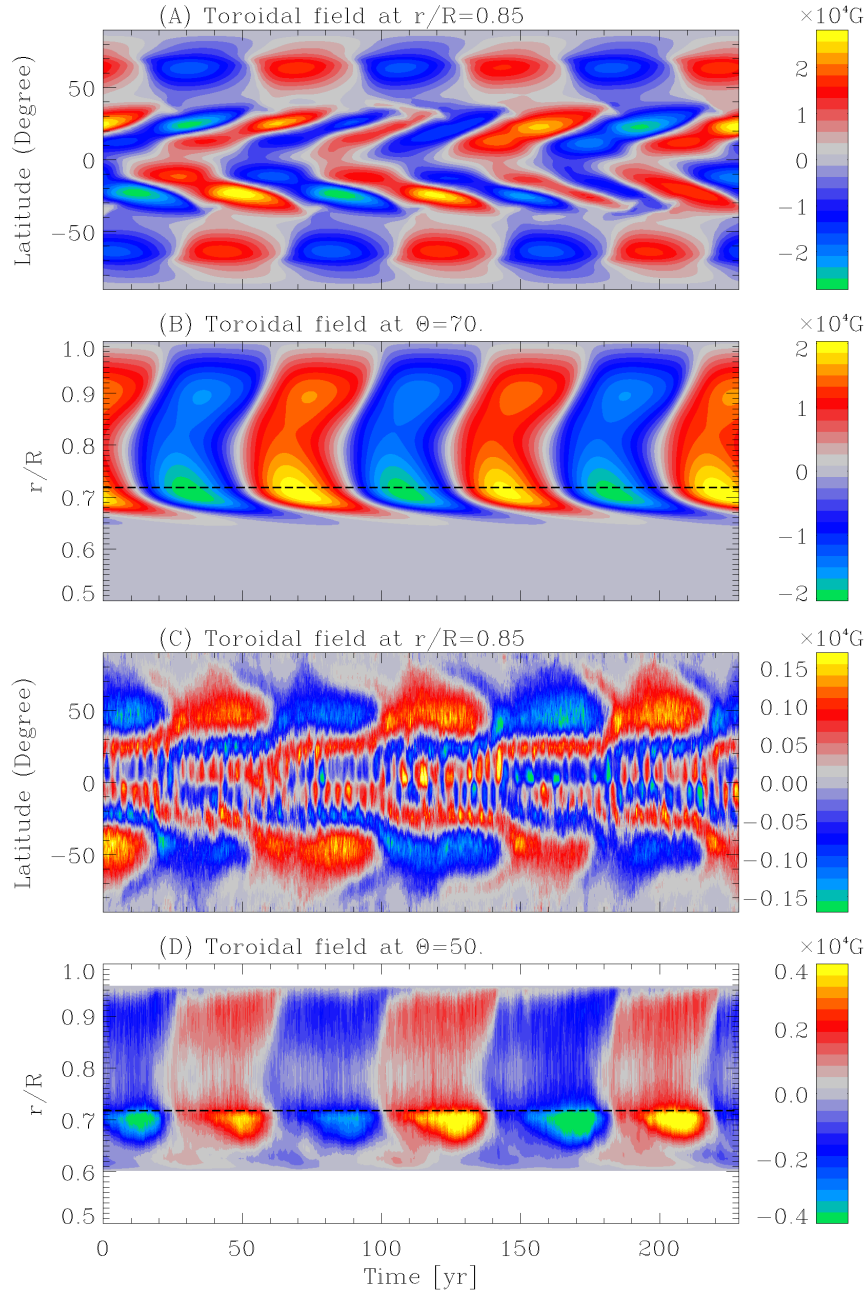


Figure 2.5: Panels (A) and (B) show respectively time-latitude and time-radius diagrams of the toroidal magnetic component in a $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo solution including all nine components of the α -tensor. This solution is defined by parameter values $C_\Omega = 30000$, $R_m = 15$, $C_\alpha = 35$ and $\Delta\eta = 100$. Panel (C) and (D) show corresponding diagrams, now of the zonally-averaged toroidal magnetic field as extracted from the MHD simulation of Racine *et al.* [2011]. Note that (D) is not constructed at exactly the same latitude as (B), simply because the high latitude dynamo modes do not peak at exactly the same locations in the mean-field model as in the MHD simulation.

2.3.3 An α^2 model

Mean-field dynamo models in which both poloidal and toroidal magnetic components are regenerated exclusively via the α -effects are known as α^2 dynamos. For simple α -effect tensors characterized by smooth spatial variations, such models tend to generate a steady large-scale magnetic field. However, it has been shown that more complex tensors can produce oscillatory solutions (see, e.g., Rüdiger *et al.* [2003]; Stefani & Gerbeth [2003]). Since our α -tensor shows many characteristics that have been shown conducive to the production of oscillatory behavior (e.g., sign changes in an hemisphere, α_{rr} component of sign opposite to $\alpha_{\phi\phi}$ over a substantial portion of the meridional plane), it becomes interesting to search for oscillatory solutions in this α^2 regime.

For the α -tensor of Fig. 2.1, oscillatory axisymmetric solutions turn out to be readily produced. Figure 2.6A and B show an example, for parameter values $C_\Omega = 0$, $R_m = 15$, $C_\alpha = 35$ and $\Delta\eta = 100$. This can be compared directly to Fig. 2.5A and B, which allows a direct assessment of the role of differential rotation in this model. The α^2 dynamo mode originates in the outer third of the convection zone and peaks at 40 degrees latitude, with a solar-like equatorward propagation that is maintained throughout the radial extent of the convection zone (see Fig. 2.6A and B). A significant downward propagation is also observed (on Fig. 2.6C), with an equivalent downward speed of order 1 m s^{-1} in this specific solution. This is commensurate with the magnitude of the radial component of the (downward) radial component of the general turbulent pumping speed characterizing the α -tensor extracted by Racine *et al.* [2011] (see their Fig. 9, bottom center panel). Remarkably, little trace of the high-latitude mode is to be found here. This suggests that differential rotation within the tachocline plays an important role in amplifying the magnetic field building up at the base of the convection zone in the $\alpha^2\Omega$ model. This is also compatible with the dynamo analysis of the simulation output by Racine *et al.* [2011], who found that the turbulent electromotive force and induction by large-scale flow have comparable absolute magnitudes at the core-envelope interface (see their Fig. 14A and B).

In this model the critical dynamo number is $C_\alpha \simeq 26$, and the dynamo mode turns out to be quite sensitive to the adopted values of both C_α and R_m . At low R_m , well-defined oscillatory solutions, as on Fig. 2.6, are restricted to the range $30 \leq C_\alpha \leq 90$. As with the $\alpha^2\Omega$ model of the preceding section, the cycle period is found to increase with increasing R_m . This dynamo is clearly not operating as a flux transport dynamo, and the observed increase in period indicates instead that the meridional flow instead interferes with the

operation of this α^2 dynamo, a situation also encountered in α^2 models of dynamo action in the core of massive main-sequence stars (e.g., Charbonneau & MacGregor [2001]). These α^2 dynamos being driven entirely within the convection zone, their global properties show no noticeable dependence on the core-to-envelope diffusivity ratio in the range we have explored ($1 \leq \Delta\eta \leq 100$).

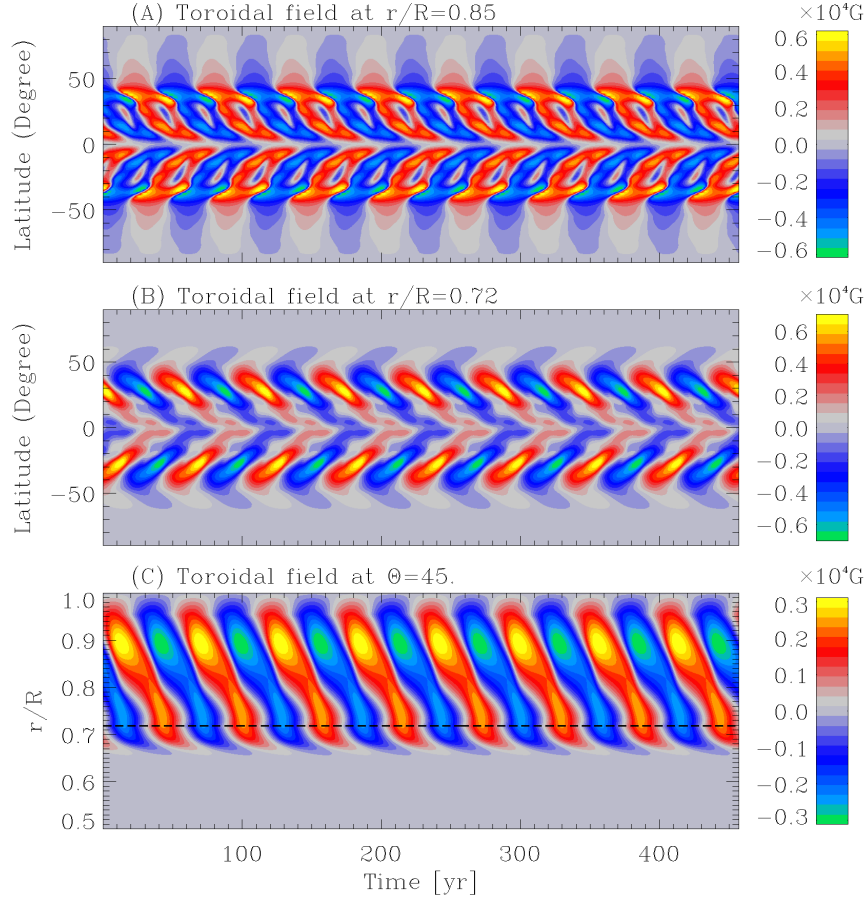


Figure 2.6: Dynamo solutions in the α^2 regime, plotted in the same format as in figure 2.3, with $C_\Omega = 0$, $R_m = 15$, $C_\alpha = 35$ and $\Delta\eta = 100$. Panels (A) and (B) show time-latitude slices at mid-depths within the convection zone and core-envelope interface, respectively, and panel (C) is a radius-time slice at mid-latitudes.

2.3.4 Turbulent pumping

As outlined in §2.1 above, the off-diagonal of the α -tensor embodies “turbulent pumping”, i.e., turbulent transport of the large-scale mean magnetic field components. This transport is intimately tied to the inhomogeneity and anisotropy of the small-scale turbu-

lent flow responsible for the α -effect [Ossendrijver *et al.*, 2002]. An interesting numerical experiment therefore consists in artificially zeroing out these off-diagonal components, and compare the resulting dynamo solutions to their counterparts using the full α -tensor.

Carrying out this experiments with the $\alpha^2\Omega$ produces a dynamo solution resembling much more the $\alpha\Omega$ solution of §2.3.1 than its $\alpha^2\Omega$ counterpart of §2.3.2. The primary difference being the peak internal toroidal field strength being a factor of two higher with turbulent pumping removed, and the high latitude mode having already switched equatorial parity for our reference parameter values $C_\alpha = 35$ and $R_m = 15$. One can but conclude that turbulent pumping plays a very important role in setting the global characteristics of the $\alpha^2\Omega$ dynamo solution (on this see also Käpylä *et al.* [2006a]). A corollary is that the α_{rr} tensor component, despite being of an overall amplitude comparable to $\alpha_{\phi\phi}$, has comparatively much less impact on the global dynamo behavior.

Removing turbulent pumping also has a large impact on the α^2 dynamo solutions of §2.3.3. Figure 2.7, to be compared to Fig. 2.6A and C, shows an α^2 solution with turbulent pumping removed. The critical dynamo number is now $C_\alpha \simeq 28$, larger than the value $C_\alpha \simeq 26$ characterizing the full α^2 model of §2.3.3. The equatorial parity is now clearly antisymmetric about the equator, and the peak internal field strength is some 50% smaller than when the full α -tensor is used. Most striking perhaps, with turbulent pumping removed the cycle period increases by a factor 5, and the downward propagating branch has disappeared. Equatorward propagation survives at high latitudes, but stops well short of reaching equatorial latitudes, as in the α^2 model using the full α -tensor.

Once again increasing the meridional flow speed leads to mounting interference with the α^2 mode dynamo; however, the effect is less pronounced than with the full α^2 mode, the cycle period now going from 28.4 yr at $R_m = 0$ to 38.7 yr at $R_m = 10^2$. At any rate, whether in $\alpha^2\Omega$ or α^2 mode, turbulent pumping does not cause a mere spatial distortion of a dynamo mode driven by the homogeneous part of the α -tensor, but alters fundamentally the global characteristics of the dynamo modes. This is further explored on Figure 2.8, with the top half showing meridional plane snapshots of the $\alpha^2\Omega$ model of §2.3.2, with and without the off-diagonal terms removed (A and B respectively). The bottom part shows equivalent snapshots now for the α^2 model of §2.3.3. Note that the $\alpha\Omega$ model of §2.3.1 would yield a snapshot almost identical to that plotted on Fig. 2.3A. In all cases turbulent pumping leads to a suppression of dynamo action at low latitudes, which is quite noteworthy in the $\alpha^2\Omega$ case since a very strong shear is present there (see Fig. 2.5). Evidently both the combined source and transport contributions from the off-diagonal components of the α -tensor jointly

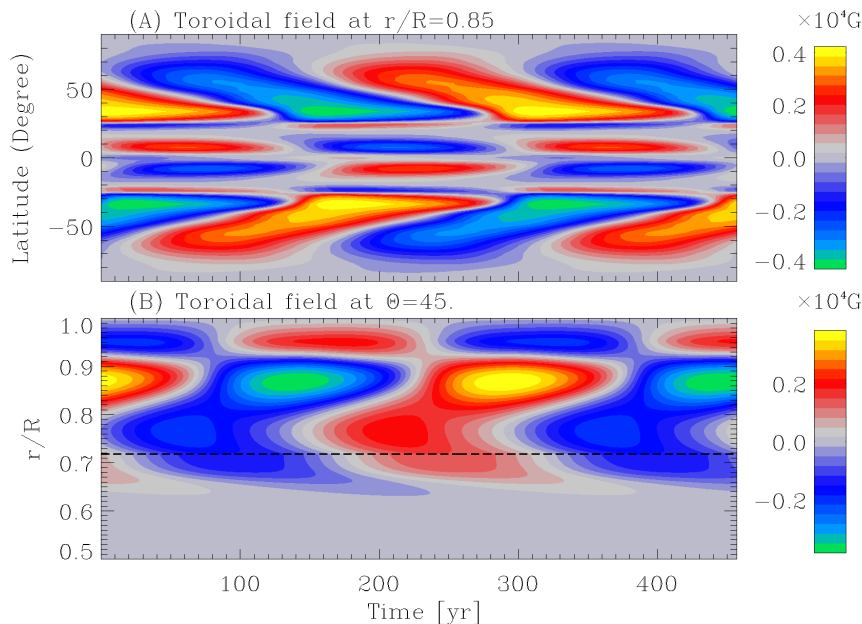


Figure 2.7: Time-latitude and time-radius diagrams of the toroidal magnetic component in an α^2 solution using the same parameter settings as on Fig. 2.6, but now with turbulent pumping turned off, by artificially zeroing out all off-diagonal components of the α -tensor (see §2.3.4). Panels A and B should be compared to panels A and C of Fig. 2.6.

act in a manner precluding dynamo action at low latitudes. This idea finds support in the fact that the turbulent mean-electromotive force is relatively small there (see Fig. 8 in Racine *et al.* [2011], even though many α -tensor components have significant amplitude at low latitudes (cf. Fig. 2.1 herein). The morphology of these various dynamo modes is clearly a complex affair, resulting from the interaction between differential rotation, source and transport terms associated with an inhomogeneous α -effect, and advection by the meridional flow.

2.4 Discussion and conclusion

In this paper we have presented a series of kinematic axisymmetric mean-field dynamo solutions, using an α -tensor extracted from a global MHD simulation producing a large-scale magnetic field showing regular polarity reversals resembling the solar cycle. These mean-field models use a mean internal rotation profile extracted from a purely hydrodynamical simulation ran under the same thermal forcing regime and parameter settings as the aforementioned MHD simulation, and a parametric form for the meridional flow within the convective envelope. Algebraic α -quenching is the sole amplitude-limiting mechanism

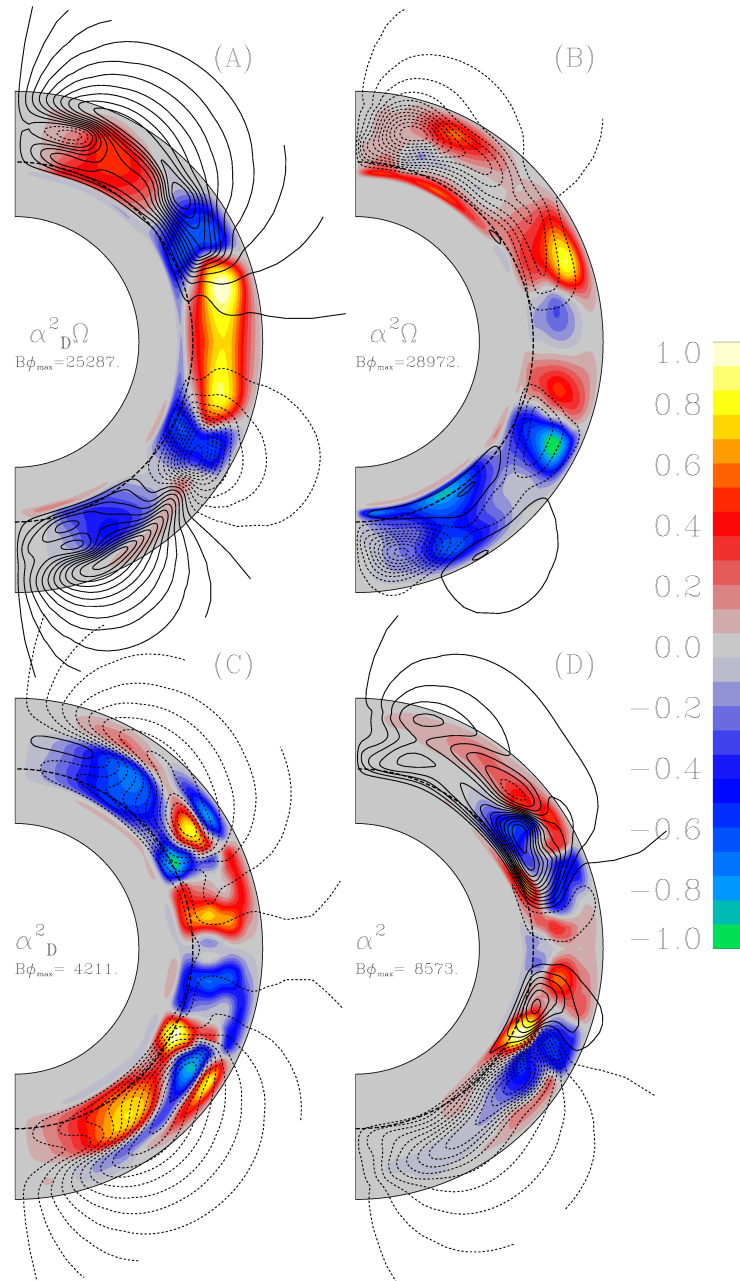


Figure 2.8: Snapshots of the zonally-averaged (color scale) and poloidal (lines) magnetic component in the $\alpha^2\Omega$ (top) and α^2 (bottom) regimes, for the dynamo solutions discussed already in §2.3.2 and §2.3.3 (right column), and their equivalents computed with turbulent pumping removed (left). The magnetic field in each snapshot has been normalized to its own peak value. An equivalent snapshot for the $\alpha\Omega$ model of §2.3.1 is almost indistinguishable from the $\alpha^2\Omega$ snapshot at top left. Animations of these four snapshots are available as supplementary material to the online version.

introduced in the these mean-field models. Comparison with the cycle characteristics of the global MHD simulation then allows to disentangle aspects of the dynamo behavior affected by the dynamical backreaction of the Lorentz force, from those associated with the spatial complexity of the α -tensor.

Even a simple $\alpha\Omega$ model using only the $\alpha_{\phi\phi}$ component of the α -tensor yields fairly complex dynamo behavior, with two dynamo modes materializing in the model. The dominant mode is powered by the strong radial shear characterizing the differential rotation profile in equatorial region, while the second is associated with the strong radial shear within the high-latitude portion of the tachocline-like shear layer present immediately beneath the core-envelope interface. In some parameter range these dual dynamo modes are sometimes phase-locked, sometimes not, leading to longer timescale amplitude modulation.

The co-existence of distinct and spatially-segregated dynamo modes persists in $\alpha^2\Omega$ models using the full α -tensor. Using parameter values calibrated to the extent possible on a global MHD simulation, the resulting $\alpha^2\Omega$ solutions show some striking similarities to the cycles developing in this same simulation, most notably perhaps the existence of a poleward propagating dynamo mode concentrated at low latitudes within the convective envelope, and a higher-latitude mode leading to accumulation of strong magnetic fields about the core-envelope interface proper. The latter is found to be dependent on the presence of differential rotation, in agreement with the dynamo analysis of Racine *et al.* [2011] who could demonstrate that at the base of the convection zone, induction by the large-scale flow contributed about as much as the turbulent electromotive in the regeneration of the toroidal magnetic component. The presence of a meridional flow can have a strong impact on these $\alpha^2\Omega$ dynamo solutions, although its effects are relatively minor for the parameter regime presumably closest to the MHD simulations to which comparison is being made.

Overall, the results obtained here support at least to some extent the conjecture put forth by Racine *et al.* [2011], namely that the dynamo present in these global MHD simulation operates similarly to an $\alpha^2\Omega$ dynamo in mean-field theory. Our results also suggest that the spatiotemporally complex dynamo behavior observed in the global MHD simulations is primarily determined by the complexity of the α -tensor and distinct regions of strong shear in the internal differential rotation, rather than by dynamical effects associated with the backreaction of the Lorentz force on the inductive flows. The latter would then act primarily as an amplitude-limiting mechanism, a conjecture supported by the parallel analyses presented in Passos *et al.* [2012] and Beaudoin *et al.* [2012].

Working on the same MHD simulation output as the one used to extract the α -tensor component used in the present paper, Passos *et al.* [2012] have shown that the deep meridional flow speed is strongly modulated by the large-scale magnetic field. Based on our mean-field model calculations including a meridional flow, it appears possible that the accumulation of strong magnetic fields beneath the core-envelope interface could be in part favored by magnetically-mediated increase in the equatorward mean meridional flow speed in the deep convective envelope.

Interestingly, oscillating dynamo solutions are readily found when operating in α^2 mode, i.e., without any inductive contributions from differential rotation. This result is in general agreement with earlier studies having shown that a sufficiently complex α -tensor can produce such axisymmetric, oscillating solutions. The α^2 dynamo solutions we have obtained have significantly lower toroidal field strengths than their cousins $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$ models, consistent with the lack of induction by the differential rotation, and are also more sensitive to the presence of a meridional flow. Interestingly, many of these solutions show a deep-seated toroidal field concentrated at mid to low latitudes migrating equatorward in a nicely solar-like manner.

Our modelling results also reveal that turbulent pumping plays an important role in all $\alpha^2\Omega$ and α^2 models investigated. Turbulent pumping does not act as a mere spatial perturbation of the large-scale magnetic fields generated, but strongly affects global characteristics such as cycle period, equatorial parity, and peak internal field strength.

The procedure used in Racine *et al.* [2011] to extract the α -tensor components from the MHD simulation output also returns the temporal variance of each component at each grid point. This opens the possibility to carry out Monte-Carlo-like mean-field dynamo simulations where the α -tensor components are subjected to stochastic fluctuations at a level coherent with the fluctuations characterizing the MHD simulations. There is a vast extant literature demonstrating that stochastic forcing of $\alpha\Omega$ (and related) dynamo models can produce patterns of cycle amplitude fluctuations that show many features reminiscent of the sunspot number record, even when the coherence time of this stochastic forcing is much shorter than the cycle period (e.g., Brandenburg *et al.* [1992]; Charbonneau & Barlet [2011]; Ossendrijver & Hoyng [1996]; and references therein). Since comparatively little attention has been given to stochastically-forced $\alpha^2\Omega$ models (but do see Choudhuri 1992), it would be interesting to examine whether these patterns carry over to the α^2 and $\alpha^2\Omega$ mean-field models constructed from the α -tensor extracted from the MHD simulations.

This work was supported by Canada's Natural Sciences and Engineering Research

Council, Research Chair Program, and by the Canadian Space Agency's Space Science Enhancement Program (grant # 9SCIGRA-21). CS is also supported in part through a graduate fellowship from the Université de Montréal's Physics department.

CHAPTER 3

CONCLUSION

Nous avons vu que l'étude de la dynamo solaire est un domaine de recherche complexe où il reste beaucoup à apprendre. Le développement récent des modèles globaux a permis d'approfondir les connaissances relatives au cycle magnétique solaire. Nous avons voulu estimer l'effet de l'insertion d'un tenseur- α , extrait d'une simulation MHD globale [Ghizaru *et al.*, 2010], dans un modèle de champ moyen [Charbonneau & MacGregor, 1997] avec pour but de comparer les deux modèles. Cette comparaison a permis de distinguer les effets dynamiques de l'écoulement à grande échelle, des effets dus à la force électromotrice, sur la variation cyclique du champ magnétique.

L'inclusion des neuf composantes du tenseur- α dans un modèle de champ moyen a permis de reproduire plusieurs caractéristiques du champ magnétique observées dans la simulation globale. Ainsi, nous avons constaté la présence de deux modes dynamo de périodes similaires situés à l'équateur et à haute latitude. Premièrement, le mode équatorial est concentré à des rayons plus près de la surface et se propage vers les pôles, ces caractéristiques sont également observées pour le cycle de courte période de la simulation globale. De plus, on note que le cycle à haute latitude se concentre et s'accumule au bas de la zone convective dans les deux modèles. Par contre, la période du cycle équatorial présent dans le modèle de champ moyen est du même ordre que celui situé à haute latitude contrairement au modèle global qui trouve un facteur d'environ 10 entre les deux modes. De plus, on note aussi que le champ toroïdal du cycle à haute latitude est globalement concentré à de plus hautes latitudes ($\sim 65^\circ$) que dans le modèle global ($\sim 50^\circ$). Par ailleurs, de manière générale, le champ magnétique produit par le modèle de champ moyen est également sensible à la présence, ainsi qu'au type de profil, de la circulation méridienne et de la rotation différentielle inclus dans le modèle.

Le fait que le modèle de champ moyen produise deux modes dynamo et que l'allure générale du champ magnétique ressemble à bien des points de vues, aux structures aux grandes échelles de celui produit par le modèle global, est dû à la complexité spatiale du tenseur- α . Ceci suggèrent que la force électromotrice contrôle plutôt la distribution spatiale du champ magnétique à grande échelle tandis que la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement causerait principalement la saturation de l'amplitude de la dynamo

[Beaudoin *et al.*, 2012; Passos *et al.*, 2012].

En supprimant entièrement la rotation différentielle au sein du modèle, on peut soutenir un effet dynamo cyclique en n'utilisant que la force électromotrice. La solution produite ne montre pas d'accumulation de champ magnétique au bas de la zone convective. Ceci suggère que la présence de rotation différentielle y joue un rôle non négligeable dans l'amplification locale du champ magnétique pompé à l'interface de la zone convective. Finalement, en supprimant le pompage turbulent global du tenseur- α , les cycles magnétiques produits diffèrent significativement de ceux produits avec le profil original de α . Ce pompage a comme effet global de déplacer le champ magnétique situé à l'équateur vers les pôles en plus de transporter le champ magnétique toroïdal vers le bas de la zone convective. Ainsi, le pompage turbulent joue donc un rôle notable au sein de la dynamo produite.

Pour calculer le tenseur- α complet, on utilise une méthode d'optimisation standard de moindres carrés basée sur la décomposition en valeurs singulières. L'avantage de cette méthode est qu'en plus de trouver une valeur de α pour chaque point de maille, elle retourne automatiquement la variance qui y est associée. Actuellement, les composantes du tenseur- α ne varient que spatialement. Il serait toutefois possible d'ajouter au modèle de champ moyen une méthode de style Monte Carlo qui ferait fluctuer le tenseur- α selon la statistique décrite par la variance de ses composantes. Ainsi, il est nécessaire d'introduire un *temps de cohérence* durant lequel la valeur de α reste à une valeur fixe. L'intérêt des modèles de champ moyen utilisant un forçage stochastique de l'effet- α tient à la possibilité de moduler l'amplitude et la durée des cycles magnétiques produits. On réussit même à créer des modulations très semblables à celles qu'on observe sur le Soleil [Ossendrijver & Hoyng, 1996]. De plus, dans ce type de modèles, on peut causer des modulations d'amplitude sur de longues échelles temporelles même en utilisant des temps de cohérence faibles par rapport à la durée d'un cycle [Charbonneau, 2010, §5.6].

En plus d'observer des modulations d'amplitude au sein du cycle solaire, on observe aussi des périodes où l'activité magnétique est fortement diminuée par rapport aux cycles "habituels". Ce phénomène est connu sous le nom d'intermittence et fait l'objet de nombreuses recherches. Les modèles discutés plus haut peuvent, dans certaines configurations, reproduire ce phénomène d'intermittence dans les cycles magnétiques (par exemple, Choudhuri [1992]; Ossendrijver [2000]). L'insertion des variances associées à chacun des points de maille en r et θ des neuf composantes du tenseur- α , dans un modèle de champ moyen, nous permettrait d'analyser ce phénomène pour la première fois via un profil spa-

tial variable 2D de l'effet- α . Ce travail fera l'objet de mon futur projet de doctorat, en collaboration avec les membres du *Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung of doom*.

BIBLIOGRAPHY

- P. Beaudoin, P. Charbonneau, E. Racine & P. K. Smolarkiewicz. Torsional oscillations in a global solar dynamo. *Solar Physics, in Press*, 2012.
- A. Brandenburg, D. Moss & I. Tuominen. Stratification and thermodynamics in mean-field dynamos. *A&A*, 265:328–344, novembre 1992.
- A. Brandenburg, I. Tuominen, A. Nordlund, P. Pulkkinen & R. F. Stein. 3-D simulation of turbulent cyclonic magneto-convection. *A&A*, 232:277–291, juin 1990.
- B. P. Brown, M. K. Browning, A. S. Brun, M. S. Miesch & J. Toomre. Persistent Magnetic Wreaths in a Rapidly Rotating Sun. *ApJ*, 711:424–438, mars 2010.
- B. P. Brown, M. S. Miesch, M. K. Browning, A. S. Brun & J. Toomre. Magnetic Cycles in a Convective Dynamo Simulation of a Young Solar-type Star. *ApJ*, 731:69, avril 2011.
- M. K. Browning, M. S. Miesch, A. S. Brun & J. Toomre. Dynamo Action in the Solar Convection Zone and Tachocline: Pumping and Organization of Toroidal Fields. *ApJ*, 648:L157–L160, septembre 2006.
- A. S. Brun, M. S. Miesch & J. Toomre. Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope. *ApJ*, 614:1073–1098, octobre 2004.
- P. Charbonneau. Dynamo Models of the Solar Cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, 7:3, septembre 2010.
- P. Charbonneau. *Solar and Stellar Dynamos*. 2012.
- P. Charbonneau & G. Barlet. The dynamo basis of solar cycle precursor schemes. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 73:198–206, février 2011.
- P. Charbonneau & K. B. MacGregor. Solar Interface Dynamos. II. Linear, Kinematic Models in Spherical Geometry. *ApJ*, 486:502, septembre 1997.
- P. Charbonneau & K. B. MacGregor. Magnetic Fields in Massive Stars. I. Dynamo Models. *ApJ*, 559:1094–1107, octobre 2001.
- P. Charbonneau, C. St-Jean & P. Zacharias. Fluctuations in Babcock-Leighton Dynamos. I. Period Doubling and Transition to Chaos. *ApJ*, 619:613–622, janvier 2005.

- A. R. Choudhuri. Stochastic fluctuations of the solar dynamo. *A&A*, 253:277–285, janvier 1992.
- T. G. Cowling. The magnetic field of sunspots. *MNRAS*, 94:39–48, novembre 1933.
- P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. mars 2001.
- W. Deinzer & M. Stix. On the Eigenvalues of Krause-Steenbeck’s Solar Dynamo. *A&A*, 12:111, avril 1971.
- M. Dikpati & P. Charbonneau. A Babcock-Leighton Flux Transport Dynamo with Solar-like Differential Rotation. *ApJ*, 518:508–520, juin 1999.
- M. Ghizaru, P. Charbonneau & P. K. Smolarkiewicz. Magnetic Cycles in Global Large-eddy Simulations of Solar Convection. *ApJ*, 715:L133–L137, juin 2010.
- P. A. Gilman. Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. II - Dynamos with cycles and strong feedbacks. *ApJS*, 53:243–268, octobre 1983.
- P. A. Gilman & J. Miller. Nonlinear convection of a compressible fluid in a rotating spherical shell. *ApJS*, 61:585–608, juillet 1986.
- G. A. Glatzmaier. Numerical simulations of stellar convective dynamos. II - Field propagation in the convection zone. *ApJ*, 291:300–307, avril 1985.
- P. J. Käpylä, M. J. Korpi, A. Brandenburg, D. Mitra & R. Tavakol. Convective dynamos in spherical wedge geometry. *Astronomische Nachrichten*, 331:73, janvier 2010.
- P. J. Käpylä, M. J. Korpi, M. Ossendrijver & M. Stix. Magnetoconvection and dynamo coefficients. III. α -effect and magnetic pumping in the rapid rotation regime. *A&A*, 455:401–412, août 2006a.
- P. J. Käpylä, M. J. Korpi & I. Tuominen. Solar dynamo models with α -effect and turbulent pumping from local 3D convection calculations. *Astronomische Nachrichten*, 327:884, novembre 2006b.
- H. Köhler. The Solar Dynamo and Estimate of the Magnetic Diffusivity and the α -effect. *A&A*, 25:467, juin 1973.
- F. Krause & K.-H. Raedler. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. 1980.

- J. Larmor. How could a rotating body such as the Sun become a magnet? *Reports of the British Association*, 87:159–160, 1919.
- H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. 1978.
- D.J. Mullan. *Physics of the Sun: A First Course*. 2009.
- A. J. H. Ossendrijver & P. Hoyng. Stochastic and nonlinear fluctuations in a mean field dynamo. *A&A*, 313:959–970, septembre 1996.
- M. Ossendrijver, M. Stix & A. Brandenburg. Magnetoconvection and dynamo coefficients: Dependence of the alpha effect on rotation and magnetic field. *A&A*, 376:713–726, septembre 2001.
- M. Ossendrijver, M. Stix, A. Brandenburg & G. Rüdiger. Magnetoconvection and dynamo coefficients. II. Field-direction dependent pumping of magnetic field. *A&A*, 394:735–745, novembre 2002.
- M. A. J. H. Ossendrijver. Grand minima in a buoyancy-driven solar dynamo. *A&A*, 359:364–372, juillet 2000.
- E. N. Parker. Hydromagnetic Dynamo Models. *ApJ*, 122:293, septembre 1955.
- E. N. Parker. *Cosmical magnetic fields: Their origin and their activity*. 1979.
- D. Passos, P. Charbonneau & P. Beaudoin. An Exploration of Non-kinematic Effects in Flux Transport Dynamos. *Sol. Phys.*, 279:1–22, juillet 2012.
- A. Pouquet, U. Frisch & J. Leorat. Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 77:321–354, septembre 1976.
- J. M. Prusa, P. K. Smolarkiewicz & A. A. Wyszogrodzki. EULAG, a computational model for multiscale flows. *Journal of Computational Fluids*, 37:1193–1207, octobre 2008.
- É. Racine, P. Charbonneau, M. Ghizaru, A. Bouchat & P. K. Smolarkiewicz. On the Mode of Dynamo Action in a Global Large-eddy Simulation of Solar Convection. *ApJ*, 735:46, juillet 2011.
- G. Rüdiger, D. Elstner & M. Ossendrijver. Do spherical α^2 -dynamoes oscillate? *A&A*, 406:15–21, juillet 2003.

- G. Ruediger & L. L. Kichatinov. Alpha-effect and alpha-quenching. *A&A*, 269:581–588, mars 1993.
- J. Schou, H. M. Antia, S. Basu, R. S. Bogart, R. I. Bush, S. M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, M. P. di Mauro, W. A. Dziembowski, A. Eff-Darwich, D. O. Gough, D. A. Haber, J. T. Hoeksema, R. Howe, S. G. Korzennik, A. G. Kosovichev, R. M. Larsen, F. P. Pijpers, P. H. Scherrer, T. Sekii, T. D. Tarbell, A. M. Title, M. J. Thompson & J. Toomre. Helioseismic Studies of Differential Rotation in the Solar Envelope by the Solar Oscillations Investigation Using the Michelson Doppler Imager. *ApJ*, 505:390–417, septembre 1998.
- K. Schwarzschild. On the equilibrium of the Sun's atmosphere. *Nachrichten von der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse*, 195, p. 41-53, 195:41–53, 1906.
- P. K. Smolarkiewicz. Multidimensional positive definite advection transport algorithm: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50:1123–1144, avril 2006.
- P. K. Smolarkiewicz & J. Szmelter. Iterated upwind schemes for gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 228:33–54, janvier 2009.
- M. Steenbeck & F. Krause. On the Dynamo Theory of Stellar and Planetary Magnetic Fields. I. AC Dynamos of Solar Type. *Astronomische Nachrichten*, 291:49–84, janvier 1969.
- F. Stefani & G. Gerbeth. Oscillatory mean-field dynamos with a spherically symmetric, isotropic helical turbulence parameter α . *Phys. Rev. E*, 67(2):027302, février 2003.
- F. R. Stephenson. Historical Evidence concerning the Sun: Interpretation of Sunspot Records during the Telescopic and Pretelescopic Eras. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 330:499–512, avril 1990.
- M. Stix. Differential rotation and the solar dynamo. *A&A*, 47:243–254, mars 1976.
- M. Stix. Physics of the solar dynamo: Outstanding problems. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 20:417–427, octobre 2001.
- M. Stix. *The sun: an introduction*. 2002.

A. A. van Ballegoijen & A. R. Choudhuri. The possible role of meridional flows in suppressing magnetic buoyancy. *ApJ*, 333:965–977, octobre 1988.

Appendix I

Annexe 1

Nous avons développé l'expression analytique complète pour la force électromotrice avec les neuf composantes du tenseur- α et l'avons incluse dans un modèle $\alpha^2\Omega$. Voici l'expression pour la composante ϕ présente dans l'équation pour l'évolution temporelle du champ magnétique poloïdal moyen:

$$\mathcal{E}_\phi = A \left(\frac{\alpha_{\phi r}}{r} \cot \theta - \frac{\alpha_{\phi \theta}}{r} \right) + \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\alpha_{\phi r}}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \alpha_{\phi \theta} + \alpha_{\phi \phi} B, \quad (\text{I.1})$$

ainsi que la composante r et θ présente dans l'équation pour l'évolution temporelle du champ magnétique toroïdal moyen:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_\theta] &= \left(\frac{\alpha_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \alpha_{\theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_{rr}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{A \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \\ &- \left(\frac{\alpha_{\theta \theta}}{r} + \frac{\partial \alpha_{\theta \theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\ &+ \left(\frac{\alpha_{\theta \phi}}{r} + \frac{\partial \alpha_{\theta \phi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_{r\phi}}{\partial \theta} \right) B \\ &+ \frac{\alpha_{rr}}{r} \left(\frac{A}{r \sin^2 \theta} - \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ \alpha_{\theta \theta} \left(\frac{A}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) \\ &- \frac{\alpha_{\theta r}}{r} \cot \theta \left(\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \left(\frac{\alpha_{r\theta}}{r} + \frac{\alpha_{\theta r}}{r} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \theta} \\ &+ \left(\frac{\alpha_{r\theta}}{r^2} - \frac{\alpha_{\theta r}}{r^2} \right) \frac{\partial A}{\partial \theta} + \alpha_{\theta \phi} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\alpha_{r\phi}}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$