

A1.1
69
779

Estimation des modèles à seuil STAR et SETAR par deux méthodes d'estimation indirecte

Rapport de recherche

Par :
Sophie Lamouroux
lamouros@cirano.umontreal.ca
Étudiante en Maîtrise de Sciences Économiques,
Université de Montréal.

Sous la direction de :
René Garcia
Professeur, Directeur de recherche,
Université de Montréal.

CENTRE DE DOCUMENTATION
29 SEP. 1998
SCIENCES ÉCONOMIQUES UQAM

15 Septembre 1998

Sommaire

Cette étude s'intéresse à un certain type de modèle de séries temporelles non linéaires: les modèles à seuil, en particulier, les modèles STAR (Smooth Transition Autoregressive model) et SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive model). Ceux-ci ont la propriété de varier entre deux régimes de type ARMA dont les paramètres diffèrent en fonction d'une certaine valeur seuil. Nous visons l'estimation des paramètres de ces modèles dont le seuil par de nouvelles méthodes économétriques fondées sur la simulation: les méthodes d'estimation indirecte.

L'estimation des modèles de séries temporelles non linéaires est possible numériquement par maximum de vraisemblance. Cependant, la théorie usuelle n'est plus adéquate en ce qui concerne le test de non-linéarité de ce modèle, par laquelle on se heurte à des problèmes de non-identification de certains paramètres. Luukkonen et al. [1988] proposent une solution à ce problème en utilisant une approximation de Taylor du vrai modèle non-linéaire, à la place de celui-ci dans la théorie classique de tests du maximum de vraisemblance.

Dans cette étude, nous analysons l'effet d'introduire ces mêmes approximations en tant que modèles auxiliaires au sein de deux méthodes établies d'estimation indirecte : l'inférence indirecte étudiée notamment par Gouriéroux et al.[1992] d'une part et la méthode des moments efficaces (Tauchen [1995]) d'autre part. Ces deux estimateurs ont entre autres, l'avantage de posséder une distribution asymptotiquement normale, ce qui leur permet des tests standards.

Alors que dans un premier temps nous comparons l'efficacité de ces méthodes par le biais de l'estimation d'un seul paramètre d'intérêt, l'estimation indirecte par un modèle auxiliaire peu spécifié (approximation de Taylor de premier ordre) donne de bons résultats en ce qui concerne le modèle SETAR. Lors de l'estimation du seuil du modèle SETAR avec un modèle auxiliaire peu spécifié, il s'avère une préférence de la méthode d'inférence indirecte sur celle de moments efficaces. Le modèle STAR, à transition lissé, est nettement moins bien estimé par ces méthodes.

Table des matières

Introduction	p.5
1-Les modèles non-linéaires de séries temporelles	p.6
1-1-Les modèles non-linéaires paramétriques	p.6
1-2-Tester l'hypothèse de non-linéarité	p.8
1-3-La puissance des tests de linéarité	p.9
2-Les méthodes d'estimations indirectes	p.11
2-1-Idee générale de l'estimation indirecte	p.11
2-2-L'inférence indirecte	p.12
2-3-La Méthode des Moments Efficaces	p.14
2-4-Précisions sur les méthodes et modèles utilisées	p.16
3-Estimation d'un seul paramètre	p.19
3-1-Distribution de l'estimateur par inférence indirecte	p.20
3-2-Distribution de l'estimateur par méthode des moments efficaces	p.21
3-3-Remarques	p.22
4-Estimation du paramètre d'un des régimes et du seuil	p.24
4-1-Analyse préliminaire du modèle SETAR	p.24
4-2-Distributions des estimateurs des deux paramètres par inférence indirecte	p.25
4-3-Distributions des estimateurs des deux paramètres par la méthode des moments efficaces.....	p.27
Conclusion	p.28
Bibliographie	p.29
Annexe 1 : Description de la procédure de test de premier ordre	p.30
Annexe 2 : Exemple d'un programme d'estimation par inférence indirecte	p.32
Annexe 3 : Exemple d'un programme d'estimation par la méthode des moments efficaces	p.35
Annexe 4 : Programme d'estimation conjointe du seuil et d'un paramètre par inférence indirecte	p.37

Liste des tableaux et graphiques

Figure 1-1 : La Puissance des tests de Luukkonen et al.[1988]	p.9
Figure 2-1 : Schéma général des estimations par méthodes indirectes	p.11
Figure 2-2 : Schémas de l'inférence indirecte de Gouriéroux et al.[1992] et de la méthode des moments efficaces de Tauchen [1995]	p.16
Figure 2-3 : Schéma des modèles utilisés.....	p.18
Figure 3-1 : Distributions de l'estimateur d'un paramètre par inférence indirecte	p.20
Figure 3-2 : Distributions de l'estimateur d'un paramètre par la méthode des moments efficaces	p.21
Figure 3-3 : Influence de la variance des erreurs sur les distributions	p.22
Figure 4-1 : Fréquence des passages d'un régime à l'autre dans le modèle SETAR	p.23
Figure 4-2 : Distributions des estimateurs des deux paramètres par inférence indirecte	p.25
Figure 4-3 : Distributions des estimateurs des deux paramètres par la méthode des moments efficaces	p.27

N-B : Tous les graphiques ont été obtenus par les données générées par des programmes en GAUSS conçus spécialement pour cette étude et ne proviennent d'aucune source extérieure.

Introduction

Les méthodes d'analyse des séries temporelles classiques utilisent des modèles autorégressifs linéaires de type ARMA(p,q). Or, ceux-ci se heurtent à certaines limites lorsqu'il s'agit de capter certains effets instables en macro-économie aussi bien qu'en finance. Par exemple, l'idée d'une asymétrie possible de certains cycles économiques est apparue en macro-économie : on parle d'asymétrie lorsque les deux principales phases d'un cycle économique, la récession et l'expansion ne sont pas de longueurs égales. Mitchell [1927, pp 330-4 et pp 407-12] présentait des preuves statistiques en sa faveur et sa défaveur, Keynes [1936, p 314] soutenait que les périodes de récession étaient plus violentes et plus courtes dans une économie que celles de croissance. En finance, il est souvent question d'une évolution différente des taux d'intérêt selon les périodes. Entre autres, Garcia et Perron (1991) tirent des conclusions dans ce sens en ce qui concerne le taux d'intérêt réel ex-post américain de 1961 à 1986.

La problématique est alors la suivante : Comment modéliser des séries temporelles dont les paramètres changent selon les périodes, sans connaître la date de ces périodes a priori? L'introduction des modèles non linéaires de séries temporelles constitue la majeure réponse. Ils sont de plusieurs natures, citons-en quelques-uns. Parmi les modèles paramétriques, il existe d'une part les modèles de changement de régime s'appuyant sur un processus de Markov, ont été introduit par Hamilton (1988,1989) et étendu par plusieurs auteurs, entre autres, Chang-Jin Kim (1994). D'autre part, les modèles à seuil permettent un changement de régime en fonction d'une valeur seuil prise par la variable observée. Une autre voie plus récente s'est ouverte sur des modèles semi-paramétriques¹ ou non-paramétriques.

Dans ce rapport, nous nous intéressons aux modèles paramétriques à seuil, mais gardons à l'esprit l'applicabilité de ces méthodes aux autres types de modèles. Les modèles non linéaires présentent des difficultés sur le plan de l'estimation comme sur celui de l'inférence. Particulièrement, en ce qui concerne les modèles à seuil, Luukkonen et al.(1998) proposent l'utilisation d'un modèle auxiliaire pour tester la linéarité. Nous essayons d'établir si ce même modèle auxiliaire peut aussi servir à estimer le modèle à seuil dans le cadre de nouvelles méthodes économétriques fondées sur la simulation : l'inférence indirecte, Gouriéroux , Monfort et Renault [1992] et la méthode des moments efficaces, Tauchen [1995].

La problématique liée à l'inférence des modèles à seuil STAR et SETAR est expliquée en première section. La description des deux méthodes d'estimations utilisées dans cette étude est ensuite faite en deuxième section. En section 3, nous procédons à l'estimation d'un seul paramètre des modèles afin d'obtenir une première évaluation de l'efficacité des différentes méthodes appliquées à différents modèles. En section 4, nous procédons à l'estimation du seuil.

¹ Gallant et Tauchen (1996)

1-Les modèles non-linéaires de séries temporelles

1-1-Les modèles non-linéaires paramétriques

Soient un bruit blanc $\{u_t\}$ et une série temporelle $\{Y_t\}$ observée à $t = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, si on suppose une relation entre $Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1} \dots$ telle qu'il existe une fonction h telle que :

$$h(\dots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, \dots) = u_t$$

Il y a alors de nombreuses façons de choisir $h(\cdot)$ non-linéaire. Nous nous arrêterons à considérer un type de modèles en particulier, dits à seuil, appelés modèles SETAR de l'anglais "self-exciting threshold autoregressive models" utilisés entre autres² par Luukonen et Teräsvirta [1991].

Supposons une série stationnaire $\{y_t\}$, elle suit un modèle SETAR (2;p,d) si :

$$y_t + \pi_0 + \sum_{j=1}^p \pi_j y_{t-j} + \left(\theta_0 + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} \right) F(z_t) = \varepsilon_t$$

$$F(z_t) = \begin{cases} 1, & z_t > 0 \\ 0, & z_t \leq 0 \end{cases}$$

$$z_t = y_{t-d} - c$$

$$\varepsilon_t \approx \text{nid}(0, \sigma^2)$$

Il existe une généralisation de ce type de modèle, dans laquelle $F(\cdot)$ n'est plus exactement spécifiée mais restreinte à certaines propriétés comme la croissance stricte, l'imparité ...³ et z_t est fonction d'un facteur multiplicatif γ . On appelle ce type de modèle STAR (2;p,d), de l'anglais "smooth transition autoregressive model".

Nous envisageons ici la version logistique de ce modèle, recommandée par Luukonen et al. [1988a] où $F(\cdot)$ est la fonction logistique:

$$F(z_t) = (1 + \exp(-z_t))^{-1}$$

$$z_t = \gamma(y_{t-d} - c)$$

Par la forme de $F :]-\infty, +\infty[\rightarrow [0, 1]$, il est bien évident que ce modèle généralise le premier par une transition continue entre les deux régimes où γ est le paramètre qui contrôle la pente de transition. Un modèle STAR dont le γ tend vers l'infini tend vers un modèle SETAR.

Intuitivement, le processus SETAR suit un certain régime AR(p) quand $y_{t-d} > c$, et tombe dans un régime AR(p) différent à la période suivante si $y_{t-d+1} \leq c$. Dans le cas du modèle STAR, la "brutalité" de la "chute" dans l'un ou l'autre des régimes est contrôlée par le paramètre γ . Comme les deux régimes ont des structures dynamiques différentes, la probabilité conditionnelle au passé de tomber dans un régime, n'est pas nécessairement la même que celle de tomber dans l'autre. D'où une modélisation de l'aspect asymétrique du cycle.

² Tong et Lim (1980), Tong (1983), Tsay (1989)

³ voir Luukonen et al., Annales d'économie et de statistique, ?20,21-1991 p129.

Dans notre étude, nous avons simulé un modèle de type SETAR et un de type STAR dans lesquels nous avons fixé tous les paramètres (y compris la variance des erreurs) sauf un.

Modèle SETAR (2; p=1,d=1) :

$$y_t = \begin{cases} a_0^{(1)} - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)} & (y_{t-1} > 0) \\ 1 - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)} & (y_{t-1} \leq 0) \end{cases}$$

Soit, dans la notation générale, c=0 et :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= -1 & \theta_0 &= -a_0^{(1)} + 1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{2} & \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Modèle STAR (2; p=2, d=1) :

$$y_t + \frac{1}{2} y_{t-2} + a_2 y_{t-2} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{1}{2} y_{t-1}\right) \right\}^{-1} = \varepsilon_t$$

Soit, dans la notation générale, c=0, $\gamma=1/2$ et :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0 & \theta_0 &= 0 \\ \pi_1 &= 0 & \theta_1 &= 0 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2} & \theta_2 &= a_2 \end{aligned}$$

Le but de la présente étude est d'explorer les voies d'estimation indirecte sur ces deux modèles. Lors des simulations, les paramètres des "vrais" modèles ont été fixés comme spécifiés plus haut dans les formules, en ce qui concerne a_{01} et a_2 , nous les avons fait varier respectivement dans $[-4,3]$ et $[-1.4,1]$. Ce sont les valeurs utilisées par Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988)⁴. Les erreurs ont été obtenues par un tirage normal de moyenne 0 et de variance spécifiée à chaque fois.

Le champ de notre étude se limite à l'estimation de ces paramètres par des méthodes dites indirectes, il ne prend pas en compte leur test. Il est important cependant, de comprendre la problématique associée aux tests de linéarité de ces modèles dans la mesure où nous nous sommes proposés de l'utiliser au sein même de notre procédure d'estimation. Tester la non-linéarité des modèles à seuil, c'est connaître la pertinence statistique de leur utilisation contre celle d'un modèle autorégressif classique. Nous allons exposer maintenant en quoi cela pose un problème et une des solutions proposées pour y remédier.

⁴ Biometrika (1988), 75, 3, pp 491-9

1-2-Tester l'hypothèse de non-linéarité

Considérons la notation la plus générale des deux modèles SETAR et STAR utilisée dans le précédent paragraphe. Il y a deux façons de rendre le modèle linéaire. Soit que les coefficients θ soient tous nuls, soit que les paramètres de $F(\cdot)$ l'annulent. Le processus n'est alors plus qu'un AR(p). Mais, si on teste l'une de ces hypothèses, alors les paramètres de l'autre ne sont plus spécifiés. Par exemple, si l'hypothèse de linéarité est $H_0: \theta_0=0, \theta = 0$ contre $H_1: \text{au moins un } \theta_j \neq 0 \text{ (j=0, 1, \dots, p)}$, les paramètres γ, c et d ne sont plus identifiés ... Par ailleurs, on pourrait considérer un des paramètres de $F(\cdot)$ qui annule $F(\cdot)$ comme hypothèse de linéarité mais alors, les θ ne seraient plus identifiés sous H_0 . La distribution du test de H_0 n'est donc plus la distribution standard habituelle (normale ou χ^2 selon le cas).

Luukkonen et al. [1988] proposent une solution à ce problème en approchant la fonction $F(\cdot)$ non linéaire par son développement en série de Taylor. De ce modèle linéaire approché, ils tirent une statistique classique, qui, sous H_0 , possède une distribution asymptotique en χ^2 . Ils développent deux tests selon le degré de l'approximation de Taylor qu'ils choisissent. Soient, pour les notations, S1 le test issu d'un développement de $F(\cdot)$ du premier ordre et S2 celui issu d'un développement de troisième ordre. Par ailleurs, ils développent un test, dit, du premier ordre augmenté (S3), dans lequel, ils retiennent les termes de premier ordre, augmentés de p termes du troisième ordre (où p est le degré des deux régimes AR, fidèlement à la notation générale du modèle).

La démarche consiste à approcher les modèles à seuil par des modèles non linéaires, certes, mais ne présentant plus de conflits de spécification de leurs paramètres. Plus précisément, ces modèles sont de la forme :

$$y_t + \pi_0 + \sum_{j=1}^p \pi_j y_{t-j} + \left(\theta_0 + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} \right) F(z_t) = \varepsilon_t$$

$$z_t = y_{t-d} - c$$

$$\varepsilon_t \approx \text{nid}(0, \sigma^2)$$

Où $F(\cdot)$ est remplacée par son approximation de Taylor, soit au premier ordre par :

$$F(z_t) = F'(0)z_t$$

Et au troisième ordre par :

$$F(z_t) = F'(0)z_t + \frac{1}{6} \left[\frac{d^3 F(z_t)}{dz_t^3} \right]_{z_t=0} z_t^3$$

Dès lors, on va tester la validité statistique des coefficients des termes non linéaires de ce modèle approché, à la place de ceux du modèle à seuil lui-même. La proportion de rejet est ensuite obtenue sur des séries de valeurs simulées selon les modèles à seuil eux-mêmes. On peut donc voir ces tests d'une certaine manière comme des tests standards mais approchés par rapport au modèle qu'on veut réellement tester.

Une approche pratique du calcul de l'un de ces tests est faite dans l'appendice A1, nous allons maintenant analyser leur puissance.

1-3-La puissance des tests de linéarité

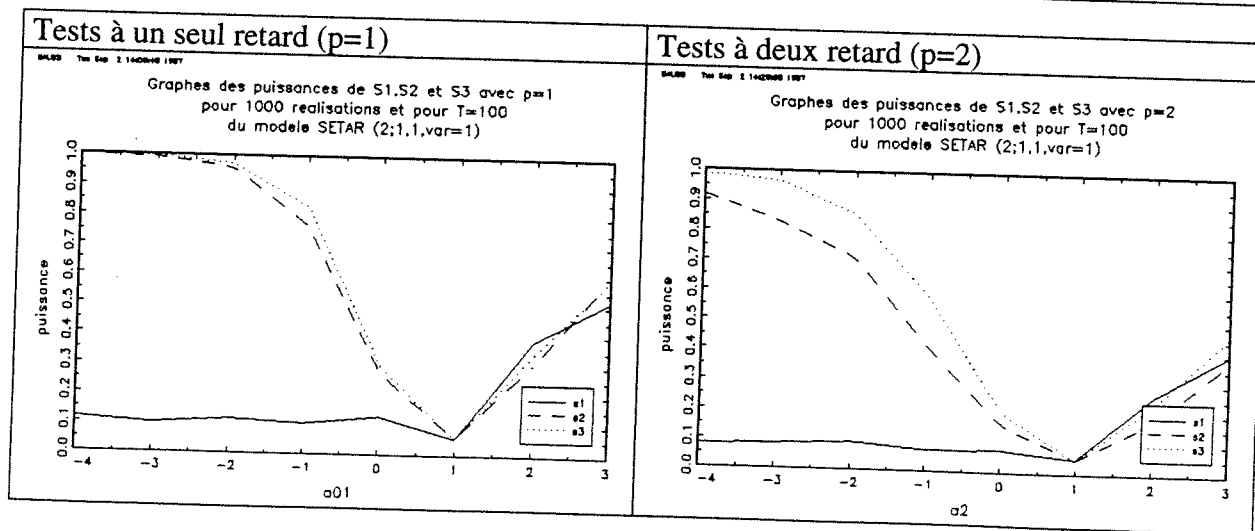
Intuitivement, plus les deux régimes AR sont différents, plus on s'attend à ce que les tests soient puissants. C'est pourquoi Luukkonen et al. [1988] calculent la puissance de leur tests en fonction d'un des coefficients des modèles SETAR et STAR. Nous avons repris la même démarche. Il s'agit de simuler un modèle, de tirer de ces données la statistique des tests proposés, de la comparer à une khi-deux bien choisie, de manière à rejeter ou non l'hypothèse H_0 de linéarité. En réitérant cette démarche 1000 fois pour un même modèle c'est-à-dire simulé à chaque fois avec un nouveau tirage d'erreurs, on obtient un pourcentage de rejet de l'hypothèse H_0 : c'est la puissance du test pour ce modèle. En effectuant cela pour différents coefficients, nous sommes en mesure de représenter la puissance du test en fonction de ces coefficients.

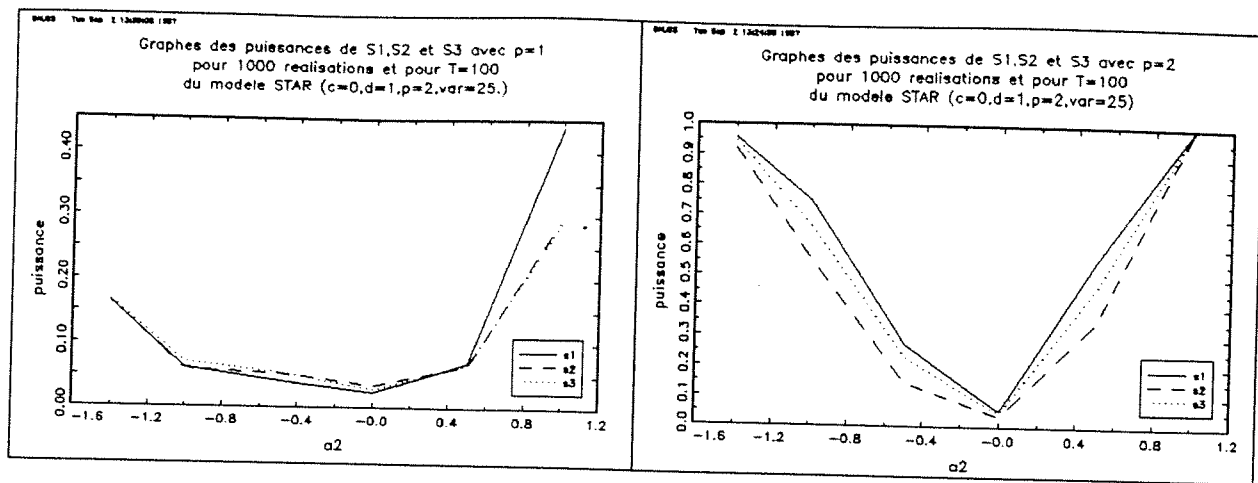
Les courbes S1 sont tracées à partir du test de premier ordre, les courbes S2, à partir du test de troisième ordre et les courbes S3, à partir du test de premier ordre augmenté. À la différence des auteurs, nous avons utilisé les degrés de retard des tests indépendamment des degrés de retard des modèles. Rappelons que nous nous servons tout au long de l'étude d'un modèle SETAR ($p=1$) et STAR ($p=2$), auxquels nous avons appliqué les trois tests à un et deux retards. Le modèle SETAR ($p=1$) occupe la première ligne du tableau, le modèle STAR ($p=2$) la deuxième.

A noter que nous avons essayer consciemment des développements de Taylor, sur des modèles STAR à un comme à deux retards, indifféremment sur le modèle SETAR à un retard et sur le modèle STAR à deux retards, sans concordance entre le nombre de retards du vrai modèle testé et le développement auquel on applique un test.

La notation "test à p retards" est abusive, il faut comprendre test standard fait sur un modèle de type STAR(p) dont la fonction $F(.)$ à été développée en série de Taylor, à la place du vrai modèle qu'on veut tester. Comme cette notation est malgré tout pratique, elle apparaîtra souvent dans la suite du rapport.

Figure 1-1 : La puissance des test de Luukkonen et al. [1988]





Il est important de remarquer que lorsque $a_{01}=1$ et $a_2=0$, le modèle SETAR n'est plus qu'un processus AR(1) et le modèle STAR, un AR(2). On teste donc dans ce cas la linéarité de deux modèles linéaires, le pourcentage de rejet de l'hypothèse devrait donc correspondre à celui de l'erreur de type 1. C'est-à-dire l'erreur de rejeter une hypothèse à tort, soit finalement, le niveau de signification du test lui-même, ici 5%. C'est ce qu'on obtient, ce qui est donc très rassurant quant à la véracité de ces graphiques. L'intérêt des courbes se situe donc dans leur courbure plus ou moins forte de part et d'autre de ce point. Plus celle-ci est forte, plus le test est capable de déceler une légère non-linéarité, c'est-à-dire de détecter la présence de deux régimes distincts lorsque ceux-ci ne présentent pas de gros écarts dans leurs coefficients.

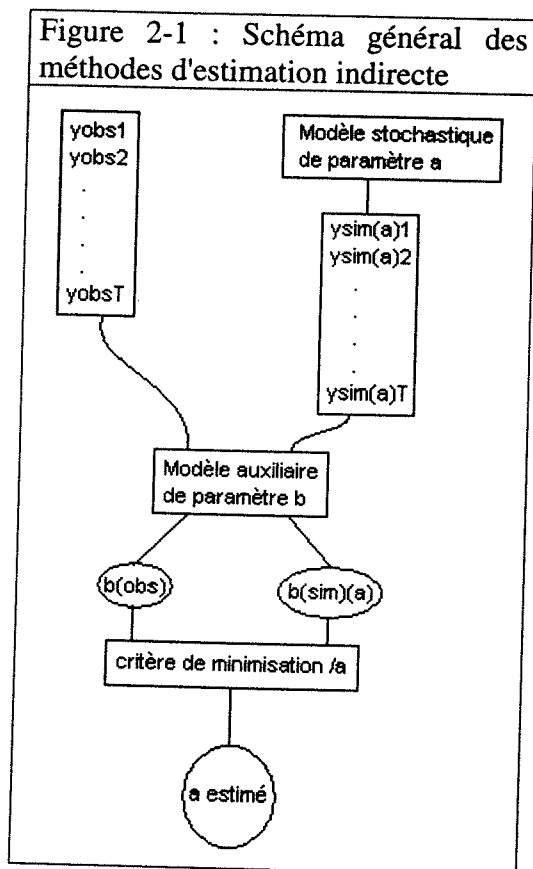
D'une manière générale, les trois tests S1, S2 et S3 ont des puissances similaires à l'exception du test de premier ordre à un, comme à deux retards, qui ne capte absolument pas la non-linéarité du modèle SETAR lorsque a_{01} est inférieur à 1. La non-linéarité du modèle STAR($p=2$) est très mal perçue par les tests à un seul retard dont la puissance ne dépasse pas 40% alors que les tests à deux retards sur ce modèle sont les plus performants toutes catégories confondues. Il est intéressant de noter que moins de retards dans le test que dans le modèle n'entraîne pas cette faiblesse puisque les tests à un ou deux retards ont la même puissance sur le modèle SETAR($p=1$). À première vue, on peut donc conclure qu'il vaut mieux utiliser un test avec plutôt "plus" de retards que "moins", même si ces deux modèles présentent le défaut de se différencier par deux critères : leur degré autorégressif et leur fonction $F(\cdot)$.

L'idée est maintenant de se servir de ces développements en série de Taylor, non plus comme modèle auxiliaire de test mais comme modèle auxiliaire dans des méthodes d'estimation indirecte.

2-Les méthodes d'estimations indirectes

2-1-Ideé générale de l'estimation indirecte

Lorsqu'on envisage de représenter une série par un modèle assez complexe pour que son estimation par des méthodes classiques ne soit pas appropriée, il existe des méthodes qui vont utiliser l'estimation d'un deuxième modèle plus simple dans le but d'estimer le premier. On va alors parler d'estimation indirecte. Si on a des observations et un modèle paramétrique, estimer ce modèle revient (par définition) à chercher les paramètres qui vont faire coïncider au mieux une simulation de ce modèle avec les observations. L'idée intuitive de l'estimation indirecte repose sur la comparaison entre les valeurs qu'on observe et celles qu'on simulerait avec différents paramètres du modèle. Cette comparaison se fait par le biais d'un autre modèle dit modèle auxiliaire et d'un critère.



Le suffixe "obs" qualifie les variables observées, "sim" celles obtenues par simulation du modèle stochastique proposé.

Dès lors, plusieurs critères ont été développés par différents auteurs, nous nous sommes référés à deux de ceux-ci : un modèle d'inférence indirecte (II) par Gouriéroux, Monfort et Renault [1992] et un modèle dit des moments efficaces (EMM) par Tauchen [1995]. Nous les avons adaptés à l'estimation des modèles STAR et SETAR en y apportant certaines modifications et simplifications. La description formelle de ces méthodes est très bien documentée dans les articles susmentionnés. Les deux sections qui suivent présentent les méthodes que nous avons utilisées de manière plus intuitive que formelle. Cette approche

peut ainsi constituer d'une part une bonne introduction à celle plus rigoureuse des auteurs eux-mêmes, d'autre part une vision "algorithmique" de ces méthodes et donc une aide à la compréhension des programmes en annexes 2 et 3. A noter qu'une bonne part des simplifications vient du fait que nous ne considérons que des modèles fonctions d'aucunes autres variables que les retards de la série elle-même et un bruit blanc (absence de variables exogènes).

2-2-L'inférence indirecte

Soit un processus dynamique stationnaire que nous appellerons **modèle stochastique**, c'est le modèle dont on cherche à estimer le paramètre θ :

$$y_t = r(w_t, \varepsilon_t, \theta),$$

Où w_t est un vecteur des y retardés ou de n'importe quelle combinaison de ceux-ci,
 ε_t est un bruit blanc, de distribution G_0 connue (ou dont les paramètres sont inclus dans θ),
 $\{y_t\}$ est un processus stationnaire.

Notes : Nous noterons par un indice 0 les caractéristiques du vrai modèle, soient G_0 la vraie distribution des erreurs et θ_0 le vrai paramètre du modèle. Nous parlerons d'un paramètre θ , ceci incluant évidemment la possibilité que celui-ci soit vectoriel de dimension supérieure à 1).

L'esprit d'une estimation par maximum de vraisemblance serait de calculer la fonction de densité de y , en supposant une fonction de densité normale des erreurs, puis de la maximiser par rapport à θ . Cependant, la forme de $r(\cdot)$ peut rendre ce calcul analytique difficile, particulièrement, dans le cas où elle inclut des discontinuités comme c'est le cas dans le modèle SETAR, par exemple. L'inférence indirecte présente l'avantage de ne demander au modèle d'autres propriétés que de pouvoir être simulé. Voyons en 5 points cette démarche :

1^{er} point

Notons qu'il est possible de simuler une série $\{y_{sim_t}\}$, $t=1, \dots, T$ selon le modèle stochastique à partir :

- d'une condition initiale d'autant de dimension qu'il y a de retard dans w_t : w_0 ,
- de T tirages de ε_t , $t=1, \dots, T$, selon G_0 ,
- d'une valeur donnée de θ .

On peut alors voir chaque série simulée comme une fonction de w_0 , G_0 et θ :

$$\{y_{sim_t}(w_0, G_0, \theta)\}_{t=1, \dots, T}$$

Soit, en notation vectorielle, $Y_{sim}(w_0, G_0, \theta)$.

2^{ème} point

Considérons maintenant un deuxième modèle, sans rapport a priori avec le premier, ne possédant d'autres propriétés que d'être "simple", c'est-à-dire facile à estimer par une méthode classique. Celui-ci est appelé **modèle auxiliaire**, il doit être dans notre cas fonction de n'importe quelle combinaison des y retardés.

Soit un modèle auxiliaire de la forme :

$$y_t = f(w'_t, e_t, \beta)$$

Où w'_t est un vecteur des y retardés ou de n'importe quelle combinaison de ceux-ci,
 e_t est un bruit blanc,
 $f(\cdot)$ est cette fois assez belle pour pouvoir en tirer un critère analytique.

On peut alors estimer ce modèle avec une série de T valeurs : Y (en notation vectorielle) par une méthode d'estimation classique.

Soit un critère Q_T , tel que :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}}(Q_T(Y, \beta))$$

Supposons que cet estimateur tende asymptotiquement (uniformément presque sûrement) vers une limite non stochastique β_0 .

3^{ème} point

On estime β à partir de la série des observations Y_{obs} , ainsi :

$$\hat{\beta}_{obs} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}}(Q_T(Y_{obs}, \beta))$$

4^{ème} point

Si maintenant, on estime β à partir des séries simulées $Y_{sim}(w_0, G_0, \theta)$, on a :

$$\hat{\beta}_{sim} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}}(Q_T(Y_{sim}, \beta))$$

On peut alors voir cet estimateur aussi comme une fonction de w_0 , G_0 et θ :

$$\hat{\beta}_{sim} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}}(Q_T(w_0, G_0, \theta, \beta))$$

Soit par simple notation, $b(\cdot)$ la fonction telle que :

$$\hat{\beta}_{sim} = b(w_0, G_0, \theta)$$

On appelle communément cette fonction la fonction de lien ("binding function").

5^{ème} point

L'estimateur indirect de θ par inférence indirecte est alors obtenu par la minimisation du critère suivant :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\text{Arg min}} \left(\frac{1}{k} (\hat{\beta}_{obs} - b(w_0, G_0, \theta))' I (\hat{\beta}_{obs} - b(w_0, G_0, \theta)) \right)$$

Où k est la dimension de β ,
 I , la matrice identité de dimension k ,

2-3-La Méthode des Moments Efficaces

Soient le modèle stochastique,

$$y_t = r(w_t, \varepsilon_t, \theta),$$

et le modèle auxiliaire,

$$y_t = f(w_t', e_t, \beta)$$

avec les mêmes caractéristiques et notations que précédemment.

La méthode des moments efficaces ne se différencie de la méthode d'inférence indirecte qu'à partir du 4^{ème} point.

1^{er} point

On a $Y_{sim}(w_0, G_0, \theta)$, une fonction vectorielle de dimension $(T \times 1)$.

2^{ème} point

Un estimateur des paramètres du modèle auxiliaire

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}} (Q_T(Y, \beta))$$

3^{ème} point

À partir du modèle auxiliaire et de la série observée, on obtient :

$$\hat{\beta}_{obs} = \underset{\beta \in B}{\text{Arg max}}(Q_T(Y_{obs}, \beta))$$

4^{ème} point

Considérons la fonction vectorielle de même dimension k que β :

$$S(Y, \beta) = \left\{ \frac{\partial Q_T(Y, \beta)}{\partial b_i} \right\}_{i=1}^k$$

Avec $f(\cdot)$ bien choisie, celle-ci s'obtient analytiquement comme un système de k dérivées. La condition de premier ordre du problème de maximisation du 2^{ème} point est telle que cette fonction soit nulle.

L'idée est de supposer que comme :

$$S(Y_{obs}, \hat{\beta}_{obs}) = 0$$

la simulation par les meilleurs paramètres tendra aussi à satisfaire les condition de premier ordre et donc à annuler $S(\cdot, \hat{\beta}_{obs})$ qu'on notera $M(\cdot)$.

Ainsi $M(Y_{sim})$ peut être vu comme une fonction vectorielle de w_0, G_0 et θ :

$$S(Y_{sim}(w_0, G_0, \theta), \hat{\beta}_{obs}) = M(w_0, G_0, \theta)$$

5^{ème} point

L'estimateur indirect de θ par la méthode des moments efficaces est alors obtenu par la minimisation du critère suivant :

$$\theta = \underset{\theta \in \Theta}{\text{Arg min}} \frac{1}{k} \{M(w_0, G_0, \theta)' I M(w_0, G_0, \theta)\}$$

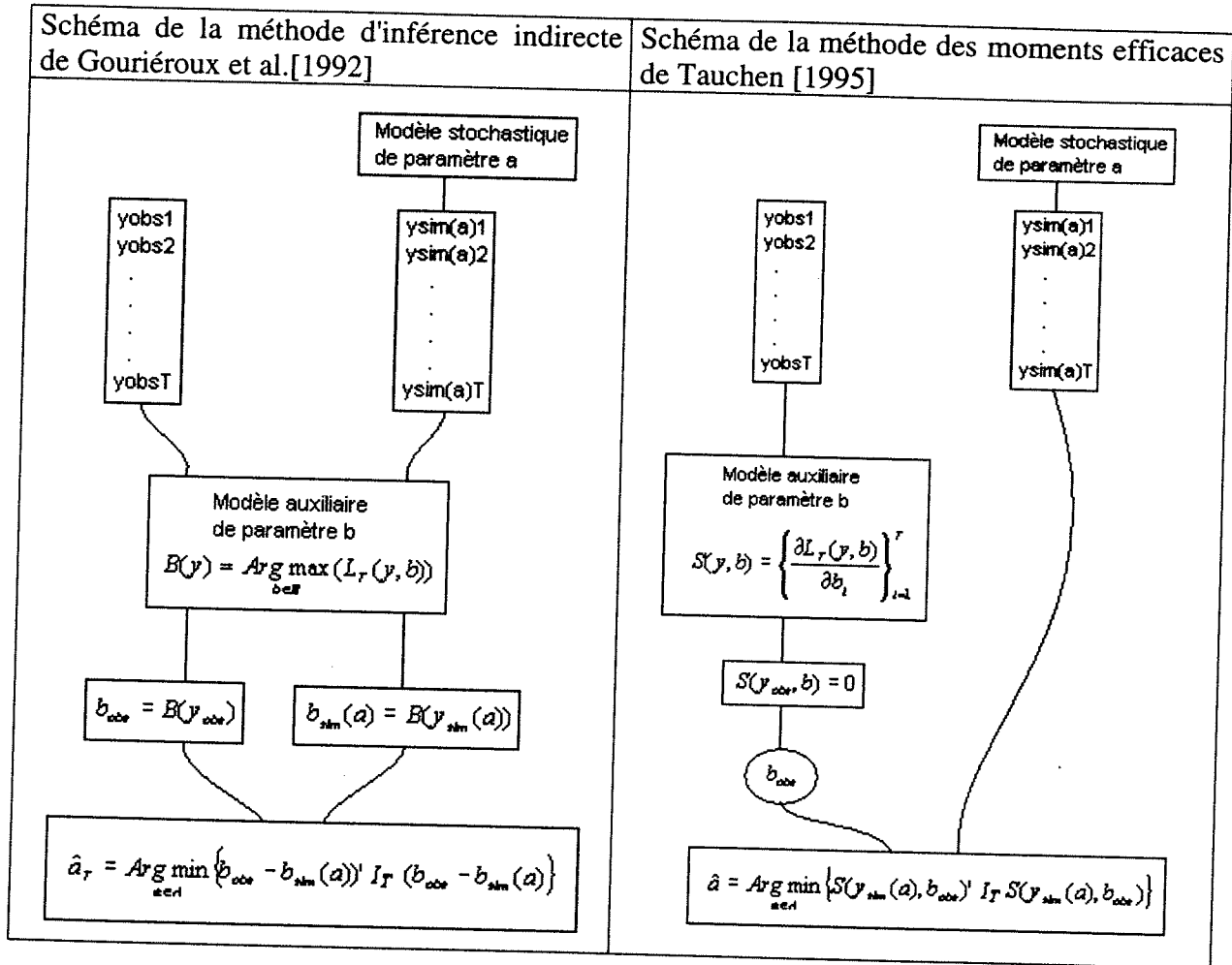
Où k est le nombre de dimension de β ,
 I , la matrice identité de dimension k .

2-4-Précisions sur les méthodes et modèles utilisés

a) méthodes d'estimation

Revoyons visuellement et de manière schématique, les deux méthodes d'estimations précédemment décrites afin d'y apporter quelques précisions.

Figure 2-2 : Schéma des deux méthodes indirectes



- La méthode utilisée pour estimer les paramètres du modèle auxiliaire dans cette étude est celle des moindres carrés ordinaires.
- Comme les critères de minimisation sont dépendants d'un tirage aléatoire des erreurs, il est clair que ceux-ci ne peuvent intervenir dans le critère sans être moyenné sur plusieurs tirages. Pour la clarté de l'exposé, qui constitue, comme nous l'avons déjà dit, plus une approche simple de départ qu'une approche purement formelle, cette étape n'apparaît pas dans les descriptions précédentes. Il est donc important de noter que dans la démarche d'estimation par la méthode des moments efficaces, pour chaque valeur de θ , nous tirons le critère ci-dessus 10 fois pour en effectuer ensuite la moyenne. Ce sont ces valeurs moyennes que nous minimisons par la suite. En ce qui concerne l'inférence indirecte, comme cela est précisé dans l'article de Gouriéroux et al.(1992), c'est le paramètre b_{sim} ,

obtenu par estimation du modèle auxiliaire sur des échantillons simulés que nous moyennons sur 10 simulations par le même θ .

- Dans un premier temps, nous avons simulé des séries suivant les modèles SETAR et STAR que nous avons décrit en section 1-1 en fixant tous les coefficients, de manière à connaître les vrais paramètres de ces séries. Elles jouent ainsi le rôle de séries à seuil "observées" dont on connaît les "vrais" paramètres. Dans un deuxième temps, nous spécifions les modèles stochastiques comme les mêmes modèles SETAR et STAR dont on connaîtrait tous les paramètres a priori, sauf un. Enfin, nous estimons ce paramètre par les deux méthodes décrites en section 2, plusieurs fois de façon à obtenir une distribution du paramètre estimé selon la méthode de Monte-Carlo. Les distributions présentées dans ce rapport sont le résultat de 100 estimations.

- **Choix des modèles auxiliaires**

Parmi les approximations des modèles STAR et SETAR envisagées par Luukkonen et al.[1988] et présentées en section 2-3, nous en avons utilisé deux comme modèle auxiliaire. Soit le modèle général de la forme :

$$y_t + \pi_0 + \sum_{j=1}^p \pi_j y_{t-j} + \left(\theta_0 + \sum_{j=1}^p \theta_j y_{t-j} \right) F(z_t) = \varepsilon_t$$

$$z_t = y_{t-d} - c$$

$$\varepsilon_t \approx \text{nid}(0, \sigma^2)$$

Le 1^{er} modèle auxiliaire est obtenu en posant :

$$p=1$$

$$d=1$$

$$F(z_t) = g_0 z_t$$

C'est-à-dire un modèle paramétrique de la forme :

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-1}^2$$

qu'on notera souvent abusivement test de 1^{er} ordre à 1 retard ou encore : (S1, p=1).

Le 2^{ème} modèle auxiliaire est obtenu en posant :

$$p=2$$

$$d=1$$

$$F(z_t) = g_1 z_t + g_2 z_t^3$$

C'est-à-dire un modèle paramétrique de la forme :

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 y_{t-1}^2 + b_4 y_{t-1} y_{t-2} + b_5 y_{t-2}^2 + b_6 y_{t-1}^3 + b_7 y_{t-1}^2 y_{t-2} + b_8 y_{t-1} y_{t-2}^2 + b_9 y_{t-2}^3 + b_{10} y_{t-1}^4 + b_{11} y_{t-1}^3 y_{t-2} + b_{12} y_{t-1}^2 y_{t-2}^2 + b_{13} y_{t-1} y_{t-2}^3$$

qu'on notera test de 3^{ème} ordre à 2 retards ou encore : (S2, p=2).

Rappelons qu'ils peuvent être vus pour l'un comme le modèle STAR à un retard (2 régimes AR(1)), auquel on a remplacé F(.) par son approximation de Taylor de premier ordre, pour l'autre comme le modèle STAR à deux retards (2 régimes AR(2)), auquel on a remplacé F(.) par son approximation de Taylor de troisième ordre. Nous avons fait ce choix essentiellement dans le but de comparer un modèle auxiliaire simple à peu de paramètres (3), avec un modèle plus largement spécifié, (14 paramètres).

Figure 2-3 : Schéma des modèles utilisés dans les méthodes d'estimations indirectes

Modèles stochastiques

Modèle SETAR (2; p=1, d=1) :

$$y_t = \begin{cases} a_0^{(1)} - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)} & (y_{t-1} > 0) \\ 1 - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)} & (y_{t-1} \leq 0) \end{cases}$$

Modèle STAR logistique (2; p=2, d=1) :

$$y_t + \frac{1}{2} y_{t-2} + a_2 y_{t-2} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{1}{2} y_{t-1}\right) \right\}^{-1} = \varepsilon_t$$

Modèles auxiliaires

Développement de 1^{er} ordre, STAR(p=1)

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-1}^2$$

Développement de 3^{ème} ordre, STAR(p=2)

$$y_t = \begin{cases} b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 y_{t-1}^2 + b_4 y_{t-1} y_{t-2} + b_5 y_{t-2}^2 \\ + b_6 y_{t-1}^3 + b_7 y_{t-1}^2 y_{t-2} + b_8 y_{t-1} y_{t-2}^2 + b_9 y_{t-2}^3 \\ + b_{10} y_{t-1}^4 + b_{11} y_{t-1}^3 y_{t-2} + b_{12} y_{t-1}^2 y_{t-2}^2 + b_{13} y_{t-1} y_{t-2}^3 \end{cases}$$

3-Estimation d'un seul paramètre

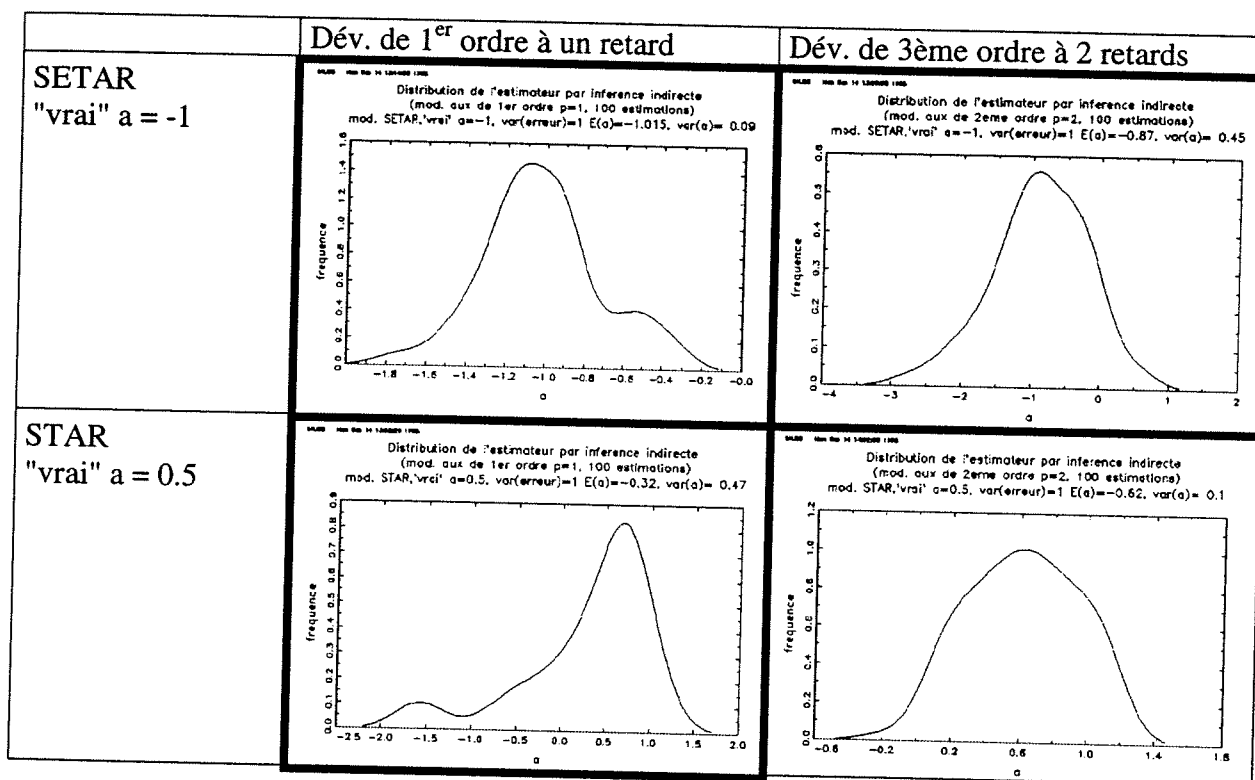
Il est clair qu'une fois le seuil fixé, il est facile de classer les observations et de procéder à l'estimation linéaire des processus autorégressifs dans les deux sous-échantillons. Pour établir la performance relative des diverses méthodes d'inférence indirecte, nous utilisons néanmoins dans un premier temps le modèle auxiliaire pour estimer a_{01} dans le modèle SETAR et a_2 dans le modèle STAR dont le seuil a été fixé à 0. Dans un deuxième temps, en section 4 et à l'aide des méthodes les plus efficaces de cette présente section, nous estimons conjointement le niveau du seuil.

Notes complémentaires:

- Nous avons obtenu les distributions de l'estimateur par la méthode de Monte Carlo. Soit, en estimant plusieurs fois le paramètre à partir de séries de données du vrai modèle différentes. Il est donc important de noter que l'aléas des estimations successives qui vont former la distribution provient de deux sources:
 - des séries à partir desquelles on estime le modèle, c'est-à-dire de celles qu'on a notées "observées", et qu'on simule à partir d'un "vrai" modèle dans l'analyse,
 - de la méthode d'estimation indirecte elle-même, qui utilise des simulations, donc des tirages aléatoires dans le calcul du critère de minimisation.
- Quand nous spécifions la variance de l'erreur, c'est celle que nous avons fixé autant lors des simulations des y "observés" qu'au sein de la procédure d'estimation.
- Pour une évaluation exacte des processus d'estimation, certains des programmes Gauss dont sont issues les valeurs des figures qui vont suivre sont fournis en annexes. La totalité des programmes est disponible sur demande : lamouros@cirano.umontreal.ca.

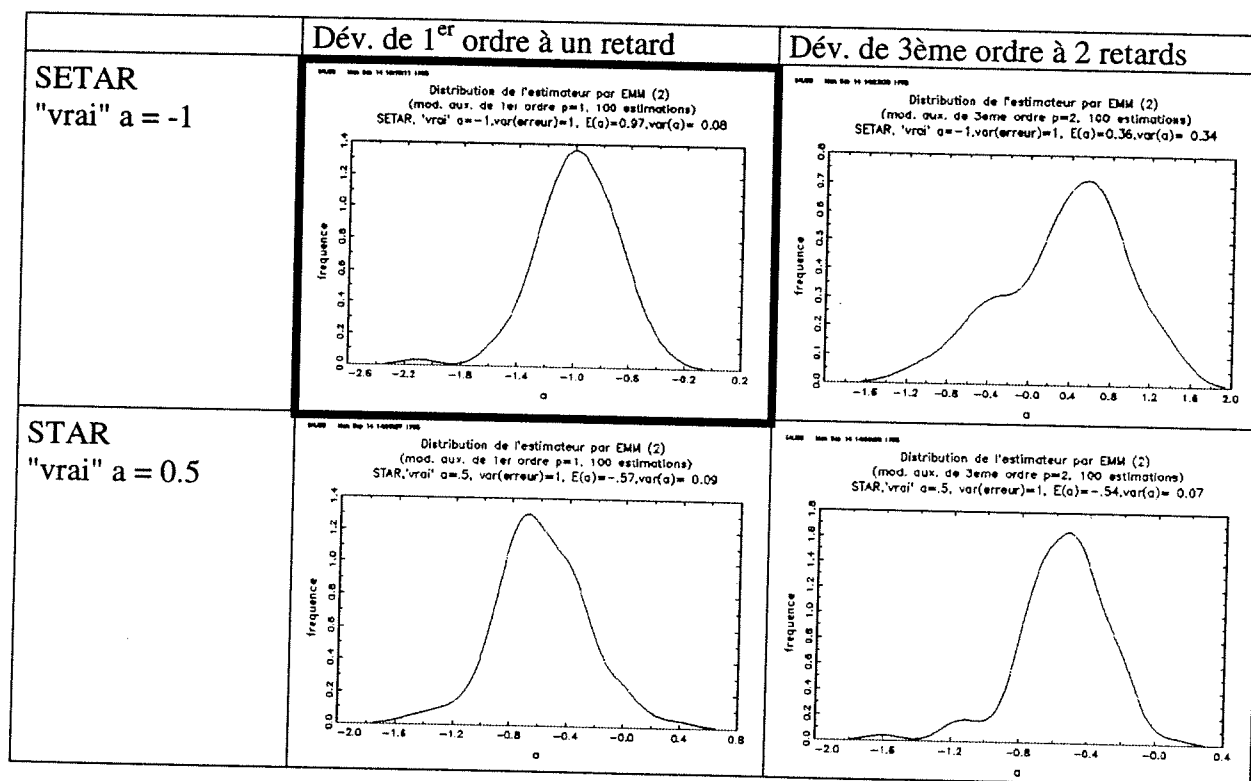
3-1-Estimation par inférence indirecte

Figure 3-1 : Distribution de l'estimateur par inférence indirecte sur 100 estimations.



3-2-Estimation par la méthode des moments efficaces

Figure 3-2 : Distribution de l'estimateur par EMM sur 500 estimations

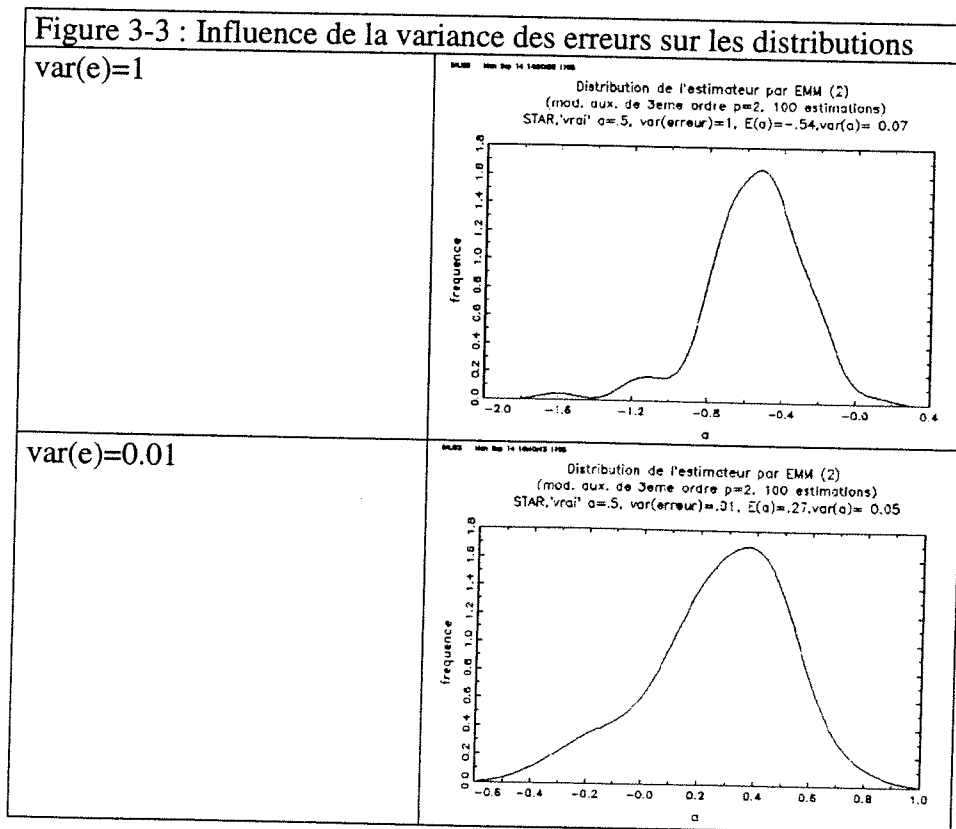


3-3- Remarques

- Globalement, l'inférence indirecte estime mieux les paramètres des modèles à seuil que la méthode des moments efficaces.
- L'estimation des modèles à seuil est meilleur avec un modèle auxiliaire simple, on peut donc noter qu'une corrélation entre puissance du test et "puissance" de ce même développement en tant que modèle auxiliaire ne semble pas exister puisque le meilleur modèle auxiliaire est le moins bon test, voir figure 1-1, où S1 stagne à une puissance de 10% pour le modèle SETAR.
- On constate une lacune des méthodes indirectes à capter les passages lissés d'un régime à l'autre de type STAR avec un coefficient de pente $\gamma=1/2$ entre les deux régimes. En général, le modèle SETAR est mieux estimé que le modèle SETAR. Cependant, il est à noter que l'estimation par inférence indirecte avec un modèle auxiliaire spécifié à peu de paramètres offre de bons résultats en ce qui concerne les deux types de modèle à seuil.

a) Influence de la variance des erreurs sur l'estimation

La variance des erreurs est un paramètre du modèle que nous avons fixé à 1. Or, ce paramètre est prépondérant dans les méthodes d'estimation indirecte dans la mesure où il détermine la variance des valeurs simulées par le modèle stochastique. Dès lors, on s'attend à rendre l'estimation d'autant plus précise que la variance imposée aux erreurs est petite. C'est ce que nous avons effectivement constaté empiriquement en partant d'un mauvais résultat obtenu avec une variance des erreurs de 1 : l'estimation par EMM du modèle STAR avec un modèle auxiliaire de 3^{ème} ordre. La figure 3-3 représente l'évolution de la distribution du paramètre d'intérêt pour une variance des erreurs de 1 et 0.01. Le glissement de la distribution vers une position autour de la vraie valeur est très nette.



b) Note sur la variance de l'estimateur de θ

Aussi bien dans la méthode d'inférence indirecte que dans celle des moments efficaces, les auteurs suggèrent l'utilisation d'une matrice optimale au sein du critère de minimisation. Celle-ci est dérivée à partir de la minimisation de la matrice de variance-covariance asymptotique de l'estimateur de θ .

Prenons l'exemple de l'inférence indirecte, dans la mesure où nous avons utilisé la matrice identité, la matrice de variance-covariance asymptotique de notre estimateur n'est pas minimisée, théoriquement, elle a l'expression :

$$W(H) = \left(1 + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial b'}{\partial \theta}(w_0, G_0, \theta_0) \cdot \frac{\partial b'}{\partial \theta}(w_0, G_0, \theta_0) \right) \right)^{-1}$$

où H est le nombre de fois sur lequel on a moyenné b_{sim} de minimisation, c'est à dire 10 dans tous les résultats de ce rapport.

Le calcul de cette variance donne les résultats suivants, var theo est calculée selon la formule ci-dessus pour 10 estimations successives. La moyenne et var 100 sont calculées empiriquement sur 100 estimations respectivement au tableau 3-1:

	Dév. de 1 ^{er} ordre à un retard		Dév. de 3 ^{ème} ordre à 2 retards	
SETAR	var theo	3.0829842	var theo	1.4832771
	var theo	2.6383003	var theo	1.3636825
	var theo	2.7301485	var theo	1.2866024
	var theo	2.5273463	var theo	1.3273889
	var theo	2.6552555	var theo	1.5553878
	var theo	2.8633125	var theo	1.4195068
	var theo	2.9087996	var theo	2.3079222
	var theo	3.0297484	var theo	1.8325503
	var theo	2.7675680	var theo	2.3723273
	var theo	2.9839889	var theo	2.2570375
	moyenne	-1.0150000	moyenne	-0.87200000
var 100	0.090782828	var 100	0.45536970	
STAR	var theo	3.6214481	var theo	2.0420717
	var theo	11.245379	var theo	3.3599011
	var theo	51.204962	var theo	2.4460064
	var theo	16.558973	var theo	3.9057996
	var theo	3.0632708	var theo	2.7156832
	var theo	32.445557	var theo	6.9856440
	var theo	178.65377	var theo	0.031014413
	var theo	20.093340	var theo	1.9085651
	var theo	1168.9783	var theo	2.5501464
	var theo	26.614895	var theo	1.9895156
	moyenne	0.31900000	moyenne	0.62000000
var 100	0.47488788	var 100	0.10323232	

La procédure employée pour obtenir ces valeurs est reproduite en annexe 2 du rapport.

4- L'estimation du seuil

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus concernant l'estimation du seuil, simultanément aux paramètres d'intérêt précédents. Ayant constaté une défaillance des méthodes d'estimation indirecte à estimer les modèles à transition lissée, nous n'avons retenu qu'un seul modèle : le modèle SETAR. De plus, en vue des meilleurs résultats des deux méthodes avec un modèle auxiliaire peu spécifié, nous n'avons retenu que le modèle auxiliaire issu d'un développement de Taylor de premier ordre.

4-1- Analyse préliminaire du modèle SETAR

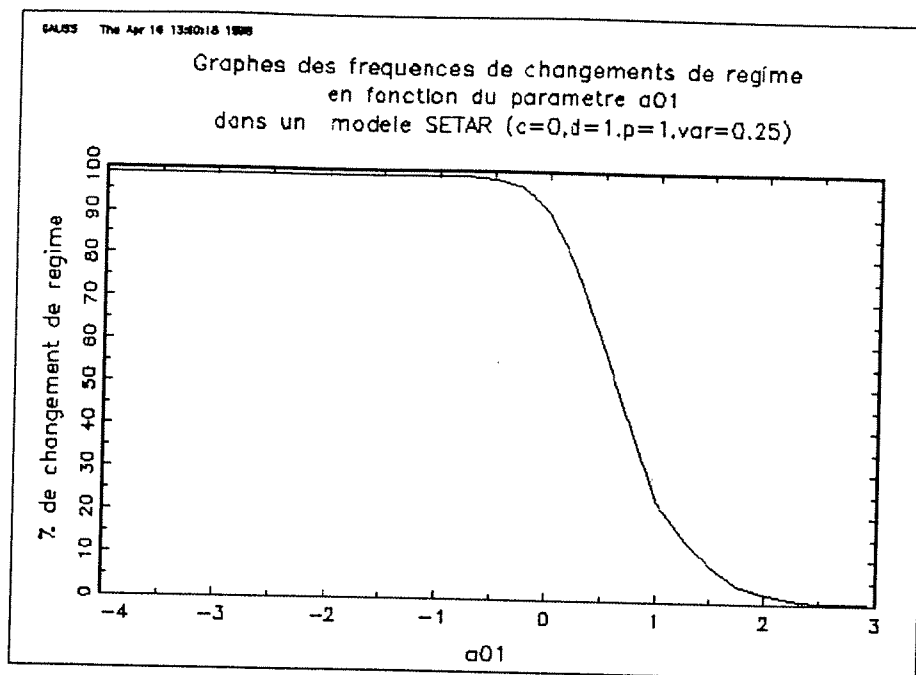
Rappelons l'expression du modèle que nous utilisons :

$$y_t = \begin{cases} a_0^{(1)} - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)} & (y_{t-1} > c) \\ 1 - \frac{1}{2} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)} & (y_{t-1} \leq c) \end{cases}$$

Auparavant fixé à 0, le seuil est maintenant un autre paramètre inconnu c . La vraie valeur du seuil, c'est-à-dire celle à partir de laquelle nous simulons les "observations" reste, elle, fixée à 0. Afin d'être en mesure d'expliquer les résultats d'estimation, nous avons dans un premier temps analysé de plus près l'influence du paramètre a_0^1 sur la nature de cette série simulée.

Une série simulée avec un seuil de 0 et différentes valeurs de a_0^1 va avoir des comportements différents. Il est clair que les valeurs de a_0^1 vont contraindre la série à changer plus ou moins souvent de régime. Nous avons quantifié cet effet en comptant le nombre de changement de régime occasionné par chaque simulation. En appelant ce nombre "fréquence de changement de régime", une fréquence de 100 % va correspondre à un changement de régime lors de chaque nouvelle observation, une fréquence de 0 indique que la série simulée est restée dans le même régime. Dans la figure 4-1, chaque fréquence a été obtenue sur une moyenne de 50 simulations de séries de 100 valeurs.

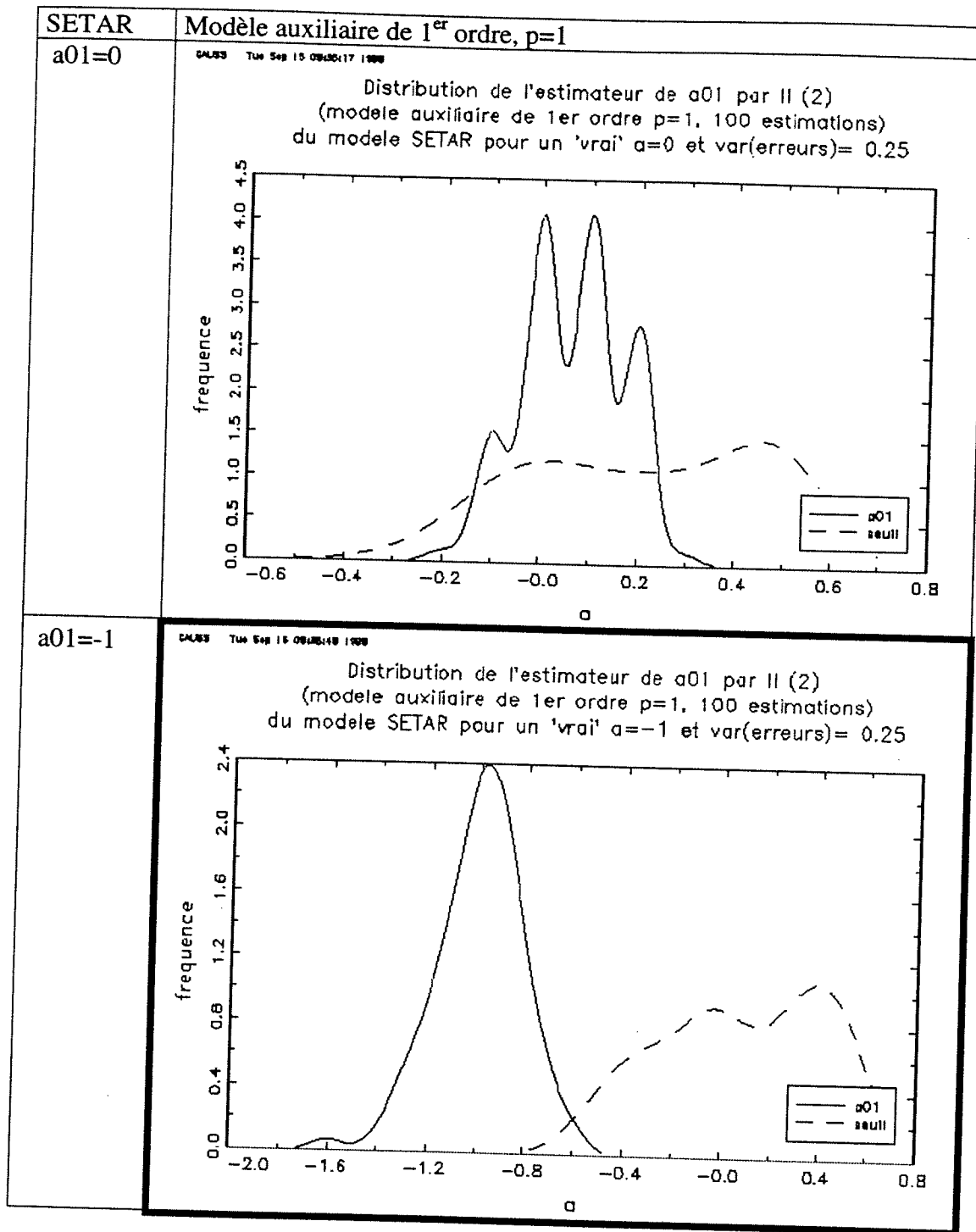
Figure 4-1 : Fréquence des passages d'un régime à l'autre dans le modèle SETAR



Au regard du détail des séries simulées, plus la fréquence des changements baisse, plus la série stagne dans le régime en $(\theta+\pi)$ par rapport aux notations générales, c'est-à-dire dans le régime en $a01$. Ce qui est en concordance avec le modèle, plus $a01$ est négatif, plus la série a tendance à être "rappelée" dans le second régime. Au contraire un $a01$ positif contraint la série à rester dans le premier régime. En outre, il est important de noter que pour $a01=1$, la série varie, certes, mais entre deux régimes semblables. Finalement, cette courbe nous apprend qu'on simule de simples processus AR(1) non seulement pour $a01=1$ mais aussi pour $a01 \in [2,3]$ auquel cas, la série reste dans le premier régime.

4-2- Estimation de $a01$ et du seuil par inférence indirecte

Figure 4-2 : Distributions de 2 paramètres du modèle SETAR par inférence indirecte.



Nous nous limitons ici à n'estimer le seuil que lorsque celui-ci est nul et pour deux valeurs de a_0^1 , il pourrait être intéressant de prolonger l'études à d'autres cas. En ce qui concerne ces deux cas, leur moyenne et variance respectives sont :

Pour un vrai $a_0^1=0$ et un seuil de 0 :

$E(a)$ 0.065000000
 $\text{var}(a)$ 0.010378788
 $E(c)$ 0.222000000

var(c) 0.054864646

Pour un vrai $a_0 = -1$ et un seuil de 0 :

E(a) -0.98900000

var(a) 0.029877778

E(c) 0.089000000

var(c) 0.10401919

L'estimation conjointe du seuil dans le premier cas perturbe l'estimation du paramètre d'intérêt, ce qui n'est pas le cas dans le deuxième qui constitue un cas encourageant dans la direction de l'estimation du seuil.

Conclusion

L'utilisation des modèles auxiliaires de tests de Luukkonen et al.(1988) en tant que modèles auxiliaires au sein d'estimations indirectes nous a amené à plusieurs conclusions.

- En ce qui concerne le choix du modèle auxiliaire, il est apparu une meilleure performance des modèles spécifiés avec peu de paramètres (développement de Taylor de 1^{er} ordre) par rapport à ceux plus largement spécifiés (développement de Taylor de 3^{ème} ordre). Une corrélation entre la puissance du modèle en tant que test et efficacité de ce même développement en tant que modèle auxiliaire ne semble pas exister puisque les meilleurs résultats d'estimation sont obtenues avec un modèle auxiliaire présentant une très faible puissance de test.
- En ce qui concerne les deux modèles à seuil traité dans cette étude, l'estimation du modèle SETAR est plus concluante que celle du modèle STAR. Ces méthodes semblent donc estimer mieux les séries dont le passage entre deux régimes différents est discontinu que celles dont la transition est lissée. Il est à noter cependant que l'inférence indirecte avec un modèle auxiliaire de premier ordre offre de bons résultats même avec le modèle STAR.
- Globalement, l'estimation des modèles à seuil est meilleure par inférence indirecte que par la méthode des moments efficaces. L'utilisation de la méthode d'inférence indirecte avec un modèle auxiliaire de premier ordre offre même une voie encourageante en ce qui concerne l'estimation du seuil lui-même.
- Le calcul de la variance théorique dans le cas de l'inférence indirecte nous invite à être néanmoins prudent en ce qui concerne les méthodes utilisées. En utilisant la matrice identité à la place d'une matrice pondérée au sein de la procédure d'estimation, nous introduisons certaines imprécisions. Celles-ci pourraient être précisées dans une éventuelle étude subséquente.

Bibliographie

Gallant Ronald A. and Tauchen, George E. "Reprojecting Partially Observed Systems with Application to Interest Rate Diffusions".

Gourieroux Christian, Monfort Alain and Renault E. "Indirect Inference." Serie des documents de travail du CREST (Centre de Recherche en Economie et Statistique) et du departement de la Recherche, #9215, Avril 1992. Publié dans Journal of Applied Econometrics.

Luukkonen Ritva and Terasvirta Timo, "Testing linearity of Economic Time Series against Cyclical Asymmetry." Annales d'Economie et de Statistique. - #20/21 - 1991.

Luukkonen Ritva, Saikkonen Pentti and Terasvirta Timo, "Testing linearity against smooth transition autoregressive models." Biometrika (1988), 75, 3, pp. 491-9.

Tauchen, George E. "New Minimum Chi-Square Methods in Empirical Finance." Published in Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Vol. III, Econometric Society Monographs No. 28, David M. Kreps and Kenneth F. Wallis (eds.), Cambridge University Press, 1997, pp. 279-317.

Gourieroux, Monfort et Renault ; Indirect Inference, Document de travail du CREST , Avril 1992, révisé Juillet 1992.

George Tauchen ; New Minimum Chi-Square Methods in Empirical Finance , Juin 1995, révisé Janvier 1996.

Annexe 1

Les tests de linéarité des modèles autorégressifs de transition de Luukkonen et al.[1988], description de la procédure de premier ordre.

Procédure de test de premier ordre (FOTP)

1- Régression de $\{y_t\}$ sur $\{1, y_{t-j}; j=1, \dots, p\} (t=1, \dots, T)$.

On forme un vecteur $\{\hat{e}_t\} (t=1, \dots, T)$ des résidus de la régression.
On calcule la somme de ces résidus au carré, qu'on note SSE0.

2- Régression de $\{\hat{e}_t\}$ sur $\{1, y_{t-i}, y_{t-i}y_{t-j}; i=1, \dots, p; j=i, \dots, p\} (t=1, \dots, T)$.

On forme un vecteur $\{\hat{u}_t\} (t=1, \dots, T)$ des résidus de la régression.
On calcule la somme de ces résidus au carré, qu'on note SSE1.

3- Calcul de la statistique du test:

$$S1 = T(SSE0 - SSE1) / SSE0.$$

Celle-ci est distribuée asymptotiquement comme une Khi-deux de degrés de liberté $p(p+1)/2$

4- Exemple sous forme matricielle pour $p=1$:

- Notons $Y = \{y_t\}$, $X = \{1, y_{t-1}\}$ alors, l'estimateur MCO de ce modèle est :

$$\beta = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

par suite, le vecteur des résidus est :

$$\hat{e} = Y - X\beta$$

- D'autre part, notons $Z = \{1, y_{t-1}, y_{t-1}^2\}$, on peut estimer :

$$\hat{c} = (Z'Z)^{-1}(Z'\hat{e})$$

le vecteur des résidus est alors :

$$\hat{u} = \hat{e} - Z\hat{c}$$

Ainsi, on a :

$$SSE0 = \hat{e}'\hat{e}$$

$$SSE1 = \hat{u}'\hat{u}$$

et finalement :

$$S1 = T(SSE0 - SSE1) / SSE0$$

Où S1 est distribuée asymptotiquement comme une khi-deux à 1 degrés de liberté.

De cette façon, la programmation de la procédure qui rend S1 à n'importe quel vecteur de données y : $S1 = FOTP1(y)$ est aisée.

Les procédures de troisième ordre (S2) et de premier ordre augmenté (S3) ne diffèrent que par le nombre et la nature des termes sujet aux deux régressions, pour plus de détail, voir *Biometrika* (1988), 75, 3, pp. 491-9.

Annexe 2

Programme d'estimation par inférence indirecte

(conception du programme et programmation en GAUSS : Sophie Lamouroux)

```
new;

#include /home/lamouros/biblio/SIMULATION/simysetar.pro;
#include /home/lamouros/biblio/MCO/bmcoll.pro;
#include /home/lamouros/biblio/SCORE/mnslpl.pro;
output file = var.dat reset;

@----- boucle de 100 iterations -----@
j=1;
a=0;
do while j<=100;

    @----- coefs du modele auxiliaire @
    aobs=-1;
    er=rndn(300,1);
    ysetar=simysetar(aobs,er,100);
    btild=bmco(ysetar);
    ee=rndn(2500,1);

    @----- simulation du modele STAR en fonction de a0 @
    @ et calcul du critere (eq. score du mod. aux.)@

        @ 50 tirages pour rien @

    proc (2) = infind(a01);
        local e,y,i,crit,bch,bchap,m;
        i=1;
        bchap=0;
        do while i<=10;
            e=ee[((i-1)*250)+1):(i*250)];
            y=simysetar(a01,e,100);
            bch=bmco(y);
            bchap=bch+bchap;
            i=i+1;
        endo;
        m=(bchap/10)-btild;
        crit=(m'*m)/3;
        retp(crit,bchap/10);
    endp;

    proc beta(a);          @telle que requise dans gradp@
        local z,b;
        {z,b}=infind(a);
        retp(b);
    endp;

@----- critere versus a0 - recherche du minimum @
x=sega(-4,.1,71);
xmin=x[1];
{min,b0}=infind(xmin);
i=2;
do while i<=71;
    {z,b}=infind(x[i]);
```



```

@   print i~z;
    print b;@
    if z<=min;
        min=z;
        xmin=x[i];
    endif;
    i=i+1;
endo;

@-----variance theorique des 10 leres estimations----- @
    if j<=10;
        db=gradp(&beta,xmin);
        w=inv(db'*db)*1.1;
        print "var theo" w;
    endif;
@----- @

a=a|xmin;
j=j+1;
endo;
a=a[2:j];
                                @ vecteur de 100 a01 @

print "moyenne" meanc(a);
print "var 100" stdc(a)*stdc(a);

output file = a0_1.dat reset;
print a;

@-----Procedure de simulation du modele SETAR----- @

proc simysetar(a01,e,ny);
local n,y,t,ysetar,e1,e2;
n=rows(e)/2;
e1=e[1:n];
e2=e[n+1:2*n];
y=zeros(n,1);
t=1;
do while t<=n-1;
    if y[t]>0;
        y[t+1]=a01-.5*y[t]+e1[t+1];
    else;
        y[t+1]=1-.5*y[t]+e2[t+1];
    endif;
    t=t+1;
endo;
ysetar=y[n-ny+1:n];
retp(ysetar);
endp;

print "# simysetar(a01,2erreur,ny) simule des y selon le modele:";
print "   yt = a01 - .5*yt-1 + elt   si yt-1>0";
print "   yt = 1 - .5*yt-1 + e2t    si yt-1<=0";
print " -Rentrez au minimum 2*ny erreurs";
print "   -En introduisant une difference (d=(nerreur/2)-ny), vous
absorberez";
print "   l'effet initial de 'd' iterations 'pour rien'.";
print "   par exemple, si ny=100, rentrer 300 erreurs donne 50 iterations
initiales.";

```

```
@-----Procédure d'estimation par moindres carrés ordinaires----- @  
@----- pour le modèle auxiliaire (S1 p=1) -----@
```

```
proc bmco(y);  
  local yt,x,ny,b;  
  local x0,x1,x11;  
  ny=rows(y);  
  yt=y[2:ny,1];  
  x0=ones(ny-1,1);  
  x1=y[1:ny-1,1];  
  x11=x1.*x1;  
  x=x0~x1~x11;  
  b=inv(x'*x)*(x'*yt);  
  retp(b);  
endp;
```

Annexe 3

Programme d'estimation par la méthode des moments efficaces

(conception du programme et programmation en GAUSS : Sophie Lamouroux)

```
new;

#include /home/lamouros/biblio/SIMULATION/simysetar.pro;
#include /home/lamouros/biblio/MCO/bmcol1.pro;
#include /home/lamouros/biblio/SCORE/mnslp1.pro;

@----- boucle de 100 iterations -----@
j=1;
a=0;
do while j<=100;

    @----- coefs du modele auxiliaire @
    aobs=-1;
    er=rndn(300,1);
    ysetar=simysetar(aobs,er,100);
    btild=bmco(ysetar);
    ee=rndn(2500,1);

    @----- simulation du modele STAR en fonction de a0 @
    @ et calcul du critere (eq. score du mod. aux.)@

        @ 50 tirages pour rien @

    proc infind(a01);
        local e,y,m,crit,i,critere;
        i=1;
        critere=0;
        do while i<=10;
            e=ee[(((i-1)*250)+1):(i*250)];
            y=simysetar(a01,e,100);
            m=mnslp1(y,btild);
            crit=(m'*m)/3;
            critere=crit+critere;
            i=i+1;
        endo;
        retp(critere/10);
    endp;

    @ proc. incluse dans la boucle pour un @
    @ renouvellement du tirage des erreurs @

@----- critere versus a0 - recherche du minimum @
x=sega(-4,.1,71);
xmin=x[1];
min=infind(xmin);
i=2;
do while i<=71;
    z=infind(x[i]);
    if z<=min;
        min=z;
        xmin=x[i];
    endif;
    i=i+1;
endo;
```

```

@-----@
a=a|xmin;
j=j+1;
endo;
a=a[2:j];
@ vecteur de 100 a01 @

output file = a_1.dat reset;
print a;

output file = var.dat reset;
print "moyenne" meanc(a);
print "var 100" stdc(a)*stdc(a);

```

```

@-----Fonction critere = -----@
@----- equations scores du modele auxiliaire S1 p=1 -----@

```

```

proc mns1p1(y,b);
  local yt,x,ny,err,m;
  local x0,x1,x11;
  ny=rows(y);
  m={0,0,0};
  yt=y[2:ny,1];
  x0=ones(ny-1,1);
  x1=y[1:ny-1,1];
  x11=x1.*x1;
  x=x0~x1~x11;
  err=yt-x*b;
  m[1]=(x0'*err);
  m[2]=(x1'*err);
  m[3]=(x11'*err);
  m=m/ny;
  retp(m);
endp;

```

Annexe 4

Programme d'estimation conjointe du seuil et d'un paramètre par inférence indirecte

```
new;

#include /home/lamouros/Seuil/SimSetar/simymsetseuil.pro;
sig=.5;      @ecart-type de 1 erreur@
#include /home/lamouros/biblio/MCO/bmco11.pro;
#include /home/lamouros/biblio/SCORE/mns1p1.pro;

@----- boucle de 100 iterations -----@
j=1;
a=0;
c=0;
do while j<=100;

    @----- coefs du modele auxiliaire @
    aobs=0;
    er=rndn(300,1)*.5;
    ysetar=simymsetseuil(aobs,0,sig,er,100);
    btild=bmco(ysetar);
    ee=rndn(2500,1);

    @----- simulation du modele SETAR en fonction de a0 @
    @ et calcul du critere (eq. score du mod. aux.)@

        @ 50 tirages pour rien @

    proc infind(a01,c);
        local e,y,crit,i,bch,bchap,m;
        i=1;
        bchap=0;
        do while i<=10;
            e=ee[(((i-1)*250)+1):(i*250)];
            y=simymsetseuil(a01,c,sig,e,100);
            bch=bmco(y);
            bchap=bch+bchap;
            i=i+1;
        endo;
        m=(bchap/10)-btild;
        crit=(m'*m)/3;
        retp(crit);
    endp;

    @ proc. incluse dans la boucle pour un @
    @ renouvellement du tirage des erreurs @

@----- critere versus a0 - recherche du minimum @

seuil=seqa(-0.5,.1,11);
x=seqa(-4,.1,71);
xmin=x[1];
cmin=seuil[1];
min=infind(xmin,cmin);
i=1;
do while i<=71;
    if i==1;
        ii=2;
    else;
        ii=1;
    endo;
enddo;
```

```
endif;
do while ii<=11;
z=infind(x[i],seuil[ii]);
if z<=min;
min=z;
xmin=x[i];
cmin=seuil[ii];
endif;
ii=ii+1;
endo;
i=i+1;
endo;
```

@-----@

```
a=a|xmin;
c=c|cmin;
j=j+1;
endo;
a=a[2:j];
c=c[2:j];
```

@ vecteur de 100 a01 @

```
output file = a0c0v25.dat reset;
print a~c;
```

```
output file = var00.dat;
print "E(a)" meanc(a);
print "var(a)" stdc(a)*stdc(a);
print "E(c)" meanc(c);
print "var(c)" stdc(c)*stdc(c);
```