

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Modélisation MHD tridimensionnelle de tubes de flux coronaux  
utilisant l'assimilation des données 4D-VAR**

par  
Ali Benslimane

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

1 octobre , 2008

© Ali Benslimane, 2008.



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Modélisation MHD tridimensionnelle de tubes de flux coronaux  
utilisant l'assimilation des données 4D-VAR**

présenté par:

Ali Benslimane

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Paul Charbonneau  
président-rapporteur

Alain Vincent  
directeur de recherche

Pierre Bergeron  
membre du jury

**Mémoire accepté le 1 octobre 2008**

## RÉSUMÉ

L'activité solaire est soutenue par des mécanismes de libération d'énergie magnétique lorsque le champ magnétique coronal perturbé relaxe magnétohydrodynamiquement vers un état d'équilibre. Les structures de longue durée en équilibre magnétostatique deviennent instables lorsqu'elles absorbent le flux et l'hélicité magnétiques produits dans l'intérieur solaire. Un processus observable implique l'émergence de tubes de flux magnétique tordus subissant les instabilités coques magnétohydrodynamiques (MHD). Une situation favorable à la reconnexion magnétique se produit lorsque des sections d'un tube de flux de polarités opposées se croisent et forment une nappe de courant électrique intense. Nous simulons numériquement un tube de flux magnétique sujet à torsion, en forme d'arc, ancré à la photosphère en utilisant la MHD idéale. La dissipation Ohmique n'étant pas incluse, nous ne simulons pas les processus de reconnexion magnétique.

Comme il n'existe pas de moyens directs pour mesurer l'état réel MHD dans la couronne, un modèle particulier est nécessaire pour générer un état de référence du système. L'assimilation des données est utilisée pour produire cet état optimal en accord avec une série d'observations et cette référence. Nous avons étudié un modèle d'assimilation des données 4D-VAR qui corrige l'état initial en minimisant la déviation de la trajectoire du modèle MHD par rapport à une série temporelle d'observations à l'intérieur d'une fenêtre dite d'assimilation. Cela est possible en quantifiant cette déviation par une fonction coût qui est minimisée. Cependant, pour utiliser une méthode de descente telle qu'un gradient conjugué, le gradient de la fonction coût est nécessaire. Ceci est en problème en soi et est résolu à travers l'intégration de l'adjoint au modèle MHD.

Nous avons alors effectué une série d'expériences sur des cas tests utilisant des observations générées par nos simulations. Un état de référence artificiel est généré avec une erreur dans la quantité de torsion présente dans le tube initial par rapport à l'état physique réel utilisé pour générer les observations, elles aussi artificielles. Nous avons montré qu'il est possible de prédire l'évolution d'un tube

de flux magnétique pré-éruptif sur quelques temps d'Alfvén.

**Mots-Clés :** Couronne Solaire, MHD, Simulation Numérique, Assimilation des Données, Activité Solaire

## ABSTRACT

Solar activity is driven by magnetic energy release processes when a perturbed coronal magnetic field relaxes magnetohydrodynamically. The long-lived force-free structures become unstable as they absorb magnetic flux and helicity produced in the solar interior. One observable process involves twisted magnetic flux tubes emerging through the photosphere and undergoing the magnetohydrodynamic (MHD) kink instability. This situation is favorable to magnetic reconnection when tube sections of opposing polarities intersect and form an intense current sheet. We simulate an arched twisted magnetic flux tube anchored to the photosphere through ideal MHD. Ohmic dissipation is not included and therefore we do not model magnetic reconnection.

Since there is no direct way of measuring the coronal MHD state, a particular model must be chosen to generate a reference state of the system. Data assimilation is then used to generate the optimal state that agrees with a series of observations and the reference. We have studied a 4D-VAR data assimilation algorithm which "corrects" the initial state minimizing the deviation between the MHD trajectory and a time-series of observations over an assimilation window. This is possible by quantifying the deviation by a cost function and minimizing it. Minimizing through descent methods, the gradient of this cost function is required. This is a problem in itself which is solved by integrating the adjoint of the physical model.

Having such an implementation, we have conducted a series of experiments on test cases using simulation generated observations. The reference state is generated with an error in the initial twist of the flux rope with respect to the true state used to generate the observations. We have found that it is possible to predict the evolution of a pre-eruptive coronal flux rope over a few Alfvén times.

**Keywords:** Solar Corona, MHD, Data Assimilation, Numerical Simulation, Solar Activity

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	v
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	x
LISTE DES APPENDICES . . . . .	xii
LISTE DES SIGLES . . . . .	xiii
NOTATION . . . . .	xv
DÉDICACE . . . . .	xx
REMERCIEMENTS . . . . .	xxi
AVANT-PROPOS . . . . .	xxii
0.1 Contributions originales . . . . .	xxii
0.2 Actes de conférences . . . . .	xxii
0.3 Affiches . . . . .	xxii
0.4 Communications . . . . .	xxiii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Résumé du projet et motivation . . . . .	1
1.2 Revue observationnelle . . . . .	2
1.2.1 GOES . . . . .	3
1.2.2 TRACE . . . . .	3
1.2.3 SoHO . . . . .	4

1.2.4	STEREO . . . . .	5
1.3	Modèles de prévision actuelle de l'activité solaire . . . . .	5
<b>CHAPITRE 2 : LA MODÉLISATION DE LA COURONNE SOLAIRE</b>		<b>8</b>
2.1	Conditions Coronales . . . . .	8
2.1.1	Profil Thermodynamique . . . . .	8
2.1.2	Profil Magnétique . . . . .	11
2.1.3	Paramètres physiques . . . . .	14
2.2	Observables de la couronne solaire . . . . .	14
2.3	Modèles à force magnétique nulle du champ magnétique coronal . . .	16
2.3.1	Arcades Potentielles (sans courant) . . . . .	20
2.3.2	Condition FFF linéaire (LFFF) . . . . .	21
2.3.3	FFF non-linéaire (NLFFF) . . . . .	22
2.4	Modèles à force magnétique non-nulle . . . . .	22
2.5	Activité de la couronne . . . . .	25
2.5.1	Modèle pour les tubes de flux émergents ancrés dans la photo- sphère . . . . .	26
2.5.2	Reconnexion magnétique . . . . .	28
2.5.3	Modèles de CME . . . . .	31
<b>CHAPITRE 3 : LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE D'UN ARC SOLAIRE</b>		<b>33</b>
3.1	Les équations de Maxwell . . . . .	33
3.2	Les équations MHD générales . . . . .	34
3.2.1	Équation de la conservation de l'induction magnétique . . .	34
3.2.2	Équations du fluide . . . . .	35
3.2.3	Le théorème d'Alfvén . . . . .	39
3.3	Approximation MHD idéale isotherme . . . . .	40
<b>CHAPITRE 4 : SIMULATIONS NUMÉRIQUES D'UN ARC SOLAIRE EN MHD IDÉALE</b>		<b>42</b>

4.1	Algorithme pour générer les arcades (champ potentiel) . . . . .	42
4.2	Algorithme spectral pour la simulation des équations MHD . . . . .	45
4.2.1	Conditions initiales . . . . .	46
4.2.2	Projection dans un espace à divergence nulle . . . . .	47
4.2.3	Biot et Savart dans les bases spectrales . . . . .	47
4.2.4	Avance temporelle . . . . .	48
4.2.5	Troncature anti-repliement . . . . .	50
4.2.6	Simulations . . . . .	51
<b>CHAPITRE 5 : ASSIMILATION DES DONNÉES . . . . .</b>		<b>59</b>
5.1	Formulation générale . . . . .	60
5.2	Analyse d'erreurs . . . . .	61
5.3	Fonction coût . . . . .	62
5.4	Minimisation sous contraintes et lagrangien . . . . .	63
5.5	Modèle adjoint . . . . .	65
5.5.1	Méthode d'intégration par parties . . . . .	65
5.5.2	Équations MHD idéales adjointes . . . . .	66
5.6	Implémentation 4D-VAR/MHD . . . . .	67
5.7	Expérimentation avec l'implémentation 4D-VAR/MHD . . . . .	69
5.7.1	Assimilation d'observables complets . . . . .	70
5.7.2	Assimilation d'observables intégrés sur une dimension . . . . .	71
5.7.3	Assimilation d'observables globaux . . . . .	72
5.8	Résultats . . . . .	73
<b>CHAPITRE 6 : CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .</b>		<b>75</b>

## LISTE DES TABLEAUX

1.1	Bandes spectrales observées ( $\lambda$ ) par TRACE avec la température d'émission ( $T$ ) correspondante. . . . .	3
2.1	Paramètres physiques typiques de la basse couronne tels qu'énoncés par Aschwanden (2005a). Lorsque deux valeurs sont données, la première correspond à la couronne froide ( $T = 1$ MK) et la deuxième correspond à la couronne chaude ( $T = 3$ MK). . . . .	14
3.1	Résumé des nombres sans dimensions impliqués dans les équations de la MHD générale. Les valeurs calculées correspondent à celles pour une couronne froide (1 MK) telle que définie au Tab. 2.1. . . .	38
4.1	Valeurs de références caractéristiques du régime physique simulé numériquement. . . . .	51
II.1	Récapitulatif des avantages et désavantages de la méthode EnKF. Tiré de Kalnay et al. (2007) où est présentée une modification d'un tableau de Lorenc (2004). . . . .	xciv
II.2	Récapitulatif des avantages et désavantages de la méthode 4D-VAR. Tiré de Kalnay et al. (2007) où est présentée une modification d'un tableau de Lorenc (2004). . . . .	xcv

## LISTE DES FIGURES

1.1	Les échelles caractéristiques de la photosphère à la Terre. . . . .	6
2.1	On compare ici les profils de densité de masse $\rho$ décrits par un modèle purement hydrodynamique en équilibre hydrostatique et par la formule de <i>Baumbach-Allen</i> , un profil empirique réaliste. . . . .	12
2.2	Cette figure est tirée de Gary (2001) où il modélise le profil de pression thermique et de densité de flux magnétique au-dessus d'une région active produisant ce profil du paramètre $\beta$ . . . . .	13
2.3	Une image R-X de la caméra SXT/Yohkoh. On identifie les structures suivantes : Points X (1), Trou coronal (2), Boucles coronales (3), Région active (4). . . . .	17
2.4	Cette image est prise par EIT/SoHO dans la bande 304 Å. Dans le quadrant supérieur droit on voit clairement une protubérance. . . . .	18
2.5	Une CME observée par le coronographe C2 de LASCO/SoHO. . . . .	19
2.6	Changement de topologie par reconnexion de deux segments de tubes de flux magnétique. . . . .	30
2.7	Simulation numérique d'une CME à partir de la surface solaire jusqu'à environ 1 AU effectué par le modèle ENLIL du CCMC. . . . .	32
4.1	Magnétogrammes synthétiques utilisés pour la génération d'arcades potentielles. Celui de gauche selon l'arcade périodique (Éq. 4.8), celle de droite selon l'arcade circulaire (Éq. 4.9). Les arcades potentielles tridimensionnelles calculées sont illustrées à la Fig. 4.2 . . . . .	53
4.2	Arcades potentielles calculées correspondantes aux magnétogrammes de la Fig. 4.1. . . . .	53
4.3	On montre ici quelques isosurfaces de $\vec{B}_{\text{tube}}$ avec la définition du référentiel utilisé. . . . .	54

4.4	On montre ici l'erreur du projecteur $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ de l'Éq. 4.15 couplée à l'erreur de projection spectrale. . . . .	55
4.5	Illustration de phénomène de repliement. . . . .	56
4.6	Nous montrons l'évolution de la forme des lignes de champ magnétique décrit par nos simulations. . . . .	57
4.7	Nous comparons ici notre simulation MHD de l'évolution d'un tube de flux magnétique tordu avec l'évolution observée d'un tube de flux coronal. . . . .	58
5.1	Algorithme MHD/4D-VAR présenté schématiquement. Le programme principal est un gradient conjugué auquel sont connectés deux sous-programmes : MHD et ADJ. . . . .	68
5.2	Évolution sur $10 \tau_A$ de l'isosurface $\ \vec{B}\  = 1.1B_0$ . Panneau supérieur : État réel $\vec{\psi}_t$ . Panneau inférieur : Évolution selon l'état de référence initial $\vec{\psi}_b$ . . . . .	69
5.3	Évolution sur $10 \tau_A$ de l'isosurface $\ \vec{B}\  = 1.1B_0$ pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de $\mathcal{J}_1$ . . . . .	70
5.4	Évolution sur $10 \tau_A$ de l'isosurface $\ \vec{B}\  = 1.1B_0$ pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de $\mathcal{J}_2$ . . . . .	72
5.5	Évolution sur $10 \tau_A$ de l'isosurface $\ \vec{B}\  = 1.1B_0$ pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de $\mathcal{J}_3$ . . . . .	72
I.1	Nous montrons le trajet spatial effectué lors de la recherche du minimum de la fonction test $\mathcal{J} = 2(x - 11) + 6(y - 11)$ effectuée par le CG (trait plein) et le SD (tirets). Les coordonnées parcourues sont énumérées dans le tableau accompagnant la figure. . . . .	lxxxvii
I.2	Nous montrons le trajet spatial effectué lors de la recherche du minimum de la fonction test $\mathcal{J} = 4(x - 11) + 2(y - 11) + 6(z - 11)$ effectuée par le CG (trait plein) et le SD (tirets). Les coordonnées parcourues sont énumérées dans le tableau accompagnant la figure. . . . .	lxxxviii

## LISTE DES APPENDICES

<b>Annexe I :</b>	<b>Méthodes de minimisation</b>	<b>.lxxxiv</b>
I.1	Plus Profonde Descente	lxxxiv
I.2	Gradient Conjugué	lxxxv
<b>Annexe II :</b>	<b>Assimilation des données séquentielles modernes</b>	<b>lxxxix</b>
II.1	Estimation aux moindres-carrés pour interpolation statistique	lxxxix
II.2	OI (Optimal interpolation)	xcj
II.3	3D-VAR	xcj
II.4	Filtre de Kalman	xcij
<b>Annexe III :</b>	<b>Acte de conférence à CFD Canada 2008</b>	<b>xcvi</b>

## LISTE DES SIGLES

3D-VAR	tridimensionnelle variationnelle
4D-VAR	quadridimensionnelle variationnelle
BLUE	meilleur estimateur linéaire non-biaisé
CCMC	Community Coordinated Modeling Center
CDS	Coronal Diagnostic Spectrometer
CFD	mécanique des fluides numériques
CISM	Center for Integrated Solar Weather Modeling
CRSNG	Conseil de recherches en sciences naturelles et génie du Canada
CME	éjection de masse coronale
CG	gradient conjugué
DNS	simulation numérique directe
EnKF	filtrage de Kalman d'ensemble
ENLIL	modèle numérique du vent solaire
EIT	Extreme ultraviolet Imaging Telescope
EUV	ultra-violet extrême
FFF	champ à force magnétique nulle
FQRNT	Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et la Technologie
GOES	Geostationary Operational Environmental Satellites
IHY	International Heliophysics Year
LASCO	Large Angle and Spectrometric Coronagraph Experiment

LFFF	champ à force magnétique nulle linéaire
LWS	Living With a Star
GOES	Geostationary Operational Environmental Satellite
GRPS	Groupe de Recherche en Physique Solaire
MAS	MHD outside A Sphere
MDI	Michelson Doppler Imager
MHD	MagnétoHydroDynamique
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NLFFF	champ à force magnétique nulle non-linéaire
OMM	Observatoire du Mont Mégantic
R-X	Rayons-X
RPN	Recherche en Prédiction Numérique
SD	plus profonde descente
SECCHI	Sun Earth Connection Coronal and Heliospheric Investigation
SoHO	Solar and Heliospheric Observatory
STEREO	Solar TERrestrial RELations Observatory
SUMER	Solar Ultraviolet Measurement of Emitted Radiation
SXI	Soft X-ray Imager
SXT	Soft X-ray Telescope
TRACE	Transition Region And Coronal Explorer
XRS	X-Ray Sensor

## NOTATION

### Générale

pour  $u$ , une fonction arbitraire  $u \equiv u(x, y, z, t)$ , pour  $(\vec{v}, \vec{B}, \text{etc...})$

$du$	différentielle de $u$
$\delta u$	variationnelle de $u$
$\Delta u$	variation de $u$
$\ \vec{u}\ $	module de $\vec{u}$
$u_0$	valeur de référence pour $u$
$\vec{u}_k$	composante $\vec{k}$ de $\vec{u}$
$F$	opérateur arbitraire
$\Gamma$	opérateur elliptique

### Coordonnées et Domaines

$A$	aire
$A_f$	aire fermée
$d\vec{a}$	vecteur normal à la surface
$\delta, \Delta$	dimensions d'un site de reconnexion magnétique
$l$	coordonnée de position le long d'un tube
$L_x, L_y, L_z$	dimensions du domaine spatial
$n_x, n_y, n_z$	nombre de points de grilles dans les directions spatiales
$\Omega$	domaine spatial
$r, \theta, \phi$	coordonnées sphériques
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes
$t, \tau$	temps et temps inverse
$s$	abscisse curviligne

## Champs Physiques

$\vec{A}$	potentiel vecteur magnétique
$\vec{B}, \vec{B}^*$	densité de flux magnétique et son adjoint
$B_{eq}$	densité de flux en équipartition avec l'énergie cinétique
$B_n$	densité de flux magnétique normal à la surface
$e$	densité d'énergie
$\vec{E}$	champ électrique
$\vec{J}$	densité de courant électrique
$\Lambda_{ij}$	tenseur des déformations
$n_e$	densité électronique
$p_e$	pression externe
$p_i$	pression interne
$p_m$	pression magnétique
$p_{th}$	pression thermique
$\Psi$	potentiel scalaire magnétique
$Q_\eta$	taux de chauffage par dissipation magnétique
$Q_\nu$	taux de chauffage par dissipation visqueuse
$\rho, \rho^*$	densité de masse et son adjoint
$\rho_e$	densité de charge électrique
$\tau_{ij}$	tenseur des contraintes visqueuses
$\vec{v}, \vec{v}^*$	vitesse et son adjoint
$\tau_A$	temps d'Alfvén
$T$	température
$v_A$	vitesse d'Alfvén

## Nombres sans dimensions

$\beta$	rapport des pressions thermique et magnétique d'un plasma
Ma	nombre de Mach
Pé	nombre de Péclet
Pr	nombre de Prandtl thermique
Pm	nombre de Prandtl magnétique
Re	nombre de Reynolds
Rm	nombre de Reynolds magnétique
Ri	nombre de Richardson
Sr	nombre de Strouhal

## Arcades et Tubes de Flux Analytiques

$y_+, y_-, w$	paramètres relatifs à l'arcade périodique (Éq. 4.8)
$r_+, r_-, r_0$	coordonnées spéciales et paramètres relatifs à l'arcade circulaire (Éq. 4.9)
$a_t$	rayon de $\vec{B}_{\text{tube}}$
$B_t$	amplitude de $\vec{B}_{\text{tube}}$
$\vec{B}_{\text{tube}}$	solution analytique d'un tube de flux magnétique tordu en arche
$\varpi$	distance entre un point et l'axe de $\vec{B}_{\text{tube}}$
$q$	torsion par unité de longueur
$R_t$	rayon du tore formant $\vec{B}_{\text{tube}}$
$H$	hélicité magnétique
$\Phi$	flux magnétique à travers une surface
$Tw$	torsion
$Wr$	enroulement

## Assimilation des Données

$\vec{\psi}$	état du système
$\vec{\psi}_t$	état réel du système
$\vec{\psi}_b, \epsilon_b, \mathcal{B}$	état de référence, son erreur et la covariance d'erreur associée
$\vec{y}, \epsilon_y, \mathcal{R}$	vecteur d'observation, son erreur et la covariance d'erreur associée
$\vec{\psi}_a, \epsilon_a, \mathcal{A}$	état après analyse, son erreur et la covariance d'erreur associée
$\mathbf{H}, \mathcal{H}$	opérateur d'observation et sa forme linéarisée
$\mathbf{M}, \mathcal{M}$	opérateur de prédiction physique et sa forme linéarisée
$\vec{\mathcal{E}}, ADJ$	contrainte physique et son adjoint
$\mathcal{J}$	fonction coût
$\vec{\lambda}$	état adjoint
$\mathcal{L}$	lagrangien
$t_a$	temps d'assimilation

## Symboles, Paramètres et Constantes Physiques

$\odot$	Soleil
$\oplus$	Terre
$\alpha$	paramètre de force magnétique nulle
$c$	vitesse de la lumière
$c_s$	vitesse du son
$C_p$	chaleur spécifique à pression constante
$C_V$	chaleur spécifique à volume constant
$\delta t_{R-A}$	paramètre temporel du filtre spectral Robert-Asselin
$E_0$	énergie minimale libérée par une éruption solaire
$EM$	flux électromagnétique
$\epsilon$	perméabilité électrique
$\varepsilon$	taux d'excitation
$f_c$	fréquence critique de Nyquist

$f_{ce}, f_{ci}$	fréquence de collision des électrons et des ions
$f_{pe}, f_{pi}$	fréquence plasma des électrons et des ions
$g_{\odot}$	accélération gravitationnelle à la surface solaire
$G$	constante universelle de gravitation
$\gamma$	indice adiabatique
$H_p$	hauteur caractéristique de la pression
$\eta$	diffusivité magnétique
$k$	nombre d'onde
$k_B$	constante des gaz de Boltzman
$\kappa$	conductivité thermique
$\lambda$	longueur d'onde
$\lambda_0$	taux d'éruptions
$m_H$	masse de l'atome d'hydrogène
$M_{\odot}$	masse solaire
$\mu$	perméabilité magnétique
$\mu_C$	masse moléculaire moyenne coronale
$\nu$	viscosité cinématique
$R_{\odot}$	rayon solaire
$\sigma$	résistivité électrique
$v_c$	vitesse convective
$W$	énergie magnétique libre dans la couronne

*Prediction is very difficult, especially about the future.*

Niels Bohr (1885-1962)

## REMERCIEMENTS

Ce projet de recherche a été rendu possible grâce aux bourses FQRNT (Projet de recherche en équipe : Avalanches et prédiction des éruptions solaires) et CRSNG (Discovery).

Le calcul numérique a été effectué sur les machines du Réseau Québécois de Calcul de Haute Performance. Je remercie particulièrement Michel Béland pour son aide dans l'optimisation du code MHD/4D-VAR et Jacques Richer pour avoir adapté le code CRUNCH-3D aux machines ALTIX ®.

Je remercie Paul Charbonneau pour son appui tout au long du projet, Éric Bélanger pour son aide dans ma compréhension du 4D-VAR et aussi le reste de l'équipe du GRPS, un groupe de gens motivant, intéressé et intéressant.

Je voudrais remercier particulièrement Alain Vincent pour m'avoir confié ce projet de recherche et de m'avoir permis une liberté dans l'orientation du travail tout en étant toujours disponible. Pour tout le temps passé à expliquer ou discuter (et pour toutes les choses dont vous m'avez convaincu), je suis reconnaissant.

Finalement, sans l'appui et l'encouragement de ma famille, je n'en serais pas là. Leur contribution à ce travail, bien qu'indirecte, a été indispensable.

## AVANT-PROPOS

### 0.1 Contributions originales

Ce projet a considéré l'application des techniques d'assimilation des données aux modèles dynamiques de la couronne solaire. Particulièrement, nous avons :

- Dérivé le modèle adjoint dans le cas de la MHD idéale.
- Implémenté une méthode aux différences finies pour générer des champs magnétiques potentiels dans les cas où  $\alpha$  est nul.
- Implémenté un algorithme spectral pour simulation directe de la MHD idéale et d'assimilation des données 4D-VAR.
- Étudié d'un point de vue physique la validité de la méthode d'assimilation des données sur des cas réels de tubes de flux observés dans la couronne et par conséquent montré que l'on peut prédire l'évolution d'un tube de flux magnétique sur quelques temps d'Alfvén et *a posteriori*, que pour les tubes de flux non-éruptifs, l'approximation isotherme est valide.

### 0.2 Actes de conférences

- Benslimane, A., Vincent, A., *Tridimensional Modeling of coronal flux ropes using MHD 4D-VAR Data Assimilation*, Proceedings for the 16<sup>th</sup> Annual Conference of the CFD Society of Canada, 9-11 juin, 2008, Saskatoon, Saskatchewan

### 0.3 Affiches

- Benslimane, A., Vincent, A., *Modeling of coronal flux ropes using MHD 4D-VAR Data Assimilation*, 37<sup>th</sup> COncference on SPACe Research, 13-20 juillet, 2008, Montréal, Québec

#### 0.4 Communications

- Benslimane, A., Vincent, A., *4D-VAR Data assimilation for an optimal modeling of the solar corona*, Quatrième Atelier Solaire Canadien, 29-31 octobre, 2007, St-Émile de Suffolk, Québec
- Benslimane, A., 2007, *Relaxation methods for boundary value problems applied to force-free fields*, Atelier Étudiant de l'OMM, 29-31 août, 2007, Université Laval, Ste-Foy, Québec
- Benslimane, A., 2007, *Data assimilation and solar meteorology*, Rencontre Centre de l'OMM, 14-16 mars, 2007, Val-David, Québec

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Résumé du projet et motivation

La couronne solaire est cette couche externe où la physique est dominée par le champ magnétique produit dans la zone convective située en dessous. Elle est constituée surtout d'arcades de flux magnétique au milieu desquelles émergent des tubes de flux magnétiques. Cette continuelle perturbation du champ magnétique coronal favorise des scénarios évolutifs propices à la reconnexion des lignes de champ magnétique. Au cours de la reconnexion qui se produit très rapidement, des rayons-X (R-X) sont produits par rayonnement de freinage et une grande quantité de courant est dissipée en chaleur (Aschwanden, 2005a). Si diverses théories ont été proposées dans le passé, la compréhension détaillée du processus de reconnexion est à ce jour incomplète (e.g. Priest and Forbes, 2000). Le fait est que la couronne a une température de l'ordre du million de K, comparativement à la température effective solaire  $T_{\odot} = 5770$  K, et cette température est probablement due à la reconnexion électrique lors de processus de reconnexion magnétique. La couronne est également l'objet d'éruptions de grandes intensités, lesquelles sont dues à un effet d'avalanche qui est modélisable notamment en considérant une couronne dans un état organisé critique (e.g. Bélanger et al., 2007; McIntosh and Charbonneau, 2001). Cependant, bien que les modèles d'automates cellulaires utilisés à cette fin sont une voie d'avenir, ils sont encore loin de la perfection et de plus ne sont pas faciles à interpréter. En somme, la physique de la couronne solaire étant encore mal comprise, nous avons choisi la voie de la simulation directe 3D des équations magnétohydrodynamiques instationnaires qui n'introduit aucune modélisation, à part celle de la reconnexion.

Les éruptions solaires se produisent régulièrement et peuvent avoir des conséquences importantes sur Terre (e.g. Bolduc, 2002). La prédiction de la météo

spatiale inclut celle de l'activité de la couronne solaire. Les flux de particules et de rayonnement enregistrés dans l'ionosphère sont directement reliés aux éruptions solaires. De nombreuses sources de données satellites et terrestres étant disponibles pour la couronne solaire, il faut utiliser une méthode d'assimilation des données pour tenir compte le mieux possible de cette information lors de la simulation des phénomènes physiques qui doit la reproduire. Les points importants sont le modèle MHD utilisé pour décrire l'évolution d'un arc solaire, la technique d'assimilation des données, et notamment la fonction coût, le modèle reliant les observations disponibles aux quantités calculées. On voit que le choix et le développement de la technique d'assimilation des données sont totalement dépendants de la physique à résoudre. La technique utilisée pour assimiler les données d'observation est la même que celle utilisée par RPN<sup>1</sup> de Dorval. Il s'agit de la technique quadridimensionnelle variationnelle 4D-VAR. qui nous semble préférable à celle utilisant des filtres de Kalman (EnKF : Ensemble Kalman Filtering) car nous avons ici un problème où les opérateurs d'observations sont non-linéaires (Kalnay et al., 2007). Dans ce travail, nous posons la question : peut-on prévoir l'évolution d'un arc coronal ?

Nous résolvons les équations MHD compressibles (masse, quantité de mouvement et densité de flux magnétique) pour la basse couronne par une méthode numérique spectrale, les conditions initiales étant déterminées par des champs analytiques modélisant des boucles coronales. Nous assimilons ensuite les données observationnelles à l'aide de la technique 4D-VAR.

## 1.2 Revue observationnelle

Le développement de systèmes de prédiction d'activité solaire est grandement motivé par l'abondance, la qualité et l'accessibilité actuelles des données solaires en temps réels. Dans cette section, nous ferons une revue de quelques-unes des principales missions observationnelles en résumant les propriétés des données qu'elles rendent disponibles.

---

<sup>1</sup>RPN : division de Recherche en Prédiction Numérique de Environnement Canada

### 1.2.1 GOES

Le programme GOES (Geostationary Operational Environmental Satellite) est responsable des données observationnelles pour la météorologie aux États-Unis et est constitué d'une série de satellites en orbite. Nous nous intéressons aux instruments observant le Soleil. Les données GOES de type solaire sont notamment des observations R-X avec une excellente résolution temporelle : le SXI<sup>2</sup> génère les clichés d'émission R-X sur tout le disque et le XRS<sup>3</sup> mesure le flux total dans cette bande. Les R-X étant associés aux phénomènes éruptifs, ces observations sont d'une importance capitale pour la météorologie spatiale.

### 1.2.2 TRACE

Lancée par la NASA en avril 1998, l'observatoire TRACE (Transition Region And Coronal Explorer) sonde l'atmosphère solaire dans l'ultra-violet (UV) et l'extrême-ultra-violet (EUV). Le Tab. 1.2.2 résume les bandes spectrales utilisées. Les bandes correspondantes à des températures  $\sim$  MK sondent le gaz très chaud de la couronne tandis que les bandes plus froides sont sensibles à la chromosphère.

$\lambda$ (Å)	$T(10^3$ K)
5000 (continu)	4 - 6.4
1700 (continu)	4 - 10
1660 (C I, Fe II, cnt)	4 - 10
1550 (C IV)	60 - 250
1216 (HI Ly- $\alpha$ )	10 - 30
173 (Fe IX)	160 - 2000
195 (Fe XII)	500 - 2000
284 (Fe XV)	1250 - 4000

TAB. 1.1 - Bandes spectrales observées ( $\lambda$ ) par TRACE avec la température d'émission ( $T$ ) correspondante.

---

<sup>2</sup>SXI : Solar X-ray Imager

<sup>3</sup>XRS : X-Ray Sensor

### 1.2.3 SoHO

Depuis mai 1996, la source principale de données en temps réels servant à la météorologie spatiale provient de SoHO (Solar and Heliospheric Observatory). L'importance de cet observatoire est due à la diversité des données qu'il produit par ses nombreux instruments. Situé au point Lagrange L1, il permet une lecture *in-situ* des propriétés du vent solaire à une distance 0.01 AU de la Terre et 0.99 AU du Soleil en plus de l'imagerie solaire qu'il effectue. D'intérêt particulier parmi les nombreux instruments de SoHO sont ceux permettant une lecture directe des conditions coronales :

- *CDS (Coronal Diagnostic Spectrometer)* : Cet instrument sonde la densité et les flux de température dans la couronne.
- *EIT (Extreme ultraviolet Imaging Telescope)* : Sensible à quatre bandes spectrales (171 Å, 195 Å, 285 Å, 304 Å) de l'EUV, on observe avec cet appareil l'activité de la couronne.
- *LASCO (Large Angle and Spectrometric Coronagraph Experiment)* : Composé d'un coronographe interne C1 (1 – 3  $R_{\odot}$ ), moyen C2 (1.5 – 6  $R_{\odot}$ ) et externe C3 (3.5 – 30  $R_{\odot}$ ), LASCO observe la majorité de la couronne dans le continu. Il sert particulièrement à observer l'évolution des éjections de masse coronale (CME).
- *MDI (Michelson Doppler Imager)* : Observant la photosphère dans le domaine du visible, MDI peut filtrer chaque pixel individuellement. Utilisant quatre images simultanées à différentes longueurs d'ondes, il produit un dopplergramme<sup>4</sup> à chaque minute et un magnétogramme<sup>5</sup> aux 90 minutes.
- *SUMER (Solar Ultraviolet Measurement of Emitted Radiation)* : Un télescope EUV et un spectromètre, cet instrument produit des données à haute résolution temporelle, spatiale et spectrale pour la chromosphère et la basse couronne

---

<sup>4</sup>Dopplergramme : une carte de vitesse radiale photosphérique mesurée utilisant le décalage des fréquences émises relié à l'effet Doppler.

<sup>5</sup>Magnétogramme : une carte du champ magnétique radial (ou possiblement vectoriel 3D) photosphérique mesuré utilisant la subdivision des fréquences émises reliées à l'effet Zeeman.

(10 000 – 2 000 000 K). Il sert à mesurer les profils de température et de densité ainsi que les flux de plasma.

En plus de ces senseurs, SoHO possède notamment une gamme d'appareils servant à analyser le vent solaire.

#### 1.2.4 STEREO

STEREO (Solar TERrestrial RELations Observatory) comprend deux satellites sensiblement identiques en orbite solaire, l'un devant la Terre et l'autre derrière. Par stéréoscopie, la double vue de STEREO permet une observation à résolution tridimensionnelle. Pour visualiser la couronne en trois dimensions, chaque satellite possède :

- *SECCHI (Sun Earth Connection Coronal and Heliospheric Investigation)* : un télescope EUV à haute résolution ( $2048 \times 2048$ ) couvrant quatre bandes spectrales (171 Å, 195 Å, 285 Å, 304 Å). De plus, le *Heliospheric Imager* de SECCHI sonde la structure de l'hydrogène composant le vent solaire le long de ligne la Terre-Soleil. Ses deux appareils, HI-1 et HI-2, observent dans les gammes spectrales 630 – 730 nm et 400 – 1000 nm respectivement, couvrant un champ de  $12 - 84 R_{\odot}$  et  $66 - 310 R_{\odot}$ . Finalement, SECCHI possède deux coronographes couvrant la basse et haute couronne.

### 1.3 Modèles de prévision actuelle de l'activité solaire

La difficulté à modéliser l'héliosphère de la photosphère jusqu'à la Terre provient des changements drastiques des échelles caractéristiques. Par exemple, les échelles spatiales des différents systèmes d'intérêts sont montrées à la Fig. 1.1. Ce découplage rend difficile la conception d'un modèle numérique complet et auto-cohérent de l'interaction Terre-Soleil. En vue de cette réalité, le travail actuel consiste à développer des modèles locaux, y assimilant les données disponibles, et à assurer la cohérence entre ces différents modèles en implémentant un traitement des frontières inter-régimes élaboré. L'implémentation d'un tel système auto-



majeures. Ce genre de critères statistiquement valables sont ceux qui servent à la prédiction de l'activité coronale actuelle.

## CHAPITRE 2

### LA MODÉLISATION DE LA COURONNE SOLAIRE

La couronne est la partie de l'atmosphère solaire au dessus de la mince chromosphère. Elle s'étend sur plusieurs millions de kilomètres autour du Soleil mais ne peut être observée dans le visible sans un coronographe à moins d'être en période d'éclipse ; sa densité extrêmement basse (densité électronique typique  $n_e = 1 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ ) la rend transparente au rayonnement solaire. Par contre, elle est observable dans l'EUV car la température s'y trouve de l'ordre du MK ce qui peut sembler difficile à accorder avec la température effective de 5770 K de l'étoile. De plus, on observe dans cette bande spectrale des structures stables élaborées de filaments lumineux persistant pendant des jours de même que des phénomènes dynamiques violents et éruptifs de courtes durées. Dans les modèles actuels du Soleil, la température extrême de la couronne, sa structure complexe et sa dynamique extrêmement énergétique sont communément attribuables à des phénomènes de nature magnétique.

Dans ce chapitre nous faisons une revue de la physique servant à modéliser la couronne solaire.

#### 2.1 Conditions Coronales

##### 2.1.1 Profil Thermodynamique

Les profils thermodynamiques de la couronne seront d'abord calculés pour une atmosphère en équilibre hydrostatique. Dans ce cas, les forces de nature magnétique sont omises et le profil de pression thermique devra contrebalancer les forces gravitationnelles. Considérant une dépendance purement radiale de la pression thermique  $p_{th}$  et de la densité  $\rho$ , cette contrainte s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{th}(r) = -\rho(r) g_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \quad (2.1)$$

où  $g_{\odot} = GM_{\odot}/R_{\odot}^2$  est l'accélération gravitationnelle à la base de l'atmosphère ( $r = R_{\odot}$ ) avec  $M_{\odot}$  et  $R_{\odot}$ , la masse et le rayon du Soleil, et  $G$ , la constante universelle de gravitation. Nous considérons le plasma coronal sous l'approximation du gaz parfait :

$$p_{th}(r) = \frac{\rho(r)k_B T(r)}{\mu_C m_H} \quad (2.2)$$

où  $\mu_C$  est la masse moyenne moléculaire des constituants du plasma coronal,  $m_H$  est la masse de l'hydrogène et  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Le plasma coronal est majoritairement constitué d'hydrogène et d'hélium ionisés en rapport d'abondance (H :He=10 :1), nous donnant  $\mu_C = (10 \times 1 + 1 \times 4)/11 \approx 1.27$ . De plus, nous considérons qu'il existe une relation polytropique d'indice adiabatique  $\gamma = C_p/C_V$  (le rapport des chaleurs spécifique à pression et volume constants) :

$$\frac{p_{th}}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} \quad (2.3)$$

Les indices 0 dénotent des valeurs de référence connues que nous prendrons pour celles à la base de la couronne. Dans ce cas, nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{\gamma p_{th}}{\rho} = c_s^2 \quad (2.4)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son. L'indice adiabatique généralement utilisé pour la couronne est  $\gamma = 1.67$ .

Dans le cadre de ces approximations, l'Éq. 2.1 devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} &= -\rho g_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \\ \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial r} &= -\rho g_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \\ c_{so}^2 \frac{\rho^{\gamma-2}}{\rho_0^{\gamma-1}} \frac{\partial \rho}{\partial r} &= -g_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

En intégrant cette dernière équation et en utilisant la relation polytropique et la loi des gaz parfaits, nous trouvons les profils thermodynamiques suivants :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{c_{s0}^2} g_{\odot} R_{\odot}^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\odot}} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.6)$$

$$\frac{p_{th}}{p_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{c_{s0}^2} g_{\odot} R_{\odot}^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\odot}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.7)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{c_{s0}^2} g_{\odot} R_{\odot}^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\odot}} \right) \right)^{\gamma} \quad (2.8)$$

Malheureusement ces derniers profils ne tiennent pas du tout avec la réalité. La structure magnétique qui est présente dans la couronne joue un rôle très déterminant et n'a pas été considérée jusqu'à présent. Les profils plus réalistes pour la densité ont originalement été tirés d'observations en lumière blanche de la couronne d'où a été trouvé la formule empirique de *Baumbach-Allen* (e.g. Cox, 2000) :

$$n_e(r) = 10^{14} \left( 2.99 \left( \frac{r}{R_{\odot}} \right)^{-16} + 1.55 \left( \frac{r}{R_{\odot}} \right)^{-6} + 0.036 \left( \frac{r}{R_{\odot}} \right)^{-1.5} \right) \text{m}^{-3} \quad (2.9)$$

qui est valide pour la couronne observable jusqu'à quelques  $R_{\odot}$ . On considère que le plasma coronal est complètement ionisé et donc on relie la densité électronique et la densité de masse par  $\rho = \mu_C m_H n_e$ . Pour la couronne extérieure ( $r \gg R_{\odot}$ ), l'observation des scintillements de sources radio<sup>1</sup> a rendu le profil suivant : (Erickson, 1964) :

$$n_e \sim 7.2 \times 10^{11} \left( \frac{r}{R_{\odot}} \right)^{-2} \text{m}^{-3} \quad (2.10)$$

À la Fig. 2.1, on compare le profil analytique de densité sans considération

---

<sup>1</sup>Les émissions venant d'étoiles radio traversant la couronne extérieure sont dispersées par les changements d'indice de réfraction dus aux irrégularités dans la densité coronale. L'angle de dispersion r.m.s. est proportionnelle à la déviation r.m.s. dans la densité coronale (Hewish, 1955). Cette dernière quantité est mesurable par le scintillement en amplitude dans le signal radio.

magnétique avec la formule empirique réaliste de *Baumbach-Allen*. On voit que la gravité est très efficace à contenir l'atmosphère solaire si ça n'avait été que d'elle. En réalité, la couronne solaire s'étend sur plusieurs  $R_{\odot}$  après quoi le vent solaire est présent.

Pour déterminer le profil de température le long de la ligne de visée dans la couronne, on utilise la distribution de mesure d'émission différentielle pour cette colonne verticale particulière. En ayant le flux radiatif pour une large gamme de bandes spectrales dont les températures d'émission sont connues, on construit  $EM(T)$ , l'émission selon la température et sa dérivée par  $T$  :

$$\frac{dEM}{dT} = \int n_e^2(T, z) dz \quad (2.11)$$

qui est une mesure de la densité au carré le long de la ligne de visée. D'après les profils trouvés observationnellement (Aschwanden, 2005a), on voit qualitativement que les régions à champ ouvert (tels les trous coronaux) sont typiquement à  $T \lesssim 1$  MK, les régions à champ fermé (boucles coronales) sont typiquement à  $T \approx 1 - 2$  MK et que les régions actives sont typiquement à  $T \approx 2 - 6$  MK.

### 2.1.2 Profil Magnétique

La présence de champs magnétiques dans la couronne implique une force de Lorentz agissant sur les particules chargées constituant le plasma. Si l'énergie cinétique de ces particules est suffisamment faible devant leur énergie magnétique, leurs mouvements sont confinés à des trajectoires spirales autour et suivant les lignes de champ magnétique. À l'inverse, les particules suffisamment accélérées s'échappent de ce confinement et diffusent perpendiculairement aux lignes de champ magnétique. C'est le cas pour les particules alimentant le vent solaire. Il est d'usage de quantifier ce rapport d'énergie avec le paramètre  $\beta$  qui est défini comme le rapport entre les pressions thermique  $p_{th}$  et magnétique  $p_m$  du fluide :

$$\beta = \frac{p_{th}}{p_m} \quad (2.12)$$

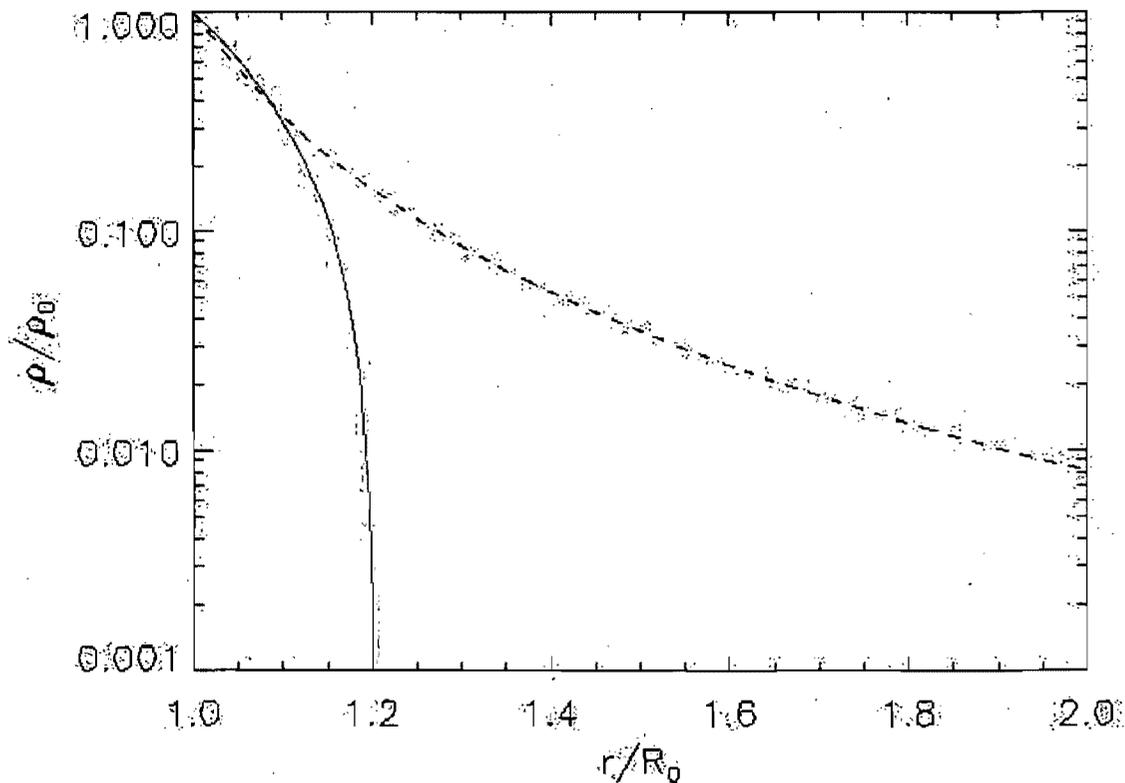


FIG. 2.1 – On compare ici les profils de densité de masse  $\rho$  décrits par un modèle purement hydrodynamique en équilibre hydrostatique (trait plein rouge) et par la formule de *Baumbach-Allen* (tirets noirs), un profil empirique réaliste. Il manque clairement une contribution physique à considérer pour modéliser la thermodynamique générale de la couronne car d'après notre résultat de l'Éq. 2.6, la couronne solaire est comprise dans une couche de  $0.2R_\odot$  de hauteur. Nous savons que le plasma coronal s'étend beaucoup plus que cela, notamment à cause du vent solaire qui remplit l'héliosphère. En effet, la nature magnétique du Soleil est déterminante dans l'allure de son atmosphère et est nécessairement à considérer dans toute modélisation coronale valable.

où  $p_m = B^2/2\mu$  avec  $\mu$ , la perméabilité magnétique du milieu, et  $B$ , l'amplitude de la densité de flux magnétique. En mesurant le rapport entre les forces magnétique et thermique, la grandeur du paramètre  $\beta$  décrit quantitativement laquelle de ces forces domine sur les mouvements du plasma. Dans la limite  $\beta \ll 1$ , les mouvements du plasma sont dominés par les forces magnétiques. C'est le cas pour la majeure partie de la couronne solaire comme on peut le voir à la Fig. 2.2 où le profil radial de  $\beta$  est illustré dans le cas d'une région active.

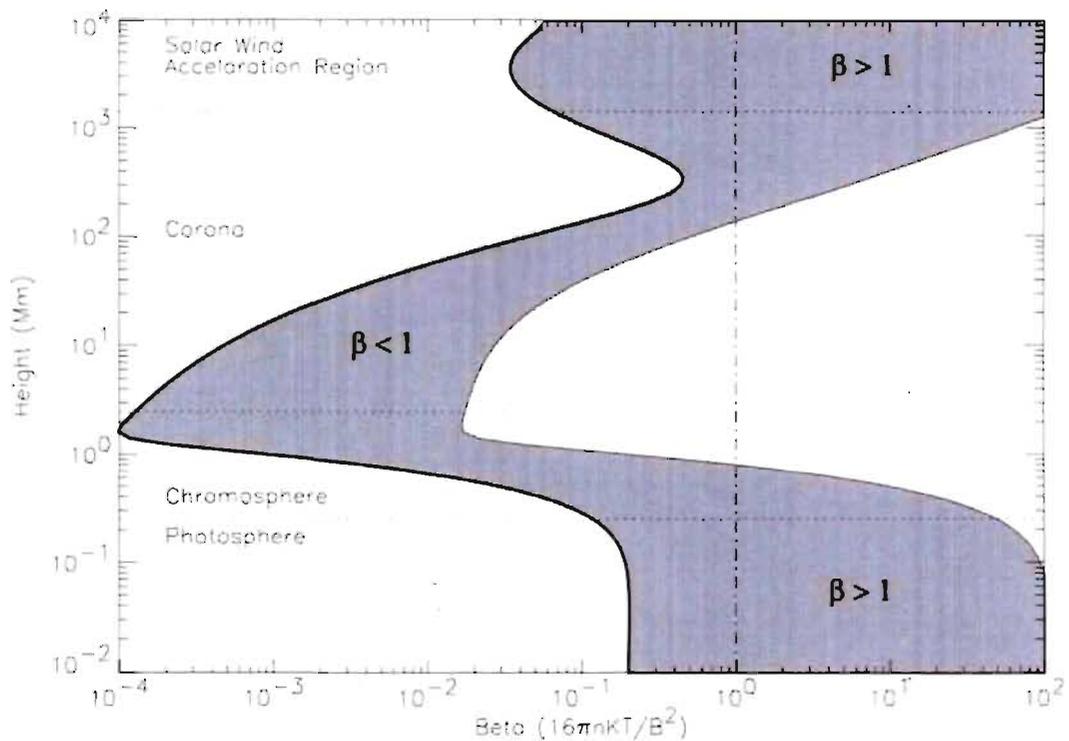


FIG. 2.2 – Cette figure est tirée de Gary (2001) où il modélise le profil de pression thermique et de densité de flux magnétique au-dessus d'une région active produisant ce profil du paramètre  $\beta$ . L'aire est définie sur l'ensemble des valeurs attendues pour l'intensité du flux magnétique. Utilisant ce modèle, l'auteur démontre que  $\beta \leq 1$  dans les limites supérieures et inférieures de l'atmosphère solaire ainsi que  $\beta \ll 1$  dans la basse et moyenne couronne. Il note que les méthodes actuelles d'inversion des observations pour reconstruire le champ magnétique coronal ne satisfont généralement pas à ces trois conditions.

### 2.1.3 Paramètres physiques

Au Tab. 2.1 nous avons recueilli de Aschwanden (2005a) une série de valeurs typiques utiles pour la basse couronne solaire, particulièrement celles qui nous servent à définir le régime de simulation.

TAB. 2.1 – Paramètres physiques typiques de la basse couronne tels qu'énoncés par Aschwanden (2005a). Lorsque deux valeurs sont données, la première correspond à la couronne froide ( $T = 1$  MK) et la deuxième correspond à la couronne chaude ( $T = 3$  MK).

Masse moyenne coronale	$\mu_C$	1.27
Indice adiabatique	$\gamma$	1.67
Température	$T$	$1 \times 10^6 - 3 \times 10^6$ K
Densité électronique	$n_e$	$1 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$
Densité de flux magnétique	$B$	$1 \times 10^{-3}$ T
Densité de masse	$\rho$	$2.13 \times 10^{-12} \text{ kg m}^{-3}$
Pression thermique	$p_{th}$	$2.76 \times 10^{-2} - 8.28 \times 10^{-2}$ Pa
Pression magnétique	$p_m$	$3.97 \times 10^{-1}$ Pa
Rapport $p_{th}/p_m$	$\beta$	$6.93 \times 10^{-2} - 2.08 \times 10^{-1}$
Hauteur caractéristique de $p_{th}$	$H_p$	$4.74 \times 10^7 - 1.42 \times 10^8$ m
Vitesse du son	$c_s$	$1.47 \times 10^5 - 2.55 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$
Fréquence plasma des électrons	$f_{pe}$	$2.84 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$
Fréquence plasma des ions	$f_{pi}$	$5.86 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$
Longueur de Debye	$\lambda_D$	$2.18 \times 10^{-3} - 3.77 \times 10^{-3}$ m
Fréquence de collisions des électrons	$f_{ce}$	$7.28 \times 10^1 - 1.4 \times 10^1 \text{ s}^{-1}$
Fréquence de collisions des ions	$f_{ci}$	$1.196 - 0.23 \text{ s}^{-1}$
Conductivité électrique	$\sigma$	$3.87 \times 10^5 - 2.01 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$
Résistivité magnétique	$\eta$	$2.058 - 0.396 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Conductivité thermique	$\kappa$	$9.2 \times 10^3 - 1.43 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu$	$4 \times 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

## 2.2 Observables de la couronne solaire

Les observations solaires peuvent se classer en trois catégories. D'abord, l'observation de l'intérieur solaire par l'hélioséismologie pour explorer les processus

moteurs de l'activité solaire. Ensuite l'observation de quantités globales telles que l'irradiance ou le nombre de taches solaires pour observer les tendances à long terme liées au cycle solaire. Finalement, l'observation locale des phénomènes dynamiques visibles dans l'atmosphère solaire. Il est utile de classer les différents types de phénomènes observables locaux de la couronne et de comprendre leurs rôles dans l'activité solaire. Parmi les phénomènes observables de la couronne sont les suivantes :

1. *Points Lumineux R-X* : On observe au-dessus des régions où deux fragments photosphériques de polarité magnétique opposée sont adjacents, des points très lumineux en R-X. Ces points ont une durée de vie d'environ 8 heures. Ces émissions sont causées par une restructuration du champ magnétique se déroulant dans ces régions actives de la couronne. À la Fig. 2.3(1), nous avons encerclé quelques points lumineux sur une image R-X du disque solaire.
2. *Trous Coronaux* : Contrairement aux boucles, ces régions où les lignes de champ magnétique sont ouvertes (se refermant loin dans l'héliosphère) sont moins denses. L'ouverture du champ magnétique fait en sorte que la grande partie du vent solaire provient de ces régions. Un trou coronal polaire est montré à la Fig. 2.3(2).
3. *Boucles Coronales* : On observe typiquement aux latitudes moyennes des régions de plus haute densité où les lignes de champ magnétique sont fermées. Ces structures peuvent durer des jours et sont généralement résultantes d'un retour à l'équilibre après une période d'activité éruptive. À la Fig. 2.3(3) nous identifions deux boucles visibles en R-X.
4. *Régions Actives* : Ces régions sont caractérisées par d'immenses transformations d'énergie magnétique en énergie cinétique par le phénomène de reconnexion des lignes de champ magnétique. L'énergie libérée ( $10^{22} - 10^{25}$  J) engendre des émissions R-X, contribue au réchauffement extraordinaire de la couronne et permet l'éjection de matière dans le milieu interplanétaire sous forme de vents solaires et d'éjections de masse coronale (CME). Une

région active démontrant un sigmoïde typique fortement lumineux en R-X est montrée à la Fig. 2.3(4).

5. *Protubérance* : Ces structures se composent de plasma dense ( $10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$ ) et froid ( $5 - 10 \times 10^3 \text{ K}$ ) confiné à des surfaces verticales. Ces structures peuvent être associées à une structure post-éruptives de très longue durée mais peuvent aussi devenir instable et éruptives (van Ballegoijen and Martens, 1989). La Fig. 2.4 montre un bel exemple de cette structure.
6. *CME* : Ces phénomènes énergétiques sont extrêmement violents. Ils résultent de la déconnexion d'une structure magnétique complexe expulsée dans le milieu interplanétaire. Ils sont observables en lumière blanche à l'aide d'un coronographe, par exemple à la Fig. 2.5 on voit l'éjection d'une structure sphéroïdale apparemment dans un état fibré complexe, donnant une idée des lignes de champ magnétique. Se propageant dans le milieu interplanétaire, ces nuages magnétiques arrivent à frapper la Terre. Ces événements sont ceux qui génèrent les tempêtes géomagnétiques.

### 2.3 Modèles à force magnétique nulle du champ magnétique coronal

Les boucles coronales peuvent perdurer des jours sans évolution majeure (Aschwanden, 2005a). Ces structures sont donc vraisemblablement en état d'équilibre magnétostatique et il est possible d'établir les contraintes physiques régissant leurs solutions. Considérant un fluide coronal dont la dynamique est dominée par les forces de Lorentz (i.e.  $\beta \ll 1$ ), l'équilibre magnétostatique est décrit par des solutions  $\vec{B}$  satisfaisant à la condition de force magnétique nulle (FFF<sup>2</sup>) (Chandrasekhar and Kendall, 1957; Priest and Smith, 1979) :

$$\vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad (2.13)$$

Ceci implique que tout champ magnétique  $\vec{B}$  en équilibre magnétostatique dans la

---

<sup>2</sup>L'approximation est communément appelée en anglais l'approximation *force-free fields* (FFF).

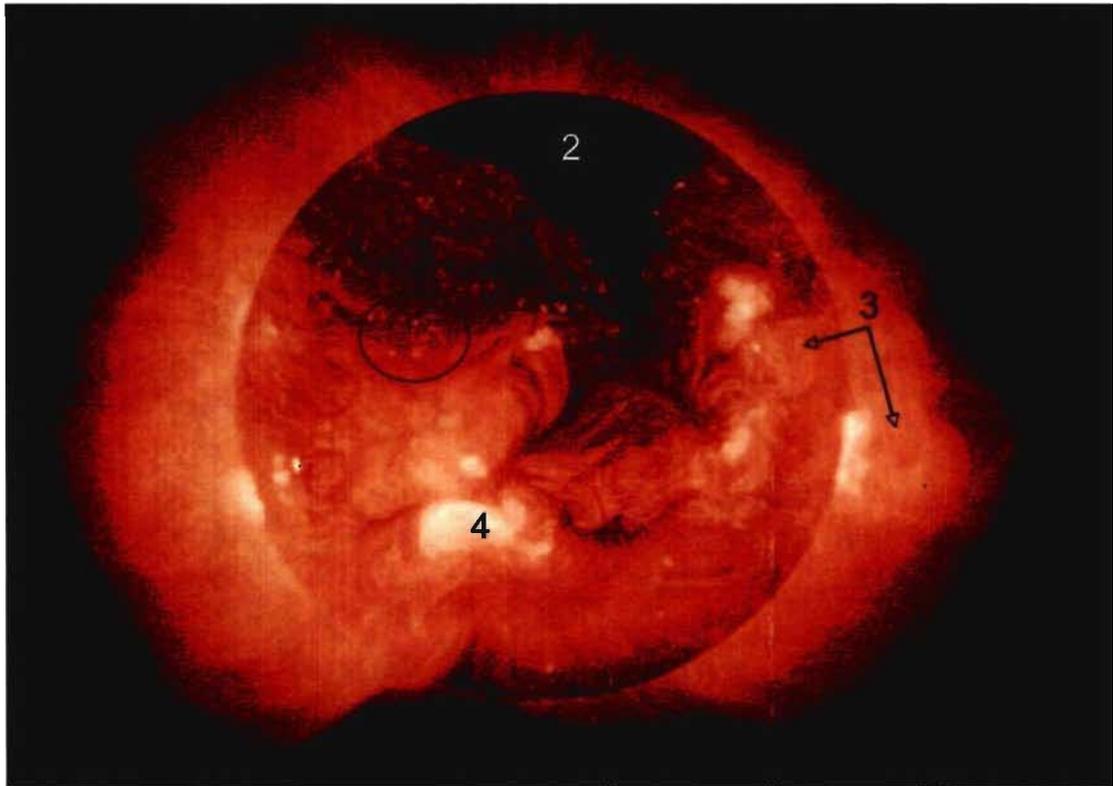


FIG. 2.3 – Une image R-X de la caméra SXT/Yohkoh. On identifie les structures suivantes : Points X (1), Trou coronal (2), Boucles coronales (3), Région active (4).  
URL de SXT/Yohkoh : <http://solar.physics.montana.edu/sxt/>

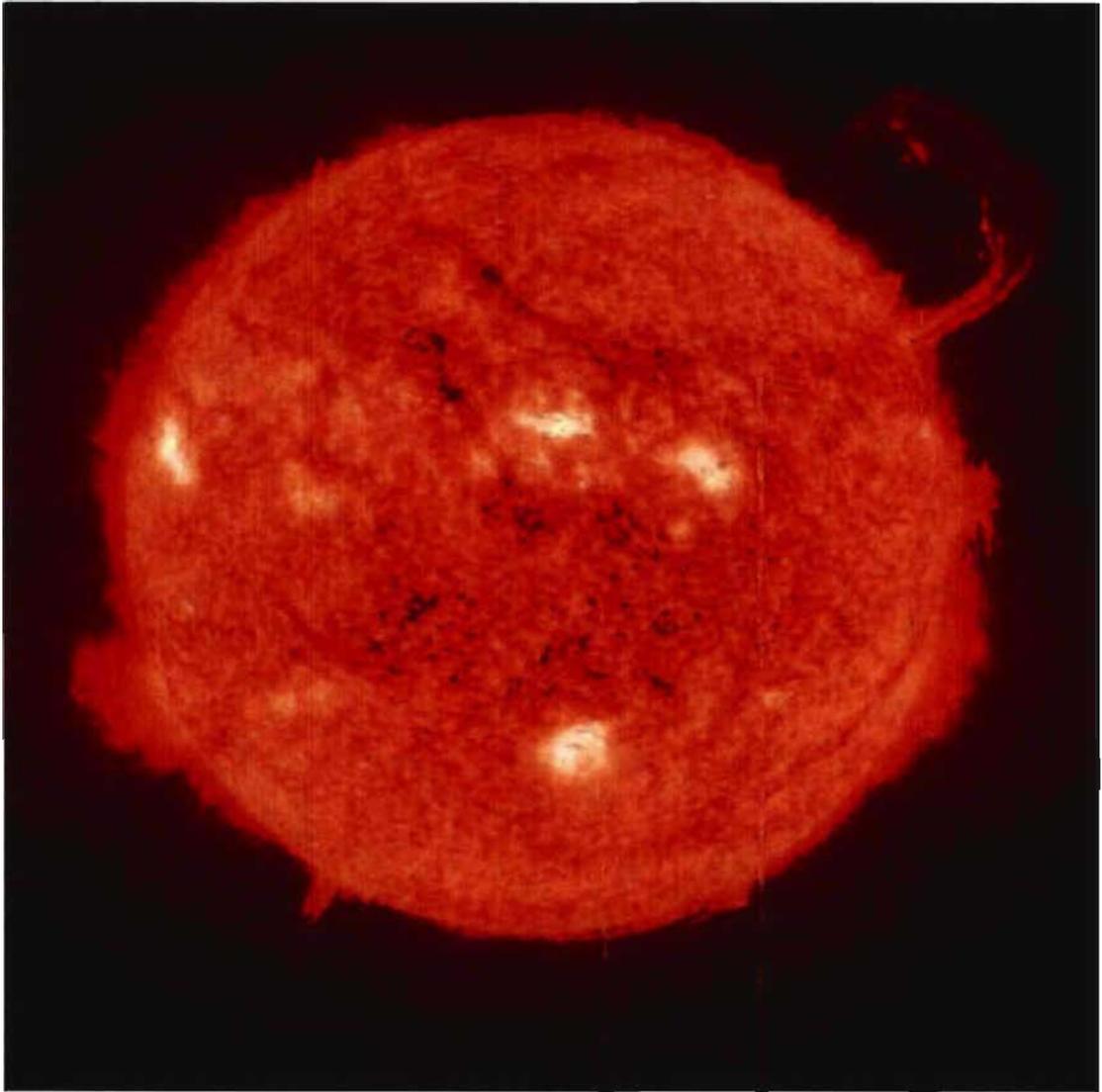


FIG. 2.4 – Cette image est prise par EIT/SoHO dans la bande 304 Å. Dans le quadrant supérieur droit on voit clairement une protubérance. URL de EIT/SoHO : <http://umbra.nascom.nasa.gov/eit/>

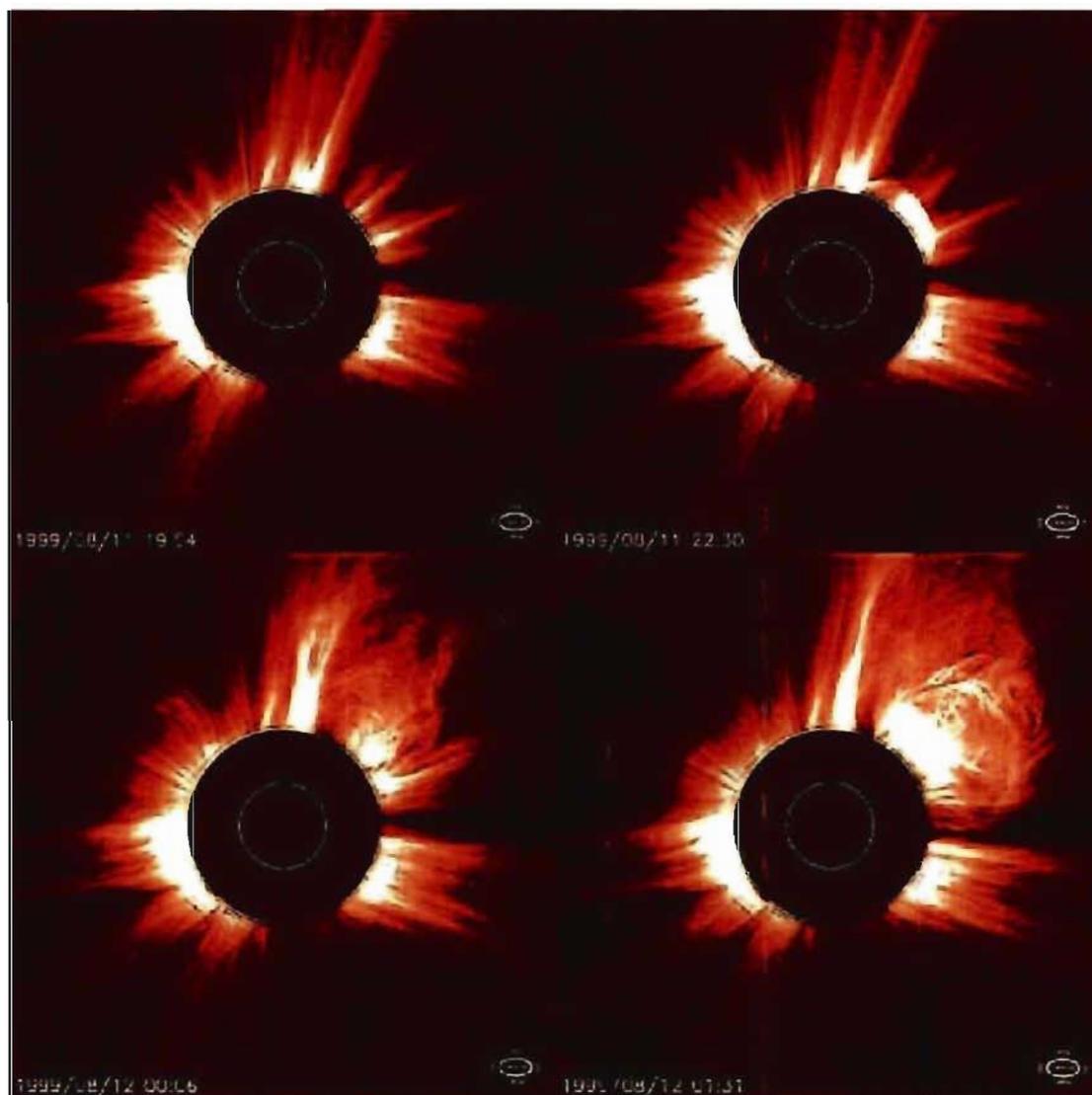


FIG. 2.5 – Une CME observée par le coronographe C2 de LASCO/SoHO. URL de LASCO/SoHO : <http://lasco-www.nrl.navy.mil/>

couronne solaire décrit une densité de courant électrique ( $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}/\mu$ ) qui lui est parallèle en tout point :

$$\mu \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (2.14)$$

où  $\alpha$  est le paramètre FFF du champ. En utilisant le fait que  $\vec{B}$  est sans divergence et la condition FFF, nous réécrivons l'Éq. 2.14 :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \alpha \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha \\ 0 &= \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha \end{aligned}$$

Nous avons donc un système à deux degrés de liberté définissant les solutions magnétostatiques pour le régime  $\beta \ll 1$  :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (2.15)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0 \quad (2.16)$$

Une particularité de l'Éq. 2.16 est qu'elle implique directement que le paramètre  $\alpha$  est toujours constant dans l'espace le long des lignes de champ magnétique. Ceci est intéressant car cela implique que si nous pouvons obtenir une lecture de  $\alpha$  à la photosphère, nous avons en réalité une lecture de  $\alpha$  pour toute ligne de champ magnétique coronale ancrée à la photosphère.

### 2.3.1 Arcades Potentielles (sans courant)

La classe la moins générale de solutions qui satisfont à la condition FFF (Eq. 2.14) se limite aux cas en absence de courant électrique ( $\alpha = 0$ ). Cette hypothèse

réduit les contraintes 2.15 2.16 à :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (2.17)$$

Un champ irrotationnel à divergence nulle est un champ potentiel : il peut s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire (e.g., Semel, 1967). On peut donc écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) = \nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.18)$$

Les champs potentiels sont donc décrits par les solutions harmoniques de l'équation de Laplace.

Bien que l'hypothèse  $\alpha = 0$  est de loin trop restrictive pour adéquatement modéliser les structures statiques observées, les champs potentiels sont utiles car ils possèdent des solutions analytiques simples (e.g., Priest and Smith, 1979). Ces solutions sont donc utiles pour générer des conditions initiales numériques simples. De plus, connaissant les conditions aux frontières par des magnétogrammes, on peut calculer le champ complet très facilement par les méthodes de relaxation (e.g., Press et al., 1992).

### 2.3.2 Condition FFF linéaire (LFFF)

Considérant un cas plus général où  $\alpha$  est non-nul mais constant dans l'espace. Prenant le rotationnel de l'équation  $\vec{J} = \alpha \vec{B}$ , on écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\alpha \vec{B}) &= \alpha (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \alpha^2 \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \\ \Rightarrow -\nabla^2 \vec{B} &= \alpha^2 \vec{B} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les LFFF répondent donc à une équation de type Helmholtz temporellement invariante qui est généralement solutionnée en termes de décomposition spectrale. L'extrapolation tridimensionnelle à partir de conditions aux frontières photosphériques

(au bas de la couronne) est adressée notamment par Gary (1989).

### 2.3.3 FFF non-linéaire (NLFFF)

Les solutions les plus générales de la condition FFF ne font aucune supposition sur le paramètre  $\alpha$  qui peut maintenant être fonction de l'espace. De la même façon que les solutions  $\alpha$  constant, on écrit cette fois :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \quad (2.20)$$

$$\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{B}) = \alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \alpha \times \vec{B} = \alpha^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \alpha \times \vec{B} \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = \vec{B} \times \vec{\nabla} \alpha \quad (2.22)$$

Pour la fermeture du système, on utilise l'Éq. 2.16 :

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0 \quad (2.23)$$

L'extrapolation tridimensionnelle de ces solutions à partir de conditions photosphériques est adressée notamment par Aly (1989).

## 2.4 Modèles à force magnétique non-nulle

La modélisation des processus de libération d'énergie et d'évolution magnétique violents observés notamment dans les zones actives coronales ne peut être accomplie à travers les FFF. En effet, les phénomènes d'intérêts requièrent une représentation physique dynamique du plasma coronal et de son champ magnétique où les forces de Lorentz sont permises et la dissipation magnétique est considérée généralement selon les lois de la magnétohydrodynamique. On considère que les FFF statiques sont les états asymptotiques d'une relaxation MHD à partir d'un état initial perturbé non-FFF. Cette perturbation résulte de l'apparition de structures magnétiques

instables, généralement sous la forme de tubes de flux magnétiques. Plusieurs théories sont proposées pour expliquer l'apparition de ces tubes dans la couronne : l'émergence de tubes par la photosphère provenant de l'intérieur solaire (e.g., Pevtsov et al., 2003), l'entremêlement du champ coronal dû aux mouvements des ancrages magnétiques photosphériques (DeVore and Antiochos, 2000; Chae, 2001), la formation de tube de flux magnétique par reconnexion magnétique résultant d'une concentration de champ magnétique axial à une ligne d'inversion de polarité photosphérique (van Ballegoijen and Martens, 1989), l'interaction entre deux régions actives (Martens and Zwaan, 2001; Lin and van Ballegoijen, 2005), et la relaxation de la couronne vers un état d'énergie minimale sous conservation d'hélicité (Nandy et al., 2003). De plus, une combinaison de ces divers processus est envisageable (Mackay and van Ballegoijen, 2006).

Nous nous intéressons particulièrement aux tubes de flux coronaux apparaissant par émergence photosphérique. La raison de ceci est que la formation des sigmoïdes R-X observés est le résultat direct de ces émergences (Fan and Gibson, 2003). Ces sigmoïdes correspondent très probablement à des sites d'intense dissipation magnétique et de réchauffement coronal dû à une mince couche de forts courants électriques (Titov and Démoulin, 1999). Les zones actives où apparaissent ces sigmoïdes ont statistiquement plus de chances de générer une éruption ou une CME (Canfield et al., 2000). Pour cette raison, plusieurs études ont été entreprises pour comprendre la formation des sigmoïdes à travers la modélisation 3D de tubes de flux coronaux émergés (Fan and Gibson, 2003; Török and Kliem, 2004).

Pour expliquer l'émergence sporadique de ces structures magnétiques instables, il faut considérer le couplage du champ magnétique coronal avec celui de la zone de convection turbulente où se produit le processus de dynamo solaire. En combinant les effets de la rotation différentielle avec la circulation méridionale et en considérant les mouvements turbulents à petite échelle, la dynamo est un générateur auto-entretenu de flux magnétique. La composante toroïdale du champ généré dans la zone convective est la source de flux magnétique pour les tubes de flux.

La régularité cyclique et l'organisation des phénomènes magnétiques coronaux

(e.g. Hale and Nicholson, 1938) suggèrent une structure magnétique sub-photosphérique très organisée et fortement toroïdale et présentant une structure fibrée (Parker, 1979). Ces fibres, ou tubes de flux magnétique, semblent originaires de la base de la photosphère. Ces tubes sont caractérisés minces, i.e. leurs dimensions radiales varient beaucoup moins rapidement que leur dimension en longueur et les quantités physiques ne sont considérées qu'en fonction de la position le long du tube (Fan, 2005). La dynamique de ces tubes est grandement simplifiée en utilisant l'approximation des tubes de flux minces (e.g. Spruit, 1981; Longcope and Klapper, 1997).

La tachocline est la fine couche de plasma à la frontière entre le coeur radiatif en rotation solide et la zone de convection en rotation différentielle (Miesch, 2005). Ce changement brutal dans le profil de rotation fait de cette couche une région de fort cisaillement. La modélisation récente du champ magnétique de la zone de convection démontre qu'un équilibre s'y forme avec l'apparition de minces nappes où le flux magnétique toroïdal est important. Ces nappes permettent une instabilité gravitationnelle où une perturbation s'amplifie et un tube de flux magnétique s'échappe de la tachocline par la force d'Archimède. Fan (2001) a reproduit ce phénomène par la modélisation MHD. Par contre, il est aussi possible que la nappe de flux soit initialement sous la forme de tube, un scénario dont l'instabilité est étudié dans Spruit and van Ballegooijen (1982).

La théorie solaire suggère que les tubes de flux magnétiques à la base de la zone de convection doivent avoir une densité de flux magnétique d'au moins  $B_{eq}$ , un champ minimalement en équipartition avec l'énergie cinétique des mouvements convectifs tel que :

$$\frac{B_{eq}^2}{2\mu} = \frac{\rho v_c^2}{2} \quad (2.24)$$

où  $v_c$  est la vitesse convective. Il en advient une valeur  $B_{eq} \sim 1$  T (Spruit and van Ballegooijen, 1982). De ce résultat, on tire que les tubes de flux sont minces, i.e. leurs dimensions radiales sont beaucoup plus petites que leurs dimensions longitu-

dinales.

Pour parvenir à émerger par la photosphère, les tubes de flux magnétiques doivent perdurer l'ascension à travers l'écoulement turbulent et convectif séparant la tachocline de la surface. En plus de demander un équilibre entre la pression intérieure et extérieure du tube :

$$p_i + \frac{B^2}{2\mu} = p_e \quad (2.25)$$

où  $p_i$  et  $p_e$  sont les pressions thermiques internes et externes, la simulation numérique de Fan et al. (1998) démontre que les tubes de flux requièrent une torsion<sup>3</sup> minimale pour maintenir la cohésion lors de l'ascension convective.

Arrivée à la surface solaire, les tubes de flux émergent dans la couronne subissant un changement extrême de régime physique, passant de la dense zone convective à l'atmosphère raréfiée. De nombreuses simulations MHD ont étudié ce phénomène, notamment les études de Fan and Gibson (2003); Magara and Longcope (2003). Les tubes de flux, maintenant libérés de l'intense pression thermique lors de leurs ascension, prennent de l'expansion. Cette expansion est contrée par les arcades coronales en équilibre situées au-dessus. Dans certains cas, le tube est confiné par le champ environnant mais il a été montré par la simulation numérique que sous certaines conditions, ces tubes peuvent percer les arcades coronales et s'échapper de la couronne (e.g., Fan, 2005).

## 2.5 Activité de la couronne

L'activité solaire est généralement associée aux processus d'éruptions énergétiques. Globalement, la fréquence des éruptions est décrite par (Litvinenko and Wheatland, 2001) :

---

<sup>3</sup>Nous définissons la torsion d'un tube de flux comme étant une mesure du nombre de tours par unité de longueur que font les lignes champs autour de l'axe du tube. Ce terme correspond au terme anglais *twist*.

$$\frac{dW(t)}{dt} = \varepsilon(t) - \lambda_0(t)E_0^{1/2}W(t)^{1/2} \quad (2.26)$$

où la variation de l'énergie magnétique libre de la couronne  $W(t)$  est donnée en fonction du taux d'excitation  $\varepsilon(t)$  et du taux d'éruption  $\lambda_0(t)$ .  $E_0 \approx 10^{20}$  J est l'énergie minimale libérée par une éruption et correspondant à une éruption de classe C1.0<sup>4</sup>.

L'activité décrite par l'Éq. 2.26 prend en considération tous les phénomènes éruptifs de la couronne. Nous nous intéressons dans ce cadre à un événement particulier, l'éruption d'un tube de flux magnétique ancré dans la photosphère.

### 2.5.1 Modèle pour les tubes de flux émergents ancrés dans la photosphère

Lorsqu'un tube de flux magnétique émerge de la photosphère, la chute brutale de pression débalance l'équilibre établi dans la zone de convection et le tube prend de l'expansion par la pression magnétique. Dans ce scénario, cette expansion est contrée par le champ coronal préexistant sous forme d'arcades coronales dont les lignes de champ confinent les tubes de flux. Une fois émergés, les tubes peuvent développer l'instabilité coque MHD qui fait s'enrouler un tube sur lui-même<sup>5</sup>.

Pour expliquer l'instabilité coque, il faut définir l'hélicité magnétique :

$$H = \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{B} d\vec{x} \quad (2.27)$$

où le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  est défini par  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ . L'hélicité magnétique est invariante sous transformation de gauge sur  $\vec{A}$  seulement si  $\vec{B} \cdot \hat{n}$  sur la surface de  $\Omega$ . De plus,  $dH/dt = 0$  pour un système isolée en l'absence de phénomènes de

<sup>4</sup>GOES identifie chaque saut dans le flux R-X total comme une éruption et la classeifie selon un codage alphanumérique.  $B < 10^{-6}$  Wm<sup>2</sup>,  $C = 10^{-6}$  Wm<sup>2</sup>,  $M = 10^{-5}$  Wm<sup>2</sup> et  $X = 10^{-4}$  Wm<sup>2</sup>. Par exemple, une éruption X4.0 correspond à un flux de  $4 \times 10^{-4}$  Wm<sup>2</sup> observé par GOES dans la bande 0.5 – 4.0 Å.

<sup>5</sup>L'instabilité de coque est la traduction de *kink instability* en anglais (e.g. <http://www.websters-online-dictionary.org/>).

dissipation magnétique.

L'hélicité est une mesure de la torsion des lignes de champ et de l'enroulement<sup>6</sup>. Dans le traitement des tubes de flux, Berger and Field (1984) montrent que l'hélicité peut s'écrire pour un tube dont le flux magnétique est  $\Phi$  et faisant  $q$  tours par unité de longueur :

$$H = \Phi^2 (T_w + W_\tau) \quad (2.28)$$

où  $T_w$ , la torsion du tube, est donnée par :

$$T_w \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\vec{r}} q(s) ds \quad (2.29)$$

et  $W_\tau$ , l'enroulement du tube, est donnée par (Berger, 2006) :

$$W_\tau \equiv \frac{1}{4\pi} \oint_{\vec{r}} \oint_{\vec{r}} \frac{\vec{r}(s) - \vec{r}(s')}{\|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')\|^3} \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \times \frac{d\vec{r}(s')}{ds'} ds ds' \quad (2.30)$$

L'axe du tube est paramétré par  $\vec{r} \equiv \vec{r}(s)$  où  $s$  est la coordonnée curviligne.

L'instabilité coque est le processus de transformation de torsion en enroulement, conservant l'hélicité totale. Ce processus est défini comme une transformation Reidemeister de type I, permise dans la théorie des noeuds où la topologie est conservée et qui conserve l'hélicité (Bouzarh and Pfister, 2005).

La configuration finale d'un tube de flux magnétique ayant subi cette transformation présente des endroits où des sections de tube à flux inverses se croisent. À la surface séparatrice d'inversion de polarité entre ces sections se forme une couche de courant électrique intense qui est observée sous la forme des sigmoïdes dans les régions actives. Ce site est favorable à la reconnexion magnétique qui peut propulser une section de tube déconnecté à travers le champ confinant, permettant ainsi une éruption.

---

<sup>6</sup>Nous définissons l'enroulement d'un tube de flux comme mesurant le repliement du tube sur lui-même. Ce terme correspond au terme anglais *writhe*

### 2.5.2 Reconnexion magnétique

La reconnexion magnétique est un changement dans la topologie des lignes de champ qui est décrit par le terme dissipatif dans l'équation de conservation de l'induction de la MHD générale  $-\vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B})$  ( $\eta$  étant la diffusivité magnétique). La reconnexion est généralement considérée comme étant extrêmement locale agissant seulement dans des nappes quasi-bidimensionnelles de courant électrique formées le long des surfaces séparatrices définissant l'inversion de polarité de la densité de flux magnétique, là où les courants électriques deviennent des plus intenses (Aschwanden, 2005a). Actuellement, le modèle physique de la reconnexion magnétique est encore incomplet (Priest and Forbes, 2000). Particulièrement, le système MHD dissipatif n'est pas fermé, en attente d'un modèle général validé pour  $\eta$ , qui dépend localement des variables d'état. Les modèles actuels définissent de façon empirique les régions non-idéales où on considère simplement une dissipation magnétique constante dans le domaine (Priest and Forbes, 2000).

La modélisation de cette dissipation locale a notamment été proposée en deux dimensions par Parker (1957); Sweet (1958) qui décrivent le fameux scénario de reconnexion *Sweet-Parker* où les nappes dissipatives ont une de leurs dimensions spatiales ( $\Delta$ ) beaucoup plus grande que l'autre ( $\delta$ ),  $\Delta \gg \delta$  (voir Fig. 2.6). Un modèle extrêmement étudié jusqu'aujourd'hui particulièrement parce que ce scénario ne permet que des taux de reconnexion trop lents pour être consolidés avec les phénomènes éruptifs rapides de l'activité solaire. Hess (1964) a proposé le scénario de reconnexion *Petschek* pour reproduire les taux rapides de reconnexion attendus. Il souligne que la reconnexion magnétique étant un processus de changement topologique, ne devrait pas se produire le long d'une longue surface de dissipation mais plutôt à l'intérieur d'une très petite surface ( $\Delta \approx \delta$ ). Bien que le scénario *Petschek* reproduit mieux les taux de reconnexion rapides réalistes, le scénario de *Sweet-Parker* semble être favorisé par la simulation MHD à  $\eta$  constant (e.g. Biskamp, 1986). Kulsrud (2001) démontre que dans le cas MHD à  $\eta$  constante, le scénario *Petschek* est incorrect et arrive finalement aux mêmes taux de reconnexion que le scénario

*Sweet-Parker*. Pour expliquer la reconnexion rapide, cet auteur considère l'effet des perturbations dans la résistivité dû aux courants électriques proposant un modèle intéressant pour  $\partial\eta/\partial J$  et retrouvant des taux de reconnexion rapide raisonnables.

Les scénarios tridimensionnels de reconnexion sont aussi nombreux que le nombre de différents phénomènes observables ou spéculés à grande échelle participant à l'activité solaire. Une revue de ces différents scénarios est faite dans Aschwanden (2005a). À la Fig. 2.6, un schéma illustre la reconnexion de deux segments de tube de flux magnétique résultant en un changement dans la topologie des lignes de champ. Ce scénario est souligné vu son apparente application à modéliser la reconnexion d'un tube de flux coronal ayant complété une instabilité coque et formant une sigmoïde sur la séparatrice.

Dans tous les cas, le processus se fait à travers la dissipation magnétique (Ohmique) qui chauffe la couronne directement selon un taux  $Q_\eta = \frac{\eta}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2$  et qui est responsable de l'extraordinaire température coronale. La quantification de la reconnexion magnétique coronale et de la chaleur générée par celle-ci est adressée notamment dans Longcope (2004) pour deux segments de tubes de flux qui reconnected à l'intérieur d'une petite sphère de dissipation. Dans ce cas, le taux de chauffage dépend directement du taux de reconnexion magnétique. Récemment, Ballegoijen and Cranmer (2008) considèrent la contribution au réchauffement coronal due aux changements de topologie par hyperdiffusion magnétique à petite échelle dans les perturbations stochastiques (tressage) des lignes de champ d'un tube de flux magnétique, conservant l'hélicité du champ moyen. Ces auteurs démontrent que ce processus influence les profils de température suffisamment, complexifiant davantage le problème du chauffage de la couronne.

La grande majorité des phénomènes éruptifs liés à l'activité solaire sont attribuables au processus de dissipation magnétique. La libération de cette immense énergie magnétique structurale (reliée à l'hélicité) injectée dans la couronne de l'intérieur solaire sert à l'accélération des particules pour le vent solaire et, plus violemment, les CME.

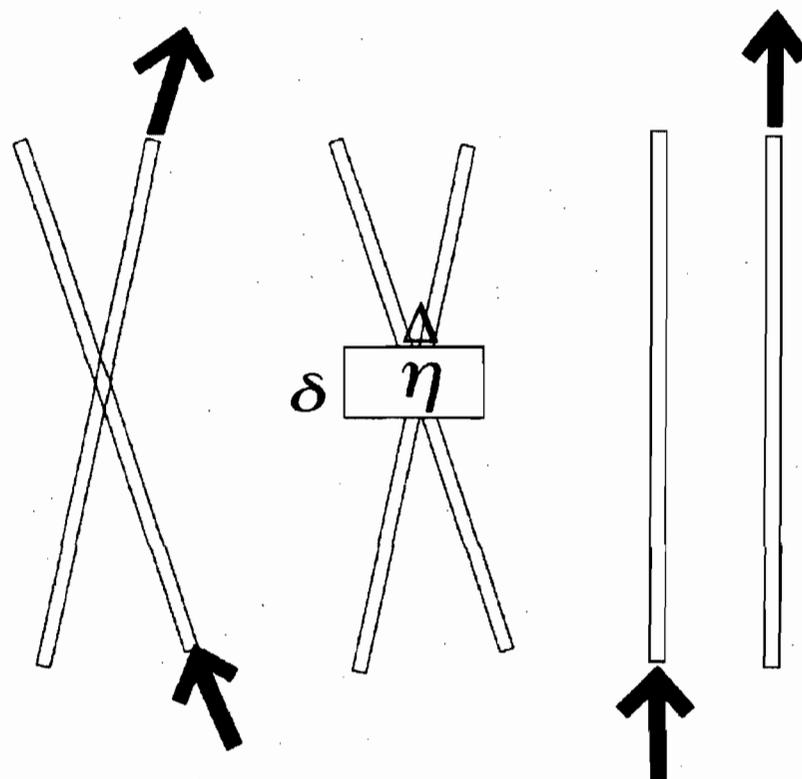


FIG. 2.6 - Changement de topologie par reconnexion de deux segments de tubes de flux magnétique. Les flèches pointent dans la direction du flux. La dissipation agit localement à l'intersection des tubes où il y a inversion de polarité magnétique. La zone de reconnexion dénoté  $\eta$  est de dimensions typiques  $\Delta$  par  $\delta$ .

### 2.5.3 Modèles de CME

Parmi les phénomènes propres à l'activité solaire, les CME sont les plus influents sur l'environnement terrestre. La compréhension des mécanismes initiateurs et leur modélisation serait donc très utile pour la prédiction du temps spatial.

Le premier modèle analytique MHD instationnaire à concorder qualitativement avec l'observation et dont les paramètres libres peuvent être résolus pour différents événements est le modèle de CME *Gibson-Low* pour l'éruption d'un tube de flux magnétique (Gibson and Low, 1998). Ce modèle décrit l'expansion d'une structure magnétique fermée forçant son chemin à travers les lignes de champ ouvertes ancrées au Soleil mais n'aborde pas les procédés qui engendreraient la configuration initiale, ni la reconnexion qui est un précurseur de l'éjection de masse coronale.

Une variété de scénarios et de modèles numériques existe pour l'initiation des CME Aschwanden (2005a). Par contre, la compréhension et la prédiction de CME ne peut être complète sans la compréhension du mécanisme moteur, la reconnexion magnétique. Cependant, à partir des conditions d'éjections d'une CME particulière, les modèles numériques décrivent bien l'évolution de la CME à travers le milieu interplanétaire. Ces modèles physiques sont très importants pour la prédiction des orages géomagnétiques. Particulièrement, déterminer l'orientation du champ magnétique de la CME par rapport à la magnétosphère terrestre est très important pour prédire l'intensité de la tempête. L'implémentation ENLIL du CCMC<sup>7</sup> (développée par CISM) est un exemple qui modélise le vent solaire et l'évolution de CME utilisant les observations. À la Fig. 2.7, un exemple de simulation effectuée par ce modèle.

---

<sup>7</sup>CCMC : Community Coordinated Modeling Center. Le CCMC permet l'utilisation au grand public, par l'entremise de son site internet (<http://ccmc.gsfc.nasa.gov/>), de tous ses modèles héliosphériques.

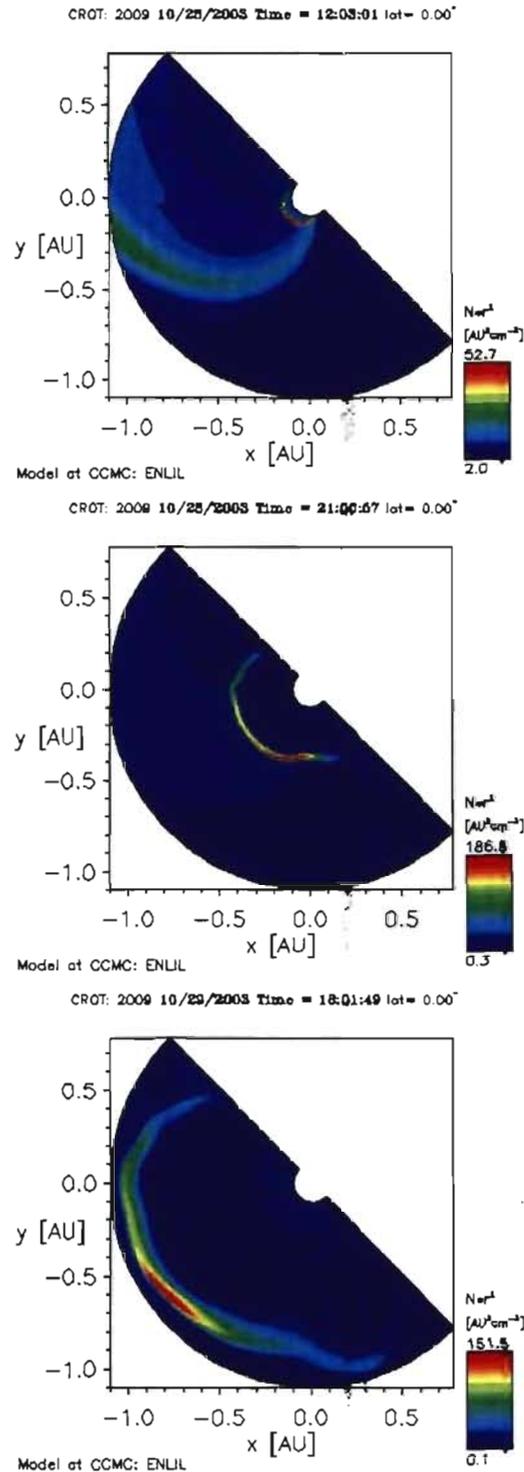


FIG. 2.7 – Simulation numérique d’une CME à partir de la surface solaire jusqu’à environ 1 AU effectuée par le modèle ENLIL du CCMC. Cette simulation a été faite et étudiée dans le cadre d’un laboratoire lors de l’école d’été en héliophysique de LWS-IHY (Living With a Star-International Heliophysics Week) de juillet 2007 suivi par moi-même.

## CHAPITRE 3

### LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE D'UN ARC SOLAIRE

La magnétohydrodynamique (MHD) est une extension de l'hydrodynamique servant à décrire la mécanique d'un fluide conducteur électriquement. Cette considération supplémentaire est nécessaire pour modéliser des fluides aussi variés que les plasmas collisionnels ou les métaux liquides (e.g., Munger, 2004). Particulièrement, les modèles MHD sont fortement utilisés pour modéliser la dynamique du plasma d'hydrogène formant la couronne solaire.

#### 3.1 Les équations de Maxwell

La propriété de conductivité électrique non nulle dans un fluide implique qu'il peut contenir des courants électriques. Par induction, ces courants génèrent et sont générés par un champ magnétique ambiant décrivant un champ électromagnétique devant satisfaire aux équations de Maxwell (1865) :

La loi d'Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.1)$$

La contrainte solénoïdale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

La loi de Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (3.3)$$

La loi de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_e \quad (3.4)$$

où  $\vec{B}$  est la densité de flux magnétique,  $\vec{J}$  est la densité de courant électrique et  $\vec{E}$  est le champ électrique.

### 3.2 Les équations MHD générales

Nous dérivons les équations régissant la dynamique d'un fluide conducteur non-relativiste qui doivent satisfaire aux lois de conservation de l'hydrodynamique et aux équations de Maxwell. Ce fluide est décrit dans un espace de longueur caractéristique  $L_0$  et évolue avec un temps caractéristique  $t_0$ . Les vitesses du fluide sont donc typiquement de l'ordre de  $v_0 = L_0/t_0$ . Nous pouvons donc tirer de la loi de Faraday (Éq. 3.3) :

$$\frac{B_0}{t_0} = \frac{E_0}{L_0}$$

$$B_0 = v_0 E_0$$

Nous procédons de la même manière avec le second terme à droite de l'égalité dans la loi d'Ampère (Éq. 3.1) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| &\sim \frac{1}{c^2} \frac{E_0}{t_0} = \frac{v_0}{c^2} \frac{B_0}{t_0} \\ &\sim \frac{v_0^2}{c^2} \frac{B_0}{L_0} \ll \frac{B_0}{L_0} \sim \|\vec{\nabla} \times \vec{B}\| \end{aligned}$$

Ainsi, dans l'approximation MHD, la loi d'Ampère devient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (3.5)$$

#### 3.2.1 Équation de la conservation de l'induction magnétique

La loi d'Ohm est valide si l'on exclut les phénomènes à hautes fréquences (Schrijver and Siscoe, 2007). Pour des écoulements non-relativistes, on peut écrire :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.6)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique. En combinant la loi d'Ohm 3.6 avec la loi d'Ampère MHD 3.5, on peut écrire :

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Ce qui nous permet de réécrire la loi de Faraday 3.3 :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (3.7)$$

où  $\eta = 1/\mu\sigma$  est la diffusivité magnétique du fluide. Cette dernière équation régit la conservation de l'induction magnétique.

### 3.2.2 Équations du fluide

Considérons un élément de volume infinitésimal dans l'approximation magnétohydrodynamique<sup>1</sup>. La variation de masse dans ce volume est le négatif du flux de masse par sa surface. Cette évidence est décrite par l'équation de la conservation de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.8)$$

La variation de la densité flux magnétique dans ce volume devra respecter la conservation de l'induction magnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad (3.9)$$

Le champ magnétique qu'il contient respecte la contrainte solénoïdale :

---

<sup>1</sup>L'approximation magnétohydrodynamique : Les particules du fluide modélisé doivent être dominées par leurs collisions. Le libre parcours moyen doit être petit par rapport aux longueurs typiques du fluide et la fréquence de collision doit être grande par rapport aux fréquences des mouvements du fluide. De plus, le fluide doit être électriquement neutre. C'est-à-dire, la longueur de Debye des particules doit être petite devant les longueurs typiques du fluide et la fréquence plasma des électrons doit être grande devant les fréquences des mouvements du fluide. Finalement, le champ magnétique doit être suffisamment faible devant le libre parcours moyen des particules (l'effet Hall devient négligeable dans la loi d'Ohm).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.10)$$

Un bilan des forces agissant sur ce volume mène à l'équation de Navier-Stokes MHD décrivant la conservation de la quantité de mouvement. Il s'agit de :

1.  $-\vec{\nabla}p$  : Le gradient de pression.
2.  $\vec{g}$  : La force gravitationnelle.
3.  $\vec{J} \times \vec{B}$  : La force de Lorentz.
4.  $\vec{\nabla} \cdot \tau$  : La force visqueuse.

Nous pouvons donc écrire l'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{g} - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \tau}{\rho} = 0 \quad (3.11)$$

où le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2\rho\nu \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \quad (3.12)$$

est défini à l'aide du tenseur des déformations :

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

La viscosité cinématique  $\nu$  est une mesure de la résistance aux déformations du fluide.

Finalement, la conservation de la densité volumique d'énergie  $e$  est décrite par l'équation suivante :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})e + p\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla}T) - Q_\nu - Q_\eta = 0 \quad (3.14)$$

où  $\kappa$  est la diffusivité thermique. Cette dernière équation considère un fluide non-isotherme avec une conductivité thermique  $\kappa$ . Le taux de chauffage par friction visqueuse est :

$$Q_\nu = \tau_{ij} \Lambda_{ij} \quad (3.15)$$

et par dissipation magnétique :

$$Q_\eta = \frac{\eta}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 \quad (3.16)$$

Pour fermeture, on exprime généralement la pression en fonction de la densité et de l'énergie selon une équation d'état thermodynamique. Dans l'approximation des gaz parfaits, on utilise la relation suivante :

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (3.17)$$

La dynamique des fluides magnétisés est régie par les Éqs. de conservation 3.8, 3.9, 3.11 et 3.14 dans la MHD générale. Les caractéristiques générales des divers régimes physiques sous ces contraintes physiques sont généralement décrites par les nombres sans dimensions qui décrivent les rapports d'importance entre les différents termes en jeu, déterminant l'importance de chacun des effets considérés. Au Tab. 3.1, nous énumérons les nombres sans dimensions d'intérêts qui décrivent un régime simulé particulier modélisé par la MHD générale.

La référence de longueur caractéristique  $L_0 = 0.1R_\odot \approx H_p$  est définie pour simuler un tube de flux magnétique coronal. Les références de densité  $\rho_0$  et de champ magnétique  $B_0$  sont telles que définies au Tab. 2.1. Les écoulements coronaux se composent typiquement de vitesses  $v_0 = 50 - 100 \text{ km s}^{-1}$  (Brekke et al., 1997). Nous prenons cette limite inférieure comme référence et donc le temps caractéristique des écoulements est  $t_0 = L_0/v_0 = 1.39 \times 10^3 \text{ s}$ .

Il est d'usage dans la communauté de définir un temps et une vitesse de référence alternative comme celles caractéristiques à la propagation des ondes d'Alfvén. Ces ondes sont celles qui font propager les perturbations le long des lignes de champ magnétique. La vitesse de ces ondes  $v_A$ , dites d'Alfvén, est donnée par :

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho_0}} \quad (3.18)$$

Nous utilisons comme second temps de référence le temps d'Alfvén  $\tau_A = L_0/v_A$ . Dans ce cas, les nombres sans dimensions qui font intervenir ces quantités d'Alfvén sont dénotées par l'indice  $A$ .

$\beta$	$\beta = 2\mu p_0/B_0^2$	0.069
Mach	$Ma = v_0/c_s$	4.146
	$Ma_A = v_A/c_s$	0.34
Péclet thermique	$Pe = L_0 v_0/\kappa$	$3.77 \times 10^8$
Prandtl thermique	$Pr = \nu/\kappa$	$4.35 \times 10^5$
Prandtl magnétique	$Pm = \nu/\eta$	$1.94 \times 10^9$
Reynolds	$Re = v_0 L_0/\nu$	$8.69 \times 10^2$
	$Re_A = v_A L_0/\nu$	$1.06 \times 10^4$
Reynolds magnétique	$Rm = v_0 L_0/\eta$	$1.68 \times 10^{12}$
Richardson	$Ri = g L_{z0}/v_0^2$	5.19
Strouhal	$Sr = L_0/v_0 t_0$	1
	$Sr_A = L_0/v_A \tau_A$	1

TAB. 3.1 – Résumé des nombres sans dimensions impliqués dans les équations de la MHD générale. Les valeurs calculées correspondent à celles pour une couronne froide (1 MK) telle que définie au Tab. 2.1.

On peut décrire qualitativement les comportements du plasma coronal à partir des nombres sans dimensions du Tab. 3.1.  $\beta \ll 1$  nous rappelle que la dynamique du plasma est dominée par les forces de Lorentz.  $Ma < 1$  indique que les écoulements typiques sont subsoniques.  $Pe \gg 1$  sous-entend que le transport de chaleur se fait presque exclusivement par advection; la diffusion thermique est négligeable.  $Pr \gg 1$  suggèrent que la dissipation visqueuse domine la dissipation magnétique et la diffusion thermique.  $Re$  et  $Re_A \gg 1$  déterminent que la dissipation visqueuse est aussi négligeable devant le transport advectif. De même  $Rm \gg 1$  décrivent une dissipation magnétique négligeable devant le transport advectif. Ainsi, tous les processus de dissipation sont négligeables devant les transports advectifs.  $Ri > 0.25$  implique que la stratification de  $\rho$  et les forces gravitationnelles qu'elle engendre est

faible sur les échelles spatiales considérées. La force de gravité est donc négligeable devant les autres forces.

### 3.2.3 Le théorème d'Alfvén

L'approximation MHD idéale est basée sur l'hypothèse  $Rm \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, le champ magnétique est non dissipatif et l'équation de conservation de l'induction magnétique se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.19)$$

Considérons, une boucle  $S$  définissant une aire  $A$  en mouvement avec un fluide MHD idéal de sorte que ses mouvements infinitésimaux sont  $S(t + \delta t) = S(t) + \vec{v}\delta t$ . Le flux magnétique qui traverse  $A$  est :

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (3.20)$$

Si  $d\vec{s}$  est un vecteur infinitésimal partout tangent à  $S$ , les surfaces  $-\int_{A(t)} d\vec{a}$ ,  $\int_{A(t+\delta t)} d\vec{a}$  et  $\int_S d\vec{S} \times \vec{v}\delta t$  forment une surface fermée  $A_f$  dans la mesure où  $\delta t$  est infinitésimale. Comme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , on sait que :

$$\int_{A_f} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.21)$$

et il s'en suit que :

$$\begin{aligned} - \int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{a} + \int_{A(t+\delta t)} \vec{B}(t + \delta t) \cdot d\vec{a} &= -\delta t \int_S \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) \\ &= -\delta t \int_S (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

La variation dans le temps de  $\Phi$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{A(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{a} - \int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{a} \right\} \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{A(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{a} - \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{a} \right\} \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_{A(t+\delta t)} [\vec{B}(t+\delta t) - \vec{B}(t+\delta t)] \cdot d\vec{a} \right. \\
&\quad \left. - \int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{a} + \int_{A(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{a} \right\} \\
&= \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} - \int_S (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \\
&= \int_A \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{a} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat prouve le théorème d'Alfvén qui décrit la propriété des champs magnétiques gelés dans le plasma en MHD idéale (Alfvén, 1950). Comme le flux traversant une surface en mouvement avec le fluide est constant, les lignes du champ magnétique doivent suivre les écoulements qui lui sont perpendiculaires, tandis que les mouvements parallèles sont sans effets.

### 3.3 Approximation MHD idéale isotherme

L'approximation isotherme simplifie grandement le système MHD idéal. Pour cette raison, il est utile de l'utiliser pour modéliser les systèmes dans lesquelles cette approximation est valide. Pour la modélisation des zones actives par exemple, cette approximation ne tient évidemment pas (en fait la MHD idéale y tient déjà mal). Cependant, les structures statiques telles les boucles coronales les plus simples tiennent à l'approximation isotherme observationnellement (Aschwanden, 2005b), de même théoriquement pour une simple boucle uniforme non-chauffante. Dans ce cas, la conservation du flux le long des boucles suggère l'isothermalité des boucles simples pour la couronne statique (Aschwanden, 2005a). Il est donc raisonnable de

faire l'approximation isotherme pour simuler l'évolution d'un unique arc coronal pré-éruptif.

Dans ce travail, nous avons donc opté pour une représentation MHD idéale isotherme. La diffusion magnétique est omise dans la conservation de l'induction magnétique. Nous omettons la force gravitationnelle dans la conservation de la quantité de mouvement puisque nous avons établi que cette force est négligeable sur les échelles spatiales considérées. De plus, comme le plasma coronal est caractérisé par des écoulements à très faible  $Ma$ , la force visqueuse peut être approximée par  $\nu \nabla^2 \vec{v}$ . Suivant Fan (2003), nous avons utilisé une équation d'état simplifiée  $p = c_s^2 \rho$ , avec la vitesse du son  $c_s$ , pour relier la pression à la densité, nous donnant le système :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{(\vec{J} \times \vec{B})}{\rho} - \nu \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3.25)$$

Dans ce cas, nous avons grandement simplifié la physique en jeu comparativement au modèle MHD général. Le régime simulé se quantifie à l'aide des nombres sans dimensions  $Ma_A$  et  $Re_A$  seulement. Avec  $Ma_A \sim 4$  et  $Re_A \sim 1 \times 10^4$  pour la couronne solaire, on a un régime physique très peu visqueux où les gradients de pressions sont faibles devant les forces magnétiques.

## CHAPITRE 4

### SIMULATIONS NUMÉRIQUES D'UN ARC SOLAIRE EN MHD IDÉALE

Dans ce chapitre nous présentons les implémentations numériques que nous avons développé pour la modélisation de la basse couronne. Dans tous les cas, le domaine spatial  $\Omega$  est une boîte cartésienne de dimensions  $L_x \times L_y \times L_z = 2.5L_0 \times 2.5L_0 \times 1.2L_0$  sur laquelle sont également répartis les  $n_x \times n_y \times n_z = 64 \times 64 \times 64$  points de grille de résolution numérique. Nous avons pris  $L_0 = H_p$ , ne considérant que la basse couronne et les dimensions des petites structures magnétiques coronales. La résolution étant relativement basse, nos simulations sont rapides ce qui favorise l'exploration de la méthode d'assimilation des données à travers une multitude de paramètres. Par contre, la plage simulable des paramètres physiques est trop faible. Particulièrement, à basse résolution le nombre de Reynolds simulable est beaucoup plus petit que celui de la couronne.

#### 4.1 Algorithme pour générer les arcades (champ potentiel)

Nous avons montré à la §2.3.1 que les champs magnétiques de la couronne dans l'approximation des arcades potentielles ( $\alpha = 0$ ) s'écrivent comme le gradient d'un champ scalaire solution de l'équation de Laplace :

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\Psi \quad (4.1)$$

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (4.2)$$

Le potentiel peut être résolu numériquement utilisant la méthode de Jacobi, ou de relaxation, qui s'applique pour résoudre une équation différentielle du type :

$$\Gamma(\Psi) = \rho \quad (4.3)$$

où  $\Gamma$  est un opérateur elliptique et où les conditions aux frontières sur  $\Psi$  sont connues. La méthode considère que la solution à l'équilibre est atteinte par un processus de diffusion. Ceci est possible en imposant les conditions aux frontières sachant que l'équilibre de la diffusion est défini par celles-ci. On écrit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Gamma'(t, \Psi) - \rho \quad (4.4)$$

$$\Gamma(\Psi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma'(t, \Psi) \quad (4.5)$$

Donc en imposant une condition initiale  $\Psi(t = 0)$  arbitraire et en intégrant l'Éq. 4.4 jusqu'à atteindre une solution stationnaire, on s'assure d'obtenir la solution correspondante aux conditions aux frontières imposées.

Reste à définir les conditions aux frontières du problème. En réalité, on ne peut mesurer directement le potentiel  $\Psi$ , mais seulement son gradient via les magnétogrammes observationnels. Supposant qu'à la surface solaire le champ magnétique est normal, nous imposons  $B_n$  à la surface inférieure du domaine par une condition à la frontière de Newmann. Vu la structure fermée des boucles, une condition semblable est imposée à la surface supérieure, cette fois avec un champ normal nul. Les frontières horizontales restantes sont imposées périodiques.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} &= B_n(x, y) & \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=L_z} &= 0 \\ \Psi(x=0) &= \Psi(x=L_x) & \Psi(y=0) &= \Psi(y=L_y) \end{aligned}$$

Pour imposer une condition frontière de Newmann, nous exploitons la nature finie de l'algorithme pour exprimer la frontière de  $\Psi$  en  $z$  à partir des points voisins. Écrivons la dérivée à imposer en différence finies :

$$B_n = \left. \frac{\partial \Psi_m}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\Delta z} \left( -\frac{3}{2} \Psi_0 + 2\Psi_1 - \frac{1}{2} \Psi_2 \right) \quad (4.6)$$

En isolant la frontière  $\Psi_0$ , on impose la frontière inférieure suivante :

$$\Psi_0 = \frac{1}{3} (-2B_n \Delta z + 4\Psi_1 - \Psi_2) \quad (4.7)$$

Nous procédons de façon similaire pour la frontière supérieure.

Nous nous sommes intéressés à calculer les arcades potentielles complètes à partir de deux modèles de magnétogrammes synthétiques. Le premier est tiré de Fan and Gibson (2003) où une arcade potentielle périodique est utilisée comme condition initiale dans une simulation d'émergence de tube flux magnétique dans le domaine. L'arcade est périodique dans la direction  $x$  et est définie par la condition à la frontière  $B_n$  suivante :

$$B_n = \begin{cases} B_0 & y < y_+ \\ B_0 e^{-\frac{(y-y_+)^4}{w^4}} & y_+ < y < y_+ + 2w \\ 0 & y_+ + 2w < y < y_- - 2w \\ -B_0 e^{-\frac{(y-y_+)^4}{w^4}} & y_- - 2w < y < y_- \\ -B_0 & y_- < y \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $y_+ = -0.4L_0$ ,  $y_- = 0.4L_0$  et  $w = 0.05L_0$ . La condition à la frontière ainsi définie est illustrée au premier panneau de la Fig. 4.1. Le deuxième magnétogramme synthétique utilisé correspond mieux à un dipôle photosphérique où les deux polarités sont de forme arrondies ; la solution dans ce cas décrit deux cercles opposés de flux magnétiques contraires définis par :

$$B_n = -B_0 e^{-(r_-/r_0)^2} + B_0 e^{-(r_+/r_0)^2} \quad (4.9)$$

où  $r_+ = \sqrt{x^2 + (y - y_+)^2}$  et  $r_- = \sqrt{x^2 + (y - y_-)^2}$  sont les distances entre un point du plan et les deux centres des cercles de flux positifs et négatifs. Le rayon des cercles est  $r_0 = 0.25L_0$  et les positions  $y$  de leurs centres sont  $y_+ = -0.4L_0$  et  $y_- = 0.4L_0$ . Cette frontière est illustrée au deuxième panneau de la Fig. 4.1.

Considérant un  $B_n$  donné, notre implémentation de la méthode de relaxation, avec  $\Gamma = \nabla^2$  et  $\rho = 0$ , itère le schéma suivant :

$$\Psi_{j,l,m}^{n+1} = \Psi_{j,l,m}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\Psi_{j+1,l,m}^n + \Psi_{j-1,l,m}^n + \Psi_{j,l+1,m}^n + \Psi_{j,l-1,m}^n + \Psi_{j,l,m+1}^n + \Psi_{j,l,m-1}^n - 5\Psi_{j,l,m}^n) \quad (4.10)$$

À partir de ce schéma numérique nous résolvons les arcades potentielles décrites par les conditions à la frontière des Éqs. 4.8 et 4.9. Les champs ainsi calculés sont montrés à la Fig. 4.2.

## 4.2 Algorithme spectral pour la simulation des équations MHD

Nous avons opté pour une approche spectrale (Gottlieb and Orszag, 1977) pour solutionner notre système d'évolution physique. La principale motivation pour cette approche est la rapidité du calcul et la simplicité des opérateurs différentiels implémentés. Le principe repose sur la décomposition des champs physiques en jeu en composantes modales. Le calcul des opérateurs linéaires est alors aisé tandis que celui des opérateurs non-linéaires implique un produit de convolution qui se fait par transformée de Fourier. L'avancement temporel est calculé par différences finies.

La décomposition des champs se fait selon les bases suivantes : horizontalement les champs sont périodiques et sont décomposés selon leurs composantes de Fourier selon :

$$f(x, y, z, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{f}_{\vec{k}}(t) e^{i(k_x x + k_y y)} \times \begin{cases} \sin(k_z z) \\ \cos(k_z z) \end{cases} \quad (4.11)$$

où les  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  sont les vecteurs d'onde. Verticalement les champs sont décomposés en séries de sinus ou de cosinus<sup>1</sup>. Le choix des bases verticales de chacun des champs est déterminée par la compatibilité avec les équations MHD.

<sup>1</sup>La décomposition verticale des champs physiques se fait en séries de sin ou de cos. Les bases utilisées pour chaque champ sont :  $\rho$  : sin,  $\vec{B}$  : (cos, cos, sin),  $\vec{v}$  : (cos, cos, sin)

Ceci permet un calcul très rapide des opérateurs différentiels dont le calcul se réduit à une multiplication, réduisant les accès mémoires et les opérations numériques. Par contre, vu la présence d'opérations non-linéaires dans les termes des équations de la MHD, il s'ajoute un temps de calcul numérique pour calculer les transformations de Fourier requises<sup>2</sup>.

#### 4.2.1 Conditions initiales

La condition initiale sur  $\vec{B}$  est celle donnée par Fan and Gibson (2003) pour un tube de flux magnétique  $\vec{B}_{\text{tube}}$ . Construit comme la moitié supérieure d'un tore de flux magnétique tordu. Pour un tube de rayon  $a$  en forme de tore de rayon  $R$ , on a :

$$\vec{B}_{\text{tube}} = \vec{\nabla} \times \left[ \frac{A(r, \theta)}{r \sin \theta} \hat{\psi} \right] + B_{\Psi}(r, \theta) \hat{\psi} \quad (4.12)$$

$$A(r, \theta) = \frac{qa^2 B_t}{2} \exp \left[ - \frac{\varpi^2(r, \theta)}{a^2} \right] \quad (4.13)$$

$$B_{\phi}(r, \theta) = \frac{a B_t}{r \sin \theta} \exp \left[ - \frac{\varpi^2(r, \theta)}{a^2} \right] \quad (4.14)$$

Ce champ est illustré à la Fig. 4.3 où est décrit le référentiel utilisé. La fonction  $\varpi$  est la distance d'un point au rayon du tube. En écrivant  $\vec{\varpi} = \vec{r} - \vec{R}$  on montre facilement que  $\varpi(r, \theta) = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta}$ . La torsion du tube est paramétrée par  $q$ .

Avec les composantes verticales des champs ( $B_x, B_y, B_z$ ) en bases de (cos, cos, sin), le terme  $B_z$  doit s'annuler près des frontières inférieures et supérieures. Ceci rend impossible l'imposition de conditions aux frontières au bas du domaine incluant l'ancrage ( $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad \forall(x, y, z = 0)$ ). Nous devons donc utiliser une frontière interne pour fixer les pieds du tube.

---

<sup>2</sup>Nous utilisons l'algorithme de transformation de Fourier rapide et son inverse développé par C. Temperton (Temperton, 1992). <http://www.fftw.org/bench/fft/ffts.html>

### 4.2.2 Projection dans un espace à divergence nulle

La contrainte solénoïdale s'écrit pour chaque composante spectrale linéairement indépendante  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_k = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ . Pour assurer le respect de cette contrainte tout au long d'une simulation où pour corriger une condition initiale, il a été utile d'implémenter un projecteur spectral sur l'espace des solutions à divergence nulle. Dans l'espace spectral, la divergence est un calcul vectoriel, de même pour la construction du projecteur. Nous cherchons à soustraire à la composante spectrale  $\vec{B}_k$  sa composante vectorielle parallèle au vecteur  $\vec{k}$  correspondant. Ainsi le champ corrigé  $\vec{B}'_k$  s'écrit :

$$\vec{B}'_k = \vec{B}_k - \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{B}_k}{k^2} \right) \vec{k} \quad (4.15)$$

Les premières versions de notre implémentation MHD utilisaient cet opérateur mais nous avons trouvé que les erreurs sur  $\vec{B}$  étaient encore trop importantes après une itération de la méthode numérique. On le montre à la Fig. 4.4.

### 4.2.3 Biot et Savart dans les bases spectrales

Pour assurer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  sans l'usage du projecteur de l'Éq. 4.15, nous remplaçons notre équation de conservation de l'induction magnétique (Éq. 3.24) par la conservation du potentiel vecteur magnétique :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (4.16)$$

où  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ . Donc en calculant les  $\vec{A}(t)$ , nous assurons la contrainte solénoïdale par construction à chaque itération si le potentiel vecteur initial est connu. Ceci est possible à l'aide d'un l'opérateur  $(\vec{\nabla} \times)^{-1}$  spectral. En écrivant le rotationnel de  $\vec{A}$  dans l'espace spectral :

$$i\vec{k} \times \vec{A}_k = \vec{B}_k \quad (4.17)$$

on peut résoudre les composantes de  $\vec{A}_k$  directement. Ceci est un avantage de la

méthode spectrale.

#### 4.2.4 Avance temporelle

Nous intégrons dans le temps une équation de la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F(\psi) \quad (4.18)$$

où  $F$  est un opérateur arbitraire. Nous discrétisons la dérivé temporelle comme :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_t = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.19)$$

ce qui nous donne le schéma temporel saute-mouton<sup>3</sup> d'ordre 2 qui conserve l'« énergie » :

$$\psi(t + \Delta t) = \psi(t - \Delta t) + 2\Delta t F(\psi(t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.20)$$

Ce schéma est centré sur  $t$  et requiert que les champs indépendants soient enregistrés pour deux temps. De plus, il découple les quantités  $\psi(t)$  et  $\psi(t + \Delta t)$ . Ceci amène la formation d'oscillations temporelles de période  $2\Delta t$  entre les itérations paires et impaires dues à l'accumulation des erreurs de troncature. Ces ondes artificielles déstabilisent fortement le schéma. Un filtre de lissage est donc nécessaire pour atténuer ces modes numériques sans changer la physique.

Nous avons linéarisé  $\psi(t)$  entre  $\psi(t - \Delta t)$  et  $\psi(t + \Delta t)$  nous donnant le champ corrigé  $\psi'(t)$  selon :

$$\psi'(t) = \frac{1}{2} (\psi(t - \Delta t) + \psi(t + \Delta t)) \quad (4.21)$$

Cette correction, dont on peut montrer qu'elle n'affecte pas l'ordre ou la précision du schéma, est appliquée toutes les 23 itérations. Nous avons aussi implémenté un filtre saute-mouton Robert-Asselin (Robert, 1966; Asselin, 1972) :

---

<sup>3</sup>En anglais : *leap-frog*

$$\psi'(t) = \psi(t) + \Delta t_{\text{R-A}} (\psi(t + \Delta t) - 2\psi(t) + \psi(t - \Delta t)) \quad (4.22)$$

Ce second filtre atténue l'amplitude du mode numérique d'un facteur  $1 - 4\Delta t_{\text{R-A}}$  à chaque utilisation. Notons que ces filtres ne sont pas utilisés conjointement. D'ailleurs les simulations sont stables avec le filtre de l'Éq. 4.21.

#### 4.2.4.1 Changement de variable pour résoudre exactement les forces visqueuses

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'espace spectral s'écrit pour une composante  $\vec{v}_k$  (on écrit l'indice  $k$  pour  $\vec{k}$  afin de clarifier la notation) :

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} = \left( (\vec{v} \times \vec{w}) - \frac{\vec{\nabla} v^2}{2} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{1}{\rho\mu} (\vec{J} \times \vec{B}) + \nu \nabla^2 \vec{v} \right)_k \quad (4.23)$$

Nous portons notre attention sur le terme de diffusion visqueuse, générateur d'instabilités de type exponentielle (Canuto et al., 1988), et allons regrouper tous les autres termes à droite de l'égalité dans une nouvelle variable  $\vec{\zeta}_k$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} &= \vec{\zeta}_k - \nu \nabla^2 \vec{v}_k \\ &= \vec{\zeta}_k - \nu k^2 \vec{v}_k \end{aligned} \quad (4.24)$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$\vec{v}_k = \vec{u}_k e^{-\nu k^2 t} \quad (4.25)$$

Ce qui donne dans l'Éq. 4.24 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_k e^{-\nu k^2 t} = \vec{\zeta}_k - \nu k^2 \vec{u}_k e^{-\nu k^2 t} \quad (4.26)$$

$$-\nu k^2 \vec{u}_k e^{\nu k^2 t} + e^{-\nu k^2 t} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_k = \vec{\zeta}_k - \nu k^2 \vec{u}_k e^{-\nu k^2 t} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = \vec{\zeta}_k e^{\nu k^2 t} \quad (4.28)$$

Cette dernière équation nous donne dans notre discrétisation saute-mouton :

$$\frac{\vec{u}_k^{n+1} - \vec{u}_k^{n-1}}{2\Delta t} = \vec{\zeta}_k e^{\nu k^2 t} \quad (4.29)$$

et en terme de  $\vec{v}_k$  :

$$\vec{v}_k^{n+1} e^{\nu k^2 (t+\Delta t)} = \vec{v}_k^{n-1} e^{\nu k^2 (t-\Delta t)} + 2\Delta t \vec{\zeta}_k e^{\nu k^2 t} \quad (4.30)$$

$$\vec{v}_k^{n+1} e^{\nu k^2 \Delta t} = \vec{v}_k^{n-1} e^{-\nu k^2 \Delta t} + 2\Delta t \vec{\zeta}_k \quad (4.31)$$

$$\vec{v}_k^{n+1} = \vec{v}_k^{n-1} e^{-2\nu k^2 \Delta t} + 2\Delta t \vec{\zeta}_k e^{-\nu k^2 \Delta t} \quad (4.32)$$

Ce schéma nous permet d'intégrer l'équation de la quantité de mouvement dans l'espace spectral sans accumuler l'erreur numérique d'un terme linéaire instable comme la force visqueuse.

#### 4.2.5 Troncature anti-repliement

L'effet de repliement est un problème relatif au traitement spectral des termes non-linéaires où un signal physique est sous-échantionné. Si le signal est échantionné à un intervalle  $\Delta$ , on définit la fréquence critique de Nyquist :

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} \quad (4.33)$$

où  $\Delta$  correspond à l'intervalle entre les échantillons. Pour calculer les composantes modales, il faut faire un produit de convolution. En pratique, on utilise des trans-

formés de Fourier. Les modes supérieurs à  $f_c$  sont ambigus par rapport aux modes inférieurs et leurs puissances sont redistribuées parmi les modes inférieurs par l'effet de repliement (Canuto et al., 1988). Ce phénomène est illustré à la Fig. 4.5.

Pour compenser cet effet, il est nécessaire de tronquer les modes élevées des champs à chaque itération numérique. La règle généralement adoptée pour cette troncature est de supprimer les modes de nombre d'onde supérieurs à  $2/3$  du nombre d'onde maximal de la discrétisation.

#### 4.2.6 Simulations

Nous avons simulé l'évolution MHD idéale d'un tube de flux magnétique subissant l'instabilité de torsion décrit à la §2.5.1. Le régime simulé est décrit par les paramètres de simulation énumérés au Tab. 4.1. La différence entre le régime coronal et celui simulé, décrit par les nombres sans dimensions  $Ma_A$  et  $Re_A$  relativement bas, est dû aux limitations numériques associées à la basse résolution utilisée. On note qu'en doublant la résolution, le  $Re_A$  simulable double pour notre implémentation.

$L_0$	$6.95 \times 10^7$ m
$B_0$	$1 \times 10^{-3}$ T
$\rho_0$	$2.13 \times 10^{12}$ kg m <sup>-3</sup>
$v_A$	$6.12 \times 10^5$ m s <sup>-1</sup>
$\tau_A$	$1.13 \times 10^2$ s
$Ma_A$	3
$Re_A$	40

TAB. 4.1 – Valeurs de références caractéristiques du régime physique simulé numériquement.

À la Fig. 4.6, on montre l'évolution des lignes de champ magnétique pour la simulation. On y voit clairement la transformation de la torsion initiale en en-

roulement final. Les temps indiqués sont en unité de  $\tau_A$  et donc l'évolution totale correspond à environ 19 minutes. À la Fig. 4.7 nous comparons l'évolution de notre tube de flux avec une telle évolution observée dans la couronne par TRACE. Une série de boucles coronales forment l'arcade initiale. L'équilibre est perturbé par l'apparition d'un tube de flux magnétique tordu. Ce tube se tord en subissant l'instabilité coque et pousse contre les lignes de champ initiales. Dans ce cas, l'éruption du tube de flux est confiné par le champ environnant et aucun plasma n'est éjecté (Török and Kliem, 2004). Le tube de flux coronal évolue semblablement à celui simulé, et ce en un temps comparable soit environ 15 minutes.

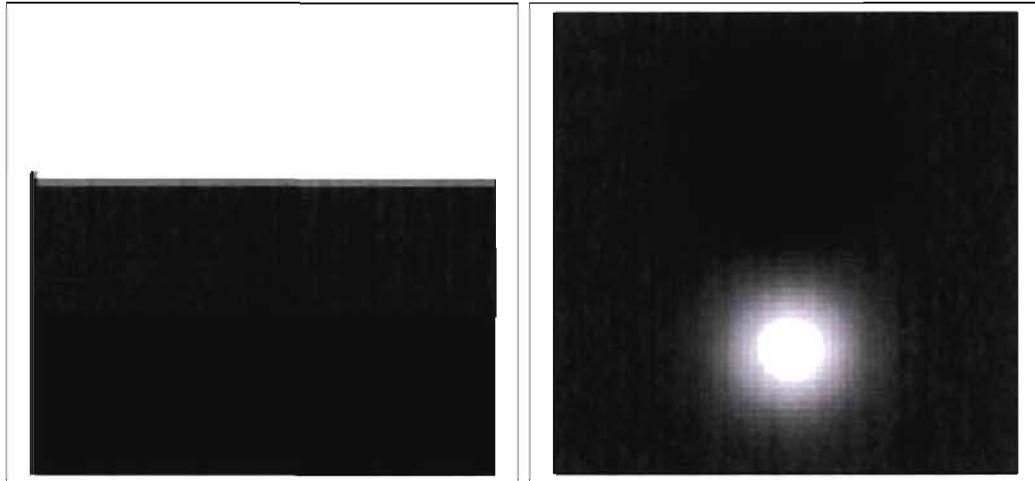


FIG. 4.1 – Magnétogrammes synthétiques utilisés pour la génération d'arcades potentielles. Celui de gauche selon l'arcade périodique (Éq. 4.8), celle de droite selon l'arcade circulaire (Éq. 4.9). Les arcades potentielles tridimensionnelles calculées sont illustrées à la Fig. 4.2

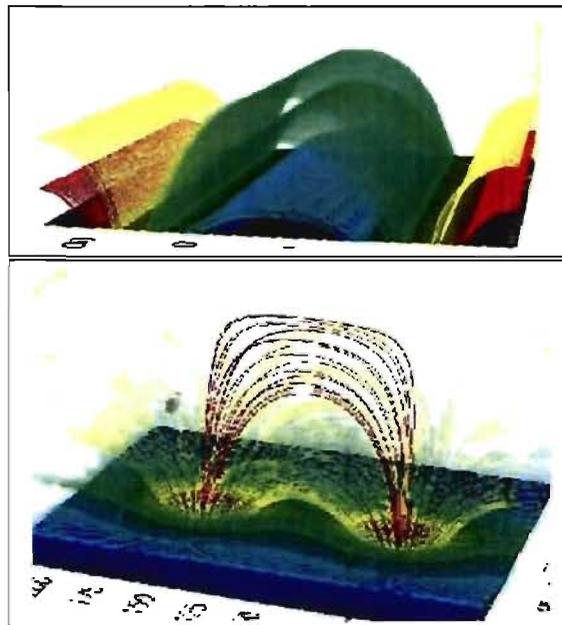


FIG. 4.2 – Arcades potentielles calculées correspondantes aux magnétogrammes de la Fig. 4.1.

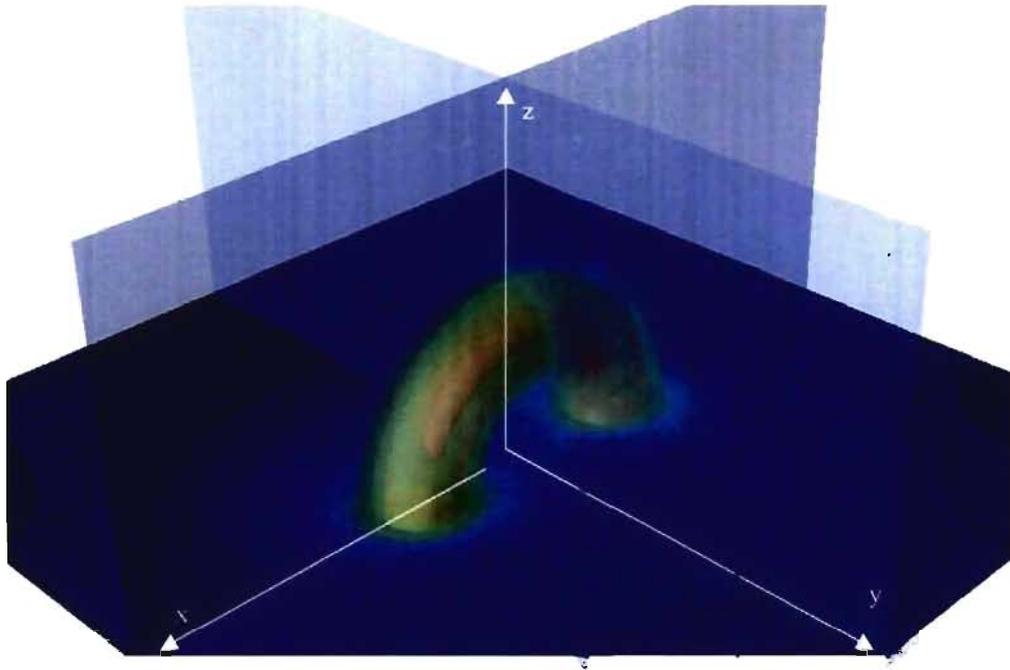


FIG. 4.3 – On montre ici quelques isosurfaces de  $\vec{B}_{\text{tube}}$  avec la définition des axes du référentiel cartésien utilisé. Le référentiel sphérique utilisé dans la définition de  $\vec{B}_{\text{tube}}$  utilise un axe polaire équivalent à l'axe  $y$ . Selon cet axe, on utilise un angle polaire et un angle azimutal en plus du rayon sphérique pour définir tout point  $(x, y, z)$ . Le rayon du tore  $R$  définit l'axe du tube à  $r = R$  et la distance entre le point et l'axe du tube est  $\varpi$ , par exemple :  $\varpi = 0 \forall (r, \theta) = (R, \pi/2)$ .

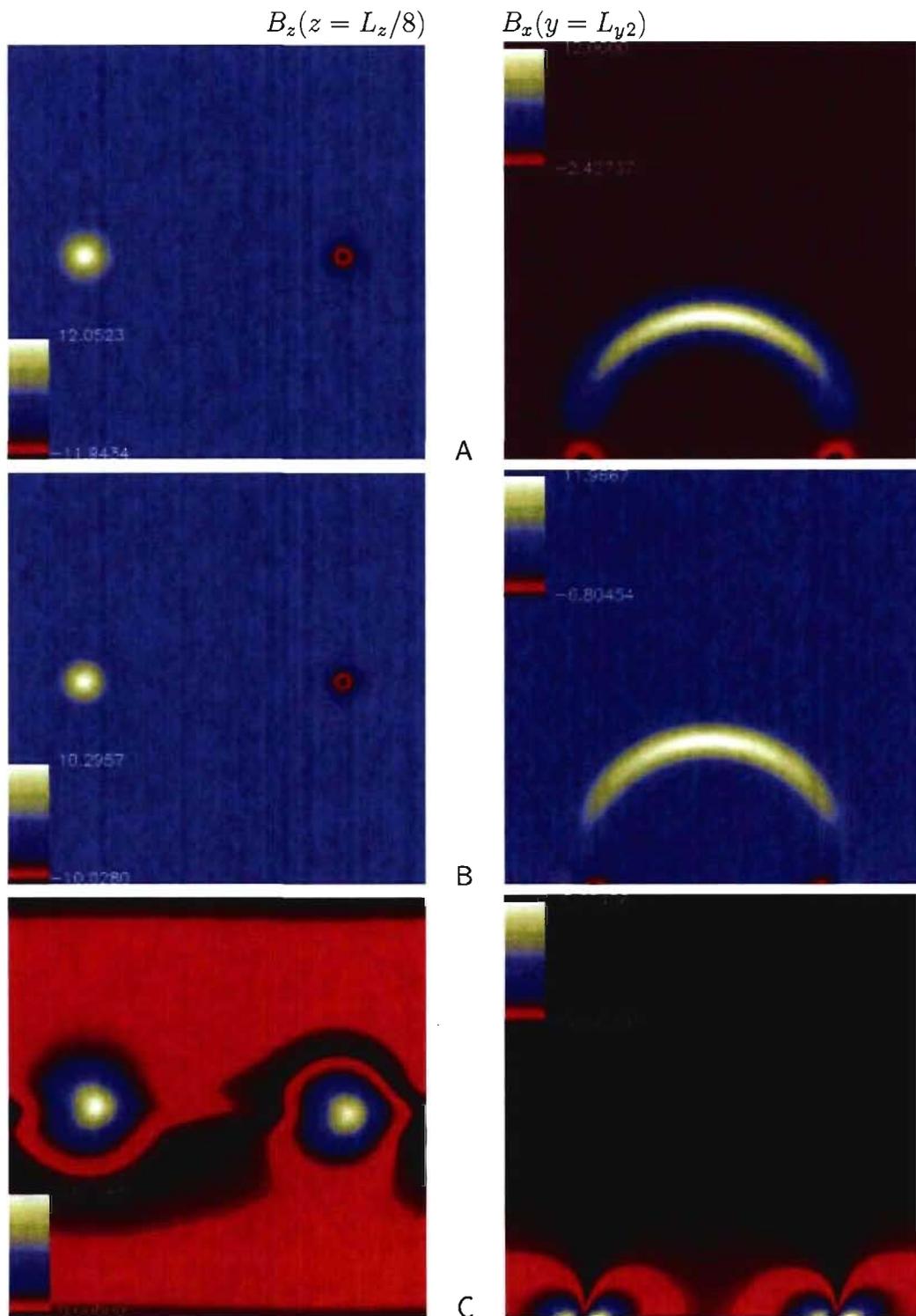


FIG. 4.4 – On montre ici l'erreur du projecteur  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  de l'Éq. 4.15 couplée à l'erreur de projection spectrale. La colonne de gauche montre la composante  $B_z$  dans le plan  $xy(z = L_z/8)$  (la hauteur de la frontière interne); à droite  $B_x$  dans  $xz(y = L_y/2)$ . Les échelles de couleurs sont évaluées en unité  $B_0$ . (A) : Solution analytique d'entrée, (B) : Solution projetée solénoïdale et, (C) : Erreur absolue  $|A - B|$ .

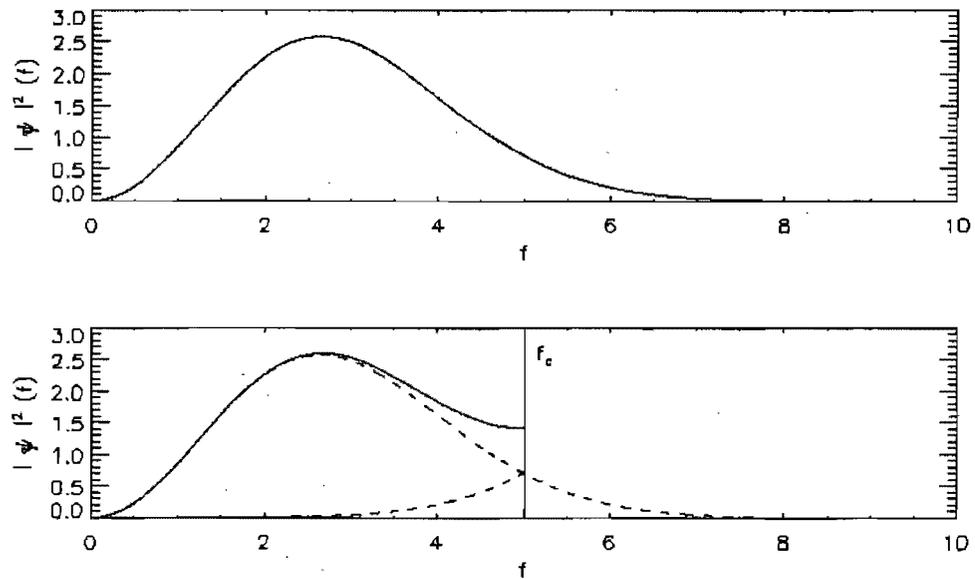


FIG. 4.5 – Illustration de phénomène de repliement. Panneau supérieur : Distribution de la puissance des modes en fonction de la fréquence. Panneau inférieur : Distribution calculée considérant une certaine fréquence  $f_c$ . En pointillé, nous montrons l'effet de repliement engendrant un gain de puissance artificiel pour les fréquences proches inférieures à  $f_c$ .

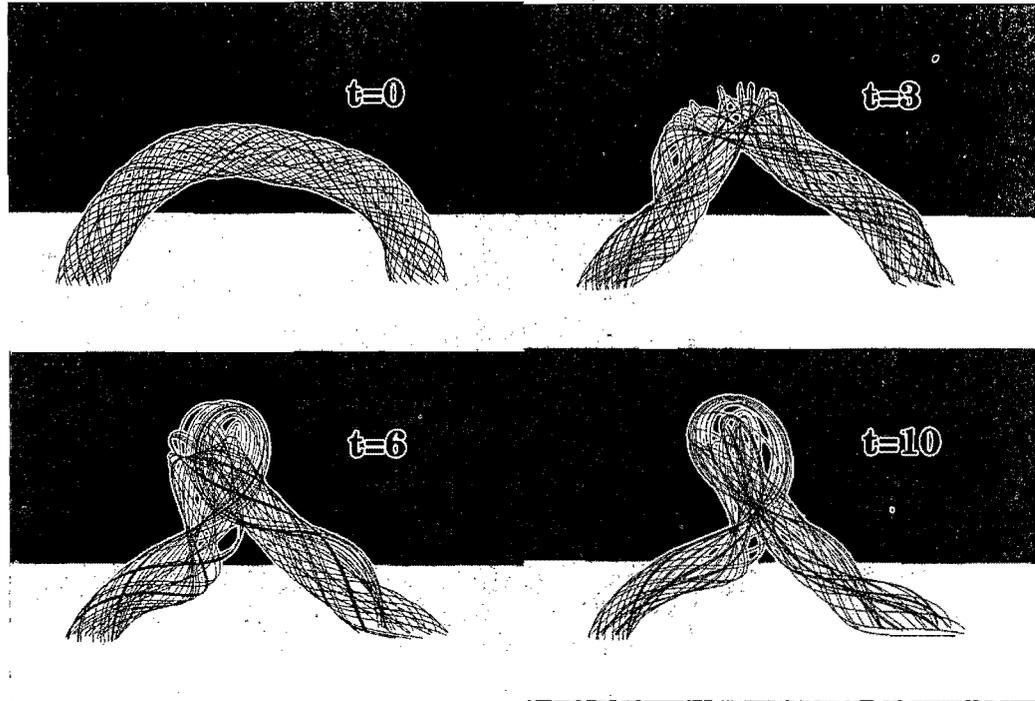


FIG. 4.6 – Nous montrons l'évolution de la forme des lignes de champ magnétique décrit par nos simulations. Le temps est indiqué en unité du temps de référence d'Alfvén  $\tau_A$ . Initialement, le tube de flux est fortement tordu. Au cours de l'évolution, le tube subit l'instabilité coque transformant cette torsion initiale en enroulement qui est croissante jusqu'au temps final. L'état final présente donc moins de torsion qu'initialement.

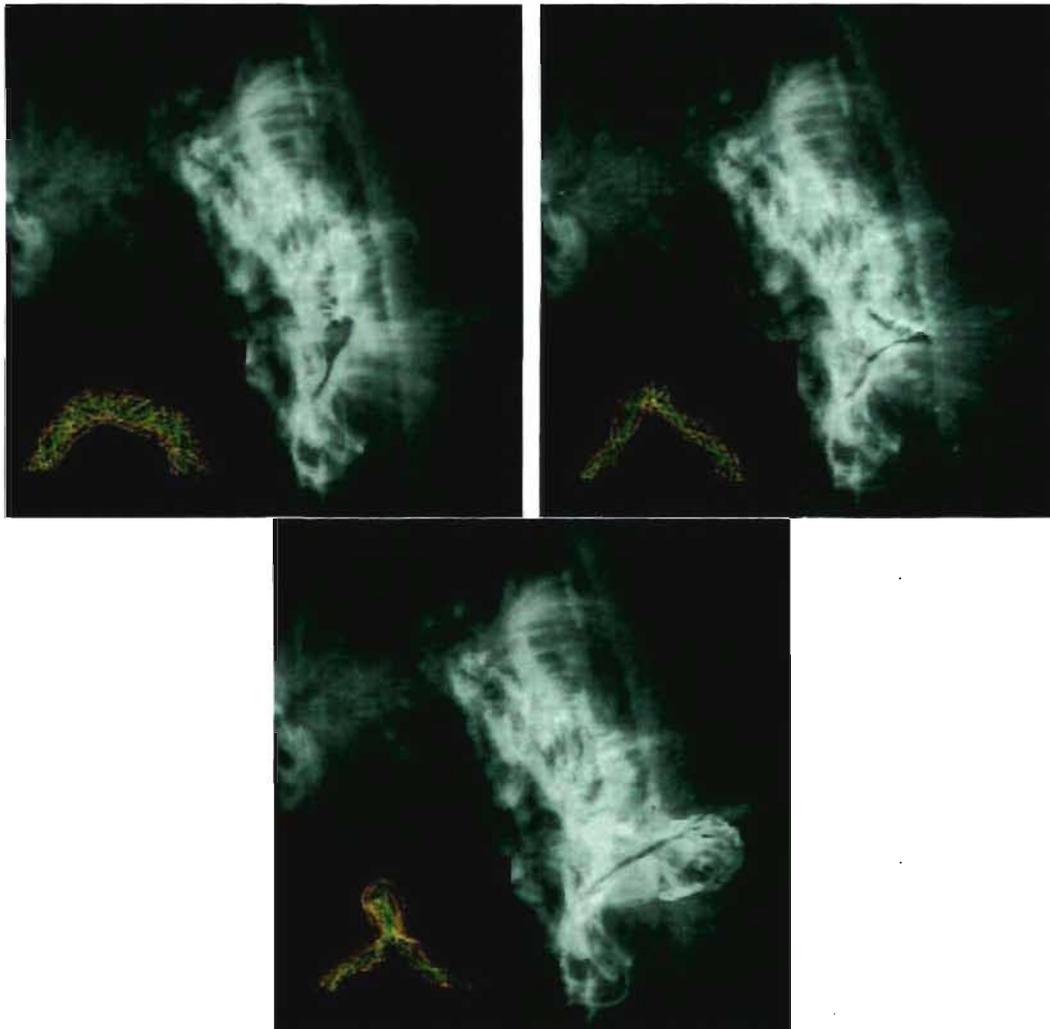


FIG. 4.7 - Nous comparons ici notre simulation MHD de l'évolution d'un tube de flux magnétique tordu (superposée dans le coin inférieur gauche de chaque panneau) avec l'évolution observée d'un tube de flux coronal. L'événement choisi a été observé le 22 mai 2002 par TRACE entre 18 :00 et 18 :15 dans la bande 171 Å. Documentée comme étant une éruption « échouée » (Török and Kliem, 2004), après l'ascension le tube est confiné par l'arcade magnétique environnante après quoi il se dissipe lentement. URL de TRACE : <http://vestige.lmsal.com/TRACE/>

## CHAPITRE 5

### ASSIMILATION DES DONNÉES

L'assimilation des données est une technique d'analyse servant à incorporer les données observationnelles dans le calcul d'une prédiction physique. Elle est utile lorsque le modèle physique utilisé est sous-déterminé par les observations disponibles.

L'assimilation se fait généralement de deux façons différentes. L'approche séquentielle introduit des ajustements successifs dans le temps et ne considérant à chaque correction que les observations les plus proches. Historiquement, les premières méthodes d'analyse étaient séquentielles. Par exemple la méthode d'assimilation *Cressman* (Cressman, 1959) et ses variantes :

*Analyse de Cressman* : L'analyse se fait sur l'état de référence  $\vec{\psi}_b(t)$  ajustant directement la trajectoire physique du système selon le filtre suivant :

$$\vec{\psi}_a(j) = \vec{\psi}_b(j) + \frac{\sum_{i=1}^n w(i, j) \{ \vec{y}(i) - \vec{\psi}_b(i) \}}{\sum_{i=1}^n w(i, j)} \quad (5.1)$$

$$w(i, j) = \max \left( 0, \frac{R^2 - d_{i,j}^2}{R^2 + d_{i,j}^2} \right) \quad (5.2)$$

où  $\vec{y}(i = 1..n)$  représente le vecteur d'état observé. L'analyse  $\vec{\psi}_a$  suit  $\vec{\psi}_b$  partout sauf près des observations autour desquelles l'importance de la correction venant des points voisins décroît avec leurs distances selon la fonction poids  $w(i, j)$ .  $d_{i,j}$  est une mesure de la distance entre  $i$  et  $j$  et  $R$  est une constante arbitraire (le rayon d'influence). Les variantes de l'analyse de *Cressman* se distinguent généralement par leurs définitions de  $w(i, j)$ . La grande faille dans ce type de méthode (appelée objective) est qu'elle ne considère ni les contraintes physiques impliquées qui dictent l'évolution de l'état réel ni la statistique de l'erreur de  $\vec{y}$ . Les méthodes modernes

(appelées subjectives) adressent cette lacune.

Parmi les méthodes séquentielles modernes il y a notamment le filtrage Kalman d'ensemble EnKF (Kalman, 1960). L'autre approche est celle des méthodes appelées continues qui considèrent une grande plage de données effectuant l'analyse sur l'ensemble de la trajectoire physique. C'est le cas de la méthode 4D-VAR (assimilation quadridimensionnelle variationnelle). Ces deux méthodes sont couramment utilisées pour la météorologie et la supériorité de l'une ou l'autre est sujet de débat actuel (e.g., Kalnay et al., 2007).

Pour ce travail, nous avons exploré la méthode variationnelle 4D-VAR. Ce choix est justifiable par des études récentes qui suggèrent que cette méthode est supérieure à EnKF pour les systèmes où les opérateurs observationnels (définis plus bas) sont fortement non-linéaires.

## 5.1 Formulation générale

Considérons un système décrit par un vecteur de quantités physiques indépendantes dans le temps et l'espace,  $\vec{\psi}(t, \vec{x})$ . Ce vecteur est calculé en appliquant un modèle de prédiction, défini par un opérateur linéarisé  $\mathcal{M}$ , sur un vecteur de conditions initiales,  $\vec{\psi}_0(\vec{x})$ .

$$\vec{\psi} = \mathcal{M}\vec{\psi}_0 \quad (5.3)$$

Avant l'analyse, ces conditions initiales doivent être déterminées de façon semi-arbitraire, le plus près de la réalité possible. Ces premières conditions initiales sont appelées l'état de référence (*background state*)  $\vec{\psi}_b(\vec{x})$ . Cet état est généralement défini à l'aide d'une prédiction précédente ou selon un modèle approximé de reconstruction. Par exemple, l'état de référence pour la configuration magnétique pourrait être construit selon une reconstruction FFF à partir de magnétogrammes photosphériques observés. Généralement, cet état ne correspond pas à l'état réel du

système (*true state*)  $\vec{\psi}_t(\vec{x})$ . Le but de l'analyse est donc de retrouver l'état initial le plus proche de l'état réel de façon à obtenir une prédiction la plus exacte possible. Cet état initial corrigé est l'état analysé  $\vec{\psi}_a$ , l'état de référence auquel est ajouté une variation correctrice  $\delta\vec{\psi}$  :

$$\vec{\psi}_a = \vec{\psi}_b + \delta\vec{\psi} \quad (5.4)$$

L'analyse consiste donc à résoudre la correction  $\delta\vec{\psi}$  qui minimisera l'erreur entre l'état analysé et l'état réel. Le problème résultant est que l'état réel n'est pas connu. Par contre, à travers l'observation, nous avons une mesure indirecte de cet état,  $\vec{y}(\vec{\psi}_t(t), t)$ . Ces observations ne sont utiles que si elles sont comparables avec l'état simulé  $\vec{\psi}$  et il doit donc exister un opérateur d'observation  $\mathcal{H}$  qui transforme l'état simulé en un vecteur de quantités physiques appartenant dans le même sous-espace que  $\vec{y}$ .

## 5.2 Analyse d'erreurs

Les états que nous avons maintenant définis sont caractérisés par diverses erreurs qui sont quantifiées par leurs propres matrices de covariance d'erreurs. L'erreur de l'état de référence est :

$$\vec{\epsilon}_b = \vec{\psi}_b - \vec{\psi}_t(t=0) \quad (5.5)$$

La matrice de covariance d'erreur de référence  $B$  est donnée par :

$$B = \overline{(\vec{\epsilon}_b - \bar{\epsilon}_b)(\vec{\epsilon}_b - \bar{\epsilon}_b)^T} \quad (5.6)$$

où  $\bar{\epsilon}_b$  est la valeur moyenne d'erreur de référence et est prédéterminée. Cette erreur moyenne est déterminée considérant la provenance de l'état de référence et en évaluant l'exactitude de celle-ci.

De la même façon, l'erreur observationnelle s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_y = \bar{y} - \mathcal{H}\bar{\psi}_t \quad (5.7)$$

Cette erreur est caractérisée par sa matrice de covariance d'erreur  $\mathcal{R}$  :

$$R = \overline{(\bar{\epsilon}_y - \bar{\epsilon}_y)(\bar{\epsilon}_y - \bar{\epsilon}_y)^\top} \quad (5.8)$$

L'erreur observationnelle moyenne  $\bar{\epsilon}_y$  doit aussi être prédéterminée. Elle doit considérer l'erreur provenant de l'instrumentation produisant la quantité  $\bar{y}$  de même que celle provenant de la construction de l'opérateur  $\mathcal{H}$  qui n'est pas nécessairement exacte en soi et est possiblement linéarisé.

Finalement, l'erreur de l'état analysé peut aussi être définie :

$$\bar{\epsilon}_a = \bar{\psi}_a - \bar{\psi}_t \quad (5.9)$$

Cette quantité est celle que l'on cherche à minimiser à travers l'analyse puisqu'elle quantifie l'erreur de la prédiction finale. Comme souligné précédemment, l'état réel n'est pas connu et  $\bar{\epsilon}_a$  ne peut être utilisée directement. Ce fait nous amène à définir une nouvelle quantification de l'erreur analysée, la fonction coût  $\mathcal{J}$ , qui considère l'état réel par le biais des observations.

### 5.3 Fonction coût

L'erreur d'une prédiction  $\bar{\psi}$  par rapport aux observations  $\bar{y}$  s'écrit généralement par la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\psi}) &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_b)^\dagger B^{-1} (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_b) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{t_a} (\mathcal{H}\bar{\psi}(t) - \bar{y}(t))^\dagger \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{H}\bar{\psi}(t) - \bar{y}(t)) dt \\ &= \mathcal{J}_b + \mathcal{J}_y \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $t_a$  est le temps d'assimilation définissant la fenêtre d'assimilation  $[0, t_a]$  sur

lequel les données sont assimilées. L'analyse minimisera  $\vec{\epsilon}_a$  en minimisant  $\mathcal{J}$  qui est calculable sans connaître  $\vec{\psi}_t$ . La contribution du terme de référence  $\mathcal{J}_b$  augmente plus l'état initial s'éloigne de l'état de référence et la contribution observationnelle  $\mathcal{J}_y$  augmente plus la trajectoire  $\vec{\psi}$  s'éloigne des observations  $\vec{y}$ . Ainsi, le minimum de  $\mathcal{J}$  définit  $\vec{\psi}_a(t=0)$  le plus près possible de l'état observé tout en demeurant cohérent avec l'état de référence.

#### 5.4 Minimisation sous contraintes et lagrangien

Nous avons établi que l'analyse servant à l'assimilation de données dans un modèle physique de prédiction peut se réduire à la minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$  qui évalue l'exactitude de la prédiction sur toute sa trajectoire spatio-temporelle. Un algorithme de minimisation peut donc être exploité pour résoudre  $\vec{\psi}_a$  numériquement. Par contre, les algorithmes d'intérêts requièrent, en plus d'un solveur  $\mathcal{J}$  pour une trajectoire donnée, un solveur  $\vec{\nabla}_{\psi}\mathcal{J}$ , le gradient de la fonction coût dans le sous-espace des trajectoires. Ce gradient n'est pas calculable directement. Dans cette section, nous montrerons comment il peut être calculé à partir de l'adjoint du modèle physique.

La trajectoire optimale minimisera  $\mathcal{J}$  tout en respectant la nature déterministe du système. C'est à dire,  $\vec{\psi}_a = \mathcal{M}\vec{\psi}_a(t=0)$ . En plus d'impliquer que la fonction coût est entièrement définie par  $\vec{\psi}_0$ , cette réalité peut être interprétée comme une contrainte sur la trajectoire lors de la minimisation. Dans cette mesure, la minimisation sous contraintes, ou minimisation lagrangienne, est exploitée.

Définissons la contrainte à respecter :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{\psi}, \vec{x}, t) = 0 \tag{5.11}$$

comme étant les équations du modèle physique écrites sous forme générale. Ces équations sont celles qui, linéarisées, définissent l'opérateur  $\mathcal{M}$ . Le lagrangien correspondant s'écrit donc :

$$\mathcal{L} = \mathcal{J} + \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{\psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (5.12)$$

où  $\vec{\lambda}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange à déterminer. Dans ce formalisme, la trajectoire minimisant  $\mathcal{J}$  est solution de :

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (5.13)$$

où  $\delta$  est l'opérateur variationnel. En séparant les dépendances de notre lagrangien, cette équation s'écrit :

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}} \cdot \delta\vec{\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\psi}} \cdot \delta\vec{\psi} \quad (5.14)$$

Les deux contributions à  $\delta\mathcal{L}$  sont linéairement indépendantes et doivent toutes deux être nulles. Le premier terme à droite de l'égalité s'écrit donc :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}} \cdot \delta\vec{\lambda} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \delta\vec{\lambda} = 0 \quad (5.15)$$

Ce résultat ne nous amène aucune information nouvelle puisque  $\vec{\mathcal{E}} = 0$  est l'hypothèse de départ du formalisme. De la même façon, le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\psi}} \cdot \delta\vec{\psi} &= \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\vec{\psi}} \cdot \delta\vec{\psi} \\ &+ \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial\vec{\psi}} \left( \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{\psi}, \vec{x}, t) \right) \cdot \delta\vec{\psi} d\vec{x} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Connaissant la trajectoire  $\vec{\psi}$ , cette dernière équation permet de solutionner les multiplicateurs  $\vec{\lambda}$ . Leur évolution est régie par le modèle adjoint du système (ADJ) qui est défini par :

$$\text{ADJ}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \vec{\psi}} \left( \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{\psi}, \vec{x}, t) \right) \quad (5.17)$$

Donc, les multiplicateurs  $\vec{\lambda}$  satisfont à :

$$\text{ADJ}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \vec{\psi}} \quad (5.18)$$

Il n'est pas encore clair en quoi solutionner  $\vec{\lambda}$  nous amène à déterminer  $\vec{\nabla}_{\psi} \mathcal{J}$ . L'explication est évidente en énonçant le résultat fondamental de la méthode 4D-VAR<sup>1</sup> :

$$\vec{\nabla}_{\psi_0} \mathcal{J} = \vec{\lambda}(t=0) \quad (5.19)$$

## 5.5 Modèle adjoint

Initialement ( $t = 0$ ), les variations de l'état initial  $\delta\vec{\psi}_0$  sont nulles au minimum de  $\mathcal{J}$  ce qui assure  $\delta\mathcal{L} = 0$  à ce temps. Ce n'est pas le cas au temps final ( $t = t_a$ ) où l'on peut imposer  $\vec{\lambda}(t = t_a) = 0$  pour un  $\delta\vec{\psi}$  arbitraire. Donc, il sera utile de travailler le modèle adjoint afin d'obtenir un système décrivant l'évolution dans le temps inverse  $\tau = t_a - t$  dans la direction  $\Delta\tau = -\Delta t$  pour projeter l'état connu  $\vec{\lambda}(\tau = 0)$  au temps requis,  $\tau = t_a$ . À cet effet, il est possible de transférer les dérivés temporelles et spatiales agissant dans la contrainte  $\vec{\mathcal{E}}$  aux multiplicateurs  $\vec{\lambda}$  en effectuant l'intégration par parties sur l'intégrale de l'Éq. 5.16.

### 5.5.1 Méthode d'intégration par parties

Pour démontrer le transfert des dérivés décrit ci-haut, nous dériverons les équations adjointes requises pour un système simple  $\psi(x, t)$  à une dimension spatiale évoluant dans le temps selon la contrainte physique :

<sup>1</sup>Le résultat fondamental du 4D-VAR est démontré dans Bélanger (2002) à l'annexe A.3

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.20)$$

Dans ce cas, nous écrivons l'Éq. 5.16 comme :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} &= \int_0^{t_a} \int_0^L \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \lambda \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \delta \psi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{t_a} \int_0^L \frac{\partial}{\partial \psi} \left( -\psi \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \psi \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta \psi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^L \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi \lambda \delta \psi)_0^{t_a} \, dx - \int_0^{t_a} \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi \lambda \delta \psi)_0^L \, dt \\ &= \int_0^{t_a} \int_0^L \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta \psi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^L (\lambda \delta \psi)_0^{t_a} \, dx + \int_0^{t_a} (\lambda \delta \psi)_0^L \, dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

Le modèle adjoint de ce système s'écrit donc :

$$\text{ADJ}(\psi, \lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \quad (5.22)$$

avec les conditions aux frontières à respecter :

$$\lambda(\tau = 0) = \delta \psi(\tau = t_a) = 0 \quad (5.23)$$

$$\lambda(x = 0) = \lambda(x = L) = 0 \quad (5.24)$$

### 5.5.2 Équations MHD idéales adjointes

Pour calculer le modèle adjoint aux équations MHD idéales isothermes, nous avons appliqué la méthode d'intégration par parties décrite ci-dessus. Nous en arrivons à un système à neuf variables adjointes  $(\rho^*, \vec{B}^*, \vec{v}^*)$  qui évolue dans le temps inverse  $\tau$  selon :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \tau} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho^* - \frac{c_s^2}{\rho^2} (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla} \rho) - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}}{\mu} \times \left( \frac{\vec{v}^* \times \vec{B}}{\rho^2} \right) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial \tau} &- (\vec{\nabla} \times \vec{B}^*) \times \vec{v} - \frac{1}{\mu} \left( \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B} \times \vec{v}^*}{\rho} \right) \right) \\ &- \frac{1}{\mu} \left( \left( \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}^*}{\rho} \right) \right) \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{v}^*}{\rho} \right) \right) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \vec{B}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \tau} &- \rho \vec{\nabla} \rho^* - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}^*) \\ &- \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}^* - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v}^* - \nu \nabla^2 \vec{v}^* = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \vec{v}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

## 5.6 Implémentation 4D-VAR/MHD

L'implémentation 4D-VAR/MHD telle que présentée à la Fig. 5.1 est bâtie autour de l'algorithme de minimisation. Le programme MHD intègre les conditions initiales entrées selon les équations physiques. Son interface avec le programme principal a accès aux observations pour calculer sa sortie  $\mathcal{J}$ . Le programme ADJ intègre les équations adjointes aux équations physiques et a donc accès à tous les champs physiques de l'intégration MHD précédente emmagasinés en mémoire. Les observations lui sont nécessaires pour les termes  $\partial \mathcal{J} / \partial \vec{\psi}$ . Sa sortie est directement  $\vec{\nabla}_{\vec{\psi}_0} \mathcal{J}$ .

La méthode de minimisation numérique applicable la plus simple est la plus profonde descente. Cependant, nous avons opté pour la méthode du gradient conjugué qui est plus sophistiquée mais généralement plus rapide et plus efficace à sortir des minimaux locaux. Ces deux méthodes sont présentées dans l'Annexe I.

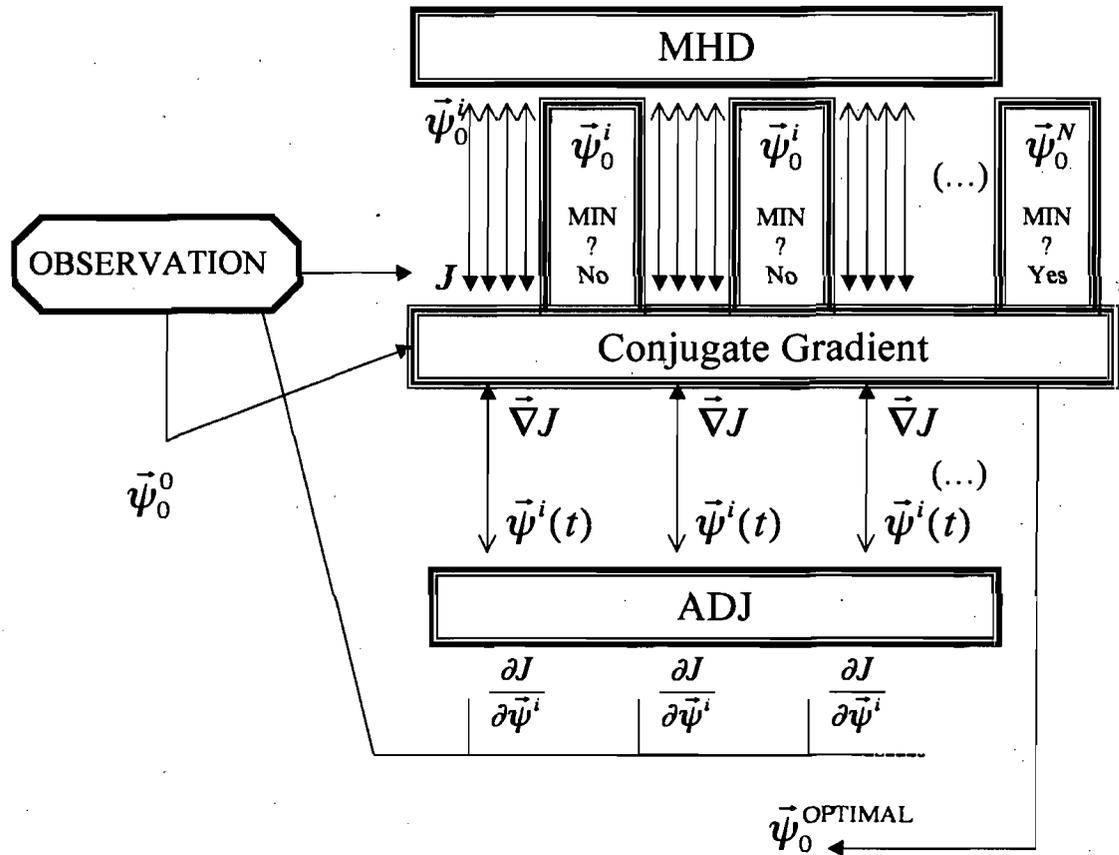


FIG. 5.1 – Algorithme MHD/4D-VAR présenté schématiquement. Le programme principal est un gradient conjugué auquel sont connectés deux sous-programmes : « MHD » projette un état initial d'entrée dans le temps ( $\bar{\psi}_0^i \rightarrow \bar{\psi}^i$ ) jusqu'à l'état final physique permettant le calcul de la fonction coût  $\mathcal{J}$  et « ADJ » projette les variables adjointes du temps final jusqu'au temps initial permettant le calcul de  $\vec{\nabla}_{\bar{\psi}_0}$ . « ADJ » requiert les variables d'état à tous les temps correspondant au  $\mathcal{J}$  courant en plus des termes sources  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \bar{\psi}^i}$  calculés à partir des observations. À cet effet, les champs physiques de simulation courante sont emmagasinés en mémoire pour chaque itération du modèle adjoint où les observations sont assimilées. Utilisant ces sous-programmes, le programme principal itère en variant les solutions initiales  $\bar{\psi}_0^i$ , de  $\bar{\psi}_0^0$  (l'état de référence) jusqu'à  $\bar{\psi}_0^{\text{OPTIMAL}}$  (la solution optimale de l'analyse).

### 5.7 Expérimentation avec l'implémentation 4D-VAR/MHD

La principale expérience de ce travail a été d'appliquer notre implémentation 4D-VAR/MHD conjointement avec notre solution analytique d'un tube de flux magnétique. La simulation numérique directe est exploitée pour générer des observations synthétiques. L'erreur initiale provient d'une variation dans les paramètres initiaux du tube, particulièrement la torsion initiale pour cette expérience. L'état de référence  $\vec{\psi}_b$  introduit dans l'implémentation est  $\vec{B}_{\text{tube}}(q = 1.2)$  selon l'Éq. 4.12. L'état réel  $\vec{\psi}_t$  utilisé pour générer les observations est  $\vec{B}^{\text{obs}}(t = 0) = \vec{B}_{\text{tube}}(q = 1)$ .



FIG. 5.2 – Évolution sur  $10 \tau_A$  de l'isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$ . Panneau supérieur : État réel  $\vec{\psi}_t$ . Panneau inférieur : Évolution selon l'état de référence initial  $\vec{\psi}_b$ .

À la Fig. 5.2, on voit la différence flagrante dans les évolutions temporelles de la structure magnétique entre nos  $\vec{\psi}_t$  et  $\vec{\psi}_b$ .

Nous avons utilisé trois séries d'observations disponibles sur la fenêtre initiale d'assimilation  $t \in [0, t_a]$ . Ces données sont calculées à partir de  $\vec{\psi}_t$  selon trois opérateurs d'observations distincts :

$$\mathcal{H}_1 [\vec{B}^{\text{obs}}] = \vec{B}^{\text{obs}}(x, y, z, t) \quad (5.28)$$

$$\mathcal{H}_2[\vec{B}^{\text{obs}}] = E_{xy}^{\text{obs}}(x, y, t) = \int_{L_z} \frac{B^{\text{obs}^2}}{2\mu} dz \quad (5.29)$$

$$\mathcal{H}_3[\vec{B}^{\text{obs}}] = E^{\text{obs}}(t) = \int_{\Omega} \frac{B^{\text{obs}^2}}{2\mu} d\vec{x} \quad (5.30)$$

### 5.7.1 Assimilation d'observables complets

À l'Éq. 5.28, on associe une fonction coût :

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (B_i - B_i^{\text{obs}})^2 d\vec{x} dt \quad (5.31)$$

Dans ce cas, nous connaissons exactement le champ magnétique aux temps d'assimilation. Malgré cela,  $\vec{\psi}_b$  calculée était erronée. Cette partie de l'expérience a servi à tester l'implémentation lors de sa conception. Le gradient conjugué tue complètement la fonction coût nous ramenant dans le bruit numérique de  $\vec{\psi}_t$ . L'évolution optimale 4D-VAR est illustrée à la Fig. 5.3.

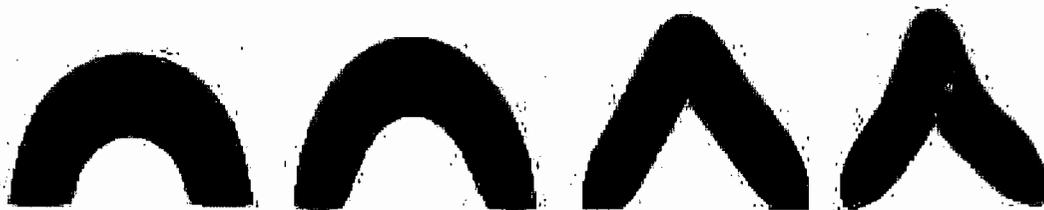


FIG. 5.3 – Évolution sur  $10 \tau_A$  de l'isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$  pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de  $\mathcal{J}_1$

En réalité, il est possible d'obtenir une idée générale de la structure magnétique par l'observation, que ce soit par extrapolation NLFFF de magnétogrammes photosphériques ou bien par les techniques de stéréoscopie, notamment les techniques d'inversion de Aschwanden et al. (2008) à partir des images conjointes des STEREO-A et STEREO-B. Ces données observationnelles ne sont pas parfaites, ayant probablement des matrices  $\mathcal{R}$  importantes à déterminer. D'ailleurs, un magnétogramme

MDI n'est disponible qu'aux 90 minutes et les méthodes d'inversions demandent un temps de calcul non-négligeable.

Il semblerait que ces sources d'informations serviraient mieux à générer la référence  $\vec{\psi}_b$ .

### 5.7.2 Assimilation d'observables intégrés sur une dimension

Dans le cas  $\mathcal{H}_2$ , nous avons :

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{t_a} \int_{L_y} \int_{L_x} \left( \int_{L_z} \frac{B^2}{2\mu} - E_{xy}^{\text{obs}} \right)^2 dx dy dt \quad (5.32)$$

Nous fournissons à l'algorithme une vue dans le plan  $xy$  de l'énergie magnétique intégrée verticalement. Cette partie est particulièrement intéressante explorant l'assimilation directe d'observations résolues en deux dimensions pour une quantité reliée à la structure magnétique le long de la ligne de visée.

Nous n'observons pas directement l'énergie magnétique pour le Soleil. Par contre, nous avons des mesures, par exemple, des R-X dont le flux peut être relié aux phénomènes de dissipation magnétique, qui est relié à la densité de courant et à la structure magnétique, particulièrement dans les endroits fortement non-FFF. On peut aussi relier l'énergie libérée à l'énergie magnétique libre ayant une idée des écoulements générés. Encore une fois, chacune de ces sources requiert une analyse détaillée de la statistique d'erreur.

Nous avons utilisé cette expérience pour se rapprocher d'observations de type GOES SXI, en demeurant très simplifié, se demandant si le système peut être suffisamment contraint vu la perte d'une dimension spatiale dans la résolution observationnelle. L'évolution temporelle de la solution optimale 4D-VAR est présentée à la Fig. 5.4.

L'état initial corrigé n'est plus lisse, un effet qui aurait probablement été atténué par l'inclusion du terme de référence dans nos fonctions coûts. L'évolution n'est pas exactement comme  $\vec{\psi}_t$ , mais il semblerait que l'hélicité du tube de flux est considérablement corrigée, vu la forme de l'état final.



FIG. 5.4 – Évolution sur  $10 \tau_A$  de l'isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$  pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de  $\mathcal{J}_2$

### 5.7.3 Assimilation d'observables globaux

Le troisième opérateur utilisé,  $\mathcal{H}_3$ , rend :

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{t_a} \left( \int_{\Omega} \frac{B^2}{2\mu} d\vec{x} - E^{\text{obs}} \right)^2 dt \quad (5.33)$$

Ce cas considère l'assimilation de l'énergie magnétique totale du domaine dans le temps. De la même façon que précédemment, nous voulons considérer des observations reliées notamment aux émissions R-X, mais cette fois pour le flux global de type GOES XRS. En réalité, ces sources possèdent la plus grande cadence, mais la perte de l'information structurale est fatale pour cette expérience. La Fig. 5.5 montre l'évolution de la solution optimale 4D-VAR pour ce cas.



FIG. 5.5 – Évolution sur  $10 \tau_A$  de l'isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$  pour la solution optimale 4D-VAR calculée à l'aide de  $\mathcal{J}_3$

Dans ce cas, le modèle adjoint est perturbé uniformément dans le domaine. La minimisation est de loin sous-contrainte et la solution finale n'est qu'une déformation de la référence.

Par contre, les flux globaux R-X ne seraient pas complètement à rejeter pour assimilation. Les sauts dans les flux indiquent des sauts dans le taux de reconnexion magnétique. Utilisé avec d'autres sources, cette information pourrait contribuer à contraindre la solution par des événements de reconnexion discrets aux temps connus et d'intensité connue, dans l'éventualité où le modèle MHD serait non-idéal.

## 5.8 Résultats

Nous avons utilisé la méthode d'assimilation des données 4D-VAR pour prédire, de façon optimale, l'évolution d'un tube de flux magnétique tordu typique de la couronne solaire dans un cas où l'approximation isotherme est *a priori* possible. Pour valider cette méthode, et en connaître les limites, nous l'avons appliqué à une variété d'« observations » de champs magnétiques artificielles mais réalistes. Nous avons montré que la qualité de la prédiction est fortement dépendante de la complétude de l'information fournie par les données observationnelles. Tout d'abord, si l'observation du champ magnétique réel est complet, c'est-à-dire si les trois composantes du champ magnétique sont données partout dans l'espace, la prédiction 4D-VAR est parfaite dans notre cas. À l'inverse, dans le cas où nous avons assimilé l'énergie magnétique totale du système dans le temps (qui n'est pas une information assez complète), la prédiction optimale est inadéquate. Le cas intermédiaire, où nous avons assimilé au cours du temps des surfaces représentant l'énergie magnétique intégrée verticalement. Dans ce cas, la prédiction n'était pas parfaite mais a été considérablement améliorée vis-à-vis de l'état de référence. Ce cas est encourageant pour les perspectives de travaux futurs car, comme nous l'avons expliqué, les véritables données observationnelles solaires à assimiler sont comparables à celles utilisées pour cette expérience. Nous avons donc *a posteriori* montré qu'il est possible de prévoir l'évolution d'un tube de flux pré-éruptif sur quelques temps d'Alfvén

à travers l'assimilation de données 4D-VAR.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail est une première étape vers l'assimilation d'observations solaires dans un modèle dynamique de la couronne solaire à travers l'analyse variationnelle. Nous avons exploré la possibilité d'utiliser la méthode d'assimilation des données observationnelles 4D-VAR avec un modèle de prédiction MHD idéal utilisé pour modéliser l'évolution de tubes de flux magnétique tordus ancrés au bas du domaine et dans une phase pré-éruptive. Utilisant des références et des observations générées synthétiquement, nous avons tenté de valider le concept.

Une étape importante dans la conception de notre implémentation a été le calcul des équations adjointes du modèle MHD idéal, l'intégration de ces équations étant nécessaire pour minimiser sous contraintes physiques la fonction coût en question. On utilise pour cela un formalisme lagrangien comme en mécanique. Ayant complété ce travail, nous avons construit notre algorithme numérique.

Pour valider la méthode, nous avons assimilé différents types d'observations. Le but a été de déterminer l'information minimale nécessaire pour adéquatement contraindre la minimisation. Nous avons tenté de corriger une erreur de torsion dans l'état de référence magnétique par l'assimilation des données relatives aux champs magnétiques sur quelques temps initiaux. Nous avons trouvé que la connaissance du champ magnétique dans la boîte en ces temps initiaux n'a pas été suffisante pour retrouver l'état réel après optimisation. Par contre, l'assimilation de l'énergie magnétique intégrée verticalement a considérablement bien contraint l'analyse, bien que pas parfaitement. Le cas test où le champ tridimensionnel complet était connu nous a servi à valider notre implémentation. *A posteriori*, nous avons également validé le modèle physique de l'isothermalité des tubes de flux sur quelques temps d'Alfvén.

Nos perspectives pour ce projet sont d'assimiler des données plus réalistes ou réelles, tels les flux R-X observés. Ce travail devra impliquer l'étude de l'erreur dans

les observations utilisées, notamment la construction des opérateurs d'observations appropriés et des covariances d'erreurs associées. De plus, nous considérerons la modélisation de champs plus complexes s'approchant d'une région active coronale, donc possiblement éruptives. À cet effet, il sera nécessaire de considérer un modèle physique dissipatif non-isotherme incluant les mécanismes de reconnexion magnétique. La gravité devra aussi être considérée pour modéliser les échelles des zones actives.

## BIBLIOGRAPHIE

- H. Alfvén. *Cosmic Electrodynamics*. Oxford University Press, 1950.
- J. J. Aly. On the reconstruction of the nonlinear force-free coronal magnetic field from boundary data. *Solar Phys.*, 120 :19–48, March 1989.
- M. J. Aschwanden. *Physics of the Solar Corona, An Introduction*. Springer Praxis, 2005a.
- M. J. Aschwanden. Three criteria to discriminate between elementary and composite coronal loops. *Astrophys. Journal*, 634 :L193–L196, December 2005b.
- M. J. Aschwanden, J.-P. Wülser, N. V. Nitta, and J. R. Lemen. First Three-Dimensional Reconstructions of Coronal Loops with the STEREO A and B Spacecraft. I. Geometry. *Astrophys. Journal*, 679 :827–842, May 2008.
- R. A. Asselin. Frequency filter for time integrations. *Monthly Weather Review*, 100 :487–490, 1972.
- A. A. Ballegooijen and S. R. Cranmer. Hyperdiffusion as a mechanism for solar coronal heating. *Astrophys. Journal*, 679 :in press, June 2008.
- É. Bélanger. Assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle pour les écoulements turbulents biphasiques en eaux peu profondes. Master's thesis, Université de Montréal, 2002.
- É. Bélanger, A. Vincent, and P. Charbonneau. Predicting Solar Flares by Data Assimilation in Avalanche Models. *Solar Phys.*, 245 :141–165, 2007.
- M. A. Berger. The writh of open and closed curves. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 39, 2006.
- M. A. Berger and G. B. Field. The topological properties of magnetic helicity. *Journal of Fluid Mechanics*, 147 :133–148, 1984.

- D. Biskamp. Magnetic reconnection via current sheets. *Physics of Fluids*, 29 : 1520–1531, May 1986.
- L. Bolduc. Gic observations and studies in the hydro-québec power system. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 64(16) :1793–1802, November 2002.
- E. L. Bouzarth and Hans Pfister. Helicity conservation under reidemeister moves. *American Journal of Physics*, 74(2) :141–144, February 2005.
- P. Brekke, O. Kjeldseth-Moe, N. Brynildsen, P. Maltby, S. V. H. Haugan, R. A. Harrison, W. T. Thompson, and C. D. Pike. Flows and Dynamics in the Corona Observed with the Coronal Diagnostic Spectrometer (cds). *Solar Phys.*, 170 : 163–177, 1997.
- C. C. Canfield, S. H. Hudson, and A. A. Pevtsov. Sigmoids as Precursors of Solar Eruptions. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 28(6) :1786–1794, December 2000.
- C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
- J. Chae. Observational Determination of the Rate of Magnetic Helicity Transport through the Solar Surface via the Horizontal Motion of Field Line Footpoints. *Astrophys. Journal Letters*, 560 :L95–L98, 2001.
- S. Chandrasekhar and P. C. Kendall. On force-free magnetic fields. *Astrophys. Journal*, 126 :457–460, 1957.
- A. N Cox. *Allen's astrophysical quantities*. Springer-Verlag, aip press, 4th edition, 2000.
- G. P. Cressman. An operational objective analysis system. *Monthly Weather Review*, 87(10) :367–374, October 1959.

- C. R. DeVore and S. K. Antiochos. Dynamical Formation and Stability of Helical Prominence Magnetic Fields. *Astrophys. Journal*, 539 :954–963, 2000.
- W. C. Erickson. The Radio-Wave Scattering Properties of the Solar Corona. *Astrophys. Journal*, 139 :1290–1311, May 1964.
- Y. Fan. Nonlinear Growth of the Three-dimensional Undular Instability of a Horizontal Magnetic Layer and the Formation of Arching Flux Tubes. *Astrophys. Journal*, 546 :509–527, 2001.
- Y. Fan. Coronal Mass Ejections as Loss of Confinement of Kinked Magnetic Flux Ropes. *Astrophys. Journal*, 630 :543–551, 2005.
- Y. Fan and S. E. Gibson. The Emergence of a Twisted Magnetic Flux Tube into a Preexisting Coronal Arcade. *Astrophys. Journal*, 589 :L105–L108, 2003.
- Y. Fan, E. G. Zweibel, M. G. Linton, and G. H. Fisher. The Rise of Kink-Unstable Magnetic Flux Tubes in the Solar Convection Zone. *Astrophys. Journal Letters*, 505 :L59–L63, 1998.
- G. A. Gary. Linear force-free magnetic fields for solar extrapolation and interpretation. *Astrophys. Journal*, 69 :323–348, February 1989.
- G. A. Gary. Plasma Beta above a Solar Active Region : Rethinking the Paradigm. *Solar Phys.*, 203 :71–86, 2001.
- S. E. Gibson and B. C. Low. A time-dependant three-dimensional magnetohydrodynamic model of the coronal mass ejection. *Astrophys. Journal*, 493 :461–473, January 1998.
- D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods : Theory and Application*. SIAM, 1977.
- G. E. Hale and S. B. Nicholson. *Magnetic observations of sunspots, 1917-1924 ...* Washington, D.C. Carnegie institution of Washington, 1938., 1938.

- W. N. Hess, editor. *Magnetic Field Annihilation*, 1964.
- M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradient for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6) :409–436, December 1952.
- A. Hewish. The scintillation of radio stars. *Vistas in Astronomy*, 1 :599–606, 1955.
- R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82 (Series D) :35–45, 1960.
- E. Kalnay, H. Li, T. Miyoshi, S.-C. Yang, and J. Ballabrera. 4d-var or ensemble kalman filter? *Tellus A*, 59(5) :778–780, October 2007.
- R. M. Kulsrud. Magnetic reconnection : Sweet-Parker versus Petschek. *Earth Planets Space*, 53 :417–422, 2001.
- J. Lin and A. A. van Ballegoijen. Equilibrium and Evolution in Multipolar Magnetic Configurations Resulting from Interactions among Active Regions. *Astrophys. Journal*, 629 :582–591, 2005.
- Y. E. Litvinenko and M. S. Wheatland. Modeling the Rate of Occurrence of Solar Flares. *Astrophys. Journal Letters*, 550 :L109–L112, 2001.
- D. W. Longcope. Quantifying Magnetic Reconnection and the Heat it Generates. In R. W. Walsh, J. Ireland, D. Danesy, and B. Fleck, editors, *SOHO 15 Coronal Heating*, volume 575, pages 198–209, 2004.
- D. W. Longcope and I. Klapper. Dynamics of a Thin Twisted Flux Tube. *Astrophys. Journal*, 488 :443–453, 1997.
- A. C. Lorenc. The relative merits of 4D-Var and Ensemble Kalman Filter. Presentations made at the 6th International Workshop on Adjoint Applications in Dynamic Meteorology, Basilicata, Italy, May 2004.

- D. H. Mackay and A. A. van Ballegoijen. Models of the Large-Scale Corona. I. Formation, Evolution, and Liftoff of Magnetic Flux Ropes. *Astrophys. Journal*, 641 :577-589, 2006.
- T. Magara and D. W. Longcope. Injection of Magnetic Energy and Magnetic Helicity into the Solar Atmosphere by an Emerging Magnetic Flux Tube. *Astrophys. Journal*, 586 :630-649, 2003.
- P. C. Martens and C. Zwaan. Origin and Evolution of Filament-Prominence Systems. *Astrophys. Journal*, 558 :872-887, 2001.
- J. C. Maxwell. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions Series I*, 155 :459-512, 1865.
- S. W. McIntosh and P. Charbonneau. Geometric Effects in Avalanche Models of Solar Flares : Implications for Coronal Heating. *Astrophys. Journal Letters*, 563 : L165-L168, 2001.
- M. S. Miesch. Large-Scale Dynamics of the Convection Zone and Tachocline. *Living Reviews in Solar Physics*, 2, 2005.
- D. Munger. Simulation numérique des instabilités magnétohydrodynamiques dans les cuves de production de l'aluminium. Master's thesis, University of Montreal, 2004.
- D. Nandy, M. Hahn, R. C. Canfield, and D. W. Longcope. Detection of a Taylor-like Plasma Relaxation Process in the Sun. *Astrophys. Journal Letters*, 597 : L73-L76, 2003.
- E. N. Parker. Sweet's Mechanism for Merging Magnetic Fields in Conducting Fluids. *Journal of Geophys. Research*, 62 :509-520, 1957.
- E. N. Parker. Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I - The general nature of the sunspot. II - Aerodynamic drag. *Astrophys. Journal*, 230 :905-923, 1979.

- A. A. Pevtsov, V. M. Maleev, and D. W. Longcope. Helicity Evolution in Emerging Active Regions. *Astrophys. Journal*, 593 :1217–1225, 2003.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.
- E. Priest and T. Forbes. *Magnetic Reconnection*. Cambridge University Press, 2000.
- E. R. Priest and E. A. Smith. The structure of coronal arcades and the formation of solar prominences. *Solar Phys.*, 64 :267–286, December 1979.
- A. J. Robert. The integration of low order spectral form of the primitive meteorological equations. *J. Met. Soc. Japan*, 44 :237–245, 1966.
- C. J. Schrijver. A characteristic magnetic field pattern associated with all major solar flares and its use in flare forecasting. *Astrophys. Journal*, 655 :L117–L120, January 2007.
- C. J. Schrijver and G. Siscoe, editors. *Heliophysics I. Plasma Physics of the local Cosmos. draft*, 2007.
- M. Semel. Contribution à l'étude des champs magnétiques dans les régions actives solaires. *Annales d'Astrophysique*, 30 :513–513, 1967.
- H. C. Spruit. Motion of magnetic flux tubes in the solar convection zone and chromosphere. *Astronomy and Astrophys.*, 98 :155–160, May 1981.
- H. C. Spruit and A. A. van Ballegoijen. Stability of toroidal flux tubes in stars. *Astronomy and Astrophys.*, 106 :58–66, 1982.
- P. A. Sweet. *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*. Cambridge University Press, 1958.

- C. Temperton. A generalized prime factor fft algorithm for any  $n = 2^p 3^q 5^r$ . *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13(3) :676–686, May 1992. URL <http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html>.
- A. N. Tikhonov. Solution to incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math Dokl.*, 4 :501–504, 1963.
- V. S. Titov and P. Démoulin. Basic topology of twisted magnetic configurations in solar flares. *Astronomy and Astrophys.*, 351 :707–720, 1999.
- T. Török and B. Kliem. The kink instability of a coronal magnetic loop as a trigger mechanism for solar eruptions. *Publications of the Astronomy Department of the Eotvos Lorand University*, 14 :165–176, June 2004.
- A. A. van Ballegoijen and P. C. H. Martens. Formation and eruption of solar prominences. *Astrophys. Journal*, 343 :971–984, 1989.

## Annexe I

### Méthodes de minimisation

Dans cette section, nous abordons les méthodes de minimisation numérique. Puisque l'efficacité du 4D-VAR dépend de la méthode de minimisation utilisée, il est important de justifier l'algorithme choisi en rapport avec sa précision ainsi que sa rapidité. Le problème de minimisation est la recherche de l'état  $\psi_*(n)$  qui minimise une fonction scalaire :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \psi^\dagger A \psi - b^\dagger \psi \quad (\text{I.1})$$

où la matrice  $A(n \times n)$  et le vecteur  $b(n)$  sont connus.

#### I.1 Plus Profonde Descente

La méthode de plus profonde descente (SD)<sup>1</sup> itère de  $\mathcal{J}_i$  à  $\mathcal{J}_{i+1}$  le long du gradient négatif  $\vec{\nabla} \mathcal{J}_i$  avec une longueur de pas  $\lambda_i$ .

$$\mathcal{J}_{i+1} = \mathcal{J}_i - \lambda_i \vec{\nabla} \mathcal{J}_i \quad (\text{I.2})$$

Une possibilité est que le pas  $\lambda_i$  est résolu pour que l'itération amène au minimum de  $\mathcal{J}$  le long de la direction du gradient  $\vec{\nabla} \mathcal{J}$  demandant une minimisation linéaire à chaque itération. Cette version du SD peut aussi être appelée la méthode du gradient optimal contrairement à une méthode qui emploierait à l'aveuglette des valeurs prédéterminées des  $\lambda_i$ .

Le problème qui en résulte est qu'à chaque itération  $i + 1$ , l'algorithme se trouve au minimum sur la trajectoire du gradient précédent et le nouveau gradient est toujours perpendiculaire à cette trajectoire. Ainsi, la nouvelle trajectoire est toujours perpendiculaire à la précédente et n'est généralement pas dans la direction du mi-

---

<sup>1</sup>SD : de l'anglais *steepest descent*

nimum global. La recherche se fait donc par une séries de petits déplacements orthogonaux rendant la minimisation relativement lente.

## I.2 Gradient Conjugué

La méthode du Gradient Conjugué (CG)<sup>2</sup> (Hestenes and Stiefel, 1952) résout en  $n$  itérations le problème de minimisation. Ceci est accompli en considérant que la solution  $\psi_*$  peut s'écrire :

$$\psi_* = \lambda_1 \psi_1 + \dots + \lambda_n \psi_n \quad , \quad (\text{I.3})$$

une combinaison linéaire de  $n$  vecteurs  $\psi_i$  orthogonaux ( $\psi_i^\dagger \psi_j = 0$ ) et  $A$ -conjugué :

$$\psi_i^\dagger A \psi_j = 0 \quad . \quad (\text{I.4})$$

Les coefficients  $\lambda_i$  sont alors trouvés :

$$A \psi_* = \lambda_1 A \psi_1 + \dots + \lambda_n A \psi_n = b \quad (\text{I.5})$$

$$\psi_i^\dagger A \psi_* = \lambda_i \psi_i^\dagger A \psi_i = \psi_i^\dagger b \quad (\text{I.6})$$

$$\lambda_i = \frac{\psi_i^\dagger b}{\psi_i^\dagger A \psi_i} \quad (\text{I.7})$$

Sous ces conditions le trajet n'utilise qu'une fois chaque direction spatiale orthogonale assurant une solution en  $n$  calculs de  $\lambda_i$ . Il se peut que pour atteindre  $\psi_*$ , nous n'ayons pas besoin d'utiliser tout les  $\psi_i$  si nous les choisissons astucieusement. Notons que les résiduels  $r_i = b - A \psi_i$  sont les négatifs des gradients  $\vec{\nabla} \mathcal{J}_i$  et forment une base orthogonale et satisfont à  $r_i^\dagger \psi_{i-1} = 0$ . De cette façon, les  $\psi_i$  minimisent  $\mathcal{J}$  le long de  $\psi_i - \psi_{i-1}$ . En prenant  $\psi_{i+1}$  dans la direction générale du minimum, nous utilisons la relation de récursion :

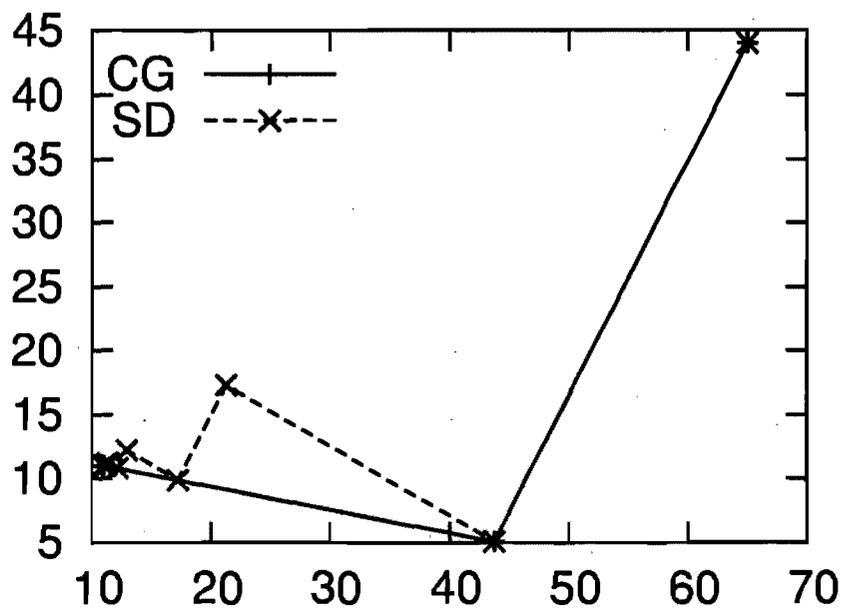
---

<sup>2</sup>CG : de l'anglais *conjugate gradient*

$$\psi_{i+1} = r_i - \frac{\psi_i^\dagger A r_i}{\psi_i^\dagger A \psi_i} \psi_i \quad (\text{I.8})$$

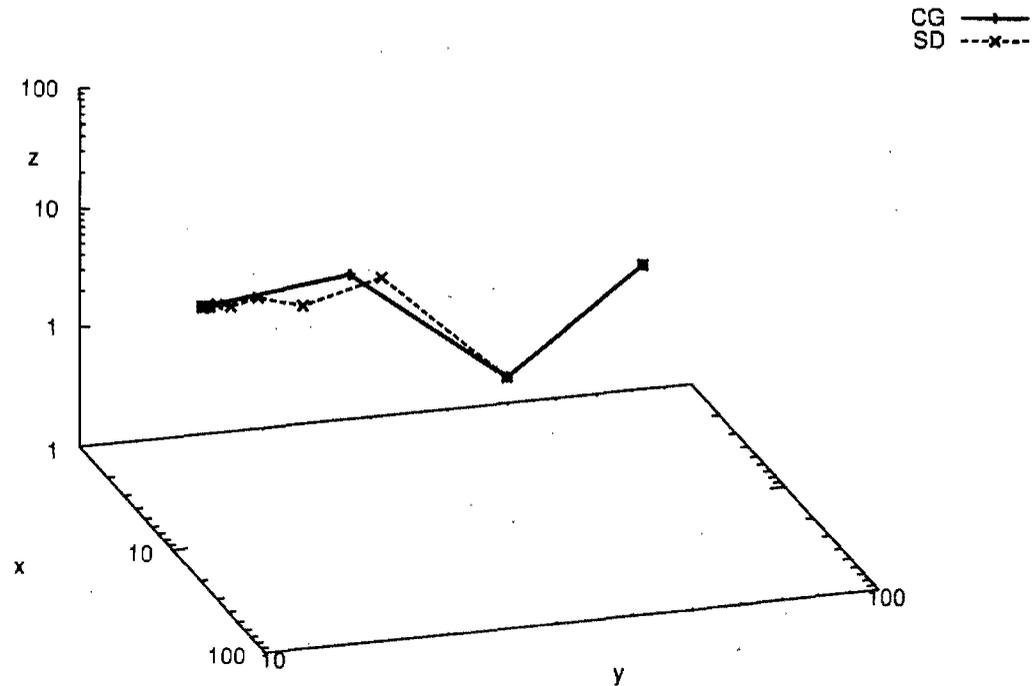
où  $\psi_{i+1}$  et  $\psi_i$  sont  $A$ -conjugué par construction et chaque nouvelle direction utilisée est le plus près possible de  $r_i$ . En général, le premier vecteur conjugué est  $\psi_1 = r_1$  (le résiduel initial) et la trajectoire de minimisation s'en suit selon l'Éq. I.8.

Pour justifier l'utilisation de la méthode CG dans notre implémentation, nous considérons deux cas tests montrant que cette méthode demande moins d'itérations que le SD tout en étant plus précise. Pour ces tests, nous avons utilisé une implémentation du SD (Bélanger, 2002) et une routine CG (Press et al., 1992). À la Fig. I.1, un exemple 2D pour  $\mathcal{J} = 2(x - 11) + 6(y - 11)$  et à la Fig. I.2,  $\mathcal{J} = 4(x - 11) + 2(y - 11) + 6(z - 11)$ . On montre le trajet spatial effectué par les deux méthodes. On voit que CG minimise bien exactement en deux et trois itérations, comme prédit. Le SD par contre montre des trajets zigzags requérant beaucoup plus d'itérations, c'est le problème avec cette méthode.



it	SD		CG	
	x	y	x	y
	65.00000	44.00000	65.00000	44.00000
1	43.75188	5.045113	43.75188	5.045113
2	21.29753	17.29294	11.00000	11.00000
3	17.24562	9.864432		
4	12.96369	12.20003		
...	...	...		
15	11.00030	10.99995		
16	11.00009	11.00006		

FIG. I.1 – Nous montrons le trajet spatial effectué lors de la recherche du minimum de la fonction test  $\mathcal{J} = 2(x-11) + 6(y-11)$  effectuée par le CG (trait plein) et le SD (tirets). Les coordonnées parcourues sont énumérées dans le tableau accompagnant la figure.



it	SD			CG		
	x	y	z	x	y	z
	65.00000	44.00000	56.00000	65.00000	44.00000	56.00000
1	22.69959	31.07487	3.124489	22.69958	31.07487	3.124485
2	11.57236	21.52848	14.35983	8.213049	20.11508	11.74366
3	10.98734	16.14779	9.208595	10.99792	10.99863	11.00043
4	10.99973	13.62809	11.83912	10.99991	10.99999	10.99981
5	11.00001	12.28516	10.55277	11.00000	11.00000	11.00000
...	...	...	...			
18	11.00000	11.00016	11.00005			
19	11.00000	11.00008	10.99997			

FIG. I.2 - Nous montrons le trajet spatial effectué lors de la recherche du minimum de la fonction test  $\mathcal{J} = 4(x - 11) + 2(y - 11) + 6(z - 11)$  effectuée par le CG (trait plein) et le SD (tirets). Les coordonnées parcourues sont énumérées dans le tableau accompagnant la figure.

## Annexe II

### Assimilation des données séquentielles modernes

Au chapitre 5, nous avons fait la distinction entre les méthodes d'assimilation des données séquentielles et non-séquentielles et avons élaboré sur la principale méthode non-séquentielle, le 4D-VAR, puisque c'est elle que nous avons entreprise d'implémenter pour ce travail. Il est néanmoins pertinent de faire une revue des autres principales méthodes d'assimilation existantes. Ces méthodes sont séquentielles et nous les aborderons en ordre de complexité qui suit la chronologie de leur développement.

#### II.1 Estimation aux moindres-carrés pour interpolation statistique

En guise d'introduction à l'assimilation des données, nous avons énoncé la méthode de *Cressman* considérée la première méthode d'assimilation des données. Une méthode séquentielle primitive, elle ne considérait pas la statistique de l'erreur de l'état de référence, de l'opérateur d'observation ou du modèle de prédiction. L'algorithme *BLUE* (Best Linear Unbiased Estimator) a été conçu pour inclure cette statistique dans l'analyse. La solution de l'analyse  $\vec{\psi}_a$  minimise l'erreur (r.m.s.)<sup>1</sup> avec l'état réel  $\vec{\psi}_t$  considérant l'observation  $\vec{y}$  à un temps unique donné.

La méthode *BLUE* est applicable si les erreurs observationnelles et de l'état de référence (décrites par les matrices de covariance d'erreur  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{B}$ ) sont non-corrélées et non-biaisées. Ces erreurs doivent d'ailleurs suivre une distribution de probabilité gaussienne. De plus, une linéarisation de l'opérateur d'observation est requise et doit être justifiable permettant d'écrire :

$$\mathbf{H} [\vec{\psi} - \vec{\psi}_b] \approx \mathcal{H} [\vec{\psi}] - \mathcal{H} [\vec{\psi}_b] \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathcal{H}$  est la forme linéarisée de  $\mathbf{H}$ . Sous ces hypothèses, l'analyse de *BLUE* s'écrit :

---

<sup>1</sup>r.m.s : de l'anglais *root mean squared* pour moyenne quadratique.

$$\vec{\psi}_a = \vec{\psi}_b + \mathcal{K} \left( \vec{y} - \mathcal{H} \left[ \vec{\psi}_b \right] \right) \quad (\text{II.2})$$

où  $\mathcal{K}$  est le gain de l'analyse. Le gain optimal est celui qui minimise la matrice de covariance d'erreur de l'analyse  $\mathcal{A}$  dont la solution est donnée :

$$\mathcal{K} = \mathcal{B}\mathcal{H}^\dagger (\mathcal{H}\mathcal{B}\mathcal{H}^\dagger + \mathcal{R})^{-1} \quad (\text{II.3})$$

pour  $\mathcal{A}$  optimal :

$$\mathcal{A} = (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{H})\mathcal{B} \quad (\text{II.4})$$

Il est démontré que si la statistique des erreurs est parfaitement gaussienne, la solution de l'analyse est la meilleure estimation de l'état réel. La difficulté de calcul avec cette méthode provient du calcul de  $\mathcal{K}$ ; l'inversion de  $(\mathcal{H}\mathcal{B}\mathcal{H}^\dagger + \mathcal{R})^{-1}$  est généralement ardue.

Les hypothèses postulées pour cette méthode méritent une attention particulière. D'abord, que les erreurs soient non-biaisées peut être difficilement respectée, surtout pour l'état de référence. En général l'état de référence provient d'une prédiction précédente et donc le modèle physique utilisé entraîne un certain biais dans l'erreur de l'état de référence. De plus, il se peut que les erreurs soient corrélées entres-elles si la référence est utilisée au moment du pré-traitement des données. Par contre, ce problème ne survient que dans quelques cas particulier. Finalement, la validité de la linéarisation de l'opérateur d'observation peut être problématique. Pour explorer la limite de cette hypothèse, on écrit en série de Taylor du premier ordre de  $\mathcal{H} \left[ \vec{\psi} + h \right]$  pour une perturbation  $h$  :

$$\mathcal{H} \left[ \vec{\psi} + h \right] = \mathcal{H} \left[ \vec{\psi} \right] + \mathbf{H} [h] + \mathcal{O}(\|h\|^2) \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas de BLUE, cette dernière équation équivalent à :

$$\vec{y} - \mathcal{H} [x] \approx \vec{y} - \mathbf{H} \left[ \vec{\psi} - \vec{\psi}_b \right] + \mathcal{H} \left[ \vec{\psi}_b \right] \quad (\text{II.6})$$

Alors, pour que la linéarité de  $\mathbf{H}$  soit raisonnable, il faut que la différence entre  $\mathcal{H}[\vec{\psi}] - \mathcal{H}[\vec{\psi}_b]$  et  $\mathbf{H}[\psi - \psi_b]$  soit beaucoup plus petite que les erreurs observationnelles typiques (définies par  $\mathcal{R}$ ) pour tout  $\vec{\psi} - \vec{\psi}_b$  de l'ordre de l'erreur de référence typique ou de l'incrément d'analyse typique. Dans ce cas, l'erreur de linéarisation est négligeable. En application, le problème de  $\mathcal{H}$  ne dépend plus que de l'erreur observationnelle. Lorsque BLUE est utilisée de façon séquentielle, l'état de référence provient de l'analyse précédente et donc sa précision dépend aussi de  $\mathcal{H}$ . La linéarité de  $\mathbf{H}$  doit être évalué considérant l'ensemble du système d'assimilation.

## II.2 OI (Optimal interpolation)

La méthode OI est une optimisation de l'algorithme BLUE par une simplification algébrique dans le calcul de  $\mathcal{K}$ . L'hypothèse est la suivante : pour chacune des variables du modèle, seulement quelques observations sont importantes dans la détermination de l'incrément d'analyse. Suivant cette idée, le calcul de  $\mathcal{K}$  se fait en inversant individuellement des sous-matrices de  $(\mathcal{H}\mathcal{B}\mathcal{H}^\dagger + \mathcal{R})^{-1}$  et en recombinaut le résultat.

## II.3 3D-VAR

La méthode 3D-VAR est une méthode d'assimilation variationnelle qui assimile les observations pour un temps donné et peut donc être utilisée de façon séquentielle. L'analyse équivalente à celle de BLUE n'implique pas le calcul de  $\mathcal{K}$ . L'algorithme exécute la minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$  à l'aide de son gradient  $\vec{\nabla} \mathcal{J}_{\vec{\psi}}$  :

$$\mathcal{J}(\vec{\psi}) = (\vec{\psi} - \vec{\psi}_b)^\dagger \mathcal{B}^{-1} (\vec{\psi} - \vec{\psi}_b) + (\vec{y} - \mathcal{H}[\vec{\psi}])^\dagger \mathcal{R}^{-1} (\vec{y} - \mathcal{H}[\vec{\psi}]) \quad (\text{II.7})$$

$$\vec{\nabla} \mathcal{J}_{\vec{\psi}} = 2\mathcal{B}^{-1} (\vec{\psi} - \vec{\psi}_b) - 2\mathcal{H}^\dagger \mathcal{R}^{-1} (\vec{y} - \mathcal{H}[\vec{\psi}]) \quad (\text{II.8})$$

En plus de la simplicité conceptuelle du 3D-VAR, sa popularité peut aussi être

attribuable à la possibilité de modifier la fonction coût pour la considération de contraintes supplémentaires (e.g., Tikhonov, 1963).

#### II.4 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une méthode d'assimilation des données séquentielle. Cette méthode est supérieure aux méthodes séquentielles précédentes par le fait qu'on considère ici non seulement les erreurs  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{B}$  mais aussi le modèle physique, les erreurs qu'il engendre et qu'il propage.

Dans ce formalisme, le vecteur des observations  $\vec{y}(i = 1 \dots n)$  est assimilé élément par élément, la méthode effectue  $n$  analyses et prédictions sur la fenêtre d'assimilation. On définit l'opérateur du modèle physique du temps  $i$  à  $i + 1$ ,  $M_{i \rightarrow i+1}$ . Pour chaque analyse, l'état de référence  $\vec{\psi}_b(i)$  est l'état final de l'analyse précédente  $M_{i-1 \rightarrow i} \vec{\psi}_a(i-1)$ . On remplace les matrices de covariance d'erreur  $\mathcal{B} \rightarrow P_f(i)$ ,  $\mathcal{A} \rightarrow P_a(i)$  pour souligner le fait que ces matrices dépendent maintenant des analyses précédentes. De plus, on considère une matrice de covariance pour les erreurs du modèle physique  $\mathcal{Q}(i)$ . Les équations sont comme suit :

$$\vec{\psi}_f = M_{i \rightarrow i+1} \vec{\psi}_a(i) \quad (\text{II.9})$$

$$P_f(i+1) = M_{i \rightarrow i+1} P_a(i) M_{i \rightarrow i+1}^\dagger + \mathcal{Q}i \quad (\text{II.10})$$

$$\mathcal{K}(i) = P_f(i) \mathcal{H}^\dagger(i) [\mathcal{H}(i) P_f(i) \mathcal{H}^\dagger(i) + \mathcal{R}(i)]^{-1} \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{\psi}_a(i) = \vec{\psi}_f(i) + \mathcal{K}(i) [\vec{y}(i) - \mathcal{H}(i) \vec{\psi}_f(i)] \quad (\text{II.12})$$

$$P_a(i) = [\mathbb{I} - \mathcal{K}(i) \mathcal{H}(i)] P_f(i) \quad (\text{II.13})$$

Dans le cas spécial où le modèle physique est exact ( $\mathcal{Q} = 0$ ), il a été démontré que

que le filtre de *Kalman* et le 4D-VAR sont des méthodes équivalentes. Lorsque cette méthode considère des opérateurs physiques (**M**) et des opérateurs d'observations (**H**) non-linéaires, cette méthode est appelé *Ensemble Kalman Filtering (EnKF)*.

TAB. II.1 – Récapitulatif des avantages et désavantages de la méthode EnKF. Tiré de Kalnay et al. (2007) où est présentée une modification d'un tableau de Lorenc (2004).

EnKF :

- Simple à implémenter.
- Ne requiert pas un opérateur de prédiction lisse (i.e., la paramétration du modèle peut être discontinue).
- Ne requiert pas une prédiction de la perturbation ni de modèle adjoint.
- Génère l'ensemble optimal de perturbations initiales qui représente l'analyse de la covariance d'erreur.
- Opérateurs d'observations complexe, par exemple la représentation de la pluie en météo. Par contre, l'échantillon est interpolé par une gaussienne.
  - Opérateurs d'observations non-linéaires.
- La covariance évolue indéfiniment (seulement si représentée en ensemble).
  - La sous-représentation doit être adressée en réactualisant l'ensemble.
- Les covariances échantillonnées sont bruitées et ne peuvent s'ajuster qu'à  $N$  données.
  - La localisation réduit le problème d'échantillonnage à longue distance de la covariance actuelle et augmente la capacité à assimiler un grand nombre d'observations.
  - La localisation d'observation peut être utilisée avec des filtres locaux.

TAB. II.2 – Récapitulatif des avantages et désavantages de la méthode 4D-VAR. Tiré de Kalnay et al. (2007) où est présentée une modification d'un tableau de Lorenc (2004).

4D-VAR :

- Peut assimiler des observations non-synchronisées.
  - 4D-EnKF le fait aussi bien sans avoir besoin d'itérer. Il peut aussi assimiler des observations intégrés en temps comme l'accumulation de pluie en environnement.
- Les opérateurs d'observations non-linéaires peuvent être pris en compte et les erreurs non-gaussiennes peuvent être modélisées.
  - Le filtrage d'ensemble de probabilité maximale permet la modélisation d'observations non-linéaires et d'erreurs non-gaussiennes.
- 4D-VAR par incrément s'équilibre facilement.
  - Pour EnKF, l'équilibre est atteint sans l'initialisation pour le modèle parfait. Pour les observations réelles, un filtrage numérique peut être nécessaire.
- Modélisation précise des covariances-temporelles (à l'intérieur de la fenêtre d'assimilation).
  - Seulement si la covariance d'erreur de la référence inclut les erreurs de la journée, ou si la fenêtre d'assimilation est longue.

## **Annexe III**

**Acte de conférence à CFD Canada 2008**

# Tridimensional Modeling of coronal flux ropes using MHD 4D-VAR Data Assimilation

Ali Benslimane<sup>1</sup> and Alain Vincent<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics Department, Université de Montréal  
Montreal, QC, H3C 3J7, Canada

Email: [REDACTED]

## ABSTRACT

We investigate using 4D-VAR data assimilation to predict the behavior of an active region of the lower corona for space weather purposes. In particular, we have conducted one such experiment on a kinking flux rope simulation, a typical event of a coronal active region. The three different aspects of this challenging computational magneto-fluid dynamics problem are discussed: MHD modeling, data assimilation and computational algorithmics. It is found that a flux rope pre-eruptive evolution can be predicted over a few Alfvén times.

## 1. OPTIMAL MODELING OF ACTIVE REGION DYNAMICS

Modeling of the solar corona with the intention of recreating observable events is useful to better understand the fundamental principles governing the energy release processes in active regions [2] [16] and can be utilized for space weather forecasting purposes [3] [22]. However, the reliability of even a perfect model's prediction depends highly on the quality of the initial state input [7]. Dynamic modeling of the corona generally considers a magnetohydrodynamic (MHD) representation of the system which requires input of initial density and temperature distribution, fluid flow and magnetic field in the domain [1]. All these fields can be reconstructed from observables but the observational error coupled with the inversion method's uncertainties, and in some cases approximations, can become important (e.g. [18] [23]).

This work relates to integrating a time-series of observations into the simplest MHD model of a flux rope to correct the initial state through quadri-dimensional

variational data assimilation (4D-VAR) [4].

## 2. ISOTHERMAL IDEAL MHD MODEL

Ideal MHD is an approximation of general MHD where the fluid is considered to be a perfect conductor. Making the isothermal approximation, which has been argued to hold observationally for single stranded coronal loops [17], the governing conservation equations are:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} - \nu \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3)$$

with an isothermal equation of state and electric current density:

$$p = c_s^2 \rho \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \quad (4)$$

Although this relatively simplified model does not include Ohmic dissipation and would not be used to model large scale active regions where magnetic reconnection powers solar activity, it is well suited for treating coronal flux rope evolution pre-reconnection (e.g. [11], [21])

## 3. CORONAL FLUX ROPES

A well-accepted model for initiating energy release processes in the corona considers injection of mag-

netic helicity into preexisting force-free coronal magnetic structures [10]. Helicity is transported by twisted magnetic flux tubes generated by the solar dynamo at the base of the convection zone that rise buoyantly [8] until they emerge into the corona where they are arched and anchored to the photosphere [5]. These flux tubes are kink unstable [20], i.e. they tend to minimize their structural magnetic energy by converting their twist into writhe while conserving total helicity, as would a rubber band being twisted. The resulting configurations compress opposing field lines generating strong current sheets that fuel magnetic reconnection leading to kinetic and thermal energy release [16].

An example of an observed coronal flux rope undergoing kink instability is shown as seen by the *TRACE* observatory's EUV imager in Fig. 1. This particular event has been extensively reproduced through ideal MHD modeling [20] and other similar flux rope studies have explained the formation of observed X-Ray sigmoids [11] and shown how in some cases kinking flux ropes trigger a coronal mass ejection as the overlying magnetic arcade confinement is lost [9].

#### 4. MHD SIMULATION

We simulate an emerged flux tube anchored to the lower boundary and undergoing instability. The initial magnetic field is as in [11] however, we do not simulate emergence in this scope. The given  $\vec{B}_{\text{tube}}$  twisted half-torus solution is introduced as the initial magnetic field. The solution is parametrized by the radius of torus  $R_t$ , the radius of the tube  $a_t$ , the strength of the field  $B_t$  and the field-line twist  $q_t$ . Initial density is uniform in the domain at  $\rho_0$  and the fluid is at rest.

The simulation parameters for the run illustrated in Fig. 2 are given in Tab. 1. The runs were performed on a  $64 \times 64 \times 64$  points Cartesian grid over a box of dimensions  $2.5L_0 \times 2.5L_0 \times 1.2L_0$ . In Fig. 2 the system is illustrated over  $10 \tau_A$ , roughly the end of the kink instability.

To solve our MHD set of equations, we use the spectral method (e.g. [12]) and a second order leap-frog for time-marching. Decomposition in the horizontal direction is made with Fourier transform and in the vertical with either sin or cos series for each field depending on the boundary conditions. This generally makes for faster over-all computation than typical non-spectral implementations such as finite dif-

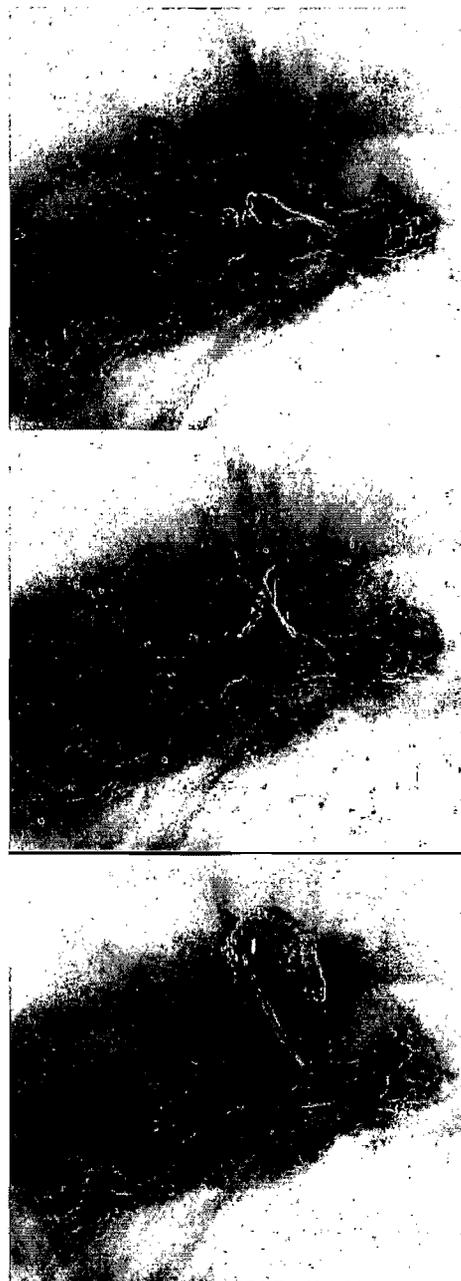


Figure 1: A coronal flux rope undergoing kink instability observed by the *TRACE* satellite (<http://vestige.lmsal.com/TRACE>) on May 22nd 2002 in  $171\text{\AA}$ . Time spans from 18:00 to 18:15. A failed prominence eruption [20]: after rising, the flux rope is contained by the overlying magnetic arcade.

ferences or finite volumes for instance because differential operator calculations are reduced to multiplications in the Fourier space and highly accurate. Moreover, by change of variable, we can solve exactly the viscous term in Eq. 3 without explicitly calculating it. Non-linear operations require transformation of the fields to physical space and back using a fast-Fourier transform algorithm [19].

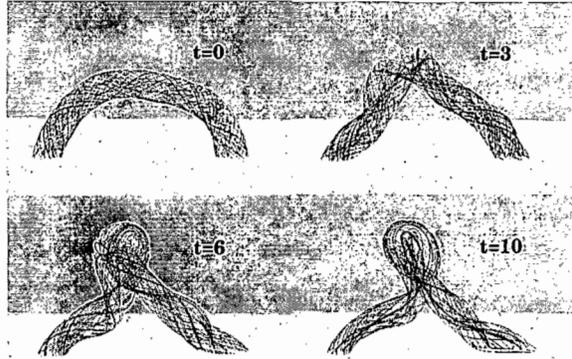


Figure 2: Simulated magnetic field line evolution. Time is in Alfvén time units  $\tau_A$ . The tube undergoes kink instability similarly to the solar event shown in Fig. 1. The simulated regime (Tab. 1) allows for flux rope confinement by an MHD formed pressure gradient instead of an overlying arcade which is required in the Lorentz force dominated corona.

## 5. 4D-VAR METHOD

The choice of 4D-VAR data assimilation for this work was non-trivial since other proven methods exist such as the *Ensemble Kalman Filtering* (EnKF) method. It has been shown that 4D-VAR and EnKF are equivalent providing that model error is neglected [6] however 4D-VAR seems well suited for assimilating solar like observations as it allows for non-linear observation operators [14].

The general formulation of 4D-VAR [4] allows for optimizing an initial state  $\vec{\psi}_0$  according to an observational dataset  $\vec{y}(t)$  over an initial time period smaller than the desired forecast time. These observations must allow for an observation operator  $\mathcal{H}$  that applied to state variables produces a vector of the same form as  $\vec{y}$  for comparison. By quantifying the forecast error, it can be minimized with 4D-VAR using traditional minimization algorithms.

$\rho_0$	$8.35 \times 10^{-13} \text{ Kg/m}^3$
$B_0$	$2.0 \times 10^{-3} \text{ T}$
$L_0$	$1.5 \times 10^8 \text{ m}$
$v_A = B_0 / \sqrt{\mu \rho_0}$	$1.95 \times 10^6 \text{ m/s}$
$\tau_A = L_0 / v_A$	$77.96 \text{ s}$
$M_A = v_A / a_s$	$1.5 (\sim 45)$
$Re_A = L_0 v_A / \nu$	$40 (> 1000)$
$a_t$	$0.1 L_0$
$R_t$	$0.375 L_0$
$B_t$	$9 B_0$
$q_t$	$1$

Table 1: Physical Parameters [1]. Alfvén Mach ( $M_A$ ) and Reynolds ( $Re_A$ ) are given with realistic coronal values in parentheses. The simulated regime, although limited by low numerical resolution, essentially captures the physics of the corona.

### 5.1. Cost Function

The first step to minimization is quantification; in this case we define a cost function [13]:

$$\mathcal{J} = (\vec{\psi}_0 - \vec{\psi}_B) \mathcal{B}^{-1} (\vec{\psi}_0 - \vec{\psi}_B) + \int_{t_0}^{t_a} (\mathcal{H}[\vec{\psi}(t)] - \vec{y}(t)) \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{H}[\vec{\psi}(t)] - \vec{y}(t)) dt \quad (5)$$

The first guess initial state, or background state,  $\vec{\psi}_B$  is characterized by an error covariance matrix  $\mathcal{B}$  and the observation operator  $\mathcal{H}$  is characterized by an error covariance matrix  $\mathcal{R}$ . These matrices are diagonal if the data points are uncorrelated. If the background generator is perfect then  $\mathcal{B}$  is the identity matrix  $\mathbb{I}$ , the same goes for  $\mathcal{R}$  if the observation operator is perfect. The cost function therefore has two contributions, the first penalizes current solutions that diverge from the background state and the second penalizes current solutions that diverge from observation over the assimilation window  $[t_0, t_a]$ . The initial state minimizing  $\mathcal{J}$  should therefore ensure compatibility with the background and observation.

## 5.2 Lagrangian Formulation

Minimizing  $\mathcal{J}$  while satisfying model specific constraints  $\vec{\mathcal{E}} = 0$  is done using the Pontryagin's minimum principle [15]. By defining a Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathcal{J} + \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \vec{\lambda}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{\psi}, \vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (6)$$

where  $\vec{\lambda}$  are the initially undetermined Lagrange multipliers, the minimum of  $\mathcal{J}$  is found by solving  $\delta\mathcal{L} = 0$  (where  $\delta$  is the variational operator):

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\psi}} \cdot \delta\vec{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}} \cdot \delta\vec{\lambda} \quad (7)$$

The first term on the right side of Eq. 7 is:

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\vec{\psi}} \cdot \delta\vec{\psi} + \text{ADJ}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}) \cdot \delta\vec{\psi} = 0 \quad (8)$$

ADJ is the adjoint model to  $\vec{\mathcal{E}}$ , the system projected in dual space. It consists of inverse-time ( $\tau \equiv t_a - t$ ) differential equations governing the Lagrange  $\vec{\lambda}$  multipliers' evolution through time. Determining these equations for the given  $\vec{\mathcal{E}}$  is crucial to the 4D-VAR method, as shall be shown. The second term is of little use:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\lambda}} \cdot \delta\vec{\lambda} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \delta\vec{\lambda} = 0 \quad (9)$$

restating that the model constraints  $\vec{\mathcal{E}} = 0$  must be respected, which is the original hypothesis.

## 5.3. MHD Adjoint Model

If the constraints  $\vec{\mathcal{E}}$  are the isothermal ideal MHD equations (Eqs. 1 2 3) then the state variables are  $\vec{\psi} = (\rho, \vec{B}, \vec{v})$  and Eq. 8 is given by:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho^*}{\partial\tau} &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\rho^* - \frac{c_s^2}{\rho^2} (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}\rho) \\ &= \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\rho^2} \vec{v}^* \times \vec{B} \right) \\ &= -\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\rho} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{B}^*}{\partial\tau} &= (\vec{\nabla} \times \vec{B}^*) \times \vec{v} - \frac{1}{\mu} \left( \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\rho} \vec{B} \times \vec{v}^* \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \left( \left( \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}^*}{\rho} \right) \right) \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{v}^*}{\rho} \right) \right) \\ &= -\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\vec{B}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{v}^*}{\partial\tau} &= \rho \vec{\nabla}\rho^* - \vec{B} \times (c \vec{\nabla} \times \vec{B}^*) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}^* - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v}^* - \nu \nabla^2 \vec{v}^* \\ &= -\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\vec{v}} \end{aligned} \quad (12)$$

with  $\vec{\lambda} = (\rho^*, \vec{B}^*, \vec{v}^*)$ . This adjoint model maps simulation errors over the assimilation window back to their initial state origin. It can be shown [3] (see annex A.3) that:

$$\vec{\lambda}(\tau = t_a) = \vec{\nabla}_{\vec{\psi}_0} \mathcal{J} \quad (13)$$

This relation is fundamental to 4D-VAR because both  $\mathcal{J}$  and  $\vec{\nabla}_{\vec{\psi}_0} \mathcal{J}$  are required for traditional minimization algorithms to operate.

We have constructed a numerical time-integrator for these equations similarly to our MHD implementation, using the same spectral decomposition and operators.

## 5.4. Minimization Algorithm

4D-VAR consists of minimizing the functional  $\mathcal{J}$  by optimally adjusting initial conditions using a minimization algorithm, in this work the conjugate gradient. This requires the cost function and its gradient in initial conditions space to be known for the current and all subsequent solutions. Our implementation is therefore centered around the conjugate gradient algorithm which iterates initial states until the minimum is found. Each iteration requires an initial calculation of  $\mathcal{J}$  provided by the MHD subprogram and observation followed by an evaluation of the gradient of  $\mathcal{J}$  by the ADJ subprogram. The ADJ subprogram requires the state variables at all times which are stored in memory from the current MHD calculation. Finally, the

conjugate gradient searches for the optimal step size ( $\|\delta \vec{\psi}_0\|$ ) through multiple calls to MHD with varying initial states along the gradient direction. Iterations of this type are conducted until  $\mathcal{J}$  is minimized. Fig. 3 illustrates simply the 4D-VAR minimization algorithm.

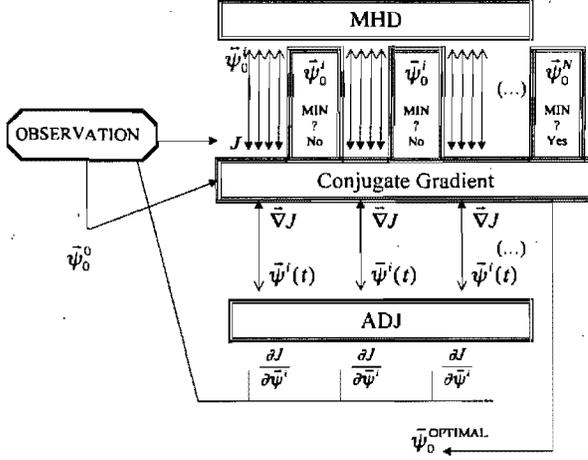


Figure 3: Schematic 4D-VAR algorithm. The main program consists of a conjugate gradient algorithm to which is connected two subprograms: MHD projects from input initial to output final state returning  $\mathcal{J}(\vec{\psi}_0^i)$  to the main program and ADJ projects adjoint variables from final to initial state with respect to the state variables at all times during the previous MHD run giving the current  $\vec{\nabla} \vec{\psi}_0 \mathcal{J}$ . Each iteration of the main program calls for an initial calculation of  $\mathcal{J}$  and  $\vec{\nabla} \vec{\psi}_0 \mathcal{J}$  for the current initial state after which the conjugate gradient searches for the optimal step-size that leads to the next iteration's first initial state through multiple calls to MHD.

## 6. EXPERIMENTATION

We have tested our 4D-VAR implementation with synthetically generated observations from our  $q_t = 1$  simulation. The algorithm first makes an imperfect initial guess  $\vec{\psi}_0^0$  using the “erroneous”  $q_t = 1.2$  configuration, giving our initial forecast an incorrect space-time trajectory due to this error in initial twist. Trajectory divergence is obvious in Fig. 4.

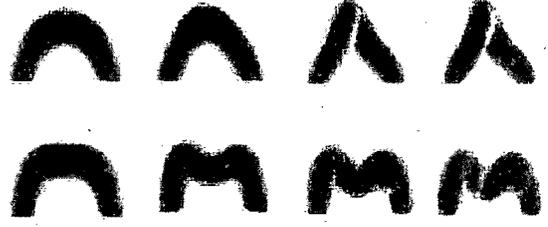


Figure 4: The top and bottom panels show isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$  of kinking flux ropes for  $q = 1.0$  and  $q = 1.2$  respectively. Times are  $t = 0, 3, 6, 10 \tau_A$  from left to right. The lower twist run is used as the true state to generate synthetic observations (OBS) and the higher twist run is the DNS therefore the initial state is introduced into the conjugate gradient as  $\vec{\psi}_0^0$  (see Fig. 3), the first guess solution.

We have used three distinct datasets to be assimilated over an initial time window  $t \in [0, t_a]$ :

$$\mathcal{H}_1 [\vec{B}^{\text{obs}}] = \vec{B}^{\text{obs}}(x, y, z, t) \quad (14)$$

$$\mathcal{H}_2 [\vec{B}^{\text{obs}}] = E_{xy}^{\text{obs}}(x, y, t) = \int_{L_z} \frac{B^{\text{obs}2}}{2\mu} dz \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_3 [\vec{B}^{\text{obs}}] = E^{\text{obs}}(t) = \int_{\Omega} \frac{B^{\text{obs}2}}{2\mu} d\vec{x} \quad (16)$$

Each of these sets implies its own cost function given in corresponding order:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (B_i - B_i^{\text{obs}})^2 d\vec{x} dt \quad (17)$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{t_a} \int_{L_y} \int_{L_x} \left( \int_{L_z} \frac{B^2}{2\mu} - E_{xy}^{\text{obs}} \right)^2 dx dy dt \quad (18)$$

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{t_a} \left( \int_{\Omega} \frac{B^2}{2\mu} d\vec{x} - E^{\text{obs}} \right)^2 dt \quad (19)$$

Note that these cost functions are greatly simplified. We have not included the background term and have

considered that observational error covariance matrix  $\mathcal{R}$  is the identity matrix which greatly simplifies observational error analysis. However, when considering real satellite observations, determination of  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{R}$  for the used inversion methods and the assimilated data will be an important and considerable work.

The results for our three datasets are given in Fig. 6 where we show the fully integrated magnetic energy time-series  $E(t)$  of the synthetic observations, the direct numerical simulation forecast (DNS) and the 4D-VAR optimized forecast. The data was provided for  $t \in [0, 0.05\tau_A]$  with  $0.025\tau_A$  resolution. The first panel shows how perfectly the algorithm corrects the initial state if complete and exact observations of the *erroneous* fields are available. Obviously, if such a perfect reading of the fields was possible, data assimilation would not be necessary. However, this experiment was useful to test the implementation. The two dimensional nature of the dataset for  $\mathcal{J}_2$  can be associated with realistic solar observations of the resolved line of sight magnetic field where the one dimensional dataset for  $\mathcal{J}_3$  corresponds loosely to global solar observables, possibly the whole-disk X-ray flux (realistic energy flux cannot be simulated with an isothermal non-radiative ideal MHD model of the plasma).

When averaged and not fully three dimensionally resolved datasets are assimilated as observations, although the trajectories are close initially, the non-uniqueness of solution (the minimum of the cost function) causes divergence of the trajectories over time thus shortening the predictability horizon of the forecast. A close look at Fig. 6 (panels *b* and *c*) shows that the  $\mathcal{J}_2$  cost function allowed for a slightly better optimal trajectory than  $\mathcal{J}_3$  when comparing with the observed total magnetic energy time-series.

In Fig. 6 panel *c*, although the magnetic energetics appear to agree considerably, insufficient data was available to adequately correct initial twist in the tube and the final forecast state is closer to the DNS forecast than the observed if considering magnetic field structure and its evolution. This is apparent in the bottom panels of Fig. 5. The top panels however, corresponding to the optimal  $\mathcal{J}_3$  solution, is considerably improved. Although the initial state has lost some smoothness and the final writhe is smaller than the true state's, both simulations are quite similar.

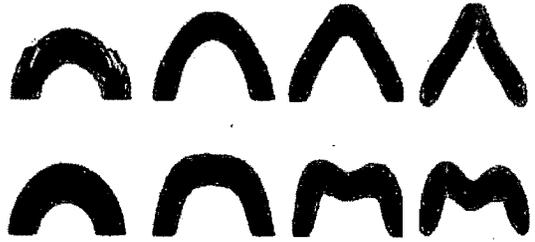


Figure 5: The top and bottom panels show isosurface  $\|\vec{B}\| = 1.1B_0$  of optimal kinking flux ropes for  $\mathcal{J}_2$  and  $\mathcal{J}_3$  respectively. Times are  $t = 0, 3, 6, 10 \tau_A$  from left to right.

## 7. CONCLUSION

This work is a first step towards assimilating real solar observational data into dynamic models of the corona through variational analysis. Using the isothermal MHD approximation and the 4D-VAR data assimilation technique, we can predict the behavior of a single flux rope in a pre-eruptive state. Further study would include energy release processes in the MHD model such as reconnection and thermal emission. Also, exploration into assimilating more data into the model is necessary given the failure to adequately correct twist in the  $\mathcal{J}_3$  case and the non-negligible error in the  $\mathcal{J}_2$  case. The non-uniqueness of possible initial states for a given assimilation window increases with the lack of completeness of the observations. By combining different incomplete or imperfect datasets (including density profiles, velocity fields, etc...) it should be possible to better constrain the minimization of the cost function.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been made possible thanks to FQRNT-NATEQ (Projet de recherche en équipe: Avalanches et prédiction des éruptions solaires) and NSERC (Discovery) research grants. Computations have been done at RQCHP (Réseau Québécois Calcul Haute Performance). We have used the FRPRMN routine from the Numerical Recipes Library. We thank Paul Charbonneau, Éric Bélanger and the Groupe de Recherche en Physique Solaire at the Université de Montréal for discussions and encouragements. The second author has an NSERC research grant. We have used the FRPRMN routine from the

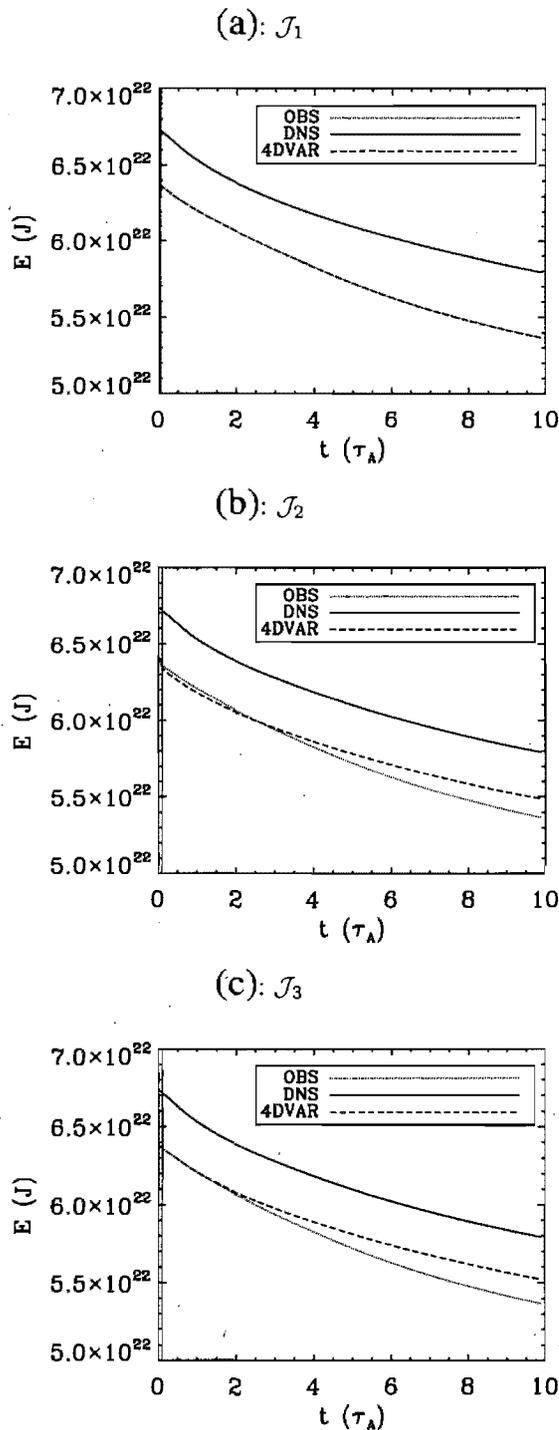


Figure 6: Total magnetic energy time-series (synthetic observation, direct numerical simulation (DNS) and optimal 4D-VAR runs) for  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$  and  $\mathcal{J}_3$  from top to bottom.

Numerical Recipes Library.

## REFERENCES

- [1] M. J. Aschwanden. *Physics of the Solar Corona, An introduction*. Springer Praxis, 2005.
- [2] A. A. Ballegoijen and Cranmer S. R. Hyperdiffusion as a mechanism for solar coronal heating. *ApJ*, 679:in press, jun 2008.
- [3] É Bélanger. Assimilation de données variationnelle quadridimensionnelle pour les écoulements turbulents biphasiques en eaux peu profondes. Master's thesis, Université de Montréal, 2002.
- [4] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods, ecmwf lecture notes. <http://www.ecmwf.org/>, 1999.
- [5] P. Caligari, M. Schuessler, and F. Moreno-Inertis. Emerging flux tubes in the solar convection zone. ii. the influence of initial conditions. *ApJ*, 502:481–+, jul 1998.
- [6] A. Caya, J. Sun, and C. Snyder. A comparison between 4dvar and the ensemble kalman filter techniques for radar data assimilation. *American Meteorology Society*, 2005.
- [7] R. Daley. *Atmospheric data analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [8] Y. Fan. Magnetic Fields in the Solar Convection Zone. *Living Reviews in Solar Physics*, 1:1–+, July 2004.
- [9] Y. Fan. Coronal Mass Ejections as Loss of Confinement of Kinked Magnetic Flux Ropes. *ApJ*, 630:543–551, September 2005.
- [10] Y. Fan, W. P. Abbett, and G. H. Fisher. The Dynamic Evolution of Twisted Magnetic Flux Tubes in a Three-dimensional Convecting Flow. I. Uniformly Buoyant Horizontal Tubes. *ApJ*, 582:1206–1219, jan 2003.
- [11] Y. Fan and S. E. Gibson. The Emergence of a Twisted Magnetic Flux Tube into a Preexisting Coronal Arcade. *ApJ*, 589:L105–L108, June 2003.

- [12] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods: Theory and Application*. SIAM, 1977.
- [13] K. Ide, A. Bennet, P. Courtier, M. Ghil, and A. Lorenc. Unified notation for data assimilation: operational. *J. Met. Soc. Japan*, 75(1B):181–189, 1997.
- [14] E. Kalnay, H. Li, T. Miyoshi, S.-C. Yang, and J. Ballabrera. 4d-var or ensemble kalman filter? *Tellus A*, 59(5):778–780, Oct 2007.
- [15] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory, An Introduction*. Prentice Hall, 1970.
- [16] D. W. Longcope. Quantifying Magnetic Reconnection and the Heat it Generates. In R. W. Walsh, J. Ireland, D. Danesy, and B. Fleck, editors, *SOHO 15 Coronal Heating*, volume 575, pages 198–+, 2004.
- [17] J. T. Schmelz. Are coronal loops isothermal. *ApJ*, 578:L161–L164, oct 2002.
- [18] C. J. Schrijver, M. DeRosa, and R. T. Metcalf. The non-potentiality of active-region coronae and the dynamics of the photospheric magnetic field. *ApJ*, 628:501–513, jul 2005.
- [19] C. Temperton. A generalized prime factor fft algorithm for any  $n = 2^p 3^q 5^r$ . *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13(3):676–686, may 1992.
- [20] T. Török and B. Kliem. The kink instability of a coronal magnetic loop as a trigger mechanism for solar eruptions. *Publications of the Astronomy Department of the Eotvos Lorand University*, 14:165–176, jun 2004.
- [21] T. Török and B. Kliem. Twisted coronal magnetic loops and the kink instability in solar eruptions. In D. Wolf, G. Münster, and M. Kremer, editors, *NIC Symposium 2004, Proceedings*, volume 20 of *NIC Series*, pages 25–36. John von Neumann Institute for Computing, 2004.
- [22] W. Wang, A. G. Burns, W. J. Hughes, J. A. Linker, J. G. Luhmann, L. G. Lyon, Z. Mikic, D. Odstrcil, S. C. Solomon, and M. Wiltberger. CISM space weather modeling of the Sun-to-Earth system. In *36th COSPAR Scientific Assembly*, volume 36 of *COSPAR, Plenary Meeting*, pages 2569–+, 2006.
- [23] B. T. Welsch, W. P. Abbett, M. DeRosa, G. Fisher, M. K. Georgoulis, K. Kusano, D. W. Longcope, B. Ravindra, and P. W. Schuck. Tests and comparisons of velocity inversion techniques. *ApJ*, 670:1434–1452, dec 2007.