

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Géométrie noncommutative et effet Hall quantique

par  
Jules Lambert

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

Mars, 2007

© Jules Lambert, 2007.



Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Géométrie noncommutative et effet Hall quantique**

présenté par:

Jules Lambert

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard Mackenzie,	président-rapporteur
Manu Paranjape,	directeur de recherche
Yvan Saint-Aubin,	membre du jury

Mémoire accepté le: .....

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous allons présenter des solutions dans la théorie de dimension fini de Maxwell-Chern-Simons en géométrie noncommutative en deux dimensions. Ces solutions sont utilisées pour décrire l'effet Hall quantique, grâce à une correspondance entre cette théorie et celle d'un fluide chargé où nous avons imposé une invariance sous des transformations des coordonnées eulériennes qui préservent l'aire. Cette invariance est importante puisqu'une caractéristique de l'effet Hall quantique est qu'il soit incompressible. Les solutions que nous allons trouver correspondent à des quasi-trous et à la rotation des électrons. Ces deux solutions sont une partie de l'effet Hall quantique puisque les électrons tournent dans un champ magnétique et les quasi-trous sont une partie de la description de l'effet Hall quantique fractionnaire par Laughlin.

**Mots clés:** Géométrie noncommutative, Effet Hall quantique, Maxwell-Chern-Simons.

## ABSTRACT

In this Master's thesis we will present some solutions in the Maxwell-Chern-Simons theory in noncommutative geometry in two finite dimensions. These solutions are used to describe the quantum Hall effect with a correspondence between this theory and that of a charged fluid where we have imposed an invariance under infinitesimal transformations of the Eulerian coordinates of the fluid that preserves the area. This invariance is important because the quantum Hall effect is incompressible. These solutions correspond to the rotation of the electrons and the quasi-holes. These two solutions are a part of the description of the quantum Hall effect because electrons rotate in a magnetic field and quasi-holes are a part of Laughlin's description of the fractional quantum Hall effect.

**Keywords:** noncommutative geometry, quantum Hall effect, Maxwell-Chern-Simons.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	iv
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	v
LISTE DES FIGURES . . . . .	vii
REMERCIEMENTS . . . . .	viii
AVANT-PROPOS . . . . .	ix
<b>CHAPITRE 1 :INTRODUCTION . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Géométrie Noncommutative . . . . .	1
1.1.1 Généralités . . . . .	1
1.1.2 Approche matricielle . . . . .	3
1.1.3 Produit de Moyal . . . . .	11
1.1.4 Phénoménologie . . . . .	14
1.2 Effet Hall quantique . . . . .	18
1.2.1 Le phénomène . . . . .	18
1.2.2 Électrons dans un champ magnétique . . . . .	20
1.2.3 Densité électronique . . . . .	25
1.2.4 Application d'un champ électrique . . . . .	27
1.3 Champ de jauge . . . . .	31
1.3.1 Champ de jauge en géométrie noncommutative . . . . .	33
1.3.2 Équations du mouvement . . . . .	36
1.4 Géométrie noncommutative comme théorie effective de l'effet Hall quantique . . . . .	39
1.4.1 Symétrie et équation de Gauss . . . . .	40
1.4.2 Équivalence entre les deux lagrangiens . . . . .	45

1.4.3	Quasi-trous . . . . .	51
1.5	Solutions d'autres auteurs . . . . .	55
1.5.1	Le lagrangien . . . . .	55
1.5.2	Équation du mouvement . . . . .	58
1.5.3	Solutions . . . . .	61
<b>CHAPITRE 2 : RÉSULTATS . . . . .</b>		<b>66</b>
2.1	Premiers résultats . . . . .	66
2.2	Article . . . . .	72
2.2.1	Détails sur l'article . . . . .	94
<b>CHAPITRE 3 : CONCLUSION . . . . .</b>		<b>96</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>98</b>
I.1	Commutateur . . . . .	x
I.2	Intégrale . . . . .	xii
II.1	Formalisme d'Heisenberg . . . . .	xiv

## LISTE DES FIGURES

- 1.1 Résistance en fonction du champ magnétique pour l'effet Hall quantique entier. Figure prise (et légèrement modifiée) dans [12] . . . . . 19
- 1.2 Résistance en fonction du champ magnétique pour l'effet Hall quantique fractionnaire. Figure prise (légèrement modifiée) dans [12] . . . 21

## **REMERCIEMENTS**

J'aimerais remercier mon directeur de recherche Manu Paranjape pour m'avoir guidé dans ma recherche. J'aimerais remercier Faiza Nebia et Jihène Bouchami pour m'avoir aidé à comprendre certains sujets. De plus, je remercie mon père Luc Doray pour la correction du français, sans qui ce mémoire aurait pu contenir un plus grand nombre d'erreurs de français.

## AVANT-PROPOS

Les travaux originaux faits par l'auteur du présent mémoire se trouvent dans le chapitre 2 de ce mémoire. Le chapitre 1 est une courte introduction à la géométrie noncommutative, à l'effet Hall quantique et à la géométrie noncommutative comme théorie effective de l'effet Hall quantique.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Géométrie Noncommutative

#### 1.1.1 Généralités

La géométrie noncommutative (GNC) peut se résumer simplement en disant que le commutateur des opérateurs de position ne commutent plus

$$[x_i, x_j] \neq 0. \quad (1.1)$$

Cette idée n'est pas nouvelle. En fait, le premier article sur la géométrie noncommutative fut écrit par Snyder [31] en 1947 pour tenter de régler les problèmes de divergence en électrodynamique quantique. Heisenberg avait proposé dans les années 30 de représenter l'espace par un réseau ce qui ferait apparaître un "cut-off" (la taille des cellules du réseau) en théorie des champs et qui ferait disparaître les divergences. Par contre, cette approche avait certains problèmes comme le fait que son réseau n'était pas invariant de Lorentz. Donc, dans une optique de continuité, l'idée de la géométrie noncommutative est née. C'est qu'en supposant que les coordonnées ne commutent plus, cela impose une relation d'incertitude entre ces coordonnées et par conséquent des volumes minimaux que l'on puisse mesurer (d'où l'idée de continuité du réseau). Par contre, l'idée fut vite oubliée, car quelques années plus tard, la renormalisation réussit très bien à résoudre le problème de ces divergences. Ce n'est que plusieurs années plus tard, dans les années 80, qu'Alain Connes [10] développa une théorie mathématique de la géométrie noncommutative. Pour mieux comprendre l'idée de Connes, il faut définir les algèbres  $C^*$  (bien que nous n'en n'aurons pas besoin pour ce mémoire). De façon simple (mais pas mathématique), une algèbre est constituée des règles de multiplication des éléments qui font partie d'un espace vectoriel. Par exemple, les algèbres de Lie possèdent la

propriété

$$[L_a, L_b] = f_{ab}^c L_c, \quad (1.2)$$

où  $f_{ab}^c$  est une constante (un nombre complexe) et les  $L$  sont des éléments de l'algèbre. Un exemple bien connu d'algèbre de Lie est les matrices de Pauli. Une algèbre  $C^*$  possède les propriétés suivantes. C'est une algèbre de Banach qui possède une opération appelée involution ( $*$ ) qui est son propre inverse, qui préserve la nature linéaire de l'algèbre et qui possède les propriétés suivantes

$$(C_1 C_2)^* = C_2^* C_1^*, \|C C^*\| = \|C\|^2 \quad (1.3)$$

où les  $C$  sont des éléments de l'algèbre  $C^*$  et  $\|C\|$  est la norme d'un de ces éléments. Or il existe un théorème du nom de Gelfand-Naimark qui dit qu'il y a une correspondance un à un entre une variété (un espace) et une algèbre abélienne (c'est-à-dire commutative)  $C^*$  des fonctions sur cet espace. Donc l'idée de Connes est de généraliser l'idée d'espace en associant des algèbres non-abéliennes (c'est-à-dire noncommutatives) à des structures que nous nommerons les espaces noncommutatifs. Dans les faits, la théorie mathématique de la géométrie noncommutative fait intervenir des mathématiques complexes dont l'auteur du présent mémoire n'a aucune connaissance, mais dont nous n'aurons pas besoin dans le cadre de ce mémoire. De plus, nous allons nous restreindre aux relations de commutation des coordonnées du type

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij} \quad (1.4)$$

où  $\theta_{ij}$  est un tenseur anti-symétrique dont les éléments sont réels. Ceci donne l'algèbre d'Heisenberg.<sup>1</sup> Ceci impose comme nous l'avons dit une relation d'incertitude

$$\Delta x_i \Delta x_j \geq \frac{|\theta_{ij}|}{2}. \quad (1.5)$$

Une question peut alors surgir : est-ce bien réaliste ou possible de considérer

---

<sup>1</sup>Par contre, il existe bien d'autres types d'espaces noncommutatifs comme la sphère floue (fuzzy) avec la relation  $[x_i, x_j] = i\alpha\epsilon_{ijk}x_k$  [17] ou l'espace  $\kappa$ -Minkowski avec la relation  $[x_0, x_i] = \frac{i}{\kappa}x_i$  [13].

que les coordonnées ne commutent pas? En mécanique quantique, bien qu'on les représente généralement sous forme de variables, il ne faut pas oublier que ce sont des opérateurs. Par exemple, ils ne commutent pas avec l'impulsion  $p$  (qui est alors représentée à l'aide d'une dérivée spatiale). Nous pouvons mieux le voir lorsque nous réécrivons le problème dans la représentation de  $p$  où  $p$  est une variable et les coordonnées des dérivées de l'impulsion. Donc les coordonnées sont des opérateurs et il n'y a pas a priori une raison pour laquelle ces opérateurs devraient commuter. Par contre, est-ce bien réaliste de supposer la GNC puisque cela détruit la notion même d'espace, à laquelle nous sommes habitués, par l'incertitude des coordonnées, car nous ne pouvons plus définir de points (puisque'il suppose de connaître parfaitement chacune des coordonnées). Cela peut sembler étrange, mais en mécanique quantique ordinaire nous avons déjà fait quelque chose de similaire. L'espace de phase est un espace où la notion de point est bien définie en mécanique classique. La quantification en mécanique quantique détruit la notion de point dans l'espace de phase de la même manière que la GNC détruit la notion de point dans l'espace spatial. En fait, en mécanique quantique l'espace de phase est un espace noncommutatif. Donc supposer la GNC n'est pas une idée complètement invraisemblable.

### 1.1.2 Approche matricielle

Pour traiter la GNC, il y a deux approches qui sont prises : soit de changer les opérateurs pour les coordonnées (comme supposer que ce sont des matrices, bien qu'en théorie nous pourrions prendre d'autres représentations comme des opérateurs différentiels) ou de changer la notion de produit tout en gardant la notion de variable pour les coordonnées. Pour la méthode matricielle, nous pouvons représenter les coordonnées en terme d'opérateurs de création et d'annihilation puisque l'on voit que la relation de commutation est très similaire. Par contre, les coordonnées sont hermitiennes et pas les opérateurs de création et d'annihilation. Donc si nous avons la relation de commutation

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij} = i\epsilon_{ij}\theta, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad (1.6)$$

alors nous pouvons poser

$$x_1 = \sqrt{\theta} \left( \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right), \quad x_2 = i\sqrt{\theta} \left( \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}} \right) \quad (1.7)$$

où  $a$  et  $a^\dagger$  sont les opérateurs de création et d'annihilation

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1|, \quad a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \quad (1.8)$$

Si nous calculons le commutateur, nous obtenons

$$[x_1, x_2] = \frac{i\theta}{2} [a + a^\dagger, a^\dagger - a] = i\theta [a, a^\dagger] = i\theta. \quad (1.9)$$

Par contre, ce n'est pas la seule façon de les définir. Il existe une classe de transformation qui permet de préserver la valeur de ce commutateur. Ce sont les transformations de Bogoliubov. Les transformations de Bogoliubov transforment une paire d'opérateurs de création et d'annihilation en une autre paire et donc préservent la valeur du commutateur. Par exemple, ajouter des constantes à ces opérateurs

$$a' = a + k_1, \quad a'^\dagger = a^\dagger + k_2 \quad (1.10)$$

ne change pas leur commutateur

$$[a', a'^\dagger] = [a + k_1, a^\dagger + k_2] = [a, a^\dagger] = 1. \quad (1.11)$$

Par conséquent c'est une transformation de Bogoliubov. Il y a aussi des transformations de Bogoliubov plus complexes comme

$$a' = \frac{a \cos(\varphi) + a^\dagger \sin(\varphi)}{\sqrt{2}}, \quad a'^\dagger = \frac{-a \sin(\varphi) + a^\dagger \cos(\varphi)}{\sqrt{2}} \quad (1.12)$$

qui préservent aussi le commutateur

$$\begin{aligned} [a', a'^{\dagger}] &= \frac{1}{2}[a \cos(\varphi) + a^{\dagger} \sin(\varphi), -a \sin(\varphi) + a^{\dagger} \cos(\varphi)] \\ &= \frac{1}{2}[a, a^{\dagger}] ((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2) = 1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nous pourrions aussi nous demander si le fait que les coordonnées ne commutent plus impose que les dérivées de ces coordonnées ne commutent plus. En fait, c'est exactement ce qui se passe. Nous rappelons que, dans le cas commutatif qui sera pareil en GNC, nous avons que

$$[\partial_x, f(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad (1.14)$$

car si nous prenons un opérateur quelconque  $A$

$$[\partial_x, f(x)]A = \partial_x f(x)A - f(x)\partial_x A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}A + f(x)\partial_x A - f(x)\partial_x A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}A. \quad (1.15)$$

Donc nous allons avoir plus particulièrement

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}. \quad (1.16)$$

Nous voyons que cette relation est très similaire à la relation de commutation des coordonnées. Cette relation est respectée si nous posons

$$\partial_i = \frac{i\epsilon_{ij}x_j}{\theta}, \quad (1.17)$$

où  $\epsilon$  est le tenseur anti-symétrique sous permutation d'indice et qui vaut  $\pm 1$  si tous ses indices sont différents, qui vaut zéro s'il y a au moins deux indices pareils et qui vaut un si tous ses indices sont en ordre croissant. Nous obtenons que

$$[\partial_i, x_j] = \frac{i\epsilon_{ik}}{\theta}[x_k, x_j] = \frac{i\epsilon_{ik}}{\theta}i\epsilon_{kj}\theta = \delta_{ij}. \quad (1.18)$$

Maintenant que nous avons la forme des dérivées nous pouvons calculer leurs commutateurs

$$[\partial_i, \partial_j] = \frac{i\epsilon_{ik}}{\theta} \frac{i\epsilon_{jl}}{\theta} [x_k, x_l] = \frac{i\epsilon_{ik}}{\theta} \frac{i\epsilon_{jl}}{\theta} i\epsilon_{kl}\theta = -\frac{i\epsilon_{ij}}{\theta}. \quad (1.19)$$

Ceci peut se réécrire avec les indices grecs et nous permet de définir  $w_{\mu\nu}$

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = iw_{\mu\nu}, w_{ij} = -\frac{\epsilon_{ij}}{\theta}, w_{0\mu} = w_{\mu 0} = 0, \mu = 0, 1, 2, \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (1.20)$$

où l'indice 0 correspond à la coordonnée temporelle. Nous pouvons réécrire les opérateurs de dérivées à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation et grâce aux équations (1.17) et (1.7)<sup>2</sup>

$$\partial_1 = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2\theta}}, \quad \partial_2 = -i \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2\theta}}. \quad (1.21)$$

Par contre, ce n'est pas parce que les opérateurs de dérivées ne commutent plus que l'ordre dans lequel nous dérivons est important. En fait, l'ordre dans lequel nous dérivons ne change rien si l'espace est noncommutatif<sup>3</sup>. Pour dériver avec l'opérateur il ne suffit pas d'appliquer l'opérateur, il faut utiliser l'action adjointe, c'est-à-dire utiliser le commutateur de la dérivée avec la fonction que nous désirons dériver comme nous l'avons vu pour (1.14). Donc, le fait que l'ordre de dérivation n'est pas important se résume à

$$[\partial_i, [\partial_j, f(x)]] = [\partial_j, [\partial_i, f(x)]]. \quad (1.22)$$

Nous voyons que c'est vrai en utilisant l'identité de Jacobi (I.2)

$$[\partial_i, [\partial_j, f(x)]] = [[\partial_i, \partial_j], f(x)] + [\partial_j, [\partial_i, f(x)]] = [\partial_j, [\partial_i, f(x)]], \quad (1.23)$$

<sup>2</sup>Ce n'est pas le seul choix possible, puisque comme nous l'avons déjà dit nous avons une certaine liberté de choix, car les  $x$  sont définis à une transformation de Bogoliubov près. D'ailleurs dans l'article nous allons choisir autre chose pour qu'ils soient plus conformes à notre ansatz. En fait, pour avoir la même forme il faudrait multiplier  $D$  par  $-i$ .

<sup>3</sup>Du moins, pour l'algèbre que nous utilisons.

car  $[\partial_i, \partial_j] = -\frac{i\epsilon_{ij}}{\theta}$  est un nombre et commute avec tous.

Nous pouvons nous rendre compte que l'intégrale peut être remplacée par une trace lorsque nous utilisons la méthode matricielle. Nous suivons ce qui est fait dans [33], mais nous allons nous restreindre à deux dimensions. Les coordonnées de notre espace noncommutatif vont être les  $x$  et les coordonnées de l'espace commutatif vont être  $\tilde{x}$  :

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (1.24)$$

Commençons par définir le symbole de Weyl qui va représenter la fonction dans l'espace noncommutatif (c'est-à-dire évaluer la fonction à  $x$ )<sup>4</sup>,

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) e^{ik_i x_i} \quad (1.25)$$

où  $\tilde{f}(k)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $f(\tilde{x})$ ,

$$\tilde{f}(k) = \int d^2 \tilde{x} e^{-ik_i \tilde{x}_i} f(\tilde{x}). \quad (1.26)$$

Ce symbole de Weyl est donc un peu comme la transformée de Fourier inverse dans notre espace noncommutatif. Nous allons définir une autre quantité, soit

$$\hat{\Delta}(\tilde{x}) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik_i x_i} e^{-ik_i \tilde{x}_i}. \quad (1.27)$$

Nous voyons que le symbole de Weyl peut se réécrire à l'aide de cette quantité :

$$\begin{aligned} \hat{W}[f] &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik_i x_i} \int d^2 \tilde{x} e^{-ik_i \tilde{x}_i} f(\tilde{x}) = \int d^2 \tilde{x} f(\tilde{x}) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik_i x_i} e^{-ik_i \tilde{x}_i} = \\ &= \int d^2 \tilde{x} f(\tilde{x}) \hat{\Delta}(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nous allons voir que ce symbole de Weyl représente la fonction dans l'espace pour

---

<sup>4</sup>Puisque  $x$  est un opérateur, son exponentiel n'est pas défini. Nous utilisons alors la série de Taylor de l'exponentielle et l'on remplace ensuite la variable par l'opérateur  $x$

la fonction exponentielle( $e^{ik_i x_i}$ )

$$\hat{W}[e^{ik_i x_i}] = \int d^2 \tilde{x} e^{ik_i \tilde{x}_i} \hat{\Delta}(\tilde{x}) = \int d^2 \tilde{x} e^{ik_i \tilde{x}_i} \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} e^{ik'_i x_i} e^{-ik'_i \tilde{x}_i}. \quad (1.29)$$

Si nous rassemblons les exponentielles des coordonnées commutantes et inversons les intégrales, nous obtenons

$$\hat{W}[e^{ik_i x_i}] = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} e^{ik'_i x_i} \int d^2 \tilde{x} e^{i(k_i - k'_i) \tilde{x}_i}. \quad (1.30)$$

À partir de la formule du Delta de Dirac

$$\delta(\tilde{x} - \tilde{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\tilde{x} - \tilde{y})}, \quad (1.31)$$

nous obtenons

$$\hat{W}[e^{ik_i x_i}] = \int d^2 k' e^{ik'_i x_i} \delta(k_i - k'_i) = e^{ik_i x_i}. \quad (1.32)$$

Nous avons défini la dérivée dans l'espace noncommutatif  $\partial$  avec (1.16) et (1.21).

Nous définissons  $\tilde{\partial}$

$$[\tilde{\partial}_i, \tilde{x}_j] = \delta_{ij} \quad (1.33)$$

la dérivée dans l'espace commutatif. Nous voyons que

$$[\partial_i, \hat{\Delta}(\tilde{x})] = -[\tilde{\partial}_i, \hat{\Delta}(\tilde{x})] = -\frac{\partial \hat{\Delta}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (1.34)$$

Aussi nous apercevons en utilisant la formule (I.10) de l'appendice (que nous pouvons utiliser puisque le commutateur entre  $\tilde{x}$  et la dérivée est un nombre (1.16) ) que

$$\hat{\Delta}(\tilde{x}) e^{v_i \tilde{\partial}_i} = e^{v_i \tilde{\partial}_i} \hat{\Delta}(\tilde{x} + [\tilde{x}, v_i \tilde{\partial}_i]) = e^{v_i \tilde{\partial}_i} \hat{\Delta}(\tilde{x} - v), \quad (1.35)$$

car  $[\tilde{x}_j, v_i \tilde{\partial}_i] = -v_j$ . Puisque la dérivée dans l'espace commutatif agit exactement comme moins la dérivée de l'espace noncommutatif sur  $\hat{\Delta}(\tilde{x})$  grâce à l'équation

(1.34), alors

$$\hat{\Delta}(\tilde{x})e^{-v_i\partial_i} = e^{-v_i\partial_i}\hat{\Delta}(\tilde{x} - v). \quad (1.36)$$

Donc si nous multiplions par une exponentielle nous trouvons

$$e^{v_i\partial_i}\hat{\Delta}(\tilde{x})e^{-v_i\partial_i} = \hat{\Delta}(\tilde{x} - v). \quad (1.37)$$

Nous pouvons faire la trace dans l'espace noncommutatif de cette quantité. Or nous pouvons utiliser la cyclicité de la trace et donc nous obtenons

$$Tr\hat{\Delta}(\tilde{x}) = Tr\hat{\Delta}(\tilde{x} - v) = \xi, \quad (1.38)$$

où la trace est la somme des éléments diagonaux dans l'espace  $x$  puisque  $x$  est un opérateur et par conséquent une matrice (1.7). Donc la trace de  $\hat{\Delta}(\tilde{x})$  ne dépend pas de la position en  $\tilde{x}$ . Alors c'est une constante que nous nommerons  $\xi$ . Nous pouvons faire la trace du symbole de Weyl (1.28)

$$Tr\hat{W}[f] = \int d^2\tilde{x}f(\tilde{x})Tr\hat{\Delta}(\tilde{x}) = \xi \int d^2\tilde{x}f(\tilde{x}). \quad (1.39)$$

Par conséquent, l'équivalent de l'intégrale en GNC est la trace au facteur  $\xi$  près. Choisir la valeur de  $\xi$  revient à choisir une normalisation. Dans certains articles comme [33]  $\xi$  est posé à 1. Pour l'étude de l'effet Hall quantique, nous posons  $\xi = \frac{1}{2\pi\theta}$ . Le  $\theta$  permet d'avoir une concordance entre les unités (puisque  $\theta$  possède les unités d'aire). Le symbole de Weyl ne possède pas les mêmes unités que la fonction  $f$  puisque c'est la fonction  $f$  appliqué dans l'espace noncommutatif. Or la trace ne change pas les unités, mais si on intègre sur l'espace, cela va multiplier les unités par des unités d'aire. Pour avoir les mêmes unités que la trace du symbole de Weyl, il faut que  $\xi$  ait les unités inverses de l'aire. De plus, plus loin dans ce mémoire nous allons montrer que si nous choisissons cette valeur de  $\xi$ , alors  $N$  électrons seront représentés par des matrices  $N \times N$ . Par contre, nous pourrions faire le raisonnement contraire, soit supposer que  $N$  électrons sont décrits par des

matrices  $N \times N$  pour montrer que la valeur de  $\xi$  est  $\xi = \frac{1}{2\pi\theta}$ . Finalement, le choix de  $\xi$  est conventionnel.

Le symbole de Weyl nous a permis d'écrire la fonction  $f$  dans l'espace non-commutatif à partir de la fonction  $f$  dans l'espace commutatif. Nous allons à présent faire le contraire, soit trouver la fonction  $f$  dans l'espace commutatif à partir de la fonction  $f$  dans l'espace noncommutatif, soit le symbole de Weyl. En premier calculons le produit de deux  $\hat{\Delta}(\tilde{x})$ . À partir de (1.27), nous avons

$$\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} e^{ik_i x_i} e^{-ik_i \tilde{x}_i} e^{ik'_i x_i} e^{-ik'_i \tilde{y}_i}. \quad (1.40)$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff (I.12) avec la valeur du commutateur

$$[ik_i x_i, ik'_j x_j] = -k_i k'_j [x_i, x_j] = -i\theta_{ij} k_i k'_j \quad (1.41)$$

pour obtenir

$$\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} e^{i(k_i+k'_i)x_i} e^{-i(k_i\tilde{x}_i+k'_i\tilde{y}_i)} e^{\frac{-i\theta_{ij}k_i k'_j}{2}}. \quad (1.42)$$

Dans cette formule, nous avons une coordonnée noncommutative et donc nous ré-écrivons cela avec (1.28), car comme nous l'avons dit le symbole de Weyl représente la fonction dans l'espace noncommutatif (et plus spécifiquement comme nous avons vu à partir de la formule (1.32) ) :

$$\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \int d^2\tilde{z} e^{i(k_i+k'_i)\tilde{z}_i} e^{-i(k_i\tilde{x}_i+k'_i\tilde{y}_i)} e^{\frac{-i\theta_{ij}k_i k'_j}{2}} \hat{\Delta}(\tilde{z}). \quad (1.43)$$

Alors si nous intégrons (fait dans l'appendice I.2) sur les  $k$  et  $k'$ , alors nous obtenons

$$\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y}) = \frac{1}{\pi^2\theta^2} \int d^2\tilde{z} \hat{\Delta}(\tilde{z}) e^{-2i\omega_{ij}(\tilde{x}_i-\tilde{z}_i)(\tilde{y}_j-\tilde{z}_j)}. \quad (1.44)$$

Si nous faisons le changement de variable

$$\tilde{z}'_i = \frac{2}{\theta} \tilde{z}_i, \quad d\tilde{z}'_i = \frac{2}{\theta} d\tilde{z}_i, \quad (1.45)$$

l'exposant devient

$$\frac{2i}{\theta} \epsilon_{ij} \tilde{x}_i \tilde{y}_j + i((\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1) \tilde{z}'_2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2) \tilde{z}'_1). \quad (1.46)$$

Si nous faisons la trace

$$Tr(\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y})) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \tilde{z} Tr \left( \hat{\Delta} \left( \frac{\theta \tilde{z}'}{2} \right) \right) e^{\frac{2i}{\theta} \epsilon_{ij} \tilde{x}_i \tilde{y}_j + i((\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1) \tilde{z}'_2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2) \tilde{z}'_1)}, \quad (1.47)$$

utilisons (1.38)

$$Tr(\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y})) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \tilde{z} \xi e^{\frac{2i}{\theta} \epsilon_{ij} \tilde{x}_i \tilde{y}_j + i((\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1) \tilde{z}'_2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2) \tilde{z}'_1)}, \quad (1.48)$$

et la formule du delta de Dirac (1.31) alors nous obtenons

$$Tr(\hat{\Delta}(\tilde{x})\hat{\Delta}(\tilde{y})) = \xi e^{\frac{2i}{\theta} \epsilon_{ij} \tilde{x}_i \tilde{y}_j} \delta(\tilde{x} - \tilde{y}) = \xi \delta(\tilde{x} - \tilde{y}), \quad (1.49)$$

où, pour la dernière égalité, nous remarquons que l'exposant est nul si  $\tilde{x} = \tilde{y}$ . Avec ceci nous trouvons la fonction associée à l'opérateur :

$$Tr(\hat{W}[f]\hat{\Delta}(\tilde{x})) = \int d^2 \tilde{y} f(\tilde{y}) Tr(\hat{\Delta}(\tilde{y})\hat{\Delta}(\tilde{x})) = \int d^2 \tilde{y} f(\tilde{y}) \xi \delta(\tilde{x} - \tilde{y}) = \xi f(\tilde{x}). \quad (1.50)$$

### 1.1.3 Produit de Moyal

Nous allons à présent chercher la fonction associée au produit de deux fonctions dans l'espace noncommutatif, c'est-à-dire quelle fonction dans l'espace commutatif dont le symbole de Weyl associé est la même que le produit de deux fonctions dans

l'espace noncommutatif. Nous cherchons  $f \star g$  tel que

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \widehat{W}[f \star g] = \int \frac{d^2\tilde{k}}{(2\pi)^2} \widetilde{f \star g}(\tilde{k}) e^{i\tilde{k}_i x_i}. \quad (1.51)$$

À l'aide de (1.25), nous avons

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2k d^2k' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik_i x_i} e^{ik'_j x_j}. \quad (1.52)$$

Si nous utilisons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (I.12) :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2k d^2k' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{i(k_i+k'_i)x_i} e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}k_i k'_j}. \quad (1.53)$$

Nous faisons un changement de variables pour  $k$ , soit  $\tilde{k} = k + k'$  où  $k'$  est une constante. Nous obtenons donc

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2\tilde{k} d^2k' \tilde{f}(\tilde{k} - k') \tilde{g}(k') e^{i\tilde{k}_i x_i} e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}\tilde{k}_i k'_j}, \quad (1.54)$$

car  $\theta_{ij}k'_i k'_j = 0$  comme  $\theta$  est anti-symétrique. Nous avons à partir de (1.25) et (1.54) la transformée de Fourier de  $f \star g$  :

$$\widetilde{f \star g}(\tilde{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k' \tilde{f}(\tilde{k} - k') \tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}\tilde{k}_i k'_j}. \quad (1.55)$$

Donc la fonction  $f \star g(\tilde{x})$  est donnée par

$$f \star g(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\tilde{k} \widetilde{f \star g}(\tilde{k}) e^{i\tilde{k}_i \tilde{x}_i} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2\tilde{k} d^2k' \tilde{f}(\tilde{k} - k') \tilde{g}(k') e^{i\tilde{k}_i \tilde{x}_i} e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}\tilde{k}_i k'_j}. \quad (1.56)$$

Nous pouvons alors voir que ceci peut se réécrire d'une autre manière, soit

$$f \star g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) e^{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_k \theta_{ki} \overrightarrow{\partial}_i} g(\tilde{x}) \quad (1.57)$$

où le sens des dérivées indique ce qu'elles dérivent. Ici les dérivées ne sont pas les opérateurs de dérivées, mais plutôt un opérateur qui agit comme son action

adjointe. Par conséquent, appliquées à une fonction, elles donnent la dérivée de la fonction (contrairement à l'opérateur de dérivée qui, lui, donnait la dérivée de la fonction plus la fonction fois l'opérateur de dérivée).

Pour constater que c'est vrai nous allons montrer que

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2k d^2k' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{\frac{i}{2} \tilde{\theta}_k \theta_{ki} \vec{\partial}_i} e^{ik'_j \tilde{x}_j}. \quad (1.58)$$

est le produit  $f \star g(\tilde{x})$  puisque nous avons écrit les fonctions avec leurs transformées de Fourier. Nous rappelons que le sens des flèches des dérivées indique ce qu'elles dérivent (la flèche vers la gauche veut dire que la dérivée agit sur la fonction  $f$  et la dérivée vers la droite veut dire qu'elle agit sur la fonction  $g$  (ces opérateurs ne sont pas les opérateurs de dérivées, mais des opérateurs qui agissent comme l'action adjointe des opérateurs de dérivées, c'est-à-dire  $\vec{\partial}_l g(\tilde{x}) = \frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_l}$ , alors que pour l'opérateur de dérivée c'est  $(\vec{\partial}_l g(\tilde{x})) = \frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_l} + g(\tilde{x}) \vec{\partial}_l$ ). Nous réécrivons l'exponentielle avec les opérateurs à l'aide de sa série de Taylor. Nous pouvons ensuite appliquer l'opérateur de dérivée à gauche sur l'exponentielle associée à  $f$  (celui avec  $k$ ). Chaque dérivée de l'exponentielle va redonner la même chose fois  $ik$ . Donc cela ne fait que remplacer l'opérateur de dérivée par  $ik$  dans la série de Taylor et par extension à l'exponentielle :

$$e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{\frac{i}{2} \tilde{\theta}_k \theta_{ki} \vec{\partial}_i} e^{ik'_j \tilde{x}_j} = e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{\frac{-i}{2} k_i \theta_{il} \vec{\partial}_l} e^{ik'_j \tilde{x}_j}. \quad (1.59)$$

Nous faisons la même chose avec l'opérateur de dérivée vers la droite :

$$e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{\frac{-i}{2} k_i \theta_{il} \vec{\partial}_l} e^{ik'_j \tilde{x}_j} = e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{\frac{-i}{2} k_i \theta_{ij} k'_j} e^{ik'_j \tilde{x}_j}. \quad (1.60)$$

Donc nous remplaçons cela dans (1.58) et nous obtenons

$$f \star g = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2k d^2k' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik_i \tilde{x}_i} e^{ik'_j \tilde{x}_j} e^{-i \frac{k_i \theta_{ij} k'_j}{2}}. \quad (1.61)$$

Encore une fois si nous posons  $\tilde{k} = k + k'$  et en se rappelant que  $\theta^{ij} k'_i k'_j = 0$ , car

$\theta$  est anti-symétrique, alors nous obtenons ce que nous avons, soit (1.56). Donc effectivement, nous pouvons écrire le produit étoile à l'aide de (1.57). Ce produit s'appelle le produit de Moyal (ou Groenewold-Moyal).

L'autre méthode utilisée pour traiter la géométrie noncommutative consiste à utiliser ce produit et de continuer à faire les calculs normalement ensuite. Nous pouvons vérifier que nous obtenons la bonne réponse pour le commutateur des coordonnées :

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]_\star = \tilde{x}_i \star \tilde{x}_j - \tilde{x}_j \star \tilde{x}_i = \tilde{x}_i \left(1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_k \theta_{kl} \overrightarrow{\partial}_l + \dots\right) \tilde{x}_j - \tilde{x}_j \left(1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_k \theta_{kl} \overrightarrow{\partial}_l + \dots\right) \tilde{x}_i. \quad (1.62)$$

Comme toutes les dérivées d'ordre supérieur à un vont disparaître, alors

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]_\star = \tilde{x}_i \tilde{x}_j - \tilde{x}_j \tilde{x}_i + \frac{i\theta_{kl}}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta_{il}) = i\theta_{ij}. \quad (1.63)$$

#### 1.1.4 Phénoménologie

Si nous supposons la GNC, cela aura des conséquences physiques. Premièrement la physique est présentement décrite en géométrie commutative et elle décrit bien la nature. Si la nature est vraiment noncommutative, alors elle doit l'être peu, car sinon nous l'aurions remarqué. Le paramètre  $\theta$  doit donc être petit. Nous pouvons remarquer que, dans nos commutateurs (1.4), il n'y a que des indices latins. La raison est que si nous prenons le temps noncommutatif, alors nous avons des problèmes de causalité [30], ce qui n'est pas désirable. Aussi la GNC viole l'invariance de Lorentz (bien que l'idée initiale était de régler les problèmes d'invariance de Lorentz comme nous l'avons déjà indiqué, mais Snyder utilisait une algèbre différente de la nôtre), car les transformations de Lorentz mélangent les coordonnées spatiales et le temps qui, lui, doit être commutatif. Plusieurs processus ont été calculés en GNC comme les sections efficaces de collisions et permettent de mettre des contraintes sur le paramètre  $\theta$ . Par contre, c'est pour des réactions à basse énergie que nous réussissons le mieux à contraindre le paramètre  $\theta$ . La GNC peut aussi en partie expliquer les résultats de l'expérience PVLAS (Polarizzazione del Vuoto con

LASer) qui a observé la rotation de la polarisation de la lumière dans un champ magnétique [7]. L'explication favorisée est celle qui invoquerait des particules nommées axions. Par contre, la géométrie noncommutative peut faire le même effet, mais les contraintes déjà imposées sur le paramètre  $\theta$  obligent que la GNC ne peut jouer qu'un rôle partiel dans l'expérience PVLAS (si un rôle elle a). Pour plus de détails sur la phénoménologie de la géométrie noncommutative on peut lire [16]. La contrainte la plus forte sur le paramètre  $\theta$  vient en fait du spectre de l'atome d'hydrogène [6] et de la comparaison avec le décalage de Lamb en théorie des champs. Nous reprenons ici le calcul de l'atome d'hydrogène fait dans [6]. Les relations de commutation en GNC donnent

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, [x_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, [P_i, P_j] = 0. \quad (1.64)$$

De plus, l'hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$H = \frac{P \cdot P}{2m} - \frac{Ze^2}{\sqrt{x \cdot x}}. \quad (1.65)$$

Nous faisons le changement de variables pour retomber sur les relations de commutation ordinaires :

$$\tilde{x}_i = x_i + \frac{\theta_{ij}P_j}{2\hbar}, \tilde{P}_i = P_i. \quad (1.66)$$

Nous voyons que

$$[\tilde{x}_i, \tilde{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, [\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] = 0. \quad (1.67)$$

De plus, nous avons

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = \left[ x_i + \frac{\theta_{ik}P_k}{2\hbar}, x_j + \frac{\theta_{jl}P_l}{2\hbar} \right] = [x_i, x_j] + \left[ x_i, \frac{\theta_{jl}P_l}{2\hbar} \right] + \left[ \frac{\theta_{ik}P_k}{2\hbar}, x_j \right] = 0. \quad (1.68)$$

Nous remarquons que les relations de commutation des coordonnées tildes sont les mêmes qu'en mécanique quantique ordinaire. Nous pouvons donc résoudre le problème par les mêmes méthodes qu'en mécanique quantique sauf en terme des coordonnées tildes. Pour ce faire nous allons réécrire l'hamiltonien en terme de ces

nouvelles variables. Or comme nous l'avons déjà dit,  $\theta$  doit être petit, car sinon nous nous en serions déjà aperçu. Par conséquent, il suffit de calculer la première perturbation en  $\theta$  de l'atome d'hydrogène. La seule perturbation va être sur le potentiel :

$$\begin{aligned} V &= \frac{-Ze^2}{\sqrt{x \cdot x}} = \frac{-Ze^2}{\sqrt{(\tilde{x}_i - \frac{\theta_{ik}}{2\hbar} \tilde{P}_k)(\tilde{x}_i - \frac{\theta_{il}}{2\hbar} \tilde{P}_l)}} \\ &\simeq \frac{-Ze^2}{\sqrt{\tilde{x}_i \tilde{x}_i - \frac{\theta_{ik}}{2\hbar} \tilde{P}_k \tilde{x}_i - \frac{\theta_{il}}{2\hbar} \tilde{P}_l \tilde{x}_i}} \simeq \frac{-Ze^2}{\tilde{r}} - \frac{Ze^2 \theta_{ik} \tilde{x}_i \tilde{P}_k}{2\hbar \tilde{r}^3} \end{aligned}$$

où  $\tilde{r}^2 = \tilde{x}_i \tilde{x}_i$ . Nous utilisons le fait  $\theta_{ik}$  est nul si  $i = k$  pour commuter nos  $P$  et nos  $x$ . Maintenant, nous rappelons la méthode perturbative en mécanique quantique. La première perturbation de l'énergie est donnée par

$$\Delta E = \langle \psi | W | \psi \rangle \quad (1.69)$$

où  $W$  est la perturbation. Donc, cela devient

$$\Delta E = -\frac{Ze^2}{2\hbar} \langle \psi | \frac{\theta_{ik} \tilde{x}_i \tilde{P}_k}{\tilde{r}^3} | \psi \rangle. \quad (1.70)$$

Nous posons que

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k, \quad (1.71)$$

ce que nous avons le droit de faire, puisque  $\theta_{ij}$  est anti-symétrique et possède trois paramètres indépendants. De plus, nous savons que le moment angulaire est donné par

$$\tilde{L} = \tilde{r} \times \tilde{p} = \epsilon_{ijk} \tilde{x}_i \tilde{P}_j \hat{x}_k, \quad (1.72)$$

où  $\hat{x}_k$  est le vecteur de norme 1 dans la direction  $k$ . Donc nous obtenons que (en posant le vecteur  $\theta = \theta_k \hat{x}_k$ )

$$\tilde{L} \cdot \theta = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{x}_i \tilde{P}_j \theta_k. \quad (1.73)$$

La perturbation d'énergie devient

$$\Delta E = -\frac{Ze^2}{4\hbar} \langle \psi | \frac{L \cdot \theta}{\tilde{r}^3} | \psi \rangle \quad (1.74)$$

qui est très similaire à la perturbation spin-orbite. À partir de ce résultat et d'autres sur le décalage de Lamb, nous pouvons en déduire [6]

$$\theta \leq \frac{1}{(107eV)^2}. \quad (1.75)$$

Ceci est très petit, mais ceci est en unité naturelle ( $c = 1, \hbar = 1$ ). Comme  $\theta$  possède les unités d'aire, nous obtenons que

$$\theta \leq 3,9 * 10^{-40} m^2. \quad (1.76)$$

Cela représente l'aire d'un carré dont les côtés seraient de  $1,98 * 10^{-20} m$ , ce qui est très petit.

Alors pourquoi étudier la GNC si ses effets sont minuscules et qu'ils n'ont jamais été observés. Une des raisons est pour régler le problème entre la mécanique quantique et la relativité générale, car elles sont incompatibles. La GNC revient un peu à quantifier l'espace et donc espère répondre à certains problèmes quant à la quantification de la relativité générale (qui est justement une théorie de l'espace). Certaines personnes s'intéressent aussi à retrouver le modèle standard en GNC. La théorie des cordes s'intéresse aussi à la GNC, car elle partage des similitudes avec les théories des branes D0. Par contre, elle a eu un intérêt dans un tout autre domaine qui est l'étude effective de l'effet Hall quantique fractionnaire. Mais qu'est-ce que l'effet Hall quantique fractionnaire ?

## 1.2 Effet Hall quantique

### 1.2.1 Le phénomène

L'effet Hall quantique est un phénomène qui se produit quand nous refroidissons proche du zéro absolu une interface entre deux semi-conducteurs et que nous mesurons la résistance électrique perpendiculaire au courant en fonction d'un fort champ magnétique transversal à l'interface. Plus exactement, nous prenons cette interface plus longue dans la direction du courant pour que le courant et le champ électrique dans l'interface soient approximativement constants. Ensuite nous mesurons la différence de potentiel entre deux points de l'interface le long du côté parallèle au courant. Ceci nous permet de calculer la résistance dans la direction du courant. Nous pouvons aussi mesurer la différence de potentiel entre deux points à la même longueur dans la direction du courant, mais des deux côtés opposés dans la direction perpendiculaire au courant. Ceci nous permettra de calculer la résistance dans cette direction. Dans les deux cas, pour calculer la résistance, il suffit de diviser la différence de potentiel par l'intensité du courant électrique. En 1980, von Klitzing a observé l'effet Hall quantique entier ce qui consiste à ce que la résistance dans la direction perpendiculaire au courant forme des plateaux en fonction du champ magnétique comme nous le voyons sur la figure (1.1). Ces plateaux se forment à des valeurs du champ magnétique proportionnelles à des fractions entières (fraction du type  $\frac{1}{n}$  où  $n$  est un entier). Ce phénomène a pu être relativement bien compris de façon théorique. Par contre, deux années après la découverte de von Klitzing, l'effet Hall quantique fractionnaire fut découvert par Tsui, Störmer et Gossard. C'est essentiellement la même chose sauf qu'en plus nous observons des plateaux aux fractions non entières (fraction du type  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  n'ont pas de facteur commun ou plus simplement fraction qui n'est pas entière) du champ magnétique comme nous pouvons le voir sur la figure (1.2). Par contre, la description théorique s'est révélée beaucoup plus ardue. En fait, c'est Laughlin qui trouva une fonction d'onde pour

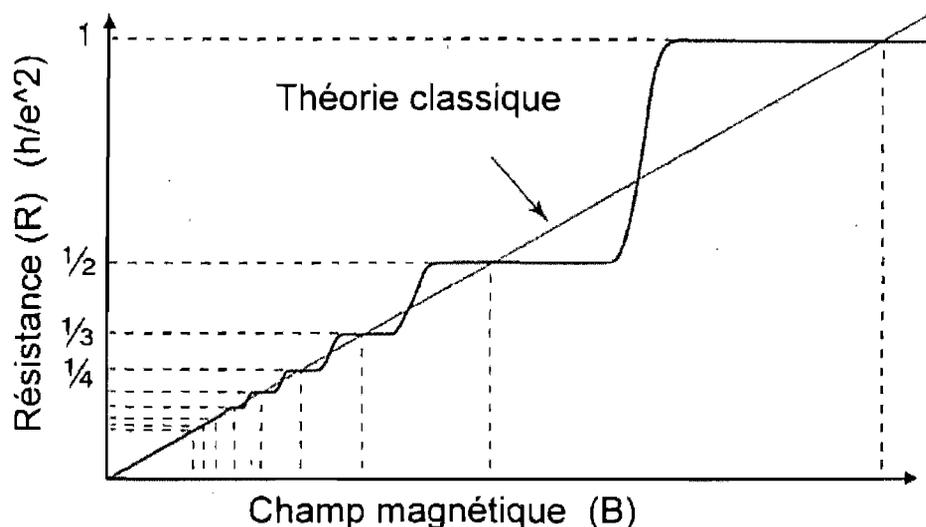


Figure 1.1 – Résistance en fonction du champ magnétique pour l’effet Hall quantique entier. Figure prise (et légèrement modifiée) dans [12]

décrire le comportement collectif des électrons :

$$\psi_{\text{Laughlin}} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\frac{1}{\nu}} e^{\frac{-1}{2} \sum_i z_i z_i^*} \quad (1.77)$$

où  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  représentent les coordonnées des électrons et l’indice identifie l’électron. Pour l’effet Hall quantique entier  $\nu$  est un entier, mais Laughlin a généralisé avec  $\nu$  fractionnaire. Bien que ce soit une généralisation, cette fonction possède certaines caractéristiques faisant d’elle une bonne candidate. C’est cette fonction d’onde et les résultats qui en découlent qui lui valurent, à lui et à des expérimentateurs, le prix Nobel en 1998. L’interprétation de cette fonction d’onde est que les électrons sont représentés par des quasi-particules ayant n’importe quelle statistique (celles des fermions, celles des bosons ou d’autres “entre celles là”) qui se nomment des anyons. Ces particules ne peuvent exister que dans un univers en une ou deux dimensions spatiales, mais l’interface est très mince donc c’est approximativement en deux dimensions. Cette description correspond bien à ce que l’on observe expérimentalement. Par contre, Laughlin n’a pas obtenu sa fonction d’onde à partir d’un lagrangien ou d’une théorie dynamique, donc le problème n’est pas complètement compris. Il semble clair que nous ne pourrions pas résoudre les

équations du mouvement pour tous ces électrons de façon exacte, donc la recherche s'oriente vers des théories effectives qui décriraient le comportement général de ce système. C'est justement ce que nous tentons de faire dans ce mémoire. Il y a plusieurs bonnes raisons autres le fait que ce phénomène soit mal compris pour l'étudier. Nous mesurons très précisément la constante de structure fine ( $\alpha$ ) à partir de ce phénomène. De plus, depuis quelques années, la possibilité de faire des ordinateurs quantiques topologiques avec l'effet Hall quantique est devenue une possibilité théorique [29]. Bien des théories effectives de l'effet Hall sont décrites par des solitons qui sont des solutions qui possèdent des charges topologiques (des charges conservées, mais pas à partir du théorème de Noether). Cette conservation de charge assure une stabilité aux solutions permettant à la fonction d'onde de ne pas s'effondrer facilement, ce qui serait un très grand avantage pour un ordinateur quantique.

### 1.2.2 Électrons dans un champ magnétique

Nous allons traiter un peu de l'effet Hall quantique comme dans [12]. Classiquement un électron dans un plan soumis à un champ magnétique perpendiculaire à ce plan ressent une force

$$F = ev \times B \iff m \frac{d^2x}{dt^2} = eB \frac{dy}{dt}, m \frac{d^2y}{dt^2} = -eB \frac{dx}{dt} \quad (1.78)$$

qui est solutionné par

$$x = R \sin(\omega t + \varphi) + x_0, y = R \cos(\omega t + \varphi) + y_0, \omega = \frac{eB}{m}. \quad (1.79)$$

Nous pouvons alors calculer l'énergie

$$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{R^2e^2B^2}{2m}. \quad (1.80)$$

En mécanique quantique, un électron dans un plan soumis à un champ magné-

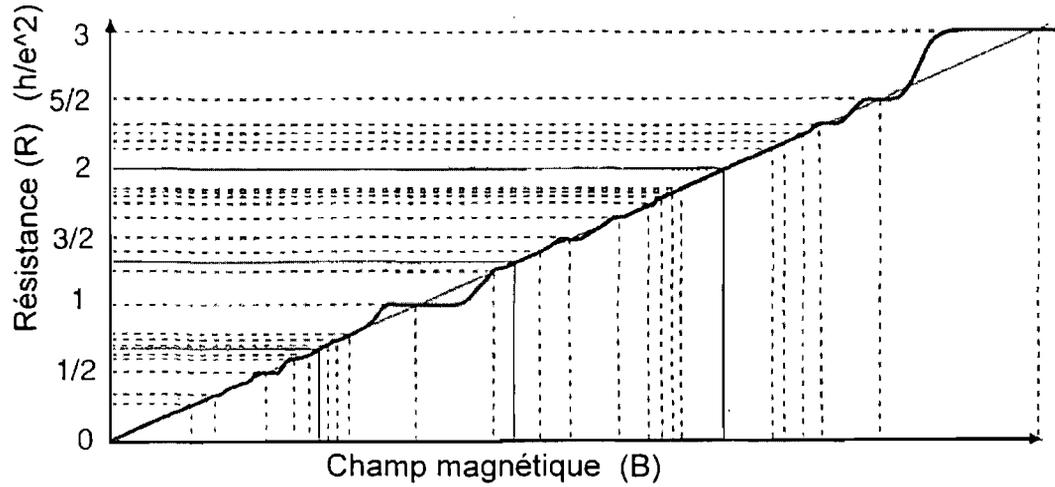


Figure 1.2 – Résistance en fonction du champ magnétique pour l'effet Hall quantique fractionnaire. Figure prise (légèrement modifiée) dans [12]

tique possède l'hamiltonien suivant

$$H = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) \quad (1.81)$$

où  $P_i = p_i + eA_i$  est l'impulsion covariante,  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$  et les  $A_i$  éléments du potentiel vecteur. Or  $B = \nabla \times A$ . Donc  $A_1 = -B\alpha_1 x_2$  et  $A_2 = B\alpha_2 x_1$  où  $\alpha_2 + \alpha_1 = 1$ . Alors nous posons  $A_i = -B\alpha_i \epsilon_{ij} x_j$  (mais il n'y a pas de sommation sur les indices  $i$ ). Nous pouvons calculer le commutateur des  $P$  :

$$[P_i, P_j] = [p_i - eB\alpha_i \epsilon_{ik} x_k, p_j - eB\alpha_j \epsilon_{jl} x_l] = ieB\hbar\epsilon_{ij}(-\alpha_j - \alpha_i) = -ieB\hbar\epsilon_{ij}. \quad (1.82)$$

Nous définissons les coordonnées de centre de rotation comme (nous verrons plus loin pourquoi elles représentent effectivement les coordonnées autour desquelles tourne l'électron)

$$X_i = x_i - \frac{\epsilon_{ij} P_j}{eB}. \quad (1.83)$$

Regardons les relations de commutation que nous obtenons

$$[x_i, P_j] = [x_i, p_j - eB\alpha_j \epsilon_{jk} x_k] = i\delta_{ij}\hbar. \quad (1.84)$$

Donc nous obtenons pour le commutateur des coordonnées de centre de rotation

$$[X_i, X_j] = \left[ x_i - \frac{\epsilon_{ik} P_k}{eB}, x_j - \frac{\epsilon_{jl} P_l}{eB} \right] = \frac{2i\epsilon_{ij}\hbar}{eB} - \frac{i\epsilon_{ik}\epsilon_{jl}eB\hbar\epsilon_{kl}}{(eB)^2} = \frac{i\epsilon_{ij}\hbar}{eB}, \quad (1.85)$$

car  $\epsilon_{ik}\epsilon_{jl}\epsilon_{kl} = \epsilon_{ij}$ . Bien que ce ne soit pas la raison pour laquelle nous prenons la géométrie noncommutative pour décrire l'effet Hall, nous remarquons quand même un lien ici. Les coordonnées commutent, mais pas les coordonnées du point autour duquel la particule tourne, et donc la notion de point n'existe plus pour ces coordonnées à cause du principe d'incertitude. Par conséquent, les électrons ne tournent plus exactement autour d'un point. Aussi le commutateur des coordonnées de centre de rotation et de l'impulsion covariante devient

$$[X_i, P_j] = \left[ x_i - \frac{\epsilon_{ik} P_k}{eB}, P_j \right] = i\delta_{ij}\hbar + i\epsilon_{ik}\hbar\epsilon_{kj} = 0, \quad (1.86)$$

car  $\epsilon_{ik}\epsilon_{kj} = -\delta_{ij}$ . Nous voyons que notre hamiltonien s'est écrit avec seulement une sous-partie des opérateurs ce qui, comme nous le verrons plus loin, apportera une dégénérescence à notre hamiltonien. De plus, nous remarquons que leurs relations de commutation sont très similaires à celles des opérateurs de création. Donc nous réécrivons nos opérateurs en terme d'opérateurs de création :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2eB\hbar}}(P_1 - iP_2), a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2eB\hbar}}(P_1 + iP_2), \quad (1.87)$$

$$b = \frac{\sqrt{eB}}{\sqrt{2\hbar}}(X_1 + iX_2), b^\dagger = \frac{\sqrt{eB}}{\sqrt{2\hbar}}(X_1 - iX_2). \quad (1.88)$$

Puisque les  $X$  et les  $P$  commutent, alors  $[a, b] = [a^\dagger, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0$ . Aussi nous calculons les commutateurs des  $a$  et  $b$  :

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2eB\hbar}[P_1 - iP_2, P_1 + iP_2] = 1, \quad (1.89)$$

$$[b, b^\dagger] = \frac{eB}{2\hbar}[X_1 + iX_2, X_1 - iX_2] = 1. \quad (1.90)$$

Nous pouvons montrer que

$$a^\dagger a + a a^\dagger = \frac{1}{2eB\hbar} ((P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2) + (P_1 - iP_2)(P_1 + iP_2)) = \frac{1}{eB\hbar} (P_1^2 + P_2^2). \quad (1.91)$$

De la même manière, nous montrons que

$$bb^\dagger + b^\dagger b = \frac{eB}{\hbar} (X_1^2 + X_2^2). \quad (1.92)$$

L'hamiltonien s'écrit en fonction des  $P$  seulement et donc seulement en terme des  $a$  à l'aide de (1.91) :

$$H = \frac{eB\hbar}{2m} (a^\dagger a + a a^\dagger) = \frac{eB\hbar}{m} (a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \frac{eB\hbar}{m} (N_a + \frac{1}{2}). \quad (1.93)$$

Cet hamiltonien est celui d'un oscillateur harmonique qui possède des niveaux d'énergie qui sont les valeurs propres de l'opérateur nombre  $N_a = a^\dagger a$ .

Les différents niveaux d'énergie que nous obtenons sont les niveaux de Landau. Nous remarquons aussi que les différentes solutions qui possèdent des valeurs propres différentes pour l'opérateur nombre associé aux  $b$  ( $N_b = b^\dagger b$ ), vont toutes donner la même énergie si elles ont la même valeur propre pour  $N_a$ . Cela apporte une dégénérescence de ces niveaux de Landau. Cette dégénérescence est associée au moment angulaire des électrons. Bien que le moment angulaire soit invariant de jauge, les opérateurs  $a$  et  $b$  ne le sont pas. Or ils ont un lien particulier avec le moment angulaire dans la jauge symétrique, soit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Donc l'impulsion s'écrit dans cette jauge comme

$$p_i = P_i + \frac{eB\epsilon_{ij}x_j}{2} = P_i + \frac{eB\epsilon_{ij}}{2} \left( X_j + \frac{\epsilon_{jk}P_k}{eB} \right) = \frac{P_i}{2} + \frac{eB\epsilon_{ij}X_j}{2}. \quad (1.94)$$

Le moment angulaire devient avec l'aide de (1.86), (1.91) et (1.92)

$$\begin{aligned} L = x_1 p_2 - x_2 p_1 &= \left( X_1 + \frac{P_2}{eB} \right) \left( \frac{P_2}{2} - \frac{eBX_1}{2} \right) - \left( X_2 - \frac{P_1}{eB} \right) \left( \frac{P_1}{2} + \frac{eBX_2}{2} \right) \\ &= -\frac{eB}{2}(X_1^2 + X_2^2) + \frac{1}{2eB}(P_1^2 + P_2^2) = -\frac{\hbar}{2}(bb^\dagger + b^\dagger b) + \frac{\hbar}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \end{aligned}$$

qui s'écrit alors en terme d'opérateurs nombre :

$$L = \hbar(-b^\dagger b + a^\dagger a) = \hbar(-N_b + N_a). \quad (1.95)$$

Donc nous voyons que la dégénérescence des  $b$  dans l'hamiltonien est due au moment angulaire. Cette dégénérescence est infinie pour tous les niveaux de Landau. Par contre, physiquement les électrons ne vont pas tous aller vers le plus bas état d'énergie (malgré qu'il existe une infinité d'états accessibles) à cause du principe d'exclusion de Fermi comme nous le verrons plus loin.

Nous allons regarder le problème dans le formalisme d'Heisenberg qui consiste à faire évoluer dans le temps les opérateurs plutôt que la fonction d'onde dans le formalisme de Schrödinger (pour un rappel du formalisme d'Heisenberg, voir l'annexe II). Regardons comment évoluent nos opérateurs  $X$ . Or comme ils sont juste des fonctions des  $b$ , alors ils commutent avec l'hamiltonien et donc sont des constantes du mouvement. Plus spécifiquement, nous obtenons avec l'équation du mouvement d'Heisenberg

$$i\hbar \frac{dX_i}{dt} = [X_i, H] = 0. \quad (1.96)$$

De plus, l'équation d'Heisenberg pour les  $P$  est donnée par (à l'aide de (1.81) et (1.82) )

$$i\hbar \frac{dP_i}{dt} = [P_i, H] = \frac{1}{2m}[P_i, P_1^2 + P_2^2] = \frac{-ieB\hbar\epsilon_{ij}P_j}{m}. \quad (1.97)$$

Ceci est solutionné par

$$P_1 = eBR \sin(\omega_c t + \varphi), P_2 = -eBR \cos(\omega_c t + \varphi), \quad (1.98)$$

où  $w_c = \frac{eB}{m}$  est la fréquence cyclotron que nous avons trouvée pour le cas classique (1.79). Nous remarquons qu'il ne peut pas y avoir de terme constant dans les solutions. Or, par définition (1.83),  $x$  est une somme de  $X$  et  $P$ . Nous venons de voir que  $X$  est constant et que  $P$  n'est que purement oscillatoire. Donc  $X$  est la partie constante de la position, soit la position autour de laquelle la particule tourne et  $P$  est à un facteur près la position relative de la particule par rapport à  $X$ . C'est pourquoi  $X$  est appelée la coordonnée de centre de rotation.

### 1.2.3 Densité électronique

Grâce aux équations du mouvement de  $X$  et  $P$  et à (1.83), nous avons vu que les coordonnées relatives au centre de rotation sont

$$R = \left( \frac{P_2}{eB}, \frac{-P_1}{eB} \right). \quad (1.99)$$

Nous avons vu que ces coordonnées oscillent (et déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  e c'est-à-dire qu'une des coordonnées s'écrit à l'aide d'un sinus et l'autre à l'aide d'un cosinus avec la même phase) donc elles forment des cercles autour du centre de rotation. Pour trouver le rayon de cette rotation, nous allons calculer  $R^2$  avec l'aide de (1.91) :

$$R^2 = \frac{1}{(eB)^2} (P_1^2 + P_2^2) = \frac{\hbar}{eB} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \frac{2\hbar}{eB} \left( N_a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.100)$$

Nous voyons que nos différents niveaux de Landau correspondent aux différents rayons des cercles que les électrons vont parcourir. Nous allons à présent tenter de trouver la densité d'électrons d'un niveau de Landau rempli. Pour ce faire, nous pouvons regarder nos états dans l'espace  $k = \frac{P}{\hbar}$ . Nous calculons  $k^2$  en utilisant encore (1.91) :

$$k^2 = \frac{1}{(\hbar)^2} (P_1^2 + P_2^2) = \frac{eB}{\hbar} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \frac{2eB}{\hbar} \left( N_a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.101)$$

En conséquence les  $k$  ont des états propres sur des rayons donnés et l'aire entre deux cercles successifs dans l'espace  $k$  est donné par

$$\Delta S_k = \pi k_{n+1}^2 - \pi k_n^2 = \frac{2\pi eB}{\hbar}. \quad (1.102)$$

Ceci est l'aire pour tout état  $n_a$  donné, car comme nous le voyons, cela ne dépend pas de l'état (sauf pour le premier, car il n'est pas égale à la différence entre deux cercle concentrique parcequ'il est le premier. Il est simplement l'aire du premier cercle, soit  $\pi k_0^2 = \frac{eB}{\hbar}$ ). Or comme nous l'avons dit, il y a une dégénérescence sur les états  $n_a$  (celle due au moment angulaire). Ainsi l'aire dans l'espace  $k$  occupé par un seul état est donnée par cette aire divisée par le nombre de particules dans cet état  $n_a$ , soit  $\frac{\Delta S_k}{L^2 \rho_L}$  où  $\rho_L$  est la densité de ce niveau de Landau dans l'espace spatial. Si nous supposons que l'aire d'un état dans l'espace des  $k$  est inchangée sous l'application du champ magnétique<sup>5</sup>, alors nous égalisons cette valeur à  $(\frac{2\pi}{L})^2$  et nous pouvons en déduire la densité spatiale d'un niveau de Landau rempli

$$\rho_L = \frac{\Delta S_k}{L^2} \frac{L^2}{(2\pi)^2} = \frac{eB}{2\pi\hbar} = \frac{B}{\Phi_D}, \quad (1.103)$$

où  $\Phi_D = \frac{2\pi\hbar}{e}$  est le flux de Dirac. Puisque la densité d'un niveau de Landau est égale au champ magnétique divisé par un certain flux magnétique, alors ce flux correspond au flux reçu par un électron.

La densité d'état par électron par unité d'aire en fonction de l'énergie est donc donnée par une fonction delta de Dirac, car il n'y a que des états discrets possibles.

---

<sup>5</sup>Nous aurions pu trouver la densité d'un niveau de Landau d'une autre manière [26] (dans le formalisme de Schrödinger) sans supposer que l'aire d'un état dans l'espace des  $k$  reste inchangée. Il faut se mettre dans la jauge de Landau, soit  $A_1 = -yB$ ,  $A_2 = 0$ . Si nous supposons que la fonction d'onde est de la forme  $\psi = e^{ikx}\phi(y)$  (qui est la solution de la particule libre dans la direction  $x$ ) alors l'hamiltonien devient un oscillateur dans la direction  $y$  centré en  $\frac{\hbar k}{eB}$ . La solution pour  $\phi$  est centrée en la même valeur. Si nous imposons une condition de périodicité dans la direction  $x$  (et par ce fait impose que nous somme sur un cylindre, mais ce cylindre est approximativement un plan si  $L$  est grand), alors la valeur de  $k = 2\pi p/L$  est quantifiée où  $p$  est un entier. Puisque  $\phi$  est centré (à  $\frac{\hbar k}{eB}$ ) entre 0 et  $L$  (les dimensions dans la direction  $y$ ), alors la plus grande valeur possible pour  $k$  est  $\frac{LeB}{\hbar}$  (et la plus petite est zéro). Il suffit alors de trouver le  $p$  maximal qui respecte cette condition, soit  $p = \frac{L^2 eB}{2\pi\hbar}$  qui est le nombre d'états possibles. Il suffit de diviser par l'aire ( $L^2$ ) pour trouver la densité.

Le facteur devant sera nécessairement la densité des états. Donc la densité d'états en fonction de l'énergie est

$$D(\epsilon) = \sum_n \rho_L \delta(\epsilon - E_n). \quad (1.104)$$

Lorsque la température est au zéro absolu (ce qui est presque notre cas) nous pouvons chercher la valeur de l'énergie de Fermi qui est définie par

$$\rho = \int^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \rho_L \int^{\epsilon_F} \sum_n \delta(\epsilon - E_n) d\epsilon. \quad (1.105)$$

De façon simple, la valeur de l'intégrale va donner un entier qui sera le nombre de niveaux de Landau remplis. Comme le spectre d'énergie possède des sauts entre les niveaux de Landau, la densité est proportionnelle à un entier qui est le nombre de niveaux de Landau remplis.<sup>6</sup> Le rapport entre la densité et celle d'un niveau de Landau s'écrit comme

$$\frac{\rho}{\rho_L} = \frac{2\pi\rho\hbar}{eB} = \nu, \quad (1.106)$$

où  $\nu$  est un entier qui s'appelle facteur de remplissage et qui est le nombre de niveaux de Landau remplis. Dans l'effet Hall entier ceci est un entier comme nous venons de voir. Par contre, dans l'effet Hall quantique fractionnaire  $\nu$  devient fractionnaire.

#### 1.2.4 Application d'un champ électrique

Si nous appliquons un champ électrique, nous devrions observer un courant. Si le champ électrique est constant, alors l'hamiltonien devient

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) + ex_1 E_1 + ex_2 E_2. \quad (1.107)$$

---

<sup>6</sup>En fait, de façon plus juste, les électrons dans les niveaux non remplis ne devraient pas contribuer à la conductivité, car ils vont pouvoir entrer en collision, puisque leurs niveaux d'énergie peuvent être changés. Ceux dans les niveaux remplis ne vont pas pouvoir entrer en collision (et contribuent complètement au courant), car la différence entre les niveaux d'énergie est très élevée.

Si nous calculons l'équation du mouvement des  $P$ , nous allons voir que ce n'est plus un simple mouvement oscillatoire, il y a un terme indépendant de  $t$ . Nous faisons un nouveau changement de variables qui consiste à ajouter une constante à la dérivée covariante :

$$X_i = x_i - \frac{\epsilon_{ij}\tilde{P}_j}{eB}, \tilde{P}_i = P_i + \frac{\epsilon_{ki}mE_k}{B}. \quad (1.108)$$

Regardons l'équation du mouvement de  $\tilde{P}_i$ , mais puisque nous avons ajouté une constante, cela ne change pas le commutateur :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\tilde{P}_i}{dt} &= [\tilde{P}_i, H] = \frac{1}{2m}[P_i, P_1^2 + P_2^2] + \sum_{j=1}^2 \left[ P_i, eE_j \left( X_j + \frac{\epsilon_{jk}P_k}{eB} \right) \right] = \\ &= \frac{-ieB\hbar\epsilon_{ij}P_j}{m} + \sum_{j=1}^2 -i\hbar\epsilon_{ik}\epsilon_{jk}eE_j = \frac{-ieB\hbar\epsilon_{ij}P_j}{m} - i\hbar eE_i \\ &= i\hbar \frac{eB}{m} \epsilon_{ij} \left( -P_j - \frac{\epsilon_{kj}mE_k}{B} \right) = -i\hbar \frac{eB}{m} \epsilon_{ij} \tilde{P}_j. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Maintenant c'est  $\tilde{P}_i$  qui est purement oscillatoire. Puisque nous avons rajouté une constante, alors tous nos raisonnements sur le facteur de remplissage restent vrais, car nos calculs sont faits avec  $k = \frac{P}{\hbar}$  et n'utilisent pas les équations du mouvement de  $P$ . Par contre, les vecteurs propres de  $R^2$  ne seront plus les mêmes vecteurs propres que ceux de  $N_a$ , car le terme oscillant n'est plus  $P$ , mais  $\tilde{P}$ . Cependant nous pouvons définir des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  associés à  $\tilde{P}$ . Donc on pose  $\tilde{a}$  et  $\tilde{a}^\dagger$  en remplaçant  $P$  par  $\tilde{P}$  dans (1.87). Dans ce cas, les vecteurs propres de  $R^2$  seront les mêmes que  $N_{\tilde{a}}$ .

L'équation du mouvement pour les  $X$  va aussi changer. Or les seuls  $X$  dans l'hamiltonien viennent des  $x$  :

$$i\hbar \frac{dX_i}{dt} = [X_i, H] = \sum_{j=1}^2 [X_i, eE_j X_j] = \frac{i\hbar\epsilon_{ij}E_j}{B}. \quad (1.110)$$

Nous voyons que la coordonnée de centre de rotation (car c'est toujours la partie

uniquement non oscillatoire de  $x$ ) bouge de façon linéaire. Donc la particule tourne autour de cette coordonnée qui bouge linéairement.

Nous savons que la densité du courant est la densité de charge fois la vitesse des charges. La partie oscillatoire n'a pas de contribution nette à la vitesse (la moyenne est nulle). C'est donc la vitesse du centre de rotation qu'il faut prendre pour trouver le courant :

$$J_i = -e\rho\dot{X}_i = \frac{-e\rho\epsilon_{ij}E_j}{B} = \frac{-e^2\nu\epsilon_{ij}E_j}{2\pi\hbar}. \quad (1.111)$$

La loi d'Ohm est donnée par

$$J_i = \sigma_{ij}E_j, \quad (1.112)$$

où  $\sigma$  est la conductivité. Donc nous voyons que  $\sigma$  donne

$$\sigma_{ij} = \frac{-e^2\nu\epsilon_{ij}}{2\pi\hbar}. \quad (1.113)$$

La résistance est l'inverse de la conductivité, ainsi nous obtenons

$$R_{12} = \frac{-2\pi\hbar}{e^2\nu}. \quad (1.114)$$

Pour l'effet Hall quantique fractionnaire, c'est plus compliqué. Justement, dans ce cas le facteur de remplissage est fractionnaire, soit  $\nu = \frac{1}{m}$  où  $m$  est un entier. La théorie de Laughlin stipule que le système se réorganise sous forme de particules composites. Avec (1.103) et (1.106), nous voyons que dans ce cas les électrons sont traversés par  $m$  flux de Dirac chacun. Dans ce cas, les électrons forment des particules composites qui peuvent avoir des statistiques différentes des électrons. Lorsque nous augmentons ou diminuons le champ magnétique, nous créons des quasi-trous ou des quasi-particules lorsqu'un électron monte d'un niveau de Landau. Ces quasi-particules et quasi-trous devraient en théorie contribuer au courant électrique sous l'effet d'un champ électrique. Mais en pratique le matériel possède des impuretés qui peuvent être chargées. Les quasi-particules et quasi-trous seront

attirés par ces impuretés et donc ne contribueront plus au courant. La résistance va rester la même si nous augmentons le champ magnétique, car le rapport  $\nu$  des particules qui contribuent au courant restera le même.

### 1.3 Champ de jauge

Pour décrire l'électromagnétisme nous avons une liberté de jauge. En fait, cette liberté vient du fait que le système possède la symétrie  $U(1)$  locale, c'est-à-dire que la théorie est invariante par une phase qui peut être différente à chaque point. En fait, le lagrangien qui décrit l'électromagnétisme est

$$L = \frac{-1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.115)$$

où  $F_{\mu\nu}$  est le tenseur électromagnétique. Nous appelons cette théorie de Maxwell, car elle donne l'électromagnétisme. Lorsque nous faisons une transformation de jauge, les  $A_\mu$  se transforment comme  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ . Dans ce cas nous voyons que le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  est invariant et donc aussi le lagrangien :

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.116)$$

car les dérivées commutent (ici nous sommes dans le cas commutatif).

Il existe une manière plus élégante d'écrire le lagrangien (1.115). Nous définissons une dérivée covariante<sup>7</sup>, soit

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \quad (1.117)$$

Nous remarquons que

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu] = i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = iF_{\mu\nu}. \quad (1.118)$$

Donc le lagrangien s'écrit comme

$$L = \frac{1}{4} \int d^2x [D_\mu, D_\nu][D_\mu, D_\nu]. \quad (1.119)$$

---

<sup>7</sup>Ceci est la manière plus standard de la définir, mais ce n'est pas la seule. En fait, dans l'article que nous présentons nous définissons la dérivée covariante autrement (elle sera hermitienne, plutôt qu'anti-hermitienne comme ici).

Dans ce cas, la transformation de jauge est donnée par

$$D'_\mu = e^{-i\Lambda} D_\mu e^{i\Lambda} = e^{-i\Lambda} (\partial_\mu + iA_\mu) e^{i\Lambda} = \partial_\mu + iA_\mu + i\partial_\mu\Lambda. \quad (1.120)$$

Donc nous voyons que le  $A_\mu$  est effectivement changé par  $\partial_\mu\Lambda$ . Cela revient à transformer  $D$  par  $U^\dagger D U$  où  $U$  est une matrice  $1 \times 1$  (un chiffre) unitaire. C'est pour cela que l'invariance de jauge en électromagnétisme est due à la symétrie  $U(1)$ . Nous disons local car  $\Lambda$  peut dépendre de la position. Nous pouvons alors généraliser et faire des théories invariantes pour d'autre  $U$ , comme par exemple  $SU(N)$  où  $U$  sera une matrice unitaire  $N \times N$  de déterminant 1. Dans le cas de l'électromagnétisme les  $U$  commutent, alors les  $A$  commutent. Nous disons alors que c'est une théorie de jauge abélienne. Dans le cas de  $SU(N)$ , les  $U$  ne commutent pas (car ce sont des matrices) et donc les  $A_\mu$  ne vont plus commuter puisqu'ils seront aussi des matrices. Donc nous disons que c'est une théorie de jauge non-abélienne.

Nous pouvons calculer les équations du mouvement du lagrangien (1.115). Puisque ce lagrangien décrit l'électromagnétisme, les équations du mouvement que nous obtenons sont les équations de Maxwell (ou presque). Si nous calculons l'équation pour  $A_0$ , nous obtiendrons l'équation de Gauss sans charge. Nous pouvons aussi calculer l'équation du mouvement pour  $A_i$  et cela nous donnera l'équation d'Ampère.

Dans le cas des théories de jauge non-abéliennes, les  $A_\mu$  ne commutent plus nécessairement, mais la définition de  $F_{\mu\nu}$  reste la définition avec les dérivées covariantes. Alors le tenseur électromagnétique est

$$[D_\mu, D_\nu] = iF_{\mu\nu} = i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.121)$$

Les théories de jauge non-abéliennes avec le lagrangien (1.115) s'appellent théorie de Yang-Mills. Il existe aussi un autre type de lagrangien pour les champs de jauge, soit la théorie de Chern-Simons (CS) qui s'écrit en 2+1 dimensions comme

$$L_{CS} = \int d^2x \epsilon_{\mu\nu\rho} (A_\nu \partial_\rho A_\mu + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho). \quad (1.122)$$

Il est aussi possible de mettre les deux théories de jauge ensemble :

$$L = \int d^2x \left[ \frac{1}{4} [D_\mu, D_\nu] [D_\mu, D_\nu] + \epsilon_{\mu\nu\rho} (A_\nu \partial_\rho A_\mu + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho) \right]. \quad (1.123)$$

En fait, les théories de CS ne peuvent exister qu'en  $2n + 1$  dimensions. De plus, dans le cas abélien le deuxième terme dans (1.122) disparaît, car  $\epsilon_{\mu\nu} A_\mu A_\nu = 0$  si les  $A$  commutent. Aussi les théories de CS non-abéliennes ne sont pas exactement invariantes de jauge. En fait, pour qu'elles puissent l'être, il faut que le coefficient devant le terme de CS dans le lagrangien soit quantifié. La même chose va se produire en GNC.

### 1.3.1 Champ de jauge en géométrie noncommutative

Ces théories de jauge en GNC sont très similaires aux théories de jauge non-abéliennes ; les champs de jauge ne commutent plus, car ils dépendent des coordonnées qui, elles, ne commutent plus. Le tenseur électromagnétique reste défini de la même manière qu'avec les champs de jauge. Par contre, ce n'est plus équivalent au commutateur des dérivées covariantes, car les dérivées ne commutent plus :

$$F_{\mu\nu} = i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - [A_\mu, A_\nu] = [D_\mu, D_\nu] - [\partial_\mu, \partial_\nu] = [D_\mu, D_\nu] - iw_{\mu\nu}. \quad (1.124)$$

Le lagrangien sera encore défini avec les dérivées covariantes de la même manière, mais cela n'est pas grave, car cela changera le lagrangien par une constante et un terme de frontière. Nous obtenons alors pour le lagrangien de Maxwell en GNC

$$Tr F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = Tr ([D_\mu, D_\nu] - iw_{\mu\nu}) ([D_\mu, D_\nu] - iw_{\mu\nu}) = Tr ([D_\mu, D_\nu] [D_\mu, D_\nu] - w_{\mu\nu} w_{\mu\nu}). \quad (1.125)$$

Le terme en  $w^2$  est le terme constant (car  $w$  est une constante) et les termes croisés (soit  $-2iw_{\mu\nu} [D_\nu, D_\nu]$ ) seront les termes de frontière, car ce sont des commutateurs. Nous n'avons pas écrit le terme de frontière, car il peut être considéré comme nul. La trace de tout commutateur de matrice finie est nulle (en se rappelant que  $w_{\mu\nu}$  est

une constante) à cause de la propriété de cyclicité. Si la trace du commutateur est non nulle, c'est à cause du terme de frontière, car cela ne peut pas être dû à toutes sous-parties finies de la matrice. Il est bon aussi de remarquer que les théories de Yang-Mills en GNC peuvent être englobées dans la théorie de Maxwell en GNC. Les théories de Yang-Mills associent une matrice au champ, mais nos champs sont déjà décrits par des matrices, car nous sommes en GNC. Alors les champs résultants sont le produit tensoriel de l'espace de symétrie de Yang-Mills par l'espace des positions. Mais ce champ fait d'un produit tensoriel pourrait se réécrire comme un terme correspondant à un seul espace matriciel. Donc c'est comme si nous serions dans une théorie de Maxwell en GNC, mais dont l'espace serait plus "grand".

Le lagrangien de Chern-Simons en GNC est pareil à (1.122)<sup>8</sup> :

$$L_{CSNC} = \int d^2x \epsilon_{\mu\nu\rho} (A_\nu \partial_\rho A_\mu + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho). \quad (1.126)$$

Nous pouvons réécrire le terme de Chern-Simons d'une autre manière. Calculons le terme (qui se trouvera dans le lagrangien)

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu D_\rho = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} D_\mu [D_\nu, D_\rho]. \quad (1.127)$$

Or nous pouvons calculer le commutateur

$$\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} [D_\nu, D_\rho] = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} ([\partial_\nu, \partial_\rho] + i[\partial_\nu, A_\rho] + i[A_\nu, \partial_\rho] - [A_\nu, A_\rho]). \quad (1.128)$$

En changeant le nom des indices du troisième terme, nous nous rendons compte que le deuxième et le troisième termes sont égaux :

$$\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} [D_\nu, D_\rho] = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} ([\partial_\nu, \partial_\rho] + 2i[\partial_\nu, A_\rho] - [A_\nu, A_\rho]). \quad (1.129)$$

Calculons la trace de chacun des termes un à la fois. Le premier donne si nous

---

<sup>8</sup>Nous rappelons que l'intégrale dans le plan noncommutatif est équivalent à une trace.

multiplions par  $D_\mu$

$$Tr \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} D_\mu [\partial_\nu, \partial_\rho] = i Tr \frac{\epsilon_{ij}}{2} D_0 w_{ij}, \quad (1.130)$$

car  $w_{\mu 0} = w_{0\mu} = 0$ .

La trace du deuxième terme donne, en utilisant la cyclicité de la trace,<sup>9</sup>

$$Tr \epsilon_{\mu\nu\rho} i (\partial_\mu [\partial_\nu, A_\rho] + i A_\mu [\partial_\nu, A_\rho]) = Tr \epsilon_{\mu\nu\rho} i (A_\rho [\partial_\mu, \partial_\nu] + i A_\mu [\partial_\nu, A_\rho]). \quad (1.131)$$

En utilisant que la dérivée temporelle commute et en changeant le nom des indices pour le deuxième terme, nous obtenons

$$Tr (\epsilon_{ij} i A_0 [\partial_i, \partial_j] - \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\nu [\partial_\rho, A_\mu]) = i Tr (\epsilon_{ij} D_0 w_{ij} - \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\nu [\partial_\rho, A_\mu]), \quad (1.132)$$

où nous avons remplacé  $A_0$  par  $D_0$ , car le terme ajouté  $\partial_0 w_{ij}$  est une constante (en ce sens qu'elle n'intervient pas dans les équations du mouvement) et donc ne change rien.

La trace du troisième terme donne en utilisant la cyclicité

$$- Tr \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} (\partial_\mu [A_\nu, A_\rho] + i A_\mu [A_\nu, A_\rho]) = - Tr \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} (A_\rho [\partial_\mu, A_\nu] + i A_\mu [A_\nu, A_\rho]). \quad (1.133)$$

En changeant les indices du premier terme, nous obtenons

$$- Tr \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} (A_\nu [\partial_\rho, A_\mu] + i A_\mu [A_\nu, A_\rho]). \quad (1.134)$$

---

<sup>9</sup>Le raisonnement que nous faisons ici est subtil, car nous avons supposé la cyclicité de la trace. Or la dérivée temporelle ne fait pas partie de l'espace sur lequel on fait la trace. Par contre, c'est l'action et non pas le lagrangien auquel on s'intéresse vraiment. L'action possède une intégrale sur le temps. Notre trace correspond à notre intégrale sur l'espace noncommutatif. Donc nous pouvons supposer que l'intégrale dans le cas commutatif (ici le temps) possède les mêmes propriétés que toutes les intégrales noncommutatives puisque c'est un cas spécifique. Par contre, utiliser la cyclicité revient à négliger les termes de frontière. Par exemple, nous savons que  $\partial_0 f = \dot{f} + f \partial_0$ . Donc nous voyons que si nous utilisons la cyclicité, nous négligeons le terme  $f$  qui est un terme de frontière.

Si nous calculons  $\frac{-2}{3}D^3$ , nous obtenons grâce à (1.130), (1.132) et (1.134)

$$\frac{-2}{3}\epsilon_{\mu\nu\rho}TrD_\mu D_\nu D_\rho = \epsilon_{\mu\nu\rho}Tr\left(A_\nu[\partial_\rho, A_\mu] + \frac{i}{3}A_\mu[A_\nu, A_\rho]\right) - i\epsilon_{ij}TrD_0w_{ij}. \quad (1.135)$$

Donc le lagrangien de CS noncommutatif (1.126) peut se réécrire comme (en remplaçant l'intégrale par la trace avec le facteur  $2\pi\theta$ )

$$L_{CSNC} = 2\pi\theta Tr\left(\frac{-2}{3}\epsilon_{\mu\nu\rho}D_\mu D_\nu D_\rho + i\epsilon_{ij}D_0w_{ij}\right). \quad (1.136)$$

Comme nous avons déjà dit la constante de couplage devant le terme de CS sera quantifiée. Soit  $\lambda$  un facteur devant le lagrangien précédent, alors [21]

$$4\pi\lambda = k, \quad (1.137)$$

où  $k$  est un entier.

### 1.3.2 Équations du mouvement

Nous allons trouver les équations du mouvement de la théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC à partir du lagrangien

$$L = Tr\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \lambda\epsilon_{\mu\nu\rho}\left(A_\nu\partial_\rho A_\mu + \frac{2i}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right)\right), \quad (1.138)$$

où nous avons remplacé le facteur  $\frac{1}{4}$  par  $\frac{1}{2}$  dans (1.123) pour mieux comparer ce lagrangien à un autre plus tard (le facteur n'est pas vraiment important. Ce qui l'est, c'est le facteur relatif entre le terme de Maxwell et celui de Chern-Simons). Pour alléger les équations, nous allons écrire l'action adjointe des opérateurs de dérivées (c'est-à-dire l'action de dériver) seulement en indiquant la dérivée. Nulle part dans le raisonnement qui suit, il y aura des opérateurs de dérivées "seuls" (n'agissant pas selon son action adjointe). Pour calculer les équations du mouvement, nous devons

appliquer le principe de moindre action. À partir de (1.121), nous avons

$$\delta(F_{\mu\nu}) = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + i[\delta A_\mu, A_\nu] + i[A_\mu, \delta A_\nu]. \quad (1.139)$$

De plus, en utilisant la cyclicité de la trace, nous obtenons que

$$\begin{aligned} Tr \delta(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) &= Tr(\delta(F_{\mu\nu}) F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta(F_{\mu\nu})) = 2Tr(F_{\mu\nu} \delta(F_{\mu\nu})), \\ &= 2Tr(F_{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - F_{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu + iF_{\mu\nu} [\delta A_\mu, A_\nu] + iF_{\mu\nu} [A_\mu, \delta A_\nu]). \end{aligned}$$

Si nous interchangeons le nom des indices sur les deuxième et troisième termes et que nous nous rappelons que  $F_{\mu\nu}$  est anti-symétrique sur ses indices, alors

$$Tr \delta(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = Tr(4F_{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + 4iF_{\mu\nu} [A_\mu, \delta A_\nu]). \quad (1.140)$$

Ensuite si nous intégrons par parties le premier terme et si nous utilisons la propriété (I.3)<sup>10</sup> sur le deuxième terme, nous obtenons

$$Tr \delta(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = Tr(4(-\partial_\mu F_{\mu\nu} \delta A_\nu + i[F_{\mu\nu}, A_\mu]) \delta A_\nu). \quad (1.141)$$

La variation du premier terme dans le lagrangien de CS donne

$$Tr(\epsilon_{\mu\nu\rho} \delta(A_\nu \partial_\rho A_\mu)) = \epsilon_{\mu\nu\rho} Tr(\delta A_\nu \partial_\rho A_\mu + A_\nu \partial_\rho \delta A_\mu) = 2\epsilon_{\mu\nu\rho} Tr \partial_\rho A_\mu \delta A_\nu, \quad (1.142)$$

où pour la dernière égalité nous avons utilisé la cyclicité de la trace sur le premier terme et pour le deuxième nous avons fait une intégration par parties, interchangé les noms des indices  $\mu$  et  $\nu$  et utilisé la propriété d'antisymétrie de  $\epsilon$  sous l'échange de deux indices. La variation du deuxième terme du lagrangien de CS donne

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} Tr(\delta A_\mu A_\nu A_\rho + A_\mu \delta A_\nu A_\rho + A_\mu A_\nu \delta A_\rho) = -3\epsilon_{\mu\nu\rho} Tr A_\mu A_\rho \delta A_\nu, \quad (1.143)$$

---

<sup>10</sup>Cette propriété est d'ailleurs un peu équivalente à une intégration par partie.

où pour la dernière égalité nous avons changé le nom des indices, soit  $\mu$  et  $\nu$  pour le premier terme,  $\mu$  et  $\rho$  pour le deuxième terme et  $\nu$  et  $\rho$  pour le troisième. Ensuite, nous avons utilisé la propriété d'anti-symétrie de  $\epsilon$  et la cyclicité de la trace pour mettre les  $\delta A_\nu$  à droite. Puisque nous avons écrit notre variation de chaque terme avec le facteur  $\delta A_\nu$ , alors pour que la variation soit nulle, il faut que le facteur devant soit nul, ce qui nous donne l'équation du mouvement :

$$2(\partial_\mu F_{\mu\nu} - i[F_{\mu\nu}, A_\mu]) + 2\lambda\epsilon_{\mu\nu\rho}(\partial_\rho A_\mu - iA_\mu A_\rho) = 0. \quad (1.144)$$

#### 1.4 Géométrie noncommutative comme théorie effective de l'effet Hall quantique

L'idée de décrire l'effet Hall quantique avec la GNC est due à Susskind [32]. Par contre, nous allons suivre les idées de [28] et [18] qui sont similaires. L'idée initiale est que le lagrangien d'un fluide d'électrons est approximativement équivalent à celui de Maxwell-Chern-Simons dans la jauge  $A_0 = 0$  où les champs de jauge représentent la différence entre les coordonnées lagrangiennes et eulériennes si ces champs de jauge sont petits<sup>11</sup>. De plus, on se rend compte que le lagrangien d'un fluide d'électrons est pareil à celui de Maxwell-Chern-Simons en GNC au premier ordre en  $\theta$  et que l'équation de Gauss vient de la symétrie du système sous des transformations infinitésimales de coordonnées (plus précisément des difféomorphismes infinitésimaux) qui préservent l'aire. Donc l'idée est d'utiliser la théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC pour décrire l'effet Hall quantique (ou un autre fluide chargé en présence d'un champ magnétique). Le lagrangien de plusieurs électrons dans un champ magnétique dans la jauge symétrique est

$$L = \sum \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) + \frac{eB\epsilon_{ij}\dot{x}_i x_j}{2}, \quad (1.145)$$

où  $m$  est la masse de l'électron,  $-e$  la charge de l'électron et  $B$  le champ magnétique. Nous représentons notre ensemble d'électrons par un fluide, alors la somme doit être remplacée par une intégrale. De plus, comme nous le représentons par un fluide, il y a deux systèmes de coordonnées privilégiées que nous pouvons adopter. Soit les coordonnées eulériennes (dans le référentiel du labo) ou les coordonnées lagrangiennes ("comoving"). Les coordonnées lagrangiennes possèdent une certaine liberté (elles ne sont pas complètement fixées) qui nous permet de poser que la densité du fluide est constante en fonction des coordonnées lagrangiennes. Nous supposons aussi que l'interaction entre électrons pourra s'écrire qu'en fonction de

---

<sup>11</sup>avec d'autres suppositions sur le potentiel

la densité<sup>12</sup>. Le lagrangien devient donc

$$L = \int d^2x \rho_0 \left( \frac{m}{2} \dot{y}^2 - V(\rho) + \frac{eB\epsilon_{ij}\dot{y}_i y_j}{2} \right), \quad (1.146)$$

où  $y$  sont les coordonnées lagrangiennes,  $x$  sont les coordonnées eulériennes (les coordonnées du labo),  $\rho_0$  est la densité dans l'espace  $y$  et  $\rho$  la densité dans l'espace  $x$ . Nous pouvons trouver la relation entre la densité dans le référentiel du labo et la densité dans les coordonnées lagrangiennes  $y$ . Il suffit de se rappeler que le nombre de particules ne change pas dans les deux référentiels :

$$\int dx^2 \rho = \int dy^2 \rho_0 = N. \quad (1.147)$$

Or pour changer de coordonnées, il suffit de multiplier par le jacobien :

$$\int dy^2 \rho_0 = \int dx^2 \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \rho_0 = \int dx^2 \rho \Rightarrow \rho = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \rho_0, \quad (1.148)$$

où  $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$  est le jacobien.

#### 1.4.1 Symétrie et équation de Gauss

Nous pouvons remarquer que les coordonnées lagrangiennes sont comme des champs pour l'espace des coordonnées eulériennes. Pour chaque point de l'espace eulérien nous associons une coordonnée dans l'espace lagrangien, soit  $y \equiv y(x)$ . De plus, nous remarquons que si nous faisons une transformation des coordonnées eulériennes la dépendance des coordonnées lagrangiennes ( $y$ ) va aussi changer. Par contre, puisque la correspondance entre les points est la même, alors les coordonnées lagrangiennes se transforment comme un scalaire, soit  $y(x) = y'(x')$ . Supposons que l'on fasse une transformation de coordonnées des  $x$  vers  $x'$ . Si cette transformation préserve l'aire, alors le jacobien vaut 1 ( $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1$ ), et donc nous voyons que le lagrangien (1.146) va rester invariant, car  $y$  se transforme comme un scalaire et  $\rho$

<sup>12</sup>Il semble [32] que cet argument est valide seulement si la température est nulle. Or l'effet Hall quantique se produit à très faible température, donc il semble raisonnable de supposer ceci.

n'est changé que par le jacobien (comme pour les coordonnées eulériennes) qui vaut 1.

Regardons quels types de transformations infinitésimales correspondent à cela :

$$x'_i = x_i + \delta x_i = x_i + f_i(x). \quad (1.149)$$

Pour que cette transformation préserve l'aire, il faut que le jacobien soit égal à l'identité. Comme c'est une transformation infinitésimale, nous ignorons les termes quadratiques :

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = 1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \quad (1.150)$$

Ceci est effectivement égal à l'unité si

$$f_i = \epsilon_{ij} \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_j}, \quad (1.151)$$

où  $\Lambda(x)$  est une fonction quelconque de  $x$ . Par conséquent, les coordonnées lagrangiennes se transforment comme

$$y'_i = y_i + \delta y_i = y_i + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \delta x_j = y_i + \epsilon_{jk} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_k}. \quad (1.152)$$

Cette transformation a une quantité conservée associée, car notre lagrangien est invariant sous cette transformation, qui est donnée par le théorème de Noether où nos champs sont les coordonnées lagrangiennes :

$$\phi = \int d^2x \Pi_i \delta y_i, \quad (1.153)$$

où  $\Pi_i$  est le moment conjugué qui est

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \rho_0 m \dot{y}_i + \frac{\rho_0 e B}{2} \epsilon_{ij} y_j. \quad (1.154)$$

Nous pouvons réécrire la quantité conservée comme

$$\phi = \int d^2x \left( \rho_0 m \dot{y}_i + \frac{\rho_0 e B}{2} \epsilon_{ij} y_j \right) \epsilon_{lk} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_k}. \quad (1.155)$$

En intégrant par partie, nous enlevons la dérivée sur  $\Lambda$ , en laissant tomber le terme de frontière et en remarquant que  $\epsilon_{lk} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0$  car les dérivées commutent, alors nous obtenons

$$\phi = - \int d^2x \rho_0 \left( m \epsilon_{lk} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} + \frac{eB}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{lk} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) \Lambda(x). \quad (1.156)$$

Cela doit être constant pour tout  $\Lambda$ , donc l'intégrand doit être constant. Nous allons poser que cela égale  $eB$ . Nous obtenons

$$m \epsilon_{lk} \partial_k \dot{y}_i \partial_l y_i + \frac{eB}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{lk} \partial_l y_i \partial_k y_j = eB. \quad (1.157)$$

Choisir la constante à droite ( $eB$ ) correspond à associer une certaine structure dans le fluide comme par exemple des vortex qui restent toujours là. Nous pourrions poser cette quantité à une autre valeur, mais celle-ci correspond à la valeur si le fluide bouge totalement dans les coordonnées comoving (essentiellement au repos). Nous pouvons le voir, car si c'est le cas,  $\dot{y} = 0$  et  $x = y$ . Le premier terme dans (1.157) est nul et le deuxième terme vaut  $\epsilon_{ij} \epsilon_{lk} \delta_{il} \delta_{jk} eB/2 = \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} eB/2 = eB$ .

Nous allons voir que cette condition (1.157) est équivalente à l'équation de Gauss pour une théorie de Maxwell-Chern-Simons dans la jauge  $A_0 = 0$  en GNC au premier ordre en  $\theta$ . Nous allons supposer que la différence entre les coordonnées eulériennes et lagrangiennes est donnée par une fonction  $A$  (qui sera plus tard nos champs de jauge) :

$$x_i = y_i + \frac{\epsilon_{ij} A_j}{2\pi\rho_0}. \quad (1.158)$$

Nous obtenons la vitesse en dérivant l'équation précédente et en se rappelant que

les coordonnées eulériennes (soit celles du labo) sont fixes et constantes que

$$\dot{y}_i = -\frac{\epsilon_{ij}\dot{A}_j}{2\pi\rho_0}. \quad (1.159)$$

De plus, à partir de (1.158), nous avons

$$\partial_l y_i = \delta_{il} - \frac{\epsilon_{ij}\partial_l A_j}{2\pi\rho_0}. \quad (1.160)$$

Le premier terme dans (1.157) devient

$$\epsilon_{lk}\partial_k \dot{y}_i \partial_l y_i = -\epsilon_{lk}\epsilon_{ij} \frac{\partial_k \dot{A}_j}{2\pi\rho_0} \left( \delta_{il} - \frac{\epsilon_{in}\partial_l A_n}{2\pi\rho_0} \right). \quad (1.161)$$

Puisque  $\epsilon_{lk}\epsilon_{ij}\delta_{il} = \epsilon_{lk}\epsilon_{lj} = \delta_{kj}$  et que  $\epsilon_{lk}\epsilon_{ij}\epsilon_{in} = \epsilon_{lk}\delta_{jn}$ , alors nous obtenons

$$\epsilon_{lk}\partial_k \dot{y}_i \partial_l y_i = -\frac{\partial_k \dot{A}_k}{2\pi\rho_0} + \epsilon_{lk} \frac{\partial_k \dot{A}_n \partial_l A_n}{(2\pi\rho_0)^2}. \quad (1.162)$$

Le deuxième terme dans (1.157) devient

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}\epsilon_{lk}\partial_l y_i \partial_k y_j &= \epsilon_{ij}\epsilon_{lk} \left( \delta_{li} - \frac{\epsilon_{in}\partial_l A_n}{2\pi\rho_0} \right) \left( \delta_{kj} - \frac{\epsilon_{jm}\partial_k A_m}{2\pi\rho_0} \right) \\ &= \epsilon_{ij}\epsilon_{lk} \left( \delta_{li}\delta_{kj} - \frac{\delta_{li}\epsilon_{jm}\partial_k A_m}{\pi\rho_0} + \frac{\epsilon_{in}\epsilon_{jm}\partial_l A_n \partial_k A_m}{(2\pi\rho_0)^2} \right), \end{aligned} \quad (1.163)$$

où nous avons changé les indices, utilisé la propriété d'anti-symétrie de  $\epsilon$  pour ré-écrire les deux termes croisés ensemble. Puisque  $\epsilon_{ij}\epsilon_{lk}\delta_{li}\delta_{kj} = \epsilon_{lj}\epsilon_{lj} = 2$ ,  $\epsilon_{ij}\epsilon_{lk}\delta_{li}\epsilon_{jm} = \epsilon_{lj}\epsilon_{lk}\epsilon_{jm} = \delta_{jk}\epsilon_{jm} = \epsilon_{km}$  et que  $\epsilon_{ij}\epsilon_{lk}\epsilon_{in}\epsilon_{jm} = \delta_{jn}\epsilon_{lk}\epsilon_{jm} = \epsilon_{lk}\epsilon_{nm}$ , alors

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lk}\partial_l x_i \partial_k x_j = 2 - \frac{\epsilon_{km}\partial_k A_m}{\pi\rho_0} + \frac{\epsilon_{lk}\epsilon_{nm}\partial_l A_n \partial_k A_m}{(2\pi\rho_0)^2}. \quad (1.164)$$

Nous pouvons réécrire l'équation de conservation due à la symétrie sous transformation infinitésimale des coordonnées (1.157) comme

$$-m \frac{\partial_k \dot{A}_k}{2\pi\rho_0} + m\epsilon_{lk} \frac{\partial_k \dot{A}_n \partial_l A_n}{(2\pi\rho_0)^2} - \frac{eB\epsilon_{km}\partial_k A_m}{2\pi\rho_0} + \frac{eB\epsilon_{lk}\epsilon_{nm}\partial_l A_n \partial_k A_m}{2(2\pi\rho_0)^2} = 0. \quad (1.165)$$

Nous allons à présent montrer que cette équation est équivalente à l'équation de Gauss pour une théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC dans la jauge  $A_0 = 0$  au premier ordre en  $\theta$ . Nous avons déjà calculé l'équation de Gauss en GNC pour cette théorie, car c'est l'équation du mouvement pour  $A_0$ . Donc c'est l'équation (1.144) pour  $\nu = 0$ . Puisque  $A_0 = 0$ , alors (1.144) devient (Il y a un terme moins qui apparaît devant le terme de Maxwell, car il y a un métrique caché associé à la contraction avec  $\delta A_0$ .)

$$-\partial_i F_{i0} + i[F_{i0}, A_i] - \lambda \epsilon_{ij} (\partial_j A_i - i A_i A_j) = 0. \quad (1.166)$$

Aussi puisque  $A_0 = 0$ , alors  $F_{i0} = -\dot{A}_i$  et nous obtenons

$$\partial_i \dot{A}_i - i[\dot{A}_i, A_i] - \lambda \epsilon_{ij} (\partial_j A_i - i A_i A_j) = 0. \quad (1.167)$$

Nous allons développer cette équation au premier ordre en  $\theta$  à l'aide du produit Moyal. Le produit Moyal au premier ordre donne

$$A \star B \simeq AB + \frac{i}{2} \theta \epsilon_{ij} \partial_i A \partial_j B. \quad (1.168)$$

Le commutateur de deux quantités est donné par

$$[A, B]_\star \simeq i \theta \epsilon_{ij} \partial_i A \partial_j B. \quad (1.169)$$

L'équation de Gauss se réécrit comme

$$\partial_i \dot{A}_i + \theta \epsilon_{nm} \partial_n \dot{A}_i \partial_m A_i - \lambda \epsilon_{ij} (\partial_j A_i - i A_i A_j + \frac{1}{2} \theta \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j) = 0. \quad (1.170)$$

Comme  $\epsilon_{ij} A_i A_j = 0$ , alors nous avons

$$\partial_i \dot{A}_i + \theta \epsilon_{nm} \partial_n \dot{A}_i \partial_m A_i - \lambda \epsilon_{ij} \partial_j A_i - \frac{1}{2} \theta \lambda \epsilon_{ij} \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j = 0. \quad (1.171)$$

Nous pouvons voir que cette équation est équivalente à l'équation que nous avons

obtenu pour la symétrie du système (1.165) si  $\lambda = \frac{eB}{m}$  et  $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$ .

### 1.4.2 Équivalence entre les deux lagrangiens

En constatant le lien entre notre quantité conservée et l'équation de Gauss, nous nous rendons compte qu'il existe un lien entre notre théorie et celle de Maxwell-Chern-Simons en GNC. Nous allons réécrire notre lagrangien (1.146) en terme des  $A_i$  qui relie les coordonnées lagrangiennes et eulériennes (1.158). Nous nous rendons compte que c'est la même chose que le lagrangien de Maxwell-Chern-Simons en GNC au premier ordre en  $\theta$ .

Nous avons déjà calculé la vitesse en terme de  $A_i$  (1.159), donc la partie cinétique et potentielle de (1.146) devient

$$L = \int d^2x \rho_0 \left[ \frac{m \dot{A}_i^2}{2(2\pi\rho_0)^2} - V(\rho) \right]. \quad (1.172)$$

Nous supposons que le fluide est proche de son minimum de potentiel qui est obtenu lorsque le fluide bouge tout ensemble (donc que les coordonnées eulériennes et lagrangiennes sont égales). Puisque l'énergie potentielle dépend seulement de  $\rho$ , cela revient à dire que  $\rho$  vaut presque  $\rho_0$ . Puisque c'est un minimum, le premier terme non-constant est quadratique :

$$V(\rho) = \mu(\rho - \rho_0)^2, \quad (1.173)$$

où  $\mu$  est une constante et  $\rho$  donné par (1.148). Il faut calculer explicitement  $\rho$ . Nous avons déjà calculé la dérivée de  $x$  par  $y$  (1.160), donc nous obtenons pour le jacobien

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| &= \left( 1 + \frac{1}{2\pi\rho_0} \partial_2 A_1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2\pi\rho_0} \partial_1 A_2 \right) - \left( \frac{1}{2\pi\rho_0} \partial_1 A_1 \right) \left( -\frac{1}{2\pi\rho_0} \partial_2 A_2 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi\rho_0} (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \frac{1}{(2\pi\rho_0)^2} (\partial_1 A_1 \partial_2 A_2 - \partial_2 A_1 \partial_1 A_2). \end{aligned} \quad (1.174)$$

Nous pouvons réécrire ces termes à l'aide de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|' &= 1 - \frac{1}{2\pi\rho_0} \epsilon_{ij} \partial_i A_j + \frac{1}{(2\pi\rho_0)^2} \epsilon_{ij} \partial_1 A_i \partial_2 A_j \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi\rho_0} \epsilon_{ij} \left( \partial_i A_j - \frac{1}{4\pi\rho_0} \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j \right). \end{aligned} \quad (1.175)$$

Sachant que notre équation de conservation est équivalente à l'équation de Gauss pour la théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC, nous pouvons croire que la correspondance est plus forte. Nous allons calculer  $F_{ij}$  en GNC au premier ordre en  $\theta$ . Le seul terme multiplicatif vient du commutateur. Or nous avons déjà calculé le commutateur au premier ordre en  $\theta$  (1.169). Donc nous obtenons

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - \theta \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j. \quad (1.176)$$

Nous observons que

$$\epsilon_{ij} F_{ij} = \epsilon_{ij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i - \theta \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j) = \epsilon_{ij} (2\partial_i A_j - \theta \epsilon_{nm} \partial_n A_i \partial_m A_j). \quad (1.177)$$

Nous pouvons ainsi réécrire le déterminant en fonction de  $F_{ij}$  au premier ordre en  $\theta$  si nous supposons encore que  $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$  :

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 1 - \frac{1}{4\pi\rho_0} \epsilon_{ij} F_{ij}. \quad (1.178)$$

Le potentiel devient alors

$$V = \mu \left( \rho_0 \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| - \rho_0 \right)^2 = \frac{\mu\rho_0^2}{(4\pi\rho_0)^2} (\epsilon_{ij} F_{ij})^2. \quad (1.179)$$

Or  $\epsilon_{ij} F_{ij} = F_{12} - F_{21} = 2F_{12}$  et  $F_{ij} F_{ij} = F_{12} F_{12} + F_{21} F_{21} = 2F_{12} F_{12}$ , alors  $(\epsilon_{ij} F_{ij})^2 = 2F_{ij} F_{ij}$  et donc

$$V = \mu \left( \rho_0 \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| - \rho_0 \right)^2 = \frac{2\mu\rho_0^2}{(4\pi\rho_0)^2} F_{ij} F_{ij} = \frac{\mu}{2(2\pi)^2} F_{ij} F_{ij}. \quad (1.180)$$

Cela ne veut pas dire (sans un raisonnement avant) que le potentiel est équivalent au  $F_{ij}F_{ij}$  en GNC au premier ordre en  $\theta$ , car nous avons développé  $F_{ij}$  à l'aide du produit Moyal et non pas  $F_{ij}F_{ij}$ . En théorie, il faudrait prendre en compte les nouveaux termes qui apparaissent dus à la noncommutativité entre les deux termes. Par contre, ici c'est deux fois le même terme. Donc ils commutent et par conséquent aucun autre terme apparaît. Nous pouvons maintenant affirmer que le potentiel est équivalent à  $F_{ij}F_{ij}$  au premier ordre en  $\theta$ . Comme nous avons développé chaque  $F_{ij}$  au premier ordre en  $\theta$ , il apparaîtra des termes en  $\theta^2$  pour  $F_{ij}F_{ij}$ , mais nous les négligeons, puisque nous développons à l'ordre  $\theta$ . La partie cinétique et potentielle du lagrangien devient

$$L = \int d^2x \rho_0 \left[ \frac{m \dot{A}_i^2}{2(2\pi\rho_0)^2} - \frac{\mu}{2(2\pi)^2} F_{ij} F_{ij} \right]. \quad (1.181)$$

Si nous posons

$$g^2 = \frac{(2\pi)^2 \rho_0}{m} \quad (1.182)$$

nous obtenons

$$L = \frac{1}{g^2} \int d^2x \frac{1}{2} \left[ \dot{A}_i^2 - \frac{\mu \rho_0^2}{m} F_{ij} F_{ij} \right] \quad (1.183)$$

qui est le lagrangien de Maxwell dans la jauge  $A_0 = 0$  en GNC au premier ordre en  $\theta$  (ce que nous montrons sous peu, mais déjà assez apparent). Le premier terme correspond au terme électrique, mais représente réellement l'énergie cinétique. Le deuxième terme correspond au terme magnétique, mais il représente réellement le terme potentiel. Regardons le lagrangien de Maxwell en GNC dans la jauge  $A_0 = 0$  pour voir s'il est effectivement équivalent au lagrangien précédent (1.183). Comme nous sommes dans la jauge  $A_0 = 0$ , alors  $F_{0i} = \dot{A}_i$ . Le lagrangien de Maxwell devient (nous avons pris le même facteur pour le lagrangien que celui avec lequel nous avons calculé l'équation de Gauss)

$$L = -\frac{1}{2} \int d^2x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^2x (2F_{0i} F_{0i} - F_{ij} F_{ij}) = \int d^2x \left( \dot{A}_i^2 - \frac{1}{2} F_{ij} F_{ij} \right). \quad (1.184)$$

Le facteur relatif entre les deux termes n'est pas très important, car nous pouvons faire un changement d'échelle du temps<sup>13</sup>. Cela va changer la vitesse des "photons" de notre système. Nous choisissons un facteur relatif général, soit

$$L = \int d^2x (\dot{A}_i^2 - \kappa F_{ij} F_{ij}). \quad (1.185)$$

Le premier terme est pareil à celui dans (1.183). Par contre, le terme dans (1.185) est en GNC. Cela ne change rien, car comme nous l'avons dit plus tôt, un terme au carré est pareil en géométrie normale et en GNC. Pour le deuxième terme dans (1.183), nous avons déjà dit que c'était équivalent au  $F_{ij} F_{ij}$  en GNC au premier ordre en  $\theta$ . Donc le lagrangien pour la partie cinétique et potentielle de notre fluide d'électrons est équivalent au lagrangien de Maxwell en GNC au premier ordre en  $\theta$  si  $\kappa = \frac{\mu\rho_0^2}{m}$  et  $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$ .

Par contre, notre fluide d'électrons est soumis à un champ magnétique. La partie d'interaction avec le champ magnétique de (1.146) est

$$L' = \frac{eB}{2} \int d^2x \rho_0 \epsilon_{ab} \dot{y}_a y_b. \quad (1.186)$$

Si nous remplaçons les coordonnées lagrangiennes avec la correspondance (1.158) et en utilisant la vitesse (1.159), alors le lagrangien devient

$$L' = -\frac{eB}{2} \int d^2x \rho_0 \epsilon_{ab} \frac{\epsilon_{ai} \dot{A}_i}{2\pi\rho_0} \left( x_b - \frac{\epsilon_{bj} A_j}{2\pi\rho_0} \right) \quad (1.187)$$

qui devient

$$L' = -\frac{eB}{2} \int d^2x \rho_0 \frac{\epsilon_{ab} \epsilon_{ai} \dot{A}_i x_b}{2\pi\rho_0} + \frac{eB}{2} \int d^2x \rho_0 \frac{\epsilon_{ab} \epsilon_{ai} \epsilon_{bj} \dot{A}_i A_j}{(2\pi\rho_0)^2}. \quad (1.188)$$

Le premier terme est une dérivée temporelle totale, car  $x$  est indépendant du temps. Donc ce premier terme peut être éliminé. De plus, en utilisant le fait que  $\epsilon_{ab} \epsilon_{ai} \epsilon_{bj} =$

<sup>13</sup>En fait, si  $A_0 \neq 0$  alors il aurait fallu aussi un changement d'échelle de  $A_0$

$\epsilon_{ij}$ , nous obtenons

$$L' = \frac{eB}{8\pi^2\rho_0} \int d^2x \epsilon_{ab} \dot{A}_a A_b = \frac{1}{g^2} \int d^2x \frac{eB}{2m} \epsilon_{ab} \dot{A}_a A_b = \frac{1}{g^2} \int d^2x \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ab} \dot{A}_a A_b \quad (1.189)$$

qui est le lagrangien pour la théorie CS dans la jauge  $A_0 = 0$  en GNC. Le lagrangien de Chern-Simons en GNC est

$$L' = \lambda \epsilon_{\mu\nu\rho} \int d^2x \left( A_\mu \star \partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3} A_\mu \star A_\nu \star A_\rho \right). \quad (1.190)$$

Nous allons calculer dans la jauge  $A_0 = 0$ . Donc dans le premier terme  $\nu = 0$  et le troisième terme est nul. Nous le développons à l'aide du produit Moyal. Ce terme est seulement la multiplication de deux termes directement dans le lagrangien, or dans ce cas c'est équivalent au cas normal au premier ordre en  $\theta$  puisque

$$L = \int d^2x A \star B = \int d^2x \left( AB + \frac{i}{2} \theta \epsilon_{ij} \partial_i A \partial_j B \right) = \int d^2x AB, \quad (1.191)$$

où nous avons utilisé l'intégrale par partie sur le deuxième terme et en utilisant le  $\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j A = 0$ . Le premier terme reste donc inchangé <sup>14</sup>. Si nous réécrivons le lagrangien nous obtenons

$$L' \simeq - \int d^2x \lambda \epsilon_{ij} A_i \partial_0 A_j = \int d^2x \lambda \epsilon_{ij} \dot{A}_i A_j. \quad (1.192)$$

Ceci est la même chose que (1.189), donc le lagrangien d'interaction avec le champ magnétique est équivalent à celui de Chern-Simons dans la jauge  $A_0 = 0$  au premier ordre en  $\theta$ . Pour résumer, le lagrangien du fluide d'électrons est la somme du lagrangien cinétique et potentiel (1.183) et de celui de l'interaction avec le champ magnétique (1.189) :

$$L = \frac{1}{g^2} \int d^2x \frac{1}{2} \left[ \dot{A}_i^2 - \frac{\mu\rho_0^2}{m} F_{ij} F_{ij} + \lambda \epsilon_{ab} \dot{A}_a A_b \right], \quad (1.193)$$

<sup>14</sup>Il ne faut pas croire que la théorie de CS est pareille en géométrie normale et en GNC au premier ordre en  $\theta$ , car l'équation de Gauss était différente pour la partie CS.

où  $F_{ij}F_{ij}$  serait le développement au premier ordre de  $\theta$  pour ce même terme pour la théorie de jauge en GNC si  $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$ . De plus, la théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC dans la jauge  $A_0 = 0$  développée au premier ordre en  $\theta$  est la somme des lagrangiens (1.185) et (1.192) :

$$L = \int d^2x (\dot{A}_i^2 - \kappa F_{ij}F_{ij} + \lambda \epsilon_{ij} \dot{A}_i A_j). \quad (1.194)$$

Puisque le lagrangien du fluide d'électrons soumis à un champ magnétique est équivalent à celui de la théorie de Maxwell-Chern-Simons dans la jauge  $A_0 = 0$  au premier ordre de  $\theta$  et que la symétrie du système impose une quantité conservée qui est équivalente à l'équation de Gauss pour la théorie de Maxwell-Chern-Simons dans la jauge  $A_0 = 0$  au premier ordre en  $\theta$ , alors notre fluide d'électrons peut être décrit par la théorie de Maxwell-Chern-Simons si  $\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}$ ,  $\kappa = \frac{\mu\rho_0^2}{m}$  et  $\lambda = \frac{eB}{m}$ .

En se rappelant que notre  $\dot{A}_i^2$  vient de (1.185) et de (1.184) et donc de  $F_{0i}^2$  et en utilisant (1.121), nous obtenons comme lagrangien dans n'importe quelles jauges (si nous ne posons pas  $A_0 = 0$  pour obtenir l'équation de Gauss)

$$L = \frac{1}{g^2} \int d^2x \frac{1}{2} \left[ -[D_0, D_i]^2 + \kappa [D_i, D_j]^2 + \lambda \epsilon_{\mu\nu\rho} \left( A_\nu \partial_\rho A_\mu + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \right]. \quad (1.195)$$

Nous allons utiliser l'approche matricielle plutôt que le produit Moyale comme description de la GNC. Si nous utilisons la relation que nous avons vu pour relier l'intégrale et la trace et que nous intégrons la densité, nous voyons que des matrices  $N \times N$  représentent  $N$  électrons (en utilisant (1.148) et (1.178)) :

$$N = \int d^2x = 2\pi\theta \text{Tr}(\rho) = 2\pi\theta \text{Tr} \left( \rho_0 + \frac{1}{4\pi} \epsilon_{ij} F_{ij} \right). \quad (1.196)$$

En se rappelant que  $F_{ij}$  est la somme de deux commutateurs (1.124), que la trace d'un commutateur est nulle avec la cyclicité de la trace et que  $\rho_0$  est constant, alors

$$N = \int d^2x = 2\pi\theta \text{Tr}(\rho) = 2\pi\theta \rho_0 \text{Tr}(1) = 2\pi\theta \rho_0 N = N. \quad (1.197)$$

Nous obtenons la bonne valeur, donc les matrices  $N \times N$  décrivent  $N$  électrons. De plus, comme nous l'avons déjà dit, nous aurions pu déterminer la normalisation de l'intégrale ( $\xi$ ) par le même raisonnement si nous avions supposé à la place que  $N$  électrons sont décrits par des matrices  $N \times N$ .

Nous remarquons que c'est effectivement équivalent à la théorie de Maxwell-Chern-Simons en GNC, mais c'est vrai si nous supposons une certaine quantité conservée (1.157). Ce n'est plus vrai si cette quantité prend une autre valeur. Par contre, comme nous l'avons déjà dit cela ne rajoute qu'une certaine structure figée (car c'est une quantité conservée) dans le fluide. Si nous voulons changer cette quantité conservée nous pouvons ajouter un  $A_0$  au lagrangien de Maxwell-Chern-Simons en GNC.

### 1.4.3 Quasi-trous

Nous pouvons aussi regarder comment se comportent les solutions de quasi-trous dans le cas où le champ magnétique est très fort, soit quand nous avons seulement la théorie de CS. Pour simplifier, nous regardons lorsque nous ne sommes pas en GNC. Dans ce cas l'équation de Gauss (1.165) se résume à  $\epsilon_{ij}\partial_i A_j = \nabla \times A = 0$ . Par contre, pour que le quasi-trou apparaisse, il faut une source que nous allons implanter dans l'équation de Gauss :

$$\nabla \times A = \epsilon_{ij}\partial_i A_j = 2\pi\rho_0 q\delta^2(x). \quad (1.198)$$

De plus, les équations d'Ampère sont obtenues en variant les  $A_i$  dans le lagrangien (1.193) qui donne (dans la jauge  $A_0 = 0$ ), si nous faisons une intégration par partie,

$$\int d^2x \epsilon_{ij}(\delta \dot{A}_i A_j + \dot{A}_i \delta A_j) = \epsilon_{ij} \int d^2x (-\delta A_i \dot{A}_j + \dot{A}_i \delta A_j) = \epsilon_{ij} \int d^2x 2\dot{A}_i \delta A_j = 0. \quad (1.199)$$

Ceci est solutionné si les champs de jauge sont statiques et l'équation de Gauss (1.198) aussi si

$$A_i = -q\rho_0 \epsilon_{ij} \frac{x_j}{x^2}. \quad (1.200)$$

Vérifions en se rappelant que  $x^2 = x_1^2 + x_2^2$  :

$$\epsilon_{ij}\partial_i A_j = -\epsilon_{ij}q\rho_0\epsilon_{jk}\partial_i \frac{x_k}{x^2} = q\rho_0\partial_i \frac{x_i}{x^2} = \frac{2q\rho}{x^2} - 2q\rho_0 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0. \quad (1.201)$$

Nous rappelons le théorème de Stokes, soit

$$\oint K_i dx_i = \int \nabla \times K dx_1 dx_2 = \int \epsilon_{ij}\partial_i K_j dx_1 dx_2. \quad (1.202)$$

Donc nous calculons l'intégrale autour de l'origine pour voir si cela donne  $2\pi\rho_0q$ . Nous regardons en coordonnées polaires et nous intégrons à  $r$  constant. Soit  $x_1 = r \cos(\theta)$  et  $x_2 = r \sin(\theta)$ , alors nous obtenons

$$\oint A_i dx_i = -q\rho_0 \oint -\sin(\theta)^2 d\theta - \cos(\theta)^2 d\theta = 2\pi q\rho_0. \quad (1.203)$$

Donc il y a effectivement un flux magnétique qui passe à l'origine.

En fait, cette solution ne crée pas un trou dans le fluide, mais pousse une partie du fluide loin de ces coordonnées comoving. Soit avec (1.158), et en se rappelant que  $\epsilon_{ij}\epsilon_{ik} = \delta_{jk}$ , alors nous avons

$$R^2 = (x_i - y_i)^2 = \left( \frac{A_i}{2\pi\rho_0} \right)^2 = \frac{q^2\epsilon_{ij}\epsilon_{ik}x_jx_k}{(2\pi)^2x^4} = \frac{q^2x_ix_i}{(2\pi)^2x^4} = \frac{q^2}{(2\pi)^2x^2}. \quad (1.204)$$

Donc cela pousse le fluide par une distance de  $\frac{q}{2\pi x}$ . Cela agit comme si nous avions enlevé une charge, comme nous le voyons à partir des équations (1.148) et (1.178) :

$$\rho = \rho_0 - \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ij}F_{ij} = \rho_0 - \frac{1}{2\pi}F_{12}. \quad (1.205)$$

Comme nous ne sommes pas en GNC,  $F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \epsilon_{ij}\partial_i A_j = \nabla \times A$  et la densité devient

$$\rho = \rho_0 - \frac{1}{2\pi}\nabla \times A = \rho_0(1 - q\delta^2(x)). \quad (1.206)$$

La charge poussée est la densité fois  $q$  fois la charge électrique :

$$e_T = \rho_0 q e. \quad (1.207)$$

Nous pouvons quantifier le problème avec la méthode semi-classique de Bohr-Sommerfeld, qui stipule que

$$\oint p_i dy_i = 2\pi n, \quad (1.208)$$

où  $p_i$  est le moment conjugué d'une particule. Donc avec (1.186), nous trouvons

$$p_i = \frac{\Pi_i}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{eB \epsilon_{ij} y_j}{2} = \frac{eB \epsilon_{ij}}{2} \left( x_j - \frac{\epsilon_{jk} A_k}{2\pi \rho_0} \right) = \frac{eB}{2} \left( \epsilon_{ij} x_j + \frac{A_i}{2\pi \rho_0} \right). \quad (1.209)$$

L'intégrale se réécrit comme

$$\frac{eB}{2} \oint \left( \epsilon_{ij} x_j + \frac{A_i}{2\pi \rho_0} \right) \left( dx_i - \frac{\epsilon_{ik} dA_k}{2\pi \rho_0} \right) = 2\pi n. \quad (1.210)$$

Or l'élément du champ de jauge s'écrit comme

$$dA_k = \partial_l A_k dx_l. \quad (1.211)$$

L'intégrale se réduit à

$$\frac{eB}{2} \oint \left( \epsilon_{ij} x_j + \frac{A_i}{2\pi \rho_0} \right) \left( \delta_{il} - \frac{\epsilon_{ik} \partial_l A_k}{2\pi \rho_0} \right) dx_l = 2\pi n. \quad (1.212)$$

Si nous supposons que nous intégrons dans la région loin du quasi-trou (i.e. pour de grand  $x$ ), les  $A$  sont petits et nous négligeons les termes en  $A^2$ . Si nous développons et nous intégrons par partie le terme avec la dérivée de  $A$  (dont le terme de frontière s'annule, car c'est une boucle), alors nous avons

$$\frac{eB}{2} \oint \left( \epsilon_{ij} x_j + \frac{A_i}{2\pi \rho_0} + \frac{\epsilon_{ij} \epsilon_{ik} \delta_{jl} A_k}{2\pi \rho_0} \right) dx_l = \frac{eB}{2} \oint \left( \epsilon_{ij} x_j + \frac{A_i}{\pi \rho_0} \right) dx_l = 2\pi n. \quad (1.213)$$

Le premier terme est proportionnel à l'aire. Si nous utilisons le théorème de Stokes

(1.202), nous obtenons  $\nabla \times \epsilon_{ij}x_j = \epsilon_{ii}\epsilon_{lj}\partial_i x_j = -2$  donc nous intégrons  $-2$  sur l'espace qui donne un résultat proportionnel à l'aire. Pour le terme en  $A$ , nous utilisons le théorème de Stoke avec (1.198) :

$$\frac{eB}{2\pi\rho_0} \oint A_i dx_i = \frac{eB}{2\pi\rho_0} \int \epsilon_{ij}\partial_i A_j = eBq. \quad (1.214)$$

Pour une boucle d'intégration donnée, le terme proportionnel à l'aire ne change pas, mais l'autre peut changer selon la valeur de  $q$ . Donc c'est seulement le terme qui peut varier qui est quantifié. Soit

$$eBq = 2\pi k, \quad (1.215)$$

où  $k$  est un entier différent de  $n$  puisque nous n'avons pas pris le terme proportionnel à l'aire.

Nous obtenons que le  $q$  est quantifié. Or cela implique que la charge du trou est quantifiée (1.207) :

$$e_T = \rho_0 q e = \frac{2\pi\rho_0 k e}{eB}. \quad (1.216)$$

Or si  $k = 1$ , alors c'est exactement les charges des quasi-particules dans la théorie de Laughlin.

## 1.5 Solutions d'autres auteurs

### 1.5.1 Le lagrangien

Dans cette section, nous allons présenter des solutions déjà trouvées, mais reliées à celles trouvées dans l'article. Nous allons en premier réécrire le lagrangien dans les mêmes opérateurs que ceux de l'article. Ceci a été fait dans [1]. En premier, nous remplaçons l'intégrale par la trace dans le lagrangien (1.195) avec (1.39) :

$$L = \frac{\pi\theta}{g^2} \text{Tr} \left[ -[D_0, D_i]^2 + \kappa[D_i, D_j]^2 + \lambda\epsilon_{\mu\nu\rho} \left( A_\nu \partial_\rho A_\mu + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \right]. \quad (1.217)$$

Pour le terme de CS, nous voulons le réécrire en terme de dérivées covariantes. Nous l'avons déjà calculé, soit (1.136). Donc nous remplaçons par ce lagrangien :

$$L = \frac{\pi\theta}{g^2} \text{Tr} \left[ -[D_0, D_i]^2 + \kappa[D_i, D_j]^2 - \frac{2}{3} \lambda\epsilon_{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu D_\rho + i\lambda\epsilon_{ij} D_0 w_{ij} \right]. \quad (1.218)$$

Ensuite nous redéfinissons nos dérivées covariantes en les multipliant par  $-i\sqrt{\theta}$ , soit

$$D_\mu = \sqrt{\theta}(-i\partial_\mu + A_\mu). \quad (1.219)$$

Nous remarquons que nos dérivées covariantes sont maintenant hermitiennes. Notre lagrangien devient

$$L = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr} \left[ -[D_0, D_i]^2 + \kappa[D_i, D_j]^2 + \frac{2i}{3} \lambda\sqrt{\theta}\epsilon_{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu D_\rho - \theta^{3/2}\lambda\epsilon_{ij} D_0 w_{ij} \right]. \quad (1.220)$$

Ensuite, nous allons réécrire le lagrangien en terme de combinaisons linéaires des dérivées covariantes :

$$D = \frac{D_1 + iD_2}{\sqrt{2}}, \quad D^\dagger = \frac{D_1 - iD_2}{\sqrt{2}}. \quad (1.221)$$

Le commutateur de ces nouveaux opérateurs est

$$[D, D^\dagger] = \frac{1}{2}[D_1 + iD_2, D_1 - iD_2] = -i[D_1, D_2]. \quad (1.222)$$

Nous remarquons que si nous utilisons la cyclicité de la trace pour la dernière égalité, nous obtenons pour le terme cinétique

$$[D_0, D][D_0, D^\dagger] = \frac{1}{2}([D_0, D_1] + i[D_0, D_2])([D_0, D_1] - i[D_0, D_2]) = \frac{1}{2}[D_0, D_i]^2. \quad (1.223)$$

Le lagrangien de Maxwell devient

$$L_M = \frac{\pi}{\theta g^2} \text{Tr} [-2[D_0, D][D_0, D^\dagger] - \kappa[D, D^\dagger]^2]. \quad (1.224)$$

Pour le terme de CS nous voulons aussi le réécrire en fonction de  $D$ . Nous pouvons montrer que

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu D_\rho = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}}{2} [D_\mu, D_\nu] D_\rho = \frac{\epsilon_{0ij}}{2} [D_0, D_i] D_j + \frac{\epsilon_{i0j}}{2} [D_i, D_0] D_j + \frac{\epsilon_{ij0}}{2} [D_i, D_j] D_0. \quad (1.225)$$

En se rappelant que c'est dans une trace, nous utilisons la propriété (I.3) pour transformer les deux premiers termes et nous utilisons (1.222) dans la dernière égalité :

$$\text{Tr} \epsilon_{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu D_\rho = \text{Tr} \frac{3\epsilon_{0ij}}{2} [D_i, D_j] D_0 = 3\text{Tr} [D_1, D_2] D_0 = 3i\text{Tr} [D, D^\dagger] D_0. \quad (1.226)$$

En se rappelant que  $\epsilon_{ij} w_{ij} = 2w_{12}$  le lagrangien de CS devient

$$L_{CS} = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr} [-2\lambda\sqrt{\theta}[D, D^\dagger]D_0 - 2\theta^{3/2}\lambda D_0 w_{12}] = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr} [2\lambda\sqrt{\theta}(-[D, D^\dagger]D_0 + D_0)]. \quad (1.227)$$

Si nous redéfinissons la valeur de  $\lambda$  en multipliant par  $\sqrt{\theta}$

$$\lambda = \frac{eB\sqrt{\theta}}{m}, \quad (1.228)$$

alors le lagrangien devient

$$L = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr}[-2[D_0, D][D_0, D^\dagger] - \kappa[D, D^\dagger]^2 + 2\lambda(-[D, D^\dagger] + 1)D_0]. \quad (1.229)$$

Dans le cas de dimension finie nous rajouterons un terme de frontière dont le lagrangien sera similaire à celui d'un fermion. Nous pouvons voir (mais ce n'est pas la seule façon de voir) que ce terme vient du problème de la définition de l'opérateur de dérivée dans le cas de dimension finie. Nous rappelons que l'opérateur de dérivée est défini comme

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}. \quad (1.230)$$

Or si nous faisons la trace de l'équation précédente, nous avons zéro pour le commutateur (avec la propriété de cyclicité), mais quelque chose de non-nul à droite. Par conséquent, il n'existe pas d'opérateur de dérivée dans le cas fini. Par contre, dans les calculs précédents nous avons supposé que  $w_{12} = -\frac{1}{\theta}$  qui est lui-même mal défini puisque les dérivées n'existent pas. Nous verrons plus loin que prendre une forme tronquée des opérateurs de dérivées va nous donner un  $w_{12}$  qui équivaut à rajouter le terme

$$L_f = \Psi^\dagger D_0 \Psi. \quad (1.231)$$

Nous allons rajouter aussi des  $A_0$  et par extension  $D_0$  dans notre lagrangien pour avoir différentes valeurs conservées pour notre quantité (1.157). Nous avons déjà posé une valeur à cette contrainte qui nous a donné le lagrangien précédent. Si nous rajoutons des  $D_0$  cela change le facteur 1 dans la parenthèse du terme de CS, car c'est le seul terme avec  $D_0$ . Nous changeons ce facteur 1 et nous le posons  $\eta$ . Donc nous avons  $\eta = 1$  dans le lagrangien précédent. Le lagrangien devient

$$S = \frac{\pi}{g^2\theta} \int dt (\text{Tr}\{(-2[D_0, D][D_0, D^\dagger] - \kappa[D, D^\dagger][D, D^\dagger]) + 2\lambda(-[D, D^\dagger] + \eta)D_0\} - 2\Psi^\dagger D_0 \Psi). \quad (1.232)$$

### 1.5.2 Équation du mouvement

Il faut trouver les équations du mouvement pour ce système. Pour ce faire, nous ajoutons une variation à nos champs et nous appliquons le principe de moindre action.

Si nous faisons varier  $D_0$ , nous obtenons notre équation de Gauss :

$$\begin{aligned} \delta S = 0 = \frac{\pi}{g^2\theta} \int dt \{ & Tr\{(-2[\delta D_0, D][D_0, D^\dagger] - 2[D_0, D][\delta D_0, D^\dagger] \\ & + 2\lambda(-[D, D^\dagger] + \eta)\delta D_0\} - 2\Psi^\dagger\delta D_0\Psi\}. \end{aligned} \quad (1.233)$$

En utilisant la cyclicité de la trace et (I.3), l'équation (1.233) devient

$$[D, [D_0, D^\dagger]] + [D^\dagger, [D_0, D]] + \lambda(-[D, D^\dagger] + \eta) - \Psi\Psi^\dagger = 0. \quad (1.234)$$

Nous voyons dans cette équation du mouvement l'utilité du champ  $\Psi$  (mais pas pourquoi c'est équivalent à une forme tronquée de  $w_{12}$ ). Si nous faisons la trace de cette équation dans le cas fini, il ne reste que  $\eta$  et  $\Psi$ , car la trace d'un commutateur est nulle grâce à la propriété de cyclicité. Donc, dans le cas  $\eta \neq 0$ , il faut rajouter ce terme pour avoir une solution. Pour  $\eta = 0$  nous n'avons pas besoin de  $\Psi$  pour avoir une solution, mais si nous ne prenons pas de  $\Psi$ , c'est comme si nous n'utilisions pas la forme tronquée de  $w_{12}$ , mais gardions la même forme que dans le cas infini.

Nous voyons que  $\eta = 1$  est bien le cas sans vortex. Nous allons regarder lorsque l'espace est infini (soit lorsque  $N = \infty$ ), donc sans le terme de frontière. Nous allons regarder la solution vide, c'est-à-dire avec des champs nuls, car c'est la solution sans vortex la plus simple. Cette solution peut être obtenue si tous les champs de jauge sont nuls. Puisque  $A_0 = 0$  et que rien ne dépend du temps, le commutateur avec les dérivées covariantes temporelles est nul. Donc nous obtenons que

$$[D, D^\dagger] = \eta. \quad (1.235)$$

Vérifions si ceci est égal à 1 lorsque les champs de jauge sont nuls. Nous obtenons

ceci avec (1.222) et (1.20) :

$$[D, D^\dagger] = -i[D_1, D_2] = i\theta[\partial_1, \partial_2] = i\theta \left( -\frac{i}{\theta} \right) = 1. \quad (1.236)$$

Donc effectivement, quand  $\eta = 1$ , il n'y a pas de structure figée (autre que l'absence de structure), c'est-à-dire la contrainte dynamique donné par l'équation de Gauss qui est respecté lorsque le fluide est au repos.

Si nous faisons la variation sur  $D^\dagger$ , nous devons obtenir la loi d'Ampère :

$$\begin{aligned} \delta S = 0 = \frac{\pi}{g^2\theta} \int dt (\text{Tr} \{ -2[D_0, D][D_0, \delta D^\dagger] - \kappa[D, \delta D^\dagger][D, D^\dagger] \\ - \kappa[D, D^\dagger][D, \delta D^\dagger] - 2\lambda[D, \delta D^\dagger]D_0 \}. \end{aligned} \quad (1.237)$$

En utilisant la cyclicité de la trace et l'équation (I.3), nous obtenons

$$[D_0, [D_0, D]] + \kappa[D, [D, D^\dagger]] + \lambda[D, D_0] = 0. \quad (1.238)$$

Nous obtenons aussi une autre équation de mouvement en faisant varier  $\Psi^\dagger$  :

$$D_0\Psi = 0. \quad (1.239)$$

Regardons pourquoi c'est équivalent d'avoir rajouté ce champ  $\Psi$  à avoir utilisé une valeur tronquée de  $w_{12}$ . Commençons par calculer  $w_{12}$ . Pour cela nous utilisons (1.21) sauf que les  $a$  sont finis<sup>15</sup> :

$$a = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1|, a^\dagger = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \quad (1.240)$$

---

<sup>15</sup>Ceci ne sont pas des opérateurs de dérivées puisque ces derniers n'existent pas, mais c'est une coupure (c'est-à-dire une manière de l'écrire à l'aide de matrice finies) naturelle pour l'opérateur de dérivées.

Le commutateur de  $a$  et  $a^\dagger$  donne

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{i=0}^{N-2} \sqrt{n+1} \sqrt{i+1} [|n\rangle\langle n+1|, |i+1\rangle\langle i|] \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)(|n\rangle\langle n| - |n+1\rangle\langle n+1|) = \sum_{n=0}^{N-2} |n\rangle\langle n| - (N-1)|N-1\rangle\langle N-1| \end{aligned}$$

qui permet de calculer  $w_{12}$

$$w_{12} = -i[\partial_1, \partial_2] = \frac{(-i)^2}{2\theta} [a - a^\dagger, a + a^\dagger] = \frac{-1}{\theta} [a, a^\dagger] = \frac{-i}{\theta} (1 - N |N-1\rangle\langle N-1|) \quad (1.241)$$

qui est essentiellement la même chose que dans le cas infini (1.20), sauf qu'il a un terme de plus.

Nous avons vu que s'il n'y avait pas de structure figée dans le fluide, alors  $\eta = 1$  qui venait de la valeur de  $w_{12}$ . Si nous recommençons avec notre nouveau  $w_{12}$ , alors nous devons ajouter  $-N |N-1\rangle\langle N-1|$  à  $\eta$ . Si nous remplaçons cela dans l'équation de Gauss (1.234) nous obtenons

$$[D, [D_0, D^\dagger]] + [D^\dagger, [D_0, D]] + \lambda(-[D, D^\dagger] + \eta) - N\lambda |N-1\rangle\langle N-1| - \Psi\Psi^\dagger = 0. \quad (1.242)$$

S'il n'y a pas de structure figée, alors  $\eta = 1$ , comme c'est le cas pour nos solutions dans l'article et celles dans [2]. Dans ce cas, notre  $\Psi\Psi^\dagger = N\lambda |N-1\rangle\langle N-1|$  et remplace effectivement le terme manquant de  $w_{12}$ . Par contre, nous pourrions croire que nous avons des conditions supplémentaires sur  $A_0$  à cause de l'équation du mouvement de  $\Psi$  (1.239), mais il suffit de choisir la bonne fréquence pour la phase de  $\Psi$ , car les solutions que nous avons obtenues et celles dans [2] ont un  $A_0$  diagonal. Si  $\Psi = \sqrt{\lambda N} e^{i\alpha t}$ , alors l'équation du mouvement de  $\Psi$  devient

$$D_0\Psi = \sqrt{\theta}(i\partial_0 + A_0)\Psi = 0 \rightarrow \alpha = A_0(N-1), \quad (1.243)$$

où  $A_0(N-1)$  est le facteur devant l'état  $|N-1\rangle\langle N-1|$  de  $A_0$ . Alors, nous

pourrions nous demander si choisir  $\Psi = |M\rangle$  où  $M \neq N - 1$  n'est pas un bon choix puisque cela ne reproduit pas le terme  $w_{12}$ . En fait, nous pouvons puisque le système est invariant sous permutation des états (car c'est une symétrie de jauge). Donc en théorie cela devrait donner la même solution. Par contre nous pouvons changer de  $M$ , sans changer le reste de notre ansatz (c'est ce qui a été fait dans [2]). Il se peut alors que nous obtenions de nouvelles solutions, mais cela reste équivalent à changer le reste de l'ansatz.

Dans les cas que nous venons de voir,  $\Psi$  ne fait que remplacer la valeur de  $w_{12}$ . Par contre, il peut faire plus et agir en tant que source. Nous nous rendons compte aussi que, dans le cas fini, les structures figées dans le fluide sont étroitement liées à cette source. Nous voyons particulièrement ce lien en faisant la trace de la loi de Gauss (1.234).

Nous pouvons calculer l'hamiltonien qui est similaire à celui en géométrie normale. Le terme de CS ne contribue pas à l'énergie puisqu'il est au premier ordre en dérivée temporelle :

$$H = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr}(-2[D_0, D^\dagger][D_0, D] + \kappa[D, D^\dagger][D, D^\dagger]). \quad (1.244)$$

### 1.5.3 Solutions

Quelles sont les solutions que nous pouvons trouver pour ces systèmes? En premier, à partir d'une solution  $D = D'$ , nous pouvons transformer simplement les solutions par l'addition d'une constante à  $D$ . Nous voyons que dans toutes nos équations du mouvement,  $D$  se trouve dans un commutateur donc cela va aussi répondre aux équations du mouvement. Cela correspond à une translation du système comme nous le verrons plus loin. À partir de (1.158) et (1.219) nous trouvons la variation des coordonnées lagrangiennes

$$\Delta y_i = -\theta \epsilon_{ij} \Delta A_j = -\sqrt{\theta} \epsilon_{ij} \Delta D_j. \quad (1.245)$$

Nous pouvons écrire les dérivées covariantes en terme de  $D$  et  $d^\dagger$  à l'aide de (2.5) :

$$D_1 = \frac{D + D^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad D_2 = i \frac{D^\dagger - D}{\sqrt{2}}. \quad (1.246)$$

Si nous posons la variation de  $D$

$$D = D' + \Delta D, \quad \Delta D = K_R + iK_I, \quad (1.247)$$

où  $K_R$  et  $K_I$  sont des nombres réels, alors cette variation devient

$$\Delta y_1 = -\sqrt{\theta} \Delta D_2 = -\sqrt{2\theta} K_I, \quad \Delta y_2 = \sqrt{\theta} \Delta D_1 = \sqrt{2\theta} K_R. \quad (1.248)$$

Les opérateurs de position sont changés par ces constantes et, par le fait même, leurs valeurs propres sont changées par la même valeur. Nous avons ajouté une constante à notre solution et cela correspond à une translation des coordonnées. Nous avons fait un changement de coordonnées actif, car nous avons modifié la solution. Par contre, nous aurions pu changer la valeur de  $x$  ou des dérivées (1.17) par une constante pour faire un changement de coordonnées passif. En fait, nous pouvons aller plus loin et dire que toute transformation de Bogoliubov des opérateurs positions est un changement de coordonnées passif. Par exemple, la rotation du système (et non pas autour d'une solution comme nous obtenons dans l'article) laisse invariant le commutateur des coordonnées :

$$x'_1 = x_1 \cos(\phi) + x_2 \sin(\phi), \quad x'_2 = -x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi). \quad (1.249)$$

Le commutateur reste inchangé

$$[x'_1, x'_2] = [x_1 \cos(\phi) + x_2 \sin(\phi), -x_1 \sin(\phi) + x_2 \cos(\phi)] = i\theta((\sin(\phi))^2 + (\cos(\phi))^2) = i\theta. \quad (1.250)$$

Notre choix pour la forme de nos opérateurs position (1.7) (choisie à une transformation de Bogoliubov près) est associé à un système de coordonnées.

Pour trouver des solutions, nous pouvons regarder dans le cas  $\eta = 1$  dans le plan infini. Certains auteurs ont trouvé des solutions statiques [1], c'est-à-dire  $D = a$  où  $a$  est l'opérateur de création<sup>16</sup>. En fait, c'est une solution sans champ, comme nous l'avons vu plus tôt en (1.236). Donc tout le fluide bouge dans les coordonnées lagrangiennes. Dans [2], les auteurs ont trouvé que, dans un espace fini, il n'y avait pas de solutions sans champ (et donc où tous les électrons bougent dans les coordonnées lagrangiennes). Par contre, ils en ont trouvé de très proches des coordonnées lagrangiennes (des champs faibles). Leur ansatz, à une transformation de jauge près, est

$$D = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{G(n)} e^{iw(n)t} |n\rangle \langle n+1|, A_0 = 0, \Psi = c |M\rangle. \quad (1.251)$$

Puisque pour trouver les solutions, il faut faire essentiellement la même chose que pour celles des quasi-trous dans l'article que nous présentons, alors nous ne les résoudrons pas ici. De plus, dans [23], les auteurs ont trouvé des solutions avec le même ansatz, mais avec un lagrangien différent. À la place du terme de Maxwell, ils ont un potentiel harmonique qui devrait en principe bien représenter le système dans le premier niveau de Landau. De plus, ils ont trouvé des solutions quasi-trous avec l'ansatz que nous utilisons dans notre article. C'est donc dans cette continuité que nous avons trouvé les nôtres. Par contre, il faut se rendre compte que déjà les solutions dans [2] sont des quasi-trous puisque les champs de jauge  $A_i$  sont non-nuls. Ils sont par contre généralement de "petits" quasi-trous puisque les champs de jauge sont petits. La grosseur de ces quasi-trous varie d'ailleurs selon le champ magnétique dans [2]. En fait, leur taille tend vers 0 lorsque le champ magnétique tend vers l'infini.<sup>17</sup>

De plus, dans [1], les auteurs ont trouvé des ondes planes qu'ils peuvent ajouter

---

<sup>16</sup>En fait, pour un  $\eta$  quelconque nous avons comme solution  $D = \sqrt{\eta}a$ . De plus, toutes les transformations de Bogoliubov associées à ce  $D$  sont solutions.

<sup>17</sup>C'est vrai quand  $M = N - 1$ , sinon l'interprétation est moins claire.

à leur solution  $D = a$  (dans le plan infini avec  $\eta = 1$ ). La solution était du type

$$D = a + e^{i\omega t} R_1(ka + k^* a^\dagger) + e^{-i\omega t} R_2(ka + k^* a^\dagger), \quad (1.252)$$

où les  $R$  sont des combinaisons linéaires d'exponentielles complexes avec la relation de dispersion  $w^2 = \lambda^2 + 2kk^*$ . Les solutions de rotation que nous avons trouvées dans l'article de ce mémoire peuvent être associées à ces ondes planes pour  $k = 0$ . Par contre, nos solutions de rotation peuvent être ajoutées à n'importe quel résultat contrairement à celles de [1]. Aussi, dans [1], les deux racines de  $w^2$  sont solutions, contrairement aux nôtres.

Si notre champ magnétique est très fort, alors  $\lambda$  est très grand et nous pouvons négliger les termes sans  $\lambda$  dans les équations du mouvement. L'équation de Gauss devient (le terme de frontière reste, car sinon nous n'avons pas de solution dans le cas de dimension finie et nous pouvons voir ce terme comme une extension de  $w_{12}$  qui est, lui, multiplié par  $\lambda$ )

$$\lambda(-[D, D^\dagger] + \eta) - \Psi\Psi^\dagger = 0. \quad (1.253)$$

L'équation d'Ampère devient

$$\lambda[D, D_0] = 0. \quad (1.254)$$

L'équation d'Ampère est respectée si  $A_0 = 0$  et  $D$  est indépendant du temps. Dans le cas infini, l'équation de Gauss est respectée si  $D = \sqrt{\eta}a$  et pour toutes les transformations de Bogoliubov associées comme dans le cas où le champ magnétique est faible. Par contre dans le cas de dimension finie, l'équation est respectée si  $\Psi = \sqrt{\lambda\eta N} |N-1\rangle$  et si

$$D = \sqrt{\eta} \left( \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n+1+q} |n\rangle \langle n+1| + \sqrt{q} |N-1\rangle \langle 0| \right) \quad (1.255)$$

qui n'est pas une solution si  $\lambda$  est faible.

Si  $q = 0$  et  $\eta = 1$ , c'est la solution vide c'est-à-dire que les champs de jauge sont

nuls(car les coordonnées eulériennes et lagrangiennes sont égales et par conséquent le fluide est au repos). Par contre, pour  $q \neq 0$ , ce sont des quasi-trous.

## CHAPITRE 2

### RÉSULTATS

#### 2.1 Premiers résultats

Dans cette section, nous allons exposer les résultats que l'auteur du présent mémoire a obtenus. Cette section sera séparée en deux parties. La première sera des résultats qui sont moins importants. Dans la deuxième, nous présenterons un article dont les solutions sont plus d'intérêt.

Nous réécrivons les équations du mouvement que nous avons obtenues dans le chapitre précédent. Nous avons l'équation de Gauss (1.234)

$$[D, [D_0, D^\dagger]] + [D^\dagger, [D_0, D]] + \lambda(-[D, D^\dagger] + \eta) - \Psi\Psi^\dagger = 0, \quad (2.1)$$

l'équation d'Ampère (1.238)

$$[D_0, [D_0, D]] + \kappa[D, [D, D^\dagger]] + \lambda[D, D_0] = 0, \quad (2.2)$$

et l'équation pour  $\Psi$  (1.239)

$$D_0\Psi = 0. \quad (2.3)$$

Dans les équations précédentes nous avons défini les

$$D_\mu = \sqrt{\theta}(-i\partial_\mu + A_\mu) \quad (2.4)$$

comme les dérivées covariantes et les

$$D = \frac{D_1 + iD_2}{\sqrt{2}}, \quad D^\dagger = \frac{D_1 - iD_2}{\sqrt{2}}. \quad (2.5)$$

comme une combinaison linéaire des dérivées covariantes spatiales (ou dit autrement ce sont les combinaisons holomorphes et anti-holomorphes des dérivées cova-

riantes spatiales). De plus, le champ  $\Psi$  est un champ de frontière que nous avons rajouté dans le cas de dimensions finies,  $\eta$  est un paramètre relié à la conservation de la vorticité du fluide imposée par la loi de Gauss et  $\kappa$  est un paramètre de déformation du fluide (lorsque ce paramètre est petit, il coûte peu d'énergie de varier la densité, mais lorsqu'il est grand il en coûte beaucoup d'énergie pour faire varier la densité). Nous avons aussi le paramètre

$$\lambda = \frac{eB\sqrt{\theta}}{m}, \quad (2.6)$$

où  $-e$  est la charge d'un électron,  $B$  est le champ magnétique réel (pas celui de notre théorie de jauge effective) perpendiculaire à notre fluide d'électrons en deux dimensions spatiales et  $\theta$  est le paramètre de noncommutativité de notre théorie qui est relié aux coordonnées avec l'identité

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij} = i\epsilon_{ij}\theta. \quad (2.7)$$

Dans le contexte de la géométrie noncommutative comme théorie effective de l'effet Hall quantique ce paramètre est relié à la densité électronique dans les coordonnées lagrangiennes  $\rho_0$  avec la relation

$$\theta = \frac{1}{2\pi\rho_0}. \quad (2.8)$$

L'hamiltonien du système est donné par (1.244)

$$H = \frac{\pi}{g^2\theta} \text{Tr}(-2[D_0, D^\dagger][D_0, D] + \kappa[D, D^\dagger][D, D^\dagger]). \quad (2.9)$$

Nous allons trouver des solutions pour  $\eta = 0$  comme dans l'article [19] dans le plan infini qui revient à supposer une certaine structure au fluide. Comme  $\eta = 0$ , nous n'avons pas absolument besoin du champ  $\Psi$  pour avoir des solutions. Donc nous allons être dans le cas sans champ  $\Psi$ . Dans ces conditions, les équations du

mouvement se réécrivent comme

$$[D, [D_0, D^\dagger]] + [D^\dagger, [D_0, D]] - \lambda[D, D^\dagger] = 0, \quad (2.10)$$

$$[D_0, [D_0, D]] + \kappa[D, [D, D^\dagger]] + \lambda[D, D_0] = 0, \quad (2.11)$$

où nous n'avons plus l'équation pour  $\Psi$  puisqu'il n'est plus là.

La première solution est de la forme

$$D = f(B)e^{\frac{iut}{\sqrt{\theta}}}, A_0 = g(B), \quad (2.12)$$

où  $B$  est un opérateur hermitien,  $f$  est une fonction et  $g$  est une fonction réelle. Puisque  $B$  est hermitien, alors  $D^\dagger$  sera fonction que de  $B$ . La loi de Gauss (2.10) est respectée, car tous les commutateurs seront nuls puisque  $D$ ,  $D^\dagger$  et  $\dot{D}$  ( $\dot{D} = [\partial_0, D]$ ) sont seulement fonction de  $B$ . Pour la loi d'Ampère (2.11) nous obtenons

$$w^2 - \lambda w = 0. \quad (2.13)$$

C'est résolu si  $w = \lambda$  ou si  $w = 0$ . La solution  $w = 0$  n'est pas vraiment intéressante puisqu'elle ne change pas l'énergie de la solution minimale d'énergie qui est obtenue lorsque  $D = 0$  et  $A_0 = 0$ . La solution  $w = \lambda$  est similaire à celle de rotation trouvée dans l'article. Sauf que dans ce cas spécifique, nous avons une plus grande liberté. L'élément essentiel de nos solutions de rotation est qu'elles doivent commuter avec tout sauf les dérivées temporelles. Puisque  $D = 0$  et  $A_0 = 0$  est une solution, alors cela nous donne une plus grande liberté sur le facteur non temporel de  $D$ .

L'autre solution que nous proposons ici est aussi dans le plan infini, mais elle sera localisée dans l'espace. Donc nous utilisons le lagrangien précédent et donc les équations du mouvement sont (2.11) et (2.10), mais notre solution sera décrite à l'aide d'un nombre fini d'états (les autres états ayant des facteurs nuls devant)<sup>1</sup>. Nous pouvons aussi regarder dans le cas de dimensions finies, mais puisque nous

<sup>1</sup>La solution précédente peut être aussi une solution finie, car  $B$  peut être une matrice finie.

n'avons pas pris de  $\Psi$ , nous supposons que  $w_{12}$  est pareil que dans le cas infini. Nous posons un autre ansatz, soit

$$D = D' e^{\frac{iwt}{\sqrt{\theta}}} = e^{\frac{iwt}{\sqrt{\theta}}} \sum_{i=0}^{n-2} c_i |i\rangle \langle i+1|, A_0 = 0. \quad (2.14)$$

Nous voyons que tous les termes dans l'équation de Gauss (1.234) vont être pareils ; seuls les facteurs venant des dérivées seront différents. L'équation de Gauss devient

$$-w[D', D'^{\dagger}] + w[D'^{\dagger}, D'] - \lambda[D', D'^{\dagger}] = 0 \Rightarrow -2w - \lambda = 0. \quad (2.15)$$

Donc  $w = -\frac{\lambda}{2}$ . Pour calculer l'équation d'Ampère, il faut calculer le commutateur de  $D$  et  $D^{\dagger}$  pour pouvoir calculer le deuxième terme de (1.238) :

$$[D, D^{\dagger}] = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2} c_i c_j [|i\rangle \langle i+1|, |j+1\rangle \langle j|] = \sum_{i=0}^{n-1} (c_i^2 - c_{i-1}^2) |i\rangle \langle i|, \quad (2.16)$$

où  $c_{-1} = c_{n-1} = 0$ . On pose  $\bar{c}_i^2 = c_{i+1}^2 - c_i^2$ .

Alors le double commutateur est

$$[D, [D, D^{\dagger}]] = e^{\frac{iwt}{\sqrt{\theta}}} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} c_i \bar{c}_j^2 [|i\rangle \langle i+1|, |j\rangle \langle j|] = e^{\frac{iwt}{\sqrt{\theta}}} \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\bar{c}_{i+1}^2 - \bar{c}_i^2) |i\rangle \langle i+1|. \quad (2.17)$$

On remarque que les autres termes dans (1.238) ont la même forme, car ce ne sont que des dérivées temporelles. Si nous prenons la valeur de  $w$ , l'équation d'Ampère se réduit à

$$\frac{\lambda^2}{4} + \kappa(\bar{c}_{i+1}^2 - \bar{c}_i^2) + \frac{\lambda^2}{2} = 0. \quad (2.18)$$

Nous pouvons solutionner cette équation avec (c'est similaire à ce qui est fait dans l'article)

$$c_i^2 = \alpha i^2 + \beta i + \delta. \quad (2.19)$$

Nous savons que  $\overline{c_{i+1}^2} - \overline{c_i^2} = c_{i+1}^2 - 2c_i^2 + c_{i-1}^2$ , donc nous avons

$$\overline{c_{i+1}^2} - \overline{c_i^2} = \alpha((i+1)^2 - 2i + (i-1)^2) = 2\alpha = -\frac{3\lambda^2}{4\kappa}. \quad (2.20)$$

Il nous reste les deux conditions que nous avons posées, soit  $c_{-1} = c_{n-1} = 0$  :

$$\alpha - \beta + \delta = 0, \alpha(n-1)^2 + \beta(n-1) + \delta = 0. \quad (2.21)$$

Ceci se résout par

$$\alpha = \frac{-3\lambda^2}{8\kappa}, \beta = \frac{3\lambda^2(n-2)}{8\kappa}, \delta = \frac{3\lambda^2}{8\kappa}(n-1). \quad (2.22)$$

Le premier terme de l'énergie (2.9) donne

$$[D_0, D^\dagger][D_0, D] = -w^2 D^\dagger D = -w^2 \sum_{i=0}^{n-2} c_i^2. \quad (2.23)$$

Avec (2.22) et (2.19) nous obtenons

$$[D_0, D^\dagger][D_0, D] = -w^2 \frac{\lambda^2}{16\kappa} (n+1)n(n-1) = -\frac{\lambda^4}{64\kappa} (n+1)n(n-1). \quad (2.24)$$

L'autre terme nous l'avons déjà calculé (2.16). Or, grâce à (2.19) nous avons que  $c_i^2 - c_{i-1}^2 = \alpha(2i-1) + \beta$ . Grâce à (2.16), nous avons

$$[D, D^\dagger][D, D^\dagger] = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha(2i-1) + \beta)^2 = \frac{3\lambda^4}{64\kappa^2} (n+1)n(n-1). \quad (2.25)$$

Donc cela donne dans (2.9)

$$H = \frac{\pi}{g^2\theta} \frac{5\lambda^4}{64\kappa} (n+1)n(n-1). \quad (2.26)$$

Cette solution est plus ou moins intéressante, car  $D$  est nul pour une infinité d'états (si nous sommes dans le cas infini). Ce n'est pas le cas des champs de jauge (qui

sont nuls lorsque  $D$  est un opérateur de création). Donc les champs de jauge sont essentiellement  $D$  moins l'opérateur de création. Pour les états élevés cela tend vers l'infini et donc la différence entre les coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  diverge.

Dans le cas fini, ces divergences disparaissent, par contre nous avons utilisé la valeur de  $w_{12}$  dans le cas infini plutôt que le terme tronqué.

## 2.2 Article

Dans cette section, nous allons présenter l'article qui représente la partie principale de ce mémoire. Cet article a été soumis et accepté à *Journal of High Energy Physics* (JHEP05(2007)007), mais le preprint est sur arXiv hep-th/0702122 [20]. L'auteur du présent mémoire a trouvé à la fois les solutions analytiques et numériques dans l'article. Il a aussi écrit une partie de l'article, mais son directeur de recherche, Manu Paranjape, l'a grandement modifié pour en améliorer la qualité de l'anglais et la présentation des idées. Dans cet article nous avons trouvé deux types de solutions classiques à la théorie de Maxwell-Chern-Simons en géométrie noncommutative en deux dimensions finies. Dans le contexte que cette théorie pourrait décrire de manière effective un fluide d'électrons (ayant un nombre fini d'électrons) soumis à un champ magnétique, ces solutions pouvaient s'interpréter comme des rotations et des quasi-trous. Les solutions de rotation tournent autour d'autres solutions à la fréquence cyclotron et ajoutent à l'énergie celles que possèdent normalement des électrons dans un champ magnétique. Nous avons trouvé aussi des solutions quasi-trous de manière perturbative lorsque les quasi-trous étaient petits ou grands et de manière numérique pour les cas intermédiaires. Les grands quasi-trous possèdent deux comportements très différents. L'un dont l'énergie diverge et l'autre dont l'énergie tend vers zéro lorsque la grandeur du quasi-trou tend vers l'infini. Les petits quasi-trous ont aussi deux solutions associées à chaque soliton trouvé dans l'article [2] (c'est à dire  $N$  solutions où  $N$  est le nombre d'électrons) dont le comportement similaire. Ils se trouvent dans un minimum local. De plus, lorsque  $\lambda$  (et par conséquent le champ magnétique) est faible, nous trouvons un saut dans le spectre des grandeurs des quasi-trous, car dans ces conditions les petits quasi-trous n'existent pas.

# Quasi-hole solutions in finite noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory

---

Jules Lambert<sup>1</sup> and M. B. Paranjape<sup>2</sup>

*Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal  
C.P. 6128, succ. centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7  
E-mail: [information retirée / information withdrawn] [information retirée / information withdrawn]*

**ABSTRACT:** We study Maxwell-Chern-Simons theory in 2 noncommutative spatial dimensions and 1 temporal dimension. We consider a finite matrix model obtained by adding a linear boundary field which takes into account boundary fluctuations. The pure Chern-Simons has already been shown to be equivalent to the Laughlin description of the quantum Hall effect [6, 7]. With the addition of the Maxwell term, we find that there exists a rich spectrum of excitations including solitons [12] with nontrivial "magnetic flux" and quasi-holes with nontrivial "charges", which we describe in this article. The magnetic flux corresponds to vorticity in the fluid fluctuations while the charges correspond to sources of fluid fluctuations. We find that the quasi-hole solutions exhibit a gap in the spectrum of allowed charge.

**KEYWORDS:** noncommutative geometry, Chern-Simons theory, quantum Hall effect.

**Contents**

<b>1. Introduction</b>	<b>75</b>
<b>2. The model, equations of motion and the Hamiltonian</b>	<b>76</b>
<b>3. Rotational excitations</b>	<b>78</b>
<b>4. Quasi-hole solutions</b>	<b>79</b>
4.1 Perturbative analysis of the quasi-hole solution	82
4.1.1 Large quasi-hole solution	82
4.1.2 Small quasi-hole solution	85
4.2 Numerical analysis of the quasi-hole solution	86
<b>5. Ground state</b>	<b>90</b>
<b>6. Conclusion</b>	<b>92</b>

---

## 1. Introduction

In recent years noncommutative geometry has been an effervescent field of research particularly in its relation to solitons in effective descriptions of string theory and D-branes [1][2]. However its most surprising application comes in a description of strongly correlated quantum magneto-hydrodynamics and various other quantum dynamical fluids [3]. The most intriguing application in this context is to the quantum Hall effect. Susskind[4] proposed that noncommutative Chern-Simons theory in 2+1 dimensions would be an appropriate description of the quantum Hall effect. The quantum Hall effect concerns the strongly correlated quantum dynamics of a two dimensional electron gas in a strong transverse magnetic field. The noncommutative space exists in the internal two dimensional space of the Lagrange coordinate description [5] of the electron fluid.

The continuum, classical description of the small fluctuations of a two dimensional fluid is easily seen to be a gauge theory of the group of area preserving diffeomorphisms. The gauge fields (spatial components) correspond to fluctuations of the fluid with respect to the ground state of a quiescent, undisturbed fluid. The gauge freedom of area preserving diffeomorphisms, simply corresponds to a relabeling of the elements of the fluid which are native to the Lagrange description of fluid dynamics, an evident invariance of the theory. The corresponding conservation law is equivalent to the Gauss law.

In the presence of a strong transverse magnetic field and in the low energy approximation the classical term with the lowest number of derivatives is exactly the Chern-Simons term. In this theory, the Gauss law in fact imposes the vortex free condition on the fluid. The vortices are frozen out of the fluid and act as sources, just as ordinary charges in electrodynamics act as sources outside of the electric and magnetic fields. Imposing the Gauss law via the introduction of a temporal gauge fields and an enhanced gauge invariance (now including time dependent gauge transformations) results in a fully non-abelian Chern-Simons gauge theory of the group of area-preserving diffeomorphisms.

Susskind's [4] key observation was that this non-abelian gauge theory appears to be a truncation to first order of the simplest noncommutative Chern-Simons gauge theory defined on two noncommutative spatial and one normal temporal dimension. Thus Susskind proposed that the true theory of the quantum Hall effect corresponds to the full noncommutative Chern-Simons gauge theory. One motivation given for this hypothesis was to reintroduce the discreteness that exists at the particulate level of the two dimensional electron gas, a discreteness which the continuum approximation erases. It remained to be seen if the phenomenology of the quantum Hall effect could be reproduced with this hypothesis. It was shown in Susskind [4] but also in more detail in [6, 7] that indeed the noncommutative gauge theoretical description of the quantum Hall effect when restricted to a finite droplet of the fluid through the introduction of a boundary and boundary degrees of freedom, was in one to one correspondence to the description afforded by the Laughlin wave functions [8]. However, the probability densities calculated in the noncommutative Chern-Simons model was only equal to that of the Laughlin wave functions in large distance limit [9]. This theory however describes the

quantum Hall state via the projection to the lowest Landau level, it cannot hope to describe any transition between levels or the transition to the final state called the Hall insulator [10] for very strong external magnetic field.

In the absence of the transverse magnetic field, the lowest order term in the effective Lagrangian corresponds to the Maxwell term for the gauge field of area-preserving gauge transformations. The coefficient of the "electric" part does not have to be correlated with the coefficient of the "magnetic" part combining to give a relativistically invariant action, however this can be arranged by re-scaling the gauge field or time variable appropriately. Again the Gauss law constraint can be obtained by the incorporation of a temporal component to the gauge field and writing a gauge invariant expression for the field strength. The Maxwell term is the next order term that can be added to the pure Chern-Simons gauge theory. It renders the theory more interesting, the Gauss law constraint does not expel vortices from the theory but imposes a more dynamical constraint. We have already studied this theory in previous articles, where we found plane wave solutions for the unbounded theory [11] and soliton solutions for the theory of a finite droplet [12]. In this article we further examine the theory on a finite droplet and show the existence of quasi-hole states and rotational excitations. With this rich spectrum of excitations we expect that the theory should be able to describe transitions as a function of the parameters. Other authors[13] have looked for the quantum solution of the noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory and found the correspondance to be to more than one Landau level. However, in order to find their solution they had to assume that a certain deformation energy of the fluid (defined in the next section) was either zero or infinity. In this article, we find classical quasi-hole solutions for the noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory for arbitrary values of the deformation energy.

## 2. The model, equations of motion and the Hamiltonian

Susskind's[4] idea was to describe a two (spatial) dimensional fluid by a gauge field  $A_j$  so that

$$x^i = y^i + \theta \epsilon^{ij} A_j \quad (2.1)$$

where  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  are the Eulerian coordinates of the fluid,  $y_i$ ,  $i = 1, 2$  are the Lagrangian (comoving) coordinates of the fluid and  $\theta = 1/(2\pi\rho_0)$ . Then the Lagrangian of a charged fluid in an external transverse magnetic field corresponds to the 2+1 dimensional Maxwell-Chern-Simons theory for small value of the gauge field. The continuum approximation removes the discreteness that is manifest in the physical fluid. Susskind proposed to bring this discreteness back by suggesting that the noncommutative version of this theory should describe the full theory. We studied this theory with the additional modification of boundary and boundary degrees of freedom[12]. Here we study the same action, however we add a factor  $\kappa$  to the analog of the magnetic field squared term which corresponds to the potential energy density of spatial deformations of the fluid. The first term, the analog of the electric field squared, corresponds to the kinetic term, the Chern-Simons term represents the interaction of the

charged fluid with the external magnetic and the last term represents the boundary degrees of freedom:

$$S = \frac{\pi}{g^2\theta} \int dt (Tr\{(-2[D_0, D][D_0, D^\dagger] - \kappa[D, D^\dagger][D, D^\dagger]) + 2\lambda(-[D, D^\dagger] + 1)D_0\} - 2\Psi^\dagger D_0\Psi). \quad (2.2)$$

Here  $D_0$  is the time covariant derivative,  $D$  and  $D^\dagger$  are the holomorphic and anti-holomorphic combinations of the spatial covariant derivatives respectively and  $\Psi$  is a boundary field. The boundary field was first added by Polychronakos [6] which allowed him to find solutions of non-commutative Chern-Simons theory in terms of finite matrices. These correspond to finite droplets of the quantum Hall fluid. Specifically

$$D_\mu = \sqrt{\theta}(-i\partial_\mu + A_\mu) \quad (2.3)$$

and

$$D = \frac{D_1 + iD_2}{\sqrt{2}}, D^\dagger = \frac{D_1 - iD_2}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

and the parameters  $\lambda$  and  $g^2$  are related to the noncommutativity parameter  $\theta$ , the electron charge  $e$ , the external magnetic field  $B$ , the density  $\rho_0$  and the electron mass  $m$  by

$$\lambda = \frac{eB\theta^{1/2}}{m}, \quad g^2 = \frac{(2\pi)^2\rho_0}{m}. \quad (2.5)$$

We rescale  $D_0$  and  $\Psi$  and the parameters in the following way, in order to obtain exactly the action studied in [12]:

$$D_0 = \sqrt{\frac{\theta}{\kappa}}(-i\partial_0 + A_0), \quad \lambda = \frac{eB\theta^{1/2}}{m\sqrt{\kappa}}, \quad g^2 = \frac{(2\pi)^2\rho_0}{m\kappa}, \quad \Psi \rightarrow \frac{\Psi}{\sqrt[4]{\kappa}} \quad (2.6)$$

Defining

$$\Xi = \frac{\pi}{g^2\theta} \quad (2.7)$$

we obtain the action

$$S = \Xi \int dt (Tr\{(-2[D_0, D][D_0, D^\dagger] - [D, D^\dagger][D, D^\dagger]) + 2\lambda(-[D, D^\dagger] + 1)D_0\} - 2\Psi^\dagger D_0\Psi). \quad (2.8)$$

By varying with respect to  $\Psi^\dagger$ ,  $D_0$ , and  $D^\dagger$  we get, respectively, the boundary equation

$$i\dot{\Psi} = A_0\Psi, \quad (2.9)$$

the Gauss law

$$[D, [D_0, D^\dagger]] + [D^\dagger, [D_0, D]] + \lambda([D, D^\dagger] - 1) + \Psi\Psi^\dagger = 0, \quad (2.10)$$

and the Ampère law

$$[D_0, [D_0, D]] + [D, [D, D^\dagger]] = \lambda[D_0, D]. \quad (2.11)$$

The Hamiltonian is, as in [12], given by

$$H = \Xi Tr(-2[D_0, D^\dagger][D_0, D] + [D, D^\dagger][D, D^\dagger]). \quad (2.12)$$

### 3. Rotational excitations

Our first solution corresponds to rotational excitations on top of any given solution. Our procedure can be applied to the soliton solutions found for example in [12] and to the solutions that we find in this article. We put

$$D = D' + \frac{R}{\sqrt{2\theta}} e^{iwt}, \quad D_0 = D'_0, \quad \Psi = \Psi' \quad (3.1)$$

where the primed variables correspond to any known solution to the equations of motion with  $R$  (proportional to the identity) and  $w$  (real) simply constant. The Gauss law involves commutators of the  $D$  or  $D^\dagger$  with each other or with their commutator with  $D_0$ . The direct addition of complex constants as in the equation (3.1) or those that result from the commutators involving  $D_0$ , simply vanish open taking the further commutators with  $D$  or  $D^\dagger$ , hence the Gauss law is satisfied. The equation (2.9) is also obviously satisfied. Replacing (3.1) into the Ampère law yields a solution if  $w = \frac{\lambda\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\theta}} = \frac{eB}{m}$  the familiar cyclotron frequency. We calculate the corresponding change of energy:

$$\Delta H = -2\Xi \text{Tr} \left( [D_0, \frac{R^*}{\sqrt{2\theta}} e^{-iwt}] [D_0, D'] + [D_0, D'^\dagger] [D_0, \frac{R}{\sqrt{2\theta}} e^{iwt}] + [D_0, \frac{R^*}{\sqrt{2\theta}} e^{-iwt}] [D_0, \frac{R}{\sqrt{2\theta}} e^{iwt}] \right) \quad (3.2)$$

which yields

$$\Delta H = -2\Xi \text{Tr} \left( -\lambda \frac{R^*}{\sqrt{2\theta}} e^{-iwt} [D_0, D'] + \lambda \frac{R}{\sqrt{2\theta}} e^{iwt} [D_0, D'^\dagger] - \lambda^2 \frac{R^* R}{2\theta} \right). \quad (3.3)$$

Since the commutator  $[D_0, D]$  is off-diagonal in our solution and the solution in [12] the trace vanishes giving

$$\Delta H = \frac{2\Xi \lambda^2 |R|^2 N}{2\theta}. \quad (3.4)$$

Expressing this in terms of physical constants gives

$$\Delta H = \frac{e^2 B^2 |R|^2 N}{2m}. \quad (3.5)$$

which is exactly the energy of  $N$  rotating electrons with a amplitude  $R$  at the frequency  $w$  in a magnetic field.

This solution adds a term to the covariant derivative

$$D_1 = D'_1 + \frac{|R|}{\sqrt{\theta}} \cos(wt + \varphi), \quad D_2 = D'_2 + \frac{|R|}{\sqrt{\theta}} \sin(wt + \varphi) \quad (3.6)$$

where  $\varphi$  is the phase of  $R$ . Using the Susskind correspondence between the fluid coordinates and the gauge field (2.1), we see that the solution (3.1) corresponds to rotating about the original solution as

$$y_1 = y'_1 - |R| \sin(wt + \varphi), \quad y_2 = y'_2 + |R| \cos(wt + \varphi) \quad (3.7)$$

where  $y'_1$  and  $y'_2$  are for operator coordinates of original  $y$  solution. These rotational excitations clearly also exist in the analogous theory in the infinite plane treated in [11].

#### 4. Quasi-hole solutions

Quasi-hole solutions appears as a modification of the solutions found in [12]. We will take an ansatz similar to [12], hence  $D$  is represented by an  $N \times N$  matrix which satisfies certain boundary conditions, however we will take a periodic  $D$  as in [6]. The  $D$  is an operator similar in structure to the annihilation operator of an ordinary Heisenberg algebra, hence it generally relates a state  $|n+1\rangle$  to a state  $|n\rangle$ . For the finite matrix representations used here, periodicity means that the final state  $|0\rangle$  is related to the state  $|N-1\rangle$  since  $n$  ranges over the  $N$  values  $0, 1, \dots, N-1$ .

$$D = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |n\rangle\langle n+1| + \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |N-1\rangle\langle 0| \quad (4.1)$$

If  $q = 0$ , this ansatz is equivalent to the one in [12].  $G(n)$  is to be determined from the equations of motion, we solve these eventually, perturbatively and numerically.

Solutions with this ansatz correspond to quasi-hole solutions because they bound the lowest eigenvalue of the radius away from zero in a  $q$  dependent manner. From (2.1), the fluctuation of the radius is proportional to the square of the gauge field

$$A_1^2 + A_2^2 = \left( \frac{D_1}{\sqrt{\theta}} + i\partial_1 \right)^2 + \left( \frac{D_2}{\sqrt{\theta}} + i\partial_2 \right)^2. \quad (4.2)$$

Noncommutative geometry in a finite space is defined by the commutator of the coordinates  $[x_1, x_2] = i\theta(1 - N |N-1\rangle\langle N-1|)$  which imply the commutator for the derivate  $[\partial_1, \partial_2] = \frac{i}{\theta}(-1 + N |N-1\rangle\langle N-1|)$ . Thus we can put

$$\partial_1 = \frac{i}{\sqrt{2\theta}}(d + d^\dagger), \quad \partial_2 = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(d - d^\dagger) \quad (4.3)$$

where

$$d = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n+1} |n\rangle\langle n+1|. \quad (4.4)$$

Then we obtain

$$R^2 \propto \{D - d, D^\dagger - d^\dagger\} \quad (4.5)$$

where  $\{D^\dagger, d\}$  is the anti-commutator. Then the radius becomes

$$\begin{aligned} R^2 \propto & \left( G(0) + 2q - 1 - 2\sqrt{G(0) + q} \cos\left(\frac{w(0)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}\right) \right) |0\rangle\langle 0| \\ & + \sum_{n=1}^{N-2} \left( \frac{G(n) + 2q - 2n - 1 - 2\sqrt{G(n) + q}\sqrt{n+1} \cos\left(\frac{w(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}\right)}{\sqrt{n+1}} \right) |n\rangle\langle n| \\ & + \left( \frac{G(N-2) + 2q - N + 1 - 2\sqrt{G(N-2) + q}\sqrt{N-1} \cos\left(\frac{w(N-2)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}\right)}{\sqrt{N-1}} \right) |N-1\rangle\langle N-1| \end{aligned} \quad (4.6)$$

a diagonal expression in the states where  $\overline{A(n)} = A(n) + A(n-1)$ . We see that for large  $q$  we have correspondingly large eigenvalues for  $R^2$ . The smallest eigenvalue is not directly equal to  $q$ , hence our solution corresponds to the fluid pushed away from the origin.

Returning to the solution of the equations of motion, we will consider the gauge  $A_0 = 0$  but we let  $D$  depend on time. This choice is different from that taken in [12], however in that case, our choice is simply gauge equivalent. With the periodic ansatz of equation (4.1), this is not the case. Indeed, our choice give us an additional degree of freedom which we can identify as  $\rho$ . Thus  $D_0 = -i\sqrt{\theta}\partial_0$ , and we can calculate the different terms in the equations of motion:

$$[D_0, D] = \sum_{n=0}^{N-2} w(n) \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |n\rangle\langle n+1| + \rho \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |N-1\rangle\langle 0| \quad (4.7)$$

$$[D_0, [D_0, D]] = \sum_{n=0}^{N-2} (w(n))^2 \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |n\rangle\langle n+1| + \rho^2 \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |N-1\rangle\langle 0| \quad (4.8)$$

The commutator  $[D, D^\dagger]$  is given by replacing from equation (4.1)

$$\begin{aligned} [D, D^\dagger] &= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=0}^{N-2} \sqrt{G(n) + q} \sqrt{G(m) + q} e^{\frac{i\sqrt{\kappa}(w(n)-w(m))t}{\sqrt{\theta}}} [|n\rangle\langle n+1|, |m+1\rangle\langle m|] \\ &+ q[|N-1\rangle\langle 0|, |0\rangle\langle N-1|] \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} (G(n) + q) |n\rangle\langle n| - \sum_{n=1}^{N-1} (G(n-1) + q) |n\rangle\langle n| + q(|N-1\rangle\langle N-1| - |0\rangle\langle 0|) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{G(n-1)} |n\rangle\langle n| \end{aligned} \quad (4.9)$$

with the notation  $\overline{A(n)} \equiv A(n+1) - A(n)$  and we define  $G(-1) \equiv 0$  and  $G(N-1) \equiv 0$ . The commutator  $[D^\dagger, [D_0, D]]$  can be computed in the same way as  $[D, D^\dagger]$ . Defining  $w(-1) \equiv \rho$  and  $w(N-1) \equiv \rho$  then

$$[D^\dagger, [D_0, D]] = - \sum_{n=0}^{N-1} \overline{(G(n-1) + q)w(n-1)} |n\rangle\langle n|. \quad (4.10)$$

As this result is hermitian it is also equal to  $[D, [D_0, D^\dagger]]$ . The final term appearing in the equations of motion is calculated as

$$\begin{aligned} [D, [D, D^\dagger]] &= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=0}^{N-1} \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} \overline{G(m-1)} [|n\rangle\langle n+1|, |m\rangle\langle m|] \\ &+ \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} \sum_{m=0}^{N-1} \overline{G(m-1)} [|N-1\rangle\langle 0|, |m\rangle\langle m|] \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} \overline{G(n-1)} |n\rangle \langle n+1| + \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} \left( \overline{G(-1)} - \overline{G(N-2)} \right) |N-1\rangle \langle 0| \quad (4.11)$$

with the notation  $\overline{G(n-1)} \equiv \nabla^2 G(n) = G(n+1) - 2G(n) + G(n-1)$  where  $\nabla^2 G(n)$  is discrete Laplacian (which is facilitated with the further notational convenience  $G(N) \equiv G(0)$  and  $\langle N | \equiv \langle 0 |$ ). Then

$$[D, [D, D^\dagger]] = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} \nabla^2 G(n) |n\rangle \langle n+1|. \quad (4.12)$$

The solution for  $\Psi$  is simply a general static vector since  $A_0 = 0$  in (2.9):

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n |n\rangle. \quad (4.13)$$

We see, as in [12], that only  $\Psi\Psi^\dagger$  contributes off diagonal terms in the Gauss law (2.10). To eliminate such terms we must take  $\Psi = \lambda_M |M\rangle$ . Contrary to [12], different choices of  $M$  are all gauge equivalent (i.e. a permutation) since all choices of  $M$  are equivalent in our periodic ansatz (up to the name of the variable). Taking the trace of the Gauss law then yields  $\lambda_M = \sqrt{N\lambda}$ . We choose without loss of generality that  $M = N-1$ . Then the Gauss law yields (for  $n = 0, \dots, N-1$ )

$$-2\overline{(G(n-1) + q)w(n-1)} + \lambda \left( \overline{G(n-1)} - 1 \right) + \lambda N \delta_{N-1, n} = 0. \quad (4.14)$$

We will solve this equation by induction as in [12]. We will show that for  $n = [0, N-2]$

$$w(n) = -\lambda \frac{n+1 - \frac{2q\rho}{\lambda} - G(n)}{2(G(n) + q)}. \quad (4.15)$$

This formula is true for  $n = N-2$ , as is verified by considering the Gauss law (4.14) for  $n = N-1$ . Then assuming the form (4.15) for a general value of  $n$  we can prove that it is valid for  $n \rightarrow n-1$ . Thus by the principle of induction the formula is valid for all  $n$ . However we have to check/impose that the  $n = 0$  equation of (4.14) is respected. This is indeed the case if we take (4.15). Taking the Ampère law (2.11) and removing an overall factor  $\sqrt{G(n) + q} e^{\frac{iw(n)\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}}$  we obtain, for  $n = [0, N-1]$ .

$$(w(n))^2 + \nabla^2 G(n) = \lambda w(n). \quad (4.16)$$

Here we have  $N$  equations, in  $N-1$  values of  $G(n)$  and also in the two variables  $q$  and  $\rho$ . Hence we have  $N$  equations and  $N+1$  parameters, thus we have one free parameter. Generically, there will be a family of solutions. The Hamiltonian, from equation 2.12, for this ansatz, using equations 4.7 and 4.9 is

$$H = \Xi \left( \sum_{n=0}^{N-1} 2(w(n))^2 (G(n) + q) + \left( \overline{G(n-1)} \right)^2 \right). \quad (4.17)$$

## 4.1 Perturbative analysis of the quasi-hole solution

### 4.1.1 Large quasi-hole solution

The equation (4.16) is non-linear and thus difficult to solve. So we will look the solution for  $q \gg 1$ . We define

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1}{q}, \quad G(n) = G_0(n) + \frac{G_1(n)}{q} \quad (4.18)$$

Then if we expand  $w$  to first order in  $1/q$ , we obtain:

$$w(n) \simeq \rho_0 - \frac{1}{2q}(\lambda(n+1) - G_0(n)) - 2\rho_1 + 2\rho_0 G_0(n) \quad (4.19)$$

$$(w(n))^2 \simeq \rho_0^2 - \frac{\rho_0}{q}(\lambda(n+1) - G_0(n)) - 2\rho_1 + 2\rho_0 G_0(n) \quad (4.20)$$

Working to zero order in  $1/q$ , equation 4.16 gives (for  $n = [0, N-2]$ )

$$\rho_0^2 + \nabla^2 G_0(n) = \lambda\rho_0. \quad (4.21)$$

The discrete Laplacian solved as in the continuous case by

$$G_0(n) = \alpha_0 n^2 + \beta_0 n + \delta_0, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda\rho_0 - \rho_0^2}{2}. \quad (4.22)$$

We have to impose the two boundary conditions  $G_0(-1) = G_0(N-1) = 0$ . These give

$$\alpha_0 - \beta_0 + \delta_0 = 0, \quad \alpha_0(N-1)^2 + \beta_0(N-1) + \delta_0 = 0 \quad (4.23)$$

which are solved by

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(N-2)(\rho_0^2 - \lambda\rho_0), \quad \delta_0 = \frac{1}{2}(N-1)(\rho_0^2 - \lambda\rho_0). \quad (4.24)$$

We still have one final condition left (from the  $n = N-1$  of equation 4.16) which gives

$$\rho_0^2 + \alpha_0(N-2)^2 + \beta_0(N-2) + 2\delta_0 = \lambda\rho_0 \quad (4.25)$$

with solutions

$$\rho_0 = 0 \quad \text{or} \quad \rho_0 = \lambda. \quad (4.26)$$

Either of these solutions give us  $G_0(n) = 0$ .

With the order zero solutions we can continue to solve the equation (4.16) in first order in  $1/q$

$$-\rho_0(\lambda(n+1) - 2\rho_1) + \nabla^2 G_1(n) = \frac{-\lambda}{2}(\lambda(n+1) - 2\rho_1). \quad (4.27)$$

This is solved by

$$G_1(n) = \alpha_1 n^3 + \beta_1 n^2 + \delta_1 n + \gamma_1, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda}{12}(2\rho_0 - \lambda), \quad \beta_1 = \frac{1}{4}(2\rho_0 - \lambda)(\lambda - 2\rho_1). \quad (4.28)$$

Again we have our boundary conditions  $G_1(-1) = G_1(N-1) = 0$  which imply

$$\delta_1 = \frac{1}{12}(N^2\lambda - 3\lambda - 6N\rho_1 + 12\rho_1)(\lambda - 2\rho_0), \gamma_1 = -\frac{1}{12}(N-1)(\lambda N - 6\rho_1 + \lambda)(2\rho_0 - \lambda). \quad (4.29)$$

Finally the condition for  $n = N-1$  of (4.16) gives

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(N-1)\lambda. \quad (4.30)$$

Thus

$$\delta_1 = -\frac{\lambda}{24}(N^2 - 9N + 12)(\lambda - 2\rho_0) \quad (4.31)$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{24}(N-1)(N-5)(2\rho_0 - \lambda) \quad (4.32)$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda}{8}(3-N)(2\rho_0 - \lambda) \quad (4.33)$$

From the Hamiltonian (4.17), for the  $\rho_0 = 0$  solution, it can be shown with a little calculation that a non-zero contribution arises only at order  $1/q$ . The variables  $(\rho, G(n), w(n))$  must be expanded to order  $1/q^2$  to consistently extract this contribution, because the Hamiltonian contains an explicit factor of  $q$ . Indeed, as we will see below, for the  $\rho_0 = 0$  solution, the second order expansion of these variables does not in fact give a non-zero contribution, however they do contribute to the energy for the  $\rho_0 = \lambda$  solution. Then we find the solution to second order:

$$G_2(n) = \alpha_2 n^5 + \beta_2 n^4 + \delta_2 n^3 + \gamma_2 n^2 + \xi_2 n + \epsilon_2, \quad (4.34)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{20}, \beta_2 = \frac{\beta}{12}, \delta_2 = \frac{-\alpha + 2\delta}{12} \quad (4.35)$$

$$\xi_2 = -\frac{\alpha N^4}{20} + \frac{N^3}{12}(3\alpha - \beta) + \frac{N^2}{12}(-5\alpha + 4\beta - 2\delta) + \frac{N}{12}(3\alpha - 5\beta + 6\delta - 6\gamma) + \frac{1}{6}(\beta - 3\delta + 6\gamma)$$

$$\gamma_2 = \frac{-\beta + 6\gamma}{12}, \epsilon_2 = \xi_2 - \frac{\alpha - 5\delta + 15\gamma}{30}, \quad (4.36)$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{2}, \beta = \frac{\lambda^2}{4}(2\beta_1 - 1), \delta = \frac{\lambda}{2}(2\rho_1 + \lambda\delta_1 - \lambda)$$

$$\gamma = \lambda\rho_1 - \rho_1^2 + \lambda\rho_2 - \frac{\lambda^2}{4} - 2\rho_2\rho_0 + \frac{\lambda^2\gamma_1}{2} \quad (4.37)$$

$$\rho_2 = \frac{-(N^2 - 1)(\lambda^3 + 2(2\rho_0 - \lambda))}{96}. \quad (4.38)$$

We have implicitly assumed that  $q \gg \lambda$ ,  $q \gg \rho_i$  and  $q \gg G_i(n)$  for every  $i$  (or more precisely that these variables are of order of  $q^0$ ). However, we find that the  $G_i(n)$  are polynomial in  $n$  where  $n = 0, \dots, N$ . Thus if  $N$  becomes large,  $G_i(n)$  would also become large. Therefore the condition  $q \gg 1$  is not adequate for the perturbative expansion to converge. We see that

$G_1(n)$  and  $G_2(n)$  are respectively third and fifth degree polynomials. Thus our perturbation series would not be valid if  $N^3 \gg q$  or  $N^5 \gg q^2$ . If we replace

$$G(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_i(n)}{q^i}. \quad (4.39)$$

in equation (4.16) and expand to order  $1/q^i$ , then we obtain a recurrence equation relating the discrete Laplacian of  $G_i(n)$  to  $G_j(n)$  with  $j < i$ . Assuming that the solution for the  $G_j(n)$  with  $j < i$  is a polynomial in  $n$ , the solution for  $G_i(n)$  is a polynomial for degree two higher. Then knowing that  $G_1(n)$  is a polynomial of order 3, by induction we see that  $G_i(n)$  is a polynomial of the degree  $2i + 1$ . Thus we see that the true perturbative parameter is actually is  $n^2/q$ . Since  $n = 0, \dots, N$ , we take the strongest condition,  $N^2/q \ll 1$ . This condition might actually not be necessary, since we in fact impose the boundary condition that  $G(N-1) = 0$ , and indeed our numerical analysis agrees with the perturbative analysis even for  $N^2/q \sim N$ .

The Hamiltonian is made up of the kinetic and potential energy. The potential energy actually contributes at order  $1/q^2$ , which we will neglect. The kinetic energy contains terms of order  $q$ . These are in principle the dominant terms for large  $q$ . They have a constant energy density, that is the energy associated to each state  $|n\rangle\langle n|$ . In total the trace gives

$$H_{kin.}(q) = 2\Xi N \rho_0^2 q. \quad (4.40)$$

At order zero, the kinetic energy density is linear (in  $n$ ), but the total after the trace is zero:

$$H_{kin.}(q^0) = 2\Xi \text{Tr} \left( -\lambda \rho_0 \sum_{n=0}^{N-1} \left( n - \frac{2\rho_1}{\lambda} \right) |n\rangle\langle n| \right) = 0. \quad (4.41)$$

For the order  $1/q$  contribution we need  $w(n)^2$  to order  $1/q^2$ .

$$(w(n))^2 \simeq \rho_0^2 - \frac{\lambda \rho_0}{q} \left( n + 1 - \frac{2\rho_1}{\lambda} \right) + \frac{1}{q^2} \left( \frac{\lambda^2}{4} \left( n + 1 - \frac{2\rho_1}{\lambda} \right)^2 + 2\rho_0 \left( \rho_2 - \frac{\lambda G_1(n)}{2} \right) \right). \quad (4.42)$$

The kinetic energy then is

$$H_{kin.}(1/q) = \frac{2\Xi}{q} \text{Tr} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\lambda^2}{4} \left( n - \frac{2\rho_1}{\lambda} \right)^2 + 2\rho_0 \rho_2 \right) |n\rangle\langle n| \right) \quad (4.43)$$

which gives

$$H_{kin.}(1/q) = \frac{2\Xi}{q} \left( \frac{\lambda^2 N}{48} (N^2 - 1) + 2\rho_0 \rho_2 N \right). \quad (4.44)$$

Hence the energy up to the  $1/q$  is

$$H \simeq 2\Xi N \rho_0^2 q + \frac{2\Xi}{q} \left( \frac{\lambda^2 N}{48} (N^2 - 1) + 2\rho_0 \rho_2 N \right). \quad (4.45)$$

The two solutions (for  $\rho_0$ ) behave quite differently for  $\rho_0 = \lambda$  the energy diverges as  $q$  becomes large while for  $\rho_0 = 0$  it vanishes.

$$H_{\rho_0=\lambda} \simeq 2\Xi N \lambda^2 q + \frac{2\Xi}{q} \left( \frac{\lambda^2 N}{48} (N^2 - 1) + 2\lambda \rho_2 N \right) \quad (4.46)$$

$$H_{\rho_0=0} \simeq \frac{\Xi \lambda^2 N (N^2 - 1)}{24q} \quad (4.47)$$

These solutions correspond to an annulus of large radius and small (relatively) thickness that oscillate in time. We can see for the operator of the radius squared (which is diagonal), from equation (4.6), the dominant part of the coefficient (hence eigenvalue of  $R^2$ ) is proportional to  $2q$  for every state, in the large  $q$  limit. The next dominant term is proportional to the square root of  $q$  and is an oscillatory term (the frequency for  $\rho_0 = \lambda$  is of order  $q^0$  and it is weakly  $n$  dependent, and for  $\rho_0 = 0$  it is of order  $q^{-1}$ ). The next important term is proportional to  $2n + 1$ . As  $q \gg \sqrt{q} \gg 1$  the radius is very large and oscillates with an amplitude that is relatively much smaller than the radius. Thus from afar the droplet looks like a thin annulus that undergoes a nontrivial oscillation.

#### 4.1.2 Small quasi-hole solution

The small quasi-hole solution, for ( $q \ll 1$ ), can be obtained by a perturbation on the solution found in [12]. Take  $D$  at first order perturbation to have the form

$$D = D' + D_p, \quad D_0 = D'_0 + D_{0p}, \quad \Psi = \Psi' + \Psi_p, \quad (4.48)$$

where the primed variables are solutions found in [12] and the variables subscripted  $p$  are the perturbations. To first order the Gauss law gives

$$\begin{aligned} 0 = & [D_p, [D'_0, D'^{\dagger}]] + [D', [D_{0p}, D'^{\dagger}]] + [D', [D'_0, D_p^{\dagger}]] + [D_p^{\dagger}, [D'_0, D']] \\ & + [D'^{\dagger}, [D_{0p}, D']] + [D'^{\dagger}, [D'_0, D_p]] + \lambda([D_p, D'^{\dagger}] + [D', D_p^{\dagger}]) + \Psi_p \Psi'^{\dagger} + \Psi' \Psi_p^{\dagger}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

while the Ampère law gives

$$\begin{aligned} & [D_{0p}, [D'_0, D']] + [D'_0, [D_{0p}, D']] + [D'_0, [D'_0, D_p]] + [D_p, [D', D'^{\dagger}]] \\ & + [D', [D_p, D'^{\dagger}]] + [D', [D', D_p^{\dagger}]] = \lambda[D_{0p}, D'] + \lambda[D'_0, D_p] \end{aligned} \quad (4.50)$$

and the constraint on  $\Psi$  gives

$$D_{0p} \Psi' + D'_0 \Psi_p = 0. \quad (4.51)$$

We assume the perturbation takes the form

$$D_p = \sqrt{q} e^{\frac{i\rho\sqrt{\kappa}t}{\sqrt{\theta}}} |N-1\rangle\langle 0|, \quad D_{0p} = 0, \quad \Psi_p = 0. \quad (4.52)$$

The ansatz in [12] has the form (gauge equivalent to)

$$D' = \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{G(n)} e^{i\omega(n)t} |n\rangle\langle n+1|, \quad A_0 = 0 \quad (4.53)$$

where  $G(n)$  and  $w(n)$  are explicitly calculated (numerically) in [12]. Then the Gauss law is automatically satisfied using

$$\left[ |N-1\rangle\langle 0|, \sum_{n=0}^{N-2} f(n) |n+1\rangle\langle n| \right] = \left[ |0\rangle\langle N-1|, \sum_{n=0}^{N-2} f(n) |n\rangle\langle n+1| \right] = 0. \quad (4.54)$$

The Ampère law becomes

$$[D'_0, [D'_0, D_p]] + [D_p, [D', D'^{\dagger}]] = \lambda[D'_0, D_p] \quad (4.55)$$

with  $[D', D'^{\dagger}]$  given by 4.9. This implies the same condition as before (removing an overall factor  $D_p$ ) (4.16) however only for  $n = N - 1$

$$\rho^2 D_p + (G(0) + G(N-2))D_p = \lambda\rho D_p. \quad (4.56)$$

For other values of  $n$  the condition is automatically satisfied. Then  $\rho$  is given by

$$\rho = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4(G(0) + G(N-2))}}{2}. \quad (4.57)$$

As this expression involves a square root, we see that there is no solution for small  $\lambda$ , as we will confirm below, in the numerical analysis. This is a gap in the spectrum of allowed  $q$  for small  $\lambda$ . The change in energy is given by

$$\Delta H = -2\Xi \text{Tr}([D'_0, D_p^{\dagger}][D'_0, D'] + [D'_0, D'^{\dagger}][D'_0, D_p] + [D'_0, D_p^{\dagger}][D'_0, D_p]) \quad (4.58)$$

which gives

$$\Delta H = -2\Xi \text{Tr}(-\rho D_p^{\dagger}[D'_0, D'] + \rho[D'_0, D'^{\dagger}]D_p - \rho^2 D_p^{\dagger}D_p) \quad (4.59)$$

and using that the two first terms vanish, yields

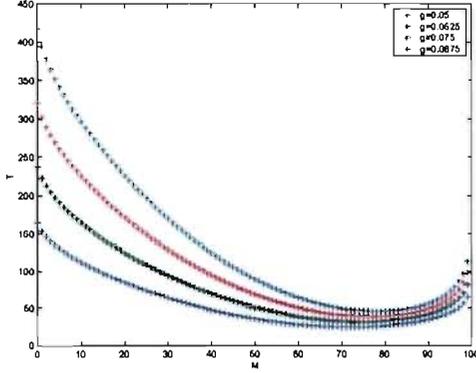
$$\Delta H = 2\Xi\rho^2 q. \quad (4.60)$$

## 4.2 Numerical analysis of the quasi-hole solution

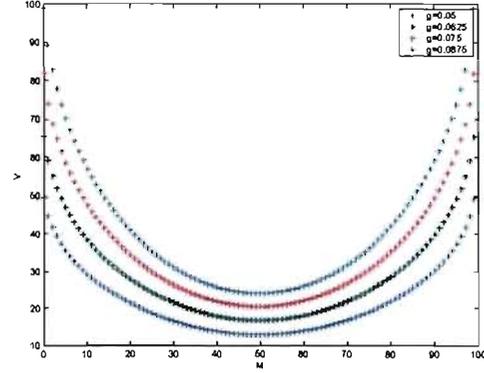
In this section, we will find numerical solutions of equation (4.16). As our solutions are built upon the solutions found in [12], we first give the numerical analysis of the equations considered there. We take this opportunity to correct certain errors that have appeared in [12]. Equation (5.6) in [12] is incorrect, the kinetic energy is not symmetric about  $M = N/2$ . The correct equation is:

$$T = 2\Xi \left( \left\{ \sum_{n=0}^{N-2} 2g^2 u_n - u_n \nabla^2 u_n \right\} + g^2(N^2 - N - 2NM) \right) \quad (4.61)$$

Correspondingly, figure (5) in [12] is also not correct. In addition, there seems to be an inconsistency between figure (5) and figure (7) in [12], the kinetic energy appears to be greater than the total energy. We give corrected figures, figure 1 and figure 2 here (not for the same values



**Figure 1:** Kinetic energy as a function of  $M$  for  $N=100$  for (corrected) solution in [12]

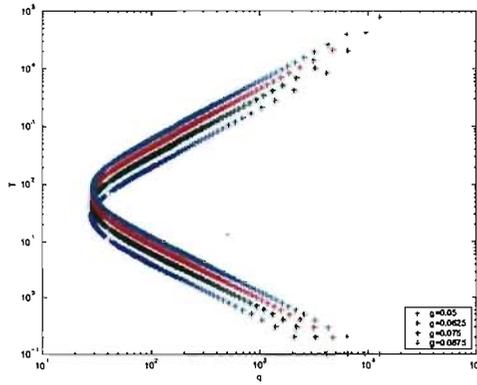


**Figure 2:** Potential energy as a function of  $M$  for  $N=100$  for solution in [12]

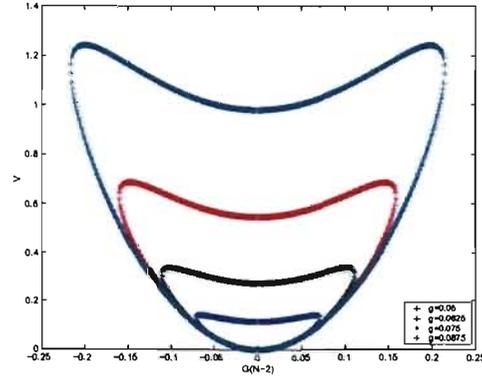
of the parameters). These are representative solutions for the system of equations studied in [12]. Our further numerical analysis concerns solutions built upon these. We ultimately use the Newton method [14] to solve the difference equations. Finite difference equations on a finite set of variables/parameters and boundary conditions, after iterating recursively and removing dependent variables, simply become a system of extremely complicated algebraic equations in a much reduced set of variables. In our case, we reduce the system to two equations in three variables, which we take to be  $q$ ,  $\rho$  and  $G(N-2)$ . We solve this resultant system by the Newton method. We can constrain our search a little by noting that  $q + G(n) \geq 0$  since it appears under a square root in all the expressions for  $D$ . For the case  $n = N-1$ , if we add  $2q$  to the equation (4.16) then we get the constraint

$$\rho \in \left[ \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 8q}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8q}}{2} \right] \quad (4.62)$$

Numerically, we easily find the two solutions that we have determined analytically, for  $q \gg 1$ . We see in figure (3) that the kinetic energy either diverges as  $q$  or vanishes as  $1/q$  as  $q \rightarrow \infty$ , depending on which branch we consider, exactly as we have seen in the section (4.1.1). For the potential energy, we give a graph as a function of the value of  $G(N-2)$ . The preceding two branches of solutions, are found in figure (4), on the bottom part of the curve, symmetrically on either side of the point  $G(N-2) = 0$ . This dependence on  $G(N-2)$  can be inferred from the analytic solution in section (4.1.1). We can see in figure (3) that there exists a region of transition between the two branches of solutions. This transition region seems to imply a lower limit on the permitted value of  $q$  for given  $\lambda$ . The corresponding transition region in figure (4) is the upper part of the solution between the two peaks. Further numerical analysis varying  $\lambda$  seems to indicate that the transition region actually extends all the way to  $q = 0$  for sufficiently large  $\lambda$ . The  $q = 0$  limit corresponds to the case studied in [12], where it was found that there are  $N$  solutions for the noncommutative droplet. We

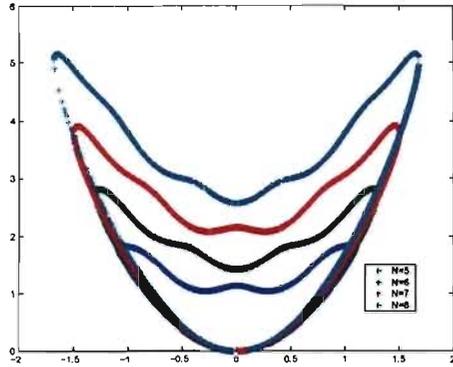


**Figure 3:** Kinetic energy as a function of  $q$  for  $N = 100$  and for 4 values of  $g = \lambda/2$  in units of  $\Xi$ .

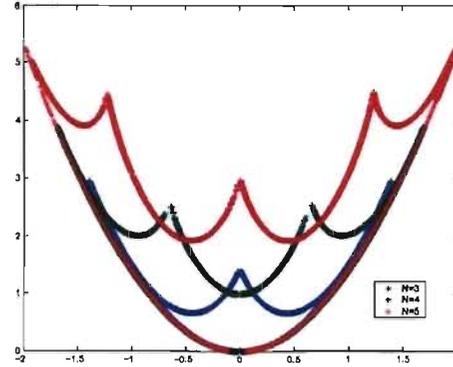


**Figure 4:** Potential energy as a function of  $G(N - 2)$  for  $N = 100$  and  $g = \lambda/2$  in unit of  $\Xi$ .

find that we recover this multiplicity in the numerical analysis. Specifically the curve of the potential energy, figure (5) and figure (6) obtains  $N$  peaks in the transition region, each of which extends down to the solution found in [12] for different choices of  $\Psi$ , as seen in figures (7) and (8). (One has to be careful in this limit for  $\Psi \approx |N - 1|$ ). One recovers the solution of [12] for  $(G(N - 2 - M) + q) \rightarrow 0$  and not simply  $q \rightarrow 0$ .) The total energy is always dominated by the kinetic term and the range of the total energy is from 0 to  $\infty$ , however the interesting structure in the potential energy implies that its contribution to the specific heat could be most important. Comparing our solution to the one found in [12], figures (1) and (2), we find



**Figure 5:** Potential energy as a function of  $G(N - 2)$  for  $g = 1$



**Figure 6:** Potential energy as a function of  $G(N - 2)$  for  $g = 1.5$

that the potential energy, figure (4), of our solution is at least one order of magnitude smaller than that found in [12] for small  $\lambda$  and will approach the potential energy of the solutions in

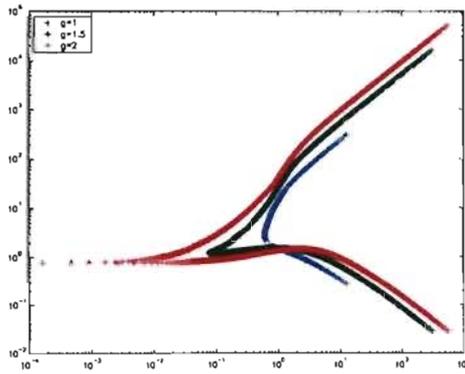


Figure 7: Kinetic energy as a function of  $q$  for  $N = 3$

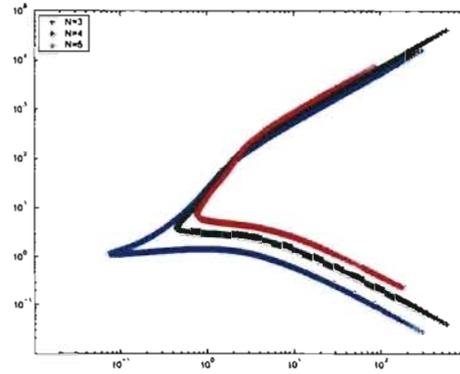


Figure 8: Kinetic energy as a function of  $q$  for  $g = 1.5$

[12] for large  $\lambda$  (and small  $q$ ). The kinetic energy is, however, quite different. In our solution, the kinetic energy can take any value since  $q$  is a free parameter, while the solution in [12] it is constrained to a discrete set of  $N$  values. For the values of  $\lambda$  used in our figures, the kinetic energy of the solution in [12] is comparable to the kinetic energy of our solution in the transition region.

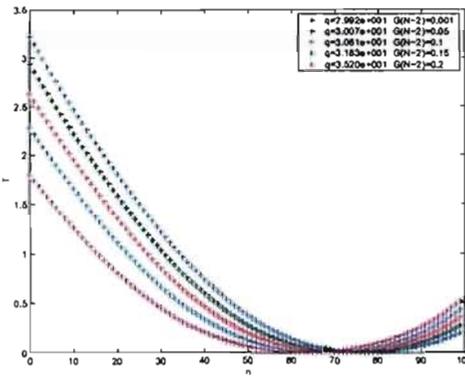


Figure 9: Kinetic density energy for  $N = 100$  and  $g = 0.0875$

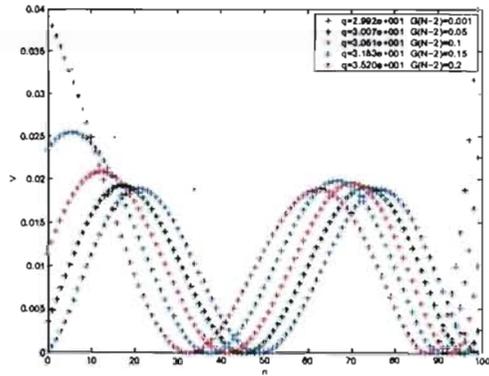


Figure 10: Potential density energy for  $N = 100$  and  $g = 0.0875$

The detail of the transition region is found in the figures (9), (10) and (11) which describes the right half of the transition region ( $G(N - 2) > 0$ ) in the figure (4). The potential energy density is seen to translate as we vary  $G(N - 2)$ . This translation continues for  $G(N - 2) < 0$  symmetrically with respect to the behavior for  $G(N - 2) > 0$ . The potential energy density is found to concentrate in the bulk of the droplet, away from the boundaries in the middle of

the transition region. During the transition the kinetic density evolves from a linear density ( $\rho_0 = \lambda$ ) as in equation (4.41) to a quadratic density ( $\rho_0 = 0$ ) as in equation (4.43).

Away from the transition region (i.e. for  $q \gg 1$ , we do not give a figure since this region can be computed analytically), the form of the potential energy density and the  $G(n)$ 's does not change markedly, apart from their overall size. The potential energy density is concentrated around the boundary.

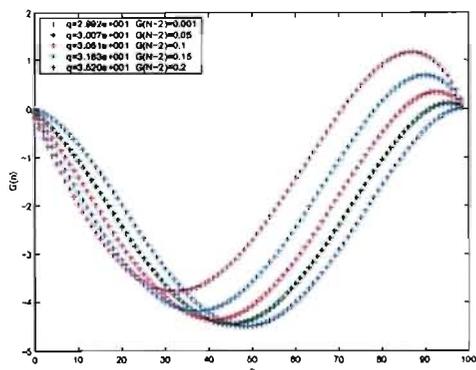


Figure 11:  $G(n)$  for  $N = 100$  and  $g = 0.0875$

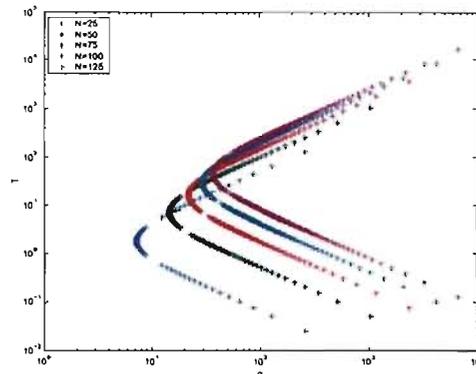


Figure 12: Kinetic energy as a function of  $q$  for  $g = 0.05$

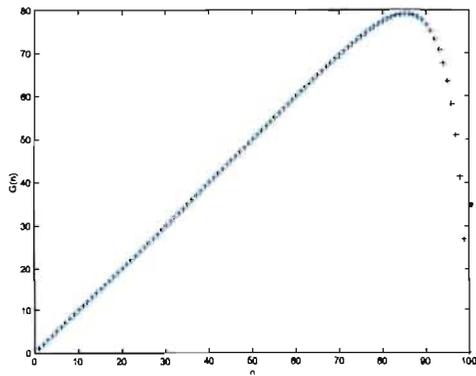
Finally, in the figure (12), we show the solutions for various values of  $N$ . We see that the minimum value of  $q$  seems to be growing linearly with  $N$ . Thus, assuming that the trend continues, as  $N \rightarrow \infty$  then  $q_{min.} \rightarrow \infty$ , thus the large  $q$ -hole solutions would not occur in the infinite plane, at least for small  $\lambda$ .

## 5. Ground state

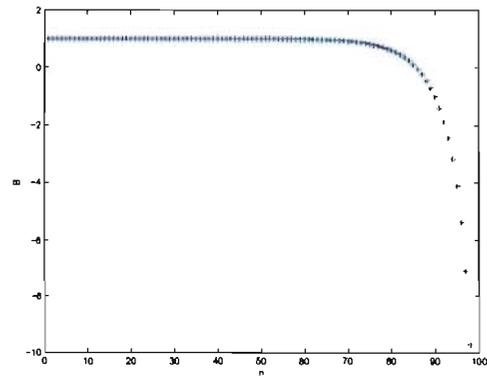
The solutions that we have found do not easily allow us to identify the ground state. For the infinite case, the ground state is given by the solution in terms of simple annihilation and creation operators, [4, 11],

$$a, a^\dagger, [a, a^\dagger] = 1. \quad (5.1)$$

This solution corresponds to a static, quiescent fluid. However the value of  $[D, D^\dagger]$  is a non-zero constant, which should be considered as the zero point of energy. The solutions in the finite droplet approach this state arbitrarily closely in the limit  $N \rightarrow \infty$  and for large  $\lambda$ . We show below in figures (13) and (14), the plot of  $G(n)$  for  $M = N - 1$  and with  $\lambda = 2$  and the corresponding vorticity of the fluid. If we subtract out the constant background due to the noncommutativity it is evident that the fluid is almost everywhere quiescent with only net vorticity imposed near the boundary. We take these states as the ground states. We also show the corresponding kinetic and potential energy in figures (15) and (16). The kinetic energy  $T$

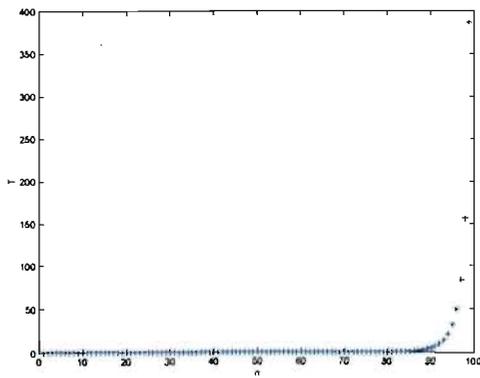


**Figure 13:**  $G(n)$  for  $M = N - 1$  with  $N = 100$

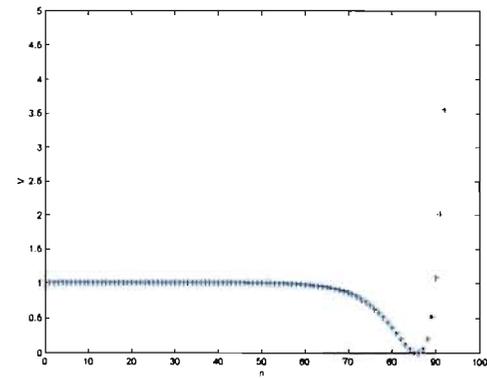


**Figure 14:** Vorticity ("magnetic" field  $B$ ) for  $M = N - 1$  with  $N = 100$  (figure cut-off at  $B > -10$ )

is concentrated at the boundary, as is the potential energy  $V$  if we subtract off the constant zero point energy.



**Figure 15:** Kinetic energy density for  $M = N - 1$  with  $N = 100$



**Figure 16:** Potential energy density for  $M = N - 1$  with  $N = 100$  (figure cut-off at  $V < 5$ )

The quasi-hole solutions that we have found are deformations of these ground states. Comparing to the case of a quasi-hole with small  $q$ , we see from equations (4.59) and (4.60) that the energy density perturbation is solely in the kinetic energy. It is also localized at the origin as is evident from the form of the perturbation equation (16). The change in the energy is linear in  $q$ . The solutions with large  $q$  are not perturbative and should be rightly considered as solitons. The question of the stability of our identified ground states against creation of solitons with large  $q$  (the branch with decreasing energy, see figure (3)) is beyond the scope

of this paper.

The rotational excitations that we have found presumably give the Landau levels, upon quantization. These are extremely widely separated in energy for large external magnetic field and hence will decouple from small excitations. The ground state will correspond to the lowest Landau level. The degeneracy of a given Landau level is obtained from the total number of particles available and the physical space in which these particles are constrained. The Landau levels will presumably play an important role in describing the transitions between different Hall plateaux.

## 6. Conclusion

In this article we have found a rich spectrum of the excitations of the noncommutative droplet with an action based on the Chern-simons term and an additional Maxwell term. The existence of the Maxwell term seems to have profound implications on the spectrum of fundamental oscillations. We have found two kind of solutions, the rotational excitation and the quasi-hole solution.

The rotational excitations will exist in the finite or infinite case above any solution of the equations of motion. The rotational frequency is exactly the cyclotron frequency for the electrons in the model. The rotational excitation correspond to the energy of  $N$  electrons moving in the magnetic field when the amplitude of the rotational excitation is fixed to the radius of the cyclotron motion. With the quantization of these oscillations we should recover the familiar Landau levels.

The quasi-holes solutions seem to exist only for the finite droplet. The large quasi-holes correspond to a thin annulus that undergoes nontrivial oscillatory vibration. They give a continuous band of solutions built above each soliton solution of the field equations. They also show a gap in their spectrum as a function of the "charge"  $q$  for small enough  $\lambda$ .

We expect that this spectrum of excitations will give rise to a complex phenomenology which will allow us to describe transitions in two dimensional magnetohydrodynamics, even the quantum Hall system.

## Acknowledgments

We thank NSERC of Canada for financial support.

## References

- [1] E. Witten, "Non-commutative geometry and string field theory ", *Nucl. Phys. B* **268** (1986) 253
- [2] J. Madore, "An Introduction to Noncommutative Geometry and its Physical Applications", (Cambridge : Cambridge University Press, 1995)
- [3] R. Jackiw, S.-Y. Pi, A. P. Polychronakos, "Noncommuting gauge field as a Lagrange fluid", *Ann. Phys. (NY)* **301** (2002) 157, (hep-th/0206014)

- 
- [4] L. Susskind, "The quantum Hall fluid and noncommutative Chern-Simons theory", (hep-th/0101029)
- [5] H. Lamb, "Hydrodynamics", (London : Cambridge University Press, 1932); A. Sommerfeld, "Lectures on theoretical physics: Volume 2, Mechanics of Deformable Bodies"(New York, Academic Press, 1950-1964)
- [6] A. P. Polychronakos, "Quantum Hall states as matrix Chern-Simons theory", *J. High Energy Phys.* **04** (2001) 011 (hep-th/0103013)
- [7] S. Hellerman, M. Van Raamsdonk, "Quantum Hall physics equals noncommutative field theory", *J. High Energy Phys.* **10** (2001) 039, (hep-th/0103179)
- [8] R. E. Prange, S. M. Girvin, "The Quantum Hall Effect", (New York : Springer-Verlag, c1990); R. B Laughlin, "Anomalous quantum Hall effect: An Incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations", *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395
- [9] D. Karabali and B. Sakita, "Chern-Simons matrix model: Coherent states and relation to Laughlin wavefunctions", *Phys. Rev.* **B 64** (2001) 245316 (hep-th/0106016); "Orthogonal basis for the energy eigenfunctions of the Chern-Simons matrix model," *Phys. Rev.* **B 65** (2002) 075304 (hep-th/0107168)
- [10] C. P. Burgess and B. P. Dolan, "Duality and non-linear response for quantum Hall systems," *Phys. Rev.* **B 65** (2002) 155323 (cond-mat/0105621).
- [11] G. Alexanian, M. B. Paranjape, D. Arnaudon "On plane wave and vortex-like solutions of noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory", *J. High Energy Phys.* **11** (2003) 011, (hep-th/0310088)
- [12] G. Alexanian, M. B. Paranjape, I. Prémont-Schwarz "Solitons in a finite droplet of noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory", *J. High Energy Phys.* **01** (2006) 020, (hep-th/508168)
- [13] A. Cappelli, I. Rodriguez, "Jain state in a matrix theory of the quantum Hall effect", *J. High Energy Phys.* **12** (2006) 056, (hep-th/0610269)
- [14] William Press, Saul Teukolsky, William Vetterling, Brian Flannery, "Numerical Recipes", (Cambridge : Cambridge University Press, 1986)

### 2.2.1 Détails sur l'article

Dans cette sous-section, nous allons expliciter un détail que nous avons expliqué rapidement dans l'article. Nous avons déjà dit que les pics dans l'énergie potentielle lorsque  $\lambda$  est grand correspondent aux solutions pour les petits  $q$ , mais pour des  $M$  différents. Nous avons alors dit que dans ce cas ce n'est pas  $q$ , mais bien  $(G(N - 2 - M) + q)$  qui tend vers 0. Pour constater que ceci est vrai, il faut réécrire notre ansatz dans la forme utilisée dans [2]. La seule différence est que notre champ de frontière  $\Psi$  est différent. Nous avons posé  $\Psi = \sqrt{\lambda N} |N - 1\rangle$ . Donc il faut faire une transformation de jauge (i.e. une permutation des états) tout en gardant la même forme pour  $D$ . Comme tous les états sont reliés à un "voisin" immédiat dans  $D$ , alors pour garder la même forme, il faut faire une translation de tous les états de manière à ce que l'état  $|N - 1\rangle$  devienne l'état  $|M\rangle$ . Ensuite, le nouvel état qui sera  $|N - 1\rangle$  aura le facteur qui tend vers 0 pour les petits quasi-trous. Pour  $M = N - 1$ , il n'y a pas de permutation, donc c'est notre  $q$  qui tend vers 0. C'est ce que nous voyons dans la figure (7) de l'article. Pour les autres nous faisons la permutation

$$|i\rangle \rightarrow |i'\rangle = |i + T\rangle. \quad (2.27)$$

Puisque nous voulons que notre terme de frontière soit  $M$ , alors nous avons

$$|N - 1\rangle \rightarrow |M\rangle = |N - 1 + T\rangle \Rightarrow T = M - N + 1. \quad (2.28)$$

Nous descendons (car  $M$  est inférieur à  $N - 1$ ) les noms des états, mais nous ne pouvons pas descendre en dessous de 0. Donc le dernier état à être transformé avec le  $T$  précédent est

$$|k\rangle \rightarrow |0\rangle = |k + T\rangle \Rightarrow k = N - 1 - M. \quad (2.29)$$

L'état en dessous sera déplacé à  $N - 1$  et les états subséquents subiront la même transformation :

$$|N - 2 - M\rangle \rightarrow |N - 1\rangle = |N - 2 - M + T\rangle \Rightarrow T = M + 1. \quad (2.30)$$

Nous pouvons résumer la transformation comme

$$|k\rangle \rightarrow |k + T\rangle \quad (2.31)$$

avec  $T = M - N + 1$  si  $k = [N - 1 - M, N - 1]$  et  $T = M + 1$  si  $k = [0, N - 2 - M]$ . Dans [2] c'est l'état  $|N - 1\rangle\langle 0|$  dont le facteur est nul dans  $D$ . Donc maintenant après cette transformation, c'est  $\sqrt{q + G(N - 2 - M)}$  qui tend vers 0, car c'est le facteur devant le nouvel état  $|N - 1\rangle\langle 0|$ . Aussi à partir du même raisonnement, ce ne sera plus  $\rho$  dont la valeur va faire un saut, mais  $w(N - 2 - M)$ .

## CHAPITRE 3

### CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons rappelé comment d'autres auteurs avaient suggéré que l'effet Hall quantique fractionnaire puisse être décrit par la théorie de Maxwell-Chern-Simons en géométrie noncommutative. Nous avons alors trouvé quelques solutions, qui se trouvent dans l'article. Elles ont été trouvées dans un espace fini. L'une d'entre elles correspond au mouvement de rotation des électrons. Bien que triviale, en ce sens que nous sommes déjà capables de solutionner  $N$  électrons dans un champ magnétique lorsque qu'ils n'interagissent pas entre eux, cette solution montre déjà que notre description du fluide d'électrons par la théorie de Maxwell-Chern-Simons en géométrie noncommutative est correcte. De plus, cette solution s'ajoute à d'autres. Nous pouvons alors supposer qu'elles correspondent aux différentes interactions des électrons auxquels nous pouvons ajouter la rotation due au champ magnétique. Nous avons aussi trouvé des solutions quasi-trous. Les quasi-trous sont une partie importante de la théorie de Laughlin pour décrire l'effet Hall quantique. D'ailleurs Susskind avait montré, comme nous l'avons présenté dans la section 1.4, que la quantification semi-classique dans la théorie de CS donne les charges des quasi-trous de Laughlin. Nous avons dans l'article trouvé des solutions perturbatives pour les quasi-trous lorsque ces trous sont très grands ou très petits. Dans le cas des grands quasi-trous, nous en avons trouvé deux types qui diffèrent beaucoup dans les énergies cinétiques. De plus, nous en avons trouvé des numériques pour les quasi-trous intermédiaires. Nous avons retrouvé numériquement les solutions pour les grands quasi-trous et trouvé que nos deux types de solutions peuvent être transformés de l'un à l'autre de façon continue. De plus, nous avons comparé l'énergie de ces solutions par rapport à l'énergie de celles trouvées dans [2]. Nos solutions numériques semblent nous montrer que les quasi-trous ne peuvent pas exister dans le cas infini, puisque la valeur minimale de  $q$  (qui est à peu près le rayon du trou) semble diverger lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Nous nous sommes rendus compte

que le comportement de nos solutions pour les  $q$  minimaux différerait lorsque notre champ magnétique devenait élevé. Nous avons alors les petits quasi-trous qui apparaissent, car ils n'existent pas pour de petites valeurs du champ magnétique. Bien que l'énergie du système soit continue lorsque notre champ magnétique devient élevé, nos solutions ne se transforment plus de façon continue de l'une à l'autre. Pour chacune des  $N$  solutions avec des petits  $q$  il y a un saut dans la fréquence d'oscillation d'un de nos états. Bien que classiques, nos solutions pourraient aider à la quantification de cette théorie. Déjà dans [5], les auteurs ont quantifié cette théorie lorsque  $\kappa = 0$ . Pour  $\kappa \neq 0$  nous pourrions faire la quantification des perturbations des solutions dans [2] et de celles que nous avons trouvées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Alexanian, M. Paranjape, D. Arnaudon “On plane wave and vortex-like solutions of non-commutative Maxwell-Chern-Simons theory”, (hep-th/0310088)
- [2] G. Alexanian, M. Paranjape, I. Prémont-Schwarz “Solitons in finite droplet of noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory”, (hep-th/0508168 )
- [3] F. Besnard, “Introduction à la géométrie non-commutative”, pas publier
- [4] P. Bongaarts, “A short introduction to noncommutative geometry”, pas publier
- [5] A. Cappelli, I. Rodriguez, “Jain State in a Matrix Theory of the Quantum Hall Effect”, (hep-th/0610269 )
- [6] M. Chaichian, MM. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu , “Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED”, (hep-th/0010175 ) ; M. Chaichian, MM. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu , “Comments on the Hydrogen Atom Spectrum in the Noncommutative Space”, (hep-th/0212259 )
- [7] M. Chaichian, MM. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu , “Noncommutativity of Space and Rotation of Polarization of Light in a Background Magnetic Field”, (hep-ph/0511323 )
- [8] Y. Choquet-Bruhat, C. de Witt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, (North-Holland, 1977)
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique, tome I*, (Hermann, 1973) ; C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique, tome II*, (Hermann, 1973)
- [10] A. Connes , “Noncommutative differential geometry”, Publ. Math. IHES **62** (1985), 257-360 ; A. Connes “The action functional in noncommutative geometry”, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 673-683

- [11] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons Theory”, (hep-th/9902115 )
- [12] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects : Field Theoretical Approach and Related Topics*, (World Scientific, 2000)
- [13] L. Freidel, J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, “From noncommutative  $\kappa$  - Minkowski to Minkowski space-time”, (hep-th/0612170)
- [14] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko , *Classical Mechanics, Third Edition*, (Addison Wesley, 2002)
- [15] S. Hellerman, M.V. Raamsdonk , “Quantum Hall Physics Equals Noncommutative Field Theory”, (hep-th/0103179 )
- [16] I. Hinchliffe, N. Kersting, Y.L. Ma, “Review of the Phenomenology of Noncommutative Geometry”, (hep-ph/0205040 )
- [17] S. Iso , Y. Kimura , K. Tanaka, K. Wakatsuki, “Noncommutative Gauge Theory on Fuzzy Sphere from Matrix Model” (hep-th/0101102)
- [18] R. Jackiw, S.-Y. Pi, A. P. Polychronakos, “Noncommuting Gauge Fields as a Lagrange Fluid”, (hep-th/0206014)
- [19] A. Khare, M.B. Paranjape “Soliton in 2+1 dimensional Non-Commutative Maxwell Chern-Simons Higgs Theories”, (hep-th/0102016 )
- [20] J. Lambert, M.B. Paranjape “Quasi-hole solutions in finite noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory”, (hep-th/0702122 )
- [21] V.P. Nair, A.P. Polychronakos, “Level Quantization for Noncommutative Chern-Simons Theory”, (hep-th/0102181 )
- [22] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Application*, (Cambridge University Press, 1995)
- [23] A. P. Polychronakos, “Quantum Hall state as matrix Chern-Simons theory”, (hep-th/0103013 )

- [24] A. P. Polychronakos, “Noncommutative Chern-Simons Terms and the noncommutative vacuum”, (hep-th/0010264 )
- [25] A. P. Polychronakos, “Flux tube solutions in noncommutative gauge theories”, (hep-th/0007043 )
- [26] R. E. Prange, S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect, Second Edition*, (Springer Verlag, 1990)
- [27] J-F. Rajotte, “Aspect de géométrie non commutative”, (Université de Montréal, 2005)
- [28] M. Riccardi, “Noncommutative Geometry and the Quantum Hall Effect”, (University of Florence, 2005)
- [29] S.D. Sarma, M. Freedman, C. Nayak, “Topologically Protected Qubits from a Possible Non-Abelian Fractional Quantum Hall State”, (cond-mat/0412343); N.E. Bonesteel, L. Hormozi, G. Zikos, S.H. Simon, “Braid Topologies for Quantum Computation”, (quant-ph/0505065)
- [30] N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas, “Space/Time Non-Commutativity and Causality”, (hep-th/0005015 )
- [31] H. S. Snyder, “Quantized Space-Time”, Phys. Rev. **71** (1947) 38
- [32] L. Susskind, “The Quantum Hall Fluid and Non-commutative Chern-Simon Theory”, (hep-th/0101029)
- [33] R. J. Szabo, “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces”, (hep-th/0109162 )
- [34] R. J. Szabo, “Symmetry, Gravity and Noncommutativity”, (hep-th/0606233 )
- [35] R. J. Szabo, “Magnetic Backgrounds and Noncommutative Field Theory”, (physics/0401142 )

## Annexe I

### Annexe 1 : Calcul de formule

#### I.1 Commutateur

Nous allons dans cette section montrer certaines formules que nous utilisons dans le mémoire. Soit  $A, B$  et  $C$  trois opérateurs. Alors nous montrons que

$$[A, BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]. \quad (\text{I.1})$$

Nous calculons l'identité de Jacobi à partir de (I.1) :

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, BC] - [A, CB] = \\ &= B[A, C] + [A, B]C - C[A, B] - [A, C]B = [B, [A, C]] + [[A, B], C]. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Nous montrons aussi à l'aide de la cyclicité de la trace que

$$\text{Tr}[[A, B]C] = \text{Tr}[ABC - BAC] = \text{Tr}[BCA - CBA] = \text{Tr}[[B, C]A]. \quad (\text{I.3})$$

Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs qui commutent avec leur commutateur :

$$[A, B] = T, [A, T] = [B, T] = 0. \quad (\text{I.4})$$

Nous pouvons montrer par récurrence que

$$[A, B^n] = nB^{n-1}T. \quad (\text{I.5})$$

Nous voyons que c'est vrai pour  $n = 1$ . Vérifions maintenant la récurrence avec (I.1) :

$$[A, B^{n+1}] = B[A, B^n] + [A, B]B^n = BnB^{n-1}T + TB^n = (n+1)B^nT. \quad (\text{I.6})$$

Regardons ce qui se passe quand nous commutons l'exponentielle de  $B$  avec  $A$  :

$$\begin{aligned}
Ae^B &= A\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{AB^k}{k!} = A + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kB^{k-1}T + B^kA}{k!} \\
&= A + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kB^{k-1}T}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^kA}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^{k-1}T}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^kA}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^kT}{(k)!} + e^B A = e^B T + e^B A = e^B (T + A). \tag{I.7}
\end{aligned}$$

Nous commutons alors  $n$  fois  $A$  :

$$A^n e^B = e^B (T + A)^n. \tag{I.8}$$

Soit une fonction de  $A$  définie par sa série de Taylor :

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n. \tag{I.9}$$

Alors si nous commutons cette fonction avec l'exponentielle de  $B$ , nous obtenons

$$f(A)e^B = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n e^B = e^B \sum_{n=0}^{\infty} f_n (T + A)^n = e^B f(A + T). \tag{I.10}$$

Si  $f(A)$  est l'exponentielle, alors nous obtenons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^B e^{A+T} = e^B e^A e^T, \tag{I.11}$$

où la dernière égalité fut obtenue en se rappelant que, puisque  $A$  et  $T$  commutent, alors ils agissent comme des nombres entre eux. Nous pouvons aussi la réécrire sous la forme

$$e^A e^B e^{-\frac{T}{2}} = e^{A+B}. \tag{I.12}$$

Pour voir que c'est vrai, multiplions par  $t$   $A$  et  $B$  et  $T$  par  $t^2$ , car  $T$  est le commutateur de  $A$  et  $B$ . Si nous tentons alors de dériver le terme de droite, nous

obtenons

$$\frac{d}{dt} \left( e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2 T}{2}} \right) = e^{tA} (A + B - tT) e^{tB} e^{-\frac{t^2 T}{2}} = (A + B) e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2 T}{2}}, \quad (\text{I.13})$$

où nous avons utilisé pour la dernière égalité (I.10) où nous avons remplacé  $f(A)$  par  $B$  et  $B$  par  $tA$ . Comme nous voyons, la dérivée fait tomber le même terme devant l'autre terme de l'égalité (I.12). Donc les deux sont égaux à une constante près.

## I.2 Intégrale

Dans cette section, nous allons calculer en partie l'intégrale (1.43). Nous posons la fonction à intégrer (sans les facteurs  $2\pi$ )  $I$ , soit

$$I = e^{i(k_i + k'_i)\bar{z}_i} e^{-i(k_i \bar{x}_i + k'_i \bar{y}_i)} e^{-\frac{i\theta_{ij} k_i k'_j}{2}}. \quad (\text{I.14})$$

Par conséquent la formule que nous tentons de calculé est

$$\hat{\Delta}(\bar{x}) \hat{\Delta}(\bar{y}) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \int d^2 \bar{z} I \hat{\Delta}(\bar{z}). \quad (\text{I.15})$$

Nous commençons par calculer les intégrales en  $k$ . Or ce n'est qu'une exponentielle, donc nous obtenons (sans évaluer aux bornes des intégrales, nous évaluerons aux bornes à la fin du calcul) (sans le  $\hat{\Delta}(\bar{z})$  et l'intégrale sur  $\bar{z}$ )

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk'_1 dk'_2 \frac{-I}{(\bar{z}_1 - \bar{x}_1 - \frac{\theta}{2} k'_2)(\bar{z}_2 - \bar{x}_2 + \frac{\theta}{2} k'_1)}. \quad (\text{I.16})$$

Si nous posons

$$\tilde{k}_1 = \bar{z}_1 - \bar{x}_1 - \frac{\theta}{2} k'_2, \tilde{k}_2 = \bar{z}_2 - \bar{x}_2 + \frac{\theta}{2} k'_1, d\tilde{k}_i = -\epsilon_{ij} \frac{\theta}{2} dk'_j, \quad (\text{I.17})$$

alors  $I$  devient

$$I = e^{i\tilde{k}_1(\frac{2}{\theta}(\tilde{y}_2 - \tilde{z}_2) + k_1) + i\tilde{k}_2(\frac{2}{\theta}(\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1) + k_2) - 2iw_{ij}(\tilde{x}_i - \tilde{z}_i)(\tilde{y}_j - \tilde{z}_j)}. \quad (\text{I.18})$$

Il faut maintenant faire l'intégration sur les  $\tilde{k}$ . Or nous avons pour chacun ( $\tilde{k}_1$  et  $\tilde{k}_2$ ) une intégrale de la forme  $e^{iax}/x$ . Nous transformons cela en fonction trigonométrique avec l'identité d'Euler. La partie en cos va s'annuler, car  $\cos(x)/x\tilde{x}$  est antisymétrique. De plus, pour la partie en sin, nous pouvons regarder dans des tables :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi \quad \text{si} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad -\pi \quad \text{si} \quad a < 0. \quad (\text{I.19})$$

Nous nous rendons compte que le  $\tilde{k}_2$  intégré de  $\infty$  à  $-\infty$ . Dans notre cas, c'est les  $k$  qui déterminent le signe de  $a$  (comme ils sont infinis) :

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{4}{\theta^2} e^{2iw_{ij}(\tilde{x}_i - \tilde{z}_i)(\tilde{y}_j - \tilde{z}_j)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_1 \frac{e^{i\tilde{k}_1 k_1}}{\tilde{k}_1} \int_{\infty}^{-\infty} d\tilde{k}_2 \frac{e^{i\tilde{k}_2 k_2}}{\tilde{k}_2}. \quad (\text{I.20})$$

Ce qui donne en se rappelant que la partie en cos disparaît

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{4}{\theta^2} i^2 e^{2iw_{ij}(\tilde{x}_i - \tilde{z}_i)(\tilde{y}_j - \tilde{z}_j)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_1 \frac{\sin(\tilde{k}_1 k_1)}{\tilde{k}_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_2 \frac{\sin(\tilde{k}_2 k_2)}{\tilde{k}_2}. \quad (\text{I.21})$$

Maintenant nous évaluons aux bornes des  $k$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{4}{\theta^2} i^2 e^{-2iw_{ij}(\tilde{x}_i - \tilde{z}_i)(\tilde{y}_j - \tilde{z}_j)} (\pi - (-\pi))^2, \quad (\text{I.22})$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\theta^2 \pi^2} e^{2iw_{ij}(\tilde{x}_i - \tilde{z}_i)(\tilde{y}_j - \tilde{z}_j)}. \quad (\text{I.23})$$

## Annexe II

### Annexe 2 : Formalisme d'Heisenberg

#### II.1 Formalisme d'Heisenberg

Dans cette appendice nous allons rapidement expliquer le formalisme d'Heisenberg en mécanique quantique pour ceux qui ne le connaissent pas. Nous suivrons ce qui est fait dans [9]. Le formalisme le plus utilisé, mais tout à fait équivalent, est celui de Schrödinger qui consiste à avoir des états qui dépendent du temps et des opérateurs indépendants du temps. Pour le formalisme d'Heisenberg c'est le contraire, soit les états sont indépendants du temps et les opérateurs dépendent du temps. Or nous savons que pour faire évoluer un état il suffit de lui appliquer l'opérateur d'évolution dans le temps  $U(t, t_0)$ <sup>1</sup> :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (\text{II.1})$$

où  $|\psi(t_0)\rangle$  est constant puisqu'il est à un temps donné. Nous voulons que la théorie soit équivalente dans les deux formalismes, donc que le produit scalaire soit le même dans les deux (sinon les probabilités et les valeurs propres vont être différentes). Donc nous avons

$$\langle\psi(t) | A | \psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) | \psi(t_0)\rangle. \quad (\text{II.2})$$

Les opérateurs dans ce formalisme deviennent

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0), \quad (\text{II.3})$$

où  $A_H(t)$  est l'opérateur dans le formalisme d'Heisenberg.

---

<sup>1</sup>Lorsque l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, l'opérateur  $U(t, t_0) = e^{-iH \frac{(t-t_0)}{\hbar}}$

Dans le formalisme de Schrödinger, l'évolution des états est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = HU(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (\text{II.4})$$

où  $H$  est l'hamiltonien. Donc nous obtenons la dérivée de l'opérateur d'évolution, soit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0). \quad (\text{II.5})$$

Nous dérivons l'opérateur  $A_H$  par rapport au temps pour obtenir son équation du mouvement :

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{dU^\dagger(t, t_0)}{dt} AU(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) A \frac{dU(t, t_0)}{dt}. \quad (\text{II.6})$$

En utilisant l'équation (II.5) et sa conjuguée, alors nous avons

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t, t_0) H A U(t, t_0) - \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t, t_0) A H U(t, t_0). \quad (\text{II.7})$$

Puisque l'opérateur d'évolution est unitaire alors  $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = 1$ , alors nous insérons cette valeur entre  $A$  et  $H$  dans chacun des termes :

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t, t_0) H U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) - \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) H U(t, t_0). \quad (\text{II.8})$$

On observe au membre de droite le commutateur des  $A$  et  $H$  et donc dans le formalisme d'Heisenberg :

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [A_H, H_H]. \quad (\text{II.9})$$

Ceci est l'équation d'Heisenberg qui régit l'évolution des opérateurs.