

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Introduction à la théorie de la viabilité

par

Marie-Ève Charest

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

août 2009



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Introduction à la théorie de la viabilité

présenté par

Marie-Ève Charest

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Q.I Rahman

(président-rapporteur)

André Giroux

(directeur de recherche)

Richard Fournier

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

29 juillet 2009

SOMMAIRE

La théorie de la viabilité est à l'origine d'une nouvelle méthode d'analyse des évolutions des équations différentielles. Plutôt que de s'intéresser uniquement à la convergence et à la stabilité des évolutions, l'intérêt réside dorénavant dans le choix de conditions initiales qui permettent de préserver une propriété voulue du système de départ. De plus, il est possible d'exercer des contrôles sur les évolutions de manière à conserver l'évolution dans l'état désiré.

Cette théorie a plusieurs champs d'applications, notamment en économie, en biologie et en démographie. Il va de soi qu'il est essentiel de choisir des équations différentielles qui reflètent bien la réalité observable dans ces domaines, de même pour les contrôles utilisés.

Le but de mon mémoire est d'explicitier les principaux théorèmes et définitions ainsi que de résoudre des problèmes connus à l'aide de cette nouvelle méthode. Je mettrai l'accent sur les conclusions originales que la théorie de la viabilité apporte et donc sur l'importance de cette théorie pour différentes disciplines.

Une des difficultés de mon mémoire a consisté à résoudre des problèmes résolubles sans l'aide des algorithmes développés par les fondateurs de la théorie. En effet, ces algorithmes sont indisponibles ayant été vendus à des firmes. Je dois donc choisir des exercices calculables sans l'aide d'un ordinateur, ce qui restreint mon choix de questions sans toutefois empêcher d'apercevoir la profondeur du domaine d'étude.

Mots clés : Contrôles, cycles hystérétiques, dynamique de population, économie de l'environnement, ensemble de Cantor, évolutions, inertie, régulateurs, rétroactions inertes, rétroactions lourdes, noyau de viabilité, viabilité.

SUMMARY

Viability theory consists in a new way of analysing differential equations. Historically mathematicians were interested in the convergence and the stability of evolutions. However, viability theory is concerned about initial conditions that preserve some properties of the initial system. In some cases, a control has to be chosen to conserve the wanted property.

This theory has many applications, notably in economics sciences, biology and demography. Differential equations and controls are therefore chosen to reflect the reality observed in these domains.

The goal of this thesis is to explain the main theorems and definitions of viability theory and to solve well-known problem with a new method. We will emphasise how the viability theory allows to obtain original conclusions which are important for many disciplines.

A problem encountered during my thesis was the impossibility to use the algorithms developed by the founders of the theory because they were made unavailable. Examples have consequently been chosen so that they can be solved without computer calculations. Thus, the solved questions are simple. In spite of this, it still allows one interested reader to understand how deep the questions solved by viability theory are.

Key words : Cantor subset, controls, environmental economics, evolutions, inertia, inert retroactions, heavy retroactions, hysteresis circle, population dynamics, regulons, viability kernel, viability.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	viii
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Définition des principaux concepts	5
1.0.1. Définitions.....	5
1.0.2. Noyau de viabilité.....	7
1.0.3. Opération sur les évolutions.....	9
1.0.4. Régulons.....	10
1.0.4.1. Régulons linéaires.....	10
1.0.4.2. Régulons minimisant en tout point la vitesse de changement	11
1.0.4.3. Régulons quelconques.....	11
1.0.5. Fonction d'inertie.....	11
1.0.6. Cycle hystérétique.....	12
1.0.7. Conclusion.....	13
Chapitre 2. Application des concepts à des problèmes avec un régulon continu	14
2.1. Introduction.....	14
2.2. Dynamique de population.....	14
2.2.1. Rétroactions inertes.....	16

2.2.1.1.	Introduction au problème	16
2.2.1.2.	Calcul	17
2.2.1.3.	Conclusions	23
2.2.2.	Rétroactions lourdes	25
2.2.2.1.	Introduction au problème	25
2.2.2.2.	Calcul	25
2.2.2.3.	Conclusions	31
2.3.	Ressources naturelles	32
2.3.1.	Calcul de la fonction d'inertie	34
2.3.2.	Rétroactions inertes	35
2.3.2.1.	Cas où $v > u$	36
2.3.2.2.	Cas où $u = v$	38
2.3.2.3.	Cas où $v < u$	38
2.3.2.4.	Conclusion	38
2.3.3.	Rétroactions lourdes	39
2.4.	Changement global de climat	41
2.4.1.	Calcul de la fonction d'inertie	42
2.4.2.	Conclusion	43
Chapitre 3. Analogie entre les problèmes discrets et les problèmes		
	continus	44
3.0.3.	Définitions et théorème	47
3.0.3.1.	Définitions	47
3.0.3.2.	Théorème 1	47
3.0.4.	Exemple 1	48
3.0.4.1.	L'ensemble triadique de Cantor comme noyau de viabilité ..	48
3.0.4.2.	Conclusion partielle	52
3.0.5.	Exemple 2	53
3.0.5.1.	Le problème continu	53

3.0.5.2.	Introduction au problème discret analogue	53
3.0.5.3.	Analyse du comportement de l'application logistique en fonction des valeurs prises par r	54
3.0.5.4.	Noyau de viabilité pour le cas discret	58
3.0.5.5.	Exemple avec $r = 5$	59
3.0.5.6.	Calcul du noyau de viabilité du problème approximant le problème original à partir de la définition de la dérivée	63
3.0.5.7.	Conclusion partielle	65
3.0.6.	Conclusion	66
Conclusion	67
Bibliographie	69

LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple d'une correspondance.....	6
1.2	Ensemble de viabilité.....	8
1.3	Zoom sur un noyau de viabilité.....	9
1.4	Exemple de concaténation et de translation d'une évolution $x(t)$	10
2.1	Idée de Malthus sur l'évolution des populations.....	15
2.2	Évolution d'une population selon Verhulst.....	16
2.3	Rétroactions inertes formant un cercle hystérétique.....	17
2.4	Paramétrage de u en fonction de x	24
2.5	Évolution de $x(t)$ lorsque soumise au contrôle $u(t)$. Chaque changement de couleur de l'évolution $x(t)$ advient lorsqu'il y a un changement dans le contrôle $u(t)$ représenté en noir sur le graphique.....	24
2.6	Évolution de la population $x(t)$ lorsque soumise aux contrôles $u(t)$. Chaque changement de couleur correspond à un changement dans le contrôle $u(t)$ qui est représenté en noir dans le graphique.....	32
3.1	Nous nous apercevons que le point x_{j+1} n'est pas élément du maillage à priori. D'où la nécessité de la boule B_ρ	45
3.2	Les points candidats au noyau de viabilité après une itération consistent en l'union des sections noires.....	49
3.3	Les points candidats au noyau de viabilité après deux itérations consistent en l'union des sections noires.....	50

3.4	Les points candidats au noyau de viabilité après trois itérations consistant en l'union des sections noires.	51
3.5	Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,7$ et $r = 0,6$	55
3.6	Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 2$	55
3.7	Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 2,9$	56
3.8	Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 3,6$	57
3.9	Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96001$ et $r = 3,6$	57
3.10	Diagramme de bifurcation pour l'application logistique sur l'intervalle $[0, 1]$ en fonction de différentes valeurs de r	58
3.11	L'ensemble des points candidats, après une itération, pour être élément du noyau de viabilité de l'application logistique est représenté en noir.	60
3.12	L'ensemble des points candidats pour être élément du noyau de viabilité après deux itérations de l'application logistique est représenté en noir.	61
3.13	Ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité de l'application logistique après trois itérations.....	62
3.14	Ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité de l'application logistique après quatre itérations.....	62
3.15	Les conditions initiales pour faire partie du noyau de viabilité après 4 itérations seraient l'union des sections non coloriées (blanche) sur l'axe des y	63

REMERCIEMENTS

Je désire remercier mon directeur, sans qui je n'aurais pas eu l'occasion de travailler sur un projet aussi intéressant ni eu la possibilité de faire ma maîtrise aussi rapidement, pour son appui tout au long de ma recherche et ses conseils précieux quant aux méthodes de travail propres au chercheur.

Je désire aussi remercier mon amoureux, Guillaume Provencher, pour tout le temps qu'il a consacré à m'aider avec Mathematica et à m'encourager.

De même, il est important de souligner les contributions de Daniel Fiorilli au débogage de *LaTeX*, Jérôme Morin Drouin à la création et à l'amélioration des fonctions de *LaTeX* et à la programmation sur Mathematica, Arnaud pour ses idées sur les ensembles de Cantor, ainsi qu'à tous mes amis du laboratoire de mathématiques.

Finalement, je désire remercier l'ensemble des étudiants du département d'avoir rendu inoubliables mes deux années aux cycles supérieurs.

INTRODUCTION

La physique est née de l'observation de la nature et du désir de mieux comprendre les phénomènes naturels. Les physiciens ont utilisé les mathématiques, reine de toutes les sciences, pour modéliser leurs observations et ainsi déchiffrer les lois de l'univers. Plusieurs problèmes classiques ont été posés sous forme d'équations différentielles et ont pendant quelques décennies intéressé des physiciens et mathématiciens. Ces derniers voulaient connaître la convergence et la stabilité des systèmes. Ces deux questions sont légitimes puisqu'elles permettent de prédire les comportements de la nature, de savoir vers quoi elle tend. Par la suite, les mathématiciens ont repris les mêmes équations et les ont analysées comme objets mathématiques en soi. De nouvelles solutions ont alors été trouvées, qui n'ont plus forcément un sens physique, mais qui apportent beaucoup à notre compréhension des systèmes d'équations différentielles.

Cependant, l'essor des sciences dites douces comme la biologie, l'économie, la démographie, etc., pose de nouveaux problèmes modélisés eux aussi par des équations différentielles. Les connaissances acquises antérieurement ne sont pourtant pas toujours utiles pour comprendre ces domaines d'études. En effet, les sciences douces se fondent sur des systèmes dynamiques. Nous désirons savoir ce qui pourrait advenir au système à court terme et quelles conditions initiales permettront de toujours préserver une certaine propriété. L'intérêt de la convergence et de la stabilité est moindre, puisque plusieurs conditions initiales peuvent produire à travers l'évolution du système des résultats intéressants, sans qu'il soit pour autant possible de distinguer quelle solution serait la meilleure dans un contexte de décision rapide et d'intertemporalité, où plusieurs générations sont prises en

compte. La stabilité et la convergence se produisent souvent à des temps infinis, alors que les gouvernements, qui utilisent les conseils donnés par les sciences douces, doivent prendre des décisions à point nommé. Même dans l'optique où nous atteignons en un temps fini l'état voulu, il n'est pas forcément évident du point de vue de la réalité observable que l'état soit réellement atteint. Au quotidien, les systèmes ne sont jamais perçus à l'état d'équilibre, de stabilité. C'est une problématique dont nous devons tenir compte dans l'analyse contemporaine des équations différentielles appliquées.

C'est pour répondre à toutes ces nouvelles questions qu'est apparue la théorie de la viabilité. Cette théorie a permis la création de nouveaux algorithmes qui permettent d'aborder les systèmes d'équations différentielles à partir des ensembles de conditions initiales en plaçant certaines restrictions qui en évoluant en un temps fini, atteignent l'état voulu, la cible. Bien sûr, les évolutions partant de certaines des conditions initiales n'aboutiront jamais à l'état désiré. La théorie de la viabilité permet aussi d'avoir plusieurs évolutions qui partent d'une condition initiale puisque certains paramètres peuvent être modifiés. Les réponses aux équations formant maintenant un ensemble de points plutôt qu'un seul, il y a une plus grande flexibilité quant aux prises de décisions optimales dans un cadre d'incertitude. En effet, optimiser en sciences douces consiste à prendre la meilleure solution au meilleur temps en fonction des connaissances présentes. Il va donc de soi que cette définition est moins rigoureuse que celle que les mathématiques ont toujours donnée, toutefois elle est beaucoup plus fonctionnelle. C'est sous ce nouvel angle et avec ce mandat innovateur que Monsieur Jean-Pierre Aubin en collaboration avec Monsieur Patrick Saint-Pierre et Madame Hélène Frankowska ont élaboré les notions de viabilité. Leur motivation première était liée à la question économique de l'exploitation des ressources de manière rentable (à court terme) et la préservation des ressources (à long terme).

Il y a plusieurs applications possibles à cette théorie. En biologie, elle est couramment utilisée dans les problèmes concernant la gestion dynamique de populations sous des contraintes comme la quantité de nourriture, la température, etc. En démographie, des problèmes dynamiques de population seront traités de

façons similaires à ceux traités en biologie, mais avec des populations humaines. En aéronautique, la théorie de la viabilité cherche entre autres la préservation des propriétés nécessaires au vol d'un drone (petits avions autopilotés). En économie, cette théorie est populaire dans la gestion de problèmes reliés à l'environnement. Qu'ils soient liés aux changements climatiques, à l'exploitation des ressources naturelles ou à des problèmes avec des externalités comme la pollution, la viabilité permet de les résoudre avec une richesse nouvelle. Elle ajoute la notion de réaction au bon moment pour préserver en tout temps les propriétés recherchées. Elle évite les problèmes où l'optimisation sur un temps fini empêche l'optimisation pour un temps plus grand.

Cette théorie relativement jeune permet de résoudre une grande variété de problèmes avec une même méthode. Elle est innovatrice et accessible à différentes disciplines. À l'aide des théorèmes développés à travers cette théorie, quelques algorithmes permettant de résoudre facilement et rapidement des problèmes d'optimisation ont été découverts. L'algorithme développé par Saint-Pierre permet notamment de calculer la fonction d'inertie et ainsi d'identifier les noyaux de viabilité, concepts à la base de la résolution de tout problème d'optimisation à l'aide de la théorie de la viabilité. Par contre, pour des fins d'utilisation commerciales, ces algorithmes ont été rendus indisponibles par le groupe de recherche l'ayant trouvé, l'Astre. Dès lors, les exemples traités dans ce mémoire seront des cas calculables sans l'aide des algorithmes. Nous choisirons consciencieusement des cas résolubles à l'aide de calculs simples, mais qui permettent de bien mettre en lumière les concepts de base de la viabilité et l'innovation dans les solutions de problèmes classiques.

Chapitre 1

DÉFINITION DES PRINCIPAUX CONCEPTS

“Le mot de vérité ne fait naître qu’une idée vague, il n’a jamais eu de définition précise.”

George Louis Buffon,

Extrait de l’histoire naturelle, Premier discours

1.0.1. Définitions

Dans cette section, nous définirons les concepts de bases de la théorie de la viabilité, ainsi que les notations principales utilisées lors des calculs. Tout d’abord, il y aura les définitions des principaux concepts et des types de systèmes d’équations différentielles utilisés. Ensuite, des concepts propres à la théorie de la viabilité seront définis.

Évolution : notée $x(t)$: Exprime comment un système change en fonction du temps à partir d’une condition initiale, en spécifiant son état x , élément des réels de dimension n , \mathbb{R}^n , en fonction du temps t , élément des réels positifs \mathbb{R}_+ .

Trajectoire : Direction d’une évolution.

Vélocité : notée $x'(t)$: Vitesse de changement d’une évolution.

Contrôle : notée $u(t)$: Paramètre sur lequel nous pouvons avoir une certaine incidence et qui affecte les évolutions. Ce paramètre est choisi parmi l’ensemble des paramètres possibles : $\mathbb{U}(x(t))$.

Nous utiliserons des systèmes d'équations définis comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in \mathbb{U}(x(t)) \end{cases}$$

où des conditions initiales portent sur $x(t)$ et $u(t)$.

Pour traiter des différentes trajectoires qui peuvent partir d'une même condition initiale sur $x(t)$, suivant les choix potentiels de $u(t)$, nous utiliserons le concept de correspondance défini ci-dessous.

Correspondances : Une correspondance $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightsquigarrow \mathcal{Y}$ associe à $x \in \mathcal{X}$ un sous ensemble $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{Y}$ (qui peut être l'ensemble vide). Voir la figure 1.1.

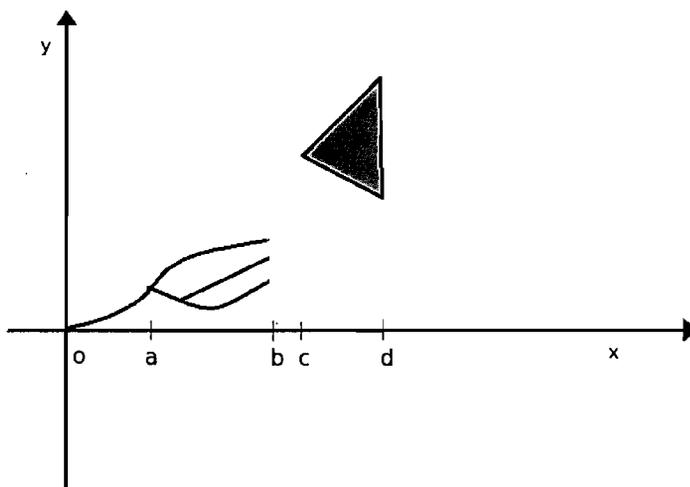


FIG. 1.1. Exemple d'une correspondance

Voici deux cas particuliers de correspondances.

- Fonction ou *système évolutionnaire déterministe* : il s'agit d'un cas particulier d'une correspondance où à chaque x élément de \mathcal{X} est associé un et un seul y élément de \mathcal{Y} . Sur le graphique, nous avons une fonction sur l'intervalle $[0, a]$
- Sélection : Une sélection d'une correspondance $U : \mathcal{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ est une fonction $\hat{u} : x \mapsto \hat{u}(x)$ telle que pour tous les x , $\hat{u}(x)$ est compris dans $U(x)$. Sur le

graphique, dans l'intervalle $[a, b]$, le choix de la courbe supérieure serait un exemple de sélection.

1.0.2. Noyau de viabilité

Soit un système :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in \mathbb{U}(x(t)) \end{cases}$$

Comme mentionné précédemment, pour chacune des conditions initiales possibles (notée x_i), il y a une ou plusieurs évolutions $x(t)$ possibles, qui dépendent du choix du contrôle $u(t)$. Un des buts de la théorie de la viabilité est de transformer des problèmes d'optimisation modélisés à l'aide d'équations différentielles ayant une solution unique, en problèmes portant sur l'efficacité des choix en tout temps. Pour travailler de cette manière, il faut créer des ensembles séparant les conditions initiales amenant des résultats intéressants des autres conditions initiales. C'est ce qui sera défini dans les prochaines lignes.

Soit $\mathbb{X} = \{x_i\}$ l'ensemble de tous les états initiaux possibles. Souvent, les x_i n'apparaîtront pas explicitement dans les fonctions ; nous les remplacerons plutôt par des x puisqu'il est sous-entendu que ce sont les conditions initiales sur x qui nous intéressent.

Ensemble de viabilité : $K \subseteq \mathbb{R}$ est l'ensemble que les évolutions ne doivent pas quitter. En particulier, il contient toutes les situations initiales acceptables. Nous désirons, en effet, savoir si, sous certaines contraintes, les évolutions respectent ou non des propriétés propres au problème.

Noyau de viabilité : noté $Viab_f(K)$: Au moins une des évolutions partant d'un point élément de $Viab_f(K)$ reste dans l'ensemble de viabilité K pour toujours. Si $Viab_f(K)$ est vide, nous dirons que K est un *repoussoir*.

La figure 1.2 donne un aperçu visuel d'un ensemble de viabilité et d'un noyau de viabilité.

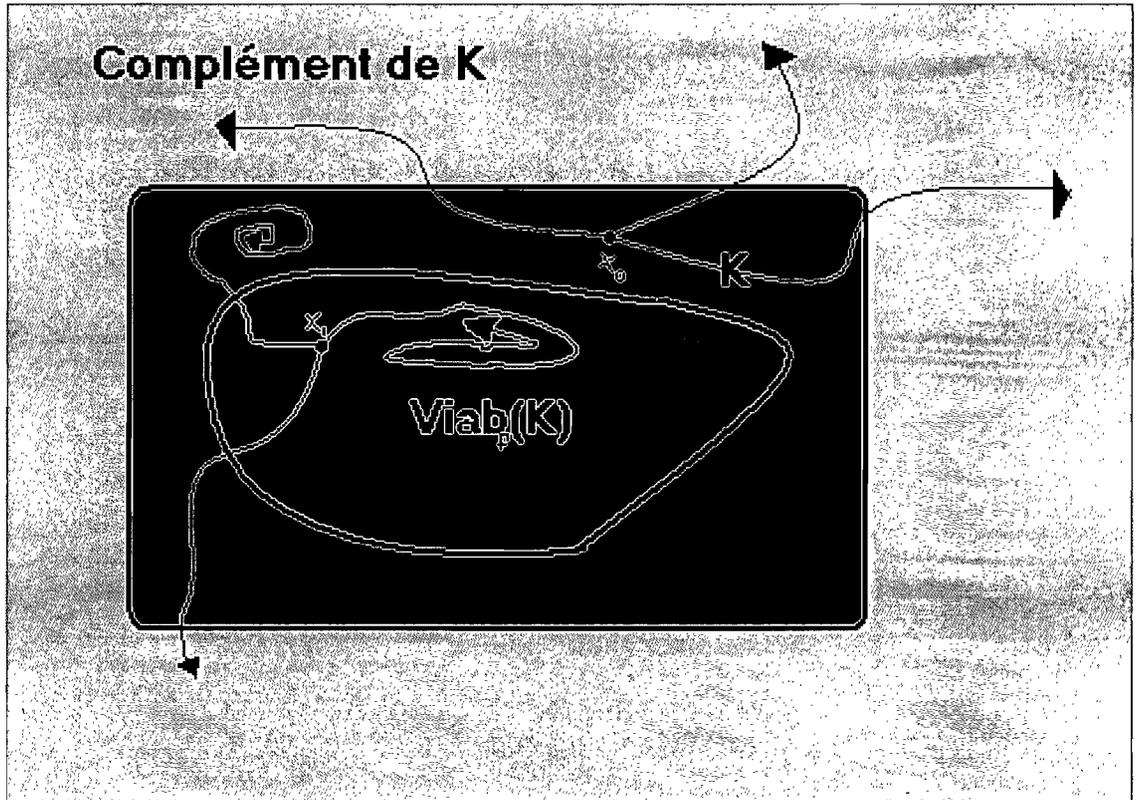


FIG. 1.2. Ensemble de viabilité

$K \setminus Viab_f(K)$: toutes les évolutions partant d'un point élément de $K \setminus Viab_f(K)$ sortent de K en un temps fini.

Cible : $C \subseteq K$ est un ensemble de propriétés désirables pour une évolution. En général, nous recherchons les évolutions atteignant cet ensemble en un temps fini.

Bassin de capture : noté $Capt_f(K, C)$: Ensemble des conditions initiales éléments de l'ensemble K dont au moins une des évolutions régies par la fonction f reste viable et atteint C en un temps fini.

Noyau d'invariance : notée $Inv_f(K, C)$: Toutes les évolutions partant de $x \in Inv_f(K, C)$ restent viables et atteignent C en un temps fini.

La figure 1.3 permet d'apercevoir en détail l'intérieur d'un noyau de viabilité.

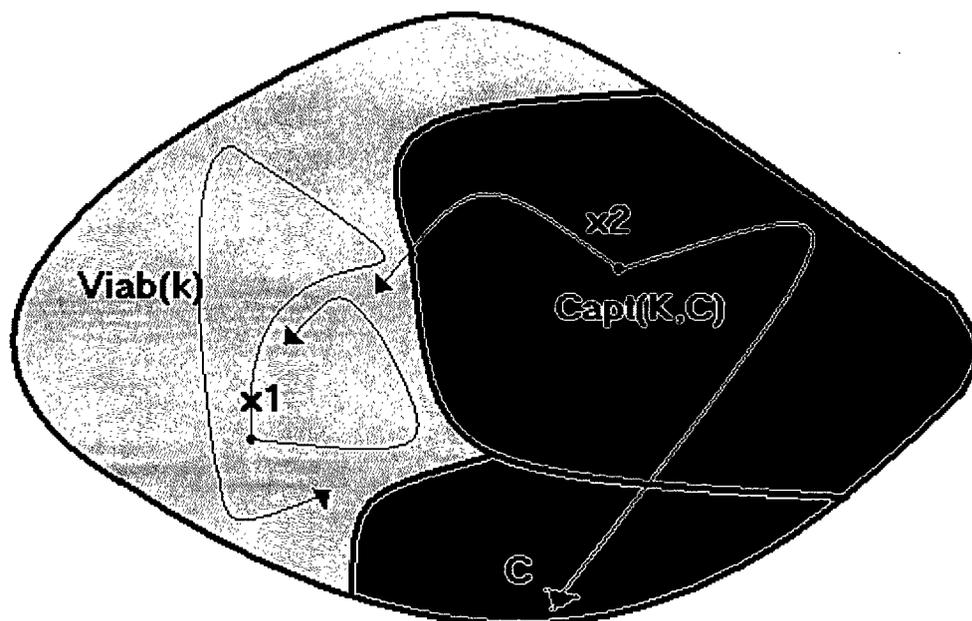


FIG. 1.3. Zoom sur un noyau de viabilité

Maintenant que nous possédons les concepts par rapport aux états des évolutions, il faut aussi définir ce qui nous permet d'agir sur un système pour optimiser les résultats.

1.0.3. Opération sur les évolutions

Il est possible d'agir de deux façons sur les évolutions. D'une part, en déplaçant dans l'espace une évolution ou d'autre part, en additionnant par morceaux deux sections d'évolution.

Translation : Une translation à gauche consiste à déplacer dans l'espace une évolution. Soit $x(t)$ une évolution et $\kappa(\cdot)$ l'opérateur de translation.

$$\kappa(-T)x(\cdot) := x(t + T)$$

Concaténation : Soient $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ deux évolutions. Pour être concaténables en un point $t = a$, les évolutions doivent être telles que $x(a) = y(0)$. La concaténation

$(x \diamond_a y)(\cdot)$ est alors définie comme suit :

$$(x \diamond_a y)(t) := \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, a] \\ y(t - a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

La figure 1.4 illustre un exemple de translation et de concaténation.

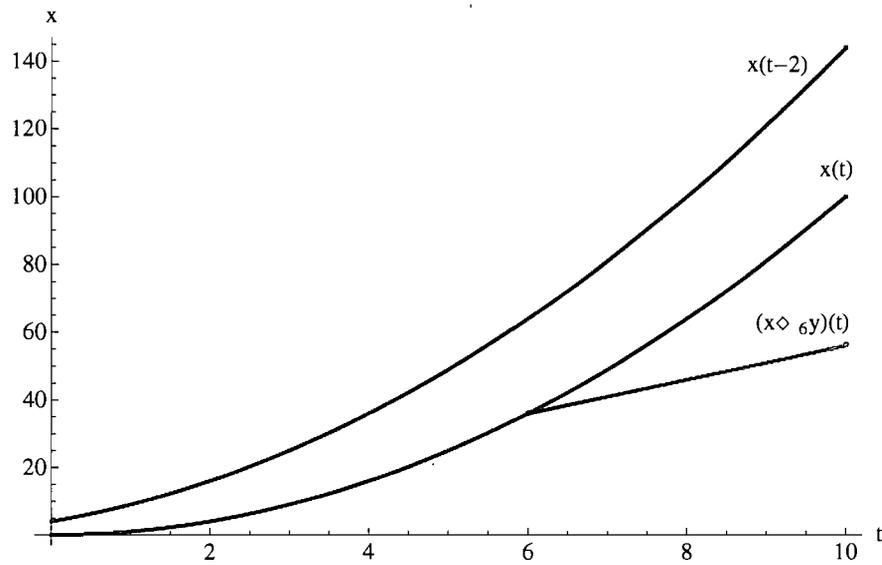


FIG. 1.4. Exemple de concaténation et de translation d'une évolution $x(t)$

1.0.4. Régulons

Les régulons sont ce qui agit sur les évolutions des systèmes et qui les contrôlent. Les régulons peuvent être des contrôles extérieurs, telle une action humaine, ou être le fruit du hasard, comme la température.

1.0.4.1. Régulons linéaires

Un choix de régulon linéaire contrôle une évolution et est de la forme $u'(t) = c$. Lorsque l'évolution s'apprête à sortir de la zone définie comme viable, c'est-à-dire quand l'évolution atteint la frontière de l'ensemble de viabilité, nous changeons le signe du régulon ($u'(t) = -c$) de manière à ce que l'évolution reste viable.

1.0.4.2. *Régulons minimisant en tout point la vitesse de changement*

Ce type de régulon est le plus souvent possible constant ($u'(t) = 0$) mais lorsque pour préserver la viabilité nous devons obligatoirement le changer, nous utilisons le contrôle linéaire avec la plus petite vitesse, négative ou positive, possible ($u'(t) = \pm c$).

1.0.4.3. *Régulons quelconques*

Une infinité d'autres régulons pourraient être définis comme objets mathématiques. Par contre, le régulon inerte et le régulon lourd sont plus représentatifs de la réalité du fait qu'ils conservent la propriété d'inertie des objets observés dans la nature. En économie, nous cherchons souvent à préserver la stabilité d'une propriété comme le revenu, la quantité de ressources, la dépense mensuelle, etc. Dès lors, les régulons inertes et lourds sont aussi des choix judicieux pour décrire les systèmes économiques.

Rétroactions : À partir d'un état, une rétroaction est une réaction sur un système soit par une action directe sur le système, soit à travers un régulon. Dans ce dernier cas, les rétroactions peuvent être lourdes ou inertes selon le type de régulon que l'on choisit ; respectivement minimisant les changements de vitesse ou linéaire. Le type de rétroaction choisi aura un effet direct sur les évolutions qui deviendront aussi soit lourdes ou inertes.

1.0.5. **Fonction d'inertie**

Comme les problèmes sur lesquels nous travaillons sont représentatifs de la nature, il est important de définir l'inertie, car cette propriété est présente dans les systèmes à l'état brut.

Inertie : Tendance d'un système à conserver le même état.

Dans la nature, nous observons que les choses tendent à rester le plus stable possible pour minimiser les dépenses d'énergie. Darwin avait d'ailleurs remarqué que les évolutions ont lieu par saut. C'est-à-dire, durant des millénaires toutes choses restent égales par ailleurs et lorsque la survie de l'espèce en dépend, il y a une mutation génétique. Il arrive même fréquemment qu'un système reste

dans une configuration non optimale pour une longue période de temps, car les acteurs du système n'ont pas un besoin impératif de changement. Les changements de configuration apparaissent seulement lorsqu'il y a nécessité et dans ce cas seulement, nous optimisons la décision prise.

Dans l'optique de modéliser cette idée, Monsieur Jean-Pierre Aubin en collaboration avec ses associés, ont créé la fonction d'inertie qui permet de minimiser les changements de contrôles en chaque temps tout en maximisant la vitesse de changement lorsqu'il a lieu.

Soit $\mathcal{P}(x, u)$, l'ensemble des conditions initiales et des contrôles possibles.

La fonction d'inertie se définit comme suit :

$$\mathbb{B}_u(x, u) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{P}(x, u)} \sup_{t > 0} |u'(t)|$$

Lorsque calculée elle donne exactement l'ensemble de viabilité. La fonction de viabilité permet, en effet, de trouver l'ensemble des conditions initiales sur lesquelles nous pouvons appliquer le plus petit changement possible sur les évolutions tout en permettant de maximiser la vitesse de changement du contrôle. C'est cette fonction que l'algorithme défini par Saint-Pierre calcule. Elle est la clef de la résolution de tous problèmes de viabilité puisqu'elle borne la vitesse de changement et permet à la transition de se faire en douceur. Les exemples du *chapitre 2* expliciteront l'importance de cette fonction.

1.0.6. Cycle hystérétique

Dans certains cas, il est possible de définir un certain nombre de réglons qui, appliqués de façon cyclique à une équation différentielle, permettent de préserver pour toujours une propriété. Lorsque nous sommes capables de faire une telle chose, nous avons construit un cercle hystérétique. L'expression est une analogie aux phénomènes cycliques ainsi appelés en physique.

Plusieurs applications de ce principe existent. Notamment, ce principe est utilisé pour maintenir des drones en vol. En effet, si l'espace de viabilité est l'ensemble des conditions initiales telles qu'il est possible de voler et que nous connaissons des cycles hystériques permettant de conserver pour toujours les propriétés nécessaires, le drone peut s'autopiloter.

1.0.7. Conclusion

Nous avons choisi de présenter seulement une sélection des concepts les plus utilisés de manière à alléger la notation et à mettre en évidence les concepts importants à la base de la théorie et de ce mémoire. Un lecteur désirant approfondir les notions de la théorie de la viabilité à un niveau dépassant l'introduction devra se référer à d'autres ouvrages tels que :

- Aubin, Jean-Pierre; Bayer, Alexandre; Bonneuil, Noël; St-Pierre, Patrick; Regulation of the Viability of Environments under Evolutionary Systems, (à paraître).
- Aubin, Jean-Pierre; Dynamic Economic Theory, a Viability Approach, Springer, 1997
- Aubin, Jean-Pierre; Viability Theory, Birkhäuser, 1991

Chapitre 2

APPLICATION DES CONCEPTS À DES PROBLÈMES AVEC UN RÉGULON CONTINU

“Tout est cycle, cercle vicieux, éternel retour.”

Morgan Sportès, Extrait de Solitudes

2.1. INTRODUCTION

Nous jugeons souvent la pertinence d’une théorie par la profondeur de ses applications et la diversité de ces dernières. Ce chapitre vise à montrer divers aspects de cette théorie et son usage dans différents domaines. Dans un premier temps seront abordés des problèmes de dynamique de population. Dans un second temps, seront abordés des problèmes de ressources naturelles et enfin un problème de changement global. Tous ces problèmes seront traités d’une manière simple, visant l’introduction à diverses techniques propres à la théorie de la viabilité et promouvant la diversité de ses champs d’applications.

2.2. DYNAMIQUE DE POPULATION

Historiquement, plusieurs méthodes ont été employées pour modéliser le comportement des populations. Malthus, en 1798 a proposé une théorie selon laquelle les populations croissent selon un ratio géométrique, alors que les moyens de production croissent selon un ratio arithmétique. Voir la figure 2.1.

Les conclusions pessimistes que son modèle suggérait, notamment la détresse et la misère des populations en manque du nécessaire, ont suscité beaucoup de

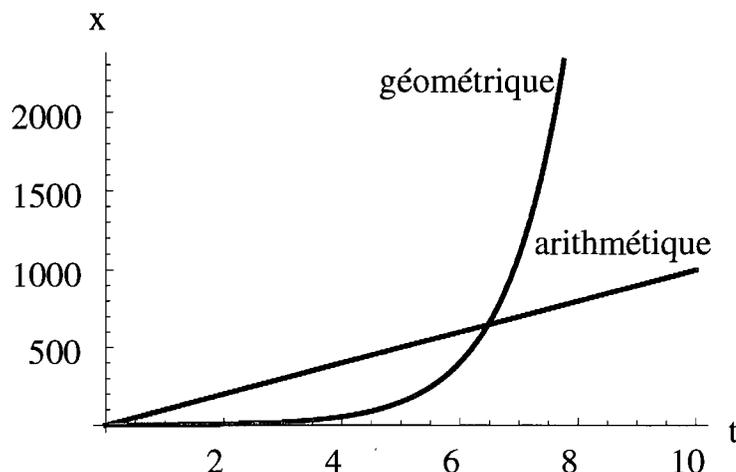


FIG. 2.1. Idée de Malthus sur l'évolution des populations

débats à son époque à savoir s'il fallait ou non prêter assistance aux pauvres ou essayer de limiter les naissances. Son modèle finalement était plutôt représentatif de la réalité des populations occidentales au Moyen-âge puisque la révolution verte, permettant d'augmenter la productivité des terres arables, est arrivée au moment même où il publiait ses écrits.

D'autres analyses, suite à la parution de son livre "An Essay on the Principle of Population", ont décrit autrement l'évolution des populations. Notamment en 1838, Verhulst a proposé que les populations évoluaient en suivant une courbe en forme de "S" comme la figure 2.2 le montre. En effet, son modèle stipule qu'une population, lorsqu'elle est composée d'un certain nombre d'individus, croît selon un rythme exponentiel tant et aussi longtemps que tout est en place pour combler les besoins vitaux de ces individus. Par la suite, la population croît de moins en moins vite jusqu'à atteindre un plateau où la population se maintient. Si r est le taux de croissance de l'apport en nourriture, la population $x(t)$ pourrait être décrite par l'équation suivante :

$$x'(t) = rx(t)(b - x(t))$$

où b est une constante.

De nos jours, les experts ne s'entendent pas uniformément pour dire quel type d'équation différentielle représente le mieux l'évolution des populations. Il est

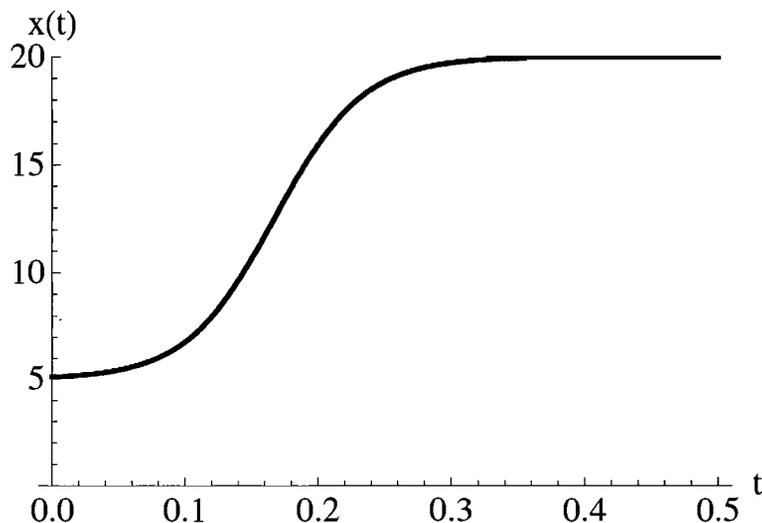


FIG. 2.2. Évolution d'une population selon Verhulst

d'ailleurs concevable que d'une population à une autre, l'équation différentielle modélisant le mieux la dynamique d'une population soit différente. Par contre, tous ont conservé l'idée que les populations évoluent suivant une courbe en forme de "S".

2.2.1. Rétroactions inertes

2.2.1.1. Introduction au problème

Pour l'exemple suivant, nous utiliserons ce système :

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t))x(t) \\ u'(t) = \pm c \end{cases}$$

Supposons que nous observons une population et que nous remarquons qu'en utilisant une rétroaction inerte, c'est-à-dire, l'usage d'un régulon linéaire, nous modélisons bien la réalité. Nous voudrions choisir un régulon $u(x(t))$ qui décrit bien le comportement de la population et qui permet aussi de rendre cyclique l'évolution de la population. Pour bâtir le cercle hystérétique en question, nous choisissons donc :

$$u(x(t)) = \begin{cases} \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)} & \text{si } a \leq x \leq \sqrt{ab} \\ \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)} & \text{si } \sqrt{ab} < x \leq b \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Il est important de remarquer que

$$\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)} = \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}$$

si et seulement si $x = \sqrt{ab}$. D'où lorsque nous effectuons un changement de régulon en $x = \sqrt{ab}$, nous appliquons quand même un contrôle $u(x(t))$ continu en tout point. C'est-à-dire, nous respectons la propriété de concaténation.

Nous allons contrôler la population en utilisant le régulon $u(x(t))$ comme montré à la figure 2.3.

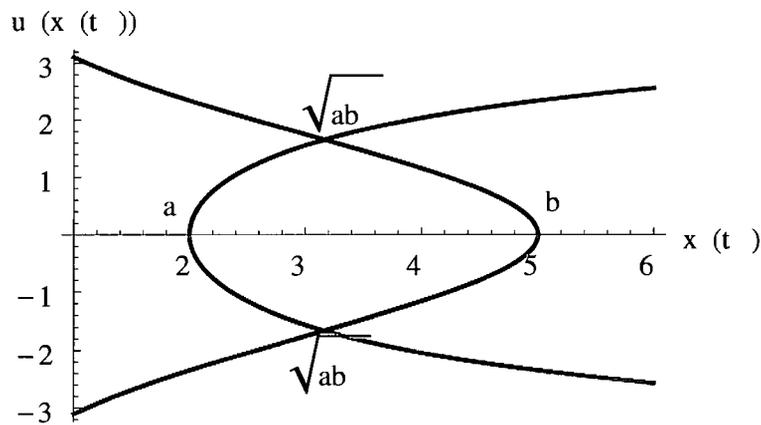


FIG. 2.3. Rétroactions inertes formant un cercle hystérétique

2.2.1.2. Calcul

Étape 1: Soit le système à l'état initial :

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}x(t) \\ u'(t) = c \\ \text{avec } x(0) = a \end{cases}$$

Nous allons d'abord le résoudre. Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} x(t)$$

si et seulement si

$$\frac{dx}{x(t) \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}} = \sqrt{c} dt.$$

Donc

$$\sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} = \sqrt{c}(t + d)$$

avec d une constante.

D'où

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}(t^2 + 2td + d^2)}.$$

Puisque $x(0) = a$, $d = 0$ et alors

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}t^2}.$$

Nous obtenons que sous le régulon $u(x(t)) = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}$ la population se comporte suivant $x(t) = ae^{\frac{c}{2}t^2}$. Nous garderons ce régulon jusqu'au moment où $x(t)$ atteindra \sqrt{ab} .

$$x(t) = \sqrt{ab}$$

si et seulement si

$$ae^{\frac{c}{2}t^2} = \sqrt{ab}.$$

Donc

$$t = \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}{c}}.$$

Au temps $t = \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}{c}}$, nous devons changer de régulon car la population ne se retrouve plus dans l'intervalle $x(t) \in [a, \sqrt{ab}]$.

Étape 2: Soit le nouveau système tel que les conditions initiales sont les conditions d'arrivée de l'étape 1 et tel que le contrôle utilisé change suivant la fonction de contrôle donnée par l'équation 2.1.1.

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)} x(t) \\ u'(t) = c \\ \text{avec } x(0) = \sqrt{ab} \end{cases}$$

Nous résoudrons de façon similaire à l'étape 1 le système donné. Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)} x(t)$$

si et seulement si

$$\frac{dx}{x(t) \sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)}} = \sqrt{c} dt$$

si et seulement si

$$-\sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)} = \sqrt{c}(t + d)$$

avec d une constante.

Donc

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}(t^2 + 2td + d^2)}.$$

Puisque $x(0) = \sqrt{ab}$, nous obtenons que $d = \pm \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$.

Dès lors,

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}\left(t^2 \pm 2t\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}\right)}.$$

Nous obtenons que sous le régulon

$$u(t) = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)}$$

la population se comporte suivant

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}\left(t^2 \pm 2t\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}\right)}.$$

Nous garderons ce régulon jusqu'au moment où $x(t)$ atteindra b .

Nous avons que

$$x(t) = b$$

si et seulement si

$$b = be^{-\frac{c}{2} \left(t^2 \pm 2t \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{c} \right)}$$

si et seulement si

$$t = \mp \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

Comme le temps doit être positif, nous choisissons

$$t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

chose qui implique le choix de d négatif.

Au temps

$$t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

nous devons changer de régulon pour que la population se maintienne entre a et b .

Étape 3: Maintenant que nous avons atteint la frontière $x(t) = b$, nous devons, pour créer un cercle hystérétique, nous assurer à l'aide de contrôles inertes de toujours rester entre a et b . Pour se faire, nous allons “revenir sur nos pas” jusqu’à $x(t) = a$ et refaire par la suite, à l’infini, les étapes 1 à 4. Pour revenir sur nos pas, nous utiliserons les mêmes régulons $u(x(t))$, mais avec un signe opposé.

Soit le système dont les conditions de départs sont celles d’arrivée de l’étape 2 et tel que le contrôle choisi permet de revenir vers

$$x(t) = \sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{c} \sqrt{2 \ln\left(\frac{b}{x}\right)} x(t) \\ u'(t) = -c \\ \text{avec } x(0) = \sqrt{b} \end{cases}$$

Nous résoudrons de façon similaire à l'étape 1 le système donné.

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}x(t)$$

si et seulement si

$$\frac{dx}{\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}} = -\sqrt{c}dt$$

si et seulement si

$$-\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)} = -\sqrt{c}(t+d)$$

avec d une constante.

D'où

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}(t^2+2td+d^2)}$$

Puisque $x(0) = b$, nous trouvons que $d = 0$.

Donc

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}t^2}.$$

Nous obtenons que sous le régulon

$$u(t) = \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}$$

la population se comporte suivant

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}t^2}.$$

Nous garderons ce régulon jusqu'au moment où $x(t)$ atteindra \sqrt{ab} .

$$x(t) = \sqrt{ab}$$

si et seulement si

$$\sqrt{ab} = ae^{-\frac{c}{2}t^2}$$

si et seulement si

$$t = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{c}}.$$

Au temps

$$t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

nous devons changer de régulon, car la population ne se retrouve plus dans l'intervalle $[\sqrt{ab}, b]$.

Étape 4:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}x(t) \\ u'(t) = -c \\ \text{avec } x(0) = \sqrt{ab} \end{cases}$$

Nous allons d'abord résoudre le système.

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}x(t)$$

si et seulement si

$$\frac{dx}{x(t)\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}} = -\sqrt{c}dt$$

si et seulement si

$$\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)} = -\sqrt{c}(t+d)$$

avec d une constante.

D'où

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}(t^2+2td+d^2)}.$$

Puisque $x(0) = a$, nous trouvons $d = \pm\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$.

Donc

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}\left(t^2 \pm 2t\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}} + \frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}\right)} = \sqrt{abe}^{\frac{c}{2}\left(t^2 \pm 2t\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}\right)}.$$

Nous obtenons que sous le régulon

$$u(t) = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}$$

la population se comporte suivant

$$x(t) = \sqrt{abe}^{\frac{c}{2}\left(t^2 \pm 2t\sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}\right)}.$$

Nous garderons ce régulon jusqu'au moment où $x(t)$ atteindra a .

Nous avons

$$x(t) = a$$

si et seulement si

$$a = \sqrt{abe}^{\frac{c}{2}} \left(t^2 \pm 2t \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}} \right)$$

D'où

$$t = \mp \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

Comme le temps doit être positif, nous choisissons

$$t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

chose qui implique le choix de d négatif.

Au temps

$$t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$$

nous devons changer de régulon pour que la population se maintienne entre a et b .

2.2.1.3. Conclusions

Nous avons trouvé qu'avec ce choix de u , il est possible de toujours maintenir $x(t)$ entre a et b en appliquant de façon cyclique les quatre types de rétroactions, en changeant à tous les temps $t = \sqrt{\frac{\ln(\frac{b}{a})}{c}}$ le régulon $u(x(t))$. Donc, sur une période de $4t$, l'évolution de la population oscille deux fois entre a et b .

D'où en paramétrant U en fonction de x comme montré à la figure 2.4, nous obtenons que la population suit un cycle hystérétique et que nous avons réussi à la contrôler.

De plus, nous constatons sur le graphique de la 2.5 que l'évolution de la population, c'est-à-dire $x(t)$, suit périodiquement une courbe en forme de "S" tel que supposé au départ.

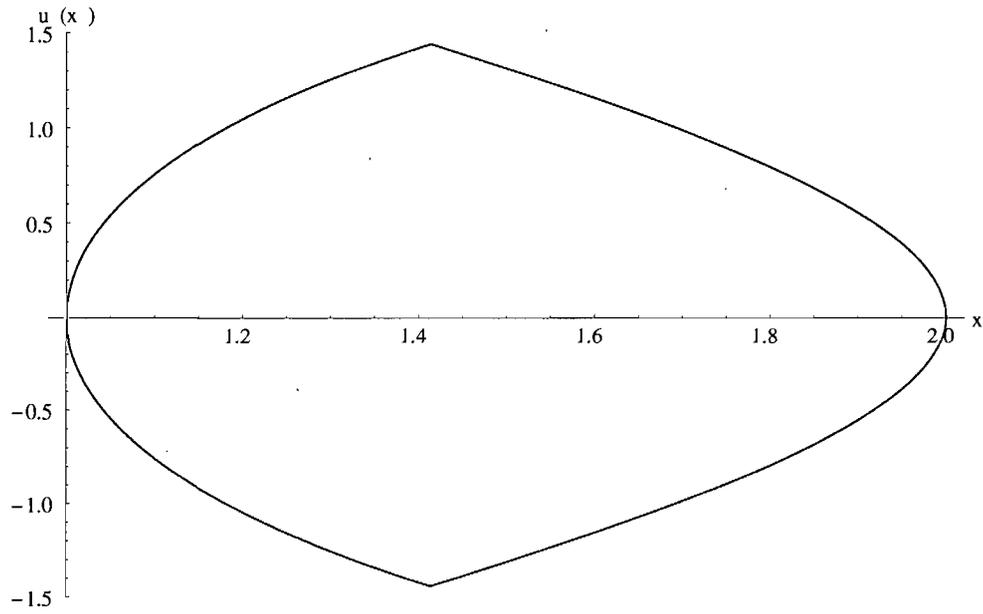


FIG. 2.4. Paramétrage de u en fonction de x

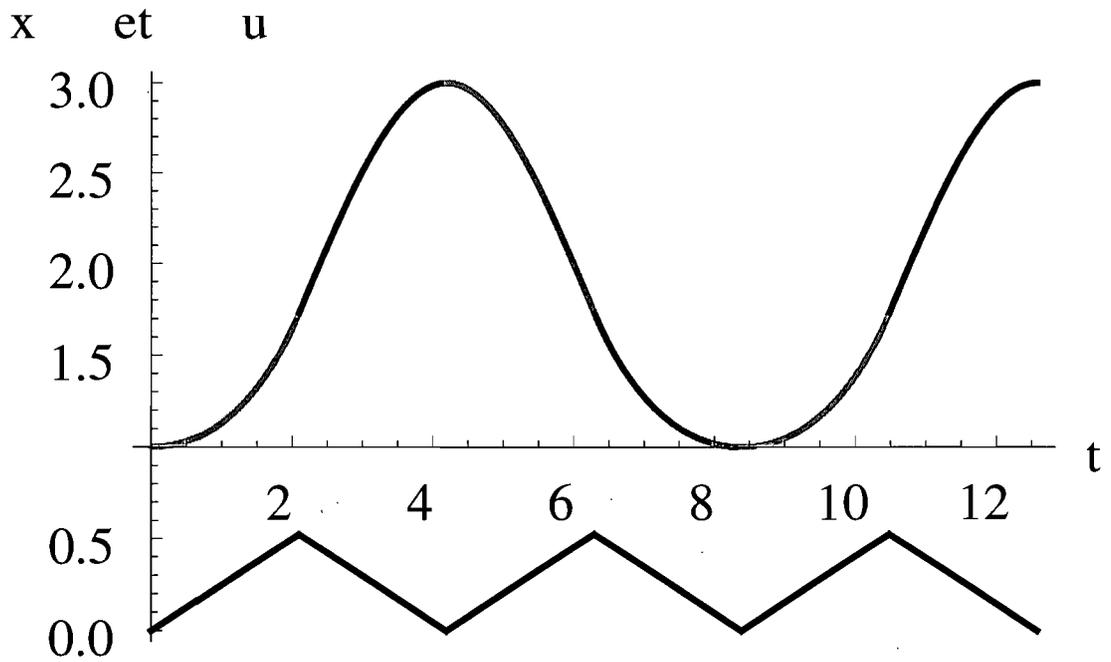


FIG. 2.5. Évolution de $x(t)$ lorsque soumise au contrôle $u(t)$. Chaque changement de couleur de l'évolution $x(t)$ advient lorsqu'il y a un changement dans le contrôle $u(t)$ représenté en noir sur le graphique.

2.2.2. Rétroactions lourdes

2.2.2.1. Introduction au problème

Supposons maintenant que l'on désire choisir des contrôles pour bâtir un cercle hystérétique régulant la même population, toutefois nous désirons dorénavant maintenir le contrôle le plus constant possible. Pour ce faire, nous choisirons un contrôle $u(t)$ constant lorsque nous serons dans l'intervalle sécuritaire $[ae^{\frac{u^2}{2c}}, be^{-\frac{u^2}{2c}}]$ et lorsque nous ne pourrons plus le conserver sous peine de sortir de l'intervalle viable $[a, b]$, nous utiliserons un contrôle linéaire. D'où le choix de

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & \text{le plus souvent possible} \\ \pm c & \text{si nous pouvons ainsi éviter de sortir de l'ensemble de viabilité} \\ & \text{lorsque nous sommes dans un des intervalles critiques} \end{cases}$$

Nous construirons, dans les prochains calculs, un cercle hystérétique, nous permettant d'utiliser la même suite de réglons à l'infini.

2.2.2.2. Calcul

Étape 1: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t))x(t) \\ u'(t) = 0 \\ \text{avec } x(0) = ae^{\frac{u^2}{2c}} \text{ et } u(0) = u \end{cases}$$

Puisque $u'(t) = 0$ et $u(0) = u$ nous obtenons que

$$u(t) = u$$

indépendamment du choix de t .

D'où le système se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) = ux(t) \\ \text{avec } x(0) = ae^{\frac{u^2}{2c}} \end{cases}$$

Réolvons le système :

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = ux$$

si et seulement si

$$\ln x = ut + d$$

où d est une constante.

Donc

$$x = De^{ut}$$

où D est une nouvelle constante.

Puisque

$$x(0) = ae^{\frac{u^2}{2c}}$$

nous trouvons que

$$D = ae^{\frac{u^2}{2c}}.$$

D'où

$$x(t) = ae^{\frac{u^2}{2c} + ut}.$$

$x(t)$ reste viable jusqu'à l'atteinte du moment critique où $x(t) = be^{-\frac{u^2}{2c}}$;

$$x(t) = be^{-\frac{u^2}{2c}}$$

si et seulement si

$$ae^{\frac{u^2}{2c} + ut} = be^{-\frac{u^2}{2c}};$$

quand

$$t = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{u} - \frac{u}{c}.$$

Étape 2,1: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}x(t) \\ u'(t) = -c \\ \text{avec } x(0) = be^{-\frac{u^2}{2c}} \text{ et } u(0) = u \end{cases}$$

Nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{cx}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}$$

si et seulement si

$$-\sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)} = \sqrt{c}(t + d)$$

avec d est une constante.

Donc

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}(t^2 + 2td + d^2)}.$$

Puisque

$$x(0) = be^{-\frac{u^2}{2c}}$$

nous trouvons que

$$d = \mp \frac{u}{c}.$$

D'où

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}(t^2 \pm \frac{2ut}{c} + \frac{u^2}{c^2})}.$$

Nous nous intéressons maintenant au temps $t = \frac{u}{c}$. En effet, après un temps $t = \frac{u}{c}$, nous avons $u(t) = 0$, ce qui détermine un changement de la nature de $u(t)$. Le contrôle passe d'un état linéaire $u(t) = -ct + u$ à un état constant $u(\frac{u}{c}) = 0$.

$$x\left(\frac{u}{c}\right) = \begin{cases} be^{-\frac{2u^2}{c}} & \text{avec } d = \frac{u}{c} \\ b & \text{avec } d = \frac{-u}{c} \end{cases}$$

Donc, $d = \frac{-u}{c}$ est le "d" qui convient, car l'alternative implique que la population décroît.

Après un temps $t = \frac{u}{c}$ l'évolution est au point critique $x(t) = b$. Nous changeons alors le régulon, à l'instant du problème 2.1.1, pour $u(t) = -\sqrt{c}\sqrt{2 \ln \left(\frac{b}{x} \right)}$ de manière à revenir dans l'ensemble de viabilité jusqu'au moment où il est de nouveau possible d'utiliser un régulon constant (i.e. $u'(t) = 0$)

Étape 2,2: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}x(t) \\ u'(t) = -c \\ \text{avec } x(0) = b \text{ et } u(0) = 0 \end{cases}$$

Nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{cx}\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}$$

si et seulement si

$$\frac{dx}{\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)}x} = -\sqrt{c}dt$$

si et seulement si

$$-\sqrt{2\ln\left(\frac{b}{x}\right)} = -\sqrt{c}(t+d)$$

où d est une constante.

Donc

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}(t^2+2dt+d^2)}.$$

Puisque

$$x(0) = b = be^{-\frac{c}{2}d^2}$$

nous obtenons que $d = 0$.

Nous avons donc que

$$x(t) = be^{-\frac{c}{2}t^2}.$$

Donc après un temps $t = \frac{u}{c}$, $x(t) = be^{-\frac{c}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2} = be^{-\frac{u^2}{2c}}$

À partir de ce point, il est de nouveau possible d'utiliser un régulon constant car $u'(t) = -c$.

Donc

$$u(t) = -ct + k$$

où k est une constante. Mais, $u(0) = 0 = k$, chose qui implique que $u'(t) = -ct$. Nous avons ainsi que $u\left(\frac{u}{c}\right) = -u$. Donc après un temps $t = \frac{u}{c}$ le régulon redevient constant.

Étape 3: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = u(t)x(t) \\ u'(t) = 0 \\ x(0) = be^{-\frac{u^2}{2c}} \text{ et } u(0) = -u \end{cases}$$

Nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = -ux$$

si et seulement si

$$x(t) = e^{-ut+d}$$

où d est une constante, si et seulement si

$$x(0) = be^{-\frac{u^2}{2c}} = e^d.$$

D'où

$$x(t) = be^{-ut - \frac{u^2}{2c}}.$$

$x(t)$ atteint une valeur critique si

$$x(t) = ae^{\frac{u^2}{2c}}$$

si et seulement si

$$t = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{u} - \frac{u}{c}.$$

Au temps $t = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{u} - \frac{u}{c}$ nous devons changer de régulon pour éviter de sortir avec une vitesse infinie de l'ensemble. Nous choisissons alors un régulon inerte pour contrôler la population jusqu'à ce qu'il redevienne viable d'utiliser un régulon constant.

Étape 4,1: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{c}\sqrt{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}x(t) \\ u'(x) = c \\ \text{avec } x(0) = ae^{\frac{u^2}{2c}} \text{ et } u(0) = -u \end{cases}$$

Nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}x(t)$$

si et seulement si

$$\sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} = -\sqrt{c}(t + d)$$

où d est une constante.

Donc

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}(t^2 + 2td + d^2)}.$$

Puisque

$$x(0) = ae^{\frac{u^2}{2c}} = ae^{\frac{c}{2}d^2}$$

nous trouvons que

$$d = \pm \frac{u}{c}.$$

D'où

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}(t^2 \pm \frac{u}{c}t + \frac{u^2}{c^2})}$$

Encore une fois, nous nous intéressons au temps $t = \frac{u}{c}$ car il est moteur de changement sur la nature de $u'(t)$. Nous avons $u'(t) = c$ si et seulement si $u(t) = ct + k$ où k est une constante. Mais nous avons que $u(0) = -u$. Donc, $u(t) = ct - u$. Après un temps $t = \frac{u}{c}$ nous obtenons $u(\frac{u}{c}) = c(\frac{u}{c}) - u = 0$. Donc, le régulon redevient constant.

Observons ce qui advient de notre évolution après un temps $t = \frac{u}{c}$:

$$x\left(\frac{u}{c}\right) = \begin{cases} ae^{\frac{2u^2}{c}} & \text{avec "d" positif} \\ a & \text{avec "d" négatif} \end{cases}$$

Donc, nous choisissons "d" négatif, de manière à ce que la population décroisse dans le temps.

Toutefois, nous constatons que si le contrôle demeure inchangé, nous sortons de l'ensemble de la viabilité de la population. (Nous ne restons pas dans l'intervalle $[a, b]$.)

Étape 4,2: Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} x(t) \\ u'(x) = c \\ \text{avec } x(0) = a \text{ et } u(0) = 0 \end{cases}$$

Nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c} \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} x(t)$$

si et seulement si

$$\sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} = \sqrt{c}(t + d)$$

où d est une constante.

Donc

$$x(t) = ae^{\frac{c}{2}(t^2 + 2td + d^2)}.$$

Puisque $x(0) = a = ae^{\frac{c}{2}}$ nous trouvons $d = 0$. Donc $x(t) = ae^{\frac{c}{2}t^2}$.

Au temps $t = \frac{u}{c}$, nous obtenons : $x\left(\frac{u}{c}\right) = ae^{\frac{u^2}{2c}}$ la frontière de notre intervalle sécuritaire.

De plus, $u'(t) = c$. Donc nous avons $u(t) = ct + k$ où k est une constante.

Puisque $u(0) = 0$ nous trouvons que $k = 0$ d'où $u(t) = u$ et en particulier $u\left(\frac{u}{c}\right) = u$.

Nous retombons exactement sur le système avec les conditions de départ de l'étape 1.

2.2.2.3. Conclusions

Nous avons donc construit un cercle hystérétique en 6 étapes, qui permet de maintenir une population dans l'intervalle $[a, b]$ en utilisant des contrôles soit constants soit linéaires. Les contrôles constants sont utilisés dans l'intervalle $[ae^{\frac{u^2}{2c}}, be^{\frac{-u^2}{2c}}]$. Les contrôles linéaires sont utilisés dans les intervalles critiques $[a, e^{\frac{u^2}{2c}}]$ et $[be^{\frac{-u^2}{2c}}, b]$. L'utilisation de rétroactions lourdes permet de maintenir stable, le plus possible, le contrôle effectué sur la population et de faire des changements très doux lorsque nous n'avons pas le choix d'en faire sous peine de perdre la propriété de viabilité de la population.

La population, lorsque soumise à ces contrôles, évolue suivant le graphique montré à la figure 2.6.

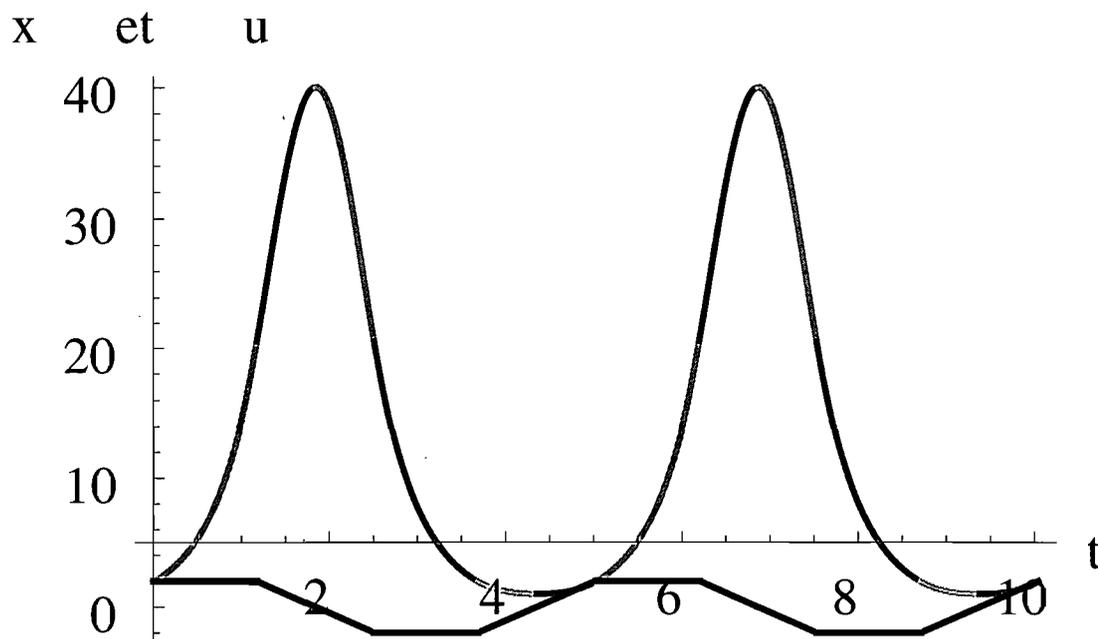


FIG. 2.6. Évolution de la population $x(t)$ lorsque soumise aux contrôles $u(t)$. Chaque changement de couleur correspond à un changement dans le contrôle $u(t)$ qui est représenté en noir dans le graphique.

2.3. RESSOURCES NATURELLES

Le fait que des ressources soient renouvelables implique que le stock de ces ressources croît s'il est laissé à lui-même. Il est alors possible d'utiliser des rétroactions similaires à celles qui étaient utilisées dans les problèmes de dynamique de population pour décrire l'accroissement des ressources.

Par ailleurs, les ressources sont aussi exploitées suivant les besoins de l'industrie. Si l'industrie a un regard à court terme, elle peut choisir de consommer l'ensemble des ressources disponibles dès maintenant. Si l'industrie a une vision à moyen long terme, elle va plutôt essayer d'optimiser sa consommation sur le temps pour que son profit soit maintenu d'une période à l'autre et que la ressource reste disponible. C'est sous ce regard, qui par ailleurs est l'une des hypothèses majeures posées en économie, que la théorie de la viabilité va contribuer au problème d'allocation des ressources renouvelables ; en cherchant à maintenir autant l'industrie et la ressource dans des zones viables.

Voici un système (*) qui décrit ce genre de problème :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(u(x(t)) - v(t)) \\ v(t) \in \mathbb{V}(x(t)) \\ x(0) = x, v(0) = v \end{cases}$$

Avec $x(t)$ qui représente l'évolution de la ressource, $u(x(t))$ la croissance de celle-ci et $v(t)$ l'activité économique.

Soit $\mathbb{Q}(x, v)$ l'ensemble des solutions au système (*). Nous pouvons calculer une fonction d'inertie $\mathbb{B}_u(x, v)$ qui représente le noyau de viabilité de l'ensemble des solutions possibles au système. (*).

$$\mathbb{B}_u(x, v) = \inf_{x(\cdot) \in \mathbb{Q}(x, v)} \sup_{t > 0} |v'(t)|$$

Cela est équivalent à écrire que nous voulons la solution qui permet d'avoir un rendement économique le plus élevé et le plus stable possible. Donc, parmi toutes les évolutions possibles, nous choisissons celle dont la vitesse de changement du choix économique est la plus petite possible. Pour calculer la fonction d'inertie, nous utilisons en général l'algorithme du noyau de viabilité. Nous présenterons ici un exemple simple pour lequel il est possible de calculer la fonction d'inertie sans avoir recours à l'algorithme en question.

Reprenons tout d'abord le système (*) et précisons des conditions sur $\mathbb{V}(x(t))$ pour être en mesure de calculer le noyau de viabilité.

Soit le système (**):

$$\begin{cases} x'(t) = (u(x(t)) - v(t))x(t) \\ v'(t) = w(t) \\ y'(t) = 0 \text{ avec } |w(t)| < y(t) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x'(t) = (u(x(t)) - v(t))x(t) \\ v'(t) \text{ plus petit qu'une constante} \end{cases}$$

2.3.1. Calcul de la fonction d'inertie

Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = (u - v(t))x(t) \\ -y < v'(t) < y \\ \text{Avec } x(0) = x \text{ et } v(0) = v \end{cases}$$

La résolution de celui-ci nous donne les deux résultats suivants :

$$v - yt \leq v(t) \leq v + yt$$

Donc

$$x(t) = e^{ut - \int_0^t v(\tau) d\tau}$$

si et seulement si

$$xe^{ut - (vt - \frac{yt^2}{2})} \leq x(t) \leq xe^{ut - (vt + \frac{yt^2}{2})}$$

si et seulement si

$$xe^{(u-v)t + \frac{yt^2}{2}} \leq x(t) \leq xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}}.$$

À priori, sans faire de calculs, nous savons que $x(t)$, l'évolution de la ressource, est toujours plus grande ou égale à 0. En effet, la ressource ne peut pas prendre des valeurs négatives. Donc, l'inégalité peut se réécrire comme suit :

$$0 \leq x(t) \leq xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}}$$

Posons $A(t) = xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}}$. Vérifions pour quelles valeurs de t , $A(t)$ atteint une valeur maximale. Cette valeur obtenue, nous aurons trouvé le suprémum sur les t de $x(t)$, qu'il est nécessaire de connaître pour trouver la fonction d'inertie.

Nous avons que

$$\frac{dA}{dt} = xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}} [(u-v) - yt] = 0$$

si et seulement si

$$t = \frac{u-v}{y}.$$

De plus,

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -yxe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}} + xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}} [u-v-yt]^2 = xe^{(u-v)t - \frac{yt^2}{2}} [-y + (u-v-yt)^2].$$

Donc

$$\frac{d^2 A\left(\frac{u-v}{y}\right)}{dt^2} = x e^{(u-v)\frac{u-v}{y} - \frac{y\left(\frac{u-v}{y}\right)^2}{2}} \left[-y + \left(u - v - y\frac{u-v}{y}\right)^2\right] = -y x e^{\frac{(u-v)^2}{2y}}.$$

D'où $A(t)$ est un max au temps $t = \frac{u-v}{y}$ si et seulement si $y < 0$. Nous ne considérons ici que le cas où $v < u$. Ce choix est logique, puisqu'il consiste à garder la croissance de la ressource plus grande ou égale à la croissance de l'activité économique dépendant de cette ressource. Sans cette condition, il y aurait invariablement extinction de la ressource.

Donc

$$A\left(\frac{u-v}{y}\right) = x e^{\frac{(u-v)^2}{2y}} = a$$

où a est une constante, est la valeur maximale que peut prendre l'évolution $x(t)$ pour maintenir les propriétés de viabilité sur l'exploitation de la ressource renouvelable. La fonction d'inertie correspond à la borne $y(t)$ que l'on impose à $v'(t)$, c'est-à-dire, la vitesse d'exploitation maximale que nous permettons pour permettre de maintenir dans le temps les revenus de l'industrie. Nous pouvons maintenant expliciter ce que vaut $y(t)$ en l'isolant dans l'expression $A\left(\frac{u-v}{y}\right) = a$. Nous trouvons ainsi que

$$y = \mathbb{B}_u(x, v) = \frac{(u-v)^2}{2 \ln \frac{a}{x}}$$

la fonction d'inertie sous condition que l'exploitation est plus petite ou égale à la croissance de la ressource. Il peut apparaître curieux pour un lecteur attentif que la fonction d'inertie dépend de deux constantes x et v plutôt que de variables indépendantes comme il est souvent le cas pour les fonctions. Il lui faut donc se rappeler que ce qui nous intéresse est l'ensemble des conditions initiales permettant de préserver les propriétés voulues. Donc, la fonction d'inertie est une fonction dont les variables consistent en un choix de plusieurs conditions initiales.

2.3.2. Rétroactions inertes

Une évolution est dite inerte si en un certain laps de temps $v(t) = v \pm yt$ et $v'(t) = y$. C'est-à-dire, la fonction décrivant l'exploitation de la ressource est affine et donc la vitesse d'exploitation est constante. Lorsqu'une évolution est

inerte, la fonction d'inertie reste constante tant que l'évolution est viable.

D'où

$$\mathbb{B}_u(x, v) = c$$

où c est une constante.

2.3.2.1. Cas où $v > u$

Donc, l'activité économique est plus importante que la croissance de la ressource utilisée. La quantité de ressources décroît.

Par définition, nous aurons

$$v'(t) = -\mathbb{B}_u(x, v) = -c$$

Donc

$$v(t) = -ct + v = -\mathbb{B}_u(x, v)t + v = v - \frac{(v-u)^2}{2 \ln\left(\frac{x}{a}\right)} t.$$

Puisque

$$x'(t) = (u - v(t))x(t),$$

nous obtenons alors que

$$\ln(x) = d + ut - \int v(t)dt$$

où d est une constante.

Donc

$$x(t) = x e^{ut - \int (v - \frac{(v-u)^2}{2 \ln\left(\frac{x}{a}\right)} t) dt} = x e^{(u-v)t + \frac{(v-u)^2 t^2}{4 \ln\left(\frac{x}{a}\right)}}.$$

Calculons maintenant, en quel temps t^* , nous atteindrons la borne inférieure $x(t^*) = a$ représentant la quantité critique d'exploitation de la ressource pour la maintenir dans un intervalle viable (dans notre exemple, être élément de l'intervalle $[a, b]$).

Nous avons que

$$x(t) = a = x e^{(u-v)t + \frac{(v-u)^2 t^2}{4 \ln\left(\frac{x}{a}\right)}}$$

si et seulement si

$$0 = \frac{(v-u)^2}{4 \ln\left(\frac{x}{a}\right)} t^2 + (u-v)t + \ln\left(\frac{x}{a}\right).$$

Nous trouvons que

$$t = \frac{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}{v - u}$$

Donc au temps $t = \frac{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}{v - u}$ l'exploitation de la ressource renouvelable à travers l'activité économique devra être modifiée sous peine de retrouver cette dernière en état de crise, c'est-à-dire, en état de déclin, voire d'extinction.

Ayant calculé le comportement de l'évolution inerte jusqu'au point critique $x(t) = a$, il est possible de trouver la rétroaction inerte $\tilde{v}(x(t))$ qui gouverne l'évolution au temps $t = \frac{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}{v - u}$.

Nous avons trouvé

$$x(t) = x e^{-(v-u)t + \frac{(v-u)^2}{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} t^2}$$

et

$$v(t) = v - \frac{(v - u)^2}{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} t$$

Nous aimerions maintenant exprimer le contrôle en fonction de l'évolution $x(t)$, car en général, nous désirons travailler seulement avec l'évolution, sans se soucier de la durée de l'évolution. Nous appellerons $\tilde{v}(x(t))$ la rétroaction qui exprime v en fonction uniquement de x . Aussitôt que nous parvenons à trouver un $\tilde{v}(x)$ qui permet d'obtenir la même solution que le problème original à des constantes près, nous aurons une rétroaction acceptable.

Reprenons le problème de départ

$$x'(t) = x(t)(u - v(t))$$

avec $v \in \mathbb{V}(x)$

Mais remplaçons $v(t)$ par

$$\tilde{v}(x) = u + \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)}$$

Nous obtenons :

$$x'(t) = x(t) \left(u - \left(u + \sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} \right) \right) = -x(t) \left(\sqrt{2 \ln \left(\frac{x}{a} \right)} \right).$$

Si nous résolvons la dernière équation nous obtenons que

$$x(t) = a e^{\left(\frac{t^2}{2} - \frac{td}{\sqrt{2}} + \frac{d^2}{4} \right)}$$

avec d une constante.

Nous remarquons alors que le résultat pour $x(t)$ est similaire à des constantes près à ce que nous avons décrit en utilisant $v(t)$. Donc la rétroaction que nous avons trouvée appelée $\tilde{v}(x)$ est appropriée.

2.3.2.2. Cas où $u = v$

Le système devient :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ v'(t) < c \text{ où } c \text{ est une constante} \end{cases}$$

La solution devient triviale. Le système reste toujours viable, car le taux de croissance de la ressource est égal au taux d'utilisation de la ressource.

2.3.2.3. Cas où $v < u$

La solution au problème est un cas symétrique au cas où $v > u$. En effet, la vitesse de v sera égale à $+c$, plutôt que $-c$ et nous atteindrons la borne supérieure $x(t) = b$ en un temps fini. C'est-à-dire qu'étant donné la faible activité économique par rapport à la croissance de la ressource renouvelable, maintenir à $+c$, la vitesse d'exploitation ne serait pas une solution viable pour l'industrie.

2.3.2.4. Conclusion

Lorsque nous réussissons à trouver explicitement la fonction d'inertie bornant l'activité économique, le problème d'optimisation à priori fort complexe devient un problème simplement résoluble. La théorie de la viabilité permet donc, non seulement de trouver une réponse satisfaisante à un problème d'optimisation avec deux variables; le contrôle $v(t)$ qui consiste en l'exploitation de la ressource et l'évolution de la ressource $u'(t)$ qui est indépendante de tout effort humain, mais aussi de pouvoir réajuster le contrôle en fonction des aléas imposés par la nature. Ces imprévus sont couramment appelés tyches dans la littérature de la théorie de la viabilité en référence à la déesse grecque de la chance Tyche qui, par des

sauts d'humeur inexplicables à l'entendement de l'homme, procurait chance ou malchance aux êtres humains.

2.3.3. Rétroactions lourdes

Nous désirons maintenant résoudre le même problème en minimisant la vitesse du régulon à chaque instant et en évitant les changements radicaux de vitesse et de direction. Pour ce faire, la vitesse maximale c du régulon sera bornée comme suit : $c > \mathbb{B}_u(x, v)$. Ce choix nous permettra d'éviter ainsi l'atteinte de vitesse infinie car si nous permettons $\mathbb{B}_u(x, v) = \infty$, il serait alors impossible de trouver un choix de c convenable. Nous essaierons de maintenir le plus possible les régulons constants. La seule exception se produirait lorsque par la suite, cette décision nous amènerait à sortir de l'ensemble de viabilité. Alors, au moment opportun, un changement tranquille se ferait jusqu'au moment où il serait de nouveau possible de garder le régulon constant.

Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = (u - v(t))x(t) \\ v'(t) = w(t) \\ y'(t) = 0 \text{ où } |w'(t)| \leq y(t) \end{cases}$$

Initialement, nous utilisons $v(t) = v$, un régulon constant.

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = (u - v)x(t)$$

si et seulement si

$$\ln x = (u - v)t + d$$

où d est une constante.

Donc

$$x(t) = xe^{(u-v)t}.$$

Nous aimerions garder constant le régulon $v(t) = v$ jusqu'au moment t^* où $x(t) = a$, soit jusqu'au moment où l'évolution atteint la frontière.

Nous avons

$$x(t) = a = xe^{(u-v)t}$$

si et seulement si

$$t^* = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{v-u}.$$

Par contre au temps t^* , nous serions obligés de faire un changement de vélocité infini pour maintenir la viabilité. Car lorsque t est élément de l'intervalle $[0, \frac{\ln(\frac{x}{a})}{v-u}]$ la fonction d'inertie $\mathbb{B}_u(x, v)$ devient

$$\mathbb{B}_u(x(t), v) = \mathbb{B}_u(xe^{(u-v)t}, v) = \frac{(v-u)^2}{2[\ln\left(\frac{x(t)}{a}\right) + (u-v)t]}.$$

La fonction de vélocité $\mathbb{B}_u(x, v)$ atteint sa vitesse limite pour éviter les changements infinis au temps

$$t^{**} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{v-u} - \frac{v-u}{2c}$$

car c'est à ce temps que la fonction d'inertie atteint sa borne, soit

$$\mathbb{B}_u(x(t^{**}), v) = c.$$

C'est pour cette raison que le changement de régulon se fait plutôt lorsque l'évolution atteint

$$x(t^{**}) = xe^{(u-v)\left[\frac{\ln(\frac{x}{a})}{v-u} - \frac{v-u}{2c}\right]} = ae^{\frac{(v-u)^2}{2c}}.$$

Nous changeons maintenant le régulon constant pour un régulon linéaire

$$v(t) = v - c \left(t - \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{v-u}{2c} \right).$$

Nous pouvons trouver comment la population évolue en résolvant le système :

$$x'(t) = x(t)(u - v(t)) = x(t) \left(u - v - c \left(t - \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{v-u}{2c} \right) \right).$$

Donc

$$x(t) = de^{\left((u-v + \frac{c \ln(\frac{x}{a})}{v-u} + \frac{v-u}{2c})t - \frac{ct^2}{2} \right)}.$$

Nous cherchons maintenant les rétroactions qui donneraient des résultats similaires et qui permettraient d'exprimer le contrôle en fonction seulement de l'évolution $x(t)$. Nous appellerons cette rétroaction $\tilde{v}(x)$ et elle sera défini en deux parties. La première sera la rétroaction lorsque le régulon est constant et la seconde sera la rétroaction lorsque le régulon est linéaire.

Lorsque le régulon est constant, c'est-à-dire, lorsque t est plus petit ou égal à $\frac{\ln(\frac{x}{a})}{v-u}$, nous pouvons poser $\tilde{v}(x) = v$. Si nous reprenons le système de départ, nous avons que

$$x'(t) = x(t)(u - v).$$

Si nous résolvons le système nous obtenons que

$$x(t) = ke^{(u-v)t}$$

avec k une constante. Nous remarquons alors que nous avons déjà trouvé que le système, dans cet intervalle, régissait la population de manière à ce qu'elle évolue suivant cette équation précise. Nous avons donc la rétroaction dont nous avons besoin pour cet intervalle.

Reprenons les mêmes calculs pour t plus grand que $\frac{\ln(\frac{x}{a})}{v-u}$. Posons alors

$$\tilde{v}(x) = u + \sqrt{2c \ln\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Si nous reprenons le système de départ, nous avons que

$$x'(t) = x(t)(u - (u + \sqrt{2c \ln\left(\frac{x}{a}\right)})) = -x(t)\sqrt{2c \ln\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Si nous résolvons le système, nous trouvons que

$$x(t) = ae^{\left(\frac{ct^2}{2} - \frac{\sqrt{c}dt}{\sqrt{2}} + \frac{d^2}{4}\right)} = we^{\left(\frac{ct^2}{2} - \frac{\sqrt{c}dt}{\sqrt{2}}\right)}$$

qui, aux constantes près, correspond à l'équation déjà trouvée qui gouvernait la population dans cet intervalle.

Nous avons donc réussi à trouver des rétroactions permettant d'exprimer le contrôle en fonction exclusivement de l'évolution de la population.

2.4. CHANGEMENT GLOBAL DE CLIMAT

Il y a beaucoup d'enjeux politiques entourant la question du changement global de climat. Notamment, une des grandes questions consiste à déterminer la quantité de gaz à effet de serre (par exemple le gaz carbonique) qu'il est optimal de produire pour maintenir (rendre) la planète en santé et conserver une efficacité économique. Cette question d'allure simple se complique fortement lorsqu'elle est regardée sous le jour de l'équité intergénérationnelle. De plus, selon les politiques

du gouvernement en instance, à savoir s'il est plus ou moins pro-environnemental, les choix optimaux, s'ils en existent, ne seront pas les mêmes.

La théorie de la viabilité produit un algorithme qui permet de déterminer un noyau de viabilité, soit l'ensemble des solutions qui préservent la propriété voulue, qui permet ainsi au politicien de choisir une solution optimale en fonction de ses valeurs. Le noyau de viabilité se calcule à partir de la fonction d'inertie qui correspond à la courbe de transition entre le taux de pollution et le revenu.

Soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \in [0, b] : \text{ la concentration de gaz carbonique avec } x(t) \leq b \\ u(t) : \text{ le taux de pollution à court terme sur lequel nous avons un contrôle} \\ a : \text{ le taux d'absorption naturelle du gaz carbonique dans la nature} \\ \text{(a est relativement petit)} \end{array} \right.$$

2.4.1. Calcul de la fonction d'inertie

Soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = u(t) - ax(t) \\ |u'(t)| \leq y \\ \text{avec } x(0) = x_0, u(0) = u_0, x(t) \in [0, b] \end{array} \right.$$

Nous avons

$$-yt + u_0 \leq u(t) \leq yt + u_0$$

si et seulement si

$$-yt + u_0 - ax(t) \leq x'(t) \leq yt + u_0 - ax(t)$$

si et seulement si

$$0 \leq x(t) \leq \frac{e^{-at}}{a^2} [a(-u_0 + ax_0) + y] + \frac{-y + a(u_0 + ty)}{a^2}.$$

Appelons $B(t)$ l'expression de droite de la ligne précédente.

Nous trouvons que

$$B'(t) = \frac{y - e^{-at}(a(-u_0 + ax_0) + y)}{a} = 0$$

si et seulement si

$$\ln \left(\frac{y}{a(-u_0 + ax_0 + y)} \right) = -at$$

si et seulement si

$$\frac{\ln \left(\frac{a(-u_0 + ax_0)}{y} + 1 \right)}{a} = t^*.$$

De plus,

$$B''(t) = e^{-at}(a(-u_0 + ax_0) + y).$$

Évaluons $B''(t)$ au point t^* pour trouver le maximum de la fonction $B(t)$ à l'aide du test de la dérivée seconde.

$$B''(t^*) = e^{-\ln \left(\frac{a(-u_0 + ax_0 + y)}{y} \right)} [a(-u_0 + ax_0) + y] = y.$$

Donc si y est négatif, alors $B(t^*)$ est un maximum.

D'où

$$0 \leq x(t) \leq B(t^*).$$

Posons $B(t^*) = b$.

Nous avons que

$$B(t^*) = \frac{u_0}{a} + \frac{y}{a^2} \ln \left(\frac{a(-u_0 + ax_0)}{y} + 1 \right) = b$$

si et seulement si

$$a(ax_0 - u_0) = y(e^{\frac{a}{y}(ab - u_0)} - 1).$$

Nous ne pouvons pas isoler y , la fonction d'inertie. Par contre, la solution implicite à l'équation correspond à la fonction d'inertie. Pour obtenir ce résultat, il faudrait utiliser l'algorithme du noyau de viabilité tel que défini par Saint-Pierre. Malheureusement, nous n'avons pas accès à cette information pour terminer le calcul de la fonction d'inertie.

2.4.2. Conclusion

L'absence d'une fonction d'inertie explicite nous empêche de calculer, comme dans les problèmes précédents, les rétroactions inertes ou lourdes qu'il faudrait appliquer pour contrôler la population. Dans la réalité, il est possible à l'aide de méthodes numériques et de la fonction d'inertie implicite d'obtenir une approximation des rétroactions inertes ou lourdes recherchées.

Chapitre 3

ANALOGIE ENTRE LES PROBLÈMES DISCRETS ET LES PROBLÈMES CONTINUS

“La comparaison est une espèce de conjecture.”

Carnets tome 1 , Citations de Joseph Joubert

Nous avons jusqu’à présent travaillé avec des problèmes continus. Nous pouvons aussi travailler avec des systèmes discrets en séparant le temps en petits intervalles.

Nous pouvons définir deux sortes de problèmes ; ceux approchant le cas continu par discrétisation et ceux qui sont analogues au cas continu. Définissons-les :

– Approximation du cas continu par discrétisation

du quotient différentiel

Plutôt que de considérer une fonction continue dans un espace de fonctions continues \mathbb{R}^d , imaginons plutôt que l’espace est quadrillé. L’espace séparant chacune des lignes est de distance h .

Remplaçons maintenant l’équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ avec } u(t) \text{ élément de } \mathbb{U}(x(t))$$

par une approximation discrète de la dérivée. Une approximation discrète de $x'(t)$ serait $\frac{x_{i+1}-x_i}{h}$. Cette approximation est valide si h est suffisamment petit, car elle correspond à la définition même de la dérivée. Par contre, nous ne pouvons pas simplement remplacer $x'(t)$ dans l’expression, car nous

serions confrontés à un problème. Il peut arriver qu'en utilisant x_j nous trouvons un x_{j+1} qui ne soit pas dans l'ensemble des points éléments du quadrillage. Pour contourner cette difficulté, nous allons prendre une boule de rayon ρ centrée au x_j que nous avons trouvé et telle qu'il est possible de prendre un nouveau x_{j+1} élément du quadrillage qui soit assurément situé dans cette boule. La boule sera notée : B_ρ . La figure 3.1 donne un exemple de situation où la boule B_ρ doit être utilisée.

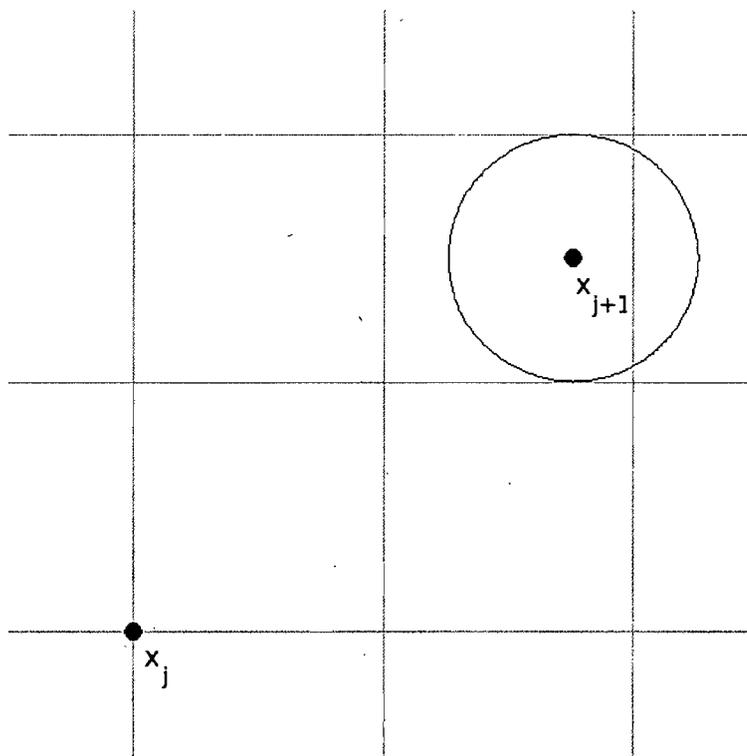


FIG. 3.1. Nous nous apercevons que le point x_{j+1} n'est pas élément du maillage à priori. D'où la nécessité de la boule B_ρ

Donc, nous obtenons que $\frac{x_{j+1}-x_j}{h} \in f(x_j, u_j) + B_\rho$

Les termes à gauche du symbole " \in " dépendent du temps $j + 1$ et le temps à droite du symbole " \in " dépendent du temps j . Nous sommes parvenus à reformuler le problème de manière à exprimer le temps futur en fonction du temps passé.

Posons $x_{j+1} = \Phi_{h,\rho}(x)$ et $x_j = x$. Avec ce que nous avons déduit, une bonne approximation serait :

$$\Phi_{h,\rho}(x) = x + hf(x, \mathbb{U}(x)) + B_p$$

Cette approximation du cas continu par l'utilisation de la définition de la dérivée et la discrétisation de l'espace est nécessaire en analyse numérique à des fins de calculs.

– Système analogue au cas continu

Un système analogue au cas continu consiste à utiliser la formule de l'équation différentielle continue comme application pour le système discret. Nous posons alors

$$x_{j+1} = \phi(x_j, u_j) \text{ avec } u_j \text{ élément de } \mathbb{U}(x_j)$$

et nous utilisons comme fonction $\phi(x_j, u_j)$ la même fonction $f(x(t), u(x(t)))$ que dans le cas continu où nous avons $x'(t) = f(x(t), u(x(t)))$. Autrement dit, nous considérons le système

$$x_{j+1} = f(x_j, u(x_j))$$

Le système devient dynamique en réitérant la fonction ϕ . Nous choisissons une condition de départ x_{j_0} à laquelle nous appliquons ϕ . Nous utilisons $\phi(x_{j_0})$ comme nouvelle condition de départ et recommençons le processus. Les évolutions sont donc discrètes car elles avancent par saut. Elles sont définies de façon analogue aux évolutions des systèmes continus puisqu'elles utilisent la même fonction d'évolution; toutefois, elles peuvent avoir des comportements complètement différents du cas continu. C'est ce qui sera montré dans l'exemple 2. Pertinents à cet exemple, voici quelques définitions, un théorème, ainsi qu'un autre exemple.

3.0.3. Définitions et théorème

3.0.3.1. Définitions

Ensemble parfait : Un ensemble est dit parfait s'il est fermé et sans point isolé. En d'autres mots, chacun des points de l'ensemble fermé doit être la limite d'autres points de l'ensemble.

Ensemble totalement disconnexe : Un ensemble est dit totalement disconnexe s'il ne contient pas d'ouvert non-trivial.

Ensemble de Cantor : Un ensemble de Cantor est un ensemble non vide, totalement disconnexe, parfait et compact.

Correspondance disconnexe : Une correspondance Φ est dite disconnexe sur un ensemble K s'il existe un nombre fini p de fonctions $\alpha_i : K \mapsto X$ tel que $\forall x \in K$, la correspondance inverse Φ est définie comme :

$$\Phi^{-1}(x) := \bigcup_{i=1}^p \alpha_i(x)$$

et est telle qu'il existe des constantes $\lambda_i \in]0, 1[$ satisfaisant pour tous les sous-espace $C \subset K$ les trois propriétés suivantes :

- i) $\forall i = 1, \dots, p, \alpha_i(C) \subset C$. En d'autres mots, la fonction α_i est antiextensive.
- ii) $\forall i \neq j, \alpha_i(C) \cap \alpha_j(C) = \emptyset$. C'est-à-dire, l'intersection du domaine des fonctions α_i est nulle ou encore les fonctions α_i sont disjointes.
- iii) $\forall i = 1, \dots, p, \text{diam}(\alpha_i(C)) \leq \lambda_i \text{diam}(C)$. Donc, nous avons la propriété de contraction.

3.0.3.2. Théorème 1

Théorème des ensembles de Cantor : Le noyau de viabilité d'un ensemble compact sous une application discrète est un ensemble de Cantor non dénombrable tel que défini ci-dessus.

3.0.4. Exemple 1

3.0.4.1. L'ensemble triadique de Cantor comme noyau de viabilité

Plutôt que d'appliquer le théorème précédent, nous allons illustrer directement que l'ensemble de Cantor peut être considéré comme le noyau de viabilité d'un système approprié.

Soit

$$\phi(x) := (3x, 3(1-x))$$

la correspondance associant à $x \in [0, 1]$, le couple $(3x, 1 - 3x)$.

Les évolutions à partir de cette fonction discrète sont déterminées à partir d'une valeur initiale x de laquelle nous calculons la valeur de $\phi(x)$ que nous utilisons ensuite comme nouvelle valeur initiale pour réitérer le processus.

Nous aimerions définir l'ensemble de viabilité comme étant l'ensemble des conditions initiales telles que quel que soit le nombre d'itérations, les évolutions sont toujours comprises dans l'intervalle $[0, 1]$. Il s'agit en fait, de l'ensemble des conditions initiales $x = x_0$ tels que $\phi(x_k)$ est élément de $[0, 1]$ pour tous les k plus grands ou égaux à 1.

Définissons comme $\Phi(x)$, la fonction équivalente à la correspondance, mais dont l'image est contenue par l'intervalle $[0, 1]$.

$$\Phi(x) := \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \emptyset & \text{si } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ \phi(x) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

La correspondance inverse sera : $\Phi^{-1}(x) := (\frac{x}{3}, 1 - \frac{x}{3})$ avec x compris entre zéro et un.

Analysons l'image après différentes itérations dans le but de déduire le noyau de viabilité.

– 1 itération

Après une itération, nous trouvons que nous devons exclure du noyau de viabilité l'ensemble des conditions initiales x auxquelles la fonction $\Phi(x)$

associe l'ensemble vide. En d'autres, mots, l'ensemble des conditions initiales telles que la fonction $\Phi(x)$ voit son domaine borné entre zéro et un serait l'ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité. Explicitement, les points candidats pour la prochaine itération sont dans les intervalles

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ou encore dans les intervalles

$$\left[0, 1\right] \setminus \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[.$$

Le graphique 3.2 montre les points candidats après une itération pour être compris dans le noyau de viabilité.

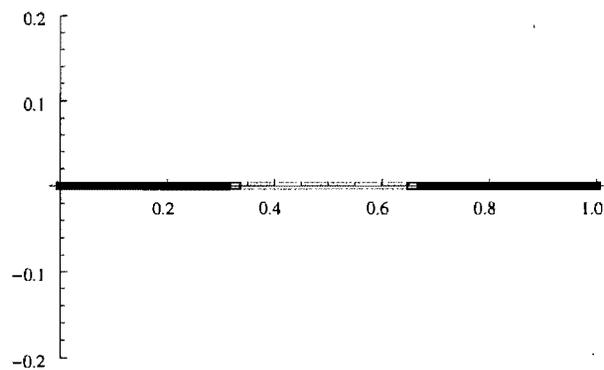


FIG. 3.2. Les points candidats au noyau de viabilité après une itération consistent en l'union des sections noires.

– 2 itérations

Après deux itérations, il faut s'assurer que les valeurs de la fonction inverse $\Phi^{-1}(x)$ ne seront pas dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ qui sort après une itération de l'intervalle $[0, 1]$. Pour ce faire, nous devons calculer ce que vaut $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ et ce que vaut $\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

Donc, nous avons trouvé que les conditions initiales éléments des ensembles $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ et $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ sortent après deux itérations de l'ensemble $[0, 1]$. Notre noyau de viabilité exclura donc aussi ces ensembles.

Après deux itérations, nous avons que les points candidats pour faire partie du noyau de viabilité se retrouvent dans les intervalles suivants :

$$[0, 1] \setminus \{] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} [\cup] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [\cup] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} [\}$$

ou encore dans les intervalles

$$[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Le graphique 3.3 montre les points candidats après deux itérations pour être élément du noyau de viabilité.

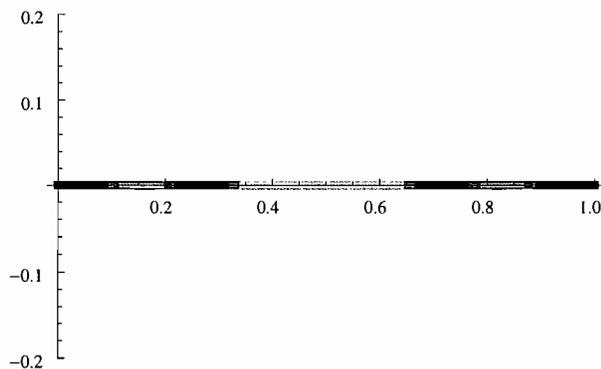


FIG. 3.3. Les points candidats au noyau de viabilité après deux itérations consistent en l'union des sections noires.

– 3 itérations

Pour connaître les intervalles à exclure du noyau de viabilité après trois itérations, il faut tout simplement refaire le même processus que pour trouver les points à exclure du noyau de viabilité après deux itérations. C'est-à-dire, il faut trouver l'ensemble des conditions initiales telles que la fonction inverse de $\Phi(x)$ se retrouve dans un intervalle non viable après deux itérations.

Calculons les fonctions inverses aux frontières des intervalles non viables.

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{27}; \frac{26}{27}\right)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{2}{27}; \frac{25}{27}\right)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) = \left(\frac{7}{27}; \frac{20}{27}\right)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{8}{27}; \frac{19}{27}\right)$$

Nous venons de déterminer quatre nouveaux intervalles qui ne seront pas viables après 3 itérations : $] \frac{1}{27}, \frac{2}{27} [$, $] \frac{7}{27}, \frac{8}{27} [$, $] \frac{19}{27}, \frac{20}{27} [$, $] \frac{25}{27}, \frac{26}{27} [$.

Donc, les points candidats au noyau de viabilité après trois itérations seraient dans les intervalles suivants :

$$[0, 1] \setminus \left\{] \frac{1}{27}, \frac{2}{27} [\cup] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [\cup] \frac{7}{27}, \frac{8}{27} [\cup] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} [\cup] \frac{19}{27}, \frac{20}{27} [\cup] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} [\cup] \frac{25}{27}, \frac{26}{27} [\right\}.$$

L'écriture devient un peu lourde, la figure 3.4 donne un aperçu plus visuel de l'ensemble des points candidats pour être élément du noyau de viabilité de cet ensemble après trois itérations.

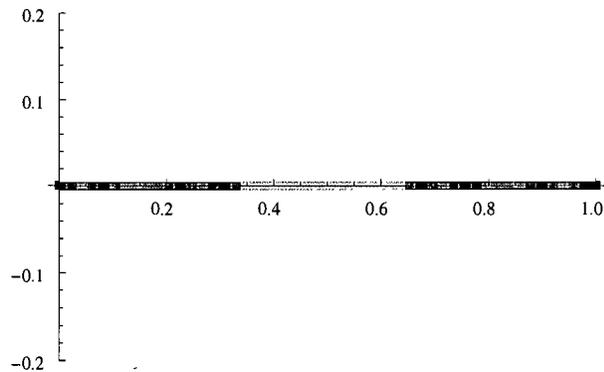


FIG. 3.4. Les points candidats au noyau de viabilité après trois itérations consistent en l'union des sections noires.

– 4 itérations

Nous nous apercevons très rapidement qu'après 4 itérations, nous obtenons 8 nouveaux ensembles qui devraient être exclus du noyau de viabilité.

– ∞ itérations

Nous nous apercevons donc que nous sommes en processus de construction de l'ensemble triadique de Cantor. Cet ensemble est construit géométriquement en coupant un sous-espace en trois segments égaux et en retirant la partie centrale pour ensuite sectionner en trois parties égales les sections restantes et retirer les parties centrales et continuer ainsi le processus à l'infini. Nous obtenons ainsi un ensemble non dénombrable de mesure nulle donnant exactement le même résultat que le célèbre ensemble triadique de Cantor.

Formellement, l'ensemble triadique de Cantor se définit comme l'ensemble des points x éléments de l'intervalle $[0, 1]$ dont le développement est de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

avec a_i élément de l'ensemble $\{0, 2\}$.

Donc, après une infinité d'itérations où nous aurions enlevé exactement tous les ensembles ouverts proposés, les seuls points restants (des ensembles fermés) seraient ceux éléments de l'ensemble de Cantor tel que défini ci-dessus.

3.0.4.2. *Conclusion partielle*

L'exemple 1 nous a permis de bien montrer qu'à partir d'une application disconnexe, le noyau de viabilité de l'application sera de la forme d'un ensemble de Cantor. De plus, le choix particulier de l'application nous a permis d'obtenir l'ensemble triadique de Cantor tel que Cantor l'avait lui-même défini. En effet, la définition d'ensemble de Cantor formulée par la théorie de la viabilité donne un sens plus large à ce type d'ensemble, mais permet quand même de retrouver les ensembles définis couramment par ailleurs comme étant Cantor.

De plus, nous percevons la force du théorème qui permet de résoudre d'une manière innovatrice un problème discret dynamique.

3.0.5. Exemple 2

3.0.5.1. *Le problème continu*

Prenons comme exemple le système logistique discret vu par la théorie de la viabilité. Le système continu logistique serait :

$$x'(t) = rx(t)(b - x(t)) \text{ avec } x(0) = a$$

Dans ce système r représente le taux de croissance d'une population, a la population initiale et b la capacité d'individus maximale, toutes choses demeurant égales par ailleurs, de la population. En résolvant le système, nous obtenons que

$$x(t) = \frac{be^{rt}}{-1 + \frac{b}{a} + e^{rt}}$$

Dès lors, la population évolue de manière à toujours être comprise dans l'intervalle $[a, b]$ en suivant une courbe en forme de "S" tel que défini dans le chapitre 2. La population débute en effet avec une quantité d'individus a et tend asymptotiquement vers la quantité d'individus b . D'où le fait que l'intervalle de viabilité de la population est tout simplement $[a, b]$. En effet, en dehors de cet intervalle, la population est assurément trop petite pour se reproduire suffisamment pour survivre ou trop grande pour se maintenir en vie étant donné les ressources disponibles. De plus, nous constatons que si la population initiale n'est pas a , mais bien n'importe quelle quantité comprise entre a et b , la population se maintiendra quand même dans cet intervalle.

3.0.5.2. *Introduction au problème discret analogue*

Considérons le système analogue discret :

$$x_{j+1} = rx_j(1 - x_j) = \phi(x_j)$$

Les itérations seront très différentes selon les valeurs de x_0 et de r . En effet, le système est très sensible aux conditions initiales. Nous montrerons diverses évolutions en fonction des valeurs de r et de x_0 . Pour faciliter la visualisation de ce système à une dimension nous projeterons les valeurs prises par la fonction ϕ sur la droite identité pour donner la nouvelle valeur de départ à la fonction

que nous réitérons alors. Dans les prochaines figures, la parabole représente la valeur x_{j+1} que prend la fonction en différentes valeurs de x_j . La droite identité est utilisée pour connaître la valeur de départ de la prochaine itération. Enfin, la ligne brisée représente l'évolution de la population à partir de la condition initiale choisie.

3.0.5.3. *Analyse du comportement de l'application logistique en fonction des valeurs prises par r*

Il est intéressant de remarquer que pour toute valeur de r nous aurons toujours trois points qui se comporteront toujours de la même manière. Nous avons deux points fixes qui apparaissent $x_0 = 0$ et $x_0 = \frac{r-1}{r}$ et le point $x_0 = 1$ qui après deux itérations rejoint toujours le point fixe $x_j = 0$. Voici pourquoi :

(1) $x_0 = 0$

Car $\phi(0) = 0$ et donc, peu importe le nombre d'itérations, l'évolution reste toujours au point $x_0 = 0$.

(2) $x_0 = \frac{r-1}{r}$

Car $\phi\left(\frac{r-1}{r}\right) = \frac{r(r-1)}{r}\left(1 - \frac{r-1}{r}\right) = \frac{r-1}{r}$ dès lors, peu importe le nombre d'itérations l'évolution reste toujours au point $x_0 = \frac{r-1}{r}$.

(3) $x_0 = 1$

Car $\phi(1) = 0$ et $\phi(0) = 0$ et donc après une itération, l'évolution reste pour toujours au point $x_0 = 0$.

Analysons maintenant le comportement des évolutions en fonction des différentes valeurs possibles de r .

- $r \in]0, 1]$

Si r est compris entre 0 et 1 alors pour toute valeur initiale, la fonction approchera asymptotiquement la condition initiale $x_0 = 0$. Un exemple est illustré à la figure 3.5. En effet, si on dérive la fonction $\phi(x_j)$ par rapport à x_j et que nous l'évaluons en x_j égale à 0, le premier point fixe, nous obtenons que la dérivée vaut r et que r est plus petit ou égal à 1. Nous avons donc que le point $x = 0$ est un point stable et que toutes les évolutions

partant des conditions initiales sur l'intervalle $[0, 1]$ différent du point fixe $\frac{r-1}{r}$ convergeront asymptotiquement vers ce point.

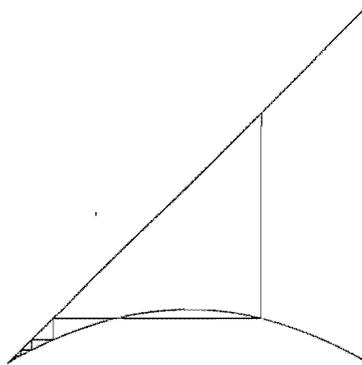


FIG. 3.5. Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,7$ et $r = 0,6$

– $r \in]1, 3[$

Si r est compris entre 1 et 3 alors pour toute valeur initiale, la fonction approchera asymptotiquement le point fixe $\frac{r-1}{r}$ indépendamment de la valeur initiale x_0 . La figure 3.6 illustre ce fait.

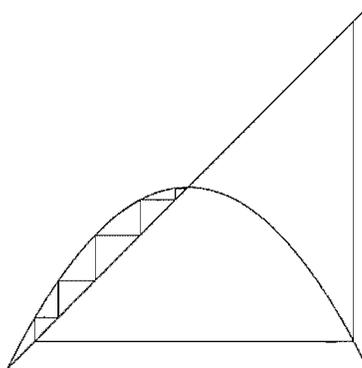


FIG. 3.6. Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 2$

Pour confirmer notre intuition que le point $\frac{r-1}{r}$ est stable sur cet intervalle, analysons la dérivée de la fonction $\phi(x_j)$ en cette valeur. Nous trouvons que $|\phi'(\frac{r-1}{r})| = |-r + 2|$, valeur qui sur cet intervalle est toujours plus petite que 1. Nous avons donc montré que $\frac{r-1}{r}$ est un point asymptotiquement stable.

Vérifions aussi que le point $x_0 = 0$ n'est plus un point asymptotiquement stable en utilisant le même test de la dérivée. La dérivée de $\phi(x_j)$ évaluée en $x_j = 0$ nous donne toujours r . Dans cet intervalle, r est toujours plus grand que 1. Donc le point est effectivement devenu instable.

– $r \geq 3$

Enfin si $r \geq 3$ alors de toute évidence, le test de la dérivée nous indique que le point $x_0 = 0$ est instable et que le point $x_0 = \frac{r-1}{r}$ est aussi instable. Donc, les évolutions commencent plutôt à montrer un comportement plus compliqué comme la figure 3.7 le montre.

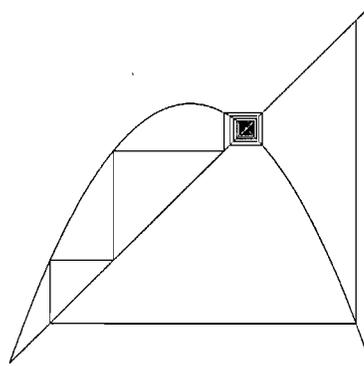


FIG. 3.7. Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 2,9$

En fait, si r est plus grand ou égale à $1 + \sqrt{6}$ le système devient chaotique. Les caractéristiques d'une évolution chaotique sont qu'elle possède une orbite bornée, non périodique et qui démontre une grande sensibilité aux conditions initiales. Ici, nous remarquons que les évolutions sont bornées dans l'intervalle $[0, 1]$. Il n'y a pas de périodes apparentes et l'exemple suivant démontre de la sensibilité aux conditions initiales puisqu'une différence de 0,00001 entraînent une grande variation après seulement 50 itérations des valeurs de la fonction $\phi(x_j)$

Dans la figure 3.8, l'évolution après 50 itérations prend comme valeur $x_0 = 0.329895$.

Dans la figure 3.9, l'évolution après 50 itérations prend la valeur $x_0 = 0.419537$. On constate que malgré une très faible différence de valeur entre les deux conditions initiales, nous avons des évolutions qui dévient fortement.

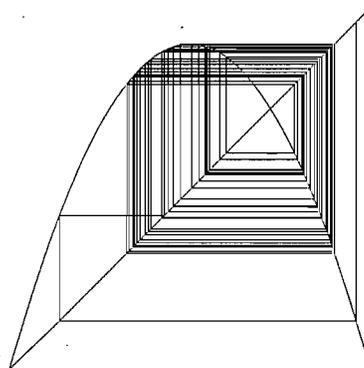


FIG. 3.8. Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96$ et $r = 3,6$

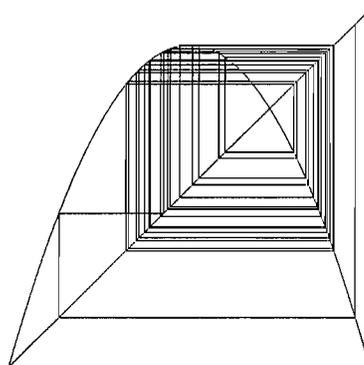


FIG. 3.9. Évolution de l'évolution lorsque la condition initiale est $x_0 = 0,96001$ et $r = 3,6$

Un diagramme de bifurcation, qui permet de bien mettre en évidence le comportement des évolutions d'une application logistique de Verhulst en fonction des diverses valeurs de r possible est présenté à la figure 3.10 ¹. La figure met en évidence que pour r plus petit que 3, les évolutions convergent vers le point fixe $\frac{r-1}{r}$. Par la suite, pour r plus grand que 3 les évolutions ne convergent asymptotiquement vers aucune valeur et deviennent chaotiques. Une autre caractéristique du chaos est d'ailleurs que les évolutions prennent des valeurs très différentes lorsqu'il y a de petites variations de valeur initiale. Ainsi, nous constatons que les évolutions recouvrent rapidement, d'une manière assez dense, l'intervalle $[0, 1]$.

¹Figure extraite de :

COLLECTIF, *Logistic map*, Wikipédia, l'encyclopédie libre en ligne, site modifié le 14 mai 2009.
http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map

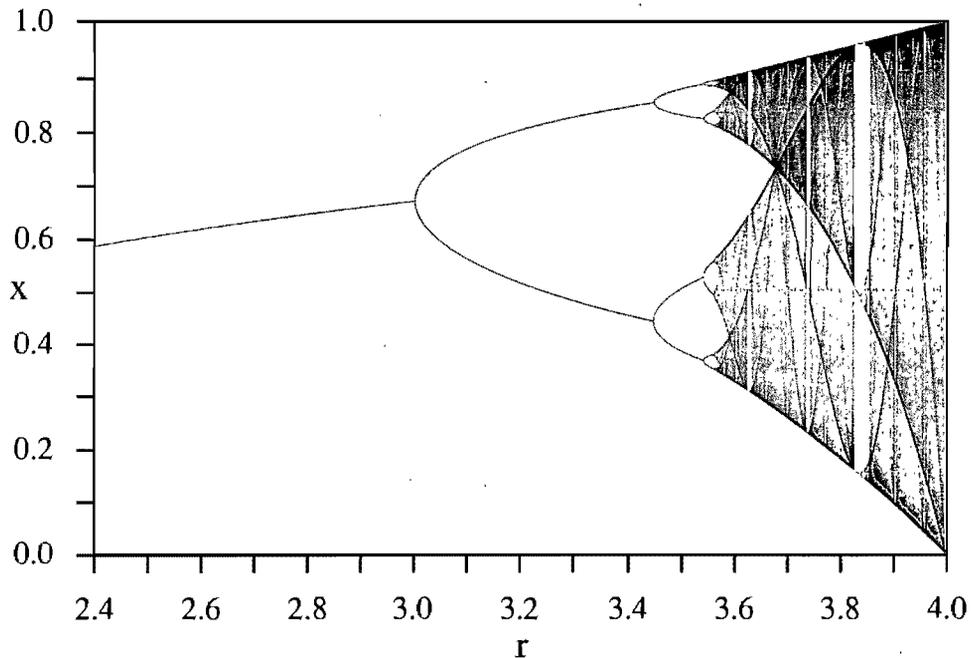


FIG. 3.10. Diagramme de bifurcation pour l'application logistique sur l'intervalle $[0, 1]$ en fonction de différentes valeurs de r .

3.0.5.4. Noyau de viabilité pour le cas discret

Revenons maintenant au problème qui nous intéresse concrètement, à savoir quel est l'ensemble de viabilité pour l'application logistique discrète. Nous allons définir l'ensemble de viabilité comme étant l'union des intervalles contenant des conditions initiales élément de l'intervalle $[0, 1]$ tel qu'après un quelconque nombre d'itérations de l'application, l'évolution de ces conditions est toujours dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous remarquons d'une part que si r est plus petit ou égal à 4, les valeurs que peuvent prendre l'application sont toujours élément de l'intervalle $[0, 1]$. Dès lors, l'intervalle complet $[0, 1]$ est le noyau de viabilité pour cet espace.

D'autre part, si r est plus grand que 4, les valeurs de l'application seront plus grandes que 1 sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right]$. Cet intervalle est déterminé en cherchant pour quelles valeurs de x_j la fonction $\phi(x_j)$ sera égale à 1. Donc, pour certaines conditions initiales, les évolutions sortiront en un temps fini de l'intervalle $[0, 1]$.

Analysons en détails le cas $r = 5$ qui est semblable à tous les cas pour lesquels r est plus grand que 4.

3.0.5.5. Exemple avec $r = 5$

Définissons premièrement la fonction Φ à partir de la fonction

$$\phi(x_j) = 5x_j(1 - x_j)$$

$$\Phi(x_j) = \begin{cases} \phi(x_j) & \text{si } x_j \in [0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}] \\ \emptyset & \text{si } x_j \in [\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}] \\ \phi(x_j) & \text{si } x_j \in [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}, 1] \end{cases}$$

La fonction $\Phi(x_j)$ est donc une application de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

Définissons maintenant une correspondance inverse pour la fonction $\Phi(x_j)$ notée $\Phi^{-1}(x_j)$.

$$\Phi^{-1}(x_j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25 - 20x_j}}{10}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25 - 20x_j}}{10} \right)$$

Il est à noter que puisqu'il s'agit d'une correspondance et non d'une fonction, les deux parenthèses n'indiquent pas un intervalle, mais bien les deux points que l'application inverse associe à chaque valeur de x_j .

Avec ces correspondances définies, cherchons l'ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité en lien avec le nombre d'itérations de la fonction ϕ .

– 1 itération

Il faut chercher l'ensemble des conditions initiales qui après une application de la fonction ϕ sont toujours dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons directement que l'ensemble des conditions initiales élément de $[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}]$ sort après une itération.

Notre ensemble de points candidats à être dans le noyau de viabilité après une itération est donc l'union des intervalles

$$\left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}, 1\right]$$

qui est représenté en noir de la figure 3.11.

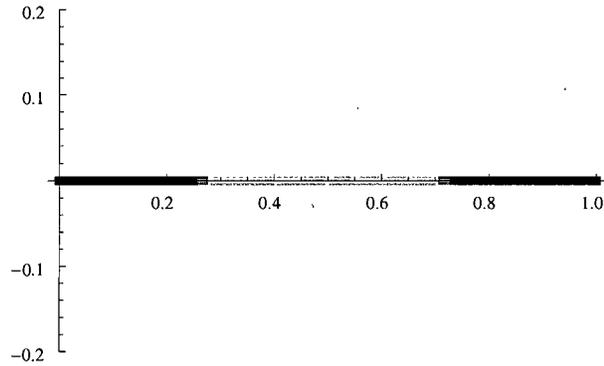


FIG. 3.11. L'ensemble des points candidats, après une itération, pour être élément du noyau de viabilité de l'application logistique est représenté en noir.

– 2 itérations

Il faut chercher l'ensemble des conditions initiales qui après deux applications de la fonction ϕ sont toujours dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous savons déjà que l'ensemble des conditions initiales élément de $[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}]$ sort après une itération. Il faut ajouter à cette ensemble les conditions initiales qui sortent après la deuxième itération. Une autre façon de formuler le problème consisterait à prendre les intervalles tels que l'image inverse est élément du complément de l'ensemble de viabilité après une itération. Calculons donc $\Phi^{-1}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10})$ et $\Phi^{-1}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})$:

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = (0, 0587276; 0, 941272)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = (0, 175533; 0, 824467)$$

Chacune de ces correspondances nous donne deux points délimitant ainsi deux intervalles. Le premier étant : $[0, 0587276, 0, 175533]$ et le second :

$[0, 824467, 0, 941272]$. Ces deux intervalles devront être exclus de l'ensemble de viabilité puisque toutes les conditions initiales éléments de ces deux ensembles sortent en deux itérations.

Notre ensemble de points candidats pour faire partie de l'ensemble de viabilité tel que déduit après deux itérations, est donc l'intervalle

$$[0, 0, 0587276] \cup [0, 175533, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}, 0, 824467] \cup [0, 941272, 1]$$

qui est représenté en noir dans la figure 3.12.

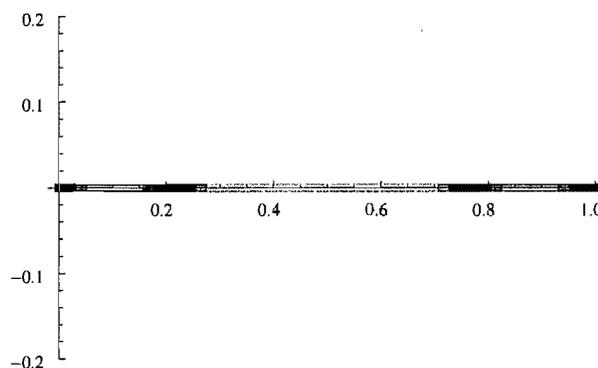


FIG. 3.12. L'ensemble des points candidats pour être élément du noyau de viabilité après deux itérations de l'application logistique est représenté en noir.

– 3 itérations

Pour calculer les intervalles à exclure du noyau de viabilité après trois itérations, nous procédons en éliminant tous les intervalles sous lesquels les évolutions des conditions initiales sortent après une et deux itérations et en éliminant les intervalles tels que la correspondance $\Phi^{-1}(x_j)$ est élément des deux intervalles où les évolutions sortaient après deux itérations.

De par la nature même de la correspondance et sans faire explicitement les calculs, nous trouverons quatre nouveaux intervalles qui correspondent aux ensembles de conditions initiales dont les évolutions sortent après trois itérations de l'application $\Phi(x_j)$.

Notre ensemble de viabilité sera, encore une fois, l'ensemble des conditions initiales présent à l'extérieur des intervalles trouvés. Comme le calcul devient lourd, seul le graphique sera montré à la figure 3.13. L'ensemble des points

candidats à être élément du noyau de viabilité étant l'union des intervalles noirs.

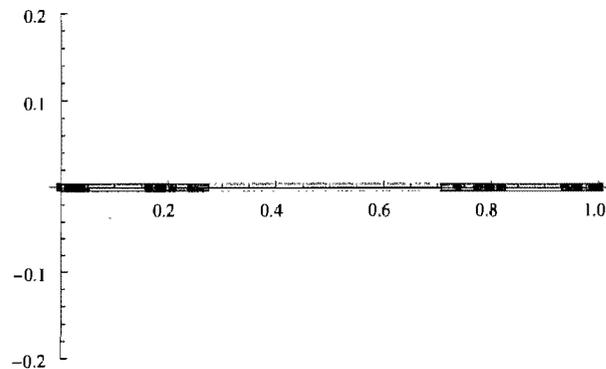


FIG. 3.13. Ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité de l'application logistique après trois itérations

– 4 itérations

Pour trouver l'ensemble des points candidats pour être élément du noyau de viabilité après 4 itérations, nous procéderons de manière analogue à la méthode proposée à l'étape 3. Par contre, nous aurons huit nouveaux intervalles à éliminer de notre noyau de viabilité. L'ensemble des points candidats à être élément du noyau de viabilité correspond aux intervalles noirs dans la figure 3.14.

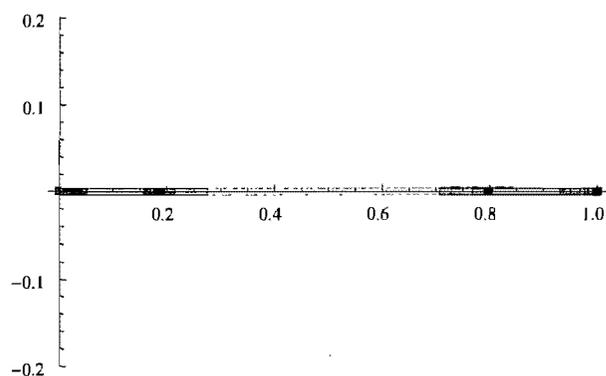


FIG. 3.14. Ensemble des points candidats pour faire partie du noyau de viabilité de l'application logistique après quatre itérations

– Infinité d'itérations

Nous pouvons remarquer que l'ensemble de viabilité sera un ensemble de Cantor. En effet, à la première étape, nous séparons en trois l'intervalle $[0, 1]$ et enlevons la section du milieu. À la deuxième étape, nous séparons les deux intervalles restants en trois et enlevons la section du milieu. Nous procédons ainsi pour le nombre d'itérations désirées. Si nous nous intéressons à un nombre d'itérations infini, nous avons construit un ensemble de Cantor. Donc après une infinité d'itérations, nous trouvons le noyau de viabilité qui est de mesure nulle en dépit du fait qu'il contient un ensemble de conditions initiales indénombrable. La figure 3.15 montre qu'après seulement quatre itérations, l'ensemble des conditions initiales candidates pour être dans le noyau de viabilité est très petit.

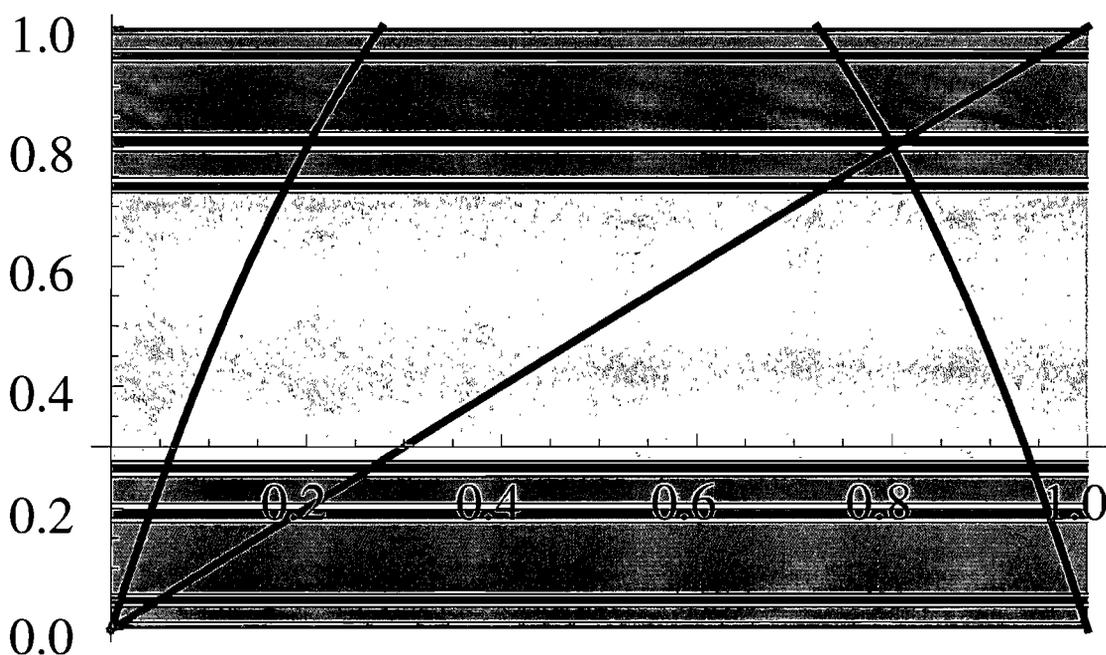


FIG. 3.15. Les conditions initiales pour faire partie du noyau de viabilité après 4 itérations seraient l'union des sections non coloriées (blanche) sur l'axe des y

3.0.5.6. Calcul du noyau de viabilité du problème approximant le problème original à partir de la définition de la dérivée

Reprenons maintenant le problème continu du départ : $x'(t) = rx(t)(1 - x(t))$ et vérifions que le problème estimant la dérivée à l'aide de la définition, tel qu'elle

est utilisée pour la résolution de problème numérique, représente réellement le comportement des évolutions du problème continu.

Premièrement, remplaçons la dérivée $x'(t)$ par sa définition.

$$x'(t) = \frac{x_{j+1} - x_j}{h}$$

avec h aussi petit que nécessaire. Nous obtenons ainsi que

$$x_{j+1} = rhx_j(1 - x_j) + x_j = rhx_j \left(\frac{1 + rh}{rh} - x_j \right)$$

Puisque nous avons que x_j correspond à une condition initiale qui détermine le temps futur, nous le noterons tout simplement x et nous noterons $\phi_h(x)$ la fonction indiquant le temps futur x_{j+1} en fonction du temps présent x .

Nous avons donc la fonction suivante :

$$\phi_h(x) = rhx \left(\frac{1 + rh}{rh} - x \right)$$

Nous cherchons quel est le noyau de viabilité pour l'ensemble $K = [0, 1]$ lorsque nous appliquons la fonction discrète $\phi_h(x)$.

La population initiale est contenue dans l'intervalle $[0, 1]$. La question qui doit alors être résolue consiste à savoir pour quelles valeurs de x l'application $\phi_h(x)$ restera bornée dans ce même intervalle. Symboliquement, le problème se réécrit comme suit :

$$0 \leq rhx \left(\frac{1 + rh}{rh} - x \right) \leq 1$$

Nous obtenons que l'application $\phi_h(x)$ s'annule seulement si x prend pour valeur 0 ou $\frac{-(1+rh)}{rh}$. Par contre, nous avons supposé que nos conditions initiales x faisaient partie de l'intervalle $[0, 1]$. Dès lors, le deuxième cas n'arrive jamais. Nous obtenons aussi que l'application $\phi_h(x)$ atteint la borne 1 quand x vaut 1 et quand x vaut $\frac{1}{rh}$. Puisque nous avons supposé que h était aussi petit que nécessaire pour utiliser la définition de la dérivée au début du problème, nous nous apercevons que la deuxième valeur que peut prendre x pour atteindre la valeur 1 est infiniment grande. Encore une fois, un nombre infiniment grand ne fait pas partie de l'intervalle $[0, 1]$ considéré pour les conditions initiales x . La borne est donc atteinte seulement lorsque nous trouvons x égal à 1.

Donc, l'application $\phi_h(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ reste toujours dans l'ensemble $[0, 1]$. Le noyau de viabilité de l'ensemble est donc l'ensemble lui-même. Le résultat obtenu pour l'approximation du cas continu par la définition de la dérivée donne donc un résultat comparable à ce qui avait été trouvé pour le cas continu.

3.0.5.7. *Conclusion partielle*

Il est important de s'apercevoir que les problèmes analogues au cas continu sont en fait très différents des problèmes estimant le problème original au moyen de la définition de la dérivée. En effet, cet exemple nous montre que de manière continue nous avons un noyau de viabilité correspondant à l'ensemble au complet de toutes les conditions initiales possibles, alors que le cas analogue engendre un noyau de viabilité qui est l'ensemble au complet si et seulement si r est plus petit que 4 et par la suite un noyau de viabilité qui est Cantor. Les deux conclusions sont aux antipodes alors que les problèmes avaient une allure similaire a priori. Dans un premier cas, la population survit indépendamment de la quantité d'individus au départ, alors que dans le second cas, un ensemble de mesure nulle de conditions initiales permet à la population de survivre. Dans une perspective d'utilisation des résultats obtenus, faire l'erreur d'utiliser le problème analogue discret pourrait conduire à de mauvaises recommandations.

De plus, nous constatons que la méthode souvent utilisée dans la résolution de problèmes numériques, qui consiste à rendre discret un ensemble et à utiliser la définition de la dérivée, permet d'obtenir un comportement des évolutions beaucoup plus proche de la réalité. C'est, par ailleurs, ainsi que Monsieur Patrick Saint-Pierre a réussi à construire son algorithme. En discrétisant la dérivée à l'aide de la définition et en prenant un h petit, il est parvenu à des approximations des comportements attendus du cas continu suffisamment précises pour être utilisés. De plus, lorsqu'il prenait la limite de h lorsqu'il tend vers 0, il est parvenu exactement aux mêmes réponses que celles apportées par les cas continus.

Il est donc essentiel d'utiliser la bonne méthode pour trouver numériquement des noyaux de viabilité. Se servir, comme application discrète, de la même correspondance que celle employée dans le cas continu ne permet pas, en général, de

retrouver un résultat similaire à ce qui est présenté dans la réalité (cas continu). Toutefois, l'approximation de la dérivée à l'aide de la définition permet l'obtention de résultats concluants.

3.0.6. Conclusion

Les deux exemples nous ont permis de comprendre l'importance du théorème 1 énoncé. En effet, tous les problèmes d'applications disconnexes se résument en un noyau de viabilité qui est de Cantor. Donc, des problèmes à priori très différents peuvent dorénavant se traiter d'une manière similaire.

De plus, l'exemple 2 a explicité l'importance de ne pas confondre un problème analogue avec un problème qui a été changé en une forme discrète grâce à l'utilisation de la définition de la dérivée. Le premier ne reflète pas, en général, le cas continu, alors que le second estime bien les comportements attendus des évolutions continues.

CONCLUSION

En bref, la théorie de la viabilité permet de résoudre une panoplie de problèmes dynamiques provenant de diverses disciplines avec une même méthode. Cette théorie permet notamment de reprendre les mêmes techniques pour résoudre des problèmes d'aéronautique, d'économie de l'environnement, de biologie et tout problème qui se modélise à l'aide d'équations différentielles.

Les avancées sont tout aussi efficaces, qu'il s'agisse de problèmes continus ou de problèmes discrets. Une distinction importante a aussi été apportée quant à la différence entre un système discret estimant un système continu et un problème dit analogue au problème continu.

De prime abord, la théorie de la viabilité a apporté aux sciences étudiant les systèmes dynamiques une méthodologie permettant de contrôler des phénomènes qui ne sont pas forcément complètement expliqués, à priori, à l'aide de régulateurs affectant les évolutions des systèmes. Ces contrôles, selon la manière dont ils sont choisis, bornent la vitesse de changement de l'évolution, l'apparition des changements ou affectent directement la trajectoire de l'évolution.

L'utilisation de la fonction d'inertie est aussi un facteur prépondérant quant au succès des actions des régulateurs. Le développement d'algorithmes, maintenant utilisés pour calculer numériquement les noyaux de viabilité et la fonction d'inertie afin d'approximer les cas continus dans des contextes où ils ne peuvent pas se trouver explicitement, permet à la théorie de la viabilité d'être couramment utilisée. Certaines firmes sont même prêtes à payer pour connaître l'information que peut dégager la théorie.

Toutefois, une des limites de la théorie de la viabilité est qu'elle ne permet pas de résoudre aisément les problèmes à plus de quatre dimensions. Ceci s'explique

par l'accumulation rapide des calculs lorsqu'un noyau de viabilité est recherché. Avec plus de quatre dimensions à un problème, même la combinaison de tous les ordinateurs fonctionnant sur la terre ne permettrait pas toujours de trouver en un temps fini la solution optimale à un problème.

Toutefois, cette limite n'en sera peut-être pas toujours une. Les progrès des technologies informatiques pourraient, éventuellement, rendre accessibles les solutions aux problèmes de dimensions élevées. Alors, qui sait dans quels domaines cette théorie sera employée ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLIGOOD, KATHLEEN T. ; SAUER, TIM D. ; YORKE, JAMES A. , *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1997, New York, 603 pages.
- [2] AUBIN, JEAN-PIERRE, *Applied Abstract Analysis, Pure and Applied Mathematics*, A wiley-interscienceseries of texts, monographs and tracts, 1977, USA, pages 107 à 109
- [3] AUBIN, JEAN-PIERRE ; BAYEN, ALEXANDRE ; BONNEUIL, NOËL ; SAINT-PIERRE, PATRICK , *Viability Kernels and Capture Bassins for Regulating Evolutionary Systems*, Draft of August 14th 2008
- [4] AUBIN, JEAN-PIERRE ; FRANKOWSKA, HÉLÈNE ; SAINT-PIERRE, PATRICK , *Viability : Models, algorithm and Applications in Finance and Environmental-Economics*, GERAD, HEC Montréal, 2007 Spring School, 191 pages.
- [5] BABA, Y. ; NAGASHIMA, H, *Introduction to Chaos*, IOP publishing Ltd, 1999, Japan, 168 pages.
- [6] COLLECTIF, *Laboratoire d'application des systèmes tychastiques régulés*, LASTRE [http ://lastre.asso.fr/LastreWeb/indexLastre.htm](http://lastre.asso.fr/LastreWeb/indexLastre.htm)
- [7] COLLECTIF, *Logistic map*, Wikipédia, l'encyclopédie libre en ligne, site modifié le 14 mai 2009.
[http ://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map)
- [8] COLLECTIF, *Thomas Robert Malthus*, Wikipédia, l'encyclopédie libre en ligne, site modifié le 12 mai 2009.
[http ://en.wikipedia.org/wiki/Malthus](http://en.wikipedia.org/wiki/Malthus)
- [9] GIROUX, ANDRÉ, *Mesure et Intégration*, Université de Montréal, Département de mathématiques et statistiques, 2004, 173 pages.
[http ://www.dms.umontreal.ca/giroux/documents/mesure100.pdf](http://www.dms.umontreal.ca/giroux/documents/mesure100.pdf)

- [10] HUTCHINSON, JOHN E. , *Fractals and Self Similarity*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No.5, 1981, Indiana, pages 713 à 747.
- [11] ROLLET, CATHERINE , *Introduction à la démographie*, Nathan Université, 2003, Saint-Germain-du-Puy, 128 pages.