

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

**Université de Montréal**

**Commande optimale et jeux différentiels linéaires  
quadratiques**

par

**Olivier Dello Sbarba**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

octobre 2007

© Olivier Dello Sbarba, 2007



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Commande optimale et jeux différentiels linéaires  
quadratiques**

présenté par

**Olivier Dello Sbarba**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Robert G. Owens*

---

(président-rapporteur)

*Michel C. Delfour*

---

(directeur de recherche)

*André Giroux*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*28 septembre 2007*

---

## SOMMAIRE

---

Ce mémoire étudie la commande optimale et les jeux différentiels linéaires quadratiques. Pour la commande optimale, l'originalité de ce travail est d'enlever les hypothèses de positivité sur les matrices agissant sur la variable d'état qui rendent la fonction convexe. Nous allons plutôt faire l'hypothèse que l'infimum de la fonction d'utilité est fini. On va caractériser l'élément minimisant à l'aide d'une matrice dépendante du temps qui est solution d'une équation différentielle de Riccati. On tente de soustraire ces mêmes hypothèses de positivité en horizon infini.

On va aussi traiter de jeux différentiels à deux joueurs de somme nulle avec une dynamique linéaire et une fonction d'utilité quadratique encore sans les hypothèses de positivité sur les matrices agissant sur la variable d'état. On résume les résultats connus sur les points de selle en boucle ouverte. Nous allons développer la théorie de point de selle sur la classe des stratégies affines  $L^2$ -intégrables en boucle fermée. On termine avec une classification des points de selle en boucle fermée.

**Mots clés :** Commande optimale linéaire-quadratique, infimum, convexité, équation différentielle de Riccati, jeu différentiel linéaire-quadratique, valeur du jeu, point de selle , stratégies en boucle ouverte et en boucle fermée.

## SUMMARY

---

The subject of this thesis is linear quadratic optimal control and differential games. We first revisit linear quadratic optimal control without the positivity assumptions on the matrices acting on the state variable. We shall get the usual results under the assumption that the infimum of the utility function is finite. Then we shall characterize the minimum with a symmetrical matrix function solution of a Riccati differential equation. We shall try to solve the problem in infinite horizon under the same assumption.

We shall also treat of two-person zero-sum linear quadratic differential games again without the positivity assumptions on the matrices acting on the state variable. We summarize recent results on open loop saddle points. We develop the theory of saddle points on  $L^2$ -intégrable closed loop strategies. We conclude with a classification of closed loop saddle points.

**Key words** :Linear quadratic optimal control, infimum, convexity, Riccati differential equation, linear quadratic differential games, value of a game, open loop and closed loop strategies.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Commande optimale</b> .....	2
1.1. Introduction .....	2
1.2. Notations, formulation du problème et existence .....	4
1.2.1. Notations .....	4
1.2.2. Formulation du problème de commande en horizon fini .....	5
1.2.3. Existence d'une commande optimale .....	7
1.3. Caractérisation de l'élément minimisant .....	12
1.4. Convexité et unicité de la solution et résultats duaux .....	15
1.4.1. Convexité .....	15
1.4.2. Unicité de la solution .....	18
1.4.3. Supremum fini .....	22
1.5. Inversibilité de l'application $X(s)$ .....	23
1.6. Étude de la transformation $P(t)$ et équation différentielle de Riccati ....	29
1.6.1. Transformation $P(t)$ .....	29
1.6.2. Étude de la résolvante $\Phi(t, s)$ et équations différentielles matricielles	32
1.6.3. Équation différentielle de Riccati dans $[0, T]$ .....	34
1.7. Problème de commande en horizon infini .....	38

<b>Chapitre 2. Jeux différentiels à deux joueurs de somme nulle</b> .....	49
2.1. Introduction .....	49
2.2. Propriétés de la fonction d'utilité .....	50
2.3. Jeux en boucle ouverte .....	52
2.3.1. Définitions .....	52
2.3.2. Jeux à valeur inférieure ou supérieure finie en boucle ouverte .....	53
2.3.3. Exemples .....	55
2.4. Jeux en boucle fermée .....	58
2.4.1. Définitions et résultats principaux .....	59
2.4.2. Classification des points de selle en boucle fermée .....	66
<b>Bibliographie</b> .....	72

## REMERCIEMENTS

---

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, M. Michel Delfour, qui m'a permis de travailler sur un sujet non sans difficultés, mais très intéressant et enrichissant. Son grand savoir mathématique et la qualité de son suivi m'ont grandement facilité la tâche. Mais j'aimerais surtout lui offrir mes remerciements pour sa bonne humeur constante, son sens de l'humour, sa modestie et sa passion indéniable pour les mathématiques qui ont rendu chaque visite à son bureau très plaisante.

Je remercie le CRSNG, le DMS et M. Delfour pour les fonds octroyés durant ma maîtrise. Un grand merci également à mes parents qui m'ont soutenu autant moralement que financièrement durant toutes mes études.

Je ne peux passer sous silence mes amis avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir au cours de cette maîtrise : Fred, Max, Charles, Val, Vinal, Géraldine, Marc, Sylvain, Pacha, Philippe, la liste serait trop longue pour tous les nommer. Que ce soit avec l'empereur par-dessus le mur ou notre pool de soccer, on s'est bien amusé.

Finalement, mais non la moindre, j'aimerais remercier la personne la plus importante dans ma vie, Anne-Marie Bacon. Je n'aurais pu terminer mon mémoire sans elle, qui m'a toujours soutenu dans les moments les plus difficiles et qui a toujours eu confiance en moi. Je n'oublierai jamais le soleil que tu m'apportais après une mauvaise journée. J'espère que tu me donneras ton amour pour longtemps encore.

# Chapitre 1

---

## COMMANDE OPTIMALE

### 1.1. INTRODUCTION

L'humain est continuellement à la recherche de performances élevées (productivité, coût, qualité, etc.), voire de performances optimales (aller sur la lune en consommant le minimum de carburant, planifier de façon optimale une économie,...). Ces problèmes ne sont plus du domaine de la physique ou de la chimie et le recours aux outils mathématiques est absolument indispensable.

Avant la seconde guerre mondiale, les problèmes relatifs aux systèmes de commande automatique étaient résolus avec le seul recours des méthodes de calcul différentiel. Compte tenu des moyens disponibles à l'époque, ces méthodes ont d'ailleurs permis d'obtenir des résultats souvent remarquables, notamment dans le domaine de la conduite des armes à bord de navire. Au cours de la seconde guerre mondiale, l'accroissement des performances demandées aux radars, aux canons anti-aériens, puis aux missiles, l'introduction de l'électronique dans les systèmes de commande et, enfin, les contacts de plus en plus étroits entre ingénieurs électriciens et mécaniciens, ont conduit au développement de ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui la théorie classique des asservissements. Après la pause qui suivit la fin de la guerre, un renouveau d'intérêt et de recherches pour des mathématiques plus puissantes a conduit, dans le milieu des années cinquante, à la théorie de la commande optimale, principalement motivée par la course à l'espace. Le principe du maximum de L.S. Pontryagin joua un rôle pivot.

La figure 1.1 tirée de [7] représente la trajectoire d'un avion supersonique (F4H), utilisée pour passer en temps minimal de l'altitude 0 à 20 kilomètres en y arrivant en

vol horizontal à la vitesse Mach1. Cette trajectoire calculée en 1962 par des méthodes de commande optimale correspondait à une diminution par un facteur de 2 du temps de montée des meilleurs pilotes d'essais. Cet exemple illustre combien, pour un problème complexe, l'optimum est peu évident a priori et que le recours à des techniques mathématiques évoluées est nécessaire s'il est économiquement important d'améliorer les performances ou de tirer le potentiel maximum d'un système.

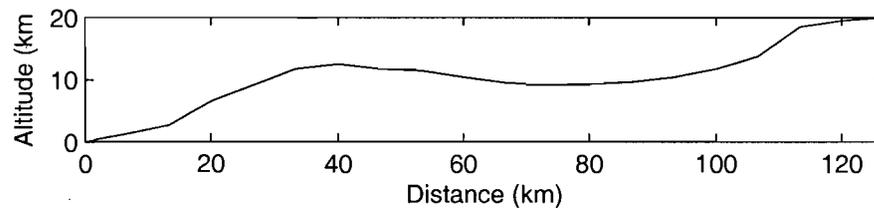


FIG. 1. Trajectoire de montée à 20 km en temps minimal d'un avion F4H

Malgré le fait que les fonctionnelles quadratiques aient été étudiées intensivement par Legendre, Jacobi et d'autres, le problème de commande linéaire-quadratique a pris de l'importance dans le cadre du filtrage des signaux des premiers satellites avec l'introduction du célèbre filtre récursif dit de Kalman-Buci.

Dans ce chapitre, nous reprenons la théorie linéaire quadratique en supposant seulement que l'infimum est fini et en enlevant les hypothèses de positivité sur les matrices agissant sur la variable d'état qui rendent automatiquement la fonction convexe. L'originalité de ce travail est de revoir et refaire le développement de la théorie linéaire-quadratique (comme par exemple dans les notes de cours de M. Delfour [6] qui suivent l'approche générale de J.L. Lions [8]) en supposant simplement que l'infimum est fini. Cette généralisation est complète en horizon fini, mais en horizon infini le problème reste ouvert.

## 1.2. NOTATIONS, FORMULATION DU PROBLÈME ET EXISTENCE

### 1.2.1. Notations

Les notations suivantes nous seront utiles. Soit  $\mathbb{R}^d$  l'espace euclidien de dimension  $d$  de produit scalaire et norme

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad |x| = \left[ \sum_{i=1}^d x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

peu importe la dimension  $d$ . L'espace des fonctions mesurables  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que  $t \mapsto |f(t)|^2$  est intégrable sera noté  $L^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ . Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ , notons

$$(u, v)_2 = \int_0^T u(t) \cdot v(t) dt, \quad \|u\|_2 = \left[ \int_0^T |u(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev des fonctions dérivables  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  dont la dérivée appartient à  $L^2(0, T; \mathbb{R}^d)$  sera noté  $H^1(0, T; \mathbb{R}^d)$ . Finalement,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  sera l'espace de toutes les applications linéaires continues de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique,  $x$  un point de  $E$ ,  $V$  un voisinage de  $x$  et  $f$

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction numérique définie dans  $V$ .

- (i) On dit que  $f$  est semi-dérivable en  $u$  dans la direction  $v$  si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t}.$$

Dans ce cas, on écrira la limite  $df(u; v)$ . Par définition,  $df(u; 0)$  existe toujours et  $df(u; 0) = 0$ .

- (ii) On dit que  $f$  est dérivable en  $u$  au sens de Gâteaux si

$$\forall v \in E, df(u; v) \text{ existe et que l'application } v \mapsto df(u; v) : E \rightarrow \mathbb{R}$$

est linéaire et continue.

- (iii)  $f$  possède une semi-dérivée seconde en  $u$  dans les directions  $v$  et  $w$  si la limite suivante existe :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{df(u + tw; v) - df(u; v)}{t}$$

Dans ce cas, on écrira la limite  $d^2 f(u; v; w)$ .

□

### 1.2.2. Formulation du problème de commande en horizon fini

On fixe un intervalle de temps  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , et le système gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t) & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et  $A(t)$  et  $B(t)$  sont respectivement des matrices de dimension  $n \times n$  et  $n \times m$  avec les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} A : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad \text{mesurables et bornées.}$$

On associe à  $x_0$  et  $v$  la fonction

$$J_{x_0}(v) \stackrel{\text{def}}{=} Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Q(t)x(t) \cdot x(t) + v(t) \cdot v(t) dt. \quad (1.2.2)$$

Les matrices  $F$  et  $Q(t)$  sont symétriques, de dimension  $n \times n$

$$\begin{cases} F^* = F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \forall t, Q(t)^* = Q(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

et les éléments de la fonction matricielle  $Q$  sont dans  $L^2(0, T; \mathbb{R})$ . Pour  $x_0$  donné, on cherche à caractériser la solution de

$$\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v) \quad (1.2.3)$$

sur l'hypothèse que

$$\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v) \text{ est fini.} \quad (1.2.4)$$

*Remarque 1.2.1.* Le problème de commande linéaire-quadratique défini plus haut a été complètement résolu dans le cas où  $Q(t)$  (pour tout  $t$ ) et  $F$  sont semi-définies positives. Cette hypothèse sur  $Q$  et  $F$ , qui a des bases physiques, rend la fonction (1.2.2)

convexe. Voyons l'intérêt d'enlever cette hypothèse. Prenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t) & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

associée à la fonctionnelle quadratique plus générale

$$J(v) = Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Q(t)x(t) \cdot x(t) + x(t) \cdot S(t)v(t) + v(t) \cdot S^*(t)x(t) + N(t)v(t) \cdot v(t) dt.$$

avec  $Q(t)$ ,  $N(t)$  et  $F$  symétriques et semi-définies positives pour tout  $t$ . On fait le changement de variable

$$\bar{v} = v + N^{-1}S^*x.$$

Alors

$$\begin{aligned} & Qx \cdot x + x \cdot Sv + v \cdot S^*x + Nv \cdot v \\ &= Qx \cdot x + x \cdot S(\bar{v} - N^{-1}S^*x) + (\bar{v} - N^{-1}S^*x) \cdot S^*x \\ & \quad + N(\bar{v} - N^{-1}S^*x) \cdot (\bar{v} - N^{-1}S^*x) \\ &= Qx \cdot x + 2x \cdot S\bar{v} - 2x \cdot SN^{-1}S^*x + N\bar{v} \cdot \bar{v} + x \cdot SN^{-1}S^*x - 2x \cdot S\bar{v} \\ &= Qx \cdot x - x \cdot SN^{-1}S^*x + N\bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= (Q - SN^{-1}S^*)x \cdot x + N\bar{v} \cdot \bar{v}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Q - SN^{-1}S^* \\ \bar{A} &= A - BN^{-1}S^*. \end{aligned}$$

On a donc maintenant

$$\begin{cases} x'(t) = \bar{A}(t)x(t) + B(t)\bar{v}(t) & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et

$$J(v) = Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T \bar{Q}(t)x(t) \cdot x(t) + N(t)\bar{v}(t) \cdot \bar{v}(t).$$

On remarque que  $\bar{Q}$  n'est pas nécessairement semi-définie positive même si  $Q \geq 0$ . Nous verrons également à la fin de section 1.6, par un exemple, que la fonction (1.2.2) peut être convexe même si  $Q(t)$  et  $F$  ne sont pas semi-définies positives.

### 1.2.3. Existence d'une commande optimale

Allons-y tout d'abord d'un lemme qui nous aidera à caractériser notre solution.

Soit la fonction

$$J(u) = \frac{1}{2}(Mu, u)_{\mathcal{U}} + (b, u)_{\mathcal{U}} + c,$$

définie sur un espace de Hilbert  $\mathcal{U}$  où l'opérateur linéaire symétrique  $M = M^*$  a une image fermée,  $c \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathcal{U}$ . Pour  $u, v \in \mathcal{U}$ ,  $(u, v)_{\mathcal{U}}$  est le produit scalaire dans  $\mathcal{U}$ .

**Lemme 1.2.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe un  $u^* \in \mathcal{U}$  tel que  $J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$ ,*
- (ii)  *$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$  est fini,*
- (iii) *il existe un  $u^* \in \mathcal{U}$  tel que*
  - (a)  *$dJ(u^*; v) = 0, \forall v \in \mathcal{U}$  et*
  - (b)  *$d^2J(u^*; v; v) \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}$ .*

DÉMONSTRATION. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Puisque la fonctionnelle  $J(u)$  ne prend que des valeurs réelles, s'il existe un  $u^* \in \mathcal{U}$  tel que  $J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$ , alors  $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$  est fini.

(iii)  $\Rightarrow$  (i).  $J(u)$  est une fonction quadratique et donc  $d^2J(u^*; v; v)$  ne dépend pas de  $u^*$  (voir calcul plus bas). Puisque  $d^2J(u^*; v; v)$  ne dépend pas de  $u^*$  et que  $d^2J(u^*; v; v) \geq 0$  pour tout  $v \in \mathcal{U}$ ; alors

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad d^2J(u; v; v) \geq 0.$$

Nous verrons, au lemme 1.4.2, que ceci signifie que la fonction  $J$  est convexe dans  $\mathcal{U}$ . Donc, pour tout  $v \in \mathcal{U}$  et  $\theta \in ]0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} J(u^* + \theta(v - u^*)) &\leq J(u^*) + \theta(J(v) - J(u^*)) \\ \frac{J(u^* + \theta(v - u^*)) - J(u^*)}{\theta} &\leq J(v) - J(u^*). \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\theta$  tend vers 0,

$$0 = dJ(u^*; v - u^*) \leq J(v) - J(u^*).$$

par hypothèse. Alors

$$J(u^*) \leq J(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Calculons tout d'abord  $dJ(u; v)$  :

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(u + \theta v) - J(u)}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(M(u + \theta v), u + \theta v)_{\mathcal{U}} + (b, u + \theta v)_{\mathcal{U}} + c - \left(\frac{1}{2}(Mu, u)_{\mathcal{U}} + (b, u)_{\mathcal{U}} + c\right)}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta[(Mu, v)_{\mathcal{U}} + (b, v)_{\mathcal{U}}] + \frac{1}{2}\theta^2(Mv, v)_{\mathcal{U}}}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[ (Mu, v)_{\mathcal{U}} + (b, v)_{\mathcal{U}} + \frac{1}{2}\theta(Mv, v)_{\mathcal{U}} \right] \\
&= (Mu + b, v)_{\mathcal{U}}.
\end{aligned}$$

(a) Montrons par contradiction qu'il existe un  $u^* \in \mathcal{U}$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{U}$ ,  $dJ(u^*; v) = 0$ . Donc, supposons qu'il n'existe pas de  $u \in \mathcal{U}$  tel que tout  $v \in \mathcal{U}$ ,  $dJ(u; v) = 0$ . Alors

$$\nexists u \in \mathcal{U}, Mu + b = 0$$

$$\Rightarrow -b \notin \text{Im } M.$$

L'image de l'opérateur  $M$  est fermée. Nous pouvons donc écrire tout élément  $u \in \mathcal{U}$  de façon unique sous la forme  $u = h + h'$  avec  $h \in \text{Im } M$  et  $h' \in (\text{Im } M)^\perp$ . Soit

$$\hat{b} = \text{proj}_{(\text{Im } M)^\perp} b \neq 0.$$

Prenons la suite  $u_n = -n\hat{b} \in (\text{Im } M)^\perp$ . Alors

$$J(u_n) = \frac{1}{2}(Mu_n, u_n)_{\mathcal{U}} + (b, u_n)_{\mathcal{U}} + c = (b, u_n)_{\mathcal{U}} + c$$

puisque  $u_n \in (\text{Im } M)^\perp$  et  $Mu_n \in \text{Im } M$ . Donc,

$$\begin{aligned}
(b, u_n)_{\mathcal{U}} &= -n(b, \hat{b})_{\mathcal{U}} \\
&= -n(\hat{b} + (b - \hat{b}), \hat{b})_{\mathcal{U}} \\
&= -n(\hat{b}, \hat{b})_{\mathcal{U}} + (b - \hat{b}, \hat{b})_{\mathcal{U}} \\
&= -n(\hat{b}, \hat{b})_{\mathcal{U}}
\end{aligned}$$

car  $b = \hat{b} + (b - \hat{b})$  avec  $\hat{b} \in (\text{Im } M)^\perp$  et  $(b - \hat{b}) \in \text{Im } M$

$$\Rightarrow J(u_n) = -n|\hat{b}|^2 + c \rightarrow -\infty.$$

Ce qui est une contradiction car  $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$  est fini.

(b) Montrons également par contradiction que pour le  $u^* \in \mathcal{U}$  de la partie a), on a pour tout  $v \in \mathcal{U}$ ,  $d^2 J(u^*; v; v) \geq 0$ . Débutons en calculant la dérivée seconde de  $J(u)$  en  $u^*$  :

$$\begin{aligned} d^2 J(u^*; v; w) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dJ(u^* + \theta w; v) - dJ(u^*; v)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(M(u^* + \theta w) + b, v)_{\mathcal{U}} - (Mu^* + b, v)_{\mathcal{U}}}{\theta} \\ &= (Mw, v)_{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Donc, supposons qu'il existe un  $\hat{v} \in \mathcal{U}$  tel que  $d^2 J(u^*; \hat{v}; \hat{v}) = (M\hat{v}, \hat{v})_{\mathcal{U}}$  est strictement inférieure à zéro. Prenons la suite  $u_n = n\hat{v}$ . Alors

$$J(u_n) = n^2(M\hat{v}, \hat{v}) + n(b, \hat{v}) + c.$$

Mais puisque  $(M\hat{v}, \hat{v})$  est strictement inférieure à zéro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [n^2(M\hat{v}, \hat{v}) + n(b, \hat{v}) + c] \rightarrow -\infty$$

ce qui est une contradiction car  $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$  est fini. □

Montrons maintenant que

$$J_{x_0}(v) = Fx(T) \cdot x(T) + (Qx, x)_2 + (v, v)_2$$

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t) & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

peut être mis sous la forme du lemme :  $\frac{1}{2}(Mu, u)_{\mathcal{U}} + (b, u)_{\mathcal{U}} + c$  où l'image de l'opérateur  $M$  est fermée,  $c \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathcal{U}$ . Nous aurons besoin de quelques théorèmes (que nous ne prouverons pas) pour démontrer ceci. Pour simplifier l'écriture, l'équation (1.2.5) sera souvent écrite

$$x' = Ax + Bv.$$

**Théorème 1.2.1.** (i) *L'équation différentielle (1.2.5) a une solution unique*

$$x = x(\cdot; x_0, v) \text{ dans } H^1(0, T; \mathbb{R}^n).$$

$$(ii) (x_0, v) \mapsto x(\cdot; x_0, v) : \mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \mapsto H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$$

*est linéaire et continue.*

(iii) L'application  $i : x \mapsto (x(T), x) : H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$   
est compacte, linéaire et continue.

(iv)  $\Pi : (x(T), x) \mapsto (Fx(T), Qx) : \mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$   
est linéaire et continue.

Par linéarité, nous pouvons noter  $x(\cdot; x_0, v)$  sous la forme

$$x(\cdot; x_0, v) = K_0 x_0 + K_1 v$$

en introduisant les opérateurs linéaires et continus suivants

$$K_0 : \mathbb{R}^n \mapsto H^1(0, T; \mathbb{R}^n),$$

$$K_1 : L^2(0, T; \mathbb{R}^n) \mapsto H^1(0, T; \mathbb{R}^n).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} J_{x_0}(v) &= Fx(T) \cdot x(T) + (Qx, x)_2 + (v, v)_2 \\ &= (\Pi i(x), i(x))_{\mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)} + (v, v)_2 \\ &= (\Pi i(K_0 x_0 + K_1 v), i(K_0 x_0 + K_1 v))_{\mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)} + (v, v)_2 \\ &= ([I + K_1^* i^* \Pi i K_1]v, v)_2 + 2(K_1^* i^* \Pi i K_0 x_0, v)_2 + (\Pi i K_0 x_0, i K_0 x_0)_{\mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

En prenant

$$K = -K_1^* i^* \Pi i K_1 : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \mapsto L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \text{ compact}$$

$$b = K_1^* i^* \Pi i K_0 x_0 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

$$c = (\Pi i K_0 x_0, i K_0 x_0)_{\mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)} \in \mathbb{R},$$

notre fonctionnelle  $J_{x_0}(v) = \frac{1}{2}((I - K)u, u)_2 + (b, u)_2 + c$ .

**Théorème 1.2.2.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un  $u^*$  tel que  $J_{x_0}(u^*) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(u)$ ,
- (ii)  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini,
- (iii) Il existe un  $u^* \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  tel que
  - (a)  $dJ_{x_0}(u^*; v) = 0, \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et
  - (b)  $d^2 J_{x_0}(u^*; v; v) \geq 0, \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ .

DÉMONSTRATION. Montrons que si  $K$  est un opérateur linéaire compact, alors l'image de  $(I - K)$  est fermée. La preuve est tirée de [4].

Supposons que la suite  $\{y_n\}$  soit dans l'image de  $(I - K)$ . Il existe alors des  $x_n$  tels que  $x_n - Kx_n = y_n$ . Soit  $y_n \rightarrow y_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrons que  $y_0 \in \text{Im}(I - K)$ .

Regardons les cas possibles. Si  $\{x_n\}$  est bornée, alors  $\{Kx_n\}$  est compacte. Puisque  $x_n = y_n + Kx_n$ , où  $\{y_n\}$  est convergente et  $\{Kx_n\}$  est compacte, on peut en extraire une sous-suite convergente  $\{x_{n_k}\}$  qui converge vers  $x_0$ . En passant à la limite pour  $k \rightarrow \infty$  dans l'égalité  $x_{n_k} - Kx_{n_k} = y_{n_k}$ , on obtient, par continuité de  $K$ ,  $x_0 - Kx_0 = y_0$  qui signifie que  $y_0 \in \text{Im}(I - K)$ .

Considérons le deuxième cas possible, c'est-à-dire lorsque  $x_n$  est non-bornée. Soit  $N$  le noyau de l'opérateur  $I - K$ , i.e. l'ensemble de toutes les solutions de l'équation

$$x - Kx = 0.$$

Introduisons la distance

$$d_n = \rho(x_n, N) = \inf_{z \in N} \|x_n - z\|. \quad (1.2.6)$$

D'après la définition de la borne inférieure, il existe dans  $N$  un élément  $z_n$  tel que

$$d_n \leq \|x_n - z_n\| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n.$$

Ensuite,  $(I - K)(x_n - z_n) = y_n$ . Si  $\{d_n\}$  est bornée, il suffit de remplacer  $x_n$  par  $x_n - z_n$  pour obtenir comme précédemment  $y_0 \in \text{Im}(I - K)$ .

Quant au cas où la suite  $\{d_n\}$  est non bornée, il s'avère impossible. En effet, supposons que  $\{d_n\}$  soit non bornée. Alors, en prenant si nécessaire sa sous-suite quelconque, on peut admettre que  $d_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Considérons les éléments

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}.$$

On a alors  $\|u_n\| = 1$  et

$$(I - K)u_n = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (1.2.7)$$

car

$$\left\| \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \right\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_n - z_n\|} \leq \frac{\sup_n \|y_n\|}{d_n} \rightarrow 0.$$

Puisque  $\{u_n\}$  est bornée, il existe une sous-suite  $u_{n_k}$  tel que  $\{Ku_{n_k}\}$  converge vers un  $u_0$ .  
Mais

$$u_{n_k} = u_{n_k} - Ku_{n_k} + Ku_{n_k} \rightarrow u_0,$$

car  $u_{n_k} - Ku_{n_k} \rightarrow 0$  par (1.2.7). Il en ressort comme précédemment qu'il existe une sous-suite  $\{u_{n_k}\}$  qui converge vers une limite  $u_0$  appartenant à  $N$ . Or,

$$x_{n_k} - z_{n_k} - \|x_{n_k} - z_{n_k}\| u_0 = (u_{n_k} - u_0) \|x_{n_k} - z_{n_k}\|,$$

où  $z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| u_0 \in N$  car  $z_{n_k}$  et  $u_0$  sont dans  $N$ . On a donc en accord avec (1.2.6)

$$\begin{aligned} \|(u_{n_k} - u_0)\| \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) d_{n_k} &\geq \|(u_{n_k} - u_0)\| \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \\ &= \|x_{n_k} - \{z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| u_0\}\| \geq d_{n_k}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|(u_{n_k} - u_0)\| \geq \frac{n_k}{n_k + 1}$$

ce qui contredit le fait que  $\|(u_{n_k} - u_0)\| \rightarrow 0$  pour  $n_k \rightarrow \infty$ . Il s'ensuit donc que  $\{d_n\}$  est bornée, d'où l'on déduit que  $\text{Im}(I - K)$  est fermée.  $\square$

### 1.3. CARACTÉRISATION DE L'ÉLÉMENT MINIMISANT

Le (ou les) éléments minimisants sont caractérisés par  $dJ_{x_0}(u; v) = 0$ . Pour un  $x_0$  donné, calculons  $dJ_{x_0}(u; v)$  :

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J_{x_0}(u + \theta v) - J_{x_0}(u)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{Fx(T) \cdot x(T) + (Qx, x)_2 + \|u + \theta v\|_2^2 - [Fy(T) \cdot y(T) + (Qy, y)_2 + \|u\|_2^2]}{\theta} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

avec

$$x' = Ax + B(u + \theta v), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3.2)$$

$$y' = Ay + Bu, \quad y(0) = x_0. \quad (1.3.3)$$

Par linéarité, la solution  $x(t)$  peut s'écrire

$$x(t) = y(t) + \theta z(t) \quad \text{où} \quad z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0.$$

En remplaçant dans (1.3.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} (2Fy(T) \cdot z(T) + 2(Qy, z)_2 + 2(u, v)_2 + \theta [Fz(T) \cdot z(T) + (Qz, z)_2 + (v, v)_2]) \\ & \Rightarrow \frac{1}{2} dJ_{x_0}(u; v) = Fy(T) \cdot z(T) + (Qy, z)_2 + (u, v)_2 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

avec  $z(t)$  et  $y(t)$  solution de

$$y' = Ay + Bu, \quad y(0) = x_0. \quad (1.3.5)$$

$$z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0. \quad (1.3.6)$$

C'est à ce point que l'on introduit le système adjoint qui joue un rôle fondamental dans les problèmes de commande optimale :

$$\begin{cases} p'(t) + A^*(t)p(t) + Q(t)y(t) = 0 & \text{p.p. } ]0, T[ \\ p(T) = Fy(T), \end{cases} \quad (1.3.7)$$

où la fonction  $y$  est la trajectoire optimale correspondant à  $u$ . En substituant (1.3.7) dans le membre de droite de l'équation (1.3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} & p(T) \cdot z(T) - (p' + A^*p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ & \Rightarrow p(T) \cdot z(T) - \int_0^T p'(t) \cdot z(t) dt - (A^*p, z)_2 + (u, v)_2 = 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^T p' \cdot z dt = \int_0^T (p \cdot z)' - p \cdot z' dt = p(T) \cdot z(T) - \int_0^T p \cdot z' dt,$$

alors en remplaçant,

$$\begin{aligned} & p(T) \cdot z(T) - p(T) \cdot z(T) + \int_0^T p(t) \cdot z'(t) dt - (A^*p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ & \Rightarrow (p, z')_2 - (A^*p, z)_2 + (u, v)_2 = 0. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (1.3.6), pour tout  $v$ ,

$$\begin{aligned} & (p, Az + Bv)_2 - (A^*p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ & \Rightarrow (p, Az + Bv)_2 - (p, Az)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ & \Rightarrow (p, Bv)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ & \Rightarrow (B^*p + u, v)_2 = 0. \end{aligned}$$

L'équation devient

$$u = -B^*p \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

ou sous forme explicite

$$\boxed{u(t) = -B(t)^*p(t) \text{ p.p. dans } [0, T].}$$

**Théorème 1.3.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un  $u^*$  tel que  $J_{x_0}(u^*) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(u)$ ,*
- (ii)  *$\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini,*
- (iii) *Il existe une commande  $u$  au problème de minimisation (1.2.3) qui est complètement caractérisée par le système d'optimalité suivant*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) - B(t)B(t)^*p(t) & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{cases} p'(t) + A^*(t)p(t) + Q(t)x(t) = 0 & \text{p.p. dans } ]0, T[ \\ P(T) = Fx(T) \end{cases}$$

$$u(t) = -B(t)^*p(t). \quad (1.3.9)$$

et

$$d^2J_{x_0}(u; v; v) \geq 0, \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Calculons la valeur du minimum de  $J_{x_0}(u)$  dans ce cas.

$$\begin{aligned} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(u) &= J_{x_0}(-B(t)^*p(t)) \\ &= Fx(T) \cdot x(T) + (Qx, x)_2 + \|-B^*p\|^2 \\ &= p(T) \cdot x(T) - (p' + A^*p, x)_2 + (BB^*p, p)_2 \\ &= p(0) \cdot x(0) + (x', p)_2 - (A^*p, x)_2 + (BB^*p, p)_2 \\ &= p(0) \cdot x_0 + (Ax - BB^*p, p)_2 - (A^*p, x)_2 + (BB^*p, p)_2 \\ &= p(0) \cdot x_0. \end{aligned}$$

Terminons la section avec un théorème (sans démonstration) sur la solution de l'équation différentielle rétrograde appelée système adjoint.

**Théorème 1.3.2.** Soit  $t \in ]0, T]$ . L'équation

$$\begin{cases} p'(s) + A^*(s)p(s) + g(s) = 0 & \text{p.p. dans } ]0, t[ \\ p(t) = z, \end{cases}$$

possède une solution unique  $p(\cdot; t, z, g)$  dans  $H^1(0, T)$  et l'application

$$(z, g) \mapsto p(\cdot; t, z, g) : \mathbb{R}^n \times L^2(0, T) \mapsto H^1(0, t)$$

est linéaire et continue.

## 1.4. CONVEXITÉ ET UNICITÉ DE LA SOLUTION ET RÉSULTATS DUAUX

### 1.4.1. Convexité

Calculons préliminairement  $\frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u; w; v)$  :

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dJ_{x_0}(u + \theta w; v) - dJ_{x_0}(u; v)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{Fy(T) \cdot z(T) + (Qy, z)_2 + (u + \theta w, v)_2 - [Fx(T) \cdot z(T) + (Qx, z)_2 + (u, v)_2]}{\theta} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

avec  $z(t)$ ,  $y(t)$  et  $x(t)$  solution de

$$y' = Ay + B(u + \theta w), \quad y(0) = x_0$$

$$z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0$$

$$x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0.$$

Par linéarité, la solution  $y(t)$  peut s'écrire

$$y(t) = x(t) + \theta m(t), \quad \text{où } m' = Am + Bw, \quad m(0) = 0.$$

En substituant dans (1.4.1),

$$\begin{aligned} &\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{F(x(T) + \theta m(T)) \cdot z(T) + (Q(x + \theta m), z)_2 + (u + \theta w, v)_2}{\theta} \\ &- \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{[Fx(T) \cdot z(T) + (Qx, z)_2 + (u, v)_2]}{\theta} \\ &= Fm(T) \cdot z(T) + (Qm, z)_2 + (w, v)_2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u; w; v) = Fm(T) \cdot z(T) + (Qm, z)_2 + (w, v)_2 \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$m' = Am + Bw, \quad m(0) = 0$$

$$z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0.$$

Énumérons quelques lemmes sur la convexité de la fonction.

**Lemme 1.4.1.** *Soit  $U$  une partie ouverte et convexe d'un espace vectoriel  $E$  et soit  $J$  une fonction numérique Gâteaux-dérivable dans  $U$ . Alors  $J$  est convexe dans  $U$  si et seulement si*

$$\forall u, v \in U, J(v) \geq J(u) + dJ(u; v - u).$$

**Lemme 1.4.2.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application  $u \mapsto J_{x_0}(u)$  est convexe,*

(ii) *il existe un  $u^*$  tel que  $d^2J_{x_0}(u^*; v; v) \geq 0$  pour tout  $v$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ,*

(iii)  *$J_0(v) \geq 0$ , pour tout  $v$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ,*

(iv)  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_0(v) = 0$ ,

(v) *pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , l'application  $u \mapsto J_{x_0}(u)$  est convexe.*

DÉMONSTRATION. (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) On considère la fonction réelle  $g$  de la variable réelle  $\theta \in [0, 1]$

$$g(\theta) = J_{x_0}(u + \theta(v - u)).$$

Par définition

$$g(1) = J_{x_0}(v), \quad g(0) = J_{x_0}(u), \quad g'(\theta) = dJ_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u).$$

Pour  $\theta \in ]0, 1[$  et  $t \in ]0, 1 - \theta[$

$$\begin{aligned} g''_+(\theta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dJ_{x_0}(u + (\theta + t)(v - u); v - u) - dJ_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u)}{t} \\ &= d^2J_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u; v - u). \end{aligned}$$

Pour  $t \in [-\theta, 0[$ ,

$$\begin{aligned} g''_-(\theta) &= \lim_{-t \rightarrow 0} \frac{dJ_{x_0}(u + \theta(v - u) + t[-(v - u)]; v - u) - dJ_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u)}{-t} \\ &= -d^2J_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u; -(v - u)) = d^2J_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u; v - u). \end{aligned}$$

Donc,  $g''(\theta)$  existe dans  $]0, 1[$ , avec pour tout  $\theta \in ]0, 1[$

$$g''(\theta) = d^2J_{x_0}(u + \theta(v - u); v - u; v - u).$$

On peut donc appliquer le théorème de Taylor à  $g(\theta)$  :

$$\exists \alpha \in ]0, 1[, \text{ tel que } g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\alpha).$$

En réécrivant, il vient

$$J_{x_0}(v) = J_{x_0}(u) + dJ_{x_0}(u; v - u) + \frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u + \alpha(v - u); v - u; v - u)$$

ou encore

$$J_{x_0}(v) - J_{x_0}(u) - dJ_{x_0}(u; v - u) = \frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u + \alpha(v - u); v - u; v - u). \quad (1.4.3)$$

On pose  $z = u + \alpha(v - u)$  et on remplace dans (1.4.3). Alors

$$d^2J_{x_0}(z; \frac{1}{\alpha}(z - u); \frac{1}{\alpha}(z - u)) = \frac{1}{\alpha^2}d^2J_{x_0}(z; (z - u); (z - u))$$

$$\Rightarrow J_{x_0}(v) - J_{x_0}(u) - dJ_{x_0}(u; v - u) = \frac{1}{\alpha^2}d^2J_{x_0}(z; (z - u); (z - u)).$$

Par (1.4.2),  $d^2J_{x_0}(u^*; v; v)$  ne dépend pas de  $u^*$  mais seulement de  $v$ . Donc, si  $d^2J_{x_0}(u^*; v; v) \geq 0$  pour  $u^*$ , nous avons également  $d^2J_{x_0}(u; v; v) \geq 0$  pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$

$$\Rightarrow J_{x_0}(v) - J_{x_0}(u) - dJ_{x_0}(u; v - u) = \frac{1}{\alpha^2}d^2J_{x_0}(z; (z - u); (z - u)).$$

On conclut par le lemme 1.4.1.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Par (1.4.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u^*; v; v) &= Fz(T) \cdot z(T) + (Qz, z)_2 + (v, v)_2 \\ z' &= Az + Bv, \quad z(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Mais (1.4.4) est  $J_0(v)$

$$\Rightarrow J_0(v) = \frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u^*; v; v) \quad \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv)

Pour  $v = 0$ ,  $y(t) = 0$  est solution unique de l'équation différentielle

$$y' = Ay, \quad y(0) = 0.$$

Donc,  $J_0(0) = 0$  et  $J_0(v) \geq 0$  par hypothèse.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Par définition de l'infimum.

(i)  $\Leftrightarrow$  (v) Si  $J_{x_0}(v)$  est convexe pour un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , alors pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2}d^2J_{x_0}(u; v; v) = J_0(v) \geq 0 \quad \forall u, v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

□

### 1.4.2. Unicité de la solution

Nous allons montrer qu'en faisant l'hypothèse que pour tout  $x_0$ ,  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini, le système couplé (1.3.8) possède une solution unique  $(x, p)$  dans  $H^1(0, T) \times H^1(0, T)$ . Ceci n'est pas vrai si  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  n'est pas fini pour tous les  $x_0$ . La convexité de  $J_{x_0}(v)$  n'est pas suffisante.

**Exemple 1.4.1.**

$$J_{x_0}^{ce}(v) \stackrel{\text{def}}{=} -x(1) \cdot x(1) + (v, v)_2 \quad (1.4.5)$$

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) & \text{dans } ]0, 1[ \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R})$ . Ceci est équivalent à (1.2.3) avec  $T = 1$ ,  $F = -1$ ,  $Q = 0$ ,  $A = 0$  et  $B = 1$ . Regardons le cas où  $x_0 = 0$ . Puisque nous avons  $x'(t) = v(t)$  et  $x(0) = 0$ , nous obtenons en intégrant

$$\begin{aligned} \int_0^1 x'(t) dt &= \int_0^1 v(t) dt \\ \Rightarrow x(1) - x(0) &= \int_0^1 v(t) dt \\ \Rightarrow x(1) &= \int_0^1 v(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant  $x(1)$  dans (1.4.5), nous avons pour tout  $v \in L^2(0, 1; \mathbb{R})$ ,

$$J_0^{ce}(v) = -\left(\int_0^1 v(t) dt\right)^2 + \int_0^1 v(t)^2 dt \geq 0 \quad (\text{par Hölder}).$$

De plus, un simple calcul montre que  $J_0^{ce}(0) = 0$ . Nous avons donc bien que  $\inf_{v \in L^2(0,1;\mathbb{R})} J_0^{ce}(v)$  est fini et  $J_{x_0}^{ce}(v)$  est convexe pour tout  $x_0$  (voir lemme 1.4.2). Cependant, sur  $]0, 1[$ , le système couplé

$$\begin{cases} x'(t) = -p(t) \\ x(0) = 0, \\ \\ p'(t) = 0 \\ p(T) = Fx(T) \end{cases}$$

possède comme solution  $x(t) = ct$  et  $p(t) = -c$  pour  $c$  une constante arbitraire. Nous n'avons donc pas unicité du système couplé, ceci étant dû au fait que pour  $x_0 \neq 0$ ,  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}^{ce}(v)$  n'est pas fini. En effet, pour  $x_0 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} x(1) &= x_0 + \int_0^1 v(t) dt \\ \Rightarrow J_{x_0}^{ce}(v) &= -\left(x_0^2 + 2x_0 \int_0^1 v(t) dt + \left(\int_0^1 v(t) dt\right)^2\right) + \int_0^1 v(t)^2 dt. \end{aligned}$$

En prenant la séquence  $v_n(t) = n$  et en laissant  $n \rightarrow \infty$  (pour  $x_0$  positif),

$$J_{x_0}^{ce}(v_n(t)) = -x_0^2 - 2x_0 n \rightarrow -\infty.$$

□

**Lemme 1.4.3.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_0(v)$  admette un seul minimisant. Alors, si  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  admet un minimisant, il est unique.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $J_{x_0}(v)$ ,  $x_0 \neq 0$ , possède deux éléments minimisants  $u_1$  et  $u_2$ . Alors par le théorème 1.2.2 (iii)

$$dJ_{x_0}(u_1; v) = dJ_{x_0}(u_2; v) = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

$$\Rightarrow Fy_1(T) \cdot z(T) + (Qy_1, z)_2 + (u_1, v)_2 = Fy_2(T) \cdot z(T) + (Qy_2, z)_2 + (v_2, v)_2$$

$$y_1' = Ay_1 + Bu_1, \quad y_1(0) = x_0$$

$$\text{où } y_2' = Ay_2 + Bu_2, \quad y_2(0) = x_0$$

$$z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0$$

$$\Rightarrow F(y_1(T) - y_2(T)) \cdot z(T) + (Q(y_1 - y_2), z)_2 + (u_1 - u_2, v)_2 = 0, \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$$

$$\begin{cases} y_1'(t) - y_2'(t) = A(t)(y_1(t) - y_2(t)) + B(t)(u_1(t) - u_2(t)) \\ y_1(0) - y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Comme  $J_0(v)$  est convexe, nous voyons que  $u_1 - u_2$  caractérise  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_0(v)$ . Mais nous savons que 0 est solution de  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_0(v)$  et est solution unique par hypothèse. Nous obtenons donc  $u_1 - u_2 = 0$

$$\Rightarrow u_1(t) = u_2(t).$$

□

**Théorème 1.4.1.** *Si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini, alors le système couplé (1.3.8) possède une solution unique dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \neq 0$ . Nous savons qu'il existe un  $x$ ,  $p$  et  $u$  tels que

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu & \text{dans } ]0, T[ \\ x(0) = x_0 \\ p' + A^*p + Qx = 0 & \text{dans } ]0, T[ \\ p(T) = Fx(T) \\ u = -B^*p. \end{cases}$$

Il existe également un  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{u}$  tels que

$$\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} + B\bar{u} & \text{dans } ]0, T[ \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \bar{p}' + A^*\bar{p} + Q\bar{x} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \\ \bar{p}(T) = F\bar{x}(T) \\ \bar{u} = -B^*\bar{p}. \end{cases}$$

Considérons

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} (x(t) \cdot \bar{p}(t)) dt &= x(T) \cdot \bar{p}(T) - x(0) \cdot \bar{p}(0) \\ &= x(T) \cdot F\bar{x}(T) - x_0 \cdot \bar{p}(0). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Mais nous avons également

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt} (x(t) \cdot \bar{p}(t)) dt &= \int_0^T \dot{x} \cdot \bar{p} + x \cdot \dot{\bar{p}} dt \\
&= \int_0^T [(Ax - BB^* p) \cdot \bar{p} - x \cdot (A^* \bar{p} + Q\bar{x})] dt \\
&= \int_0^T [Ax \cdot \bar{p} - x \cdot A^* \bar{p} - (BB^* p \cdot \bar{p} + x \cdot Q\bar{x})] dt \\
&= \int_0^T [-(BB^* p \cdot \bar{p} + x \cdot Q\bar{x})] dt. \tag{1.4.7}
\end{aligned}$$

Donc en égalant (1.4.6) et (1.4.7),

$$\begin{aligned}
x_0 \cdot \bar{p}(0) &= x(T) \cdot F\bar{x}(T) + \int_0^T [(BB^* p \cdot \bar{p} + x \cdot Q\bar{x})] dt. \\
&= x(T) \cdot F\bar{x}(T) + \int_0^T [B^* p \cdot B^* \bar{p} + x \cdot Q\bar{x}] dt. \\
&= x(T) \cdot F\bar{x}(T) + \int_0^T [Q\bar{x} \cdot x + u \cdot \bar{u}] dt \\
&= \frac{1}{2} dJ_{x_0}(u; \bar{u}) = 0
\end{aligned}$$

puisque  $u$  réalise  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  et que  $\bar{x}(0) = 0$ . Nous avons pour tout  $x_0$ ,

$$x_0 \cdot \bar{p}(0) = 0 \Rightarrow \bar{p}(0) = 0.$$

Le système dynamique

$$\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} + B\bar{u} & \text{dans } ]0, T[ \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}' + A^* \bar{p} + Q\bar{x} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \\ \bar{p}(0) = 0 \end{cases}$$

possède comme solution unique  $(\bar{x}, \bar{p}) = (0, 0)$ . Par le théorème précédent, le système couplé (1.3.8) possède une solution unique et  $u$  est unique.  $\square$

Allons-y d'un théorème qui résume les notions vues jusqu'à présent.

**Théorème 1.4.2.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $J_{x_0}(v)$  possède un minimum.*

- (ii) Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini.
- (iii) Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe une unique paire  $(x, p) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant à la condition (1.3.8), un unique  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant à la condition (1.3.9) et la fonction  $J_{x_0}(v)$  est convexe.

### 1.4.3. Supremum fini

Il est utile de noter à ce stade que nous avons aussi les résultats duaux pour le supremum. En effet, tout supremum peut se ramener à un infimum car

$$\sup_{x \in U} f(x) = - \inf_{x \in U} -f(x).$$

En changeant la fonction d'utilité pour

$$C_{x_0}(v) \stackrel{\text{def}}{=} F_1 x(T) \cdot x(T) + \int_0^T Q_1(t) x(t) \cdot x(t) - v(t) \cdot v(t) dt,$$

avec toujours

$$x' = Ax + Bv, \quad x(0) = x_0, \quad (1.4.8)$$

nous obtenons un théorème dual à celui obtenu pour la minimisation.

**Théorème 1.4.3.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $C_{x_0}(v)$  possède un maximum.
- (ii)  $\sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} C_{x_0}(v)$  est fini.
- (iii) Il existe une paire  $(x, p) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  et une commande  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant à

$$x' = Ax + BB^* p, \quad x(0) = x_0, \quad (1.4.9)$$

$$p' + A^* p + Q_1 x = 0, \quad p(T) = F_1 x(T), \quad (1.4.10)$$

$$u = B^* p. \quad (1.4.11)$$

et la fonction  $C_{x_0}(v)$  est concave.

DÉMONSTRATION. (i)  $\Rightarrow$  (ii) Évident.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) En supposant que le  $\sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} C_{x_0}(v)$  est fini, alors

$\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini avec  $Q = -Q_1$  et  $F = -F_1$ . D'après le théorème 1.2.2, il existe un  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  tel que  $dJ_{x_0}(u; v) = 0$  pour tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . Donc

$$-F_1 y(T) \cdot z(T) + (-Q_1 y, z)_2 + (u, v)_2 = 0$$

avec  $z(t)$  et  $y(t)$  solution de (1.3.6) et (1.3.5) respectivement. En introduisant le système adjoint

$$p' + A^* p + Q_1 y = 0, \quad p(T) = F_1 y(T),$$

et en remplaçant,

$$\begin{aligned} & -p(T) \cdot z(T) + (p' + A^* p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ \Rightarrow & -(p, z')_2 + (A^* p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ \Rightarrow & -(p, Az + Bv)_2 - (A^* p, z)_2 + (u, v)_2 = 0 \\ \Rightarrow & (-B^* p + u, v)_2 = 0, \end{aligned}$$

on trouve  $u = B^* p$ . De plus, la fonction  $J_{x_0}(v)$  est convexe et donc  $C_{x_0}(v) = -J_{x_0}(v)$  est concave.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Analogue à (iii)  $\Rightarrow$  (i) de la preuve du lemme 1.2.1.  $\square$

L'hypothèse globale de finitude pour **tout**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  implique l'unicité de la solution  $(x, p)$  du système couplé.

### 1.5. INVERSIBILITÉ DE L'APPLICATION $X(s)$

On va maintenant considérer le problème de la section 1.2.2 dans l'intervalle  $]s, T[$  pour  $s \in [0, T[$ . On considère le système

$$\begin{cases} x' = Ax + Bv & \text{dans } ]s, T[ \\ x(s) = h \end{cases}$$

avec la fonction coût

$$J_s^h(v) \stackrel{\text{def}}{=} Fx(T) \cdot x(T) + \int_s^T Q(t)x(t) \cdot x(t) + |v(t)|^2 dt. \quad (1.5.1)$$

On pose le problème suivant

$$\inf_{v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)} J_s^h(v) \quad (1.5.2)$$

avec l'hypothèse que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini,  $J_{x_0}(v)$  étant la fonction (1.2.2). Nous avons bien sûr les résultats suivants :

$$\frac{1}{2} dJ_s^h(u; v) = Fy(T) \cdot z(T) + (Qy, z)_2 + (u, v)_2$$

avec  $z(t)$  et  $y(t)$  solution de

$$\begin{aligned} y' &= Ay + Bu, & y(s) &= h \\ z' &= Az + Bv, & z(s) &= 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d^2 J_s^h(u; v; v) &= Fz(T) \cdot z(T) + (Qz, z)_2 + (v, v)_2 & (1.5.3) \\ z' &= Az + Bv, & z(s) &= 0. \end{aligned}$$

Le premier résultat concerne la convexité.

**Théorème 1.5.1.** *Si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , l'application  $u \mapsto J_{x_0}(u)$  est convexe, alors pour tout  $s$ ,  $0 \leq s < T$ , et pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , l'application  $u \mapsto J_s^h(u)$  est convexe.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme (1.4.2) (ii), pour tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ,

$$\frac{1}{2} d^2 J_{x_0}(u; v; v) = Fz(T) \cdot z(T) + (Qz, z)_2 + (v, v)_2 \geq 0,$$

où  $z$  est solution de

$$z' = Az + Bv, \quad z(0) = 0. \quad (1.5.4)$$

Pour prouver le même résultat sur  $[s, T]$ , associons à chaque  $v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)$  son extension par zéro  $\bar{v}$  de  $[s, T]$  à  $[0, T]$

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0, s[ \\ v(t) & \text{sur } [s, T]. \end{cases}$$

Donc,

$$\forall v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m), \quad Fz(T) \cdot z(T) + \int_0^T Qz \cdot z + \bar{v} \cdot \bar{v} dt \geq 0,$$

où  $z$  est solution de (1.5.4). Mais puisque  $\bar{v}$  est zéro sur  $[0, s]$ ,  $z$  est également zéro sur  $[0, s]$  et  $z$  est solution de

$$\begin{aligned} z' &= Az + Bv, & z(s) &= 0. \\ \Rightarrow \forall v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m), & Fz(T) \cdot z(T) + \int_s^T Qz \cdot z + v \cdot v dt \geq 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc que pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)$  et pour tout  $u \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)$ ,

$$\frac{1}{2} d^2 J_s^h(u; v; v) \geq 0.$$

Donc pour tout  $s$ , l'application  $u \mapsto J_s^h(u)$  est convexe.  $\square$

**Théorème 1.5.2.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini pour un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Notons  $(x(\cdot; x_0), p(\cdot; x_0))$  la solution du système couplé (1.3.8) et soit  $u = -B^* p$  la solution optimale dans  $[0, T]$ . Pour  $0 \leq s < T$ ,*

(i)  $\inf_{v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)} J_s^{x(s, x_0)}(v)$  est fini.

(ii) La restriction de  $(x, p)$  à  $[s, T]$  est solution du système couplé

$$\begin{cases} x'_s = Ax_s - BB^* p_s & \text{dans } ]s, T[ \\ x_s(s) = x(s, x_0) \end{cases} \quad (1.5.5)$$

$$\begin{cases} p'_s + A^* p_s + Qx_s = 0 & \text{dans } ]s, T[ \\ p_s(T) = Fx_s(T). \end{cases}$$

et la restriction de  $u_s = u|_{[s, T]}$  vérifie

$$u_s = -B^* p_s. \quad (1.5.6)$$

DÉMONSTRATION. (ii) Puisque  $(x(\cdot; x_0), p(\cdot; x_0))$  est solution du système couplé (1.3.8), alors les restrictions  $(x_s, p_s) = (x|_{[s, T]}, p|_{[s, T]})$  satisfont à (1.5.5) et  $u_s = u|_{[s, T]}$  vérifie (1.5.6). (i) Par le théorème 1.5.1,  $\frac{1}{2} d^2 J_s^h(u; v; v) \geq 0$ . En utilisant l'analogie du théorème 1.3.1, on obtient  $\inf_{v \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)} J_s^{x(s, x_0)}(v)$  est fini.  $\square$

Définissons maintenant l'application

$$X(s) : x_0 \mapsto x(s; x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.5.7)$$

où  $(x, p)$  est solution unique du système couplé (1.3.8) avec  $x_0$  comme donnée initiale. Cette application est évidemment linéaire et continue par le théorème 1.2.1 (ii). Pour obtenir les mêmes résultats qu'au théorème 1.4.2 sur  $[s, T]$ , nous devons vérifier deux choses :

- (1) Si  $h = x(s; x_0)$ , l'unicité de la solution  $(x, p)$  du système d'optimalité (1.5.5) sur  $[s, T]$ .

(2) La surjectivité de l'application linéaire  $X(s)$ .

Le premier énoncé semble évident à première vue. En effet, puisque le système d'optimalité (1.5.5) possède une solution unique sur  $[0, T]$  (théorème 1.4.1), le système semble logiquement posséder une solution unique sur  $[s, T]$ . Il faut cependant s'en assurer, car on peut construire un exemple qui indiquerait que ce n'est pas vrai.

**Exemple 1.5.1.**

$$\begin{cases} x'(t) = 4(t-1)p(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5.8)$$

$$\begin{cases} p'(t) = 0 \\ p(2) = \frac{1}{2}x(2). \end{cases}$$

Comme nous voyons, ceci est le système  $(x, p)$  de l'équation (1.3.8) avec  $A = 0$ ,  $BB^* = 4(t-1)$ ,  $A^* = 0$ ,  $Q = 0$  et  $F = \frac{1}{2}$ . Résolvons ce système sur  $[0, 2]$ . Puisque  $p'(t) = 0$ ,  $p(t)$  est une constante et donc

$$p(t) = p(2) = \frac{1}{2}x(2).$$

De plus,

$$\begin{aligned} x(2) &= x(0) + \int_0^2 4(t-1)p(t) dt \\ &= x_0 + \frac{1}{2}x(2) \int_0^2 4(t-1) dt \\ &= x_0 + \frac{1}{2}x(2)(t-1)^2 \Big|_{t=0}^{t=2} \\ &= x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0 + \int_0^t 4(s-1) \frac{1}{2} x_0 ds \\ &= x_0 + x_0(s-1)^2 \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= x_0 + x_0 [(t-1)^2 - 1] \\ &= x_0(t-1)^2. \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$x(t) = x_0(t-1)^2 \quad \text{et} \quad p(t) = \frac{1}{2}x_0$$

et donc la solution est unique sur  $[0, 2]$  pour tout  $x_0$ . Nous voyons que  $x(1) = 0$ .

Résolvons maintenant le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4(t-1)p_1(t) \\ x_1(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1'(t) = 0 \\ p_1(2) = \frac{1}{2}x_1(2) \end{cases}$$

sur  $[1, 2]$ . Puisque  $p_1'(t) = 0$ ,  $p_1(t)$  est une constante et donc

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_1(1) + \int_1^2 4(t-1)p_1(t) dt \\ &= c \int_1^2 4(t-1) dt \quad \text{où } c \text{ est une constante arbitraire} \\ &= cx(2) (t-1)^2 \Big|_{t=1}^{t=2} \\ &= 2c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t) &= x_1(1) + c \int_1^t 4(s-1) ds \\ &= 2c(s-1)^2 \Big|_{s=1}^{s=t} \\ &= 2c(t-1)^2 \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$x_1(t) = 2c(t-1)^2 \quad \text{et} \quad p_1(t) = c$$

et donc le système possède une infinité de solutions sur  $[1, 2]$  malgré le fait que la solution soit unique sur  $[0, 2]$  ! □

Cet exemple ne correspond cependant pas à notre problème de minimisation. En effet, le terme  $4(t-1)$  change de signe alors que  $BB^*$  est toujours positif. Il indique toutefois que l'unicité du système d'optimalité sur  $[s, T]$  n'est pas automatique.

**Théorème 1.5.3.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  soit fini pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ . La solution  $(x_s, p_s)$  du système couplé (1.5.5) et l'élément minimisant  $u_s$  de (1.5.6) sont uniques.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\bar{u}_s$  est un élément minimisant de  $J_s^{x(s;x_0)}$ . Il est complètement caractérisé par le système couplé  $(\bar{x}_s, \bar{p}_s)$ . Soit  $u$  l'élément minimisant unique de  $J_{x_0}$  et  $(x, p)$  la solution au système couplé correspondante. Considérons la nouvelle fonction suivante sur  $[0, T]$

$$\hat{u} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & \text{sur } [0, s] \\ \bar{u}_s, & \text{sur } [s, T]. \end{cases}$$

Si nous pouvons montrer que  $\hat{u}$  est un élément minimisant de  $J_{x_0}$  sur  $[0, T]$ , alors par l'unicité de l'élément minimisant sur  $[0, T]$ , on peut conclure que  $\hat{u} = u$  et donc que  $\bar{u}_s = u|_{[s, T]}$ . Puisque  $x = \hat{x}$  sur  $[0, s]$ ,

$$\begin{aligned} J_{x_0}(u) &= J_s^{x(s;x_0)}(u|_{[s, T]}) + \int_0^s Q(t)x(t) \cdot x(t) + |u(t)|^2 dt \\ &\geq J_s^{x(s;x_0)}(\bar{u}_s) + \int_0^s Q(t)x(t) \cdot x(t) + |u(t)|^2 dt \\ &= J_{x_0}(\hat{u}). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{x_0}(\hat{u}) = J_{x_0}(u).$$

Donc puisque  $\hat{u}$  est un élément minimisant de  $J_{x_0}$ , on peut conclure que  $\bar{u}_s = u|_{[s, T]}$ . On obtient ainsi l'unicité de l'élément minimisant de  $J_s^{x(s;x_0)}$  sur  $[s, T]$  et l'unicité de la solution du système couplé (1.5.5).  $\square$

Donc si l'application linéaire  $X(s)$  est surjective, nous pourrions reprendre les résultats obtenus sur  $[0, T]$ .

**Théorème 1.5.4.** *L'application linéaire et continue*

$$X(s) : x_0 \mapsto x(s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*est une bijection.*

DÉMONSTRATION. Puisque l'application  $X(s)$  est linéaire sur un espace de dimension finie,  $X(s)$  est injective si et seulement si elle est surjective. Supposons par contradiction que  $X(s)$  ne soit pas injective. Alors

$$\exists x_0 \neq 0 \text{ tel que } X(s)x_0 = 0.$$

Si  $x(s) = 0$ ,  $(\dot{x}_s, p_s) = (0, 0)$  sur  $[s, T]$  est solution de (1.5.5). Mais par le théorème 1.5.3, cette solution est unique. L'unique solution de (1.3.8) avec  $(x_s, p_s) = (0, 0)$  sur  $[s, T]$  est  $(x, p) = (0, 0)$  sur  $[0, T]$ . Donc il n'existe pas de  $x_0 \neq 0$  tel que  $X(s)x_0 = 0$ .  $\square$

Nous avons donc les résultats suivants sur  $[s, T]$ .

**Théorème 1.5.5.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  est fini pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $s \in [0, T[$  et pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $J_s^h(v)$  possède un unique élément minimisant  $u_s \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et il existe une solution unique  $(x_s, p_s)$  au système couplé*

$$\begin{cases} x'_s = Ax_s - BB^*p_s & \text{dans } ]s, T[ \\ x_s(s) = h \\ p'_s + A^*p_s + Qx_s = 0 & \text{dans } ]s, T[ \\ p_s(T) = Fx_s(T). \end{cases} \quad (1.5.9)$$

avec

$$u_s = -B^*p_s. \quad (1.5.10)$$

## 1.6. ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION $P(t)$ ET ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI

### 1.6.1. Transformation $P(t)$

Nous avons besoin des lemmes suivants.

**Lemme 1.6.1.** *Pour  $0 \leq s < T$ ,  $(x_s, p_s)$  solution du système couplé (1.5.9) avec donnée initiale  $h$ , l'application*

$$h \mapsto (x_s, p_s) : \mathbb{R}^n \rightarrow H^1(s, T; \mathbb{R}^n) \times H^1(s, T; \mathbb{R}^n)$$

*est linéaire et continue.*

**DÉMONSTRATION.** Soit

$$\alpha h_1 + \beta h_2 \mapsto (x_s, p_s) : \mathbb{R}^n \rightarrow H^1(s, T; \mathbb{R}^n) \times H^1(s, T; \mathbb{R}^n)$$

Donc,

$$\begin{cases} x'_s = Ax_s - BB^*p_s, & x_s(s) = \alpha h_1 + \beta h_2 \\ p'_s + A^*p_s + Qx_s = 0, & p_s(T) = Fx_s(T). \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Par le théorème 1.5.5, il existe des systèmes couplés  $(x_{1s}, p_{1s})$  et  $(x_{2s}, p_{2s})$  tels que

$$\begin{cases} x'_{1s} = Ax_{1s} - BB^* p_{1s}, & x_{1s}(s) = h_1 \\ p'_{1s} + A^* p_{1s} + Qx_{1s} = 0, & p_{1s}(T) = Fx_{1s}(T). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x'_{2s} = Ax_{2s} - BB^* p_{2s}, & x_{2s}(s) = h_2 \\ p'_{2s} + A^* p_{2s} + Qx_{2s} = 0, & p_{2s}(T) = Fx_{2s}(T). \end{cases}$$

Mais  $(\alpha x_{1s} + \beta x_{2s}, \alpha p_{1s} + \beta p_{2s})$  satisfait (1.6.1), et par unicité de la solution

$$(\alpha x_{1s} + \beta x_{2s}, \alpha p_{1s} + \beta p_{2s}) = (x_s, p_s). \quad \square$$

Pour  $0 \leq s < T$ ,  $(x_s, p_s)$  solution du système couplé (1.5.9) avec donnée initiale  $h$ , définissons l'application  $P(s)$

$$h \mapsto P(s)h \stackrel{\text{def}}{=} p_s(s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.6.2)$$

qui est linéaire et continue par le lemme précédent.

**Lemme 1.6.2.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  soit fini pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $(x, p)$  (resp.  $(\bar{x}, \bar{p})$ ) la solution du système (1.5.9) pour la donnée initiale  $h$  (resp.  $\bar{h}$ ).*

(i) *Alors*

$$h \cdot P(s)\bar{h} = Fx(T) \cdot \bar{x}(T) + \int_s^T x(t) \cdot Q(t)\bar{x}(t) + p(t) \cdot B(t)B^*(t)\bar{p}(t) dt. \quad (1.6.3)$$

*On en déduit que  $P(s)^* = P(s)$ .*

(ii) *Si  $u$  est l'élément réalisant le minimum de (1.5.1), alors*

$$J_s^h(u) = h \cdot P(s)h. \quad (1.6.4)$$

(iii) *L'application*

$$t \mapsto P(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

*est continue.*

**DÉMONSTRATION.** (i) De façon générale, on a pour tout  $\bar{x}$  et tout  $p$

$$p(T) \cdot \bar{x}(T) - p(s) \cdot \bar{x}(s) = \int_s^T p'(r) \cdot \bar{x}(r) + p(r) \cdot \bar{x}'(r) dr. \quad (1.6.5)$$

Nous avons également par définition

$$\begin{aligned} p' + A^*p + Qx &= 0 \text{ dans } [s, T], \quad p(T) = Fx(T), \quad p(s) = P(s)x(s) \\ \bar{x}' &= A\bar{x} - BB^*\bar{p} \text{ dans } [s, T], \quad \bar{x}(s) = \bar{h}, \quad x(s) = h. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

En combinant les équations (1.6.5) et (1.6.6), on obtient

$$\begin{aligned} & Fx(T) \cdot \bar{x}(T) - P(s)x(s) \cdot \bar{x}(s) \\ &= \int_s^T -[A^*(t)p(t) + Q(t)x(t)] \cdot \bar{x}(t) + p(t) \cdot [A(t)\bar{x}(t) - B(t)B^*(t)\bar{p}(t)] dt \\ &= - \int_s^T Q(t)x(t) \cdot \bar{x}(t) + p(t) \cdot B(t)B^*(t)\bar{p}(t) dt \quad (\text{par symétrie de } A) \end{aligned}$$

et après réarrangement des termes il vient (1.6.3). On voit immédiatement que par symétrie de  $F$ ,  $Q(t)$  et  $B(t)B^*(t)$ ,  $P(s)$  est symétrique.

(ii) On obtient facilement (1.6.4) en remplaçant  $-B^*p$  par  $u$  dans (1.6.3) et avec  $h = \bar{h}$  dans cette même égalité. (iii) Associez avec la solution du système couplé (1.3.8) sur  $[0, T]$ , la fonction matricielle

$$\Lambda(s)x_0 \stackrel{\text{def}}{=} p(s; x_0) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq s \leq T.$$

Nous avons également vu la fonction matricielle inversible  $X(s)$  définie par (1.5.7).

$$\begin{aligned} \Lambda(s)x_0 &= P(s)X(s)x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \Lambda(s) &= P(s)X(s). \end{aligned}$$

Mais puisque  $X(s)$  est inversible,

$$P(s) = \Lambda(s)X(s)^{-1}.$$

Les composantes des fonctions matricielles  $X(s)^{-1}$  et  $\Lambda(s)$  sont dans  $H^1(0, T)$

$$\Rightarrow t \mapsto P(t) \text{ est continue.}$$

□

### 1.6.2. Étude de la résolvante $\Phi(t, s)$ et équations différentielles matricielles

Soient  $0 < t \leq T$  et  $0 \leq s < T$ , on considère les équations

$$\begin{aligned} p'(r) + D(r)^* p(r) + g(r) &= 0 \quad \text{p.p. dans } [0, t], & p(t) &= z \\ x'(r) &= D(r)x(r) + f(r) \quad \text{p.p. dans } [s, T], & x(s) &= x_0, \end{aligned}$$

où les éléments de  $D$  sont dans  $L^2(0, T)$ . Nous avons vu que ces équations ont une solution unique et par le théorème 1.2.1 et le théorème 1.3.2 que les applications

$$\begin{aligned} (z, g) &\mapsto p(\cdot; t, z, g) : \mathbb{R}^n \times L^2(0, T) \rightarrow H^1(0, t; \mathbb{R}^n) \\ (x_0, f) &\mapsto x(\cdot; s, x_0, f) : \mathbb{R}^n \times L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

sont linéaires et continues. Nous pouvons donc déduire de ces équations les deux corollaires suivants.

**Corollaire 1.6.1.** *L'application  $z \mapsto p(\cdot; t, z, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire et continue. Elle définit donc une transformation linéaire et continue  $\Psi(t, s)$  de  $\mathbb{R}^n$*

$$\Psi(t, s)z = p(s; t, z, 0).$$

**Corollaire 1.6.2.** *L'application  $x_0 \mapsto x(\cdot; s, x_0, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire et continue. Elle définit donc une transformation linéaire et continue  $\Phi(t, s)$  de  $\mathbb{R}^n$*

$$\Phi(t, s)x_0 = x(t; s, x_0, 0).$$

Étudions quelques propriétés de ces deux transformations linéaires que nous appellerons résolvantes qui nous seront utiles.

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $\nabla[0, T] = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ . Alors pour tout  $(t, s) \in \nabla[0, T]$ ,*

- (i)  $\Psi(t, s) = \Phi(t, s)^*$ .
- (ii)  $\Phi(t, s)$  est inversible.

**DÉMONSTRATION.** (i) Soient  $x$  et  $p$  les solutions de

$$\begin{cases} x'(r) = A(r)x(r) & \text{dans } [s, T] \\ x(s) = x_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'(r) + A(r)^* p(r) = 0 & \text{dans } [0, t] \\ p(t) = z. \end{cases}$$

Considérons l'application  $r \mapsto p(r) \cdot x(r)$  dans  $[s, T]$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(p(r) \cdot x(r)) &= p'(r) \cdot x(r) + p(r) \cdot x'(r) \\ &= -A(r)^* p(r) \cdot x(r) + p(r) \cdot A(r)x(r) = 0. \end{aligned}$$

et donc  $p(r) \cdot x(r)$  est constant sur  $[s, T]$ . Il vient

$$z \cdot \Phi(t, s)x_0 = p(t) \cdot x(t) = p(s) \cdot x(s) = \Psi(t, s)z \cdot x_0$$

et nécessairement  $\Psi(t, s) = \Phi(t, s)^*$ .

(ii) On considère les systèmes

$$\begin{cases} x'(r) = A(r)x(r) & \text{dans } [s, t] \\ x(s) = x_0, \end{cases} \quad \begin{cases} z'(r) = -A^*(r)z(r) & \text{dans } [s, t] \\ z(s) = z_0. \end{cases}$$

Soient  $\Phi$  et  $Z$  les résolvantes associées à  $A$  et  $-A^*$ , respectivement,

$$x(r) = \Phi(r, s)x_0, \quad z(r) = Z(r, s)z_0.$$

Par définition  $r \mapsto z(r) \cdot x(r)$  est  $H^1(s, t)$  et

$$\frac{d}{dr}[z(r) \cdot x(r)] = z'(r) \cdot x(r) + z(r) \cdot x'(r) = 0.$$

On a donc

$$Z(t, s)z_0 \cdot \Phi(t, s)x_0 = z(t) \cdot x(t) = z(s) \cdot x(s) = x_0 \cdot z_0$$

et nécessairement

$$Z(t, s)^* \Phi(t, s) = I \text{ (la transformation identité de } \mathbb{R}^n \text{)}.$$

On en conclut que l'inverse à gauche de  $\Phi(t, s)$  est surjectif. Comme nous sommes en dimension finie, il est donc inversible.  $\square$

Puisque l'on connaît les propriétés de  $P(t)$  par rapport à  $t$ , on peut considérer le système

$$\begin{cases} x' = (A - RP)x \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.6.7)$$

On peut associer avec  $A - RP$  la résolvante  $\Phi_p(t, s)$  dont on connaît maintenant les propriétés par rapport à  $(t, s)$ . Ceci va nous permettre une équation différentielle matricielle pour  $P$ . Introduisons avant la notion d'équation différentielle pour une transformation ou une matrice.

**Définition 1.6.1.** On dit que la fonction matricielle  $G$  dans  $[0, T]$  est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt}(t) = A(t)G(t), & \text{dans } [s, T] \\ G(s) = C, \end{cases} \quad (1.6.8)$$

si pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , l'application  $t \mapsto G(t)x_0$  est la solution dans  $H^1(s, t; \mathbb{R}^n)$  de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t), & \text{dans } [s, T] \\ x(s) = Cx_0, \end{cases} \quad (1.6.9)$$

□

### 1.6.3. Équation différentielle de Riccati dans $[0, T]$

**Théorème 1.6.2.** *Supposons que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} J_{x_0}(v)$  soit fini pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

*Il existe une solution symétrique unique de l'équation différentielle matricielle de Riccati*

$$\boxed{P' + PA + A^*P - PRP + Q = 0, \quad P(T) = F} \quad (1.6.10)$$

où  $R = BB^*$ .

**DÉMONSTRATION.** (ia) (Existence, 1re démonstration). Montrons que la fonction matricielle  $P$  est solution de l'équation matricielle de Riccati. Puisque  $X(s)$  est inversible et les éléments des matrices  $X^{-1}$  et  $\Lambda$  sont des fonctions  $H^1(0, T)$ ,  $P(s)$  est différentiable.

On sait que

$$p(t) = P(t)x(t), \quad t \in [s, T]. \quad (1.6.11)$$

En remplaçant (1.6.11) dans (1.5.9), on obtient

$$\begin{cases} x' = (A - RP)x \\ x(s) = h. \end{cases} \quad (1.6.12)$$

Soit  $\Phi_p(t, s)$  la résolvante associée à  $A - RP$ . On a

$$x(t) = \Phi_p(t, s)h. \quad (1.6.13)$$

En partant de (1.6.3),

$$\begin{aligned} h \cdot P(s)\bar{h} &= Fx(T) \cdot \bar{x}(T) + \int_s^T x \cdot Q\bar{x} + p \cdot R\bar{p} dt \\ &= Fx(T) \cdot \bar{x}(T) + \int_s^T x \cdot Q\bar{x} + Px \cdot RP\bar{x} dt \quad (\text{par (1.6.11)}) \\ &= Fx(T) \cdot \bar{x}(T) + \int_s^T (Q + PRP)x \cdot \bar{x} dt \quad (\text{par symétrie de } Q, R, P) \\ &= F\Phi_p(T, s)h \cdot \Phi_p(T, s)\bar{h} \\ &\quad + \int_s^T (Q + PRP)\Phi_p(t, s)h \cdot \Phi_p(t, s)\bar{h} dt. \quad (\text{par (1.6.13)}) \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Nous avons vu que

$$\frac{d}{ds}\Phi_p(t, s)^*k + [A(s) - R(s)P(s)]^*\Phi_p(t, s)^*k = 0$$

et en transposant

$$\frac{d}{ds}\Phi_p(t, s)h + \Phi_p(t, s)[A(s) - R(s)P(s)]h = 0. \quad (1.6.15)$$

On obtient donc en utilisant (1.6.14), (1.6.15) et le fait que  $\Phi_p(s, s) = I$ ,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}h \cdot P(s)\bar{h} \\ &= -\Phi_p(T, s)[A(s) - R(s)P(s)]h \cdot F\Phi_p(T, s)\bar{h} \\ &\quad - \int_s^T (Q(t) + P(t)R(t)P(t))\Phi_p(t, s)[A(s) - R(s)P(s)]h \cdot \Phi_p(t, s)\bar{h} dt \\ &\quad - \Phi_p(T, s)h \cdot F\Phi_p(T, s)[A(s) - R(s)P(s)]\bar{h} \\ &\quad - \int_s^T (Q(t) + P(t)R(t)P(t))\Phi_p(t, s)h \cdot \Phi_p(t, s)[A(s) - R(s)P(s)]\bar{h} dt. \\ &\quad - [Q(s) + P(s)R(s)P(s)]h \cdot \bar{h}. \\ &= -[A(s) - R(s)P(s)]h \cdot P(s)\bar{h} - h \cdot P(s)[A(s) - R(s)P(s)]\bar{h} \\ &\quad - [Q(s) + P(s)R(s)P(s)]h \cdot \bar{h}. \\ &= -h \cdot A(s)^*P(s)\bar{h} - h \cdot P(s)A(s)\bar{h} + h \cdot P(s)R(s)P(s)\bar{h} - h \cdot Q(s)\bar{h} \end{aligned}$$

Mais puisque  $h \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\frac{d}{ds} (h \cdot P(s)\bar{h}) = h \cdot \frac{d}{ds} P(s)\bar{h}$$

et donc pour presque tout  $s$  dans  $]0, T[$

$$h \cdot \frac{d}{ds} P(s)\bar{h} + h \cdot A(s)^* P(s)\bar{h} + h \cdot P(s)A(s)\bar{h} - h \cdot P(s)R(s)P(s)\bar{h} + h \cdot Q(s)\bar{h} = 0.$$

Cette dernière identité étant vérifiée pour tout  $h$  et  $\bar{h}$ , on obtient (1.6.10).

(ib) (existence, 2e démonstration) Nous savons que les éléments des matrices  $X^{-1}$  et  $\Lambda$  sont des fonctions  $H^1(0, T)$ ,  $P(s)$  est différentiable et

$$\begin{aligned} P(t) &= \Lambda(t)X^{-1}(t) \\ \begin{cases} X' &= AX - BB^*\Lambda \\ X(0) &= I \end{cases} \\ \begin{cases} \Lambda' + A^*\Lambda + QX &= 0 \\ \Lambda(T) &= F. \end{cases} \end{aligned}$$

Calculons maintenant la dérivée de  $X^{-1}(t)$ .

$$\begin{aligned} X^{-1}(t)X(t) &= I \\ \Rightarrow \frac{dX^{-1}(t)}{dt}X(t) + X^{-1}(t)\frac{dX(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dX^{-1}(t)}{dt} &= -X^{-1}(t)\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P' &= \Lambda'X^{-1} + \Lambda \frac{dX^{-1}(t)}{dt} \\ &= \Lambda'X^{-1} - \Lambda X^{-1}X'X^{-1} \\ &= \Lambda'X^{-1} - PX'X^{-1} \\ &= -(A^*\Lambda + QX)X^{-1} - P(AX - BB^*\Lambda)X^{-1} \\ &= -A^*\Lambda X^{-1} + Q - PA - PBB^*\Lambda X^{-1} \\ &= -A^*P + Q - PA - PBB^*P. \\ \Rightarrow P' + A^*P + Q + PA + PBB^*P &= 0. \end{aligned}$$

(ii) (unicité) Supposons  $\bar{P}$  une autre solution de (1.6.10). Fixons  $s$  dans  $[0, T]$  et définissons la commande

$$u(t) = -B(t)^* \bar{P}(t)x(t), \text{ p.p. dans } [s, T],$$

où  $x$  est la solution unique dans  $[s, T]$  de

$$\begin{cases} x' = (A - BB^* \bar{P})x \\ x(s) = h. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

Soit

$$p(t) = \bar{P}(t)x(t). \quad (1.6.17)$$

Alors  $p$  est la solution de

$$\begin{cases} p' + A^* p + Qp = 0 \\ p(T) = Fx(T). \end{cases} \quad (1.6.18)$$

car

$$\begin{aligned} p' &= \bar{P}'x + \bar{P}x' \\ &= (\bar{P}' + A^* \bar{P} + Q + \bar{P}A + \bar{P}BB^* \bar{P})x + \bar{P}(A - BB^* \bar{P})x \\ &= -A^* \bar{P}x - Qx. \end{aligned}$$

Enfin en utilisant (1.6.17), on peut réécrire (1.6.16) comme

$$\begin{cases} x' = Ax - BB^* p \\ x(s) = h. \end{cases} \quad (1.6.19)$$

Le couple  $(x, p)$  est donc la solution du système (1.6.18)-(1.6.19). On a donc

$$\bar{P}(s)h = p(s) = P(s)h.$$

Comme cette dernière identité est vraie pour tout  $h$  et pour tout  $s$ , on a  $\bar{P} = P$ .  $\square$

Comme nous avons mentionné au début de la section 1.2.2, si  $Q(t) \geq 0$  (pour tout  $t$ ) et  $F \geq 0$ , alors la fonction (1.2.2) est convexe. En effet, dans ce cas,  $J_0(v) \geq 0$  pour tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et on conclut par le lemme 1.4.2. Voyons maintenant un exemple où  $F$  n'est pas semi-définie positive mais la fonction (1.2.2) est tout de même convexe.

**Exemple 1.6.1.** Considérons le système dynamique sur  $[0, 2]$  et la fonction d'utilité

$$x'(t) = (2-t)u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$J_{x_0}(u) = -\frac{1}{4}(x(2))^2 + \int_0^2 |u(t)|^2 dt.$$

Ici,  $A = 0$ ,  $F = -\frac{1}{4}$ ,  $B(t) = 2-t$  et  $Q = 0$ . La dérivée seconde  $d^2J(u; v)$  est donc

$$\begin{aligned} J_0(v) &= -\frac{1}{4}(y(2))^2 + \int_0^2 v(t)^2 dt & y'(t) &= (2-t)u(t), & y(0) &= 0 \\ &= -\frac{1}{4} \left( \int_0^2 (2-t)v(t) dt \right)^2 + \int_0^2 v(t)^2 dt \\ &\geq -\frac{1}{4} \left( \int_0^2 (2-t)^2 dt \right) \left( \int_0^2 v(t)^2 dt \right) + \int_0^2 v(t)^2 dt && \text{(par Hölder car } F < 0) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} \left( \int_0^2 v(t)^2 dt \right) + \int_0^2 v(t)^2 dt \\ &= \left( \int_0^2 v(t)^2 dt \right) \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \int_0^2 v(t)^2 dt \right) \geq 0. \end{aligned}$$

On en conclut que  $J_{x_0}(u)$  est convexe en  $u$ . □

### 1.7. PROBLÈME DE COMMANDE EN HORIZON INFINI

Dans ce chapitre, à partir de certaines hypothèses, nous essayerons de minimiser la fonction coût

$$C_\infty^0(v, h) = \int_0^\infty Qx(t) \cdot x(t) + |v(t)|^2 dt \quad (1.7.1)$$

par rapport à toutes les commandes  $v$  dans  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{R}^m)$  où

$$x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = h.$$

Définissons maintenant la fonction

$$C_T^s(v, h) = \int_s^T Qx(t) \cdot x(t) + |v(t)|^2 dt, \quad (1.7.2)$$

où

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t) & \text{dans } [s, T] \\ x(s) = h. \end{cases}$$

On voit que c'est la fonction coût  $J_{x_0}^s(v)$  avec les matrices  $A$ ,  $B$  et  $Q$  constantes et  $F = 0$ .  
Définissons  $P_T(s)$  comme l'application (1.6.2) associée au système couplé sur  $[s, T]$ .

On a vu que

$$h \cdot P_T(s)\bar{h} = \int_s^T x(t) \cdot Q\bar{x}(t) + p(t) \cdot BB^* \bar{p}(t) dt \quad (1.7.3)$$

$$= \int_s^T \Phi_T(t, s)h \cdot Q\Phi_T(t, s)\bar{h} + P_T(t)\Phi_T(t, s)h \cdot BB^* P_T(t)\Phi_T(t, s)\bar{h} dt. \quad (1.7.4)$$

Ici,  $\Phi_T(t, s)$  est la famille de transformations associée à

$$\begin{cases} x'_s(t) = [A - BB^* P_T(t)]x_s(t) & \text{dans } [s, T] \\ x_s(s) = h \end{cases}$$

où

$$\Phi_T(t, s)h = x(t).$$

**Théorème 1.7.1.** *Supposons que pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h) \text{ existe et est finie.}$$

*Alors il existe un  $P = P^*$  tel que pour tout  $s \geq 0$ ,*

$$P_T(s) \rightarrow P \text{ lorsque } T \rightarrow \infty.$$

**Remarque :** Nous ne supposons pas ici que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  est fini pour tout  $T$ . Nous savons que  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  est borné supérieurement (en prenant  $v = 0$ , par exemple), mais a priori, certains éléments de la suite pourraient donc prendre comme valeur  $-\infty$ . Nous entendons par la limite existe et est finie qu'il existe un  $c \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists T_1 > 0 \text{ tel que } \forall T > T_1, \quad |C_T^0(v, h) - c| < \epsilon.$$

**DÉMONSTRATION.** Nous ne savons pas si  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  est finie pour tout  $T$ . Mais puisque la limite existe et est finie, il existe un  $T_1$  tel que pour tout  $T \geq T_1$ ,  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  est finie. En considérant les  $T \geq T_1$ , par le lemme 1.6.2 (ii),

$$(P_T(0)h, h) = P_T(0)h \cdot h = \inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h).$$

Donc par hypothèse, pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0)h \cdot h \text{ existe.}$$

Mais par symétrie

$$2(P_T(0)h, k) = (P_T(0)h, h) + (P_T(0)k, k) - (P_T(0)(h - k), h - k)$$

et pour tout  $h$  et tout  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0)h \cdot k \text{ existe.}$$

De plus, puisque les matrices  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont constantes, on vérifie aisément que

$$\inf_{w \in L^2(s, T; \mathbb{R}^m)} C_T^s(w, h) = \inf_{v \in L^2(0, T-s; \mathbb{R}^m)} C_{T-s}^0(v, h).$$

Donc, pour tout  $s \geq 0$  et pour tout  $h$  et tout  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(s)h \cdot k = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{T-s}(0)h \cdot k = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T(0)h \cdot k. \quad (1.7.5)$$

Comme  $\mathbb{R}^n$  est de dimension finie, ceci veut dire que pour tout  $s \geq 0$ , la famille de matrices  $P_T(s)$  converge élément par élément vers une matrice  $P$ . Finalement,  $P$  est symétrique car

$$(Ph, k)_{\mathbb{R}^n} \xleftarrow{T \rightarrow \infty} (P_T(0)h, k)_{\mathbb{R}^n} = (h, P_T(0)k)_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (h, Pk)_{\mathbb{R}^n}.$$

□

Nous ferons désormais l'hypothèse que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  existe et est finie pour tout  $h$  d'ici la fin du chapitre. Nous avons supposé précédemment que certains éléments de la suite  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  pourraient prendre comme valeur  $-\infty$ , même si la limite existe et est finie lorsque  $T$  tend vers l'infini. Ceci est impossible. En effet, puisque la limite existe et est finie, il existe un  $T_1$  tel que pour tout  $T \geq T_1$ ,  $\inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  est finie. Supposons qu'il existe un  $t_1 < T_1$  tel que  $\inf_{v \in L^2(0, t_1; \mathbb{R}^m)} C_{t_1}^0(v, h) = -\infty$ . Soit  $s = T_1 - t_1$ . Nous savons par le chapitre précédent que  $\inf_{v \in L^2(s, T_1; \mathbb{R}^m)} C_{T_1}^s(v, h)$  est fini. Mais

$$\inf_{v \in L^2(0, t_1; \mathbb{R}^m)} C_{t_1}^0(v, h) = \inf_{v \in L^2(s, T_1; \mathbb{R}^m)} C_{T_1}^s(v, h) > -\infty$$

ce qui conclut. Nous avons donc pour tout  $h$  et pour tout  $T > 0$  l'existence d'un  $c_1$  tel que

$$|P_T(t)h \cdot h| < c_1 < \infty, \quad t \in [0, T].$$

Par symétrie, nous avons aussi que pour tout  $h$  et tout  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$  l'existence d'une constante  $c_2$  telle que

$$|P_T(t)h \cdot k| < c_2, \quad t \in [0, T].$$

Par le principe de la borne uniforme, pour chaque  $h$ , il existe une constante  $c(h)$  telle que

$$|P_T(t)h| < c(h), \quad t \in [0, T].$$

De nouveau, par le même principe

$$\exists c > 0, \|P_T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} < c, \quad t \in [0, T]. \quad (1.7.6)$$

On fixe maintenant  $t_1 > 0$  et  $y \in L^1(0, t_1; \mathbb{R}^n)$ . Soit  $T \geq t_1$  et définissons

$$f_T(t) = P_T(t)y(t), \quad f(t) = Py(t) \quad \text{dans } [0, t_1].$$

En raison de (1.7.6),  $f_T$  et  $f$  appartiennent à  $L^1(0, t_1; \mathbb{R}^n)$ . De plus,  $f_T$  et  $f$  sont bornées presque partout par la fonction  $c\|y(t)\|$  qui appartient à  $L^1(0, t_1)$ . En vertu de (1.7.5), pour tout  $t \in [0, t_1]$ ,

$$f_T(t) = P_T(t)y(t) \rightarrow f(t) = Py(t) \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty.$$

Par le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée,  $f_T \rightarrow f$  dans  $L^1(0, t_1; \mathbb{R}^n)$ . Soient  $x_T$  et  $x$  les solutions des équations

$$x'_T(t) = [A - BB^*P_T(t)]x_T(t), \quad t \in [0, T], \quad x_T(0) = h \quad (1.7.7)$$

$$x'(t) = [A - BB^*P]x(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = h. \quad (1.7.8)$$

Montrons que  $x_T(t) \rightarrow x(t)$  uniformément dans  $[0, t_1]$ . On définit sur  $[0, t_1]$

$$y_T(t) = x_T(t) - x(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
y_T'(t) &= [A - BB^*P_T(t)]y_T(t) + BB^*[P - P_T(t)]x(t), \quad y_T(0) = 0 \\
\Rightarrow y_T(t) &= \int_0^t [A - BB^*P_T(r)]y_T(r) + BB^*[P - P_T(r)]x(r) \, dr \\
\Rightarrow |y_T(t)| &\leq \int_0^t [\| [A - BB^*P_T(r)] \| |y_T(r)| + \| BB^* \| \| [P - P_T(r)]x(r) \|] \, dr. \quad (1.7.9)
\end{aligned}$$

On modifie maintenant la topologie de l'espace  $C[0, t_1]$

$$\|y_T\|_{C[0, t_1]} = \sup_{t \in [0, t_1]} |y_T(t)|.$$

Pour  $\alpha$  arbitraire,  $0 < \alpha < 1$ , on introduit la fonction monotone croissante

$$g_\alpha(t) = \exp \left[ \frac{1}{\alpha} \int_0^t \| [A - BB^*P_T(r)] \| \, dr \right] \geq 1$$

et la nouvelle norme

$$\|y_T\|_\alpha = \sup_{t \in [0, t_1]} \frac{|y_T(t)|}{g_\alpha(t)}.$$

On voit que puisque  $g_\alpha(t) \geq 1$ ,

$$\|y_T\|_\alpha \leq \|y_T\|_{C[0, t_1]} \leq g_\alpha(t_1) \|y_T\|_\alpha. \quad (1.7.10)$$

En revenant à (1.7.9),

$$\begin{aligned}
|y_T(t)| &\leq \int_0^t \left[ \| [A - BB^*P_T(r)] \| g_\alpha(r) \frac{|y_T(r)|}{g_\alpha(r)} + \| BB^* \| \| [P - P_T(r)]x(r) \| \right] \, dr \\
&\leq \max_{[0, t_1]} \frac{|y_T(r)|}{g_\alpha(r)} \int_0^t [\| [A - BB^*P_T(r)] \| g_\alpha(r) + \| BB^* \| \| [P - P_T(r)]x(r) \|] \, dr \\
&\leq \|y_T\|_\alpha \int_0^t [\| [A - BB^*P_T(r)] \| g_\alpha(r) + \| BB^* \| \| [P - P_T(r)]x(r) \|] \, dr.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} g_\alpha(r) &= \frac{1}{\alpha} [A - BB^*P_T(r)] g_\alpha(r) \\
\Rightarrow \int_0^t [A - BB^*P_T(r)] g_\alpha(r) \, dr &= \alpha [g_\alpha(t) - g_\alpha(0)] \leq \alpha g_\alpha(t).
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |y_T(t)| &\leq \|y_T\|_\alpha \alpha g_\alpha(t) + \|BB^*\| \int_0^t \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr \\ \Rightarrow \frac{|y_T(t)|}{g_\alpha(t)} &\leq \|y_T\|_\alpha \alpha + \frac{\|BB^*\| \int_0^t \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr}{g_\alpha(t)} \\ &\leq \|y_T\|_\alpha \alpha + \|BB^*\| \int_0^{t_1} \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr \end{aligned}$$

car  $g_\alpha(t) \geq 1$  et  $\int_0^t \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr$  est croissante par rapport à  $t$ . Mais puisque c'est vrai pour tout  $t \in [0, t_1]$ ,

$$\begin{aligned} \|y_T\|_\alpha &\leq \|y_T\|_\alpha \alpha + \|BB^*\| \int_0^{t_1} \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr \\ \Rightarrow \|y_T\|_\alpha &\leq \frac{1}{1 - \alpha} \|BB^*\| \int_0^{t_1} \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr. \end{aligned}$$

Et finalement par (1.7.10)

$$\|y_T\|_{C[0, t_1]} \leq \frac{g_\alpha(t_1)}{1 - \alpha} \|BB^*\| \int_0^{t_1} \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr$$

ou

$$\|y_T\|_{C[0, t_1]} \leq c(t_1) \int_0^{t_1} \|[P - P_T(r)]x(r)\| dr.$$

Mais à la lumière des résultats précédents, on sait que  $[P - P_T(r)]x(r)$  converge vers 0 dans  $L^1(0, t_1; \mathbb{R}^n)$  car  $x(r) \in L^1(0, t_1; \mathbb{R}^n)$ . Donc,

$$x_T(t) \rightarrow x(t) \quad \text{uniformément dans } [0, t_1]. \quad (1.7.11)$$

**Théorème 1.7.2.** Soit  $Q$  une matrice semi-définie positive. Pour tout  $h$  et  $\bar{h}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$(P\bar{h}, h) = \int_0^\infty ([Q + PBB^*P]\Phi_P(t)\bar{h}, \Phi_P(t)h) dt, \quad (1.7.12)$$

où  $\Phi_P(t)$  est le groupe de résolvantes correspondant à

$$x'(t) = [A - BB^*P]x(t), \quad x(0) = h, \quad \Phi_P(t)h = x(t).$$

DÉMONSTRATION. On sait que

$$h \cdot P_T(0)\bar{h} = \int_0^T x_T(t) \cdot Q\bar{x}_T(t) + P_T(t)x_T(t) \cdot BB^*P_T(t)\bar{x}_T(t) dt, \quad (1.7.13)$$

où  $\bar{x}_T(t)$  est la solution de (1.7.7) pour  $h = \bar{h}$ . On veut montrer que le côté droit de (1.7.13) converge vers

$$\int_0^{\infty} x(t) \cdot Q\bar{x}(t) + Px(t) \cdot BB^*P\bar{x}(t) dt \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty. \quad (1.7.14)$$

Définissons

$$g_T(t) = \begin{cases} x_T(t) \cdot Qx_T(t) + P_T(t)x_T(t) \cdot BB^*P_T(t)x_T(t), & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{si } T < t < \infty. \end{cases}$$

$$g(t) = x(t) \cdot Qx(t) + Px(t) \cdot BB^*Px(t), \quad \text{si } 0 \leq t < \infty.$$

Mais en raison de (1.7.5) et (1.7.11)

$$g_T(t) \rightarrow g(t) \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty.$$

Puisque la fonction  $g_T(t)$  est positive, par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t) dt &= \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) dt \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g_T(t) dt \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} (P_T(0)h, h) = (Ph, h). \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

*Remarque 1.7.1.* C'est à ce point où l'hypothèse de la semi-définie positivité de la matrice  $Q$  prend toute son importance. Sans cette hypothèse, le lemme de Fatou n'est plus vérifié et nous ne pourrions obtenir le résultat désiré :

$$\int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g_T(t) dt.$$

Nous avons également tenté d'utiliser la convergence dominée, mais sans succès. Voici un exemple similaire à notre problème où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(t) dt \quad \text{existe et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \rightarrow f(t)$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

**Exemple 1.7.1.** Soit

$$f_n(t) = ne^{-n|t|}.$$

La fonction exponentielle croissant plus vite que toute puissance de son argument,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n|t|} = 0 \quad \text{si } t \neq 0.$$

Cependant,

$$\int_0^{\infty} ne^{-n|t|} dt = -e^{-n|t|} \Big|_0^{\infty} = 1$$

ne tend pas vers 0. □

Nous avons obtenu par le lemme de Fatou puisque  $Q \geq 0$  que

$$\int_0^{\infty} g(t) dt \leq (Ph, h).$$

Mais si l'on considère la loi de feedback

$$v_P(t) = -B^* P x(t),$$

où  $x(t)$  est solution de (1.7.8), on a pour tout  $T > 0$

$$(P_T(0)h, h) \leq \int_0^T [(Qx(t), x(t)) + (v_P(t), v_P(t))] dt = \int_0^T g(t) dt$$

et nécessairement

$$(Ph, h) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(t) dt = \int_0^{\infty} g(t) dt. \quad (1.7.16)$$

Les inégalités (1.7.15) et (1.7.16) donnent l'égalité. Par symétrie de  $P$ , on obtient (1.7.12).  $P$  est donc semi-définie positive si  $Q \geq 0$ . □

Revenons maintenant au problème énoncé en début de section, soit de minimiser la fonction coût

$$C_{\infty}^0(v, h) = \int_0^{\infty} Qx(t) \cdot x(t) + |v(t)|^2 dt$$

par rapport à toutes les commandes  $v$  dans  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{R}^m)$ .

**Théorème 1.7.3.** *Soit  $Q$  une matrice semi-définie positive. Supposons que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  existe et est finie pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ . Alors il existe une commande  $u \in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{R}^m)$  telle que*

$$\inf_{v \in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{R}^m)} C_{\infty}^0(v, h) = C_{\infty}^0(u, h)$$

et

$$u(t) = -B^* P x(t), \quad (1.7.17)$$

où

$$x'(t) = [A - BB^* P]x(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = h.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $T > 0$  et  $v \in L^2_{loc}(0, \infty; \mathbb{R}^m)$ ,

$$\begin{aligned} (P_T(0)h, h) &= \min_{v_T \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v_T, h) \\ &\leq \int_0^T [(Qy(t), y(t)) + (v(t), v(t))] dt \end{aligned}$$

avec  $y(t)$  correspondant à  $v$ . En allant à la limite

$$(Ph, h) \leq C_\infty^0(v, h).$$

Cependant,  $u(t) = -B^*Px(t)$  et  $P$  ne sont pas indépendants l'un de l'autre. En effet, par (1.7.17)

$$(u(t), u(t)) = (BB^*Px(t), Px(t)).$$

Donc en raison de (1.7.12),

$$(Ph, h) = \int_0^\infty [(Qx(t), x(t)) + (u(t), u(t))] dt$$

Donc pour tout  $v \in L^2_{loc}(0, \infty; \mathbb{R}^m)$ ,

$$C_\infty^0(u, h) \leq C_\infty^0(v, h).$$

□

**Théorème 1.7.4.** Soit  $Q \geq 0$ . Supposons que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_T^0(v, h)$  existe et est finie pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $P$  est solution de l'équation algébrique de Riccati

$$PA + A^*P - PRP + Q = 0.$$

où  $R = BB^*$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $H = Q + PRP$ . Définissons

$$(D_T h, \bar{h}) = \int_0^T H\Phi(t, 0)h \cdot \Phi(t, 0)\bar{h} dt.$$

Ici,  $\Phi(t, 0)$  est la matrice fondamentale associée à

$$x'(t) = [A - RP]x(t), \quad x(0) = h.$$

On sait que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} (D_T h, \bar{h}) = Ph \cdot \bar{h}$  existe et que  $D_T$  est symétrique. Soit

$$\begin{aligned}
& (D_T(A - RP)h, h) + (D_T h, (A - RP)h) \\
&= \int_0^T H\Phi(t, 0)(A - RP)h \cdot \Phi(t, 0)h \, dt + \int_0^T H\Phi(t, 0)h \cdot \Phi(t, 0)(A - RP)h \, dt \\
&= \int_0^T \frac{d}{dt} [H\Phi(t, 0)h \cdot \Phi(t, 0)h] \, dt \\
&= H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h - Hh \cdot h.
\end{aligned} \tag{1.7.18}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h \\
&= Hh \cdot h + \lim_{T \rightarrow \infty} [(D_T(A - RP)h, h) + (D_T h, (A - RP)h)] \\
&= Hh \cdot h + P(A - RP)h \cdot h + Ph \cdot (A - RP)h.
\end{aligned} \tag{1.7.19}$$

Nous savons également qu'il existe une matrice  $C$  telle que  $Q = C^*C$  puisque  $Q \geq 0$ .

Donc,

$$\begin{aligned}
H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h &= (Q + PRP)\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h \\
&= (C^*C + PBB^*P)\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h \\
&= |(C + B^*P)\Phi(T, 0)h|^2.
\end{aligned}$$

Cependant, on sait par (1.7.12) que pour tout  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\int_0^\infty H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h < \infty.$$

et nécessairement

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)h = \liminf_{T \rightarrow \infty} |(C + B^*P)\Phi(T, 0)h|^2 = 0. \tag{1.7.20}$$

Mais puisque par (1.7.19) la limite existe, elle est par (1.7.20) nécessairement 0 :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} |(C + B^*P)\Phi(T, 0)h| = 0.$$

On réécrit maintenant (1.7.18) avec  $h$  et  $k$ . Nous avons pour tout  $h, k \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
& (D_T(A - RP)h, k) + (D_T h, (A - RP)k) \\
&= \int_0^T H\Phi(t, 0)(A - RP)h \cdot \Phi(t, 0)k \, dt + \int_0^T H\Phi(t, 0)h \cdot \Phi(t, 0)(A - RP)k \, dt \\
&= \int_0^T \frac{d}{dt} [H\Phi(t, 0)h \cdot \Phi(t, 0)k] \, dt \\
&= H\Phi(T, 0)h \cdot \Phi(T, 0)k - Hh \cdot k \\
&= (C + B^*P)\Phi(T, 0)h \cdot (C + B^*P)\Phi(T, 0)k - Hh \cdot k.
\end{aligned}$$

Mais on sait que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} D_T h \cdot k = Ph \cdot k$  et que la  $\lim_{T \rightarrow \infty} (C + B^*P)\Phi(T, 0)h = 0$ .

On obtient donc pour tout  $h, k \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
& (P(A - RP)h, k) + (Ph, (A - RP)k) + Hh \cdot k = 0 \\
&\Rightarrow (PA - PRP)h \cdot k + (A^*P - PRP)h \cdot k + (Q + PRP)h \cdot k = 0 \\
&\Rightarrow PAh \cdot k + A^*Ph \cdot k - PRPh \cdot k + Qh \cdot k = 0.
\end{aligned}$$

□

## Chapitre 2

---

# JEUX DIFFÉRENTIELS À DEUX JOUEURS DE SOMME NULLE

### 2.1. INTRODUCTION

Nous allons considérer un *jeu à deux joueurs de somme nulle* avec une *dynamique linéaire* et une *fonction d'utilité quadratique* sur un *horizon de temps fini*. Ceci peut être vu comme une extension naturelle du problème de commande optimale linéaire quadratique.

Les jeux différentiels ont été inventés par R. Isaacs, dans les années 1950 à 1960, dans le but d'étendre à des situations dynamiques, à l'origine des modèles de combat, les méthodes de la théorie des jeux. La contribution d'Isaacs a été considérable. À une époque où n'était pas connue la théorie de la commande optimale, il en a, seul, inventé les concepts fondamentaux tels que variables de commande et d'état, feedback, équation d'Hamilton-Jacobi, équation adjointe, etc..., dans le cadre beaucoup plus difficile des jeux à deux joueurs de somme nulle.

Dans un jeu à deux joueurs, le joueur 1 décide une valeur  $v_1$  et le joueur 2 une valeur  $v_2$ . Chaque joueur a une fonction d'utilité

$$C_i(v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

qu'il veut minimiser. Un *équilibre Cournot-Nash* est une paire  $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$  telle que

$$C_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \leq C_1(v_1, \hat{v}_2), \quad \forall v_1 \in U_{ad}^1,$$

$$C_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \leq C_2(\hat{v}_1, v_2), \quad \forall v_2 \in U_{ad}^2,$$

où  $U_{ad}^1$  et  $U_{ad}^2$  représentent l'ensemble des contraintes pour les deux joueurs. Dans un jeu à deux joueurs et somme nulle,

$$C_1(v_1, v_2) = C(v_1, v_2),$$

$$C_2(v_1, v_2) = -C(v_1, v_2).$$

Donc il n'y a en fait qu'une seule fonctionnelle,  $C(v_1, v_2)$ . Le joueur 1 essaie de la minimiser, et le joueur 2 essaie de la maximiser. C'est un jeu non-coopératif. Un *équilibre de Nash* satisfait la condition

$$C(\hat{v}_1, v_2) \leq C(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \leq C(v_1, \hat{v}_2).$$

Dans ce contexte, la paire  $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$  est appelée un *point de selle*. Dans le cas dynamique, la fonction d'utilité dépend du vecteur d'état gouverné par un système d'équations différentielles linéaires (semblable au chapitre 1) gouverné par les commandes  $v_1$  et  $v_2$  des deux joueurs. Dans ce contexte, il existe des stratégies en *boucle ouverte* et *boucle fermée*.

Le but de ce chapitre est de revoir le travail pionnier de P. Bernhard [2] sur les jeux différentiels linéaires quadratiques en relaxant les hypothèse de positivité des termes de la fonction d'utilité agissant sur l'état comme dans le chapitre 1. Nous allons tout d'abord rappeler les résultats connus en boucle ouverte [5]. Nous travaillerons ensuite sur la notion de point de selle sur la classe des stratégies affines  $L^2$ -intégrables en boucle fermée. On donnera plusieurs conditions équivalentes nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un point de selle par rapport à ces stratégies.

## 2.2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION D'UTILITÉ

Considérons le jeu à somme nulle sur l'intervalle  $[0, T]$  caractérisé par la fonction d'utilité

$$C_{x_0}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Q(t)x(t) \cdot x(t) + |u(t)|^2 - |v(t)|^2 dt,$$

où  $x$  est solution de l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)v(t) \quad \text{p.p. dans } [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (2.2.1)$$

$x_0$  est l'état initial au temps  $t = 0$ ,  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ,  $m \geq 1$ , est la stratégie du premier joueur, qui tente de minimiser la fonction, et  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$ ,  $k \geq 1$ , est la stratégie du deuxième joueur, qui tente de maximiser la fonction.  $F$  est une matrice de dimension  $n \times n$ ,  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $Q$  sont des fonctions matricielles de dimension appropriée, mesurables et bornées presque partout dans  $[0, T]$ . De plus,  $Q(t)$  et  $F$  sont symétriques. Il sera utile d'utiliser la notation plus compacte suivante et de laisser tomber le p.p. dans  $[0, T]$

$$C_{x_0}(u, v) = Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Qx \cdot x + |u|^2 - |v|^2 dt, \quad (2.2.2)$$

$$x' = Ax + B_1u + B_2v \quad \text{dans } [0, T], \quad x(0) = x_0. \quad (2.2.3)$$

Les hypothèses sur  $F$ ,  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , et  $Q$  seront utilisées tout au long du chapitre. Finalement,  $R(t)$  dénotera la matrice  $B_1(t)^*B_1(t) - B_2(t)^*B_2(t)$ .

En calculant de façon semblable au chapitre 1, nous trouvons

$$\frac{1}{2}dC_{x_0}(u, v; \bar{u}, \bar{v}) = Fx(T) \cdot \bar{y}(T) + (Qx, \bar{y}) + (u, \bar{u}) - (v, \bar{v}), \quad (2.2.4)$$

où  $x$  est solution de (2.2.3) et  $\bar{y}$  est solution de

$$\bar{y}' = A\bar{y} + B_1\bar{u} + B_2\bar{v}, \quad \bar{y}(0) = 0. \quad (2.2.5)$$

Encore une fois comme au chapitre 1, nous introduisons le système adjoint

$$p' + A^*p + Qx = 0, \quad p(T) = Fx(T) \quad (2.2.6)$$

et on réécrit l'équation (2.2.4) pour le gradient sous la forme

$$\frac{1}{2}dC_{x_0}(u, v; \bar{u}, \bar{v}) = (B_1^*p + u, \bar{u}) + (B_2^*p - v, \bar{v}). \quad (2.2.7)$$

Donc,  $dC_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}; \bar{u}, \bar{v}) = 0$  pour tout  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  si et seulement si le système couplé

$$\begin{cases} \hat{x}' = A\hat{x} - R\hat{p}, & \hat{x}(0) = x_0 \\ \hat{p}' + A^*\hat{p} + Q\hat{x} = 0, & \hat{p}(T) = F\hat{x}(T). \end{cases}$$

à une solution  $(\hat{x}, \hat{p})$  dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$  avec  $(\hat{u}, \hat{v}) = (-B_1^*\hat{p}, B_2^*\hat{p})$ . Comme on pouvait s'y attendre, la semi-dérivée seconde est indépendante de  $(u, v)$

$$\frac{1}{2}d^2C_{x_0}(u, v; \bar{u}, \bar{v}; \bar{u}, \bar{v}) = F\bar{y}(T) \cdot \bar{y}(T) + (Q\bar{y}, \bar{y}) + (\bar{u}, \bar{u}) - (\bar{v}, \bar{v}), \quad (2.2.8)$$

où  $\bar{y}$  est solution de (2.2.5) et  $\tilde{y}$  est solution de

$$\tilde{y}' = A\tilde{y} + B_1\tilde{u} + B_2\tilde{v}, \quad \tilde{y}(0) = 0. \quad (2.2.9)$$

En particulier, pour tout  $x_0, u, v, \bar{u}, \bar{v}, d^2C_{x_0}(u, v; \bar{u}, \bar{v}; \bar{u}, \bar{v}) = 2C_0(\bar{u}, \bar{v})$ .

## 2.3. JEUX EN BOUCLE OUVERTE

### 2.3.1. Définitions

**Définition 2.3.1.** Soit  $x_0$  l'état initial dans  $\mathbb{R}^n$  au temps  $t = 0$ .

- (i) On dit que le jeu atteint sa *valeur inférieure en boucle ouverte* (resp. *valeur supérieure*) si

$$v^-(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) \quad (2.3.1)$$

$$\text{(resp. } v^+(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v)) \quad (2.3.2)$$

est finie.

- (ii) On dit que le jeu atteint sa *valeur en boucle ouverte* si sa valeur inférieure en boucle ouverte  $v^-(x_0)$  et sa valeur supérieure en boucle ouverte  $v^+(x_0)$  sont atteintes et  $v^-(x_0) = v^+(x_0)$ . La *valeur en boucle ouverte* du jeu sera notée  $v(x_0)$ .
- (iii) Une paire  $(\bar{u}, \bar{v})$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  est un *point de selle en boucle ouverte* de  $C_{x_0}(u, v)$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  si pour tout  $u$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et tout  $v$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$

$$C_{x_0}(\bar{u}, v) \leq C_{x_0}(\bar{u}, \bar{v}) \leq C_{x_0}(u, \bar{v}). \quad (2.3.3)$$

□

Puisque

$$\forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k), \quad \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) \leq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v),$$

alors  $v^-(x_0) \leq v^+(x_0)$ .

**Définition 2.3.2.** On associe à  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  les ensembles

$$V(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k) : \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) > -\infty \right\}, \quad (2.3.4)$$

$$U(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v) < +\infty \right\}. \quad (2.3.5)$$

□

### 2.3.2. Jeux à valeur inférieure ou supérieure finie en boucle ouverte

On rappelle ici les résultats de [5, Théorèmes 2.2, 2.3, et 2.4] quand la valeur inférieure ou supérieure en boucle ouverte est finie pour une donnée initiale  $x_0$ .

**Théorème 2.3.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe un  $\hat{u}$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et un  $\hat{v}$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  tels que*

$$C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \hat{v}) = \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v). \quad (2.3.6)$$

(ii) *La valeur inférieure en boucle ouverte  $v^-(x_0)$  du jeu est finie.*

(iii) *Il existe une solution dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$  du système couplé*

$$\begin{cases} x' = Ax - Rp, & x(0) = x_0 \\ p' + A^*p + Qx = 0, & p(T) = Fx(T), \end{cases} \quad (2.3.7)$$

*et les identités suivantes sont vérifiées*

$$\sup_{v \in V(0)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_0(u, v) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_0(u, 0) = C_0(0, 0). \quad (2.3.8)$$

*De plus,*

$$v^-(x_0) = C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}) = \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) = p(0) \cdot x_0, \quad (2.3.9)$$

*où les commandes sont données par*

$$\hat{u} = -B_1^*p, \quad \hat{v} = B_2^*p. \quad (2.3.10)$$

La condition (2.3.8) est équivalente à la convexité de  $C_{x_0}(u, v)$  par rapport à  $u$  et la concavité de  $J_{x_0}^-(v) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v)$  par rapport au  $v \in V(x_0)$ .

**Théorème 2.3.2.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un  $\hat{u}$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et un  $\hat{v}$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  tels que

$$C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}) = \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(\hat{u}, v) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v). \quad (2.3.11)$$

(ii) La valeur supérieure en boucle ouverte  $v^+(x_0)$  du jeu est finie.

(iii) Il existe une solution  $(x, p) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$  au système couplé (2.3.7) et les identités suivantes sont vérifiées

$$\inf_{u \in U(0)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_0(u, v) = \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_0(0, v) = C_0(0, 0). \quad (2.3.12)$$

De plus,

$$v^+(x_0) = C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v) = p(0) \cdot x_0,$$

où les commandes sont données par (2.3.10).

La condition (2.3.12) est équivalente à la concavité de  $C_{x_0}(u, v)$  par rapport à  $v$  et la convexité de  $J_{x_0}^+(v) = \sup_{u \in U(x_0)} C_{x_0}(u, v)$  par rapport au  $u \in U(x_0)$ . Finalement, en combinant les deux derniers théorèmes, on obtient le cas où il y a point de selle.

**Théorème 2.3.3.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un point de selle en boucle ouverte de  $C_{x_0}(u, v)$ .

(ii) La valeur en boucle ouverte  $v(x_0)$  du jeu est finie.

(iii) Il existe une paire  $(x, p) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$  solution du système couplé (2.3.7) et la condition de convexité-concavité

$$\sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_0(0, v) = C_0(0, 0) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_0(u, 0). \quad (2.3.13)$$

est vérifiée.

La valeur en boucle ouverte du jeu  $v(x_0)$  est donnée par (2.3.9) et les commandes réalisant le point de selle par (2.3.10).

Dans chaque cas, l'hypothèse globale de finitude pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  implique l'unicité de la solution  $(x, p)$  du système couplé. La démonstration est semblable à celle du Théorème 1.4.1.

### 2.3.3. Exemples

Allons-y maintenant de deux exemples pour illustrer les divers cas possibles : le premier où  $v^-(x_0)$  est fini et  $v^+(x_0) = +\infty$  et un deuxième où  $v^-(x_0) = -\infty$  et  $v^+(x_0) = +\infty$ .

**Exemple 2.3.1.** Considérons le système dynamique sur  $[0, 2]$  et la fonction d'utilité

$$x'(t) = (2 - t)u(t) + tv(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$C_{x_0}(u, v) = \frac{1}{2}x(2) \cdot x(2) + \int_0^2 |u(t)|^2 - |v(t)|^2 dt.$$

Ici,  $A = 0$ ,  $F = \frac{1}{2}$ ,  $B_1(t) = 2 - t$ ,  $B_2(t) = t$ ,  $Q = 0$  et  $R = 4(1 - t)$ . L'équation de Riccati est donc

$$P' - 4(1 - t)P^2 = 0, \quad \text{p.p. dans } [0, 2], \quad P(2) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P^2} &= 4(1 - t) \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{P(t)} - 2(t - 1)^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{1}{2(t - 1)^2}.$$

La solution est positive et explose en 1. Ce n'est pas un élément de  $H^1(0, 2)$ . On va maintenant montrer qu'il n'y a pas de point de selle en boucle ouverte sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Pour la valeur inférieure en boucle ouverte, nous avons que l'application  $u \mapsto C_{x_0}(u, v)$  est convexe et bornée en-dessous par  $-\|v\|_{L^2}^2$ . La minimisation par rapport à  $u$  a donc une solution unique pour chaque  $(x_0, v)$ . L'élément minimiseur est complètement caractérisé par le système couplé

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - t)\hat{u}(t) + tv(t) \text{ p.p. dans } [0, 2], & x(0) = x_0, \\ p'(t) = 0 \text{ p.p. dans } [0, 2], & p(2) = \frac{1}{2}x(2), \end{cases}$$

$$\hat{u}(t) = -(2 - t)p(t).$$

Puisque  $p(t)$  est constante, nous avons que  $p(t) = \frac{1}{2}x(2)$ . Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
 x(2) &= x_0 + \int_0^2 -(2-t)^2 \frac{1}{2}x(2) + tv(t) dt \\
 &= x_0 + \frac{1}{2}x(2) \int_0^2 -(2-t)^2 dt + \int_0^2 tv(t) dt \\
 &= x_0 - \frac{4}{3}x(2) + \int_0^2 t^3 v(t) dt \\
 &\Rightarrow x(2) = \frac{3}{7} \left[ x_0 + \int_0^2 tv(t) dt \right]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_{x_0}^-(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u \in L^2(0,2;\mathbb{R})} C_{x_0}(u, v) \\
 &= J_{x_0}(\hat{u}, v) \\
 &= \frac{1}{2}x(2) \cdot x(2) + \int_0^2 |(2-t)\frac{1}{2}x(2)|^2 - |v(t)|^2 dt \\
 &= \frac{7}{6}x(2)^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 dt \\
 &= \frac{3}{14} \left[ x_0 + \int_0^2 tv(t) dt \right]^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Notons que l'application  $v \mapsto J_{x_0}^-(v)$  est concave en  $v$  et que le supremum par rapport à  $v$  de  $J_{x_0}^-(v)$  existe. En effet, pour tout  $v$

$$\frac{1}{2}dJ_{x_0}^-(\hat{v}; v) = \frac{3}{14} \left[ x_0 + \int_0^2 t\hat{v}(t) dt \right] \int_0^2 tv(t) dt - \int_0^2 \hat{v}(t)v(t) dt$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}d^2J_{x_0}^-(\hat{v}; v; v) &= \frac{3}{14} \left[ \int_0^2 tv(t) dt \right]^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 dt \\
 &\leq \frac{3}{14} \left[ \int_0^2 t^2 dt \right] \left[ \int_0^2 v(t)^2 dt \right] - \int_0^2 |v(t)|^2 dt \\
 &\leq \left[ \frac{3}{14} \frac{8}{3} - 1 \right] \int_0^2 v(t)^2 dt = -\frac{3}{7} \int_0^2 v(t)^2 dt \leq 0.
 \end{aligned}$$

La valeur inférieure en boucle ouverte du jeu est égale à  $v^-(x_0) = x_0 \cdot p(0) = (x_0)^2/2$ .

Cependant, la valeur supérieure en boucle ouverte  $v^+(x_0) = +\infty$  pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

En effet, choisissons la séquence de commande  $v_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $v_n(t) = 0$  dans  $[0, 1]$ , et

$v_n(t) = n$  dans  $[1, 2]$ . L'état correspondant au temps  $t = 2$  est

$$x_n(2) = x_0 + \int_0^2 (2-t)u(t) dt + n \int_1^2 t dt = \left( x_0 + \int_0^2 (2-t)u(t) dt \right) + \frac{3}{2}n.$$

Notons par  $X$  la parenthèse qui ne dépend pas de  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} C_{x_0}(u, v_n) &= \frac{1}{2} \left| X + \frac{3}{2}n \right|^2 + \int_0^2 |u(t)|^2 dt - \int_1^2 n^2 dt \\ &= \frac{1}{8}n^2 + \frac{3}{2}nX + \frac{X^2}{2} + \int_0^2 |u(t)|^2 dt \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  et tout  $u \in L^2(0, 2; \mathbb{R})$

$$\sup_{v \in L^2(0, 2; \mathbb{R})} C_{x_0}(u, v) = +\infty \Rightarrow v^+(x_0) = +\infty.$$

□

**Exemple 2.3.2.** Considérons le système dynamique dans  $\mathbb{R}^2$  sur  $[0, 2]$  et la fonction d'utilité

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_{x_0}(u, v) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} + \int_0^2 |u(t)|^2 - |v(t)|^2 dt.$$

Ici,  $A = 0$ ,  $F = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B_1(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = 0$  et  $R = \begin{pmatrix} (t-1)^2 & 0 \\ 0 & -(t-1)^2 \end{pmatrix}$ . Montrons tout d'abord que la valeur inférieure en boucle ouverte

$v^-(x_0) = -\infty$  pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . En effet, choisissons la séquence de commande  $u_n$ ,

$n \geq 1$ ,  $u_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(t-1)n \\ 0 \end{pmatrix}$  dans  $[0, 2]$ . L'état correspondant au temps  $t = 2$  est

$$\begin{pmatrix} x_{1n}(2) \\ x_{2n}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} + n \\ x_{20} + \int_0^2 (t-1)v(t) dt \end{pmatrix}$$

Notons par  $X$  la deuxième composante du vecteur qui ne dépend pas de  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} C_{x_0}(u, v_n) &= -3x_{10}^2 - 6nx_{10} - 3n^2 + 3X^2 - \frac{3}{2}n^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 \\ &= -3x_{10}^2 - 6nx_{10} + 3X^2 - \frac{3}{2}n^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 \rightarrow -\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et tout  $v \in L^2(0, 2; \mathbb{R}^2)$

$$\inf_{u \in L^2(0, 2; \mathbb{R}^2)} C_{x_0}(u, v) = -\infty \Rightarrow v^-(x_0) = -\infty.$$

Montrons maintenant que  $v^+(x_0) = +\infty$ . En effet, choisissons la séquence de commande  $v_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $v_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(t-1)n \\ 0 \end{pmatrix}$  dans  $[0, 2]$ . L'état correspondant au temps  $t = 2$  est

$$\begin{pmatrix} x_{1n}(2) \\ x_{2n}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} + \int_0^2 (t-1)u(t) dt \\ x_{20} + n \end{pmatrix}$$

Notons par  $Y$  la première composante du vecteur qui ne dépend pas de  $n$ . Alors

$$C_{x_0}(u_n, v) = 3x_{10}^2 + 6nx_{10} - 3Y^2 + \frac{3}{2}n^2 + \int_0^2 |u(t)|^2 \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Donc pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et tout  $u \in L^2(0, 2; \mathbb{R}^2)$

$$\sup_{v \in L^2(0, 2; \mathbb{R}^2)} C_{x_0}(u, v) = +\infty \Rightarrow v^+(x_0) = +\infty.$$

□

## 2.4. JEUX EN BOUCLE FERMÉE

On va généraliser les résultats classiques aux stratégies en boucle fermée affines  $L^2$ -intégrables pour  $F$  et  $Q(t)$  générales sous les hypothèses de § 2.2 sur les fonctions matricielles  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $Q$ , et  $F$ .

### 2.4.1. Définitions et résultats principaux

**Définition 2.4.1.** La classe des stratégies  $L^2$ -affines en boucle fermée est définie comme suit :

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \left| \begin{array}{l} \text{tel que } x \mapsto \phi(t, x) \text{ est affine et} \\ t \mapsto \phi(t, x) \text{ appartient à } L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \end{array} \right. \right\}$$

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \psi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \left| \begin{array}{l} \text{tel que } x \mapsto \psi(t, x) \text{ est affine et} \\ t \mapsto \psi(t, x) \text{ appartient à } L^2(0, T; \mathbb{R}^k) \end{array} \right. \right\}.$$

On dit que  $\phi$  ou  $\psi$  est une *stratégie  $L^2$ -linéaire en boucle fermée* si  $\phi$  ou  $\psi$  est linéaire en  $x$ . □

*Remarque 2.4.1.* À toute stratégie  $\phi \in \Phi$ , on peut associer une fonction  $u$  vectorielle- $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et une fonction matricielle  $L^2$ -intégrable  $U$  de dimension  $m \times n$  tel que

$$\phi(t, x) = u(t) + U(t)x.$$

Également, à toute stratégie  $\psi \in \Psi$ , on peut associer une fonction  $v$  vectorielle- $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  et une fonction matricielle  $L^2$ -intégrable  $V$  de dimension  $k \times n$  tel que

$$\psi(t, x) = v(t) + V(t)x.$$

Les fonctions matricielles  $U$  et  $V$  peuvent avoir des singularités, mais elles sont globalement  $L^2$ -intégrables. La résolvante associée à la fonction matricielle  $L^2$ -intégrable  $A + B_1U + B_2V$  va donc être inversible partout dans  $[0, T]$  par le théorème 1.6.1. Donc pour tout  $\phi \in \Phi$  et  $\psi \in \Psi$ , le système en boucle fermée

$$\begin{aligned} x' &= Ax + B_1\phi(x) + B_2\psi(x), & x(0) &= x_0 \\ x' &= (A + B_1U + B_2V)x + B_1u + B_2v, & x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

possède une solution unique dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ . Ceci veut dire que toutes les paires  $(\phi, \psi) \in \Phi \times \Psi$  sont *admissibles*. En particulier, tous les  $\phi$  de la forme  $\phi(t, x) = u(t)$  pour  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  appartiennent à  $\Phi$  et tous les  $\psi$  de la forme  $\psi(t, x) = v(t)$  pour  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  appartiennent à  $\Psi$ , et, a fortiori, toutes les paires de la forme  $(\phi, v)$  ou  $(u, \psi)$  sont admissibles pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$ .

**Définition 2.4.2.** (i) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on dit que  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  est un *point de selle en boucle fermée* de  $C_{x_0}(\phi, \psi)$  dans  $\Phi \times \Psi$  si pour tout  $\phi \in \Phi$  et  $\psi \in \Psi$

$$C_{x_0}(\phi^*, \psi) \leq C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \leq C_{x_0}(\phi, \psi^*). \quad (2.4.2)$$

(ii) On dit que  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  est un *point de selle en boucle fermée global* de  $C_{x_0}(\phi, \psi)$  dans  $\Phi \times \Psi$  si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $\phi \in \Phi$  et  $\psi \in \Psi$ , les inégalités (2.4.2) sont vérifiées.

□

Par définition,  $C_{x_0}(\phi^*, \psi^*)$  est fini. La "version globale" est mieux adaptée pour les stratégies en boucle fermée. L'intérêt pour les stratégies en boucle fermée associé avec une seule donnée initiale est plutôt limité.

Poursuivons avec deux lemmes, donnés par Berkovitz [1].

**Lemme 2.4.1.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $(\phi_1^*, \psi_1^*) \in \Phi \times \Psi$  et  $(\phi_2^*, \psi_2^*) \in \Phi \times \Psi$  vérifiant (2.4.2),  $C_{x_0}(\phi_1^*, \psi_1^*) = C_{x_0}(\phi_2^*, \psi_2^*)$ .

DÉMONSTRATION. Considérons les inégalités du point de selle (2.4.2), et plaçons  $\phi = \phi_1^*$  dans celle pour  $(\phi_2^*, \psi_2^*)$  et  $\psi = \psi_2^*$  dans celle pour  $(\phi_1^*, \psi_1^*)$ . Cela donne

$$C_{x_0}(\phi_2^*, \psi_2^*) \leq C_{x_0}(\phi_1^*, \psi_2^*) \leq C_{x_0}(\phi_1^*, \psi_1^*).$$

En intervertissant 1 et 2 dans les opérations ci-dessus, on obtient les inégalités contraires d'où le résultat annoncé. □

**Lemme 2.4.2.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  est un point de selle en boucle fermée de  $C_{x_0}(\phi, \psi)$  dans  $\Phi \times \Psi$ ;
- (ii) il existe une paire  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  tel que pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$

$$C_{x_0}(\phi^*, v) \leq C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \leq C_{x_0}(u, \psi^*). \quad (2.4.3)$$

DÉMONSTRATION. (i)  $\Rightarrow$  (ii) Puisque  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  est inclus dans  $\Phi$  et  $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  est inclus dans  $\Psi$ , on obtient (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Pour toute paire  $(\phi^*, \psi) \in \Phi \times \Psi$ , il existe un  $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  tel que  $v = \psi(\cdot; x)$ . Donc

$$C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \geq C_{x_0}(\phi^*, v) = C_{x_0}(\phi^*, \psi).$$

De la même façon, pour toute paire  $(\phi, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$ , il existe un  $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  tel que  $u = \phi(\cdot; x)$ . Donc

$$C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \leq C_{x_0}(u, \psi^*) = C_{x_0}(\phi, \psi^*).$$

□

*Remarque 2.4.2.* En particulier, s'il existe un point de selle en boucle ouverte, alors ce point de selle est également un point de selle en boucle fermée. Cependant, la richesse de la théorie des jeux différentiels vient du fait qu'en général, il peut ne pas exister de point de selle en boucle ouverte. Cela traduit le fait essentiel qui est que, à l'opposé de ce qui se passe en commande optimale, il y a une différence profonde entre commandes en boucle ouverte et en boucle fermée. Quand un joueur choisit une stratégie, il ne sait pas encore quelle commande  $u(t)$  il va appliquer, car cela dépend de ce que fera son adversaire.

**Théorème 2.4.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  est un point de selle en boucle fermée global de  $C_{x_0}(\phi, \psi)$  par rapport à  $\Phi \times \Psi$ .
- (ii) Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe une solution dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$  au système couplé

$$\begin{cases} \dot{x}' = A\hat{x} - R\hat{p}, & \hat{x}(0) = x_0 \\ \hat{p}' + A^*\hat{p} + Q\hat{x} = 0, & \hat{p}(T) = F\hat{x}(T) \end{cases} \quad (2.4.4)$$

et des  $L^2$ -matrices  $U_*$  and  $V_*$  d'ordres appropriés telles que

$$\hat{u} = -B_1^*\hat{p} = U_*\hat{x}, \quad \hat{v} = B_2^*\hat{p} = V_*\hat{x}. \quad (2.4.5)$$

- (iii) (normalité)  $\det X(t) \neq 0$  partout dans  $[0, T]$ , où  $(X, \Lambda)$  est la solution  $H^1(0, T)$  du système matriciel différentiel

$$\begin{cases} X' = AX - R\Lambda, & X(T) = I \\ \Lambda' + A^*\Lambda + QX = 0, & \Lambda(T) = F. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

- (iv) Il existe une solution symétrique  $P$  avec ses éléments dans  $H^1(0, T)$  à l'équation différentielle matricielle de Riccati

$$P' + PA + A^*P - PRP + Q = 0 \text{ dans } [0, T], \quad P(T) = F. \quad (2.4.7)$$

En particulier,  $C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) = P(0)x_0 \cdot x_0$  et les stratégies en boucle fermée sont données par

$$\phi^*(t, x) = -B_1^*(t)P(t)x = U_*(t)x \text{ et } \psi^*(t, x) = B_2^*(t)P(t)x = V_*(t)x. \quad (2.4.8)$$

DÉMONSTRATION. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $\hat{x}$  la trajectoire correspondant à la paire  $(\phi^*, \psi^*)$  et notons par  $(\hat{u}, \hat{v}) = (\phi^*(x), \psi^*(x))$  la paire de commandes correspondante. Soit  $U_*(t)$  et  $V_*(t)$  les matrices respectives et  $u_*(t)$  et  $v_*(t)$  les vecteurs respectifs tels que  $\phi^*(t, x) = U_*(t)x + u_*(t)$  et  $\psi^*(t, x) = V_*(t)x + v_*(t)$ . Alors

$$\hat{x}' = (A + B_1U_* + B_2V_*)\hat{x} + B_1u_* + B_2v_*, \quad \hat{x}(0) = x_0. \quad (2.4.9)$$

Pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$ , la paire  $(\phi^* + u, \psi^* + v) \in \Phi \times \Psi$  et

$$C_{x_0}(\phi^*, \psi^* + v) \leq C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \leq C_{x_0}(\phi^* + u, \psi^*). \quad (2.4.10)$$

Introduisons la fonction  $c_{x_0}(u, v)$  pour la fonction d'utilité  $C_{x_0}(\phi^* + u, \psi^* + v)$  :

$$c_{x_0}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Qx \cdot x + |U_*x + u_* + u|^2 - |V_*x + v_* + v|^2 dt,$$

et notons par  $x$  la solution au système d'état correspondant

$$x' = (A + B_1U_* + B_2V_*)x + B_1(u_* + u) + B_2(v_* + v), \quad x(0) = x_0. \quad (2.4.11)$$

Alors les inégalités (2.4.10) du point de selle en boucle fermée deviennent des inégalités pour un point de selle en boucle ouverte pour le système (2.4.11) et la nouvelle fonction d'utilité quadratique  $c_{x_0}(u, v)$  :

$$\forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \text{ and } v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k), \quad c_{x_0}(0, v) \leq c_{x_0}(0, 0) \leq c_{x_0}(u, 0) \quad (2.4.12)$$

et la paire  $(0, 0)$  réalise ce point de selle. Nous pouvons ramener la fonction quadratique  $c_{x_0}(u, v)$  sous la forme du lemme 1.2.1 de façon semblable à la discussion suivant le théorème 1.2.1. Puisque l'infimum et le supremum sont finis, nous avons les conditions nécessaires et suffisantes standards sur la première et seconde semi-dérivée directionnelle, c'est-à-dire la fonction  $c_{x_0}(u, v)$  est convexe-concave et  $dc_{x_0}(0, 0; u, v) = 0$

pour tout  $u$  et  $v$ . En particulier, le système couplé

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= (A + B_1 U_* + B_2 V_*)\hat{x} + B_1 u_* + B_2 v_*, & \hat{x}(0) &= x_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{p}' + (A + B_1 U_* + B_2 V_*)^* \hat{p} + Q\hat{x} + U_*^*(U_*\hat{x} + u_*) - V_*^*(V_*\hat{x} + v_*) = 0, \\ \hat{p}(T) = F\hat{x}(T) \end{array} \right. \\ 0 &= -B_1^* \hat{p} - (U_*\hat{x} + u_*) \text{ et } 0 = B_2^* \hat{p} - (V_*\hat{x} + v_*) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

a une solution  $(\hat{x}, \hat{p})$  dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)^2$ . Après substitution, on peut le réécrire

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= A\hat{x} - R\hat{p}, & \hat{x}(0) &= x_0, \\ \hat{p}' + A^* \hat{p} + Q\hat{x} &= 0, & \hat{p}(T) &= F\hat{x}(T). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Par hypothèse, ceci est vrai pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Mais, quand (2.4.14) a une solution pour tout  $x_0$ , sa solution est unique. Donc dans le cas  $x_0 = 0$ ,  $(\hat{x}, \hat{p}) = (0, 0)$  et des identités (2.4.13),

$$0 = -B_1^* \hat{p} - (U_*\hat{x} + u_*) \text{ et } 0 = B_2^* \hat{p} - (V_*\hat{x} + v_*) \Rightarrow u_* = 0 \text{ et } v_* = 0$$

et les commandes feedback sont de la forme  $\hat{u} = U_*\hat{x} = -B_1^* \hat{p}$  et  $\hat{v} = V_*\hat{x} = B_2^* \hat{p}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Par hypothèse, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , le système couplé (2.4.14) a une solution unique  $(\hat{x}, \hat{p})$ . Par linéarité par rapport à  $x_0$ , il existe des matrices  $H^1(0, T)$   $(\bar{X}, \bar{\Lambda})$  solution du système matriciel

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= A\bar{X} - R\bar{\Lambda}, & \bar{X}(0) &= I, \\ \bar{\Lambda}' + A^* \bar{\Lambda} + Q\bar{X} &= 0, & \bar{\Lambda}(T) &= F\bar{X}(T). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Mais les conditions  $U_*\hat{x} = -B_1^* \hat{p}$  et  $V_*\hat{x} = B_2^* \hat{p}$  pour tout  $x_0$  implique  $U_*\bar{X} = -B_1^* \bar{\Lambda}$  et  $V_*\bar{X} = B_2^* \bar{\Lambda}$  et  $\bar{X}$  est aussi solution unique de l'équation

$$\bar{X}' = (A + B_1 U_* + B_2 V_*)\bar{X}, \quad \bar{X}(0) = I. \quad (2.4.16)$$

Comme les éléments de la fonction matricielle  $A + B_1 U_* + B_2 V_*$  sont des fonctions  $L^2$ , la résolvante associée  $\Phi(t, s)$  est inversible par le théorème 1.6.1,  $\bar{X}(t)x_0 = \hat{x}(t) =$

$\Phi(t, 0)x_0$ , et, a fortiori,  $\bar{X}(t) = \Phi(t, 0)$  est inversible dans  $[0, T]$ . Considérons les nouvelles fonctions matricielles  $(X(t), \Lambda(t)) = (\bar{X}(t)\bar{X}(T)^{-1}, \bar{\Lambda}(t)\bar{X}(T)^{-1})$ . Elles sont solution du système matriciel différentiel

$$\begin{aligned} X' &= AX - R\Lambda, & X(T) &= I \\ \Lambda' + A^*\Lambda + QX &= 0, & \Lambda(T) &= F \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

et  $\det X(t) \neq 0$  partout dans  $[0, T]$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Puisque  $X(t)$  est inversible pour tout  $t \in [0, T]$ , alors  $P(t) = \Lambda(t)X(t)^{-1}$  est une solution  $H^1(0, T)$  de l'équation matricielle différentielle de Riccati (2.4.7). Montrons que  $P$  est symétrique en calculant la dérivée de  $\Lambda^*X - X^*\Lambda$ .

$$\begin{aligned} (\Lambda^*X - X^*\Lambda)' &= (\Lambda^*)'X + \Lambda^*X' - (X^*)'\Lambda - X^*(\Lambda)' \\ &= (-\Lambda^*A - X^*Q)X + \Lambda^*(AX - R\Lambda) - (X^*A^* - \Lambda^*R)\Lambda + X^*(A^*\Lambda + QX) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\Lambda^*(T)X(T) = F = X^*(T)\Lambda(T)$ , alors

$$\Lambda^*X = X^*\Lambda.$$

Donc

$$\begin{aligned} X^*(P - P^*) &= X^*\Lambda X^{-1} - X^*(X^{-1})^*\Lambda^* = \Lambda^*XX^{-1} - \Lambda^* = 0. \\ \Rightarrow P - P^* &= 0 \end{aligned}$$

car  $X^*$  est inversible. De plus,

$$\begin{aligned} p(t) &= \Lambda(t)\Phi(T, 0)x_0 = \Lambda(t)\Phi(T, 0)\Phi(t, 0)^{-1}\Phi(t, 0)x_0 = \Lambda(t)X(t)^{-1}x(t) = P(t)x(t) \\ \Rightarrow \hat{u}(t) &= -B_1^*p(t) = -B_1^*P(t)x(t) \text{ et } \hat{v}(t) = B_2^*p(t) = B_2^*P(t)x(t). \end{aligned}$$

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  la solution de

$$x' = Ax + B_1u + B_2v, \quad x(0) = x_0 \quad (2.4.18)$$

et soit  $P$  une solution symétrique  $H^1(0, T)$  de l'équation matricielle différentielle de Riccati (2.4.7). Par l'argument classique de Bernhard [3], nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d(x, Px)}{dt} &= 2(x', Px) + (x, P'x) \\ &= 2(Ax + B_1u + B_2v, Px) + (x, (-A^*P - PA + PRP - Q)x) \\ &= 2(B_1u + B_2v, Px) + (x, (PRP - Q)x). \end{aligned}$$

En intégrant des deux côtés de l'égalité de 0 à  $T$ ,

$$\begin{aligned} x(T) \cdot P(T)x(T) &= \int_0^T 2(B_1u + B_2v, Px) + (x, (PRP - Q)x) dt + x_0 \cdot P(0)x_0 \\ &= \int_0^T -Qx \cdot x + 2B_1u \cdot Px + 2B_2v \cdot Px + |B_1^*Px|^2 - |B_2^*Px|^2 dt \\ &\quad + x_0 \cdot P(0)x_0. \end{aligned}$$

En remplaçant dans  $C_{x_0}(u, v)$ ,

$$\begin{aligned} C_{x_0}(u, v) &= Fx(T) \cdot x(T) + \int_0^T Qx \cdot x + |u|^2 - |v|^2 dt \\ &= x_0 \cdot P(0)x_0 + \int_0^T |u|^2 + 2B_1u \cdot Px + |B_1^*Px|^2 \\ &\quad - (|v|^2 - 2B_2v \cdot Px + |B_2^*Px|^2) dt \\ &= P(0)x_0 \cdot x_0 + \int_0^T |u + B_1^*Px|^2 - |v - B_2^*Px|^2 dt. \end{aligned}$$

Choisissons les stratégies en boucle fermée  $\phi^*(t, x) = -B_1^*(t)P(t)x$  et  $\psi^*(t, x) = B_2^*(t)P(t)x$ . Alors pour tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  et tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) &= P(0)x_0 \cdot x_0 \\ C_{x_0}(u, \psi^*) &= P(0)x_0 \cdot x_0 + \int_0^T |u + B_1^*Px|^2 dt \geq P(0)x_0 \cdot x_0 = C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) \\ C_{x_0}(\phi^*, v) &= P(0)x_0 \cdot x_0 - \int_0^T |v - B_2^*Px|^2 dt \leq P(0)x_0 \cdot x_0 = C_{x_0}(\phi^*, \psi^*). \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.2 (ii), la paire linéaire  $(\phi^*, \psi^*)$  est un point de selle en boucle fermée global. □

### 2.4.2. Classification des points de selle en boucle fermée

Une des conditions nécessaires pour l'existence d'un point de selle en boucle fermée est l'existence d'une solution au système couplé. Cette condition est également nécessaire à la finitude de la valeur inférieure, la valeur supérieure ou la valeur du jeu en boucle ouverte et la différence dépend essentiellement de la propriété de convexité de la fonction d'utilité par rapport à  $u$  et de celle de concavité par rapport à  $v$ . Nous sommes donc naturellement amenés à la classification suivante en fonction des propriétés de convexité et de concavité de la fonction d'utilité.

**Théorème 2.4.2.** *Supposons que  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  est un point de selle en boucle fermée de  $C_{x_0}(\phi, \psi)$ .*

- (a)  $v(x_0)$  est fini si et seulement si  $C_{x_0}(u, v)$  est convexe en  $u$  et concave en  $v$ ,
- (b)  $v^-(x_0)$  est fini et  $v^+(x_0) = +\infty$  si et seulement si  $C_{x_0}(u, v)$  est convexe en  $u$  et pas concave en  $v$ .
- (c)  $v^+(x_0)$  est fini et  $v^-(x_0) = -\infty$  si et seulement si  $C_{x_0}(u, v)$  est concave en  $v$  et pas convexe en  $u$ .
- (d)  $v^-(x_0) = -\infty$  et  $v^+(x_0) = +\infty$  si et seulement si  $C_{x_0}(u, v)$  n'est pas convexe en  $u$  et pas concave en  $v$ .
- (e)  $v^-(x_0) = v^+(x_0) = +\infty$  ne peut se produire.
- (f)  $v^-(x_0) = v^+(x_0) = -\infty$  ne peut se produire.

Dans les trois premiers cas,  $C_{x_0}(\phi^*, \psi^*)$  est égal  $v(x_0)$ ,  $v^-(x_0)$ , et  $v^+(x_0)$ , respectivement.

Nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.4.3.** (i) Pour tout  $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$

$$\inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, v) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) \quad (2.4.19)$$

$$\sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \psi) \geq \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v). \quad (2.4.20)$$

(ii) Pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$

$$\sup_{\psi \in \Psi} C_{x_0}(u, \psi) = \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v) \quad (2.4.21)$$

$$\inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} C_{x_0}(\phi, \psi) \leq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \sup_{v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} C_{x_0}(u, v). \quad (2.4.22)$$

PREUVE DU LEMME 2.4.3. Nous avons seulement besoin de (i). Puisque

$$L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \subset \Phi,$$

$$\inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \nu) \leq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \nu).$$

Réciproquement, pour la paire  $(\phi, \nu)$ , soit  $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  la solution du système

$$x' = Ax + B_1\phi(x) + B_2\nu, \quad x(0) = x_0$$

et soit  $u = \phi(x) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . Ceci implique que

$$\begin{aligned} C_{x_0}(\phi, \nu) = C_{x_0}(u, \nu) &\geq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \nu) \\ \Rightarrow \inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \nu) &\geq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \nu) \Rightarrow \inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \nu) = \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \nu). \end{aligned}$$

La deuxième inégalité suit du fait que  $L^2(0, T; \mathbb{R}^k) \subset \Psi$ . □

PREUVE DU THÉORÈME 2.4.2. De l'inégalité (2.4.20),  $v^-(x_0) \leq C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) < +\infty$  et le cas (e) ne peut se produire. De façon semblable, de l'inégalité (2.4.22),  $v^+(x_0) \geq C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) > -\infty$  et le cas (f) ne peut se produire. Il nous reste donc seulement les quatre premiers cas.

(b) De la première partie de la preuve du Théorème 2.4.1, le système (2.4.14) possède une solution et les identités (2.4.13) sont vérifiées :

$$\begin{cases} \hat{x}' = A\hat{x} - R\hat{p}, & \hat{x}(0) = x_0, \\ \hat{p}' + A^*\hat{p} + Q\hat{x} = 0, & \hat{p}(T) = F\hat{x}(T), \end{cases} \quad (2.4.23)$$

$$0 = -B_1^*\hat{p} - (U_*\hat{x} + u_*) \text{ and } 0 = B_2^*\hat{p} - (V_*\hat{x} + v_*). \quad (2.4.24)$$

En utilisant les commandes  $(\hat{u}, \hat{v}) = (U_*\hat{x} + u_*, V_*\hat{x} + v_*) = (-B_1^*\hat{p}, B_2^*\hat{p})$ , le système ci-haut peut être réécrit

$$\begin{cases} \hat{x}' = A\hat{x} - B_1B_1^*\hat{p} + B_2\hat{v}, & \hat{x}(0) = x_0, & \hat{u} = -B_1^*\hat{p}, \\ \hat{p}' + A^*\hat{p} + Q\hat{x} = 0, & \hat{p}(T) = F\hat{x}(T). \end{cases}$$

Si  $C_{x_0}(u, \nu)$  est convexe en  $u$ , ceci implique que  $\hat{u}$  est un minimiseur de  $C_{x_0}(u, \hat{v})$  par rapport à  $u$  (par exemple, [5, Thm 3.1]). Donc

$$\sup_{\nu \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \nu) \geq \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \hat{v}) = C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v}).$$

Mais, par construction de  $(\hat{u}, \hat{v})$ ,  $C_{x_0}(\phi^*, \psi^*) = C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v})$ . En combinant ces inégalités avec les inégalités (2.4.20) dans le Lemme 2.4.3, on obtient

$$v^-(x_0) = \sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) = \inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, \hat{v}) = C_{x_0}(\hat{u}, \hat{v})$$

et nous obtenons la finitude de  $v^-(x_0)$ . Si, en plus,  $C_{x_0}(u, v)$  était concave en  $v$ , alors par [5, Théorèmes 2.5 et 2.4] la valeur du jeu et donc  $v^+(x_0)$  serait finie et ceci contredirait notre hypothèse. Réciproquement, si  $v^-(x_0)$  est finie, alors l'application  $u \mapsto C_{x_0}(u, v)$  est convexe ([5, Théorèmes 2.2 (iii), la dernière partie de l'identité (2.35) et la Remarque 2.2]). Si  $v^+(x_0)$  est également finie, alors par [5, Thms 2.5 and 2.4 (iii)]  $C_{x_0}(u, v)$  serait concave en  $v$  en contradiction avec notre hypothèse.

La preuve de (c) est duale à la preuve de (b). La preuve de (a) est semblable à la preuve des parties (b) et (c). Le cas (d) est le complément de tous les autres cas. Il peut donc seulement arriver lorsque  $C_{x_0}(u, v)$  est ni convexe en  $u$ , ni concave en  $v$ .  $\square$

Terminons avec un exemple où il n'y a pas point de selle en boucle fermée. C'est le cas (e), où  $v^-(x_0) = v^+(x_0) = +\infty$ . Cependant, on va montrer que

$$\inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} C_{x_0}(\phi, \psi) = \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \psi) = +\infty.$$

Bien qu'il n'existe pas de  $(\phi^*, \psi^*) \in \Phi \times \Psi$  qui réalise cette identité et qu'il n'y a pas de point de selle en boucle fermée, on pourrait parler d'un cas dégénéré de point de selle (P.Bernhard [2]).

**Exemple 2.4.1.** Considérons le système dynamique sur  $[0, 2]$  et la fonction d'utilité

$$\begin{aligned} x'(t) &= tu(t) + t^3v(t), & x(0) &= x_0, \\ C_{x_0}(u, v) &= \frac{3}{8}x(2) \cdot x(2) + \int_0^2 |u(t)|^2 - |v(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Ici,  $A = 0$ ,  $F = \frac{3}{8}$ ,  $B_1(t) = t$ ,  $B_2(t) = t^3$ ,  $Q = 0$  et  $R = t^2 - t^6$ . L'équation de Riccati est donc

$$P' - P^2[t^2 - t^6] = 0, \text{ p.p. dans } [0, 2], \quad P(2) = \frac{3}{8}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P^2} &= t^2 - t^6 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{P(t)} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7} \right] &= 0 \\ \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - \frac{128}{7} - \frac{1}{P(t)} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7} &= 0 \\ \frac{-272 - 7t^3 + 3t^7}{21} &= \frac{1}{P(t)} \\ \Rightarrow P(t) &= \frac{21}{-272 - 7t^3 + 3t^7} \end{aligned}$$

La solution explose en 1.9521. À noter que  $P(t)$  n'est pas  $H^1(0, 2)$ . On va maintenant montrer qu'il n'y a pas de point de selle en boucle ouverte sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Pour la valeur inférieure en boucle ouverte du jeu, nous avons que l'application  $u \mapsto C_{x_0}(u, v)$  est convexe et bornée en-dessous par  $-\|v\|_{L^2}^2$ . La minimisation par rapport à  $u$  a donc une solution unique pour chaque  $(x_0, v)$ . L'élément minimiseur est complètement caractérisé par le système couplé

$$\begin{cases} x'(t) = t\hat{u}(t) + t^3v(t) \text{ p.p. dans } [0, 2], & x(0) = x_0, \\ p'(t) = 0 \text{ p.p. dans } [0, 2], & p(2) = \frac{3}{8}x(2), \end{cases}$$

$$\hat{u}(t) = -tp(t).$$

Puisque  $p(t)$  est constante, nous avons que  $p(t) = \frac{3}{8}x(2)$ . Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} x(2) &= x_0 + \int_0^2 -t^2 \frac{3}{8}x(2) + t^3v(t) dt \\ &= x_0 + \frac{3}{8}x(2) \int_0^2 -t^2 dt + \int_0^2 t^3v(t) dt \\ &= x_0 - x(2) + \int_0^2 t^3v(t) dt \\ \Rightarrow x(2) &= \frac{x_0 + \int_0^2 t^3v(t) dt}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_{x_0}^-(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u \in L^2(0,2;\mathbb{R})} C_{x_0}(u, v) \\
 &= J_{x_0}(\hat{u}, v) \\
 &= \frac{3}{8}x(2) \cdot x(2) + \int_0^2 \left| -t\frac{3}{8}x(2) \right|^2 - |v(t)|^2 dt \\
 &= \frac{3}{16} \left[ x_0 + \int_0^2 t^3 v(t) dt \right]^2 - \int_0^2 |v(t)|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Notons que l'application  $v \mapsto J_{x_0}^-(v)$  n'est pas concave en  $v$  et que le supremum par rapport à  $v$  de  $J_{x_0}^-(v)$  est  $+\infty$ . En effet, en prenant la suite  $v_n(t) = n$  et en laissant  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned}
 J_{x_0}^-(v_n) &= \frac{3}{16} \left[ x_0 + \int_0^2 t^3 n dt \right]^2 - \int_0^2 n^2 dt \\
 &= \frac{3}{16} [x_0 + 4n]^2 - 2n^2 \\
 &= \frac{3}{16}x_0^2 + \frac{24}{16}x_0n + n^2 \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc, la valeur inférieure et a fortiori, la valeur supérieure en boucle ouverte du jeu sont égales à  $+\infty$ . On peut noter finalement que le système couplé sur  $[0, 2]$

$$\begin{cases} x'(t) = [-t^2 + t^6]p(t) \text{ p.p. dans } [0, 2], & x(0) = x_0, \\ p'(t) = 0 \text{ p.p. dans } [0, 2], & p(2) = \frac{3}{8}x(2), \end{cases}$$

possède une solution unique sur  $[0, 2]$ . En effet,  $p(t) = \frac{3}{8}x(2)$  et

$$\begin{aligned}
 x(2) &= x_0 + \int_0^2 [-t^2 + t^6] \frac{3}{8}x(2) dt \\
 &= x_0 + \frac{3}{8}x(2) \left[ \frac{-t^3}{3} + \frac{t^7}{7} \right] \Big|_{t=0}^{t=2} \\
 &= x_0 + \frac{3}{8}x(2) \frac{328}{21} \\
 \Rightarrow x_2 &= \frac{-7}{34}x_0.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$x'(t) = [-t^2 + t^6] \frac{3}{8} \cdot \frac{-7}{34} x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 - \frac{21}{272} x_0 \left[ \frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} \right].$$

Il manque donc seulement la concavité de  $J_{x_0}^-(v)$  pour avoir une valeur inférieure en boucle ouverte du jeu finie. Aussi, par le lemme 2.4.3,

$$+\infty = \sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^k)} \inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} C_{x_0}(u, v) \leq \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} C_{x_0}(\phi, \psi) \leq \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} C_{x_0}(\phi, \psi).$$

□

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] I. Berkovitz, *Lectures on Differential Games and Related Topics*, Kuhn and Szego, eds, North Holland Publishing Company, Amsterdam, Holland 1971.
- [2] P. Bernhard, *Linear-quadratic, two-person, zero-sum differential games : necessary and sufficient conditions*, J. Optim. Theory Appl. 27 (1979), 51–69.
- [3] P. Bernhard, *Contribution à l'Étude des Jeux Différentiels à deux personnes, Somme Nulle et Information Parfaite*, Thesis, Université de Paris VI, Paris, France, 1978.
- [4] A.L. Brown et A. Page, *Elements of functional analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
- [5] M. C. Delfour, *Linear-quadratic differential games : saddle point and Riccati differential equation*, SIAM J. Control Optim. 46, No. 2 (2007), 750–774.
- [6] M. C. Delfour, *Optimisation et contrôle*, Notes du cours MAT6439, CRM et DMS Université de Montréal, 2005.
- [7] P. Faurre et M. Robin, *Éléments d'automatique*, BORDAS, Paris, 1984.
- [8] J.L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1962.