

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Algorithmes Efficaces pour la Simulation de
Gouttes Entraînées

par

Sébastien Leclaire

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques Appliquées

novembre 2007

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Algorithmes Efficaces pour la Simulation de
Gouttes Entraînées**

présenté par

Sébastien Leclaire

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pr. Robert Owens

(président-rapporteur)

Pr. Anne Bourlioux

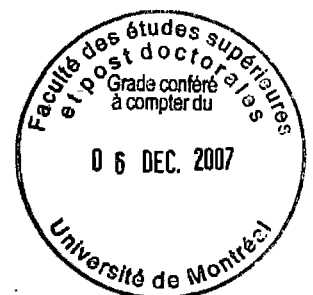
(directrice de recherche)

Pr. Jacques Bélair

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

9 novembre 2007



SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous étudions un modèle mathématique décrivant le comportement d'un fluide constitué de deux phases. Ce fluide est un gaz transportant des gouttelettes en suspension. Pour la phase des gouttes, nous comparons à l'aide d'algorithmes numériques la formulation lagrangienne avec la formulation eulérienne. Deux cas tests sont considérés : un tube à choc où l'évolution du gaz et des gouttes est couplée et un tunnel à vent avec une marche sans effet des gouttes sur le gaz. Notre but principal est d'identifier laquelle des deux formulations mène aux simulations numériques les plus efficaces.

Mots-clés : analyse numérique, simulation, performance, écoulements à deux phases, gaz, gouttelettes, modèle, lagrangien, eulérien, tube à choc, tunnel à vent.

SUMMARY

In this Master's thesis, we study a mathematical model describing the behavior of a fluid consisting of two phases. This fluid is a gas with droplets in suspension. For the droplet phase, we compare the use of numerical algorithms based, on one hand, on a Lagrangian formulation, on the other hand, on an Eulerian formulation. Two numerical experiments are considered : a shock-tube with full coupling between the gas and the drops and a wind-tunnel with a step with partial uncoupling between the gas and the drops. Our main objective is to identify which of the two approaches is computationally more efficient.

Keys-words : numerical analysis, simulation, performance, two-phase flows, gas, droplets, models, lagrangian, eulerian, shock-tube, wind-tunnel.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Remerciements	1
Introduction	2
Nomenclature	5
Chapitre 1. Modélisation	7
1.1. Description et hypothèses.....	7
1.2. Formulation lagrangienne pour les gouttes.....	8
1.3. Formulation eulérienne pour les gouttes.....	10
1.4. Formulation eulérienne pour le gaz.....	13
1.5. Notations vectorielles.....	13
1.6. Différentes stratégies.....	15
Chapitre 2. Cas uni-dimensionnel	17
2.1. Formulation spécialisée au cas uni-dimensionnel.....	17
2.2. Algorithmes numériques pour la formulation eulérienne.....	17
2.2.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs.....	18

2.2.2.	Équations compressibles d'Euler	19
2.2.3.	Équations eulériennes des gouttes	19
2.2.4.	Termes sources.....	22
2.3.	Algorithmes numériques pour la formulation lagrangienne.....	22
2.3.1.	Intégration temporelle par séparation des opérateurs	23
2.3.2.	Équations compressibles d'Euler	23
2.3.3.	Termes sources.....	24
2.3.4.	Équations lagrangiennes des gouttelettes	24
2.3.4.1.	Interpolation de la solution du gaz à la position de la gouttelette.....	24
2.4.	Cas test : le tube à choc	26
2.4.1.	Description de l'expérience.....	26
2.4.2.	Solution de l'expérience.....	28
2.4.3.	Ordre de convergence	29
2.4.3.1.	Ordre de convergence de l'approche eulérienne	29
2.4.3.2.	Ordre de convergence de l'approche lagrangienne.....	32
2.4.3.3.	Commentaires	33
2.4.4.	Comparaison des performances.....	36
2.5.	Conclusion.....	38
Chapitre 3. Cas bi-dimensionnel.....		39
3.1.	Algorithmes numériques pour la formulation eulérienne couplée avec le gaz.....	39
3.1.1.	Intégration temporelle par séparation des opérateurs	40
3.1.2.	Équations compressibles d'Euler	42
3.1.3.	Équations eulériennes des gouttes	42
3.1.4.	Termes sources.....	42

3.2. Algorithmes numériques pour la formulation eulérienne non couplée avec le gaz	45
3.2.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs	45
3.2.2. Équations compressibles d'Euler	46
3.2.3. Équations eulériennes des gouttes	46
3.2.4. Termes sources	46
3.3. Algorithmes numériques pour la formulation lagrangienne	47
3.3.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs	48
3.3.2. Équations lagrangiennes des gouttelettes	49
3.3.2.1. Interpolation de la solution du gaz à la position de la gouttelette	50
3.4. Cas test : tunnel à vent avec une marche	50
3.4.1. Description de l'expérience	50
3.4.2. Mise en oeuvre	52
3.4.2.1. Critère d'arrêt pour les schémas eulériens	52
3.4.2.2. Équations compressibles d'Euler	53
3.4.2.3. Équations eulériennes des gouttes sans termes sources	55
3.4.2.4. Équations lagrangiennes	55
3.4.3. Solution de l'expérience sans l'effet des termes sources dans les équations du gaz	57
3.4.3.1. Solution du gaz	57
3.4.3.2. Solution eulérienne des gouttes	57
3.4.3.3. Solution lagrangienne des gouttes	58
3.4.4. Comparaison des solutions	58
3.4.4.1. Commentaires	61
3.4.5. Validation des résultats	70
3.4.5.1. Système d'équations découplées : gaz (CLAWPACK)	70
3.4.5.2. Système d'équations découplées : gouttes eulériennes	70

3.4.5.3.	Système d'équations découplées : gouttes lagrangiennes	70
3.4.5.4.	Système d'équations couplées : gaz	72
3.4.5.5.	Système d'équations couplées : gouttes	73
3.4.5.6.	Commentaires	73
3.4.6.	Effets des termes sources des équations du gaz sur les solutions stationnaires du gaz	74
3.4.6.1.	Effets de la densité microscopique des gouttes ρ_d	75
3.4.6.2.	Effets de la quantité de gouttes β_e à l'entrée	75
3.4.6.3.	Commentaires	75
3.4.7.	Optimisation dans le cas eulérien avec les équations non couplées	75
3.4.7.1.	Choix des conditions initiales	75
3.4.7.2.	Calcul de solutions grossières au départ	80
3.4.8.	Comparaison des performances	82
3.4.8.1.	Commentaires	83
3.5.	Conclusion	84
	Conclusion	86
	Bibliographie	88

LISTE DES FIGURES

2.1	Solution du problème test (Éq. 2.2.11 et 2.2.12).....	21
2.2	Reconstruction linéaire avec limiteur.....	25
2.3	Configuration initiale pour le tube à choc.....	27
2.4	Solution du tube à choc au temps $t=5$ avec l'approche eulérienne. ...	29
2.5	Solution du tube à choc au temps $t=10$ avec l'approche eulérienne. ..	30
2.6	Solution du tube à choc au temps $t=30$ avec l'approche eulérienne. ..	30
2.7	Solution du tube à choc au temps $t=5$ avec l'approche lagrangienne. .	31
2.8	Solution du tube à choc au temps $t=10$ avec l'approche lagrangienne.	31
2.9	Solution du tube à choc au temps $t=30$ avec l'approche lagrangienne.	32
2.10	Solution de la densité et la température des gouttes pour le tube à choc au temps $t=30$ avec et sans les correcteurs de flux.	35
3.1	Domaine de calcul pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.	51
3.2	Coin de la marche.	54
3.3	Convergence vers un état stationnaire pour la solution du gaz.	58
3.4	Densité et température stationnaires du gaz pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.....	59
3.5	Vitesses stationnaires du gaz pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.	60
3.6	Convergence vers un état stationnaire pour la solution des gouttes eulériennes.....	61

3.7	Densité et température stationnaires des gouttes eulériennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.	62
3.8	Vitesses stationnaires des gouttes eulériennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.	63
3.9	Densité et température stationnaires des gouttes lagrangiennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.	64
3.10	Vitesses stationnaires des gouttes lagrangiennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.	65
3.11	Coupe de la densité et la température stationnaires du gaz en $x = 0.12$.	66
3.12	Coupe des vitesses stationnaires du gaz en $x = 0.12$	67
3.13	Coupe de la densité et la température stationnaires des gouttes lagrangiennes et eulériennes en $x = 0.12$	68
3.14	Coupe des vitesses stationnaires des gouttes lagrangiennes et eulériennes en $x = 0.12$	69
3.15	Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de ρ_d , $y = 0.5$ et $y = 0.5$	76
3.16	Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de ρ_d , $x = 0.3$ et $x = 0.7$	77
3.17	Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de β_e , $y = 0.5$ et $y = 0.5$	78
3.18	Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de β_e , $x = 0.3$ et $x = 0.7$	79

LISTE DES TABLEAUX

0.1	Nomenclature utilisée dans ce mémoire.....	6
2.1	Conditions initiales pour l'expérience du tube à choc.....	26
2.2	Paramètres de référence pour l'expérience du tube à choc.....	27
2.3	Ordre de convergence de l'approche eulérienne en temps et en espace pour le schéma uni-dimensionnel.	33
2.4	Ordre de convergence de l'approche lagrangienne par rapport au nombre de gouttelettes par cellule.....	34
2.5	Ordre de convergence de l'approche lagrangienne en temps et en espace pour le schéma uni-dimensionnel.	36
2.6	Comparaison des performances de la méthode lagrangienne versus celle eulérienne pour l'expérience du tube à choc.	37
3.1	Paramètres de référence pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.....	52
3.2	Autres paramètres pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.	52
3.3	Ordre de convergence en espace (CLAWPACK) de la solution du gaz pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.....	71
3.4	Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.....	71

3.5	Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes lagrangiennes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.....	72
3.6	Ordre de convergence en espace de la solution du gaz pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système couplé.....	73
3.7	Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes eulériennes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système couplé.....	74
3.8	Effet du choix de la condition initiale sur le nombre total d'itérations requis pour obtenir l'état stationnaire.....	81
3.9	Effet du choix de l'interpolation sur le nombre d'itérations requis pour obtenir l'état stationnaire.....	82
3.10	Comparaison des performances de la méthode lagrangienne avec celle eulérienne pour l'expérience du tunnel à vent avec marche.....	84

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma directrice de recherche Pr. Anne Bourlioux pour son soutien et ses idées tout au long de ma maîtrise. De plus, je veux aussi remercier Newmerical Technologies International et le regroupement MITACS (« Mathematics of Information Technology and Complex Systems ») pour m'avoir donné la chance de faire un stage très enrichissant. Je remercie aussi ma famille et mes amis pour leurs encouragements et particulièrement ma copine pour son appui.

J'ai aussi une petite pensée pour François Charette. Merci de m'avoir abordé un beau jour à la bibliothèque durant la dernière année de mon baccalauréat et de m'avoir fait part d'une conférence midi-math à propos de la mécanique des fluides. Le fait d'avoir assisté à cette conférence a complètement changé le parcours de mes études et par conséquent, celui de ma vie. C'est vraiment incroyable de voir comment une simple conversion anodine peut changer le cours des choses. Pour ma vie, c'est un vrai effet papillon...

INTRODUCTION

De janvier à avril 2006, j'ai été accueilli dans la compagnie montréalaise Newmerical Technologies International pour y faire un stage parrainé par le regroupement MITACS (« Mathematics of Information Technology and Complex Systems »). Les travaux du stage ont inspiré les études présentées dans ce mémoire.

Newmerical se spécialise dans le développement de logiciels pour les simulations hautement performantes en mécanique des fluides pour diverses applications industrielles. Mon projet de stage était relié avec l'optimisation d'un programme servant à prédire l'accumulation du givrage sur les ailes d'avions. Cela est un problème extrêmement important et difficile puisque la glace peut sérieusement affecter, entre autres, l'aérodynamisme de l'avion et compromettre la sécurité et le confort des passagers. La partie spécifique du problème, qui m'a été confiée, concernait le module prédisant la distribution de l'accumulation de gouttelettes d'eau autour d'une aile. Cette portion du problème est une étape préliminaire cruciale dans la prédiction du givrage.

L'approche la plus répandue est basée sur une formulation lagrangienne, où des échantillons de gouttelettes sont suivis individuellement et déplacés par l'écoulement de l'air. Cette méthode est très simple à formuler, mais n'est pas très efficace du point de vue numérique. Principalement, il faut simuler un très grand nombre de gouttelettes pour obtenir des prédictions fiables.

Pour cette raison, Newmerical a opté pour une formulation eulérienne qui cherche à prédire directement la distribution de la densité des gouttes à un endroit précis. Le modèle se formule à l'aide d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles menant à des simulations numériques plus efficaces.

Le but de mon projet était d'étudier plusieurs façons de minimiser le coût computationnel lors du calcul de la distribution des gouttes autour d'une aile dans des conditions d'écoulement stationnaire. Si nous nous intéressons uniquement à la solution stationnaire, et non pas aux étapes transitoires pour atteindre cet état, cela constitue tout un défi du point de vue des calculs.

Une difficulté rencontrée lors de mon stage était la complexité du code informatique. Étant donné mon manque d'expérience avec ce type de code industriel et aussi la courte durée du stage, il s'est avéré très difficile de tester efficacement les différentes options d'optimisation du calcul stationnaire pour les gouttes qui avaient été envisagées. C'est en partie cela qui nous a motivés dans les recherches qui ont suivi le stage. Nous avons décidé d'étudier un système d'équations très similaire à celui de Newmerical, mais sur des problèmes beaucoup plus idéalisés, conçus pour cibler l'effort sur l'évaluation du module pour les gouttes.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier explique le modèle mathématique décrivant le phénomène de gouttelettes en suspension dans un gaz. Nous présenterons alors la formulation lagrangienne et eulérienne pour les gouttes. De plus, nous identifierons les difficultés spécifiques aux différentes stratégies.

Le second chapitre consiste en l'étude du modèle dans le cas uni-dimensionnel. Nous exposerons les algorithmes numériques pour résoudre les équations. Par la suite, nous décrirons l'expérience du tube à choc couplé gaz-gouttes et les conclusions que nous avons tirées de cette expérience. Nous comparerons aussi, sur ce tube à choc, les performances d'une méthode lagrangienne avec une méthode eulérienne.

Le troisième chapitre s'attaque au cas bi-dimensionnel. Nous décrirons d'abord la généralisation des algorithmes numériques dans cette géométrie. Le cas test de référence est une configuration de tunnel à vent avec une marche. La configuration choisie mène à une solution stationnaire très pertinente pour le type d'applications industrielles envisagées. Nous comparerons à nouveau l'approche lagrangienne et eulérienne pour les gouttes. Nous aborderons la question importante de savoir dans quelle mesure, il est raisonnable de négliger l'effet des gouttelettes sur la dynamique du gaz. Pour optimiser l'approche eulérienne, afin d'obtenir la solution

stationnaire des gouttes avec le moins d'itérations possible, le choix des conditions initiales est important et nous examinerons différents choix. Nous traiterons aussi d'une méthode d'accélération de convergence vers l'état stationnaire. Pour finir, nous comparerons les performances de nos codes optimisés dans les deux formulations, lagrangienne et eulérienne.

NOMENCLATURE

ρ_g	Densité microscopique du gaz
ρ_d	Densité microscopique des gouttes
ϑ_g	Fraction de volume du gaz
ϑ_d	Fraction de volume des gouttes, $\vartheta_g + \vartheta_d = 1$
u_g	Vitesse horizontale du gaz
u_d	Vitesse horizontale des gouttes
v_g	Vitesse verticale du gaz
v_d	Vitesse verticale des gouttes
e_g	Énergie spécifique totale pour le gaz
e_d	Énergie spécifique totale pour les gouttes
T_g	Température du gaz
T_d	Température des gouttes
p_g	Pression du gaz
D	Coefficient de transfert de quantité de mouvement
Q	Coefficient de transfert de quantité de chaleur
ρ	Densité macroscopique du gaz
β	Densité macroscopique des gouttes
E	Énergie totale par volume pour le gaz
Ω	Énergie totale par volume pour les gouttes
p	Pression macroscopique du gaz
ϵ_g	Énergie spécifique interne pour le gaz
ϵ_d	Énergie spécifique interne pour les gouttes
c_{vg}	Chaleur spécifique du gaz à volume constant

c_{vd}	Chaleur spécifique des gouttes à volume constant
c_{pd}	Chaleur spécifique des gouttes à pression constante
γ	Rapport de chaleur spécifique du gaz
d	Diamètre d'une gouttelette
C_d	Coefficient de traînée
Re	Nombre de Reynolds
μ	Viscosité dynamique du gaz
κ_g	Conductivité thermique du gaz
Nu	Nombre de Nusselt
Pr	Nombre de Prandtl
D	Coefficient de transfert de quantité de mouvement dans la formulation lagrangienne
Q	Coefficient de transfert de quantité de chaleur dans la formulation lagrangienne
x	Position horizontale d'une gouttelette ou position horizontale sur le domaine
y	Position verticale d'une gouttelette ou position verticale sur le domaine
R^2	$(x, y) \in [] - \infty, \infty[\times] - \infty, \infty[\}$
$?_{ref}$? quantité de référence
CFL	Nombre de courant
$\frac{d}{dt}$	Dérivée totale
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle
J	Joule
kg	Kilogramme
K	Kelvin
m	Mètre
N	Newton
W	Watt
s	Seconde
Δx	Variation en x
Δy	Variation en y

TAB. 0.1: Nomenclature utilisée dans ce mémoire

Chapitre 1

MODÉLISATION

Ce chapitre a pour but de présenter le modèle et les différentes stratégies utilisées tout au long de cette recherche.

1.1. DESCRIPTION ET HYPOTHÈSES

Le modèle mathématique décrit le comportement d'un fluide constitué de deux phases. La première phase est un gaz et la deuxième est composée de particules en suspension. Ces particules pourraient tout aussi bien être des gouttelettes liquides que des grains de poussière.

La recherche présentée dans ce mémoire s'appuie principalement sur les travaux de Pelanti et LeVesque [1] et de Saito [2]. Nous conservons la notation qui est employée dans [1]. Les hypothèses suivantes sont utilisées pour aboutir à un modèle simple [2] :

- (1) Le gaz obéit à la loi des gaz parfaits ;
- (2) les particules ne peuvent pas entrer en collision et par conséquent, elles ne contribuent pas à la pression ;
- (3) toutes les particules sont identiques, sphériques et avec un diamètre constant ;
- (4) les particules sont inertes (notamment, pas d'évaporation et pas de déformation) ;
- (5) la force de gravité est négligeable ;
- (6) le volume occupé par les particules est négligeable par rapport à celui du gaz ;

- (7) les seules interactions envisagées entre le gaz et les particules sont le transfert de quantité de mouvement et de chaleur.

Sans perte de généralité, nous décrivons les modèles uniquement dans le cas bi-dimensionnel, la généralisation au cas tri-dimensionnel est immédiate. De plus, sauf quand cela est indiqué, nous supposons que la présence des gouttes n'influence pas la dynamique du gaz.

En ce qui concerne la phase des gouttes, nous pouvons envisager soit une formulation lagrangienne, soit une formulation eulérienne. Dans une formulation lagrangienne, la phase des gouttes est modélisée en suivant individuellement l'évolution d'un nombre statistiquement significatif de gouttelettes. Par contre, dans la formulation eulérienne, la phase des gouttes est caractérisée directement via les quantités moyennes locales, telles que la densité ou la vitesse moyenne des gouttes à un endroit et à un moment donné. Nous donnons maintenant plus de détails sur ces deux formulations.

1.2. FORMULATION LAGRANGIENNE POUR LES GOUTTES

Dans cette formulation, une gouttelette est considérée comme une masse ponctuelle décrite entièrement par sa position, son champ de vitesse et sa température. L'évolution de ces quantités associées à une gouttelette est décrite par un système de cinq équations différentielles ordinaires (EDO). Les deux premières équations (Éq. 1.2.1 et 1.2.2) décrivent l'évolution de la position (x, y) de la gouttelette en fonction de son vecteur vitesse (u_d, v_d) . Les deux équations suivantes (Éq. 1.2.3 et 1.2.4) décrivent le transfert de quantité de mouvement entre le gaz et la gouttelette. La dernière équation (Éq. 1.2.5) décrit l'évolution de la température de la gouttelette T_d due au transfert de quantité de chaleur. Les mêmes équations lagrangiennes sont présentées par [6], hormis le fait que nous négligeons ici la gravité et que nous ajoutons le transfert de quantité de chaleur [1].

Le système à résoudre pour chaque gouttelette est donc le suivant :

$$\frac{d}{dt}x = u_d \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d}{dt}y = v_d \quad (1.2.2)$$

$$\frac{d}{dt}u_d = \mathcal{D}(u_g(x, y, t) - u_d) \quad (1.2.3)$$

$$\frac{d}{dt}v_d = \mathcal{D}(v_g(x, y, t) - v_d) \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d}{dt}T_d = \mathcal{Q}(T_g(x, y, t) - T_d) \quad (1.2.5)$$

où u_g, v_g et T_g sont respectivement le champ de vitesse et la température du gaz au temps t et en la position (x, y) de la gouttelette. Nous supposons, pour le moment, que la vitesse du gaz et sa température sont connues. \mathcal{D} représente le coefficient de transfert de quantité de mouvement et \mathcal{Q} le coefficient de transfert de quantité de chaleur. Ces coefficients sont modélisés par les relations suivantes :

$$\mathcal{D} = \frac{3C_d\rho\sqrt{(u_g - u_d)^2 + (v_g - v_d)^2}}{4d\rho_d}$$

Ici, d est le diamètre d'une gouttelette, ρ la densité macroscopique du gaz à la position de la gouttelette, ρ_d la densité microscopique de la gouttelette et C_d le coefficient de traînée :

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re}(1 + 0.15Re^{0.687}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{si } Re \geq 1000 \end{cases}$$

avec le nombre de Reynolds Re donné par :

$$Re = \frac{\rho d \sqrt{(u_g - u_d)^2 + (v_g - v_d)^2}}{\mu}$$

où μ est la viscosité dynamique du gaz. Le coefficient de transfert de quantité de chaleur \mathcal{Q} est donné par :

$$\mathcal{Q} = \frac{Nu \ 6 \ \kappa_g}{c_{vd}\rho_d d^2}$$

avec κ_g la conductivité thermique du gaz, c_{vd} la chaleur spécifique à volume constant de la gouttelette et Nu le nombre de Nusselt :

$$Nu = 2 + 0.65 \ Re^{\frac{1}{2}} \ Pr^{\frac{1}{3}}$$

où le nombre de Prandtl est défini par :

$$Pr = \frac{c_{pg}\mu}{\kappa_g}$$

avec c_{pg} la chaleur spécifique à pression constante du gaz. La gouttelette est incompressible et par conséquent, ρ_d est constant. De plus, à moins d'avis contraire, κ_g , c_{pg} , c_{vd} , d et μ sont considérés constants.

Étant donné les conditions initiales d'une gouttelette, la solution exacte du système d'équations (Éq. 1.2.1 à 1.2.5) est alors une courbe dans l'espace à cinq dimensions où $[x(t), y(t), u_d(t), v_d(t), T_d(t)]$ représentent la position, le vecteur vitesse et la température de la gouttelette en fonction du temps t . La solution exacte du système n'est pas connue et nous devons faire appel à des méthodes numériques. Bien résoudre ces équations est un défi numérique, puisque généralement, la solution de ce système est raide. De plus, les fonctions \mathcal{D} et \mathcal{Q} sont très non-linéaires.

Dans la formulation lagrangienne, chaque gouttelette est ainsi modélisée par un tel système d'équations différentielles ordinaires. Cela pose un autre problème numérique, car pour bien modéliser la dynamique collective de la phase des gouttes, il faut simuler un très grand nombre de gouttelettes (jusqu'à plusieurs millions!) et cela est très coûteux sur le plan computationnel. Le coût associé à une méthode lagrangienne peut devenir très grand et c'est pour cela que certaines compagnies comme Newmerical optent plutôt pour une approche eulérienne afin de modéliser les gouttes. C'est dans cette optique que nous introduisons la formulation eulérienne pour les gouttes.

1.3. FORMULATION EULÉRIENNE POUR LES GOUTTES

Dans cette approche, la phase des gouttes est modélisée directement comme un continuum. La description consiste alors à donner à chaque instant t , et à chaque emplacement du domaine (x, y) la fraction volumique moyenne de gouttelettes, leur vitesse moyenne et leur température moyenne.

Les symboles introduits pour la formulation lagrangienne seront utilisés à nouveau pour la formulation eulérienne. Par contre, cette fois-ci, (x, y) représente une position fixe à l'intérieur du domaine et non plus la position d'une gouttelette.

De plus, au lieu que les quantités (ex. u_g et u_d) représentent une quantité propre à une gouttelette ou sa position, cela représentera une moyenne locale de cette quantité en fonction de la position (x, y) du domaine.

Pour mieux comprendre la relation entre la vision lagrangienne et la vision eulérienne d'un écoulement, plaçons-nous dans le cas d'un écoulement stationnaire. Pour bien définir la vision eulérienne, il faut déterminer ϑ_d la fraction de volume, u_d la vitesse horizontale, v_d la vitesse verticale et T_d la température en tout point (x, y) du domaine à partir des positions des gouttelettes, de leur vitesse et de leur température. Cela n'est pas une tâche simple. Intuitivement, la fraction de volume en (x, y) peut être vue comme $\frac{T_{goutte}}{T_{goutte} + T_{ngoutte}}$. Ainsi, T_{goutte} est la quantité de temps total où il y a une gouttelette en (x, y) et $T_{ngoutte}$ est la quantité de temps total où il n'y a pas de gouttelette en (x, y) une fois l'état stationnaire atteint. D'un point de vue similaire, cela revient à dire que la fraction de volume est en quelque sorte la probabilité qu'il y ait une gouttelette en (x, y) . Pour définir la vitesse horizontale eulérienne, il faut prendre la vitesse moyenne de la vitesse des gouttelettes passant en (x, y) durant la période de temps T_{goutte} . Il en est de même pour la vitesse verticale eulérienne et la température eulérienne.

Sous des hypothèses appropriées, une démarche classique permet de passer de la formulation lagrangienne à la formulation eulérienne. Cela conduit alors à un système de lois de conservation. En deux dimensions, le système des gouttes est composé de quatre équations [1]. La première est une équation de conservation de la masse (Éq. 1.3.1). Les deux suivantes sont des équations de conservation de la quantité de mouvement (Éq. 1.3.2 et Éq. 1.3.3). Enfin, la dernière est une équation de conservation de l'énergie (Éq. 1.3.4). Ces équations sont aussi munies de termes sources modélisant le transfert de quantité de mouvement et de chaleur du gaz vers les gouttes.

Tel que défini dans [1], ρ_d est la densité microscopique des gouttes; ϑ_d la fraction de volume; u_d la vitesse horizontale; v_d la vitesse verticale; e_d l'énergie spécifique totale; T_d la température et finalement, D et Q les fonctions exprimant

le transfert de quantité de mouvement et de chaleur. Le système conservatif bi-dimensionnel d'équations des gouttes [1] correspondant à ce formalisme est donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_d \rho_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_d \rho_d u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_d \rho_d v_d) = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_d \rho_d u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_d \rho_d u_d^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_d \rho_d u_d v_d) = D(u_g - u_d) \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_d \rho_d v_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_d \rho_d u_d v_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_d \rho_d v_d^2) = D(v_g - v_d) \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_d \rho_d e_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_d \rho_d e_d u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_d \rho_d e_d v_d) \quad (1.3.4)$$

$$= D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d)$$

L'énergie spécifique totale e_d est la somme de l'énergie spécifique interne ϵ_d et de l'énergie cinétique :

$$e_d = \frac{1}{2}(u_d^2 + v_d^2) + \epsilon_d$$

Ensuite, l'énergie spécifique interne dépend de la chaleur spécifique à volume constant c_{vd} des gouttes :

$$\epsilon_d = c_{vd} T_d$$

D et Q sont donnés par :

$$D = \beta \mathcal{D}$$

$$Q = \beta c_{vd} \mathcal{Q}$$

avec la notation $\rho = \vartheta_g \rho_g$ et $\beta = \vartheta_d \rho_d$ pour respectivement la densité macroscopique du gaz et celle des gouttes. Le reste des relations est identique à la formulation lagrangienne.

1.4. FORMULATION EULÉRIENNE POUR LE GAZ

Dans cette recherche, la phase du gaz est représentée par les équations compressibles d'Euler. Tel que défini dans [1], nous notons ρ_g la densité microscopique du gaz ; ϑ_g la fraction de volume ; e_g l'énergie spécifique totale ; T_g la température ; p_g la pression microscopique du gaz. Le système conservatif d'équations bi-dimensionnelles pour la phase du gaz est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_g \rho_g u_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_g \rho_g v_g) = 0 \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_g \rho_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_g \rho_g u_g^2 + \vartheta_g p_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_g \rho_g u_g v_g) = 0 \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_g \rho_g v_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_g \rho_g u_g v_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_g \rho_g v_g^2 + \vartheta_g p_g) = 0 \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vartheta_g \rho_g e_g) + \frac{\partial}{\partial x}((\vartheta_g \rho_g e_g + \vartheta_g p_g) u_g) + \frac{\partial}{\partial y}((\vartheta_g \rho_g e_g + \vartheta_g p_g) v_g) = 0 \quad (1.4.4)$$

Comme pour les gouttes, l'énergie spécifique totale e_g est la somme de l'énergie spécifique interne ϵ_g et de l'énergie cinétique :

$$e_g = \frac{1}{2}(u_g^2 + v_g^2) + \epsilon_g$$

L'énergie spécifique interne dépend elle-même de la chaleur spécifique à volume constant c_{vg} du gaz :

$$\epsilon_g = c_{vg} T_g$$

1.5. NOTATIONS VECTORIELLES

Tous ces systèmes peuvent être réécrits sous une forme plus simple en introduisant de nouveaux symboles et des notations vectorielles. Tout d'abord, introduisons les symboles suivants : $E = \vartheta_g \rho_g e_g$ et $\Omega = \vartheta_d \rho_d e_d$ les énergies totales par volume et $p = \vartheta_g p_g$ la pression macroscopique du gaz. De plus, spécifions que

$$\vec{q}_g = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_g \\ \rho v_g \\ E \end{bmatrix}, \vec{q}_d = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta u_d \\ \beta v_d \\ \Omega \end{bmatrix} \text{ et } \vec{q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_g \\ \vec{q}_d \end{bmatrix}.$$

Alors, les équations lagrangiennes des gouttes (Éq. 1.2.1 à 1.2.5) peuvent se récrire comme

$$\frac{d}{dt} \vec{s} = \vec{h}(\vec{s}; \vec{q}_g(\vec{s})) \quad (1.5.1)$$

avec

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u_d \\ v_d \\ T_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{h}(\vec{s}; \vec{q}_g(\vec{s})) = \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \\ \mathcal{D}(u_g - u_d) \\ \mathcal{D}(v_g - v_d) \\ \mathcal{Q}(T_g - T_d) \end{bmatrix}$$

Le système eulérien des gouttes se réécrit comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_d + \frac{\partial}{\partial x} \vec{f}_d(\vec{q}_d) + \frac{\partial}{\partial y} \vec{g}_d(\vec{q}_d) = \vec{\psi}_d(\vec{q}) \quad (1.5.2)$$

avec

$$\vec{f}_d(\vec{q}_d) = \begin{bmatrix} \beta u_d \\ \beta u_d^2 \\ \beta u_d v_d \\ \Omega u_d \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_d(\vec{q}_d) = \begin{bmatrix} \beta v_d \\ \beta u_d v_d \\ \beta v_d^2 \\ \Omega v_d \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\vec{\psi}_d(\vec{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ D(u_g - u_d) \\ D(v_g - v_d) \\ D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \end{bmatrix}$$

Les équations compressibles d'Euler se réécrivent comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_g + \frac{\partial}{\partial x} \vec{f}_g(\vec{q}_g) + \frac{\partial}{\partial y} \vec{g}_g(\vec{q}_g) = 0 \quad (1.5.3)$$

avec

$$\vec{f}_g(\vec{q}_g) = \begin{bmatrix} \rho u_g \\ \rho u_g^2 + p \\ \rho u_d v_g \\ (E + p)u_g \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g}_g(\vec{q}_g) = \begin{bmatrix} \rho v_g \\ \rho u_g v_g \\ \rho v_g^2 + p \\ (E + p)v_g \end{bmatrix}$$

1.6. DIFFÉRENTES STRATÉGIES

À partir des différentes formulations présentées, nous pouvons formuler différentes stratégies de simulation.

- Stratégie 1 :
 - approche eulérienne pour le gaz ;
 - approche lagrangienne pour les gouttes ;
 - nous négligeons l’effet des gouttes sur le gaz.

L’avantage de cette stratégie est que la solution pour le gaz est complètement découplée de celle des gouttes. Nous pouvons donc résoudre une fois pour toutes les équations pour le gaz. Le défi est alors de trouver une façon efficace de résoudre les équations pour les gouttes, pour un nombre suffisamment grand de gouttelettes afin d’obtenir des moyennes locales précises.

- Stratégie 2 : Idem que la stratégie 1, mais nous incluons cette fois l’effet des gouttelettes sur le gaz. La solution pour le gaz n’est maintenant plus découplée. Il s’agit maintenant d’un système couplé avec un très grand nombre d’équations (Éq. 1.2.1 à 1.2.5), ceci représente un très grand défi numérique. En notant, $\vec{\psi}_g(\vec{q}) = -\vec{\psi}_d(\vec{q})$, alors le gaz est modélisé par le système d’équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_g + \frac{\partial}{\partial x} \vec{f}_g(\vec{q}_g) + \frac{\partial}{\partial y} \vec{g}_g(\vec{q}_g) = \vec{\psi}_g(\vec{q}) \quad (1.6.1)$$

- Stratégie 3 :
 - approche eulérienne pour le gaz ;
 - approche eulérienne pour les gouttes ;
 - nous négligeons l’effet des gouttes sur le gaz.

Une question fondamentale liée à cette approche est que le système ainsi formulé n’est pas bien posé [12]. Ce sujet dépasse l’envergure de ce mémoire. Par contre, nous vérifierons l’impact de la solution calculée de l’inclusion ou non de l’effet des gouttes sur le gaz.

- Stratégie 4 : Cette stratégie est identique à la stratégie 3, sauf que cette fois, nous incluons l'effet des gouttes sur le gaz comme dans la stratégie 2.

Dans les chapitres suivants, nous allons comparer en détails ces différentes stratégies, en particulier avec l'objectif d'identifier la meilleure approche pour un calcul efficace de la solution dans le cas stationnaire.

Chapitre 2

CAS UNI-DIMENSIONNEL

2.1. FORMULATION SPÉCIALISÉE AU CAS UNI-DIMENSIONNEL

Le but de ce chapitre est d'explorer le cas uni-dimensionnel afin de tester et de valider les algorithmes. Pour obtenir les systèmes d'équations uni-dimensionnels, il suffit d'annuler la quantité de mouvement dans la direction y . Dans ce chapitre, nous incluerons toujours l'influence des gouttes sur la dynamique du gaz.

2.2. ALGORITHMES NUMÉRIQUES POUR LA FORMULATION EULÉRIENNE

Le but de cette section est de présenter les procédures utilisées pour résoudre les équations eulériennes uni-dimensionnelles. Pour une approche eulérienne, telle que définie dans le chapitre précédent, nous utiliserons la stratégie 4. Les équations à résoudre sont donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g^2 + p) &= -D(u_g - u_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u_g) &= -D(u_g - u_d)u_d - Q(T_g - T_d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\beta + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d^2) &= D(u_g - u_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega u_g) &= D(u_g - u_d)u_d + Q(T_g - T_d)\end{aligned}$$

Tel quel, ce système d'équations est très difficile à résoudre numériquement. Il est possible d'approcher ce système en utilisant une intégration par séparation des opérateurs. Cette stratégie pour résoudre les équations est utilisée par [1] et [2].

2.2.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs

En suivant la stratégie d'intégration temporelle par séparation des opérateurs, les équations sont résolues en trois grandes étapes. La première étape est de résoudre les équations compressibles d'Euler, la seconde étape est de résoudre les équations eulériennes des gouttes sans termes sources et la dernière étape est de résoudre les équations avec termes sources. Voici la procédure temporelle à suivre : soit la solution $\vec{q}^n = [\rho^n, (\rho u_g)^n, E^n, \beta^n, (\beta u_d)^n, \Omega^n]^T$ au temps t^n .

- (1) Étant donné $\vec{q}_g^n = [\rho^n, (\rho u_g)^n, E^n]^T$, résoudre sur un intervalle de temps Δt les équations compressibles d'Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g^2 + p) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u_g) = 0 \quad (2.2.3)$$

et obtenir $\vec{q}_g^* \approx \vec{q}_g(t^n + \Delta t)$ (voir la section 2.2.2).

- (2) Étant donné $\vec{q}_d^n = [\beta^n, (\beta u_d)^n, \Omega^n]^T$, résoudre sur un intervalle de temps Δt le système eulérien des gouttes

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d) = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d^2) = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega u_d) = 0 \quad (2.2.6)$$

et obtenir $\vec{q}_d^* \approx \vec{q}_d(t^n + \Delta t)$ (voir la section 2.2.3).

(3) Étant donné \vec{q}^* , résoudre sur un intervalle de temps Δt le système avec termes sources

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) = -D(u_g - u_d) \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E = -D(u_g - u_d)u_d - Q(T_g - T_d) \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) = D(u_g - u_d) \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega = D(u_g - u_d)u_d + Q(T_g - T_d) \quad (2.2.10)$$

et obtenir $\vec{q}^{n+1} = [\vec{q}_g^{n+1}, \vec{q}_d^{n+1}]^T$ (voir la section 2.2.4).

2.2.2. Équations compressibles d'Euler

Les équations compressibles d'Euler sans termes sources (Éq. 2.2.1 à 2.2.3) sont résolues avec le code CLAWPACK [7]. Ce solveur est d'ordre 2 en espace et en temps en l'absence de chocs ou d'autres discontinuités. Le code utilise le solveur approximatif de Roe pour résoudre les problèmes de Riemann aux interfaces des cellules. De plus, une correction d'ordre supérieur est mise en oeuvre avec le limiteur de pente de type « limiteur monotone avec différence centrée » (*MC limiter*).

2.2.3. Équations eulériennes des gouttes

L'algorithme numérique pour résoudre les équations eulériennes des gouttes sans termes sources (Éq. 2.2.4 à 2.2.6) est de type volume fini et est présenté dans l'article [5]. Une correction d'ordre supérieur est effectuée à l'aide du limiteur de pente « minmod ».

Le système (Éq. 2.2.4 à 2.2.6) n'est pas hyperbolique, car la matrice Jacobienne n'est pas diagonalisable. En effet, en une dimension, le système se réécrit sous la forme conservative

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{U} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{F}(\vec{U}) = 0$$

avec $P = \beta$, $Q = \beta u_d$ et $R = \Omega$, $\vec{U} = (P, Q, R)^T$ et $\vec{F}(\vec{U}) = (Q, \frac{Q^2}{P}, \frac{RQ}{P})^T$. Dans ce cas, la matrice Jacobienne est

$$\vec{F}'(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{Q^2}{P^2} & 2\frac{Q}{P} & 0 \\ -\frac{RQ}{P^2} & \frac{R}{P} & \frac{Q}{P} \end{pmatrix}$$

et ses trois valeurs propres sont $\lambda_{1,2,3} = \frac{Q}{P} = u_d$. De plus, l'ensemble des vecteurs propres associés est $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, \frac{Q}{P}, 0) = (1, u_d, 0)$. Puisqu'il n'y a que deux vecteurs propres, le système n'est pas diagonalisable et par conséquent, il n'est pas hyperbolique. Cela est dû au fait qu'il n'y a pas de pression dans les équations de ce système. Pour résoudre ce système d'équations, la théorie habituelle sur les lois de conservations hyperboliques ne s'applique alors pas nécessairement. Une théorie a été développée dans [5]. Il faut remarquer que les ondes de ce système se déplacent avec la vitesse u_d , car chacune des valeurs propres est égale à u_d . Il n'y a pas l'équivalent de la vitesse du son comme dans les équations compressibles d'Euler. Nous pouvons donc nous attendre à une condition CFL pour le pas de temps similaire à $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u_d|}$ au lieu d'une relation de la forme $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|u_g - c|, |u_g + c|)}$ pour les équations compressibles d'Euler où c est la vitesse du son.

Étant donné que le système n'est pas un système hyperbolique classique, nous avons programmé nous même les algorithmes de [5]. Nous présentons ici les résultats du problème test de l'article [5]. Nous avons utilisé 200 cellules et un nombre CFL=0.9. L'expérience consiste à résoudre les équations suivantes sur la droite $x \in [-3, 6]$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta + \frac{\partial}{\partial x} (\beta u_d) = 0 \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta u_d^2) = 0 \quad (2.2.12)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\beta(x, -1) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1, & \text{si } 1 < x < 5 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad u_d(x, -1) = \begin{cases} 1, & \text{si } -2 < x < -1 \\ -1, & \text{si } 1 < x < 5 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

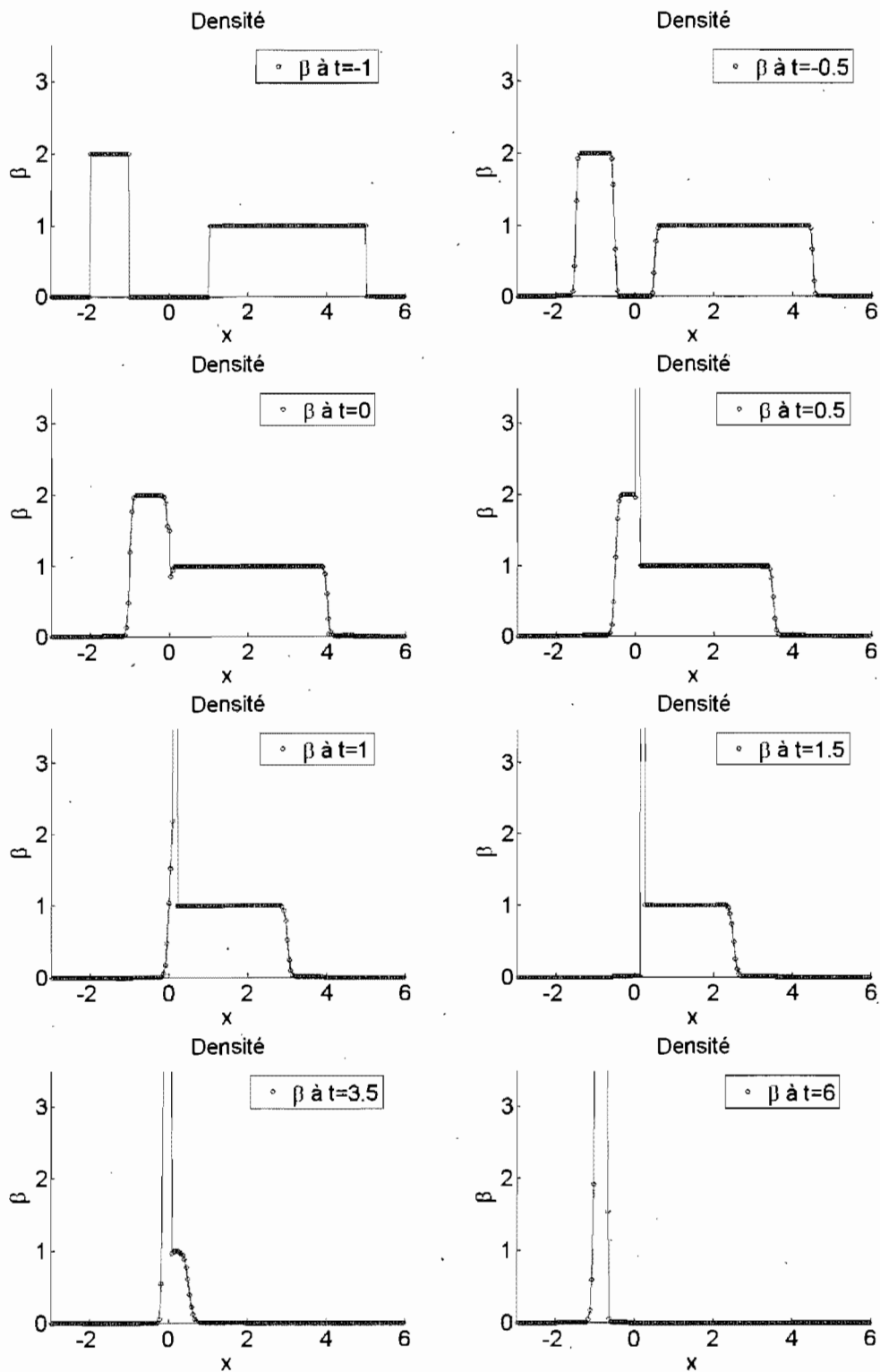


FIG. 2.1. Solution du problème test (Éq. 2.2.11 et 2.2.12).

Les graphiques de la solution sont présentés à la figure 2.1. La solution peut être vue comme la collision de deux nuages de gouttelettes. Les nuages s'agrègent alors en un point de singularité de masse et de quantité de mouvement. Une fois que les nuages sont combinés, le point de singularité continue son chemin vers la gauche. Ce type de formation est une onde delta, typique des équations sans pression. Nous ne discuterons pas plus en détail des particularités de ces équations, plus d'informations à ce sujet sont données dans l'article [5]. L'accord qualitatif avec les résultats de [5] est très satisfaisant.

2.2.4. Termes sources

Pour résoudre les équations avec termes sources (Éq. 2.2.7 à 2.2.10), nous avons utilisé une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 2. Cet algorithme a été choisi afin d'être cohérent avec l'ordre deux du solveur CLAWPACK. Les méthodes d'Euler avant et de Runge-Kutta d'ordre 4 ont aussi été testées et donnent sensiblement les mêmes résultats que Runge-Kutta d'ordre 2. Les mêmes conclusions ont été obtenues par [2].

En se rappelant la notation vectorielle du chapitre 1, le système (Éq. 2.2.7 à 2.2.10) se simplifie à

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q} = \vec{\psi}(\vec{q}) \quad (2.2.13)$$

et l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 devient :

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{\psi}(\vec{q}^*) \\ \vec{q}^{**} &= \vec{q}^* + \frac{1}{2}(\Delta t) \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= \vec{\psi}(\vec{q}^{**}) \\ \vec{q}^{n+1} &= \vec{q}^* + (\Delta t) \vec{k}_2 \end{aligned}$$

2.3. ALGORITHMES NUMÉRIQUES POUR LA FORMULATION LAGRANGIENNE

Pour l'approche lagrangienne, tel que défini dans le chapitre précédent, nous utiliserons la stratégie 2. Les équations à résoudre sont (Éq. 2.2.1 à 2.2.3) couplées

avec un très grand nombre de systèmes de la forme

$$\frac{d}{dt}x = u_d \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d}{dt}u_d = \mathcal{D}(u_g(x, t) - u_d) \quad (2.3.2)$$

$$\frac{d}{dt}T_d = \mathcal{Q}(T_g(x, t) - T_d) \quad (2.3.3)$$

avec un tel système pour chaque gouttelette simulée.

2.3.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs

Comme dans l'approche eulérienne, la stratégie est aussi de résoudre les équations en trois grandes étapes à l'aide de l'intégration temporelle par séparation des opérateurs. La première étape est de résoudre les équations compressibles d'Euler sans termes sources. La deuxième étape est de résoudre les équations du gaz avec termes sources. La troisième étape est de résoudre les équations différentielles pour chacune des gouttelettes. Soit la solution \vec{q}^n et $\vec{s}^n = [x^n, u_d^n, T_d^n]^T$ au temps t^n .

(1) Étant donné \vec{q}_g^n , résoudre les équations compressibles d'Euler (Éq. 2.2.1 à 2.2.3) sur un intervalle de temps Δt et obtenir \vec{q}_g^* (voir la section 2.3.2).

(2) Étant donné \vec{q}_g^* et \vec{q}_d^n , résoudre les termes sources du gaz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) = -D(u_g - u_d) \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E = -D(u_g - u_d)u_d - Q(T_g - T_d) \quad (2.3.5)$$

et obtenir \vec{q}_g^{n+1} (voir la section 2.3.3).

(3) Obtenir une approximation de $\vec{q}_g^{n+\frac{1}{2}}$ (décrit à la section 2.3.4.1) et avec \vec{s}^n , résoudre les systèmes (Éq. 2.3.1 à 2.3.3) pour chacune des gouttelettes et obtenir \vec{s}^{n+1} (voir la section 2.3.4).

2.3.2. Équations compressibles d'Euler

La résolution des équations compressibles d'Euler est effectuée de la même manière que dans la section eulérienne 2.2.

2.3.3. Termes sources

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 est presque identique à celui dans la section eulérienne 2.2. Le voici :

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{\psi}(\vec{q}_g^*, \vec{q}_d^n) \\ \vec{q}_g^{**} &= \vec{q}_g^* + \frac{1}{2}(\Delta t) \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= \vec{\psi}(\vec{q}_g^{**}, \vec{q}_d^n) \\ \vec{q}_g^{n+1} &= \vec{q}_g^* + (\Delta t) \vec{k}_2\end{aligned}$$

2.3.4. Équations lagrangiennes des gouttelettes

Les solveurs Euler avant, Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4 ont été testés pour résoudre les équations lagrangiennes pour les gouttes et il n'y a pas vraiment de différences significatives dans les résultats obtenus avec ces solveurs. Encore une fois, pour être cohérent avec l'ordre 2 de CLAWPACK, c'est l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 qui a été utilisé. En se rappelant la notation vectorielle du chapitre 1, le système (Éq. 2.3.1 à 2.3.3) se simplifie à

$$\frac{d}{dt} \vec{s} = \vec{h}(\vec{s}, \vec{q}_g(\vec{s})) \quad (2.3.6)$$

et l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 devient :

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{h}(\vec{s}^n, \vec{q}_g^{n+\frac{1}{2}}(\vec{s}^n)) \\ \vec{s}^* &= \vec{s}^n + \frac{1}{2}(\Delta t) \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= \vec{h}(\vec{s}^*, \vec{q}_g^{n+\frac{1}{2}}(\vec{s}^*)) \\ \vec{s}^{n+1} &= \vec{s}^n + (\Delta t) \vec{k}_2\end{aligned}$$

2.3.4.1. Interpolation de la solution du gaz à la position de la gouttelette

Afin de résoudre les équations lagrangiennes d'une gouttelette et pour avancer les gouttelettes de t^n à t^{n+1} , la solution du gaz doit être connue à la position de la gouttelette. Dans le cas uni-dimensionnel, $\vec{q}_g^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{q}_g^n + \vec{q}_g^{n+1})$ et $\vec{q}_g^{n+\frac{1}{2}}(x)$

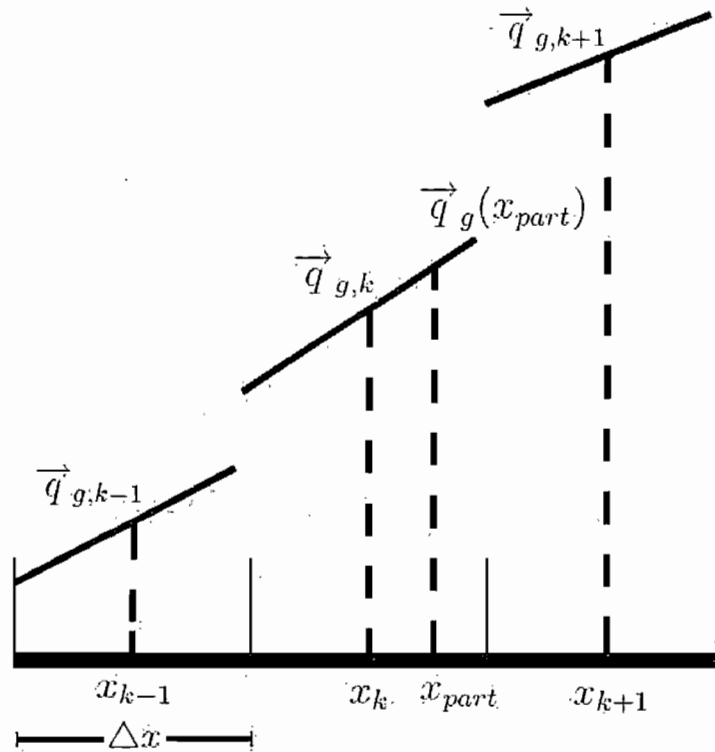


FIG. 2.2. Reconstruction linéaire avec limiteur.

est obtenu par interpolation linéaire dans chacune des cellules et les droites reconstruites sont limitées avec le limiteur de pente « minmod », tel que défini dans [11]. Soit x_{part} la position de la gouttelette, soit N le nombre de cellules et le maillage correspondant $x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_N$ où x_j est la valeur x au centre de la cellule j . Étant donné k , l'indice de la cellule où se trouve la gouttelette, des limiteurs de pente sont utilisés dans cette cellule afin d'obtenir les quantités relatives au gaz à la position x_{part} de la gouttelette. Soit $\vec{q}_{g,k}$ la valeur de \vec{q}_g dans la cellule k , alors la pente de la droite dans la cellule k est donnée par

$$\vec{\sigma}_k = \text{minmod}\left(\frac{\vec{q}_{g,k} - \vec{q}_{g,k-1}}{\Delta x}, \frac{\vec{q}_{g,k+1} - \vec{q}_{g,k}}{\Delta x}\right)$$

$$\text{avec } \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| < |b| \\ b, & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| \geq |b| \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, la solution du gaz à la position de la gouttelette est interpolée suivant :

$$\vec{q}_g(x_{part}) = \vec{q}_{g,k} + \vec{\sigma}_k(x_{part} - x_k)$$

et la figure 2.2 illustre la reconstruction linéaire.

Autre remarque, à l'aide de \vec{s}^{n+1} , nous obtenons \vec{q}_d^{n+1} selon la procédure suivante. Tout dépendamment du nombre de gouttelettes par cellule, chaque gouttelette a un poids ω_i tel que β , initialement dans une cellule, est égale à la somme des ω_i de la cellule. Par la suite, les gouttelettes se déplacent et β dans une cellule est égal à la somme des ω_i de la cellule correspondante. Pour ce qui est de la vitesse eulérienne u_d et la température eulérienne T_d , elles sont prises comme la moyenne des vitesses lagrangiennes et des températures lagrangiennes des gouttelettes situées dans les cellules concernées.

2.4. CAS TEST : LE TUBE À CHOC

2.4.1. Description de l'expérience

Le tube à choc est l'expérience qui nous permet de valider les algorithmes. Nous avons refait l'expérience de [1] et [2]. Il s'agit d'une ligne droite de 100 unités de longueur de référence avec un diaphragme en $x=40$. Il y a une zone de haute pression du côté gauche et de pression ambiante du côté droit.

Les conditions initiales à gauche et à droite du diaphragme sont présentées dans le tableau 2.1. La configuration initiale du tube à choc est présentée dans la figure 2.3.

	p	ρ	β	u_g	u_d	T_g	T_d
Gauche	10	10	0.0001	0	0	1	1
Droite	1	1	1	0	0	1	1

TAB. 2.1. Conditions initiales pour l'expérience du tube à choc.

De plus, pour cette expérience particulière, quelques paramètres sont définis différemment comparé à ce qui avait été présenté dans le chapitre précédent. Dans le cas présent, la viscosité dynamique du gaz dépend de la température du gaz :

$$\mu = 1.71 \times 10^{-5} \left(\frac{T_g}{273} \right)^{0.77}$$

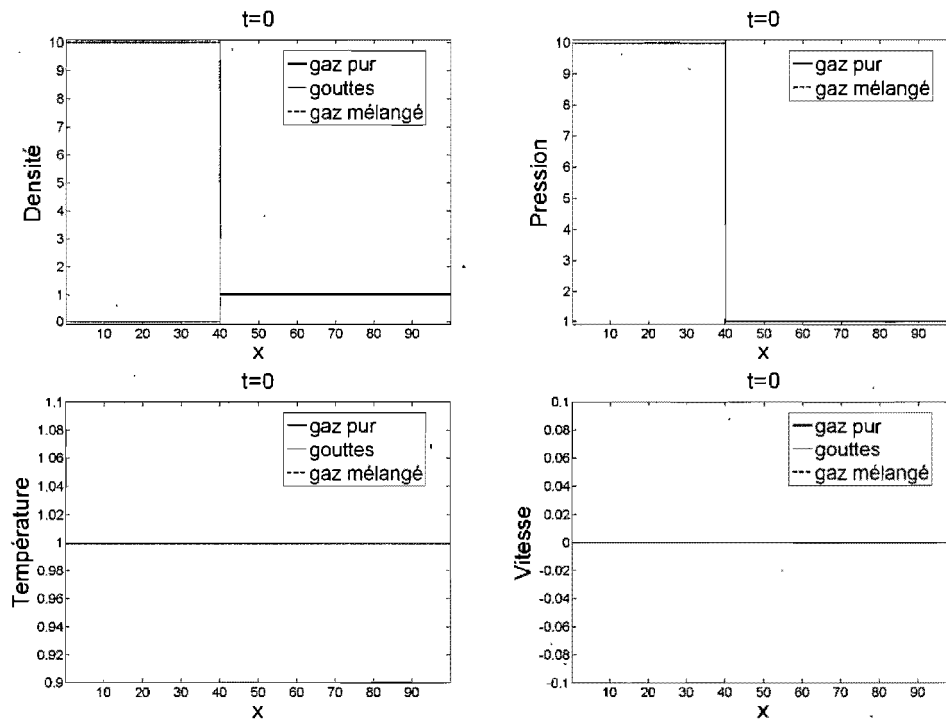


FIG. 2.3. Configuration initiale pour le tube à choc.

$p_{ref} = 1$
$\rho_{ref} = 1$
$u_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}} = 1$
$l_{ref} = \frac{3\rho_d d}{4\rho_{ref}}$
$t_{ref} = \frac{l_{ref}}{u_{ref}}$
$\gamma = \frac{c_{pg}}{c_{vg}} = \frac{c_{pd}}{c_{vd}} = 1.4$
$c_{vg} = \frac{1}{\gamma-1}$
$c_{vd} = \frac{1}{\gamma-1}$
$Pr = 0.75$
$d = 0.00001$

TAB. 2.2. Paramètres de référence pour l'expérience du tube à choc.

le coefficient de traînée est donné par :

$$C_d = 0.46 + 28Re^{-0.85}$$

la conductivité thermique du gaz est donné par :

$$\kappa_g = \frac{c_{pg}\mu}{Pr}$$

et le nombre de Prandtl est considéré constant.

2.4.2. Solution de l'expérience

Sous les conditions initiales prescrites et dans le cas où il n'y a pas de gouttes, la solution du gaz pur, une fois le diaphragme enlevé, correspond alors au mouvement de trois ondes. Il y a une raréfaction, une discontinuité de contact et un choc. La raréfaction se dirige vers la gauche tandis que le choc et la discontinuité de contact se dirigent vers la droite. Précisons que le choc précède la discontinuité de contact. La solution est bien connue et est déduite d'un problème de Riemann. Si des gouttes sont ajoutées au côté droit du tube, alors le gaz est affecté par la présence de celles-ci. Nous remarquons que le gaz est alors ralenti par la présence des gouttes. Par conséquent, il y a une compression supplémentaire derrière le choc et la pression est alors plus grande que lorsque le gaz est pur [2]. Puisque la pression est plus grande, la température dans la zone de raréfaction ne diminue pas autant [2]. Avec le temps, un équilibre est atteint et un profil « *self-similar* » en temps se dessine pour le choc et la discontinuité de contact.

Les résultats, que nous avons obtenus, concordent bien avec ceux de [1] et [2]. Pour l'approche eulérienne, les solutions (figures 2.4, 2.5 et 2.6) sont obtenues avec un CFL=0.9, 1000 cellules et le limiteur de pente « minmod » pour la correction haute résolution. Ces solutions correspondent à différents moments une fois le diaphragme enlevé.

Les résultats (figures 2.7, 2.8 et 2.9) obtenus avec l'approche lagrangienne sont très semblables à celle eulérienne et concordent aussi avec ceux de [1] et [2]. Les solutions sont aussi obtenues avec un CFL=0.9, 1000 cellules et le limiteur de pente « minmod » pour la correction haute résolution. Le pas de temps utilisé pour les gouttelettes est le même que le pas de temps utilisé dans la génération de

la solution du gaz. Il n'y a pas de problème de stabilité avec ce pas de temps. De plus, dans cette approche, il n'y pas de gouttelettes initialement du côté gauche du diaphragme, et ce, pour des questions de simplification. De plus, initialement, les gouttelettes sont distribuées de manière équidistante dans une cellule. Il y a au départ, approximativement 333 gouttelettes par cellule et la solution des gouttes est très semblable s'il y a plus de gouttelettes. Dans cette expérience, lorsqu'il n'y a plus de gouttelettes dans une cellule, la vitesse et la température des gouttes sont écrasées par la vitesse et la température du gaz.

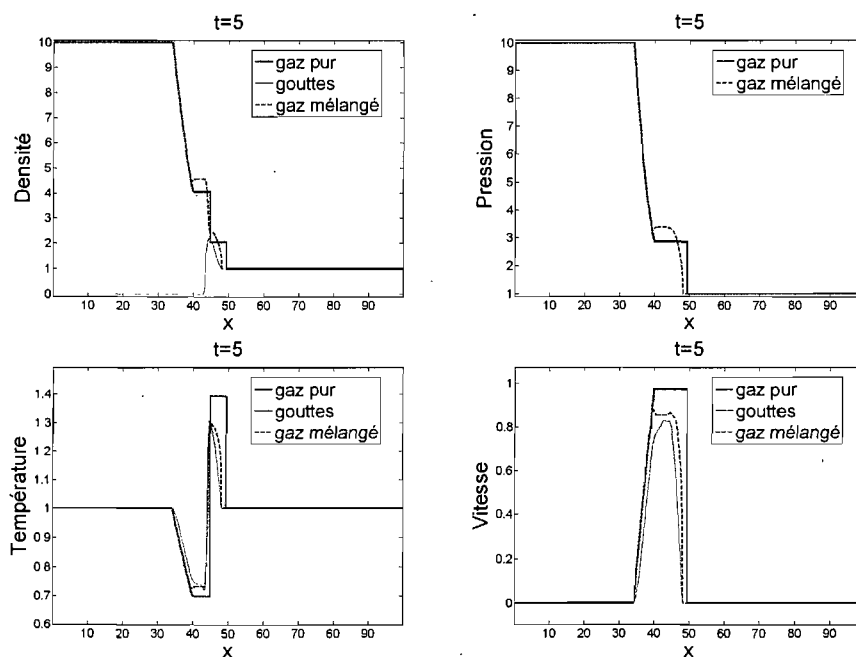


FIG. 2.4. Solution du tube à choc au temps $t=5$ avec l'approche eulérienne.

2.4.3. Ordre de convergence

2.4.3.1. Ordre de convergence de l'approche eulérienne

Nous montrons l'ordre de convergence de l'approche eulérienne en $t=30$ dans le tableau 2.3. La solution numérique de référence a été obtenue avec un $CFL=0.028125$ et 8000 cellules.

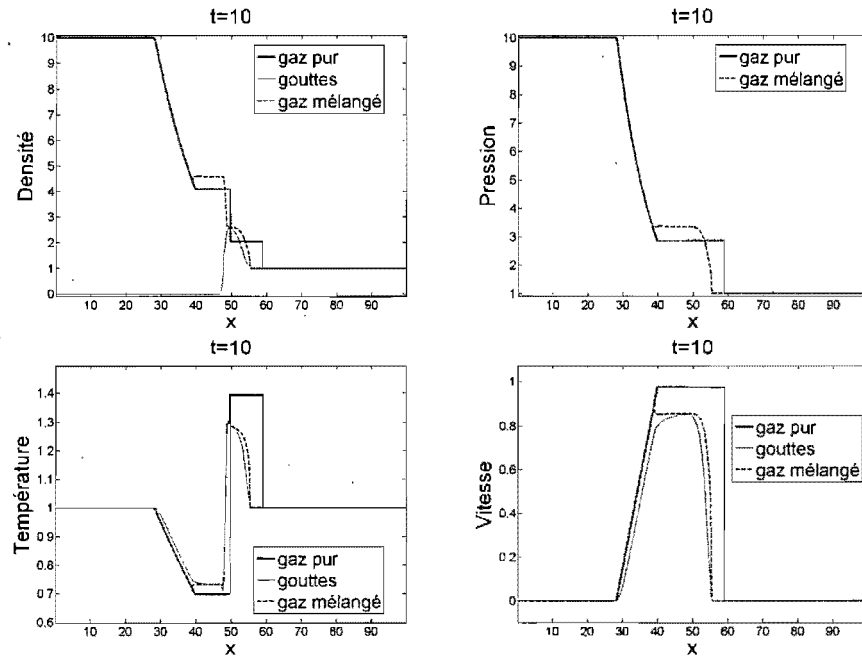


FIG. 2.5. Solution du tube à choc au temps $t=10$ avec l'approche eulérienne.

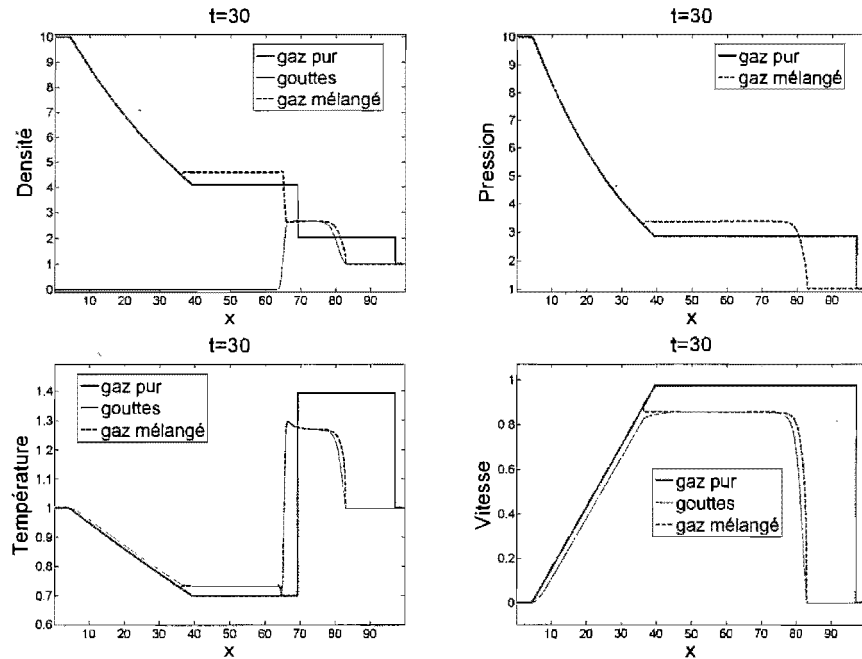


FIG. 2.6. Solution du tube à choc au temps $t=30$ avec l'approche eulérienne.

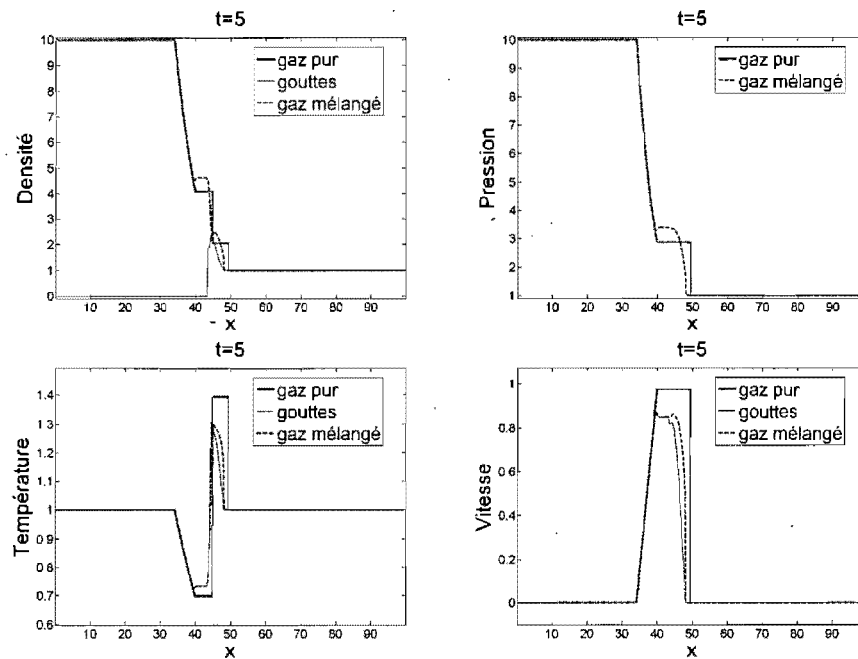


FIG. 2.7. Solution du tube à choc au temps $t=5$ avec l'approche lagrangienne.

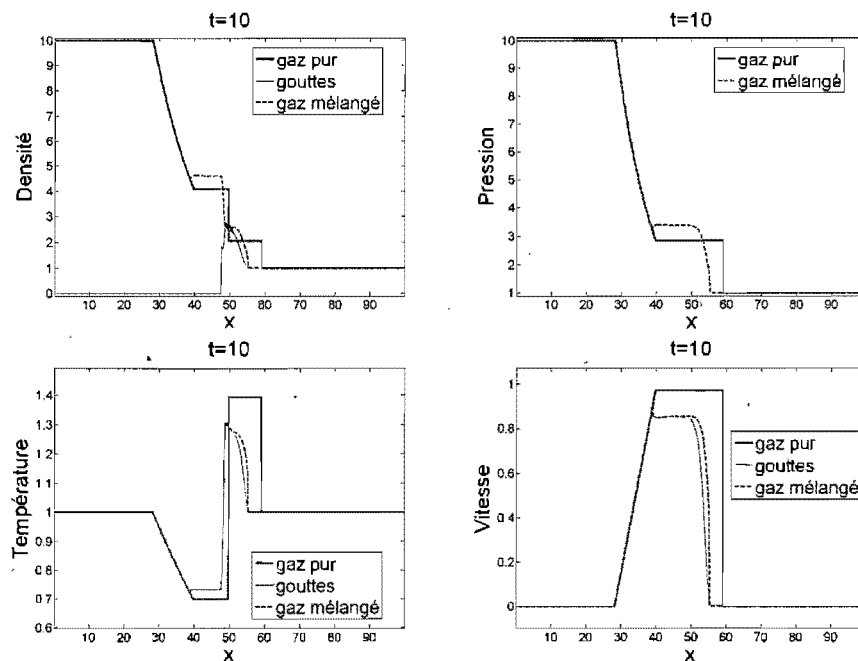


FIG. 2.8. Solution du tube à choc au temps $t=10$ avec l'approche lagrangienne.

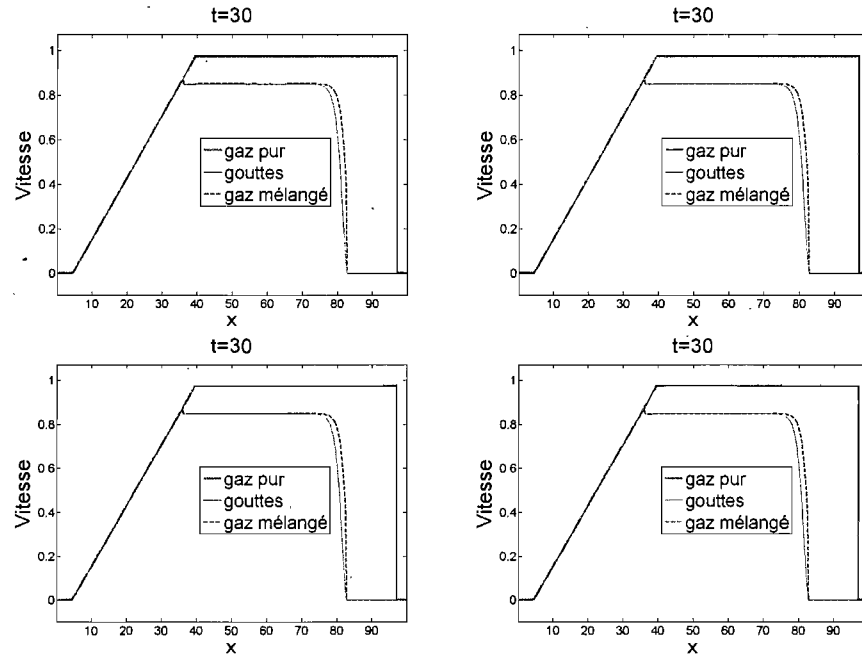


FIG. 2.9. Solution du tube à choc au temps $t=30$ avec l'approche lagrangienne.

2.4.3.2. Ordre de convergence de l'approche lagrangienne

Nous remarquons que lorsque nous doublons le nombre de gouttelettes en gardant les autres paramètres fixes, alors l'erreur est approximativement divisée par deux par rapport à une solution de référence qui a initialement beaucoup de gouttelettes (≈ 68267 gouttelettes par cellule). Le tableau 2.4 représente l'erreur en norme 1, en $t=30$, correspondant à chacune des inconnues. La simulation est faite avec un $CFL=0.9$ et 1000 cellules. La première ligne correspond approximativement à 17 gouttelettes par cellule et nous doublons le nombre de gouttelettes à la ligne suivante jusqu'à la dernière ligne (correspondant à 267 gouttelettes par cellule).

Dans le tableau 2.5, nous montrons, l'ordre de convergence de l'approche lagrangienne en $t=30$. Sur la première ligne, nous avons un $CFL=0.9$, 250 cellules et approximativement 333 gouttelettes par cellule. Sur les lignes subséquentes, nous raffinons le maillage par 2 en temps, en espace et sur le nombre de gouttelettes

CFL, nbs. cellules	$\frac{\ \rho_g^{ref} - \rho_g\ _1}{\ \rho_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	1.4471e-002		7.8797e-002	
CFL=0.45, 500 cellules	4.7042e-003	3.0762e+000	3.2427e-002	2.4300e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	1.6466e-003	2.8569e+000	1.3328e-002	2.4330e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	6.3739e-004	2.5834e+000	7.2282e-003	1.8439e+000
CFL, nbs. cellules	$\frac{\ u_g^{ref} - u_g\ _1}{\ u_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	3.6607e-002		3.3876e-002	
CFL=0.45, 500 cellules	9.4619e-003	3.8688e+000	9.3341e-003	3.6293e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	2.7621e-003	3.4256e+000	2.6265e-003	3.5538e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	8.6450e-004	3.1950e+000	8.3060e-004	3.1622e+000
CFL, nbs. cellules	$\frac{\ T_g^{ref} - T_g\ _1}{\ T_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	1.6513e-002		1.0112e-002	
CFL=0.45, 500 cellules	4.9630e-003	3.3271e+000	3.6469e-003	2.7728e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	1.6559e-003	2.9971e+000	1.3333e-003	2.7352e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	5.8005e-004	2.8548e+000	5.5186e-004	2.4161e+000

TAB. 2.3. Ordre de convergence de l'approche eulérienne en temps et en espace pour le schéma uni-dimensionnel.

(i.e. le même nombre de gouttelettes par cellule). La solution numérique de référence a été obtenue avec un CFL=0.028125, 8000 cellules et approximativement 333 gouttelettes par cellule.

2.4.3.3. Commentaires

Le solveur CLAWPACK seul est d'ordre 2 dans les zone où la solution est lisse. Ici, nous observons que l'ordre semble converger vers 1. La solution du tube à choc n'est pas lisse sur tout le domaine et cela contribue à diminuer l'ordre de convergence. La méthode de séparation des opérateurs est aussi en cause. Le fait de résoudre les termes sources séparément peut conduire à une méthode d'ordre 1 [11]. Dans le cas des gouttes lagrangiennes, il y a des oscillations pour la quantité β et cela est probablement la cause pour laquelle l'ordre de convergence, pour cette

gouttelettes/cellule	$\frac{\ \rho_g^{ref} - \rho_g\ _1}{\ \rho_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport
≈ 17	1.8733e-005		1.4068e-002	
≈ 33	8.7269e-006	2.1466e+000	7.1658e-003	1.9632e+000
≈ 67	3.9278e-006	2.2218e+000	3.6125e-003	1.9836e+000
≈ 133	1.8543e-006	2.1182e+000	1.8493e-003	1.9535e+000
≈ 267	7.7939e-007	2.3792e+000	8.6250e-004	2.1441e+000

gouttelettes/cellule	$\frac{\ u_g^{ref} - u_g\ _1}{\ u_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport
≈ 17	5.9655e-005		5.3167e-005	
≈ 33	2.6776e-005	2.2280e+000	2.2825e-005	2.3293e+000
≈ 67	1.1360e-005	2.3569e+000	9.9120e-006	2.3028e+000
≈ 133	4.8073e-006	2.3632e+000	4.6829e-006	2.1166e+000
≈ 267	1.9897e-006	2.4161e+000	2.0551e-006	2.2787e+000

gouttelettes/cellule	$\frac{\ T_g^{ref} - T_g\ _1}{\ T_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
≈ 17	1.3556e-005		1.5693e-005	
≈ 33	6.4940e-006	2.0875e+000	7.3570e-006	2.1331e+000
≈ 67	2.7920e-006	2.3260e+000	3.4042e-006	2.1611e+000
≈ 133	1.3272e-006	2.1037e+000	1.7794e-006	1.9131e+000
≈ 267	5.1861e-007	2.5592e+000	9.9684e-007	1.7851e+000

TABLE 2.4. Ordre de convergence de l'approche lagrangienne par rapport au nombre de gouttelettes par cellule.

quantité, est proche de 1. Par contre, les autres quantités ont un ordre de convergence beaucoup plus près de 2 par rapport aux cas des gouttes eulériennes.

Il faut remarquer que même si l'ordre est proche de 1 pour les gouttes eulériennes, la correction obtenue avec le limiteur de pente est très importante. La figure 2.10 montre la superposition de la solution avec et sans les correcteurs de flux pour les gouttes. Nous remarquons que les correcteurs de flux sont très importants et permettent d'avoir des chocs plus minces.

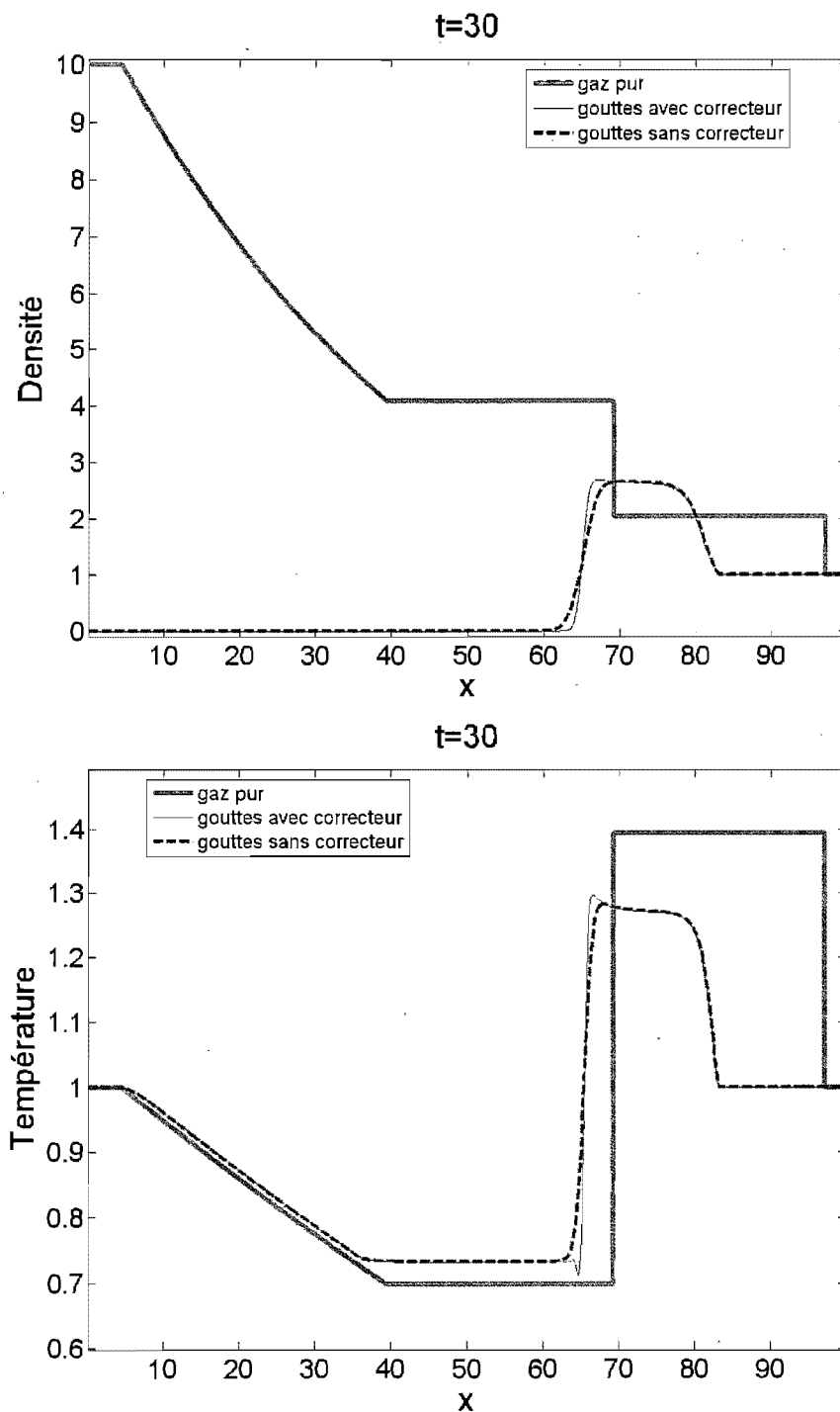


FIG. 2.10. Solution de la densité et la température des gouttes pour le tube à choc au temps $t=30$ avec et sans les correcteurs de flux.

CFL, nbs. cellules	$\frac{\ \rho_g^{ref} - \rho_g\ _1}{\ \rho_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	2.3855e-002		1.0264e-001	
CFL=0.45, 500 cellules	6.5562e-003	3.6385e+000	2.8404e-002	3.6137e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	1.8115e-003	3.6193e+000	9.6775e-003	2.9350e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	5.0185e-004	3.6096e+000	4.9838e-003	1.9418e+000
CFL, nbs. cellules	$\frac{\ u_g^{ref} - u_g\ _1}{\ u_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	5.8105e-002		5.7628e-002	
CFL=0.45, 500 cellules	1.4649e-002	3.9665e+000	1.4530e-002	3.9661e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	3.6804e-003	3.9803e+000	3.8355e-003	3.7884e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	9.4530e-004	3.8934e+000	9.9808e-004	3.8429e+000
CFL, nbs. cellules	$\frac{\ T_g^{ref} - T_g\ _1}{\ T_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
CFL=0.9, 250 cellules	2.5996e-002		1.9045e-002	
CFL=0.45, 500 cellules	6.8277e-003	3.8074e+000	4.9901e-003	3.8165e+000
CFL=0.225, 1000 cellules	1.8571e-003	3.6766e+000	1.3607e-003	3.6673e+000
CFL=0.1125, 2000 cellules	5.1300e-004	3.6200e+000	3.6998e-004	3.6778e+000

TAB. 2.5. Ordre de convergence de l'approche lagrangienne en temps et en espace pour le schéma uni-dimensionnel.

2.4.4. Comparaison des performances

Il est difficile de trouver un critère d'équivalence pour comparer des solutions eulériennes et lagrangiennes. Les deux solutions numériques de référence ont des différences non négligeables. Tout de même, il est possible de comparer les performances sur un critère de convergence indépendant de l'approche. Si pour ce critère de convergence les solutions obtenues par les deux méthodes sont très semblables et que les temps de calcul sont très différents, alors il y aura vraiment une approche qui serait « meilleure » que l'autre par rapport à ce critère.

Le schéma des gouttes eulérien et le schéma lagrangien ont été comparés par rapport à la convergence de la quantité β . Ce choix est justifié, car c'est

cette quantité qui diffère le plus d'un schéma à l'autre et aussi la donnée la plus intéressante dans cette recherche.

Nous calculons d'abord une solution numérique de référence lagrangienne β_{ref}^{lag} obtenue avec 8000 cellules, un CFL=0.028125 et approximativement 300 gouttelettes par cellule. Nous extrayons alors l'erreur en norme 1 normalisée $\frac{\|\beta_{ref}^{lag}-\beta_{lag}\|_1}{\|\beta_{ref}^{lag}\|_1}$ et le temps de calcul par rapport à une solution β_{lag} obtenue avec 1000 cellules, un CFL=0.9 et approximativement 135 gouttelettes par cellule. Nous choisissons le CFL=0.9 parce que nous voulons obtenir la solution au temps final avec le moins d'itérations possibles. De plus, nous choisissons approximativement 135 gouttelettes par cellule parce qu'en dessous de cela l'erreur change. Par la suite, nous répétons le même processus pour une solution eulérienne. Nous calculons une solution numérique de référence eulérienne β_{ref}^{eul} obtenue avec 8000 cellules et un CFL=0.028125. Cette fois, nous essayons d'obtenir la même erreur en norme 1 normalisée $\frac{\|\beta_{ref}^{eul}-\beta_{eul}\|_1}{\|\beta_{ref}^{eul}\|_1}$ que pour le cas lagrangien avec une solution eulérienne β_{eul} .

Nous avons fait deux fois cette expérience, une fois avec 1000 cellules pour la solution lagrangienne et une autre fois, avec 500 cellules et approximativement 90 gouttelettes par cellule. Le tableau 2.6 montre les résultats.

Ici, $\|\beta_{ref}^{lag}\|_1 = \|\beta_{ref}^{eul}\|_1 = 0.6$ et cela représente l'aire sous la courbe de β initialement. De plus, le temps de calcul est un temps moyen pris sur 20 expériences.

$\frac{\ \beta_{ref}^{lag}-\beta_{lag}\ _1}{\ \beta_{ref}^{lag}\ _1}$	$\frac{\ \beta_{ref}^{eul}-\beta_{eul}\ _1}{\ \beta_{ref}^{eul}\ _1}$	Temps de calcul	Nbs. de cellules	Nbs. gout. par cell.
0.0313		27.9s	1000	135
	0.0309	0.916s	612	
0.0615		4.79s	500	90
	0.0595	0.272s	310	

TAB. 2.6. Comparaison des performances de la méthode lagrangienne versus celle eulérienne pour l'expérience du tube à choc.

La différence en temps de calcul est marquante. La solution eulérienne est approximativement 17 fois plus rapide à obtenir que la solution lagrangienne pour

un maillage grossier et 30 fois pour un maillage un peu plus fin. À la lumière des résultats, pour cette expérience, l'approche eulérienne est de loin plus performante.

2.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté les algorithmes pour chacun des solveurs et les procédures à suivre pour résoudre les systèmes d'équations. L'expérience test de [5] a servi à tester le schéma eulérien uni-dimensionnel des gouttes. Nous avons présenté l'expérience du tube à choc et étudié l'ordre de convergence du schéma lagrangien et eulérien sur cette expérience. De plus, nous avons expliqué pourquoi nous obtenons seulement un ordre de convergence légèrement meilleur que 1. Nous avons aussi comparé les performances du schéma lagrangien et du schéma eulérien. Notre conclusion est que l'approche eulérienne est beaucoup plus efficace numériquement que celle lagrangienne. Dans ce qui suit, nous allons poursuivre cette comparaison pour le cas bi-dimensionnel.

Chapitre 3

CAS BI-DIMENSIONNEL

Le but de ce mémoire est de comparer les performances d'une approche eulérienne avec l'approche lagrangienne pour des calculs d'écoulements avec gouttes stationnaires. En une dimension, il n'est pas possible de formuler des cas tests non-triviaux avec des solutions stationnaires. Tous les cas de validation unidimensionnels du chapitre précédent menaient donc à des solutions instationnaires. Dans cette section bi-dimensionnelle, nous nous concentrons donc seulement sur les écoulements qui mènent à un état stationnaire.

3.1. ALGORITHMES NUMÉRIQUES POUR LA FORMULATION EULÉRIENNE COUPLÉE AVEC LE GAZ

Tout d'abord, regardons le cas eulérien avec le système d'équations couplées. Cela correspond à la stratégie 4 décrite dans le chapitre 1. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_g v_g) &= -D(u_g - u_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g v_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g^2 + p) &= -D(v_g - v_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u_g) + \frac{\partial}{\partial y}((E + p)v_g) &= -D(u_g - u_d)u_d - D(v_g - v_d)v_d - Q(T_g - T_d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta u_d v_d) &= D(u_g - u_d) \\
\frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d v_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d^2) &= D(v_g - v_d) \\
\frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\Omega v_d) &= D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d)
\end{aligned}$$

Encore une fois, ce système est extrêmement difficile à résoudre sous cette forme. À l'instar du cas uni-dimensionnel, la stratégie pour résoudre ce système d'équations est d'utiliser une méthode de séparation des opérateurs.

3.1.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs

La résolution de ce système est pratiquement effectuée avec les mêmes procédures que celles dans l'article [1]. La première étape est de résoudre les équations compressibles d'Euler. Par la suite, nous passons aux équations eulériennes des gouttes dans la direction x , ensuite aux mêmes équations dans la direction y et pour terminer, aux équations avec termes sources. Pour obtenir l'état stationnaire, nous intégrons dans le temps jusqu'à la convergence. Soit la solution $\vec{q}^n = [\rho^n, (\rho u_g)^n, (\rho v_g)^n, E^n, \beta^n, (\beta u_d)^n, (\beta v_d)^n, \Omega^n]^T$ au temps t^n .

- (1) Étant donné $\vec{q}_g^n = [\rho^n, (\rho u_g)^n, (\rho v_g)^n, E^n]^T$, résoudre sur un intervalle de temps Δt les équations compressibles d'Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_g v_g) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g v_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g^2 + p) = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u_g) + \frac{\partial}{\partial y}((E + p)v_g) = 0 \quad (3.1.4)$$

et obtenir $\vec{q}_g^{*} \approx \vec{q}_g(t^n + \Delta t)$ (voir la section 3.1.2).

- (2) Étant donné \vec{q}_d^n , résoudre sur un intervalle de temps Δt le système eulérien des gouttes dans la direction x

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d) = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d^2) = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d v_d) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega u_d) = 0 \quad (3.1.8)$$

et obtenir \vec{q}_d^* (voir la section 3.1.3).

- (3) Étant donné \vec{q}_d^* , résoudre sur un intervalle de temps Δt le système eulérien des gouttes dans la direction y

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d) = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta u_d v_d) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d^2) = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial y}(\Omega v_d) = 0 \quad (3.1.12)$$

et obtenir $\vec{q}_d^* \approx \vec{q}_d(t^n + \Delta t)$ (voir la section 3.1.3).

- (4) Étant donné \vec{q}^* , résoudre sur un intervalle de temps Δt les équations avec termes sources

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) = -D(u_g - u_d) \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_g) = -D(v_g - v_d) \quad (3.1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E = -D(u_g - u_d)u_d - D(v_g - v_d)v_d - Q(T_g - T_d) \quad (3.1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) = D(u_g - u_d) \quad (3.1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) = D(v_g - v_d) \quad (3.1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega = D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \quad (3.1.18)$$

et obtenir $\vec{q}^{n+1} = [\vec{q}_g^{n+1}, \vec{q}_d^{n+1}]^T$ (voir la section 3.1.4).

Cette démarche est sensiblement la même que dans le cas uni-dimensionnel. La principale différence est que pour résoudre le système des gouttes eulériennes sans termes sources, nous procédons dimension par dimension. Nous résolvons d’abord les équations des gouttes dans la direction x puis dans la direction y .

3.1.2. Équations compressibles d’Euler

Les équations compressibles d’Euler bi-dimensionnelles (Éq. 3.1.1 à 3.1.4) sont résolues avec le code CLAWPACK [7]. À l’opposé du cas uni-dimensionnel, pour résoudre les problèmes de Riemann aux interfaces des cellules, c’est un solveur de Riemann exact (à l’exception de la pression) qui est utilisé au lieu du solveur approximatif de Roe. La raison est que, dans l’expérience test que nous avons choisi, le solveur approximatif de Roe capture mal la solution [7]. De surcroît, une correction d’ordre supérieur est effectuée avec le limiteur de pente « minmod » et d’un solveur de Riemann transverse utilisant le solveur approximatif de Roe.

3.1.3. Équations eulériennes des gouttes

Il a déjà été mentionné que les équations des gouttes (Éq. 3.1.5 à 3.1.12) sont d’abord résolues dans la direction x puis dans la direction y . Cela nous permet d’employer le même algorithme que dans le cas uni-dimensionnel. L’article [5] présente l’algorithme. Cette fois-ci, la correction d’ordre supérieur est effectuée avec le limiteur de pente « superbee ».

3.1.4. Termes sources

Dans le but de résoudre les équations avec termes sources (Éq. 3.1.13 à 3.1.18), nous tirons profit du solveur semi-exact de l’article [1]. Un solveur numérique explicite tel qu’utilisé dans le cas uni-dimensionnel peut causer des problèmes de stabilité de pas de temps lorsque les fonctions de transfert de quantité de mouvement D et de chaleur Q sont très grandes.

Les solveurs numériques explicites d’Euler avant, Runge-Kutta d’ordre 2 et Runge-Kutta d’ordre 4 ont été testés et dans certains cas, la condition sur le pas de temps nécessaire à la convergence doit être plus sévère que seulement la condition CFL des équations compressibles d’Euler et/ou des équations eulériennes des

gouttes sans termes sources. Cela est un problème, car nous voulons obtenir la solution stationnaire avec le moins d'itérations possibles. C'est pour cela que nous optons pour le solveur semi-exact de l'article [1] qui ne souffre pas de ce type de problème de stabilité.

Lorsque le système d'équations est couplé, la stratégie est la même que [1]. Ici, nous présentons les grandes étapes. Les équations à résoudre sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_g \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -D(u_g - u_d) \\ -D(v_g - v_d) \\ -D(u_g - u_d)u_d - D(v_g - v_d)v_d - Q(T_g - T_d) \\ 0 \\ D(u_g - u_d) \\ D(v_g - v_d) \\ D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \end{bmatrix}$$

La solution semi-exact obtenue par la méthode présentée dans [1] consiste à résoudre en premier, les équations de la quantité de mouvement

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_g \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -D(u_g - u_d) \\ -D(v_g - v_d) \\ -D(u_g - u_d)u_d - D(v_g - v_d)v_d \\ 0 \\ D(u_g - u_d) \\ D(v_g - v_d) \\ D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d \end{bmatrix}$$

et en deuxième, les équations de la quantité d'énergie

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_g \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Q(T_g - T_d) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q(T_g - T_d) \end{bmatrix}$$

Posons, comme dans [1], $\mathcal{V}_g = [u_g, v_g]^T$ et $\mathcal{V}_d = [u_d, v_d]^T$. De plus, soit ρ^0 , $(\rho\mathcal{V}_g)^0$, E^0 , β^0 , $(\beta\mathcal{V}_d)^0$ et Ω^0 les données initiales à l'entrée de ce solveur. Les données mises à jour dues aux équations de la quantité de mouvement sont :

$$\begin{aligned} (\rho\mathcal{V}_g)(\Delta t) &= (\rho\mathcal{V}_g)^0 + \frac{\mathcal{V}_g^0 - \mathcal{V}_d^0}{\xi_D^0} \left[\frac{1}{A^0 \xi_D^0 |\mathcal{V}_g^0 - \mathcal{V}_d^0| \Delta t + 1} - 1 \right] \\ (\beta\mathcal{V}_d)(\Delta t) &= (\beta\mathcal{V}_d)^0 - \frac{\mathcal{V}_g^0 - \mathcal{V}_d^0}{\xi_D^0} \left[\frac{1}{A^0 \xi_D^0 |\mathcal{V}_g^0 - \mathcal{V}_d^0| \Delta t + 1} - 1 \right] \end{aligned}$$

tel que $\xi_D^0 = \frac{1}{\rho^0} + \frac{1}{\beta^0}$ et $A^0 = \frac{3C_d^0 \beta^0 \rho^0}{4\rho_d}$. L'énergie du gaz et celle des gouttes doivent être ajustées selon le changement d'énergie cinétique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E(\Delta t) &= E^0 + \frac{1}{2} \rho^0 (|\mathcal{V}_g(\Delta t)|^2 - |\mathcal{V}_g^0|^2) \\ \Omega(\Delta t) &= \Omega^0 + \frac{1}{2} \beta^0 (|\mathcal{V}_d(\Delta t)|^2 - |\mathcal{V}_d^0|^2) \end{aligned}$$

Maintenant, renommons ρ^0 , $(\rho\mathcal{V}_g)^0$, E^0 , β^0 , $(\beta\mathcal{V}_d)^0$ et Ω^0 les données à l'entrée du solveur pour les équations de l'énergie. Les données mises à jour dues aux équations de l'énergie sont

$$\begin{aligned} E(\Delta t) &= E^0 + \frac{T_g^0 - T_d^0}{\xi_Q^0} \left[e^{-Q^0 \xi_Q^0 \Delta t} - 1 \right] \\ \Omega(\Delta t) &= \Omega^0 - \frac{T_g^0 - T_d^0}{\xi_Q^0} \left[e^{-Q^0 \xi_Q^0 \Delta t} - 1 \right] \end{aligned}$$

tel que $\xi_Q^0 = \frac{1}{\rho^0 c_{vg}} + \frac{1}{\beta^0 c_{vd}}$.

3.2. ALGORITHMES NUMÉRIQUES POUR LA FORMULATION EULÉRIENNE NON COUPLÉE AVEC LE GAZ

Il faut développer une nouvelle stratégie lorsque les équations sont découplées puisque ce cas n'a pas été traité auparavant. Cela correspond à la stratégie 3 décrite dans le chapitre 1. Les équations à résoudre dans ce cas sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_g v_g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_g v_g) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_g^2 + p) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u_g) + \frac{\partial}{\partial y}((E + p)v_g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta u_d v_d) &= D(u_g - u_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u_d v_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta v_d^2) &= D(v_g - v_d) \\ \frac{\partial}{\partial t}\Omega + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega u_d) + \frac{\partial}{\partial y}(\Omega v_d) &= D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \end{aligned}$$

3.2.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs

Puisque le gaz est complètement découplé des gouttes, il est possible de calculer d'abord la solution stationnaire du gaz et de l'utiliser afin de calculer la solution stationnaire des gouttes. À priori, nous présenterons une démarche pour obtenir celle du gaz et ensuite, celle des gouttes. Pour obtenir l'état stationnaire, nous intégrons dans le temps jusqu'à la convergence. Soit la solution \vec{q}_g^n au temps t^n .

- (1) Étant donné \vec{q}_g^n , résoudre sur un intervalle de temps Δt les équations compressibles d'Euler (Éq. 3.1.1 à 3.1.4) et obtenir \vec{q}_g^{n+1} (voir la section 3.2.2).

(2) Réitérer jusqu'à l'état stationnaire et obtenir $\vec{q}_g^{stationnaire}$.

Dans le but de simplifier la notation, nous écrivons $\vec{q}_g^* = \vec{q}_g^{stationnaire}$ seulement pour les étapes suivantes. Pour obtenir l'état stationnaire, nous intégrons dans le temps jusqu'à la convergence. Soit la solution \vec{q}_d^n au temps t^n .

- (1) Étant donné \vec{q}_d^n , résoudre avec un intervalle de temps Δt le système des gouttes eulériennes (Éq. 3.1.5 à 3.1.8) dans la direction x et obtenir \vec{q}_d^* (voir la section 3.2.3).
- (2) Étant donné \vec{q}_d^* , résoudre avec un intervalle de temps Δt le système des gouttes eulériennes (Éq. 3.1.9 à 3.1.12) dans la direction y et obtenir \vec{q}_d^* (voir la section 3.2.3).
- (3) Étant donné \vec{q}^* , résoudre avec un intervalle de temps Δt les équations avec termes sources

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta u_d) = D(u_g - u_d) \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta v_d) = D(v_g - v_d) \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega = D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \quad (3.2.3)$$

et obtenir \vec{q}_d^{n+1} (voir la section 3.2.4).

3.2.2. Équations compressibles d'Euler

La résolution des équations compressibles d'Euler est effectuée de la même manière que dans la section eulérienne 3.1.

3.2.3. Équations eulériennes des gouttes

La résolution des équations eulériennes des gouttes est effectuée de la même manière que dans la section eulérienne 3.1.

3.2.4. Termes sources

Dans le cas où les gouttes n'influencent pas la dynamique du gaz, il y a une légère différence par rapport au cas des équations couplées (section 3.1). Le système à résoudre est alors

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{q}_g}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{q}_d}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D(u_g - u_d) \\ D(v_g - v_d) \\ D(u_g - u_d)u_d + D(v_g - v_d)v_d + Q(T_g - T_d) \end{bmatrix}$$

et les changements par rapport au système couplé sont que $\xi_D^0 = \frac{1}{\beta^0}$, $\xi_Q^0 = \frac{1}{\beta^0 c_{vd}}$ et que seulement les inconnues concernant les gouttes sont mises à jour. Dans la formulation eulérienne, le cas couplé n'est pas beaucoup plus coûteux numériquement que le cas découplé. Nous avons présenté ces deux derniers puisque plus loin, nous étudierons sous quels régimes, il est raisonnable de négliger l'effet des gouttes sur le gaz. Connaître ces régimes est important, puisque l'approche lagrangienne dans le cas bi-dimensionnel est seulement étudiée avec les équations découplées.

3.3. ALGORITHMES NUMÉRIQUES POUR LA FORMULATION LAGRANGIENNE

Contrairement au chapitre précédent, l'approche lagrangienne bi-dimensionnelle est seulement étudiée avec le système d'équations découplées. Si nous ne retenons pas cette hypothèse, il faut des ressources informatiques énormes puisqu'en occurrence, chaque gouttelette a une histoire différente.

Tel que défini dans le chapitre 1, nous utiliserons la stratégie 1. Les équations à résoudre sont donc (Éq. 3.1.1 à 3.1.4) couplées avec un très grand nombre de

systèmes de la forme

$$\frac{d}{dt}x = u_d \quad (3.3.1)$$

$$\frac{d}{dt}y = v_d \quad (3.3.2)$$

$$\frac{d}{dt}u_d = \mathcal{D}(u_g(x, y, t) - u_d) \quad (3.3.3)$$

$$\frac{d}{dt}v_d = \mathcal{D}(v_g(x, y, t) - v_d) \quad (3.3.4)$$

$$\frac{d}{dt}T_d = \mathcal{Q}(T_g(x, y, t) - T_d) \quad (3.3.5)$$

avec un tel système pour chaque gouttelette simulée.

3.3.1. Intégration temporelle par séparation des opérateurs

La stratégie est alors légèrement différente du cas uni-dimensionnel puisque dans ce cas-ci, les gouttes n'influencent pas la dynamique du gaz. La première étape est de résoudre les équations compressibles d'Euler et d'obtenir une solution stationnaire pour le gaz. Cela est fait exactement tel que proposé précédemment lors de l'approche eulérienne avec le système d'équations découplées. Ensuite, nous injectons des gouttelettes à l'entrée du domaine et avec la solution stationnaire du gaz, nous déplaçons les gouttelettes jusqu'à ce qu'elles sortent du domaine de calcul.

Pour déplacer une gouttelette, il faut connaître la solution du gaz à la position de celle-ci. Supposons, pour le moment, que nous connaissons la solution du gaz sur tout le domaine. Nous expliquerons plus tard (section 3.3.2.1) la procédure à suivre pour interpoler la solution du gaz à la position de la gouttelette. Soit $\vec{s}^n = [x^n, y^n, u_d^n, v_d^n, T_d^n]^T$ au temps t^n .

- (1) Résoudre sur un intervalle de temps Δt les systèmes lagrangiens (Éq. 3.3.1 à 3.3.5) pour chacune des gouttelettes et obtenir \vec{s}^{n+1} .
- (2) Répéter jusqu'à ce que la gouttelette sorte du domaine.

3.3.2. Équations lagrangiennes des gouttelettes

Les solutions des équations aux dérivées ordinaires (Éq. 3.3.1 à 3.3.5) d'une gouttelette sont plus souvent qu'autrement raides et un solveur numérique explicite nous force à prendre un petit pas de temps pour éviter la divergence. C'est pour cela que nous avons utilisé un solveur semi-exact, similaire à celui dans l'article [6]. Les solveurs Euler avant, Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4 ont été testés et parfois, il survient un problème de stabilité de pas de temps que nous ne retrouvons pas avec le solveur semi-exact. La technique pour résoudre le système d'équations consiste à geler \mathcal{D} , \mathcal{Q} et la solution du gaz à la position initiale de la gouttelette et d'ensuite, résoudre exactement le système d'équations :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= u_d \\ \frac{d}{dt}y &= v_d \\ \frac{d}{dt}u_d &= \mathcal{D}^0(u_g^0 - u_d) \\ \frac{d}{dt}v_d &= \mathcal{D}^0(v_g^0 - v_d) \\ \frac{d}{dt}T_d &= \mathcal{Q}^0(T_g^0 - T_d)\end{aligned}$$

La solution de ce système après un pas de temps Δt est :

$$\begin{aligned}x(\Delta t) &= \begin{cases} \frac{(u_d^0 - u_g^0)}{\mathcal{D}^0}(1 - e^{-\mathcal{D}^0 \Delta t}) + u_g^0 \Delta t + x^0, & \text{si } \mathcal{D}^0 \neq 0 \\ x^0 + u_d^0 \Delta t, & \text{sinon} \end{cases} \\ y(\Delta t) &= \begin{cases} \frac{(v_d^0 - v_g^0)}{\mathcal{D}^0}(1 - e^{-\mathcal{D}^0 \Delta t}) + v_g^0 \Delta t + y^0, & \text{si } \mathcal{D}^0 \neq 0 \\ y^0 + v_d^0 \Delta t, & \text{sinon} \end{cases} \\ u_d(\Delta t) &= \begin{cases} u_d^0 + (u_d^0 - u_g^0)e^{-\mathcal{D}^0 \Delta t}, & \text{si } \mathcal{D}^0 \neq 0 \\ u_d^0, & \text{sinon} \end{cases} \\ v_d(\Delta t) &= \begin{cases} v_d^0 + (v_d^0 - v_g^0)e^{-\mathcal{D}^0 \Delta t}, & \text{si } \mathcal{D}^0 \neq 0 \\ v_d^0, & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

$$T_d(\Delta t) = \begin{cases} T_d^0 + (T_d^0 - T_g^0)e^{-\mathcal{Q}^0 \Delta t}, & \text{si } \mathcal{Q}^0 \neq 0 \\ T_d^0, & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3.2.1. Interpolation de la solution du gaz à la position de la gouttelette

Pour interpoler la solution du gaz à la position de la gouttelette, nous procédons différemment que dans le cas uni-dimensionnel. La solution du gaz est interpolée avec des fonctions bilinéaires $q = (a_1x + b_1)(a_2y + b_2)$ dans chacune des cellules. Pour obtenir une telle fonction, nous avons besoin de quatre points. Pour une cellule donnée, les points choisis sont les quatre coins de la cellule. De plus, la valeur que nous prenons dans un coin est la moyenne des quatre cellules avoisinant ce coin. En procédant ainsi, la solution du gaz est bien définie sur l'ensemble du domaine.

3.4. CAS TEST : TUNNEL À VENT AVEC UNE MARCHE

3.4.1. Description de l'expérience

L'expérience choisie pour tester les schémas numériques est un tunnel à vent avec une marche. Cette expérience, avec le gaz seulement, a pour la première fois été étudiée numériquement par Emery [8] et plus récemment par Woodward et Colella [9]. Normalement, la hauteur et la longueur adimensionnalisées du domaine de calcul mesurent respectivement une et trois longueurs de références. De plus, il y a une marche haute de 0.2 longueur de référence et située à 0.6 longueur de référence du côté gauche du domaine. Le gaz introduit initialement suit une loi-gamma avec $\gamma = 1.4$. Aussi initialement, pour le gaz, les données sont adimensionnalisées tel que sur tout le domaine de calcul la densité est 1.4, la pression 1, la température 1, la vitesse horizontale 3 et la vitesse verticale 0. Si la vitesse de référence est la vitesse du son, alors cela correspond à un tunnel à vent où la vitesse d'entrée du fluide est trois fois la vitesse du son.

Puisque nous nous intéressons à des solutions stationnaires et que nos ressources sont limitées, il est plus facile d'étudier le cas où le dessus du domaine est une sortie plutôt qu'un mur. De même, dans notre étude, les dimensions adimensionnalisées du domaine sont légèrement différentes, ainsi la longueur du domaine

est 1 et la marche est située à 0.4 du coté gauche du domaine. La figure 3.1 illustre la configuration du domaine.

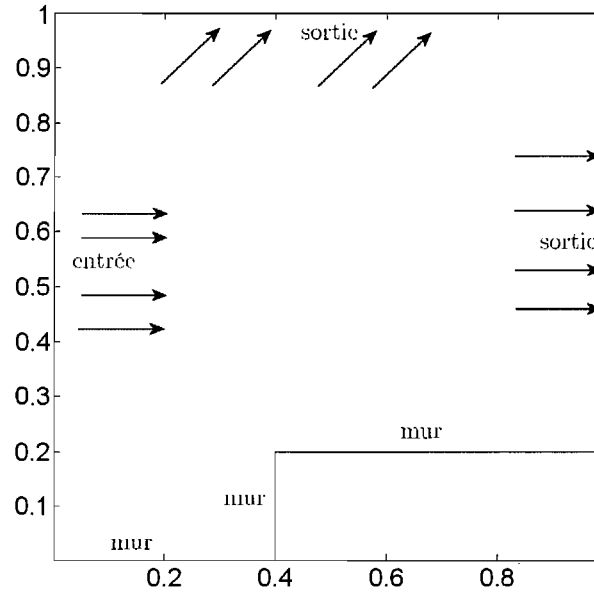


FIG. 3.1. Domaine de calcul pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.

Pour mettre en oeuvre l'expérience avec le gaz et les gouttes, il est nécessaire de définir des données supplémentaires. Nous avons choisi comme longueur de référence la hauteur du domaine; comme vitesse de référence la vitesse du son; comme pression de référence la pression ambiante et comme température de référence la température ambiante. Avec ces données de référence, il est possible de déduire une densité de référence $\rho_{ref} = \gamma \frac{p_{ref}}{u_{ref}^2}$. Le tableau 3.1 contient les paramètres de références. Sauf si autrement indiqué, il est imposé initialement que β adimensionnalisé est 0.0014 à l'entrée et 0 à l'intérieur du domaine. Nous notons β à l'entrée gauche β_e et toutes autres quantités à l'entrée X_e . De plus, les vitesses et la température des gouttes à l'entrée sont celles du gaz et 0 à l'intérieur du domaine. En résumé, les conditions aux bords sont telles que : le côté gauche du domaine est une entrée où $\rho_e = 1.4$, $u_{g,e} = 3$, $v_{g,e} = 0$, $T_{g,e} = 1$, $\beta_e = 0.0014$, $u_{d,e} = 3$, $v_{d,e} = 0$, $T_{d,e} = 1$; le côté droit et le haut du domaine sont des sorties et le reste sont des murs où la vitesse normale à ceux-ci est nulle.

1	m	l_{ref}	Longeur de référence (hauteur du domaine)
339.73	$\frac{m}{s}$	u_{ref}	Vitesse de référence (vitesse du son)
101325	$\frac{N}{m^2}$	p_{ref}	Pression de référence (pression ambiante)
288.2529293	K	T_{ref}	Température de référence (température ambiante)
1.229	$\frac{(kg)}{m^3}$	ρ_{ref}	Densité de référence

TAB. 3.1. Paramètres de référence pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.

Pour faire l'expérience avec les gouttes, les paramètres avec dimension de la table 3.2 ont été utilisés et ils doivent être adimensionnalisés à l'aide des données de référence.

715	$\frac{J}{(kg)K}$	c_{vg}	Chaleur spécifique du gaz à volume constant
1001	$\frac{J}{(kg)K}$	c_{pg}	Chaleur spécifique du gaz à pression constante
4185.5	$\frac{J}{(kg)K}$	c_{vd}	Chaleur spécifique des gouttes à volume constant
1000	$\frac{(kg)}{m^3}$	ρ_d	Densité microscopique des gouttes
0.000001	m	d	Diamètre des gouttes
0.0000173	$\frac{Ns}{m^2}$	μ	Viscosité dynamique du gaz
0.0259	$\frac{W}{mK}$	κ_g	Conductivité thermique du gaz

TAB. 3.2. Autres paramètres pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche.

3.4.2. Mise en oeuvre

Dans cette section, nous allons discuter de plusieurs détails afin de réaliser l'expérience correctement.

3.4.2.1. Critère d'arrêt pour les schémas eulériens

Pour les schémas eulériens, il faut choisir un critère d'arrêt pour arrêter les calculs lorsqu'une solution stationnaire est obtenue. Il n'est pas facile de choisir un bon critère d'arrêt puisque les solutions calculées ont du bruit numérique.

Par exemple, lorsque nous regardons la différence successive de deux solutions en norme 1, $\|\beta^n - \beta^{n-1}\|_1$, alors cette différence ne converge pas vers 0 numériquement. Cette fonction du temps converge vers un plateau oscillant où il est difficile de déterminer si la solution a convergé en un état stationnaire. Naturellement, nous voulons aussi éviter que les erreurs numériques augmentent lorsque le programme n'est plus en mesure d'améliorer la précision.

Un critère nécessaire pour que la solution ait convergé vers un état stationnaire est que le rapport de la norme 1, $\frac{\|\beta^n\|_1}{\|\beta^{n-1}\|_1}$, de deux solutions successives, converge vers 1. Bien que ce critère ne soit pas suffisant pour garantir l'état stationnaire, cette fonction est beaucoup plus stable numériquement et permet en pratique, pour notre cas test, d'obtenir la solution stationnaire de notre problème.

Au lieu de regarder directement le rapport des normes 1 de deux solutions successives, nous regardons la moyenne de cette fonction dans une boîte de 0.5 unité de temps et nous demandons que la première et la deuxième dérivée de cette moyenne soit plus petite ou égale en valeur absolue à une certaine valeur α , habituellement $\alpha = 10^{-7}$. Ce critère n'est pas 100% juste et parfois, il faut être plus restrictif et parfois, nous pourrions l'être moins. C'est quand même la meilleure manière que nous avons trouvée afin d'éviter de toujours recommencer les calculs. Dans notre cas, puisque la quantité d'intérêt principale est β , c'est le rapport de la norme 1 de β qui est calculé. Si, par exemple, nous nous intéressons plus aux vitesses des gouttes, alors il serait plus naturel de prendre le rapport de la norme 1 des vitesses comme critère d'arrêt plutôt que β .

3.4.2.2. *Équations compressibles d'Euler*

En ce qui touche les conditions aux bords, à l'entrée gauche et à la sortie droite du tunnel, une condition d'extrapolation d'ordre 0 est appliquée à partir de l'intérieur du domaine. En procédant ainsi, les conditions d'entrée à gauche du domaine sont conservées tout au long des calculs. De même, aux sorties, le fluide est correctement évacué. Les murs du tunnel ont des conditions aux bords réfléchives, c'est-à-dire que la vitesse normale aux murs est nulle. Ces conditions

aux bords sont implémentées à l'aide de cellules fantômes. La démarche à suivre est très bien expliquée dans [11] et c'est CLAWPACK qui s'en charge.

Il est mentionné dans l'article de Woodward et Colella [9] que le coin de la marche est le centre d'une raréfaction et dès lors, c'est un point singulier de l'écoulement. Si rien n'est fait aux alentours de ce point, de grandes erreurs numériques se produisent. À vrai dire, il y a une grande génération d'entropie artificielle. Une condition spéciale aux bords du coin est donc appliquée [9]. La figure 3.2 représente un schéma du coin et des cellules environnantes.

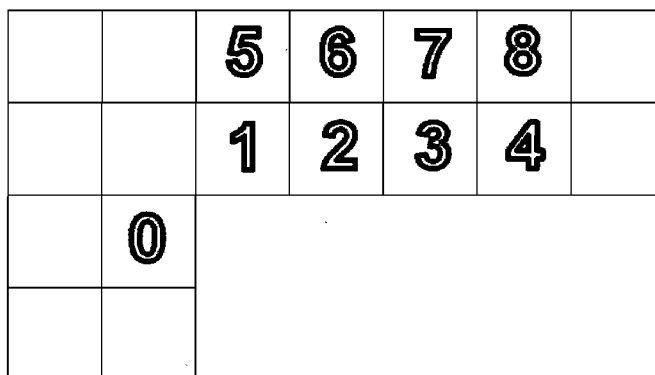


FIG. 3.2. Coin de la marche.

À chaque pas de temps, la densité des cellules 1-6 est écrasée de manière à ce que la fonction d'entropie $\frac{p}{\rho^\gamma}$ de ces cellules soit la même que dans la cellule 0. De plus, la norme 2 de la vitesse, pas la direction, des cellules 1-6 est réajustée tel que la somme de l'enthalpie $e_g + \frac{p}{\rho}$ et de l'énergie cinétique par unité de masse $\frac{1}{2}(u_g^2 + v_g^2)$ ait la même valeur qu'avant que la densité soit écrasée.

Dans nos expériences, nous sommes obligés d'enlever les correcteurs de flux (réduction à l'ordre 1) dans les cellules 1-8 juste au dessus de la marche. À défaut de cela, lorsque le maillage est raffiné, CLAWPACK est très instable numériquement et nous perdons la convergence.

3.4.2.3. Équations eulériennes des gouttes sans termes sources

Les conditions aux bords pour les équations eulériennes des gouttes sont mises en oeuvre de la même manière que pour les équations compressibles d'Euler. Il n'y a pas de correction d'entropie au coin (il n'y a pas de pression). Comme pour les équations compressibles d'Euler, nous sommes obligés d'enlever les correcteurs de flux (réduction à l'ordre 1) dans les cellules 1-8 juste au-dessus de la marche sinon nous perdons la convergence lorsque le maillage est raffiné. De plus, il faut enlever les correcteurs de flux lorsque nous sommes dans les cellules où la densité macroscopique des gouttes est faible (β petit). Si nous ne faisons pas cela, la vitesse des gouttes, dans les cellules où il n'y a presque pas de gouttes, a tendance à devenir très grande et cela cause des problèmes de pas de temps puisqu'il faut toujours respecter la condition CFL. Nous avons donc enlevé les correcteurs de flux lorsque la quantité β est 20 fois plus petite que la quantité β_e . Puisque nous résolvons ces équations dimension par dimension, la condition CFL bi-dimensionnelle devient donc $\Delta t \leq \min\left(\frac{\Delta x}{|u_d|}, \frac{\Delta y}{|v_d|}\right)$.

3.4.2.4. Équations lagrangiennes

La principale quantité d'intérêt est β . Dans le cas lagrangien, il y a au moins deux stratégies différentes pour obtenir β sur l'ensemble du domaine. La première serait d'insérer des gouttelettes à l'entrée du domaine à chaque pas de temps et de donner un poids à chacune de celles-ci afin que la quantité β_e soit respectée. Il faudrait, dans ce cas, énormément de gouttelettes pour remplir le domaine et cela coûte très cher numériquement.

Nous allons exploiter le fait que les gouttes n'influencent pas le gaz dans le cas lagrangien et bi-dimensionnel. Si nous insérons une gouttelette à l'entrée et à une certaine hauteur du domaine, alors toutes les gouttelettes insérées plus tard à cet endroit suivront la même trajectoire. Cela se produit, car la solution du gaz est fixe et ne change pas. De plus, dans notre recherche, les trajectoires des gouttelettes ne sont pas d'intérêt et par conséquent, nous ne sommes pas obligés de les sauvegarder. En revanche, nous comptons pour chacune des cellules eulériennes le nombre de fois que les gouttelettes se retrouvent à l'intérieur de

celles-ci. Il y a donc un nombre (nbs) associé à chacune des cellules eulériennes. Nous donnons aussi un poids à chacune des gouttelettes afin que β_e soit respecté. Une fois que toutes les gouttelettes sont sorties du domaine, à l'aide d'une règle de trois avec β_e à l'entrée, (nbs) à l'entrée et (nbs) sur le domaine, nous obtenons alors la quantité β sur tout le domaine.

Pour mettre en oeuvre cette technique, il faut choisir comment distribuer initialement les gouttelettes dans la première colonne de cellules fantômes à gauche du domaine. Nous avons choisi de les distribuer uniformément en subdivisant chacune des cellules en échiquier et en insérant au centre de chaque subdivision une gouttelette. Plusieurs choix sont possibles, mais nous avons opté pour une généralisation du cas uni-dimensionnel. La vitesse et la température dans une cellule sont prises comme la moyenne des vitesses et des températures des gouttelettes dans la cellule correspondante.

Le pas de temps choisi pour avancer les gouttelettes est le même pour toutes les gouttelettes et il est constant. Il est choisi comme étant $\Delta t = \frac{\Delta x}{u_{d,e}}$ où $u_{d,e}$ est la vitesse des gouttes horizontale à l'entrée gauche. Les gouttelettes n'ont pas de vitesse verticale initialement à l'entrée. De cette manière, nous nous assurons que les gouttelettes, insérées à une certaine hauteur à gauche du domaine, restent au moins un pas de temps dans chacune des cellules de la ligne correspondant à sa hauteur avant de rencontrer la première structure signifiante, un choc, de cette configuration du tunnel à vent avec une marche. Généralement, ce pas de temps est beaucoup trop grand pour une méthode numérique explicite. Pour la méthode semi-exacte, ce pas de temps ne cause pas de problème de stabilité et nous permet d'obtenir la solution stationnaire en peu d'itérations.

Les conditions réfléchives des murs doivent être correctement respectées. Sur un pas de temps, nous laissons les gouttelettes traverser les murs et à la fin de la résolution d'un système lagrangien d'équations différentielles ordinaires, si la gouttelette est à l'extérieur du domaine, alors une réflexion, correspondante au mur qu'elle a traversé, est appliquée. C'est-à-dire que la vitesse normale au mur change de signe et la position de la gouttelette est reflétée utilisant le mur qu'elle

a traversé comme axe de symétrie. Si la gouttelette traverse une sortie, alors elle est simplement enlevée du domaine de calcul.

3.4.3. Solution de l'expérience sans l'effet des termes sources dans les équations du gaz

Dans la prochaine section, nous présentons la solution de l'expérience décrite précédemment lorsque l'effet des termes sources dans les équations du gaz est négligé. Premièrement, nous montrons la solution du gaz, en second lieu, la solution des gouttes eulériennes et puis celle des gouttes lagrangiennes. Pour les expériences avec les équations non couplées, le critère d'arrêt est $\alpha = 10^{-7}$. Les solutions stationnaires du gaz et des gouttes sont très similaires au sens que les gouttes suivent de très près la configuration du gaz. Les solutions stationnaires consistent principalement d'un choc en avant de la marche créé par la présence de celle-ci et d'une raréfaction à partir du coin de la marche. Il y a une zone de haute pression juste devant la marche où la densité du gaz et des gouttes atteint un maximum. La densité est minimum juste un haut de la marche après le coin. À partir du coin jusqu'à la sortie droite, il y a une discontinuité de contact qui est beaucoup plus visible sur la composante verticale de la vitesse. Toutes les solutions sont présentées avec 30 contours tel que $\rho_{min} = 0$, $\rho_{max} = 7$, $u_{g,min} = 0$, $u_{g,max} = 3.3$, $v_{g,min} = -1$, $v_{g,max} = 2.2$, $T_{g,min} = 0$, $T_{g,max} = 3.3$, $\beta_{min} = 0$, $\beta_{max} = 0.007$, $u_{d,min} = 0$, $u_{d,max} = 3.3$, $v_{d,min} = -1$, $v_{d,max} = 2.2$, $T_{d,min} = 0$ et $T_{d,max} = 3.3$.

3.4.3.1. Solution du gaz

La solution stationnaire du gaz est présentée aux figures 3.3, 3.4 et 3.5. Elle est obtenue avec $dx = dy = 0.003125$ et un CFL=0.9. La solution a été considérée comme étant stationnaire en $t=7.3527425$.

3.4.3.2. Solution eulérienne des gouttes

La solution stationnaire des gouttes est présentée aux figures 3.6, 3.7 et 3.8. Elle est obtenue avec $\Delta x = \Delta y = 0.003125$ et un CFL=0.8. La solution a été considérée comme étant stationnaire en $t=4.2851837$.

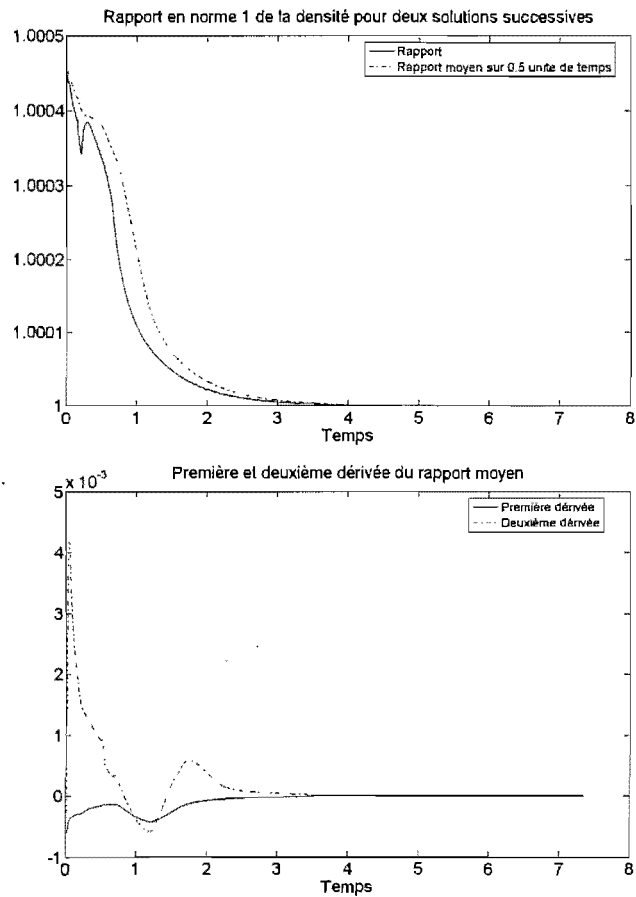


FIG. 3.3. Convergence vers un état stationnaire pour la solution du gaz.

3.4.3.3. Solution lagrangienne des gouttes

La solution stationnaire des gouttes est présentée aux figures 3.9 et 3.10. Elle est obtenue avec $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. Toutes les gouttelettes ont quitté le domaine de calcul en $t=3.6968750$.

3.4.4. Comparaison des solutions

Nous introduisons ici, des coupes pertinentes des solutions avec x ou y constant. Voir les figures 3.11, 3.12, 3.13 et 3.14. Dans ces images, il faut remarquer la présence d'oscillations.

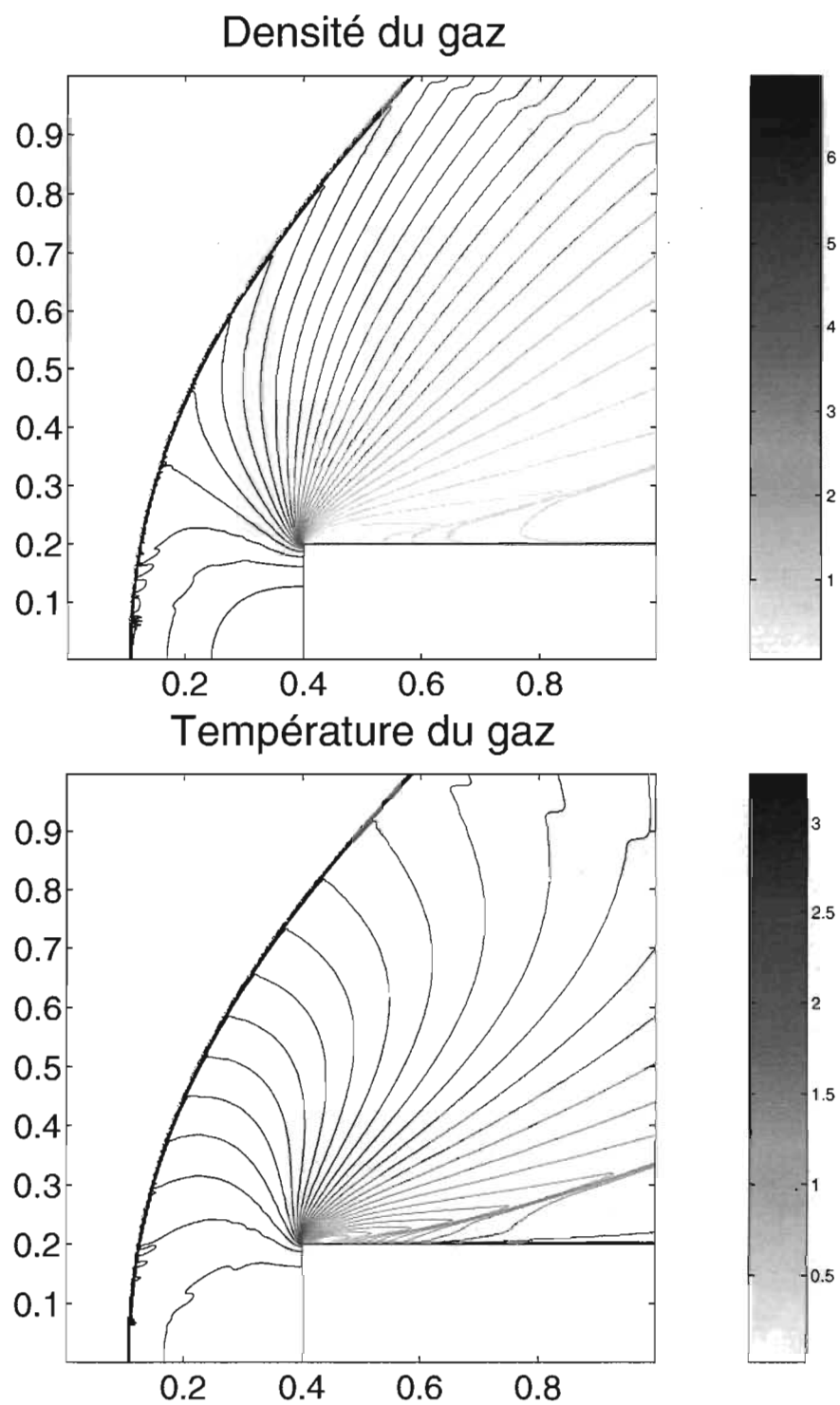


FIG. 3.4. Densité et température stationnaires du gaz pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

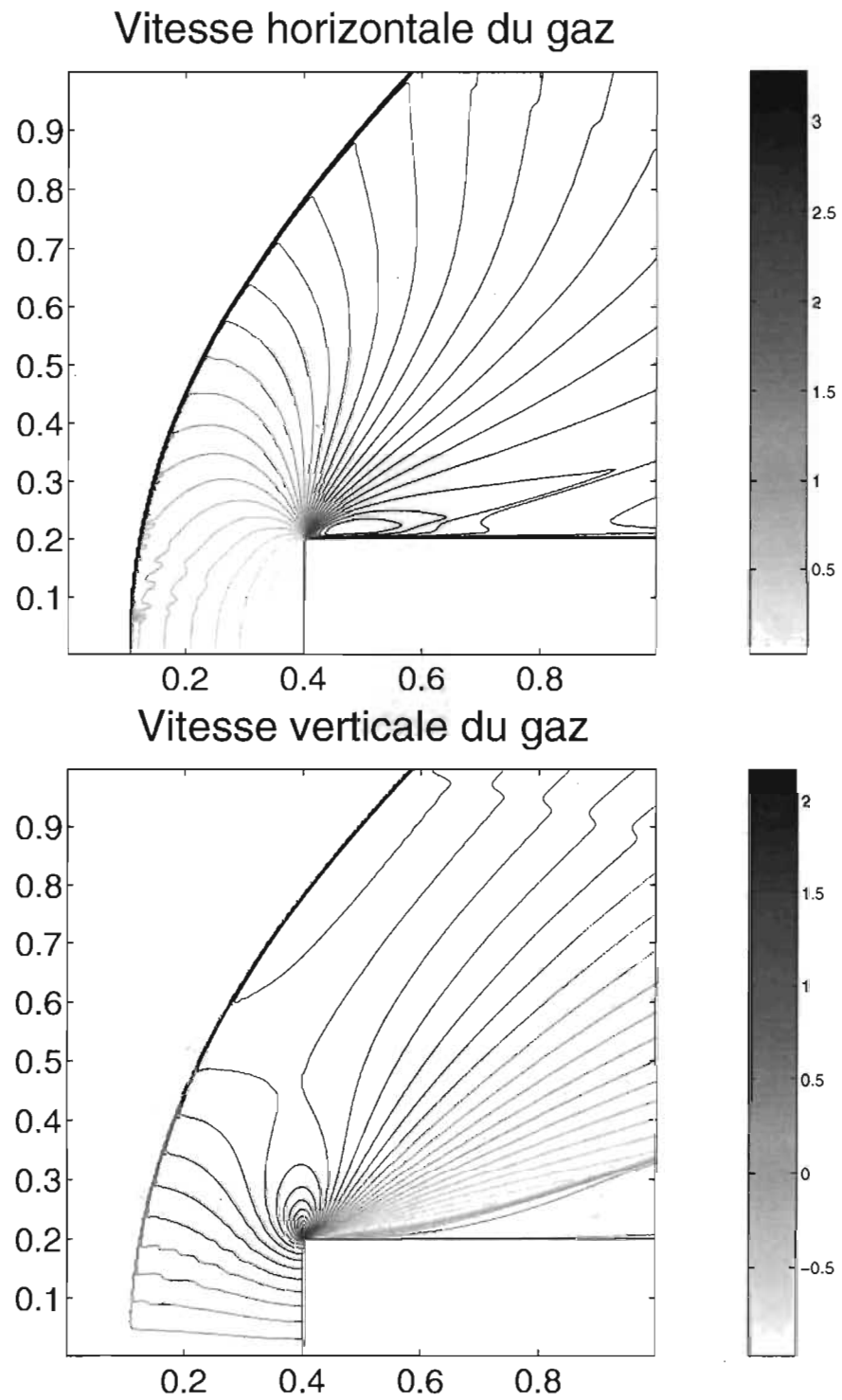


FIG. 3.5. Vitesses stationnaires du gaz pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

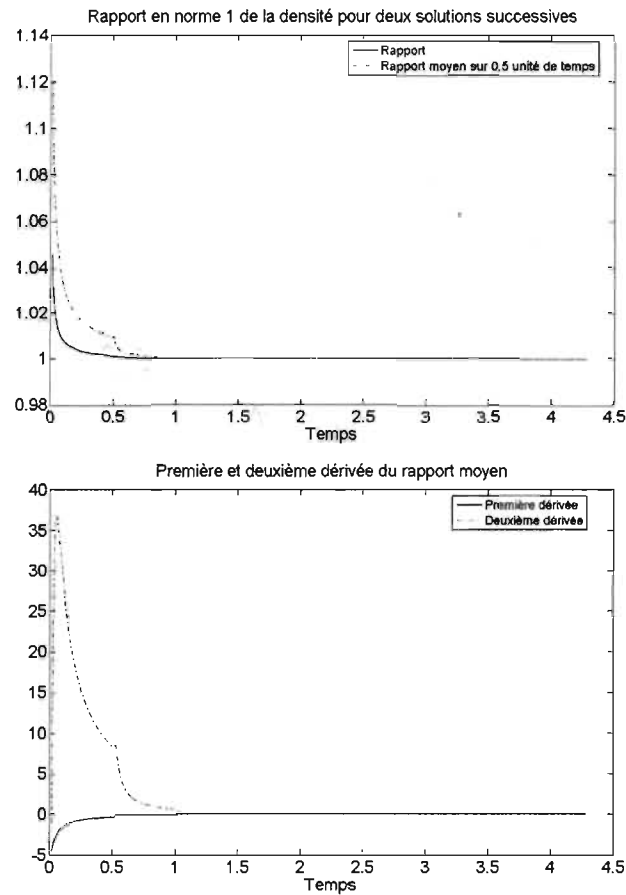


FIG. 3.6. Convergence vers un état stationnaire pour la solution des gouttes eulériennes.

3.4.4.1. Commentaires

Nous pouvons remarquer que la solution du gaz et par conséquent, la solution des gouttes présentent des oscillations au choc près du mur le plus bas. Ces oscillations ont été documentées dans l'article de Woodward et Colella [9] pour le cas du gaz. « Les oscillations sont dues au choc très mince et stationnaire que produit la méthode de Godunov. Il y a du bruit qui a tendance à être émis à partir des zones où les chocs se déplacent soudainement d'une colonne à l'autre. Ce bruit est vu près du mur le plus bas où la vitesse du fluide est si basse que le bruit ne peut être atténué correctement. Ce bruit est beaucoup plus notable sur les

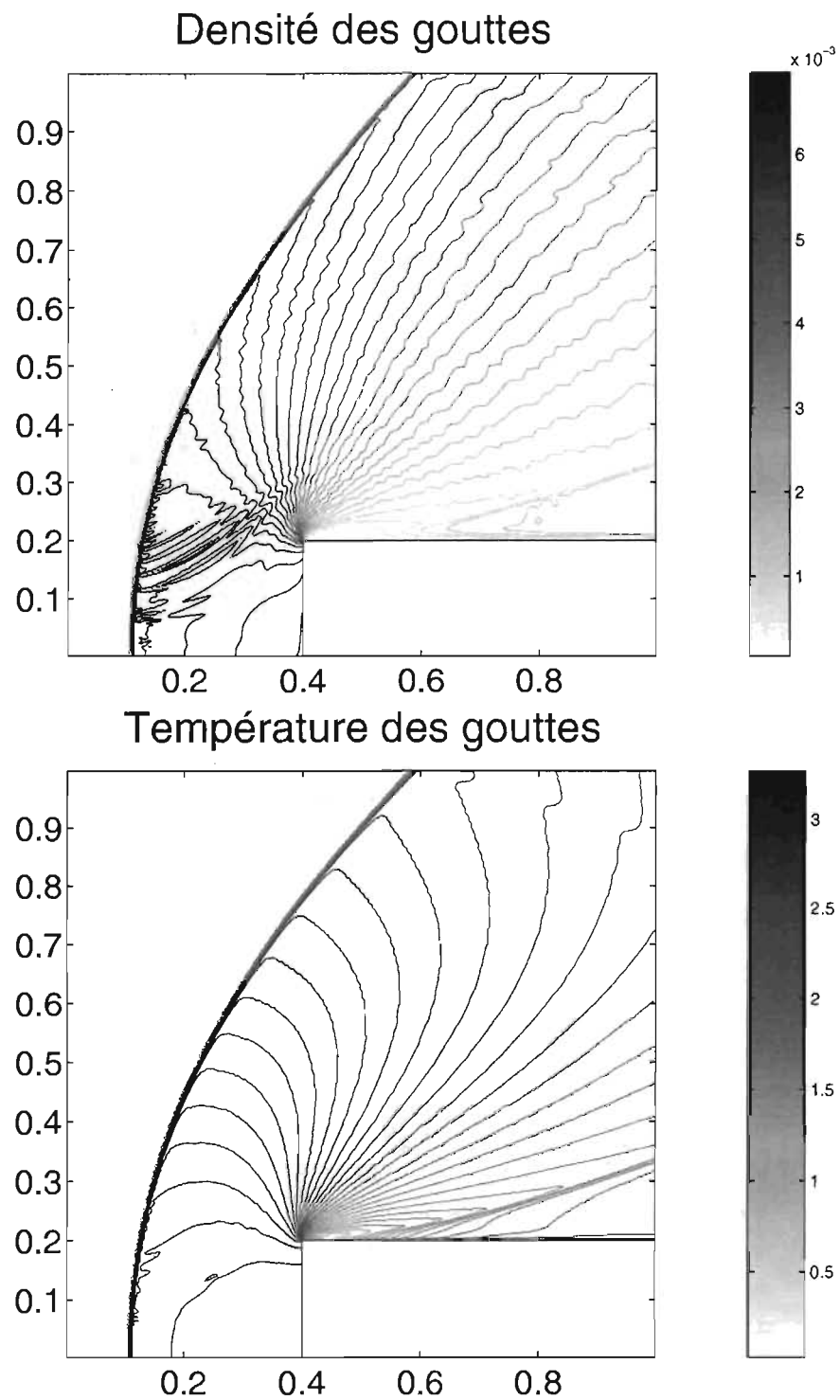


FIG. 3.7. Densité et température stationnaires des gouttes eulériennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

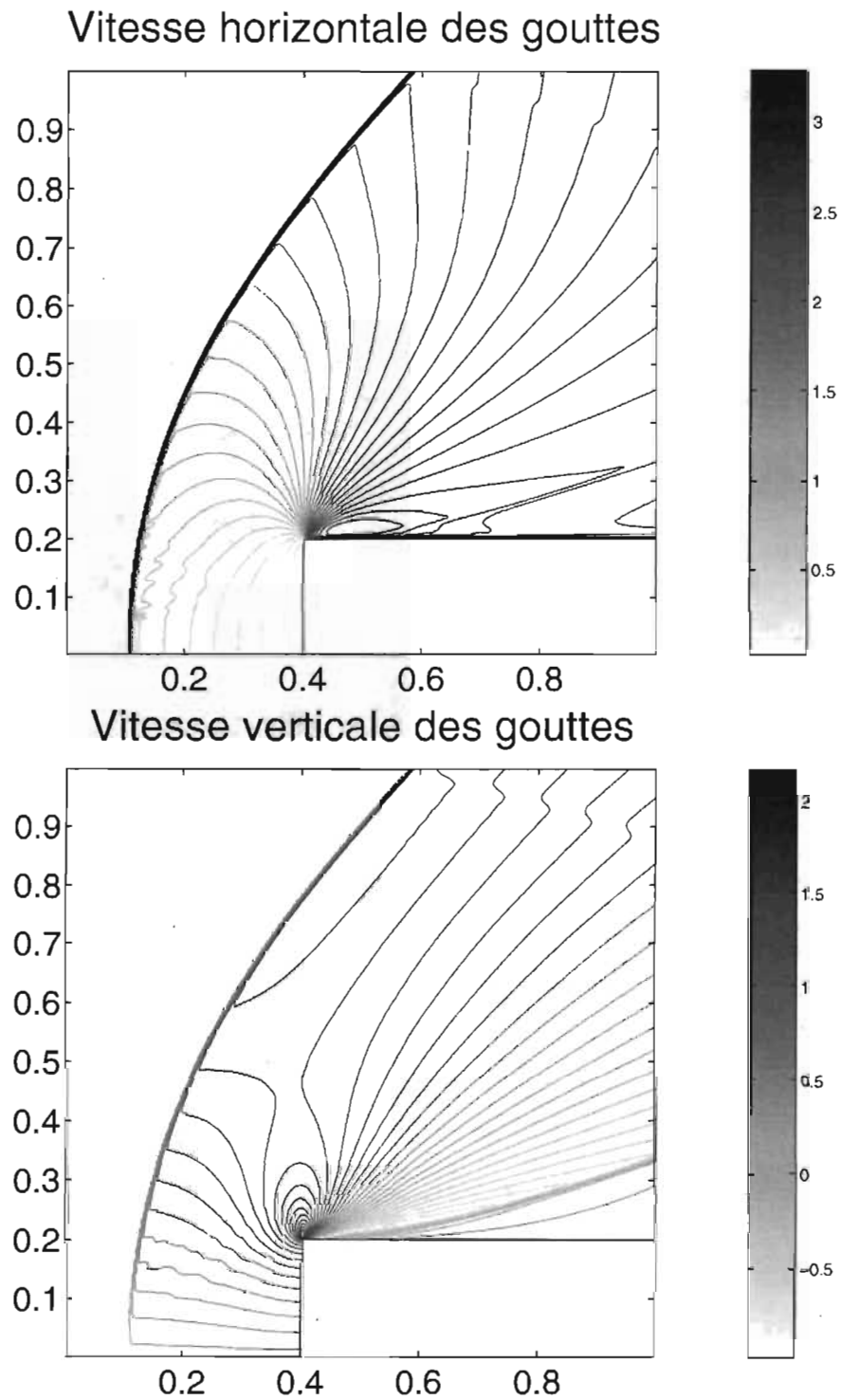


FIG. 3.8. Vitesses stationnaires des gouttes eulériennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

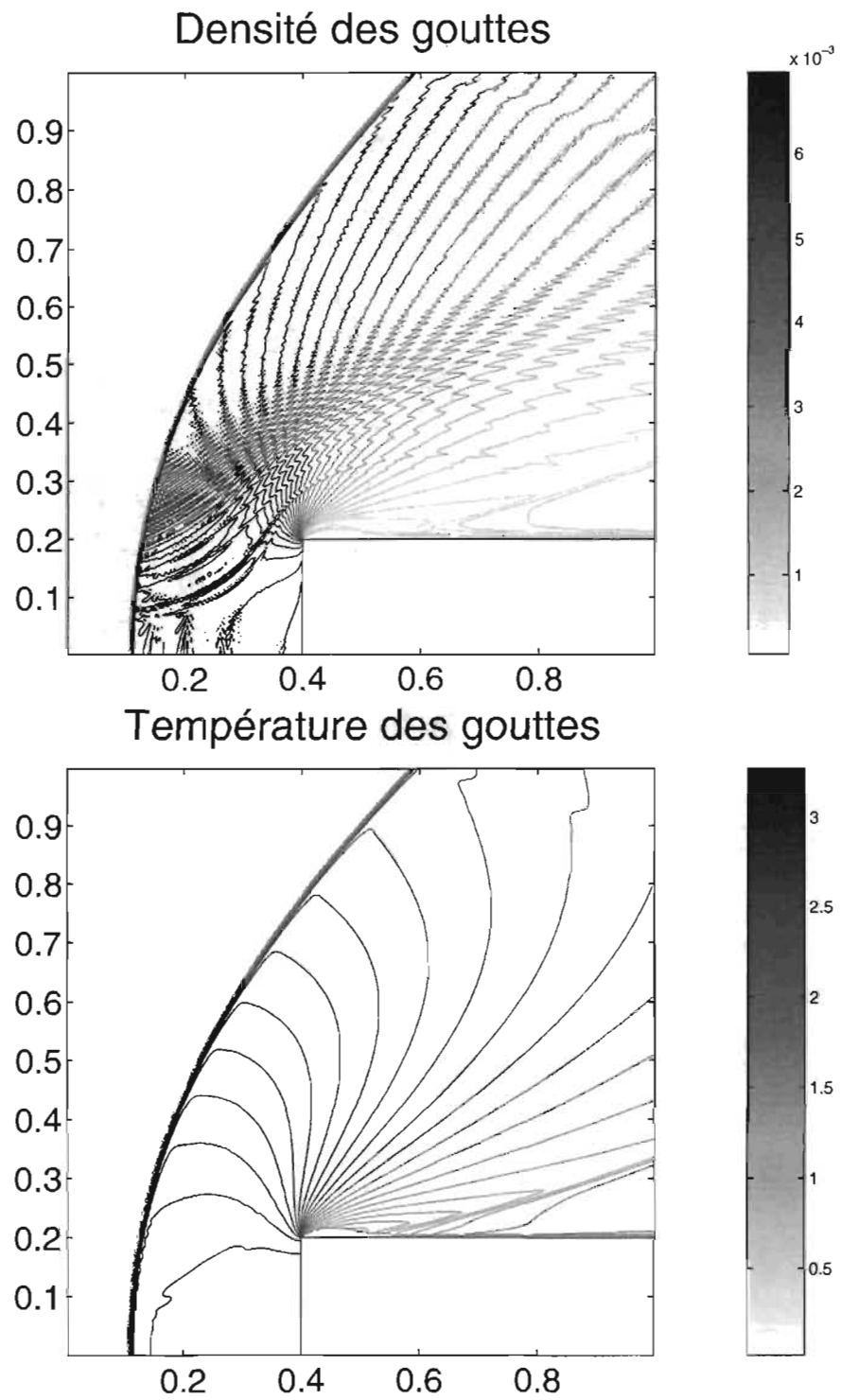


FIG. 3.9. Densité et température stationnaires des gouttes lagrangiennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

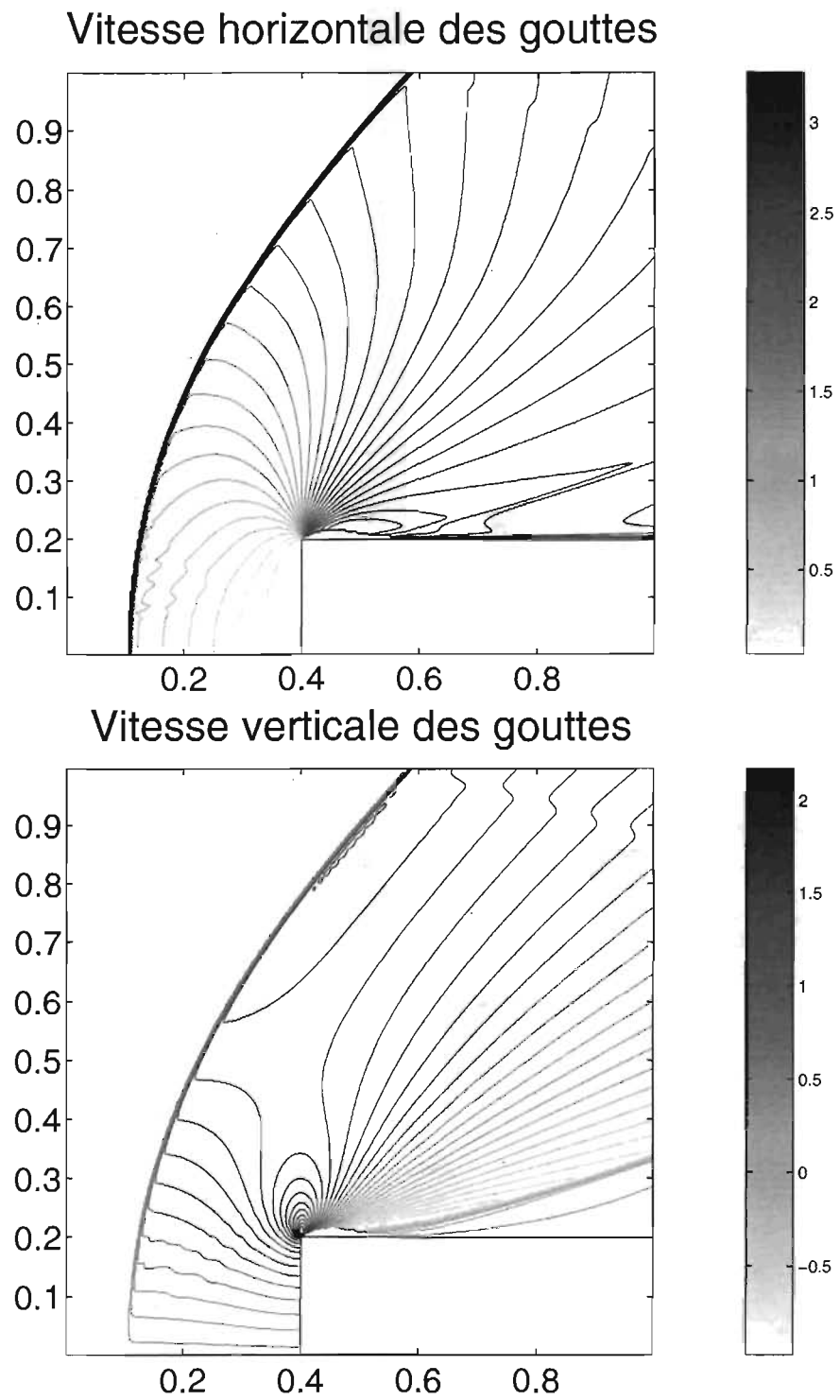


FIG. 3.10. Vitesses stationnaires des gouttes lagrangiennes pour le problème test bi-dimensionnel avec les équations du gaz non couplées.

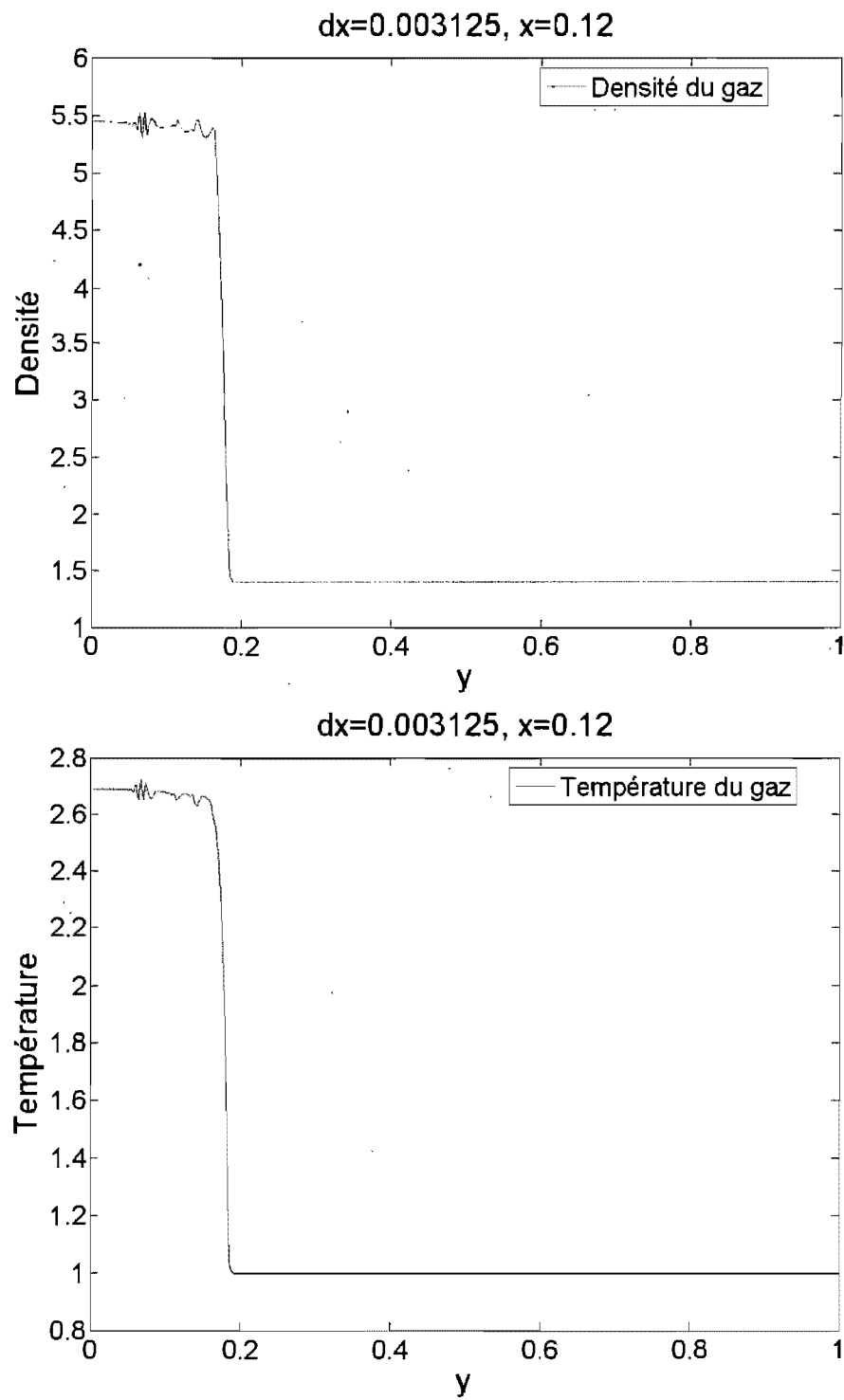


FIG. 3.11. Coupe de la densité et la température stationnaires du gaz en $x = 0.12$.

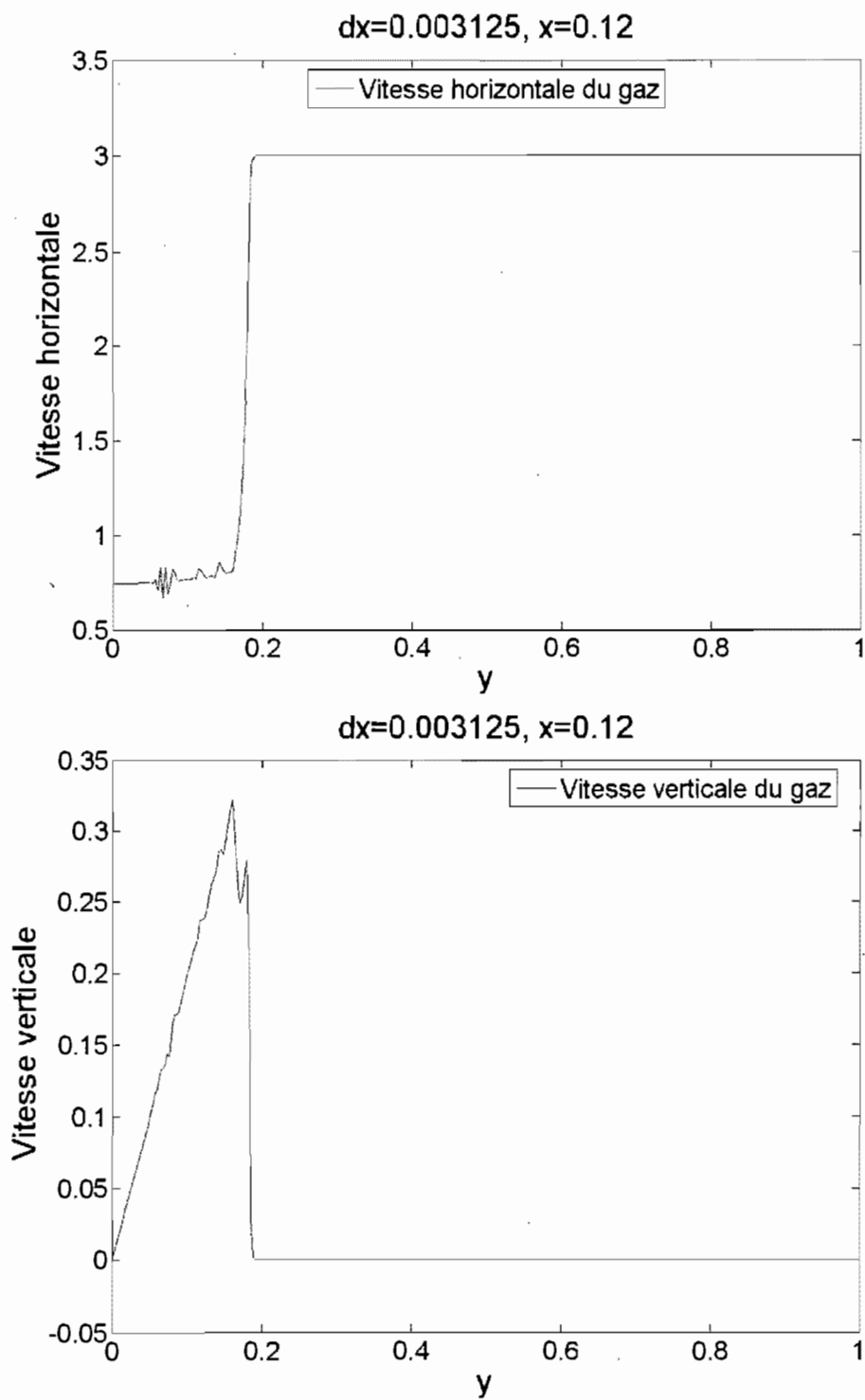


FIG. 3.12. Coupe des vitesses stationnaires du gaz en $x = 0.12$.

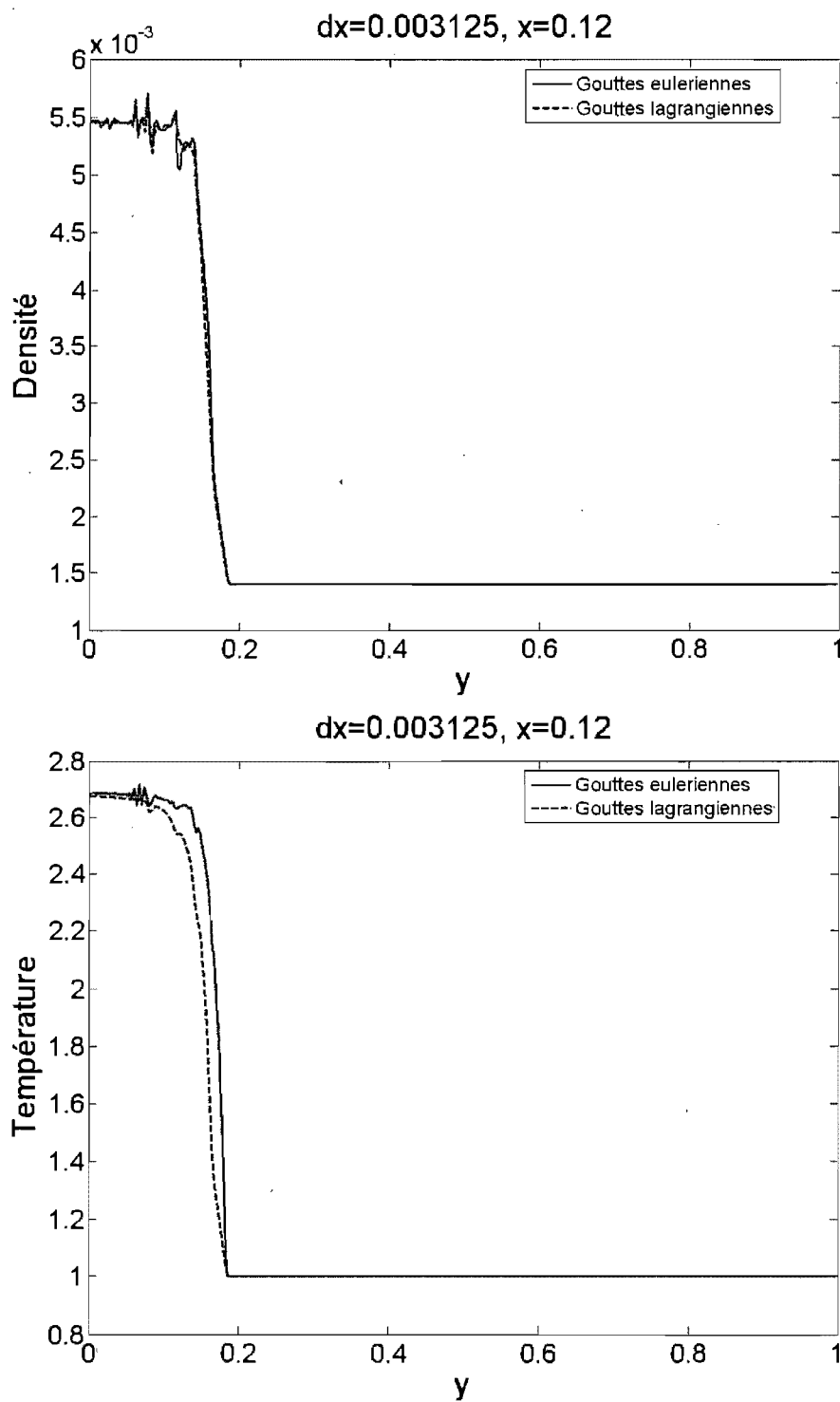


FIG. 3.13. Coupe de la densité et la température stationnaires des gouttes lagrangiennes et eulériennes en $x = 0.12$.

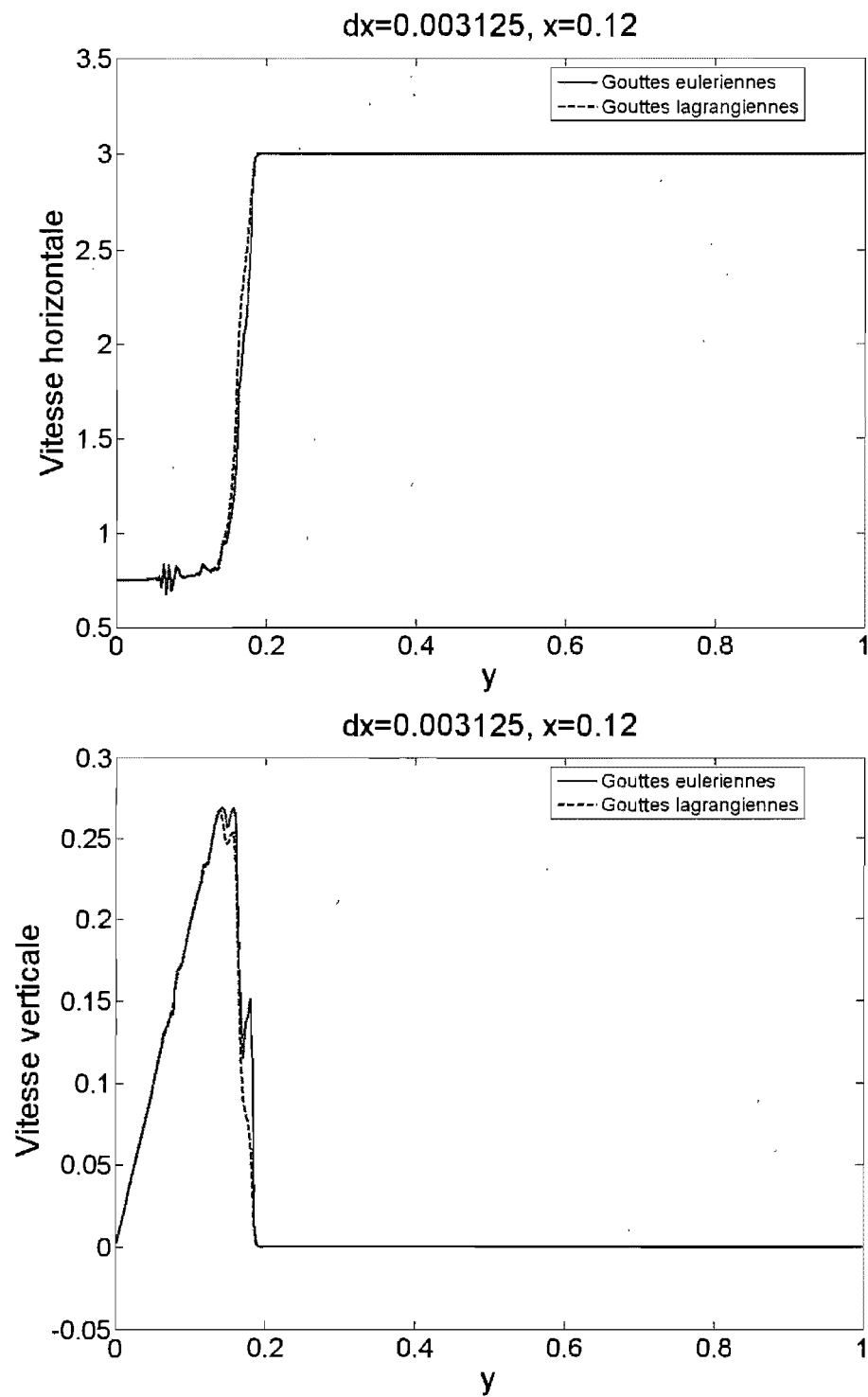


FIG. 3.14. Coupe des vitesses stationnaires des gouttes lagrangiennes et eulériennes en $x = 0.12$.

maillages les plus fins. Ces effets numériques peuvent être enlevés en augmentant la dissipation numérique du schéma. » [9].

Aussi, nous remarquons qu'il y a des oscillations pour la quantité β juste après le premier choc à l'entrée. À notre connaissance, il n'y avait pas de documentation disponible pour une expérience test de ce genre. Il est naturel de penser que les oscillations dans la solution du gaz vont se propager dans la solution des gouttes et que cela peut affecter la qualité de la solution des gouttes. Ces oscillations ne se propagent pas beaucoup après le premier choc pour les vitesses et la température. Une conjecture simple serait que c'est parce qu'il y a des termes sources qui stabilisent ces inconnues dans les équations contrairement à l'équation de continuité de la masse où il n'y a pas de termes sources. De plus, pour le cas lagrangien, les vitesses et la température des gouttes sont prises sur toutes les gouttelettes de la cellule, cela contribue à diminuer les oscillations. Une recherche plus poussée expliquant la cause de ces oscillations serait intéressante.

3.4.5. Validation des résultats

3.4.5.1. *Système d'équations découplées : gaz (CLAWPACK)*

Nous montrons l'ordre de convergence de CLAWPACK dans le tableau 3.3. La solution numérique de référence a été obtenue avec un CFL=0.9 et $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. L'ordre obtenu est d'environ 1.

3.4.5.2. *Système d'équations découplées : gouttes eulériennes*

Nous montrons l'ordre de convergence du schéma eulérien dans le tableau 3.4 lorsque les gouttes n'influencent pas la dynamique du gaz. La solution numérique de référence a été obtenue avec un CFL=0.9 et $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. Encore une fois, l'ordre obtenu est d'environ 1.

3.4.5.3. *Système d'équations découplées : gouttes lagrangiennes*

Pour étudier la convergence du cas des gouttes lagrangiennes, nous allons calculer les erreurs approximatives seulement sur le premier domaine de calcul

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ \rho_g^{ref} - \rho_g\ _1}{\ \rho_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_g^{ref} - T_g\ _1}{\ T_g^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.2703e-001		1.0525e-001	
0.9	0.025	8.4792e-002	1.4982e+000	6.1098e-002	1.7226e+000
0.9	0.0125	3.4918e-002	2.4284e+000	2.5756e-002	2.3722e+000
0.9	0.00625	1.3189e-002	2.6475e+000	1.0051e-002	2.5625e+000

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ u_g^{ref} - u_g\ _1}{\ u_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ v_g^{ref} - v_g\ _1}{\ v_g^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	9.1714e-002		4.0340e-001	
0.9	0.025	5.2161e-002	1.7583e+000	2.5249e-001	1.5977e+000
0.9	0.0125	2.2770e-002	2.2907e+000	1.0894e-001	2.3176e+000
0.9	0.00625	8.5628e-003	2.6592e+000	5.5098e-002	1.9773e+000

TAB. 3.3. Ordre de convergence en espace (CLAWPACK) de la solution du gaz pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.3975e-001		1.0599e-001	
0.9	0.025	1.1441e-001	1.2214e+000	6.2543e-002	1.6947e+000
0.9	0.0125	4.1049e-002	2.7872e+000	2.6647e-002	2.3471e+000
0.9	0.00625	2.3028e-002	1.7826e+000	9.9192e-003	2.6864e+000

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ v_d^{ref} - v_d\ _1}{\ v_d^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	9.1939e-002		4.0545e-001	
0.9	0.025	5.2509e-002	1.7509e+000	2.5367e-001	1.5983e+000
0.9	0.0125	2.3029e-002	2.2802e+000	1.0988e-001	2.3085e+000
0.9	0.00625	8.6093e-003	2.6749e+000	5.4587e-002	2.0130e+000

TAB. 3.4. Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.

($x < 0.4$), puisque juste au-dessus de la marche, il y a des cellules où les gouttelettes ne vont pas. Cela cause des problèmes pour calculer l'erreur dans ces cellules, car n'ayant pas de gouttelettes, il n'est pas possible d'obtenir les vitesses et la température des gouttes. Nous montrons l'ordre de convergence du schéma des gouttes lagrangiennes dans le tableau 3.5. La solution numérique de référence a été obtenue avec un $\Delta t = \frac{1}{96}$ et $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. L'ordre obtenu est d'environ 1.

Δt	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
$\frac{1}{6}$	0.05	9.3245e-002		3.0140e-002	
$\frac{1}{12}$	0.025	4.3320e-002	2.1525e+000	1.6572e-002	1.8188e+000
$\frac{1}{24}$	0.0125	2.1617e-002	2.0040e+000	7.5579e-003	2.1926e+000
$\frac{1}{48}$	0.00625	1.4023e-002	1.5415e+000	2.4103e-003	3.1357e+000

Δt	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ v_d^{ref} - v_d\ _1}{\ v_d^{ref}\ _1}$	rapport
$\frac{1}{6}$	0.05	3.0778e-002		1.5353e-001	
$\frac{1}{12}$	0.025	1.5544e-002	1.9801e+000	8.3351e-002	1.8419e+000
$\frac{1}{24}$	0.0125	7.7844e-003	1.9968e+000	3.8647e-002	2.1567e+000
$\frac{1}{48}$	0.00625	3.3839e-003	2.3004e+000	1.4051e-002	2.7506e+000

TAB. 3.5. Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes lagrangiennes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système découplé.

3.4.5.4. Système d'équations couplées : gaz

Nous montrons l'ordre de convergence du schéma eulérien du gaz couplé avec les gouttes eulériennes dans le tableau 3.6. La solution numérique de référence a été obtenue avec un CFL=0.9 et $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. L'ordre obtenu est d'environ 1.

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ \rho_g^{ref} - \rho_g\ _1}{\ \rho_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_g^{ref} - T_g\ _1}{\ T_g^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.4452e-001		1.1646e-001	
0.9	0.025	8.0344e-002	1.7988e+000	6.0226e-002	1.9338e+000
0.9	0.0125	3.4488e-002	2.3296e+000	2.5624e-002	2.3503e+000
0.9	0.00625	1.2670e-002	2.7220e+000	9.1820e-003	2.7907e+000

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ u_g^{ref} - u_g\ _1}{\ u_g^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ v_g^{ref} - v_g\ _1}{\ v_g^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.0013e-001		4.5834e-001	
0.9	0.025	5.1999e-002	1.9256e+000	2.4754e-001	1.8515e+000
0.9	0.0125	2.2447e-002	2.3166e+000	1.0962e-001	2.2582e+000
0.9	0.00625	8.8643e-003	2.5323e+000	4.0670e-002	2.6954e+000

TAB. 3.6. Ordre de convergence en espace de la solution du gaz pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système couplé.

3.4.5.5. *Système d'équations couplées : gouttes*

Nous montrons l'ordre de convergence du schéma eulérien couplé des gouttes dans le tableau 3.8. La solution numérique de référence a été obtenue avec un CFL=0.9 et $\Delta x = \Delta y = 0.003125$. L'ordre obtenu est d'environ 1.

3.4.5.6. *Commentaires*

Comme dans le cas uni-dimensionnel, l'ordre de convergence obtenu est d'environ 1 et ce, pour les mêmes raisons. La solution de ce tunnel à vent contient des chocs et des discontinuités de contact, cela contribue à diminuer l'ordre de convergence puisque CLAWPACK est d'ordre 2 seulement dans les zones lisses. La méthode de séparation des opérateurs est aussi en cause. Le fait de résoudre les termes sources séparément peut conduire à une méthode d'ordre 1 [11]. Aussi, pour les gouttes eulériennes, nous faisons aussi une séparation des opérateurs dans le cas spatial. De plus, rien ne nous indique que le solveur semi-exact pour les termes sources est d'ordre 2. Dans le cas des gouttes lagrangiennes, il y a des oscillations pour la quantité β et cela est probablement la cause pour laquelle l'ordre

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ \beta^{ref} - \beta\ _1}{\ \beta^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ T_d^{ref} - T_d\ _1}{\ T_d^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.4896e-001		1.1735e-001	
0.9	0.025	8.6835e-002	1.7154e+000	6.1178e-002	1.9181e+000
0.9	0.0125	4.1036e-002	2.1161e+000	2.6307e-002	2.3256e+000
0.9	0.00625	2.2653e-002	1.8116e+000	9.5252e-003	2.7618e+000

CFL	$\Delta x = \Delta y$	$\frac{\ u_d^{ref} - u_d\ _1}{\ u_d^{ref}\ _1}$	rapport	$\frac{\ v_d^{ref} - v_d\ _1}{\ v_d^{ref}\ _1}$	rapport
0.9	0.05	1.0030e-001		4.6077e-001	
0.9	0.025	5.2337e-002	1.9164e+000	2.4921e-001	1.8490e+000
0.9	0.0125	2.2729e-002	2.3026e+000	1.1064e-001	2.2525e+000
0.9	0.00625	9.0997e-003	2.4978e+000	4.1048e-002	2.6953e+000

TAB. 3.7. Ordre de convergence en espace de la solution des gouttes eulériennes pour l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le cas du système couplé.

de convergence, pour cette quantité, est proche de 1. De plus, la discrétisation temporelle et spatiale du solveur semi-exact lagrangien est d'ordre 1.

3.4.6. Effets des termes sources des équations du gaz sur les solutions stationnaires du gaz

Sous quelles conditions pouvons-nous négliger l'effet des termes sources dans les équations du gaz? Ceci est une question importante à traiter. La densité microscopique des gouttes ρ_d est une quantité qui pourrait être susceptible d'avoir un effet sur la solution du gaz stationnaire. En effet, plus ρ_d est petit, plus les fonctions de transfert de quantité mouvement D et de chaleur Q sont grandes en valeur absolue. La valeur absolue de ces fonctions est inversement proportionnelle à ρ_d , c'est-à-dire que si nous divisons ρ_d par 2, alors les fonctions D et Q sont multipliées par 2. Par conséquent, lorsque ρ_d est petit, ces fonctions sont grandes et nous pourrions nous attendre à ce qu'il y ait un effet des termes sources sur la solution stationnaire du gaz. En fait, lorsque la quantité β_e est suffisamment petite, la grandeur de ces termes n'influence pas vraiment la solution stationnaire

du gaz. En résumé, nous pouvons dire qu'il existe une valeur critique de β_e sous laquelle l'effet des gouttes sur le gaz est négligeable et que cette valeur critique dépend de ρ_d . Par contre, la quantité β_e affecte la solution du gaz stationnaire. Cela représente ce à quoi nous nous attendons naturellement, c'est-à-dire que plus il y a de gouttes, plus il y a un impact sur le gaz.

3.4.6.1. Effets de la densité microscopique des gouttes ρ_d

Nous montrons aux figures 3.15 et 3.16 des tranches de la solution stationnaire du gaz pour différentes valeurs de ρ_d et avec $\beta_e = 0.0014$. Nous remarquons que la solution du gaz est à peu près la même peu importe la valeur de ρ_d .

3.4.6.2. Effets de la quantité de gouttes β_e à l'entrée

Nous montrons aux figures 3.17 et 3.18 des tranches de la solution stationnaire du gaz pour différentes valeurs de β_e et avec ρ_d égale à 10^{-6} . Il faut voir que plus il y a de gouttes, plus la solution du gaz est affectée.

3.4.6.3. Commentaires

Il est important de noter que le modèle n'est valide que pour de petites valeurs de β . Plusieurs effets physiques deviennent non négligeables lorsque β devient grand, tel que le volume occupé par les gouttelettes par rapport à celui du gaz et les collisions entre celles-ci. Étant donné que nous avons fait ces hypothèses dès le départ, il est acceptable de négliger l'effet des termes sources dans les équations du gaz lorsque la quantité de gouttes est petite. Dans les expériences ci-haut, $\beta_e \leq \frac{\rho_e}{1000}$ semble raisonnable pour négliger l'effet des termes sources dans les équations du gaz.

3.4.7. Optimisation dans le cas eulérien avec les équations non couplées

3.4.7.1. Choix des conditions initiales

Pour obtenir la solution stationnaire des gouttes le plus rapidement possible, le choix des conditions initiales est important. Nous avons testé trois choix de

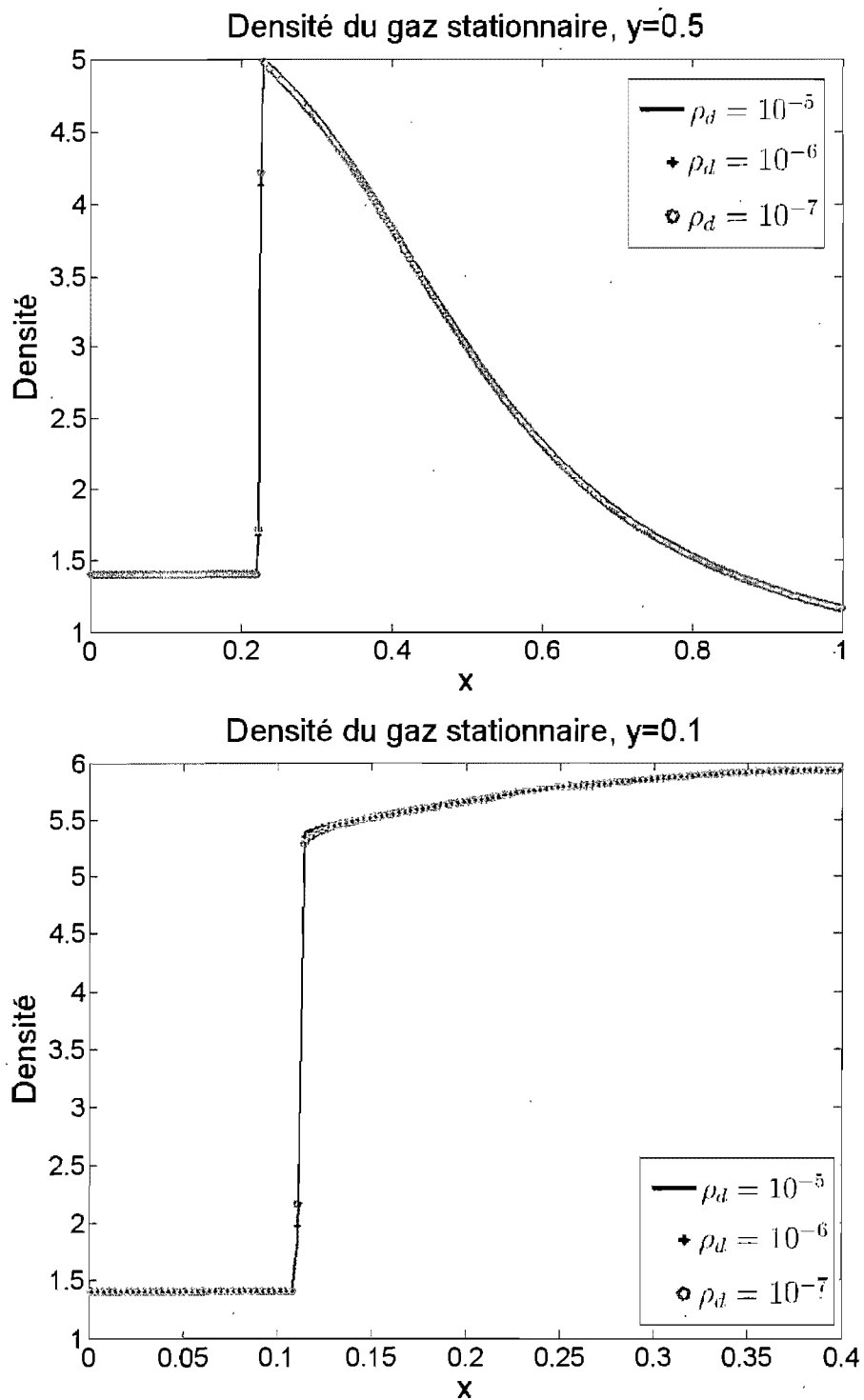


FIG. 3.15. Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de ρ_d , $y = 0.5$ et $y = 0.1$.

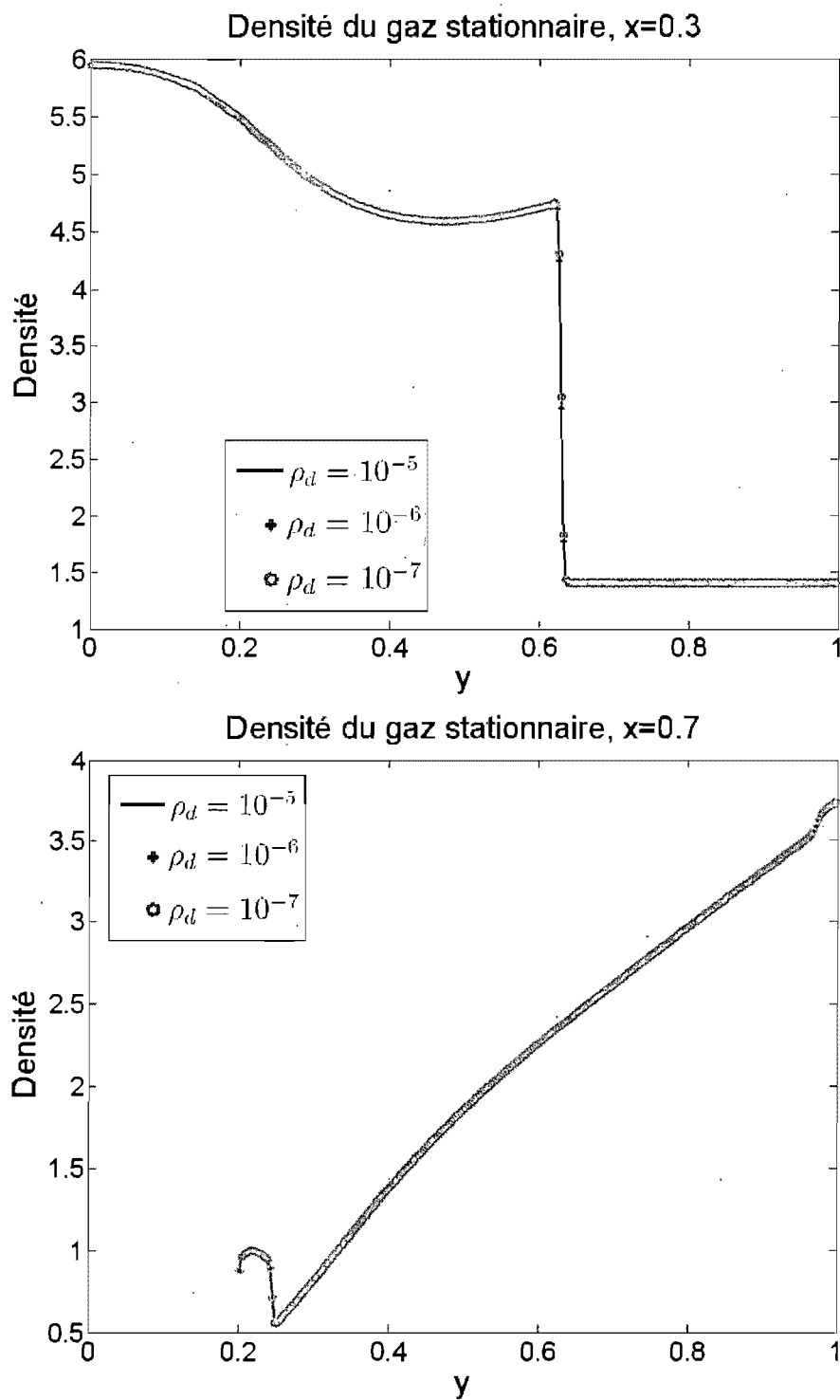


FIG. 3.16. Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de ρ_d , $x = 0.3$ et $x = 0.7$.

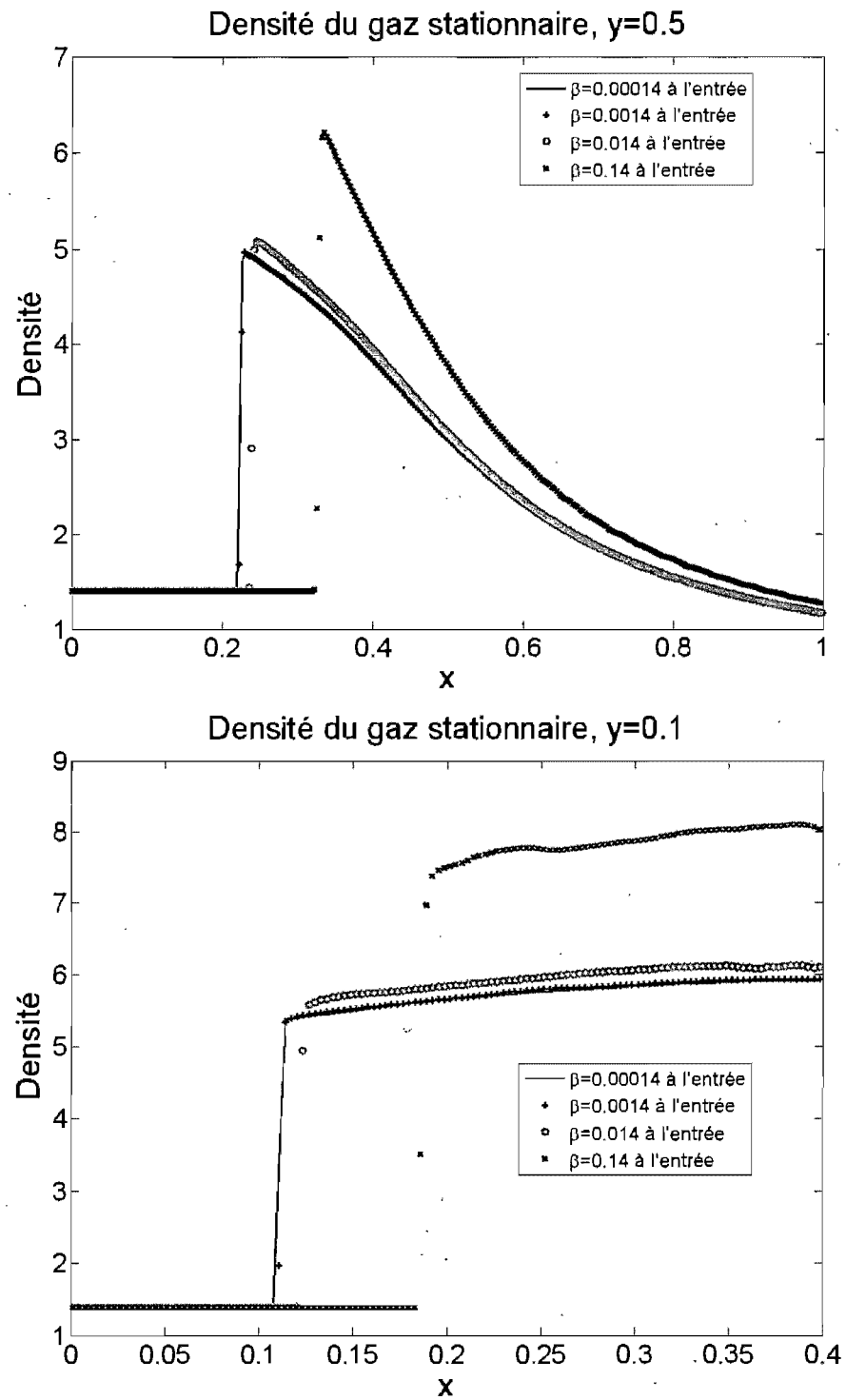


FIG. 3.17. Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de β_e , $y = 0.5$ et $y = 0.5$.

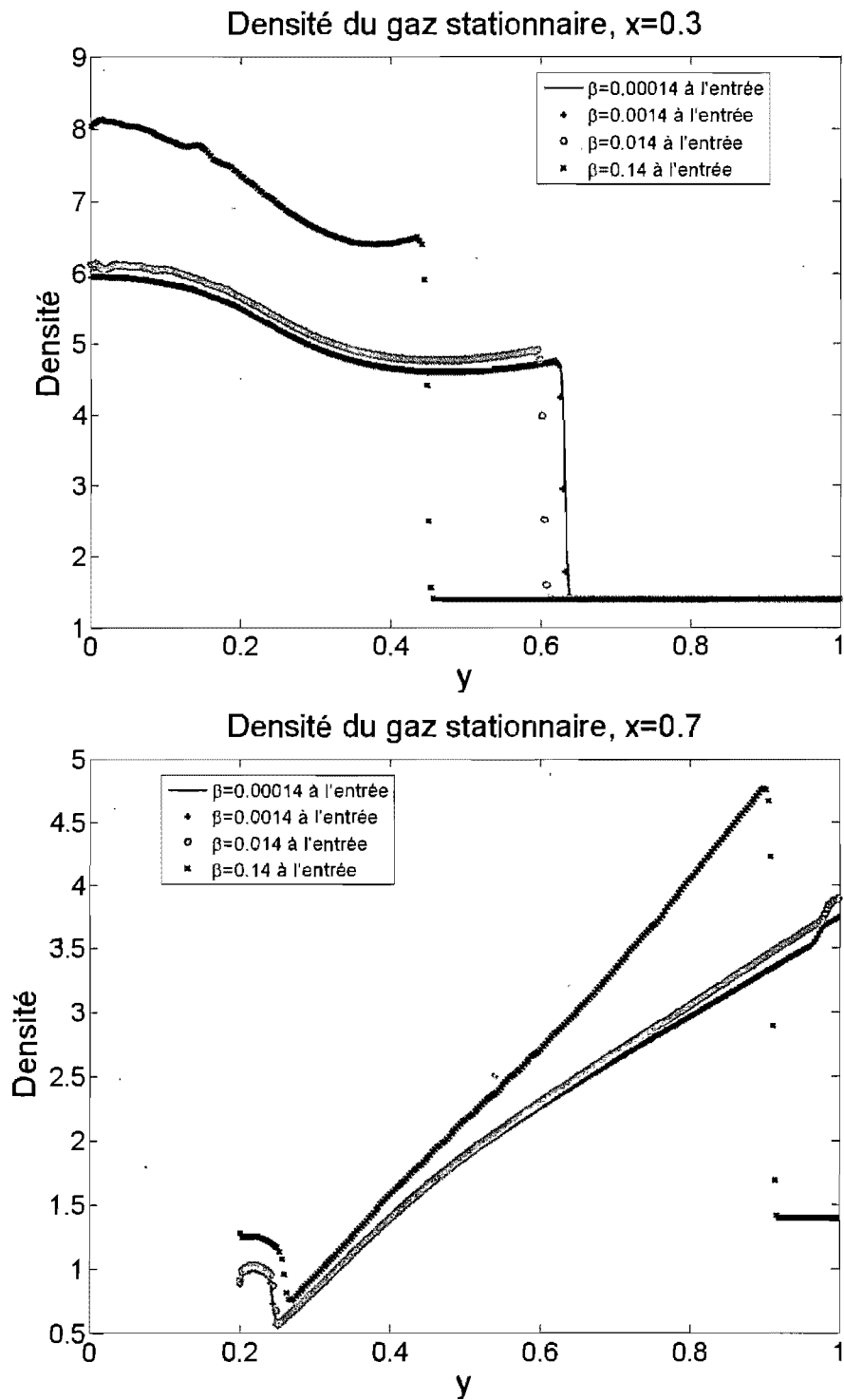


FIG. 3.18. Coupe de la solution du gaz stationnaire selon différentes valeurs de β_e , $x = 0.3$ et $x = 0.7$.

conditions initiales (CI), sur trois problèmes ayant différentes grandeurs de termes sources (ρ_d) et ce, sur deux maillages (Δx) différents. Toutes les simulations sont faites avec un CFL=0.8.

Le premier choix de condition initiale est la condition initiale gaz (CI gaz) $\beta^0 = \frac{\beta_e}{\rho_e} \rho$, $u_d^0 = u_g$, $v_d^0 = v_g$ et $T_d^0 = T_g$. Le deuxième choix est la condition initiale vide (CI vide), $\beta^0 = 0$, $u_d^0 = 0$, $v_d^0 = 0$ et $T_d^0 = 0$. Pour terminer, le troisième choix est la condition initiale uniforme (CI uniforme), $\beta^0 = \beta_e$, $u_d^0 = u_{d,e}$, $v_d^0 = 0$ et $T_d^0 = T_{d,e}$.

Nous présentons le tableau 3.8 affichant le nombre d'itérations requis pour atteindre l'état stationnaire. Nous remarquons que plus ρ_d est petit, plus la condition initiale gaz semble préférable. Cela n'est pas vraiment une surprise étant donné que les termes sources sont importants plus ρ_d est petit. Par conséquent, plus les vitesses et la température des gouttes seront proches de la solution du gaz. Dans les essais du tableau 3.8, CI gaz est toujours préférable. Par contre, il se pourrait, que si la solution des gouttes est loin de la solution du gaz, alors la CI gaz ne ferait pas vraiment mieux que les CI vide ou uniforme. Nous pouvons rajouter qu'il ne semble pas y avoir vraiment de différence entre les CI vide et uniforme.

3.4.7.2. Calcul de solutions grossières au départ

Nous avons montré précédemment que la CI gaz est préférable lorsque ρ_d est petit. Quand ρ_d est plus grand, toutes les CI testées plus haut donnent sensiblement le même nombre d'itérations pour obtenir la solution stationnaire. Il serait bien d'obtenir meilleur, car le cas où ρ_d est grand est celui qui prend le plus d'itérations.

Une idée serait de calculer la solution stationnaire des gouttes sur un maillage grossier et d'ensuite, interpoler cette solution sur un maillage fin. Nous pouvons alors utiliser cette solution interpolée comme condition initiale pour le problème avec le maillage fin. Nous avons testé trois types d'interpolations, bicubique, bilinéaire et « plus proche ». Pour générer les conditions initiales interpolées sur

ρ_d	CI	$\Delta x = \Delta y$	Nbs. itérations
10^{-5}	air	0.00625	5330
10^{-5}	vide	0.00625	7174
10^{-5}	uniforme	0.00625	5915
10^{-5}	air	0.003125	5209
10^{-5}	vide	0.003125	5254
10^{-5}	uniforme	0.003125	6149

ρ_d	CI	$\Delta x = \Delta y$	Nbs. itérations
10^{-6}	air	0.00625	1522
10^{-6}	vide	0.00625	2996
1	uniforme	0.00625	3263
10^{-6}	air	0.003125	3102
10^{-6}	vide	0.003125	5757
10^{-6}	uniforme	0.003125	5508

ρ_d	CI	$\Delta x = \Delta y$	Nbs. itérations
10^{-7}	air	0.00625	1328
10^{-7}	vide	0.00625	3031
10^{-7}	uniforme	0.00625	2915
10^{-7}	air	0.003125	2354
10^{-7}	vide	0.003125	6186
10^{-7}	uniforme	0.003125	6219

TAB. 3.8. Effet du choix de la condition initiale sur le nombre total d'itérations requis pour obtenir l'état stationnaire.

$\Delta x = 0.003125$, nous avons utilisé la solution obtenue avec les conditions initiales gaz du maillage $\Delta x = 0.00625$ correspondant.

Nous présentons le tableau 3.9 avec le nombre d'itérations requis pour atteindre l'état stationnaire pour trois valeurs de ρ_d et trois interpolations différentes.

ρ_d	Interpolation	Nbs. itérations	CI gaz	CI vide	CI uniforme
10^{-5}	bicubique	2636	5209	5254	6149
10^{-5}	bilinéaire	2544	5209	5254	6149
10^{-5}	plus proche	5651	5209	5254	6149
10^{-6}	bicubique	2648	3102	5757	5508
10^{-6}	bilinéaire	2736	3102	5757	5508
10^{-6}	plus proche	2613	3102	5757	5508
10^{-7}	bicubique	3842	2354	6186	6219
10^{-7}	bilinéaire	3413	2354	6186	6219
10^{-7}	plus proche	3353	2354	6186	6219

TAB. 3.9. Effet du choix de l'interpolation sur le nombre d'itérations requis pour obtenir l'état stationnaire.

Nous remarquons une tendance à ce que l'interpolation bilinéaire et bicubique soient plus performantes que « plus proche » lorsque ρ_d est grand. Les performances des interpolations bilinéaires et bicubiques sont sensiblement les mêmes. Lorsque ρ_d est petit, la CI gaz reste tout de même préférable. Mais ce qui est intéressant, c'est que lorsque ρ_d est grand, là où la CI gaz ne faisait pas mieux que les autres, la solution stationnaire obtenue avec la CI interpolée bilinéaire ou bicubique est environ obtenue avec deux fois moins d'itérations. Cela est une très bonne amélioration, car il est possible de négliger le temps de calcul de la solution grossière. En effet, si $\Delta x = \Delta y$, alors le temps de calcul d'une solution est grosso modo inversement proportionnel au cube de Δx puisque si nous divisons par deux Δx et Δy , le nombre de cellules quadruple et Δt doit être à peu près divisé par deux pour respecter la condition CFL.

3.4.8. Comparaison des performances

Dans cette sous-section, nous comparons les performances en temps de calcul de la meilleure approche eulérienne exhibée avec l'approche lagrangienne. La

procédure à suivre afin de comparer les performances est similaire au cas unidimensionnel. Les erreurs $\frac{\|\beta_{ref}^{lag} - \beta^{lag}\|_1}{\|\beta_{ref}^{lag}\|_1}$ et $\frac{\|\beta_{ref}^{eul} - \beta^{eul}\|_1}{\|\beta_{ref}^{eul}\|_1}$ seront comparées seulement sur la partie gauche du domaine avant la marche ($x < 0.4$) puisque pour l'approche lagrangienne, il n'est pas évident de calculer l'erreur sur la partie droite du domaine. De plus, il est difficile de choisir une expérience eulérienne qui a la même erreur que l'expérience lagrangienne étant donné que la géométrie de ce problème implique qu'il n'est pas possible de choisir n'importe quelle grandeur de cellule eulérienne.

Nous comparons les performances de la méthode lagrangienne avec celle eulérienne dans l'expérience du tunnel à vent avec une marche dans le tableau 3.10. Ici, la solution numérique lagrangienne β_{ref}^{lag} est obtenue avec un $\Delta x = \Delta y = 0.003125$ et approximativement 40000 gouttelettes par cellule initialement à l'entrée. Pour ce qui est de la solution numérique eulérienne de référence β_{ref}^{eul} , elle est obtenue avec $\Delta x = \Delta y = 0.003125$ et un CFL=0.8. Toutes les simulations lagrangiennes du tableau 3.10 ont été obtenues avec 2500 gouttelettes par cellule initialement à l'entrée. La condition initiale interpolée a été obtenue de la solution stationnaire des gouttes du problème avec $\Delta x = \Delta y = 0.025$ et l'interpolation est bilinéaire. De plus, $\|\beta_{ref}^{lag \text{ ou eul}}\|_1$ est une approximation du volume sous la surface de $\beta_{ref}^{lag \text{ ou eul}}$ lorsque $x < 0.4$. Les temps de calcul sont des temps moyens pris sur cinq expériences.

3.4.8.1. Commentaires

Nous remarquons que plus ρ_d est petit plus l'approche eulérienne est performante. L'approche lagrangienne est légèrement plus rapide que l'approche eulérienne lorsque ρ_d est grand.

Il faut faire la remarque que plus ρ_d est grand, moins il est probable qu'une approche eulérienne mène à une solution juste pour cette expérience particulière. Rappelons que le schéma eulérien modélise une moyenne locale et que dans cette expérience, lorsque ρ_d est grand, il arrive que les gouttelettes rebondissent sur la marche et que par conséquent, la moyenne locale ne soit plus appropriée pour modéliser ce phénomène. Ici, $\rho_d = 10^{-5}$ est encore appropriée pour une solution

ρ_d	CI	$\frac{\ \beta_{ref}^{lag} - \beta_{lag}\ _1}{\ \beta_{ref}^{lag}\ _1}$	$\frac{\ \beta_{ref}^{eul} - \beta_{eul}\ _1}{\ \beta_{ref}^{eul}\ _1}$	$\ \beta_{ref}^{lag \text{ ou eul}}\ _1$	Temps de calcul	Nbs. d'itérations
10^{-7}	gaz		0.017	≈ 0.001229	4.85s	600
10^{-7}		0.02		≈ 0.0011185	14.54s	
10^{-6}	gaz		0.018	≈ 0.0011218	5.07s	744
10^{-6}		0.022		≈ 0.0011214	13.43s	
10^{-5}	gaz		0.023	≈ 0.0011061	29.86s	4349
10^{-5}	interpolée		0.023	≈ 0.0011061	14.83s	2162
10^{-5}		0.019		≈ 0.0011229	13.35s	

TAB. 3.10. Comparaison des performances de la méthode lagrangienne avec celle eulérienne pour l'expérience du tunnel à vent avec marche.

eulérienne, mais le régime eulérien commence à cet endroit à être moins valide. Avec ρ_d plus grand, l'approche eulérienne n'est plus préférable puisqu'elle ne capturera pas la vraie nature de la solution. Par contre, dans le cas où les schémas eulériens et lagrangiens coïncident, l'approche eulérienne est généralement plus performante que celle lagrangienne.

De plus, nous avons ici négligé l'effet des gouttes sur la dynamique du gaz. Si quelqu'un est intéressé à ne pas la négliger, alors l'approche eulérienne est sûrement la meilleure approche puisque le cas couplé et lagrangien serait probablement plusieurs dizaines et dizaines (si ce n'est pas des centaines) de fois moins performantes que l'approche eulérienne.

3.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté ou mis en référence les algorithmes numériques pour chacun des solveurs et les procédures à suivre pour résoudre les systèmes d'équations bi-dimensionnelles. Nous avons aussi introduit l'expérience du tunnel à vent gaz-gouttes avec une marche et les particulatités pour sa mise en oeuvre. Un critère d'arrêt pour le schéma eulérien a été présenté. La solution du tunnel à vent a été montrée et la solution eulérienne des

gouttes comparée à la solution lagrangienne. Nous avons discuté de quelques raisons probables de la présence d'oscillations dans les solutions de cette expérience. Par la suite, nous avons étudié l'ordre de convergence des schémas numériques et exhibé des raisons pour lesquelles nous obtenons l'ordre 1. L'effet des termes sources dans les équations du gaz a été analysé et nous avons conclu que lorsque la quantité β_e est petite, ces termes sources peuvent être négligés. L'avant-dernière partie de ce chapitre concerne l'optimisation du schéma eulérien sur l'expérience du tunnel à vent gaz-gouttes. Nous concluons que lorsque ρ_d est petit la condition initiale « gaz » est préférable et que lorsque ρ_d est grand, il est meilleur d'utiliser la condition initiale « interpolée ». De plus, lorsque nous avons comparé, dans le cas non couplé, notre meilleure approche eulérienne avec celle lagrangienne, nous avons conclu que l'approche eulérienne est généralement préférable lorsque le régime eulérien et lagrangien coïncident. Enfin, même sans étude approfondie, il est évident que dans le cas couplé, l'approche eulérienne serait vraiment, de loin, plus performante que l'approche lagrangienne.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté le modèle mathématique décrivant le comportement d'un fluide à deux phases. La première phase est un gaz et la deuxième des gouttelettes en suspension. De plus, deux formulations pour la phase des gouttes ont été exposées, celle lagrangienne et celle eulérienne. Ces différentes formulations ont été testées sur différentes stratégies de simulation.

Le but de ce mémoire était de répondre à quelques questions fondamentales. Nous rappelons dans les paragraphes suivants ces questions et exposons les réponses que nous avons trouvées.

Dans le cas uni-dimensionnel, nous avons présenté et testé les algorithmes numériques lagrangiens et eulériens sur l'expérience numérique du tube à choc dans le cas couplé. Dans ce cas couplé, il est très clair que les simulations eulériennes sont plus efficaces.

Dans le cas bi-dimensionnel, nous avons aussi présenté les algorithmes numériques lagrangiens et eulériens. Certaines difficultés dans la résolution des équations, telles que la présence des termes sources raides, nous ont obligés à utiliser un algorithme numérique différent que celui dans le cas uni-dimensionnel. Nous avons aussi présenté la solution numérique du tunnel à vent avec une marche pour un écoulement gaz-gouttes.

Nous avons abordé la question importante de savoir dans quelle mesure il est raisonnable de négliger l'effet des gouttelettes sur la dynamique du gaz. Nous concluons que lorsque la quantité de gouttelettes est très petite, il est alors raisonnable d'ignorer l'impact des gouttelettes sur le gaz.

Dans le cas eulérien, afin d'obtenir la solution stationnaire avec le moins d'itérations possible, le choix des conditions initiales dans la résolution des équations

aux dérivées partielles s'avère crucial. Si la solution stationnaire des gouttes est proche de celle du gaz, alors la condition initiale « gaz » (telle que décrite dans le chapitre 3) est très appropriée.

Lorsque la solution stationnaire des gouttes est loin de celle du gaz, une technique du style multi-grilles est présentée. Il s'agit de résoudre le problème sur une succession de maillages de plus en plus fins avec comme condition initiale la solution stationnaire sur le maillage précédent interpolée sur la nouvelle grille.

Nous avons comparé les performances de notre meilleure méthode eulérienne avec la méthode lagrangienne. Dans le cas découplé, si la solution des gouttes est proche de celle du gaz, alors la méthode eulérienne est plus efficace. Lorsque la solution des gouttes s'éloigne de celle du gaz, alors la performance de l'approche lagrangienne est comparable à celle de l'approche eulérienne. Toutefois, pour une approche couplée, l'approche eulérienne est vraiment sans aucun doute l'approche à privilégier.

Cette recherche laisse évidemment un certain nombre de questions non répondues. Rappelons que les solutions du tunnel à vent présentent des oscillations non physiques à mesure que le maillage est raffiné. Bien que nous n'ayons pas testé l'introduction de dissipation numérique artificielle, il semblerait que cette mesure soit probablement nécessaire pour conserver la convergence lors du raffinement. Une étude plus profonde de ces oscillations serait probablement très intéressante. De plus, une autre question d'intérêt serait de connaître les performances d'un code lagrangien bi-dimensionnel couplé avec le gaz et de comparer ses performances avec un code purement eulérien. Un autre point important serait de trouver des manières d'augmenter l'ordre de convergence des codes utilisés dans cette recherche puisque nous avons seulement obtenu un ordre un peu meilleur que 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. PELANTI AND R. J. LEVEQUE, *High-Resolution Finite Volume Methods for Dusty Gas Jets and Plumes*, J. Sci. Comput. **28**, 1335-1360, (2006).
- [2] T. SAITO, *Numerical Analysis of Dusty-Gas Flows*, J. Sci. Comput. **176**, 129-144, (2002).
- [3] M. ISHII, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase flow*, Eyrolles, Paris, 1975.
- [4] D. A. DREW AND S. L. PASSMAN, *Theory of Multicomponent Fluids*, Springer, 1998.
- [5] R. J. LEVEQUE, *The Dynamics of Pressureless Dust Clouds and Delta Waves*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **1**, 315-328 , (2004).
- [6] J. R. VALENTINE AND R. A. DECKER, *A Lagrangian-Eulerian Scheme for Flow Around an Airfoil in Rain*, Int. J. Multiphase Flow **21**, 639-648, (1995).
- [7] PROGRAMME CLAWPACK, (CONSERVATION LAW PACKAGE), <http://www.amath.washington.edu/claw/>, Janvier 2007.
- [8] A. E. EMERY, *An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Flows Problems*, J. Comput. Phys. **2**, 306-331, (1968).
- [9] P. WOODWARD AND P. COLELLA, *The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks*, J. Comput. Phys. **54**, 115-173, (1984).
- [10] WIKIPEDIA, <http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil>, Janvier 2007.
- [11] R J. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [12] D. A. DREW, *Mathematical Modeling of Two-Phase Flow*, Ann. Rev. Fluid Mech. **15**, 261-291, (1983).