

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Distribution asymptotique des valeurs propres du
laplacien sur le triangle équilatéral

par

Elisabeth Lapierre

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Orientation Mathématiques pures

février 2008



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Distribution asymptotique des valeurs propres du
laplacien sur le triangle équilatéral**

présenté par

Elisabeth Lapierre

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octavian Cornea

(président-rapporteur)

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Dmitry Jakobson

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Soit D le domaine du plan défini par

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, y \leq \sqrt{3}(1-x) \right\}$$

(triangle équilatéral de côté 1) considérons le problème de Dirichlet suivant

$$\Delta f + \lambda f = 0 \quad \text{et} \quad f|_{\partial M} = 0$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le spectre du laplacien est l'ensemble des valeurs de λ telles qu'il existe une fonction non identiquement nulle satisfaisant aux équations. Pour le triangle équilatéral, ces valeurs propres ont la forme $\frac{16\pi^2}{27}(m^2 + n^2 - mn)$ avec certaines conditions sur m et n . La fonction de compte $N(\lambda)$ donne le nombre de valeurs propres plus petites ou égales à λ en les comptant autant de fois que leur multiplicité. La loi de Weyl nous indique que

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Les valeurs propres peuvent être représentées par des points à coordonnées entières dans une région du plan. On peut ainsi appliquer un résultat de Huxley pour améliorer la borne supérieure du terme d'erreur.

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}})$$

Ce qui nous donne le résultat principal de ce mémoire.

Soit $n(\lambda)$ la fonction de compte qui retourne le nombre de valeurs propres distinctes plus petites ou égales à λ . On considère le quotient $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$ qui correspond à la multiplicité moyenne des valeurs propres. On sait que cette fonction tend vers l'infini quand λ tend vers l'infini. Par un théorème de Radziwill et appuyé par

des résultats numériques, on a que $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} \sim \frac{\pi}{3\sqrt{3}K_2} \sqrt{\log\left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right)}$ lorsque λ tend vers l'infini. La constante K_2 est l'équivalent de la constante de Landau-Ramanujan K , mais pour le problème du triangle équilatéral plutôt que pour le tore plat carré.

On obtient aussi un résultat pour le problème de Neumann suivant

$$\Delta f + \lambda f = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0.$$

En effet, pour la fonction de compte N construite de la même façon on obtient

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda + \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O\left(\lambda^{\frac{131}{416}} (\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}\right).$$

Mots-clés :

Spectre du laplacien, Triangle équilatéral, Loi de Weyl, Théorème de Huxley, Fonction de compte, Multiplicité moyenne.

SUMMARY

Let D be the equilateral triangle of side 1 in \mathbb{R}^2 defined by

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, y \leq \sqrt{3}(1-x) \right\}.$$

Consider the following Dirichlet problem on D

$$\Delta f + \lambda f = 0 \quad \text{and} \quad f|_{\partial M} = 0$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the Laplacian, $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue and $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is an eigenfunction. The spectrum of the Laplacian is the set of eigenvalues λ for which there exist a non-zero function satisfying the preceding equations. For the equilateral triangle, eigenvalues take the form of $\frac{16\pi^2}{27}(m^2 + n^2 - mn)$ with certain conditions on the integers m and n . The counting function $N(\lambda)$ gives the number of eigenvalues smaller or equal to λ taking into account the multiplicity. The Weyl's law says that

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Since eigenvalues are represented by points $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, we can apply a Huxley result to improve the upper bounds of the remainder term of the Weyl's law and get the main result of this master thesis which is

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}})$$

Let $n(\lambda)$ be the counting function giving the number of distinct eigenvalues smaller or equal to λ . We also consider the average multiplicity of eigenvalues that is the ratio $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$. The ratio $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$ goes to infinity when λ goes to infinity. We can apply a Radziwill theorem to prove that $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} \sim \frac{\pi}{3\sqrt{3}K_2} \sqrt{\log\left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right)}$ when λ goes

to infinity. The constant K_2 is equivalent to the Landau-Ramanujan constant K for the equilateral triangle rather than for the square flat torus.

We also get an upper bound for the remainder term of $N(\lambda)$ with Neumann conditions on ∂D *i.e.* for the problem

$$\Delta f + \lambda f = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0.$$

Indeed, we get again by applying results from Huxley that

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda + \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{131}{416}} (\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}).$$

Key-words :

Spectrum of the Laplacian, Equilateral triangle, Weyl's law, Huxley's theorem, Counting function, Average multiplicity.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	v
Liste des figures	x
Remerciements	xi
Introduction	1
Chapitre 1. Notions préliminaires	4
1.1. Spectre du laplacien et fonction de compte.....	4
1.1.1. Loi de Weyl.....	6
1.1.2. Homothétie.....	6
Chapitre 2. Calcul du spectre pour le tore plat et le carré	9
2.1. Spectre du carré.....	9
2.2. Spectre du tore plat.....	12
2.2.1. Réseaux euclidiens.....	12
2.2.2. Tore plat quelconque.....	15
2.2.2.1. Séries de Fourier.....	19
2.3. Tore plat carré.....	20
2.3.1. Spectre du carré déduit de celui du tore.....	21
2.3.2. Fonction de compte sur le tore.....	23
2.3.2.1. Problème du cercle de Gauss.....	24
2.3.2.2. Loi de Weyl.....	26

2.3.2.3. Théorème de Huxley	26
2.3.3. Autres résultats	27
Chapitre 3. Distribution asymptotique des valeurs propres du laplacien sur le triangle équilatéral	31
3.1. Valeurs propres du triangle équilatéral	31
3.2. Fonction de compte sur le triangle	35
3.3. Approximation de $N(\lambda)$	37
3.3.1. Approximation par l'aire	37
3.3.1.1. Calcul de l'aire	38
3.3.1.2. Approximation du nombre de points à soustraire	40
3.3.2. Loi de Weyl	41
3.3.3. Théorème de Huxley	42
3.3.3.1. Changement de variable	42
3.3.3.2. Application du théorème	43
3.3.4. Conjecture	45
3.4. Formule de Lamé	46
3.4.1. Formes quadratiques binaires	46
3.4.2. Forme de Lamé	47
3.5. Multiplicité moyenne	48
3.5.1. Constante de Landau-Ramanujan	49
3.5.2. Calcul des valeurs propres	51
3.5.3. Résultats numériques	53
3.6. Problème de Neumann	56
3.6.1. Fonction de compte	57
Conclusion	59
Bibliographie	60

Annexe A. Calcul des valeurs propres	A-i
A.1. Programme de calcul des valeurs propres	A-i
Annexe B. Calcul des fonctions de compte.....	B-i
B.1. Programme de calcul des fonctions de compte.....	B-i

LISTE DES FIGURES

2.1	Région $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$	13
2.2	Déformation du tore	20
2.3	Cercle de Gauss	25
3.1	Points à compter pour $N(\lambda)$ avec $m^2 + n^2 - mn \leq 39$	36
3.2	Ellipse	39
3.3	Points à compter pour $N(\lambda)$ avec $9u^2 + 3v^2 + 9uv \leq 39$	42
3.4	Portions de l'ellipse	52
3.5	$\frac{4\pi^2 \sqrt{\log \frac{\lambda}{4\pi^2}}}{\lambda} n(\lambda)$ versus K pour le tore plat carré	54
3.6	$\frac{16\pi^2 \sqrt{\log(\frac{9\lambda}{16\pi^2})}}{9\lambda} n(\lambda)$ versus K_2 pour le triangle équilatéral	55
3.7	Portion du graphique du haut de la figure 3.6	55
3.8	$\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$ et son asymptotique	56

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, en premier lieu, M. Iosif Polterovich, mon directeur de recherche, pour sa patience, sa disponibilité, ses conseils et son financement. Je le remercie aussi pour la transmission de ses connaissances que ce soit dans les cours, les séminaires ou les rencontres individuelles.

Je remercie ensuite Maksym Radziwill pour m'avoir fourni la formule explicite de l'équivalent de la constante de Landau-Ramanujan pour le cas du triangle équilatéral.

Je remercie Hugues Lapointe, Claude Gravel et Alexandre Girouard qui sont pour moi des références dans mon domaine de recherche et qui ont toujours bien voulu m'aider. Merci en particulier à Claude pour ses conseils de programmation et de traduction.

Je remercie également Daniel Fiorilli et Igor Wigman pour m'avoir initiée à la théorie des nombres afin de mieux comprendre certains aspects de ma recherche. Merci en particulier à Daniel pour ses astuces de calculs numériques.

Je remercie François Charette pour la traduction d'un article, car j'ai encore un peu de difficulté avec l'allemand et pour avoir su, depuis la première année de bac, répondre à mes questions avant même que je les pose.

Je remercie mes parents, Gilles et Madeleine, pour leur support moral et financier, ainsi que pour la révision grammaticale de mon mémoire. Je remercie aussi mes soeurs, Julie et Marie-Josée, pour m'avoir endurée et pour m'avoir divertie quand c'était nécessaire.

Je remercie Samuel Langevin pour m'avoir soutenu dans les quelques décisions difficiles à prendre et pour m'avoir encouragée à faire des études graduées.

Je remercie les étudiants gradués du département de mathématiques, entre autre, Sonia, Étienne, Isabelle et Éric, avec qui j'ai, à un moment ou un autre, dîné au salon du 6e étage. J'ai parfois envie de poursuivre mes études afin d'apprécier encore quelques fois ces moments d'intense divertissement.

Je remercie aussi les employés du département pour leur gentillesse et leur dévouement.

Je remercie mes amis du bac, en particulier Benoît, Antoine et Anouk, sans qui je n'aurais pu me rendre jusqu'à la maîtrise.

Je veux finalement remercier chaleureusement Jean-François Piché pour ses inimaginables encouragements, son support moral, et son affection.

INTRODUCTION

Le but principal de la géométrie spectrale est de rapprocher les propriétés géométriques d'une variété donnée avec le spectre d'un opérateur différentiel donné. Les moyens d'y arriver sont nombreux. On les classe en général dans deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses. Par exemple, on peut chercher à donner une formule explicite du spectre d'une variété particulière qui a des composantes géométriques particulières. Ce problème est du type direct. D'autre part, on peut supposer un spectre en particulier et tenter de déduire des propriétés géométriques sur la variété comme, par exemple, le volume. Ce problème est du type inverse.

La question bien connue de Mark Kac, «Peut-on entendre la forme d'un tambour?», posée en 1966, donne une très bonne idée de ce que peut être un problème inverse. En effet, les sons générés par le martellement d'une surface correspondent au spectre de l'opérateur de Helmholtz. Dans ce cas précis, la variété est la peau du tambour. On peut s'imaginer que cette peau est fixée à son bord (problème de Dirichlet) ou libre partout (problème de Neumann) ou à certains endroits seulement (problème mixte); bref, on peut imposer des conditions différentes au bord de la variété et cela peut avoir un impact sur la forme du spectre.

Ainsi, certains problèmes de physique comme l'étude de la corde vibrante ou d'une membrane vibrante sont des motivations de l'étude de la géométrie spectrale. Cette dernière se veut être une généralisation de ces problèmes dans des cas parfois purement théoriques.

En particulier, l'opérateur différentiel étudié dans un problème peut être le laplacien (Δ) connu aussi sous le nom d'opérateur de Laplace-Beltrami. Dans ce cas particulier, et dans d'autres cas, le spectre est discret, réel et positif. On peut

donc ordonner les valeurs propres et étudier leur comportement vers l'infini. On peut aussi s'attarder à la première valeur propre non nulle du spectre et tenter de trouver, par exemple, sa multiplicité.

La fonction de compte $N(\lambda)$, qui donne le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ , est une fonction fortement étudiée en géométrie spectrale. La loi de Weyl est un résultat bien connu qui met en relation la fonction de compte et le volume (ou l'aire, en 2 dimensions) de la variété en question. Précisément, pour deux variétés différentes de même dimension qui ont le même volume, la loi de Weyl indique que le comportement asymptotique de la fonction de compte, dans les deux cas, sera le même.

La loi de Weyl n'est qu'une approximation de la fonction de compte et c'est pourquoi elle est autant étudiée. On cherche, par tous les moyens possibles, de limiter le terme d'erreur. On veut entre autre trouver des bornes supérieures et inférieures à ce terme pour mieux le situer.

Dans ce mémoire, le but général, et ma contribution personnelle, est de donner une meilleure borne supérieure au terme d'erreur de la loi de Weyl pour le cas du spectre du laplacien sur le triangle équilatéral. Pour ce faire, je débiterai, au premier chapitre, par des notions générales qui se veulent préliminaires au reste du mémoire. Je ferai, dans le second chapitre, le calcul explicite du spectre pour certaines variétés. En particulier, le cas du tore plat sera analysé, car il a beaucoup de points en commun avec le cas du triangle. Ce chapitre sera constitué de faits déjà connus afin de les comparer à ceux du chapitre 3.

On verra, entre autre, que, dans le cas du tore plat carré, l'étude du spectre se traduit par la résolution du problème du cercle de Gauss. Pour le cas du triangle équilatéral, l'idée sera la même. Cependant, on devra utiliser une ellipse particulière plutôt qu'un cercle.

Dans le troisième et dernier chapitre, la plupart des résultats connus qui y sont énoncés concernant le spectre du triangle équilatéral sont extraits d'un article de Pinsky de 1980 (l'article clé du chapitre 3) intitulé «*The Eigenvalues of an*

Equilateral Triangle». Le résultat principal de ce mémoire est dû à l'application d'un théorème de Huxley.

Le spectre du triangle équilatéral étant donné explicitement, on peut étudier directement le comportement du spectre à partir de la forme des valeurs propres. L'avantage de ce processus est que les valeurs propres sont générées par des couples de nombres entiers tout comme dans le cas du tore plat. On peut ainsi se tourner vers le domaine de la théorie des nombres pour interpréter les valeurs propres et on a donc d'autres résultats à notre portée comme le théorème de Huxley.

La multiplicité moyenne des valeurs propres tend vers l'infini quand λ tend vers l'infini. On trouve, par un théorème de Radziwill, une meilleure approximation pour cette fonction. J'énoncerai aussi mes résultats numériques concernant ce comportement asymptotique.

Chapitre 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1. SPECTRE DU LAPLACIEN ET FONCTION DE COMPTE

Soit M une variété compacte différentiable de dimension n avec ou sans bord ∂M . On peut associer à notre variété M , la métrique g et on note (M, g) la variété riemannienne ainsi formée. (Les définitions sont disponibles dans [GHL])

La métrique peut s'écrire sous la forme

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

On note G la matrice des coefficients de g , G^{-1} , son inverse et \tilde{g} son déterminant

$$G = \{g_{ij}\} \quad G^{-1} = \{g^{ij}\} \quad \tilde{g} = \det(G)$$

Définition 1.1.1 (Laplacien). *Le laplacien, noté Δ , est une application qui, à une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ au moins 2 fois dérivable, associe une autre fonction $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$. On a donc, $\Delta : C^2(M) \rightarrow C^0(M)$ et on définit*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$$

Ce qui nous intéresse est d'écrire Δ en terme de g . Et on peut le faire en appliquant les définitions de la divergence et du gradient (voir [C]). On obtient la nouvelle définition

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \phi^j} \left(g^{jk} \sqrt{\tilde{g}} \frac{\partial}{\partial \phi^k} f \right) \quad (1.1.1)$$

Dans \mathbb{R}^2 ou lorsque $g = dx^2 + dy^2$ (ce sera le cas pour toutes les variétés étudiées dans ce mémoire), on a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Considérons, sur M , l'équation suivante :

$$\Delta f + \lambda f = 0 \tag{1.1.2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et f une fonction $M \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 (Valeur propre). *Une valeur propre du laplacien (Δ) sur M est une valeur λ telle qu'il existe une fonction f non identiquement nulle satisfaisant à l'équation (1.1.2). La fonction f est dite fonction propre associée à λ .*

Le spectre de Δ sur M ($spec(M)$) est, l'ensemble des valeurs propres avec répétition selon leur multiplicité. Le laplacien étant un opérateur auto-adjoint défini positif, ses valeurs propres sont, en fait, réelles et positives. (voir [Br] pour les détails et les preuves) De plus, si M est une variété compacte (ce qui sera le cas dans le reste du document), le spectre est alors discret et à multiplicité finie. Dans le cas où la variété est sans bord, on peut écrire les valeurs propres sous la forme d'une suite qui tend vers l'infini et qui débute à 0.

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \tag{1.1.3}$$

En effet, $\lambda = 0$ est toujours une valeur propre, car la fonction constante satisfait à l'équation (1.1.2). Si la variété M a un bord ∂M , on doit alors imposer des conditions supplémentaires sur ∂M . Par exemple, il sera question dans ce mémoire de la condition de Dirichlet qui est

$$f|_{\partial M} = 0 \tag{1.1.4}$$

et, dans ce cas, la suite (1.1.3) commence par λ_1 , car seule la fonction identiquement nulle satisfait à l'équation (1.1.2) pour $\lambda = 0$ et ce cas est exclus.

La condition de Neumann ci-dessous sera aussi considérée pour le cas du triangle équilatéral

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0$$

où n est le vecteur normal au bord.

Dans ce cas, la suite des valeurs propres débute à 0, car la fonction constante respecte les conditions.

Introduisons la fonction de compte $N(\lambda)$.

Définition 1.1.3 ($N(\lambda)$).

$$N(\lambda) := \text{card} \{ \lambda_i \in \text{spec}(M) \mid \lambda_i \leq \lambda \}$$

En mots, $N(\lambda)$ retourne le nombre de valeurs propres plus petites ou égales à une valeur réelle donnée λ en considérant la multiplicité.

1.1.1. Loi de Weyl

Les théorèmes suivants sont dus en grande partie à Weyl. En effet, il a démontré le premier en 1911 pour des domaines de \mathbb{R}^n et a conjecturé le second en 1913. Ce dernier a été démontré seulement en 1980 par Ivrii et Melrose (voir [I] et [M]). Ces théorèmes donnent, tous les deux, une approximation de la fonction de compte, mais le deuxième prend en considération le bord non vide de la variété (voir [SV]).

Théorème 1.1.1 (Loi de Weyl).

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n(\text{Vol}(M))\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$$

où ω_n est le volume n -dimensionnel de la boule unitaire dans \mathbb{R}^n et $\text{Vol}(M)$ est le volume n -dimensionnel de la variété.

Théorème 1.1.2 (Loi de Weyl à 2 termes principaux). *On a*

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n(\text{Vol}(M))\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \pm \frac{\omega_{n-1}(\text{Vol}(\partial M))\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$$

où ω_{n-1} est le volume $(n-1)$ -dimensionnel de la boule unitaire dans \mathbb{R}^{n-1} et $\text{Vol}(\partial M)$ est le volume $(n-1)$ -dimensionnel du bord de la variété. Pour la condition de Dirichlet, le signe devant le deuxième terme est $-$ et pour la condition de Neumann, le signe est $+$.

1.1.2. Homothétie

Pour une même variété M , on peut associer de différentes métriques. En particulier, on pourrait étudier la variété (M, r^2g) , où r est un réel, en comparaison

avec la variété (M, g) . Ce changement a pour effet d'agrandir les distances par un facteur r . En effet, soit une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, la longueur de cette courbe dépend de la métrique et est donnée par

$$l_g(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \gamma \right\|_{\gamma(t)} dt$$

Si on considère la métrique $h = r^2 g$, on a

$$\begin{aligned} h \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma, \frac{\partial}{\partial t} \gamma \right) &= r^2 g \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma, \frac{\partial}{\partial t} \gamma \right) \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial t} \gamma \right\|_h &= r \left\| \frac{\partial}{\partial t} \gamma \right\|_g \\ \Rightarrow l_h(\gamma) &= r l_g(\gamma) \end{aligned}$$

Ainsi, multiplier la métrique par un facteur r^2 correspond à faire une homothétie de rapport r sur M . Cela a une influence directe sur le spectre du laplacien. En effet, on a

$$h_{ij} = r^2 g_{ij} \quad h^{ij} = \frac{g^{ij}}{r^2} \quad H = r^2 G \quad \tilde{h} = r^{2n} \tilde{g}$$

qui sont, respectivement, les coefficients de h , la matrice des coefficients de h et le déterminant de la matrice des coefficients de h . Et le laplacien relatif à h est donné par l'équation (1.1.1).

$$\Delta_h f = \frac{1}{\sqrt{r^{2n} \tilde{g}}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \phi^j} \left(\frac{g^{jk}}{r^2} \sqrt{r^{2n} \tilde{g}} \frac{\partial}{\partial \phi^k} f \right) = \frac{1}{r^2} \Delta_g f$$

Si λ est une valeur propre relative à la métrique g et f une fonction propre associée, on a

$$\begin{aligned} \Delta_g f + \lambda f = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r^2} (\Delta_g f + \lambda f) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \Delta_g f + \frac{1}{r^2} \lambda f = 0 \\ &\Rightarrow \Delta_h f + \frac{\lambda}{r^2} f = 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{\lambda}{r^2}$ est une valeur propre relative à la métrique h . La fonction $f(u, v)$ est, cette fois-ci, une fonction propre relative à $\frac{\lambda}{r^2}$, cependant, les coordonnées (u, v) dans la fonction sont celles de la nouvelle variété.

Il est intéressant, aussi, de remarquer l'impact qu'à une homothétie sur le volume et l'impact qu'à le volume sur le spectre. D'abord, notons que le volume d'une variété est donné par

$$Vol_g(M) = \int_M \sqrt{\tilde{g}} dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n$$

Lorsqu'on produit une homothétie de rapport r , le nouveau déterminant de la matrice des coefficients est $\tilde{h} = r^{2n}\tilde{g}$. On a donc

$$\begin{aligned} Vol_h(M) &= \int_M \sqrt{\tilde{h}} dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n \\ &= \int_M \sqrt{r^{2n}\tilde{g}} dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n \\ &= r^n \int_M \sqrt{\tilde{g}} dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n \\ &= r^n Vol_g(M) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque le volume est multiplié par un facteur de r^n , les valeurs propres sont du même coup divisé par r^2 . On constate facilement que si chaque valeur propre est r^2 fois plus petite, il y en a r^2 fois plus environ dans un même intervalle. En effet, on peut vérifier cette évidence par la loi de Weyl. Rappelons que cette loi affirme que la fonction de compte est asymptotiquement proportionnelle au volume de la variété. Donc, si on multiplie le volume par r^2 , la fonction de compte est multipliée par r^2 .

Chapitre 2

CALCUL DU SPECTRE POUR LE TORE PLAT ET LE CARRÉ

2.1. SPECTRE DU CARRÉ

Pour le cas du carré de côté 1, $C = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, qui est un domaine de \mathbb{R}^n , la métrique est donnée par $g = dx^2 + dy^2$. Le laplacien est alors donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On doit imposer des conditions aux bords. La condition de Dirichlet (1.1.4) sera appliquée. Dans le cas présent, cette condition se traduit ainsi

$$f(x, 0) = f(x, 1) = f(0, y) = f(1, y) = 0 \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad (2.1.1)$$

Par la méthode de séparation des variables, supposons qu'il existe une fonction satisfaisant à l'équation (1.1.2) qui soit de la forme.

$$f(x, y) = u(x)v(y) \quad (2.1.2)$$

Il est à noter que, dans ce cas, on a aussi l'égalité pour les dérivées de la fonction. Par exemple, pour la première dérivée, on a

$$f'(x, y) = u'(x)v'(y)$$

Ainsi, l'équation (1.1.2) peut s'écrire

$$u''v + uv'' + \lambda uv = 0$$

Par hypothèse, la fonction f , donc aussi u et v , ne peut être identiquement nulle. Ainsi, il existe un domaine ouvert de \mathbb{R} dans lequel on peut écrire

$$\frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} + \lambda = 0 \quad (2.1.3)$$

Il s'en suit que le premier terme de l'équation (2.1.3) doit être constant, puisqu'en faisant varier la valeur de x et non celle de y les deux autres termes demeurent constants. Ainsi, soit k une constante, supposons que

$$\frac{u''}{u} = k$$

Alors on obtient le système

$$u'' - ku = 0 \quad (2.1.4)$$

$$v'' + (\lambda + k)v = 0 \quad (2.1.5)$$

On en déduit donc que les fonctions satisfaisant à l'équation (1.1.2) sont de la forme

$$f(x, y) = u(x)v(y) = (c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x})(c_3 e^{\sqrt{-\lambda-k}y} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda-k}y})$$

où k reste à déterminer. Les solutions sont, en fait, des combinaisons linéaires de fonction de ce type.

On a, par les équations (2.1.1)

$$u(x)v(0) = u(x)v(1) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'aux solutions non identiquement nulles, on peut en déduire ceci :

$$v(0) = v(1) = 0$$

De façon similaire, on a aussi

$$u(0) = u(1) = 0$$

Ces dernières équations nous permettent de trouver la forme des valeurs propres. En effet,

$$\left. \begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow c_2 = -c_1 \\ v(0) = 0 &\Rightarrow c_4 = -c_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned}
u(1) = 0 & \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{k}} - c_1 e^{-\sqrt{k}} = 0 \\
& e^{\sqrt{k}} = e^{-\sqrt{k}} \\
& e^{2\sqrt{k}} = 1 \\
2\sqrt{k} &= 2\pi i p & p \in \mathbb{Z} \\
k &= -\pi^2 p^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(1) = 0 & \Rightarrow c_3 e^{\sqrt{-\lambda-k}} - c_3 e^{-\sqrt{-\lambda-k}} = 0 \\
& e^{\sqrt{-\lambda-k}} = e^{-\sqrt{-\lambda-k}} \\
& e^{2\sqrt{-\lambda-k}} = 1 \\
2\sqrt{-\lambda-k} &= 2\pi i q & q \in \mathbb{Z} \\
-\lambda - k &= -\pi^2 q^2 \\
\lambda &= \pi^2 q^2 - k
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc de la forme

$$\lambda = \pi^2(p^2 + q^2) \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad (2.1.7)$$

Les résultats (2.1.6) et (2.1.7) nous permettent d'écrire plus précisément la forme de la fonction f . On a

$$f(x, y) = c_1(e^{\pi i p x} - e^{-\pi i p x})c_3(e^{\pi i q y} - e^{-\pi i q y}) \quad (2.1.8)$$

En développant et en notant $C_{p,q}$ le coefficient de $e^{\pi i(p x + q y)}$, on obtient

$$f(x, y) = C_{p,q} e^{\pi i(p x + q y)} + C_{-p,q} e^{\pi i(-p x + q y)} + C_{p,-q} e^{\pi i(p x - q y)} + C_{-p,-q} e^{\pi i(-p x - q y)}$$

avec

$$C_{p,q} = -C_{-p,q} = -C_{p,-q} = C_{-p,-q}$$

Généralisons en considérant les combinaisons linéaires de ces fonctions pour les couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\lambda = \pi^2(p^2 + q^2)$. On obtient les fonctions propres associées à λ :

$$f_\lambda = \sum_{p,q \in \mathbb{Z}, \pi^2(p^2 + q^2) = \lambda} C_{p,q} e^{\pi i(p x + q y)}$$

avec, encore une fois,

$$C_{p,q} = -C_{-p,q} = -C_{p,-q} = C_{-p,-q} \quad (2.1.9)$$

pour chaque paire (p, q) de la somme.

Remarquons que la valeur propre $\lambda = 0$ est ici exclue. En effet, cela impliquerait, par l'équation (2.1.7) que $p = q = 0$ et on aurait, par l'équation (2.1.9), $C_{p,q} = 0$ et, donc, la fonction propre associée serait identiquement nulle.

Il est aussi à noter que, les quatre couples (p, q) concernés dans l'équation (2.1.9) ne génèrent qu'une seule fonction propre et, donc, dans le calcul de la multiplicité de la valeur propre, ils ne comptent que pour 1. Puisque ces quatre couples sont liés, on peut vouloir simplifier l'écriture des fonctions propres en ne considérant que les valeurs entières positives de p et de q . En effet, on a

$$e^{i\theta x} - e^{-i\theta x} = 2i \sin(\theta x)$$

Ainsi, partant de l'équation (2.1.8), on obtient

$$f(x, y) = -4c_1 c_3 \sin(\pi p x) \sin(\pi q y)$$

En notant $D_{p,q}$ le coefficient du terme

$$\sin(\pi p x) \sin(\pi q y)$$

on obtient enfin cette deuxième forme pour les fonctions propres du laplacien sur le carré avec la condition de Dirichlet.

$$f_\lambda = \sum_{p,q \in \mathbb{N}^* \text{ t. q. } \pi^2(p^2+q^2)=\lambda} \sin(\pi p x) \sin(\pi q y)$$

2.2. SPECTRE DU TORE PLAT

2.2.1. Réseaux euclidiens

Définition 2.2.1 (Réseau euclidien). *Soit $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^p$ où $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs linéairement indépendants, alors on dit que $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^p$ est la base du réseau euclidien Γ défini par*

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^p m_i \vec{u}_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

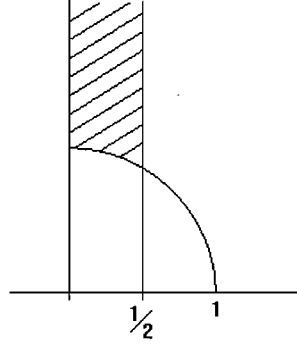


FIG. 2.1. Région $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$

Par exemple, \mathbb{Z}^2 est un réseau euclidien de \mathbb{R}^2 et a pour base $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Cependant, la base n'est pas unique. En effet, on a aussi

$$\mathbb{Z}^2 = \{m(2, 1) + n(3, 2) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Pour chaque réseau de dimension plus grande ou égale à 2, il existe une infinité de bases. On peut former les classes d'équivalence des réseaux qui sont isométriques et homothétiques et choisir un représentant naturel de la classe qui est, en fait, une des bases. Considérons le cas où $p = 2$. Soit A , l'ensemble

$$A = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Les vecteurs de A sont ceux qui se retrouvent dans la région achurée de la figure 2.1.

Construisons les réseaux

$$\Gamma_{r, \vec{v}} = \{m(r, 0) + nr \vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

alors on a le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 (Isométrie des réseaux). *Pour chaque réseau Γ de deux dimensions, il existe un unique nombre réel $r > 0$ et un unique vecteur $\vec{v} \in A$ tel que Γ est isométrique à $\Gamma_{r, \vec{v}}$*

DÉMONSTRATION. Soit Γ , un réseau, et soit $r = \min \{\|\vec{a}\| \mid \vec{a} \in \Gamma \setminus \vec{0}\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{u} = (r, 0) \in \Gamma$ (suite à une isométrie si

nécessaire). Dans $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{m\vec{u} \mid m \in \mathbb{Z}\}$, prenons $\vec{v} = (x, y)$ de norme minimale (nécessairement non-nul car $\vec{0} \in \{m\vec{u} \mid m \in \mathbb{Z}\}$). Puisque $\vec{v} - m\vec{u} \in \tilde{\Gamma}$ pour toutes valeurs de $m \in \mathbb{Z}$ et que \vec{v} est minimal, on doit avoir

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &\leq \|\vec{v} - m\vec{u}\| && \forall m \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \|\vec{v}\| &\leq \|\vec{v} - \vec{u}\| && \text{et} && \|\vec{v}\| \leq \|\vec{v} + \vec{u}\| \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &\leq x^2 - 2rx + r^2 + y^2 && \text{et} && x^2 + y^2 \leq x^2 + 2rx + r^2 + y^2 \\ \Rightarrow &&& \frac{-r}{2} \leq x \leq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que x et y sont positifs (suit à une isométrie et en changeant \vec{u} pour $-\vec{u}$ si nécessaire). Ainsi, on a $0 \leq x \leq \frac{r}{2}$ et, puisque \vec{u} est minimal dans Γ , on a

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &\geq \|\vec{u}\| \\ x^2 + y^2 &\geq r \end{aligned}$$

Vérifions que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} génèrent le réseau Γ . Si ce n'était pas le cas, il y aurait un vecteur $\vec{w} \in \Gamma$ tel que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{avec } a \notin \mathbb{Z} \text{ ou } b \notin \mathbb{Z}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $|a|, |b| \leq \frac{1}{2}$ (en soustrayant des combinaisons linéaires entières de \vec{u} et \vec{v} si nécessaire). Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 &= \|a\vec{u} + b\vec{v}\|^2 \\ &= a^2 \|\vec{u}\|^2 + 2ab\vec{u} \cdot \vec{v} + b^2 \|\vec{v}\|^2 \\ &< (a^2 + 2ab + b^2) \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

On a une contradiction avec l'hypothèse de minimalité de \vec{v} . Ainsi, Γ est généré par \vec{u} et \vec{v} . Si on change \vec{v} pour $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$, on obtient finalement que Γ est isométrique à $\Gamma_{r, \vec{v}}$

□

En considérant aussi les homothéties, on peut choisir, comme représentant d'une classe, le réseau $\Gamma_{1, \vec{v}}$.

La définition suivante sera aussi utile dans la suite du document.

Définition 2.2.2 (Réseau dual). *Soit Γ un réseau, alors son réseau dual Γ^* est défini par*

$$\Gamma^* := \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z}, \forall \vec{u} \in \Gamma \}$$

Il suffit, en fait, d'écrire

$$\Gamma^* = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u}_i \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2 \dots p \}$$

où les vecteurs \vec{u}_i forment la base de Γ . En effet, si $\vec{v} \in \Gamma^*$, on a

$$\begin{aligned} & \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z} & \forall \vec{u} \in \Gamma \\ \Rightarrow & \vec{u}_i \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z} & i = 1, 2 \dots p \end{aligned}$$

donc $\vec{v} \in \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u}_i \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2 \dots p \}$.

D'autre part, si \vec{v} est tel que

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2 \dots p$$

alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(\sum_{i=1}^p m_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{v} \\ &= \sum_{i=1}^p m_i (\vec{u}_i \cdot \vec{v}) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi, on prouve l'égalité.

2.2.2. Tore plat quelconque

Considérons le tore plat $T = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ où Γ est un réseau de deux dimensions. On définit ce quotient par

$$T = \mathbb{R}^2 / \mathcal{R}$$

où \mathcal{R} est une relation d'équivalence définie par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \Gamma$$

Les fonctions définies sur T correspondent, en fait, aux fonctions Γ -périodiques définies sur \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire, les fonctions du plan avec la condition de périodicité suivante :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{y}), \quad \forall \vec{y} \in \Gamma, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Les tores plats peuvent être classés en considérant les réseaux par lesquels \mathbb{R}^2 est quotienté. Autrement dit, \mathbb{R}^2/Γ est équivalent à \mathbb{R}^2/Γ' si et seulement si Γ est équivalent à Γ' . Pour le calcul du spectre du tore quelconque, on peut se restreindre aux cas où les vecteurs générateurs du réseau sont

$$\vec{u} = (1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} \in \left\{ (a, b) \mid a^2 + b^2 \leq 1, 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (2.2.1)$$

(voir section 2.2.1). Les autres cas sont isométriques ou homothétiques à un de ces cas et le spectre est alors respectivement inchangé ou divisé par le carré du rapport d'homothétie (voir section 1.1.2 du chapitre 1). Ainsi, pour a et b fixés, on peut écrire la condition de périodicité de cette façon :

$$f(x, y) = f(x + m + na, y + nb), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (2.2.2)$$

Notons que les tores plats ont pour métrique la même que pour le carré et pour \mathbb{R}^2 et, ainsi, le laplacien est encore de la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Par la méthode de séparation des variables, on obtient, tout comme pour le carré, des solutions de la forme

$$f(x, y) = u(x)v(y) = (c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x})(c_3 e^{\sqrt{-\lambda-k}y} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda-k}y})$$

(voir la section 2.1)

Puisque que v ne peut être identiquement nul, on a, pour $n = 0$,

$$u(x)v(y) = u(x + m)v(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.2.3)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} u(x) = u(x + m) \\ u'(x) = u'(x + m) \end{array} \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.2.4)$$

Sachant que la fonction u a la forme

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

et, sachant que les équations (2.2.4) sont vraies pour, en particulier, $x = 0$ et $m = 1$, on a

$$u(0) = u(1) \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{k}} + c_2 e^{-\sqrt{k}} \quad (2.2.5)$$

$$u'(0) = u'(1) \quad \Rightarrow \quad c_1 - c_2 = c_1 e^{\sqrt{k}} - c_2 e^{-\sqrt{k}} \quad (2.2.6)$$

En additionnant les équations (2.2.5) et (2.2.6), on a

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 2c_1 e^{\sqrt{k}} \\ \Rightarrow e^{\sqrt{k}} &= 1 \\ \Rightarrow \sqrt{k} &= 2\pi ip, \quad p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (2.1.4) pour les valeurs de k de la forme

$$k = -4\pi^2 p^2 \quad p \in \mathbb{Z}$$

sont des combinaisons linéaires de fonction de la forme

$$u(x) = e^{2\pi ipx}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2.2.7)$$

Pour $m = x = y = 0$ et $n = 1$, l'équation (2.2.2) nous donne

$$f(0, 0) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= C_1 e^{\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} + C_2 e^{\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \dots \\ &\dots + C_3 e^{-\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} + C_4 e^{-\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, on a posé

$$C_1 = c_1 c_3 \quad C_2 = c_1 c_4 \quad C_3 = c_2 c_3 \quad C_4 = c_2 c_4$$

On utilisera le fait que les dérivées partielles de f satisfont aussi à la condition de périodicité.

$$f_x(0, 0) = f_x(a, b) \quad \text{et} \quad f_y(0, 0) = f_y(a, b)$$

On en déduit les deux équations

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - C_3 - C_4 &= C_1 e^{\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} + C_2 e^{\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \dots \\ &\dots - C_3 e^{-\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} - C_4 e^{-\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} C_1 - C_2 + C_3 - C_4 &= C_1 e^{\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} - C_2 e^{\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \dots \\ &\dots + C_3 e^{-\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} - C_4 e^{-\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

De plus, $f_{xy}(0, 0) = f_{xy}(a, b)$ nous donne

$$\begin{aligned} C_1 - C_2 - C_3 + C_4 &= C_1 e^{\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} - C_2 e^{\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \dots \\ &\dots - C_3 e^{-\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}} + C_4 e^{-\sqrt{ka} - \sqrt{-\lambda - kb}} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

En sommant les équations (2.2.8) à (2.2.11), on a

$$4C_1 = 4C_1 e^{\sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sqrt{ka} + \sqrt{-\lambda - kb} = 2\pi i q, & q \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad & 2\pi i p a + \sqrt{-\lambda - kb} = 2\pi i q \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{-\lambda - kb} = 2\pi i \frac{q - pa}{b} \end{aligned}$$

Et, finalement, les solutions pour le tore plat quelconque sont les combinaisons linéaires des fonctions de la forme

$$f_{ab}(x, y) = e^{2\pi i (px + (\frac{q - pa}{b})y)}$$

avec

$$\lambda = \frac{4\pi^2 (p^2 (b^2 - a^2) + q^2)}{b^2} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Notons que, cette fois, $\lambda = 0$ est une valeur propre.

Remarque 2.2.1. Les coefficients de x et de y à l'intérieur de la parenthèse dans la fonction f_{ab} forment un vecteur du réseau dual Γ^* . Une façon simple d'écrire

la forme des fonctions et valeurs propres est donc, pour un tore quelconque

$$\left. \begin{aligned} f_{\Gamma}(x, y) &= \sum_{\alpha, \beta, q. 4\pi^2(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda} C_{\alpha\beta} e^{2\pi i(\alpha x + \beta y)} \\ \lambda &= 4\pi^2(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned} \right\} (\alpha, \beta) \in \Gamma^* \quad (2.2.12)$$

2.2.2.1. Séries de Fourier

Plutôt que de solutionner l'équation aux dérivées partielles avant d'appliquer les conditions de périodicité, on aurait pu faire le contraire. En effet, on peut sélectionner, parmi les fonctions périodiques, celles qui satisfont à l'équation (1.1.2). D'abord, il faut déterminer quelles fonctions sont Γ -périodiques. Pour ce faire, on utilise les séries de Fourier. On sait qu'une fonction f \mathbb{Z}^2 -périodique peut s'exprimer comme ceci

$$f(x, y) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} C_{pq} e^{2\pi i(px + qy)}$$

En calculant le laplacien d'un des termes de la somme, on obtient

$$\Delta e^{2\pi i(px + qy)} = 4\pi^2(p^2 + q^2) e^{2\pi i(px + qy)}$$

Ainsi, chaque terme de la somme satisfait à l'équation (1.1.2) pour une valeur propre qui dépend de p et de q , $\lambda = 4\pi^2(p^2 + q^2)$. On a, évidemment, $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$. Donc, pour que f soit aussi une solution, il faut que chaque terme de la somme donne la même valeur propre, c'est-à-dire qu'on doit faire la somme sur les valeurs de $p, q \in \mathbb{Z}$ telles que $4\pi^2(p^2 + q^2) = \lambda$.

L'idée est ensuite de construire les fonctions Γ -périodiques à partir des fonctions \mathbb{Z}^2 -périodiques. On peut définir

$$\tilde{f}(x, y)_{\vec{u}, \vec{v}} := f(x, y)$$

où f est une fonction \mathbb{Z}^2 -périodique.

Autrement dit, on déforme le carré pour arriver au parallélogramme et les coordonnées en base (\vec{i}, \vec{j}) deviennent les coordonnées dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

Si $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = (a, b)$, on a donc

$$\tilde{f}(x + ay, by) := f(x, y)$$

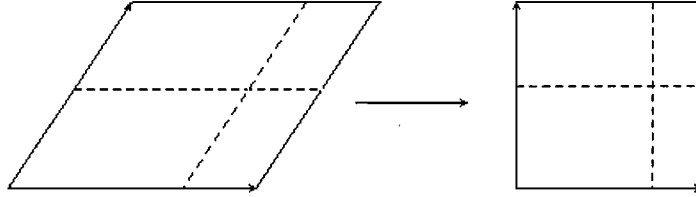


FIG. 2.2. Déformation du tore

On peut réécrire la fonction Γ -périodique \tilde{f} en fonction de x et y . Ce qui donne

$$\tilde{f}(x, y) := f\left(x - \frac{ay}{b}, \frac{y}{b}\right) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} C_{pq} e^{2\pi\left(p\left(x - \frac{ay}{b}\right) + q\left(\frac{y}{b}\right)\right)}$$

On remarque ensuite que chaque terme de la somme satisfait à l'équation (1.1.2) pour une valeur propre dépendant de p et q , $\lambda = \frac{4\pi^2(p^2(b^2 - a^2) + q^2)}{b^2}$. Ainsi, pour que \tilde{f} soit une fonction propre, il faut faire la somme sur des termes qui donnent la même valeur propre. Finalement, on arrive au même résultat que précédemment.

2.3. TORE PLAT CARRÉ

Voyons en détail le spectre du laplacien sur une variété en particulier. Dans le cas du tore plat carré de côté 1, on a $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ et la condition de périodicité sur f revient à

$$f(x, y) = f(x + m, x + n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (2.3.1)$$

Le réseau dual de \mathbb{Z}^2 est l'ensemble des couples (α, β) qui satisfont à

$$\left. \begin{array}{l} (1, 0) \cdot (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \\ (0, 1) \cdot (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{Z} \\ \beta \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Donc

$$(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2$$

En utilisant l'équation (2.2.12), on en déduit que, pour les valeurs de λ de la forme

$$\lambda_{p,q} = 4\pi^2(p^2 + q^2) \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad (2.3.2)$$

les solutions de l'équation (1.1.2) sont de la forme

$$f(x, y) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z} : 4\pi^2(p^2 + q^2) = \lambda_{p, q}} C_{pq} e^{2\pi i(px + qy)} \quad (2.3.3)$$

2.3.1. Spectre du carré déduit de celui du tore

Notons que le spectre du carré avec la condition de Dirichlet peut être calculé par les méthodes utilisées à la section 2.1, mais il est intéressant de voir qu'il peut aussi être déduit du spectre du tore carré.

Une particularité importante des fonctions propres du carré C avec la condition de Dirichlet est la suivante. Elles peuvent être étendues à des fonctions propres sur le tore $T_2 = \mathbb{R}^2/2\mathbb{Z}^2$. En effet, pour la fonction propre du carré $f(x, y)$ définissons la fonction $2\mathbb{Z}^2$ -périodique \tilde{f} . Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\tilde{f}(x + 2m, y + 2n) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ -f(2 - x, y) & \text{si } x \in]1, 2[, y \in [0, 1] \\ -f(x, 2 - y) & \text{si } x \in [0, 1], y \in]1, 2[\\ f(2 - x, 2 - y) & \text{si } x \in]1, 2[, y \in]1, 2[\end{cases}$$

Une autre façon de voir la fonction \tilde{f} est la suivante. Définissons 2 symétries axiales ; une par rapport à l'axe $y = 1$ et l'autre par rapport à l'axe $x = 1$.

$$R_1 : (x, y) \mapsto (2 - x, y)$$

$$R_2 : (x, y) \mapsto (x, 2 - y)$$

Les fonctions \tilde{f} construites comme précédemment satisfont aux conditions suivantes :

$$\tilde{f} \circ R_i = -\tilde{f}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3.4)$$

Ces fonctions sont des fonctions propres sur le tore T_2 , car elles sont non seulement définies sur T_2 , mais elles satisfont l'équation :

$$\Delta \tilde{f} + \lambda \tilde{f} = 0 \quad (2.3.5)$$

En revanche, les fonctions propres du tore T_2 qui satisfont aux conditions (2.3.4) peuvent être restreintes à une fonction propre sur le carré C . En effet, elles satisfont à l'équation (2.3.5) et sont nulles au bord de C . On a, par exemple, $f(0, y) = f(2, y)$ par périodicité et $f(0, y) = -f(2, y)$ par symétrie. Donc $f(0, y) = f(2, y) = 0$ et on a de même $f(x, 0) = f(x, 2) = 0$. La forme des fonctions propres du tore T_2 est donnée par l'équation (2.2.12) avec α et β tels que

$$2\alpha \in \mathbb{Z} \qquad 2\beta \in \mathbb{Z}$$

On obtient donc que

$$\alpha = \frac{p}{2} \text{ et } \beta = \frac{q}{2} \text{ où } p, q \in \mathbb{Z}$$

Remarque 2.3.1. *On peut voir le tore plat carré de côté 2 comme une homothétie du tore plat carré de côté 1. Ainsi, en se référant à la section 1.1.2 et aux équations (2.3.2) et (2.3.3), on obtient les valeurs propres $\lambda = \pi^2(a^2 + b^2)$ et les fonctions propres de la forme*

$$f(u, v) = \sum_{a, b \in \mathbb{Z} \text{ t. q. } 4\pi^2(a^2 + b^2) = \lambda_{a, b}} C_{pq} e^{2\pi i(au + bv)} \quad (2.3.6)$$

où (u, v) sont les nouvelles coordonnées.

Puisque c'est une homothétie de rapport $r = 2$, c'est comme si les vecteurs de la nouvelle base valaient 2 fois plus que dans l'ancienne. Autrement dit, au lieu d'exprimer les coordonnées pour \vec{i} et \vec{j} on les donne pour $2\vec{i}$ et $2\vec{j}$. Pour se ramener aux anciennes coordonnées, on écrit donc

$$u(2\vec{i}) + v(2\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \Rightarrow \quad (u, v) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

On a alors les fonctions propres de la forme

$$f(x, y) = \sum_{a, b \in \mathbb{Z} \text{ t. q. } \pi^2(a^2 + b^2) = \lambda_{a, b}} C_{pq} e^{\pi i(ax + by)} \quad (2.3.7)$$

avec le même système de coordonnées que pour le tore de côté 1.

Ainsi, les fonctions propres du carré sont des combinaisons linéaires du type

$$f(x, y) = \sum C_{p, q} e^{\pi i(px + qy)}$$

La somme doit être faite suivant les valeurs de p et q tel que $\pi^2(p^2 + q^2) = \lambda$ (qui est la valeur propre associée à la fonction) et avec les conditions sur les coefficients de façon à respecter les propriétés (2.3.4). Pour la symétrie R_1 , on a par exemple,

$$\begin{aligned} \sum C_{p,q} e^{\pi i(px+qy)} &= - \sum C_{p,q} e^{\pi i(p(2-x)+qy)} \\ &= \sum -C_{p,q} e^{2\pi ip} e^{\pi i(-px+qy)} \\ &= \sum -C_{p,q} e^{\pi i(-px+qy)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$C_{-p,q} = -C_{p,q}$$

et on peut trouver de façon similaire les autres conditions sur les coefficients décrites à la section précédente (voir l'équation (2.1.9)). On a finalement trouvé les mêmes fonctions et valeurs propres que par la première méthode. Notons que la façon proposée dans la présente section sera adaptée dans le chapitre 3 pour trouver le spectre du triangle équilatéral.

2.3.2. Fonction de compte sur le tore

On a vu que les valeurs propres du laplacien sur le tore plat carré sont de la forme (2.3.2) :

$$\lambda_{p,q} = 4\pi^2(p^2 + q^2) \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

De plus, pour chaque couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $\lambda_{p,q}$ est une valeur propre. Si (a, b) et (c, d) sont 2 couples différents, mais tels que $\lambda_{a,b} = \lambda_{c,d}$, alors les fonctions propres associées seront indépendantes linéairement. Et, dans ce cas, la multiplicité d'une valeur propre λ est donnée par le nombre de couples (p, q) différents tels que $\lambda_{p,q} = \lambda$. Cette particularité ne s'applique pas, par exemple au spectre du carré avec la condition de Dirichlet étudié dans la section 2.1 du chapitre 2. En effet, pour les couples (p, q) , $(-p, q)$, $(p, -q)$ et $(-p, -q)$, une seule fonction propre est générée, car elle doit nécessairement être la combinaison linéaire de fonction du type

$$e^{\pi i(px+qy)}$$

avec des conditions fixes sur les coefficients. Chaque terme de cette combinaison ne peut être pris à part comme fonction propre, car la condition de Dirichlet ne serait pas respectée.

Revenons au spectre du tore. On peut s'intéresser à la fonction de compte $N(\lambda)$ qui est définie au chapitre 1. (voir Définition 1.1.3).

D'abord, on peut voir $N(\lambda)$ comme une fonction qui compte les points à coordonnées entières à l'intérieur ou sur le cercle de rayon $\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}$. En effet, chaque couple (p, q) peut être représenté par un point entier dans le plan qui se trouve sur le cercle, centré à l'origine, de rayon

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{\lambda_{p,q}}{4\pi^2}}$$

Notons que tous les points (p, q) tels que $\lambda_{p,q} = \lambda$ se retrouvent sur le même cercle de rayon $\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}$. Pour connaître la multiplicité d'une valeur propre, il suffit donc d'avoir le nombre de points à coordonnées entières sur ce cercle. Pour connaître $N(\lambda)$, il suffit finalement d'avoir le nombre de points à coordonnées entières sur les cercles de rayon $\sqrt{\frac{\mu}{4\pi^2}}$ pour chaque $\mu \leq \lambda$, c'est-à-dire les cercles de rayon $r \leq \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}$. Et cela revient à compter les points entiers de toute la région intérieure du cercle de rayon $\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}$. Cela nous mène au problème bien connu du cercle de Gauss.

2.3.2.1. Problème du cercle de Gauss

Le problème du cercle de Gauss consiste à trouver le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur ou sur le cercle d'un rayon donné. On veut trouver une fonction \tilde{N} qui dépend du rayon ρ et qui retourne le nombre de ces points.

D'abord, à chaque point, on associe un carré unité centré en ce point. L'aire de toute la surface qu'occupent ces carrés unité est alors égale au nombre de points à compter. Ainsi, le problème se résume à calculer l'aire d'une surface. Cette aire est très proche de l'aire du cercle de rayon ρ (voir Figure 2.3). Certains carrés débordent du cercle et certaines portions du cercle ne sont pas couvertes par un de ces carrés.

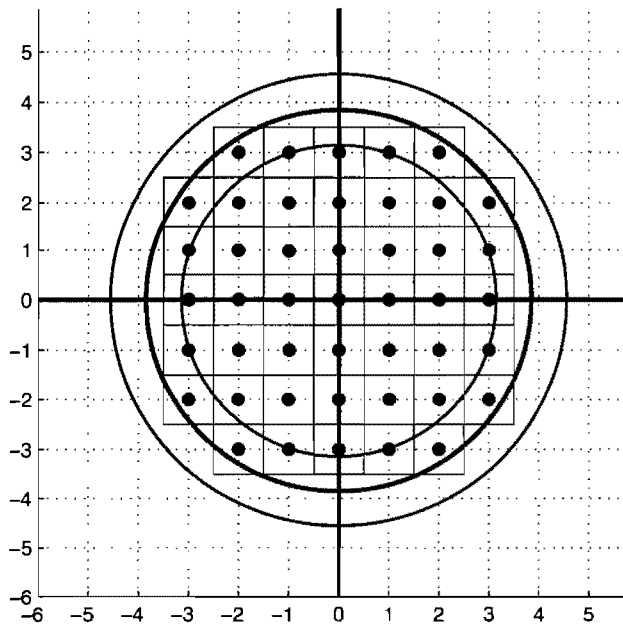


FIG. 2.3. Cercle de Gauss

On ne sait pas trop quelle est la différence entre ces deux aires, mais on sait que l'ensemble des carrés est contenu à l'intérieur du cercle de rayon $\rho + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et contient totalement l'intérieur du cercle de rayon $\rho - \frac{\sqrt{2}}{2}$. En effet, chaque point est, au plus, à une distance ρ du centre et les bords de chaque carré sont, au plus, à une distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ du point auquel il est associé. De cette façon, on obtient l'approximation suivante :

$$\pi \left(\rho - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq \tilde{N}(\rho) \leq \pi \left(\rho + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$\pi \rho^2 - \sqrt{2}\pi\rho - \frac{\pi}{2} \leq \tilde{N}(\rho) \leq \pi \rho^2 + \sqrt{2}\pi\rho + \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$|\tilde{N}(\rho) - \pi\rho^2| \leq \sqrt{2}\pi\rho + \frac{\pi}{2}$$

Ainsi on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{N}(\rho) - \pi\rho^2}{\rho} \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2}\pi + \frac{\pi}{2\rho} \right) = \sqrt{2}\pi$$

On peut donc écrire l'approximation suivante

$$\tilde{N}(\rho) - \pi\rho^2 = O(\rho)$$

Dans le cas du spectre du tore plat, l'aire à trouver est celle du cercle de rayon $\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}$. Et on a

$$N(\lambda) = \tilde{N}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}\right) \quad (2.3.8)$$

Ainsi, on peut donner une approximation de la fonction de compte par

$$N(\lambda) = \pi\frac{\lambda}{4\pi^2} + O\left(\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}\right)$$

ou plus simplement

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

2.3.2.2. Loi de Weyl

On peut déjà améliorer notre approximation en appliquant la loi de Weyl à un terme principal (voir Théorème 1.1.1). En effet, elle s'applique pour obtenir notre deuxième approximation. Puisque l'aire du tore plat carré de côté 1 est de 1, on a

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + o(\sqrt{\lambda})$$

2.3.2.3. Théorème de Huxley

La meilleure borne supérieure à ce jour, c'est-à-dire la plus petite, est donnée par le théorème de Huxley.

Théorème 2.3.1 (Huxley). *Soit Ω un domaine du plan euclidien avec une aire α , bordé par une courbe simple et fermée ϕ d'un nombre fini de morceaux ϕ_i qui sont continûment différentiables trois fois dans le sens suivant. Le rayon de courbure ρ est continu et non nul sur chaque pièce ϕ_i et ρ est continûment différentiable par rapport à l'angle tangent ψ . Soit E une expansion linéaire de Ω par un facteur $M \leq 2$ suivi d'un mouvement rigide. Alors le nombre de points à coordonnées entières sur E est*

$$\alpha M^2 + O\left(IM^{\frac{131}{208}}(\log M)^{\frac{18627}{8320}}\right)$$

où I est un nombre dépendant de la courbe ϕ , mais pas de M , ni de la position ou l'orientation de E .

En effet, ce théorème s'applique directement au problème du cercle de Gauss. Le domaine Ω de l'énoncé du théorème sera, pour notre présent problème, le disque de rayon 1, la courbe fermé ϕ sera le cercle de rayon 1 et le facteur d'expansion M sera ρ . La courbe a un seul morceau (celui-ci est lisse) et donc satisfait aux conditions du théorème. Notons que l'aire α du disque est de π . On obtient ainsi l'approximation

$$\tilde{N}(\rho) = \pi\rho^2 + O\left(\rho^{\frac{131}{208}} (\log \rho)^{\frac{18627}{8320}}\right)$$

Cela nous donne une estimation du nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ . On peut, par l'équation (2.3.8), trouver l'approximation du nombre de valeurs propres du laplacien sur le tore plat carré qui sont plus petites ou égales à λ . En effet, on trouve

$$N(\lambda) = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}} + O\left(\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}^{\frac{131}{208}} \left(\log \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2}}\right)^{\frac{18627}{8320}}\right)$$

En simplifiant et en utilisant les propriétés se rattachant à O , on arrive finalement à

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O\left(\lambda^{\frac{131}{416}} (\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}\right)$$

2.3.3. Autres résultats

L'étude du spectre du laplacien pour le tore plat carré peut se ramener à l'étude d'une équation diophantienne bien connue : $n = a^2 + b^2$ où a , b et n sont des entiers. Pour se ramener au spectre du tore, il suffit de poser $\lambda = 4\pi^2 n$. On connaît de nombreux résultats sur cette équation et chacun d'eux donne une information sur le spectre du tore.

La première remarque à faire est sans doute la suivante. Le théorème suivant détermine si une valeur donnée $\lambda = 4\pi^2 n$ est ou non une valeur propre. Notons que, dans ce qui suit, a et b sont des entiers et n et k sont des nombres naturels.

Théorème 2.3.2. *Un nombre n peut s'écrire sous la forme $a^2 + b^2$ si et seulement si chaque nombre premier de la forme $4k + 3$ dans la factorisation unique de n a un exposant pair.*

J'exposerai, ici, la preuve de Sierpinsky (voir [S]). Pour ce faire, voyons d'abord le théorème suivant.

Théorème 2.3.3 (Fermat). *Chaque nombre premier p de la forme $4k + 1$ peut s'écrire comme la somme de 2 carrés.*

La démonstration ne sera pas faite ici, mais elle se trouve à la page 205 de la référence [S].

Notons que nous aurons aussi besoin du lemme suivant et de sa démonstration.

Lemme 2.3.1. *Si un nombre premier impair p divise un nombre $n = a^2 + b^2$ tel que $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors p est de la forme $4k + 1$.*

DÉMONSTRATION. (Lemme 2.3.1) Soit a et b tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et p un nombre premier impair tel que $p|a^2 + b^2$, alors on a

$$a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$$

En mettant chaque terme à la puissance $\frac{p-1}{2}$, on obtient

$$a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} b^{p-1} \pmod{p} \tag{2.3.9}$$

D'autre part, puisque a et b sont relativement premier, ni l'un ni l'autre n'est un multiple de p . En effet, si $p|a$ alors on a

$$\begin{array}{ll} p|a^2 \Rightarrow p|b^2 & \text{car } p|a^2 + b^2 \\ \Rightarrow p|b & \text{car } p \text{ est premier} \end{array}$$

ce qui contredit l'hypothèse $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Ainsi, par le petit théorème de Fermat, on a

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod{p}$$

donc, par l'équation (2.3.9), on trouve

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p-1}{2} \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad p-1 \text{ est un multiple de } 4$$

et finalement,

$$p = 4k + 1.$$

□

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour démontrer le théorème 2.3.2.

DÉMONSTRATION. (Théorème 2.3.2) Dans le premier sens, supposons qu'on peut écrire

$$n = a^2 + b^2. \quad (2.3.10)$$

Soit p un diviseur premier de n de la forme $4k + 3$ et soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. Ainsi, on a

$$\left. \begin{array}{l} a = da_1 \\ b = db_1 \end{array} \right\} \quad \text{avec } \text{pgcd}(a_1, b_1) = 1$$

De plus, par l'équation (2.3.10), on a

$$d^2 | n \quad \Rightarrow \quad n = d^2 n_1 \quad \text{où } n_1 = (a_1^2 + b_1^2) \in \mathbb{N}$$

Supposons que l'exposant de p dans la factorisation de n soit impair, alors

$$p | n_1$$

car d^2 doit être divisible par une puissance paire de p .

On a donc une contradiction avec le lemme 2.3.1 et p a donc un exposant pair dans la factorisation de n .

D'autre part, si on suppose que l'exposant de chaque nombre premier de la forme $4k + 3$ dans la factorisation de n est pair, on peut alors mettre en évidence toutes les puissances paires de premier pour écrire

$$n = m^2 n_1$$

Si $n_1 \neq 1$, il ne reste que des nombres premiers à puissance 1 dans sa factorisation et, donc, que 2 et des nombres premiers de la forme $4k + 1$ d'après

l'hypothèse de départ. On sait par le théorème 2.3.3 que chacun de ces nombres peut s'écrire comme la somme de 2 carrés et on a $2 = 1^2 + 1^2$. De plus,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2$$

Ainsi, le produit de deux nombres qui s'écrivent comme la somme de 2 carrés peut s'écrire comme la somme de deux carrés. Ce qui termine la preuve. \square

On peut noter par $r(n)$ la fonction qui détermine la multiplicité d'une valeur propre $\lambda = 4\pi^2 n$ (en considérant que $r(n) = 0$ signifie que $\lambda = 4\pi^2 n$ n'est pas une valeur propre). Cette fonction représente le nombre de façons différentes d'exprimer n comme la somme de 2 carrés. Ou, plus rigoureusement

$$r(n) := \text{card} \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\}$$

Cette fonction peut-être calculer de la façon suivante

$$r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$$

(voir page 241 de [HW] pour la démonstration) où

$$d_1(n) := \text{card} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n, d \equiv 1 \pmod{4}\}$$

$$d_3(n) := \text{card} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n, d \equiv 3 \pmod{4}\}$$

Cela nous indique clairement, entre autres, que la multiplicité d'une valeur propre est un multiple de 4.

On peut retrouver notre fonction de compte $N(\lambda)$ par l'équation suivante

$$N(\lambda) = \sum_{n \leq \frac{\lambda}{4\pi^2}} r(n).$$

Chapitre 3

DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN SUR LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Dans ce chapitre, il sera question d'étudier les valeurs propres du triangle équilatéral en se référant à l'étude du spectre du tore (voir Section 2.3). Il y aura, en effet, plusieurs similitudes dans les méthodes de calcul et les résultats.

Le problème de Dirichlet sera analysé en détail dans ce chapitre. Les résultats pour le problème de Neumann étant similaire, ils seront exposés plus brièvement dans la section 3.6.

Notons encore une fois que nous travaillons dans un domaine de \mathbb{R}^2 et, donc, le laplacien est donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3.1. VALEURS PROPRES DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Soit D le triangle équilatéral de côté 1 défini par

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, y \leq \sqrt{3}(1-x) \right\}$$

M. A. Pinsky a démontré que, pour ce domaine, les valeurs de λ satisfaisant à l'équation (1.1.2)

$$\Delta f + \lambda f = 0$$

et sous la condition (1.1.4) de Dirichlet

$$f|_{\partial D} = 0$$

sont les nombres

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{16\pi^2}{27} \right) (m^2 + n^2 - mn) \quad (3.1.1)$$

avec les conditions suivantes

$$m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.1.2)$$

$$m + n \in 3\mathbb{Z} \quad (3.1.3)$$

$$m \neq 2n \quad (3.1.4)$$

$$n \neq 2m \quad (3.1.5)$$

satisfaites pour chacune des 6 paires suivantes :

$$(m, n), (n - m, n), (n - m, -m), (-n, -m), (-n, m - n), (m, m - n) \quad (3.1.6)$$

Autrement dit, on a les conditions (3.1.2) à (3.1.5) intactes, mais on a aussi, en substituant m par $n-m$ pour le deuxième couple par exemple, les conditions

$$n - m, n \in \mathbb{Z}, \quad n - m + n \in 3\mathbb{Z}, \quad n - m \neq 2n \quad \text{et} \quad n \neq 2(n - m)$$

et on effectue les substitutions correspondantes à chaque couples.

La multiplicité de λ est donnée par

$$\frac{1}{6} \times \text{card} \{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_{mn} = \lambda \}. \quad (3.1.7)$$

Les fonctions propres associées à la valeur propre λ sont des combinaisons linéaires des fonctions f où

$$f(x, y) = \sum_{(m, n)} \pm e^{\left(\frac{2\pi i}{3} \right) \left(nx + \frac{(2n-m)y}{\sqrt{3}} \right)} \quad (3.1.8)$$

et (m, n) est tel que $\lambda_{mn} = \lambda$. La somme dans l'équation (3.1.8) se fait sur les 6 paires de (3.1.6) avec un changement de signe à chaque changement de paire suivant l'ordre donné à (3.1.6).

Pour prouver ses résultats, Pinsky définit le domaine \tilde{D} , qui est un parallélogramme générateur d'un tore

$$\tilde{D} = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq 3 + \frac{y}{\sqrt{3}} \right\}$$

ainsi que trois réflexions :

$$R_1 : (x, y) \rightarrow (x, -y),$$

$$R_2 : (x, y) \rightarrow \left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \right),$$

$$R_3 : (x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} \right)$$

Ces réflexions ont pour axe respectivement chaque côté du triangle D .

Considérons le sous-espace de $L^2(\tilde{D})$

$$H = \left\{ f \in L^2(\tilde{D}) : R_i f = -f, i = 1, 2, 3 \right\} \quad (3.1.9)$$

La preuve est basée sur l'idée que la restriction $f \rightarrow f|_D$ est un isomorphisme entre H et $L^2(D)$. C'est le même principe que pour le carré (voir Section 2.3.1). Les fonctions qui satisfont à l'équation (1.1.2) sur le tore généré par \tilde{D} sont des combinaisons linéaires de fonction de la forme :

$$e^{2\pi i(\alpha x + \beta y)}$$

avec (α, β) dans le dual du réseau engendré par deux côtés adjacents du parallélogramme \tilde{D} (voir Remarque 2.2.1), *i.e.* tels que

$$\begin{aligned} 3\alpha &= n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\alpha + 3\sqrt{3}\beta}{2} &= m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\alpha = \frac{n}{3} \quad (3.1.10)$$

$$\beta = \frac{2m - n}{3\sqrt{3}} \quad (3.1.11)$$

et les valeurs propres associées aux fonctions sont

$$\lambda_{mn} = 4\pi^2(\alpha^2 + \beta^2) = \left(\frac{16\pi^2}{27} \right) (m^2 + n^2 - mn) \quad (3.1.12)$$

Ainsi, on obtient les fonctions

$$\tilde{f} = \sum_{(m,n)} A_{mn} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}} \right)}$$

Parmi ces fonctions, celles qui appartiennent à l'ensemble H , i.e. qui satisfont aux conditions de réflexibilité, ont la propriété suivante :

$$A_{mn} = -A_{n-m,n} \quad (3.1.13)$$

$$A_{mn} = -A_{m,m-n} \quad (3.1.14)$$

$$A_{mn} = -A_{-n,-m} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)(-m-n)} \quad (3.1.15)$$

En effet, avec le changement de variable $m' = n - m$ et $n' = n$, la première égalité découle de

$$\begin{aligned} R_1 \tilde{f} &= -\tilde{f} \\ \Leftrightarrow \sum_{m'n'} A_{m'n'} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(n'x - \frac{(2m'-n')y}{\sqrt{3}}\right)} &= - \sum_{mn} A_{mn} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right)} \\ \Leftrightarrow \sum_{mn} A_{n-m,n} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right)} &= \sum_{mn} -A_{mn} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right)} \\ &\Leftrightarrow A_{n-m,n} = -A_{mn} \end{aligned}$$

et les autres découlent d'un raisonnement similaire. Pour arriver à la condition (3.1.3), on itère les égalités (3.1.13) et (3.1.14)

$$\begin{aligned} -A_{-n,-m} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)(-m-n)} &= A_{mn} \quad , \text{ par (3.1.15)} \\ &= -A_{m,m-n} \quad , \text{ par (3.1.14)} \\ &= A_{-n,m-n} \quad , \text{ par (3.1.13)} \\ &= -A_{-n,-m} \quad , \text{ par (3.1.14)} \\ \Rightarrow e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)(-m-n)} &= 1 \end{aligned}$$

et on a donc $m + n \in 3\mathbb{Z}$. Finalement, les conditions (3.1.4) et (3.1.5) se démontrent par contradiction. Si $m = 2n$, alors

$$(m, m - n) = (m, n)$$

et donc, par (3.1.14),

$$\begin{aligned} A_{m,m-n} &= A_{mn} = -A_{m,m-n} \\ \Rightarrow A_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

Et on peut montrer que chacun des 5 autres coefficients (pour les 5 autres paires de (3.1.6)) sont nuls. Ainsi, la fonction sera nulle, ce qui est exclu.

Si $n = 2m$, alors

$$(n - m, n) = (m, n)$$

et donc, par (3.1.13),

$$A_{n-m,n} = A_{mn} = -A_{n-m,n}$$

$$\Rightarrow A_{mn} = 0$$

Et on a le même raisonnement pour conclure que le cas est exclu.

Ainsi, les fonctions propres doivent être des combinaisons linéaires de fonction de la forme (3.1.8). D'autre part, il est facile de vérifier que les fonctions de cette forme avec les conditions sur m et n énoncées plus haut sont bien des fonctions propres.

3.2. FONCTION DE COMPTE SUR LE TRIANGLE

On peut représenter la valeur de λ_{mn} par le couple (m, n) qui, en fait, par la condition (3.1.2), est un point à coordonnées entières dans le plan. Il y a plusieurs points qui représentent la même valeur de λ_{mn} ; il y en a un multiple de 6 par la condition (3.1.6). En effet, chacune des paires énumérées en (3.1.6) donne la même valeur λ_{mn} par substitution dans la formule (3.1.1). De plus, ces 6 paires sont distinctes, car, sinon, une des conditions $m \neq 2n$ ou $n \neq 2m$ ne sera pas respectée pour au moins une des paires. Notons que ces deux conditions respectées pour les 6 paires impliquent que l'on a la condition

$$n \neq -m \tag{3.2.1}$$

pour les 6 paires.

En fait, il suffit d'imposer ces trois conditions à un seul couple parmi les 6 et on aura les conditions pour les 6 couples.

Pour les 6 paires distinctes générées par le couple (m, n) , on obtient une seule fonction propre donnée par l'équation (3.1.8) constituée de 6 termes, chacun associé à une des paires. Ces termes ne sont pas dissociables; pris indépendamment, ils ne sont pas des fonctions propres car ils ne satisfont pas à la condition au bord.

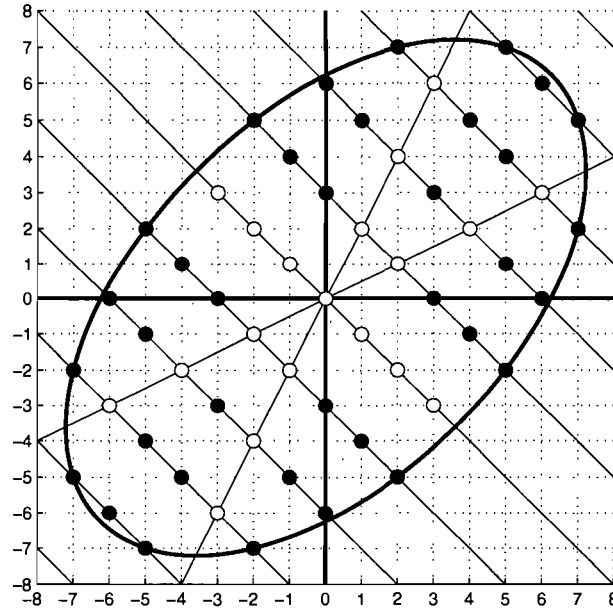


FIG. 3.1. Points à compter pour $N(\lambda)$ avec $m^2 + n^2 - mn \leq 39$

La multiplicité d'une valeur propre λ , donnée par l'équation (3.1.7), correspond ainsi à compter le sixième du nombre de points à coordonnées entières qui sont situés sur l'intersection de la courbe d'équation

$$\left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn) = \lambda \quad (3.2.2)$$

et des droites d'équation $m + n \in 3\mathbb{Z}$ et qui ne sont pas sur les droites d'équations $m = 2n$, $n = 2m$ ni $n = -m$.

La fonction de compte $N(\lambda)$ correspond à additionner la multiplicité de chaque valeur propre plus petite ou égale à λ ou, tout simplement, à compter le sixième des points à coordonnées entières sur ou à l'intérieur de la courbe d'équation (3.2.2) et avec les mêmes autres conditions que la multiplicité. En effet, par la définition (1.1.3), $N(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres λ_{mn} qui satisfont

$$\left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn) \leq \lambda$$

À la figure 3.1 est représentée la courbe d'équation $m^2 + n^2 - mn = 39$. Les points à l'intérieur de la courbe qui sont sur les droites d'équation $m + n \in 3\mathbb{Z}$

sont représentés par des pois noirs et les points situés sur les droites d'équations $m = 2n$, $n = 2m$ et $n = -m$, par des pois blancs.

Ainsi, on trouve graphiquement que

$$N\left(\frac{39 \times 16\pi^2}{27}\right) = 6$$

car il y a 36 pois noirs.

3.3. APPROXIMATION DE $N(\lambda)$

Pour des petites valeurs de λ , il est facile de trouver la valeur de N comme pour $\lambda = \frac{39 \times 16\pi^2}{27}$, mais, pour des valeurs plus grandes, cette méthode devient vite inappropriée et on doit se contenter de connaître son comportement asymptotique. Dans la prochaine section, il sera question d'approximer le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur de la courbe d'équation (3.2.2) par l'aire de la région délimitée par cette courbe de la même façon que pour le problème du cercle de Gauss (voir Section 2.3.2.1). On pourra donc donner une estimation de $N(\lambda)$ en calculant cette aire, en divisant par 3 à cause de la condition (3.1.3), en soustrayant les pois blancs des 3 droites $m = 2n$, $n = 2m$ et $n = -m$ et, finalement, en divisant par 6 pour satisfaire l'équation (3.1.7). Le résultat ne sera qu'une approximation et, donc, il reste un terme d'erreur à évaluer. Pour vérifier que l'approximation est bonne, il faut s'assurer que le terme d'erreur est petit. Pour ce faire, on peut lui trouver des bornes supérieures à l'aide des théorèmes de Weyl et de Huxley.

3.3.1. Approximation par l'aire

Soit $R(\lambda)$, la région délimitée par la courbe (3.2.2), *i.e.*

$$R(\lambda) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{R} \mid \frac{16\pi^2}{27}(m^2 + n^2 - mn) \leq \lambda \right\}$$

Calculons l'aire de la région R .

3.3.1.1. Calcul de l'aire

En faisant une complétion de carré, on peut revenir à la forme (3.1.12) avec α et β donnés par (3.1.10) et (3.1.11)

$$\begin{aligned} \frac{16\pi^2}{27} (m^2 + n^2 - mn) &= \lambda \\ \Rightarrow \frac{16\pi^2}{27} \left(\left(m^2 - mn + \frac{n^2}{4} \right) + \left(-\frac{n^2}{4} + n^2 \right) \right) &= \lambda \\ \Rightarrow 4\pi^2 \left(\left(\frac{2m-n}{3\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{n}{3} \right)^2 \right) &= \lambda \end{aligned}$$

Introduisons le paramètre t et posons

$$2\pi\alpha = \frac{2\pi n}{3} = \sqrt{\lambda} \sin(t) \quad \text{et} \quad 2\pi\beta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} (2m-n) = \sqrt{\lambda} \cos(t)$$

on obtient la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (m(t), n(t)) = \left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} (\sqrt{3} \cos(t) + \sin(t)), \frac{3\sqrt{\lambda} \sin(t)}{2\pi} \right) \quad (3.3.1)$$

et sa première dérivée

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{m}(t), \dot{n}(t)) = \left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} (\cos(t) - \sqrt{3} \sin(t)), \frac{3\sqrt{\lambda} \cos(t)}{2\pi} \right)$$

L'aire $A(\lambda)$ de la région $R(\lambda)$ est donnée par l'équation

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (m\dot{n} - \dot{m}n) dt \\ &= \frac{9\lambda}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} ((\sqrt{3} \cos(t) + \sin(t)) \cos(t) - (\cos(t) - \sqrt{3} \sin(t)) \sin(t)) dt \\ &= \frac{9\lambda}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{3} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = \frac{9\sqrt{3}\lambda t}{16\pi^2} \Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

et finalement

$$A(\lambda) = \frac{9\sqrt{3}\lambda}{8\pi} \quad (3.3.2)$$

Il est intéressant de remarquer que la région R est, en fait, délimitée par une ellipse centrée à l'origine. Les axes principaux de cette ellipse sont sur les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$. On pourrait donc calculer $A(\lambda)$ par la formule bien connue de l'aire de l'intérieur d'une ellipse : πab où a et b sont les demies longueurs des axes principaux.

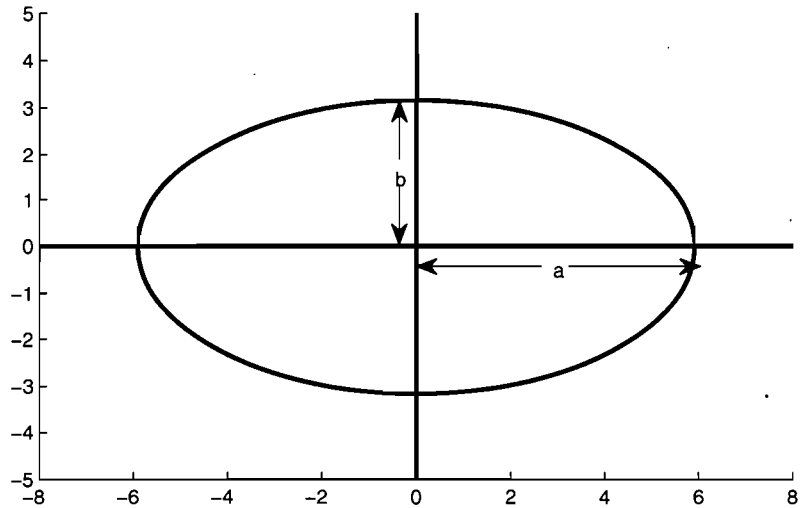


FIG. 3.2. Ellipse

On sait que tout polynôme de la forme (générale)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

peut se ramener, par un changement de coordonnées approprié (voir [É]), à la forme (canonique)

$$D\tilde{x}^2 + E\tilde{y}^2$$

Ce changement de coordonnées correspond à une transformation rigide du plan. Ceci nous assure donc que l'aire de notre région dans le nouveau système est la même que dans l'ancien.

Pour notre problème, on a (voir l'équation (3.2.2))

$$m^2 - mn + n^2$$

Introduisons les nouvelles coordonnées x et y par le changement de variables

$$\begin{cases} m = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ n = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

qui correspond à une rotation du plan de $-\frac{\pi}{4}$ radian. On obtient la forme canonique de notre ellipse

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{27\lambda}{16\pi^2}$$

Pour connaître les demies longueurs a et b des axes principaux, on doit se ramener à la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Dans notre cas, on a

$$\left(\frac{x}{\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{4\pi}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{3\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{4\pi}}\right)^2 = 1$$

et l'aire de l'ellipse ou de la région R est

$$A(\lambda) = \pi ab = \frac{9\sqrt{3}\lambda}{8\pi}$$

et c'est exactement ce qu'on avait trouvé en (3.3.2).

On a ainsi une idée du nombre de points entiers à l'intérieur de la courbe et, en divisant par trois, on a une idée du nombre de ces points qui satisfont aussi à la condition (3.1.3). Il reste à soustraire le nombre de ces points qui ne satisfont pas aux conditions (3.1.4), (3.1.5) et (3.2.1).

3.3.1.2. Approximation du nombre de points à soustraire

Notons d'abord que les points à coordonnées entières qui sont à l'intersection des 3 droites $m = 2n$, $n = 2m$ et $n = -m$ avec les droites d'équations $m + n \in 3\mathbb{Z}$ sont les seuls points à coordonnées entières qui sont sur les 3 premières droites. De plus, il y a un de ces points pour chaque valeur entière de n pour la première droite et pour chaque valeur entière de m pour les 2 autres. En effet, on a

$$\text{Si } m = 2n, \text{ on a : } m + n \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } n = 2m, \text{ on a : } m + n \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } n = -m, \text{ on a : } m + n \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow m, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, on peut estimer le nombre de pois blanc sur la première droite de la façon suivante. On projette la section de droite qui est à l'intérieur de la courbe (3.2.2) sur l'axe des ordonnées et on prend comme estimation la longueur de l'intervalle ainsi formé. Pour ce faire, on doit calculer les coordonnées en n des points d'intersection de la droite avec la courbe.

$$m = 2n \text{ et } \left(\frac{16\pi^2}{27} \right) (m^2 + n^2 - mn) = \lambda \implies \left(\frac{16\pi^2}{9} \right) n^2 = \lambda$$

On obtient l'intervalle $\left[-\frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi}, \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} \right]$. On peut faire de même sur l'axe des abscisses pour les 2 autres droites et, en fait, on obtient le même intervalle dans les trois cas.

L'approximation $B(\lambda)$ du nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur de la courbe d'équation (3.2.2) et sur une des trois droites d'équation $m = 2n$, $n = 2m$ ou $n = -m$ est donnée par la somme des longueurs des 3 intervalles. Ainsi,

$$B(\lambda) = \frac{9\sqrt{\lambda}}{2\pi} \quad (3.3.3)$$

On obtient finalement une première approximation de la fonction de compte où E est l'erreur.

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \frac{\frac{A(\lambda)}{3} - B(\lambda)}{6} + E(\lambda) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda - \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + E(\lambda) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En fait, on arrive aux mêmes termes principaux que ceux de la loi de Weyl.

3.3.2. Loi de Weyl

La loi de Weyl à 2 termes principaux pour le domaine D de \mathbb{R}^2 à bord ∂D est la suivante (voir section 1.1.1) :

$$N(\lambda) = \frac{\text{Aire}(D)}{4\pi} \lambda - \frac{\text{Longueur}(\partial D)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$$

Ainsi, sachant que l'aire du triangle équilatéral D est de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et que son périmètre est de 3, alors on a

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda - \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$$

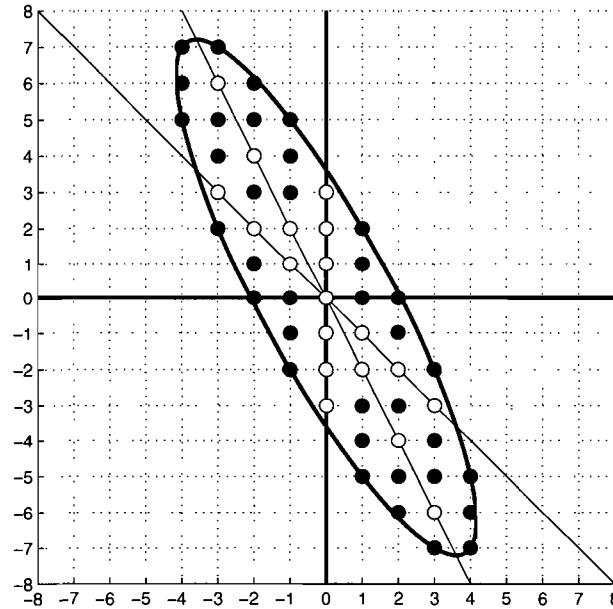


FIG. 3.3. Points à compter pour $N(\lambda)$ avec $9u^2 + 3v^2 + 9uv \leq 39$

On a notre première borne supérieure pour le terme d'erreur E . En effet, cette loi nous donne

$$E(\lambda) = o(\sqrt{\lambda})$$

3.3.3. Théorème de Huxley

3.3.3.1. *Changement de variable*

Afin de pouvoir utiliser le résultat de Huxley qui nous permettra de trouver une meilleure borne supérieure au terme d'erreur, introduisons les coordonnées suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{m-2n}{3} \\ v &= n \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

Les coordonnées (m, n) dans la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ peuvent ainsi être exprimées par (u, v) dans la base $\{(3, 0), (2, 1)\}$. Ce changement a pour effet de transformer le plan afin d'utiliser les pois noirs et blancs de la Figure 3.1 comme grille de la Figure 3.3. Ainsi, compter les pois (noirs et blancs) de la Figure 3.1 revient à compter tous les points à coordonnées entières de la Figure 3.3 qui sont à

l'intérieur de la courbe d'équation

$$\left(\frac{16\pi^2}{9}\right)(3u^2 + v^2 + 3uv) = \lambda \quad (3.3.6)$$

avec $\lambda = \frac{39 \times 16\pi^2}{27}$. En effet,

$$\left. \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{Z} \\ m + n \in 3\mathbb{Z} \\ \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn) \leq \lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u, v \in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(9u^2 + 3v^2 + 9uv) \leq \lambda \end{array} \right.$$

Les droites sur lesquelles sont les pois blancs sont déformées en droites dont les équations sont données par

$$\left. \begin{array}{l} m = 2n \Leftrightarrow u = 0 \\ n = 2m \Leftrightarrow v = -2u \\ n = -m \Leftrightarrow v = -u \end{array} \right\} \quad (3.3.7)$$

Pour donner une approximation de $N(\lambda)$, on peut procéder par la même méthode. Cette fois, on calcul l'aire \tilde{A} de la région \tilde{R} , délimitée par la courbe d'équation (3.3.6), on soustrait l'approximation \tilde{B} du nombre de points à coordonnées entières sur les droites d'équations $u = 0$, $v = -2u$ et $v = -u$ et on divise finalement par 6 pour satisfaire l'équation de la multiplicité.

3.3.3.2. Application du théorème

Remarquons que le terme principal de l'équation dans le théorème de Huxley (voir Section 2.3.2.3) correspond à l'aire du domaine E.

Pour notre problème, le facteur d'expansion dans le théorème 2.3.1 est $\sqrt{\lambda}$ et l'équation paramétrique de la courbe après l'expansion, obtenue par (3.3.1) et (3.3.5), est

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) = \sqrt{\frac{27\lambda}{16\pi^2}} \left(\frac{\cos t}{3} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{3}}, \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{3}} \right)$$

On peut trouver l'aire de la région $\tilde{R}(\lambda)$ de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u\dot{v} - \dot{u}v) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m-2n}{3} \dot{n} - \frac{\dot{m}-2\dot{n}}{3} n \right) dt \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (m\dot{n} - \dot{m}n) dt \right) \\
&= \frac{1}{3} A(\lambda)
\end{aligned}$$

La courbe est une ellipse. Elle est donc lisse et satisfait aux conditions du théorème et, ainsi, le nombre de points entiers à l'intérieur ou sur la courbe est donné par

$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lambda + O(\lambda^{\frac{131}{416}} (\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}) \quad (3.3.8)$$

Par la même méthode qu'à la section précédente, on peut donner une approximation $\tilde{B}(\lambda)$ du nombre de pois blancs. Le nombre de points à coordonnées entières sur la droite $u = 0$ à l'intérieur de la courbe est précisément

$$2 \left\lfloor \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} \right\rfloor + 1$$

car cette droite coupe la courbe en $v = \pm \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi}$. On peut borner le terme d'erreur de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{\lambda}}{2\pi} - 1 &< 2 \left\lfloor \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} \right\rfloor + 1 \leq \frac{3\sqrt{\lambda}}{2\pi} + 1 \\
\Rightarrow 2 \left\lfloor \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi} \right\rfloor + 1 &= \frac{3\sqrt{\lambda}}{2\pi} + O(1)
\end{aligned}$$

Les valeurs de u , quand une des 2 autres droites coupe la courbe, sont $u = \pm \frac{3\sqrt{\lambda}}{4\pi}$ et, ainsi, on a aussi $\frac{3\sqrt{\lambda}}{2\pi} + O(1)$ pour le nombre de points entiers sur ces 2 dernières droites. Le nombre total de pois blanc à enlever est donc

$$\tilde{B}(\lambda) + O(1) = \frac{9\sqrt{\lambda}}{2\pi} + O(1)$$

On obtient finalement une approximation de $N(\lambda)$ et une borne supérieure du terme d'erreur en soustrayant ce dernier résultat de l'équation (3.3.8), en

divisant par 6 et en remarquant qu'une fonction du type $O(1)$ est aussi du type $O(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}})$.

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}})$$

3.3.4. Conjecture

Depuis le début de ce chapitre, l'étude du spectre du triangle équilatéral est comparée à celle du spectre du tore plat carré. Ici, on tiendra compte encore une fois de ces ressemblances. Il existe des résultats et des conjectures en relation avec le spectre du tore qu'on tentera d'adapter pour le spectre du triangle équilatéral.

D'abord, rappelons que la loi de Weyl (voir la section 2.3.2.2) pour le tore plat carré de côté 1 est donné par

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Le terme d'erreur est borné supérieurement par $\sqrt{\lambda}$ et on a vu que cette borne peut facilement être améliorée en appliquant le théorème de Huxley. Cela nous donne (voir la section 2.3.2.3)

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O\left(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}\right).$$

Hardy (voir [H1]) a conjecturé que, pour chaque $\epsilon > 0$, on peut écrire la fonction N de la façon suivante

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O(\lambda^{\frac{1}{4}+\epsilon}).$$

La forme des valeurs propres du triangle équilatéral ($\frac{16\pi^2}{27}(m^2 + n^2 - mn)$) étant très similaire à celle des valeurs propres du tore plat carré ($4\pi^2(m^2 + n^2)$), on pourrait s'attendre au même résultat. En effet, dans les deux cas, on peut représenter les valeurs propres par des points à coordonnées entières sur une ellipse centré à l'origine (un cercle dans le cas du tore).

Ainsi, il serait pertinent de croire qu'on peut écrire, pour chaque $\epsilon > 0$,

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{4}+\epsilon}).$$

3.4. FORMULE DE LAMÉ

Pinsky n'est pas le premier mathématicien à s'être intéressé au spectre du triangle équilatéral. En effet, dans la littérature, on retrouve en particulier la formule de Lamé (voir [Lam]). Celui-ci a démontré que les valeurs propres du triangle équilatéral sont de la forme

$$\lambda_{\mu\nu} = \frac{4\pi^2}{27l}(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2) \quad (3.4.1)$$

où l est le rayon du cercle inscrit dans le triangle et μ et ν sont des entiers.

Cependant, Lamé ne donne que la forme que doit avoir une valeur propre donnée, mais ne précise pas les conditions sur μ et ν pour que le membre de droite de l'équation (3.4.1) soit une valeur propre.

Dans le cas du triangle de côté 1, on a $l = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et

$$\lambda_{\mu\nu} = \frac{16\pi^2}{9}(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2) \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}$$

A priori, la formule ne semble pas donner les mêmes valeurs que la formule de Pinsky

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.4.2)$$

mais, en fait, on peut montrer qu'elles représentent les mêmes nombres en les comparant en tant que formes quadratiques binaires.

3.4.1. Formes quadratiques binaires

Définition 3.4.1 (Forme quadratique binaire). *Une forme quadratique binaire est une fonction de la forme*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

où $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.

On s'intéresse aux solutions entières de ces équations; ce sont des équations dites diophantiennes. Les solutions entières sont les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x, y) = n$.

On demande que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$ car si $\text{pgcd}(a, b, c) = d$, on a $\tilde{f}(x, y) = df(x, y)$ pour une forme f qui satisfait la définition et les solutions de \tilde{f} sont dn

où n est une solution de f . Ainsi, on peut regrouper l'études des fonctions $df(x, y)$ en un seul cas, c'est-à-dire le cas de $f(x, y)$.

On dit que deux formes sont équivalentes si elles admettent les mêmes solutions $n \in \mathbb{Z}$. Plus précisément (voir [K]),

Définition 3.4.2 (Formes équivalentes): $f(x, y)$ et $f'(x, y)$ sont deux formes quadratiques binaires équivalentes s'il existe une transformation

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

telle que

$$f' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (f' \circ T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, si n est une solution de la forme f , donnée par x et y , alors n sera une solution de la forme f' , donnée par x' et y' . La matrice T ayant aussi son inverse dans $SL_2(\mathbb{Z})$, on a bien la relation réciproque.

3.4.2. Forme de Lamé

Avant de vérifier si la forme de Lamé est équivalente à la forme de Pinsky, on doit se rappeler que seules les solutions satisfaisant aux conditions (3.1.2) à (3.1.6) sont retenues comme valeurs propres pour la formule de Pinsky. Ainsi, on ne veut pas toutes les solutions entières de la forme quadratique binaire

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

L'équivalence cherchée est, en fait, celle de la formule de Lamé avec la formule (3.3.6) qui est, rappelons-le, le résultat d'un changement de variables sur la formule de Pinsky. Pour être conforme à la définition d'une forme quadratique binaire et pour simplifier l'écriture, on comparera les formes

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2$$

qui sont le résultat de la division des formules de Lamé et de l'équation (3.3.6) par $\frac{16\pi^2}{9}$.

Posons

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, si n est une solution de g donnée par (μ, ν) , alors on a

$$\begin{aligned} g(\mu, \nu) &= \mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = (v+u)^2 + (v+u)u + u^2 \\ &= v^2 + 2vu + u^2 + vu + u^2 + u^2 \\ &= v^2 + 3vu + 3u^2 \\ &= h(u, v) \end{aligned}$$

On a alors l'équivalence des 2 formes. Pour compléter la formule de Lamé, il faut trouver les conditions équivalentes pour qu'une solution n de la forme quadratique binaire $g(x, y)$ génère une valeur propre $\lambda = \frac{16\pi^2}{9}n$. Pour ce faire, on utilise le changement de variable T sur les conditions données en (3.3.7). En fait, c'est l'inverse de T qui donne u et v en fonction de μ et de ν .

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les conditions sur μ et ν sont ainsi

$$\begin{aligned} u \neq 0 &\Leftrightarrow \mu + \nu \neq 0 &\Leftrightarrow \nu \neq -\mu \\ v \neq -2u &\Leftrightarrow -\mu \neq -2(\mu + \nu) &\Leftrightarrow \mu \neq -2\nu \\ v \neq -u &\Leftrightarrow -\mu \neq -(\mu + \nu) &\Leftrightarrow \nu \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui complète la formule de Lamé.

3.5. MULTIPLICITÉ MOYENNE

Introduisons la fonction de compte sans multiplicité $n(\lambda)$. Rappelons que la fonction de compte $N(\lambda)$ retourne le nombre de valeurs propres plus petites ou égales à λ en comptant chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité.

La fonction $n(\lambda)$ retourne, tout simplement, le nombre de valeurs propres plus petites ou égales à λ , mais, cette fois, en ne comptant qu'une seule fois chaque valeur propre distincte.

On peut alors parler de multiplicité moyenne. En effet, en considérant le quotient

$$\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$$

on obtient la moyenne de la multiplicité des valeurs propres allant jusqu'à λ . On peut, par la suite, s'intéresser au comportement de la multiplicité moyenne quand les valeurs de λ tendent vers l'infini. Dans l'article de Pinsky (voir [P]), on y mentionne le résultat suivant pour le triangle équilatéral

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} = \infty.$$

Ce résultat est plutôt intuitif, car la multiplicité d'une valeur propre est proportionnelle au nombre de points à coordonnées entières qui se trouvent sur l'ellipse de la figure 3.3. Il est clair que, plus l'ellipse grossit, plus il y a de chance de trouver un grand nombre de points entiers sur l'ellipse. On a le même résultat pour le spectre du tore plat carré. Pour celui-ci, il existe un résultat plus précis concernant la fonction $n(\lambda)$. Il s'agit de la constante de Landau-Ramanujan.

3.5.1. Constante de Landau-Ramanujan

La constante de Landau-Ramanujan, notée K , est définie ainsi :

$$K = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x} s(x)$$

où $s(x)$ est le nombre d'entiers positifs plus petits ou égaux à x qui peuvent s'écrire comme une somme de deux carré. On sait que les valeurs propres sur le tore plat carré sont les nombres $4\pi^2(p^2 + q^2)$ où p et q sont des entiers. Ainsi, la fonction $s(x)$ est presque la fonction de compte sans multiplicité $n(\lambda)$ pour le tore plat carré. En effet,

$$n(\lambda) = s\left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)$$

Par le changement de variable $x = \frac{\lambda}{4\pi^2}$, on peut en déduire que $n(\lambda)$ doit satisfaire à

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi^2 \sqrt{\log \frac{\lambda}{4\pi^2}}}{\lambda} n(\lambda) = K \quad (3.5.1)$$

La constante de Landau-Ramanujan peut être calculée explicitement par la formule suivante (voir [Lan]).

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p \text{ premier } \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.5.2)$$

On sait que la fonction de compte $N(\lambda)$ pour le cas tore plat carré est asymptotique à la fonction $\frac{\lambda}{4\pi}$ (voir section 2.3.2). Ainsi, on trouve, pour la multiplicité moyenne, le résultat suivant.

$$\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} \sim \frac{\pi}{K} \sqrt{\log \left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)}$$

Un résultat similaire peut être donné pour le cas du spectre du triangle équilatéral. En effet, les valeurs propres sont, dans ce cas, les nombres $\frac{16\pi^2}{9}(3u^2 + v^2 + 3uv)$ sauf ceux qui satisfont à une des équations (3.3.7). Ainsi, on définit la fonction $s_2(x)$ comme étant le nombre d'entiers positifs plus petits ou égaux à x pouvant s'écrire sous la forme $3u^2 + v^2 + 3uv$. On a alors l'égalité suivante.

$$s_2\left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right) = n(\lambda) + e(\lambda)$$

où $e(\lambda)$ est un terme d'erreur dû au fait que, pour le calcul des valeurs propres, on ne doit pas considérer les points sur les droites données en (3.3.7) contrairement au calcul de la fonction s_2 .

L'équivalent de la constante de Landau-Ramanujan existe pour ce problème. Cette constante sera notée K_2 et définie par

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(x)}}{x} s_2(x) = K_2$$

C'est le changement de variable $x = \frac{9\lambda}{16\pi^2}$ qui nous permet, cette fois, d'obtenir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{16\pi^2 \sqrt{\log \left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right)}}{9\lambda} n(\lambda) = K_2 \quad (3.5.3)$$

Le résultat suivant (voir [R]) nous permet de connaître la valeur de cette constante.

Théorème 3.5.1 (Radziwill).

$$K_2 = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{6}} \prod_{p \text{ premier } \equiv 2 \pmod{3}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cela nous permet de trouver une approximation de la multiplicité moyenne. En effet, sachant que $N(\lambda)$ est de l'ordre de $\frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda$ et par l'équation (3.5.3), on trouve

$$\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} \sim \frac{\pi}{3\sqrt{3}K_2} \sqrt{\log\left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right)} \quad (3.5.4)$$

Avant d'énoncer les résultats numériques appuyant ces dernières conclusions, voyons de quelle façon les valeurs propres du triangle équilatéral peuvent être générées.

3.5.2. Calcul des valeurs propres

La forme des valeurs propres du laplacien sur le triangle équilatéral étant relativement simple, on peut facilement les calculer par ordinateur. Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de considérer tous les points de l'ellipse de la figure 3.1 pour générer toutes les valeurs propres un nombre de fois égal à la multiplicité. Rappelons que ce n'est que le sixième des points qui est nécessaire. Il ne reste qu'à déterminer quelle portion de l'ellipse doit être considérée pour que les valeurs trouvées correspondent exactement au spectre.

En fait, chacune des 6 pointes de l'ellipse séparées par les droites $m = 2n$, $n = 2m$ et $n = -m$ (là où sont les pois blancs sur la figure 3.1) constitue une portion adéquate pour le calcul des valeurs propres. En effet, on peut facilement voir que chaque paire (m, n) , $(n - m, n)$, $(n - m, -m)$, $(-n, -m)$, $(-n, m - n)$ et $(m, m - n)$ se retrouve dans une section différente. Par exemple, si on choisit (m, n) dans la région I de la figure 3.4, c'est-à-dire tel que

$$m < 2n \quad (3.5.5)$$

$$n < 2m \quad (3.5.6)$$

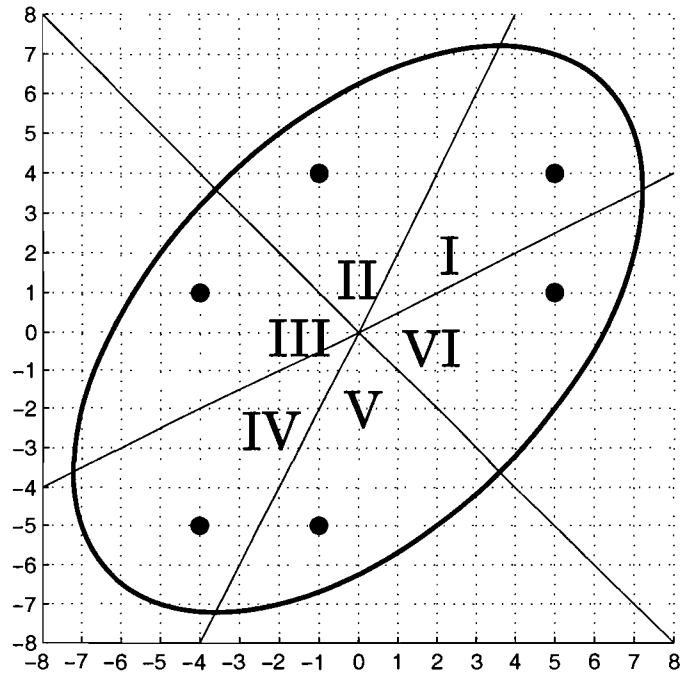


FIG. 3.4. Portions de l'ellipse

alors le couple $(n - m, n)$ sera dans la région II. On a en effet

$$\begin{aligned} -(n - m) = m - n &< 2n - n && \text{par (3.5.5)} \\ \Rightarrow -(n - m) &< n \end{aligned}$$

donc le point est au dessus de la droite $y = -x$. Et on a

$$\begin{aligned} n - m &< n - \frac{n}{2} && \text{par (3.5.6)} \\ \Rightarrow 2(n - m) &< n \end{aligned}$$

donc le point est au dessus de la droite $y = 2x$.

On a ensuite le point $(n - m, -m)$ qui se situe dans la région V de l'ellipse, le point $(-n, -m)$ dans la région VI, le point $(-n, m - n)$ dans la région III et le point $(m, m - n)$ dans la région IV. En fait, pour passer du premier couple au deuxième, du troisième au quatrième et du cinquième au sixième, on doit effectuer le même changement de variable qui peut s'exprimer par $(m, n) \rightarrow (n - m, n)$. Ce dernier fait faire un déplacement d'une région à l'autre consécutivement. Pour

passer du deuxième point au troisième, du quatrième point au cinquième et du sixième point au premier, on doit effectuer le même changement de variable qui peut, cette fois, s'exprimer par $(m, n) \rightarrow (m, m - n)$. Ce dernier a pour effet d'envoyer le point dans la région opposée.

Finalement, on peut donc se restreindre à générer les nombres en considérant seulement la région I. C'est-à-dire, calculer les nombres $\lambda_{mn} = \frac{16\pi^2}{27}m^2 + n^2 - mn$ où les couples (m, n) de \mathbb{Z}^2 sont tels que

$$m + n \in 3\mathbb{Z}$$

$$m < 2n$$

$$n < 2m$$

Le programme de Matlab utilisé pour générer les valeurs propres du laplacien sur le triangle équilatéral est disponible dans l'annexe A.

3.5.3. Résultats numériques

Une fois qu'on connaît les valeurs propres du triangle équilatéral jusqu'à une certaine valeur assez grande, on calcule les fonctions $N(\lambda)$ et $n(\lambda)$. Le programme de Matlab utilisé pour calculer ces fonctions est disponible dans l'annexe B.

Il est connu que la fonction

$$\frac{\sqrt{\log x}}{x} s(x) \tag{3.5.7}$$

décroît très lentement vers la constante de Landau-Ramanujan. À la figure 3.5, le graphique du haut est celui de la fonction

$$\frac{4\pi^2 \sqrt{\log \frac{\lambda}{4\pi^2}}}{\lambda} n(\lambda)$$

($n(\lambda)$ dans le cas du tore) pour des valeurs de λ allant jusqu'à 4×10^7 . Celui du bas représente la constante $K \simeq 0.7642$ calculée par l'équation (3.5.2) pour les nombres premiers allant jusqu'à 1000.

On voit clairement que la convergence est lente, d'où l'utilité de la formule (3.5.2). En effet, elle nous permet d'obtenir plusieurs chiffres significatifs en peu de temps de calcul. Ainsi, l'approximation de la multiplicité moyenne est meilleure.

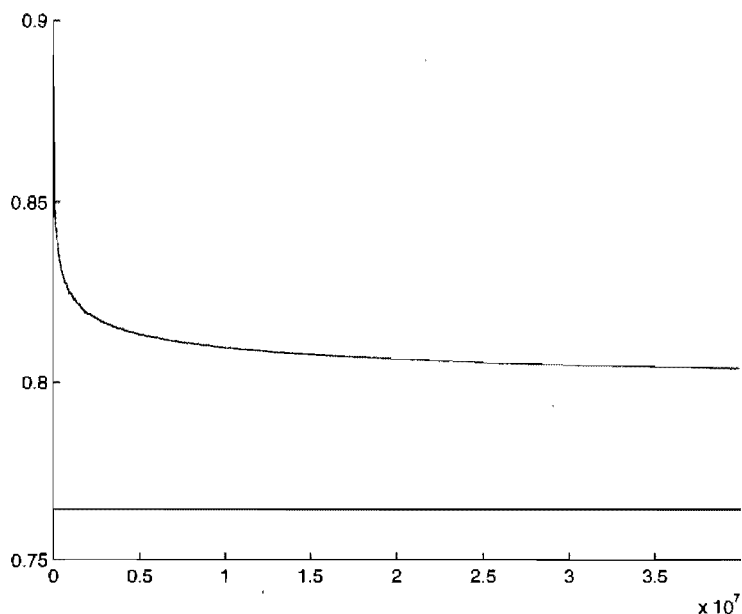


FIG. 3.5. $\frac{4\pi^2 \sqrt{\log \frac{\lambda}{4\pi^2}}}{\lambda} n(\lambda)$ versus K pour le tore plat carré

Dans le cas du triangle équilatéral, on observe le même phénomène. À la figure 3.6, la fonction

$$\frac{16\pi^2 \sqrt{\log \left(\frac{9\lambda}{16\pi^2} \right)}}{9\lambda} n(\lambda) \quad (3.5.8)$$

est représentée par le graphique du haut et la constante $K_2 \simeq 0.6389$, calculée par l'équation du théorème 3.5.1 pour les nombres premiers allant jusqu'à 1000, est représentée par le graphique du bas.

La convergence est, encore une fois, très lente. La fonction (3.5.8) semble se stabiliser, mais elle décroît toujours après $\lambda = 6 \times 10^7$, comme le démontre la figure 3.7, qui représente une portion du graphique de la figure 3.6.

On peut finalement comparer la fonction de la multiplicité moyenne des valeurs propres sur le triangle équilatéral et la fonction asymptotique donnée à l'équation (3.5.4). À la figure 3.8, le graphique du bas représente la multiplicité moyenne et le graphique du haut, la fonction

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}K_2} \sqrt{\log \left(\frac{9\lambda}{16\pi^2} \right)}.$$

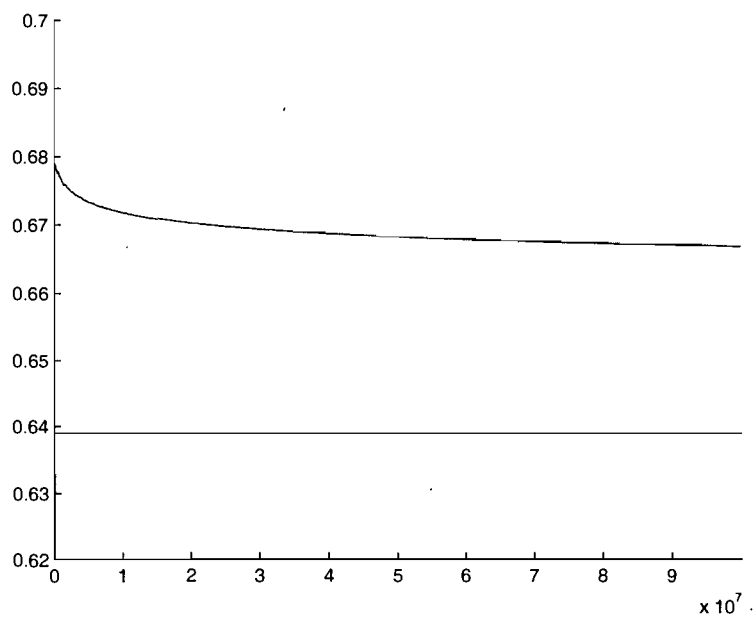


FIG. 3.6. $\frac{16\pi^2 \sqrt{\log\left(\frac{9\lambda}{16\pi^2}\right)}}{9\lambda} n(\lambda)$ versus K_2 pour le triangle équilatéral

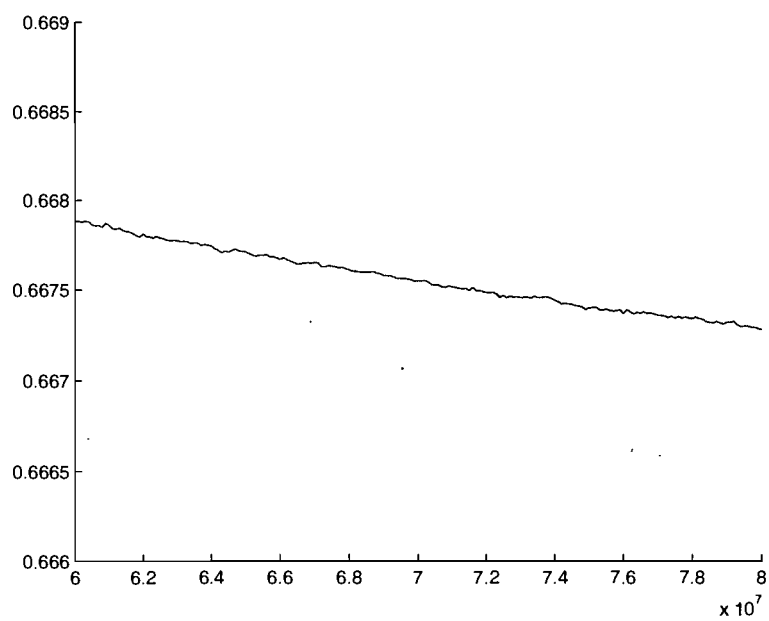


FIG. 3.7. Portion du graphique du haut de la figure 3.6

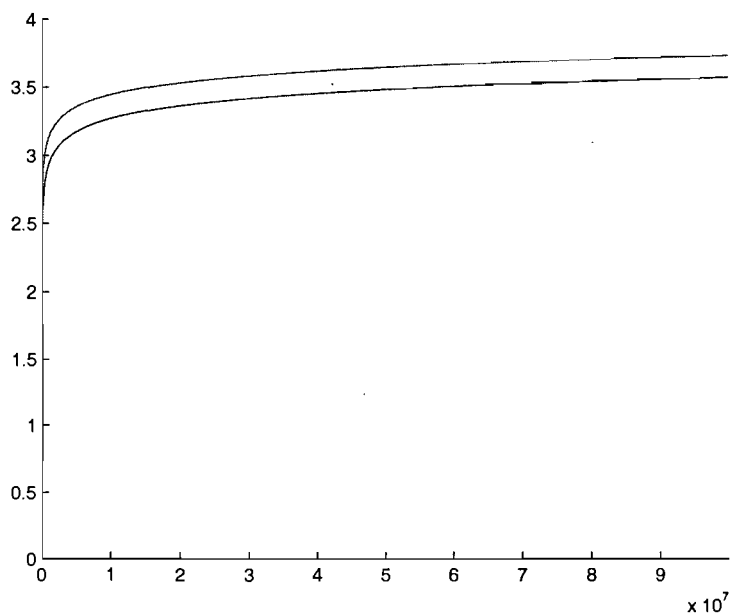


FIG. 3.8. $\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}$ et son asymptotique

3.6. PROBLÈME DE NEUMANN

Considérons encore une fois l'équation (1.1.2)

$$\Delta f + \lambda f = 0$$

sur le triangle D , mais cette fois, avec la condition au bord de Neumann

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0$$

où n est le vecteur normal au bord.

Les valeurs propres et les fonctions propres de ce problème sont très semblables à celles du problème de Dirichlet. En effet, Pinsky (voir [P]) prouve que les valeurs propres sont aussi les nombres de la forme

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{16\pi^2}{27} \right) (m^2 + n^2 - mn)$$

avec pour seules conditions sur m et n

$$m, n \in \mathbb{Z}$$

$$m + n \in 3\mathbb{Z}$$

Les valeurs propres sont les combinaisons linéaires des fonctions de la forme

$$f(x, y) = \sum_{(m, n)} e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2n-m)y}{\sqrt{3}}\right)} \quad (3.6.1)$$

où la somme se fait sur les 6 paires (3.1.6).

Pinsky démontre ce résultat de façon similaire au problème de Dirichlet. Il considère les fonctions propres du parallélogramme \tilde{D} et le sous espace de $L^2(\tilde{D})$

$$H_2 = \left\{ f \in L^2(\tilde{D}) : R_i f = +f, i = 1, 2, 3 \right\}$$

(Voir Section 3.1 pour la définition des R_i) La différence avec H donné en (3.1.9) est le signe positif devant f .

La restriction des fonctions de H_2 sur le domaine D détermine les fonctions propres du triangle équilatéral avec la condition de Neumann.

Les 2 différences à noter par rapport au problème de Dirichlet sont les suivantes. Premièrement, les coefficients dans la somme de l'équation (3.6.1) sont égaux pour chacune des 6 paires ; il n'y a pas de changement de signe. Deuxièmement, les 6 paires énoncées en (3.1.6) ne sont pas toujours distinctes. Si $m = 2n$, $n = 2m$ ou $n = -m$, il n'y aura que 3 paires distinctes.

Cela a un effet direct sur le calcul de la multiplicité. En effet, pour une valeur propre λ , on devra séparer en deux ensembles les points (m, n) à compter de \mathbb{Z}^2 qui sont tels que $\lambda_{mn} = \lambda$. Le premier ensemble, E_1 contiendra les points qui génèrent 6 paires distinctes et le second, E_2 , les points qui ne génèrent que 3 paires distinctes. La multiplicité de λ sera ainsi donnée par

$$\frac{1}{6} \text{card}(E_1) + \frac{1}{3} \text{card}(E_2)$$

3.6.1. Fonction de compte

L'approximation de la fonction de compte pour le problème de Neumann doit aussi considérer les ensembles E_1 et E_2 . En effet, on peut estimer le nombre de points total à compter par l'aire de l'ellipse (la même que pour le problème de Dirichlet, voir figure 3.1). On soustrait ensuite le nombre de pois blancs (les points de l'ensemble E_2). On divise le résultat par 6 et on ajoute le tiers des pois blancs.

Ainsi, on obtient, en comparaison avec l'équation (3.3.4)

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \frac{\frac{A(\lambda)}{3} - B(\lambda)}{6} + \frac{B(\lambda)}{3} + E(\lambda) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda - \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + \frac{3}{2\pi}\sqrt{\lambda} + E(\lambda) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda + \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + E(\lambda) \end{aligned}$$

On peut appliquer la loi de Weyl pour obtenir une première approximation du terme d'erreur

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda + \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

On peut faire exactement le même changement de variable donné à la section 3.3.3.1. Cela nous permettra d'appliquer, de la même façon que pour le problème de Dirichlet, le théorème de Huxley (2.3.1) et d'obtenir le résultat suivant

Théorème 3.6.1. *Pour le problème de Neumann sur le triangle équilatéral, la fonction de compte est asymptotiquement égale à*

$$N(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\lambda + \frac{3}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{131}{416}}(\log \lambda)^{\frac{18627}{8320}}).$$

Remarque 3.6.1. *La fonction de compte sans multiplicité $n(\lambda)$ pour le problème de Neumann correspond alors au nombre d'entiers positifs plus petits ou égaux à $\frac{9\lambda}{16\pi^2}$ pouvant s'écrire sous la forme $3u^2 + v^2 + 3uv$. Cela correspond exactement à la fonction $s_2(\frac{9\lambda}{16\pi^2})$ de la section 3.5.3 sans le terme d'erreur qu'on retrouvait pour le cas du problème de Dirichlet.*

CONCLUSION

En résumé, dans ce mémoire, on a étudié le spectre du triangle équilatéral en le représentant par des points entiers sur une ellipse ou par des formes quadratiques binaires, ce qui nous a amenés à comparer les résultats de Lamé et de Pinsky. Aussi, par un résultat de Huxley, on a amélioré la borne supérieure du terme d'erreur de la loi de Weyl pour le tore plat carré et pour le triangle équilatéral pour les conditions de Dirichlet et de Neumann. Finalement, on a tenté de découvrir, par des résultats numériques, de quelle façon la multiplicité moyenne des valeurs propres se comporte vers l'infini en considérant le problème de Dirichlet et on a utilisé une constante équivalente à la constante de Landau-Ramanujan.

L'étude du spectre du triangle équilatéral est loin d'être complète. Il est facile d'imaginer d'autres voies à explorer.

On pourrait continuer les calculs des fonctions de compte avec un plus grand nombre de valeurs propres et considérer le problème de Neumann plutôt que celui de Dirichlet, car la fonction de compte sans multiplicité correspond mieux à la fonction s_2 considérée dans le calcul de la constante K_2 , l'équivalent de la constante de Landau-Ramanujan à la section 3.5.3.

Aussi, on pourrait observer le comportement du spectre du triangle équilatéral en y imposant des conditions mixtes au bord. Finalement, après avoir borné supérieurement le terme d'erreur de la loi de Weyl, il serait pertinent de tenter de trouver une meilleure borne inférieure.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bé1] BÉRARD, P. H., *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1986.
- [Bé2] BÉRARD, P. H., *Remarque sur la conjecture de Weyl*, *Compositio Mathematica*, Vol.48, Fasc 1, 1983, p.35-53.
- [BGM] BERGER, M., P. GAUDUCHON ET E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [Br] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle*, Théorie et application, Dunod, Paris, 1999.
- [Bu] BUCHMANN, J. ET U. VOLLMER, *Binary Quadratic Forms*, An Algorithmic Approach, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2007.
- [C] CHAVEL, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, United Kingdom Edition, Academic Press, 1984.
- [É] ÉFIMOV, N., *Formes quadratiques et matrices*, Édition Mir, Moscou, 1976.
- [GHL] GALLOT, S., D. HULIN ET J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, third edition, Springer, Germany, 2004.
- [G] GRANVILLE, A., *Binary Quadratic forms*, MAT6684, course notes, <http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/Courses/MAT6684.W07.html>, 2007.
- [H1] HARDY, G. H., *On Dirichlet's divisor problem*, *Proc. London Math. Soc.*, s2-15, 1917, p.1-25.
- [H2] HARDY, G. H., *The average order of the arithmetical function $P(x)$ and $\Delta(x)$* , *Proc. London Math. Soc.*, s2-15, 1917, p.192-213.
- [HW] HARDY, G. H. et E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Second edition, Oxford, Clarendon press, 1945.
- [Hu] HUXLEY, M. N., *Exponential sums and lattice points III*, *Proc. London. Math. Soc.*, (3) 87, 2003, p.591-609.

- [I] IVRII, V. Y., *The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*, Functional Anal. Appl. 14, no. 2, p.25-34, 1980.
- [K] KOLLER, J., *Formes quadratiques binaires I*, Université de Fribourg, Suisse, <http://commonweb.unifr.ch/math/seminars/ThemSeminarSS07/Expose5.pdf>, 2007.
- [Lam] LAMÉ, G., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, Bachelier, 1852.
- [Lan] LANDAU, E., *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate*, Arch. Math. Phys., (3), vol. 13, 1908, 305-312.
- [M] MELROSE, R. B., *Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary*, Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., p.257-274, 1980.
- [P] PINSKY, M. A., *The Eigenvalues of an Equilateral Triangle*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 11, No. 5, September 1980.
- [R] RADZIWIŁŁ, M., *Communication privée*.
- [SV] SAFAROV, YU. ET D. VASSILIEV, *The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators*, American Mathematical Society, 1998.
- [S] SHIU, P., *Counting sums of two squares : the Meissel-Lehmer method*. Math. Comp. 47, 1986, no. 175, p.351-360.
- [S] SIERPINSKI, W., *Elementary theory of numbers*, Polska akademia nauk, Warszawa, 1964.
- [W] WEISSTEIN, E. W., *Elementary theory of numbers*, "Landau-Ramanujan Constant." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Landau-RamanujanConstant.html>

Annexe A

CALCUL DES VALEURS PROPRES

Dans l'exemple du programme de calcul des valeurs propres de la section suivante, les valeurs minimale et maximale des valeurs propres sont respectivement 1×10^7 et 5×10^7 .

A.1. PROGRAMME DE CALCUL DES VALEURS PROPRES

```
%Calcul des valeurs propres à partir d'un certain point
```

```
%Borne inf et sup des valeurs propres  $16\pi^2(m^2+n^2-mn)/27$ 
```

```
minlambda=1e7;
```

```
maxlambda=5e7;
```

```
%Valeur minimale et maximale de la valeur de  $m^2+n^2-mn$ 
```

```
minv=27*minlambda/(16*pi*pi);
```

```
maxv=27*maxlambda/(16*pi*pi);
```

```
% temps de calcul des valeurs propres - debut
```

```
tic;
```

```
%initialisation
```

```
i=1;
```

```
%Calcul (section de l'ellipse totalement dans le premier quadrant)
```

```
for m=ceil(sqrt(minv/3)):1:floor(2*sqrt(maxv/3))
    for n=ceil(m/2):1:2*m
        if mod(m+n,3)==0 && m~=2*n && n~=2*m
            v=m*m+n*n-m*n;
            if v<=maxv
                if v>minv
                    A(1,i)=v;
                    i=i+1;
                end
            else
                break
            end
        end
    end
end

% timer calcul valeurs propres - fin
t_vp = toc;

% timer sort - debut
tic;

B=sort(A);

% timer sort - fin
t_sort = toc;

%timer écriture - début
tic;

for i2=1:1:length(B)
```

```
fid_calcul = fopen('vp1_5e7.txt','at');  
fprintf(fid_calcul,'%d\n',B(1,i2));  
fclose(fid_calcul);  
  
end  
  
%timer écriture - fin  
t_write=toc;
```

Annexe B

CALCUL DES FONCTIONS DE COMPTE

Le programme suivant est un exemple pour calculer les fonctions de compte $N(\lambda)$ et $n(\lambda)$ avec une valeur maximale de λ de $1,5 \times 10^7$. On suppose que les fichiers des valeurs propres sont déjà existants et le fichier contenant seulement une fois chaque valeur propre aussi.

B.1. PROGRAMME DE CALCUL DES FONCTIONS DE COMPTE

```
%Fonction de compte N et n

%Temps lecture - début
tic;

%Lecture des valeurs propres

vp1e7=fopen('val_pro_1e7.txt');
A1=fscanf(vp1e7,'%d');
fclose(vp1e7);

vp1_5e7=fopen('vp1_5e7.txt');
A2=fscanf(vp1_5e7,'%d');
fclose(vp1_5e7);

VP=[A1;A2];
```

```
%Temps lecture - fin
t_lecture=toc

%maxlambda et pas
maxlambda=16*pi*pi*VP(length(VP))/27;
pas=maxlambda/1000;

%Vecteur des valeurs de lambda
Lambda=1:pas:maxlambda;

%temps N début
tic;

%Calcul de N
for i = 1:1:length(Lambda)
    grand_N(i) = length(find(VP<=27*Lambda(i)/(16*pi*pi)));
end;

%temps N fin
t_grandN=toc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%temps lecture n - début
tic;

%Calcul de n

%Lecture des valeurs propres une fois chaque seulement
vpmult=fopen('VPpetitn.txt');
```

```
C=fscanf(vpmult,'%d');
fclose(vpmult);

%temps lecture n - fin
t_lecn=toc

%temps compte n - début
tic;

%Compte
for i = 1:1:length(Lambda)
    petit_n(i) = length(find(C<=(27/16)*(pi.^(-2))*Lambda(i)));
end;

%temps compte n - fin
t_petitn=toc

%N sur n
for i=1:1:length(Lambda)
    Nsur(i)=grand_N(i)./petit_n(i);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Graphique N sur n

plot(Lambda,Nsurn)
```