Université de Montréal

Sur les comportements locaux de polynômes et polynômes trigonométriques

par

Mohamed Amine Hachani

Département de mathématiques et statistique
Faculté des études supérieures

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Novembre 2008

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Sur les comportements locaux de polynômes et polynômes trigonométriques

présenté par :

Mohamed Amine Hachani

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

André Giroux
(président-rapporteur)

Qazi Ibadur Rahman
(directeur de recherche)

Khalid Benabdallah
(membre du jury)

En Abrégé

Soient $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ un polynôme donné (ou $t(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\{a_\nu \cos(\nu z) + b_\nu \sin(\nu z)\}$ un polynôme trigonométrique) de degré n et z_0 un point d'un certain ensemble $\mathcal{E}$. Supposons que le polynôme P est de module majoré par 1 sur $\mathcal{E}$. Connaissant la valeur de P en z_0, nous cherchons à savoir le comportement de ce polynôme au voisinage de ce point. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{E}$ peut être l'intervalle $[-1, 1]$, et z_0 l'une de ses extrémités, disons 1. En supposant que P s'annule en z_0 on peut se demander quel est le point le plus proche de z_0 où $|P(z)|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$. Le point z_0 peut éventuellement être l'origine, dans ce cas, si nous supposons que P atteint son maximum à l'origine, nous serons interessés à chercher le zéro de P qui lui est le plus proche, dans une direction donnée. Des questions semblables peuvent être aussi posées concernant les fonctions entières de type exponentiel qui englobent les polynômes et les polynômes trigonométriques. Il est à signaler, dans ce cas, que l'axe réel est parmi les ensembles $\mathcal{E}$ les plus appropriés. Même si ces questions peuvent apparaitre simples, nous verrons que les réponses sont loins l'être.

Mots-clefs : Inégalités - polynômes - polynômes trigonométriques - polynômes de Tchebycheff de première espèce - comportement local - fonctions entières de type exponentiel.

Abstract

Let $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ be a given polynomial (or $t(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\{a_\nu \cos(\nu z) + b_\nu \sin(\nu z)\}$ a trigonometric polynomial) of degree n and z_0 a point wich lies in some set $\mathcal{E}$. Suppose that the absolute value of P is less than or equal to 1 over $\mathcal{E}$. Knowing the value of P at z_0, we want to describe the local behaviour of this polynomial in a neighbourhood of this point. For example, $\mathcal{E}$ may be the interval $[-1, 1]$, and z_0 one of its end points, say 1. Supposing that P vanishes at z_0, how near to this point can there be a critical point of P in $[-1, 1]$? Possibly, z_0 may be the origin. If we suppose that P has a maximum at the origin, then how near to this point can there be a zero of P, in a given direction? The same questions can be asked for entire functions of exponential type wich cover polynomials and trigonometric polynomials. In this case, the suitable set for $\mathcal{E}$ is the real axis $\mathbb{R}$. Even if these questions may be simple to ask, we will see in this dissertation that their answers are generally not.

Key words : Inequalities - polynomials - trigonometric polynomials - Tchebycheff polynomials of the first kind - local behaviour - entire functions of exponential type.

Dédié à mes parents

Naïma et Haroun

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier de tout mon coeur, mon directeur, Monsieur le professeur Qazi Ibadur Rahman, pour sa grande patience, sa disponibilité illimitée et son soutient (tant scientifique que moral) pendant les moments critiques. Il a été pour moi un encadreur exceptionnel.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis, notement Zied Ben Salah et Félix Tinawi, et surtout mes deux soeurs, Hejer et Feten, qui n'ont jamais cessé de m'encourager malgré leurs situations difficiles.

Finalement, un grand merci au Gouvernement Tunisien, représenté par la Mission Universitaire de Tunisie, pour le support financier indéniable.

Table des matières

Liste des figures

1 Introduction

L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, soient α et β deux racines consécutives de cette équation. La dérivée s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β ; démontrer que cette valeur est comprise entre

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

n désignant le degré de l'équation.

(Laguerre)

C'était l'énoncé, tel qu'il était publié, de "la question 1338" posée par E. Laguerre. Une preuve à cet énoncé a été publiée par E. Cesàro [**5**], mais le rédacteur de la revue a affirmé que deux autres personnes l'ont trouvé ; même si c'est un peu surprenant, le nom de Laguerre ne figure pas parmi ces deux noms. Il est naturel que ce résultat soulève d'autres questions, comme la restriction proposée par Laguerre sur les zéros du polynôme. Par exemple, à quel point la restriction sur les zéros, qu'ils soient réels, est nécessaire ? P. Montel [**13**] a montré que ce n'est pas nécessaire de les supposer tous réels mais plutôt il suffit qu'ils soient à l'extérieur de la bande $-1 < \Re z < 1$. Peut-on affaiblir davantage les hypothèses ? La réponse est affirmative ; en effet, J. von Sz. Nagy a pû les affaiblir en exigeant que les zéros soient à l'extérieur du disque unité. Nous présenterons, en détails, la généralisation de M. Arsenault et Q. I. Rahman, qui ont aboutit à la même conclusion pour une classe de polynômes qui contient celle considérée par J. von Sz. Nagy. Nous présenterons aussi la généralisation d'un problème lié à celui de Laguerre et formulé par Turán. Dans la même feuille qui contient son théorème, Turán avait posé deux autres questions, la première était la suivante : étant donné un polynôme P de degré n dont le maximum sur le disque unité est atteint en 1, quel est l'arc du cercle unité, le plus long, qui contient 1 mais ne contient aucun zéro de P ? La seconde question était une sorte de généralisation de la question que nous venons de mentionner, dans le sens qu'il demandait le voisinage le plus large dans $\mathbb{C}$ de 1 qui ne contient aucun zéro de P. La réponse à la première question est l'arc unitaire d'ouverture $|\arg z| < \frac{\pi}{n}$, nous la détaillerons dans la section consacrée au problème de Turán. Par contre, la seconde question a fait l'objet d'un article de C. Hyltén-Cavallius [**12**]. Nous esquisserons sa réponse dans une section indépendante, mais nous recommandons fortement la lecture de son article, puisque ce dernier est extrêmement riche en idées, méthodes et résultats. Il est à signaler aux lecteurs, que cet article manque beaucoup de détails et d'explications, aussi, nous recommandons la lecture du mémoire de F. Tinawi [**22**] qui porte sur ce sujet.

Nous entamerons ensuite une section sur certaines inégalités polynomiales et leurs polynômes extrémaux. Dans cette section nous examinerons deux inégalités de I. Schur. Nous donnerons aussi la démonstration d'une inégalité énoncée par R. P. Boas. En comparant les détails qui seront donnés dans cette démonstration et la preuve donnée par R. P. Boas, le lecteur constatera que les détails omis par R. P. Boas sont loins d'être triviaux. Quelques inégalités établies par Aziz seront aussi présentées et commentées. Nous démontrerons l'une de ces inégalités par un théorème sur les fonctions entières de type exponentiel obtenu récement par Dryanov, Qazi et Rahman. Nous terminons cette section par la présentation d'une inégalité élégante due à Q. I. Rahman et Q. G. Mohammad.

Dans la dernière section de ce mémoire, nous présenterons la preuve de M. A. Qazi et Q. I. Rahman du théorème suivant, "attribué à M. Riesz" : étant donné un polynôme trigonométrique n'ayant que des zéros réels simples. Alors, la distance qui sépare deux zéros consécutifs, entre lesquels figure l'extrémum de module le plus petit, n'excède jamais $\frac{\pi}{n}$. Ce résultat joue un rôle essentiel dans la preuve d'un théorème de P. Erdős qui sera cité et épilogué.

Note

Tout au long de ce mémoire, T_n désignera le polynôme de Tchebycheff de degré n de première espèce défini par la relation

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

2 Sur une Question Posée par E. Laguerre

2.1 Une Question de E. Laguerre

Citée dans la littérature comme "la question 1338", la question suivante a été posée par E. Laguerre (voir [**5**]) :

"Étant donné un polynôme P à coefficients réels, de degré n et qui n'admet que des zéros réels tel que -1 et $+1$ sont deux zéros consécutifs de ce polynôme ; quel est le zéro de $P'(z)$ le plus proche de -1 et le zéro de $P'(z)$ le plus proche de $+1$?"

Remarquons que, sauf possiblement pour une constante multiplicative, les coefficients de P sont réels, quelle serait la réponse si nous supposons que les zéros du polynôme P sont à l'extérieur de la bande verticale $-1 < \Re z < 1$? Quelle serait aussi la réponse si nous supposons seulement que les zéros de P sont à l'extérieur du disque unité ou si nous ne mettons aucune contrainte autre que P est à coefficients réels ? Signalons ici que l'intervalle $[-1, 1]$ n'est qu'une simple normalisation et peut être remplacé par un intervalle $[a, b]$ quelconque.

2.2 Réponse, Généralisations et Résultats Connexes à la Question de E. Laguerre

En l'année 1885, et dans son article intitulé "Solution de la question 1338", E. Cesàro [**5**] a trouvé et publié une réponse simple à cette question. En effet, Cesàro a affirmé que $\max_{-1<x<1} |P(x)|$ ne peut être atteint que sur $\left[-1 + \frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right]$. De plus nous voyons que les polynômes

$$P_1(x) = c_1(x + 1)(x - 1)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad P_2(x) = c_2(x - 1)(x + 1)^{n-1}$$

sont extrémaux dans le sens que P_1 satisfait les conditions de Laguerre, sa dérivée s'annule en $1 - \frac{2}{n}$ et s'annule nulle part sur $[-1, 1]$ et que P_2 satisfait les conditions de Laguerre, sa dérivée s'annule en $-1+\frac{2}{n}$ et s'annule nulle part sur $[-1,1]$.

Remarque

Comme l'avait mentionné le rédacteur de la revue, où l'article de Cesàro a été publié, le problème formulé par E. Laguerre a été aussi résolu par Morel-Blanc et Jubel-Rénoy. Il n'est pas clair si Laguerre avait ou non une réponse à sa question.

2.2.1 L'Observation de P. Montel.

Il a été mentionné par P. Montel [**13**, p. 119] que la question formulée par Laguerre aurait la même réponse si on suppose que le polynôme en vigueur n'ait aucun zéro dans la bande $-1 < \Re z < 1$ avec la restriction que ses coefficients soient réels.

2.2.2 L'Observation de J. von Sz. Nagy.

J. von Sz. Nagy est allé encore plus loin [**14**], il a démontré que si P est un polynôme de degré n à coefficients réels, s'annulant en $+1$ et -1 et n'ayant pas de zéros à l'intérieur du disque unité, alors, $P'(z)$ n'aura pas de zéros sur

$$\left(-1,-1+\frac{2}{n}\right)\cup\left(1-\frac{2}{n},1\right).$$

2.2.3 Le Point de Vue de P. Turán

Dans son article intitulé "On rational polynomials" [**24**, p. 106], P. Turán a considéré la question de Laguerre d'un point de vue différent. En effet, Turán n'est plus intéressé à garder la même conclusion, mais plutôt a supposé que le polynôme P est à coefficients réels tel que -1 et $+1$ en sont deux zéros consécutifs. Il considère alors le problème suivant : Soit P un polynôme de degré n et à coefficients réels dont -1 et $+1$ sont deux zéros consécutifs, dans le sens que P ne s'annule pas sur $(-1,1)$ mais tout point de $\mathbb{C}\setminus(-1,1)$ peut être un zéro de P. Quel est alors le zéro de $P'(z)$ le plus proche de 1. La réponse varie suivant que n est pair ou impair, elle est contenue dans le théorème 1.

Théorème 1. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient P un polynôme de degré n et à coefficients réels tel que -1 et $+1$ sont deux zéros consécutifs et ξ le point de l'intervalle $(-1,1)$ tel que*

$$\max_{-1\leq x\leq 1} P(x) = P(\xi).$$

Alors

$$-\cos\frac{\pi}{n} \le \xi \le \cos\frac{\pi}{n} \quad \text{si } n \text{ est pair} \tag{1}$$

et

$$-\frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \le \xi \le \frac{3\cos\frac{\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \quad \text{si } n \text{ est impair.} \tag{2}$$

Ces deux estimations sont les meilleures possibles.

Preuve du Théorème 1.

Soit n un entier naturel pair. Nous nous restreindrons à l'inégalité de droite, l'inégalité de gauche se traite de la même façon. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $P(\xi) = 1$ et que $0 < P(x) \le 1$ pour $-1 < x < 1$. Soient $n \ge 4$ pair et H_n le polynôme défini par

$$H_n(x) = \frac{1}{2}\left(1 - T_n(x)\right).$$

Remarquons que $0 \le H_n(x) \le 1$ pour $-1 \le x \le 1$ et que

$$H_n\left(\cos\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) = 1 \quad \text{et} \quad H_n\left(\cos\frac{2\nu}{n}\pi\right) = 0 \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right).$$

Pour $\varepsilon > 0$, posons $S(x) := S_\varepsilon(x) := (1-\varepsilon)P(x) - H_n(x)$; c'est un polynôme de degré au plus n. Pour $\nu = 2, 3, \ldots, n$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, nous avons

$$S\left(\cos\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) = (1-\varepsilon)P\left(\cos\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) - 1 < 0$$

et

$$S\left(\cos\frac{2\nu}{n}\pi\right) = (1-\varepsilon)P\left(\cos\frac{2\nu}{n}\pi\right) > 0;$$

il découle du théorème sur les valeurs intermédiaires que S admet au moins un zéro dans chaque intervalle $\left(\cos\frac{\nu}{n}\pi, \cos\frac{\nu-1}{n}\pi\right)$. Supposons par l'absurde que ξ est dans $\left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right)$. Pour $\varepsilon > 0$ aussi petit que $(1-\varepsilon) > H_n(\xi)$, nous obtenons

$$S\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = (1-\varepsilon)P\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) - 1 < 0$$

et

$$S(\xi) = (1-\varepsilon)P(\xi) - H_n(\xi) > 0,$$

de plus,

$$S(1) = (1-\varepsilon)P(1) - H_n(1) = 0.$$

Donc S admet au moins deux zéros dans l'intervalle $\left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right]$, ainsi nous comptons $n+1$ zéros pour le polynôme S qui est de degré au plus n ce qui entraine que $(1-\varepsilon)P \equiv H_n$ pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que $(1-\varepsilon) > H_n(\xi)$, mais ceci est absurde car H_n est indépendant de ε.

Nous achevons cette démonstration en montrant que cet intervalle est optimal. Le polynôme H_n s'annule en $h_\nu := \cos\left(\frac{2\nu}{n}\pi\right)$ et prend la valeur 1 en $h'_\nu := \cos\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right)$ avec $\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ et $h_0 := 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et fixons $\delta > 0$ assez petit. Considérons le polynôme $H^\natural_{n,\varepsilon}$ défini par

$$H^\natural_{n,\varepsilon}(x) := \varepsilon(1-x^2)\prod_{\nu=2}^{\frac{n}{2}-1}\left(x - \cos\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) + \delta\right)\left(x - \cos\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) - \delta\right).$$

Nous voyons que $H^\natural_{n,\varepsilon}(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)) > 0$, que $H^\natural_{n,\varepsilon}\left(\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)\right) > 0$ et que

$$H^\natural_{n,\varepsilon}\left(\cos\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right)\right) < 0, \qquad \nu \in \{2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}.$$

Posons

$$H^\star_{n,\varepsilon}(x) := H_n(x) + H^\natural_{n,\varepsilon}(x)$$

et

$$H_{n,\varepsilon}(x) := \frac{H^\star_{n,\varepsilon}(x)}{\max_{-1\le x\le 1}\left(H^\star_{n,\varepsilon}(x)\right)}.$$

Il est à signaler ici que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $H_{n,\varepsilon}(x)$ est un polynôme de degré n, strictement positif sur l'intervalle $(-1,1)$, il admet -1 et $+1$ comme zéros et n'excède pas 1 pour $x \in (-1,1)$, de plus $H_{n,\varepsilon}$ converge uniformément vers H_n lorsque $\varepsilon \to 0$. Par le théorème d'Hurwitz (voir Appendice) le maximum absolu de $H_{n,\varepsilon}$ converge vers le maximum absolu de H_n, donc le maximum absolu de $H_{n,\varepsilon}$ est au voisinage gauche de $\cos\frac{\pi}{n}$ et tend vers ce point, ce qui implique que la borne $\cos\frac{\pi}{n}$ est le cas limite des maximums absolus. Par la suite, et compte-tenu de la symétrie du problème, l'intervalle $\left(-\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{\pi}{n}\right)$ est optimal.

Supposons maintenant que n est impair. Sans perdre de généralité, nous supposons que $P(\xi) = 1$. Posons

$$R_n(x) = \frac{1}{2}\left[1 - T_n\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2} + \frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}x\right)\right],$$

et

$$P_\varepsilon(x) = (1-\varepsilon)P(x) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Nous voyons que $0 \le R_n(x) \le 1$ pour $-1 \le x \le 1$, que R_n s'annule en

$$\eta_\nu := \frac{2\cos\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right) - 1 + \cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2},$$

et qu'il prend la valeur 1 en

$$\rho_\mu := \frac{2\cos\left(\frac{2\mu-1}{n}\pi\right) - 1 + \cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

D'autre part, nous avons

$$R_n(1) = R_n(-1) = R_n'(-1) = 0 = P_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(-1).$$

Remarquons que

$$R_n(\eta_\nu) = 0 < P_\varepsilon(\eta_\nu) \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2},$$

et que

$$R_n(\rho_\mu) = 1 > P_\varepsilon(\rho_\mu) \quad \text{pour} \quad \mu = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2};$$

donc le polynôme $P_\varepsilon - R_n$ admet au moins un zéro dans chaque intervalle (η_ν, ρ_ν) et un zéro dans chaque intervalle $(\rho_{\nu+1}, \eta_\nu)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}$, c'est-à-dire en tout il y a $(n-3)$ zéros de $P_\varepsilon - R_n$ sur $\left(\rho_{\frac{n-1}{2}}, \rho_1\right)$. D'autre part, l'intervalle $\left[-1, \rho_{\frac{n-1}{2}}\right)$ contient au moins deux zéros de $P_\varepsilon - R_n$.
En effet,

- Si $P_\varepsilon(x) < R_n(x)$ pour $-1 < x < \rho_{\frac{n-1}{2}}$, alors -1 est nécessairement un zéro double de P_ε, par la suite $P_\varepsilon - R_n$ admet au moins deux zéros sur $\left[-1, \rho_{\frac{n-1}{2}}\right)$.
- S'il existe $x_0 \in \left(-1, \rho_{\frac{n-1}{2}}\right)$ tel que $P_\varepsilon(x_0) > R_n(x_0)$, alors $P_\varepsilon - R_n$ admet aussi au moins deux zéros sur $\left[-1, \rho_{\frac{n-1}{2}}\right)$.

Supposons maintenant que

$$\xi > \frac{3\cos\frac{\pi}{n} - 1}{1 + \cos\frac{\pi}{n}} = \rho_1.$$

Nous remarquons que $P(\xi) = 1 > R_n(\xi)$, donc pour ε assez petit,

$$P_\varepsilon(\xi) = (1 - \varepsilon) > R_n(\xi),$$

de plus $P_\varepsilon(\rho_1) < 1 = R_n(\rho_1)$, ce qui entraine que l'intervalle $(\rho_1, 1]$ admet au moins deux zéros de $P_\varepsilon - R_n$ et ce dernier aura au moins $(n+1)$ zéros, mais ceci n'est vrai que si $P_\varepsilon \equiv R_n$ pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que $P_\varepsilon(\xi) > R_n(\xi)$, ce qui est impossible. Ainsi, nous avons

$$\xi \leq \frac{3\cos\frac{\pi}{n} - 1}{1 + \cos\frac{\pi}{n}}. \qquad \square$$

Dans la prochaine proposition, nous nous proposons d'affaiblir les hypothèses du théorème précédent en supposant seulement que $P\left(\cos\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right)\right) \leq 1$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$.

Proposition 1. *Soit $n \geq 4$ un entier naturel pair et posons*

$$H_n(x) = \frac{1}{2}\left(1 - T_n(x)\right).$$

Soit P un polynôme de degré n, s'annulant aux points -1, $+1$ et strictement positif sur l'intervalle $(-1, +1)$. Supposons que

$$P\left(\cos\left(\frac{2\nu - 1}{n}\pi\right)\right) \leq 1 \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right).$$

Alors

$$P(x) < H_n(x) \qquad \left(x \in \left(-1, -\cos\frac{\pi}{n}\right) \cup \left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right)\right).$$

Preuve de la Proposition 1.

Evidement, il suffit de montrer l'inégalité pour $\cos\frac{\pi}{n} < x < 1$. Montrons d'abord que

$$P(x) \leq H_n(x) \qquad \text{pour } x \in \left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $y_0 \in \left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right)$ tel que $P(y_0) > H_n(y_0)$. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ suffisamment petit pour que $(1 - \varepsilon)P(y_0)$ reste plus grand que

$H_n(y_0)$. Alors, le polynôme $(1-\varepsilon)P(x) - H_n(x)$ admet au moins deux zéros sur $\left[\cos\frac{\pi}{n}, 1\right]$ (y compris le zéro $+1$), au moins un zéro dans chacun des intervalles ouverts $\left(\cos\frac{\nu}{n}\pi, \cos\frac{\nu-1}{n}\pi\right)$, $\nu = 2, 3, \ldots, n-1$ et au moins un zéro dans l'intervalle $\left[-1, -\cos\frac{\pi}{n}\right)$. Ainsi nous distinguons au moins $(n+1)$ zéros du polynôme $(1-\varepsilon)P(x) - H_n(x)$ qui est de degré au plus n ce qui est possible seulement dans le cas où ce polynôme est identiquement nul, i.e. $(1-\varepsilon)P \equiv H_n$, ce qui est absurde. Nous déduisons donc que

$$P(x) \leq H_n(x) \qquad \left(\cos\frac{\pi}{n} \leq x \leq 1\right).$$

Montrons maintenant que cette inégalité est stricte. Supposons par l'absurde qu'il y a égalité entre ces deux polynômes en un point y_0 de cet intervalle. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, définissons le polynôme

$$H_{n,\varepsilon}(x) := H_n(x) + \varepsilon(1-x^2)(x-y_0)^2.$$

$H_{n,\varepsilon}$ admet au moins trois intersections avec P dans la branche correspondante à l'intervalle $\left(\cos\frac{\pi}{n}, 1\right)$ et au moins une intersection dans chacune des $n-1$ branches qui restent, ce qui signifie que le polynôme $P - H_{n,\varepsilon}$ de degré au plus n admet $(n+2)$ zéros, c'est-à-dire que

$$P \equiv H_{n,\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est impossible. Ainsi

$$P(x) < H_n(x) \qquad \left(\cos\frac{\pi}{n} \leq x \leq 1\right). \qquad \square$$

Remarque

- Le résultat du théorème 1 reste vrai si ξ prend la valeur $\cos\frac{\pi}{n}$. En effet, dans ce cas
$$S(\xi) = 1 - H_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(1) = 0.$$
c'est-à-dire que nous dénombrons toujours $(n+1)$ zéros de S et nous obtenons ainsi la même absurdité.
- Dans le cas $n = 2$, notre classe de polynômes s'annulant en $+1$ et -1 est réduite à $P(z) = c(z^2-1)$ et $\xi = 0$; donc le théorème reste encore valide.

En second lieu, Turán propose le problème suivant : Soit G un polynôme de degré n dont le maximum sur le disque unité est atteint en $+1$ et vaut 1. Deux questions se posent :

– Quel est le zéro le plus proche de 1 sur le cercle unité ?

– Quel est le plus grand voisinage de 1 dans le plan complexe qui ne contient pas des zéros de G ?

La réponse à la première question est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit G un polynôme de degré n dont le maximum sur le disque unité est atteint en 1 et vaut 1. Alors G ne peut avoir de zéros sur l'arc unité $|\arg z| < \frac{\pi}{n}$, de plus $G\left(e^{\pm i\frac{\pi}{n}}\right) = 0$ si, et seulement si, $G(z) = c(z^n + 1)$.*

Preuve du Théorème 2.

Posons

$$\psi(\theta) = \left|G\left(e^{i\theta}\right)\right|^2.$$

C'est un polynôme trigonométrique de degré n qui est non négatif et tel que

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} \psi(\theta) = \psi(0) = 1.$$

Considérons le polynôme

$$Q(z) = \frac{1+z^n}{2}.$$

Alors nous avons

$$\left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}} + e^{-i\frac{n\theta}{2}}\right)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{n\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(n\theta)}{2}.$$

Posons

$$K(\theta) := \frac{1+\cos(n\theta)}{2};$$

alors

$$K\left(\frac{2\nu\pi}{n}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad K\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Comme $0 \leq \psi(\theta) \leq 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ alors le polynôme trigonométrique ψ rencontre K au moins une fois dans chaque branche de ce dernier qui monte de 0 à 1 ou descend de 1 à 0, ainsi le polynôme trigonométrique $\Phi(\theta) = \psi(\theta) - K(\theta)$ de degré n admet au moins un zéro dans chaque intervalle

$$\frac{k}{n}\pi \leq \theta \leq \frac{k+1}{n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots 2n-2).$$

D'autre part, il est clair que l'origine est un point maximum de ψ et de K et les deux maximums sont égaux à 1 donc l'origine est un zéro, de multiplicité au moins 2, du polynôme trigonométrique Φ. Si nous supposons maintenant que le résultat n'est pas vrai, il existe alors $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{n}$ tel que $G\left(e^{\mathrm{i}\theta_0}\right) = 0$, comme $K(\theta)$ est un polynôme trigonométrique non-négatif sur l'axe réel alors

$$\Phi(\theta_0) = \left|G\left(e^{\mathrm{i}\theta_0}\right)\right|^2 - K(\theta_0) = -K(\theta_0) < 0,$$

de plus

$$\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left|G\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)\right|^2 - K\left(\frac{\pi}{n}\right) = \psi\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0.$$

Donc $\Phi(\theta)$ admet au moins un zéro sur l'intervalle $\left(\theta_0, \frac{\pi}{n}\right)$. Ainsi nous dénombrons $2n+1$ zéros du polynôme trigonométrique $\Phi(\theta)$, qui est de degré au plus $2n$, ce qui nous amène à

$$\psi \equiv K;$$

or ceci est absurde par le fait que $\psi\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0 = K\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Donc un tel zéro θ_0 n'existe pas.

Supposons maintenant que $G\left(e^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right) = 0$. D'après ce qui précède nous venons de montrer que $\psi(\theta)$ ne peut avoir de zéros sur $\left(0, \frac{\pi}{n}\right)$, ce qui entraine que $\frac{\pi}{n}$ sera un minimum et donc un zéro double pour $\psi(\theta)$, mais il l'est déjà pour $K(\theta)$, par la suite, et par le même raisonnement que précédement, le polynôme trigonométrique $\Phi(\theta)$, de degré n, admet un zéro double en zéro, un zéro double en $\frac{\pi}{n}$ et au moins $(2n-3)$ zéros sur $\left[\frac{2\pi}{n}, \frac{2n-1}{n}\pi\right]$ donc nous dénombrons $(2n+1)$ zéros de $\Phi(\theta)$ sur une bande verticale de largeure 2π ce qui signifie que

$$\psi \equiv K.$$

Cette dernière inégalité indique que tous les n racines n^{ieme} de -1 sont des zéros de G et ce dernier est de degré n donc $G(z) = c(z^n + 1)$, mais $G(1) = 1$ donc $c = \frac{1}{2}$, ce qui conduit à

$$G(z) = \frac{z^n + 1}{2}.$$

□

Nous avons constaté que le résultat précédent est une conséquence immédiate du théorème suivant dû à Dryanov, Qazi et Rahman [**7**].

Théorème 3. *Soit f une fonction entière réelle de type exponentiel $\tau > 0$, telle que $f(0) = M$ et $f'(0) = 0$. Supposons de plus que*

$$(-1)^\nu f\left(\frac{\nu\pi}{\tau}\right) \leq M \qquad (\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}),$$

et que $f(x) = o(x)$ *pour* x *au voisinage de* $\pm\infty$. *Alors*

$$f(x) > M\cos(\tau x) \qquad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{\tau}\right),$$

sauf dans le cas où $f(z) \equiv M\cos(\tau z)$.

La réponse à la deuxième question du problème proposé par Turán sera présentée et esquissée dans la section **3**, consacrée au problème résolu par Hyltén-Cavallius.

2.2.4 La Généralisation d'Arsenault et Rahman

La classe des polynômes considérée par J. von Sz. Nagy est une sous-classe de la classe π_n des polynômes qui s'écrivent sous la forme

$$P(x) = \pm\sum_{k=0}^{n} A_k(1-x)^k(1+x)^{n-k},$$

où $A_k \geq 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. En effet, nous avons la proposition suivante due à Arsenault et Rahman [**1**].

Proposition 2. *Tout polynôme, à valeurs réelles sur l'axe réel et dont les zéros sont à l'extérieur du disque unité, peut s'écrire sous la forme*

$$P(x) = \pm\sum_{k=0}^{n} A_k(1+x)^k(1-x)^{n-k},$$

où $A_k \geq 0$ *pour* $k = 0, 1, \ldots, n$.

Preuve de la Proposition 2.

Pour commencer, soit $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n, à coefficients réels et qui n'a aucun zéro dans le demi-plan ouvert $\mathbb{P} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Alors ou bien tous les a_k sont positifs ou bien tous les a_k sont négatifs. En effet, soient $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_{n_1}$ les zéros réels de $f(z)$ et $-\alpha_j \mp i\beta_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-n_1}{2}$, ses zéros non réels. Selon l'hypothèse, les γ_ν et les α_j sont tous non-négatifs. Ainsi $f(z)$ admet la représentation suivante :

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n \prod_{\nu=1}^{n_1} (z+\gamma_\nu) \prod_{j=1}^{\frac{n-n_1}{2}} \{(z+\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)(z+\alpha_j-\mathrm{i}\beta_j)\} \\ &= a_n \prod_{\nu=1}^{n1} (z+\gamma_\nu) \prod_{j=1}^{\frac{n-n_1}{2}} \left(z^2+2\alpha_j z+\alpha_j^2+\beta_j^2\right). \end{aligned}$$

Soit maintenant $P(\zeta)$ un polynôme de degré n à valeurs réelles sur l'axe des réels et n'ayant aucun zéro dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}(0,1)$ et considérons la fonction

$$f(z) := (1+z)^n P\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

C'est un polynôme de degré n qui n'a aucun zéro dans le demi-plan $\mathbb{P}$ car

$$z \longmapsto \zeta = \frac{1-z}{1+z}$$

est une transformation de Mőbus qui envoie le cercle unité $c(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, sur l'axe des imaginaires, et l'origine sur 1 ; donc le disque unité est envoyé sur le demi-plan, contenant 1 et de frontière l'axe des imaginaires, qui est $\mathbb{P}$. D'autre part, en prenant

$$\zeta = \frac{1-z}{1+z},$$

ou de façon équivalente

$$z = \frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

et en rappelant que

$$f(z) = \pm \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

où $c_k \geq 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, nous voyons que

$$P(\zeta) = \pm \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^n} (1-\zeta)^k (1+\zeta)^{n-k}.$$

□

Conséquence.

Rappelons que nous avons signalé, dans la sous-section **2.2.2**, que si P est un polynôme de degré n à coefficients réels, ayant -1 et $+1$ comme zéros et n'ayant aucun zéro à l'intérieur du disque unité ouvert, alors $P'(z)$ n'a aucun zéro sur $\left(-1,-1+\frac{2}{n}\right) \cup \left(1-\frac{2}{n},1\right)$. Reste à dire que la borne $-1+\frac{2}{n}$ est un point critique de $P_1(x)=(x+1)(x-1)^{n-1}$ et que $1-\frac{2}{n}$ est un point critique de $P_2(x)=(x-1)(x+1)^{n-1}$. En effet, supposons que

$$P(z) = \pm \sum_{k=0}^{n} a_k (1+z)^k (1-z)^{n-k},$$

avec $a_k \geq 0$ pour $k=0,1,\ldots,n$. Alors

$$P(z) = \pm \sum_{k=0}^{n} a_k q_k(z)$$

avec $q_k(z) := (1+z)^k(1-z)^{n-k}$. D'autre part,

$$q_k'(x) = (1+x)^{k-1}(1+x)^{n-k-1}(-n+2k-nx),$$

donc $q_k'(z)$ s'annule en ± 1 et en $x_k = -1+\frac{2k}{n}$, or la suite des zéros $(x_k)_{1\leq k\leq n-1}$ est une suite strictement croissante qui commence par $-1+\frac{2}{n}$ et se termine par $1-\frac{2}{n}$, et, $P_1(x)=(x+1)(x-1)^{n-1}$ et $P_2(x)=(x-1)(x+1)^{n-1}$ sont dans la classe π_n et leurs dérivées admettent respectivement $-1+\frac{2}{n}$ et $1-\frac{2}{n}$ comme zéros, alors les deux bornes considérées sont les meilleures et ces deux polynômes sont extrémaux, i.e. la borne $-1+\frac{2}{n}$ est vérifiée par $P_1(x)$ et la borne $1-\frac{2}{n}$ est vérifiée par $P_2(x)$.

$\square$

L'observation de J. von Sz. Nagy est incluse dans le résultat suivant, sur le comportement local, dû à M. Arsenault et Q.I. Rahman [**1**].

Proposition 3. *Soit $n \geq 4$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ avec $A_k \geq 0$ pour $k=0,1,\ldots,n$. Supposons que $P(1)=0$ et que $\max_{-1\leq x\leq 1}|P(x)| = M$. Alors, pour $x \in \left(1-\frac{2}{n},1\right)$, nous avons*

$$P(x) \leq \frac{n^n}{2^n(n-1)^{n-1}}(1+x)^{n-1}(1-x)P\left(1-\frac{2}{n}\right) < M.$$

Cette estimation est la meilleure possible.

Preuve de la Proposition 3.

Soit $P \in \pi_n$, qui s'écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (1+x)^k (1-x)^{n-k},$$

avec $A_k \geq 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Comme $P(1) = 0$ alors

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (1+x)^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit $x \in \left(1 - \frac{2}{n}, 1\right)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{q_k(x)}{q_k\left(1-\frac{2}{n}\right)} &= \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{(1+x)^k(1-x)^{n-k}}{(n-1)^k} \\ &\leq \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{(1+x)^{n-1}(1-x)}{(n-1)^{n-1}} = q_{n,n-1}(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(x) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} A_k q_k \left(1 - \frac{2}{n}\right) q_{n,n-1}(x) \\ &\leq P\left(1 - \frac{2}{n}\right) q_{n,n-1}(x). \end{aligned}$$

Il est clair que l'égalité sur $\left(1 - \frac{2}{n}, 1\right)$ a lieu si $P(x) = M q_{n,n-1}(x)$.

$\square$

3 De Turán à Hyltén-Cavallius

3.1 Position du Problème

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On définit $\mathscr{C}_n(z_0)$ comme la classe des polynômes P_n de degré au plus $n \geq 2$ tels que

$$\sup_{|z|=1} |P_n(z)| = |P_n(1)| \qquad \text{et} \qquad P_n(z_0) = 0.$$

Dans la sous-section **2.2.3**, consacrée à l'article de P. Turán, nous avons mentionné la solution du problème considéré par l'auteur de cet article, qui consiste en la recherche du zéro le plus proche sur le cercle unité d'un polynôme de la classe $\mathscr{C}_n(z_0)$. Mais dans son article [**12**] intitulé "Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials", C. Hyltén-Cavallius montre que l'arc solution n'est qu'une petite partie d'un domaine très spécial du plan complexe. En effet, C. Hyltén-Cavallius ne cherche plus l'arc le plus long souhaité, mais plutôt le voisinage, dans $\mathbb{C}$, de 1 le plus large possible qui ne contient aucun zéro d'un polynôme quelconque de la classe considérée. Ce qui est aussi intéressant dans cet article ce sont les autres problèmes résolus que différentes formulations du problème initial donnent.

3.2 Transformation du Problème

Soit P un polynôme de la classe $\mathscr{C}_n(z_0)$. La recherche du maximum sur le cercle unité de

$$z \mapsto |P_n(z)|,$$

est équivalente à la recherche du maximum de la fonction

$$\omega_n : \theta \mapsto \left|P_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2,$$

sur l'axe réel, d'autre part, la condition

$$\sup_{|z|=1} |P_n(z)| = |P_n(1)| ,$$

peut se traduire aussi par la condition équivalente

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \omega_n(\theta) = \omega_n(0).$$

Comme $\zeta \mapsto P_n\left(e^{i\zeta}\right)$ est entière de type exponentiel n, alors nous aimerions bien conserver cette propriété le long de cette reformulation du problème, c'est-à-dire nous souhaitons prolonger la fonction ω_n en une fonction entière de type exponentiel, ceci est possible si on considère la fonction notée indifféremment par ω_n et définie par

$$\omega_n(\zeta) = P_n\left(e^{i\zeta}\right) \overline{P_n}\left(e^{-i\zeta}\right).$$

ω_n est un polynôme trigonométrique de degré au plus n, de plus, il est non négatif sur l'axe réel. Toutes ces considérations servent de motivation pour considérer la classe des polynômes trigonométriques à coefficients réels de degrés au plus n, qui admettent un zéro en $u + iv$ (dans notre cas, $u = \varphi$ et $v = -\log \rho$ avec $z_0 = \rho e^{i\varphi}$) et dont le maximum est atteint à l'origine. Notons cette classe par

$$\Gamma_n := \Gamma_n(0, u + iv).$$

Ainsi, nous avons ramené le problème de la recherche d'une condition nécessaire et suffisante sur $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ pour que $\mathscr{C}_n(z_0)$ soit non vide en un problème de recherche la d'une condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma_n(0, \varphi - i\log \rho)$ soit non vide. Dans le mémoire de Tinawi [**22**], on démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\Gamma_n(0, \varphi - i\log \rho) \neq \emptyset,$$

est

$$\left|\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right| \leq \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3}$$

Ceci nous permettra d'énoncer le résultat principal de la section suivante.

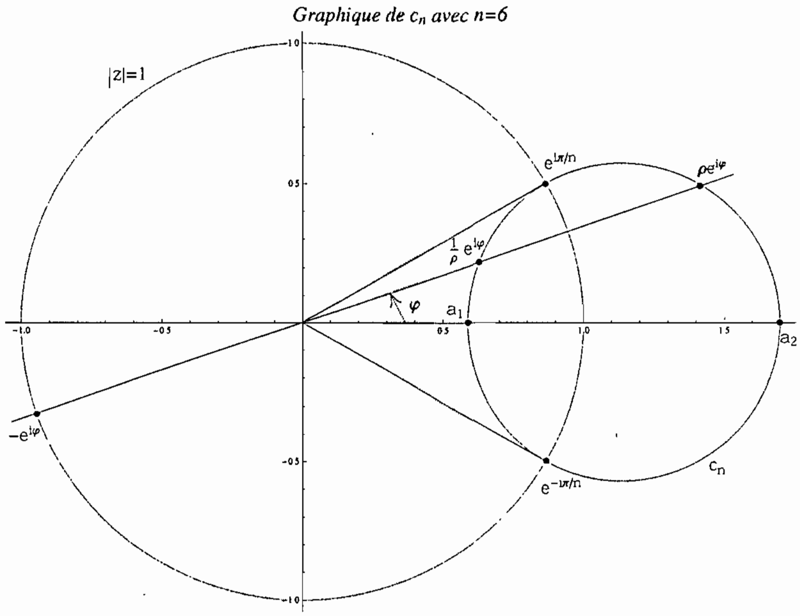

FIG. 2 – Graphique de c_6

les polynômes sous formes

$$c\sum_{\nu=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\nu+1}\left(ze^{-i\varphi}+1\right)^{n-2\nu-1}\left(ze^{-i\varphi}-\rho\right)^{\nu+1}\left(ze^{-i\varphi}-\frac{1}{\rho}\right)^{\nu}\qquad(c\neq 0).$$

(c) Si $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathscr{X}$, alors $\mathscr{C}_n(z_0)$ contient une infinité de polynômes essentiellement différents, dans le sens que ces polynômes ne sont pas multiple d'un même polynôme.

3.3.2 Esquisse de la Preuve du Résultat Principal

Examinons d'abord le cas $z_0=0, (\rho=0)$.
Il existe une infinité de polynômes de degrés $n-1$ dont le maximum sur le cercle unité est atteint en 1 ; il suffit en fait de considérer un polynôme

$$R_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\qquad(a_k\geq 0),$$

3.3 Résultat Principal

Rappelons que $\mathscr{C}_n(z_0)$ est la classe des polynômes P_n de degré au plus $n \geq 2$ tels que

$$\sup_{|z|=1} |P_n(z)| = |P_n(1)| \qquad \text{et} \qquad P_n(z_0) = 0.$$

3.3.1 Énoncé du Résultat Principal

Soit $c_n := c_n(\rho, \varphi)$ la courbe en coordonées polaires où ρ et φ satisfont à l'équation :

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \qquad \left(-\frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}\right).$$

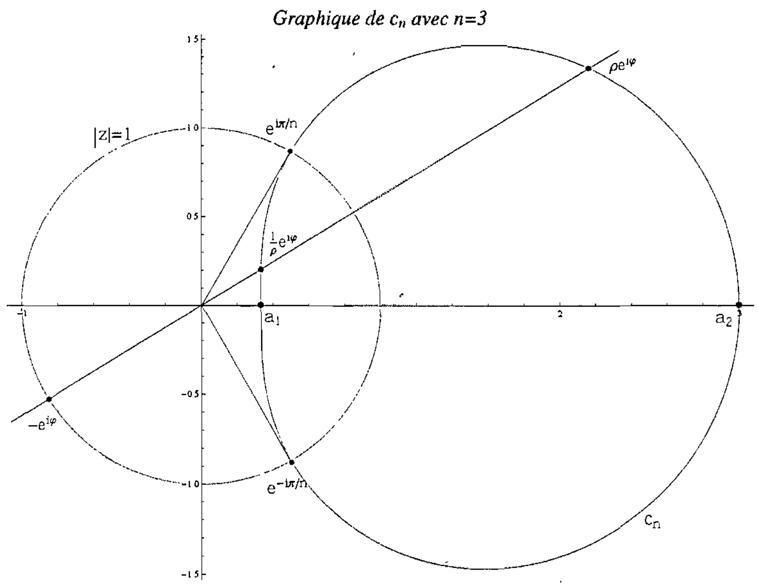

FIG. 1 – Graphique de c_3

Notons $\mathscr{X}$ l'intérieur de la composante connexe bornée et délimitée par c_n (voir FIG 1 et FIG 2).

(a) Si $z_0 \in \mathscr{X}$ alors $\mathscr{C}_n(z_0) = \emptyset$.

(b) Si $z_0 = \rho e^{i\varphi}$ est un point de c_n alors $\mathscr{C}_n(z_0)$ est non vide et elle consiste en nous voyons que

$$\sup_{|z|=1} |R_{n-1}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k = |R_{n-1}(1)|.$$

Pour construire un élément de $\mathscr{C}_n(0)$, il suffit de prendre

$$P_n(z) = zR_{n-1}(z).$$

Supposons maintenant que $z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$. Nous nous proposons ici de montrer l'assertion **(a)**, les autres assertions sont démontrées dans le mémoire de Tinawi [**22**]. Supposons que $P_n \in \mathscr{C}_n(z_0)$ et posons

$$\Phi_n(\zeta) = P_n\left(e^{\mathrm{i}\zeta}\right) \overline{P_n}\left(e^{-\mathrm{i}\zeta}\right).$$

C'est un polynôme trigonométrique, de degré au plus n, non négatif sur l'axe réel, de plus $\Phi_n(\varphi - \mathrm{i}\log\rho) = 0$ et

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \Phi_n\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right) = |P_n(1)|^2 = \Phi_n(0),$$

c'est-à-dire que $\Phi_n \in \Gamma_n(0, \varphi - \mathrm{i}\log\rho)$, donc par l'équation (3), nous aurons

$$\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| \leq \cosh\left(\frac{\log\rho}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (*)$$

c'est l'ensemble des points qui sont à l'extérieur de $\mathscr{X}$. Réciproquement, si l'équation $(*)$ est vérifiée, alors la classe $\Gamma_n(0, \varphi - \mathrm{i}\log\rho)$ est non vide. Soit $\Phi_n \in \Gamma_n$, c'est un polynôme trigonométrique non négatif, donc par le théorème de Fejér-Riesz [**18**, p. 410], il existe un polynôme P_n de même degré n que Φ_n tel que

$$\Phi_n(\theta) = \left|P_n\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2 \qquad (\theta \in \mathbb{R}),$$

ce que nous pouvons prolonger à

$$\Phi_n(\zeta) = P_n\left(e^{\mathrm{i}\zeta}\right) \overline{P_n}\left(e^{-\mathrm{i}\zeta}\right) \qquad (\zeta \in \mathbb{C}),$$

où $\overline{P_n}(z) = \overline{P_n(\bar{z})}$. Nous avons alors

$$\left|P_n\left(\rho e^{\mathrm{i}\varphi}\right)\right| = \left|P_n\left(e^{\mathrm{i}(\varphi - \mathrm{i}\log\rho)}\right)\right| = \sqrt{|\Phi_n(\varphi - \mathrm{i}\log\rho)|} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{|z|=1}|P_n(z)| &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left|P_n\left(e^{i\theta}\right)\right| \\ &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\sqrt{\Phi_n(\theta)} \\ &= \sqrt{\Phi_n(0)} = |P_n(1)|\,.\end{aligned}$$

Donc $P_n \in \mathscr{C}_n(z)$ et ainsi nous déduisons que la condition est nécessaire et suffisante.

□

4 Inégalités Polynomiales et Polynômes Extrémaux

4.1 Remarques sur une Inégalité de I. Schur

Dans un article [20] riche, tant en méthodes qu'en résultats, I. Schur avait établit deux inégalités polynomiales qui concernent le comportement local d'un polynôme au voisinage de ses zéros. Il démontre la proposition suivante.

Proposition 4. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ un zéro d'un polynôme P de degré n, et z_1 un point arbitraire de $\mathbb{C}$. Si, pour tout z dans le segment d'extrémités z_0 et z_1 nous avons $|P(z)| \leq M$, alors*

$$\left|\frac{P(z)}{z - z_0}\right| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|} n \cot\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$

En termes d'intervalles normalisés ($z_0 = 1$ et $z_1 = -1$), nous aurons la proposition sous la forme suivante.

Proposition 5. *Soit P un polynôme de degré n, de module majoré par 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$ et qui s'annule en 1. Alors*

$$\left|\frac{P(x)}{x - 1}\right| \leq \frac{n}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n}\right) \qquad (-1 \leq x \leq 1). \quad (\bullet)$$

Désignons par

$$\beta := \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2n} - 2\cos\frac{\pi}{n}}{1 + \cos\frac{\pi}{2n}}.$$

Dans la preuve de ce résultat, I. Schur montre que P doit être nécessairement majoré par

$$U_n(x) := T_n\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)(1 - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)$$

sur un voisinage de 1. Malgré que l'inégalité ($\bullet$) est vraie sur l'intervalle $[-1, 1]$, elle ne nous intéresse qu'au voisinage de 1. D'ailleur, I. Schur l'a démontré sur $[-1, \beta)$ par des majorations directes, par contre, sur l'intervalle $[\beta, 1]$, il a montré que $|P(x)| \leq |U_n(x)|$. Il est à signaler ici que cette dernière majoration de $|P(x)|$ est plus intéressante que ($\bullet$) pour la raison suivante : l'inégalité ($\bullet$) donne une estimation de la pente de la tangente en 1 à la courbe de P, c'est-à-dire qu'au voisinage de 1 la courbe de $|P(x)|$ est toujours au dessous de $y = \frac{n}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n}\right) |x-1|$, par contre, la majoration $|P(x)| \leq |U_n(x)|$ montre que la croissance de P au voisinage de 1 est contrôlée par celle de $U_n(x)$, et ceci est un contrôle meilleur et plus strict.

En examinant la démonstration de I. Schur, nous avons constaté que l'hypothèse

$$|P(x)| \leq 1 \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

peut être affaiblie à l'hypothèse

$$|P(\beta_\nu)| \leq 1 \quad \text{avec} \quad \beta_\nu := \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2n} - 2\cos\frac{\nu\pi}{n}}{1 + \cos\frac{\pi}{2n}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce type de généralisations, qui consiste à remplcer la majoration d'un polynôme sur un intervalle par une majoration en des points bien choisis, a été utilisé pour la première fois par R. P. Boas, nous ne traitons pas ici la généralisation pour l'inégalité ($\bullet$) mais nous le détaillerons dans le théorème de R. P. Boas.

Nous voyons aussi que I. Schur a considéré le cas où l'extrémité de l'intervalle est un zéro de P, le cas où le milieu de l'intervalle est un zéro de P a été traité par R. P. Boas. Contrairement au résultat de I. Schur, il dépendra de la parité de n comme nous le verrons dans la prochaine section. Il est à signaler que la preuve que R. P. Boas a donné pour le prochain résultat est loin d'être bien élaborée, dans le sens qu'elle manque de détails, ce qui nous a amené à exhiber une preuve complète.

4.2 Un Théorème de R. P. Boas

Le théorème suivant est dû à R. P. Boas [4].

Théorème 4. *Soit n un entier naturel impair et T_n le polynôme de Tchebycheff de première espèce de degré n. De plus, soit P un polynôme de degré au plus $n+1$*

tel que

$$|P(x'_\nu)| \le 1 \qquad \left(x'_\nu := \cos\frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n\right),$$

et tel que

$$P(0) = 0.$$

Alors

$$|P(x)| < |T_n(x)| \qquad \left(0 < |x| < \sin\frac{\pi}{2n}\right) \tag{4}$$

sauf dans le cas où

$$P(x) \equiv e^{i\gamma} T_n(x) \qquad (\gamma \in \mathbb{R}).$$

Nous aurons besoin de ces deux lemmes simples qui se démontrent par le théorème sur les valeurs intermédiaires.

Lemme 1. *Soient $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et ϕ une fonction, définie et continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles et telle qu'elle prend les valeurs $+1$ et -1 alternativement en $(k+1)$ points. Soit de plus f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles avec $|f(x)| < 1$ en tout point $x \in [a, b]$ où $|\phi(x)| = 1$. Alors il existe au moins k points x distincts sur $[a, b]$ tels que*

$$f(x) = \phi(x).$$

Lemme 2. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, si le graphe de f traverse, de bas vers le haut, une partie du graphique de ϕ qui monte de -1 à $+1$, alors il existe au moins $k+2$ points x distincts sur $[a, b]$ tels que*

$$f(x) = \phi(x).$$

Remarque.

Le lemme 2 indique que sur le point où le graphe de f traverse, de bas vers le haut, le graphe de ϕ, la pente de la tangente à f est plus grande que celle de la tangente à ϕ.

PREUVE DU THÉORÈME 4.

Posons

$$x_\nu := \cos\left(\frac{2\nu - 1}{2n}\pi\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les n zéros du polynôme de Tchebycheff T_n de première espèce de degré n et

$$x'_\nu := \cos\left(\frac{\nu}{n}\pi\right) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

les $n+1$ points où le polynôme de Tchebycheff T_n prend les valeurs $+1$ et -1.

Remarquons qu'il suffit de démontrer le théorème 4 pour $0 < x < \sin\frac{\pi}{2n}$. Afin d'appliquer le lemme 2, nous utiliserons le polynôme T_n si le graphe de ce dernier est croissant sur $\left[0, \sin\frac{\pi}{2n}\right]$, sinon nous utiliserons $-T_n$. Notons alors $\tau_n = T_n$ si T_n croit sur $\left[0, \sin\frac{\pi}{2n}\right]$ et $\tau_n = -T_n$ si T_n décroit $\left[0, \sin\frac{\pi}{2n}\right]$.

Supposons que l'inégalité (4) n'est pas vraie, donc il existe $\xi_0 \in \left(0, \sin\frac{\pi}{2n}\right)$ tel que

$$P(\xi_0) > T_n(\xi_0).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le polynôme P est à valeurs réelles. Sinon, posons $P(\xi_0) = |P(\xi_0)|e^{i\gamma}$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$. Soit G le polynôme défini par $G(x) := \Re\left(e^{-i\gamma}P(x)\right)$. C'est un polynôme de degré au plus $n+1$ à valeurs réelles ayant un zéro à l'origine tel que $G(\xi_0) = |P(\xi_0)|$, de plus nous avons $|G(x'_\nu)| \leq |P(x'_\nu)| \leq 1$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$. D'autre part, nous pouvons écrire que

$$P(x) = e^{i\gamma}(G(x) + iH(x)).$$

Si nous montrerons que $G \equiv \tau_n$ nous aurons

$$1 = |G(x'_\nu)| \leq |P(x'_\nu)| = 1 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que $H(x) = A(x - x'_0)\cdots(x - x'_n)$ où A est une constante réelle, or $H(0) = 0$ ce qui donne que $A = 0$. Ainsi $P(x) = e^{i\gamma}G(x)$. Donc, dans ce qui suivra, nous pouvons supposer que P est à valeurs réelles et P n'est pas identique à τ_n.

L'idée clef de cette preuve est la suivante : lorsque nous supposons que le graphe de τ_n et celui de P se touchent tangentiellement en ξ_0, le polynôme $D = P - \tau_n$ admet déjà trois zéros, un zéro à l'origine et un autre double en ξ_0. La difficulté ici réside dans le cas de figure où les deux polynômes, τ_n et P, admettent des intersections en les points x'_ν. S'il y a un seul point, disons x'_0, parmi les $n+1$ points x'_ν, où $|P(x'_0)| < 1$, il y aura n zéros dans le reste des points avec le zéro à l'origine et les deux autres zéros en ξ_0 donc D admet $n+3$ zéros, mais D est de degré au plus $n+1$, donc $D \equiv 0$ c'est-à-dire que $P \equiv \tau_n$, ce qui est impossible. Supposons maintenant qu'il y a seulement deux points, disons x'_0 et x'_1, tels que $|P(x'_0)| < 1$ et $|P(x'_1)| < 1$, dans ce cas, nous comptons $n-1$ zéros de D en les points qui restent de x'_ν et les trois zéros à l'origine et en ξ_0, donc $D \equiv 0$ et $P \equiv \tau_n$, ce qui est aussi absurde. Nous supposons désormais que P admet au moins trois points, parmi les $n+1$ points x'_ν, où le module de P est strictement inférieur à 1.

Revenons à la démonstration du théorème 4. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le polynôme $P_\varepsilon := (1-\varepsilon)P$. Pour $\varepsilon > 0$, aussi petit que $P_\varepsilon(\xi_0) > \tau_n(\xi_0)$, la courbe représentative de P_ε traverse celle de τ_n au moins trois fois dans sa branche qui contient 0 et au moins une fois dans chacune de ses $(n-1)$ autres branches, donc le polynôme $\tau_n - P_\varepsilon$ admet au moins $(n+2)$ zéros, mais il est de degré au plus $n+1$, donc

$$P_\varepsilon \equiv \tau_n,$$

et par la suite

$$P \equiv \tau_n,$$

ce qui est absurde avec le fait que P et τ_n sont différents en ξ_0. Donc, pour tout x dans $\left(0, \sin\frac{\pi}{2n}\right)$

$$|P(x)| \leq |\tau_n(x)|.$$

Montrons maintenant, que les graphes de P et τ_n ne peuvent pas se toucher en un point ξ_0 de $\left(0, \sin\frac{\pi}{2n}\right)$ sans que $P \equiv \tau_n$. Supposons qu'il existe un point $\xi_0 \in \left(0, \sin\frac{\pi}{2n}\right)$ tel que $P(\xi_0) = \tau_n(\xi_0)$, compte-tenu de ce qui précède, les deux courbes représentatives de P et τ_n se rencontrent en zéros et tangentiellement en ξ_0 en dessous de la courbe de τ_n. Rappelons que nous avons noté

$$x_\nu = \cos\frac{2\nu-1}{n}\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

les n zéros du polynôme τ_n et

$$x'_\nu = \cos\frac{\nu}{n}\pi \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

les $(n+1)$ points où τ_n prend les valeurs -1 et $+1$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous sommes toujours capables de construire un polynôme $p(x)$ de degré au plus $n+1$, qui admet un zéro à l'origine et un autre au moins double en ξ_0, tel que, si nous posons $\tau^\star_{n,\varepsilon}(x) = \tau_n(x) + \varepsilon p(x)$, alors

$$|P(x'_\nu)| < \left|\tau^\star_{n,\varepsilon}(x'_\nu)\right|.$$

En effet, (voir FIG. 3)

1^{er} **Cas :** Supposons que, pour tout $x \in \{x'_0, x'_1, x'_n\}$, nous avons $|P(x)| < 1$.

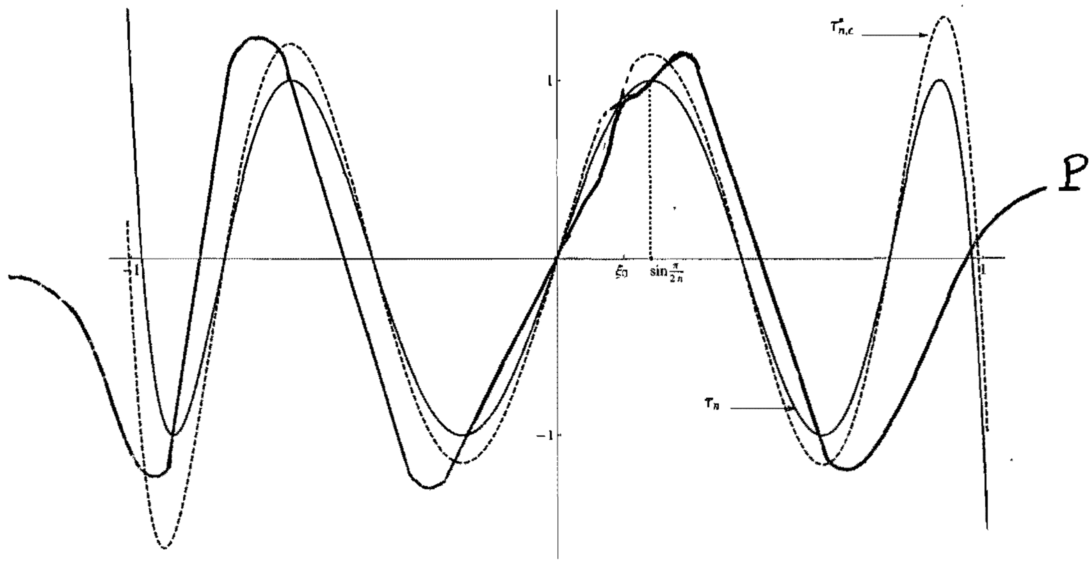

FIG. 3 – Graphiques de τ_n, $\tau^\star_{n,\epsilon}$ et P

Posons alors

$$p(x) := -\frac{(x-\xi_0)^2}{(x-x_1)(x-x_n)}\tau_n(x).$$

2^{eme} **Cas :** Supposons que $|P(x'_\nu)| < 1$ pour $\nu = 0, \nu_0$ et $\nu_0 + 1$ pour un certain $\nu_0 = 2, 3, \ldots, n-1$. Nous pouvons choisir comme $p(x)$ le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$p(x) := \frac{(x-\xi_0)^2}{(x-x_1)(x-x_{\nu_0})(x-x_{\nu_0+1})}\tau_n(x).$$

3^{eme} **Cas :** Supposons qu'il existe ν_1, ν_2 et ν_3 tels que $|P(x'_{\nu_k})| < 1$ pour $k = 0, 1$ et 2 avec la contrainte $\sin\frac{\pi}{2n} \leq x'_{\nu_3} < x'_{\nu_2} < x'_{\nu_1} < x'_0$ et les x'_{ν_k} ne sont pas consécutifs. Alors $p(x)$ peut être choisi comme

$$p(x) := \frac{(x-\xi_0)^2}{(x-x_{\nu_1})(x-x_{\nu_1-1})}\tau_n(x).$$

4^{eme} **Cas :** Supposons qu'il existe ν_1, ν_2 et ν_3 tels que $|P(x'_{\nu_k})| < 1$ pour $k = 0, 1$ et 2 avec la contrainte $\sin\frac{\pi}{2n} \leq x'_{\nu_3} < x'_{\nu_2} < x'_{\nu_1} < x'_0$ et les x'_{ν_k} sont consécutifs. Posons donc

$$p(x) := \frac{(x-\xi_0)^2}{(x-x_{\nu_1})(x-x_{\nu_1-1})}\tau_n(x).$$

Comme le polynôme $\tau^\star_{n,\epsilon}$ admet n branches graphiques qui passënt d'une valeur strictement supérieure à 1 à une valeur strictement inférieure à -1, alors, d'après le lemme 1, et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la courbe de P traverse celle de $\tau^{\star}_{n,\varepsilon}$ au moins en $(n-1)$ points, chacun dans l'une des branches qui ne contient pas l'origine. Dans cette dernière, et en vertu du lemme 2, il y a au moins trois points d'intersection supplémentaires. Donc $P - \tau^{\star}_{n,\varepsilon}$ est un polynôme de degré au plus $(n+1)$ qui admet au moins $(n+2)$ zéros, donc $P \equiv \tau^{\star}_{n,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui est absurde. Donc, si $P \not\equiv \tau_n$, nous avons

$$|P(x)| < |T_n(x)| \qquad \left(0 < |x| < \sin\frac{\pi}{2n}\right).$$

□

Remarque.

Soulignons ici l'importance de l'idée clef que nous avons cité au début de la preuve précédente. C'est avec la considération qu'au moins trois points, parmi les points x'_ν, où le polynôme P ne prend pas la valeur -1 ni $+1$, que nous étions capables de nous éloigner des points 0 et $\sin\frac{\pi}{2n}$ et construire le polynôme $\tau^{\star}_{n,\varepsilon}$.

Dans le théorème précédent, nous avons seulement supposé que l'origine est un zéro simple. Une question qui peut être posée est, si l'origine est un zéro de multiplicité k de P, quel serait le comportement local de P au voisinage de 0. Cette question a été considérée dans une certaine direction par Dryanov, Qazi et Rahman qui ont énoncé le théorème suivant (voir [**8**, p. 1347]).

Théorème 5. *Soit $t_\star = t_{n,k,\star}$ l'unique polynôme trigonométrique de degré n, ayant à l'origine un zéro de multiplicité k tel que $|t_\star(\theta)| \leq M$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et prenant les valeurs M et $-M$, alternativement, en $2n-k+1$ points $0 \leq \theta^\star_0 < \theta^\star_1 < \cdots < \theta^\star_{2n-k} \leq 2\pi$. De plus, soit t un polynôme trigonométrique de degré au plus n ayant à l'origine un zéro de multiplicité k tel que*

$$|t(\theta^\star_\nu)| \leq M \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2n-k).$$

Alors $|t(\theta)| < |t_\star(\theta)|$ sur $(\theta^\star_{2n-k} - 2\pi, 0) \cup (0, \theta^\star_0)$, sauf si $t(\theta) = e^{i\gamma} t_\star(\theta)$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.

D'autres travaux se sont inspirés de celui de R. P. Boas pour établir des inégalités avec des hypothèses sur quelques points. Dans ce qui suivra nous citons quelques inégalités de ce type dues à A. Aziz [**2**].

4.3 Quelques Inégalités Généralisées

Lemme 3. *Soient P un polynôme de degré n, $a \neq 0$ et $z_1, z_2, \cdots, z_n$ les racines de $z^n + a = 0$. Alors, pour tout $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$.*

$$P'(\beta) = n\frac{\beta^{n-1}}{a+\beta^n}P(\beta) + \frac{a+\beta^n}{na}\sum_{k=1}^{n} P(z_k)\frac{z_k}{(z_k-\beta)^2}, \tag{5}$$

et

$$\frac{1}{na}\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta z_k}{(z_k-\beta)^2} = -n\frac{\beta^n}{(a+\beta^n)^2}. \tag{6}$$

PREUVE DU LEMME 3.

Rappelons la formule d'interpolation de Lagrange : si F est un polynôme de degré n alors

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n} F(z_\nu)L_\nu(z),$$

avec

$$L_\nu(z) := \frac{L(z)}{(z-z_\nu)L'(z_\nu)} \quad \text{et} \quad L(z) = z^n + a = \prod_{\nu=1}^{n}(z-z_k).$$

Posons

$$F(z) := \frac{P(z)-P(\beta)}{z-\beta}.$$

Par la formule d'interpolation que nous venons de citer

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n} F(z_\nu)\frac{z^n+a}{z-z_\nu} \times \frac{1}{nz_\nu^{n-1}},$$

mais $z_\nu^n = -a$, donc

$$F(z) = \frac{1}{na}\sum_{\nu=1}^{n} F(z_\nu)z_\nu\frac{z^n+a}{z_\nu-z},$$

or $F(\beta) = P'(\beta)$, ce qui donne

$$P'(\beta) = \frac{a+\beta^n}{na}\sum_{k=1}^{n}\left(P(z_k)-P(\beta)\right)\frac{z_k}{(z_k-\beta)^2}.$$

Appliquons ce qui précède pour $P(z) = z^n$, nous obtenons

$$n\beta^{n-1} = \frac{a+\beta^n}{na}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^n-\beta^n}{(z_k-\beta)^2}z_k,$$

ou encore

$$n\beta^{n-1} = -\frac{1}{na}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+\beta^n}{z_k-\beta}\right)^2 z_k. \tag{7}$$

Ainsi

$$P'(\beta) = \frac{a+\beta^n}{na}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-\beta)^2}P(z_k) + \frac{(a+\beta^n)^2}{na}P(\beta)\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-\beta)^2}.$$

De (7) nous tirons

$$-\frac{n\beta^n}{(a+\beta^n)^2} = \frac{1}{na}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k\beta}{(z_k-\beta)^2}.$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 6. *Soit P un polynôme de degré n tel que $P(1) = 0$. Si $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de $z^n + 1 = 0$, alors*

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z-1}\right| \leq \frac{n}{2}\max_{1\leq k\leq n}|P(z_k)|, \tag{8}$$

et le polynôme $P(z) = \frac{1}{2}(z^n - 1)$ est extrémal.

Première Preuve du Théorème 6.
Comme $P(1) = 0$ alors $\frac{P(z)}{z-1}$ est un polynôme de degré $n-1$.
Si $\max_{|z|=1}|P(z)|$ est atteint en z_k, nous aurons

$$2 = |z_k^n - 1| = |z_k - 1|\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} z_k^\nu\right| \leq n|z_k - 1|.$$

Ainsi $\frac{2}{n} \leq |z_k - 1|$ et par la suite

$$\left|\frac{P(z)}{z-1}\right| \leq \left|\frac{P(z_k)}{z_k-1}\right| \leq \frac{1}{|z_k-1|}\max_{1\leq k\leq n}|P(z_k)|.$$

Sinon, $\max_{|z|=1}|P(z)|$ est atteint en $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}$, avec $|\beta| = 1$, donc

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z-1}\right| = \left|\frac{P(\beta)}{\beta-1}\right|.$$

Effectuons l'interpolation par rapport à $F(z) = \frac{P(z)}{z-1}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{z-1} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(z_\nu)}{z_\nu - 1} \times \frac{z^n+1}{n z_\nu^{n-1}(z-z_\nu)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P(z_k)(z^n+1) z_k}{(z_k-1)(z_k-z)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } \left|\frac{P(\beta)}{\beta+1}\right|^2 &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(\beta^n+1)}{(z_k-\beta)}\right| \left|\frac{z_k}{(z_k-1)}\right|\right)^2 \left(\max_{1\leq k\leq n} |P(z_k)|\right)^2 \\
\text{(par Cauchy} - \text{Schwarz} \rightarrow) &\leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(\beta^n+1)}{(z_k-\beta)}\right|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-1)}\right|^2\right)\left(\max_{1\leq k\leq n}|P(z_k)|\right)^2.
\end{aligned}$$

Pour $a = 1$, la relation (6) devient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-\beta)^2} = -n\frac{\beta^{n-1}}{(1+\beta^n)^2},$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k \beta}{(z_k-\beta)^2} = -n^2 \frac{\beta^n}{(1+\beta^n)^2}.$$

Si $|z| = 1$ et $|\beta| = 1$, avec $\beta \neq z$, posons $z = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\alpha}$. Nous avons

$$\frac{e^{i(\theta+\alpha)}}{(e^{i\theta} - e^{i\alpha})^2} = -\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)},$$

c'est-à-dire que la quantité $\frac{z_k\beta}{(z_k-\beta)^2}$ est négative pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k-\beta|^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k\beta|}{|z_k-\beta|^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} -\frac{z_k\beta}{z_k-\beta^2} \\
&= n^2 \frac{\beta^n}{(1+\beta^n)^2} \\
&= \frac{n^2}{|1+\beta^n|^2}.
\end{aligned}$$

Par la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k-1|^2} = \frac{n^2}{4}$, et

$$\left|\frac{P(z)}{z-1}\right|^2 \leq \frac{n^2}{4} \left(\max_{1\leq k\leq n} |P(z_k)| \right)^2 .$$

Ce qui achève la démonstration.

$\square$

Le théorème précédent est une conséquence immédiate de la proposition suivante [**7**, p. 323]

Proposition 6. *Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau > 0$, tel que*

$$\left| f\left(\frac{2\nu+1}{2\tau}\pi \right) \right| \leq M \qquad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

et $f(x) = o(x)$ au voisinage de $\pm\infty$. Supposons de plus que $f(0) = 0$. Alors

$$|f(x)| < M|\sin(\tau x)| \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2\tau}\right),$$

avec égalité si $f(z) \equiv Me^{\mathrm{i}\gamma}\sin(\tau z)$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.

Deuxième Preuve du Théorème 6.

Posons $M = \max_{1\leq k\leq n} |P(z_k)|$ et définissons

$$f(z) = e^{-\mathrm{i}\frac{n}{2}z} P\left(e^{\mathrm{i}z}\right),$$

c'est une fonction entière de type exponentiel $\frac{n}{2}$. Nous avons $f(0) = P(1) = 0$ et

$$\left| f\left(\frac{2\nu+1}{n}\pi \right) \right| \leq M \qquad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

de plus, $\lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0$. D'après la proposition 6, nous aurons

$$\left|P\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| = |f(\theta)| \leq M \left|\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right| \qquad \left(0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{n}\right).$$

Donc, pour θ au voisinage de l'origine,

$$\left|\frac{P\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)}{e^{\mathrm{i}\theta}-1}\right| \leq M \left|\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leq \frac{n}{2}M,$$

ce qui prouve le théorème.

□

Corollaire 1. *Soit P un polynôme de degré n tel que $P(\beta) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}_+$.*

Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $z^n + 1 = 0$, alors

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{P(z)}{z - \beta} \right| \leq \frac{n}{1 + \beta} \max_{1 \leq k \leq n} |P(z_k)|.$$

Preuve du Corollaire 1.

Écrivons $P(z) = (z - \beta)Q(z)$ et posons $P_*(z) = (z - 1)Q(z)$, nous avons

$$\left| \frac{P_*(z_k)}{P(z_k)} \right| = \left| \frac{z_k - 1}{z_k - \beta} \right| \leq \frac{2}{1 + \beta}.$$

Donc

$$\max_{1 \leq k \leq n} |P_*(z_k)| \leq \frac{2}{1 + \beta} \max_{1 \leq k \leq n} |P(z_k)|.$$

D'autre part

$$\frac{P(z)}{z - \beta} = Q(z) = \frac{P_*(z)}{z - 1},$$

ce qui nous permet de tirer que

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{P(z)}{z - \beta} \right| = \max_{|z|=1} \left| \frac{P(z)}{z - \beta} \right| \leq \frac{n}{2} \max_{1 \leq k \leq n} |P_*(z_k)|,$$

ou encore

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{P(z)}{z - \beta} \right| \leq \frac{n}{1 + \beta} \max_{1 \leq k \leq n} |P(z_k)|.$$

□

4.4 Un Rafinement de l'Inégalité de Bernstein

Dans cette partie, nous nous proposons de présenter les remarques sur le Lemme de Schwarz qui se trouvent dans [**17**], où on prouve une inégalité polynomiale similaire à l'inégalité de Bernstein.

Rappelons d'abord le fameux Lemme de Schwarz

Lemme 4. *(Schwarz)*

Soit f une fonction analytique sur le disque unité fermé $\bar{\mathbb{D}}(0, 1)$ dans lui même *et telle que* $f(0) = 0$, *alors*

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad z \in \bar{\mathbb{D}}(0,1).$$

D'une manière générale nous avons

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|, \qquad z \in \bar{\mathbb{D}}(0,1),$$

où a *est un zéro de* f *dans le disque unité ouvert* $\mathbb{D}(0,1)$.

La proposition suivante est due à Q.I. Rahman et Q.G. Mohammad [**17**].

Proposition 7. *Si* P *est un polynôme de degré* n *tel que* $|P(z)| \leq 1$ *sur le disque unité et* P *admet un zéro en* 1, *alors l'inégalité*

$$\left|\frac{P(z)}{z-1}\right| \leq \frac{n}{2}.$$

reste vraie sur le disque fermé $\bar{\mathbb{D}}(0,1)$ *et le polynôme* $Q(z) := \frac{1}{2}(z^n - 1)$ *est extrémal.*

C'est un cas particulier de la proposition suivante.

Proposition 8. *Soient* $k \in \mathbb{N}$ *et* P *un polynôme de degré au plus* n *tel que* $|P(z)| \leq 1$ *sur le disque unité fermé. Supposons de plus que* P *admet des zéros en les racines* k^{ieme} *de l'unité. Alors*

$$\max_{|z|\leq 1}\left|\frac{P(z)}{z^k-1}\right| \leq \frac{n}{2k}.$$

Dans la preuve de cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5. *(van der Corput et Schaake)*

Soit t *un polynôme trigonométrique de degré au plus* n *tel que* $|t(\theta)| \leq M$ *pour tout* $-\pi \leq \theta < \pi$. *Supposons que* $t(\theta)$ *est réelle pour* $\theta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$n^2(t(\theta))^2 + (t'(\theta))^2 \leq M^2 n^2 \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Pour une preuve de ce lemme on pourra consulter [**18**, p. 530] .

PREUVE DE LA PROPOSITION 8.

Posons
$$R(z)=\frac{P(z)}{z^k-1} \quad \text{et} \quad \varphi(\theta)=\left|R\left(e^{i\theta}\right)\right|.$$
Supposons que $\max_{-\pi\le\theta\le\pi}\varphi(\theta)$ est atteint en $2\theta_0$ et que
$$\left|e^{2ik\theta_0}-1\right|<\frac{2k}{n}.$$
Définissons le polynôme trigonométrique t de degré $n-k$ par
$$t(\theta)=e^{-i(n-k)\theta}R\left(e^{2i\theta}\right),$$
et $(-\gamma)$ l'argument de $t(\theta_0)$. Posons enfin
$$T(\theta)=\Re\{e^{i\gamma}t(\theta)\}.$$
Nous avons
$$\max_{-\pi\le\theta\le\pi}|T(\theta)|\le\max_{-\pi\le\theta\le\pi}|e^{i\gamma}t(\theta)|=\max_{-\pi\le\theta\le\pi}\left|R\left(e^{2i\theta}\right)\right|=\left|R\left(e^{2i\theta_0}\right)\right|,$$
or
$$|T(\theta_0)|=|\Re\{e^{i\gamma}t(\theta_0)\}|=\left|e^{i\gamma}t(\theta_0)\right|=|t(\theta_0)|=\left|R\left(e^{2i\theta_0}\right)\right|,$$
donc $\max_{-\pi\le\theta\le\pi}|T(\theta)|$ est atteint en θ_0, ce qui implique que $T'(\theta_0)=0$. D'autre part, et pour $-\pi\le\theta\le\pi$, nous avons
$$|2\sin(k\theta)T(\theta)|=\left|e^{2ik\theta}-1\right||T(\theta)|\le\left|e^{2ik\theta}-1\right|\left|R\left(e^{2i\theta}\right)\right|=\left|P\left(e^{2i\theta}\right)\right|\le 1.$$
En appliquant le lemme de van der Corput et Schaake au polynôme trigonométrique réel de degré n
$$F(\theta):=2\sin(k\theta)T(\theta),$$
nous aurons
$$n^2\sin^2(\theta_0)T^2(\theta_0)+k^2\cos^2(\theta_0)T^2(\theta_0)\le\frac{n^2}{4},$$
ce qui permet d'écrire que
$$k^2R^2\left(e^{2i\theta_0}\right)\le n^2\sin^2(\theta_0)R^2\left(e^{2i\theta_0}\right)+k^2\cos^2(\theta_0)R^2\left(e^{2i\theta_0}\right)\le\frac{n^2}{4}.$$

Ainsi,

$$|R(z)| \le \frac{n}{2k} \qquad (|z| \le 1).$$

$\square$

Jusqu'à présent, nous ne voyons pas une forme convenable d'une inégalité qui généralise la proposition 8 aux fonctions entières de type exponentiel.

Remarque.

Soient $\varepsilon > 0$ et a dans le disque unité ouvert. La construction d'un polynôme P dont a est un zéro et dont le module n'excède jamais 1 sur le disque unité fermé avec la contrainte suivante

$$\max_{|z|\le 1} \left|\frac{P(z)}{z-a}\right| > \frac{1}{1-|a|} - \varepsilon,$$

est possible. Pour le voir, écrivons

$$\frac{1}{1-\bar{a}z} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu z^\nu \qquad \left(a_\nu = \bar{a}^\nu \quad \text{et} \quad |z| < \frac{1}{|a|}\right).$$

Comme la convergence de cette série est uniforme sur $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{|a|}\right)$, alors pour $\varepsilon' > 0$, en particulier $\varepsilon' = \frac{(1-|a|)\varepsilon}{2-\varepsilon(1-|a|^2)}$, et N assez grand, nous obtenons

$$\left|\frac{1}{1-\bar{a}z} - \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu\right| < \varepsilon' \qquad (|z| \le 1),$$

en multipliant de part et d'autre par $|z-a|$ et en utilisant l'inégalité du triangle renversée nous aurons

$$\left|(z-a)\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu\right| - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < |z-a|\varepsilon',$$

mais $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est un automorphisme du disque unité, donc

$$\left|(z-a)\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu\right| < 1 + (1+|a|)\varepsilon' \qquad (|z| \le 1).$$

Posons alors

$$P(z) = \frac{1}{1+(1+|a|)\varepsilon'}(z-a)\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu,$$

c'est le polynôme recherché. En effet, soit $z \in \mathbb{D}(0,1)$, notons

$$Q(z) = \frac{P(z)}{z-a}.$$

Par construction, nous avons

$$\left|\frac{1}{1-\bar{a}z}\right| - \varepsilon' < \left|\sum_{k=0}^{N} a_k z^k\right|.$$

Donc

$$\left(\left|\frac{1}{1-\bar{a}z}\right| - \varepsilon'\right) \frac{1}{1+(1+|a|)\varepsilon'} < |Q(z)|,$$

ce qui implique que

$$\left(\frac{1}{1-|a|} - \varepsilon'\right) \frac{1}{1+(1+|a|)\varepsilon'} < \max_{|z|\le 1} |Q(z)|,$$

ou encore

$$\frac{1}{1-|a|} - \varepsilon < \max_{|z|\le 1} |Q(z)|.$$

Nous achevons cette section en citant une inégalité, due à I. Schur, similaire au type que nous venons de traiter.

Proposition 9. *Soit P un polynôme de degré n, de module majoré par* 1 *sur l'intervalle* $[-1,1]$ *et qui s'annule en* -1 *et* $+1$. *Alors*

$$\left|\frac{P(x)}{1-x^2}\right| \le \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad (-1 \le x \le 1).$$

Dans cette inégalité, le polynôme extrémal est

$$V_n(x) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) x\right).$$

Nous pouvons aussi dans cette inégalité remplacer l'hypothèse $|P(x)| \le 1$ par l'hypothèse $|P(\gamma_\nu)| \le 1$ où

$$\gamma_\nu := \frac{\cos(\frac{\nu\pi}{n})}{\cos(\frac{\pi}{2n})} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et procéder comme dans la démonstration du théorème de R. P. Boas.

5 Un Théorème de Marcel Riesz

5.1 Présentation du Problème

Dans [**10**], P. Erdős prouve le résultat suivant, qui est d'importance considérable en théorie de l'interpolation polynomiale.

Théorème 7. *Pour tout entier naturel donné $n = 1, 2, 3, \ldots,$ soit*

$$1 \geq x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \cdots > x_n^{(n)} \geq -1,$$

et soit $\vartheta_\nu^{(n)}$ l'unique réel dans $[0, \pi]$ tel que

$$\cos \vartheta_\nu^{(n)} = x_\nu^{(n)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que $0 \leq A < B \leq \pi$ et notons par $N_n(A, B)$ le nombre de $\vartheta_\nu^{(n)}$ dans (A, B). Appelons $x_0 = 1, x_{n+1} = -1$ et

$$\omega_n(x) := \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - x_\nu^{(n)}\right).$$

Supposons de plus que

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{c_1}{2^n} \quad \text{et} \quad \max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| > \frac{c_2}{2^n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes positives. Alors

$$N_n(A, B) = \frac{B - A}{\pi} n + O\left(\log(n(B - A))\right).$$

Dans la démonstration du théorème 7, Erdős utilise deux résultats sur le comportement local d'un polynôme trigonométrique. Le premier dit que si t est un polynôme trigonométrique de degré au plus n et que $|t(x)|$ atteint son maximum absolu au point ξ, alors ξ sépare deux zéros consécutifs de t dont la distance ne peut pas être inférieure à $\frac{\pi}{n}$. Ce résultat est dû à M. Riesz (voir [**19**], pp. 363-364).

Soit h un polynôme de degré n et soient $y_1, \ldots, y_r$ les racines de $h(y) = 0$ dans $(-1, 1)$ de plus soient $\theta_i \in (0, \pi)$ tels que $\cos\theta_i = y_i$. Alors selon P. Erdős (voir paragraphe 1 de [**10**, p. 61]) nous citons " if $\max_{y_i \leq x \leq y_{i+1}} h(x)$ assumes its smallest value for $i = k$, then $\theta_{k+1} - \theta_k \leq \frac{\pi}{n}$". C'est le deuxième résultat sur le comportement local d'un polynôme trigonométrique que Erdős utilise dans la preuve du théorème 7. Erdős attribut aussi ce résultat à M. Riesz, mais il ne donne aucune référence. On ne le trouve pas dans [**19**] ni dans d'autres travaux de M Riesz auquels nous avions eu accès. Puisque ce résultat joue un rôle important dans le théorème 7, il est souhaitable de l'examiner de près.

Remarquons d'abord que le résultat donné dans le pargraphe précédent et attribué à M. Riesz par Erdős, n'est pas nécessairement vrai si les zéros de h ne sont pas tous dans l'intervalle $[-1, 1]$. Citons comme contre-exemple, le polynôme

$$h(x) := (x^2 + \delta^2)T_{n-2}(x),$$

où $\delta > 0$ et T_{n-2} le polynôme de Tchebycheff de première espèce et de degré $n-2$. le polynôme h admet $r := n-2$ zéros dans $(-1, 1)$, qui sont

$$y_i := \cos\left(\frac{2i-1}{2r}\pi\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Remarquons que

$$\min_{i=1,2,\ldots,r}\left(\max_{y_{i+1} \leq x \leq y_i} |h(x)|\right)$$

est atteint pour $i = \frac{n-3}{2}$ et $i = \frac{n-1}{2}$ si n est impair et pour $i = \frac{n-2}{2}$ si n est pair. Soit maintenant $\theta_i \in (0, \pi)$ tel que $\cos\theta_i = y_i$. Il est évident que

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2r}\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Posons

$$\theta_0 := -\frac{\pi}{2r} \quad \text{et} \quad \theta_{r+1} := -\frac{2r+1}{2r}\pi.$$

Ainsi

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{\pi}{n-2} > \frac{\pi}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

Donc, il n'existe aucun indice i pour lequel $\theta_{i+1} - \theta_i \leq \frac{\pi}{n}$ et le résultat attribué à M. Riesz, comme énoncé par Erdős, n'est pas vrai pour $r = n - 2$. En effet, le résultat ne peut avoir lieu pour aucun $r \leq n - 1$ comme le montre l'exemple du polynôme

$$h(x) = (x - A)^{n-r} T_r(x) \qquad (A > 1).$$

Puisque la démonstration du théorème 7 dépend de ce résultat, qui n'est pas vrai tel qu'énoncé, il est intéressant de voir s'il peut être sauvé en y ajoutant des conditions supplémentaires. En examinant la démonstration du théorème 7 donnée par Erdős, on remarque que les polynômes considérés avaient tous leurs zéros sur $(-1, 1)$. Une telle condition sera-t-elle suffisante pour sauver le lemme attribué à "M. Riesz" et par la suite le théorème 7 ? La réponse est affirmative comme traitée dans **[16]** où les auteurs M. A. Qazi et Q. I. Rahman ont montré beaucoup plus. En effet, la proposition suivante a lieu.

5.2 Solution du Problème

Proposition 10. *Soit t un polynôme trigonométrique de degré $n, (\geq 2)$ qui n'admet que des zéros réels tous simples et soient $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{2n-1}$ ses $2n$ points critiques. Supposons que*

$$|t(\xi_0)| = M \cos \alpha \qquad (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}).$$

et que $|t(\xi_\nu)| \geq M$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2n - 1$. Posons

$$\tau(\theta) := \tau_n(\theta) := M T_{2n}\left(\left(\cos \frac{\alpha}{2n}\right) \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Alors

$$t(\theta) \leq \tau_n(\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \xi_1). \tag{9}$$

Remarques.

Plusieurs remarques sur cette proposition sont à mentionner.

- Le lecteur pourra avoir des difficultés sur ce que τ_n représente, on donnera dans ce qui suivra quelques détails qui concernent ce polynôme trigonométrique (voir FIG. 4).

  Notons $u := u(\theta) := \cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Pour $q \in \mathbb{N}$ nous avons

$$u^{2q} = \cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^q,$$

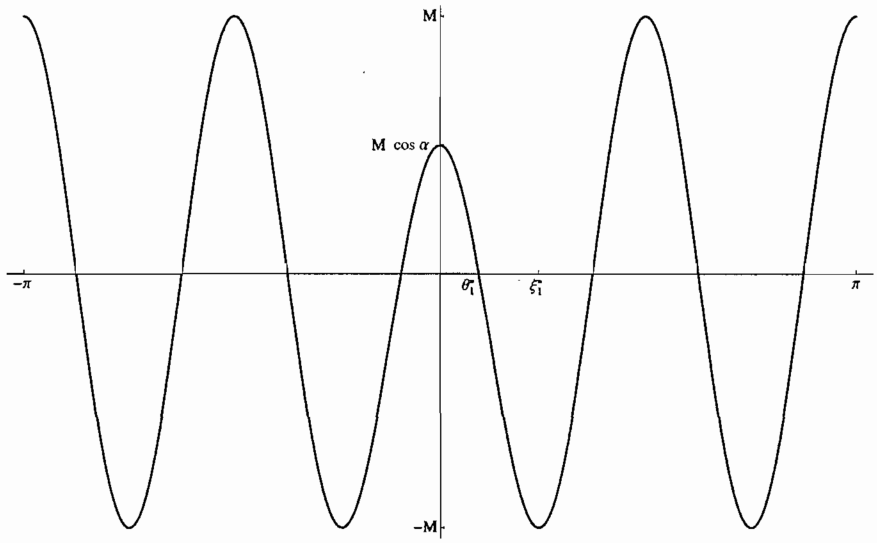

FIG. 4 – Graphique de τ_n pour $n = 4$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

mais $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos\theta + 1)$, donc $u^2 = \frac{\cos^2(\alpha/2n)}{2}(\cos\theta + 1)$ et par la suite

$$\begin{aligned} u^{2q} &= \frac{1}{2^q}(\cos\theta+1)^q \cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \\ &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \sum_{\kappa=0}^{q} \left(e^{\mathrm{i}\theta} + 2 + e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^q \\ &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \sum_{\kappa=-q}^{q} b_{q,\kappa} e^{\mathrm{i}\kappa\theta} \end{aligned}$$

où $b_{q,-\kappa} = b_{q,\kappa}$ pour $\kappa = 0, 1, \ldots, q$. Donc

$$\begin{aligned} u^{2q} &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \left(e^{\mathrm{i}\theta} + 2 + e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^q \\ &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \left(b_{q,0} + \sum_{\kappa=1}^{q} \left\{ b_{q,k} \left(e^{\mathrm{i}\kappa\theta} + e^{-\mathrm{i}\kappa\theta}\right)\right\}\right) \\ &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \left(b_{q,0} + \sum_{\kappa=1}^{q} 2b_{q,k}\cos(\kappa\theta)\right) \\ &= \frac{\cos^{2q}\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{4^q} \left(\sum_{\kappa=0}^{q} a_{q,\kappa}\cos(\kappa\theta)\right). \end{aligned}$$

Ainsi τ_n est un polynôme trigonométrique pair à coefficients réels et de degré

n avec

$$\tau_n(0) = M\cos\left(2n\arccos\left(\cos\frac{\alpha}{2n}\right)\right) = M\cos\alpha. \tag{10}$$

Posons

$$\eta_\nu^* = \frac{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Remarquons que

$$-1 < \eta_{2n-1}^* < \eta_{2n-2}^* < \cdots < \eta_2^* < \eta_1^* < 1,$$

en vertu de la bijection de $\theta \mapsto \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et pour $\nu = 0, 1, \ldots, 2n-1$, il existe un unique $\xi_\nu^* \in (0, 2\pi)$, tel que

$$\cos\left(\frac{\xi_\nu^*}{2}\right) = \eta_\nu^*.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\xi_0^* := 0 < \xi_1^* < \xi_2^* < \cdots < \xi_{2n-2}^* < \xi_{2n-1}^* < \xi_{2n}^* := 2\pi,$$

et pour $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$,

$$(-1)^\nu \tau_n\left(\xi_\nu^*\right) = (-1)^\nu M T_{2n}\left(\cos\frac{\nu\pi}{2n}\right) = M = \max_{\theta\in\mathbb{R}} |\tau_n(\theta)|.$$

D'autre part, $\tau_n'\left(\xi_0^*\right) = 0$, donc τ_n admet un maximum local en ξ_0^*. Nous récapitulons ce qui précède en disant que τ_n décroit de $M\cos\alpha$ vers $-M$ lorsque θ décrit $[\xi_0^*, \xi_1^*]$ ensuite décroit de M vers $-M$ sur $\left[\xi_{2\nu}^*, \xi_{2\nu+1}^*\right]$ puis croit de $-M$ vers M sur $\left[\xi_{2\nu-1}^*, \xi_{2\nu}^*\right]$ et finalement croit de $-M$ vers $M\cos\alpha$ sur $\left[\xi_{2n-1}^*, \xi_{2n}^*\right]$. Notons par $\theta_1^* \in (\xi_0^*, \xi_1^*), \theta_2^* \in (\xi_1^*, \xi_2^*), \ldots, \theta_{2n}^* \in (\xi_{2n-1}^*, \xi_{2n}^*)$ les zéros de τ_n. Le zéro θ_1^* est la plus petite racine positive de

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right)},$$

i.e.

$$\theta_1^* := 2\arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}\right), \; 0 < \theta_1^* < \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Puisque $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ on a
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right)} \geq \cos\frac{\pi}{4n}$$
et donc
$$\theta_1^* \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right). \tag{12}$$
De même
$$\xi_1^* = 2\arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}\right), \; 0 < \xi_1^* < \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$
Observons aussi que
$$\tau_n(\theta) > 0 \qquad (-\theta_1^* < \theta < \theta_1^*),$$
et que
$$\tau_n'(\theta) < 0 \qquad (0 < \theta < \xi_1^*).$$

- L'inégalité (9) dit que, en se dirigeant de 0 à ξ_1, le polynôme trigonométrique $\tau_n(\theta)$ ne peut pas s'annuler avant que $t(\theta)$ le fasse, et puisque le plus petit zéro positif de $\tau_n(\theta)$ est θ_1^* défini dans (11) alors le plus petit zéro positif de $t(\theta)$, noté θ_1, vérifie
$$\theta_1 \leq \theta_1^* \leq \frac{\pi}{2n}.$$
En appliquant ces considérations au polynôme trigonométrique $t(-\theta)$ on peut conclure qu'il y a au moins un zéro de $t(\theta)$ dans l'intervalle $[-\theta, 0)$. Ainsi l'origine sépare deux zéros consécutifs de $t(\theta)$ dont la distance entre eux ne dépasse pas $\frac{\pi}{n}$. Ce résultat donne le lemme dont Erdős avait besoin pour la démonstration du théorème 7.
- Il découle de la proposition 10 que
$$2!\frac{t(\theta) - t(0) - t'(0)\theta}{\theta^2} \leq 2!\frac{\tau_n(\theta) - \tau_n(0) - \tau_n'(0)\theta}{\theta^2},$$
et ceci pour θ dans un certain voisinage de zéro. Par la formule de Taylor, nous tirons que
$$\tau_n''(0) \geq t''(0),$$
mais au voisinage de zéro, τ_n est concave, donc, en particulier, $\tau_n''(0) \leq 0$ et par la suite
$$|\tau_n''(0)| \leq |t''(0)|.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.

Remarquons d'abord que si t est un polynôme trigonométrique de degré n tel que β_1 et β_2 sont deux zéros réels parmi les zéros de t, alors

$$t_1(\theta) := \frac{t(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta-\beta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\beta_2}{2}\right)}$$

est un polynôme trigonométrique de degré $n-1$. En effet,

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\mathrm{i}k\theta} \\ &= e^{-\mathrm{i}n\theta} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\mathrm{i}(n+k)\theta} \\ &= e^{-\mathrm{i}n\theta} \sum_{j=0}^{2n} a_{j-n} e^{\mathrm{i}j\theta} \\ &= e^{-\mathrm{i}n\theta} P\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right) \end{aligned}$$

où $P(z) := \sum_{j=0}^{2n} a_{j-n} z^j$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, P peut s'écrire sous la forme

$$P(z) = c\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k),$$

où $z_k := \rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}$ sont les zéros de P dans $\mathbb{C}$. Ainsi

$$\begin{aligned} t(\theta) &= ce^{-\mathrm{i}n\theta}\prod_{k=1}^{2n}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-\rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}\right) \\ &= ce^{-\mathrm{i}n\theta}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{\mathrm{i}\beta_1}\right)\left(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{\mathrm{i}\beta_2}\right)\prod_{k=3}^{2n}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-\rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}\right) \\ &= ce^{-\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\theta}e^{-\mathrm{i}\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\theta-\beta_1}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\beta_1}{2}}\right)\left(e^{\mathrm{i}\frac{\theta-\beta_2}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\beta_2}{2}}\right)\prod_{k=3}^{2n}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-\rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}\right) \\ &= -4c\sin\left(\frac{\theta-\beta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\beta_2}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}e^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\prod_{k=3}^{2n}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-\rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\theta-\beta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\beta_2}{2}\right)t_1(\theta), \end{aligned}$$

où

$$t_1(\theta) := -4ce^{-\mathrm{i}\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}e^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\prod_{k=3}^{2n}\left(e^{\mathrm{i}\theta}-\rho_k e^{\mathrm{i}\beta_k}\right)$$

est un polynôme trigonométrique de degré $n-1$.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 10. Soit $\nu = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Nous avons

$$t'(\xi_\nu) = 0 \quad \text{et} \quad |t(\xi_\nu)| \geq M,$$

il existe alors $M_\nu \geq M \geq 0$ tels que $t(\xi_\nu) = (-1)^\nu M_\nu$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\theta' \in (0, \xi_1)$ tel que $t(\theta') > \tau_n(\theta')$ et posons

$$S_1(\theta) := \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-(\theta_{2n}-2\pi)}{2}\right)}t(\theta).$$

Il est clair que $S_1(0) = S_1'(0) = 0$.

- Si $0 < \theta < \theta_1$, alors

$$-\pi < \frac{\theta-\theta_1}{2} < 0 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{\theta-\theta_{2n}+2\pi}{2} < \pi,$$

ce qui entraine que

$$\sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta-(\theta_{2n}-2\pi)}{2}\right) > 0.$$

Ainsi $S_1(\theta)t(\theta)$ est négative.

- Si $\theta_1 < \theta < \theta_2$, alors

$$0 < \frac{\theta-\theta_1}{2} < \pi \quad \text{et} \quad 0 < \frac{\theta-\theta_{2n}+2\pi}{2} < \pi. \tag{14}$$

En vertu de (14), nous avons

$$\sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta-(\theta_{2n}-2\pi)}{2}\right) > 0,$$

mais t est négatif sur (θ_1, θ_2), il en est de même alors pour $S_1(\theta)$ et par la suite $S_1(\theta)$ et $t(\theta)$ ont le même signe.

- Soit maintenant $\nu = 2, 3, \ldots, 2n-2$. Pour $\theta \in (\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$ nous avons

$$0 < \frac{\theta - \theta_1}{2} < \frac{\theta_{\nu+1} - \theta_1}{2} < \pi \quad \text{et} \quad 0 < \frac{2\pi + \theta_\nu - \theta_{2n}}{2} < \frac{\theta - \theta_{2n} + 2\pi}{2} < \pi.$$

Par conséquent la quantité $S_1(\theta)t(\theta)$, qui a le signe de

$$\sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - (\theta_{2n} - 2\pi)}{2}\right),$$

est positive, i.e. $S_1(\theta)$ et $t(\theta)$ ont le même signe. Il en est de même pour $(-1)^\nu S_1(\theta)$ et $(-1)^\nu t(\theta)$, mais $(-1)^\nu t(\theta)$ est positif sur $(\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$ donc $(-1)^\nu S_1(\theta)$ est positif sur $(\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$.

Soit

$$t_{\varepsilon,1}(\theta) := t(\theta) + \varepsilon S_1(\theta) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Nous pouvons alors écrire que, pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2n$,

$$(-1)^\nu t_{\varepsilon,1}(\xi_\nu) = M_\nu + (-1)^\nu S_1(\xi_\nu)\varepsilon > M_\nu \geq M.$$

D'autre part, nous voyons que $t_{\varepsilon,1}(0) = M\cos\alpha$ et que $t'_{\varepsilon,1}(0) = 0$. Donc ce polynôme admet une valeur légèrement plus grande que celle $t(\theta)$ en ξ_ν lorsque $t(\xi_\nu) > 0$ et une valeur légèrement plus petite que celle de $t(\theta)$ au point ξ_ν lorsque $t(\xi_\nu) < 0$, de plus, il garde la même valeur que $t(\theta)$ à l'origine (voir FIG. 5). Ceci nous permettera, d'avoir des intersections claires de $t_{\varepsilon,1}$ avec τ_n, et par la suite de compter les zéros de leurs différence. Compte-tenu du fait que $\theta' \in (0, \xi_1) \subset (0, \theta_2)$ et sur $(0, \theta_2)$, S_1 est négatif alors

$$t(\theta') > t_{\varepsilon,1}(\theta'),$$

mais $\varepsilon \mapsto t_{\varepsilon,1}(\theta')$ croit vers $t(\theta')$ lorsque ε décroit vers zéro et $\tau_n(\theta') < t(\theta')$, donc à partir d'un certain $\varepsilon > 0$ assez petit, nous aurons $t_{\varepsilon,1}(\theta') > \tau_n(\theta')$.

Considérons le polynôme trigonométrique ψ, défini par

$$\psi(\theta) := \psi_{\varepsilon,n} := t_{\varepsilon,1}(\theta) - \tau_n(\theta),$$

où ε est aussi petit que $t_{\varepsilon,1}(\theta') > \tau_n(\theta')$.

- À l'origine, ψ admet au moins deux zéros (zéro double).
- Nous avons $\psi(\theta') > 0$ et $\psi(\xi_1) < -M_1 - \tau_n(\xi_1) \leq -M_1 + M \leq 0$; donc

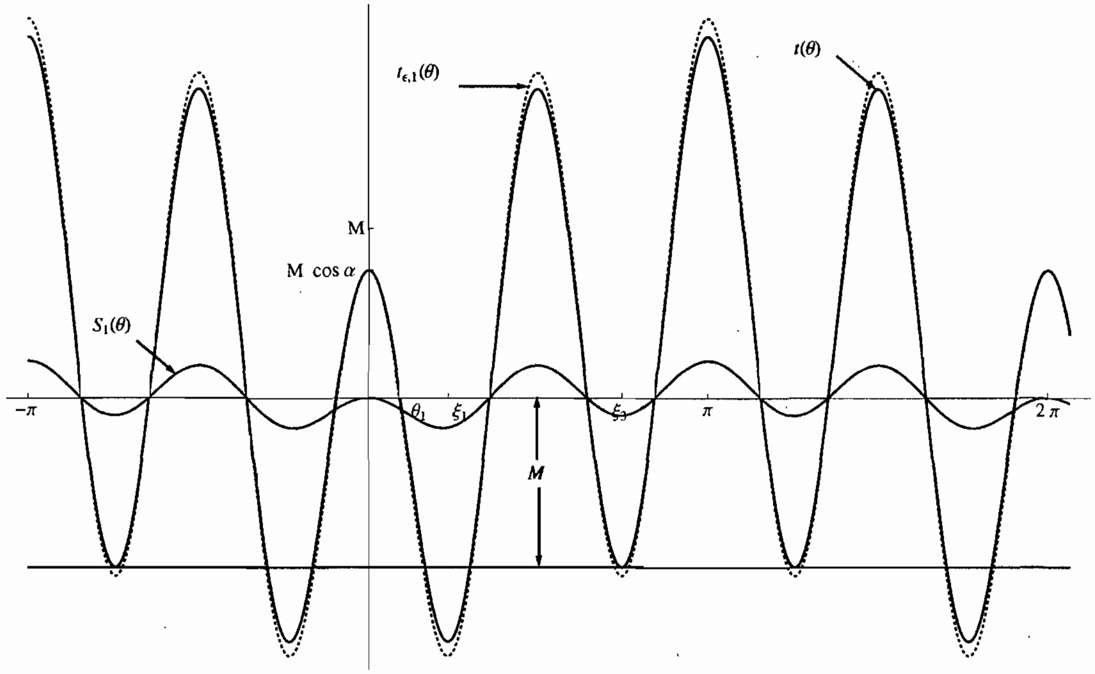

FIG. 5 – Graphiques de t et $t_{\varepsilon,1}$ pour $n = 4$.

par le théorème des valeurs intermédiaires ψ admet au moins un zéro dans (θ', ξ_1).

- Nous avons aussi

$$\psi(\xi_{2\nu}) > M_{2\nu} - \tau_n(\xi_{2\nu}) \geq M_{2\nu} - M \geq 0,$$

et

$$\psi(\xi_{2\nu+1}) < -M_{2\nu+1} - \tau_n(\xi_{2\nu+1}) \leq -M_{2\nu+1} + M \leq 0.$$

Il s'en suit que, pour tout $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-2$, entre ξ_ν et $\xi_{\nu+1}$ il existe au moins un zéro de ψ, donc au moins $(2n-2)$ zéros de ψ sur ces intervalles.

En conclusion, ψ admet au moins $(2n+1)$ zéros sur $[0, 2\pi)$, mais ψ est un polynôme trigonométrique de degré au plus n, donc $\psi \equiv 0$ et par la suite $t_{\varepsilon,1} \equiv \tau_n$ pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que $t_{\varepsilon,1}(\theta') > \tau_n(\theta')$, ce qui est absurde. Ainsi

$$t(\theta) \leq \tau_n(\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \xi_1).$$

Nous souhaitons maintenant montrer que l'inégalité précédente reste stricte sur $\mathbb{I} = (0, \xi_1)$, sauf si $t \equiv \tau_n$. Pour ce faire nous supposons que t n'est pas identiquement égale à τ_n mais qu'il existe $\theta'' \in \mathbb{I}$ où il y a contact entre t et τ_n, alors nécessairement θ'' est isolé dans le sens suivant ; Il existe un certain réel $\delta > 0$ tel que sur $\mathcal{N}_\delta := (\theta'' - \delta, \theta'') \cup (\theta'', \theta'' + \delta)$, l'inégalité

$$t(\theta) < \tau_n(\theta)$$

reste vraie, (Nous supposons que δ est le plus grand qui fera l'affaire).

Considérons maintenant le polynôme trigonométrique suivant

$$S_2(\theta) := \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)} t(\theta).$$

Nous avons $S_2(0) = S_2'(0) = 0$ et $S_2(\theta) > 0$ sur $(0, \theta_3)$. En effet,

- Pour $0 < \theta < \theta_1$, nous remarquons que $t(\theta)$ est positif, et les conditions

$$-\pi < \frac{\theta - \theta_1}{2} < 0 \quad \text{et} \quad -\pi < \frac{\theta - \theta_1}{2} < 0$$

  entrainent que

$$\sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) < 0.$$

  Par la suite $S_2(\theta)$ est positif sur $(0, \theta_1)$.

- Pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, nous remarquons aussi que $t(\theta)$ est négatif, et que les encadrements

$$0 < \frac{\theta - \theta_1}{2} < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \frac{\theta - \theta_1}{2} < 0$$

  donnent que

$$\sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) < 0.$$

  Par conséquent $S_2(\theta)$ est positif sur (θ_1, θ_2).

- Pour $\theta_2 < \theta < \theta_3$, nous voyons que $t(\theta)$ est positif, et que les encadrements

$$0 < \frac{\theta - \theta_1}{2} < \pi \quad \text{et} \quad 0 < \frac{\theta - \theta_1}{2} < \pi$$

donnent que

$$\sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) > 0.$$

Donc $S_2(\theta)$ est positif sur (θ_2, θ_3).

De plus, S_2 et t sont de même signe sur $(\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$, $\nu \in \{3, \ldots, 2n-1\}$. D'autre part, si nous considérons le polynôme trigonométrique

$$t_{\varepsilon,2}(\theta) := t(\theta) + \varepsilon S_2(\theta) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ assez petit }),$$

nous avons

$$t_{\varepsilon,2}(0) = M\cos\alpha \quad \text{et} \quad t'_{\varepsilon,2}(0) = 0.$$

Remarquons que $t\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right) < \tau_n\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right)$ et que $t_{\varepsilon,2}\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right)$ décroit vers $t\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donc à partir d'un certain $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$t_{\varepsilon,2}\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right) < \tau_n\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right),$$

de même

$$t_{\varepsilon,2}\left(\theta'' + \frac{\delta}{2}\right) < \tau_n\left(\theta'' + \frac{\delta}{2}\right).$$

En vertu des remarques faites sur le signe de $S_2(\theta)$, nous avons

$$t_{\varepsilon,2}(\theta'') = t(\theta'') + \varepsilon S_2(\theta'') > t(\theta'') = \tau_n(\theta'').$$

Remarquons aussi que, pour $\nu \in \{2, \ldots, 2n-1\}$, $(-1)^\nu t(\theta)$ est positif sur $(\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$; donc $(-1)^\nu S_2(\theta)$ est positif sur $(\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$, comme $\xi_\nu \in (\theta_\nu, \theta_{\nu+1})$ alors

$$(-1)^\nu t_{\varepsilon,2}(\xi_\nu) = M_\nu + (-1)^\nu S_2(\xi_\nu) > M_\nu \geq M.$$

Soit

$$\tilde{\psi}(\theta) := t_{\varepsilon,2}(\theta) - \tau_n(\theta) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Par les considérations précédentes, nous avons

$$\tilde{\psi}(\theta'') > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}\left(\theta'' - \frac{\delta}{2}\right) < 0;$$

donc $\tilde{\psi}$ admet un zéro sur $(\theta'' - \delta, \theta'')$. De même

$$\tilde{\psi}(\theta'') > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}\left(\theta'' + \frac{\delta}{2}\right) < 0;$$

donc $\tilde{\psi}$ admet un zéro sur $(\theta'', \theta'' + \delta)$. D'autre part

$$\tilde{\psi}(\xi_{2\nu}) > M_{2\nu} - \tau_n(\xi_{2\nu}) \geq M_{2\nu} - M \geq 0$$

et

$$\tilde{\psi}(\xi_{2\nu+1}) < -M_{2\nu+1} + \tau_n(\xi_{2\nu+1}) \leq -M_{2\nu+1} + M \leq 0;$$

donc $\tilde{\psi}$ admet un zéro sur $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$, pour tout $\nu = 2, 3, \ldots, 2n-2$. De plus $\tilde{\psi}$ admet un zéro de multiplicité au moins 2 à l'origine. En tout nous distinguons au moins $(2n+1)$ zéros de $\tilde{\psi}$, i.e. $\tilde{\psi} \equiv 0$, donc

$$t_{\varepsilon,2} \equiv \tau_n,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est absurde. Ainsi

$$t \equiv \tau_n. \qquad \square$$

Remarques.

- La simplicité de l'énoncé de ce théorème, laisse l'impression que ce résultat n'est qu'une simple curiosité qui ne pourra être utilisée nulle part. En réalité, ce n'est pas le cas. Ce résultat joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème 7 telle que donnée par Erdős.
- Remarquons que dans cette démonstration, la condition " en ξ_0 le polynôme trigonométrique t admet l'extrémum de plus petit module" était capitale. De même pour le résultat concernant le point ou le polynôme trigonométrique prend sa plus grande valeur absolu. Mais pour les autres points extrémaux, on n'affirme rien. Une question qui se pose est que si on a deux points extrémums locaux ξ_1 et ξ_2, autres que ceux de plus petite et plus grande valeur absolue, tels que $|t(\xi_1)| > |t(\xi_2)|$, a-t-on nécessairement la distance entre les deux zéros séparés par ξ_1 est plus grande que celle entre les deux zéros séparés par ξ_2 ? Ça sera une question que nous pourrons étudier prochainement.

6 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des théorèmes sur des inégalités polynomiales, où nous ne nous sommes pas seulement intéressés à donner une simple estimation, mais plutôt la meilleure. C'est ce qui explique que, presque dans chacun des théorèmes sur les inégalités présentés, il y a eu une mention du cas échéant de l'égalité. Après une première lecture des énoncés, on peut croire que le cas d'égalité est un cas particulier simple de l'énoncé général, alors que les preuves de ces théorèmes ont montré que c'est la clef pour résoudre le problème tout entier. En effet, sans mettre le doigt sur le polynôme extrémal, où l'égalité est établie, nous ne seriont pas capables de résoudre notre problème, et ce pour les problèmes liés tant aux polynômes qu'aux polynômes trigonométriques. D'ailleurs, c'est ce qui explique que, dans sa démonstration, I. Schur a démontré son inégalité en passant par le polynôme extrémal.

Ce mémoire a souligné l'importance des polynômes de Tchebycheff de première espèce dans la construction des polynômes extrémaux puisque la plupart de ces derniers sont des polynômes de Tchebycheff dont l'argument a subit une transformation affine ou une normalisation de ces polynômes. Il est clair qu'une telle construction n'est pas simple, en effet, ont ne peut pas procéder directement pour aboutir au polynôme de Tchebycheff, puisque les coefficients de ce dernier découlent de la formule de DeMoivre et de la formule du binôme appliquée pour

$$\cos(m\theta) = \Re\{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^m\} = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k}\cos^k\theta = \left[\sum_{k=0}^{m} a_{m,k}t^k\right]_{t=\cos\theta}.$$

Observons dans ce mémoire que les polynômes extrémaux sont des polynômes qui satisfont les hypothèses du théorème en vigueur et qui oscillent le plus entre les valeurs extrémales des polynômes considérés dans le problème. Donc la présence de beaucoup d'oscillations dans les polynômes de Tchebycheff de première espèce a toujours dirigé la recherche des polynômes extrémaux dans la direction de ces polynômes de Tchebycheff. Ainsi, une bonne compréhension de ces polynômes est indispensable pour l'études de tels problèmes.

Comme nous l'avons remarqué à la suite de certains théorèmes, beaucoup de résultats pour les polynômes et polynômes trigonométriques ont été généralisés pour les fonctions entières de type exponentiel. Mais il existe encore des résultats qu'on ne voit pas encore une forme élégante pour les fonctions entières de type exponentiel qui les généralise, comme nous l'avons vu dans l'inégalité suivante, de la proposition 8

$$\max_{|z|\leq 1}\left|\frac{P(z)}{z^k-1}\right| \leq \frac{n}{2k}.$$

7 Appendice

Compte-tenu du fait que l'article de Cesàro : "Solution de la Question 1338", cité dans la liste des références comme item [**5**], n'est pas facilement disponible dans les bibliothèques, nous le reproduisons dans la sous-section suivante, pour le bénéfice du lecteur.

7.1 L'Article de Cesàro : Solution de la Question 1338

L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, soient α et β deux racines consécutives de cette équation. La dérivée s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β ; démontrer que cette valeur est comprise entre

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n}$$

n désignant le degré de l'équation.

(Laguerre)

Pour l'uniformité des développements qui suivent, nous changerons de notation. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les racines de l'équation proposée, rangées par ordre de grandeur croissante. Soit r la racine de $f'(z) = 0$, comprise entre c_p et c_{p+1}. À cause de

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \frac{1}{z - c_3} + \cdots + \frac{1}{z - c_n},$$

nous devrons avoir

$$\frac{1}{r - c_1} + \frac{1}{r - c_2} + \cdots + \frac{1}{r - c_p} = \frac{1}{c_{p+1} - r} + \frac{1}{c_{p+2} - r} + \cdots + \frac{1}{c_n - r}.$$

Si l'on observe que les termes du premier membre ne vont pas en diminuant, tandis que ceux du second membre ne vont pas en augmentant, on peut écrire

$$\frac{p}{r-c_p} \geq \frac{1}{c_{p+1}-r} \quad , \quad \frac{1}{r-c_p} \leq \frac{n-p}{c_{p+1}-r}$$

d'où

$$\frac{1}{n-p} \leq \frac{r-c_p}{c_{p+1}-r} \leq p.$$

À plus forte raison peut-on remplacer les deux limites par $\frac{1}{n-1}$, $n-1$, repectivement, et conclure

$$c_p + \frac{c_{p+1}-c_p}{n} \leq r \leq c_{p+1} - \frac{c_{p+1}-c_p}{n}.$$

En d'autres termes, ayant partagé l'intervalle (c_p, c_{p+1}) en segments égaux, on peut affirmer que, dans les segments extrêmes, la fonction dérivée ne s'annule pas. C'est le théorème de M. Laguerre.

Remarque 1.

Si l'on suppose plus généralement que z représente la variable complexe $x+\mathrm{i}y$, et qu'on ait $c_s = a_s + \mathrm{i}b_s$, on peut écrire

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{1}{z-c_s} = \sum \frac{x-a_s}{\delta_s^2} - \mathrm{i} \sum \frac{y-b_s}{\delta_s^2}$$

en désignant par δ_s la distance du zéro c_s au point z. Lorsque z est un zéro de $f'(z)$, on doit avoir simultanément

$$\sum \frac{x-a_s}{\delta_s^2} = 0 \quad , \quad \sum \frac{y-b_s}{\delta_s^2} = 0.$$

Ces équations montrent que, si, au zéros de $f(z)$, on applique des poids inversement proportionnels aux carrés de leur distances respectives à un zéro **P** de $f'(z)$, le centre de gravité d'un tel système est précisement **P**.

Remarque 2.

D'après la remarque précédente, étant donnés les zéros de $f(z)$, ceux de $f'(z)$ doivent être situés de telle sorte que, si, par un quelconque d'entre eux, on tire une droite quelconque, celle-ci ne laisse pas tous les zéros de $f(z)$ du même côté. On en déduit, par exemple, que, si les zéros de $f(z)$ sont les sommets d'un polygone convexe, les zéros de $f'(z)$ sont situés à l'intérieur du polygone. Il en est de même des zéros des dérivées suivantes, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ieme}}$, dont l'unique zéro n'est autre que le centre de gravité du polygone. Remarquons encore que, si les zéros de $f(z)$ sont alignés sur une droite, celle-ci contient aussi les zéros de $f'(z)$. Dans ce dernier cas, il est aisé de reconnaître que la propriété signalée par M. Laguerre, pour le cas des zéros alignés sur l'axe des quantités réelles, ne cesse de subsister en général.

Remarque 3.

Par rapport à une fonction donnée $f(z)$, à chaque point **P** correspond un point **Q**, centre de gravité d'un système de poids, appliqués aux zéros de $f(z)$ avec une intensité qui varie en raison inverse du carré de la distance à **P**. Nous avons vu que, lorsque **P** est un zéro de $f'(z)$, le point correspondant **Q** coïncide avec lui. En général, il existe, entre les affixes z, Z des deux points et leur distance δ, la relation

$$f'(z) = \frac{f(z)}{z-Z} \sum \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^2$$

qui donne lieu à plusieurs observations intéressante.

Remarque 4.

Les résultats précédents n'appartiennent pas exclusivement aux fonctions algébriques. On peut consulter, à ce sujet, notre article : Remarques sur les fonctions holomorphes, inséré au Journal de Battaglini (1884).

La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et Juhel-Rénoy.

(Fin de l'article de Cesàro)

Dans la sous-section 7.2 qui suit, nous reproduisons la preuve du thèorème 4 donnée par R. P. Boas, afin que le lecteur constate lui même le manque de détails dans cette preuve.

7.2 Preuve donnée par R. P. Boas pour le théorème 4

As usual, we may suppose P_n real and $|P_n(x)| < 1$ at the points in question. Suppose that at some x_0 in $\left(0, \sin \frac{\pi}{2m}\right)$ we have $P_n(x_0) > -T_m(x_0) > 0$. Since x_0 is between 0 and the first maximum of T_m, Lemma 2 yields $m+2 > n$ intersections of the graphs of P_n and $-T_m$, so that we get a contradiction. This completes the proof.

If $x_0 > \sin \frac{\pi}{2m}$, the "expanded" polynomial $-T_m(cx)$, where $c = x_0^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)$, has absolute value at most 1 on $[-1, 1]$ and takes the value 1 at x_0.

7.3 Le Théorème d'Hurwitz et sa Preuve

Soit $\{f_n(z)\}_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine Ω, délimité par une courbe de Jordan Γ, et uniformément convergente sur tout compact de Ω, et $z_0 \in \Omega$. Supposons de plus que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ n'est pas identiquement nulle sur Ω. Alors, z_0 est un zéro de $f(z)$, si, et seulement si, z_0 est un point adhérent à l'ensemble des zéros des fonctions $f_n(z)$.

PREUVE

Soient $z_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ aussi petit que le cercle $|z - z_0| = \rho$ soit dans le domaine Ω et ne contient aucun zéro de f dans son intérieur (éventuellement autre que z_0). f admet ainsi, sur ce cercle, une borne inférieure m supérieure strictement à zéro. Il existe $n_0 > 0$ assez grand, tel que, pour $|z - z_0| = \rho$ nous avons

$$|f_n(z) - f(z)| < m \qquad (n > n_0).$$

Sachant que $f_n(z) = f(z) + \{f_n(z) - f(z)\}$, il découle du théorème de Rouché que, pour $n > n_0$, la fonction $f_n(z)$ a le même nombre de zéros dans le cercle que celui de $f(z)$, c'est-à-dire si z_0 est un zéro de $f(z)$ il l'en est de même pour $f_n(z)$ sinon, $f_n(z)$ n'admet aucun zéro.

7.4 Sur les Fonctions Entières de Type Exponentiel

Soit f une fonction entière ou analytique sur un domaine non borné Ω.

On définit l'ordre de f par

$$\rho = \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log(\log(M(r)))}{\log r} \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

De même, on définit le type τ de f par

$$\tau = \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

On dit que f est une fonction entière de type exponentiel τ si l'une des deux assertions suivantes est vraie :

– Ou bien f est d'ordre $\rho < 1$ et de type τ.

– Ou bien f est d'ordre $\rho = 1$ et de type $T \leq \tau$.

Propriétés.

– Une fonction entière de type exponentiel τ est aussi entière de type exponentiel $\alpha\tau + \beta$.

– Une fonction de type T n'est pas nécessairement de type $T + \delta$, $\delta > 0$.

– Lorsque $\rho = 1$ le type τ est donné par la formule (voir [**3**, p. 11])

$$\tau = \limsup_{n \longrightarrow \infty} \left| f^{(n)}(z) \right|^{\frac{1}{n}},$$

où z est un nombre complexe fixé.

– Les polynômes et les polynômes trigonométriques en z sont des fonctions entières de type exponentiel n (d'ordres nuls).

– Une fonction entière de type exponentiel est un polynôme trigonométrique si, et seulement si, elle est périodique de période 2π.

– Il existe des fonctions entières de type exponentiel qui ne sont pas périodiques, par exemple

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

8

Références

[1] Arsenault, M. et Rahman, Q. I. , *On two polynomial inequalities of Erdös related to those of the brothers Markov*, J. Approx. Theory, **84** (1996), pp. 197-235.

[2] Aziz, A. , *Inequalities for polynomials with prescribed zero*, J. Approx. Theory, **41** (1984), pp. 15-20.

[3] Boas, R. P. Jr. , *Entire functions*, (1954), Pure and applied mathematics, Academic Press.

[4] Boas, R. P. Jr. , *Inequalities for polynomials with a prescribed zero*, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics - **Essays in Honor of George Pólya**, Stanford University Press (1962), pp. 42-47.

[5] Cesàro, E., *Solution de la question 1338*, Nouvelles Annales de Mathématiques, **4** (1885), pp. 328-330.

[6] Copson, E. T. , *Introduction to the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1935.

[7] Dryanov, D. P. , Qazi, M. A. et Rahman, Q. I. , *Local behavior of entire functions of exponential type*, Comput. Methods Funct. Theory, **2** (2002), pp. 319-336.

[8] Dryanov, D. P. , Qazi, M. A. et Rahman, Q. I. , *Local behaviour of polynomials*, Math. Comp. , **73** (2003), pp. 1345-1364.

[9] Duffin, R. et Schaeffer, A. , *A refinement of an inequality of brothers Markoff*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), pp. 517-528.

[10] Erdős, P. , *On the uniform distribution of the roots of certain polynomials*, Ann. of Math. , **43** (1942), pp. 59-64.

[11] Hörmander, L. , *Some inequalities for functions of exponential type*, Math. Scand., **3** (1955), pp. 21-27.

[12] Hyltén-Cavallius, C. , *Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials*, Math. Scand. , **3** (1955), pp. 5-20.

[13] Montel, P. , *Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques*, Bull. Soc. Math. France, **58** (1930), pp. 105-126.

[14] Nagy, J. von Sz. , *Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten*, Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **8** (1936), pp. 42-53.

[15] Nikolov, G., *An extension of an inequality of I. Schur*, Math. Nachr. **278** (2005), pp. 1190-1208.

[16] Qazi, M. A. et Rahman, Q. I. , *Behaviour of trigonometric polynomials with only real zeros near a critical point*, Constr. Theory Funct. , (2005), pp. 257-266.

[17] Rahman, Q. I. et Mohammad, Q. G. , *Remarks on Schwarz's lemma*, Pacific J. Math. , **23** (1967), pp. 139-142.

[18] Rahman, Q. I. et Schmeisser, G. , *Analytic Theory of Polynomials*, London Mathematical Society Monographs, **26** (2002), Oxford University Press.

[19] Riesz, M. , *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome* , Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. **23** (1914), pp. 354-368.

[20] Schur, I. , *Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall*, Math. Z. , **4** (1919), pp. 271-287.

[21] Szegö, G. , *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications **23** (1959), American Mathematical Society.

[22] Tinawi, F. , *Solution d'un problème de P. Turán concernant des polynômes par C. Hyltén-Cavallius* , Mémoire de Maitrise, (2008), Université de Montréal.

[23] Titchmarsh, E. C. , *Theory of Functions*, (1939), Oxford University Press.

[24] Turán, P. , *On rational polynomials*, Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **11** (1946), pp. 106-113.