Université de Montréal

Quelques théorèmes ergodiques pour des suites de fonctions

par
Jean-François Cyr

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

décembre, 2011

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Quelques théorèmes ergodiques pour des suites de fonctions

présenté par:

Jean-François Cyr

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Louis-Pierre Arguin,	président-rapporteur
Richard Duncan,	directeur de recherche
Sabin Lessard,	membre du jury

Mémoire accepté le: 13 février 2012

RÉSUMÉ

Le théorème ergodique de Birkhoff nous renseigne sur la convergence de la suite de fonctions $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i\}_{n\geq 1}$ où (Ω,β,m) est un espace de probabilité, $T:\Omega\longrightarrow\Omega$ est une transformation qui préserve la mesure et $f\in L^1(\Omega,\beta,m)$.

Nous nous intéressons alors à étudier la convergence en moyenne et presque partout de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\circ T^{k_i}\}_{n\geq 1}$ où $\{k_i\}$ est une suite strictement croissante de nombres entiers positifs. C'est alors que nous définirons les suites uniformes et étudierons la convergence presque partout pour ces suites. Nous regarderons également s'il existe certaines suites $\{k_i\}$ pour lesquelles la convergence de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\circ T^{k_i}\}_{n\geq 1}$ n'a pas lieu. Nous présenterons alors un résultat dû en partie à Alexandra Bellow qui dit que de telles suites existent.

Finalement, nous démontrerons une équivalence entre la notion de transformatiuon fortement mélangeante T, et la convergence de la suite $\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i f(T^{k_i}x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\}$ où les $\{c_i\}$ sont des "poids" qui satisfont certaines propriétés.

Mots clés

Processus stationnaires, Transformations qui préservent la mesure , Théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann, Suites uniformes, Théorème ergodique pour les suites uniformes.

ABSTRACT

Birkhoff's ergodic theorem gives us information about the convergence of the sequence of functions $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i\}_{n\geq 1}$ where (Ω, β, m) is a probability space, $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ is a measure preserving transformation and $f \in L^1(\Omega, \beta, m)$.

We are interested in studying the mean and pointwise convergence of the sequence $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f \circ T^{k_i}\}_{n\geq 1}$ where $\{k_i\}$ is a strictly increasing sequence of positive integers. With that goal in mind, we will define uniform sequences and study the pointwise convergence for these sequences. We will also explore the possibility that there exists some sequences $\{k_i\}$ for which the convergence of the sequence $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f \circ T^{k_i}\}_{n\geq 1}$ does not occur. We will present a result of Alexandra Bellow that says that such sequences exist.

Finally, we will prove a result which establishes an equivalence between the notion of a strongly mixing transformation T, and the convergence of the sequence $\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i f(T^{k_i}x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\}$ where $\{c_i\}$ is a sequence of "weights" which satisfies certain properties.

Keywords

Stationary processes, Measure preserving transformations , Birkhoff and Von Neumann ergodic theorems, Uniform sequences, Ergodic theorem along uniform sequences.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord profiter de cette opportunité pour remercier mon directeur de maîtrise, Richard Duncan. Il a su me proposer un sujet d'étude qui m'a plus tout au long de mon cheminement. De plus, ses nombreuses questions et remarques m'ont permis de mieux assimiler les points importants de cette nouvelle théorie pour moi. Sa grande disponibilité et la patience dont il a fait preuve lorsque je lui posais plusieurs questions ont été très bénéfiques pour mon cheminement.

Je voudrais également remercier mes parents et mon frère pour tout leur support au long de mes études de maîtrise. Ils m'ont toujours encouragé et m'ont permis de me consacrer à plein temps à mes études sans avoir à me soucier de questions financières. Sans leur support, tout ce travail aurait été beaucoup plus compliqué.

J'aimerais remercier tous les étudiants gradués du département avec qui j'ai partagé mes deux dernières années et qui ont rendu l'ambiance au département très plaisante. J'aimerais également remercier les deux collègues avec qui j'ai passé de nombreuses heures à travailler sur les devoirs d'analyse fonctionnelle, Guillaume Roy-Fortin et Guillaume Poliquin. La collaboration que nous avons eue a été très enrichissante.

INTRODUCTION

La théorie ergodique trouve ses origines dans des problèmes de physique statistique étudiés dans la deuxième moitié du 19^e siècle, par entre autres Ludwig Boltzmann. Ces problèmes traitaient de la théorie cinétique des gaz. Boltzmann fut l'un des premiers a formalisé en termes mathématiques les problèmes physiques auxquels les chercheurs faisaient face.

Ce fut cependant Henri Poincaré, en 1890, qui démontra le premier résultat d'envergure de la théorie ergodique en mathématiques. Son résultat, communément appelé le théorème de récurrence de Poincaré, stipule que si l'on considère une transformation T qui préserve la mesure sur un espace de probabilité (Ω, β, m) et un élément $B \in \beta$ tel que $m(B) > 0$, alors pour presque tout élément $x \in B$, x revient une infinité de fois dans B sous les itérations de T.

Il fallut par la suite attendre au début des années 1930 pour que d'autres résultats d'envergure soient publiés. C'est alors que George David Birkhoff publia son important résultat sur la convergence presque partout de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)\}_{n\geq 1}$. Peu de temps après, John von Neumann publia son résultat sur la convergence dans L^2 des mêmes suites de fonctions. Son résultat était important, mais celui de Birkhoff étant encore plus fondamental et ayant été publié avant, c'est le théorème de Birkhoff qui reçut le plus d'attention.

Fait historique à noter, des études historiques des correspondances de Von Neumann démontrent que ce dernier prouva son résultat avant que Birkhoff ne puisse réussir à démontrer le sien. Cependant, à l'affût du fait que Von Neumann allait publier son résultat et connaissant déjà le contenu de cet article, car Von Neumann lui avait fait état de ses recherches auparavant, Birkhoff s'empressa de publier son article, sans donner le crédit qui revenait à Von Neumann. Ce dernier fut irrité et une friction bien documentée s'installa entre les deux hommes. [8]

Par la suite, au cours des années 60, plusieurs nouveaux résultats apparurent au sujet de la convergence en moyenne et presque partout de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x)\}_{n\geq 1}$ où $\{k_i\}$ est une suite strictement croissante. En effet, dès 1960, J.R. Blum et D.L. Hanson publièrent leur résultat qui établit une équivalence entre la convergence en moyenne des suites de fonctions définies précédemment dans ce paragraphe et la notion de transformation fortement mélangeante. Ensuite, à la fin de cette décennie, en 1969, Antoine Brunel et Michael Keane, utilisèrent le théorème ergodique de Birkhoff pour démontrer que si l'on considère $\{k_i\}$ comme étant une suite uniforme, alors la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x)\}_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Dans ce même article, Brunel et Keane établissent une équivalence, autre que celle démontrée par Blum et Hanson, entre la notion de transformation fortement mélangeante et la convergence d'une certaine suite de fonction du type dont nous avons parlé précédemment.

Comme c'est souvent le cas en mathématiques, au fil des années, la théorie ergodique a eu des débouchés dans plusieurs autres domaines des mathématiques. C'est ainsi que cette théorie est aujourd'hui étudiée dans des domaines tels que la géométrie, l'analyse harmonique, les groupes de Lie et la théorie des nombres. En 2010, un mathématicien israélien du nom de Elon Lindenstrauss a même reçu la médaille Fields pour ses travaux en théorie ergodique.

Nous consacrerons le premier chapitre à l'introduction aux théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann et à quelques propriétés qui en découlent. Ensuite, au deuxième chapitre, nous présenterons le résultat de Blum et Hanson, ainsi que celui de Brunel et Keane. De plus, nous présenterons le résultat d'Alexandra Bellow sur la non-convergence de certaines suites de fonctions. Finalement, au troisième chapitre, nous démontrerons le théorème ergodique avec poids dû à Brunel et Keane.

CHAPITRE 1

THÉORÈMES ERGODIQUES

1.1 Introduction

Le théorème de récurrence de Poincaré et les théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann sont les premiers résultats importants à avoir été démontrés en théorie ergodique. Nous allons d'abord donner les définitions nécessaires et ensuite présenter ces théorèmes ergodiques fondamentaux, ainsi que quelques résultats et propriétés qui en découlent.

1.2 Définitions

Définition 1.1. *Soit* (Ω_i, β_i, m_i), *i=1,2, deux espaces de probabilité et soit*

$$T : (\Omega_1, \beta_1, m_1) \longrightarrow (\Omega_2, \beta_2, m_2)$$

une transformation. On dit que T est une transformation mesurable si $T^{-1}(\beta_2) \subseteq \beta_1$. *De plus, on dit que T est une transformation qui préserve la mesure si T est mesurable et si* $m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2)\ \forall B_2 \in \beta_2$.

Exemple 1.1. *Soit* (Ω, β, m) *un espace de probabilité et* $I : (\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ *la transformation identité, c'est-à-dire* $I(x)=x$, $\forall\, x \in \Omega$. *Alors, clairement I est une transformation qui préserve la mesure.*

Exemple 1.2. *On peut également considérer le cas où* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ *est un ensemble fini et* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *est une bijection. Alors,* $\sigma(\Omega)$, *la* σ*-algèbre engendrée par* Ω, *est l'ensemble des parties de* Ω, *souvent notée* 2^{Ω}. *En posant,* $m(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$, *i=1,...,n, il existe une unique manière d'étendre m à* $\sigma(\Omega)$, *disons* $\tilde{m}$. *En fait, si on note l'événement* $E_i=\{\omega_i\}$, *i=1,...,n,* $\sigma(\Omega) = \{\bigcup_{j \in J} E_j\}$ *où J est un sous-ensemble de* $\{1, 2, ..., n\}$, *alors,*

$\tilde{m}(\bigcup_{j\in J} E_j) = \frac{card(J)}{n}$. *Ainsi, si* $F \in \sigma(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{m}(T^{-1}(F)) &= \tilde{m}(T^{-1}(\bigcup_{j\in J_F} E_j)) && \textit{car } F \in \sigma(\Omega)\\
&= \tilde{m}(\bigcup_{j\in J'} E_j) && \textit{car T est une bijection}\\
&= \tilde{m}(\bigcup_{j\in J_F} E_j) && card(J')=card(J_F)\\
&= \tilde{m}(F)
\end{aligned}$$

Exemple 1.3. *Soit* S_1 *le cercle unité, c'est-à-dire* $S_1 = \{e^{2\pi ix} : x \in]0,1]\}$. *Considérons la transformation* $T : S_1 \longrightarrow S_1$ *définit par* $T(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}$ *où* $\alpha \in (0,1)$ *et la mesure de Lebesgue sur* S_1. *On remarque en fait que la transformation T est une rotation d'un angle* $2\pi\alpha$ *sur le cercle unité. Il est ainsi clair que la transformation préserve la mesure de Lebesgue sur* S_1*, car cette mesure est invariante sous translation.*

Exemple 1.4. *Une famille très étudiée de transformations qui préservent la mesure est la famille des décalages de Bernoulli ("Bernouilli shifts"). Plusieurs types de tels décalages existent, mais nous nous concentrerons sur un en particulier, le décalage de Bernoulli d'un côté ("one-sided Bernouilli shift"). Pour définir ce décalage de Bernoulli, choisissons d'abord* $k \geq 2$. *Considérons le vecteur de probabilité* $(p_0, p_1, ..., p_{k-1})$ *où,* $p_i > 0\ \forall i$ *et* $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$. *Considérons également l'ensemble mesurable* $Y=\{0,1,...,k-1\}$ *où chaque point i a comme mesure* p_i. *On peut alors considérer l'espace mesuré suivant* $(Y, 2^Y, \mu)$, *où* 2^Y *représente l'ensemble des parties de Y et* μ *est une mesure sur cette* σ*-algèbre. Nous pouvons alors construire l'espace produit* $(X, \beta, m) = \prod_0^\infty (Y, 2^Y, \mu)$ *et définir la transformation* $T : X \longrightarrow X$ *par* $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ *où* $y_n = x_{n+1}$. *Il faut maintenant montrer que la transformation T préserve la mesure. Pour ce faire, on utilise le résultat bien connu qui dit que si* $m(T^{-1}(A)) = m(A)$ *pour tout rectangle mesurable A, alors ce sera également vrai pour tout* $B \in \beta$. *Soit* $A = \prod_{i=0}^\infty A_i$ *un rectangle mesurable, où* $A_i \neq Y$ $(A_i \in 2^Y)$ *pour un nombre fini d'indices i et* $A_i = Y$ *pour le reste. On peut alors considérer* $B = T^{-1}(A) = \prod_{i=0}^\infty B_i$ *où* $B_{i+1} = A_i\ \forall i$. *Alors, puisque* $\mu(B_{i+1}) = \mu(A_i)\ \forall i$, *on* *a également* $m(A) = \prod_{A_i \neq Y} \mu(A_i) = \prod_{B_i \neq Y} \mu(B_{i+1}) = m(B) = m(T^{-1}(A))$. *Ainsi, puisque m et m(*T^{-1}*) coïncident sur les rectangles mesurables, on en conclut que la transformation "shift" T préserve la mesure.*

Parmi les transformations qui préservent la mesure, la famille des transformations ergodiques est l'une des plus étudiée. Ces transformations trouvent également leur origine dans des problèmes de physique statistique.

Définition 1.2. *Soit* (Ω, β, m) *un espace de probabilité et T :*$(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ *une transformation qui préserve la mesure. T est dite ergodique si* $\forall\, B \in \beta$ *tel que* T^{-1}*(B)=B presque sûrement (c'est-à-dire* $1_B(x) = 1_B(Tx)$ *presque partout), m(B)=0 ou m(B)=1.*

Exemple 1.5. *Les transformations "shift" sont toutes des transformations ergodiques. Démontrons le pour le cas que nous avons décrit à l'exemple 4.*

Supposons d'abord que T^{-1}*(E)=E, où* $E \in \beta$. *Considérons également* $\mathbb{A}$ *comme étant l'algèbre des unions finies de rectangles mesurables. Alors, par un résultat bien connu, pour* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver un* $A \in \mathbb{A}$ *tel que m(E*$\triangle$*A)<*ε*. Mais, puisque E*$\backslash$*A et A*$\backslash$*E sont disjoints, on a m(E*$\triangle$*A)=m((E*$\backslash$*A)*$\cup$*(A*$\backslash$*E))=m(E*$\backslash$*A)+m(A*$\backslash$*E)<*ε*. De plus,*

$$\begin{aligned} |m(E) - m(A)| &= |m(E \cap A) + m(E \cap A^c) - m(A \cap E) - m(A \cap E^c)| \\ &= |m(E \setminus A) - m(A \setminus E)| \\ &\leq m(E \setminus A) + m(A \setminus E) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Puisque A est un élément de l'algèbre des rectangles mesurables, on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ *tel que B=*T^{-n}*(A) ne dépende plus des mêmes coordonnées que A. Alors,* $m(B \cap A) = m(B)m(A) = m(A)^2$. *Également, puisque* $T^{-1}(E) = E$*, nous avons*

$$m(E \triangle B) = m(T^{-n}E \triangle T^{-n}A) = m(E \triangle A) < \varepsilon$$

Remarquons maintenant que $E \triangle (A \cap B) \subseteq (E \triangle A) \cup (E \triangle B)$*. En effet,*

$$\begin{aligned}
E \triangle (A \cap B) &= (E \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus E) \\
&= (E \cap (A \cap B)^c) \cup ((A \cap B) \cap E^c) \\
&= (E \cap (A^c \cup B^c)) \cup (A \cap B \cap E^c) \\
&= ((E \cap A^c) \cup (E \cap B^c)) \cup ((A \cap E^c) \cap (B \cap E^c)) \\
&\subseteq (E \cap A^c) \cup (E \cap B^c) \cup (A \cap E^c) \cup (B \cap E^c) \\
&= (E \triangle A) \cup (E \triangle B)
\end{aligned}$$

Ainsi, $m(E \triangle (A \cap B)) \leq m(E \triangle A) + m(E \triangle B) < 2\varepsilon$ *et par le même argument que précédemment,* $|m(E) - m(A \cap B)| < 2\varepsilon$*. Alors,*

$$\begin{aligned}
|m(E) - m(E)^2| &\leq |m(E) - m(A \cap B)| + |m(A \cap B) - m(E)^2| \\
&< 2\varepsilon + |m(A)^2 - m(E)^2| \\
&\leq 2\varepsilon + m(A)|m(A) - m(E)| + m(E)|m(A) - m(E)| \\
&< 4\varepsilon
\end{aligned}$$

Puisque ε *a été choisi arbitrairement, on a que* $m(E) = m(E)^2$ *et donc que m(E)=0 ou m(E)=1. On peut donc conclure que T est ergodique.*

1.3 Théorème de récurrence de Poincaré

Une des premières utilisations des transformations qui préservent la mesure a sans nul doute été le théorème de récurrence de Poincaré. Ce théorème fut énoncé par Henri Poincaré dans un papier publié en 1890.

Théorème 1.1 (Théorème de récurrence de Poincaré)**.** *Soit* (Ω, β, m) *un espace de probabilité et T :*$(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ *une transformation qui préserve la mesure. Soit E*$\in \beta$ *tel que m(E)*> 0*. Alors, il existe F*$\subseteq$*E tel que m(F)=m(E) et pour tout x*$\in$*F, on peut trouver une suite d'entiers naturels* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *telle que* $T^{n_i}(x) \in F$ *pour tout* $i \geq 1$.

Démonstration. Soit n>0 et considérons l'ensemble $E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}E$. Puisque nous voulons considérer les éléments de E qui retournent une infinité de fois dans l'ensemble E sous les itérations de T, il suffit d'étudier l'ensemble $F = E \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ et de montrer que $m(F) = m(E)$. D'abord, montrons que pour tout élément $x \in F$, on peut trouver une suite croissante $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ telle que $T^{n_i}(x) \in F$ pour tout $i \geq 1$.
Soit $x \in F$. Alors, par définition de F, on sait que $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ et donc qu'il existe une suite strictement croissante $\{n_i\}$ telle que $T^{n_i}(x) \in E$ pour tout i. Également, pour tout i, on a que $T^{n_i}(x) \in E_n$ pour tout n. En effet, $T^{n_i}(x) = T^{n_i - n_j}(T^{n_j}(x)) \in E_n$ si on prend j assez grand. On conclut alors que pour tout élément $x \in F$, il existe une suite strictement croissante $\{n_i\}$ telle que $T^{n_i}(x) \in F$.
Il ne reste plus qu'à démontrer que $m(F) = m(E)$. On remarque d'abord que $T^{-1}(E_n) = E_{n+1}$ et donc, puisque T est une transformation qui préserve la mesure, on a que

$$m(E_{n+1}) = m(T^{-1}(E_n)) = m(E_n).$$

De cette égalité, on déduit que $m(E_0) = m(E_n)$ pour tout n. Également, de la manière dont on a défini les E_n, on a les inclusions suivantes :

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq ...$$

Donc, $m(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n) = m(E_0)$ et on conclut que $m(F) = m(E \bigcap E_0) = m(E)$ car $E \subseteq E_0$ ($E_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}E = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}E$). $\square$

1.4 Théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann

Les premiers théorèmes fondamentaux en théorie ergodique sont sans contredit, les théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann. Le théorème de Birkhoff, énoncé en 1931, concerne la convergence ponctuelle de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i\}_{n \geq 1}$, alors que celui de Von Neumann concerne la convergence en moyenne de telles suites.

Théorème 1.2. *(Théorème ergodique de Birkhoff [9]) Soit* (Ω, β, m) *un espace de* *probabilité, T :*$(\Omega,\beta,m) \longrightarrow (\Omega,\beta,m)$ *une transformation qui préserve la mesure et* $f \in L^1(\Omega)$. *Alors,* $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ *converge presque partout vers une fonction* $\tilde{f} \in L^1$*, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \tilde{f}(x)$$

presque partout. De plus, $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ *presque partout et* $\int f\,dm = \int \tilde{f}\,dm$.

Remarque 1.1. *Remarquons d'abord que si T est une transformation ergodique, alors* $\tilde{f}$ *est une constante. En effet, soit* $A \in \beta$*. Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que* $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$*, et par conséquent, on obtient que* $\tilde{f}^{-1}(A) = (\tilde{f} \circ T)^{-1}(A) = T^{-1}(\tilde{f}^{-1}(A))$*. Puisque T est ergodique, on obtient alors que* $\tilde{f}^{-1}(A) = \emptyset$ *ou* Ω *presque sûrement et donc que* $\tilde{f}$ *est une constante. On peut alors déduire de l'égalité* $\int f\,dm = \int \tilde{f}\,dm$ *que la constante est* $\tilde{f} = \int f\,dm$.
En fait, l'inverse est également vraie. Si $\tilde{f} = \int f\,dm \ \forall f \in L^1$*, c'est-à-dire* $\tilde{f}$ *est une constante, alors T est ergodique. Pour le démontrer, considérons* $E \in \beta$ *tel que* $T^{-1}(E) = E$ *et* $f = 1_E$*. Alors,* $\tilde{f} = \int 1_E\,dm = m(E)$ *presque partout. Mais,*

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_E(T^i x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_{T^{-i}(E)}(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_E(x) \\
&= 1_E(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, m(E)=$1_E(x)$ *presque partout, ce qui implique nécessairement que m(E)=0 ou m(E)=1 et donc que T est ergodique.*

Remarque 1.2. *Une application plutôt intéressante du théorème ergodique de Birkhoff est qu'il permet de calculer explicitement la fréquence de retour d'un élément dans un ensemble. Soit* (Ω,β,m) *un espace de probabilité, T :*$(\Omega,\beta,m) \longrightarrow (\Omega,\beta,m)$ *une trans-*

formation qui préserve la mesure, $x \in \Omega$ et $E \in \beta$. On remarque facilement que $T^i(x) \in E$ si et seulement si $1_E(T^i x) = 1$. Ainsi, le temps moyen passé par les puissances de T jusqu'au temps n-1 dans E est donné par $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} 1_E(T^i(x))$. Par la remarque plus haut, on observe que si T est ergodique, alors le théorème ergodique de Birkhoff nous indique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_E(T^i(x)) = \int_\Omega 1_E(x)\,dm = m(E)$$

Précédemment, nous avons donné la définition d'une transformation ergodique T. Le théorème ergodique de Birkhoff va nous permettre de caractériser ces transformations d'une nouvelle manière.

Corollaire 1.1. *Soit (Ω, β, m) un espace de probabilité et T :$\Omega \longrightarrow \Omega$ une transformation qui préserve la mesure. Alors, T est ergodique si et seulement si $\forall$ A, $B \in \beta$ on a la propriété suivante :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i}A \cap B) \longrightarrow m(A)m(B) \tag{1.1}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit T une transformation ergodique et A, $B \in \beta$. En prenant $f = 1_A$, en appliquant le théorème ergodique de Birkhoff et en utilisant la remarque 1.2 faite précédemment, on obtient que $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) \to m(A)$ presque partout. En multipliant de chaque côté par la fonction indicatrice 1_B on obtient que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x))1_B(x) \to m(A)1_B(x).$$

Dénotons maintenant $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x))1_B(x)$. On remarque que $|f_n| \leq 1$ et puisqu'on travaille dans un espace de probabilité (donc de mesure finie), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée. On obtient alors que

$$\int_\Omega f_n(x)\,dm \longrightarrow \int_\Omega m(A)1_B(x)\,dm.$$

En effectuant l'intégration des deux côtés, on conclut que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i}A\cap B) \longrightarrow m(A)m(B)$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Supposons que la convergence énoncée dans le théorème ait lieu. On veut vérifier que la transformation T satisfait aux conditions de la définition 1.2. Supposons donc que $T^{-1}E = E$ où $E \in \beta$. Puisque la convergence a lieu $\forall$ A, $B \in \beta$, on peut poser les éléments A et B comme étant E. On obtient alors que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i}E\cap E) \longrightarrow m(E)m(E).$$

Donc, puisque $T^{-i}(E) = E$ et que $m(E)$ ne dépend pas de i, du côté gauche de l'équation, on a $m(E)$, alors que du côté droit, on a $m(E)^2$. Ainsi, $m(E) = m(E)^2$ et on peut conclure que $m(E)$=0 ou 1 et donc que T est ergodique. $\square$

Définition 1.3. *Soit (Ω,β,m) un espace de probabilité et $T:(\Omega,\beta,m) \longrightarrow (\Omega,\beta,m)$ une transformation qui préserve la mesure. On dit alors que T est faiblement mélangeante (weak-mixing), si $\forall$ A,B $\in \beta$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |m(T^{-i}A\cap B) - m(A)m(B)| = 0$. Finalement, T est dite mélangeante (mixing), ou parfois fortement mélangeante(strongly mixing), si $\forall$ A,B $\in \beta$, $\lim_{n\to\infty} m(T^{-n}A\cap B) = m(A)m(B)$.*

Remarque 1.3. *On remarque que toute transformation mélangeante est également faiblement mélangeante et que toute transformation faiblement mélangeante est aussi ergodique. En effet, ceci découle directement du fait que si $\{a_n\}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on a également que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0$ et donc nécessairement que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$. Dans notre cas, on prend $a_n = m(T^{-n}A\cap B) - m(A)m(B)$ et on obtient le résultat désiré.*

Remarque 1.4. *Précédemment, nous avons démontré de manière plutôt calculatoire que la transformation "shift" était ergodique. Le théorème ergodique de Birkhoff, à l'aide de* *la loi 0-1 de Kolmogorov [10], va nous permettre d'en arriver au même résultat, mais de manière plus efficace (et plus élégante).*

En utilisant le théorème ergodique de Birkhoff, pour $N < n$, on a que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n-1} f(T^i(x))$$

presque sûrement.

Si l'on pose $X_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ on a alors que $\tilde{f}$ est mesurable par rapport à $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(X_k : k \geq n)$. La loi 0-1 de Kolmogorov nous assure alors que $\tilde{f}$ est constante presque sûrement et donc que T est ergodique.

Le prochain résultat fut d'abord prouvé par Von Neumann pour le cas $p = 2$, mais le théorème de Birkhoff permit d'étendre le résultat à tout $p \geq 1$.

Corollaire 1.2. *(Théorème ergodique de Von Neumann) Soit $1 \leq p < \infty$ et T une transformation qui préserve la mesure de l'espace (Ω, β, m). Alors, si $f \in L^p(m)$, il existe une fonction $f^* \in L^p(m)$ telle que*

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) - f^*(x)\|_p \longrightarrow 0.$$

Le prochain lemme sera utilisé à plusieurs reprises ultérieurement, sans toutefois y faire référence à chaque occurence.

Lemme 1.1. *Soit $f \in L^1(\Omega)$ et $T :(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ une transformation qui préserve la mesure. Alors, f et $f \circ T^i$, où $i \geq 1$, sont identiquement distribués.*

Démonstration. Pour démontrer que f et $f \circ T^i$ ont la même distribution, il faut montrer

$m(x \in \Omega : f(x) \leq a) = m(x \in \Omega : f(T^i(x)) \leq a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m(x \in \Omega : f(x) \leq a) &= m(x \in \Omega : x \in f^{-1}(]-\infty, a])) \\ &= m(T^{-i}\{x \in \Omega : x \in f^{-1}(]-\infty, a])\}) \\ &= m(x \in \Omega : T^i(x) \in f^{-1}(]-\infty, a])) \\ &= m(x \in \Omega : f(T^i(x)) \leq a) \end{aligned}$$

□

Avant de poursuivre, nous allons introduire la notion de processus uniformément intégrable. Cette notion nous sera utile ultérieurement.

Définition 1.4. *Un processus stochastique $\tilde{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ est dit uniformément intégrable si*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n(x)| \cdot 1_{\{|X_n(x)|>c\}}(x)\, dm \longrightarrow 0$$

lorsque $c \longrightarrow \infty$.

Il est également possible de caractériser les processus uniformément intégrables différemment.

Lemme 1.2. *Un processus stochastique $\tilde{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites,*

1) il existe K>0 tel que $\int |X_n(x)|\, dm \leq K$, $\forall n \geq 1$

2) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta$>0 tel que m(A)<δ implique que $\int_A |X_n(x)|\, dm < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$

Lemme 1.3. *Soit $f \in L^1(\Omega)$ et $T :(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ une transformation qui préserve la mesure. Si l'on pose $S_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$, alors le processus stochastique $(S_n f)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.*

Démonstration. Vérifions que les 2 conditions sont satisfaites. D'abord, puisque $f \in L^1$, on peut trouver K>0 tel que $\int\limits_{\Omega} |f(x)|\, dm$<K. Ainsi, pour n $\in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |S_n f(x)|\, dm &= \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\Omega} |f(T^i(x))| \\
&< K
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.1.

Montrons maintenant que la deuxième condition est satisfaite. Pour ce faire, montrons d'abord que $\{f \circ T^j\}_{j\geq 1}$ est uniformément intégrable. Dans ce cas, il sera plus facile d'utiliser la définition 1.4. Remarquons d'abord que puisque $f \in L^1$, pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver M assez grand tel que $\int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, dm < \varepsilon$. Mais, puisque T est une transformation qui préserve la mesure, nous avons que :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{|f\circ T^j|>M\}} |f \circ T^j|\, dm &= \int |f \circ T^j| \cdot 1_{\{|f\circ T^j|(x)>M\}}\, dm \\
&= \int\limits_{\{|f|>M\}} |f|\, dm \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque ceci est uniforme en j, nous avons que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int |(f \circ T^j)(x)| \cdot 1_{\{|(f\circ T^j)(x)|>c\}}(x)\, dm \longrightarrow 0$$

lorsque $c \longrightarrow \infty$. Nous avons donc que $\{f \circ T^j\}_{j\geq 1}$ est uniformément intégrable.
Le lemme 1.2 nous dit alors que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tel que si m(A)<δ_ε, où $A \in \beta$, alors

$$\int\limits_A |f \circ T^j|\, dm < \varepsilon$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Mais alors, pour A tel que m(A)<δ_ε,

$$\begin{aligned}\int_A |S_n f(x)|\,dm &= \int_A |\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))|\,dm \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_A |f(T^i(x))|\,dm \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Puisque n a été choisi arbitrairement, on a que le processus $(S_n f)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. □

Remarque 1.5. *Puisque $(S_n f)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable et que $S_n f$ converge presque sûrement vers $\tilde{f}$, nous avons que $S_n f$ converge vers $\tilde{f}$ dans L^1 [10]. Nous avons ainsi que le théorème ergodique de Von Neumann est vrai pour p=1. Il n'est cependant pas possible d'utiliser ce résultat pour démontrer que le résultat est vrai pour p>1.*

Procédons maintenant à la démonstration du théorème ergodique de Von Neumann.

Démonstration. Pour débuter, remarquons que si g est une fonction bornée et mesurable, alors $g \in L^p$ et le théorème ergodique de Birkhoff nous dit qu'il existe g^* telle que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) \longrightarrow g^*(x)$$

presque partout. Puisque g est bornée, on a également que g^* est bornée et par conséquent, $g^* \in L^p$. Alors, $|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) - g^*(x)|^p \longrightarrow 0$ presque partout et on peut utiliser le théorème de la convergence dominée pour conclure que

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) - g^*(x)\|_p \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour ε>0, on peut trouver $N(\varepsilon, g)$ tel que si n>$N(\varepsilon, g)$ et k>0, on a

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) - \frac{1}{n+k}\sum_{i=0}^{n+k-1} g(T^i x)\|_p < \varepsilon$$

Soit $f \in L^p$ et $S_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$. Afin de montrer qu'il existe une fonction f^* telle que désirée, il suffit de montrer que $\{S_n f\}$ est Cauchy car L^p est un espace complet. Remarquons d'abord que $\|S_n f\|_p \leq \|f\|_p$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|S_n f(x)\|_p &= \|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)\|_p \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \|f(T^i x)\|_p \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \|f(x)\|_p \\
&= \|f(x)\|_p
\end{aligned}$$

Pour ε>0, on peut trouver $g \in L^\infty$ telle que $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|S_n f - S_{n+k} f\|_p &\leq \|S_n f - S_n g\|_p + \|S_n g - S_{n+k} g\|_p + \|S_{n+k} g - S_{n+k} f\|_p \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

si on prend k>0 et n>$N(\frac{\varepsilon}{2}, g)$. Alors, on a que $\{S_n f\}$ est une suite de Cauchy dans L^p et il existe donc $f^* \in L^p$ telle que $\|S_n f - f^*\|_p \longrightarrow 0$.

Montrons maintenant que $f^* \circ T = f^*$ presque partout. Pour ce faire, il suffit de remarquer que

$$\frac{n+1}{n}(S_{n+1} f)(x) - (S_n f)(Tx) = \frac{f(x)}{n}.$$

Alors, si l'on fait tendre n vers l'infini, nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}(S_{n+1}f)(x)-(S_nf)(Tx)\right)=0,$$

ce qui implique que $f^*(x)=f^*(Tx)$ presque partout. □

Remarque 1.6. *Les fonctions $\tilde{f}$ et f^* que nous avons définies précédemment sont égales presque partout. Pour le démontrer, montrons que $\|\tilde{f}-f^*\|_1=0$. D'abord, à l'aide de l'inégalité du triangle, on a que*

$$\|\tilde{f}-f^*\|_1\leq\|\tilde{f}-S_nf\|_1+\|S_nf-f^*\|_1$$

$\forall$ *$n\geq 1$. Puisqu'on a montré que $\{S_nf\}_{n\geq1}$ est uniformément intégrable et que $S_n(f)$ converge vers f^* dans L^p (donc dans L^1), $\forall$ $\varepsilon>0$, on peut trouver N_ε tel que pour $n>N_\varepsilon$,*

$$\|\tilde{f}-f^*\|_1<\varepsilon$$

Puisque ε est quelconque, on en déduit que $\|\tilde{f}-f^*\|_1=0$. On peut donc conclure que $\tilde{f}=f^*$ presque partout.

Remarque 1.7. *Puisque nous avons la convergence de S_nf vers $\tilde{f}$ dans L^1 et que*

$$\left|\int(S_nf-\tilde{f})\,dm\right|\leq\int|S_nf-\tilde{f}|\,dm,$$

nous avons alors que

$$\lim_{n\to\infty}\int S_nf\,dm=\int\tilde{f}\,dm$$

Nous utiliserons cette propriété à quelques reprises.

Remarque 1.8. *Le théorème ergodique peut être énoncé d'une manière probabiliste. Cette version du théorème nous dit que $\tilde{f}=\mathbb{E}(f|\mathfrak{I})$ presque partout, où $\mathfrak{I}$ est la σ-algèbre des éléments invariants par rapport à T. Cette conclusion se déduit de manière assez directe à partir des propriétés de l'espérance conditionnelle. D'abord, par définition de l'espérance conditionnelle, nous savons que $\int_I f\,dm=\int_I\mathbb{E}(f|\mathfrak{I})\,dm$ $\forall$ $I\in\mathfrak{I}$. De* *plus,*

$$\begin{aligned}
\int_I f(x)\,dm &= \int f(x)1_I(x)\,dm \\
&= \int f(Tx)1_I(Tx)\,dm \\
&= \int f(Tx)1_{T^{-1}(I)}(x)\,dm \\
&= \int f(Tx)1_I(x)\,dm \\
&= \int_I f(Tx)\,dm
\end{aligned}$$

,$\forall\ I \in \mathfrak{I}$. Nous pouvons ainsi démontrer, en effectuant la dernière opération itérativement, que $\int_I f(x)\,dm = \int_I f(T^i(x))\,dm\ \forall\ i{\geq}1$. Ainsi, $\int_I f(x)\,dm = \int_I \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))\,dm\ \forall$ $n{\geq}1$. Mais puisqu'on a montré précédemment que les variables aléatoires S_nf étaient uniformément intégrables et convergeaient presque sûrement vers $\tilde{f}$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))\,dm = \int_I \tilde{f}(x)\,dm.$$

Ainsi, nous avons que $\int_I \tilde{f}(x)\,dm = \int_I \mathbb{E}(f|\mathfrak{I})\,dm\ \forall\ I \in \mathfrak{I}$. Puisque $\tilde{f}$ est $\mathfrak{I}$-mesurable, l'unicité de l'espérance conditionnelle nous permet de conclure que $\tilde{f} = \mathbb{E}(f|\mathfrak{I})$ presque partout.

Définition 1.5. *Soit X_n, où $n \geq 1$, des variables aléatoires définies sur l'espace (Ω,β,m). On dit alors que le processus stochastique $X = (X_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire s'il satisfait la condition suivante : $\forall$ r=1,2,... ,$\forall\ n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}$, $\forall\ B_1,\ldots,B_r \in B_{\mathbb{R}}$ (les boréliens de $\mathbb{R}$) et $\forall\ s \in \mathbb{N}$,*

$$m(x \in \Omega : X_{n_i}(x) \in B_i, i = 1,\ldots,r) = m(x \in \Omega : X_{n_i+s}(x) \in B_i, i = 1,\ldots,r).$$

Lemme 1.4. *Toute transformation qui préserve la mesure engendre des processus stationnaires. De plus, tout processus stationnaire génère une mesure qui préserve la transformation "shift".*

Démonstration. ($\Rightarrow$)Soit T une transformation qui préserve la mesure et soit X une variable aléatoire sur (Ω,β,m). Nous pouvons alors construire les variables aléatoires X_n suivantes : $X_n(x) = X(T^n x)$. Définissons le processus stochastique $\tilde{X} = (X_n)_{n\geq 1}$. Montrons maintenant que ce processus est stationnaire. Afin de le vérifier, considérons k $\in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{N}$, $t_1,...,t_k \in \mathbb{N}$ et $a_1,...,a_k \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
m(X_{t_1} \leq a_1,...,X_{t_k} \leq a_k) &= m(\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \Omega : X(T^{t_i}(x)) \leq a_i\}) \\
&= m(\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \Omega : x \in T^{-t_i}(X^{-1}(]-\infty,a_i]))\}) \\
&= m(T^{-\tau}(\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \Omega : x \in T^{-t_i}(X^{-1}(]-\infty,a_i]))\})) \\
&= m(\bigcap_{i=1}^{k} T^{-\tau}\{x \in \Omega : x \in T^{-t_i}(X^{-1}(]-\infty,a_i]))\}) \\
&= m(\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \Omega : x \in T^{-t_i-\tau}(X^{-1}(]-\infty,a_i]))\}) \\
&= m(\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \Omega : X(T^{t_i+\tau}(x)) \leq a_i\}) \\
&= m(X_{t_1+\tau} \leq a_1,...,X_{t_k+\tau} \leq a_k)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la stationarité de $\tilde{X}$.

($\Leftarrow$) Montrons maintenant que tout processus stationnaire génère une mesure, disons μ, qui préserve la transformation "shift”. Soit $\tilde{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire. Considérons $R = \{\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_{n_1} \in B_1,...,x_{n_r} \in B_r\}$ où r $\in \mathbb{N}$, $n_1,...,n_r \in \mathbb{N}$ et $B_1,...,B_r \in B_{\mathbb{R}}\}$. Alors, $\sigma(R)$ forme une σ-algèbre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nous pouvons associer, à un élément $R^{'} \in$ R, la mesure $\tilde{\mu}(R^{'}) = m(X_{n_1} \in B_1,...,X_{n_r} \in B_r)$. Puisque $\tilde{\mu}$ satisfait les conditions du théorème d'extension de Kolmogorov [6], on peut trouver μ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\sigma(R))$ qui prolonge $\tilde{\mu}$. Si on pose que T est le “shift”, est-ce que T préserve la mesure ? Pour le vérifier, on peut seulement le prouver pour $R^{'} \in$ R. La stationarité de $\tilde{X}$ l'implique directement. Soit donc $R^{'} \in$ R,

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(R^{'})) &= \tilde{\mu}(T^{-1}(R^{'})) \\
&= m(X_{n_1+1} \in B_1, \dots, X_{n_r+1} \in B_r) \\
&= m(X_{n_1} \in B_1, \dots, X_{n_r} \in B_r) \\
&= \tilde{\mu}(R^{'}) \\
&= \mu(R^{'})
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.9. *On remarque que le théorème ergodique de Birkhoff généralise la loi forte des grands nombres dans le cas où les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées. On se rappelle que si $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des v.a. i.i.d. définies sur (Ω, β, m) tel que $X_1 \in L^1(\Omega)$, alors la loi forte des grands nombres nous dit que $\frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$. Remarquons d'abord que dans notre cas, puisque les variables aléatoires sont i.i.d., le processus $(X_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire. En effet, $\forall\, r \in \mathbb{N}$,$\forall\, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, $\forall\, B_1, \dots, B_r \in B_{\mathbb{R}}$ et $\forall\, l \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}
m(X_{n_1} \in B_1, \dots, X_{n_r} \in B_r) &= m(X_{n_1} \in B_1) \cdot \ldots \cdot m(X_{n_r} \in B_r) \\
&= m(X_{n_1+l} \in B_1) \cdot \ldots \cdot m(X_{n_r+l} \in B_r) \\
&= m(X_{n_1+l} \in B_1, \dots, X_{n_r+l} \in B_r)
\end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme précédent, et du fait que le "shift" soit ergodique, Birkhoff nous dit que $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_n \longrightarrow \int\limits_{\Omega} X_1\, dm$ presque sûrement.

CHAPITRE 2

THÉORÈMES ERGODIQUES POUR DES SUITES

2.1 Introduction

La convergence presque partout et en moyenne de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)\}_{n\geq 1}$ ayant déjà été étudiée, il serait intéressant d'étudier ces types de convergence, mais pour des suites différentes de la suite des entiers naturels (i=0,1,2,...). C'est dans cette optique que nous étudierons un résultat de J.R. Blum et D.L. Hanson qui établit le lien entre la notion de transformation fortement mélangeante et la convergence en moyenne des suites. Ensuite, nous définirons les suites uniformes et présenterons un résultat de Antoine Brunel et Michael Keane sur la convergence presque partout de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i} x)\}_{n\geq 1}$ où $\{k_i\}$ est une suite uniforme. Finalement, nous étudierons une famille de suites pour laquelle le théorème ergodique ne fonctionne pas.

2.2 Blum et Hanson

Le prochain résultat a été démontré par Blum et Hanson en 1960 [3]. L'intérêt principal de ce théorème réside dans le fait que toutes les suites strictement croissantes de nombres entiers positifs sont considérées, non seulement un certain sous-ensemble de suites.

Théorème 2.1 (Blum et Hanson)**.** *Soit T une transformation qui préserve la mesure. Alors, T est fortement mélangeante si et seulement si pour toute suite strictement croissante $k_1, k_2, k_3, \ldots$, $\forall 1 \leq p < \infty$ et pour toute fonction $f \in L^p(\Omega, \beta, m)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i} x) - \int_\Omega f\, dm|^p\, dm = 0.$$

Avant de procéder à la preuve du théorème, nous devrons énoncer quelques lemmes nécessaires à sa démonstration.

Lemme 2.1. *Soit* $\{C_{i,j} : i, j \geq 1\}$ *une séquence bornée de nombres réels tels que* $\lim\limits_{|i-j|\to\infty} C_{i,j} = 0$*. Alors,* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} C_{i,j} = 0$.

Démonstration. Soit ε>0 et définissons C={$\sup\limits_{i,j} |C_{i,j}|$}. Puisque $\lim\limits_{|i-j|\to\infty} C_{i,j} = 0$, pour notre ε choisi, on peut trouver un M assez grand tel que $|C_{i,j}| \leq \varepsilon$ pour $|i-j| \geq M$. Choisissons maintenant n$\geq M$ tel que $\frac{(2M+1)C}{n} \leq \varepsilon$. On obtient alors que :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{i,j}| &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{|i-j|\leq M}^{n} |C_{i,j}| + \frac{1}{n^2}\sum_{|i-j|>M}^{n} |C_{i,j}| \\
&\leq \frac{(2M+1)C}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{|i-j|>M}^{n} \varepsilon \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2. *Soit T une transformation mélangeante et soit* $1_A(x)$ *la fonction caractéristique de l'ensemble A. Alors,* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x) - m(A)|^2\, dm = 0$ *pour toute suite strictement croissante d'entiers positifs* $\{k_i\}$.

Démonstration. Soit $\{k_i\}$ une suite d'entiers positifs strictement croissante. Développons l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x) - m(A)|^2\, dm &= \int\limits_{\Omega} [\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x)1_A(T^{k_j}x) - m(A)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x) \\
&- m(A)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_A(T^{k_j}x) + m(A)^2] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} 1_A(T^{k_i}x)1_A(T^{k_j}x) - 2m(A)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} 1_A(T^{k_i}x) \\
&+ \int\limits_{\Omega} m(A)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} m(T^{-k_i}(A)\cap T^{-k_j}(A)) - 2m(A)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(T^{-k_i}(A)) \\
&+ m(A)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} m(T^{-k_i}(A)\cap T^{-k_j}(A)) - 2m(A)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(A) \\
&+ m(A)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} [m(T^{-k_i}(A)\cap T^{k_j}(A)) - m(A)^2]
\end{aligned}
$$

Mais, en développant le terme $m(T^{-k_i}(A)\cap T^{-k_j}(A))$ on remarque qu'il est équivalent à $m(T^{-k_i}((A)\cap T^{k_i-k_j}(A)))$, en supposant sans perte de généralité que $k_i \leq k_j$. Mais T étant une transformation qui préserve la mesure, on a que

$$
m(T^{-k_i}((A)\cap T^{k_i-k_j}(A))) = m(A\cap T^{k_i-k_j}(A)).
$$

Ainsi, de manière générale, nous avons que

$$
m(T^{-k_i}((A)\cap T^{k_i-k_j}(A))) = m(A\cap T^{-|k_i-k_j|}(A)).
$$

Avec la dernière égalité, on a alors que :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} [m(-T^{k_i}(A)\cap T^{-k_j}(A)) - m(A)^2] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} [m(A\cap T^{-|k_i-k_j|}(A)) - m(A)^2] \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$, car T est fortement mélangeante et en posant

$$
C_{i,j} = m(A\cap T^{-|k_i-k_j|}(A)) - m(A)^2.
$$

$\square$

Lemme 2.3. *Le lemme 2.2 reste valide si on remplace la fonction indicatrice $1_A(x)$ par une fonction simple f, c'est-à-dire une fonction du type $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$, et si l'on* *remplace m(A) par* $\int\limits_{\Omega} f(x)\, dm$*. En d'autres termes,*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x)\, dm|^2\, dm = 0.$$

Démonstration. La preuve de ce lemme se base directement sur la preuve du lemme précédent. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x)\, dm|^2\, dm &= \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m} a_k 1_{A_k}(T^{k_i}x)) - \int\limits_{\Omega} f(x)\, dm|^2\, dm \\
&= \int\limits_{\Omega} |(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1 1_{A_1}(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x) 1_{A_1}(x)\, dm) + \ldots \\
&+ (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_m 1_{A_m}(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x) 1_{A_m}(x)\, dm)|^2\, dm \\
&= \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_k 1_{A_k}(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x) 1_{A_k}(x)\, dm|^2\, dm \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{A_k}(T^{k_i}x) - m(A_k)|^2\, dm
\end{aligned}$$

On sait, par le lemme 2.2 prouvé précédemment, que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{A_k}(T^{k_i}x) - m(A_k)|^2\, dm = 0$$

pour tout $1 \le k \le m$.

En passant à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \int\limits_{\Omega} f(x)\, dm|^2\, dm &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{A_k}(T^{k_i}x) - m(A_k)|^2\, dm \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{A_k}(T^{k_i}x) - m(A_k)|^2\, dm \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4. *Le lemme 2.3 reste valide si on remplace la convergence L^2 par la convergence L_p où $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Pour p=1, le lemme se déduit du lemme 2.3 et de l'inégalité de Schwarz. En effet, en posant $h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \int_\Omega f(x)\,dm$, où f est une fonction simple, et en utilisant le lemme 2.3, on sait que $h \in L^2(\Omega)$. Ainsi, puisqu'on travaille sur un espace de probabilité, on peut utiliser l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h_n(x)|\,dm &= \int_\Omega |h_n(x)|\cdot 1\,dm \\ &\leq m(\Omega)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_\Omega |h(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Faisons maintenant le cas p>1. Considérons une fonction g mesurable et bornée, disons par une constante K. Alors,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x)|^p\,dP &= \int_{|g|\leq 1} |g(x)|^p\,dP + \int_{|g|\geq 1} |g(x)|^p\,dP \\ &\leq \int_{|g|\leq 1} |g(x)|\,dP + K^p \int_{|g|\geq 1} dP \\ &\leq (1+K^p)\int_\Omega |g(x)|\,dP\end{aligned}$$

La conclusion se déduit du cas p=1 que nous venons de démontrer et en notant que si f est une fonction simple (ou étagée), alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) - \int_\Omega f\,dP$$

est uniformément borné en n. En effet, si $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$, on obtient la borne suivante : $|f(x)| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |a_i| = c$. Alors,

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) - \int_{\Omega} f\,dP| &\leq |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x)| + |\int_{\Omega} f\,dP| \\
&\leq 2c
\end{aligned}$$

Cette inégalité ne dépendant pas de n, on a ce qu'on veut. □

Ces lemmes nous permettent maintenant de démontrer le théorème de Blum et Hanson.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit T une transformation fortement mélangeante et p $\in \mathbb{N}$. Soit $f \in L^p(\Omega, \beta, m)$ et $\{k_i\}$ une suite strictement croissante. Sans perte de généralité, on peut considérer les fonctions positives seulement. Puisque f est positive, on sait qu'il existe une suite de fonctions $\{f_m\}$ croissantes qui convergent presque partout vers f, c'est-à-dire $\lim_{m\to\infty} |f_m - f| = 0$ presque partout. Calculons maintenant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \int_{\Omega} f\,dm\|_p &= \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x) \\
&- \int_{\Omega} f_m\,dm + \int_{\Omega} f_m\,dm - \int_{\Omega} f\,dm\|_p \\
&\leq \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x)\|_p \\
&+ \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x) - \int_{\Omega} f_m\,dm\|_p + \|\int_{\Omega} f_m\,dm - \int_{\Omega} f\,dm\|_p \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|(f-f_m)(T^{k_i}x)\|_p + \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x) - \int_{\Omega} f_m\,dm\|_p \\
&+ \|\int_{\Omega} f_m\,dm - \int_{\Omega} f\,dm\|_p \\
&= \|f - f_m\|_p + \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i}x) - \int_{\Omega} f_m\,dm\|_p
\end{aligned}$$

$$+ \quad \| \int_\Omega f_m \, dm - \int_\Omega f \, dm \|_p$$

Mais ces trois derniers termes peuvent être mis aussi petits que voulu. Il suffit de choisir m et n assez grands. En effet, pour le premier terme, on sait que les fonctions f_m convergent presque sûrement vers f. De plus, de la manière dont nous avons choisi les f_m, $|f_m(x)| \leq f \ \forall \ x \in \Omega$. Ainsi, puisque $f \in L^p$ et $|f(x) - f_m(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p$, alors $f_m - f \in L^p$. Par le théorème de la convergence dominée, on conclut que $\forall \ \varepsilon > 0$, on peut trouver $M_1(\frac{\varepsilon}{3})$ tel que

$$\|f - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $m > M_1(\frac{\varepsilon}{3})$. Pour le deuxième terme, il s'agit d'utiliser le lemme 2.4. Alors, $\forall \ \varepsilon > 0$, on peut trouver $N(\frac{\varepsilon}{3})$ tel que

$$\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_m(T^{k_i} x) - \int_\Omega f_m \, dm\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$. Finalement, pour le dernier terme, on utilise la convergence monotone et on peut alors trouver, $\forall \ \varepsilon > 0$, un $M_2(\frac{\varepsilon}{3})$ tel que

$$|\int_\Omega f_m \, dm - \int_\Omega f \, dm| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $m > M_2(\frac{\varepsilon}{3})$. Donc, pour $\varepsilon > 0$, en prenant $m > \max(M_1(\frac{\varepsilon}{3}), M_2(\frac{\varepsilon}{3}))$ et $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$, on obtient que

$$\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i} x) - \int_\Omega f \, dm\|_p < \varepsilon$$

Mais ε étant quelconque, nous obtenons ce que nous voulons.

($\Leftarrow$)Supposons maintenant que toutes les conditions du théorème soient vérifiées, c'est-à-dire que pour toute suite strictement croissante $\{k_i\}$, pour tout $1 \leq p < \infty$ et pour toute fonction $f \in L^p(\Omega, \beta, m)$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \int_\Omega |\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i} x) - \int_\Omega f \, dm|^p \, dm = 0$. Procédons par contradiction. Supposons qu'il existe A et $B \in \Omega$ pour lesquels la propriété d'être fortement mélangeante n'est pas vérifiée. Alors, il existe une suite croissante $\{k_i\}$ et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout i entier positif, $m((T^{-k_i}A)\cap B) - m(A)m(B) \geq \varepsilon > 0$. Ainsi, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m((T^{-k_i}A)\cap B) - m(A)m(B) \geq \varepsilon$.

Mais,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m((T^{-k_i}A)\cap B) - m(A)m(B) &= \int_{\Omega} 1_B(x)[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x) - m(A)]\,dm \\
&\leq \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(T^{k_i}x) - m(A)\|_1
\end{aligned}$$

Par hypothèse, le dernier terme tend vers 0 lorsque n croît vers l'infini. Ainsi, il est impossible qu'il existe A et B $\in \Omega$ pour lesquels la propriété d'être fortement mélangeante n'est pas vérifiée. Le théorème est donc vérifié. □

2.3 Suites uniformes

Nous allons maintenant introduire une famille de suites d'entiers naturels, nommée les suites uniformes [4], pour lesquelles le théorème ergodique pour les suites s'applique, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x)$$

existe presque partout, où $\{k_i\}$ est une suite uniforme. Afin de définir ces suites, nous considérons un espace métrique compact X, la collection H de tous les sous-ensembles de Borel de X et un homéomorphisme φ de X tel que $\{\varphi^n | n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble équicontinue de transformations. On entend par ensemble équicontinue le fait que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si d(x,y)<δ, où x,y ε X, on a alors que d($\varphi^n x$,$\varphi^n y$)<ε, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considérons maintenant que X possède une orbite dense, c'est-à-dire qu'il $\exists$ x ε X tel que $\overline{\{\varphi^n x | n \in \mathbb{N}\}}$=X. On obtient alors que le système (X,φ) est strictement ergodique, c'est-à-dire qu'il existe une unique mesure invariante μ par rapport à φ telle que pour toute fonction continue f,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi^i x) \longrightarrow \int f\, d\mu$$

pour tout $x \in$ X. Nous appelerons un tel système (X,H,μ,φ) un système strictement L-stable. Nous pouvons maintenant définir de manière récursive le i^{eme} temps d'entrée $k_i(y,Y)$ de y dans Y de la façon suivante :

$$k_1(y,Y) = min\{i \geq 1 | \varphi^i(y) \in Y\}$$

et

$$k_i(y,Y) = min\{j > k_{i-1}(y,Y) | \varphi^j(y) \in Y\}.$$

Définition 2.1. *Une suite $k_1,k_2,k_3,\ldots$ d'entiers positifs est dite uniforme s'il existe :*

1) un système strictement L-stable (X,H,μ,φ)

2) un $Y \in H$ tel que $\mu(Y) > 0 = \mu(\partial Y)$

3) un point $y \in X$ tel que $k_i = k_i(y,Y)$ pour tout i$\geq$1

À priori, il est difficile de savoir si, étant donné une suite, elle est uniforme. Il est cependant possible de construire des suites uniformes. Si l'on prend X comme étant le cercle unité, φ une rotation d'un angle α incommensurable à 2π, c'est-à-dire tel que $\frac{2\pi}{\alpha}$ est irrationnelle, μ la mesure de Lebesgue sur S^1, Y un intervalle sur le cercle et y un point quelconque sur le cercle, alors, la suite créée par les temps d'entrée de y dans Y avec les itérations de φ est uniforme. En effet, puisque α est incommensurable à 2π et que φ est une rotation, alors la propriété de densité est vérifiée pour tout élément du cercle unité et la propriété d'équicontinuité de φ est également satisfaite. La première des trois conditions est donc satisfaite. Pour la deuxième condition, puisque Y est un intervalle, alors $\mu(Y) > 0 = \mu(\partial Y)$. Finalement, pour la troisième condition, la propriété de densité nous assure que pour tout élément y du cercle unité, il existe k_1 tel que $\varphi^{k_1}(y) \in Y$. Le théorème de récurrence de Poincaré nous assure alors qu'il existe $\{k_i\}_{i\geq 1}$ tel que $\varphi^{k_i}(y) \in Y$ $\forall i \geq 1$. La troisième condition est donc vérifiée et $\{k_i\}_{i\geq 1}$ est une suite uniforme.

2.4 Théoreme ergodique pour les suites uniformes

Voici le résultat principal sur la convergence presque partout de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x)\}$ où $\{k_i\}$ est une suite uniforme. Il s'agit du résultat principal de l'article de Brunel et Keane.

Théorème 2.2. *Soit $f \in L^1(\Omega,\beta,m)$, soit $k_1,k_2,k_3,\ldots$ une suite uniforme et T une transformation qui préserve la mesure. Alors, $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}(x))$ existe presque partout et $\tilde{f} \in L^1$.*

Démonstration. Par hypothèse, on a que $k_1,k_2,k_3,\ldots$ est une suite uniforme. Il existe donc un système L-stable (X,H,μ,φ) et un couple (y,Y) qui satisfont toutes les conditions pour les suites uniformes. Le système (X,H,μ,φ) sera utilisé comme un système auxiliaire, dont la seule utilité sera de faciliter la démonstration du théorème.

Soit ε>0. On peut alors trouver des sous-ensembles ouverts de X, qu'on notera $Y^{'}$, $Y^{''}$ et W qui satisfont ces 4 propriétés :

1) $Y^{'} \subseteq Y \subseteq Y^{''}$

2) $\mu(Y^{''} - Y^{'}) < \varepsilon$

3) y $\in$ W

4) $\forall$ x $\in$ W, $1_{Y'}(\varphi^n x) \leqslant 1_Y(\varphi^n y) \leqslant 1_{Y''}(\varphi^n x)$

En prenant δ et $\delta^{'}$ assez petits, on remarque que les ensembles suivants satisfont les 4 propriétés ci-haut :

$Y^{'} = \{x \in Y | d(x,\partial Y) > \delta\}$

$Y^{''} = \{x \in X | d(x,Y) < \delta\}$

$W = \{x \in X | d(x,y) < \delta^{'}\}$

En effet, il est évident que de la manière dont $Y^{'}$ et $Y^{''}$ ont été choisis, ils satisfont aux propriétés désirées. Pour W, un peu plus de travail va être nécessaire. En fait, c'est l'équicontinuité de l'ensemble $\{\varphi^n | n \in \mathbb{N}\}$ qui nous garantit que W satisfait aux propriétés voulues. Si l'on choisit $\delta' < \delta$ et x $\in$ W, alors $d(x,y) < \delta'$ et par équicontinuité, $d(\varphi^n x, \varphi^n y) < \delta'$ $\forall$ n. Ainsi, si $\varphi^n y \in$ Y, alors $1_Y(\varphi^n y) = 1$ et du fait que $d(\varphi^n x, \varphi^n y) < \delta'$, on a également que $1_{Y''}(\varphi^n x) = 1$. De même, si $\varphi^n y \notin$ Y, on obtient que $1_Y(\varphi^n y) = 1_{Y'}(\varphi^n x) = 0$. La propriété 4) est donc vérifiée.

Considérons maintenant l'espace produit suivant : (Ω',β',m')=$(\Omega,\beta,m)\times$(X,H,μ). Définissons également la transformation suivante : T' :$\Omega' \longrightarrow \Omega'$ par $T'(\omega$,x) :=(Tω,φx) où $\omega \in \Omega$ et x $\in$ X.

Remarquons d'abord que T' préserve la mesure. Puisque β' est la σ-algèbre produit, on sait que $\beta' = \sigma(R)$ où $R = \{A \times H_1 | A \in \beta \text{ et } H_1 \in H\}$. Soit R' un rectangle mesurable. Alors, on a R′=A$\times H_1$ pour un certain A $\in \beta$ et $H_1 \in H$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
m'(T'^{-1}(R')) &= m'(T'^{-1}(A \times H_1)) \\
&= m'(T^{-1}A \times \varphi^{-1}H_1) \\
&= m(T^{-1}A) \times \mu(\varphi^{-1}H_1) \\
&= m(A) \times \mu(H_1) \\
&= m'(A \times H_1) \\
&= m'(R')
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant une fonction $f \in$ L^1 et sans perte de généralité, choisissons $f \geq 0$. Nous pouvons alors considérer les fonctions suivantes :

1) g(ω,x)=$f(\omega)1_Y(\varphi^n x)$

2) $g'(\omega$,x)=$f(\omega)1_{Y'}(\varphi^n x)$

3) $g''(\omega$,x)=$f(\omega)1_{Y''}(\varphi^n x)$

Puisque $f \in L^1(\Omega, \beta$,m), on remarque que ces trois fonctions sont dans $L^1(\Omega',\beta',m')$.

De plus, l'inégalité 4) et la positivité de f, impliquent que

$$f(\omega)1_{Y'}(\varphi^n x) \leqslant f(\omega)1_Y(\varphi^n y) \leqslant f(\omega)1_{Y''}(\varphi^n x).$$

Puisque T$'$ préserve la mesure m$'$, le théorème ergodique de Birkhoff nous assure que les fonctions $\overline{g'}(\omega,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g'(T^i\omega,\varphi^i x)$ et $\overline{g''}(\omega,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g''(T^i\omega,\varphi^i x)$ existent presque partout par rapport à la mesure m$'$.

Il est parfois difficile de montrer explicitement qu'une limite existe. Nous essaierons donc de montrer que la lim sup est égale à la lim inf. Définissons

$$\overline{S}(\omega) = \overline{S}(\omega,y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(T^i\omega,\varphi^i y)$$

et

$$\underline{S}(\omega) = \underline{S}(\omega,y) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(T^i\omega,\varphi^i y).$$

Avec les inégalités précédentes, on remarque que

$$\overline{g'}(\omega,x) \leqslant \underline{S}(\omega) \leqslant \overline{S}(\omega) \leqslant \overline{g''}(\omega,x)$$

Calculons maintenant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times W} \overline{g'}dm' &= \int_{\Omega\times W} [\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i\omega)1_{Y'}(\varphi^i x)]m'(d(\omega\times x)) && \text{par définition}\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times W} [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i\omega)1_{Y'}(\varphi^i x)]m'(d(\omega\times x)) && \text{par Von Neumann}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega\times W} f(T^i\omega)1_{Y'}(\varphi^i x)m(d\omega)\mu(dx)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\int_{\Omega} f(T^i\omega)m(d\omega)\int_{W} 1_{Y'}(\varphi^i x)\mu(dx)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\int_{\Omega} f(\omega) m(d\omega) \int_{W} 1_{Y'}(\varphi^i x)\mu(dx)] && \text{car T préserve la mesure m} \\
&= \int f dm \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{X} 1_{Y'}(\varphi^i x) 1_W(x)\mu(dx) && \text{car } \int f dm \text{ ne dépend pas de i} \\
&= \int f dm \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{X} 1_{Y'}(\varphi^i x) 1_W(x)\mu(dx) \\
&= \int f dm \int_{X} 1_{Y'}(x)\mu(dx) \int_{X} 1_W(x)\mu(dx) && \text{car } \varphi \text{ est ergodique} \\
&= \mu(W)\mu(Y^{'}) \int f dm
\end{aligned}
$$

Similairement, on a que $\int\limits_{\Omega\times W} \overline{g''} dm^{'} = \mu(W)\mu(Y^{''}) \int f dm.$

Avec les inégalites plus haut, on remarque trivialement que

$$\overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega) \leqslant \overline{g''}(\omega, x) - \overline{g^{'}}(\omega, x).$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \in W$, on peut intégrer et on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} [\overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega)]\, dm &= \frac{1}{\mu(W)} \int_{\Omega\times W} [\overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega)]\, dm^{'} \\
&\leq \frac{1}{\mu(W)} \int_{\Omega\times W} (\overline{g''} - \overline{g^{'}})\, dm^{'} \\
&= \frac{1}{\mu(W)} [\mu(W)\mu(Y^{''}) \int f\, dm - \mu(W)\mu(Y^{'}) \int f\, dm] \\
&= \int f\, dm \cdot [\mu(Y^{''}) - \mu(Y^{'})] \\
&< \varepsilon \cdot \int f\, dm.
\end{aligned}
$$

Mais ε étant arbitraire et $f \geq 0$, on a que $\int [\overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega)]\, dm = 0$. Puisque

$$\overline{S}(\omega) \geq \underline{S}(\omega) \Rightarrow \overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega) = 0 \Rightarrow \overline{S}(\omega) = \underline{S}(\omega)$$

Puisque les limites supérieure et inférieure sont égales, la limite existe presque partout. Ainsi, $S(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(T^i\omega, \varphi^i y)$ existe presque partout par rapport à m. Par la définition que nous avons donné à la fonction g, on obtient que

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^k\omega) 1_Y(\varphi^k y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{i|k_i \leq n\}} f(T^{k_i}\omega). \end{aligned}$$

Nous savons maintenant que la fonction S existe presque partout, pour f dans L^1. Ainsi, en posant $f \equiv 1$, on remarque que $\lim_{n\to\infty} \frac{|\{i|k_i \leq n\}|}{n}$ existe. On a montré précédemment que $\overline{g'}(\omega, x) \leqslant \underline{S}(\omega)$. En posant $f \equiv 1$, on obtient que

$$\begin{aligned} \overline{g'}(\omega, x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}\omega) 1_{Y'}(\varphi^i x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{Y'}(\varphi^i x). \end{aligned}$$

Mais, on a montré plus haut que puisque φ est une transformation ergodique, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{Y'}(\varphi^i x) = \mu(Y')$ et est donc strictement plus grande que zéro car Y' est un ouvert. On peut donc conclure que $\lim_{n\to\infty} \frac{|\{i|k_i \leq n\}|}{n}$ existe et est strictement plus grande que zéro.

Par ce qu'on a fait précédemment, on sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\{i|k_i \leq n\}|} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\{i|k_i \leq n\}} f(T^{k_i}\omega)$ existe presque partout. En simplifiant légèrement cette dernière expression, on obtient que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\{i|k_i \leq n\}|} \sum_{\{i|k_i \leq n\}} f(T^{k_i}\omega)$ existe presque partout. Définissons,

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{|\{i|k_i \leq n\}|} \sum_{\{i|k_i \leq n\}} f(T^{k_i}\omega)$$

et

$$X_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}\omega)$$

On remarque que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une sous-suite de $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Puisque Z_n converge presque partout, on a également que X_n converge presque partout. Ainsi,

$$\tilde{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}\omega)$$

existe presque partout. De plus, puisque $\tilde{f} \leq \overline{g''}(\omega, x)$, que $\overline{g''} \in L^1$ et qu'on avait supposé la fonction f positive, on peut conclure que $\tilde{f} \in L^1$.

□

2.5 Mauvaises suites universelles

Précédemment, nous avons trouvé une famille de suites pour laquelle le théorème ergodique pour les suites fonctionnait pour toute transformation qui préserve la mesure. Nous n'avons cependant pas éliminé la possibilité que ce théorème ergodique soit valide pour toutes les suites, c'est-à-dire que pour toute suite croissante $\{k_i\}$ et pour toute transformation T qui préserve la mesure, la convergence de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x)\}_{n\geq 1}$ ait lieu presque partout. Ulrich Krengel [7] fut le premier a démontré que certaines suites ne fonctionnaient pas. Nous présenterons cependant la preuve dûe à Alexandra Bellow [1]. Nous montrerons qu'il existe des suites croissantes et des transformations pour lesquelles la convergence presque partout n'a pas lieu. En fait, nous allons définir les suites lacunaires, les mauvaises suites universelles et montrer que ces suites lacunaires sont des mauvaises suites universelles.

Pour ce qui suit, nous allons toujours considérer que la suite $\underline{k} = \{k_i\}$ est strictement croissante et que T :$(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ est une transformation qui préserve la mesure. Définissons maintenant certaines quantités qui vont nous être utiles lorsqu'on voudra montrer que les suites lacunaires sont des mauvaises suites universelles. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\Omega)$. Posons :

$$T_{n,\underline{k}}f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{k_i}x) \tag{2.1}$$

De plus, pour $\lambda > 0$, posons :

$$M_\infty(\underline{k},T,f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_{n,\underline{k}} f(x)|$$

$$E_\infty(\underline{k},T,f,\lambda) := \{x : M_\infty(\underline{k},T,f)(x) > \lambda\}$$

et pour $q \in \mathbb{N}$

$$M_{q,\infty}(\underline{k},T,f)(x) := \sup_{p\geq q} |T_{p,\underline{k}} f(x)|$$

$$E_{q,\infty}(\underline{k},T,f,\lambda) := \{x : M_{q,\infty}(\underline{k},T,f)(x) > \lambda\}$$

Définition 2.2. *Soit $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une transformation qui préserve la mesure. On dit que T est apériodique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(x : T^n(x) = x) = 0$.*

Nous énoncerons maintenant, sans démonstration, un théorème dû à Jean-Pierre Conze, (publié en 1973), qui démontre une inégalité maximale faible. [2]

Théorème 2.3. *Pour toute suite $\underline{k}$, il existe une constante minimale $C(\underline{k}) \in \,]0,\infty]$ qui satisfait l'inégalité suivante :*

$$\lambda \cdot m(E_\infty(\underline{k},T,f,\lambda)) \leq C(\underline{k}) \cdot \|f\|_1$$

pour tout T, $f \in L^1$ et $\lambda > 0$. De plus, $C(\underline{k}) < \infty$ si et seulement s'il existe une transformation T apériodique telle que $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,\underline{k}} f(x)$ existe presque partout pour toute fonction $f \in L^1$.

Définition 2.3. *Une suite $\underline{k}$ est dite mauvaise universelle si $C(\underline{k}) = \infty$. En d'autres termes, $\underline{k}$ est une suite mauvaise universelle si pour toute transformation apériodique , on peut trouver une fonction $f \in L^1$ pour laquelle la convergence de $\{T_{n,\underline{k}} f(x)\}$ n'a pas lieu presque partout.*

Avant d'énoncer le théorème sur les suites lacunaires, nous énoncerons un lemme qui sera utile pour la démonstration du théorème principal.

Lemme 2.5. *[1] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{k_i\}$ une suite qui satisfait la condition suivante : $\frac{k_{i+1}}{k_i} \geq n+1$ pour toute valeur de i suffisamment grande. Alors, pour toute valeur $q \in \mathbb{N}$ et pour* *tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une transformation T qui préserve la mesure et un élément B $\in \beta$ où $m(B) < \frac{2}{n}$ tels que $m(E_{q,\infty}(\underline{k}, T, 1_B, 1-\varepsilon)) = 1$.*

Définition 2.4. *Soit $\{k_i\}$ une suite. Elle est dite lacunaire s'il existe un certain λ tel que $\frac{k_{i+1}}{k_i} \geq \lambda > 1 \; \forall i$.*

Théorème 2.4. *Soit $\underline{k} = \{k_i\}$ une suite lacunaire. Alors, $C(\underline{k}) = \infty$ et donc $\underline{k}$ est une mauvaise suite universelle.*

Démonstration. Soit p $\in \mathbb{N}$. Puisque λ>1, on peut choisir un certain r $\in \mathbb{N}$ tel que :

$$\lambda^r \geq p+1 > \lambda^{r-1}. \tag{2.2}$$

Considérons maintenant $\underline{n} = \{n_i\}$ une sous-suite de $\underline{k}$ définie de la façon suivante :

$$n_i = k_{ir}$$

On remarque alors que la suite $\underline{n}$ que nous venons de construire satisfait les conditions du lemme 2.5 que nous avons énoncé précédemment. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{n_{i+1}}{n_i} &= \frac{k_{(i+1)r}}{k_{ir}} \\ &= \frac{k_{(i+1)r}}{k_{(i+1)r-1}} \cdot \frac{k_{(i+1)r-1}}{k_{(i+1)r-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{k_{ir+1}}{k_{ir}} \\ &\geq \lambda^r \\ &\geq p+1 \end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Remarquons également que pour une transformation T et une fonction $f \in L^1(\Omega)$, où f est positive, on a :

$$\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} f(T^{k_i}(x)) \;=\; r \cdot \frac{1}{lr}\sum_{i=1}^{l} f(T^{k_i}(x))$$

$$\leq \quad r \cdot \frac{1}{lr}\sum_{i=1}^{lr} f(T^{n_i}(x))$$

pour tout élément $x \in \Omega$. Avec la définition (2.2) donnée précédemment et l'inégalité que nous venons d'établir, on remarque que :

$$M_\infty(\underline{n}, T, f)(x) \leq r \cdot M_\infty(\underline{k}, T, f)(x) \quad \forall x \in \Omega$$

On applique alors le lemme 2.5 à la suite $\underline{n}$ en prenant q=1 et 0<ε<1. On peut alors trouver une transformation T qui préserve la mesure et un élément B $\in \beta$ qui satisfait m(B)$\leq \frac{2}{p}$ tel que : $m(E_{q,\infty}(\underline{k}, T, 1_B, 1-\varepsilon)) = 1$.

Ainsi, puisque toutes les conditions pour les inégalités qu'on a étudiées plus haut sont satisfaites, on sait que $M_\infty(\underline{n}, T, 1_B)(x) \leq r \cdot M_\infty(\underline{k}, T, 1_B)(x)$. Alors, avec les définitions données précédemment, on peut conclure que

$$E_\infty(\underline{n}, T, 1_B, 1-\varepsilon) \subseteq E_\infty(\underline{k}, T, 1_B, \frac{1}{r}(1-\varepsilon))$$

et donc que

$$m(E_\infty(\underline{k}, T, 1_B, \frac{1}{r}(1-\varepsilon))) = 1.$$

De plus, par le théorème 2.3 énoncé plus haut, on sait qu'on peut trouver C($\underline{k}$) $\in]0, \infty]$ tel que pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda \cdot m(E_\infty(\underline{k}, T, 1_B, \lambda)) \leq C(\underline{k}) \cdot \|1_B\|_1 = C(\underline{k}) \cdot m(B) \leq C(\underline{k}) \cdot \frac{2}{p}$$

Puisque la dernière inégalité est vraie pour tout $\lambda > 0$ et en prenant $\lambda = (1-\varepsilon)$ pour avoir $m(E_\infty(\underline{k}, T, 1_B, \frac{1}{r}(1-\varepsilon))) = 1$, on obtient que $\frac{1}{r}(1-\varepsilon) \leq C(\underline{k}) \cdot \frac{2}{p}$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient que $C(\underline{k}) \geq \frac{p}{2r}$. Mais, au début de la démonstration, on avait pris p un entier positif quelconque. Regardons le comportement de $\frac{p}{2r}$ lorsqu'on fait tendre p vers l'infini. D'abord, on se rappelle que r est un entier positif tel que $\lambda^r \geq p+1 > \lambda^{r-1}$ et donc que r dépend de p. En manipulant légèrement la dernière inégalité, l'inégalité peut se réécrire

$$\frac{\log\lambda}{\log(p+1)+\log\lambda} < \frac{1}{r} \leq \frac{\log\lambda}{\log p+1}$$

et en multipliant le tout par p, on obtient alors

$$\frac{p\log\lambda}{\log(p+1)+\log\lambda} < \frac{p}{r} \leq \frac{p\log\lambda}{\log p+1}$$

De cette dernière inégalité et du fait que $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p\log\lambda}{\log(p+1)+\log\lambda} = \infty$, on peut conclure que $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p}{2r} = \infty$ et par conséquent, que $C(\underline{k}) = \infty$. $\square$

CHAPITRE 3

THÉORÈME ERGODIQUE AVEC POIDS

3.1 Introduction

Précédemment, nous avons étudié deux types de théorèmes ergodiques. Premièrement, le théorème ergodique de Birkhoff, qui concernait la convergence presque partout d'une suite, et deuxièmement, des théorèmes ergodiques pour les suites. Il existe également une autre catégorie de théorèmes ergodiques, les théorèmes ergodiques avec poids. Pour ce type de théorème ergodique, nous étudions la convergence de la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i f(T^i x)\}$ ou d'autres suites qui s'y apparentent. Le prochain résultat établira un lien entre la notion de transformation fortement mélangeante et la convergence d'une certaine suite de ce type.

3.2 Théorème ergodique avec poids pour les suites croissantes

Avant d'énoncer le théorème, définissons quelques quantités utilisées pour ce théorème. D'abord, considérons $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions dans L^1. Nous pouvons alors définir les fonctions suivantes :

$$F_0 = 0$$

$$F_n = \sup_{1 \leq m \leq n} (\sum_{i=1}^{m} f_i)^+$$

et

$$g_n = F_n - F_{n-1}$$

pour $n \geq 1$. Ainsi, on a que $F_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$ et $0 \leq g_n = \inf_{m \leq n} (\sum_{i=m}^{n} f_i)^+$. Avant de poursuivre, démontrons cette dernière égalité.

Remarquons d'abord que $F_{n-1} \leq F_n$. Ainsi, si $F_n = 0$, $F_{n-1} = 0$ et $F_n - F_{n-1} = 0$. Dans ce cas, nous aurons que $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)^+ = 0$, et donc que $g_n = 0$ également. Maintenant, si $F_n > 0$, deux cas peuvent survenir :

1) $F_n = f_1 + f_2 + ... + f_k$ où $k \leq n-1$

2) $F_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$

Dans le premier cas, on a nécessairement que $F_{n-1} = F_n$ et donc que $F_n - F_{n-1} = 0$. Alors, de la définition de F_n, nous devons avoir que $f_n + f_{n-1} + ... + f_{k+1} \leq 0$, et donc que $g_n = 0$.
Dans le deuxième cas, deux possibilités peuvent survenir. Cette première possibilité est que $F_{n-1} = 0$. Dans ce cas, $F_n - F_{n-1} = f_1 + f_2 + ... f_n$. Montrons alors que $g_n = f_1 + f_2 + ... f_n$. Supposons le contraire et supposons qu'il existe $k > 1$ tel que

$$(f_n + ... + f_k)^+ < f_1 + ... + f_n$$

Puisque $F_{n-1} = 0$, on a que $f_1 + ... + f_{k-1} \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_1 + ... + f_n &\leq f_k + ... + f_n \\ &\leq (f_k + ... + f_n)^+ \\ &< f_1 + ... + f_n \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Nous avons donc que $g_n = f_1 + ... + f_n$.
Il ne reste plus maintenant qu'à démontrer l'égalité dans le cas où $F_{n-1} = f_1 + ... + f_k$ où $k < n$. Dans ce cas, nous avons que $F_n - F_{n-1} = f_n + ... + f_{k+1}$. Montrons que g_n est égale à cette dernière expression. Pour ce faire, procédons par contradiction et supposons qu'il existe un entier $l < n$ tel que $n - l \neq k+1$ et

$$(f_n + ... + f_{n-l})^+ < f_n + ... + f_{k+1}.$$

Sans perte de généralité, supposons que $n - l > k+1$. Alors, nous avons que

$$f_n + ... + f_{n-l} < f_n + ... + f_{k+1},$$

ce qui implique que

$$f_{k+1} + ... + f_{n-l-1} > 0.$$

Il y a donc contradiction avec le fait que $F_{n-1} = f_1 + ... + f_k$, car $f_1 + ... + f_{n-l-1} > f_1 + ... + f_k$. Nous avons donc démontré que $g_n = \inf\limits_{m\leq n} (\sum\limits_{i=m}^{n} f_i)^+$.
Posons maintenant

$$D = \{c | c = (c_n)_{n\geq 1},\ \ c_n \geq c_{n+1} > 0 \, \forall n,\ \ \sum_{i=1}^{\infty} c_i \ \ diverge\}.$$

Théorème 3.1. *Soit T :*$(\Omega, \beta, m) \longrightarrow (\Omega, \beta, m)$ *une transformation qui préserve la mesure. Alors, T est fortement mélangeante si et seulement si pour toute suite croissante* $\{k_i\}_{i\geq 1}$ *et toute fonction* $f \in L^1(m)$*, on peut trouver un* $c \in D$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(T^{k_i}(x))}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = \int_{\Omega} f \, dm$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

Afin de démontrer ce théorème, deux lemmes seront énoncés. Nous énoncerons le premier lemme sans démonstration [7], alors que le deuxième sera démontré.

Lemme 3.1. *Soit* $c \in D$*. Alors, pour les fonctions* f_i *et* g_i *définies précédemment,*

$$\limsup_n \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \leq \limsup_n \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i g_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}$$

Lemme 3.2. *Soit* $(a_{m,n})_{m,n\geq 1}$ *des réels tels que :*

1) pour n fixé, $\{a_{m,n}\}$ *est croissante en m*

2) pour m fixé, $\{a_{m,n}\}$ *décroît vers 0 lorsque n croît*

Alors, il existe un $c \in D$ *tel que* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i a_{m,i}$ *converge pour tout m.*

Démonstration. D'abord, on remarque que si la deuxième condition est satisfaite, alors les éléments $a_{m,n}$ sont positifs. De plus, cette même deuxième condition implique que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{m,i} \longrightarrow 0$ lorsque n croît vers l'infini, pour toute valeur de m.

Procédons maintenant à la preuve du lemme. Posons $n_0 = 0$ et choisissons ensuite $n_1 \geq 1$ tel que pour $n \geq n_1$, on a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{0,i} < \frac{1}{2}$. Ensuite, de manière récursive, si l'on a déjà défini $n_1 < n_2 < ... < n_i$, on définit n_{i+1} comme un entier plus grand que n_i tel que $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$ et pour lequel si $n \geq n_{i+1}$ et m=0,...,i,

$$\frac{1}{n-n_i}\sum_{k=n_i}^{n-1} a_{m,k} < 2^{-(i+1)}$$

Posons maintenant $c_1 = ... = c_{n_1-1} = \frac{1}{n_1}$ et $c_{n_i} = ... = c_{n_{i+1}-1} = \frac{1}{(n_{i+1}-n_i)}$. □

Rergadons si $c = \{c_i\}_{i\geq 1}$ est bien un élément de l'ensemble D. Premièrement, de la façon dont la suite a été construite, elle est clairement décroissante. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} c_i &= \sum_{i=1}^{\infty} (n_{i+1} - n_i) \cdot \frac{1}{n_{i+1} - n_i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Finalement, il ne reste plus qu'à démontrer que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{m,i}$ converge pour tout m. Pour étudier cette somme, nous allons la séparer par blocs et regarder ce qui se passe :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{m,i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} c_k a_{m,k} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_{i+1} - n_i} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} a_{m,k} \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-(i+1)}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

pour toute valeur de m.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit T une transformation fortement mélangeante, $\{k_i\}$ une suite strictement croissante et $f \in L^1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\int f\,dm$=0. Définissons maintenant la fonction suivante :

$$f_n^{(m)} = T^{k_n}(f - 2^{-m}) = f \circ T^{k_n} - 2^{-m}.$$

Comme nous l'avons fait au début du chapitre, construisons de manière identique les fonctions $g_i^{(m)}$ à l'aide des fonctions $f_i^{(m)}$ que nous venons de définir. Remarquons d'abord que $\int f_n^{(m)}\,dm = -2^{-m} < 0$. Montrons maintenant que le fait que T soit fortement mélangeante et que l'intégrale que nous venons de calculer soit négative impliquent qu'en utilisant le théorème de Blum et Hanson, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n^{(m)}\,dm = 0$. Par définition, $g_n^{(m)} = \inf\limits_{m\le n}(\sum\limits_{i=m}^{n} f_i^{(m)})^+$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int g_n^{(m)}\,dm &= \int \inf_{m\le n}(\sum_{i=m}^{n} f_i^{(m)})^+\,dm \\
&\le \int (\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)})^+\,dm \\
&= \int_{A_n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)}\,dm
\end{aligned}$$

où $A_n = \{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \ge 0\}$.

Par le théorème de Blum et Hanson énoncé au chapitre précédent, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \int |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} + 2^{-m}|\,dm = 0.$$

Puisque

$$|\int \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)}\,dm - \int -2^{-m}\,dm| \le \int |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} + 2^{-m}|\,dm \longrightarrow 0$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a que $\int_A \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm \longrightarrow \int_A -2^{-m} \, dm$ pour tout élément A dans la σ-algèbre. De manière équivalente, on peut dire que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N_\varepsilon$ tel que $\forall\ n \geq N_\varepsilon$

$$\sup_A \left| \int_A \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm - \int_A -2^{-m} \, dm \right| < \varepsilon.$$

Soit ε>0 et considérons le N_ε correspondant trouvé précédemment. On a alors que :

$$\left| \int_{A_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm - \int_{A_n} -2^{-m} \, dm \right| < \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Ainsi,

$$-\varepsilon < \int_{A_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm + 2^{-m} \cdot m(A_n) < \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

$$-\varepsilon - 2^{-m} \cdot m(A_n) < \int_{A_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm < \varepsilon - 2^{-m} \cdot m(A_n) \qquad\qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Mais, $\int_{A_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \, dm \geq 0$. Il faut donc également que $\varepsilon - 2^{-m} \cdot m(A_n) > 0$, c'est-à-dire, $m(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{-m}}$. Puisqu'on a choisi ε arbitraire et m fixe, on doit nécessairement avoir que $\lim_{n \to \infty} m(A_n) = 0$. Ainsi,

$$\int_\Omega g_n^{(m)} = \int_{A_n} g_n^{(m)} + \int_{A_n^c} g_n^{(m)} = 0$$

car $g_n^{(m)} = 0$ sur A_n^c.

Par conséquent, $\int_\Omega g_n^{(m)} = \int_{A_n} g_n^{(m)} \leq \int_{A_n} |f_n^{(m)}|$, par définition de la fonction $g_n^{(m)}$. Mais puisque $f_n^{(m)} = T^{k_n}(f - 2^{-m}) = T^{k_n} f - 2^{-m}$, alors

$$\int_{A_n} |f_n^{(m)}| \, dm \leq \int_{A_n} |T^{k_n} f| \, dm + 2^{-m} \cdot m(A_n).$$

On a que $f \in L^1$ et que T est une transformation qui préserve la mesure. Alors, par le lemme 1.1, $T^{k_n}f$ et f ont la même distribution. Ainsi, par ce que nous avons fait dans la preuve du lemme 1.2, pour tout $\delta > 0$, on peut trouver N_δ assez grand tel que $\int\limits_{A_n} |T^{k_n}f|\,dm + 2^{-m} \cdot m(A_n) < \delta$ pour tout n$\geq N_\delta$. On peut conclure que pour tout $\delta > 0$, $\exists\, N_\delta$ tel que $\int\limits_{\Omega} g_n^{(m)}\,dm < \delta$, $\forall$ n$\geq N_\delta$ et donc que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n^{(m)}\,dm = 0.$$

On veut maintenant utiliser le lemme 3.2 que nous avons démontré précédemment. Pour ce faire, définissons

$$a_{m,n} = \sup_{j\geq n} \int\limits_{\Omega} g_j^{(m)}\,dm$$

Vérifions que les $a_{m,n}$ satisfont bien les hypothèses du lemme. D'abord, lorsque m est fixe, par ce qu'on vient de faire ci-haut, on a clairement que $a_{m,n}$ décroît vers 0.Lorsque n est fixe, montrons que $a_{m,n} \leq a_{m+1,n}$, c'est-à-dire que

$$\sup_{j\geq n} \int\limits_{\Omega} g_j^{(m)}\,dm \leq \sup_{j\geq n} \int\limits_{\Omega} g_j^{(m+1)}\,dm.$$

Pour ce faire, remarquons d'abord que $f_i^{(m)} \leq f_i^{(m+1)}$. Puisque ceci est vrai pour tout i entier naturel, nous avons également que

$$(\sum_{i=k}^{n} f_i^{(m)})^+ \leq (\sum_{i=k}^{n} f_i^{(m+1)})^+$$

En prenant l'infimum sur les entiers positifs k inférieurs à n, nous obtenons que

$$g_n^{(m)} \leq g_n^{(m+1)}$$

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$. Cette fois, en prenant le supremum sur les entiers j supérieurs à n, nous obtenons que

$$a_{m,n} = \sup_{j\geq n} \int\limits_{\Omega} g_j^{(m)}\, dm \leq \sup_{j\geq n} \int\limits_{\Omega} g_j^{(m)+1}\, dm = a_{m+1,n}$$

ce qui démontre ce que nous voulions.

Puisque toutes les hypothèses du lemme 3.2 sont vérifiées, on peut l'appliquer et on sait qu'il existe un $c \in$ D pour lequel $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{m,i} < \infty$ pour chaque m. Mais alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{m,i} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sup_{j\geq i} \int g_j^{(m)}\, dm \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int g_i^{(m)}\, dm \\
&= \int (\sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i^{(m)})\, dm
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i^{(m)} < \infty$ presque partout. On peut appliquer le lemme 3.1 et on obtient alors que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i T^{k_i} f}{\sum_{i=1}^{n} c_i} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n} c_i} + 2^{-m} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i g_i^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n} c_i} + 2^{-m} \\
&= 2^{-m}
\end{aligned}$$

presque partout. En effectuant les mêmes calculs avec $-f$ au lieu de f, on obtient que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i T^{k_i} f}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \geq -2^{-m}$$

presque partout. Mais puisque toutes ces inégalités sont vraies pour toutes les valeurs de m, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i T^{k_i} f}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = 0$$

($\Leftarrow$)Pour démontrer le théorème dans l'autre direction, on va procéder par contradiction. Supposons que pour toute suite croissante k_i et toute fonction $f \in L^1$, il existe $c \in$ D tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(T^{k_i}(x))}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = \int\limits_{\Omega} f\, dm$$

presque partout, mais que T ne soit pas fortement mélangeante. Alors, il existe E et $F \in \beta$ et une suite croissante k_i telle que $\lim\limits_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E \cap F)$ existe mais est différente de $m(E)m(F)$. En effet, deux possibilités peuvent se produire. Premièrement, la suite $\{m(T^{-i}E \cap F)\}_{i\geq 1}$ converge, mais vers une constante différente de $m(E)m(F)$. L'autre possibilité est que cette même suite $\{m(T^{-i}E \cap F)\}_{i\geq 1}$ diverge. Dans les deux cas, on peut trouver une suite $\{k_i\}$ qui nous assure que $\lim\limits_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E \cap F)$ existe mais est différente de $m(E)m(F)$. Dans le premier cas, c'est évident, mais dans le deuxième cas, il faut utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass. Cette propriété affirme que si l'on a une suite quelconque bornée, ce qui est notre cas, on peut en extraire une sous-suite convergente. À priori, il n'est pas exclu que cette nouvelle sous-suite converge vers $m(E)m(F)$, mais si c'est le cas, on peut supprimer de la suite initiale tous les termes de cette nouvelle sous-suite et on va pouvoir en extraire une nouvelle sous-suite qui elle convergera vers un terme différent de $m(E)m(F)$. Maintenant, pour la fonction identité de E, 1_E et la séquence utilisée précédemment, on peut trouver $c \in$ D tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x))}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = \int\limits_{\Omega} 1_E\, dm = m(E)$$

presque partout.

Remarquons maintenant que la suite $\{\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\}_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Avant de débuter, afin de simplifier la notation, posons

$$X_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}.$$

Regardons si la première condition pour l'intégrabilité uniforme est satisfaite. Nous avons,

$$\begin{aligned}
|X_n(x)| &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i |1_{T^{-k_i}E}(x)|}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la première condition est vérifiée. Vérifions maintenant que la deuxième condition est également satisfaite. Pour ce faire, considérons $\varepsilon > 0$ et A tel que $m(A) < \varepsilon$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_A |X_n(x)|\, dm &= \int_A \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\, dm \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \int_A 1_{T^{-k_i}E}(x)\, dm}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \int 1_{(T^{-k_i}E \cap A)}(x)\, dm}{\sum_{i=1}^{n} c_i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i m(A)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

La deuxième condition est donc vérifiée et on en conclut que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Ceci va nous permettre d'appliquer l'égalité discutée à la remarque 1.7.

Alors,

$$
\begin{aligned}
m(E)m(F) &= \int_F m(E)\, dm \\
&= \int_F \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_F \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{T^{-k_i}E}(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \int_F 1_{T^{-k_i}E}(x)\, dm}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E \cap F)}{\sum_{i=1}^{n} c_i}
\end{aligned}
$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E\cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = \lim_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E\cap F).$$

Pour simplifier la notation, définissons

$$a := \lim_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E\cap F).$$

De la manière dont nous avons défini a, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \ \ tel \ \ que \ \ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |m(T^{-k_n}E\cap F) - a| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et le N_ε correspondant. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E\cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i m(T^{-k_i}E\cap F) + \sum\limits_{i=N_\varepsilon+1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E\cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \\
&\leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i m(T^{-k_i}E\cap F) + \sum\limits_{i=N_\varepsilon+1}^{n} c_i (a+\varepsilon)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \\
&\to a+\varepsilon
\end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$, car le premier des deux termes tend vers 0 lorsque n croît, alors que le deuxième tend vers $a+\varepsilon$. En procédant de la même manière, on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E\cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} &\geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} c_i m(T^{-k_i}E\cap F) + \sum\limits_{i=N_\varepsilon+1}^{n} c_i (a-\varepsilon)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \\
&\to a-\varepsilon
\end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$. En combinant ces deux inégalités, on obtient que

$$a-\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E \cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} \leq a+\varepsilon$$

et ε étant arbitraire, on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(T^{-k_i}E \cap F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i} = a = \lim_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E \cap F).$$

Nous venons ainsi de démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} m(T^{-k_n}E \cap F) = m(E)m(F)$, ce qui contredit notre supposition que T n'est pas fortement mélangeante.

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alexandra Bellow. On bad universal sequences in ergodic theory. *Lecture Notes in Mathematics*, 1033:74–78, 1983.

[2] Jean-Pierre Conze. Convergence des moyennes ergodiques pour des sous-suites. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 35:7–15, 1973.

[3] J.R. Blum et D.L. Hanson. On the mean ergodic theorem for subsequences. *Bulletin of American Society*, 66(4):308–311, 1960.

[4] Antoine Brunel et Michael Keane. Ergodic theorems for operator sequences. *Probability Theory and Related Fields*, 2(3):231–240, 1969.

[5] Paul R. Halmos. *Lectures on Ergodic Theory*. AMS Chelsea publishing, 1956.

[6] Achim Klenke. *Probability Theory : A Comprehensive Course*. Springer, 2008.

[7] Ulrich Krengel. Classification of states for operators. *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 2(2):415–429, 1967.

[8] Miklós Rédei. *John Von Neumann : Selected Letters*, volume 27. History of mathematics, 2005.

[9] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1981.

[10] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.