

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Étude d'un modèle de Gause généralisé avec
récolte de proies et fonction de Holling type III
généralisée

par

Remy Magloire Dieudonné ETOUA

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques Appliquées

septembre 2008



Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Étude d'un modèle de Gause généralisé avec
récolte de proies et fonction de Holling type III
généralisée

présentée par

Remy Magloire Dieudonné ETOUA

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Jacques Bélair

(membre du jury)

Robert Roussarie

(examineur externe)

Manu B. Paranjape

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

21 novembre 2008

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous étudions le modèle de Gause généralisé avec récolte de proies suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases}$$

où p est la fonction de Holling de type III généralisée : $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$. C'est un système prédateur-proie avec récolte de proies ayant 8 paramètres : r, k, m, a, c, d, h_1 sont strictement positifs et $b \geq 0$. Mais, par un changement de variables et d'échelle sur le temps, nous le ramenons à un système ayant 5 paramètres réels. Notre étude porte principalement sur une analyse des bifurcations de ce modèle : bifurcation de col-noeud, bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2, bifurcation de boucle hétéroclinique et, bifurcation de col nilpotent de codimension 2 et 3 (qui est le centre organisateur de notre diagramme de bifurcations). À l'aide d'un système de Liénard généralisé (dont on détermine les cinq premiers coefficients de Lyapunov), nous étudions la bifurcation de Hopf et, pour $b = 0$, nous discutons de l'intégrabilité du système. Au voisinage du point nilpotent de multiplicité 3, nous développons des formes normales (dans lesquelles la droite invariante est conservée) pour étudier la bifurcation de col nilpotent. Pour $b = 0$, la réversibilité du déploiement du col nilpotent est discutée. Nous élaborons des théorèmes sur le type de la boucle hétéroclinique et sur sa cyclicité (par la méthode de dérivation-division généralisée). Les portraits de phase du diagramme de bifurcations (partiellement conjecturé sur la base des résultats obtenus) nous permettent de donner une interprétation biologique des comportements possibles des deux espèces.

Mots clés : Modèle de Gause généralisé avec récolte de proies, fonction de réponse, bifurcation de col-noeud, bifurcation de Hopf, bifurcation de boucle hétéroclinique, bifurcation de col nilpotent, cyclicité.

SUMMARY

In this thesis we study the following generalized Gause model with prey harvesting

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases}$$

where p is the generalized Holling response function of type III : $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$. This model is a predator-prey system with prey harvesting and has 8 parameters : r, k, m, a, c, d, h_1 are strictly positive et $b \geq 0$. A scaling of variables and time allows to reduce the number of parameters to 5. The goal of our study is a bifurcation analysis of the model : saddle-node bifurcation, Hopf bifurcation of codimension 1 and 2, heteroclinic bifurcation and, nilpotent saddle bifurcation of codimension 2 and 3 (which is the organising center for the bifurcations diagram). By means of a generalized Liénard system (of which we calculate five first Lyapunov coefficients) we study the Hopf bifurcation, and for $b = 0$ we discuss the potential integrability of the system. In a neighbourhood of the nilpotent point of multiplicity 3 we develop normal forms (in which invariant line is preserved) for study of the nilpotent saddle bifurcation. For $b = 0$ the reversibility of the unfolding of the nilpotent saddle is discussed. We work out theorems on the type of the heteroclinic loop and its cyclicity (via a generalized derivation-division method). The phase portraits of the bifurcations diagram (partially conjectured via the results obtained) allow us to give a biological interpretation of the behavior of the two species.

Key words : Generalized Gause model with prey harvesting, response function, saddle-node bifurcation, Hopf bifurcation, heteroclinic bifurcation, nilpotent saddle bifurcation, cyclicity.

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord exprimer ma profonde gratitude à la Professeure Christiane Rousseau, ma Directrice de thèse. Je la remercie pour sa disponibilité, la qualité de sa direction, sa rigueur scientifique, son financement et son humilité. Merci également au Professeur Huaiping Zhu de l'Université de York pour nous avoir suggéré l'étude de ce modèle et de nombreuses références, pour des prépublications qu'il nous a transmises et pour plusieurs explications qui nous ont été très utiles. Je remercie aussi le Professeur Robert Roussarie pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui lors de son séjour au CRM en 2007.

Pour le support financier de cette thèse, merci infiniment à ma Directrice de recherche Christiane Rousseau (qui m'a supporté tout au long de ce travail), merci à l'AUF et au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal.

Je dis merci au personnel du département pour leur serviabilité. Il s'agit en particulier de Sylvain Eon pour son apport en Latex. Je n'oublierais pas Rieser Antonio, Youness Lamzouri, Waldo Arriagada, Florence Magnifo, Calvin Mbuntcha, Innocent Tampsé, Tamara Diaz et Caroline Lambert pour leur collaboration.

Qu'il me soit permis de remercier mes amis qui, de près ou de loin, m'ont supporté. Je pense particulièrement à Yannick Lalonde pour son aide à l'outil informatique, Madame Owona Adija pour sa grande humanité et Henri Mbappé pour tout.

Je ne saurais oublier ma famille, en particulier Monsieur et Madame Fouman pour leur confiance.

Finalement, mes remerciements vont à Edwige (ma femme) pour son soutien moral, sa patience et son amour pendant cette longue absence à ses côtés pour la réalisation de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	v
Remerciements	vii
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	xvi
Introduction	1
Généralités	6
0.0.1. Simplification du système.....	6
0.0.2. Comportement des trajectoires à l'infini.....	7
0.0.3. Quelques rappels utiles.....	8
0.0.3.1. Théorème de Chochitaïchvili.....	8
0.0.3.2. Méthode de Melnikov ([30], [31]).....	9
0.0.3.3. Courbes algébriques et facteur intégrant d'un champ de vecteurs polynomial ([36]).....	10
Chapitre 1. Étude du système lorsque $\lambda = 0$	12
1.1. Présentation du chapitre.....	12
1.2. Détermination des points singuliers et des droites invariantes.....	12
1.3. Étude du type de chaque point singulier.....	13
1.3.0.4. Étude du point singulier $O = (0, 0)$	13
1.3.0.5. Étude du point singulier $A = (1, 0)$	13

1.3.0.6. Étude du point singulier $M = (x_0, y_0)$	14
(1) Signe du déterminant du jacobien	14
(2) Trace du jacobien	14
1.4. Bifurcation de col-noeud	15
1.5. Bifurcation de Hopf	16
1.5.1. Ordre de la bifurcation de Hopf	17
1.5.2. Détermination de la surface de bifurcation de Hopf	19
1.6. Diagramme de bifurcations du système (1.1.1)	24
Chapitre 2. Étude des points singuliers du système	27
2.1. Détermination des points singuliers	27
2.2. Étude du type de chaque point singulier	30
2.2.1. Lorsque $\rho = 4\lambda$	30
2.2.2. Lorsque « $\rho > 4\lambda$ »	31
2.2.2.1. Type des points singuliers $C = (x_{01}, 0)$ et $D = (x_{02}, 0)$	31
2.2.2.2. Type du point singulier $E = (x_0, y_0)$	32
Chapitre 3. Analyse des Bifurcations du Système	34
3.1. Bifurcations de col-noeud	34
3.1.1. Lorsque $\rho = 4\lambda$ et si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$	34
3.1.2. Sur $(Cn_r) : \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et sur $(Cn_a) : \delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$	36
3.2. Bifurcation de Hopf	38
3.2.1. Calcul des coefficients de Lyapunov d'un système de Liénard généralisé	38
3.2.2. Existence et ordre de la Bifurcation de Hopf	40
3.2.3. Analyse du cas $\beta = 0$	44
3.3. Bifurcation de col nilpotent	48

3.3.1. Mise sous forme normale	49
(1) Localisation du système initial :	49
(2) Multiplication par une fonction strictement positive et développement de Taylor :	49
(3) Normalisation :	49
(4) Changement de variables normalisantes et d'échelle sur le temps :	50
(5) Type topologique du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$:	53
3.3.2. Analyse du cas $\beta = 0$	64
Chapitre 4. Étude des déploiements du col nilpotent	66
4.1. Présentation du chapitre	66
4.2. Étude de la sous-famille (4.1.3)	67
4.2.1. Points singuliers et leur type	67
4.2.2. Bifurcations de col-noeud	70
4.2.3. Bifurcation de Hopf	71
4.2.4. Positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (4.1.3) et (4.1.4)	72
4.2.5. Bifurcation de boucle hétéroclinique	75
4.2.5.1. Existence	75
4.2.5.2. Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH_+) , par la méthode de Melnikov	76
(i) Calcul des I_k	77
(ii) Écriture simplifiée de (BH_+)	79
4.2.5.3. Type de la boucle	79
4.2.6. Diagrammes de bifurcation de (4.1.3)	80
4.3. Étude de la sous-famille (4.1.4)	80
4.3.1. Points singuliers et leur type	80
4.3.2. Bifurcations de col-noeud	84

4.3.3. Bifurcation de Hopf	85
4.3.4. Bifurcation de boucle hétéroclinique	87
4.3.4.1. Existence et lieu de la bifurcation de boucle hétéroclinique de codimension supérieure ou égale à 2	87
4.3.4.2. Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH) , du système (4.3.23)	89
4.3.5. Détermination des bifurcations de codimension 2	91
(i) $C := (H) \cap (BH)$	91
(ii) $H_2 := (H) \cap (L)$	91
(iii) $BH_2 := (BH) \cap (R)$	91
4.3.6. Type et cyclicité de la boucle hétéroclinique	91
4.3.7. Diagramme de bifurcation de (4.1.4)	118
Chapitre 5. Diagramme de bifurcations et Interprétation biologique du système	120
5.1. Présentation du chapitre	120
5.2. Bifurcations de col-noeud	121
5.3. Bifurcation de Hopf	124
5.4. Positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des x pour le modèle (0.0.11)	143
5.5. Bifurcation de boucle hétéroclinique	147
5.6. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2	151
5.6.1. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers 0 ..	152
5.6.2. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers $(\frac{\rho}{4})^-$	153
5.6.3. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$	154
5.6.4. Validation numérique de la position de H_2	156

5.6.5. Diagramme de bifurcations et portraits de phase	158
5.6.6. Interprétation Biologique.....	158
Conclusion.....	167
Bibliographie	169

LISTE DES FIGURES

0.1	La fonction de Holling de type III généralisée lorsque $b \geq 0$	4
0.2	La fonction de Holling de type III généralisée lorsque $b < 0$	4
1.1	Diagramme de bifurcations du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$	19
1.2	La fonction $P_\beta(\alpha)$ lorsque β est fixé.	21
1.3	Courbe d'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ lorsque β est fixé.	22
1.4	Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$	26
3.1	Éclatements dans la direction X ($\bar{X} = \mp 1$).....	55
3.2	Éclatement complet.....	56
3.3	Type topologique du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$: <i>col nilpotent</i>	56
4.1	Positions possibles des séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (4.1.3) et (4.1.4).....	74
4.2	Comportement des trajectoires aux voisinages de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle.....	75
4.3	Positions possibles des séparatrices de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle	75
4.4	Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (4.1.3) pour $\epsilon_2 = +1$	81
4.5	Diagramme de bifurcation de Hopf de codimension 2 pour $L_2 > 0$	87
4.6	Boucle hétéroclinique dans le système $(S_{0,\gamma})$	93
4.7	Boucle hétéroclinique lors de BH_2 en coordonnées normalisantes.....	93

4.8	Boucle hétéroclinique attractive.....	98
4.9	Boucle hétéroclinique répulsive.....	98
4.10	Trace du diagramme de bifurcations sur S_ϵ et portraits de phase du système (4.1.4).....	119
5.1	Sections, parallèles au plan (α, δ) , des surfaces de bifurcations de col-noeud.....	122
5.2	Les courbes d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ au premier quadrant.....	128
5.3	Présentation des solutions de l'équation $P_{(\alpha, \lambda)}(\delta) = 0$ dans le premier quadrant.....	133
5.4	Les sections, parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant, de la surface de bifurcation de Hopf (\mathcal{H}).....	144
5.5	Les surfaces des bifurcations locales du système (0.0.13) au premier quadrant du plan (α, δ)	145
5.6	Positions possibles des séparatrices des points singuliers de l'axe des x pour le modèle (0.0.11).....	146
5.7	Comportement des trajectoires aux voisinages de C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle).....	147
5.8	Positions possibles des séparatrices des points singuliers C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle).....	147
5.9	Diagramme de bifurcation au voisinage de la bifurcation de Hopf de codimension 2.....	157
5.10	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ est petit.....	161
5.11	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$	162
5.12	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ est proche de $\frac{\rho}{4}$	163

5.13	Diagramme de bifurcation et portraits de phase lorsque $\lambda = \frac{\ell}{4}$	164
5.14	\dot{y} pour $\delta < \frac{1}{\alpha}$	164
5.15	\dot{y} pour $\delta \geq \frac{1}{\alpha}$	165
5.16	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\lambda > \frac{\ell}{4}$	165
5.17	Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta = 0$ et $\lambda \in]0, \frac{\ell}{4}[$	166

LISTE DES TABLEAUX

0.1	État d'étude actuel des systèmes prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling et/sans récolte de proies	5
1.1	Types et lieux des bifurcations des points singuliers du système (1.1.1)	25
2.1	Nombre de points singuliers du système (0.0.11) suivant les valeurs des paramètres	30
2.2	Types des points singuliers lorsque $\rho > 4\lambda$	33
4.1	Description des courbes de bifurcation de la figure 4.10	118

INTRODUCTION

Formulé par une équipe pluridisciplinaire, un système prédateur-proie modélise l'interaction entre une population de prédateurs et une population de proies. L'analyse d'un tel modèle a pour objectif de prédire le comportement futur des populations de ces deux espèces animales. Le premier modèle de système prédateur-proie fut suggéré indépendamment par A. Lotka(1925)[28] et V. Volterra(1926) [38]. Depuis ce temps, par la richesse et la complexité de leur dynamique, de tels systèmes sont étudiés avec grand intérêt. Comme ces systèmes dépendent des paramètres, l'outil de base est la théorie des bifurcations.

L'évolution d'une population x dont des individus sont régulièrement prélevés est modélisée (voir [4]) par

$$\dot{x} = F(x) - S(x, h),$$

où $F(x)$ décrit la dynamique de la population sans récolte et $S(x, h)$ est le taux auquel ces individus sont prélevés de la population; le paramètre h est appelé *l'intensité de la récolte*. Il existe deux stratégies principales de récolte ([4], [5]) : la première est de prélever un nombre constant d'individus par unité de temps, ce qu'on traduit par un taux constant $S(x, h) = h$; pour la deuxième stratégie, le nombre d'individus prélevés par unité de temps est proportionnel à la population de sorte que $S(x, h) = hx$. Des stratégies plus sophistiquées comme celle de prélèvement périodique, etc., sont aussi étudiées. Dans ce travail, nous choisissons la première stratégie.

L'étude d'une dynamique des populations dont la récolte est permise est un sujet de bioéconomie mathématique ([5], [17], [40]), rattaché au chapitre de la gestion optimale des ressources renouvelables (voir Clark dans [10]). L'exploitation des ressources biologiques et la récolte des espèces en interaction sont notamment

appliquées en pêche, foresterie et en gestion de la faune ([5], [17], [40]). Les problèmes liés à l'exploitation des systèmes multi-espèces sont intéressants et difficiles en théorie et en pratique [17]. Selon Clark dans [10], la gestion des ressources renouvelables est basée sur la notion de *rendement soutenu maximal* (communément abrégé par MSY, c'est-à-dire *maximum sustainable yield*) des récoltes : le MSY (encore interprété comme rendement maximal permettant la survie) a la propriété que, si la récolte d'une espèce excède son MSY (c'est-à-dire si elle est en surexploitation [40]), alors cette espèce sera conduite à l'extinction.

Qualitativement, l'étude d'un modèle prédateur-proie avec récolte de proies, ou de prédateurs, ou des deux, est plus raffinée que celle d'un modèle prédateur-proie. En effet : une récolte de proies ou de prédateurs est une intervention extérieure sur le modèle ; sa dynamique est plus riche et complexe que celle du sous-modèle sans récolte de ces deux espèces animales ; du point de vue des ressources renouvelables, on doit déterminer le MSY de la récolte (lorsque celle-ci est permise) de chaque population afin de donner la condition pour que chaque espèce soit écologiquement préservée comme c'est par exemple le cas dans ([5], [17], [40]).

Le système que nous étudions, appelé dans la littérature *modèle de Gause généralisé avec récolte de proies* ([23], [19], [21], [39], [3]), est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où x représente la population de proies, y représente la population de prédateurs, d est le taux de mortalité naturelle des prédateurs, la fonction $g(x) = rx(1 - \frac{x}{k})$ représente le comportement de la population des proies en l'absence des prédateurs : r est le taux de croissance de la population de proies x en l'absence de prédateurs et lorsque x est petite, alors que k est la capacité de l'environnement à supporter les proies. La fonction

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1} \quad (0.0.2)$$

(où m et a sont des constantes positives, et b est une constante quelconque), appelée dans la littérature *fonction de réponse de Holling de type III généralisée* [4], représente une des *fonctions de réponse* possibles des prédateurs relativement

au nombre de proies : elle rend compte de la consommation de proies faite par les prédateurs. h_1 est le terme de récolte des proies (qui est ici un nombre fixe d'individus prélevés par unité de temps de la population de proies). c est le ratio de la quantité de proies consommées par les prédateurs sur celle de prédateurs nés. Le système précédent est, dans la littérature ([34],[5]), un cas particulier du modèle de Rosenzweig-MacArthur avec récolte de proies.

Une fonction de réponse de *Holling de type III* reflète à la fois une très faible prédation lorsque le nombre de proies est petit ($p'(0) = 0$) et un avantage du groupe de proies lorsque leur nombre est élevé ($p(x)$ tend vers $\frac{m}{a}$ quand x tend vers l'infini) : on pourrait appeler ce phénomène la *défense de groupe* comme c'est le cas dans [42]. Il existe plusieurs types de fonctions de réponse de Holling de type III généralisées suivant que l'avantage du groupe des proies est faible ou fort (voir les figures 0.1 et 0.2) : Si b est négatif, l'avantage du groupe de proies est plus fort que si b est positif. Nous n'étudierons que le cas où $b \geq 0$. Récemment, dans le même esprit mais sans récolte de proies ni de prédateurs, Broer-Naudot-Roussarie-Saleh (voir [7]) et Coutu-Lamontagne-Rousseau (voir [29]) ont étudié respectivement un système prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling de type IV ($p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1}$) et un système prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling de type III (avec $b > 0$ ou $b < 0$). On note que, pour la fonction de Holling de type IV, la réponse des prédateurs tend vers zéro quand la population de proies tend vers l'infini ; ce qui traduit un très grand avantage de groupe pour les proies.

En termes de bifurcations, il est intéressant de déterminer comment le terme de récolte de proies affecte le sous-système $(0.0.1)|_{h_1=0}$ où $p(x)$ est donné en (0.0.2).

Une des motivations principales pour étudier un modèle prédateur-proie est que le comportement de celui-ci soit le plus représentatif possible de l'évolution réelle des différentes populations en interaction face à des interventions extérieures [4]. C'est pour cela qu'on raffine de plus en plus les systèmes prédateur-proie déjà étudiés ; d'où l'existence de différentes fonctions de réponse de Holling [26] et de modèles prédateur-proie avec récolte de proies, ou de prédateurs, ou des deux. Le tableau suivant (voir le tableau 0.1) donne l'état actuel d'étude des systèmes

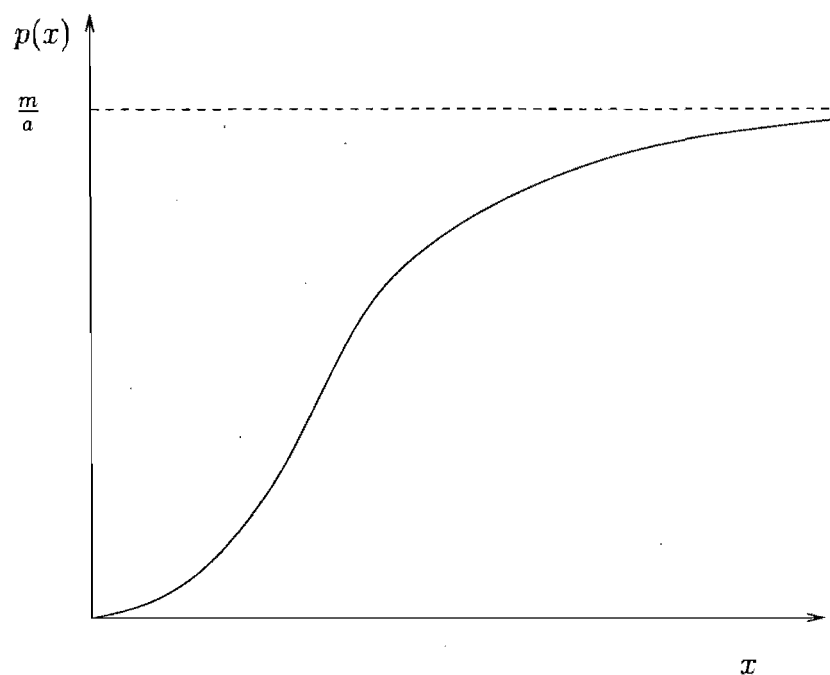


FIG. 0.1. La fonction de Holling de type III généralisée lorsque $b \geq 0$

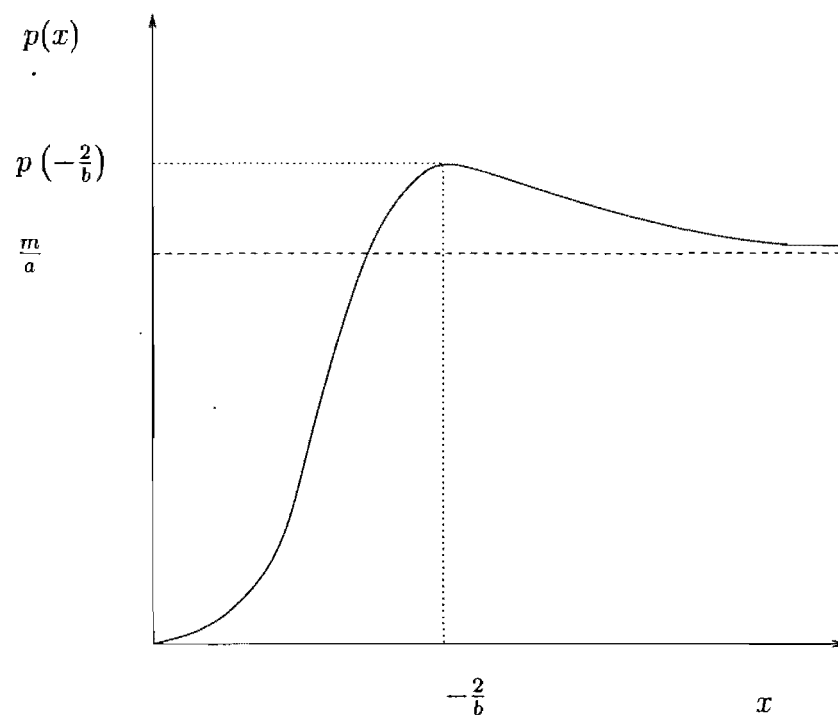


FIG. 0.2. La fonction de Holling de type III généralisée lorsque $b < 0$

prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling et/sans récolte de proie.

Notre but principal est de faire une analyse systématique des bifurcations du

Holling de type	Fonction	Condition	Référence
I	$p(x) = ax$	$h_1 = 0$	[4]
		$h_1 \neq 0$	([17], [18])
II	$p(x) = \frac{bx}{ax+1}$	$h_1 = 0$	[4]
		$h_1 \neq 0$	([8], [9])
III	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+1}$	$h_1 = 0$	[20]
		$h_1 \neq 0$	cette thèse
III généralisée	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$	$h_1 = 0, b \in \mathbf{R}$	[29]
		$h_1 \neq 0, b \geq 0$	cette thèse
IV	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+1}$	$h_1 = 0$	[41]
		$h_1 \neq 0$???
IV généralisée	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1}$	$h_1 = 0$	([7], [42], [21], [39])
		$h_1 \neq 0$???

TAB. 0.1. État d'étude actuel des systèmes prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling et/sans récolte de proies

modèle (0.0.1) où $p(x)$ est donné en (0.0.2) et, via un diagramme de bifurcations global (partiellement conjecturé), d'en déduire une interprétation biologique des comportements possibles en fonction des paramètres et des conditions initiales.

Nous étudions donc le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{mx^2y}{ax^2+bx+1} - h_1, \\ \dot{y} = y(-d + \frac{cmx^2}{ax^2+bx+1}), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

à 8 paramètres : r, k, m, a, c, d, h_1 sont strictement positifs et $b \geq 0$.

GÉNÉRALITÉS

Dans cette partie, nous simplifions le modèle que nous étudions en réduisant le nombre de ses paramètres. Pour le système simplifié, nous établirons un résultat sur le comportement de ses trajectoires à l'infini. C'est après que nous présenterons quelques généralités (théorèmes, méthodes et notions) qui nous seront d'une très grande utilité dans la suite du travail.

0.0.1. Simplification du système

On réduit le nombre de paramètres de notre modèle à 5 paramètres réels. En effet, considérons la transformation linéaire

$$X = \frac{1}{k}x, \quad Y = \frac{1}{ck}y \quad (0.0.4)$$

et le changement d'échelle sur le temps

$$T = cmk^2t. \quad (0.0.5)$$

Alors, on a :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \frac{r}{cmk^2}X(1-X) - \frac{X^2Y}{ak^2X^2+bkX+1} - \frac{h_1}{cmk^3}, \\ \frac{dY}{dT} = Y\left(\frac{-d}{cmk^2} + \frac{X^2}{ak^2X^2+bkX+1}\right). \end{cases} \quad (0.0.6)$$

Finalement, pour simplifier nos notations, posons

$$\alpha = ak^2, \quad \beta = bk, \quad (0.0.7)$$

$$\rho = \frac{r}{cmk^2}, \quad (0.0.8)$$

$$\delta = \frac{d}{cmk^2}, \quad \lambda = \frac{h_1}{cmk^3}. \quad (0.0.9)$$

Ainsi, ce changement d'échelle sur les paramètres revient à poser $c = k = m = 1$ dans le système initial. Donc, en posant

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}, \quad (0.0.10)$$

le système simplifié que nous considérerons est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (0.0.11)$$

à 5 paramètres réels : $\rho, \alpha, \delta, \lambda$ sont strictement positifs et $\beta \geq 0$.

Remarque 0.0.1. *Tous nos calculs sont faits à l'aide du logiciel MAPLE. Le paramètre $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$ est important car, comme on pourra le vérifier plus tard, toutes les expressions des surfaces de bifurcations sont homogènes en λ et ρ .*

0.0.2. Comportement des trajectoires à l'infini

Dans cette sous-section, nous montrons que toutes les trajectoires de (0.0.11) demeurant dans le premier quadrant sont attirées vers une région finie du plan.

Théorème 0.0.1. *Pour tous $\alpha, \beta, \delta, \rho, \lambda$ définis dans (0.0.11), il existe un rectangle $R = [0, 1] \times [0, l]$, où $l = l(\alpha, \beta, \delta, \rho, \lambda)$, dans lequel toute trajectoire qui reste toujours dans le premier quadrant vient se terminer.*

Démonstration. En effet, en s'inspirant de [29], on a pour $x > 1$ que $\dot{x} < 0$; alors toutes les trajectoires entrent dans la région « $x \leq 1$ ». Si $\delta > \frac{1}{\alpha}$, alors $\dot{y} < 0$ et, quel que soit $l > 0$, toutes les trajectoires entrent dans la région « $y \leq l$ ». Sinon, $\dot{y} < 0$ si, et seulement si $p(x) < \delta$, c'est-à-dire $x \in [0, x_p(\alpha, \beta, \delta)]$. Soit $\epsilon \in]0, x_p(\alpha, \beta, \delta)[$ suffisamment petit, alors $\dot{y} < 0$ dans la bande « $x \in [0, \epsilon]$ ». En plus, dans la région « $x \in [0, 1]$ », nous avons que $\dot{x} < 0$ si, et seulement si $y > \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)}$. Soit

$$N := \max_{x \in [\epsilon, 1]} \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)}.$$

La pente du champ est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta - p(x)}{p(x) - \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{y}}. \quad (0.0.12)$$

Or, on a que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{\delta - p(x)}{p(x)} \text{ est bornée sur } [\epsilon, 1]. \quad (0.0.13)$$

Il existe donc au moins une trajectoire $(x(t), y(t)), t \in [0, T]$ telle que $x(0) = 1$, $x(T) = \epsilon$ et, pour tout t , $y(t) \geq N$: soit $(x_1(t), y_1(t)), t \in [0, T_1]$ la plus basse trajectoire vérifiant cette propriété. Posons

$$l := \max_{t \in [0, T_1]} y_1(t).$$

Par (0.0.13), il vient que les trajectoires ne peuvent pas aller à l'infini dans la demi-bande « $x \in [\epsilon, 1], y > N$ » et doivent donc entrer dans la bande « $x \in [0, \epsilon]$ » (où $\dot{y} < 0$). Dès qu'une trajectoire a pénétré cette bande, soit elle y reste pendant que y est décroissant, soit elle entre dans la bande « $x \in [\epsilon, 1]$ » à une hauteur $y < N$. Dans les deux cas, elle est attirée et reste pour toujours en dessous de la hauteur $y = l$. \square

0.0.3. Quelques rappels utiles

0.0.3.1. Théorème de Chochitaïchvili

Théorème 0.0.2 (Théorème de Chochitaïchvili [1]). *Soit $\dot{X} = v(X)$ un champ de vecteurs de classe C^r (où $r \geq 2$) sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ dont un point singulier est X_0 . On suppose que*

$$\mathbf{Jacv}(X_0) = \begin{pmatrix} B^0 & & \\ & B^- & \\ & & B^+ \end{pmatrix} \quad (0.0.14)$$

où B^0 (resp. B^- , B^+) est une matrice carrée dont les valeurs propres ont leur partie réelle nulle (resp. négative, positive). Notons n_0 (resp. n_- , n_+) le nombre de valeurs propres de B^0 (resp. B^- , B^+) : $n_0 + n_- + n_+ = n$. Ainsi, pour $X = (x, y, z)$

où $(x \in \mathbf{R}^{n_0}, y \in \mathbf{R}^{n^-}$ et $z \in \mathbf{R}^{n^+})$, le champ de vecteurs a la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = B^0 x + o(|x, y, z|) := B^0 x + f(x, y, z), \\ \dot{y} = B^- y + o(|x, y, z|), \\ \dot{z} = B^+ z + o(|x, y, z|). \end{cases} \quad (0.0.15)$$

Alors, il existe un voisinage de X_0 sur lequel la variété centre (variété invariante tangente au sous-espace propre, E^c) est donnée par

$$W^c : (y, z) = (k_1(x), k_2(x)) \quad (0.0.16)$$

(où k_1 et k_2 sont de classe C^{r-1}) et le champ de vecteurs est topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x} = B^0 x + f(x, k_1(x), k_2(x)), \\ \dot{y} = B^- y, \\ \dot{z} = B^+ z. \end{cases} \quad (0.0.17)$$

Remarque 0.0.2. Si le champ de vecteurs du théorème 0.0.2 est analytique, alors la variété centre est (en général) seulement de classe C^r .

0.0.3.2. Méthode de Melnikov ([30], [31])

Cette méthode est utilisée pour approximer le lieu des paramètres pour lesquels une perturbation d'un système Hamiltonien a une boucle hétéroclinique (ou homoclinique) : pour chaque boucle fermée du système Hamiltonien, la méthode donne approximativement le lieu des paramètres pour lesquels cette boucle fermée est préservée dans le système perturbé.

Considérons un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y), \end{cases} \quad (0.0.18)$$

et les orbites fermées du système Hamiltonien correspondant (lignes de niveau fermées de H), $\gamma_h : H = h$. Nous voulons savoir quelles orbites fermées γ_h du système non perturbé se déforment dans des orbites fermées γ'_h après la perturbation. Pour ϵ petit, considérons l'application de premier retour de Poincaré P_ϵ sur une section, transversale aux lignes de niveau fermées de H (incluant possiblement

les boucles hétéroclinique ou homoclinique), et paramétrée par la valeur h de H . Les orbites fermées étant les points fixes de l'application de premier retour P_ϵ , on a

$$\begin{aligned} N(h) &:= P_\epsilon(h) - h = \int_{\gamma'_h} dH = \int_{\gamma'_h} \dot{H} dt = \int_{\gamma'_h} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right) dt \\ &= \epsilon \int_{\gamma'_h} \left[f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right] dt. \end{aligned} \quad (0.0.19)$$

En utilisant la formule asymptotique

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\gamma'_h} \left(f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt &= \epsilon \int_{\gamma_h} \left(f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt + o(\epsilon) \\ &= \int_{\gamma_h} (g dx - f dy) + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (0.0.20)$$

il vient que

$$N(h) = \epsilon \int_{\gamma_h} (g dx - f dy) + o(\epsilon). \quad (0.0.21)$$

Donc les zéros de la fonction $N(h)$ sont bien approximés par les zéros de la *fonction de Melnikov*

$$M(h) := \int_{\gamma_h} (g dx - f dy). \quad (0.0.22)$$

0.0.3.3. *Courbes algébriques et facteur intégrant d'un champ de vecteurs polynomial ([36])*

Considérons

$$\begin{cases} \dot{x} = U(x, y) \\ \dot{y} = V(x, y) \end{cases} \quad (0.0.23)$$

un champ de vecteurs polynomial :

(a) Soit $F(x, y)$ un polynôme irréductible de degré n , alors $(C) : F(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique. La courbe algébrique (C) est invariante sous le flot du champ de vecteurs (0.0.23) s'il existe un polynôme $K(x, y)$ tel que

$$\frac{dF}{dt} = K(x, y)F(x, y). \quad (0.0.24)$$

Le polynôme $K(x, y)$ est appelé le *cofacteur* de $F(x, y)$. La *méthode de Darboux* permet de trouver une intégrale première d'un système lorsqu'on a suffisamment

de courbes algébriques invariantes. En effet, on suppose que le champ de vecteurs (0.0.23) a n courbes algébriques invariantes $F_1(x, y) = 0, \dots, F_n(x, y) = 0$ de cofacteurs $K_1(x, y), \dots, K_n(x, y)$, c'est-à-dire

$$DF_i(x, y) = K_i(x, y)F_i(x, y). \quad (0.0.25)$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telles que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i(x, y) = 0. \quad (0.0.26)$$

Alors

$$H(x, y) := \prod_{i=1}^n F_i^{\alpha_i}(x, y) \quad (0.0.27)$$

est une intégrale première (c'est-à-dire que H est constante le long des trajectoires) du système (0.0.23).

(b) Soit O un ouvert de \mathbf{R}^2 , on dit qu'une fonction $S \in C^k(O)$ (avec $k \geq 1$), non identiquement nulle dans O , est un *facteur intégrant* du système (0.0.23) dans O si

$$\frac{\partial(SU)}{\partial x} = -\frac{\partial(SV)}{\partial y}. \quad (0.0.28)$$

0.0.3.4. *Le critère de Descartes*

Le **critère de Descartes** dit que *le nombre de racines strictement positives d'un polynôme P , à coefficients réels, est inférieur ou égal au nombre de changements de signes dans les coefficients de P ordonné; et ces deux nombres ont la même parité.*

Chapitre 1

ÉTUDE DU SYSTÈME LORSQUE $\lambda = 0$

1.1. PRÉSENTATION DU CHAPITRE

Le but de ce chapitre, qui est en fait un rappel de [29], est de donner le diagramme de bifurcation du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$. Il nous servira par la suite lorsque nous voudrions donner le diagramme de bifurcation pour λ petit.

Il s'agit donc d'étudier le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x), \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

lorsque ρ, α, δ sont strictement positifs et $\beta \geq 0$.

1.2. DÉTERMINATION DES POINTS SINGULIERS ET DES DROITES INVARIANTES

Pour tous ρ, α, β et δ définis dans (1.1.1), $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ sont évidemment des points singuliers de (1.1.1). Ils correspondent à deux points d'équilibre pour lesquels on a extinction des prédateurs.

Lorsque $\alpha\delta - 1 < 0$, (1.1.1) a un autre point singulier, $M = (x_0, y_0)$, avec $x_0 > 0$ vérifiant

$$p(x_0) = \delta \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\alpha\delta - 1)x_0^2 + \beta\delta x_0 + \delta = 0. \quad (1.2.1)$$

Il est dans le premier quadrant ouvert si, et seulement si

$$y_0 = \frac{\rho}{\delta} x_0(1 - x_0) > 0 \iff 0 < x_0 < 1. \quad (1.2.2)$$

Le point M n'est pertinent pour notre analyse que lorsque $y_0 \geq 0$.

Lorsque $\alpha\delta - 1 > 0$ (resp. $\alpha\delta - 1 = 0$), on n'a aucun point singulier dans le premier quadrant ouvert car l'équation de (1.2.1) a deux solutions négatives ou à parties réelles négatives (resp. une solution réelle négative).

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont invariantes sous le flot de (1.1.1).

La matrice jacobienne en (x, y) est :

$$\mathbf{Jac}(x, y) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - \frac{xy(\beta x + 2)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} & -p(x) \\ \frac{xy(\beta x + 2)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} & -\delta + p(x) \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

1.3. ÉTUDE DU TYPE DE CHAQUE POINT SINGULIER

1.3.0.4. Étude du point singulier $O = (0, 0)$

On a

$$\mathbf{Jac}(0, 0) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

dont $\rho > 0$ et $-\delta < 0$ sont les deux valeurs propres : $O = (0, 0)$ est donc un point de selle hyperbolique.

1.3.0.5. Étude du point singulier $A = (1, 0)$

En effet,

$$\mathbf{Jac}(1, 0) = \begin{pmatrix} -\rho & -\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \\ 0 & -\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \end{pmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Si $\delta < \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$, alors on a deux valeurs propres $-\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0$ et $-\rho < 0$. Donc, dans ce cas, $A = (1, 0)$ est aussi un point de selle hyperbolique.

Si $\delta > \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$, alors on a deux valeurs propres $-\delta + \frac{1}{\alpha + \beta + 1} < 0$ et $-\rho < 0$. Donc, dans ce cas, $A = (1, 0)$ est un noeud attractif.

Si $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ alors $A = (1, 0)$ devient un point double et la matrice jacobienne

$$\mathbf{Jac}(1, 0) = \begin{pmatrix} -\rho & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a deux valeurs propres $\lambda_1 = -\rho$ et $\lambda_2 = 0$:

Dans la suite, nous allons montrer que $A = (1, 0)$ est un col-noeud attractif si $\delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$.

1.3.0.6. Étude du point singulier $M = (x_0, y_0)$

(1) Signe du déterminant du jacobien

Le déterminant de (1.2.3) en (x_0, y_0) est

$$D := \frac{\rho\delta^2}{x_0^2}(1 - x_0)(\beta x_0 + 2). \quad (1.3.3)$$

Or, par (1.2.1) c'est-à-dire

$$(\alpha\delta - 1)x_0^2 + \beta\delta x_0 + \delta = 0$$

et (1.2.2) c'est-à-dire

$$y_0 = \frac{\rho}{\delta}x_0(1 - x_0) > 0 \iff 0 < x_0 < 1,$$

on aura toujours $D > 0$ si (x_0, y_0) est dans le premier quadrant : $M = (x_0, y_0)$ y est donc un anti-selle (c'est-à-dire un foyer, un noeud, un centre ou un foyer faible).

(2) Trace du jacobien

La trace de (1.2.3) est donnée (en remplaçant $p(x) = \delta$) par

$$\begin{aligned} T(x) &:= \frac{\rho}{x^2}[-2x^3 + (1 + \beta\delta)x^2 + \delta(2 - \beta)x - 2\delta] \\ &= \frac{\delta\rho}{x^2}[-2\alpha x^3 + (\alpha - \beta)x^2 - 1]. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Le point est un foyer ou noeud

$$\begin{cases} \text{attractif quand la trace est } < 0, \\ \text{répulsif quand la trace est } > 0. \end{cases}$$

1.4. BIFURCATION DE COL-NOEUD

Dans cette sous-section, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 1.4.1. *Le point singulier double $A = (1, 0)$ est un col-noeud attractif sur la surface d'équation*

$$(CN_0) : \delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (1.4.1)$$

Démonstration. En ramenant $A = (1, 0)$ à l'origine, par la translation $x_1 = x - 1$, $y_1 = y$ alors (1.1.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\rho x_1^2 - \rho x_1 - (y_1 x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1) f_{\alpha\beta}(x_1), \\ \dot{y}_1 = -\delta y_1 + (y_1 x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1) f_{\alpha\beta}(x_1), \end{cases} \quad (1.4.2)$$

où $f_{\alpha\beta}(x_1) = \frac{1}{\alpha x_1^2 + (2\alpha + \beta)x_1 + (\alpha + \beta + 1)}$.

La matrice jacobienne de (1.4.2), évaluée à l'origine, est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\rho & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -\rho$ et $\lambda_2 = 0$, associées respectivement aux vecteurs propres $V_1 = (1, 0)$ et $V_2 = (-\frac{\delta}{\rho}, 1)$. \mathbf{A} est ainsi diagonalisable, avec comme matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\delta}{\rho} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta}{\rho} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (1.4.4)$$

on a

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

où \hat{x}_1 et \hat{y}_1 sont définies par (1.4.2).

Alors, par (1.4.5), (1.4.2) et (1.4.4), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\rho X - \rho X^2 - \frac{\delta^2(-2\rho\alpha + \delta\beta - \beta\rho - 2 + 2\alpha\delta)XY}{\rho} + \frac{\delta^2(-\delta\beta\rho + \rho - 2\delta + 2\alpha\delta^2 - 2\alpha\delta\rho + \delta^2\beta)Y^2}{\rho^2} + \\ \quad + O(|(X, Y)|^3), \\ \dot{Y} = \frac{\delta}{\rho}(2\alpha\delta^2 + \beta\delta^2 - 2\delta)Y^2 + \delta(-\delta\beta - 2\alpha\delta + 2)XY + O(|(X, Y)|^3). \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Décrivons le flot du système (1.4.6) sur la variété centre près de l'origine. En effet, étant donné que $E^c := \langle V_2 \rangle$ et que la variété centre, W^c , est tangente à E^c en $(0, 0)$ alors, on a que

$$W^c : X = aY^2 + O(|Y|^3). \quad (1.4.7)$$

Or, par le théorème 0.0.2, (1.4.6) est, au voisinage de $(X, Y) = (0, 0)$, topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{X} = -\rho X, \\ \dot{Y} = \frac{\delta}{\rho}(2\alpha\delta^2 + \beta\delta^2 - 2\delta)Y^2 + \delta(-\delta\beta - 2\alpha\delta + 2)XY + O(|(X, Y)|^3), \\ \text{où } X = aY^2 + O(|Y|^3). \end{cases} \quad (1.4.8)$$

Vue la forme de (1.4.8) dans laquelle a n'apparaît pas lorsqu'on tronque le système précédent à l'ordre 2, il est donc inutile de déterminer a . On peut réécrire (1.4.8) comme :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\rho X, \\ \dot{Y} = \frac{\delta}{\rho}(2\alpha\delta^2 + \beta\delta^2 - 2\delta)Y^2 + O(|Y|^3) = -\frac{\beta+2}{\rho(\alpha+\beta+1)^3}Y^2 + O(|Y|^3). \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Donc le point double, $A = (1, 0)$, est un col-noeud attractif sur la surface

$$(CN_0) : \delta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

□

1.5. BIFURCATION DE HOPF

Pour avoir une bifurcation de Hopf, il faut qu'en un point singulier admissible (c'est-à-dire du premier quadrant) la trace soit nulle et le déterminant soit positif.

1.5.1. Ordre de la bifurcation de Hopf

On se rappelle que x_0 et y_0 vérifient

$$p(x_0) = \delta \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\alpha\delta - 1)x_0^2 + \beta\delta x_0 + \delta = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\rho}{\delta}x_0(1-x_0) \quad (1.5.1)$$

à condition que $(\alpha\delta - 1 < 0$ et $0 < x_0 < 1)$.

• On ramène (x_0, y_0) à l'origine par la translation $x = x_1 + x_0, y = y_1 + y_0$. Le système (1.1.1) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho(x_1 + x_0)(1 - x_1 - x_0) - (y_1 + y_0)p(x_1 + x_0), \\ \dot{y}_1 = (y_1 + y_0)[- \delta + P(x_1 + x_0)], \end{cases} \quad (1.5.2)$$

où y_0 et x_0 vérifient (1.2.1) et (1.2.2). La matrice jacobienne du système (1.5.2) devient

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \rho(1 - 2x_0) - y_0 p'(x_0) & -\delta \\ y_0 p'(x_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.3)$$

Puisque $p'(x_0) > 0$, on voit que le déterminant, $\delta y_0 p'(x_0)$, de (1.5.3) est toujours positif : $M = (x_0, y_0)$ est un anti-selle. Ainsi :

• Les conditions pour avoir une bifurcation de Hopf au voisinage de l'origine sont les suivantes :

$$\begin{cases} p(x_0) = \delta, & y_0 = \frac{\rho}{\delta}x_0(1-x_0), \\ y_0 p'(x_0) = \rho(1-2x_0). \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Ce qui implique, en utilisant la deuxième égalité de (1.3.4), que

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1 + \beta x_0^2}{x_0^2(1 - 2x_0)}, \\ 0 < x_0 < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Sous ces conditions, le linéarisé de (1.5.2) a pour matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \rho(1 - 2x_0) & 0 \end{pmatrix}$.

Or, on a :

$$\left[\omega^2 = \delta\rho(1 - 2x_0), \quad p(x_0) = \delta, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1 + \beta x_0^2}{x_0^2(1 - 2x_0)} \right] \implies \left[\rho = \frac{\omega^2(1 - x_0)(\beta x_0 + 2)}{x_0^2(2x_0 - 1)^2} \right]. \quad (1.5.6)$$

Alors, en effectuant le changement de coordonnées

$$\begin{cases} Y = \frac{\delta}{\omega} y_1 \\ X = x_1, \end{cases} \quad (1.5.7)$$

on normalise \mathbf{B} ; autrement dit, par (1.5.7) et (1.5.2), on obtient le système suivant.

$$\begin{cases} \dot{X} = -\omega Y + O(|(X, Y)|^2), \\ \dot{Y} = -\frac{x_0^2 \rho (-1+2x_0)^2 X}{(-1+x_0)(\beta x_0+2)\omega} + O(|(X, Y)|^2). \end{cases} \quad (1.5.8)$$

• Donc, par (1.5.6), le système (1.5.8) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(-\frac{\omega(-1+2x_0)(\beta x_0^2+x_0+1)X^2}{(-1+x_0)^2(\beta x_0+2)x_0^2} - \frac{(-1+2x_0)\omega X}{x_0(-1+x_0)} - \omega \right) Y - \frac{\omega^2(\beta x_0^2+2)X^3}{(-1+x_0)x_0^3(-1+2x_0)} \\ \quad - \frac{\omega^2(x_0^3\beta+3x_0-1)X^2}{x_0^3(-1+2x_0)^2} + O(|(X, Y)|^4), \\ \dot{Y} = \left(\frac{(-1+2x_0)^2(\beta x_0^2+x_0+1)X^2}{(-1+x_0)^3(\beta x_0+2)^2} + \frac{X(-1+2x_0)^2 x_0}{(\beta x_0+2)(-1+x_0)^2} \right) Y + \frac{\omega(\beta x_0^2+2)X^3}{x_0(-1+x_0)^2(\beta x_0+2)} \\ \quad + \frac{\omega(\beta x_0^2+x_0+1)X^2}{\omega(-1+x_0)(\beta x_0+2)} + \omega X + O(|(X, Y)|^4), \end{cases} \quad (1.5.9)$$

qui est de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} := -\omega Y + \sum_{i+j=2}^3 \alpha_{ij} X^i Y^j + O(|(X, Y)|^4), \\ \dot{Y} := \omega X + \sum_{i+j=2}^3 \beta_{ij} X^i Y^j + O(|(X, Y)|^4). \end{cases}$$

On utilise la formule bien connue du premier coefficient de la bifurcation de Hopf (voir, par exemple, dans [24]),

$$L_1 = \frac{1}{8}(3\alpha_{30} + \alpha_{12} + \beta_{21} + 3\beta_{03}) + \frac{1}{8\omega} [\alpha_{11}(\alpha_{20} + \alpha_{02}) - \beta_{11}(\beta_{20} + \beta_{02}) - 2\alpha_{20}\beta_{20} + 2\alpha_{02}\beta_{02}].$$

Donc, par un calcul à l'aide du logiciel MAPLE, le premier coefficient de la bifurcation de Hopf, L_1 , est donné par :

$$L_1 = -\frac{(2\beta^2 x_0^3 + 6\beta x_0^2 + 6 + \beta)\omega^2}{8x_0^3(\beta x_0 + 2)(2x_0 - 1)^2} < 0 \quad (1.5.10)$$

car β, ω sont positifs et, $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ par (1.5.5).

En conséquence :

Théorème 1.5.1. *On a une bifurcation de Hopf d'ordre un ([13], [27]) au voisinage de $M := (x_0, y_0)$: le point $M := (x_0, y_0)$ est un foyer faible d'ordre un*

attractif sur la surface (H_0) et on a naissance d'un cycle limite attractif lorsque (x_0, y_0) est répulsif.

1.5.2. Détermination de la surface de bifurcation de Hopf

L'objectif de cette sous-section est de prouver le :

Théorème 1.5.2. Une section de la surface de bifurcation de Hopf est définie par la courbe (H_0) de la figure 1.1 qui est une branche de la courbe algébrique d'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ (où $R_\beta(\alpha, \delta)$ est défini au (1.5.15)).

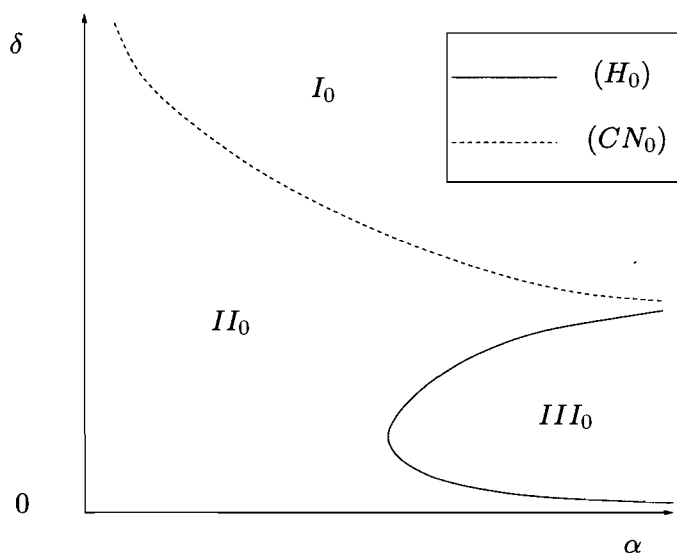


FIG. 1.1. Diagramme de bifurcations du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$

Avant de le démontrer, faisant d'abord quelques propositions. Ayant toujours que $D > 0$, il y aura bifurcation de Hopf quand $T(x_0) = 0$ où T est donnée en (1.3.4) :

i) On se rappelle (voir (1.2.1)), en laissant tomber les indices, que x et y vérifient

$$p(x) = \delta \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{\rho}{\delta}x(1-x) \quad (1.5.11)$$

à condition que

$$(\alpha\delta - 1 < 0 \quad \text{et} \quad 0 < x < 1). \quad (1.5.12)$$

ii) On montre que

$$(1.5.12) \iff \delta < \frac{1}{\alpha + \beta + 1}. \quad (1.5.13)$$

- Posons

$$f(x) := (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta \quad \text{et} \quad g(x) := \frac{x^2 T}{\rho}, \quad (1.5.14)$$

avec T défini en (1.3.4).

- Considérons, $Res(f, g)$, le *résultant* de f et g (voir, par exemple, dans [22]).

Alors

$$\begin{aligned} R_\beta(\alpha, \delta) &:= \frac{1}{\delta^2} Res(f, g) \\ &= (-\beta^2\alpha^2 + 4\alpha^2 - \beta^2\alpha + 4\alpha^2\beta + 4\alpha^3 - \beta^3\alpha)\delta^3 \\ &\quad + (\beta^2\alpha - \beta^2 - 8\alpha^2 - \beta^3)\delta^2 + (5\alpha - 2\beta)\delta - 1. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Il est ainsi un polynôme de degré 3 en δ , à coefficients polynomiaux en β et α .

Soit $P_\beta(\alpha)$, le discriminant de $R_\beta(\alpha, \delta)$ par rapport à δ , alors

$$\begin{aligned} P_\beta(\alpha) &= S_\beta(\alpha)Q_\beta(\alpha) \\ &:= 4 \left((-2 + \beta)\alpha - \beta^2 - \beta^3 \right)^2 \left[(\alpha - \beta)^3 - 27\alpha^2 \right], \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

où $S_\beta(\alpha)$ et $Q_\beta(\alpha)$ sont des polynômes en α , à coefficients polynomiaux en β .

Proposition 1.5.1. *Pour β fixé, le graphe de la fonction $P_\beta(\alpha)$ est donné à la figure 1.2 où α^* est la racine de Q_β , α_0 est la racine de S_β et $\beta^* \in]3, \frac{7}{2}[$ est tel que $Q_{\beta^*}(\alpha_0) = 0$.*

Démonstration. En effet, de ce qui précède, on a :

$$S_\beta(\alpha_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{\beta^2 + \beta^3}{\beta - 2} > 0 \quad \text{pour} \quad \beta > 2 \quad (1.5.17)$$

et

$$\text{discriminant}(Q_\beta(\alpha)) = -19683\beta^3(\beta + 4) < 0 : \quad (1.5.18)$$

pour β fixé, $Q_\beta(\alpha)$ a donc une seule racine réelle en α . Or, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_\beta(\alpha) = -\beta^3 < 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Q_\beta(\alpha) = +\infty$ et $Q_\beta(\alpha)$ est continue. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a que

$$\exists \alpha^* > 0 \quad \text{telle que} \quad Q_\beta(\alpha^*) = 0. \quad (1.5.19)$$

Donc, par (1.5.18) et (1.5.19), $Q_\beta(\alpha)$ a une seule racine, $\alpha^* > 0$, telle que $Q_\beta(\alpha) < 0$ dans $]0, \alpha^*[$ et $Q_\beta(\alpha) > 0$ dans $]\alpha^*, +\infty[$. On peut remarquer que $Q_\beta(\alpha_0) = 0 \Leftrightarrow$

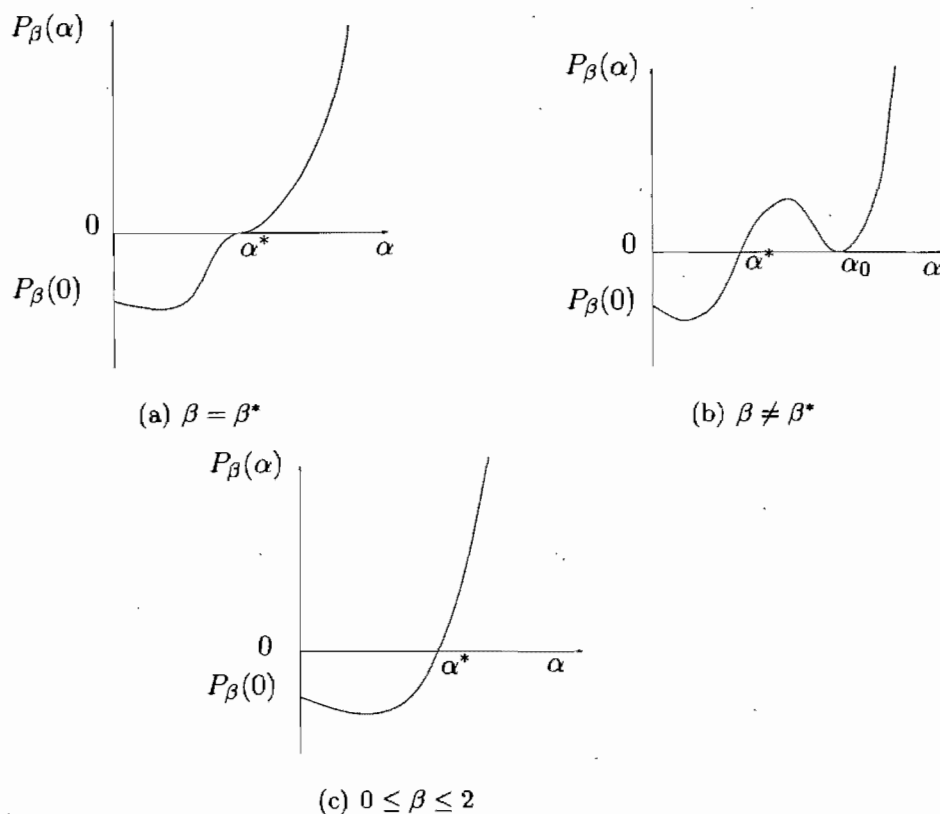


FIG. 1.2. La fonction $P_\beta(\alpha)$ lorsque β est fixé.

$\beta = \beta^* \in]3, \frac{7}{2}[$ et $Q_\beta(\alpha_0) > 0 \Leftrightarrow \beta \neq \beta^*$; d'où, par la phrase précédente, $\alpha_0 > \alpha^*$ lorsque β fixé est dans $]2, +\infty[$ et $\beta \neq \beta^*$. Conséquemment on a la figure 1.2. \square

Proposition 1.5.2. *Pour β fixé tel que $\beta > \beta^*$ ou $\beta = \beta^*$ ou $2 < \beta < \beta^*$ ou $0 \leq \beta \leq 2$, la courbe d'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ est donnée à la figure 1.3.*

Démonstration. 1^{er} cas : β fixé dans $]2, +\infty[$ et $\beta \neq \beta^*$ (voir les figures 1.3-(a) et 1.3-(c)).

- Pour $\alpha = \alpha_0$ (resp. $\alpha = \alpha^*$) alors, on a que $P_\beta(\alpha) = 0$; d'où $R_\beta(\alpha, \delta)$ a une racine double $\delta_0 = f_1(\alpha_0) = f_3(\alpha_0)$ si $\beta > \beta^*$ est fixé ou $\delta_0 = f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0)$ si $2 < \beta < \beta^*$ est fixé, et une racine simple $\delta_1 = f_2(\alpha_0)$ si $\beta > \beta^*$ est fixé ou $\delta_1 = f_3(\alpha_0)$ si $2 < \beta < \beta^*$ est fixé (resp. une racine double, $\delta_2 = f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$ et une racine simple $\delta_3 = f_1(\alpha^*)$).

- Pour $\alpha \in]0, \alpha^*[$, alors $P_\beta(\alpha) < 0$; ainsi $R_\beta(\alpha, \delta)$ a une seule racine réelle, $\delta_4 = f_1(\alpha)$, pour β fixé; ce qui correspond à un graphe de fonction solution de

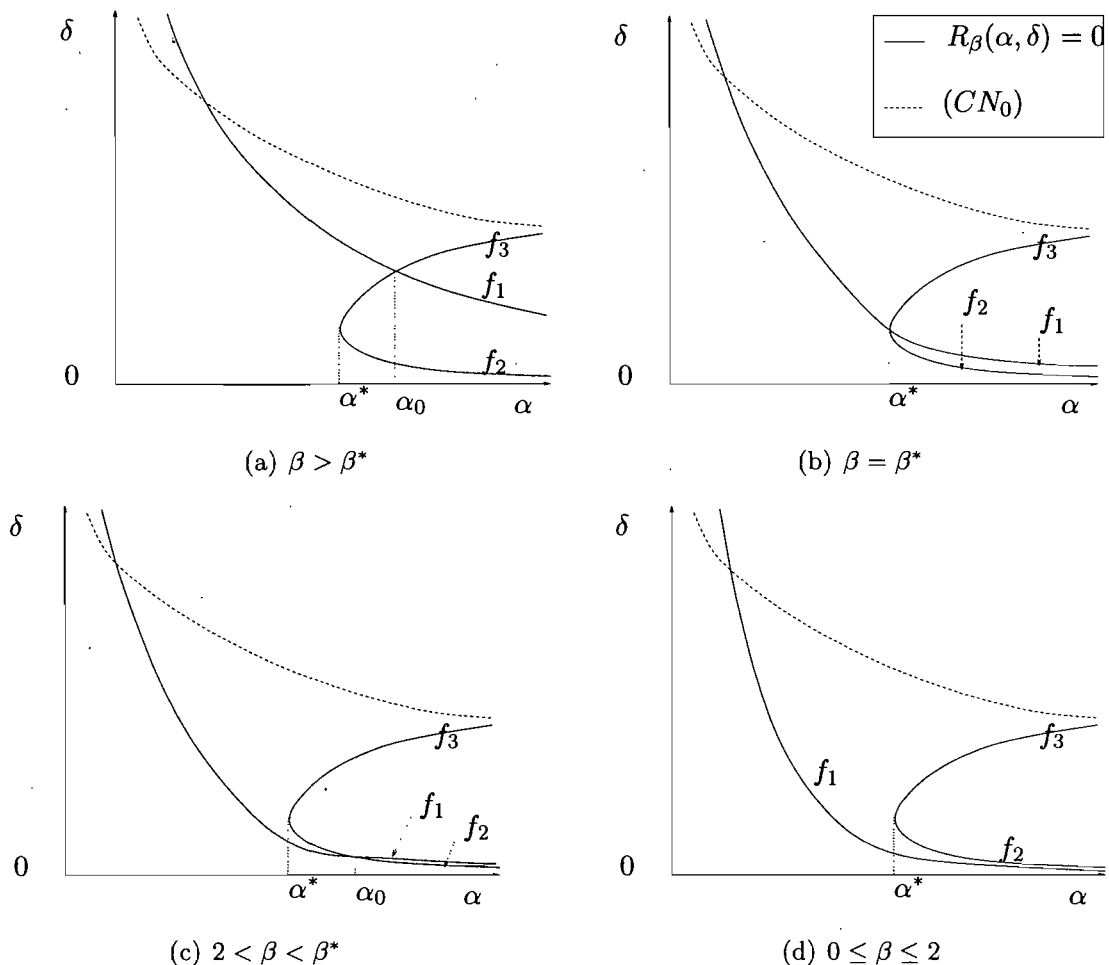


FIG. 1.3. Courbe d'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ lorsque β est fixé.

l'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ pour β fixé.

- Pour $\alpha \in]\alpha^*, \alpha_0[\cup]\alpha_0, +\infty[$, on a que $P_\beta(\alpha) > 0$; ainsi $R_\beta(\alpha, \delta)$ a trois racines réelles, $\delta_5 = f_1(\alpha)$, $\delta_6 = f_2(\alpha)$ et $\delta_7 = f_3(\alpha)$ pour β fixé; ce qui correspond à 3 graphes de fonctions solutions de l'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ pour β fixé.

2^{ème} cas : β fixé dans $[0, 2]$ ou $\beta = \beta^$ (voir les figures 1.3-(b) et 1.3-(d)).*

Dans ce cas, α_0 n'est pas admissible. Alors :

- Pour $\alpha = \alpha^*$, on a $P_\beta(\alpha) = 0$; d'où, $R_\beta(\alpha, \delta)$ a une racine double, $\delta_8 = f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$ et une racine simple $\delta_9 = f_1(\alpha^*)$ si β est fixé dans $[0, 2]$, puis une racine triple, $\delta_{10} = f_1(\alpha^*) = f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$ si $\beta = \beta^*$.
- Pour $\alpha \in]0, \alpha^*[$, on a $P_\beta(\alpha) < 0$; d'où $R_\beta(\alpha, \delta)$ a une racine réelle, $\delta_{11} = n_\beta(\alpha)$ pour β fixé; ce qui correspond graphiquement à un seul graphe de fonction solution de l'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ pour β fixé.

• Pour $\alpha \in]\alpha^*, +\infty[$, on a que $P_\beta(\alpha) > 0$; d'où $R_\beta(\alpha, \delta)$ a trois racines réelles, $\delta_{12} = f_1(\alpha)$, $\delta_{13} = f_2(\alpha)$ et $\delta_{14} = f_3(\alpha)$ pour β fixé; ce qui correspond à 3 graphes de fonctions solutions de l'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ pour β fixé. \square

Il reste entendu que, lorsqu'on regarde la portion de $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$ correspondant à la bifurcation de Hopf, on ne considère que les δ_i telles que $0 < \delta_i < \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ $\forall i = 0, 1, \dots, 14$ comme l'indique si bien l'équivalence (1.5.13).

De ce qui précède, on a montré que : pour β fixé et pour tout point, (α, δ) , de la courbe d'équation $R_\beta(\alpha, \delta) = 0$, il existe un point, $M = (x_0, y_0)$, où y_0 vérifie (1.5.11), tel que $f(x_0) = 0$ et $g(x_0) = 0$ (c'est-à-dire que la trace s'annule au point singulier défini par (1.2.1)). Mais, encore faut-il que $M = (x_0, y_0)$ soit un point du premier quadrant et donc que $0 < x_0 < 1$, puisque l'on a toujours $D > 0$ lorsque $0 < x < 1$. On aura donc une bifurcation de Hopf en $M = (x_0, y_0)$ pour les valeurs de (α, β, δ) considérées.

Idées de la preuve du théorème 1.5.2. En effet, par la proposition 1.5.2 et pour $\beta := \beta_0$ fixé, nous avons plusieurs graphes de fonctions solutions de l'équation $R_{\beta_0}(\alpha, \delta) = 0$: mais, quel graphe concerne un point du premier quadrant ? Un test numérique nous a permis de constater qu'il existe un graphe de fonction solution de l'équation $R_{\beta_0}(\alpha, \delta) = 0$, ne concernant pas un point du premier quadrant. Il faut donc l'éliminer en procédant, par exemple, comme suit :

$R_{\beta_0}(\alpha, \delta)$ étant un polynôme de degré 3 en δ , à coefficients polynomiaux en β_0 et α , dont la courbe d'équation $R_{\beta_0}(\alpha, \delta) = 0$ est constituée des graphes de 3 fonctions définies respectivement par $\delta = f_1(\alpha)$, $\delta = f_2(\alpha)$, $\delta = f_3(\alpha)$, où f_1 , f_2 et f_3 sont trois applications continues positives définies par $f_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$; $f_2, f_3 : (\alpha^*, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ (voir la figure 1.3) :

a) Pour $\beta^* < \beta_0$, on a $f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$, $f_1(\alpha_0) = f_3(\alpha_0)$, $f_2 < f_3$ dans (α^*, α_0) et $f_2 < f_1 < f_3$ dans $(\alpha_0, +\infty)$.

b) Pour $\beta_0 = \beta^*$, on a $f_1(\alpha^*) = f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$ et $f_2 < f_1 < f_3$ dans $(\alpha^*, +\infty)$.

c) Pour $\beta^* > \beta_0 > 2$, on a $f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$, $f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0)$, $f_1 < f_2 < f_3$ dans (α^*, α_0) et $f_2 < f_1 < f_3$ dans $(\alpha_0, +\infty)$.

d) Pour $\beta_0 \in [0, 2]$, on a $f_2(\alpha^*) = f_3(\alpha^*)$ et $f_1 < f_2 < f_3$ dans $(\alpha^*, +\infty)$.

Nous allons montrer qu'on peut éliminer la branche « $\delta = f_1(\alpha)$ » parce qu'elle correspond à des points singuliers non admissibles. Posons $I := (0, +\infty)$ le domaine de définition de f_1 . Soit

$$E := \{\alpha \in I \text{ tel que } (\delta = f_1(\alpha), p(x) = \delta, T(x) = 0) \Rightarrow (x < 0 \text{ ou } x \geq 1)\}. \quad (1.5.20)$$

i) $E \neq \emptyset$ car, par (1.5.11) et (1.5.13) et pour $\beta := \beta_0$ fixé, il contient l'abscisse du point d'intersection de (CN_0) et $R_{\beta_0}(\alpha, \delta) = 0$ dans le premier quadrant.

ii) E est un ouvert de I par le théorème des fonctions implicites.

iii) E est fermé dans I par continuité de f_1 , P et de T .

iv) $I := (0, +\infty)$ est connexe comme intervalle de \mathbf{R}

Par i), ii), iii), et iv), on a, nécessairement, que $E = I$; ce qui nous permet d'éliminer le graphe de fonction solution définie par $\delta = f_1(\alpha)$ car son domaine de définition (c'est-à-dire celui de f_1) est égal à E .

De même, en définissant

$$F := \{\alpha \in [\alpha^*, +\infty[\text{ tel que } [(\delta = f_2(\alpha) \text{ ou } \delta = f_3(\alpha)), p(x) = \delta, T(x) = 0] \Rightarrow x \in]0, 1[$$

alors, en procédant comme précédemment, on montre que $F = [\alpha^*, +\infty[$:= domaine de définition de f_2 et de f_3 .

Nous pouvons ainsi conserver (sous l'équivalence (1.5.13) la réunion, (H_0) , des deux graphes de fonctions solutions (de l'équation $R_{\beta_0}(\alpha, \delta) = 0$) définies par $\delta = f_2(\alpha)$ et $\delta = f_3(\alpha)$ comme section de la surface de bifurcation de Hopf. \square

1.6. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS DU SYSTÈME (1.1.1)

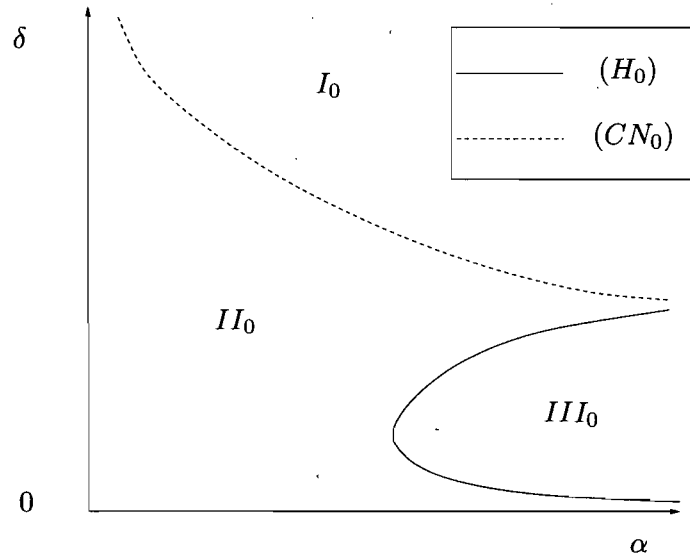
On peut donc résumer ce qui précède par le tableau et le théorème suivants :

Théorème 1.6.1. *Le diagramme de bifurcation du système (1.1.1) est donné à la figure 1.4.*

Lorsque λ est petit, le système (0.0.11) est une perturbation du système (1.1.1). Le diagramme de bifurcation du système (1.1.1) nous permettra donc de comprendre, au dernier chapitre, celui du système (0.0.11) pour λ petit (voir la figure 5.10).

Point singulier	zone	type	bifurcation
$(0, 0)$	partout	col hyperbolique	aucune
$(1, 0)$	$\delta < \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	col hyperbolique	aucune
	$\delta = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	col-noeud attractif	<i>de col-noeud</i>
	$\delta > \frac{1}{\alpha+\beta+1}$	noeud attractif	aucune
(x_0, y_0) où $0 < x_0 < 1$	à gauche de (H_0)	(noeud/foyer) attractif	aucune
	sur (H_0)	foyer faible attractif	<i>de Hopf d'ordre un</i>
	à droite de (H_0)	(noeud/foyer) répulsif	aucune

TAB. 1.1. Types et lieux des bifurcations des points singuliers du système (1.1.1)



(a) Diagramme de bifurcation du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$

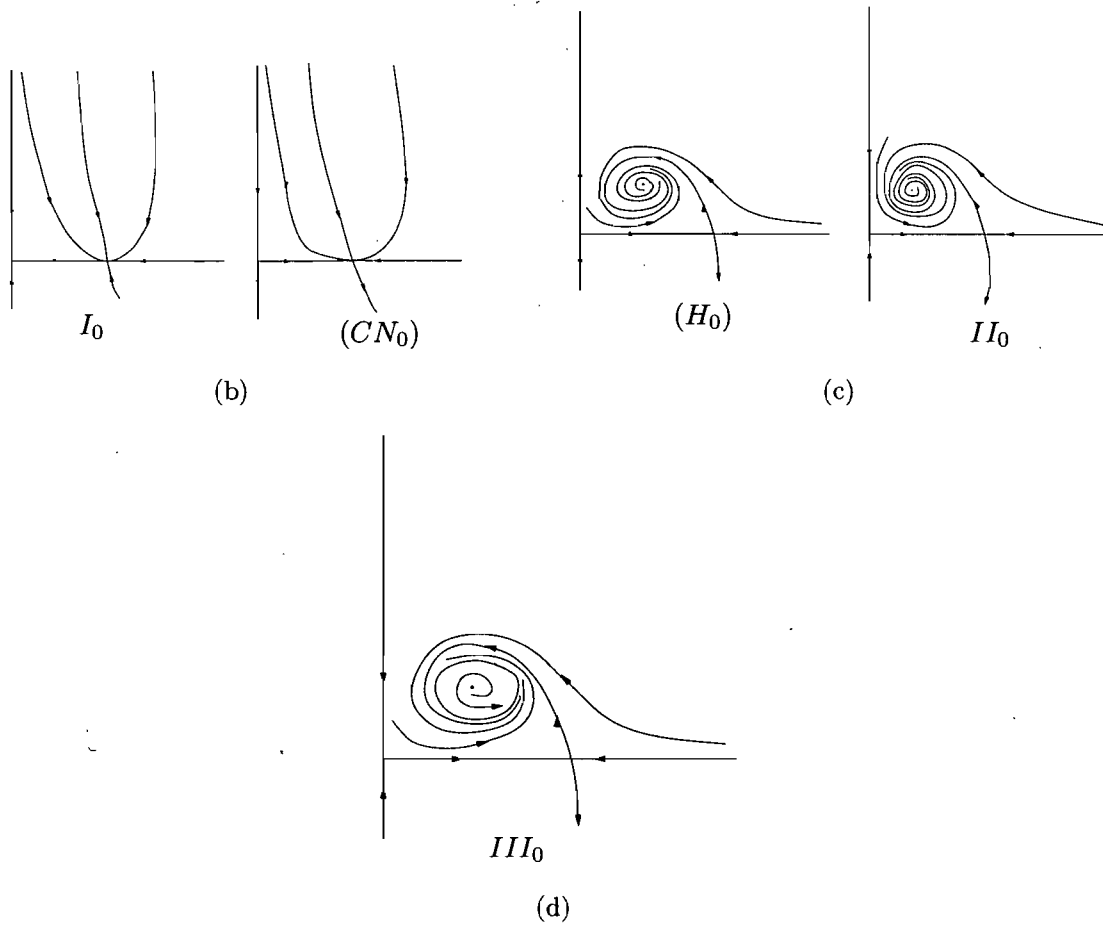


FIG. 1.4. Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$.

Chapitre 2

ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DU SYSTÈME

Dans ce chapitre nous déterminons pour le système (0.0.11), suivant les valeurs des paramètres, le nombre de points singuliers et leur type.

2.1. DÉTERMINATION DES POINTS SINGULIERS

Commençons par la petite remarque suivante.

Remarque 2.1.1. *La droite d'équation $y = 0$ reste invariante sous le flot du système (0.0.11) alors que l'axe des ordonnées n'est plus invariante dès que $\lambda \neq 0$.*

Les points singuliers de (0.0.11) sont les points de coordonnées (x_0, y_0) , solutions du système d'équations d'inconnues (x, y)

$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda = 0, \\ y(-\delta + p(x)) = 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

telles que $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$.

De la deuxième équation de (2.1.1), on a $y = 0$ ou $p(x) = \delta$. Alors :

(1) Pour $y = 0$, la première équation de (2.1.1) donne :

$$\rho x^2 - \rho x + \lambda = 0 \quad (2.1.2)$$

dont le discriminant est $\Delta_1 := \rho(\rho - 4\lambda)$. Ainsi :

- Lorsque $\rho < 4\lambda$, on n'a pas de point singulier sur $y = 0$.
- Lorsque $\rho = 4\lambda$, alors $(\frac{1}{2}, 0)$ est un point singulier double.

- Lorsque $\rho > 4\lambda$, alors (2.1.2) a deux solutions x_{01} et x_{02} telles que :
 $x_{01}x_{02} = \frac{\lambda}{\rho}$, $x_{01} + x_{02} = 1$,

$$x_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}, x_{02} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}. \quad (2.1.3)$$

Ainsi, avons-nous $(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$ comme points singuliers.

- (2) Pour $p(x) = \delta$, on cherche $x_0 \geq 0$ tel que $p(x_0) = \delta$ et, par la première équation de (2.1.1),

$$y_0 = \frac{1}{\delta}[\rho x_0(1 - x_0) - \lambda]. \quad (2.1.4)$$

Or,

$$p(x) = \delta \Leftrightarrow (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta = 0. \quad (2.1.5)$$

Alors :

- a) Si $\alpha\delta - 1 = 0$, alors la seule solution réelle de (2.1.5) est $x_{01} = \frac{-1}{\beta} < 0$.
b) Si $\alpha\delta - 1 \neq 0$, alors le discriminant de (2.1.5) est

$$\Delta_2 := (\beta\delta)^2 - 4\delta(\alpha\delta - 1) :$$

b-1) Si $\alpha\delta - 1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$ (resp. $\Delta_2 < 0$) alors (2.1.5) a deux solutions dont le produit est $\frac{\delta}{\alpha\delta - 1} > 0$ et la somme est $-\frac{\beta\delta}{\alpha\delta - 1} < 0$ (resp. (2.1.5) n'a pas de solution) : donc, il n'y a pas de point singulier admissible lorsque $\alpha\delta - 1 > 0$.

b-2) Si $\alpha\delta - 1 < 0$, alors $\Delta_2 > 0$ car $\delta(\alpha\delta - 1) < 0$. Ainsi, le produit des solutions de (2.1.5) est négatif (c'est-à-dire des solutions de signes contraires) dont la positive est

$$x_0 = \frac{\beta\delta + \sqrt{\delta[\delta(\beta^2 - 4\alpha) + 4]}}{-2(\alpha\delta - 1)}. \quad (2.1.6)$$

Donc, on obtient au plus un point singulier (x_0, y_0) où x_0 , définie par $p(x_0) = \delta$, vérifie (2.1.6). Or y_0 , dont on a besoin qu'il soit positif, est défini par (2.1.4) qui, justement, montre que

le signe de y_0 est exactement celui de $-\rho x_0^2 + \rho x_0 - \lambda$ dont le discriminant

est $\Delta_1 := \rho(\rho - 4\lambda)$.

Conséquemment, pour

$$\alpha\delta - 1 < 0 :$$

- si $\rho < 4\lambda$, alors il n'y a aucun point singulier dans le premier quadrant ouvert car, dans ce cas on a (x_0, y_0) avec x_0 défini en (2.1.6) et $y_0 < 0$; ce qui ne nous concerne pas!
- Si $\rho = 4\lambda$ alors on a (x_0, y_0) avec x_0 défini en (2.1.6) et $y_0 = -\rho(x_0 - \frac{1}{2})^2 \leq 0$. En particulier, par (2.1.4), (2.1.3) et (2.1.5), on a le point singulier $(x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 0)$ si, et seulement si $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$.
- Si $\rho > 4\lambda$ alors, par (2.1.4),

$$y_0 \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \in [x_{01}, x_{02}] \subset]0; +\infty[,$$

où x_{01} et x_{02} sont définis en (2.1.3). Il va de soi que

$$(x_0 \in [x_{01}, x_{02}] \text{ et } p(x_0) = \delta) \Rightarrow (x_0 \text{ vérifie (2.1.6)}).$$

Dans ce cas, le point

$$(x_0, y_0) \text{ est admissible si, et seulement si} \tag{2.1.7}$$

$$x_0 \in [x_{01}, x_{02}] \text{ et } p(x_0) = \delta.$$

Remarque 2.1.2 (Cas intéressants de b-2)). **b-2-1)** Si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ alors, on a bien $\alpha\delta - 1 < 0$ et, le point singulier $(\frac{1}{2}, 0)$ devient triple car solution double de (51) et solution simple de (2.1.5).

b-2-2) Si $\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{01}$ ou (exclusivement) $x_0 = x_{02}$ tels que $p(x_0) = \delta$, alors le point singulier $(x_0, 0)$ sera double car x_0 est solution de (2.1.2) et (2.1.5). Ces dernières égalités représentent deux surfaces dans le produit de l'espace x par l'espace des paramètres : nous y reviendrons plus tard lors de l'étude des bifurcations des cols-noeuds.

b-2-3) Si $\rho > 4\lambda$ et $x_0 \in]x_{01}, x_{02}[$ tel que $p(x_0) = \delta$: alors, en dehors des points singuliers $(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$, le système (0.0.11) a un 3^e point singulier admissible (x_0, y_0) tel que

$$y_0 = \frac{1}{\delta} [\rho x_0(1 - x_0) - \lambda].$$

En particulier, si $p(\frac{1}{2}) = \delta$ (c'est-à-dire $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$) alors $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\delta}(\frac{\rho}{4} - \lambda))$ est un point singulier vérifiant cette condition.

Cette étape peut donc se résumer par le tableau suivant :

Région	point(s) singulier(s)
$\rho < 4\lambda$	aucun
$\rho = 4\lambda$	$(\frac{1}{2}, 0)$: point double si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et, point triple si $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 \in]x_{01}, x_{02}[$	$(x_{01}, 0)$, $(x_{02}, 0)$ et (x_0, y_0) où $p(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta}$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{01}$	$(x_{01}, 0)$ point double et $(x_{02}, 0)$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{02}$	$(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$ point double
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 \in]0, x_{01}[\cup]x_{02}, +\infty[$	$(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$

TAB. 2.1. Nombre de points singuliers du système (0.0.11) suivant les valeurs des paramètres

2.2. ÉTUDE DU TYPE DE CHAQUE POINT SINGULIER

La matrice jacobienne de (0.0.11) est donnée par (1.2.3), c'est-à-dire

$$\text{Jac}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - \frac{xy(\beta x + 2)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} & -p(x) \\ \frac{xy(\beta x + 2)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} & -\delta + p(x) \end{pmatrix}.$$

Par le tableau précédent, il s'agit de l'étudier pour les deux cas suivants : $\rho = 4\lambda$ et $\rho > 4\lambda$.

2.2.1. Lorsque $\rho = 4\lambda$

Ici, on a le point singulier double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ en lequel la matrice (1.2.3) est évaluée par :

$$\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha+2\beta+4} \\ 0 & -\delta + \frac{1}{\alpha+2\beta+4} \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Les valeurs propres de \mathbf{M}_B sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\delta + \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$.

Dans la suite, nous allons montrer que

$B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un col-noeud de multiplicité 2 si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ alors qu'il est un col nilpotent de multiplicité 3 si $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$:

2.2.2. Lorsque « $\rho > 4\lambda$ »

Dans ce cas, nous étudions le type de chacun des points suivants $C = (x_{01}, 0)$, $D = (x_{02}, 0)$ et $E = (x_0, y_0)$.

2.2.2.1. Type des points singuliers $C = (x_{01}, 0)$ et $D = (x_{02}, 0)$

Ici, nous déterminons le type topologique de chacun de ces points.

On se rappelle, en fait, que $x_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$ et $x_{02} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$. Nous pouvons les noter respectivement par $x_{01} := \frac{1}{2} - \eta$, $x_{02} := \frac{1}{2} + \eta$ où

$$\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}. \quad (2.2.2)$$

En plus $x_{01}x_{02} = \frac{\lambda}{\rho}$ et $x_{01} + x_{02} = 1$. Par (1.2.3), on a respectivement

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2\rho\eta & -p(\frac{1}{2} - \eta) \\ 0 & -\delta + p(\frac{1}{2} - \eta) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_{02}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -2\rho\eta & -p(\frac{1}{2} + \eta) \\ 0 & -\delta + p(\frac{1}{2} + \eta) \end{pmatrix}.$$

On a : $p(\frac{1}{2} \pm \eta) > 0$ et $p'(x) = \frac{\beta x^2 + 2x}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} > 0$ pour tout $x > 0$; c'est-à-dire que p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Or, $0 < \frac{1}{2} - \eta < \frac{1}{2} + \eta$; d'où

$$p(\frac{1}{2} - \eta) < p(\frac{1}{2} + \eta). \quad (2.2.3)$$

Donc :

i) Si $\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$ alors $\delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$; ainsi : C est un noeud répulsif alors que D est un col hyperbolique.

ii) Si $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ alors $\delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$; ainsi : C , point double, est un col-noeud répulsif (comme on le verra sous peu) alors que D est encore un col hyperbolique.

iii) Si $p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$ alors : C et D sont tous des cols hyperboliques.

iv) Si $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$ alors $p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta$; ainsi : C est un col hyperbolique alors que D , point double, est un col-noeud attractif (comme on le verra sous peu).

v) Si $\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$ alors $\delta > p(\frac{1}{2} - \eta)$; ainsi : C est un col hyperbolique alors que D est un noeud attractif.

Remarque 2.2.1. $(p(\frac{1}{2} - \eta) = p(\frac{1}{2} + \eta)) \Leftrightarrow (\eta = 0 \text{ c'est-à-dire } \rho = 4\lambda)$. Alors, à l'intersection de (Cn_r) : $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et de (Cn_a) : $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$, c'est à dire sur (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$, on aura que : $C = D = B$, point triple, est un col nilpotent comme nous l'avons signalé plus haut et le démontrerons plus tard.

2.2.2.2. Type du point singulier $E = (x_0, y_0)$

On se rappelle que, pour $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$, $x_{01} := \frac{1}{2} - \eta$, $x_{02} := \frac{1}{2} + \eta$,

$$p(x_0) = \delta, \quad x_0 \in]x_{01}, x_{02}[\subset]0, +\infty[\quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta} > 0.$$

Or la matrice jacobienne, (1.2.3), évaluée en ce point est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \rho(1-2x_0) - y_0 p'(x_0) & -\delta \\ y_0 p'(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$

dont la trace et le déterminant sont respectivement

$$Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \rho(1-2x_0) - y_0 p'(x_0),$$

$$Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \delta y_0 p'(x_0) > 0.$$

En plus, $x_{01} < \frac{1}{2} < x_{02}$, d'où :

i) Si $x_0 \in [\frac{1}{2}, x_{02}[$, ce qui correspond aux régions des paramètres $p(\frac{1}{2}) \leq \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$, alors $1 - 2x_0 < 0$ et $y_0 p'(x_0) > 0$; d'où $Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) < 0$: E y est donc un (noeud/foyer) attractif.

ii) Si $x_0 \in]x_{01}, \frac{1}{2}[$, ce qui correspond aux régions des paramètres $p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2})$, alors $\rho(1-2x_0) > 0$ et $y_0 p'(x_0) > 0$. Il est donc possible que $Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) := \rho(1-2x_0) - y_0 p'(x_0)$ s'annule. Par conséquent, puisqu'on a toujours $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) := \delta y_0 p'(x_0) > 0$, on aura possiblement une bifurcation de Hopf au voisinage de $E = (x_0, y_0)$ dans ce cas.

iii) Afin de mieux maîtriser le diagramme de bifurcations, il est intéressant (quoique $y_0 < 0$) de voir que :

Si $x_0 < x_{01}$ ou $x_{02} < x_0$, ce qui correspond aux régions des paramètres $\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$ ou $\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$, alors : $y_0 < 0$ et $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) := \delta y_0 p'(x_0) < 0$. Donc $E = (x_0, y_0)$ y est donc un col hyperbolique.

On peut résumer le cas « $\rho > 4\lambda$ » par le tableau suivant :

La réunion des courbes d'équations $(Cn_r) : \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $(Cn_a) : \delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$

Région	points singuliers	Type
$\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$	C, D, E	C est un noeud répulsif D et E sont des cols hyperboliques
$\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$	C, D	C est un col-noeud répulsif (à venir) D est un col hyperbolique
$p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2})$	C, D, E	C et D sont des cols hyperboliques E est un anti-selle
$p(\frac{1}{2}) \leq \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D, E	C et D sont des cols hyperboliques E est un (foyer/noeud) attractif
$\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D	C est un col hyperbolique D est un col-noeud attractif (à venir)
$\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D, E	D est un noeud attractif C et E sont des cols hyperboliques

TAB. 2.2. Types des points singuliers lorsque $\rho > 4\lambda$

a aussi une équation algébrique sans racine carrée. Nous les donnerons au dernier chapitre lors de la détermination du diagramme de bifurcation du système qu'on étudie.

Chapitre 3

ANALYSE DES BIFURCATIONS DU SYSTÈME

Dans ce chapitre, nous étudions :

- les bifurcations de cols-noeuds aux voisinages des points singuliers C et D respectivement sur les surfaces d'équation $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$;
- les bifurcations de cols-noeuds au voisinage du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$ lorsque $\rho = 4\lambda$ et $\delta \neq \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$;
- la bifurcation de Hopf au voisinage du point singulier $E = (x_0, y_0)$ avec $x_0 \in]x_{01}, \frac{1}{2}[$;
- la bifurcation de col-nilpotent au voisinage du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$ lorsque $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$.

3.1. BIFURCATIONS DE COL-NOEUD

3.1.1. Lorsque $\rho = 4\lambda$ et si $\delta \neq \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$

Théorème 3.1.1. *Le point double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un col-noeud attractif si $\delta > \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et $\rho = 4\lambda$ (resp. répulsif si $\delta < \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et $\rho = 4\lambda$).*

Démonstration. En effet, par la translation

$$x_1 = x - \frac{1}{2}, y_1 = y \tag{3.1.1}$$

on ramène notre singularité, $B = (\frac{1}{2}, 0)$, à l'origine de sorte que, par (3.1.1) et (0.0.11), le nouveau système en x_1, y_1 devienne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho(\frac{1}{4} - x_1^2) - \frac{y_1 x_1^2 + y_1 x_1 + \frac{1}{4} y_1}{\alpha x_1^2 + (\alpha + \beta)x_1 + \frac{1}{2}\beta + 1 + \frac{\alpha}{4}} - \lambda \\ \dot{y}_1 = -\delta y_1 + \frac{y_1 x_1^2 + y_1 x_1 + \frac{1}{4} y_1}{\alpha x_1^2 + (\alpha + \beta)x_1 + \frac{1}{2}\beta + 1 + \frac{\alpha}{4}}. \end{cases}$$

Alors, après un développement taylorien de $\frac{1}{\alpha x_1^2 + (\alpha + \beta)x_1 + \frac{1}{2}\beta + 1 + \frac{\alpha}{4}}$ au voisinage de $x_1 = 0$ et par le fait que $\rho = 4\lambda$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(8 \frac{(\alpha\beta + 6\alpha - 8)y_1}{(\alpha + 2\beta + 4)^3} - \rho\right) x_1^2 - 4 \frac{(\beta + 4)y_1 x_1}{(\alpha + 2\beta + 4)^2} - \frac{y_1}{\alpha + 2\beta + 4} + O(|(x_1, y_1)|^4), \\ \dot{y}_1 = -8 \frac{(\alpha\beta + 6\alpha - 8)y_1 x_1^2}{(\alpha + 2\beta + 4)^3} + 4 \frac{(\beta + 4)y_1 x_1}{(\alpha + 2\beta + 4)^2} - \frac{(-1 + \delta\alpha + 2\delta\beta + 4\delta)y_1}{\alpha + 2\beta + 4} + O(|(x_1, y_1)|^4). \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Évaluée à l'origine, la matrice jacobienne de (3.1.2) est égale à \mathbf{M}_B (donnée en (2.2.1)) dont les valeurs propres, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\delta + \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \neq 0$ ont respectivement pour vecteurs propres $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (\frac{1}{\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1}, 1)$. \mathbf{M}_B est ainsi diagonalisable, avec comme matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et alors

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

où \dot{x}_1 et \dot{y}_1 sont définies par (3.1.2). Dès lors, par (3.1.3), (3.1.2) et un programme du logiciel MAPLE, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = -2 \frac{(\rho\alpha + 8\delta + 4\rho + 2\rho\beta + 2\delta\beta)XY}{(-1 + \delta\alpha + 2\delta\beta + 4\delta)(\alpha + 2\beta + 4)} - \rho X^2 - \frac{(\rho\alpha + 4\delta\beta + 4\rho + 2\rho\beta + 16\delta)Y^2}{(\alpha + 2\beta + 4)(-1 + \delta\alpha + 2\delta\beta + 4\delta)^2} + O(|(X, Y)|^3), \\ \dot{Y} = -\frac{(-1 + \delta\alpha + 2\delta\beta + 4\delta)Y}{\alpha + 2\beta + 4} + 4 \frac{(\beta + 4)XY}{(\alpha + 2\beta + 4)^2} + 4 \frac{(\beta + 4)Y^2}{(\alpha + 2\beta + 4)^2(-1 + \delta\alpha + 2\delta\beta + 4\delta)} + O(|(X, Y)|^3). \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Soit W^c la variété centre de (3.1.4) au voisinage de l'origine, alors par (3.1.4), on a que

$$W^c : Y = aX^2 + O(|X|^3), \quad (3.1.5)$$

invariante sous le flot de (3.1.4).

Donc, par le théorème 0.0.2 (*de Chochitaïchvili*) et le (3.1.5), on a que le système (3.1.4) est topologiquement équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\rho X^2 + O(|X|^4), \\ \dot{Y} = \left(\frac{1}{\alpha+2\beta+4} - \delta\right)Y. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

En conséquence, étant donné que le coefficient de X^2 est $-\rho < 0$, alors le point double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un *col-noeud*

- *attractif* si $\delta > \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et $\rho = 4\lambda$,
- *répulsif* si $\delta < \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et $\rho = 4\lambda$. □

3.1.2. Sur (Cn_r) : $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et sur (Cn_a) : $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$

Nous avons que :

Théorème 3.1.2. *Lorsque $\rho > 4\lambda$, les points singuliers $C := (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ et $D := (\frac{1}{2} + \eta, 0)$ sont des cols-noeuds respectivement sur les surfaces d'équation $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$ (avec $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$).*

Démonstration. En effet, pour $a := \frac{1}{2} \mp \eta$, ces deux points doubles sont chacun de la forme

$M = (a, 0)$ tel que $\rho a^2 - \rho a + \lambda = 0$ et $p(a) = \delta$. Alors :

- Après avoir multiplié (0.0.11) par $q(x) := \alpha x^2 + \beta x + 1 > 0$, alors tout en utilisant les mêmes notations, on ramène M à l'origine par la translation « $x_1 = x - a, y_1 = y$ » et, par le fait que $p(a) = \delta$ c'est-à-dire $\delta(\alpha a^2 + \beta a + 1) = a^2$ et $\rho a^2 - \rho a + \lambda = 0$, on a le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\rho(-1+2a)(\alpha a^2 + \beta a + 1)x_1 - \rho(-\beta + 3\beta a + 5\alpha a^2 + 1 - 2\alpha a)x_1^2 + \\ \quad + (-2x_1 a - a^2 - x_1^2)y_1 - \alpha \rho x_1^4 - \rho(\beta + 4\alpha a - \alpha)x_1^3, \\ \dot{y}_1 = (2a - \beta\delta - 2\alpha\delta a)x_1 y_1 + (-\alpha\delta + 1)x_1^2 y_1, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

dont la matrice jacobienne, évaluée à l'origine, est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\rho(2a-1)(\alpha a^2 + \beta a + 1) & -a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Posons $\lambda_1 := -\rho(2a-1)(\alpha a^2 + \beta a + 1)$. Or, $p(a) = \delta$ c'est-à-dire $\delta(\alpha a^2 + \beta a + 1) = a^2$. Alors

$$\lambda_1 := -\frac{\rho(2a-1)a^2}{\delta}.$$

Ainsi les vecteurs propres associés aux valeurs propres, λ_1 et 0, de $\mathbf{Jac}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

sont respectivement $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (\frac{a^2}{\lambda_1}, 1)$. Donc $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a^2}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et son

inverse, $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a^2}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sont des matrices qui nous permettent de définir la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.8)$$

Ainsi, par (3.1.8) et (3.1.7), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X + f_0(X, Y) & \text{où } f_0(X, Y) = O(|X, Y|^2), \\ \dot{Y} = \frac{a^4(\beta a + 1)Y^3}{(\alpha a^2 + \beta a + 1)\eta^2} + \left(2 \frac{a^2(\beta a + 1)X}{\eta(\alpha a^2 + \beta a + 1)} + \frac{a^3(\beta a + 2)}{\eta(\alpha a^2 + \beta a + 1)} \right) Y^2 + \left(\frac{(\beta a + 1)X^2}{\alpha a^2 + \beta a + 1} + \frac{a(\beta a + 2)X}{\alpha a^2 + \beta a + 1} \right) Y. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

• Décrivons le flot du système (3.1.9) sur la variété centre près de l'origine. En effet, étant donné que $E^c := \langle v_2 \rangle$ et que la variété centre, W^c , est tangente à E^c en $(0, 0)$ alors, par la transformation linéaire (3.1.8) (c'est-à-dire dans les coordonnées (X, Y)), on a que

$$W^c : X = bY^2 + O(|Y|^3) \quad (3.1.10)$$

Donc, par le théorème 0.0.2 (*de Chochitaïchvili*) et les formes de (3.1.9) et (3.1.10)

(il est inutile de déterminer b lorsqu'on tronque à l'ordre 2), le système (3.1.9)

est, au voisinage de $(X, Y) = (0, 0)$, topologiquement équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\frac{\rho(2a-1)a^2}{\delta} X, \\ \dot{Y} = \frac{a^3(\beta a + 2)}{\eta(\alpha a^2 + \beta a + 1)} Y^2 + O(|Y|^3). \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Or :

- Si $a = \frac{1}{2} - \eta$ alors $0 < a < \frac{1}{2}$; d'où $(2a - 1 < 0) \Rightarrow (-\frac{\rho(2a-1)a^2}{\delta} > 0)$.

- Si $a = \frac{1}{2} + \eta$ alors $0 < a < \frac{1}{2}$; d'où $(2a - 1 > 0) \Rightarrow (-\frac{\rho(2a-1)a^2}{\delta} < 0)$.

En conséquence C est effectivement un col-noeud répulsif sur (Cn_r) alors que D est effectivement un col-noeud attractif sur (Cn_a) . \square

3.2. BIFURCATION DE HOPF

Lorsque nous étudierons la bifurcation de Hopf de notre système, nous le ramènerons à un système de Liénard généralisé car le calcul des coefficients de Lyapunov d'un tel système se fait très bien.

3.2.1. Calcul des coefficients de Lyapunov d'un système de Liénard généralisé

Considérons un système de Liénard généralisé,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{Y} = g(x) + yf(x), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec

$$g(x) := x + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^i,$$

et

$$f(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} b_j x^j$$

On sait par [37] que, pour (3.2.1), il existe une série entière

$$F := \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{p=3}^{\infty} F_p(x, y)$$

où

$$F_p(x, y) = \sum_{i=0}^p a_{i,p-i} x^i y^{p-i}$$

telle que

$$\dot{F} = \sum_{k=1}^{\infty} L_k (x^2 + y^2)^{k+1}.$$

Les L_k sont appelés «coefficients de Lyapunov» ou, par [6], «coefficients de la bifurcation de Hopf» de (3.2.1). D'où, par (3.2.1), on a :

$$-y \sum_{p=3}^N \frac{\partial F_p}{\partial x} + x \sum_{p=3}^N \frac{\partial F_p}{\partial y} = -y \sum_{l=2}^{N-1} q_l - \sum_{l=2}^{N-1} \sum_{p=3}^N (q_l \frac{\partial F_p}{\partial y}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} L_k (x^2 + y^2)^{k+1}. \quad (3.2.2)$$

En opérant degré par degré sur (3.2.2), on obtient (pour un degré donné) un système linéaire d'inconnues $a_{i,p-i}$ dont la compatibilité (lorsqu'il n'a pas de solution unique) nous permet de trouver un coefficient de Lyapunov. Donc, par un programme que nous avons écrit et réalisé par le logiciel MAPLE, on a :

Théorème 3.2.1. *Les cinq premiers coefficients de Lyapunov du système de Liénard généralisé, (3.2.1), simplifiés sous la condition que les précédents sont nuls, sont :*

$$L_1 = \frac{1}{8}(b_2 - a_2 b_1), \quad (3.2.3)$$

$$L_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{5}{3}a_2 b_1 a_3 - \frac{5}{3}a_2 b_3 + b_4 - a_4 b_1\right), \quad (3.2.4)$$

$$L_3 = \frac{1}{1152}(45 b_6 + 105 a_5 b_1 a_2 - 45 b_1 a_6 + 70 a_2^3 b_3 - 70 a_3 b_1 a_2^3 + 105 a_3 a_2 b_3 - 105 a_3^2 b_1 a_2 + 63 a_4 b_1 a_3 - 105 a_2 b_5 - 63 a_4 b_3), \quad (3.2.5)$$

$$L_4 = \frac{1}{34560}(945 b_8 + 2835 a_5 a_2 b_3 + 1215 a_6 b_1 a_3 + 8820 a_3^2 b_1 a_2^3 - 1215 a_6 b_3 - 1701 a_4 b_5 - 5670 a_5 a_3 b_1 a_2 - 945 b_1 a_8 - 4620 a_5 b_1 a_2^3 + 3080 a_3 b_1 a_2^5 + 2835 a_2 b_1 a_7 - 2835 a_2 b_7 - 3080 a_2^5 b_3 + 4620 a_2^3 b_5 + 1701 a_5 b_1 a_4 - 2835 a_3^2 a_2 b_3 + 2835 a_3^3 b_1 a_2 - 8820 a_3 a_2^3 b_3 + 2835 a_3 a_2 b_5 - 4158 a_4 a_3 b_1 a_2^2 + 4158 a_4 a_2^2 b_3 - 1701 a_4 b_1 a_3^2 + 1701 a_4 a_3 b_3), \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned}
L_5 = & \frac{1}{6220800} (-467775 a_3^4 b_1 a_2 + 467775 a_3^3 a_2 b_3 + 4158000 a_3^2 a_2^3 b_3 \\
& + 127575 b_1 a_2 - 467775 a_3^2 a_2 b_5 + 280665 a_4 a_3 b_5 + 467775 a_7 a_2 b_3 \\
& - 3118500 a_4 a_3 a_2^2 b_3 + 467775 a_2 b_1 a_9 + 467775 a_3 a_2 b_7 \\
& + 5613300 a_3 a_2^5 b_3 - 3014550 a_3 a_2^3 b_5 + 1601600 a_2^7 b_3 + 467775 a_5 a_2 b_5 \\
& + 1351350 a_2^3 b_7 - 2522520 a_4 a_2^4 b_3 - 2402400 a_2^5 b_5 + 486486 a_4^2 a_2 b_3 \\
& - 579150 a_6 a_3 b_1 a_2^2 + 280665 a_5 a_4 b_3 - 200475 a_6 b_1 a_3^2 \\
& - 127575 b_1 a_{10} + 579150 a_6 a_2^2 b_3 - 935550 a_7 a_3 b_1 a_2 \\
& + 2522520 a_4 a_3 b_1 a_2^4 - 5613300 a_3^2 b_1 a_2^5 - 280665 a_4 b_7 + 200475 a_6 b_1 a_5 \\
& - 467775 a_5^2 b_1 a_2 - 280665 a_4 a_3^2 b_3 - 2113650 a_5 a_2^3 b_3 \\
& - 486486 a_4^2 a_3 b_1 a_2 - 1621620 a_4 a_5 b_1 a_2^2 - 467775 a_2 b_9 \\
& + 2402400 a_5 b_1 a_2^5 - 1601600 a_3 b_1 a_2^7 + 1621620 a_4 a_2^2 b_5 - 200475 a_6 b_5 \\
& + 280665 a_7 b_1 a_4 + 5128200 a_5 a_3 b_1 a_2^3 - 935550 a_5 a_3 a_2 b_3 \\
& + 155925 a_8 b_1 a_3 + 3118500 a_4 a_3^2 b_1 a_2^2 + 200475 a_6 a_3 b_3 - 155925 a_8 b_3 \\
& - 4158000 a_3^3 b_1 a_2^3 + 1403325 a_5 a_3^2 b_1 a_2 + 280665 a_4 b_1 a_3^3 \\
& - 561330 a_5 a_4 b_1 a_3 - 1351350 a_2^3 b_1 a_7). \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

3.2.2. Existence et ordre de la Bifurcation de Hopf

On se rappelle que

$$\rho > 4\lambda, 0 < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho} < x_0 < \frac{1}{2}, p(x_0) = \delta, y_0 = \frac{\rho x_0(1 - x_0) - \lambda}{\delta}, \tag{3.2.8}$$

$$\text{Det}(\text{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \delta y_0 p'(x_0) > 0.$$

Alors :

- On multiplie (0.0.11) par $q(x) := \alpha x^2 + \beta x + 1 > 0$, puis on ramène E à l'origine par la translation

$$x_1 = x - x_0, y_1 = y - y_0.$$

Alors, en utilisant le fait que $P(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0)-\lambda}{\delta}$, on obtient le système, (S), suivant

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha \rho x_1^4 - \rho (4\alpha x_0 - \alpha + \beta) x_1^3 + \\ \quad + \left(-y_1 - \frac{5\alpha \rho x_0^4 - \beta \lambda x_0 - 2\alpha \rho x_0^3 + 2\beta \rho x_0^3 + \rho x_0 - \lambda}{x_0^2} \right) x_1^2 - y_1 x_0^2 + \\ \quad + \left(-2y_1 x_0 - \frac{\rho x_0 - 2\lambda + 2\alpha \rho x_0^4 + \beta \rho x_0^3 - \beta \lambda x_0 - \alpha \rho x_0^3}{x_0} \right) x_1, \\ \dot{y}_1 = \left(\frac{(\beta x_0 + 1)y_1}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} - \frac{(-\rho x_0 + \rho x_0^2 + \lambda)(\beta x_0 + 1)}{x_0^2} \right) x_1^2 + \\ \quad + \left(\frac{x_0(\beta x_0 + 2)y_1}{\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1} - \frac{(\beta x_0 + 2)(-\rho x_0 + \rho x_0^2 + \lambda)}{x_0} \right) x_1, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

dont la matrice jacobienne, évaluée à l'origine est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho x_0 - 2\lambda + 2\alpha \rho x_0^4 + \beta \rho x_0^3 - \beta \lambda x_0 - \alpha \rho x_0^3}{x_0} & -x_0^2 \\ -\frac{(\beta x_0 + 2)(-\rho x_0 + \rho x_0^2 + \lambda)}{x_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

• Pour avoir une bifurcation de Hopf, on doit faire l'hypothèse que

$$\text{Tr}(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1 = \mathbf{0})) := -\frac{\rho x_0 - 2\lambda + 2\alpha \rho x_0^4 + \beta \rho x_0^3 - \beta \lambda x_0 - \alpha \rho x_0^3}{x_0} = 0,$$

c'est à dire

$$\lambda = \frac{\rho(2\alpha x_0^3 + \beta x_0^2 - \alpha x_0^2 + 1)x_0}{\beta x_0 + 2} \quad (3.2.10)$$

(bien défini car, pour tous $\alpha > 0, \beta \geq 0, \rho > 0 : 0 < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho} < x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha x_0^3 + \beta x_0^2 - \alpha x_0^2 + 1 > 0$). Ce qui donne explicitement $\text{Det}(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1 = \mathbf{0})) = \rho(1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)x_0^2 > 0$ car $0 < x_0 < \frac{1}{2}$.

Sous cette condition, le linéarisé de (S) a pour matrice jacobienne

$$\mathbf{M}_E = \begin{pmatrix} 0 & -x_0^2 \\ \rho(1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)x_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

• Considérons la transformation définie par

$$X = x_1, Y = \frac{x_0^2}{\omega} y_1 \quad (3.2.12)$$

où

$$\omega^2 = \rho(1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)x_0^2. \quad (3.2.13)$$

Alors, par (3.2.12), (3.2.8) et (3.2.10), on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -Y \frac{\omega(x_0+X)^2}{x_0^2} - \frac{\rho(8\alpha x_0^3+3\beta x_0^4\alpha-\alpha x_0^3\beta-3\alpha x_0^2+\beta^2 x_0^3+1+3\beta x_0^2)}{x_0(\beta x_0+2)} X^2 - \\ \quad -\alpha \rho X^4 - \rho(4\alpha x_0 - \alpha + \beta) X^3, \\ \dot{Y} = \left(\frac{(\beta x_0+1)Y}{\alpha x_0^2+\beta x_0+1} - \frac{(-1+2x_0)(\beta x_0+1)(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)\rho x_0}{\omega(\beta x_0+2)} \right) X^2 + \frac{x_0(\beta x_0+2)YX}{\alpha x_0^2+\beta x_0+1} + \omega X. \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

- Ecrivons le système (3.2.14) sous *forme de Liénard* :

En effet, \dot{X} est de la forme

$$\dot{X} := -Y P_0(X) + g_0(X) \quad \text{où}$$

$$P_0(X) = \frac{\omega(x_0 + X)^2}{x_0^2} > 0.$$

Alors, en multipliant (3.2.14) par $\frac{1}{P_0(X)}$, puis en prenant le développement de Taylor de ce dernier au voisinage de $X = 0$ à l'ordre 5 dans $\frac{1}{P_0(X)}g_0(X)$ et au membre droit de $\frac{1}{P_0(X)}\dot{Y}$, alors en divisant le système obtenu par ω , on obtient après un calcul par le logiciel MAPLE et en utilisant les mêmes notations de (3.2.14), le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \frac{\rho(\beta^2 x_0^3+6\beta x_0^2-\alpha x_0^3\beta-6\alpha x_0^2+2\beta x_0^4\alpha+12\alpha x_0^3+4)X^5}{\omega x_0^4(\beta x_0+2)} - \\ \quad - \frac{\rho(10\alpha x_0^3+\beta^2 x_0^3+5\beta x_0^2+2\beta x_0^4\alpha-5\alpha x_0^2+3-\alpha x_0^3\beta)X^4}{\omega x_0^3(\beta x_0+2)} + \\ \quad + \frac{\rho(4\beta x_0^2+\beta^2 x_0^3+8\alpha x_0^3+2\beta x_0^4\alpha+2-\alpha x_0^3\beta-4\alpha x_0^2)X^3}{\omega x_0^2(\beta x_0+2)} - \\ \quad - \frac{\rho(8\alpha x_0^3+3\beta x_0^4\alpha-\alpha x_0^3\beta-3\alpha x_0^2+\beta^2 x_0^3+1+3\beta x_0^2)X^2}{\omega x_0(\beta x_0+2)} - Y + 0(|X|^6) \\ \dot{Y} = - \frac{\rho(-1+2x_0)(\beta x_0+6)(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)X^5}{\omega^2 x_0^2(\beta x_0+2)} + \\ \quad + \left(- \frac{(\beta x_0+5)Y}{\omega x_0^2(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)} + \frac{\rho(-1+2x_0)(\beta x_0+5)(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)}{\omega^2 x_0(\beta x_0+2)} \right) X^4 + \\ \quad + \left(\frac{(\beta x_0+4)Y}{\omega x_0(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)} - \frac{\rho(-1+2x_0)(\beta x_0+4)(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)}{\omega^2(\beta x_0+2)} \right) X^3 + \\ \quad + \left(- \frac{(\beta x_0+3)Y}{\omega(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)} + \frac{\rho x_0(-1+2x_0)(\beta x_0+3)(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)}{\omega^2(\beta x_0+2)} \right) X^2 + \\ \quad + \frac{x_0(\beta x_0+2)YX}{\omega(\alpha x_0^2+\beta x_0+1)} + X + 0(|(X, Y)|^6). \end{array} \right. \quad (3.2.15)$$

Considérons la transformation

$$-Y_2 = -Y + L(X) \quad , \quad X_2 = X \quad (3.2.16)$$

où, par (3.2.15), \dot{X} est de la forme $\dot{X} := -Y + L(X)$. Ainsi, (3.2.16) donne $Y = Y_2 + L(X)$ et, alors,

$$\dot{X}_2 = -Y_2, \dot{Y}_2 = \dot{Y} - \frac{\partial L}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial L}{\partial Y} \dot{Y}.$$

Donc, en omettant les indices, (3.2.15) peut finalement s'écrire sous la forme de Liénard suivante

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = g(X) + Yf(X), \end{cases} \quad (3.2.17)$$

avec

$$g(X) := X + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i X^i, \quad f(X) := \sum_{i=1}^{+\infty} b_i X^i,$$

où, après un programme de calculs réalisés par le logiciel MAPLE,

$$a_2 = \frac{\rho x_0 (2x_0 - 1) (\beta x_0 + 3) (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)}{\omega^2 (\beta x_0 + 2)}, \quad (3.2.18)$$

$a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4 \dots$ sont bien connus mais dont la lourdeur de leur expression ne nous permet de les écrire ici.

Ainsi, par les formules des coefficients de Lyapunov obtenues au paragraphe précédent et (3.2.13), avons-nous que le signe de L_1 est aussi celui de :

$$\begin{aligned} L_1(x_0) := & \rho^2 x_0^2 (1 - 2x_0) (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2 [(\beta^3 + 2\alpha\beta - \alpha\beta^2) x_0^4 \\ & + (6\beta^2 - 6\alpha\beta) x_0^3 + (6\beta - 6\alpha) x_0^2 + 4\beta x_0 + 6] \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

qui s'annule en

$$\alpha = \frac{\beta^3 x_0^4 + 6\beta^2 x_0^3 + 6\beta x_0^2 + 4\beta x_0 + 6}{x_0^2 (-2\beta x_0^2 + 6\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2)} \quad (3.2.20)$$

(bien défini car, pour tout $\beta > 0 : 0 < x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow -2\beta x_0^2 + 6\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2 = \beta x_0(1 - 2x_0) + 5\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2 > 0$).

On remarque donc que $L_1(x_0)$ peut aussi s'écrire comme

$$l_1(\lambda, x_0) := -2\beta^2 \rho x_0^5 - 6\rho\beta x_0^4 + (\lambda\beta^2 - 2\beta\lambda - \rho\beta - 6\rho) x_0^2 + 6\lambda\beta x_0 + 6\lambda. \quad (3.2.21)$$

Donc, pour cette valeur de α et (3.2.13) on a que le signe de L_2 est aussi celui de

$$L_2(x_0) = \frac{2(-2x_0 + 1)x_0^2\beta\rho^2(\beta x_0^2 + \beta x_0 + 3)^3(\beta x_0 + 2)^7}{(-2\beta x_0^2 + 6\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2)^4} \\ [3 + (4\beta + 18)x_0 + 4\beta x_0^2 + 18\beta x_0^3 + 11\beta^2 x_0^4 + \beta^3 x_0^5] \quad (3.2.22)$$

qui est strictement positif pour tout $\beta > 0$; d'où le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *Lorsque $\beta > 0$, on a une bifurcation de Hopf d'ordre deux ([13], [27]) au voisinage de $E = (x_0, y_0)$, et le coefficient L_2 est strictement positif.*

Remarque 3.2.1. *Le diagramme de bifurcation correspondant est présenté à la figure 5.9 (voir au dernier chapitre).*

3.2.3. Analyse du cas $\beta = 0$

On se rappelle que les résultats sur les bifurcations de col-noeuds et de Hopf d'ordre 1 sont les mêmes pour les cas $\beta > 0$ et $\beta = 0$ (voir les sous-sections précédentes y relatives). Pour les autres bifurcations, les cas $\beta > 0$ et $\beta = 0$ ne fonctionnent pas pareillement. Regardons ici le comportement de quelques coefficients de Lyapunov du système (3.2.17) lorsque $\beta = 0$. En effet, comme il a été vu plus haut, les L_k (où $k = 1, \dots, 5$) désignent les cinq premiers coefficients de Lyapunov du système (3.2.17) où, pour tout $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, x_0 désigne l'abscisse du point singulier $E = (x_0, y_0)$ tel que

$$0 < \frac{1}{2} - \eta < x_0 < \frac{1}{2}, p(x_0) = \delta \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\rho x_0(1 - x_0) - \lambda}{\delta}, \quad (3.2.23)$$

(avec $\eta =: \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$) dont le déterminant de la matrice jacobienne est strictement positif (voir au (3.2.8)) et la trace de celle-ci est nulle, c'est-à-dire, par (3.2.10), que

$$\lambda = \frac{\rho(2\alpha x_0^3 - \alpha x_0^2 + 1)x_0}{2} \quad (3.2.24)$$

ou encore que x_0 est racine de $u_0(x) := -2\rho\alpha x^4 + \rho\alpha x^3 - \rho x + 2\lambda$.

Il semble donc que :

Conjecture 3.2.1. *Si $\beta = 0$ et $L_1 = 0$, alors le point singulier $E = (x_0, y_0)$ est un centre (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage U de E tel que toutes les orbites de $U \setminus \{E\}$ soient périodiques).*

Illustration :

On va montrer que si $\beta = 0$ et $L_1 = 0$, alors

$$L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0. \quad (3.2.25)$$

En effet, si $\beta = 0$ et $L_1 = 0$, alors par (3.2.20) on a que

$$\alpha = \frac{1}{x_0^2}. \quad (3.2.26)$$

Or, pour $\beta = 0$, on a, par (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) et le système (3.2.17) que

$$\begin{aligned} L_2 = & \frac{\rho^2 x_0^4 (2x_0 - 1)(\alpha x_0^2 - 1)(\alpha x_0^2 + 1)}{32 x_0^4 \omega^5 (\alpha x_0^2 + 1)^2} [10 \rho \alpha^3 x_0^7 \\ & - 5 \rho \alpha^3 x_0^6 + 46 \rho \alpha^2 x_0^5 - 21 \rho \alpha^2 x_0^4 \\ & + 46 \rho \alpha x_0^3 - (19 \rho \alpha + 4) x_0^2 \\ & + 10 \rho x_0 - 3 \rho], \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} L_3 = & \frac{\rho^4 x_0^8 (2x_0 - 1)^2 (1 - \alpha x_0^2)(\alpha x_0^2 + 1)^2}{512 x_0^6 \omega^9 (\alpha x_0^2 + 1)^3} [840 \alpha^5 x_0^{12} \rho \\ & - 840 \rho \alpha^5 x_0^{11} + 2 \alpha^4 \rho (2668 + 105 \alpha) x_0^{10} \\ & - 5054 \rho \alpha^4 x_0^9 + \alpha^3 \rho (1193 \alpha + 13600) x_0^8 \\ & - 20 \alpha^2 (17 + 618 \rho \alpha) x_0^7 + 2 \alpha^2 (85 + 1404 \rho \alpha + 6800 \rho) x_0^6 \\ & - 4 \alpha (282 + 3005 \rho \alpha) x_0^5 + 2 \alpha (2668 \rho + 1347 \rho \alpha + 254) x_0^4 \\ & + (-4768 \rho \alpha - 340) x_0^3 + (840 \rho + 114 + 1134 \rho \alpha) x_0^2 \\ & - 894 \rho x_0 + 265 \rho], \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

$$\begin{aligned}
L_4 = & \frac{\rho^6 x_0^{12} (2x_0 - 1)^3 (\alpha x_0^2 - 1) (\alpha x_0^2 + 1)^3}{5120 \omega^{13} x_0^8 (\alpha x_0^2 + 1)^4} [85680 \rho x_0^{17} \alpha^7 \\
& - 128520 \rho x_0^{16} \alpha^7 + 4 \alpha^6 \rho (16065 \alpha + 178576) x_0^{15} \\
& - 10 \alpha^6 \rho (103588 + 1071 \alpha) x_0^{14} + 8 \alpha^5 \rho (317812 + 62519 \alpha) x_0^{13} \\
& - 2 \alpha^4 (40197 \rho \alpha^2 + 17360 + 1792548 \rho \alpha) x_0^{12} \\
& + 2 \alpha^4 (2392376 \rho + 841767 \rho \alpha + 17360) x_0^{11} \\
& - \alpha^3 (8680 \alpha + 263305 \rho \alpha^2 + 185536 + 6631320 \rho \alpha) x_0^{10} \\
& + 2 \alpha^3 (88466 + 2392376 \rho + 1534653 \rho \alpha) x_0^9 \\
& - \alpha^2 (6617240 \rho \alpha + 333888 + 474665 \rho \alpha^2 + 42082 \alpha) x_0^8 \\
& + 4 \alpha^2 (635624 \rho + 768932 \rho \alpha + 76515) x_0^7 \\
& - 2 \alpha (92768 + 240320 \rho \alpha^2 + 1803852 \rho \alpha + 35031 \alpha) x_0^6 \\
& + 4 \alpha (40939 + 433947 \rho \alpha + 178576 \rho) x_0^5 \\
& + (-36502 \alpha - 1085592 \rho \alpha - 34720 - 282268 \rho \alpha^2) x_0^4 \\
& + (85680 \rho + 32164 + 558270 \rho \alpha) x_0^3 \\
& + (-141544 \rho - 7906 - 96017 \rho \alpha) x_0^2 + 76546 \rho x_0 - 13345 \rho], \quad (3.2.29)
\end{aligned}$$

$$L_5 = \frac{\rho^8 x_0^{16} (2x_0 - 1)^4 (1 - \alpha x_0^2) (\alpha x_0^2 + 1)^4 [\sum_{i=1}^{18} c_i(x_0)]}{614400 \omega^{17} (\alpha x_0^2 + 1)^5 x_0^{10}}, \quad \text{où} \quad (3.2.30)$$

$$\omega^2 = (1 - 2x_0) (\alpha x_0^2 + 1) \rho x_0^2,$$

$$\begin{aligned}
c_1(x_0) = & 171864000 \alpha^9 x_0^{22} \rho - 343728000 \alpha^9 x_0^{21} \rho \\
& + 160 \alpha^8 \rho (11101726 + 1611225 \alpha) x_0^{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2(x_0) = & -160 \alpha^8 \rho (21704506 + 537075 \alpha) x_0^{19} \\
& + 100 \rho \alpha^7 (81339680 + 107415 \alpha^2 + 25446672 \alpha) x_0^{18},
\end{aligned}$$

$$c_3(x_0) = 16 \alpha^6 (51766535 \rho \alpha^2 + 974881087 \rho \alpha + 4353300) x_0^{17},$$

$$\begin{aligned}
c_4(x_0) = & 4 \alpha^6 (26119800 + 2802644521 \rho \alpha \\
& + 25259585 \rho \alpha^2 + 5303593760 \rho) x_0^{16},
\end{aligned}$$

$$c_5(x_0) = -16\alpha^5(31980490 + 3264975\alpha + 2507584662\rho\alpha + 223686815\rho\alpha^2)x_0^{15},$$

$$c_6(x_0) = \alpha^5(8706600\alpha + 746807320 + 428239173\rho\alpha^2 + 28459139284\rho\alpha + 33973983360\rho)x_0^{14},$$

$$c_7(x_0) = -16\alpha^4(3991158913\rho\alpha + 22690090\alpha + 92971540 + 560888891\rho\alpha^2)x_0^{13},$$

$$c_8(x_0) = \alpha^4(1061597191\rho\alpha^2 + 45092885796\rho\alpha + 2122711496 + 58779870\alpha + 33973983360\rho)x_0^{12},$$

$$c_9(x_0) = -16\alpha^3(4007969280\rho\alpha + 886239879\rho\alpha^2 + 63063029\alpha + 132462780)x_0^{11},$$

$$c_{10}(x_0) = \alpha^3(45583203188\rho\alpha + 1675669169\rho\alpha^2 + 21214375040\rho + 2980644016 + 159769438\alpha)x_0^{10},$$

$$c_{11}(x_0) = -16\alpha^2(903819833\rho\alpha^2 + 2548690577\rho\alpha + 92971540 + 87395992\alpha)x_0^9,$$

$$c_{12}(x_0) = \alpha^2(2086349104 + 218877052\alpha + 8133968000\rho + 1727461067\rho\alpha^2 + 29578807820\rho\alpha)x_0^8,$$

$$c_{13}(x_0) = -16\alpha(61210189\alpha + 599217261\rho\alpha^2 + 1011481998\rho\alpha + 31980490)x_0^7,$$

$$c_{14}(x_0) = \alpha(12134996316\rho\alpha + 731540024 + 1776276160\rho + 1170796047\rho\alpha^2 + 153870996\alpha)x_0^6,$$

$$c_{15}(x_0) = (-351205088 \alpha - 4057181200 \rho \alpha^2 \\ - 69652800 - 3704340848 \rho \alpha) x_0^5,$$

$$c_{16}(x_0) = (56512198 \alpha + 171864000 \rho + 509709717 \rho \alpha^2 \\ + 102873640 + 2890227340 \rho \alpha) x_0^4,$$

$$c_{17}(x_0) = (-999122160 \rho \alpha - 378462080 \rho - 50682352) x_0^3,$$

$$c_{18}(x_0) = (8273926 + 308289052 \rho + 129168191 \rho \alpha) x_0^2 \\ - 110572096 \rho x_0 + 14807765 \rho.$$

Ainsi, pour $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{1}{x_0^2}$, on a que $L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0$; ce qui est, par [11], une condition nécessaire pour que $E = (x_0, y_0)$ soit un centre.

3.3. BIFURCATION DE COL NILPOTENT

Elle a lieu si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$. Dans ce cas, le point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$ devient un point triple comme il a été précisé plus haut.

Nous présentons d'abord brièvement la notion de *forme normale d'un champ de vecteurs sur \mathbf{R}^n* . Soit

$$\dot{X} = AX + f(X) \tag{3.3.1}$$

un champ de vecteurs où f est une fonction de classe C^r ($r > 1$), C^∞ ou analytique telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$.

L'objectif de la théorie des formes normales est, *par un changement de variables local de classe C^r ($r > 1$) ou C^∞ ou analytique*, de simplifier le plus possible la partie non-linéaire, $f(X)$, de (3.3.1).

Le but de ce qui suit est (justement) de déterminer, au voisinage du point singulier triple $B = (\frac{1}{2}, 0)$, une forme normale du système (0.0.11). Celle-ci nous permettra de montrer que ce point singulier est un col nilpotent de codimension 2 ou 3. À la fin de cette section, nous ferons la conjecture que, sous la condition « $\beta = 0$, $\alpha = 4$, $\delta = \frac{1}{8}$ et $\rho = 4\lambda$ », le système est réversible et donc de codimension infinie.

3.3.1. Mise sous forme normale

Celle-ci sera faite en cinq étapes :

(1) *Localisation du système initial :*

En ramenant la singularité $B = (\frac{1}{2}, 0)$ à l'origine par la translation

$$x_1 = x - \frac{1}{2}, y_1 = y$$

et en tenant compte du fait que $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ et $\rho = 4\lambda$, le système initial devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 p(x_1 + \frac{1}{2}) - 4\lambda x_1^2, \\ \dot{y}_1 = \frac{4y_1 x_1 [\beta+4+2(\beta+2)x_1]}{(\alpha+2\beta+4)[4\alpha x_1^2+4(\alpha+\beta)x_1+\alpha+2\beta+4]}, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

où

$$p\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2x_1 + 1)^2}{4\alpha x_1^2 + 4(\alpha + \beta)x_1 + \alpha + 2\beta + 4}.$$

(2) *Multiplication par une fonction strictement positive et développement de Taylor :*

En multipliant le système précédent par $\frac{1}{p(x_1 + \frac{1}{2})}$ qui est strictement positif au voisinage de $(x_1, y_1) = (0, 0)$, on obtient, après un développement taylorien d'ordre 7 des membres droits du système obtenu au voisinage de $(x_1, y_1) = (0, 0)$ et *sans changer de notation*, le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 64\rho(\beta+12)x_1^7 - 32\rho(\beta+10)x_1^6 + 16\rho(\beta+8)x_1^5 - 8\rho(\beta+6)x_1^4 \\ \quad + 4\rho(\beta+4)x_1^3 - \rho(\alpha+2\beta+4)x_1^2 - y_1 + O(|x_1|^8), \\ \dot{y}_1 = \frac{y_1}{\alpha+2\beta+4} [-128(\beta+14)x_1^6 + 64(\beta+12)x_1^5 - 32(\beta+10)x_1^4 \\ \quad + 16(\beta+8)x_1^3 - 8(\beta+6)x_1^2 + 4(\beta+4)x_1 + O(|x_1|^7)] \end{cases}$$

(3) *Normalisation :*

Posons

$$K := \frac{4(\beta+4)}{\alpha+2\beta+4}.$$

Alors, par la transformation

$$x_2 = Kx_1, \quad y_2 = -Ky_1,$$

le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{(\alpha+2\beta+4)^6 \rho(\beta+12)x_2^7}{64(\beta+4)^6} - \frac{(\alpha+2\beta+4)^5 \rho(\beta+10)x_2^6}{32(\beta+4)^5} + \frac{(\alpha+2\beta+4)^4 \rho(\beta+8)x_2^5}{16(\beta+4)^4} \\ - \frac{(\alpha+2\beta+4)^3 \rho(\beta+6)x_2^4}{8(\beta+4)^3} + \frac{(\alpha+2\beta+4)^2 \rho x_2^3}{4(\beta+4)} - \frac{(\alpha+2\beta+4)^2 \rho x_2^2}{4(\beta+4)} + y_2 + O(|x_2|^8), \\ \dot{y}_2 = y_2 \left[-\frac{(\alpha+2\beta+4)^5(\beta+14)x_2^6}{32(\beta+4)^6} + \frac{(\alpha+2\beta+4)^4(\beta+12)x_2^5}{16(\beta+4)^5} - \frac{(\alpha+2\beta+4)^3(\beta+10)x_2^4}{8(\beta+4)^4} \right. \\ \left. + \frac{(\alpha+2\beta+4)^2(\beta+8)x_2^3}{4(\beta+4)^3} - \frac{(\alpha+2\beta+4)(\beta+6)x_2^2}{2(\beta+4)^2} + x_2 + O(|x_2|^7) \right] \end{cases} \quad (3.3.3)$$

dont la matrice jacobienne, évaluée à l'origine, est $\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: celle-ci est donc de Jordan.

(4) *Changement de variables normalisantes et d'échelle sur le temps :*

Proposition 3.3.1. *Il existe un changement de variables et un changement d'échelle sur le temps ramenant le système (3.3.3) à*

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + O(|X|^2)). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer une forme normale du système (3.3.3) telle que la droite invariante « $y_2 = 0$ » soit préservée. En effet, le système (3.3.3) est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_2 := y_2 + ax_2^2 h(x_2), \\ \dot{y}_2 := y_2 g(x_2), \quad \text{où} \\ a := -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)^2}{\beta + 4} < 0, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

$$h(x_2) = 1 + \sum_{i=1}^5 a_i x_2^i + O(|x_2|^6) \quad \text{et} \quad (3.3.6)$$

$$g(x_2) = x_2 + \sum_{i=2}^6 \alpha_{0i} x_2^i + O(|x_2|^7), \quad \text{avec} \quad (3.3.7)$$

$$a_1 = -1, \quad (3.3.8)$$

$$a_2 = \frac{(\alpha + 2\beta + 4)(\beta + 6)}{2(\beta + 4)^2}, \quad (3.3.9)$$

$$a_3 = -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)^2(\beta + 8)}{4(\beta + 4)^3}, \quad (3.3.10)$$

$$a_4 = \frac{(\alpha + 2\beta + 4)^3(\beta + 10)}{8(\beta + 4)^4}, \quad (3.3.11)$$

$$a_5 = -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)^4(\beta + 12)}{16(\beta + 4)^5}, \quad (3.3.12)$$

$$a_6 = \frac{(\alpha + 2\beta + 4)^5(\beta + 14)}{32(\beta + 4)^6} \dots \quad (3.3.13)$$

puis

$$\alpha_{02} = -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)(\beta + 6)}{2(\beta + 4)^2}, \quad (3.3.14)$$

$$\alpha_{03} = \frac{(\alpha + 2\beta + 4)^2(\beta + 8)}{4(\beta + 4)^3}, \quad (3.3.15)$$

$$\alpha_{04} = -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)^3(\beta + 10)}{8(\beta + 4)^4}, \quad (3.3.16)$$

$$\alpha_{05} = \frac{(\alpha + 2\beta + 4)^4(\beta + 12)}{16(\beta + 4)^5}, \quad (3.3.17)$$

$$\alpha_{06} = -\frac{(\alpha + 2\beta + 4)^5(\beta + 14)}{32(\beta + 4)^6} \dots \quad (3.3.18)$$

Considérons maintenant les changements de variables et d'échelle sur le temps suivants

$$X = x_2\sqrt{h(x_2)} := H(x_2), \quad Y = y_2, \quad t = k(X)T \quad \text{où} \quad k(X) := (H^{-1})'(X). \quad (3.3.19)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dT} \\ &= H'(x_2) [y_2 + ax_2^2 h(x_2)] k(X) \\ &= \left[(H^{-1})'(X) \right]^{-1} (Y + aX^2) (H^{-1})'(X) \\ &= Y + aX^2 \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{dy_2} \frac{dy_2}{dt} \frac{dt}{dT} \\ &= Y \left(H^{-1}(X) + \sum_{i=2}^6 \alpha_{0i} (H^{-1}(X))^i + \dots \right) (H^{-1})'(X). \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Or on a $X = H(x_2) := x_2 + \sum_{i=2}^6 A_i x_2^i + O(|x_2|^7)$; d'où

$$H^{-1}(X) = X + \sum_{i=2}^6 B_i X^i + O(|X|^7), \quad (3.3.22)$$

avec

$$\begin{aligned} B_2 &= -A_2, \quad B_3 = 2A_2^2 - A_3, \quad B_4 = -A_4 - 5A_2^3 + 5A_3A_2, \\ B_5 &= 6A_4A_2 + 14A_2^4 - 21A_3A_2^2 + 3A_3^2 - A_5, \\ B_6 &= 7A_5A_2 - 42A_2^5 + 84A_3A_2^3 - 28A_2A_3^2 - 28A_4A_2^2 - A_6 + 7A_3A_4. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Après avoir calculé les A_i et B_i , on obtient via (3.3.20) et (3.3.21) que

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + \alpha_2X^2 + \alpha_3X^3 + \alpha_4X^4 + \alpha_5X^5 + \alpha_6X^6 + O(|X|^7)), \end{cases} \quad \text{où} \quad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{\alpha\beta + 6\alpha - \beta^2 - 8\beta - 24}{2(\beta + 4)^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{\beta\alpha^2 + 8\alpha^2 - 128\alpha - 4\alpha\beta^2 - 40\alpha\beta + 16\beta + 128}{4(\beta + 4)^3} \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{16(\beta + 4)^4} [\beta^4 + 9\alpha\beta^3 + 16\beta^3 - 18\beta^2\alpha^2 + 152\beta^2 + 126\alpha\beta^2 + 2\alpha^3\beta \\ &\quad - 216\beta\alpha^2 + 896\alpha\beta + 448\beta + 20\alpha^3 - 760\alpha^2 + 3040\alpha - 1280], \\ \alpha_5 &= \frac{1}{16(\beta + 4)^5} [24\beta^3\alpha^2 - 16\alpha^3\beta^2 - 512\beta^2 + 384\beta^2\alpha^2 + 2688\beta\alpha^2 - 3328\beta \\ &\quad + \beta\alpha^4 - 1792\alpha\beta - 224\alpha^3\beta - 864\alpha^3 + 8064\alpha^2 + 12\alpha^4 - 13824\alpha + 3072] \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_6 = & -\frac{1}{256(\beta+4)^6} \left[-114688 + 860160\alpha + 237568\beta + 112\alpha^5 - 4000\beta^3\alpha^2 \right. \\ & -151040\alpha\beta - 72\beta^5 - 904\beta^4 + 232736\alpha^3 + 10800\alpha^3\beta^2 - 200\beta^4\alpha^2 \\ & -25\beta^5\alpha + 600\alpha^3\beta^3 - 38016\beta^2\alpha^2 - 550\alpha\beta^4 - 6144\alpha\beta^3 + 79120\alpha^3\beta \\ & -60608\alpha\beta^2 - 930944\alpha^2 - 200\beta^2\alpha^4 + 8\beta\alpha^5 - 3200\beta\alpha^4 - 13440\alpha^4 \\ & \left. -260992\beta\alpha^2 - 10880\beta^3 - 15360\beta^2 - 3\beta^6 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

□

(5) *Type topologique du point singulier* $B = (\frac{1}{2}, 0)$:

La 1-forme duale de (3.3.24) est

$$\omega_a = (Y + aX^2)dY - Y(X + \alpha_2X^2 + \alpha_3X^3 + \alpha_4X^4 + \alpha_5X^5 + \alpha_6X^6 + O(|X|^7))dX. \quad (3.3.27)$$

Alors, par [14], le *diagramme de Newton* de ω_a (ou de (3.3.24)) a pour *support*

$$S_{\omega_a} = \{(0, 2), (2, 1)\}.$$

Les termes principaux sont donc ceux du système tronqué de (3.3.24) suivant

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = YX. \end{cases} \quad (3.3.28)$$

Or, S_{ω_a} montre qu'on a dans le diagramme de Newton un segment dont la pente est $-\frac{1}{2}$: ceci suggère un éclatement dans lequel on s'approche de l'origine le long des paraboles d'équation $Y = kX^2$ (où $k \in [-\infty, +\infty]$). On considère donc l'*éclatement* avec poids suivant (où on remplace le point singulier $(X, Y) = (0, 0)$ par un cercle) :

$$\begin{cases} X = \epsilon\bar{X}, \\ Y = \epsilon^2\bar{Y}, \end{cases} \quad (3.3.29)$$

avec $\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = 1$.

En pratique, on simplifie les calculs en utilisant des cartes : considérons, par

exemple, les quatre cartes suivantes $\bar{X} = \mp 1$ et $\bar{Y} = \mp 1$. Posons $\eta = \mp 1$:

(a) Dans la direction X ($\bar{X} = \mp 1$), on a

$$X = \eta\epsilon, \quad Y = \epsilon^2\bar{Y};$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \eta\epsilon^2(\bar{Y} + a), \\ \dot{\bar{Y}} = \eta\epsilon\bar{Y} [1 - 2(\bar{Y} + a)]. \end{cases} \quad (3.3.30)$$

En divisant (3.3.30) par ϵ , on obtient (sans changer de notation) le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \eta\epsilon(\bar{Y} + a), \\ \dot{\bar{Y}} = \eta\bar{Y} [(1 - 2a) - 2\bar{Y}] \end{cases} \quad (3.3.31)$$

qui a deux points singuliers sur le lieu de l'éclatement « $\epsilon = 0$ » : $\bar{Y} = 0$ et $\bar{Y} = \frac{1-2a}{2} > 0$ dont les matrices jacobiniennes sont respectivement

$$\mathbf{Jac}(0, 0) := \begin{pmatrix} \eta a & 0 \\ 0 & \eta(1 - 2a) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{Jac}(0, \frac{1-2a}{2}) := \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} & 0 \\ 0 & -\eta(1 - 2a) \end{pmatrix}.$$

Or $a < 0$, alors $(0, 0)$ et $(0, \frac{1-2a}{2})$ sont des points de selle :

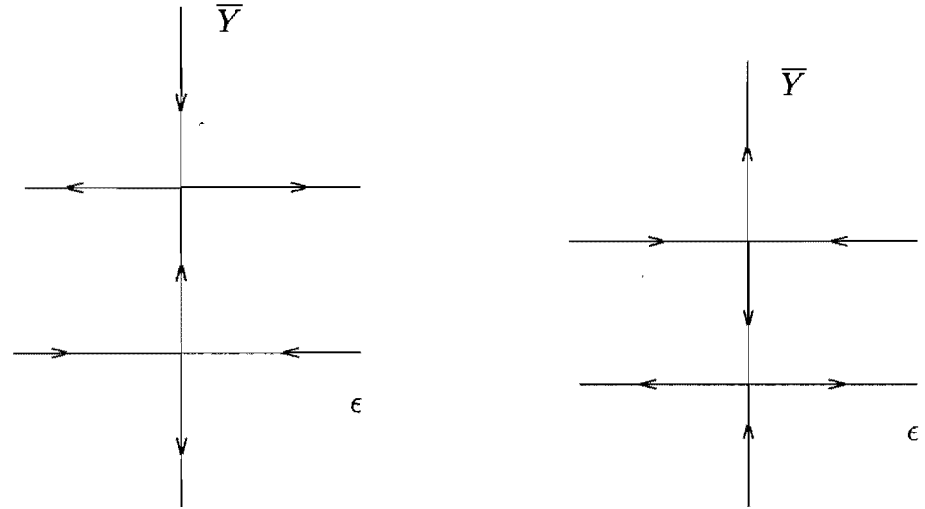
- Pour $\eta = 1$, on a l'éclatement dans la direction X ($\bar{X} = 1$) (voir la figure 3.1- (a)).
- Pour $\eta = -1$, on a l'éclatement dans la direction X ($\bar{X} = -1$) (voir la figure 3.1- (b)).

(b) Dans la direction Y ($\bar{Y} = \mp 1$), on a

$$X = \epsilon\bar{X}, \quad Y = \eta\epsilon^2;$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{\epsilon^2\bar{X}}{2}, \\ \dot{\bar{X}} = \epsilon \left[\eta + \bar{X}^2 \left(a - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{cases} \quad (3.3.32)$$



(a) Éclatement dans la direction X ($\bar{X} = 1$)

(b) Éclatement dans la direction X ($\bar{X} = -1$)

FIG. 3.1. Éclatements dans la direction X ($\bar{X} = \mp 1$).

En divisant (3.3.32) par ϵ , on obtient (sans changer de notation) le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{\epsilon \bar{X}}{2}, \\ \dot{\bar{X}} = \eta + \bar{X}^2 (a - \frac{1}{2}), \end{cases} \quad (3.3.33)$$

qui a deux points singuliers sur le lieu de l'éclatement « $\epsilon = 0$ » pour $\eta = 1$: ceux-ci correspondent aux mêmes points singuliers trouvés en (a).

Par conséquent, via (a) et (b), on a l'éclatement complet présenté à la figure 3.2 (dans les coordonnées $((\bar{X}, \bar{Y}), \epsilon)$) qui, finalement, donne le comportement des trajectoires au voisinage du point triple $B = (\frac{1}{2}, 0)$ (voir la figure 3.3) : Le point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$, de multiplicité 3, est donc un *col nilpotent* [16].

Remarque 3.3.1. On constate que, pour tout $\beta \geq 0$, α_2 s'annule en

$$\alpha = \alpha_\beta := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6} > 0 : \quad (3.3.34)$$

Si $\alpha = \alpha_\beta$ et $\beta \geq 0$, alors pour $i = 3, 4, 5, 6$, les coefficients de $X^i Y$ dans la forme normale (3.3.24), $\tilde{\alpha}_i$, deviennent :

$$\tilde{\alpha}_3 = -\frac{3(\beta^2 + 12\beta + 48)}{4(\beta + 6)^2} < 0,$$

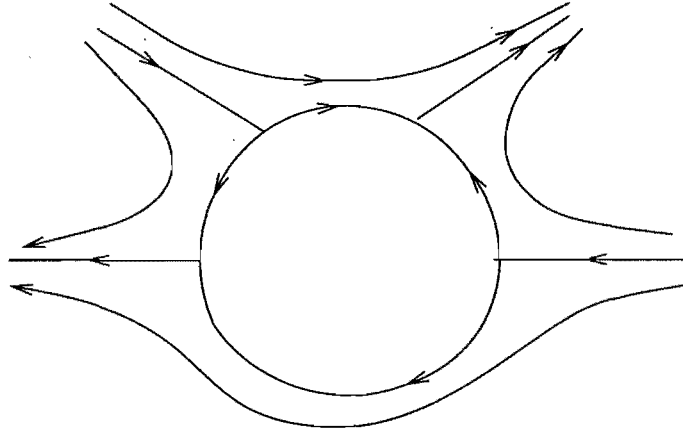
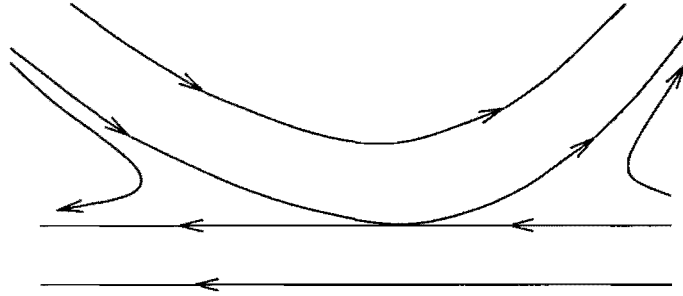


FIG. 3.2. Éclatement complet

FIG. 3.3. Type topologique du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$: *col nilpotent*

$$\tilde{\alpha}_4 = \frac{3(\beta^2 + 18\beta + 96)\beta}{8(\beta + 6)^3} \geq 0,$$

$$\tilde{\alpha}_5 = \frac{9(\beta^4 + 24\beta^3 + 288\beta^2 + 1728\beta + 3456)}{16(\beta + 6)^4} > 0 \quad (3.3.35)$$

$$\tilde{\alpha}_6 = -\frac{9(5\beta^4 + 150\beta^3 + 2076\beta^2 + 13320\beta + 29952)\beta}{64(\beta + 6)^5} \leq 0. \quad (3.3.36)$$

En particulier $\tilde{\alpha}_4|_{\beta=0} = \tilde{\alpha}_6|_{\beta=0} = 0$.

Le théorème suivant montre qu'on peut se débarrasser du terme $\tilde{\alpha}_3$ tout en préservant la droite invariante « $Y = 0$ ».

Théorème 3.3.1. *Le système*

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + \tilde{\alpha}_3 X^3 + \tilde{\alpha}_4 X^4 + O(|X|^5)), \end{cases} \quad (3.3.37)$$

est, pour $k > 5$, C^k -équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + \tilde{\alpha}_4 X^4 + O(|X|^5)) + Y^2 Q(X), \\ \text{où } Q(X) = \left(\frac{2\tilde{\alpha}_3}{2a-1}\right) X + O(|X|^3). \end{cases} \quad (3.3.38)$$

Démonstration. En effet, soit

$$K(X_1) = 1 + bX_1^2. \quad (3.3.39)$$

Cherchons un changement de variables

$$X = H(X_1), Y = Y_1 K(X_1) \quad (3.3.40)$$

et un changement d'échelle sur le temps

$$t = k(X_1)T \quad (3.3.41)$$

qui transforment le système (3.3.37) en un système de la forme (3.3.38).

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dT} &= \frac{dX_1}{dX} \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} \\ &= (H^{-1})' (H(X_1)) [Y_1 K(X_1) + aH(X_1)^2] k(X_1). \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Or, on veut

$$\begin{cases} (H^{-1})' (H(X_1)) K(X_1) k(X_1) = 1, \\ (H^{-1})' (H(X_1)) H(X_1)^2 k(X_1) = X_1^2, \end{cases} \quad (3.3.43)$$

d'où

$$\frac{H(X_1)^2}{K(X_1)} = X_1^2 : \quad (3.3.44)$$

ceci est vrai si

$$H(X_1) = X_1 \sqrt{K(X_1)}. \quad (3.3.45)$$

De plus, $H^{-1} \circ H(X_1) = X_1$ implique que $(H^{-1})' (H(X_1)) = (H'(X_1))^{-1}$. Ainsi, la première égalité de (3.3.43) donne

$$k(X_1) = \frac{H'(X_1)}{K(X_1)}. \quad (3.3.46)$$

Ainsi, avons-nous

$$\dot{X}_1 = Y_1 + aX_1^2. \quad (3.3.47)$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dT} &= \frac{d\left(\frac{Y}{K(X_1)}\right)}{dT} \\ &= \frac{1}{K(X_1)} \frac{dY}{dT} - \frac{K'(X_1)}{K(X_1)^2} Y \frac{dX_1}{dT}, \quad \text{où } \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} \\ &= Y_1 k(X_1) [H(X_1) + \tilde{\alpha}_3 H(X_1)^3 + \tilde{\alpha}_4 H(X_1)^4 + \dots] - \frac{K'(X_1)}{K(X_1)} Y_1 (Y_1 + aX_1^2) \\ &= Y_1 \left[k(X_1) H(X_1) + \tilde{\alpha}_3 k(X_1) H(X_1)^3 + \tilde{\alpha}_4 k(X_1) H(X_1)^4 - \frac{K'(X_1)}{K(X_1)} aX_1^2 + \dots \right] \\ &\quad - Y_1^2 \frac{K'(X_1)}{K(X_1)}. \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

Alors, par (3.3.48), (3.3.39), (3.3.45) et (3.3.46), on a que

$$\frac{dY_1}{dT} = Y_1 [X_1 + (b + \tilde{\alpha}_3 - 2ab) X_1^3 + \tilde{\alpha}_4 X_1^4 + O(|X_1|^5)] + Y_1^2 Q(X_1), \quad \text{où} \quad (3.3.49)$$

$Q(X_1) = 2bX_1 + O(|X_1|^3)$. On note que le $\tilde{\alpha}_4$ est inchangé sous le changement utilisé.

Pour éliminer le terme en $Y_1 X_1^3$ dans (3.3.49), on résout l'équation d'inconnue b suivante

$$b + \tilde{\alpha}_3 - 2ab = 0 :$$

elle a pour solution

$$b = \frac{\tilde{\alpha}_3}{2a - 1}. \quad (3.3.50)$$

Donc, pour $b = \frac{\tilde{\alpha}_3}{2a-1}$, par (3.3.45) et (3.3.46), il vient que (3.3.40) et (3.3.41) sont respectivement les changements de variables et d'échelle sur le temps transformant le système (3.3.37) en un système de la forme (3.3.38). \square

Posons

$$\nu_1 := \rho - 4\lambda, \nu_2 := \delta - \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \quad \text{et } \nu := (\nu_1, \nu_2). \quad (3.3.51)$$

Dans la suite de cette section, nous allons étudier le système (0.0.11) lorsque le paramètre $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ est dans un voisinage de $(0, 0)$ et que (x, y) est dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, 0)$.

Proposition 3.3.2. *Si (x, y, ν_1, ν_2) est dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, alors le système (0.0.11) est topologiquement orbitalement équivalent à*

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{Y} + q(\bar{X})r(\bar{X}), \\ \dot{\bar{Y}} = \bar{Y}f(\bar{X}), \quad \text{où} \end{cases} \quad (3.3.52)$$

$$q(\bar{X}) := a\bar{X}^2 + \mu_0(\nu), \quad (3.3.53)$$

$$r(\bar{X}) := 1 + O(|\nu|) (1 + O(|\bar{X}|)), \quad (3.3.54)$$

et

$$f(\bar{X}) := O(|\nu|) + (1 + O(|\nu|))\bar{X} + \sum_{i=2}^4 (\alpha_i + O(|\nu|))\bar{X}^i + O(|\bar{X}|^5), \quad (3.3.55)$$

les α_i étant définis en (3.3.25) et (3.3.26).

Démonstration. Afin d'alléger le texte et pour ne pas se répéter, nous allons plutôt expliquer la méthode et, lorsque c'est utile, nous présenterons certaines expressions. En effet :

- Par (3.3.51) et la translation « $x_1 = x - \frac{1}{2}$, $y_1 = y$ », (0.0.11) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\nu_1 + 4\lambda) \left(\frac{1}{4} - x_1^2\right) - y_1 p \left(x_1 + \frac{1}{2}\right), \\ \dot{y}_1 = y_1 \left[-\nu_2 - \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} + p \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\right]. \end{cases} \quad (3.3.56)$$

- On divise (3.3.56) par

$$p \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2x_1 + 1)^2}{4\alpha x_1^2 + 4(\alpha + \beta)x_1 + \alpha + 2\beta + 4} > 0 :$$

on obtient, sans changer de notation, un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(\frac{\alpha + 2\beta + 4}{4}\right) \nu_1 - (\beta + 4)\nu_1 x_1 - y_1 + [(8 - \alpha)\nu_1 - 4\lambda(\alpha + 2\beta + 4)] x_1^2 \\ \quad + O(|\nu_1, x_1|^3), \\ \dot{y}_1 = y_1 [-(\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 + K_{\nu_2} x_1 + O(|\nu_2, x_1|^2)], \quad \text{où} \end{cases} \quad (3.3.57)$$

$$K_{\nu_2} = \frac{4(\beta + 4)}{\alpha + 2\beta + 4} [1 + \nu_2(\alpha + 2\beta + 4)].$$

• Par la transformation

$$x_2 = K_{\nu_2} x_1, \quad y_2 = -K_{\nu_2} y_1,$$

(3.3.57) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (\beta + 4) [1 + (\alpha + 2\beta + 4)\nu_2] \nu_1 - (\beta + 4)\nu_1 x_2 + y_2 \\ + a x_2^2 [(1 + O(|\nu|)) + (a_1 + O(|\nu|))x_2 + (a_2 + O(|\nu|))x_2^2 + (a_3 + O(|\nu|))x_2^3 + O(|x_2|^4)], \\ \dot{y}_2 = y_2 [-(\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 + x_2 + (\alpha_{02} + O(|\nu|))x_2^2 + (\alpha_{03} + O(|\nu|))x_2^3 \\ + (\alpha_{04} + O(|\nu|))x_2^4 + O(|x_2|^5)], \quad \text{où} \end{cases} \quad (3.3.58)$$

a , les a_i et α_{0i} sont les mêmes que précédemment (voir respectivement (3.3.5), (3.3.8), (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12), (3.3.14), (3.3.15) et (3.3.16)).

• \dot{x}_2 est de la forme $f_2(x_2, \nu_1, \nu_2) + y_2$, où

$$f_2(0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0, 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(0, 0, 0) = a < 0.$$

Alors, par le théorème de préparation de Weierstrass [12], il existe une fonction analytique u dans un voisinage de $(0, 0, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ et deux fonctions analytiques $\epsilon_0(\nu_1, \nu_2)$ et $\epsilon_1(\nu_1, \nu_2)$ dans un voisinage $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$ telles que $u(0, 0, 0) = a < 0$, $\epsilon_0(0, 0) = 0$, $\epsilon_1(0, 0) = 0$ et

$$f_2(x_2, \nu_1, \nu_2) = [\epsilon_0(\nu_1, \nu_2) + \epsilon_1(\nu_1, \nu_2)x_2 + x_2^2] u(x_2, \nu_1, \nu_2).$$

Il est clair que $u(x_2, 0, 0) = ah(x_2)$, où $h(x_2)$ est défini au (3.3.6). Or, pour $\nu := (\nu_1, \nu_2)$, on a

$$\epsilon_0(\nu) + \epsilon_1(\nu)x_2 + x_2^2 = \left(x_2 + \frac{\epsilon_1(\nu)}{2}\right)^2 - \frac{\epsilon_1(\nu)^2 - 4\epsilon_0(\nu)}{4}.$$

Ainsi

$$\dot{x}_2 = y_2 + \left[\left(x_2 + \frac{\epsilon_1(\nu)}{2}\right)^2 - \frac{\epsilon_1(\nu)^2 - 4\epsilon_0(\nu)}{4} \right] u(x_2, \nu_1, \nu_2), \quad \text{avec} \quad (3.3.59)$$

$u(x_2, 0, 0) = ah(x_2)$, où $h(x_2)$ est défini au (3.3.6).

• Par la translation « $X = x_2 + \frac{\epsilon_1(\nu)}{2}$, $Y = y_2$ », alors (via (3.3.59) et la deuxième

équation de (3.3.58)) le système (3.3.58) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + (aX^2 + \mu_0(\nu_1, \nu_2)) h_2(X), \\ \dot{Y} = Y \left[-(\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) + (1 + O(|\nu|))X \right. \\ \left. + (\alpha_{02} + O(|\nu|))X^2 + (\alpha_{03} + O(|\nu|))X^3 + (\alpha_{04} + O(|\nu|))X^4 + O(|X|^5) \right], \quad \text{où} \end{cases} \quad (3.3.60)$$

$$\mu_0(\nu_1, \nu_2) := -\frac{a[\epsilon_1(\nu_1, \nu_2)^2 - 4\epsilon_0(\nu_1, \nu_2)]}{4},$$

$$h_2(X) := 1 + O(|\nu|) + \sum_{i=1}^3 (a_i + O(|\nu|))X^i + O(|X|^4),$$

les a_i étant les mêmes que précédemment. Par la configuration de la forme normale (3.3.24) (c'est-à-dire (0.0.11) au voisinage de $B = (\frac{1}{2}, 0)$ pour $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$), la famille (3.3.60) (c'est-à-dire (0.0.11) au voisinage de $B = (\frac{1}{2}, 0)$ lorsque (ν_1, ν_2) est dans un voisinage de $(0, 0)$) peut donc s'écrire sous la forme voulue, à savoir (3.3.52). \square

Aussi, avons-nous la proposition suivante.

Proposition 3.3.3. (1) Si $\alpha_2 \neq 0$, alors le système (3.3.52) est topologiquement orbitalement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y (\mu_3 + X \mp X^2 + X^3 b_1(X, \nu)) + Y^2 Q_1(X, \nu), \\ \text{où } a(\nu) < 0, \quad b_1(X, 0) = \alpha_3 + O(|X|) \quad \text{et} \quad Q_1(X, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.61)$$

(2) Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta > 0$, alors le système (3.3.52) est topologiquement orbitalement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y [\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + \hat{\alpha}_3 X^3 + X^4 + X^5 b_2(X, \nu)] + Y^2 Q_2(X, \nu), \quad \text{où } a(\nu) < 0, \\ \hat{\alpha}_3 := (\tilde{\alpha}_3 + O(|\nu|)) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{2}{3}}, \quad b_2(X, 0) = \tilde{\alpha}_5 + O(|X|), \quad Q_2(X, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.62)$$

Démonstration. Considérons les changements de variable et d'échelle sur le temps suivants

$$\bar{X} = X, \bar{Y} = Yr(\bar{X}), \bar{t} = \frac{t}{r(\bar{X})}. \quad (3.3.63)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{X} &:= \frac{dX}{dT} = \frac{d\bar{X}}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} \\ &= [\bar{Y} + q(\bar{X})r(\bar{X})] \frac{1}{r(\bar{X})} \\ &= [Yr(X) + q(X)r(X)] \frac{1}{r(X)} \\ &= Y + q(X), \quad \text{où} \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

$q(X) = a\bar{X}^2 + \mu_0(\nu)$, avec

$$\mu_0(\nu_1, \nu_2) = -\frac{a[\epsilon_1(\nu_1, \nu_2)^2 - 4\epsilon_0(\nu_1, \nu_2)]}{4}. \quad (3.3.65)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{Y} &:= \frac{dY}{dt} = \frac{d\bar{X}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left[\frac{\bar{Y}}{r(\bar{X})} \right] + \frac{d\bar{Y}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left[\frac{\bar{Y}}{r(\bar{X})} \right] \\ &= \frac{d\bar{X}}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} \left[\bar{Y} \left(-\frac{r'(\bar{X})}{r(\bar{X})^2} \right) \right] + \frac{d\bar{Y}}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} \left[\frac{1}{r(\bar{X})} \right] \\ &= [\bar{Y} + q(\bar{X})r(\bar{X})] \frac{1}{r(\bar{X})} \left[\bar{Y} \left(-\frac{r'(\bar{X})}{r(\bar{X})^2} \right) \right] + \bar{Y} f(\bar{X}) \left[\frac{1}{r(\bar{X})} \right]^2 \\ &= [Yr(X) + q(X)r(X)] \left[-\frac{Yr'(X)}{r(X)^2} \right] + Yr(X)f(X) \left[\frac{1}{r(X)} \right]^2 \\ &= Y \left[\frac{f(X)}{r(X)} - \frac{r'(X)q(X)}{r(X)} \right] + Y^2 \left[-\frac{r'(X)}{r(X)} \right], \quad \text{où} \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

$f(X)$, $r(X)$ et $q(X)$ sont définis en (3.3.52). Ainsi

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + q(X), \\ \dot{Y} = Y \left[(\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) + (1 + O(|\nu|))X + (\alpha_2 + O(|\nu|))X^2 \right. \\ \quad \left. + (\alpha_3 + O(|\nu|))X^3 + (\alpha_4 + O(|\nu|))X^4 + O(|X|^5) \right] + Y^2 Q_1(X, \nu) \\ \text{où } Q_1(X, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.67)$$

Posons $K_1 := 1 + O(|\nu|)$. Par la transformation $\tilde{X} = K_1 X$, $\tilde{Y} = K_1 Y$, le système (3.3.67) devient, *sans changer de notation*,

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + (1 + O(|\nu|)) a X^2 + \mu_0(\nu) (1 + O(|\nu|)), \\ \dot{Y} = Y \left[\left((\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) \right) + X + (\alpha_2 + O(|\nu|)) X^2 \right. \\ \left. + (\alpha_3 + O(|\nu|)) X^3 + (\alpha_4 + O(|\nu|)) X^4 + O(|X|^5) \right] + Y^2 Q_1(X, \nu), \end{cases} \quad (3.3.68)$$

où $\mu_0(\nu)$ est donné au (3.3.65). Deux cas s'imposent :

- Si $\alpha_2 \neq 0$, posons $\bar{\alpha}_2 := \alpha_2 + O(|\nu|)$. Alors, par la transformation $\tilde{X}_1 = |\bar{\alpha}_2| X$, $\tilde{Y}_1 = \bar{\alpha}_2^2 Y$, et après avoir multiplié le système obtenu par $|\bar{\alpha}_2|$, le système (3.3.68) devient, *sans changer de notation*,

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + (1 + O(|\nu|)) a X^2 + \mu_0(\nu) (1 + O(|\nu|)) |\alpha_2 + O(|\nu|)|, \\ \dot{Y} = Y \left[\left((\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) \right) |\alpha_2 + O(|\nu|)| + X \mp X^2 + X^3 b_1(X, \nu) \right] \\ \left. + Y^2 Q_1(X, \nu), \quad \text{où } b_1(X, 0) = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + O(|X|) \text{ et } Q_1(X, 0) = 0. \right. \end{cases} \quad (3.3.69)$$

Donc, en posant

$$\begin{aligned} a(\nu) &:= (1 + O(|\nu|)) a < 0, \quad \mu_2 := \mu_0(\nu) (1 + O(|\nu|)) |\alpha_2 + O(|\nu|)|, \\ \mu_3 &:= \left((\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) \right) |\alpha_2 + O(|\nu|)|, \end{aligned}$$

on a le résultat escompté.

- Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta > 0$, alors $\alpha_2 + O(|\nu|)$ (le coefficient de YX^2 dans (3.3.68)) devient $O(|\nu|)$ (indépendant des deux premiers). Posons $\bar{\alpha}_4 := \tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|) > 0$ (où, par la remarque 3.3.1, $\tilde{\alpha}_4 > 0$ pour $\beta > 0$). Ainsi, par la transformation $\tilde{X}_1 = (\bar{\alpha}_4)^{\frac{1}{3}} X$, $\tilde{Y}_1 = (\bar{\alpha}_4)^{\frac{2}{3}} Y$, et après avoir multiplié le système obtenu par $(\bar{\alpha}_4)^{\frac{1}{3}}$, le système (3.3.68) devient, *sans changer de notation*,

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + (1 + O(|\nu|)) a X^2 + \mu_0(\nu) (1 + O(|\nu|)) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{\frac{1}{3}} \\ \dot{Y} = Y \left[\left((\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) \right) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{\frac{1}{3}} + X \right. \\ \left. + O(|\nu|) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{1}{3}} X^2 + (\tilde{\alpha}_3 + O(|\nu|)) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{2}{3}} X^3 + X^4 \right. \\ \left. + X^5 b_2(X, \nu) \right] + Y^2 Q_2(X, \nu), \\ \text{où } b_2(X, 0) = \tilde{\alpha}_5 \tilde{\alpha}_4^{-\frac{4}{3}} + O(|X|) \text{ et } Q_2(X, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.70)$$

Donc, en posant

$$\begin{aligned} a(\nu) &:= (1 + O(|\nu|)) a < 0, \quad \mu_2 := \mu_0(\nu) (1 + O(|\nu|)) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{\frac{1}{3}}, \\ \mu_3 &:= \left((\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) \right) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{\frac{1}{3}}, \\ \mu_4 &:= O(|\nu|) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

on a le résultat escompté. \square

Les propositions 3.3.2 et 3.3.3 nous permettent donc de conclure que :

Théorème 3.3.2. *Si $\alpha \neq \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$ (resp. $\alpha = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$ avec $\beta > 0$), alors le point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$, de multiplicité 3, est un col nilpotent de codimension 3 (resp. de codimension 4). Cependant, dans notre système, la contrainte que la droite d'équation $Y = 0$ est invariante diminue la codimension de un.*

Nous y reviendrons au chapitre suivant car la bifurcation de col nilpotent de codimension 3 sera le centre organisateur de notre diagramme de bifurcations.

Remarque 3.3.2. *Dans la suite, $\hat{\alpha}_3 := (\tilde{\alpha}_3 + O(|\nu|)) (\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{2}{3}} < 0$ (défini à la proposition 3.3.3) sera encore noté par $\tilde{\alpha}_3 < 0$.*

3.3.2. Analyse du cas $\beta = 0$

On sait que pour $\alpha_\beta := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$, le α_2 de la forme normale (3.3.24) s'annule en $\alpha = \alpha_\beta$. Par le théorème (3.3.2) : le point triple $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un col nilpotent de codimension 2 (resp. de codimension 3) lorsque $\alpha \neq \alpha_\beta$ et $\beta \geq 0$ (resp. lorsque $\alpha = \alpha_\beta$ et $\beta > 0$). Dans ce qui suit, nous allons analyser la forme normale du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$ lorsque $\alpha = \alpha_\beta$ et $\beta = 0$. En effet, nous savons que les $\tilde{\alpha}_i$ (où $i = 2, \dots, 6$) sont les coefficients respectifs de x^2y , x^3y , x^4y , x^5y et x^6y dans la forme normale du point nilpotent triple $B = (\frac{1}{2}, 0)$ lorsque $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha_\beta$.

On conjecture que :

Conjecture 3.3.1. *Si $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha_\beta$ (c'est-à-dire $\alpha = 4$), alors la forme normale (3.3.24) est invariante sous le changement*

$$X \mapsto -X, t \mapsto -t.$$

C'est-à-dire que le système est réversible et donc de codimension infinie.

Illustration :

En effet, si $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha_\beta$, alors par (3.3.34) on a que $\alpha = 4$ et, par la remarque 3.3.1, on a que :

$\tilde{\alpha}_3 < 0$ et $\tilde{\alpha}_5 > 0$;

$$\tilde{\alpha}_4 = \tilde{\alpha}_6 = 0. \quad (3.3.71)$$

Ainsi, pour $\beta = 0$ et $\alpha = 4$, la forme normale (3.3.24) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y(X + \tilde{\alpha}_3 X^3 + \tilde{\alpha}_5 X^5 + O(|X|^7)) \end{cases} \text{ avec } \tilde{\alpha}_3 < 0 \text{ et } \tilde{\alpha}_5 > 0. \quad (3.3.72)$$

Ceci laisserait supposer que, pour $\beta = 0$ et $\alpha = 4$, la forme normale est invariante sous le changement

$$X \mapsto -X, t \mapsto -t.$$

C'est-à-dire que le système est réversible et donc de codimension infinie.

Chapitre 4

ÉTUDE DES DÉPLOIEMENTS DU COL NILPOTENT

4.1. PRÉSENTATION DU CHAPITRE

Il s'agit de faire une étude approfondie des bifurcations des deux familles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y [\mu_3 + X + \epsilon_2 X^2 + X^3 b_1(X, \nu)] + Y^2 Q_1(X, \nu), \\ \text{où } b_1(X, 0) = \alpha_3 + O(|X|) \text{ et } Q_1(X, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

et

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y [\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + \tilde{\alpha}_3 X^3 + X^4 + X^5 b_2(X, \nu)] + Y^2 Q_2(X, \nu), \\ \text{où } b_2(X, 0) = \tilde{\alpha}_5 + O(|X|) \text{ et } Q_2(X, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

avec $\epsilon_2 = \mp 1$, α_3 défini en (3.3.25), $\tilde{\alpha}_3 < 0$, $\tilde{\alpha}_5 < 0$ et, pour $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ suffisamment petit, $a(\nu) < 0$ (voir le (3.3.51), la proposition 3.3.3 et la remarque 3.3.2) et $\mu_i := \mu_i(\nu)$.

Nos explorations préliminaires semblent montrer que l'ajout des termes en Y^2 ne change pas le diagramme de bifurcations (qualitativement), mais le temps nous a manqué pour faire une étude complète. Nous présenterons donc l'étude des modèles (4.1.1) et (4.1.2) sans terme en Y^2 . Expérimentalement, on sait que dans ce genre de problèmes (soit les bifurcations de points nilpotents), l'étude des

familles standard de (4.1.1) et (4.1.2),

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y(\mu_3 + X + \epsilon_2 X^2), \end{cases} \quad (4.1.3)$$

et

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y(\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + \tilde{\alpha}_3 X^3 + X^4), \end{cases} \quad (4.1.4)$$

respectivement, est suffisante pour comprendre l'organisation qualitative du diagramme de bifurcations. Nous ferons la conjecture que c'est encore le cas ici et nous nous contenterons d'étudier les familles standard. Dans le cas de (4.1.4), nous n'avons pas réussi à faire un changement de variables qui nous débarrasse du terme en YX^3 de la deuxième équation, tout en conservant la droite invariante. Cependant, les calculs montrent que ce terme n'est pas pertinent. Dans toute la suite, nous ferons $a(\nu) = a$ pour simplifier cette notation.

4.2. ÉTUDE DE LA SOUS-FAMILLE (4.1.3)

Il nous suffit de traiter du cas où $\epsilon_2 = 1$ qui, par la transformation

$$(X, Y, \mu_2, \mu_3, t) \longmapsto (-X, Y, \mu_2, -\mu_3, -t),$$

nous permettra d'obtenir les résultats de celui où $\epsilon_2 = -1$.

4.2.1. Points singuliers et leur type

Dans un petit voisinage de l'origine, pour des petites valeurs des paramètres, les points singuliers de (4.1.3) sont :

$$P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0\right), \quad P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0\right), \quad P_0 := (X_0, Y_0) \quad (4.2.1)$$

où $\mu_2 \geq 0$ et (X_0, Y_0) est unique tel que

$$\begin{cases} h_2(X_0, \mu_3) := \mu_3 + X_0 + X_0^2 = 0, \\ Y_0 = -(\mu_2 + aX_0^2). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

En effet, on a que $h_2(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial h_2}{\partial X_0}(0, 0) = 1$; d'où, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de $(X_0, \mu_3) = (0, 0)$ sur lequel $h_2(X_0, \mu_3) = 0$ si,

et seulement si $X_0 = X_0(\mu_3)$ avec $X_0(0) = 0$; ce qui, par la deuxième équation de (4.2.2), implique l'unicité de $Y_0 = Y_0(\mu_2, \mu_3)$ tel que $Y_0(0, 0, 0) = 0$ (dans un voisinage de $(Y_0, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, 0)$) vérifiant la deuxième équation de (4.2.2).

En conséquence, il existe un seul point singulier, $P_0 := (X_0, Y_0)$, dans un voisinage de $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, vérifiant les équations de (4.2.2).

La matrice jacobienne en (X, Y) de (4.1.3) est donnée par :

$$\text{Jac}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 2aX & 1 \\ Y(1+2X) & \mu_3 + X + X^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Ainsi

$$\text{Jac}\left(\mp\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \mp 2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} & 1 \\ 0 & \mu_3 \mp \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_2}{a} \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

et

$$\text{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{pmatrix} 2aX_0 & 1 \\ Y_0(1+2X_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Posons

$$X_1 := -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \quad (4.2.6)$$

et

$$X_2 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}. \quad (4.2.7)$$

On a la

Proposition 4.2.1. X_0, Y_0, X_1, X_2 et P_0, P_1, P_2 étant définis plus haut (voir aussi la figure 4.4 ci-après) :

- si $X_0 \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$, alors $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un point de selle hyperbolique ;
- si $X_0 \in]X_1, X_2[$, alors $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un anti-selle (c'est-à-dire un point dont le déterminant du jacobien est positif) ;
- si $X_0 = X_1$ ou $X_0 = X_2$, alors $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un col-noeud ;
- si $\mu_3 > \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_1 est un noeud répulsif ;
- si $\mu_3 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_1 est un point de selle hyperbolique ;
- si $\mu_3 = \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_1 est un col-noeud ;
- si $\mu_3 > -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_2 est un point de selle hyperbolique ;

- si $\mu_3 < -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_2 est un noeud attractif;
- si $\mu_3 = -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors P_2 est un col-noeud.

Démonstration. En effet, on a que :

$Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) = -Y_0(1 + 2X_0)$: X_0 étant petit, alors $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0))$ est du signe de $-Y_0 = \mu_2 + aX_0^2$ (voir (4.2.2)).

Or, il est clair que : $\mu_2 + aX_0^2 > 0$ si, et seulement si $X_0 \in]X_1, X_2[$; $\mu_2 + aX_0^2 = 0$ si, et seulement si $X_0 = X_1$ ou $X_0 = X_2$. Donc :

- si $X_0 \in]X_1, X_2[$, alors $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) > 0$: $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un anti-selle;
- si $X_0 \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$, alors $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) < 0$: $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un point de selle hyperbolique;
- si $X_0 = X_1$ ou $X_0 = X_2$, $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) = 0$: $P_0 := (X_0, Y_0)$ est un point double où $Y_0 = 0$ et X_0 vérifie les deux équations de (4.2.2).

$\mathbf{Jac}(-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \mathbf{0})$ a deux valeurs propres qui sont $-2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} > 0$ et $\lambda_1(\mu_2, \mu_3) := \mu_3 - \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_2}{a}$: il vient que $\lambda_1(\mu_2, \mu_3) > 0$ (resp. < 0) si $\mu_3 > \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$ (resp. $\mu_3 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$), et $\lambda_1(\mu_2, \mu_3) = 0$ si $\mu_3 = \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$.

De même, $\mathbf{Jac}(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \mathbf{0})$ a deux valeurs propres qui sont $2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} < 0$ et $\lambda_2(\mu_2, \mu_3) := \mu_3 + \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_2}{a}$: il vient que $\lambda_2(\mu_2, \mu_3) > 0$ (resp. < 0) si $\mu_3 > -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$ (resp. $\mu_3 < -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$), et $\lambda_2(\mu_2, \mu_3) = 0$ si $\mu_3 = -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$. Ainsi :

- si $\mu_3 > \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un noeud répulsif;
- si $\mu_3 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un point de selle hyperbolique;
- si $\mu_3 = \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un col-noeud répulsif (comme on le verra à la proposition 4.2.2).
- si $\mu_3 > -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un point de selle hyperbolique;
- si $\mu_3 < -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un noeud attractif;
- si $\mu_3 = -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_2}{a}$, alors $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ est un col-noeud attractif (comme on le verra à la proposition 4.2.2). \square

Sachant que

$$Trace(\mathbf{Jac}(X_0, Y_0)) = 2aX_0, \quad (4.2.8)$$

alors celle-ci est nulle si, et seulement si $X_0 = 0$; d'où, par (4.2.2), $Y_0 = -\mu_2$, $\mu_3 = 0$ et, ainsi, $\text{Det}(\text{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) = \mu_2$:

Dans la suite, nous montrerons que : si $\mu_2 > 0$, alors nous aurons une bifurcation de Hopf d'ordre 1 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite d'équation $\mu_3 = 0$.

4.2.2. Bifurcations de col-noeud

Le résultat de cette sous-section est :

Proposition 4.2.2. *Il y a trois bifurcations de col-noeud (voir la figure 4.4 ci-après) : la première a pour équation*

$$(Cn_e) : \mu_2 = 0,$$

la deuxième et la troisième sont les courbes approximées par les équations respectives

$$(Cn_{a_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 < 0, \quad (Cn_{r_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 > 0.$$

La première se produit lorsque $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est attractif si $\mu_3 < 0$ et répulsif si $\mu_3 > 0$. La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est attractif. La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est répulsif.

Démonstration. En effet :

- La première se produit lorsque $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ et $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ se confondent c'est-à-dire $\mu_2 = 0$: elle a donc pour équation

$$(Cn_e) : \mu_2 = 0 : \tag{4.2.9}$$

En procédant comme au chapitre précédent, on voit facilement que ce col-noeud est attractif si $\mu_3 < 0$ et répulsif si $\mu_3 > 0$.

- La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$;
- La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$.

Pour ces deux derniers cas on a que :

$$\begin{cases} \mu_3 + X_0 + X_0^2 = 0 \\ \mu_2 + aX_0^2 = 0. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Posons $F(X) = \mu_2 + aX^2$ et $G(X) = \mu_3 + X + X^2$. Alors ces deux dernières bifurcations se produisent lorsque le résultant de f et g par rapport à X , $Res(f, g)$, est nul. Or, par le logiciel MAPLE, on a :

$$Res(f, g) = a\mu_2 + \mu_2^2 - 2a\mu_2\mu_3 + a^2\mu_3^2.$$

Mais ce qui nous intéresse c'est comment la courbe d'équation $Res(f, g) = 0$ se comporte au voisinage de $(\mu_2, \mu_3) = (0, 0)$: ses termes dominants sont alors $a\mu_2 + a^2\mu_3^2$. Donc ces deux dernières bifurcations de col-noeud ont lieu sur la courbe approximée par la parabole d'équation

$$(Cn_i) : \mu_2 = -a\mu_3^2 : \quad (4.2.11)$$

Par conséquent, la deuxième bifurcation de col-noeud a une équation approximée par

$$(Cn_{a_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 < 0,$$

alors que la troisième a une équation approximée par

$$(Cn_{r_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 > 0.$$

En procédant comme au chapitre précédent, on voit facilement que le col-noeud sur (Cn_{a_i}) est attractif alors que le col-noeud sur (Cn_{r_i}) est répulsif. \square

4.2.3. Bifurcation de Hopf

Le résultat sur la bifurcation de Hopf pour le système (4.1.3) est :

Proposition 4.2.3. *Lorsque $\mu_2 > 0$, nous avons une bifurcation de Hopf d'ordre 1 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite d'équation $(H_r) : \mu_3 = 0$, et le coefficient de Lyapunov correspondant, L_1 , est strictement positif.*

Démonstration. En effet, comme il a été vu lors de l'analyse du type de chaque point singulier, la bifurcation de Hopf se produit au voisinage du point singulier de coordonnées $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite $(H_r) : \mu_3 = 0$ telle que $\mu_2 > 0$. Alors, en utilisant successivement les deux transformations suivantes :

$$(H_1) : Y_1 = Y + \mu_2, X_1 = X \text{ et } (H_2) : Y_1 = -\sqrt{\mu_2}Z, X_1 = X,$$

le système (4.1.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{\mu_2}Z + aX^2 \\ \dot{Z} = \sqrt{\mu_2}X + \sqrt{\mu_2}X^2 + XZ + X^2Z \end{cases} \quad (4.2.12)$$

dont le premier coefficient de Lyapunov est déterminé par :

$$L_1 = -\frac{a\sqrt{\mu_2}}{8} > 0.$$

On a donc, par la théorie, un cycle limite répulsif quand $P_0 := (X_0, Y_0)$ est attractif c'est-à-dire $X_0 > 0$ (par (4.2.8)) ou encore que $\mu_3 = -X_0(1 + X_0) < 0$ (par (4.2.2)). \square

4.2.4. Positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (4.1.3) et (4.1.4)

La structure des séparatrices des points singuliers de l'axe des X , c'est-à-dire $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ (avec $X_1 := -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$ et $X_2 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$), pour les systèmes (4.1.3) et (4.1.4) est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. *Lorsque P_1 ou P_2 est un point de selle, sa séparatrice a une position comme sur la figure 4.1 : elle vient de la droite pour P_1 et de la gauche pour P_2 . En particulier, lorsque P_1 et P_2 sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 4.3.*

Démonstration. Les abscisses des points singuliers de l'axe des X , $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ (avec $X_1 := -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$ et $X_2 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$) sont, par la proposition 4.2.1, solutions de l'équation $aX^2 + \mu_2 = 0$. On s'intéresse aux positions des séparatrices de P_1 ou P_2 :

- Les séparatrices de P_1 et P_2 ne peuvent pas aller à l'infini dans la bande « $X \in$

$[X_1, X_2]$ ».

Pour cela, il suffit de montrer qu'entre les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$, la pente du champ de vecteurs, $\frac{dY}{dX}$, est bornée. En effet, les familles (4.1.3) et (4.1.4) étant locales, alors celles-ci sont définies pour $|X| < K$, $|Y| < K$. Pour que les séparatrices puissent sortir du voisinage, il faut que, pour μ_2 assez petit, la pente du champ de vecteurs dans la bande « $X \in [X_1, X_2]$ » soit forte. Soit Y tel que $|Y| = \frac{K}{2}$. Pour que la trajectoire d'un point (X, Y) avec $|Y| = \frac{K}{2}$ et $X \in [X_1, X_2]$ puisse sortir de la bande par le haut, il faut une pente moyenne strictement supérieure à $\frac{K}{4X_2}$ dans la région « $X \in [X_1, X_2], |Y| > \frac{K}{2}$ ». Nous allons montrer que, pour μ_2 assez petit, la valeur absolue de la pente du champ de vecteurs est strictement inférieure à $\frac{K}{8X_2}$ dans cette région.

En effet, soit μ_2 assez petit pour que $\forall X \in [X_1, X_2], |f(X)| < K$ (où $\dot{Y} := Yf(X)$) et aussi

$$|\dot{X}| = |Y + aX^2 + \mu_2| > \frac{K}{3}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{dY}{dX} \right| &< \frac{|\dot{Y}|}{|\dot{X}|} \\ &\leq \frac{3|Y||f(X)|}{K} \\ &< 3K. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Alors,

$$\left| \frac{dY}{dX} \right| < \frac{K}{8X_2} \quad \text{si } \mu_2 \text{ est assez petit.} \tag{4.2.14}$$

Donc les séparatrices des points singuliers P_1 et P_2 ne vont pas à l'infini entre les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$.

Il y a donc quatre possibilités pour les séparatrices de gauche et quatre possibilités pour les séparatrices de droite (voir la figure 4.1).

- Si P_1 et P_2 sont des points de selle, alors les coordonnées du troisième point

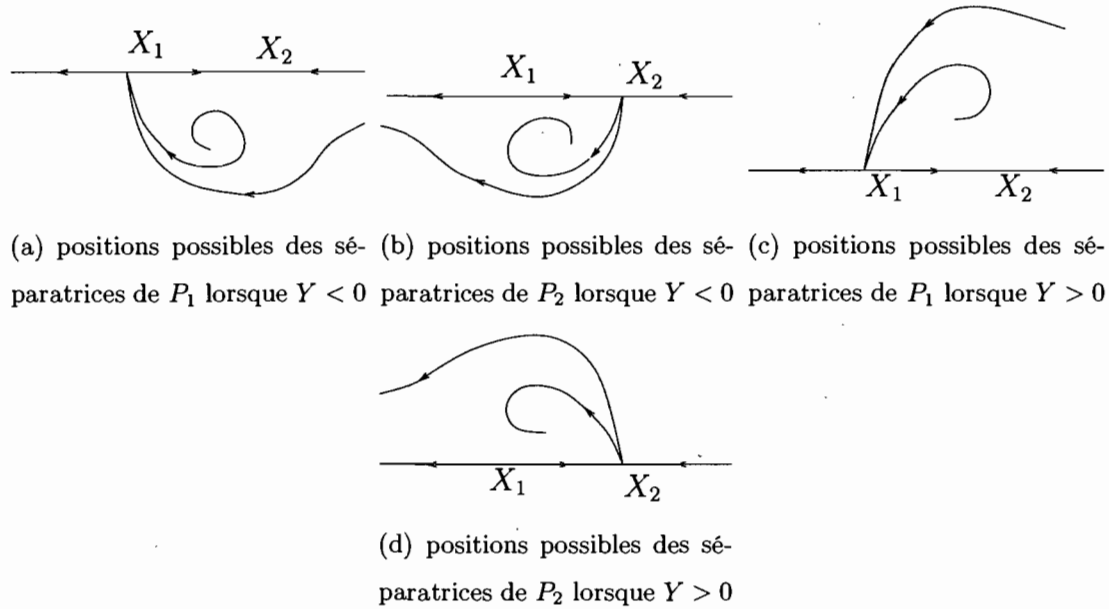


FIG. 4.1. Positions possibles des séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (4.1.3) et (4.1.4)

singulier $P_0 := (X_0, Y_0)$ vérifient

$$\begin{cases} X_1 < X_0 < X_2, \\ Y_0 = -(aX_0^2 + \mu_2), \\ \mu_3 + X_0 + X_0^2 = 0. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

On a que $Y_0 < 0$ car $aX^2 + \mu_2 < 0$ pour tout $X \in]X_1, X_2[$: on s'intéresse donc, dans ce cas, aux positions des séparatrices de P_1 et P_2 dans la demi-bande « $X \in [X_1, X_2], Y < 0$ » :

Sur les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$, on a, par le système (4.1.3), que $\dot{X} = Y < 0$. Alors, puisque $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ sont des points de selle, on a nécessairement le comportement des trajectoires aux voisinages de P_1 et P_2 (voir la figure 4.2).

Or, par ce qui précède, les séparatrices de P_1 et P_2 ne peuvent pas aller à l'infini entre les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$. Par conséquent, lorsque P_1 et P_2 sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 4.3. \square

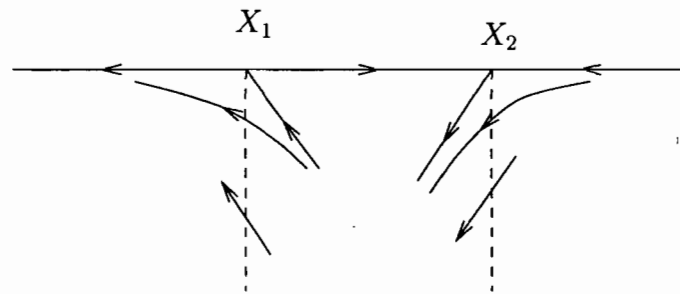


FIG. 4.2. Comportement des trajectoires aux voisinages de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle

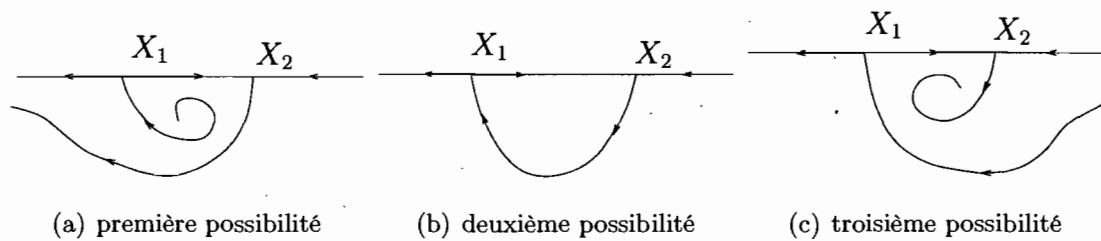


FIG. 4.3. Positions possibles des séparatrices de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle

4.2.5. Bifurcation de boucle hétéroclinique

4.2.5.1. Existence

La seule manière dont le cycle répulsif précédent peut disparaître avant le col-noeud (Cn_{a_i}) est, par la théorie et la position des séparatrices des points de selle (voir le théorème 4.2.1), dans une boucle hétéroclinique. Nous allons montrer qu'elle est répulsive.

Or, puisque les points singuliers $(X_1, 0)$ et $(X_2, 0)$ doivent être des points de selle et que $-2aX_2 > 0$ et $2aX_1 > 0$, il faut que : $\mu_2 > 0$,

$$\mu_3 + X_2 + X_2^2 > 0 \quad (4.2.16)$$

et

$$-(\mu_3 + X_1 + X_1^2) > 0. \quad (4.2.17)$$

Donc, il existe une boucle hétéroclinique dans la région de l'espace des paramètres définie par (voir la figure 4.4)

$$\mu_2 > 0, \quad \mu_3 < \frac{\mu_2}{a} + \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \quad \mu_3 > \frac{\mu_2}{a} - \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \quad (4.2.18)$$

4.2.5.2. *Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH_+) , par la méthode de Melnikov*

On ramène notre système à un système proche d'un système intégrable par l'éclatement avec poids

$$(T_1) : X = \epsilon \bar{X}, \quad Y = \epsilon^2 \bar{Y}, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \bar{\mu}_2, \quad \mu_3 = \epsilon^2 \bar{\mu}_3. \quad (4.2.19)$$

Alors

$$\dot{\bar{X}} = \frac{\dot{X}}{\epsilon} = \epsilon \left(\bar{Y} + a \bar{X}^2 + \bar{\mu}_2 \right) \quad ; \quad \dot{\bar{Y}} = \frac{\dot{Y}}{\epsilon^2} = \epsilon \left(\epsilon \bar{\mu}_3 \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} + \epsilon \bar{X}^2 \bar{Y} \right). \quad (4.2.20)$$

On divise par ϵ et on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{Y} + a \bar{X}^2 + \bar{\mu}_2 \\ \dot{\bar{Y}} = \epsilon \bar{\mu}_3 \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} + \epsilon \bar{X}^2 \bar{Y}. \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Pour $\epsilon = 0$, le système (4.2.21) est intégrable. En effet, sous le flot dudit système :

- La droite d'équation $-\bar{Y} = 0$ est invariante ayant \bar{X} comme cofacteur.
- La parabole d'équation $\bar{Y} + \frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_2 = 0$ est aussi invariante ayant $2a\bar{X}$ comme cofacteur.

Ceci donne une intégrale première :

$$H = (-\bar{Y})^{-2a} \left(\bar{Y} + \frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_2 \right). \quad (4.2.22)$$

Or, on a

$$\dot{\bar{Y}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{X}} = -(2a-1)(-\bar{Y})^{-2a} \bar{X} = \bar{X} \bar{Y} K, \quad (4.2.23)$$

avec $K = (2a-1)(-\bar{Y})^{-(2a+1)}$.

Remarque 4.2.1. Lorsque $a = -\frac{1}{2}$, le système est hamiltonien pour $\epsilon = 0$.

D'où, en multipliant le système (4.2.21) par K , facteur intégrant de (4.2.21)| $_{\epsilon=0}$, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{X}' = \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}} \\ \bar{Y}' = -\frac{\partial H}{\partial \bar{X}} - \epsilon(-\bar{Y})^{-2a} (\mu_3 + \bar{X}^2) (2a - 1). \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Le lieu des paramètres où on a la boucle hétéroclinique est approximé par (méthode de Melnikov) :

$$I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) = \int_{\Gamma} -(\bar{\mu}_3 + \bar{X}^2) (2a - 1) (-\bar{Y})^{-2a} d\bar{X} = 0, \quad (4.2.25)$$

où Γ désigne la boucle non perturbée qui est située sur $H = 0$.

Posons

$$I_k = \int_{-\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}^{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \bar{X}^k \left(\frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_2 \right)^{-2a} d\bar{X}, \quad \text{où } k \in \mathbb{N}. \quad (4.2.26)$$

- Sur $-\bar{Y} = 0$, on a que $I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) = 0$ pour tout $(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$.

- Sur la parabole d'équation $\bar{Y} = -\frac{2a-1}{2}(\bar{X})^2 - \frac{2a-1}{2a}\bar{\mu}_2$, on a que

$$I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) := (2a - 1)(\bar{\mu}_3 I_0 + I_2) = 0.$$

C'est dire qu'on a

$$(BH_+) : \bar{\mu}_3 I_0 + I_2 = 0.$$

(i) Calcul des I_k

Proposition 4.2.4. *On a que*

$$I_k = f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{k+1}{2}} B\left(\frac{k+1}{2}, 1-2a \right), \quad (4.2.27)$$

avec

$$f_a(\bar{\mu}_2) = \left[\left(\frac{2a-1}{2a} \right) \bar{\mu}_2 \right]^{-2a} > 0 \quad (4.2.28)$$

et

$$\begin{aligned} B\left(\frac{k+1}{2}, 1-2a \right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma(1-2a)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1 - 2a\right)} \\ &= \frac{\frac{k-1}{2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma(1-2a)}{\left(\frac{k+1}{2} - 2a\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - 2a\right)}. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Démonstration. En effet, posons, justement

$$f_a(\bar{\mu}_2) := \left[\left(\frac{2a-1}{2a} \right) \bar{\mu}_2 \right]^{-2a} > 0; \quad (4.2.30)$$

On remarque que la fonction $\bar{X} \mapsto \bar{X}^k \left[\frac{a}{\bar{\mu}_2} \bar{X}^2 + 1 \right]^{-2a}$ est paire dans l'intervalle $\left[-\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}, \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} \right]$.

Alors

$$I_k = 2f_a(\bar{\mu}_2) \int_0^{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \bar{X}^k \left[\frac{a}{\bar{\mu}_2} \bar{X}^2 + 1 \right]^{-2a} d\bar{X}. \quad (4.2.31)$$

Posons $Z = -\frac{a}{\bar{\mu}_2}(\bar{X})^2$ c'est-à-dire $\bar{X} = \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} Z^{\frac{1}{2}}$.

D'où : $\bar{X} \rightarrow 0$ si, et seulement si $Z \rightarrow 0$; $\bar{X} \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}$ si, et seulement si $Z \rightarrow 1$, et $d\bar{X} = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} Z^{-\frac{1}{2}}$.

Ainsi

$$I_k = f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{k+1}{2}} \int_0^1 Z^{\frac{k-1}{2}} (1-Z)^{-2a} dZ; \quad (4.2.32)$$

Or

$$\int_0^1 Z^{p-1} (1-Z)^{q-1} dZ := B(p, q) \quad (4.2.33)$$

pour tout p, q nombres réels strictement positifs. D'où, puisque

$$\frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} - 1 \text{ et } -2a = (1-2a) - 1 :$$

$$I_k = f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{k+1}{2}} B\left(\frac{k+1}{2}, 1-2a \right). \quad (4.2.34)$$

Aussi, avons-nous

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (4.2.35)$$

sur un ensemble contenant $(\mathbf{R}^{++})^2$, où

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty e^{-X} X^{p-1} dX, \quad (4.2.36)$$

sur un ensemble contenant \mathbf{R}^{++} : En particulier,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En plus,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad (4.2.37)$$

où p est un réel strictement positif. Conséquemment, on a l'expression de I_k annoncée à la proposition 4.2.4. \square

(ii) *Écriture simplifiée de (BH_+)*

Théorème 4.2.2. *La surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (4.1.3) est approximée par*

$$(BH_+) : a(3 - 4a)\mu_3 - \mu_2 = 0.$$

Démonstration. En effet, on a que :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3 I_0 + I_2 &= \bar{\mu}_3 f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-2a)}{\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} + f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma(1-2a)}{(\frac{3}{2}-2a)\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} \\ &= f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-2a)}{\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} \left[\bar{\mu}_3 + \frac{-\bar{\mu}_2}{(\frac{3}{2}-2a)} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Étant donné que $a < 0$ et que $f_a(\bar{\mu}_2) > 0$, alors :

$$I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) = 0 \iff a(3 - 4a)\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_2 = 0. \quad (4.2.39)$$

Donc, puisque $\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\varepsilon^2}$ et $\bar{\mu}_3 = \frac{\mu_3}{\varepsilon^2}$ par (4.3.114), alors la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique de (4.1.3) est approximée par :

$$(BH_+) : a(3 - 4a)\mu_3 - \mu_2 = 0. \quad (4.2.40)$$

□

4.2.5.3. Type de la boucle

Commençons par rappeler la notion ci-après.

Définition 4.2.1. *Le rapport d'hyperbolicité d'un point de selle est le rapport $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sont les deux valeurs propres.*

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.2.3. *La boucle hétéroclinique du système (4.1.3) est répulsive.*

Démonstration. Pour la faire, on utilise le critère suivant (mais qui sera discuté en détails au théorème 4.3.2) : *la boucle est répulsive (resp. attractive) si le produit des rapports d'hyperbolicité des deux points de selle est plus petit (resp. grand) que*

un. Par (4.2.4), (4.2.6) et (4.2.7), les rapports d'hyperbolicité des points singuliers $(X_1, 0)$ et $(X_2, 0)$ sont respectivement :

$$r_1 = -\frac{\mu_3 + X_1 + X_1^2}{2aX_1}, \quad (4.2.41)$$

$$r_2 = -\frac{2aX_2}{\mu_3 + X_2 + X_2^2}. \quad (4.2.42)$$

Alors,

$$r_1 r_2 = \frac{X_2(\mu_3 + X_1 + X_1^2)}{X_1(\mu_3 + X_2 + X_2^2)}; \quad \text{ainsi} \quad (4.2.43)$$

$$\begin{aligned} r_1 r_2 - 1 &= \frac{(X_1 - X_2)(X_1 X_2 - \mu_3)}{X_1(\mu_3 + X_2 + X_2^2)} \\ &= \frac{(X_1 - X_2)}{X_1(\mu_3 + X_2 + X_2^2)} \left(\frac{\mu_2}{a} - \mu_3 \right). \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Or, $\frac{X_1 - X_2}{X_1} > 0$ et, par (4.2.16) et (4.2.18), on a : $\mu_3 + X_2 + X_2^2 > 0$. Donc $r_1 r_2 - 1$ a le signe de $\left(\frac{\mu_2}{a} - \mu_3\right)$. En évaluant ce dernier pour $\mu_2 = a(3 - 4a)\mu_3$ (obtenu au (4.2.40)), on obtient que $r_1 r_2 - 1$ a le signe de $(2 - 4a)\mu_3 < 0$ (où $\mu_3 < 0$ par (4.2.40) et du fait que $a < 0$, $\mu_2 > 0$). D'où le résultat. \square

Ceci nous donne les positions des courbes de bifurcation comme sur la figure 4.4. Dans ce qui suit, (Cn_e) sera noté par : (Cn_{a_e}) lorsque $\mu_3 < 0$ (resp. (Cn_{r_e}) lorsque $\mu_3 > 0$).

4.2.6. Diagrammes de bifurcation de (4.1.3)

Comme on l'a dit au début de cette section, il suffit de présenter celui où $\epsilon_2 = +1$ car celui où $\epsilon_2 = -1$ est obtenu par la transformation $(X, Y, \mu_2, \mu_3, t) \mapsto (-X, Y, \mu_2, -\mu_3, -t)$.

Conjecture 4.2.1. *La topologie du diagramme de bifurcations de (4.1.1) sera la même que celle du diagramme de bifurcations du système (4.1.3).*

4.3. ÉTUDE DE LA SOUS-FAMILLE (4.1.4)

4.3.1. Points singuliers et leur type

Les points singuliers de (4.1.4) sont : $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$, $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ avec $\mu_2 \geq 0$ et, en procédant comme au (4.1.3), on a, par le théorème des fonctions

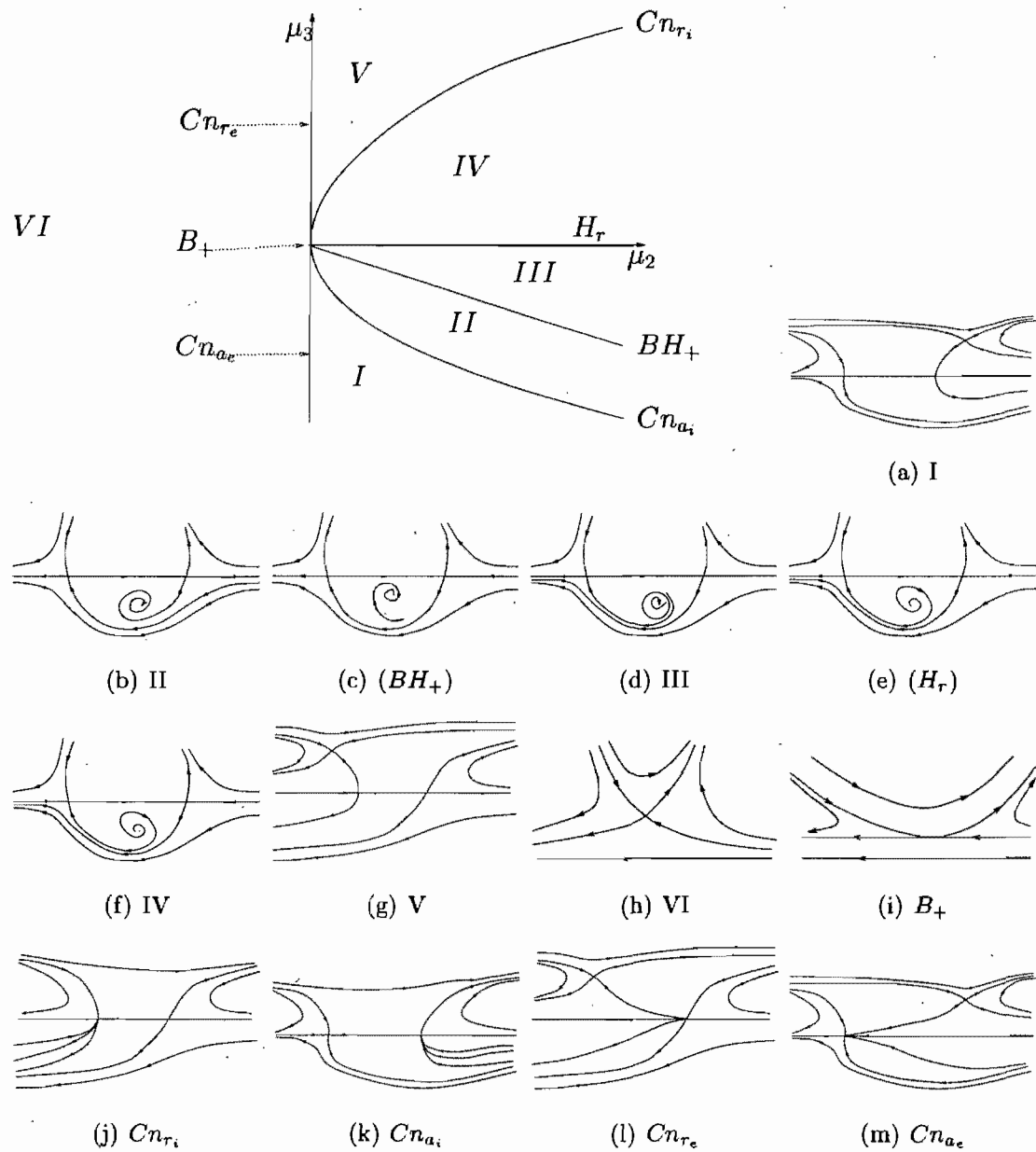


FIG. 4.4. Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (4.1.3) pour $\epsilon_2 = +1$

implicites, l'unique $P_0 := (X_0, Y_0)$ tel que

$$\begin{cases} \mu_3 + X_0 + \mu_4 X_0^2 + \tilde{\alpha}_3 X_0^3 + X_0^4 = 0 \\ Y_0 = -(\mu_2 + aX_0^2). \end{cases} \quad (4.3.1)$$

La matrice jacobienne en (X, Y) de (4.1.4) est donnée par :

$$\text{Jac}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 2aX & 1 \\ Y(1 + 2\mu_4X + 4X^3) & \mu_3 + X + \mu_4X^2 + \tilde{\alpha}_3X^3 + X^4 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Ainsi

$$\text{Jac}\left(\mp\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \mp 2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} & 1 \\ 0 & \mu_3 \mp \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_4\mu_2}{a} \mp \tilde{\alpha}_3\left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

et

$$\text{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{pmatrix} 2aX_0 & 1 \\ Y_0(1 + 2\mu_4X_0 + 3\tilde{\alpha}_3X_0^2 + 4X_0^3) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Posons, comme au (4.1.3) :

$$X_1 := -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}},$$

et

$$X_2 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}.$$

On a la

Proposition 4.3.1. X_0, Y_0, X_1, X_2 et P_0, P_1, P_2 étant définis plus haut :

(i) si $X_0 \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$, alors P_0 est un point de selle hyperbolique ;

(ii) si $X_0 \in]X_1, X_2[$, alors P_0 est un anti-selle ;

(iii) si $X_0 = X_1$ ou $X_0 = X_2$, alors P_0 est un col-noeud ;

(iv) si

$$\mu_3 > \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} + \tilde{\alpha}_3\left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_1 est un noeud répulsif ;

(v) si

$$\mu_3 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} + \tilde{\alpha}_3\left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_1 est un point de selle hyperbolique ;

(vi) si

$$\mu_3 = \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} + \tilde{\alpha}_3\left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_1 est un col-noeud ;

(vii) si

$$\mu_3 > -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3\left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_2 est un point de selle hyperbolique ;

(viii) si

$$\mu_3 < -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_2 est un noeud attractif ;

(ix) si

$$\mu_3 = -\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} + \frac{\mu_4\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2,$$

alors P_2 est un col-noeud.

Démonstration. En effet, on a que :

$Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) = -Y_0(1 + 2\mu_4X_0 + 3\tilde{\alpha}_3X_0^2 + 4X_0^3)$: X_0 étant petit, alors $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0))$ est du signe de $-Y_0 = \mu_2 + aX_0^2$ (voir (4.3.1)) ; d'où, en procédant comme au (4.1.3), on a les résultats (i), (ii) et (iii).

$\mathbf{Jac}(-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \mathbf{0})$ a deux valeurs propres qui sont

$$-2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} > 0$$

et

$$\lambda_1(\mu_2, \mu_3) := \mu_3 - \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_4\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2;$$

alors, en procédant comme au (4.1.3), on a les résultats (iv), (v) et (vi).

De même, $\mathbf{Jac}(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, \mathbf{0})$ a deux valeurs propres qui sont

$$2a\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} < 0$$

et

$$\lambda_2(\mu_2, \mu_3) := \mu_3 + \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} - \frac{\mu_4\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2;$$

d'où, en procédant comme au (4.1.3), on a les résultats (vii), (viii) et (ix). □

Sachant que

$$Trace(\mathbf{Jac}(X_0, Y_0)) = 2aX_0, \tag{4.3.5}$$

alors celle-ci est nulle si, et seulement si $X_0 = 0$; d'où, par (4.3.1), $Y_0 = -\mu_2$, $\mu_3 = 0$ et, ainsi, $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)) = \mu_2$:

Dans la suite, nous montrerons que : si $\mu_2 > 0$, alors nous aurons une bifurcation de Hopf d'ordre 2 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite d'équation $\mu_3 = 0$.

4.3.2. Bifurcations de col-noeud

Le résultat de cette sous-section est :

Proposition 4.3.2. *Il y a trois bifurcations de col-noeud : la première a pour équation*

$$(Cn_e) : \mu_2 = 0,$$

la deuxième et la troisième sont les courbes approximées par les équations respectives

$$(Cn_{a_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 < 0, (Cn_{r_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 > 0.$$

La première se produit lorsque $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est attractif si $\mu_3 < 0$ et répulsif si $\mu_3 > 0$. La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est attractif. La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$: ce col-noeud est répulsif.

Démonstration. En effet :

- La première se produit lorsque $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ et $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$ se confondent c'est-à-dire $\mu_2 = 0$: elle a donc pour équation

$$(Cn_e) : \mu_2 = 0 : \tag{4.3.6}$$

En procédant comme au chapitre précédent, on voit facilement que ce col-noeud est attractif si $\mu_3 < 0$ et répulsif si $\mu_3 > 0$.

- La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_1 := (-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$;
- La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_2 := (\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}, 0)$.

Pour ces deux derniers cas on a que :

$$\begin{cases} \mu_3 + X_0 + \mu_4 X_0^2 + \tilde{\alpha}_3 X_0^3 + X_0^4 = 0 \\ \mu_2 + aX_0^2 = 0 \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Posons $f_1(x) = \mu_2 + aX^2$ et $g_1(x) = \mu_3 + X + \mu_4X^2 + \tilde{\alpha}_3X^3 + X^4$. Alors ces bifurcations se produisent lorsque le résultant de f_1 et g_1 par rapport à x , $Res(f_1, g_1)$, est nul. Or, par le logiciel MAPLE, on a :

$$\begin{aligned} Res(f_1, g_1) = & \mu_2^4 + 2\mu_2^2a^2\mu_3 - 2\mu_2^3a\mu_4 + a^4\mu_3^2 - 2a^3\mu_3\mu_2\mu_4 \\ & + a^2\mu_2^2\mu_4^2 + a^3\mu_2 - 2a^2\mu_2^2\tilde{\alpha}_3 + a\mu_2^3\tilde{\alpha}_3^2. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Mais ce qui nous intéresse c'est comment la courbe d'équation $Res(f_1, g_1) = 0$ se comporte au voisinage de $(\mu_2, \mu_3) = (0, 0)$: ses termes dominants sont alors $a^3\mu_2 + a^4\mu_3^2$. Donc ces deux dernières bifurcations de col-noeud ont lieu sur la courbe approximée par la parabole d'équation

$$(Cn_i) : \mu_2 = -a\mu_3^2 : \quad (4.3.9)$$

Par conséquent, la deuxième bifurcation de col-noeud a pour équation approximative

$$(Cn_{a_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 < 0,$$

alors que la troisième a pour équation approximative

$$(Cn_{r_i}) : \mu_2 = -a\mu_3^2 \quad \text{avec} \quad \mu_3 > 0.$$

En procédant comme au chapitre précédent, on voit facilement que le col-noeud sur (Cn_{a_i}) est attractif alors que le col-noeud sur (Cn_{r_i}) est répulsif. \square

4.3.3. Bifurcation de Hopf

Le résultat sur la bifurcation de Hopf pour le système (4.1.4) est :

Proposition 4.3.3. *Lorsque $\mu_2 > 0$, nous avons une bifurcation de Hopf d'ordre 2 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite d'équation (H) : $\mu_3 = 0$, et le coefficient de Lyapunov correspondant, L_2 , est strictement positif.*

Démonstration. En effet, comme il a été vu lors de l'analyse du type de chaque point singulier, la bifurcation de Hopf se produit au voisinage du point singulier de coordonnées $(0, -\mu_2)$ sur la demi-droite $\mu_3 = 0$ telle que $\mu_2 > 0$. Alors, en utilisant successivement les trois transformations suivantes :

$(H_1) : Y_1 = Y + \mu_2, X_1 = X$, $(H_2) : Y_1 = \omega Y_2, X_1 = X_2$ où $\omega^2 = \mu_2$ et
 $(H_3) : Y_2 = Y - aX_2^2, X_2 = X$,

le système (4.1.4) devient, après avoir divisé le système obtenu par $\omega > 0$, le système de Liénard suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X - \mu_4 X^2 + \left(\frac{a}{\mu_2} + \tilde{\alpha}_3\right) X^3 - \left(1 + \frac{a\mu_4}{\mu_2}\right) X^4 + \frac{a\tilde{\alpha}_3}{\mu_2} X^5 - \frac{a}{\mu_2} X^6 \\ + Y \left(-\frac{1+2a}{\sqrt{\mu_2}} X + \frac{\mu_4}{\sqrt{\mu_2}} X^2 - \frac{\tilde{\alpha}_3}{\sqrt{\mu_2}} X^3 + \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} X^4\right) \end{cases} \quad (4.3.10)$$

dont les deux premiers coefficients de Lyapunov sont, par (3.2.3) et (3.2.4), déterminés par :

$$L_1 = -\frac{2a\mu_4}{\sqrt{\mu_2}}, \quad (4.3.11)$$

$$L_2 = \frac{a(\mu_4 + 2a\mu_4 + 5\tilde{\alpha}_3\mu_2\mu_4 - 3\mu_2)}{24\mu_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.3.12)$$

Or,

$$L_1 = 0 \iff \mu_4 = 0. \quad (4.3.13)$$

Donc, pour $L_1 = 0$, on a que $L_2 = -\frac{a}{8\sqrt{\mu_2}} > 0$.

Conséquemment, par la théorie et pour $\mu_2 > 0$, on a une bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque

$$(H) : \mu_3 = \mu_4 = 0. \quad (4.3.14)$$

On sait qu'on peut avoir 0, 1 ou 2 cycles dans le déploiement et que, dans tous les cas, le cycle limite extérieur est répulsif. La petite zone avec deux cycles est dans la région « $\mu_3 > 0, \mu_4 < 0$ » : la figure 4.5 présente le diagramme de bifurcation de Hopf de codimension 2 pour $L_2 > 0$. \square

Dans tous les calculs précédents, on voit que $\tilde{\alpha}_3$ ne joue aucun rôle dans le type des bifurcations.

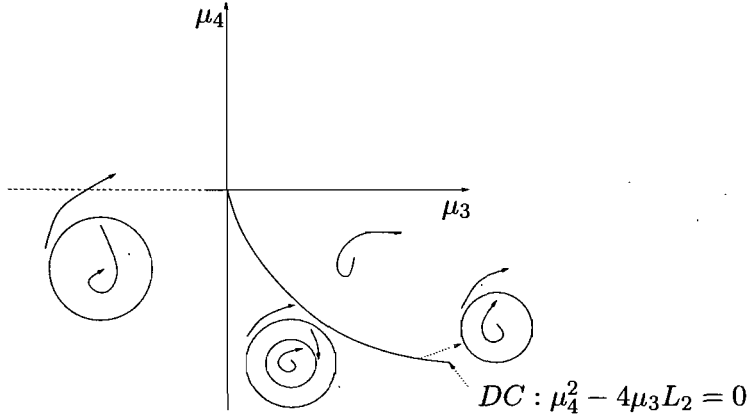


FIG. 4.5. Diagramme de bifurcation de Hopf de codimension 2 pour $L_2 > 0$

4.3.4. Bifurcation de boucle hétéroclinique

4.3.4.1. Existence et lieu de la bifurcation de boucle hétéroclinique de codimension supérieure ou égale à 2

- *Existence :*

La seule manière dont les cycles précédents peuvent disparaître avant les col-noeud (Cn_i) est, par la théorie et par les positions des séparatrices des points de selle (voir la figure 4.3), dans une boucle hétéroclinique. Par (4.3.3), (4.2.6) et (4.2.7), les rapports d'hyperbolicité des points singuliers $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ (où X_1 et X_2 sont définis aux (4.2.6) et (4.2.7)) sont respectivement :

$$r_1 = -\frac{\mu_3 + X_1 + \mu_4 X_1^2 + \tilde{\alpha}_3 X_1^3 + X_1^4}{2aX_1}, \quad (4.3.15)$$

$$r_2 = -\frac{2aX_2}{\mu_3 + X_2 + \mu_4 X_2^2 + \tilde{\alpha}_3 X_2^3 + X_2^4}. \quad (4.3.16)$$

Or, nous sommes dans la région où les deux points singuliers sont des points de selle, alors, puisque $-2aX_2 > 0$ et $2aX_1 > 0$, alors il faut que

$$\mu_3 + X_1 + \mu_4 X_1^2 + \tilde{\alpha}_3 X_1^3 + X_1^4 < 0 \quad (4.3.17)$$

et

$$\mu_3 + X_2 + \mu_4 X_2^2 + \tilde{\alpha}_3 X_2^3 + X_2^4 > 0. \quad (4.3.18)$$

Donc, par (4.3.17) et (4.3.18), la boucle existe dans la région définie (dans l'espace des paramètres) par :

$$-\sqrt{-\frac{\mu_2}{a} + \mu_4 \frac{\mu_2}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2} < \mu_3 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{a} + \mu_4 \frac{\mu_2}{a} + \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_2}{a}\right)^2} \quad (4.3.19)$$

• *Lieu de la bifurcation de boucle hétéroclinique de codimension supérieure ou égale à 2 :*

La codimension est supérieure ou égale à 2 si, et seulement si $r_1 r_2 = 1$. Par (4.3.15) et (4.3.16), on a que

$$r_1 r_2 = \frac{X_2(\mu_3 + X_1 + \mu_4 X_1^2 + \tilde{\alpha}_3 X_1^3 + X_1^4)}{X_1(\mu_3 + X_2 + \mu_4 X_2^2 + \tilde{\alpha}_3 X_2^3 + X_2^4)}, \quad (4.3.20)$$

d'où

$$r_1 r_2 - 1 = \frac{-2[X_2^2(X_2^2 + \mu_4) + \mu_3]}{\mu_3 + X_2 + \mu_4 X_2^2 + X_2^4}. \quad (4.3.21)$$

Ainsi, avons-nous le

Proposition 4.3.4. *La boucle est, sous les conditions (4.3.19), de codimension supérieure ou égale à 2 c'est-à-dire $r_1 r_2 - 1 = 0$, lorsque*

$$(R) : a^2 \mu_3 - a \mu_2 \mu_4 + \mu_2^2 = 0. \quad (4.3.22)$$

Même dans la proposition 4.3.4, on voit que $\tilde{\alpha}_3$ ne joue aucun rôle. Par ce qui précède, on conjecture que

Conjecture 4.3.1. *La topologie du diagramme de bifurcations de (4.1.4) sera la même que celle du diagramme de bifurcations d'un système de la forme*

$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y[\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + X^4], \quad \text{où } a(\nu) < 0. \end{cases} \quad (4.3.23)$$

Le temps nous a manqué pour explorer à fond cette conjecture et nous nous proposons d'y revenir plus tard.

Dans cette thèse, nous nous limiterons à étudier la codimension et le type de la boucle hétéroclinique du système (4.3.23).

4.3.4.2. *Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH), du système (4.3.23)*

Le résultat que nous obtenons est :

Théorème 4.3.1. *La surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (4.3.23) est approximée par (BH) : $a^2(5-4a)(3-4a)\mu_3 - a(5-4a)\mu_2\mu_4 + 3\mu_2^2 = 0$.*

Démonstration. On ramène notre système à un système proche d'un système intégrable par l'éclatement avec poids

$$(T_2) : X = \epsilon \bar{X}, \quad Y = \epsilon^2 \bar{Y}, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \bar{\mu}_2, \quad \mu_3 = \epsilon^4 \bar{\mu}_3, \quad \mu_4 = \epsilon^2 \bar{\mu}_4. \quad (4.3.24)$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}} &= \frac{\dot{X}}{\epsilon} \\ &= \epsilon(\bar{Y} + a\bar{X}^2 + \bar{\mu}_2); \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Y}} &= \frac{\dot{Y}}{\epsilon^2} \\ &= \epsilon \left(\epsilon^3 \bar{\mu}_3 \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} + \epsilon^3 \bar{\mu}_4 \bar{X}^2 \bar{Y} + \epsilon^3 \bar{X}^4 \bar{Y} \right). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

En divisant par ϵ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{Y} + a\bar{X}^2 + \bar{\mu}_2 \\ \dot{\bar{Y}} = \bar{X} \bar{Y} + \epsilon^3 \bar{Y} \left(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{X}^2 + \bar{X}^4 \right). \end{cases} \quad (4.3.27)$$

En procédant comme au (4.2.21), on a que :

- Pour $\epsilon = 0$, le système (4.3.27) est intégrable et a la même intégrale première,

$$H = (-\bar{Y})^{-2a} \left(\bar{Y} + \frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_2 \right), \quad (4.3.28)$$

qu'au (4.1.3).

- En multipliant le système (4.3.27) par $K = (2a-1)(-\bar{Y})^{-(2a+1)}$, facteur intégrant de (4.3.27)| $_{\epsilon=0}$ (le même que celui de (4.2.21)| $_{\epsilon=0}$), on obtient, sans changer de notation :

$$\begin{cases} \bar{X}' = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Y}} \\ \bar{Y}' = \frac{\partial H}{\partial \bar{X}} + \epsilon^3 (-\bar{Y})^{-2a} \left(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{X}^2 + \bar{X}^4 \right) (2a-1). \end{cases} \quad (4.3.29)$$

Le lieu des paramètres où on a la boucle hétéroclinique est approximé par (méthode de Melnikov) :

$$I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4) := \int_{\Gamma} \left(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{X}^2 + \bar{X}^4 \right) (2a - 1) (-\bar{Y})^{-2a} d\bar{X} = 0, \quad (4.3.30)$$

où Γ désigne la boucle non perturbée.

- Sur $-\bar{Y} = 0$, on a que $I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4) = 0$ pour tout $(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4)$.

- Sur la parabole d'équation $\bar{Y} = -\left(\frac{2a-1}{2}\right) \bar{X}^2 - \left(\frac{2a-1}{2a}\right) \bar{\mu}_2$, on a que

$$I(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4) := (2a - 1)(\bar{\mu}_3 I_0 + \bar{\mu}_4 I_2 + I_4) = 0.$$

C'est dire qu'on a

$$(BH) : \bar{\mu}_3 I_0 + \bar{\mu}_4 I_2 + I_4 = 0,$$

où I_k est déterminé à la proposition 4.2.4 :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3 I_0 + \bar{\mu}_4 I_2 + I_4 = & \bar{\mu}_3 f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}(\Gamma(1-2a))}{\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} \\ & + \bar{\mu}_4 f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(\Gamma(1-2a))}{(\frac{3}{2}-2a)\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} + \\ & + f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(1-2a)}{(\frac{5}{2}-2a)\Gamma(\frac{5}{2}-2a)}; \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

or, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\Gamma(\frac{5}{2}-2a) = (\frac{3}{2}-2a)(\frac{5}{2}-2a)\Gamma(\frac{3}{2}-2a)$; d'où

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3 I_0 + \bar{\mu}_4 I_2 + I_4 = & f_a(\bar{\mu}_2) \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}(\Gamma(1-2a))}{\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} \left[\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right) \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{3}{2}-2a)} + \right. \\ & \left. + \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^2}{(\frac{3}{2}-2a)(\frac{5}{2}-2a)} \right] \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Ainsi, puisque $a < 0$ et $f_a(\bar{\mu}_2) > 0$, avons-nous :

$$\bar{\mu}_3 I_0 + \bar{\mu}_4 I_2 + I_4 = 0 \iff \bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right) \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{3}{2}-2a)} + \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{\bar{\mu}_2}{a}\right)^2}{(\frac{3}{2}-2a)(\frac{5}{2}-2a)} = 0. \quad (4.3.33)$$

Donc, puisque $\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\epsilon^2}$, $\bar{\mu}_3 = \frac{\mu_3}{\epsilon^4}$ et $\bar{\mu}_4 = \frac{\mu_4}{\epsilon^2}$, alors la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (4.3.23) est approximée par :

$$(BH) : a^2(5-4a)(3-4a)\mu_3 - a(5-4a)\mu_2\mu_4 + 3\mu_2^2 = 0 : \quad (4.3.34)$$

c'est un parabolôide hyperbolique dans l'espace (μ_2, μ_3, μ_4) .

□

4.3.5. Détermination des bifurcations de codimension 2

$$(i) C := (H) \cap (BH)$$

Pour le système (4.3.23), C est inclus dans l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \mu_3 = 0, \\ a^2(5 - 4a)(3 - 4a)\mu_3 - a(5 - 4a)\mu_2\mu_4 + 3\mu_2^2 = 0. \end{cases} \quad (4.3.35)$$

Or, l'ensemble des solutions ce dernier est $\{(\mu_3 = 0, \mu_2 = 0)\} \cup \{(\mu_3 = 0, \mu_4 = -\frac{3\mu_2}{a(4a-5)})\}$, soit la réunion de deux droites passant par l'origine. On doit exclure $\mu_2 = \mu_3 = 0$ qui correspond à un point triple nilpotent. Donc $C := (H) \cap (BH)$ se produit sur la droite approximée par

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = -\frac{3\mu_2}{a(4a-5)}.$$

$$(ii) H_2 := (H) \cap (L)$$

Où $(L) : L_1 = 0$. On a, par (4.3.14) et (4.3.13), que $H_2 = (\mu_3 = 0, \mu_4 = 0)$.

$$(iii) BH_2 := (BH) \cap (R)$$

Pour le système (4.3.23), BH_2 est approximé par la solution du système :

$$\begin{cases} a^2(5 - 4a)(3 - 4a)\mu_3 - a(5 - 4a)\mu_2\mu_4 + 3\mu_2^2 = 0, \\ a^2\mu_3 - a\mu_2\mu_4 + \mu_2^2 = 0, \end{cases} \quad (4.3.36)$$

qui, résolu suivant (μ_3, μ_4) , donne que BH_2 se produit sur le lieu approximé par

$$\left(\mu_3 = \frac{\mu_2^2}{a^2(-4a+5)}, \mu_4 = \frac{2\mu_2(2a-3)}{a(4a-5)} \right).$$

4.3.6. Type et cyclicité de la boucle hétéroclinique

Dans la cette section on étudie le type de la boucle hétéroclinique, à savoir si elle est attractive ou répulsive. On étudie aussi sa cyclicité, c'est-à-dire le nombre maximum de ses *cycles limites* (*orbites périodiques isolées*).

La stratégie est la suivante. Les cycles limites étant les points fixes de l'application de premier retour de Poincaré, on considère des sections au voisinage des points singuliers ; ce qui permet de décomposer l'application de premier retour de Poincaré comme composition de 4 transitions :

- 2 transitions régulières le long des connexions de selle.
- 2 applications de Dulac au voisinage des points de selle [32] (l'application de Dulac relative à un point de selle est l'application de passage de coin d'une demi-section positive transverse à la variété stable à une demi-section positive transverse à la variété instable). Celles-ci se calculent mieux si on se met dans des coordonnées dans lesquelles le système est sous forme normale.

En pratique les calculs seront plus simples si, au lieu de l'application de premier retour de Poincaré, on regarde une application de déplacement.

Pour simplifier, posons

$$\gamma := \left(\mu_3 - \frac{\mu_2^2}{a^2(-4a+5)}, \mu_4 - \frac{2\mu_2(2a-3)}{a(4a-5)} \right) \quad (\text{voir (4.3.36)}), \quad (4.3.37)$$

$\bar{X} := \bar{x}$, $\bar{Y} := \bar{y}$ et notons le système (4.3.27) par $(S_{\epsilon,\gamma})$:

$$(S_{\epsilon,\gamma}) \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} + a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2 \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x}\bar{y} + \epsilon^3\bar{y}(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4). \end{cases} \quad (4.3.38)$$

Par la sous-section 4.3.4, $(S_{\epsilon,\gamma})$ est proche d'un système intégrable $(S_{0,\gamma})$ dont la droite d'équation $\bar{y} = 0$ et la parabole d'équation $\bar{y} = \left(\frac{1-2a}{2}\right)(\bar{x}^2 + \frac{\bar{\mu}_2}{a})$ sont invariantes. Illustrons ce qui précède par les figures suivantes où :

- La connexion $\overline{P_1P_2}$ est fixée.
- Pour $k = 1, 2$, $P_k = (x_k, 0)$ est un point de selle hyperbolique de rapport d'hyperbolicité $r_k(\gamma) \in \mathbf{R}_+^*$ où $x_1 = -\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}$ et $x_2 = \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}$.

Supposons $(S_{\epsilon,\gamma})$, défini au voisinage de P_k , localisé à l'origine. Alors, par la théorie des formes normales et pour $l = 1, 3$ (voir la figure 4.7) : $\forall s \in \mathbf{N}$, il existe un changement de coordonnées (X_l, Y_l) de classe C^s sur un voisinage de l'origine dépendant de s et un changement d'échelle sur le temps tels que :

- Si $r_k(0)$ est irrationnel, alors

$$(S_{\epsilon,\gamma}) \sim X_l \frac{\partial}{\partial X_l} - r_k(\gamma) Y_l \frac{\partial}{\partial Y_l}; \quad (4.3.39)$$

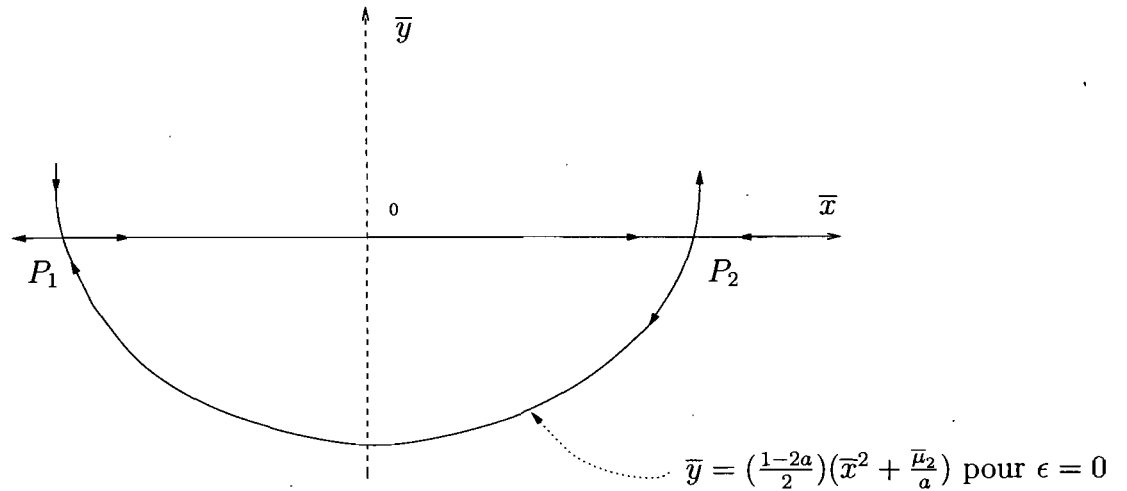


FIG. 4.6. Boucle hétéroclinique dans le système $(S_{0,\gamma})$.

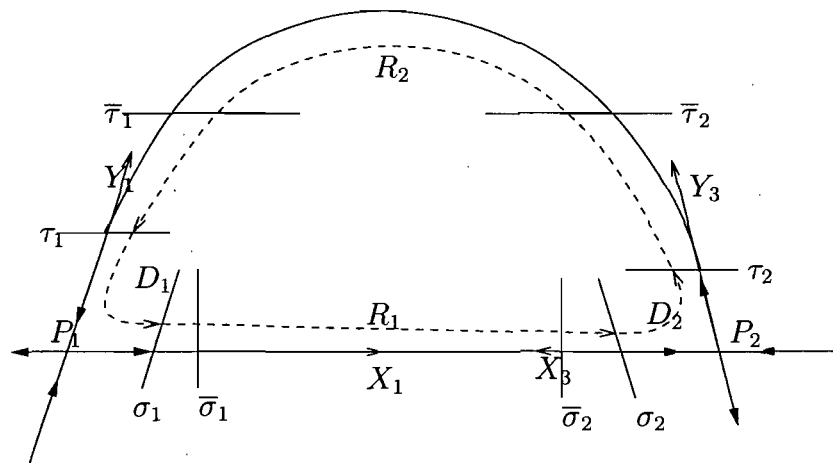


FIG. 4.7. Boucle hétéroclinique lors de BH_2 en coordonnées normalisantes.

- Si $r_k(0) := \frac{p}{q}$ est rationnel, alors $\exists N(s) \in \mathbf{N}$ tel que

$$(S_{\epsilon,\gamma}) \sim X_l \frac{\partial}{\partial X_l} + Y_l [-r_k(0) + \sum_{i=0}^{N(s)} \alpha_{i+1}(\gamma) (X_l^p Y_l^q)^i] \frac{\partial}{\partial Y_l}; \quad (4.3.40)$$

où $\alpha_1(\gamma) = r_k(0) - r_k(\gamma)$ et \sim désigne l'équivalence en classe C^s suivie d'un changement d'échelle sur le temps de classe C^s , pour γ appartenant à un voisinage de 0 dans $W(s)$ l'espace des paramètres. (\bar{x}, \bar{y}) et (X_l, Y_l) désigneront respectivement une coordonnée ordinaire et une coordonnée normalisante.

On verra ci-dessous pourquoi on utilise l'indice 3 au voisinage de P_2 . Posons

$\nu := (\epsilon, \gamma)$. Soient

$$\sigma_1 := \{X_1 = X_0\}, \quad \sigma_2 := \{X_3 = X_0\}, \quad \tau_1 := \{Y_l = Y_{0l}\}, \quad \tau_2 := \{Y_3 = Y_{03}\}, \quad (4.3.41)$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées (X_l, Y_l) où $X_0 > 0$, $Y_{0l} > 0$ sont constants et petits tels que

$$Y_{01}X_0^{-r_1(\nu)} = 1, \quad Y_{03}X_0^{-r_2(\nu)} = 1 \quad (\text{voir figure 4.7}). \quad (4.3.42)$$

L'orientation des axes de coordonnées a été choisie pour que tous les passages se produisent dans le premier quadrant. Près de P_k , localisé à l'origine, le flot de $(S_{\epsilon, \gamma})$ induit (voir la figure 4.7) :

- une application de transition $D_{k, \nu}$, encore appelée *application de Dulac*, de classe C^∞ telle que $D_{1, \nu} : \tau_1 \longrightarrow \sigma_1$ et $D_{2, \nu} : \sigma_2 \longrightarrow \tau_2$;
- une application de transition régulière $R_{k, \nu}$, un difféomorphisme, telle que $R_{1, \nu} : \sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$ et $R_{2, \nu} : \tau_2 \longrightarrow \tau_1$.

Définition 4.3.1. [32] Soient $\nu := (\epsilon, \gamma)$ et $\psi(x, \nu) \in C^\infty$. On dit que ψ est du type (I) si,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n \psi_k}{\partial x^n}(x, \nu) = 0$$

uniformément pour tout ν dans un voisinage de l'origine.

Or, par [32], au voisinage d'un $X = 0$, on a :

$$D_{k, \nu}(X) = X^{r_k(\nu)} [c(\nu) + \psi_k(X, \nu)] \quad (4.3.43)$$

où

$$c(\nu) = Y_{01}X_0^{-r_1(\nu)} > 0 \quad \text{si } k = 1 \quad \text{et} \quad c(\nu) = Y_{03}X_0^{-r_2(\nu)} > 0 \quad \text{si } k = 2, \quad (4.3.44)$$

$\psi_k(X, \nu) \in C^\infty$ pour $(X, \nu) \in (0, X_0] \times W$, où W est un voisinage de $\nu = 0$, ψ_k est une fonction du type (I) et

$$\psi_k \equiv 0 \quad \text{si } r_k(0) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \quad (4.3.45)$$

Ici $c(\nu) \equiv 1$ par (4.3.44) et (4.3.42).

Proposition 4.3.5. [32] *Soit \mathcal{I} (resp. \mathcal{D}) l'ensemble des fonctions du type (I) (resp. l'ensemble des applications de Dulac $D_{k,\nu}$). Alors :*

- \mathcal{I} est une algèbre.
- Si $f \in \mathcal{I}$ et $g \in \mathcal{D}$, alors $f \circ g \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{I}$.

Par les conditions (4.3.44) et (4.3.42), on a que

$$D_{k,\nu}(X) = X^{r_k(\nu)}[1 + \psi_k(X, \nu)] \quad (4.3.46)$$

où $\psi_k \in \mathcal{I}$ et vérifie (4.3.45).

Plus précisément, on a que :

$$\begin{aligned} D_{1,\nu} : \tau_1 &\longrightarrow \sigma_1 \\ X_1 &\longmapsto Y_1 = D_{1,\nu}(X_1) \\ &= X_1^{r_1(\nu)}[1 + \psi_1(X_1, \nu)], \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

$$\begin{aligned} R_{1,\nu} : \sigma_1 &\longrightarrow \sigma_2 \\ Y_1 &\longmapsto Y_3 = R_{1,\nu}(Y_1) \\ &= a_1 Y_1 + a_2 Y_1^2 + O(|Y_1|^3), \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

le fait que $R_{1,\nu}(0) = 0$ est dû au fait que la connexion $\overline{P_1 P_2}$ est fixée; $R_{1,\nu}$ est un difféomorphisme de classe C^r dans un voisinage de 0.

$$\begin{aligned} D_{2,\nu} : \sigma_2 &\longrightarrow \tau_2 \\ Y_3 &\longmapsto X_3 = D_{2,\nu}(Y_3) \\ &= Y_3^{r_2(\nu)}[1 + \psi_2(Y_3, \nu)], \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

$$\begin{aligned} R_{2,\nu} : \tau_2 &\longrightarrow \tau_1 \\ X_3 &\longmapsto X_1 = R_{2,\nu}(X_3) \\ \text{c'est-à-dire } X_3 &= R_{2,\nu}^{-1}(X_1) \\ &= b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_1^2 + O(|X_1|^3), \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

où $R_{2,\nu}$ est un difféomorphisme de classe C^r dans un voisinage de 0, $\psi_k \in \mathcal{I}$ et $a_1 := a_1(\nu), b_1 := b_1(\nu) > 0$ sont des fonctions C^∞ (la positivité de a_1 et b_1 découle du fait que $R_{k,\nu}$ est un difféomorphisme préservant l'orientation).

Pour alléger la notation, nous ferons

$Y_1 := x, r_k(\nu) := r_k, D_{k,\nu} := D_k$ et $R_{k,\nu} := R_k$ dans la suite.

Posons

$$\Delta_2(x) := D_2 \circ R_1(x) \quad (4.3.51)$$

et

$$\Delta_1(x) := [D_1 \circ R_2]^{-1}(x). \quad (4.3.52)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta_2(x) &= (a_1x + a_2x^2 + O(|x|^3))^{r_2} (1 + \psi_2 \circ R_1(x)) \\ &= \left[a_1x \left(1 + \frac{a_2}{a_1}x + O(|x|^2) \right) \right]^{r_2} (1 + \psi_2 \circ R_1(x)) \\ &= a_1^{r_2} x^{r_2} \left(1 + r_2 \frac{a_2}{a_1} x + O(|x|^2) \right) (1 + \psi_2 \circ R_1(x)). \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

Or $\psi_3(x) := r_2 \frac{a_2}{a_1} x + O(|x|^2)$, ψ_2 appartient à \mathcal{I} et

$$R_1(x) = x (a_1 + a_2x + O(|x|^2))$$

avec

$$x \longmapsto a_2x + O(|x|^2)$$

appartenant à \mathcal{I} ; alors $R_1 \in \mathcal{D}$ et, par la proposition 4.3.5, $\psi_2 \circ R_1 \in \mathcal{I}$. Ainsi, puisque \mathcal{I} est une algèbre, on a : $\psi_3(\psi_2 \circ R_1) \in \mathcal{I}$ et, alors, $\psi_4 := \psi_2 \circ R_1 + \psi_3 + \psi_3(\psi_2 \circ R_1) \in \mathcal{I}$. Donc

$$\Delta_2(x) = a_1^{r_2} x^{r_2} (1 + \psi_4(x)), \quad (4.3.54)$$

avec $\psi_4 \in \mathcal{I}$.

De même,

$$\Delta_1(x) = R_2^{-1} \circ D_1^{-1}(x),$$

D_1 est l'application de Dulac du champ $-(S_{\epsilon,\gamma})$ avec, par [32],

$$D_1^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x)),$$

pour $\bar{\psi}_1 \in \mathcal{I}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta_1(x) &= b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x)) + b_2 x^{\frac{2}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x))^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} \left[1 + \bar{\psi}_1(x) + \frac{b_2}{b_1} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x))^2 + \dots \right] \\ &= b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)),\end{aligned}\tag{4.3.55}$$

avec $\psi_5 \in \mathcal{I}$ car alors $\psi_5(x) := \bar{\psi}_1(x) + \frac{b_2}{b_1} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x))^2 + \dots$ avec $(1 + \bar{\psi}_1(x))^2 = 1 + \varphi_0(x)$ ($\varphi_0 \in \mathcal{I}$, algèbre); alors, $x \mapsto \frac{b_2}{b_1} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x))^2 \in \mathcal{D} \subset \mathcal{I}$. Donc $\psi_5 \in \mathcal{I}$.

Conséquemment, l'application déplacement Δ est

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta_2(x) - \Delta_1(x) \\ &= a_1^{r_2} x^{r_2} (1 + \psi_4(x)) - b_0 - b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)),\end{aligned}\tag{4.3.56}$$

avec $\psi_4, \psi_5 \in \mathcal{I}$. Or, on a la :

Proposition 4.3.6. *Soit $f(x) := x^\beta (1 + \psi(x))$, avec $\beta \in \mathbf{R}^*$ et $\psi \in \mathcal{I}$. Alors $f'(x) = \beta x^{\beta-1} (1 + \bar{\psi}(x))$ avec $\bar{\psi} \in \mathcal{I}$.*

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \beta x^{\beta-1} (1 + \psi(x)) + x^\beta \psi'(x) \\ &= \beta x^{\beta-1} (1 + \psi(x) + x\psi'(x)) \\ &= \beta x^{\beta-1} (1 + \bar{\psi}(x)),\end{aligned}\tag{4.3.57}$$

avec $x \mapsto \bar{\psi}(x) := \psi(x) + x\psi'(x)$ une fonction de \mathcal{I} . □

Le résultat suivant est aussi un argument pertinent pour le théorème ci-après.

Proposition 4.3.7. *Soit $\delta > 0$:*

si $\Delta'(x) < 0$ sur $]0, \delta[$ (resp. $\Delta'(x) > 0$ sur $]0, \delta[$), alors la boucle hétéroclinique est attractive (resp. la boucle hétéroclinique est répulsive).

Démonstration. La boucle se produisant lorsque $b_0 = 0$, alors $\Delta(0) = 0$. Soit $x \in]0, \delta[$ alors, par le théorème des accroissements finis, $\exists \eta \in]0, x[$ tel que $\Delta(x) =$

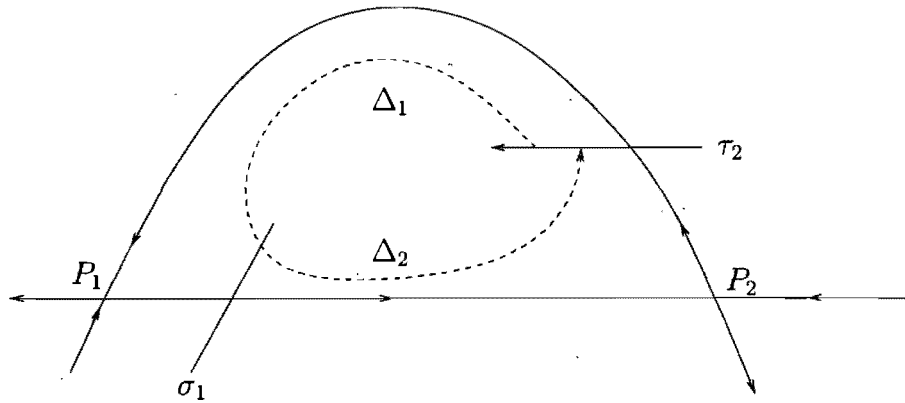


FIG. 4.8. Boucle hétéroclinique attractive

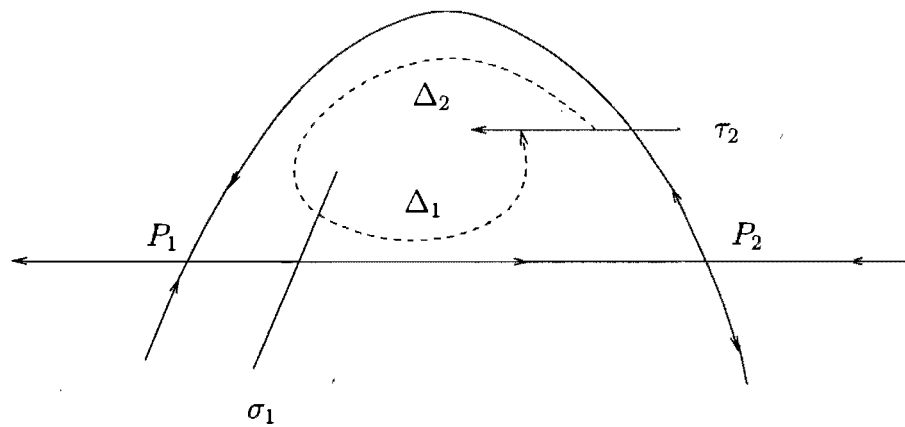


FIG. 4.9. Boucle hétéroclinique répulsive

$\Delta'(\eta)x$. A cet effet :

- si $\Delta'(x) < 0$ sur $]0, \delta[$ alors, puisque $\eta \in]0, \delta[$ et $x > 0$, on aura que $\Delta(x) < 0$ sur $]0, \delta[$; il vient que la boucle hétéroclinique est attractive [voir la figure 4.8];
- si $\Delta'(x) > 0$ sur $]0, \delta[$ alors $\Delta(x) > 0$ sur $]0, \delta[$; ce qui montre que la boucle hétéroclinique est répulsive [voir la figure 4.9]. \square

Par la proposition 4.3.6, on a

$$\Delta'(x) = -\frac{b_1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} [1 + \bar{\psi}_5(x)] + r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} [1 + \bar{\psi}_4(x)], \quad (4.3.58)$$

avec $\bar{\psi}_4, \bar{\psi}_5 \in I$. Cette dernière expression nous permet de prouver l'énoncé suivant avec $r_k := r_k(\mu)$ où μ est un paramètre réel :

Théorème 4.3.2. Lorsque $r_1 r_2 \neq 1$:

(1) la boucle hétéroclinique est : répulsive si $r_1 r_2 < 1$, attractive si $r_1 r_2 > 1$.

(2) la cyclicité du graphique précédent est égale à un.

Démonstration. (1) La boucle hétéroclinique est attractive ou répulsive

En effet :

a) Pour $r_1 r_2 < 1$ (i.e $\frac{1}{r_1} - r_2 > 0$), on a

$$\Delta'(x) = r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} \left[1 + \bar{\psi}_4(x) - \frac{b_1 a_1^{-r_2}}{r_1 r_2} x^{\frac{1}{r_1}-r_2} (1 + \bar{\psi}_5(x)) \right]. \quad (4.3.59)$$

Posons

$$\psi_6(x) := \bar{\psi}_4(x) - \frac{b_1 a_1^{-r_2}}{r_1 r_2} x^{\frac{1}{r_1}-r_2} (1 + \bar{\psi}_5(x)), \quad (4.3.60)$$

il vient que $\psi_6 \in \mathcal{I}$ car : $\psi_4 \in \mathcal{I}$ et, puisque $\frac{1}{r_1} - r_2 > 0$, on a que $x \mapsto \frac{b_1 a_1^{-r_2}}{r_1 r_2} x^{\frac{1}{r_1}-r_2} (1 + \bar{\psi}_5(x)) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{I}$, algèbre. Alors,

$$\Delta'(x) = r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} [1 + \psi_6(x)] \quad (4.3.61)$$

dont le signe est, pour $(x, \mu) \in (0, \sigma] \times W$, celui de

$$x^{1-r_2} \Delta'(x) = r_2 a_1^{r_2} [1 + \psi_6(x)] \sim r_2 a_1^{r_2} > 0, \quad (4.3.62)$$

par la définition 4.3.1 et (4.3.48).

b) Pour $r_1 r_2 > 1$ (i.e $r_2 - \frac{1}{r_1} > 0$), on a

$$\Delta'(x) = -\frac{b_1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} \left[1 + \bar{\psi}_5(x) - \frac{r_1 r_2 a_1^{r_2}}{b_1} x^{r_2-\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_4(x)) \right]. \quad (4.3.63)$$

Posons

$$\psi_7(x) := \bar{\psi}_5(x) - \frac{r_1 r_2 a_1^{r_2}}{b_1} x^{r_2-\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_4(x)), \quad (4.3.64)$$

il vient que $\psi_7 \in \mathcal{I}$ car : $\psi_5 \in \mathcal{I}$ et, puisque $\frac{1}{r_1} - r_2 > 0$, on a que $x \mapsto \frac{r_1 r_2 a_1^{r_2}}{b_1} x^{r_2-\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_4(x)) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{I}$, algèbre. Alors,

$$\Delta'(x) = -\frac{b_1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} [1 + \psi_7(x)] \quad (4.3.65)$$

dont le signe est, pour $(x, \mu) \in (0, \sigma] \times W$, celui de

$$x^{1-\frac{1}{r_1}} \Delta'(x) = -\frac{b_1}{r_1} [1 + \psi_7(x)] \sim -\frac{b_1}{r_1} < 0 \quad (4.3.66)$$

par la définition 4.3.1 et (4.3.50) :

Par (4.3.62) et la proposition 4.3.7, la boucle hétéroclinique est attractive si $r_1 r_2 > 1$ (resp. par (4.3.66) et la proposition 4.3.7 la boucle hétéroclinique est répulsive si $r_1 r_2 < 1$).

(2) Cyclicité

Par (4.3.62) ou (4.3.66), Δ' ne s'annule pas sur intervalle si $r_1 r_2 \neq 1$. Alors, par le théorème de Rolle, Δ a au plus un zéro sur cet intervalle si $r_1 r_2 \neq 1$. Donc la cyclicité du graphique précédent est égale à un si $r_1 r_2 \neq 1$.

□

Définition 4.3.2. [32] *Le compensateur d'Écalle-Roussarie du système $(S_{\epsilon, \gamma})$ est défini par*

$$\omega(x, \alpha) := \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \ln x & \text{si } \alpha = 0. \end{cases} \quad (4.3.67)$$

Alors :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, \alpha) = x^{\alpha-1}, \quad x^\alpha = 1 + \alpha \omega(x, \alpha). \quad (4.3.68)$$

La proposition suivante est un argument pertinent pour traiter le cas $r_1 r_2 = 1$.

Proposition 4.3.8. *Soit ω défini au (4.3.67). Si $\psi \in \mathcal{I}$ est de la forme particulière $\psi(x) = \sum_{1 \leq k \leq i}^N c_{ik} x^{ir} \omega^k(x, \alpha)$, avec $c_{ik} \in \mathbf{R}$ et r un nombre réel strictement positif, alors*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = 0 \quad \text{uniformément.} \quad (4.3.69)$$

Démonstration. En effet, pour :

$$\psi(x) = \sum_{1 \leq k \leq i}^N c_{ik} x^{ir} \omega^k(x, \alpha), \quad (4.3.70)$$

avec $c_{ik} \in \mathbf{R}$ et r est un nombre réel strictement positif, on a :

$$\psi'(x) = \sum_{1 \leq k \leq i}^N c_{ik} [ir x^{ir-1} \omega^k(x, \alpha) + k x^{ir} x^{\alpha-1} \omega^{k-1}(x, \alpha)], \quad (4.3.71)$$

alors

$$x^{1-\alpha}\omega(x, \alpha)\psi'(x) = \sum_{1 \leq k \leq i}^N c_{ik} [irx^{ir-\alpha}\omega^{k+1}(x, \alpha) + kx^{ir}\omega^k(x, \alpha)]. \quad (4.3.72)$$

Or, par [33], on a que $x^{ir-\alpha}\omega^{k+1}(x, \alpha)$ et $x^{ir}\omega^k(x, \alpha)$ tendent vers 0 uniformément lorsque x tend vers 0; alors, $x^{1-\alpha}\omega(x, \alpha)\psi'(x)$ tend vers 0 uniformément lorsque x tend vers 0. \square

Théorème 4.3.3. *Si $r_1 r_2 = 1$, alors :*

- (1) *la boucle hétéroclinique est attractive pour $a_1^{r_2} - b_1 < 0$ et répulsive pour $a_1^{r_2} - b_1 > 0$;*
- (2) *la cyclicité du graphique précédent est égale à deux lorsque $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$.*

Démonstration. En effet, supposons que $r_1 r_2 = 1$. On a, par (4.3.37), que

$$\gamma := \left(\mu_3 - \frac{\mu_2^2}{a^2(-4a+5)}, \mu_4 - \frac{2\mu_2(2a-3)}{a(4a-5)} \right).$$

Posons

$$\alpha(\gamma) := r_2(\gamma) - \frac{1}{r_1(\gamma)}.$$

On a $\alpha(0) = 0$. D'où, par continuité de la fonction $\gamma \mapsto r_2(\gamma) - \frac{1}{r_1(\gamma)}$, $\alpha(\gamma)$ est petit pour γ petit.

$$r_2(\gamma) = \alpha(\gamma) + \frac{1}{r_1(\gamma)}. \quad (4.3.73)$$

Par souci d'alléger la notation, nous ferons $\alpha(\gamma) := \alpha$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned} x^{r_2} &= x^{\frac{1}{r_1}} x^\alpha \\ &= x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \alpha\omega(x, \alpha)), \end{aligned} \quad (4.3.74)$$

par (4.3.68). Il vient que

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \alpha\omega(x, \alpha)) (1 + \psi_4(x)) - \left[b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)) \right] \\ &= - \left[b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)) \right] + a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + \alpha\omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) \\ &= - b_0 + \alpha\omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + x^{\frac{1}{r_1}} [a_1^{r_2} (1 + \psi_4(x)) - b_1 (1 + \psi_5(x))] \\ &= - b_0 + \alpha\omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + x^{\frac{1}{r_1}} [a_1^{r_2} - b_1 + a_1^{r_2} \psi_4(x) - b_1 \psi_5(x)]. \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

Si

$$a_1^{r_2} - b_1 \neq 0, \quad (4.3.76)$$

posons

$$\bar{\psi}_6(x) := \frac{a_1^{r_2} \psi_4(x) - b_1 \psi_5(x)}{a_1^{r_2} - b_1}, \quad (4.3.77)$$

alors $\bar{\psi}_6 \in \mathcal{I}$, algèbre. Ainsi, on a

$$\Delta(x) = -b_0 + \alpha \omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + x^{\frac{1}{r_1}} [(a_1^{r_2} - b_1)(1 + \bar{\psi}_6(x))]: \quad (4.3.78)$$

(1) **La boucle hétéroclinique est attractive ou répulsive**

Lorsque la boucle hétéroclinique se produit, on a $b_0 = 0$ et $\gamma = 0$ (alors $\alpha = 0$); ainsi

$$\Delta(x) = x^{\frac{1}{r_1}} [(a_1^{r_2} - b_1)(1 + \bar{\psi}_6(x))]. \quad (4.3.79)$$

Or, $\bar{\psi}_6(x)$ est uniformément petit sur un voisinage de $x = 0$; alors le signe de $\Delta(x)$ est le même que celui de $a_1^{r_2} - b_1$. Donc, la boucle hétéroclinique est attractive si $a_1^{r_2} - b_1 < 0$ (resp. répulsive si $a_1^{r_2} - b_1 > 0$).

(2) **Cyclicité**

Posons

$$A(x) := \omega(x, \alpha) x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x))$$

et

$$B(x) := x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_6(x)).$$

Ainsi, par la proposition 4.3.6, avons-nous :

$$\begin{aligned} A'(x) &= x^{\alpha-1} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + \frac{1}{r_1} \omega(x, \alpha) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \bar{\psi}_8(x)) \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} [r_1 x^\alpha (1 + \psi_4(x)) + \omega(x, \alpha) (1 + \bar{\psi}_8(x))] \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + \bar{\psi}_8(x) + r_1 (1 + \psi_4(x)) \left(\frac{1 + \alpha \omega(x, \alpha)}{\omega(x, \alpha)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + r_1 \alpha + \psi_9(x) + \frac{r_1 (1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.80)$$

avec $\bar{\psi}_8 \in \mathcal{I}$; la troisième égalité découle du fait que : $x^\alpha = 1 + \alpha \omega(x, \alpha)$; à la quatrième égalité nous avons $\psi_9 := \bar{\psi}_8 + \alpha r_1 \psi_4 \in \mathcal{I}$. Et, aussi,

$$B'(x) = \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)), \quad (4.3.81)$$

avec $\psi_8 \in \mathcal{I}$. Il vient donc que

$$\begin{aligned} \Delta'(x) &= \frac{1}{r_1} (a_1^{r_2} - b_1) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)) + \\ &\quad + \frac{1}{r_1} \alpha a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + r_1 \alpha + \psi_9(x) + \frac{r_1(1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{r_1} (a_1^{r_2} - b_1) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)) + \alpha \frac{1}{r_1} a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) [1 + \psi(x)], \end{aligned} \quad (4.3.82)$$

(avec $\psi(x) := \alpha r_1 + \psi_9(x) + \frac{r_1(1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)}$ petit uniformément sur un voisinage de $(x, \gamma) = (0, 0)$, car $-\omega(x, \alpha)$ est grand pour (x, γ) dans un voisinage de $(0, 0)$). Les zéros de $\Delta'(x)$ sont, pour $(x, \gamma) \in (0, \sigma] \times W$, aussi ceux de

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &:= \frac{r_1 x^{1-\frac{1}{r_1}} [\omega(x, \alpha)(1 + \psi(x))]^{-1} \Delta'(x)}{a_1^{r_2} - b_1} \\ &= \frac{1 + \psi_8(x)}{\omega(x, \alpha)(1 + \psi(x))} + \frac{\alpha a_1^{r_2}}{a_1^{r_2} - b_1}. \end{aligned} \quad (4.3.83)$$

D'où

$$\Delta'_3(x) = \frac{[\omega(x, \alpha) \overline{\psi}'_8(x)(1 + \psi(x)) - (1 + \psi_8(x)) [x^{\alpha-1}(1 + \psi(x)) + \omega(x, \alpha)\psi'(x)]]}{[\omega(x, \alpha)(1 + \psi(x))]^2}. \quad (4.3.84)$$

Le signe de $\Delta'_3(x)$ est, pour $(x, \lambda) \in (0, \sigma] \times W$, celui de

$$\begin{aligned} \Delta_4(x) &:= x^{1-\alpha} [\omega(x, \alpha)(1 + \psi(x))]^2 \Delta'_3(x) \\ &= x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \overline{\psi}'_8(x) (1 + \psi(x)) - (1 + \psi_8(x)) (1 + \psi(x)) \end{aligned} \quad (4.3.85)$$

$$+ x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x). \quad (4.3.86)$$

Or, par la proposition 4.3.8 : $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \overline{\psi}'_8(x) = 0$ uniformément et, puisque $x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'_9(x) + r_1 x^{1-\alpha} \psi'_4(x) - \frac{r_1(1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = 0$ uniformément; aussi, avons-nous que $\psi(x)$ et $\psi_8(x)$ sont petits uniformément sur un voisinage de $(x, \gamma) = (0, 0)$: $\Delta_4(x) = -1 + \varphi(x)$, avec $\varphi(x)$ petit uniformément sur un voisinage de $(x, \gamma) = (0, 0)$.

Alors, Δ_4 est négatif pour $(x, \gamma) \in (0, \sigma] \times W$.

Donc, par le théorème de Rolle, Δ a au plus deux zéros si $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$.

Comme les cycles limites correspondent aux zéros de l'application déplacement, conséquemment, la cyclicité du graphique considéré est égale à deux si $r_1 r_2 = 1$ et $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$.

□

Le problème est d'étudier le signe de $a_1^{r_2} - b_1$ puisque a_1 et b_1 sont les dérivées des fonctions en coordonnées normalisantes.

Dans la suite :

- nous ferons $x_0 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$ et $\eta := \pm 1$;
- nous ne traiterons que le cas où $r_k(0)$ est irrationnel dans la proposition 4.3.9 et le théorème 4.3.5.

Proposition 4.3.9. *En référence aux figures 4.7 et 4.6 :*

Soit $x = \bar{x} + \eta x_0$ la translation qui localise $(S_{\epsilon, \gamma})$ à l'origine. Posons $y = -\bar{y} > 0$.

Soit $(X_3, Y_3) := (\psi_3(x, y), \varphi_3(x, y))$ un changement de coordonnées tangent à l'identité qui, au voisinage de P_2 , permet d'obtenir l'équivalence (4.3.39) pour $k = 1$ et $l = 3$ dans le deuxième quadrant.

Soit $(x, y) := (\psi_1(X_1, Y_1), \varphi_1(X_1, Y_1))$ l'inverse d'un changement de coordonnées tangent à l'identité qui, au voisinage de P_1 , permet d'obtenir l'équivalence (4.3.39) pour $k = l = 1$ dans le premier quadrant. Alors :

- on peut prendre $\varphi_3(x, y) = y$ et $\varphi_1(X_1, Y_1) = Y_1$;
- on a :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial X_1}(0, Y_1) = 1 + \frac{1}{(1 - 2a)x_0^2} Y_1 + O(\epsilon^3), \quad (4.3.87)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial X_1}(0, y_0) \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(0, y_0) = 1 + O(\epsilon^3). \quad (4.3.88)$$

Démonstration. (1) *On localise $(S_{\epsilon, \gamma})$, donné en (4.3.38), au point singulier $(\eta x_0, 0)$ par la translation*

$$x = \bar{x} + \eta x_0 : \quad (4.3.89)$$

on obtient, lors de BH_2 approximé pour le système (4.3.23) par (4.3.36), un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{y} + ax(x - 2\eta x_0) \\ \dot{\bar{y}} = -\eta x_0 \bar{y} - \frac{(-4a+5+8\epsilon^3 x_0^3 \eta(a-1))x\bar{y}}{4a-5} \\ + \epsilon^3 \left[\frac{2x_0^2(10a-12)\bar{y}x^2}{4a-5} - 4\eta x_0 \bar{y}x^3 + \bar{y}x^4 \right]. \end{cases} \quad (4.3.90)$$

(2) On diagonalise la partie linéaire de (4.3.90) par la transformation suivante

$$X = x + \left(\frac{1}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \right) \bar{y}, \quad Y = \bar{y}, \quad (4.3.91)$$

où $\lambda_{1,k} = -2a\eta x_0$ et $\lambda_{2,k} = -\eta x_0$ désignent les deux valeurs propres de la partie linéaire de (4.3.90) : on a $\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k} = \eta x_0(1 - 2a)$, $r_1(\gamma) = -\frac{1}{2a}$ et $r_2(\gamma) = -2a$. (4.3.91) et (4.3.90) permettent d'obtenir le système

$$\begin{cases} \dot{X} = -2a\eta x_0 X' + aX^2 + \frac{(8\epsilon^3 x_0^3 \eta a + 8a^2 - 14a + 5 - 8\epsilon^3 x_0^3 \eta)XY}{\eta x_0(2a-1)(4a-5)} \\ + \frac{[4a-5+8\epsilon^3 x_0^3 \eta]Y^2}{x_0^2(2a-1)^2(4a-5)} + \epsilon^3 u(X, Y, \eta), \\ \dot{Y} = -\eta x_0 Y - \frac{(-4a+5+8\epsilon^3 x_0^3 \eta a - 8\epsilon^3 x_0^3 \eta)XY}{4a-5} \\ - \frac{(-4a+5+8\epsilon^3 x_0^3 \eta a - 8\epsilon^3 x_0^3 \eta)Y^2}{\eta x_0(2a-1)(4a-5)} + \epsilon^3 v(X, Y, \eta), \end{cases} \quad (4.3.92)$$

où $u(X, Y, \eta) = \sum_{i+j=3}^5 u_{ij}(\eta)X^i Y^j$ et $v(X, Y, \eta) = Y \sum_{i+j=2}^4 v_{ij}(\eta)X^i Y^j$.

(3) On remarque que, pour $\epsilon = 0$, le système (4.3.90) (et même (4.3.92)) est invariant sous la transformation

$$(x, \bar{y}, t, \eta) \mapsto (-x, \bar{y}, -t, -\eta) : \quad (4.3.93)$$

on a donc une symétrie. Ceci signifie que, pour $\epsilon = 0$, le système de droite (c'est à dire au voisinage de P_2 où $\eta = -1$) est obtenu de celui de gauche (c'est à dire au voisinage de P_1 où $\eta = 1$) sous le changement (4.3.93). Autrement dit, on a la même forme normale pour les deux systèmes quand $\epsilon = 0$. Si on applique le même changement lorsque $\epsilon \neq 0$, changer du point de gauche au point de droite revient à changer $\epsilon^3 \mapsto -\epsilon^3$. Autrement dit, lorsqu'on considère aussi les termes d'ordre ϵ^3 , il suffit de faire le changement $\epsilon^3 \mapsto -\epsilon^3$ pour obtenir les résultats à droite à partir de ceux

de gauche :

- Étant donné que nous voulons $X_l, Y_l > 0$ dans les quadrants où se situe la boucle hétéroclinique, alors, pour $\eta = 1$ et par la transformation $\tilde{X}_1 = X, \tilde{Y}_1 = -Y$, le système (4.3.92) devient, sans changer de notation

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -2ax_0X - \frac{(8\epsilon^3x_0^3a+8a^2-14a-8\epsilon^3x_0^3+5)XY}{x_0(2a-1)(4a-5)} + \frac{(a-1)(4a-5+8\epsilon^3x_0^3)Y^2}{x_0^2(2a-1)^2(4a-5)} \\ + \epsilon^3u_1(X, Y), \\ \dot{Y} = -x_0Y + \frac{(-4a+5+8\epsilon^3x_0^3a-8\epsilon^3x_0^3)XY}{4a-5} + \frac{(-4a+5+8\epsilon^3x_0^3a-8\epsilon^3x_0^3)Y^2}{x_0(2a-1)(4a-5)} \\ + \epsilon^3Yv_1(X, Y) \\ := Yh_1(X, Y) : \end{array} \right. \quad (4.3.94)$$

On voit que $h_1(X, Y) < 0$ pour X, Y assez petit.

- On divise (4.3.94) par $2ah_1(X, Y) > 0$ où

$$\begin{aligned} h_1(X, Y) &= -x_0 + \frac{(-4a+5+8\epsilon^3x_0^3a-8\epsilon^3x_0^3)X}{4a-5} \\ &+ \frac{(-4a+5+8\epsilon^3x_0^3a-8\epsilon^3x_0^3)Y}{x_0(2a-1)(4a-5)} + \epsilon^3v_1(X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.95)$$

et, sans changer de notation, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = X + \left(\frac{1}{2x_0} + O(\epsilon^3)\right) X^2 + \left(\frac{1}{2a(1-2a)x_0^2} + O(\epsilon^3)\right) XY \\ + \left(\frac{a-1}{2a(1-2a)x_0^3} + O(\epsilon^3)\right) Y^2 + O(|(X, Y)|^3), \\ := X + \sum_{i+j=2} a_{ij} X^i Y^j + O(|(X, Y)|^3), \\ \dot{Y} = \left(\frac{1}{2a}\right) Y := -r_1(\gamma)Y. \end{array} \right. \quad (4.3.96)$$

- (4) *Détermination du changement de coordonnées permettant de passer de (4.3.96) à (4.3.39) :*

En effet, en posant

$$X = X_1 + \sum_{i+j=2} g_{ij} X_1^i Y_1^j + O(|(X_1, Y_1)|^3), \quad Y = Y_1, \quad (4.3.97)$$

alors, puisque nous voulons (4.3.39) dans la coordonnée (X_1, Y_1) , on a par (4.3.97) et (4.3.96) que :

$$g_{11} = -\frac{a_{11}}{r_1(\gamma)}.$$

Ainsi, avons-nous le changement de coordonnées voulu, défini par (4.3.97) avec

$$g_{11} = \frac{1}{(1-2a)x_0^2} + O(\epsilon^3). \quad (4.3.98)$$

Or, dans (4.3.97) on a que $X = x + \left(\frac{1}{(1-2a)x_0}\right)\bar{y}$, $y := -\bar{y} = -Y = Y_1$.

Alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{(1-2a)x_0}Y_1 + O(Y_1^2) + \left[1 + \frac{1}{(1-2a)}Y_1 + O(\epsilon^3)\right] X_1 \\ &\quad + O(X_1^2), \\ y &= Y_1. \end{aligned} \quad (4.3.99)$$

Ainsi

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}(0, Y_1) = 1 + \frac{1}{(1-2a)x_0^2}Y_1 + O(\epsilon^3). \quad (4.3.100)$$

Et, pour $y = y_0 = Y_1 > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}(0, y_0) \frac{\partial\psi_3}{\partial x}(0, y_0) &= \frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}(0, y_0)}{\frac{\partial\psi_3^{-1}}{\partial x}(0, y_0)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.3.101)$$

pour $\epsilon = 0$ (par symétrie); d'où, pour $\epsilon \neq 0$:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial X_1}(0, Y_1) \frac{\partial\psi_3}{\partial \bar{x}}(0, \bar{y}) = 1 + O(\epsilon^3); \quad (4.3.102)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Avant de continuer, rappelons brièvement des formules des dérivées d'une application de transition régulière.

Théorème 4.3.4. [2] Soit $\mathbf{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs et

$$\Sigma_1 = \{(x, y) = (f_1(s), g_1(s))\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, y) = (f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s}))\}$$

deux arcs sans contact. Soit $R(s)$ l'application de transition allant de Σ_1 à Σ_2 .

Alors

$$R'(s) = \frac{\Delta(s)}{\tilde{\Delta}(R(s))} \exp \left(\int_0^{T(s)} \operatorname{div} \mathbf{X}(\gamma(t)) dt \right) \quad (4.3.103)$$

où $T(s)$ est le temps d'aller de $(f_1(s), g_1(s))$ à $(f_2(R(s)), g_2(R(s)))$ le long de l'orbite $\gamma(t)$ commençant à $(f_1(s), g_1(s))$ pour $t = 0$ et

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} P(f_1(s), g_1(s)) & f_1'(s) \\ Q(f_1(s), g_1(s)) & g_1'(s) \end{pmatrix} \quad (4.3.104)$$

$$\tilde{\Delta}(\tilde{s}) = \det \begin{pmatrix} P(f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s})) & f_2'(\tilde{s}) \\ Q(f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s})) & g_2'(\tilde{s}) \end{pmatrix}. \quad (4.3.105)$$

Il n'est pas toujours aisé d'utiliser le théorème 4.3.4 ; la proposition suivante est donc la plus utilisée.

Proposition 4.3.10. [43] *Considérons R l'application de transition régulière du champ de vecteurs $\mathbf{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ entre deux arcs sans contact,*

$$\Sigma_1 = \{y = y_1\} \quad \text{à} \quad \Sigma_2 = \{y = y_2\}:$$

Si

- $P(0, y) \equiv 0$ (la transition est le long de l'axe $x = 0$) et
- $Q(0, y) \neq 0$ pour $y \in (y_1, y_2)$,

alors

$$R'(0) = \exp \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{P'_x}{Q}(0, y) dy \right). \quad (4.3.106)$$

Cette dernière formule sera utilisée pour obtenir le résultat suivant où $\nu := (\epsilon, \gamma)$.

Théorème 4.3.5. *Sous la condition $r_1(\nu)r_2(\nu) = 1$, pour $X_0, Y_{01}, Y_{03} > 0$ fixés tels que*

$$Y_{01}X_0^{-r_1(\nu)} = 1, \quad Y_{03}X_0^{-r_2(\nu)} = 1,$$

soient

$$\sigma_1 := \{X_1 = X_0\}, \quad \sigma_2 := \{X_3 = X_0\}, \quad \tau_1 := \{Y_1 = Y_{01}\}, \quad \tau_2 := \{Y_3 = Y_{03}\}$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées normalisantes. De même, pour θ proche de x_0 à gauche, $y := -\bar{y} > 0$ et $y_0 > 0$ petits, soient

$$\bar{\sigma}_1 := \{\bar{x} = -\theta\}, \quad \bar{\sigma}_2 := \{\bar{x} = \theta\}, \quad \bar{\tau}_1 := \{y = y_0\}, \quad \bar{\tau}_2 := \{y = y_0\}$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées ordinaires. Soient $R_1 : \sigma_1 \mapsto \sigma_2$ et $R_2 : \tau_1 \mapsto \tau_2$ des applications de transition régulières, en coordonnées normalisantes, définies par (4.3.48) et (4.3.50). De même, soient $\bar{R}_1 : \bar{\sigma}_1 \mapsto \bar{\sigma}_2$ et $\bar{R}_2 : \bar{\tau}_2 \mapsto \bar{\tau}_1$ des applications de transition régulières en coordonnées ordinaires. Posons $a_1 := R_1'(0)$, $b_1 := (R_2^{-1})'(0)$, $\bar{a}_1 := \bar{R}_1'(0)$ et $\bar{b}_1 := (\bar{R}_2^{-1})'(0)$; alors, $a_1^{r_2} - b_1$ et $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ ont le même signe.

Démonstration. Soit $\tilde{\sigma}_1 := \ll \bar{\sigma}_1 \text{ dans la coordonnée } (x, y) \gg$, $\tilde{\sigma}_2 := \ll \bar{\sigma}_2 \text{ dans la coordonnée } (x, y) \gg$. Posons

$$\tilde{\theta} := -\theta + x_0. \tag{4.3.107}$$

Alors, $\tilde{\theta}$ petit et, par la translation $x = \bar{x} + x_0$, on a

$$\tilde{\sigma}_1 := \{x = \tilde{\theta}\};$$

d'où, par symétrie,

$$\tilde{\sigma}_2 := \{x = -\tilde{\theta}\}.$$

Posons $\bar{\bar{\sigma}}_1 := \ll \tilde{\sigma}_1 \text{ dans la coordonnée } (X_1, Y_1) \gg$, $\bar{\bar{\sigma}}_2 := \ll \tilde{\sigma}_2 \text{ dans la coordonnée } (X_3, Y_3) \gg$, $\bar{\bar{\tau}}_1 := \ll \bar{\tau}_1 \text{ dans la coordonnée } (X_1, Y_1) \gg$ et $\bar{\bar{\tau}}_2 := \ll \bar{\tau}_2 \text{ dans la coordonnée } (X_3, Y_3) \gg$. Or on a que

$$X_1 = X + \sum_{i+j=2} \tilde{g}_{ij} X^i Y_1^j + O(|(X, Y_1)|^3), \tag{4.3.108}$$

avec $X = x + \left(\frac{1}{(2a-1)x_0}\right) \bar{y}$ et $Y_1 = y := -\bar{y}$, c'est-à-dire

$$X = x + \left(\frac{1}{(1-2a)x_0}\right) Y_1. \tag{4.3.109}$$

Alors, en remplaçant x par $\tilde{\theta}$ dans (4.3.109), (4.3.108) devient

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 := \{ & X_1 = \tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3) \\ & + Y_1 \left[\frac{1}{(2a-1)x_0} + O(|\tilde{\theta}|) + O(|Y_1|) \right] \} \end{aligned} \quad (4.3.110)$$

De même, par la symétrie (4.3.93), on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 := \{ & X_3 = \tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3) \\ & + Y_3 \left[\frac{1}{(2a-1)x_0} + O(|\tilde{\theta}|) + O(|Y_3|) \right] \} \end{aligned} \quad (4.3.111)$$

Il est clair que

$$\bar{\tau}_1 := \{Y_1 = y_0\} \quad (4.3.112)$$

et

$$\bar{\tau}_2 := \{Y_3 = y_0\}. \quad (4.3.113)$$

Considérons :

- S_1 l'application de σ_1 vers $\bar{\sigma}_1$ dans les coordonnées (X_1, Y_1) ;
- T_1 le changement de coordonnée de Y_1 vers y dans $\tilde{\sigma}_1$; alors

$$\begin{aligned} y &:= T_1(Y_1) \\ &= Y_1; \end{aligned} \quad (4.3.114)$$

- \tilde{R}_1 l'application de transition de $\tilde{\sigma}_1$ vers $\tilde{\sigma}_2$ dans les coordonnées (x, y) ;
- T_2 le changement de coordonnée de y vers Y_3 dans $\tilde{\sigma}_2$; alors

$$\begin{aligned} Y_3 &:= T_2(y) \\ &= y. \end{aligned} \quad (4.3.115)$$

- S_2 l'application de $\bar{\sigma}_2$ vers σ_2 dans les coordonnées (X_3, Y_3) ;
- V_1 l'application de τ_1 vers $\bar{\tau}_1$ dans les coordonnées (X_1, Y_1) ;
- U_1 le changement de coordonnée de X_1 vers x dans $\bar{\tau}_1$; alors

$$\begin{aligned} x &= U_1(X_1) \\ &= c_0 + c_1 X_1 + O(|X_1|^2), \end{aligned} \quad (4.3.116)$$

où $c_1 > 0$: on a, par (4.3.100) de la proposition 4.3.9 que

$$c_1 = 1 + \frac{y_0}{(1-2a)x_0^2} + O(\epsilon^3); \quad (4.3.117)$$

- \tilde{R}_2^{-1} l'application de transition de $\bar{\tau}_1$ vers $\bar{\tau}_2$ dans les coordonnées (x, y) ;
- U_2 le changement de coordonnée de x vers X_3 dans $\bar{\tau}_2$; alors

$$\begin{aligned} X_3 &= U_2(x) \\ &= d_0 + d_1 x + O(|x|^2), \end{aligned} \quad (4.3.118)$$

où $d_1 > 0$ et, par (4.3.88) de la proposition 4.3.9, on a que

$$c_1 d_1 = 1 + O(\epsilon^3); \quad (4.3.119)$$

- V_2 l'application de $\bar{\tau}_2$ vers τ_2 dans les coordonnées (X_3, Y_3) .

Puisque a_1 et b_1 dépendent continûment des paramètres (voir 4.3.48 et 4.3.50), on peut donc les calculer pour $\gamma = 0$ de sorte que l'on ait $r_1 = \frac{1}{r_2}$.

Or, on a que :

$$R_1 = S_2 \circ T_2 \circ \tilde{R}_1 \circ T_1 \circ S_1$$

et

$$R_2^{-1} = V_2 \circ U_2 \circ \tilde{R}_2^{-1} \circ U_1 \circ V_1.$$

Alors,

$$R_1'(0) = S_2'(0)T_2'(0)\tilde{R}_1'(0)T_1'(0)S_1'(0)$$

et

$$(R_2^{-1})'(0) = V_2'(0)U_2'(0)(\tilde{R}_2^{-1})'(0)U_1'(0)V_1'(0).$$

Or, par [43], (4.3.39) et du fait que $r_1 r_2 = 1$, on a que :

$$\begin{aligned} S_1'(Y_1 = 0) &= \exp \left(\int_{X_0}^{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)} -\frac{r_1}{X_1} dX_1 \right) \\ &= \left(\frac{X_0}{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)} \right)^{r_1}; \end{aligned} \quad (4.3.120)$$

$$\begin{aligned}
S'_2(Y_3 = 0) &= \exp \left(\int_{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)}^{X_0} -\frac{r_1}{X_3} dX_3 \right) \\
&= \left(\frac{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)}{X_0} \right)^{r_1}; \tag{4.3.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V'_2(X_3 = 0) &= \exp \left(\int_{y_0}^{Y_{03}} \frac{1}{-r_1 Y_3} dY_3 \right) \\
&= \left(\frac{y_0}{Y_{03}} \right)^{r_2}; \tag{4.3.122}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V'_1(X_1 = 0) &= \exp \left(\int_{Y_{01}}^{y_0} \frac{1}{-r_1 Y_1} dY_1 \right) \\
&= \left(\frac{Y_{01}}{y_0} \right)^{r_2}. \tag{4.3.123}
\end{aligned}$$

Aussi, par (4.3.114), (4.3.115), (4.3.116) et (4.3.118), avons-nous respectivement que

$$T'_1(0) = 1, \quad T'_2(0) = 1, \tag{4.3.124}$$

$$U'_1(0) = c_1 > 0, \quad U'_2(0) = d_1 > 0 \tag{4.3.125}$$

respectivement donnés par (4.3.117) et (4.3.119). Posons

$$\tilde{a}_1 := \tilde{R}'_1(0), \quad \tilde{b}_1 := (\tilde{R}_2^{-1})'(0).$$

Alors, par ce qui précède

$$\begin{aligned}
R'_1(0) &= \left(\frac{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)}{X_0} \right)^{r_1} \tilde{a}_1 \left(\frac{X_0}{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)} \right)^{r_1} \\
&= \tilde{a}_1 (1 + O(\epsilon^3)), \tag{4.3.126}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_2^{-1})'(0) &= \left(\frac{y_0}{Y_{03}} \right)^{r_2} c_1 \tilde{b}_1 d_1 \left(\frac{Y_{01}}{y_0} \right)^{r_2} \\
&= c_1 d_1 \tilde{b}_1 \tag{4.3.127}
\end{aligned}$$

car $Y_{01} Y_{03}^{-1} = 1$.

Ainsi

$$a_1 = \tilde{a}_1 (1 + O(\epsilon^3)), \quad b_1 = c_1 d_1 \tilde{b}_1. \tag{4.3.128}$$

Or, par (4.3.119), on a que :

$$c_1 d_1 = 1 + O(\epsilon^3);$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1^{r_2} - b_1 &= \tilde{a}_1^{r_2} (1 + O(\epsilon^3)) - \tilde{b}_1 (1 + O(\epsilon^3)) \\ &= (\tilde{a}_1^{r_2} - \tilde{b}_1) (1 + O(\epsilon^3)). \end{aligned} \quad (4.3.129)$$

Donc

$$a_1^{r_2} - b_1 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_1^{r_2} - \tilde{b}_1 \quad \text{ont le même signe.} \quad (4.3.130)$$

Pour revenir aux coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) , soient :

- \tilde{T}_1 le changement de coordonnées de x vers \bar{x} dans $\bar{\tau}_1$; alors

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tilde{T}_1(x) \\ &= x - x_0; \end{aligned} \quad (4.3.131)$$

- \tilde{T}_2 le changement de coordonnées de x vers \bar{x} dans $\bar{\tau}_2$; alors

$$\begin{aligned} x &= \tilde{T}_2(\bar{x}) \\ &= \bar{x} - x_0; \end{aligned} \quad (4.3.132)$$

- \tilde{S}_1 le changement de coordonnées de y vers \bar{y} dans $\bar{\sigma}_1$; alors

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \tilde{S}_1(y) \\ &= -y; \end{aligned} \quad (4.3.133)$$

- \tilde{S}_2 le changement de coordonnées de \bar{y} vers y dans $\bar{\sigma}_2$; alors

$$\begin{aligned} y &= \tilde{S}_2(\bar{y}) \\ &= -\bar{y}. \end{aligned} \quad (4.3.134)$$

Or,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \tilde{S}_2 \circ \bar{R}_1 \circ \tilde{S}_1, \\ \tilde{R}_2^{-1} &= \tilde{T}_2 \circ \bar{R}_2^{-1} \circ \tilde{T}_1; \end{aligned} \quad (4.3.135)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{T}'_2(0) &= \tilde{T}'_1(0) = 1, \\ \tilde{S}'_2(0) &= \tilde{S}'_1(0) = -1.\end{aligned}\tag{4.3.136}$$

Alors

$$\tilde{R}'_1(0) = \overline{R}'_1(0) \quad \text{et} \quad (\tilde{R}_2^{-1})'(0) = (\overline{R}_2^{-1})'(0),$$

c'est-à-dire

$$\tilde{a}_1 = \overline{a}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{b}_1 = \overline{b}_1.\tag{4.3.137}$$

Conséquemment, par (4.3.130) et (4.3.137), on a que $a_1^{r_2} - b_1$ et $\overline{a}_1^{r_2} - \overline{b}_1$ ont le même signe. \square

Théorème 4.3.6. *Lors de BH_2 , définie pour le système (4.3.23), la cyclicité du graphique est égale à deux et la boucle hétéroclinique est attractive.*

Démonstration. (1) **Cyclicité**

En effet, par les théorèmes 4.3.3 et 4.3.5, il suffit d'étudier le signe de $\overline{a}_1^{r_2} - \overline{b}_1$. Il s'agit donc de faire les calculs dans le système $(S_{e,\gamma})$, globalement équivalent à (4.3.23) par (4.3.24), sous les deux égalités suivantes caractérisant une approximation de BH_2 ,

$$\begin{cases} \mu_3 = \frac{\mu_2^2}{a^2(-4a+5)} := f(a)\mu_2^2 \\ \mu_4 = \frac{2\mu_2(2a-3)}{a(4a-5)} := g(a)\mu_2, \end{cases}\tag{4.3.138}$$

avec $\mu_2 > 0$, $a < 0$, $f(a) := \frac{1}{a^2(-4a+5)} > 0$ et $g(a) := \frac{2(2a-3)}{a(4a-5)} < 0$.

Comme $\overline{a}_1^{r_2} - \overline{b}_1$ est continue, si nous montrons que $\overline{a}_1^{r_2} - \overline{b}_1$ est non nulle d'un signe donné sous la condition (4.3.138) qui implique en particulier que $\overline{b}_0 = 0$ (où \overline{b}_0 est le terme constant de $\overline{R}_2^{-1}(\overline{x})$), il gardera le même signe au voisinage de (4.3.138).

Or, $\overline{a}_1 = \overline{R}'_1(\overline{y} = 0)$. Et, puisque le signe de $\overline{a}_1^{r_2} - \overline{b}_1$ est indépendant de θ , il suffit donc de calculer $\overline{R}'_1(\overline{y} = 0)$ lorsque $\theta \rightarrow x_0^-$ où $x_0 := \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}}$. En plus, les fonctions

$$\overline{x} \mapsto \frac{\overline{x}}{a\overline{x}^2 + \mu_2}$$

et

$$p : \bar{x} \mapsto \frac{\epsilon^3(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4)}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2}$$

sont respectivement impaire et paire dans $[-\theta, \theta]$. Donc, par $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ et [43], on a que :

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow x_0} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\bar{x} + \epsilon^3(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4)}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2} d\bar{x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \left(\frac{-2\epsilon^3}{a} \int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_2}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.3.138)$$

De même, on sait que $\bar{b}_1 = (\bar{R}_2^{-1})'(\bar{x} = 0)$ avec $\bar{R}_2^{-1} : \bar{\tau}_1 = \{(\bar{x} = \bar{f}_1(\bar{x}), \bar{y} = \bar{g}_1(\bar{x}) = -y_0)\} \rightarrow \bar{\tau}_2 = \{(\bar{x} = \bar{f}_2(\bar{x}), \bar{y} = \bar{g}_2(\bar{x}) = -y_0)\}$. Or, puisque

$$\operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma})) = (2a + 1)\bar{x} + \epsilon^3(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4)$$

et que le signe de $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ est indépendant de y_0 alors le calcul de $(\bar{R}_2^{-1})'(\bar{x} = 0)$ sera fait lorsque $y_0 \rightarrow 0^+$, de sorte que :

$$t \in [0, T(0)] \iff \bar{x} \in [-\theta, \theta], \quad \theta \rightarrow \left(\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} \right)^{-}$$

En plus, les fonctions p et $i : \bar{x} \mapsto \frac{(2a+1)\bar{x}}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2}$ sont respectivement paire et impaire dans $[-\theta, \theta]$. Alors, par [2], le long de la parabole $F_2 : \bar{y} = \left(\frac{1-2a}{2}\right)\left(\frac{\bar{\mu}_2}{a} + \bar{x}^2\right) :$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \exp \left(\int_0^{T(0)} \operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma})) dt \right) \\ &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \frac{\operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma}))}{\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\mu}_2}{a} + \bar{x}^2\right)} d\bar{x} \right) \right) \\ &= \exp \left(-4\epsilon^3 \lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \left(\int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_2}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3.139)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \frac{\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_2}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} &= \bar{\mu}_3 \left(\frac{1}{2\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \ln \left(\frac{\theta + \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} - \theta} \right) \right) \\
&+ \bar{\mu}_4 \left(-\theta + \frac{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{2} \ln \left(\frac{\theta + \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} - \theta} \right) \right) \\
&+ \left(-\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta \bar{\mu}_2}{a} - \frac{\bar{\mu}_2}{2} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} \ln \left(\frac{\theta + \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} - \theta} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\bar{\mu}_3}{2\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} + \frac{\bar{\mu}_4 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{2} - \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{2} \right) \ln \left(\frac{\theta + \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} - \theta} \right) \\
&- \theta \bar{\mu}_4 - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta \bar{\mu}_2}{a}. \tag{4.3.141}
\end{aligned}$$

Mais, par (T_2) et (4.3.138), on a successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{\mu}_3}{2\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} + \frac{\bar{\mu}_4 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{2} - \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}}{2} = \\
&\frac{\frac{-a}{\bar{\mu}_2} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} \epsilon^{-3}}{2a^2} \left[\frac{-10 + 28a - 16a^2 + (-4a + 5)(-4a + 2)}{(-4a + 5)(-4a + 2)} \right] \\
&= 0. \tag{4.3.142}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \left(\int_0^\theta \frac{\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_2}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}}} \left(-\theta \bar{\mu}_4 - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta \bar{\mu}_2}{a} \right) \\
&= \left(\epsilon^{-1} \sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[ag(a) - \frac{4}{3} \right] \\
&= \epsilon^{-3} \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right]. \tag{4.3.143}
\end{aligned}$$

Ainsi, par (4.3.139), (4.3.140) et (4.3.143), avons-nous :

$$\bar{a}_1 = \exp \left(-\frac{2}{a} \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right] \right), \quad \bar{b}_1 = \exp \left(-4 \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right] \right). \tag{4.3.144}$$

Posons

$$a_{01} := -\frac{2}{a} \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2-4a}{3(4a-5)} \right], \quad b_{01} := -4 \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2-4a}{3(4a-5)} \right]; \quad (4.3.145)$$

alors

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 &= (\exp(a_{01}))^{r_2} - \exp(b_{01}) \\ &= \exp(r_2 a_{01}) - \exp(b_{01}) \\ &= \exp(b_{01}) [\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) - 1]. \end{aligned} \quad (4.3.146)$$

Or, par ce qui précède, on a que

$$r_2 a_{01} - b_{01} = 2 \left(2 - \frac{r_2}{a} \right) \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{a}} \right)^3 \left[\frac{2-4a}{3(4a-5)} \right] < 0$$

Donc,

$$\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) < 1$$

et, alors :

$$\exp(b_{01}) [\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) - 1] < 0.$$

Conséquemment

$$\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 < 0 :$$

ce qui montre, par les théorèmes (4.3.3) et (4.3.5), que, lors de BH_2 défini pour le système (4.3.23), la cyclicité du graphique est égale à deux.

(2) La boucle hétéroclinique est attractive

En effet, la boucle hétéroclinique du système (4.3.23) se produit pour la valeur 0 du paramètre γ (donc sous les égalités (4.3.138)) et pour $\bar{b}_0 = 0$. Ainsi, par la première partie de la preuve ce théorème, avons-nous que $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 < 0$. Donc, par les théorèmes 4.3.3 et 4.3.5, on a que la boucle hétéroclinique du système (4.3.23) est attractive.

□

4.3.7. Diagramme de bifurcation de (4.1.4)

Pour mieux visualiser toutes les surfaces de bifurcations, on choisit de dessiner la trace de leur intersection avec la sphère

$$S_\epsilon := \{(\mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = \epsilon^2\}$$

où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit. La représentation de la trace du diagramme de bifurcations se fait en enlevant un point de la sphère dans la région où $\mu_2 < 0$.

Théorème 4.3.7. *Le diagramme de bifurcations de (4.3.23) apparaît à la figure 4.10.*

H_a :	Bifurcation de Hopf attractive
H_r :	Bifurcation de Hopf répulsive
H_2 :	Bifurcation de Hopf de codimension deux
BH_a :	Boucle hétéroclinique attractive
BH_r :	Boucle hétéroclinique répulsive
BH_2 :	Boucle hétéroclinique de codimension deux
DC :	Double cycle
C :	Intersection entre (H) et (BH)
B_+ :	Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y positif
B_- :	Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y négatif
Cn_{a_i} :	Col-noeud attractif interne
Cn_{r_i} :	Col-noeud répulsif interne
Cn_{a_e} :	Col-noeud attractif externe
Cn_{r_e} :	Col-noeud répulsif externe

TAB. 4.1. Description des courbes de bifurcation de la figure 4.10.

On peut donc faire la conjecture générale suivante :

Conjecture 4.3.2. *Le diagramme de bifurcations de la famille (4.1.2) a une structure de cône, si bien qu'on peut, comme celui du système (4.3.23), se contenter de décrire son intersection avec une sphère. Topologiquement, il a la même structure que celui de la famille (4.3.23) et est donc décrit par la figure 4.10.*

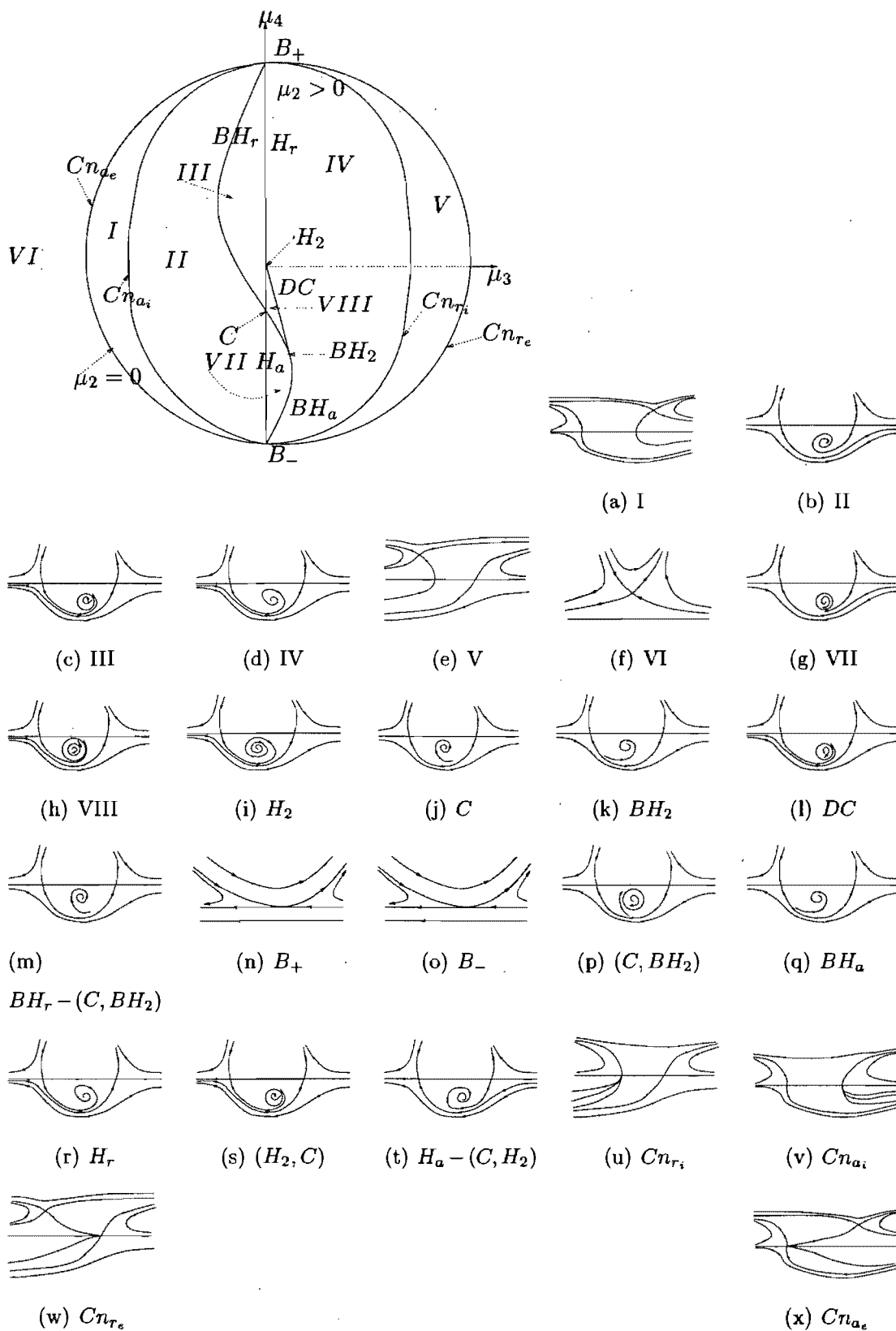


FIG. 4.10. Trace du diagramme de bifurcations sur S_ϵ et portraits de phase du système (4.1.4).

Chapitre 5

DIAGRAMME DE BIFURCATIONS ET INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE DU SYSTÈME

5.1. PRÉSENTATION DU CHAPITRE

On rappelle que le système simplifié, (0.0.11), se présente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

à 5 paramètres réels : $\rho, \alpha, \delta, \lambda$ sont strictement positifs, $\beta \geq 0$; et

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}.$$

Par l'étude (précédente) des bifurcations de (0.0.11), celles-ci n'ont lieu que sous les conditions de bases suivantes :

$$\rho \geq 4\lambda \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{\alpha}. \quad (5.1.1)$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho} \quad (5.1.2)$$

où on a

$$0 < \frac{1}{2} - \eta \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \eta < 1. \quad (5.1.3)$$

On choisit de présenter le diagramme de bifurcations dans l'espace $(\alpha, \delta, \lambda)$ pour les différentes valeurs de (β, ρ) . La plupart du temps, nous donnerons les coupes du diagramme de bifurcations dans le plan (α, δ) pour différents $\lambda \geq 0$.

5.2. BIFURCATIONS DE COL-NOEUD

Cette section (très courte!) porte sur le résultat suivant

Théorème 5.2.1. (1) Si $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, alors la réunion, (Cn) , des surfaces de bifurcations de col-noeud, $(Cn_r) : \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $(Cn_a) : \delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$, est définie par l'équation :

$$(Cn) : (\lambda^2 \alpha^2 + \rho (-2\alpha + \beta^2 + \beta\alpha) \lambda + \rho^2 (1 + \beta + \alpha)) \delta^2 + (-2\lambda^2 \alpha - \rho (-2 + \beta) \lambda - \rho^2) \delta + \lambda^2 = 0. \quad (5.2.1)$$

(5.2.1) est une équation polynomiale de degré 2 en δ , à coefficients polynomiaux en α, β, ρ et λ . A la limite, quand $\lambda = 0$, (Cn_r) se confond avec $\delta = 0$.

(2) Dans le plan (α, δ) , soit

$$(CN) : \delta = p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} : \quad (5.2.2)$$

(Cn_r) , (CN) et (Cn_a) sont des branches d'hyperboles représentées à la figure 5.1.

Plus précisément :

(3) Si $\lambda = \frac{\rho}{4}$ alors :

- (Cn_r) et (Cn_a) se confondent exactement le long de la courbe (CN) , qui correspond à un point singulier triple sur l'axe des x ;
- il existe un col-noeud répulsif, (CN_r) , (resp. attractif, (CN_a)), si $\delta < \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ (resp. si $\delta > \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$) : voir la figure 5.5(d).

(4) (Cn_a) est en-dessous de (CN) qui, à son tour, est en-dessous de (Cn_r) .

(5) La droite d'équation :

- $\delta = 0$ est asymptote horizontale à (Cn_r) , (Cn_a) et à (CN) .

- $\alpha = 0$ intersecte (Cn_r) , (Cn_a) et (CN) respectivement aux points $(0, f_r(0))$, $(0, f_a(0))$ et $(0, f_n(0))$ où $f_r(0) := \frac{(\frac{1}{2}-\eta)^2}{\beta(\frac{1}{2}-\eta)+1}$, $f_a(0) := \frac{(\frac{1}{2}+\eta)^2}{\beta(\frac{1}{2}+\eta)+1}$ et $f_n(0) = \frac{1}{2(\beta+2)}$.

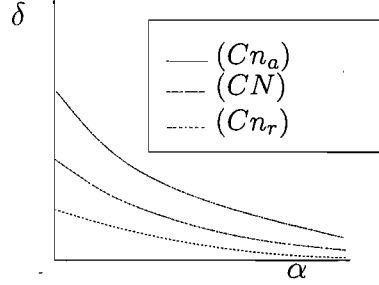


FIG. 5.1. Sections, parallèles au plan (α, δ) , des surfaces de bifurcations de col-noeud lorsque $\rho > 4\lambda$

Démonstration. En effet :

- (1) Par les sous-sections 2.1 du chapitre 2 et 3.1.2 du chapitre 3, si $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, alors (Cn_r) et (Cn_a) correspondent aux lieux où un point singulier du premier quadrant ouvert se confond avec un point singulier situé sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire lorsque le résultant de $f(x) := (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta$ (qui donne l'abscisse des points singuliers dans le premier quadrant) et $g(x) := \rho x^2 - \rho x + \lambda$ (qui donne l'abscisse des points singuliers sur l'axe des x) est nul. Un calcul sur MAPLE montre que le résultant R de f et g est donné en (5.2.1). Le discriminant de R , donné par

$$\rho(\rho - 4\lambda)(\lambda\beta + \rho)^2,$$

est strictement positif; d'où le résultat annoncé.

- (2) On sait que

$$\begin{aligned} (Cn_r) : \delta &= p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2}{\alpha\left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + 1}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned}
 (Cn_a) : \delta &= p\left(\frac{1}{2} + \eta\right) \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \eta\right)^2}{\alpha\left(\frac{1}{2} + \eta\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{2} + \eta\right) + 1}
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

et

$$\begin{aligned}
 (CN) : \delta &= p\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}.
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

En posant

$$f_r(\alpha) := \frac{\left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2}{\alpha\left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + 1}, \tag{5.2.6}$$

$$f_a(\alpha) := \frac{\left(\frac{1}{2} + \eta\right)^2}{\alpha\left(\frac{1}{2} + \eta\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{2} + \eta\right) + 1} \tag{5.2.7}$$

et

$$f_n(\alpha) := \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}, \tag{5.2.8}$$

la figure 5.1 découle donc de l'étude des fonctions $\alpha \mapsto f_r(\alpha)$, $\alpha \mapsto f_a(\alpha)$ et $\alpha \mapsto f_n(\alpha)$ qui sont toutes de la forme

$$\frac{c_1}{\alpha c_2 + c_3}, \quad \text{avec } c_i > 0. \tag{5.2.9}$$

- (3) Si $\lambda = \frac{\rho}{4}$, alors $\eta = 0$ et $g(x) := \rho x^2 - \rho x + \lambda$ a une racine double ; ainsi :
- (Cn_r) et (Cn_a) se confondent exactement le long de la courbe (CN) qui correspond à un point singulier triple ;
 - par la sous-section 3.1.1 du chapitre 3, les deux points singuliers de l'axe des abscisses se confondent de sorte que l'on obtienne un col-noeud répulsif, (CN_r) , (resp. attractif, (CN_a)) si $\delta < \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ (resp. si $\delta > \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$).
- (4) Découle de l'inégalité (5.1.3) car p est croissante.
- (5) Vient de la forme (5.2.9).

□

5.3. BIFURCATION DE HOPF

L'objectif principal de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théorème 5.3.1. *Les différentes sections, parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant, de la surface (\mathcal{H}) de bifurcation de Hopf sont représentées à la figure 5.4.*

En effet, par l'étude préliminaire de cette bifurcation (voir la section 3.2 du chapitre 3), celle-ci n'a lieu qu'au voisinage du point singulier du premier quadrant ouvert, (x_0, y_0) où, pour

$$0 < \delta < \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad 0 < \lambda < \frac{\rho}{4}, \quad (5.3.1)$$

on a

$$0 < \frac{1}{2} - \eta < x_0 < \frac{1}{2}, \quad p(x_0) = \delta, \quad y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta} > 0, \quad (5.3.2)$$

$$p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < \delta < p\left(\frac{1}{2}\right) \quad (5.3.3)$$

avec η défini au (5.1.2).

Proposition 5.3.1. *Pour tout $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, la surface de bifurcation de Hopf (dans l'espace $(\alpha, \delta, \lambda)$) est :*

(i) *strictement comprise entre $(Cn_r) : \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $(CN) : \delta = p(\frac{1}{2})$;*

(ii) *incluse dans la surface d'équation*

$$P(\alpha, \delta, \lambda) := A(\alpha, \lambda)\delta^4 + B(\alpha, \lambda)\delta^3 + C(\alpha, \lambda)\delta^2 + D(\alpha, \lambda)\delta + E(\alpha, \lambda) = 0, \quad (5.3.4)$$

où

$$A(\alpha, \lambda) = \alpha (-\beta^2 + 4\alpha) (\lambda^2\alpha^2 + (\rho^2 + \rho(\beta - 2)\lambda)\alpha + \rho\lambda\beta^2 + \rho^2(1 + \beta)), \quad (5.3.5)$$

$$B(\alpha, \lambda) = -\alpha^2 (16\alpha - 3\beta^2)\lambda^2 - \rho (2\alpha\beta^2 - 16\alpha^2 + \beta^4 - \alpha\beta^3 + 8\alpha^2\beta)\lambda - \rho^2 (\beta^3 + \beta^2 - \alpha\beta^2 + 8\alpha^2), \quad (5.3.6)$$

$$C(\alpha, \lambda) = 3\alpha (-\beta^2 + 8\alpha)\lambda^2 + 4\rho (-\beta^2 - 2\alpha + \beta\alpha)\lambda + \rho^2 (-2\beta + 5\alpha), \quad (5.3.7)$$

$$D(\alpha, \lambda) = (\beta^2 - 16\alpha) \lambda^2 - \rho^2 \quad (5.3.8)$$

et

$$E(\alpha, \lambda) = 4\lambda^2. \quad (5.3.9)$$

Démonstration. Soit $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$:

(i) Découle de (5.3.3) et du fait que p est strictement croissante dans $]0, +\infty[$.

(ii) Le déterminant de la matrice jacobienne de (0.0.11) en (x_0, y_0) étant strictement positif, il y a bifurcation de Hopf lorsque la trace de cette matrice est nulle, c'est-à-dire lorsque le résultant de $f(x) := (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta$ et

$$u(x) := -2\rho\alpha x^4 + \rho(\alpha - \beta)x^3 + (-\rho + \lambda\beta)x + 2\lambda \quad (5.3.10)$$

est nul : par un calcul sur MAPLE, on a le résultat annoncé. \square

Remarque 5.3.1. Pour tout $\rho \geq 4\lambda$, le facteur

$$A_0(\alpha, \lambda) := \lambda^2\alpha^2 + (\rho^2 + \rho(\beta - 2)\lambda)\alpha + \rho\lambda\beta^2 + \rho^2(1 + \beta)$$

de $A(\alpha, \lambda)$ est strictement positif. En effet, soit $\rho \geq 4\lambda$, $A_0(\alpha, \lambda)$ est un polynôme de degré 2 en α dont le discriminant est égal à $\rho(\rho - 4\lambda)(\rho + \lambda\beta)^2 \geq 0$. Le produit des racines de $A_0(\alpha, \lambda)$ est strictement positif alors que leur somme, $-\frac{\rho(\rho - 2\lambda + \beta\lambda)}{\lambda^2}$, est strictement négative car l'hypothèse implique que $\rho > 2\lambda$.

On va étudier en détails la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ et déterminer lesquelles de ses branches correspondent à une bifurcation de Hopf.

Remarque 5.3.2. Pour α grand, on voit que les coefficients de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ sont de signe alterné. Ceci signifie, par le critère de Descartes, qu'il y a zéro ou 2 ou 4 branches à l'infini dans le premier quadrant. Dans la suite, nous allons voir que ce n'est que 2 dès que $\lambda > 0$.

Afin de nous aider à analyser $P(\alpha, \delta, \lambda)$, on donne, par le théorème suivant, un résultat sur le nombre de racines d'un polynôme de degré 4.

Théorème 5.3.2. [25] Soit

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (5.3.11)$$

où $a_4 \neq 0$, $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ et Δ est son discriminant.

Soit

$$P_1(X) = a_4 (X^4 + pX^2 + qX + r) \quad (5.3.12)$$

l'image de $P(x)$ par la translation $X = x + \frac{q_3}{4a_4}$, dont le discriminant est noté par Δ_1 .

Alors $\Delta = \Delta_1$.

(1) Lorsque $q = 0$ ($P_1(x)$ est un polynôme bicarré), on a

$$\Delta = 16ra_4^6 (p^2 - 4r)^2.$$

Posons $\Delta_0 := p^2 - 4r$.

(i) Si $\Delta_0 < 0$, alors $P(x)$ aura quatre racines simples complexes.

(ii) Si $\Delta_0 = 0$, alors :

- pour $p < 0$, $P(x)$ aura deux racines doubles réelles ;
- pour $p = 0$, $P(x)$ aura une racine quadruple nulle ;
- pour $p > 0$, $P(x)$ aura deux racines doubles complexes.

(iii) Si $\Delta_0 > 0$, alors :

- pour $r < 0$ (et donc $\Delta < 0$), $P(x)$ aura deux racines simples réelles et deux racines simples complexes ;
- pour $r = 0$ et $p < 0$, $P(x)$ aura une racine double nulle et deux racines simples réelles ;
- pour $r = 0$ et $p > 0$, $P(x)$ aura une racine double nulle et deux racines simples complexes ;
- pour $r > 0$ et $p < 0$, $P(x)$ aura quatre racines simples réelles ;
- pour $r > 0$ et $p > 0$, $P(x)$ aura quatre racines simples complexes.

(2) Lorsque $q \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{a_4^6}{27} \left[4(p^2 + 12r)^3 - (8p^3 + 27q^2 - 6p(p^2 + 12r))^2 \right] \\ &= \frac{a_4^6}{27} \left[-729q^4 + 108p(-p^2 + 36r)q^2 + 432r(p^2 - 4r)^2 \right] : \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

(i) Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ aura deux racines simples réelles et deux racines simples complexes.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors :

- pour $p^2 + 12r = 0$, $P(x)$ aura une racine triple réelle et une racine simple complexe ;
- pour $p^2 + 12r \neq 0$ et $(p^2 - 4r \leq 0$ ou $p \geq 0)$, $P(x)$ aura une racine double réelle et deux racines simples complexes ;
- pour $p^2 + 12r \neq 0$ et $p^2 - 4r > 0$ et $p < 0$, $P(x)$ aura une racine double réelle et deux racines simples réelles.

(iii) Si $\Delta > 0$, alors :

- pour $p^2 - 4r \leq 0$ ou $p \geq 0$, $P(x)$ aura quatre racines simples complexes ;
- pour $p^2 - 4r > 0$ et $p < 0$, $P(x)$ aura quatre racines simples réelles.

Théorème 5.3.3. La restriction de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ au premier quadrant est représentée à la figure 5.2. Plus spécialement :

(i) La droite d'équation $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ est asymptote verticale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

(ii) La droite d'équation $\delta = 0$ est asymptote horizontale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

(iii) Pour λ petit, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un unique point de rebroussement qui, venant de l'infini à $\lambda = 0$, a pour coordonnées $(\alpha_r = \alpha(\lambda), \delta_r = \delta(\lambda))$ telles que $\alpha_r \rightarrow +\infty, \delta_r \rightarrow 0^+$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

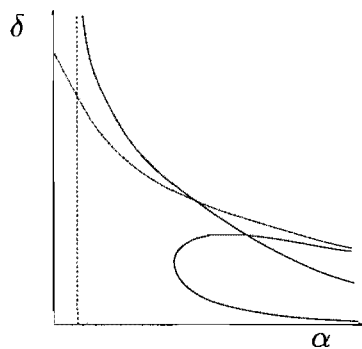
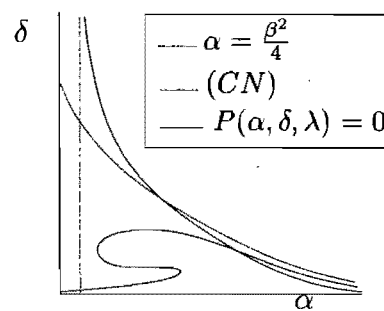
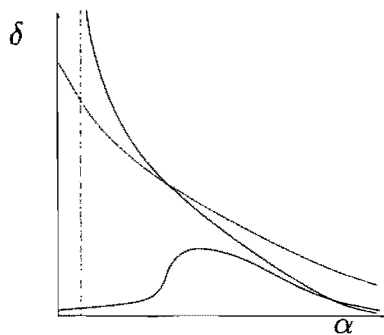
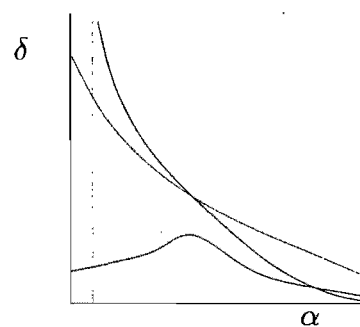
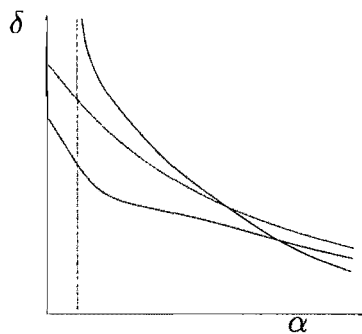
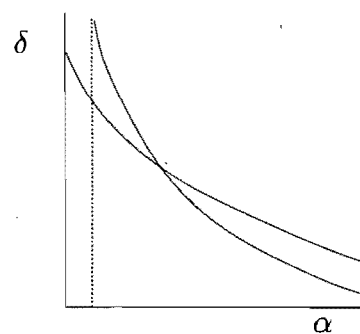
(iv) La restriction de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ au premier quadrant admet toujours un point d'auto-intersection.

Démonstration. (i) Dans l'expression de $P(\alpha, \delta, \lambda)$, $(4\alpha - \beta^2)$ est un facteur de $A(\alpha, \lambda)$, le coefficient de δ^4 ; d'où le résultat.

(ii) Dans l'expression de $P(\alpha, \delta, \lambda)$, δ^4 est un facteur du coefficient de α^4 ; d'où le résultat.

(iii) Soit λ petit. Posons $\tau := \frac{1}{\alpha}$, alors

$$P(\alpha, \delta, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial \delta}(\alpha, \delta, \lambda) = 0$$

(a) Lorsque $\lambda = 0$.(b) Lorsque λ est petit.(c) Lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\beta^2}{4}$.(d) Lorsque λ est proche de $\frac{\beta^2}{4}$.(e) Lorsque λ est très proche de $\frac{\beta^2}{4}$.(f) Lorsque $\lambda = \frac{\beta^2}{4}$.FIG. 5.2. Les courbes d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ au premier quadrant.

équivalent respectivement à

$$\begin{aligned}
 P_1(\tau, \delta) := & -(-4 + \beta^2\tau) [\lambda^2 + \rho\tau (\beta + \beta^2\tau - 2) \lambda + \rho^2\tau (\beta\tau + \tau + 1)] \delta^4 \\
 & - [(16 - 3\beta^2\tau) \lambda^2 + \rho\tau (\tau^2\beta^4 + 8\beta - 16 + 2\beta^2\tau - \tau\beta^3) \lambda \\
 & + \rho^2\tau (-\beta^2\tau + 8 + \tau^2\beta^2 + \tau^2\beta^3)] \delta^3\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [(-24 + 3\beta^2\tau)\lambda^2 + 4\rho\tau(-\beta + 2 + \beta^2\tau)\lambda + \rho^2\tau(2\beta\tau - 5)]\delta^2\tau^2 \\
& + [(-16 + \beta^2\tau)\lambda^2 - \rho^2\tau]\delta\tau^3 + 4\tau^4\lambda^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

et

$$\begin{aligned}
P_2(\tau, \delta) & := -4(-4 + \beta^2\tau)[\lambda^2 + \rho\tau(\beta + \beta^2\tau - 2)\lambda + \rho^2\tau(\beta\tau + \tau + 1)]\delta^3 \\
& - 3[(16 - 3\beta^2\tau)\lambda^2 + \rho\tau(\tau^2\beta^4 + 8\beta - 16 + 2\beta^2\tau - \tau\beta^3)\lambda \\
& + \rho^2\tau(-\beta^2\tau + 8 + \tau^2\beta^2 + \tau^2\beta^3)]\delta^2\tau \\
& - 2[(-24 + 3\beta^2\tau)\lambda^2 + 4\rho\tau(-\beta + 2 + \beta^2\tau)\lambda + \rho^2\tau(2\beta\tau - 5)]\delta\tau^2 \\
& + \tau^3[(-16 + \beta^2\tau)\lambda^2 - \rho^2\tau] = 0.
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Soit $D_\lambda(\tau)$ le résultant de $P_1(\tau, \delta)$ et $P_2(\tau, \delta)$ par rapport à δ , alors

$$\begin{aligned}
D_\lambda(\tau) & = \tau^2 [(-24 + 3\beta^2\tau)\lambda^2 + (4\rho\tau^2\beta^2 + (-4\rho\beta + 8\rho)\tau)\lambda + 2\rho^2\tau^2\beta - 5\rho^2\tau] \\
& [(-128 + \tau^2\beta^4 + 16\beta^2\tau)\lambda^4 + (64\rho\tau^2\beta^2 - 64\rho(\beta - 2)\tau)\lambda^3 \\
& + (-2\beta\rho^2(-16 + \beta)\tau^2 - 48\rho^2\tau)\lambda^2 + \tau^2\rho^4].
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Considérons

$$D_1(\tau, \lambda) := (-24 + 3\beta^2\tau)\lambda^2 + (4\rho\tau^2\beta^2 + (-4\rho\beta + 8\rho)\tau)\lambda + 2\rho^2\tau^2\beta - 5\rho^2\tau \tag{5.3.17}$$

et

$$\begin{aligned}
D_2(\tau, \lambda) & := (-128 + \tau^2\beta^4 + 16\beta^2\tau)\lambda^4 + (64\rho\tau^2\beta^2 - 64\rho(\beta - 2)\tau)\lambda^3 \\
& + (-2\beta\rho^2(-16 + \beta)\tau^2 - 48\rho^2\tau)\lambda^2 + \tau^2\rho^4
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

les deux facteurs de $D_\lambda(\tau)$. On a que

$$D_1(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D_1}{\partial \tau}(0, 0) = -5\rho^2. \tag{5.3.19}$$

Donc, par le théorème des fonctions implicites, pour λ petit, il existe un seul $\tau = \tau(\lambda)$ voisin de 0 (et donc un seul $\alpha(\lambda) := \alpha_\tau \rightarrow +\infty$) tel que $D_1(\tau(\lambda), \lambda) = 0$. Or, par le diagramme de Newton [12] de $D_1(\tau, \lambda)$, on voit que les termes dominants de ce dernier sont $-24\lambda^2$ et $-5\rho^2\tau$; alors $D_1(\tau, \lambda)$ est approximé, pour

(λ, τ) petit, par $-24\lambda^2 - 5\rho^2\tau$. De même, pour $D_2(\tau, \lambda)$, les termes dominants sont $\tau^2\rho^4$, $-48\rho^2\tau\lambda^2$ et $-128\lambda^4$; alors $D_2(\tau, \lambda)$ est approximé, pour (λ, τ) petit, par $\tau^2\rho^4 - 48\rho^2\tau\lambda^2 - 128\lambda^4$. Pour la première approximation, la racine en τ correspondante est strictement négative : elle est exclue ! Pour la deuxième approximation, on a deux racines en τ de signes contraires : il existe donc une seule racine en τ strictement positive. En conséquence, il existe $\delta_r = \delta(\lambda)$ racine commune de $P_1(\tau, \delta)$ et $P_2(\tau, \delta)$. Enfin, on voit bien que $\delta_r \rightarrow 0^+$ car la droite d'équation $\delta = 0$ est, pour λ petit (resp. $\lambda = 0$) asymptote horizontale de toutes les branches (resp. une composante) de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

(iv) En effet, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ par rapport à δ est $\Delta(\alpha, \beta, \lambda) := 4\rho^2\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)[\Delta_2(\alpha, \beta, \lambda)]^2$, où :

$$\begin{aligned} \Delta_2(\alpha, \beta, \lambda) = & -2\rho^2\lambda\alpha^2 + \rho(18\beta^2\lambda^2 + \beta^3\lambda^2 + 2\rho^2 + 16\rho\beta\lambda - \rho^2\beta)\alpha \\ & + \beta^2(\rho + \rho\beta + \lambda\beta^2)(\beta^2\lambda^2 - 2\rho\lambda + \rho^2 + 2\rho\beta\lambda) \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

et $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ est un polynôme de degré 4 en α .

Or, puisque $\rho \geq 4\lambda$, alors $\Delta_2(\alpha, \beta, \lambda)$ (qui est un polynôme de degré 2 en α) admet deux racines de signes contraires. Il existe donc un seul $\alpha := \alpha^* > 0$ tel que $\Delta_2(\alpha^*, \beta, \lambda) = 0$ (et donc que $\Delta(\alpha^*, \beta, \lambda) = 0$). Conséquemment, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un point d'auto-intersection. Celui-ci, point double ou triple, est dans le premier quadrant : en effet, il y est pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$ et $\lambda = 0$; donc, par continuité, il y reste. Sinon on aurait plus d'un point d'intersection avec l'axe des ordonnées ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 5.3.2 ci-dessous. Ou bien, s'il passe à l'infini, on aurait une seule branche infinie dans la direction α ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 5.3.5 ci-dessous. Or, comme il sera vu à la proposition 5.3.8 ci-dessous, la branche supérieure de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant est non admissible pour la bifurcation de Hopf. Donc ce point d'intersection entre une branche pertinente et une branche non pertinente de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ n'est pas utile pour notre diagramme de bifurcation. \square

Il y a 5 endroits où l'étude de l'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est plus facile :

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{\rho}{4}.$$

On va étudier chacun des 5. En effet, notons

$$P_{(\alpha, \lambda)}(\delta) := P(\alpha, \delta, \lambda) = 0 \quad (5.3.21)$$

l'équation d'inconnue δ .

Proposition 5.3.2. *Si $\alpha = 0$ et $\rho > 4\lambda$, alors l'équation (5.3.21) admet une seule solution positive, $\delta_1 \in]0, \frac{1}{2(\beta+2)}[$.*

Démonstration. (1) **Existence**

On a

$$P_{(0, \lambda)}(\delta) = -\beta^2 \rho (\rho + \beta \rho + \lambda \beta^2) \delta^3 - 2\beta \rho (2\lambda \beta + \rho) \delta^2 + ((\lambda \beta)^2 - \rho^2) \delta + 4\lambda^2. \quad (5.3.22)$$

Or

$$P_{(0, \lambda)}(0) = 4\lambda^2 > 0 \quad (5.3.23)$$

et

$$P_{(0, \lambda)}\left(\frac{1}{2(\beta+2)}\right) = \frac{(\beta+4)^2 (-\rho+4\lambda) (\lambda\beta^2 + \beta\rho + 4\lambda\beta + \rho + 4\lambda)}{8(\beta+2)^3} < 0; \quad (5.3.24)$$

ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\delta_1 \in]0, \frac{1}{2(\beta+2)}[$ tel que $P(0, \delta_1, \lambda) = 0$.

(2) **Unicité**

$P_{(0, \lambda)}(\delta)$ étant un polynôme de degré 3 en δ et

$$P_{(0, \lambda)}(0) > 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} P_{(0, \lambda)}(\delta) = -\infty.$$

Alors, $P_{(0, \lambda)}(\delta)$ a un nombre impair de racines positives, soit 1 ou 3. Or, si on a 3 racines positives on doit avoir alternance de signe des coefficients de $P_{(0, \lambda)}(\delta)$; mais ceci n'est pas le cas car les coefficients de δ^3 et δ^2 dudit

polynôme sont tous deux négatifs. Donc $P_{(0,\lambda)}(\delta)$ n'a qu'une seule racine positive.

□

Proposition 5.3.3. *Lorsque $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ et $\rho > 4\lambda$, on a (voir la figure 5.3) que :*

(1) *Si $\lambda \in]0, \frac{\rho}{36}[$, soient β_1 et β_2 les racines en β du facteur*

$$D_1(\beta, \lambda) := -4\rho\lambda\beta^2 - (-\rho^2 - 72\rho\lambda + 432\lambda^2)\beta - 16\rho^2$$

du discriminant,

$$D(\beta, \lambda) := \frac{\rho^2\beta^3 D_1(\beta, \lambda)}{16} [8\beta^2\lambda^2 + 10\rho\beta\lambda + \rho(3\rho - 4\lambda)]^2,$$

de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ par rapport à δ telles que $0 < \beta_1 < \beta_2$, alors :

(i) *pour tout $\beta \in]0, \beta_1[\cup]\beta_2, +\infty[$, l'équation (5.3.21) admet une seule solution réelle qui est positive ;*

(ii) *pour $\beta = \beta_1$ ou $\beta = \beta_2$, l'équation (5.3.21) admet une solution simple positive et une racine double positive ;*

(iii) *pour $\beta \in]\beta_1, \beta_2[$, l'équation (5.3.21) admet trois solutions simples positives.*

(2) *Si $\lambda = \frac{\rho}{36}$, alors :*

(i) *pour $\beta = 12$, l'équation (5.3.21) admet une solution triple, $\delta = \frac{1}{144}$;*

(ii) *pour tout $\beta \neq 12$, l'équation (5.3.21) admet une seule solution réelle qui est positive.*

(3) *Si $\lambda \in]\frac{\rho}{36}, \frac{\rho}{4}[$, alors pour tout $\beta > 0$, l'équation (5.3.21) admet une seule solution réelle qui est positive.*

Démonstration. Pour $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$, alors $P_{(\alpha,\lambda)}(\delta)$ devient

$$\begin{aligned} P_{(\beta,\lambda)}(\delta) &:= -\frac{1}{16}\beta^2(\lambda\beta^2 + 4\rho + 2\beta\rho)^2\delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4}\beta[3\lambda^2\beta^3 + 4\lambda\rho\beta^2 + \rho(5\rho - 24\lambda)\beta - 8\rho^2]\delta^2 \\ &\quad + (-3\beta^2\lambda^2 - \rho^2)\delta + 4\lambda^2 : \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

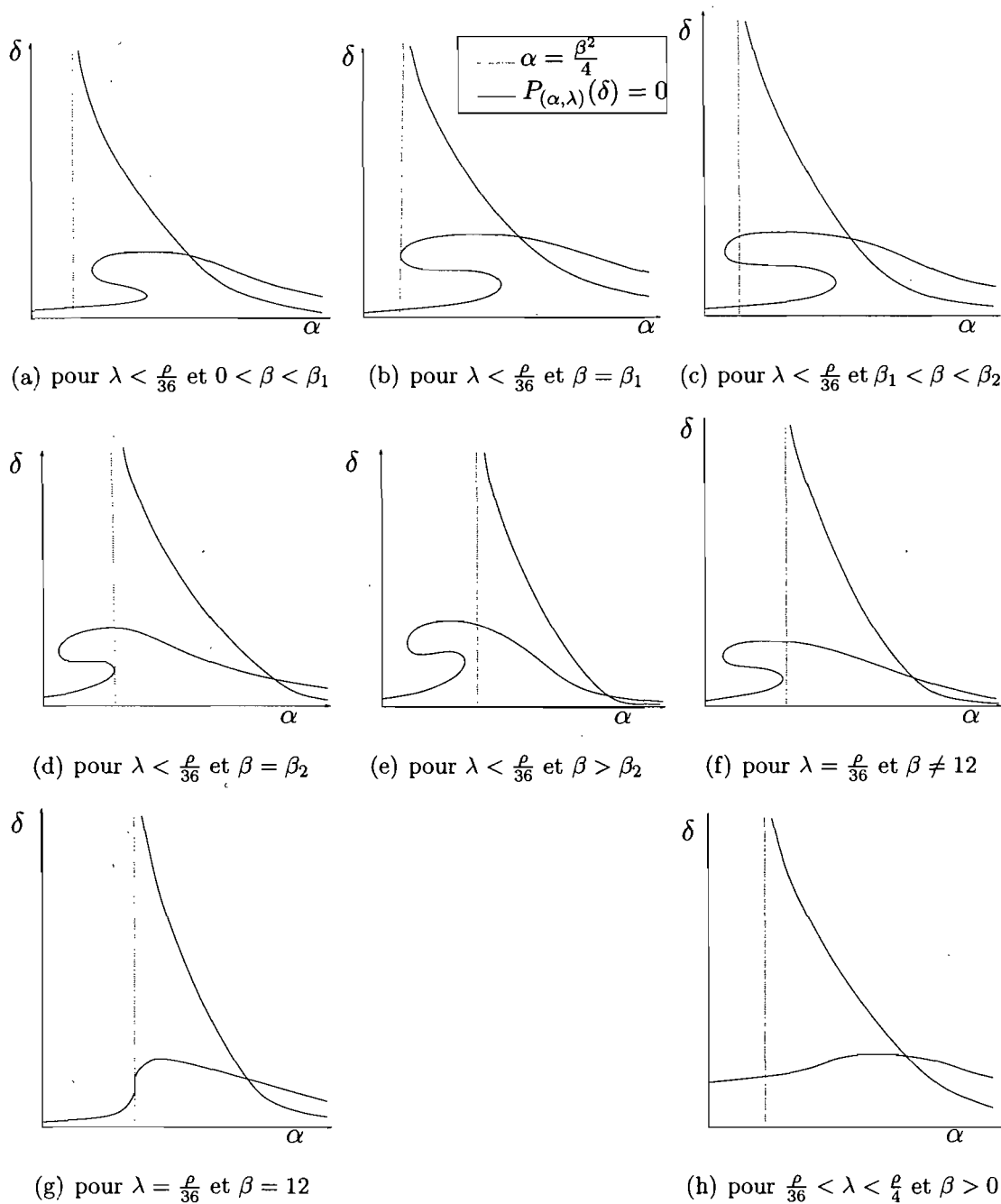


FIG. 5.3. Présentation des solutions de l'équation $P_{(\alpha, \lambda)}(\delta) = 0$ dans le premier quadrant.

polynôme de degré 3 en δ , à coefficients polynomiaux en β , ρ et λ , dont le discriminant est

$$D(\beta, \lambda) := \frac{\rho^2 \beta^3}{16} [-4\rho\lambda\beta^2 - (-\rho^2 - 72\rho\lambda + 432\lambda^2)\beta - 16\rho^2] [8\beta^2\lambda^2 + 10\rho\beta\lambda + \rho(3\rho - 4\lambda)]^2. \quad (5.3.26)$$

Or, puisque $\rho > 4\lambda > \frac{4\lambda}{3}$, alors

$$8\beta^2\lambda^2 + 10\rho\beta\lambda + \rho(3\rho - 4\lambda) > 0 :$$

(I) Le signe de $D(\beta, \lambda)$ est donc celui de

$$D_1(\beta, \lambda) := -4\rho\lambda\beta^2 - (-\rho^2 - 72\rho\lambda + 432\lambda^2)\beta - 16\rho^2. \quad (5.3.27)$$

Ce dernier, qui est un polynôme de degré 2 en β , à coefficients polynomiaux en ρ et λ , a pour discriminant

$$D_0(\lambda) := (\rho - 4\lambda)(\rho - 36\lambda)^3. \quad (5.3.28)$$

Le produit et la somme des racines de $D_1(\beta, \lambda)$ sont $64\lambda\rho^3$ et $\frac{1}{4}[\rho^2 + 72\lambda(\rho - 6\lambda)] > 0$ respectivement. En plus

$$D_1\left(\beta, \frac{\rho}{36}\right) = -144\lambda^2(\beta - 12)^2 \quad (5.3.29)$$

et, pour $\beta = 12$, $\lambda = \frac{\rho}{36}$, $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ devient

$$P_{(12, \frac{\rho}{36})}(\delta) = -4\lambda^2(144\delta - 1)^3. \quad (5.3.30)$$

(II) $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ étant un polynôme de degré 3 en δ et

$$P_{(\beta, \lambda)}(0) > 0, \lim_{\delta \rightarrow +\infty} P_{(\beta, \lambda)}(\delta) = -\infty. \quad (5.3.31)$$

Alors, $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ a un nombre impair de racines positives, soit 1 ou 3 : ceci dépend du coefficient en δ^2 de $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ (voir au (5.3.25)), à savoir

$$S_\lambda(\beta) := 3\lambda^2\beta^3 + 4\lambda\rho\beta^2 + \rho(5\rho - 24\lambda)\beta - 8\rho^2$$

qui n'a qu'une racine positive $\beta := \beta^*$. Ainsi :

- Pour $D(\beta, \lambda) < 0$, $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ a une seule racine réelle qui est positive.
- Pour $D(\beta, \lambda) \geq 0$, $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ a trois racines réelles (simples ou confondues) telles que :
 - Si $0 < \beta \leq \beta^*$, alors, par la non-alternance de signe des coefficients de $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$, ce dernier n'aura qu'une seule racine positive ;
 - Si $\beta > \beta^*$, alors $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ aura trois racines (simples ou confondues) positives. En effet, si $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ a une seule racine positive, alors (puisque en dehors de (5.3.31),

on a aussi $\lim_{\delta \rightarrow -\infty} P_{(\beta, \lambda)}(\delta) = +\infty$ $P'_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ aura deux racines simples négatives ou de signes contraires. Or la somme et le produit de celles-ci sont respectivement,

$$\frac{8S_\lambda(\beta)}{3\beta(\lambda\beta^2 + 4\rho + 2\beta\rho)^2} > 0,$$

$$\frac{16(3\beta^2\lambda^2 + \rho^2)}{\beta^2(\lambda\beta^2 + 4\rho + 2\beta\rho)^2} > 0,$$

car $\beta > \beta^*$; ce qui est absurde.

Or $S_\lambda(0) < 0$ et $S_\lambda(\beta_1) > 0$ (où β_1 est la petite racine positive de $D_1(\beta, \lambda)$). Alors β^* , l'unique racine positive de $S_\lambda(\beta)$, est dans $]0, \beta_1[$ et donc $S_\lambda(\beta) > 0$ pour $\beta \in]\beta_1, \beta_2[$.

En conséquence, l'étude du signe de $D_1(\beta, \lambda)$, via celui de $D_0(\lambda)$ (dans **(I)**) et la positivité des racines de $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ (dans **(II)**), permettent donc d'obtenir les résultats **(1)** et **(3)** annoncés; alors que l'étude de $D_1(\beta, \frac{\rho}{36})$, $P_{(12, \frac{\rho}{36})}(\delta)$ (dans **(I)**) et la positivité des racines de $P_{(\beta, \lambda)}(\delta)$ (dans **(II)**) donnent le résultat **(2)**. \square

Proposition 5.3.4. (1) Pour $\lambda \neq \frac{\rho}{4}$ (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ intersecte la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ en un point unique de coordonnées (α_0, δ_0) définies par

$$\alpha_0 := \frac{(\beta + 2)(\lambda\beta^2 + (\rho + 4\lambda)(\beta + 1))}{\rho},$$

$$\delta_0 := \frac{\rho}{(\beta + 2)(\lambda\beta^2 + (\rho + 4\lambda)\beta + 3\rho + 4\lambda)}.$$

(2) Pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$, (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ est une branche de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

Démonstration. En effet, en injectant $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ dans $P(\alpha, \delta, \lambda)$, alors celui-ci devient

$$P_\lambda(\alpha) := \frac{2}{(\alpha + 2\beta + 4)^4} (\beta + 4)^2 (\rho - 4\lambda) (\alpha\rho - (\beta + 2)(\lambda\beta^2 + (\rho + 4\lambda)(\beta + 1))). \quad (5.3.32)$$

Or, $P_\lambda(\alpha) = 0$ si, et seulement si

$$\rho = 4\lambda$$

ou bien

$$\alpha = \alpha_0 := \frac{(\beta + 2)(\lambda \beta^2 + (\rho + 4\lambda)(\beta + 1))}{\rho}; \quad (5.3.33)$$

alors, en substituant (5.3.33) dans (CN), celui devient

$$\delta = \delta_0 := \frac{\rho}{(\beta + 2)(\lambda \beta^2 + (\rho + 4\lambda)\beta + 3\rho + 4\lambda)}; \quad (5.3.34)$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque 5.3.3. Lorsque $\lambda = 0$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est représentée à la figure 5.2(a). Plus spécialement, par l'étude de l'équation $P(\alpha, \delta, 0) = 0$ d'inconnue δ (voir la proposition 1.5.2 du chapitre 1), on voit que ladite courbe a :

- quatre branches à l'infini dans la direction α : l'une est $\delta = 0$ et les 3 autres sont solutions d'un polynôme de degré 3 en δ . En effet, pour α grand, on voit facilement que : le discriminant de $P(\alpha, \delta, 0)$ par rapport à δ est strictement positif et la deuxième condition de (2)(iii) du théorème 5.3.2 est satisfaite.
- seulement deux branches à l'infini dans la direction δ car pour, δ grand, on voit facilement que le discriminant de $P(\alpha, \delta, 0)$ par rapport à α est strictement négatif et le (2)(i) du théorème 5.3.2 nous permet de conclure.

Proposition 5.3.5. Lorsque $\lambda > 0$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ a deux branches à l'infini dans les directions α et δ .

Démonstration. En effet :

- pour α grand, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ est du signe de

$$4\rho^2(-27\rho^2\lambda^2\alpha^4)(-2\rho^2\lambda\alpha^2)^2, \quad (5.3.35)$$

qui est négatif.

- pour δ grand, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ est du signe de

$$\begin{aligned} & -\delta^{16}\rho^2[\beta^2\rho(-\rho+4\lambda)(\beta^2\lambda+4\rho+2\beta\rho)^2\delta^4] \\ & [\beta(\beta^2\lambda+\rho+\beta\rho)(\lambda\beta+\rho)(\beta^2\lambda+4\rho+2\beta\rho)\delta^2]^2, \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

qui est négatif. On conclut par le (2)(i) du théorème 5.3.2. \square

Proposition 5.3.6. *Lorsque $\lambda = \frac{\rho}{4}$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est représentée à la figure 5.2(f); plus précisément :*

(1) (i) $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ si, et seulement si

$$(CN) : \delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$$

ou

$$\begin{aligned} Q_{(\alpha, \beta)}(\delta) := & \alpha (\alpha + 2\beta + 4) (-4\alpha + \beta^2) \delta^3 + (2\beta^3 + 12\alpha^2 + 4\beta^2 - 2\alpha\beta^2) \delta^2 \\ & + (\beta^2 + 8\beta - 12\alpha)\delta + 4 = 0 : \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

(5.3.37) est une équation d'inconnue δ .

(ii) (CN) intersecte la courbe d'équation (5.3.37) au point de coordonnée $(\alpha_0(\beta), \delta_0(\beta))$:

$$\alpha_0(\beta) := \frac{(\beta + 2)(\beta^2 + 8\beta + 8)}{4},$$

$$\delta_0(\beta) := \frac{4}{(\beta + 2)(\beta^2 + 8\beta + 16)}.$$

(2) Si $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$, alors $Q_{(\alpha, \beta)}(\delta) = 0$ n'intersecte pas $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ dans le premier quadrant.

(3) Si $\alpha \neq \frac{\beta^2}{4}$, alors l'équation (5.3.37) :

(i) admet une seule solution positive si $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$;

(ii) n'admet aucune solution positive si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$.

Démonstration. (1) (i) En effet, en faisant $\rho = 4\lambda$ dans $P(\alpha, \delta, \lambda)$, alors celui-ci devient

$$\begin{aligned} P_\lambda(\alpha, \delta) := & -\lambda^2 (\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1) [\alpha(\alpha + 2\beta + 4) (-4\alpha + \beta^2) \delta^3 \\ & + (12\alpha^2 + (4 - 2\alpha)\beta^2 + 2\beta^3) \delta^2 + (\beta^2 + 8\beta - 12\alpha)\delta + 4]. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

Alors $P_\lambda(\alpha, \delta) = 0$ si, et seulement si

$$\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$$

ou

$$Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) := \alpha(\alpha + 2\beta + 4)(-4\alpha + \beta^2)\delta^3 + (2\beta^3 + 12\alpha^2 + 4\beta^2 - 2\alpha\beta^2)\delta^2 \\ + (\beta^2 + 8\beta - 12\alpha)\delta + 4 = 0.$$

(ii) est une conséquence immédiate de la proposition 5.3.4.

(2) Lorsque $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$, $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ devient

$$Q_{\beta}(\delta) := \left(4\beta^2 + 2\beta^3 + \frac{1}{4}\beta^4\right)\delta^2 + (8\beta - 2\beta^2)\delta + 4 \quad (5.3.39)$$

dont le discriminant par rapport à δ est $-64\beta^3 < 0$. Alors, $Q_{\beta}(\delta) > 0$ et, par ricochet, $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) > 0$ lorsque $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$.

(3) Soit $\alpha \neq \frac{\beta^2}{4}$, le discriminant de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ (polynôme en δ) est

$$D(\beta, \alpha) := 4(-432\alpha^2 - 4\beta^2(-18 + \beta)\alpha + \beta^3(-16 + \beta))(2\beta^2 + \beta^3 + 8\alpha)^2 \quad (5.3.40)$$

dont le signe est celui de

$$d_{\beta}(\alpha) := -432\alpha^2 - 4\beta^2(-18 + \beta)\alpha + \beta^3(-16 + \beta) \\ = -(432\alpha^2 - 72\alpha\beta^2 + 16\beta^3 + 4\alpha\beta^3 - \beta^4) : \quad (5.3.41)$$

(i) Si $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$, alors les coefficients $\alpha(\alpha + 2\beta + 4)(-4\alpha + \beta^2)$ et 4 de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ sont de signes contraires. $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ étant de degré 3 en δ , il vient (par le critère de Descartes) que (5.3.37) a 1 ou 3 solutions positives. Or, pour $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$ on a que $432\alpha^2 > 108\alpha\beta^2$ et $4\alpha\beta^3 > \beta^5$; d'où

$$432\alpha^2 - 72\alpha\beta^2 + 16\beta^3 + 4\alpha\beta^3 - \beta^4 > 108\alpha\beta^2 - 72\alpha\beta^2 + 16\beta^3 + \beta^5 - \beta^4 \\ = 36\alpha\beta^2 + 16\beta^3 + \beta^5 - \beta^4 \\ > 9\beta^4 + 16\beta^3 + \beta^5 - \beta^4 \quad \text{car } \alpha > \frac{\beta^2}{4} \\ = 8\beta^4 + 16\beta^3 + \beta^5 > 0. \quad (5.3.42)$$

Ainsi $d_{\beta}(\alpha) < 0$ lorsque $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$. Donc $D(\beta, \alpha) < 0$ lorsque $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$. Conséquemment, (5.3.37) a une seule solution réelle qui est positive lorsque $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$.

(ii) Si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, alors les coefficients $\alpha(\alpha + 2\beta + 4)(-4\alpha + \beta^2)$ et 4 de

$Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ ont le même signe. $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ étant de degré 3 en δ , il vient (par le critère de Descartes) que (5.3.37) a 0 ou 2 solutions positives. Aussi, avons-nous que $Q_{(\alpha,\beta)}(0) > 0$ et $\lim_{\delta \rightarrow -\infty} Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) = -\infty$; alors (5.3.37) admet une solution négative. Or le discriminant de $d_\beta(\alpha)$ par rapport à α est

$$16\beta^3(\beta - 12)^3 :$$

- pour $\beta < 12$, on a $d_\beta(\alpha) < 0$. Donc, si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$ et $\beta < 12$, alors (5.3.37) a une seule solution réelle qui est négative;
 - pour $\beta = 12$, on a $d_\beta(\alpha) = -432(\alpha - 4)^2$ et $Q_{(4,12)}(\delta) = 4(16\delta + 1)^3$ (voir au (5.3.37)). Donc :
 - si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, $\beta = 12$ et $\alpha \neq 4$, alors (5.3.37) a une seule solution réelle qui est négative;
 - si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, $\beta = 12$ et $\alpha = 4$, alors (5.3.37) a une seule solution réelle triple $\delta = -\frac{1}{16} < 0$;
 - pour $\beta > 12$, alors $d_\beta(\alpha)$ admet deux racines distinctes α_1 et α_2 (positives ou de signes contraires telles que $\alpha_1 < \alpha_2$). On a que : si ($\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$), alors $d_\beta(\alpha) < 0$; si $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, alors $d_\beta(\alpha) \geq 0$. Donc :
 - si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, $\beta > 12$ et ($\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$), alors (5.3.37) a une seule solution réelle qui est négative;
 - si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, $\beta > 12$ et $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, alors (5.3.37) a trois solutions réelles qui sont négatives. En effet, les racines de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ ne peuvent pas s'annuler, ni passer à l'infini (voir au (5.3.37)); alors, par continuité, celles-ci ne changeront jamais de signe!
- Donc (5.3.37) n'a aucune solution positive lorsque $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$.

□

Proposition 5.3.7. *La courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un point de contact d'ordre 2, (α^*, δ^*) pour $\lambda = \lambda^*$, avec la direction verticale où $\lambda^* \in]0, \frac{\rho}{4}[$,*

$\alpha := \alpha^* > 0$ et $\delta = \delta^* \in]0, \frac{1}{\alpha+2\beta+4}[$ sont tels que

$$\begin{cases} P(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P'_\delta(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P''_\delta(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P'''_\delta(\alpha, \delta^*, \lambda^*) \neq 0. \end{cases} \quad (5.3.43)$$

Démonstration. En effet :

- pour λ petit, il y a deux points à tangente verticale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant ;

- pour λ près de $\frac{\rho}{4}$, il n'y a aucun point à tangente verticale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

Or, par continuité, ces deux points ne peuvent sortir du premier quadrant (sinon on aurait 2 ou 3 points d'intersection avec l'axe des ordonnées ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 5.3.2!) ni aller à l'infini (sinon on aurait 4 branches à l'infini dans la direction α ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 5.3.5!) : ils se confondent ! \square

Le résultat suivant est une conséquence des propositions précédentes.

Théorème 5.3.4. Soit $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$:

- (1) si λ est petit, alors la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant est donnée par le (b) de la figure 5.2 ;
- (2) si λ n'est pas petit et ne tend pas vers $\frac{\rho}{4}$, alors la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant est donnée par le (c) de la figure 5.2 ;
- (3) si λ tend vers $\frac{\rho}{4}$, alors la branche inférieure de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant est donnée par le (d) de la figure 5.2.

Remarque 5.3.4. Intuitivement :

- (1) Lorsque λ est petit, le (b) de la figure 5.2 naît :
 - de la perturbation de deux courbes lorsque $\lambda = 0 : \delta = 0$ (non admissible)
 - et la courbe de bifurcation de Hopf ;

- de l'existence d'un point de rebroussement venant de l'infini (voir le (iii) du théorème 5.3.3).

(2) La figure 5.2 (c) est, par la proposition 5.3.7, le passage nécessaire pour aller de (b) à (d).

(3) Lorsque λ tend vers $\frac{\rho}{4}$ alors, dans le premier quadrant, la branche inférieure de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ tend vers (CN).

Proposition 5.3.8. (1) La branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte (CN) ne concerne pas un point du premier quadrant.

(2) La branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte la droite d'équation $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ et la droite d'équation $\alpha = 0$ est admissible pour la bifurcation de Hopf.

Démonstration. En effet :

(1) Par la proposition 5.3.4, $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ intersecte (CN) en (α_0, δ_0) , défini par (5.3.33) et (5.3.34). Si on substitue $\alpha = \alpha_0$ et $\delta = \delta_0$ dans l'expression de $f(x) = (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta$, alors celui-ci devient

$$F(x) := \frac{\rho(1-2x)((\beta+2)x+1)}{(\beta+2)(\lambda\beta^2 + (\rho+4\lambda)\beta + 3\rho + 4\lambda)} \quad (5.3.44)$$

dont les racines en x sont

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{\beta+2}. \quad (5.3.45)$$

Mais, par l'expression de la trace (voir au (5.3.10)), on a que

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8(\beta+4)(4\lambda-\rho)} < 0 \quad \text{et} \quad u\left(-\frac{1}{\beta+2}\right) = 0, \quad (5.3.46)$$

c'est-à-dire que la trace n'est nulle qu'au point singulier dont l'abscisse est négative; ce dernier n'est donc pas du premier quadrant. Donc, par continuité, la branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte (CN) ne concerne pas un point du premier quadrant (car, puisque l'abscisse du point singulier ne peut passer ni par 0, ni par l'infini, alors celle-ci ne changera jamais de signe!).

- (2) En effet, en injectant $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ dans $P(\alpha, \delta, \lambda)$, $f(x)$ (caractérisant l'abscisse du point singulier) et $u(x)$ (caractérisant la trace en ce point singulier), on obtient respectivement : $P_\beta(\delta, \lambda)$ défini au (5.3.25),

$$f_1(\delta, x) := \frac{1}{4} (x\beta + 2)^2 \delta - x^2, \quad (5.3.47)$$

$$u_1(x) := -\frac{1}{2} \rho \beta^2 x^4 + \rho \left(\frac{1}{4} \beta^2 - \beta \right) x^3 + (-\rho + \lambda \beta) x + 2 \lambda. \quad (5.3.48)$$

Or $P_\beta(\delta, \lambda)$ et $f_1(\delta, x)$ admettent une racine commune en δ si, et seulement si le résultant en δ est nul. En notant ce résultant par $R_0(x)$, alors son expression est

$$R_0(x) := -\frac{1}{4} (-4\lambda + 2\rho x - \rho x^2 \beta + 2x^3 \rho \beta) [(3\rho \beta^2 + 2\rho \beta + 4\lambda \beta^3) x^3 + (5\rho \beta + 12\lambda \beta^2) x^2 + (2\rho + 12\lambda \beta) x + 4\lambda]. \quad (5.3.49)$$

Celui-ci s'annule si, et seulement si

$$R_1(x) := x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{x}{\beta} - 2 \frac{\lambda}{\beta \rho} = 0 \quad (5.3.50)$$

ou

$$R_2(x) := x^3 + \frac{1}{4\lambda \beta^2 + 3\beta \rho + 2\rho} \left[(5\rho + 12\lambda \beta) x^2 + 2 \frac{(\rho + 6\lambda \beta) x}{\beta} + \frac{4\lambda}{\beta} \right]. \quad (5.3.51)$$

Mais en ce point singulier, la trace s'annule si, et seulement si le résultant en x de $R_1(x)$ et $u_1(x)$ est nul ou le résultant en x de $R_2(x)$ et $u_1(x)$ est nul. En notant par $R_{01}(\beta, \rho)$ et $R_{02}(\beta, \rho)$ ces deux résultants respectifs, on obtient

$$R_{01}(\beta, \rho) = 0 \quad (5.3.52)$$

pour tous β, ρ, λ ; et

$$R_{02}(\beta, \rho) = 4 \frac{\lambda (4\rho + 2\beta \rho + \lambda \beta^2)^2 (3\rho^2 - 4\rho \lambda + 10\rho \beta \lambda + 8\lambda^2 \beta^2)^2}{(4\lambda \beta^2 + 3\beta \rho + 2\rho)^4}. \quad (5.3.53)$$

Or, par hypothèse, $\rho - 4\lambda > 0$; alors $3\rho^2 - 4\rho \lambda = \rho (3\rho - 4\lambda) > 0$ et $R_{02}(\beta, \rho) > 0$. Ainsi, en ce point singulier, la trace s'annule si, et seulement si le résultant en x de $R_1(x)$ et $u_1(x)$ est nul; ce qui est fait par (5.3.52).

Aussi, avons-nous que ce point singulier a pour abscisse $x_0 \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$. En

effet, par une étude de $R_1(x)$ via sa dérivée par rapport à x (ou encore en notant l'alternance de signe des coefficients de $R_1(x)$), on montre que $R_1(x)$ n'a que de(s) racine(s) positive(s) dont le nombre est 1 ou 3 ; en plus, puisque la branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ est strictement comprise entre (Cn_r) et (CN) , on a donc que $x_0 \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$. Par conséquent, l'ordonnée du point singulier et le déterminant du linéarisé du système y relatif sont strictement positifs. D'où le résultat par continuité. □

Par ces deux derniers résultats, nous avons, comme annoncé au début de cette section, le :

Théorème 5.3.5. *Les différentes sections, parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant, de la surface (\mathcal{H}) de bifurcation de Hopf sont représentées à la figure 5.4 ci-après.*

Comme conséquence des théorèmes 5.3.5 et 5.2.1, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5.3.1. *Le digramme des bifurcations locales de codimension 1 du système (0.0.11) dans le premier quadrant est donné à la figure 5.5.*

Les bifurcations qui nous manquent sont globales : la bifurcation de boucle hétéroclinique et la bifurcation de double cycle.

5.4. POSITIONS DES SÉPARATRICES DES POINTS SINGULIERS DE L'AXE DES x POUR LE MODÈLE (0.0.11)

Dans cette section, nous déterminons la structure des séparatrices des points singuliers de l'axe des x , à savoir $C = (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ et $D = (\frac{1}{2} + \eta, 0)$ (où $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$), pour le modèle (0.0.11).

Théorème 5.4.1. *Dès que C ou D est un point de selle, sa séparatrice ne peut avoir d'asymptote verticale : elle vient de la droite pour C et de la gauche pour D comme sur la figure 5.6. En particulier, lorsque C et D sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 5.8.*

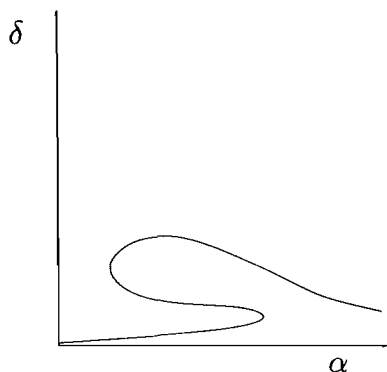
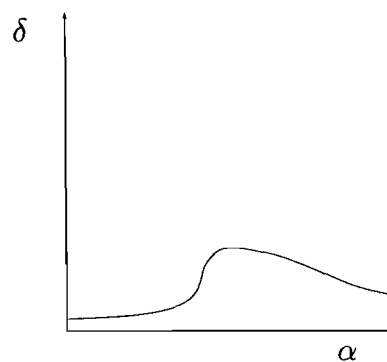
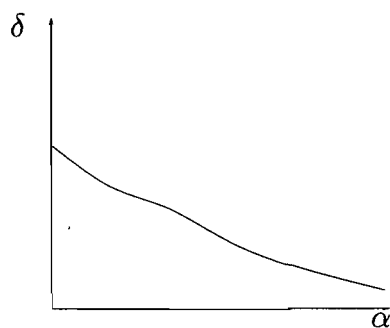
(a) Lorsque λ est petit.(b) Lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$.(c) Lorsque λ est proche de $\frac{\rho}{4}$.

FIG. 5.4. Les sections, parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant, de la surface de bifurcation de Hopf (\mathcal{H}).

Démonstration. En effet, pour $\rho - 4\lambda > 0$, les abscisses des points singuliers de l'axe des x , $C = (x_1, 0)$ et $D = (x_2, 0)$ (avec $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$, $x_1 := \frac{1}{2} - \eta$ et $x_2 := \frac{1}{2} + \eta$) sont solutions de l'équation $\rho x(1-x) - \lambda = 0$.

- Dans chacune de ces régions, les séparatrices de C et D ne peuvent pas aller à l'infini. Pour cela, il suffit de montrer qu'entre les droites d'équation $x = x_1$ et

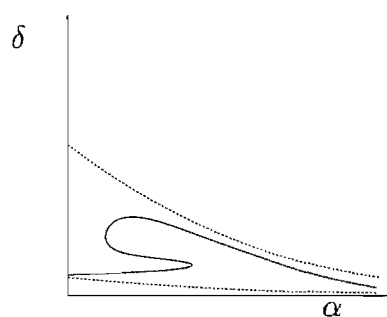
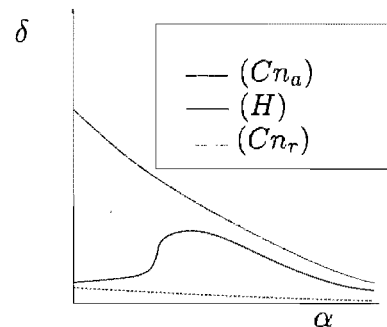
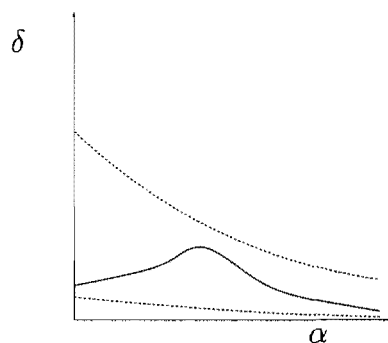
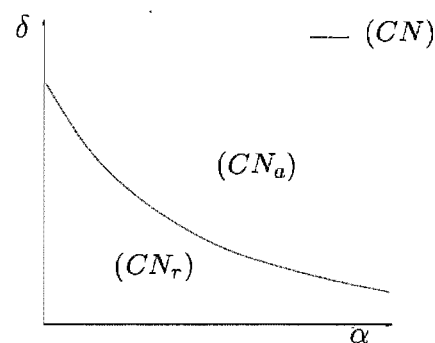
(a) lorsque λ est petit.(b) lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$.(c) lorsque λ est proche de $\frac{\rho}{4}$.(d) lorsque $\lambda = \frac{\rho}{4}$: surfaces des bifurcations de col-noeud, (CN_r) et (CN_a) ; surface de bifurcation de col-nilpotent, (CN) .

FIG. 5.5. Les surfaces des bifurcations locales du système (0.0.11) au premier quadrant du plan (α, δ) .

vecteurs, $\frac{dy}{dx}$, est bornée à l'infini. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y(-\delta + p(x))}{-yp(x) + \rho x(1-x) - \lambda} \\ &= \frac{\delta - p(x)}{p(x)} := L(x). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Or L est bornée comme fonction continue sur le compact $[x_1, x_2]$. Alors $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$ est bornée entre les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$.

Donc les séparatrices des points singuliers C et D ne vont pas à l'infini entre les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$.

Il y a donc, dans ces régions, deux positions possibles pour les séparatrices de gauche et deux positions possibles pour les séparatrices de droite (voir la figure 5.6).

- Si C et D sont des points de selle, alors les coordonnées du troisième point

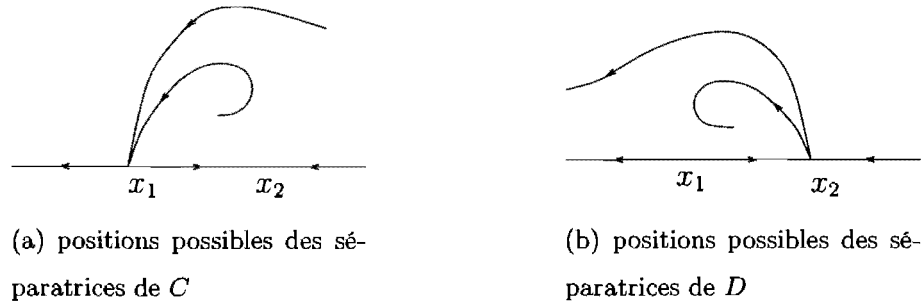


FIG. 5.6. Positions possibles des séparatrices des points singuliers de l'axe des x pour le modèle (0.0.11)

singulier $E = (x_0, y_0)$ vérifient

$$\begin{cases} x_1 < x_0 < x_2, \\ y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta}, \\ p(x_0) = \delta. \end{cases} \quad (5.4.2)$$

On a que $y_0 > 0$ car $\rho x(1-x) - \lambda > 0$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$.

On s'intéresse donc, dans ce cas, aux positions des séparatrices de C et D dans la demi-bande « $x \in [x_1, x_2], y > 0$ » :

Sur les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$, on a, par le système (0.0.11), que $\dot{x} = -yp(x) < 0$. Alors, puisque $C = (x_1, 0)$ et $D = (x_2, 0)$ sont des points de selle, on a nécessairement le comportement des trajectoires aux voisinages de C et D (voir la figure 5.7).

Or, par ce qui précède, les séparatrices de C et D ne peuvent pas aller à l'infini entre les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$. Par conséquent, lorsque C et D sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 5.8. \square

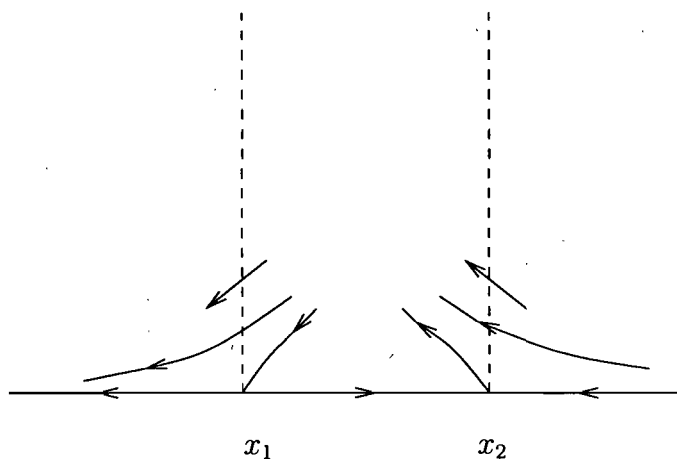


FIG. 5.7. Comportement des trajectoires aux voisinages de C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle)

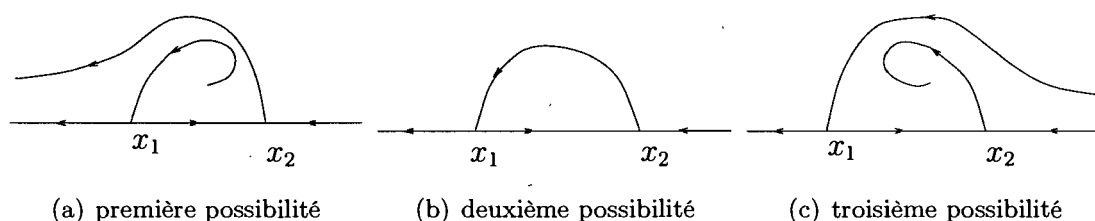


FIG. 5.8. Positions possibles des séparatrices des points singuliers C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle)

5.5. BIFURCATION DE BOUCLE HÉTÉROCLINIQUE

À la figure 5.5, considérons chacun des cas où

$$\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[\quad \text{et} \quad p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < \delta < p\left(\frac{1}{2} + \eta\right), \quad (5.5.1)$$

$p(x)$ et η étant définis au début de ce chapitre. Il y a exactement 3 points singuliers, C , D et E où :

a) $C = (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ et $D = (\frac{1}{2} + \eta, 0)$ sont des points de selle situés sur l'axe des x , invariant sous le flot de (0.0.11) et coïncidant ainsi avec la variété instable, $W^u(C)$, de C et la variété stable, $W^s(D)$, de D .

b) Pour x_0 et y_0 définis par $\frac{1}{2} - \eta < x_0 < \frac{1}{2}$, $p(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta}$, on a une bifurcation de Hopf (d'ordre 2 si $\beta > 0$) au voisinage de $E = (x_0, y_0)$ (situé dans le premier quadrant ouvert). Lorsque $\beta = 0$ et $L_1 = 0$ (où L_1 désigne le

premier coefficient de Lyapunov), on a conjecturé que (x_0, y_0) est un centre.

On a le résultat d'existence suivant

Proposition 5.5.1. (1) *Il y a bifurcation de boucle hétéroclinique dans la région bornée par (Cn_r) et (Cn_a) . Plus précisément, sur chaque droite $\alpha = \text{constante}$, il existe un point de bifurcation de boucle hétéroclinique situé entre les intersections de cette droite avec (Cn_r) et (Cn_a) .*

(2) *Lorsque λ est petit, la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique, $(B\mathcal{H})$, tend vers $\delta = 0$.*

Démonstration. (1) *Existence de la bifurcation de boucle hétéroclinique*

Dans la région bornée par (Cn_r) et (\mathcal{H}) , la positions des séparatrices (voir le théorème 5.4.1) et les portraits de phase (voir les figures 5.10, 5.11 et 5.12) de (0.0.11) au voisinage de (Cn_r) (où il n'y a pas de cycle limite) et au voisinage de H_r (où il y a un cycle limite répulsif) montrent qu'il y a nécessairement une boucle hétéroclinique pour faire disparaître ce cycle limite avant le col-noeud. Sinon, puisque le cycle ne peut pas disparaître à l'infini (voir le théorème 5.4.1), le théorème 0.0.2 (de Chochitaïchvili [1]) sera contredit : en effet (voir 3.1.11), par ce théorème, (0.0.11) est, au voisinage de $C = (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ ramené l'origine, topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{X} = -\frac{\rho(2a-1)a^2}{\delta} X, \\ \dot{Y} = \frac{a^3(\beta a+2)}{\eta(\alpha a^2+\beta a+1)} Y^2 + O(|Y|^3), \end{cases} \quad (5.5.2)$$

qui décrit la bifurcation d'un point double pour $a = \frac{1}{2} - \eta$.

De même, dans la région bornée par (\mathcal{H}) et (Cn_a) , la position des séparatrices et les portraits de phase (voir les figures 5.10, 5.11 et 5.12) de (0.0.11) au voisinage de H_a (où il y a un cycle limite attractif) et au voisinage de (Cn_a) (où il n'y a pas de cycle limite) montrent qu'il y a nécessairement une boucle hétéroclinique pour faire disparaître ce cycle limite avant le col-noeud. Sinon, puisque le cycle ne peut pas disparaître à l'infini (voir le théorème 5.4.1), le théorème 0.0.2 (de Chochitaïchvili [1]) sera contredit : en effet (voir (3.1.11)), par ce théorème, (0.0.11) est, au

voisinage de $D = (\frac{1}{2} + \eta, 0)$ ramené l'origine, topologiquement équivalent à (5.5.2) qui décrit la bifurcation d'un point double pour $a = \frac{1}{2} + \eta$.

- (2) Pour λ petit, on a que (Cn_r) et la branche inférieure de (\mathcal{H}) tendent vers $\delta = 0$ (voir les équations de (Cn_r) et de (\mathcal{H})); donc (\mathcal{BH}) tend forcément vers $\delta = 0$ lorsque λ est petit.

□

c) Le type et la codimension de cette boucle hétéroclinique (dont la connexion \overline{CD} est fixée) sont données par la proposition suivante :

Proposition 5.5.2. *Posons*

$$\begin{aligned} H(\alpha) &:= \frac{1}{2} \left[\frac{(\frac{1}{2} - \eta)^2}{\alpha(\frac{1}{2} - \eta)^2 + \beta(\frac{1}{2} - \eta) + 1} + \frac{(\frac{1}{2} + \eta)^2}{\alpha(\frac{1}{2} + \eta)^2 + \beta(\frac{1}{2} + \eta) + 1} \right] \\ &= \frac{(-\eta^2 + \frac{1}{8} + 2\eta^4)\alpha + (2 - \beta)\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{2}}{2 \left[\left(\frac{1}{16} + \eta^4 - \frac{1}{2}\eta^2 \right) \alpha^2 + \left[(2 - \beta)\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{2} \right] \alpha + 1 + \beta + \frac{\beta^2}{4} - \beta^2\eta^2 \right]} \\ &= \frac{2\lambda^2\alpha + (\rho - 2\lambda + \beta\lambda)\rho}{2[\lambda^2\alpha^2 + (\rho - 2\lambda + \beta\lambda)\alpha\rho + (\beta^2\lambda + \rho + \beta\rho)\rho]}. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

La boucle hétéroclinique est :

- par [15], de codimension supérieure ou égale à deux, c'est à dire $r_{CD} = 1$, si

$$(\mathcal{R}) : \delta = H(\alpha); \quad (5.5.4)$$

- par le théorème 4.3.2, est répulsive (c'est à dire $r_{CD} < 1$) et de codimension un si

$$\delta < H(\alpha); \quad (5.5.5)$$

- par le théorème 4.3.2, est attractive (c'est à dire $r_{CD} > 1$) et de codimension un si

$$\delta > H(\alpha). \quad (5.5.6)$$

Démonstration. On se rappelle que, pour

$$p \left(\frac{1}{2} - \eta \right) < \delta < p \left(\frac{1}{2} + \eta \right), \quad (5.5.7)$$

les points $C = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}, 0)$ et $D = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}, 0)$ sont des cols hyperboliques; leurs rapports d'hyperbolicité sont respectivement donnés par

$$r_C := \frac{\delta - p(\frac{1}{2} - \eta)}{2\rho\eta}, \quad (5.5.8)$$

et

$$r_D := \frac{2\rho\eta}{p(\frac{1}{2} + \eta) - \delta} \quad (5.5.9)$$

de sorte que

$$r_C r_D - 1 = \frac{2\delta - [p(\frac{1}{2} - \eta) + p(\frac{1}{2} + \eta)]}{p(\frac{1}{2} + \eta) - \delta}.$$

Par (5.5.1), le signe de $r_C r_D - 1$ est exactement celui de

$$N(\delta, \eta) := 2\delta - \left[p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + p\left(\frac{1}{2} + \eta\right) \right]. \quad (5.5.10)$$

On voit bien que $N(\delta, \eta) = 0$ si, et seulement si

$$\delta = H(\alpha) := \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + p\left(\frac{1}{2} + \eta\right) \right]$$

donné au (5.5.3).

Il nous reste à voir si la deuxième double inégalité de (5.5.1) est satisfaite par $H(\alpha)$. En effet, il est clair que

$$p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < p\left(\frac{1}{2} + \eta\right) \Rightarrow p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < H(\alpha) < p\left(\frac{1}{2} + \eta\right);$$

d'où le résultat. \square

Remarque 5.5.1. *La position de la courbe de bifurcation de boucle hétéroclinique, (\mathcal{BH}) , dans la région délimitée par (Cn_r) et (Cn_a) est intuitivement conjecturée à partir du centre organisateur, c'est-à-dire lors de la bifurcation de col nilpotent au voisinage de $B = (\frac{1}{2}, 0)$ (point triple pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$ et $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$). Ce point est de codimension 2 sauf pour $\alpha = \alpha_\beta := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6} > 0$ où il est de codimension 3 lorsque $\beta > 0$. Au voisinage du point de codimension 3, on sait qu'on doit avoir une boucle hétéroclinique de codimension 2, obtenue comme $BH_2 := (\mathcal{BH}) \cap (\mathcal{R})$ où (\mathcal{R}) est donné en (5.5.4) et (5.5.3).*

5.6. LIEU DE LA BIFURCATION DE HOPF D'ORDRE 2

Par l'étude (faite au chapitre 3) des deux premiers coefficients de Lyapunov, la bifurcation de Hopf d'ordre 2 existe pour toutes les valeurs de $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$. Pour commencer, on fait une analyse supplémentaire du premier coefficient de Lyapunov dans l'espace des paramètres. En effet, au chapitre 3, nous avons vu, sous les conditions (5.3.1), (5.3.2) et (5.3.3) de la section précédente, que le premier coefficient de Lyapunov est, modulo un facteur multiplicatif positif,

$$L_1(x) := \rho^2 x^2 (1 - 2x) (\alpha x^2 + \beta x + 1)^2 [(\beta^3 + 2\alpha\beta - \alpha\beta^2)x^4 + (6\beta^2 - 6\alpha\beta)x^3 + (6\beta - 6\alpha)x^2 + 4\beta x + 6], \quad (5.6.1)$$

où x , abscisse du point singulier correspondant, est la racine positive de

$$f(x) := (\alpha\delta - 1)x^2 + \beta\delta x + \delta. \quad (5.6.2)$$

$L_1(x)$ s'annule au point singulier d'abscisse x si, et seulement si

$$l_1(x, \alpha) := (\beta^3 + 2\alpha\beta - \alpha\beta^2)x^4 + (6\beta^2 - 6\alpha\beta)x^3 + (6\beta - 6\alpha)x^2 + 4\beta x + 6 = 0 \quad (5.6.3)$$

ou, selon une formule équivalente à $L_1(x)$ (obtenue de $L_1(x)$ par l'égalité $u(x) := -2\rho\alpha x^4 + \rho(\alpha - \beta)x^3 + (-\rho + \lambda\beta)x + 2\lambda = 0$ exprimant le fait que la trace est nulle au point singulier),

$$m_1(x, \lambda) := -2\beta^2\rho x^5 - 6\rho\beta x^4 + (\lambda\beta^2 - 2\beta\lambda - \rho\beta - 6\rho)x^2 + 6\lambda\beta x + 6\lambda = 0. \quad (5.6.4)$$

On observe que :

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} l_1(x, \alpha) = \beta^3 x^4 + 6\beta^2 x^3 + 6\beta x^2 + 4x\beta + 6 > 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$ où η est définie au début de la section précédente ;
- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} l_1(x, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [-\alpha x^2 (-2x\beta(x-3) + x^2\beta^2 + 6)] < 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$;
- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} m_1(x, \lambda) = -\rho x^2 (2\beta^2 x^3 + 6\beta x^2 + \beta + 6) < 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$;

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow (\frac{\rho}{4})^-} m_1(x, \lambda) = & -\frac{1}{4} \rho (-1 + 2x) [4x^4\beta^2 + 12\beta x^3 + 2\beta^2 x^3 + 6\beta x^2 + x^2\beta^2 \\ & + 12x + 6x\beta + 6] \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

qui tend vers 0^+ car, lorsque $\lambda \rightarrow (\frac{\rho}{4})^-$, on a que (\mathcal{H}) tend vers (CN) c'est-à-dire $\delta \rightarrow (\frac{1}{\alpha+2\beta+4})^-$ et, alors $x \rightarrow (\frac{1}{2})^-$.

• Dans l'espace des paramètres, $L_1(x)$ et $f(x)$ s'annulent au point singulier d'abscisse x si, et seulement si le résultant de $l_1(x, \alpha)$ et $f(x)$, par rapport à x , est nul ; notons le par $L(\alpha, \delta)$. On obtient que

$$\begin{aligned} L(\alpha, \delta) = & (2\beta^3 + \beta^2 - 2\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta + 9\alpha^2) (\beta^2 - 4\alpha)^2 \delta^4 \\ & + 12 (\beta^2 - 4\alpha) (2\beta^3 + \beta^2 - 2\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta + 9\alpha^2) \delta^3 \\ & + (468\alpha^2 - 264\alpha\beta + 36\beta^2 - 108\alpha\beta^2 + 84\beta^3) \delta^2 \\ & + (72\beta - 216\alpha + 8\beta^2) \delta + 36. \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

Posons $(\mathcal{L}) : L(\alpha, \delta) = 0$ et $H_2 := (\mathcal{H}) \cap (\mathcal{L})$ (le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2). Déterminons H_2 .

Comme à l'étude de (\mathcal{H}) , nous allons nous intéresser à ce qui se passe lorsque λ est petit, λ est proche de $\frac{\rho}{4}$ et lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$:

5.6.1. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers 0

Proposition 5.6.1. *Lorsque λ est petit, le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 est situé très loin à droite sur la courbe de Hopf (c'est-à-dire pour α très grand) et passe à l'infini quand $\lambda = 0$.*

Démonstration. Pour $\lambda = 0$ on a une bifurcation de Hopf d'ordre un (voir le théorème 1.5.1). Alors, par stabilité structurelle, il vient que [27] : pour chaque compact K dans l'espace $(\alpha, \beta, \rho, \delta)$, il existe $\lambda_K > 0$ tel que la bifurcation de Hopf d'ordre un persistera si $(\alpha, \beta, \rho, \delta) \in K$ et $\lambda < \lambda_K$. Mais, l'espace $(\alpha, \beta, \rho, \delta)$

n'étant pas compact, alors on ne peut pas trouver un $\lambda_K > 0$ uniforme pour cet espace (plus K est grand, plus λ_K est petit). Or, pour β, ρ, δ fixés dans K , plus λ est petit, plus le α correspondant est grand. Donc, pour λ très petit, le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2, notée $H_2 := (\alpha_p, \delta_p)$, correspond à $\alpha_p = \alpha(\lambda) \rightarrow +\infty$. Il reste à montrer que H_2 ne peut sortir du diagramme de bifurcation. En effet, par (5.6.1), on a que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L_1(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} l_1(x, \alpha) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [-\alpha x^2 (-2x\beta(x-3) + x^2\beta^2 + 6)] < 0 \end{aligned} \tag{5.6.7}$$

pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$ (qui correspond à la région strictement bornée par (Cn_r) : $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et (CN) : $\delta = p(\frac{1}{2})$ où a effectivement lieu la bifurcation de Hopf). \square

5.6.2. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers $(\frac{\rho}{4})^-$

Dans ce cas, le résultat essentiel est le suivant.

Proposition 5.6.2. *Lorsque λ tend vers $(\frac{\rho}{4})^-$, on a que :*

- (1) (\mathcal{H}) tend vers (CN) ;
- (2) H_2 tend vers le point de coordonnées (α_n, δ_n) définies dans le premier quadrant par

$$\alpha_n := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}, \quad \delta_n := \frac{\beta + 6}{3(\beta + 4)^2} \tag{5.6.8}$$

qui correspond au point nilpotent de codimension 3.

Démonstration. (1) Découle de la proposition 5.3.4 (2) ;

(2) En effet :

(i) Posons $z := x - \frac{1}{2}$ et $\sigma := \rho - 4\lambda$. Alors $m_1(x, \lambda)$ devient

$$\begin{aligned} m_1(z, \sigma) := & -2(\sigma + 4\lambda)\beta^2 z^5 - \beta(\sigma + 4\lambda)(6 + 5\beta)z^4 - \beta(\sigma + 4\lambda)(12 + 5\beta)z^3 \\ & + \left(\left(-10\beta - 6 - \frac{5}{2}\beta^2 \right) \sigma - 3\lambda(\beta + 4)(3\beta + 2) \right) z^2 \\ & - \frac{1}{8}(\beta + 4)(12\beta\lambda + 5\beta\sigma + 12\sigma + 48\lambda)z - \frac{1}{16}\sigma(\beta + 6)(\beta + 4). \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

On a $m_1(0, 0) = 0$ et

$$\frac{\partial m_1}{\partial z}(0, 0) = -\frac{1}{8}(\beta + 4)(12\beta\lambda + 48\lambda) < 0;$$

d'où, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de $(z, \sigma) = (0, 0)$ sur lequel $m_1(z, \sigma) = 0$ si, et seulement si $z = z(\sigma)$ avec $z(0) = 0$.

(ii) Posons $z := x - \frac{1}{2}$ et $\kappa := \alpha - \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$. Alors $l_1(x, \alpha)$ devient

$$\begin{aligned} l_1(z, \kappa) := & -\frac{1}{16}(2z + 1)^2 [4\beta(\beta - 2)z^2 + 4\beta(\beta + 4)z + (\beta + 6)(\beta + 4)] \kappa \\ & - \frac{z [8\beta(\beta - 6)z^3 + 4\beta(7\beta + 12)z^2 + 6(\beta + 4)(5\beta + 6)z + 9(\beta + 4)^2]}{\beta + 6}. \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

On a $l_1(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial l_1}{\partial \kappa}(0, 0) = -\frac{5}{8}\beta - \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{3}{2} < 0$; d'où, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de $(z, \kappa) = (0, 0)$ sur lequel $l_1(z, \kappa) = 0$ si, et seulement si $\kappa = \kappa(z)$ avec $\kappa(0) = 0$.

(iii) En remplaçant $\alpha = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$ dans l'équation (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$, on obtient $\delta = \frac{1}{3} \frac{\beta + 6}{(\beta + 4)^2}$.

Donc, lorsque $\lambda \rightarrow \left(\frac{\rho}{4}\right)^-$, on a par (i), (ii) et (iii) que (\mathcal{H}) avec (\mathcal{L}) ont un seul point d'intersection dans le premier quadrant dont les coordonnées α_n et δ_n sont définies plus haut (ceci n'est pas surprenant, car c'est ce que prédisait l'analyse du point de codimension 3).

□

5.6.3. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$

Commençons par rappeler la notion de base de Gröbner.

Définition 5.6.1. Soit I un idéal de l'anneau des polynômes $K_n := \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ et \prec un ordre monomial sur K_n . Un sous-ensemble fini G de $I \setminus \{0\}$ est une base de Gröbner de I pour l'ordre \prec si les termes dominants de tous les éléments de G engendrent l'idéal des termes dominants de tous les éléments de I .

Deux points importants à ce sujet méritent d'être signalés :

- Le théorème d'existence des bases de Gröbner stipule que : « Tout idéal non nul de K_n admet une base de Gröbner ».
- La théorie des bases de Gröbner est utilisée avec succès dans la résolution explicite des systèmes d'équations algébriques. En effet, soient $S = \{f_1, \dots, f_m\}$ un ensemble de m polynômes à n variables x_1, \dots, x_n et I l'idéal engendré par S ; si $S' = \{g_1, \dots, g_s\}$ est un autre ensemble de générateurs de I , alors le lieu des solutions du système $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$ est le même que celui du système $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$. Si $\{g_1, \dots, g_s\}$ est une base de Gröbner de I , le lieu des solutions du système $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$ est plus facile à calculer que celui de $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$. Ceci étant, on a la conjecture suivante :

Conjecture 5.6.1. (\mathcal{H}) et (\mathcal{L}) ont un seul point d'intersection dans le premier quadrant.

Illustration :

En effet, s'il y en avait plus d'un, alors le passage de un (lorsque λ est proche de $\frac{\rho}{4}$) à deux ou trois (lorsque λ s'éloigne de $\frac{\rho}{4}$ sans être petit) nécessiterait l'existence d'un point de contact entre (\mathcal{H}) et (\mathcal{L}) , c'est à dire que pour β, ρ et $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$ fixés, il existerait $\alpha = \alpha_c$ et $\delta = \delta_c$ tels que

$$\begin{cases} L(\alpha_c, \delta_c) = 0, \\ P(\alpha_c, \delta_c, \lambda) = 0, \\ \nabla L(\alpha_c, \delta_c) // \nabla P(\alpha_c, \delta_c, \lambda) \quad i.e \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \delta} - \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) (\alpha_c, \delta_c) = 0. \end{cases} \quad (5.6.11)$$

Or, on conjecture qu'un tel point n'existe pas. Le temps nous a manqué pour faire une étude numérique extensive. Nous nous sommes contentés d'un cas particulier. Comme on l'a dit plus haut, $\frac{\lambda}{\rho}$ est un paramètre naturel car toutes les expressions des surfaces de bifurcations sont homogènes en λ et ρ . Posons $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$ et vérifions que cette conjecture est vérifiée pour $\beta = 12$ et $\lambda_1 = \frac{1}{9}$. En effet, pour $\beta = 12$ et

$\lambda_1 = \frac{1}{9}$, on a que $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$, $L(\alpha, \delta) = 0$ et

$$G(\alpha, \delta) := \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \delta} - \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) (\alpha, \delta) = 0$$

si, et seulement si

$$\begin{aligned} P_0(\alpha, \delta) &:= \alpha (-4\alpha + 144) \left(29 + \frac{19}{9}\alpha + \frac{1}{81}\alpha^2 \right) \delta^4 \\ &+ \left(4176 - 304\alpha + \frac{104}{9}\alpha^2 + \frac{16}{81}\alpha^3 \right) \delta^3 + \left(-\frac{37}{9}\alpha + 88 - \frac{8}{27}\alpha^2 \right) \delta^2 \\ &+ \left(-\frac{7}{9} + \frac{16}{81}\alpha \right) \delta - \frac{4}{81} = 0 \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

$$\begin{aligned} L_0(\alpha, \delta) &:= 1 + 4(\alpha - 20)^2(\alpha - 36)^2\delta^4 - 12(\alpha - 36)(\alpha - 20)^2\delta^3 \\ &+ (-520\alpha + 13\alpha^2 + 4176)\delta^2 + (56 - 6\alpha)\delta = 0 \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

et

$$\begin{aligned} G_0(\alpha, \delta) &:= 259 + 32(\alpha - 20)(247\alpha^3 + 5958\alpha^2 - 330804\alpha - 1691280)(\alpha - 36)^2\delta^6 \\ &- 24(\alpha - 20)(\alpha - 36)(1469\alpha^3 - 6798\alpha^2 - 948780\alpha - 8635248)\delta^5 \\ &+ (63332\alpha^4 + 46239984\alpha^2 - 3270072\alpha^3 - 489763584\alpha + 7151245056)\delta^4 \\ &+ (-36234720\alpha + 2362144\alpha^2 + 297748224 - 57678\alpha^3)\delta^3 \\ &+ (8122464 + 27123\alpha^2 - 776928\alpha)\delta^2 + (-5684\alpha + 83880)\delta = 0. \end{aligned} \quad (5.6.14)$$

Or $P_0(\alpha, \delta)$, $L_0(\alpha, \delta)$ et $G_0(\alpha, \delta)$ sont des polynômes en α, δ dont une base de Gröbner est $\{1\}$. Donc, pour $\beta = 12$ et $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ *par exemple*, il n'y a aucun couple (α, δ) solution commune de $L(\alpha, \delta) = 0$, $P(\alpha, \delta, 3) = 0$ et $G(\alpha, \delta) = 0$. Comme un tel point n'existe pas (conjecture), conséquemment (\mathcal{H}) et (\mathcal{L}) ont un seul point d'intersection au premier quadrant. Ce qui achève cette illustration.

5.6.4. Validation numérique de la position de H_2

Posons $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$. Pour β fixé, quelques tests numériques illustrent que :

- Si λ_1 est très petit, alors H_2 est situé non loin du point de rebroussement inférieur (c'est-à-dire celui qui rejoint l'infini à $\lambda = 0$);
- Si λ_1 n'est ni petit, ni proche de $\frac{1}{4}$, alors H_2 est situé non loin du point de contact d'ordre 2;

- Si λ_1 est proche de $\frac{1}{4}$, alors H_2 (qui, par la proposition 5.6.2, tend vers le point (α_n, δ_n) défini au (5.6.8)) est plus à gauche qu'à droite sur (\mathcal{H}) .

Étant donné que le deuxième coefficient de Lyapunov, L_2 , est strictement positif (voir à la fin du chapitre 3) pour $\beta > 0$, alors le diagramme de bifurcations au voisinage de la bifurcation de Hopf de codimension 2 où figure une courbe de double cycle, \mathcal{DC} , se présente à la figure 5.9.

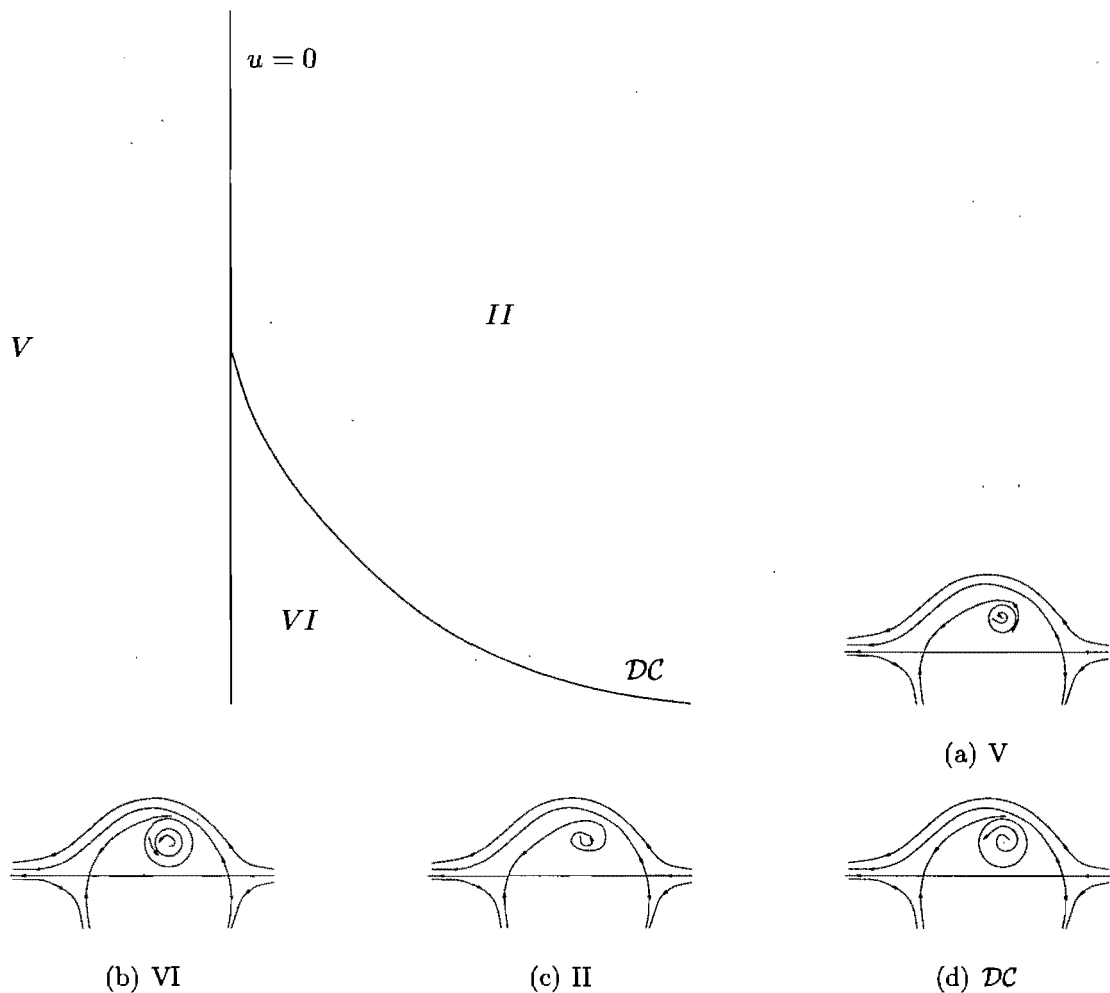


FIG. 5.9. Diagramme de bifurcation au voisinage de la bifurcation de Hopf de codimension 2

Remarque 5.6.1. Si $\beta = 0$, alors $L_1 = 0$ si, et seulement si $\alpha = \frac{1}{x_0^2}$ avec $p(x_0) = \delta$. Ainsi $(\mathcal{L}) : \delta = \frac{1}{2\alpha}$. En remplaçant cela dans l'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$, celle-ci

devient $\frac{(\alpha\lambda-\rho)^2}{4\alpha^2} = 0$. Donc, par la conjecture 3.2.1, le point singulier $E = (x_0, y_0)$ est un centre au lieu des paramètres noté $C = (\alpha, \delta)$ et défini par $\alpha = \frac{\rho}{\lambda}$ et $\delta = \frac{\lambda}{2\rho}$.

5.6.5. Diagramme de bifurcations et portraits de phase

Par le corollaire 5.3.1, la remarque 5.5.1 et la figure 4.10, on a le théorème final suivant.

Théorème 5.6.1. *Le diagramme de bifurcations avec portraits de phase du modèle (0.0.11) est, suivant les valeurs du paramètre $\lambda > 0$, présenté aux figures 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.17 et 5.18. Il est le plus simple contenant toutes les contraintes du système. Les courbes de bifurcations de Hopf et de cols-noeuds sont exactes. Sont conjecturés :*

- (1) le fait que le système étudié (0.0.11) ait au plus deux cycles limites ;
- (2) la position (très simple) de la courbe de bifurcation de boucle hétéroclinique ;
- (3) l'unicité du lieu des bifurcations de codimension 2 (à savoir H_2 , C et BH_2) et, par ricochet, le triangle $C - H_2 - BH_2$ qui, pour $\beta > 0$, se déplace vers la droite quand λ décroît et, pour $\beta = 0$, se réduit au point C défini à la remarque 5.6.1.

5.6.6. Interprétation Biologique

Nous donnons une interprétation biologique du système lorsque ses paramètres sont dans une région ouverte du diagramme de bifurcations (car le champ de vecteurs y est structurellement stable) ; et dans chacune de ces régions, on fait l'hypothèse que les conditions initiales sont réalistes biologiquement. Les régimes que nous allons définir sont stables pour des conditions initiales qui ne font partie ni d'une variété stable, ni d'une variété instable, ni d'un cycle limite instable ; ce qui implique que le régime final sera le même après un petit changement de conditions initiales. Il y a trois types de régimes stables qu'un champ de vecteurs peut posséder :

- REP(**R**égime avec **E**xinction des **P**rédateurs) : C'est un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles il y a extinction des prédateurs

(en particulier, *aucun point singulier dans l'ouvert de conditions initiales*) et la population des proies atteint un équilibre stable.

- **REM**(**R**égime d'**É**quilibre **M**ixte) : un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les prédateurs et les proies coexistent en tendant vers une position d'équilibre stable (*point singulier attractif dans le premier quadrant ouvert*).
- **RO**(**R**égime **O**scillatoire) : un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les prédateurs et les proies tendent vers un régime oscillatoire stable (*cycle limite stable*).

A l'exception des régions ouvertes **I** et **II** (où il y a *extinction des proies*), chaque champ de vecteurs générique (c'est-à-dire dont les paramètres sont dans une région ouverte du diagramme de bifurcations) possède un des régimes stables décrits plus haut. Plus précisément :

- Le portrait de phase de la région ouverte **III** correspond au régime stable **REM** sous la séparatrice de gauche et à l'extinction des proies ailleurs.
- Le portrait de phase de la région ouverte **V** correspond au régime stable **REM** dans une très petite région qui est l'intérieur du cycle limite.
- Le portrait de phase de la région ouverte **IV** correspond au régime stable **REP**.
- Les portraits de phase des régions ouvertes **VI** et **VII** correspondent au régime stable **RO** mais seulement pour un petit ouvert de conditions initiales.

Remarque 5.6.2. (1) Lorsque $\lambda = 0$ et que $\beta \geq 0$, les portraits de phase des régions ouvertes I_0 , II_0 et III_0 (voir à la fin du chapitre 1) correspondent respectivement aux régimes stables **REP**, **REM** et **RO**.

(2) Le rendement soutenu maximal (*MSY*) absolu de la récolte des proies est $\lambda_{MSY} = \frac{\rho}{4}$: si $\lambda \geq \frac{\rho}{4}$, alors $\dot{x} < 0$ et il y a donc extinction des proies.

(3) *Bifurcation quantitative* :

Soit $y > 0$, on sait que $\dot{y} = y(-\delta + p(x))$:

a) Si $\delta < \frac{1}{\alpha}$, alors par définition de p , il existe x_0 tel que $p(x_0) = \delta$ (voir la figure 5.15) : si $x < x_0$, alors $\dot{y} < 0$; si $x > x_0$, alors $\dot{y} > 0$; et si $x = x_0$, alors $\dot{y} = 0$;

b) Si $\delta \geq \frac{1}{\alpha}$, alors par définition de p , on a que $-\delta + p(x) < 0$ pour tout

$x \geq 0$; ainsi (voir la figure 5.16) $\dot{y} < 0$ pour tout $x \geq 0$.

Conséquemment :

- Si $\delta < \frac{1}{\alpha}$, alors y croît si x est grand et y décroît si x est petit.
- Si $\delta \geq \frac{1}{\alpha}$, alors y décroît toujours.

(4) Grandes tendances biologiques :

Par (2) et (3), on a donc les deux grandes tendances biologiques suivantes :

- Il y a extinction des prédateurs quand δ est grand.
- À partir de $\lambda = \frac{\rho}{4}$, aucune population de proies ne peut survivre.

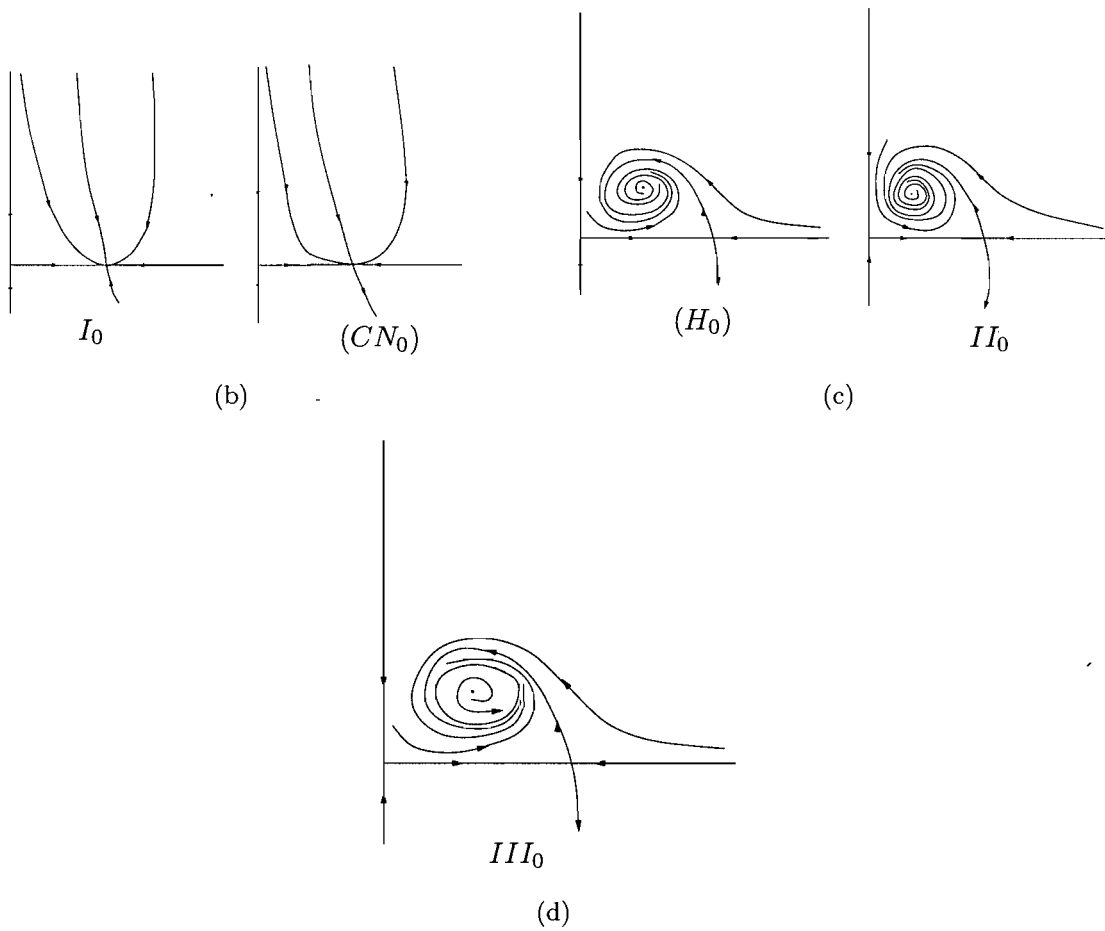
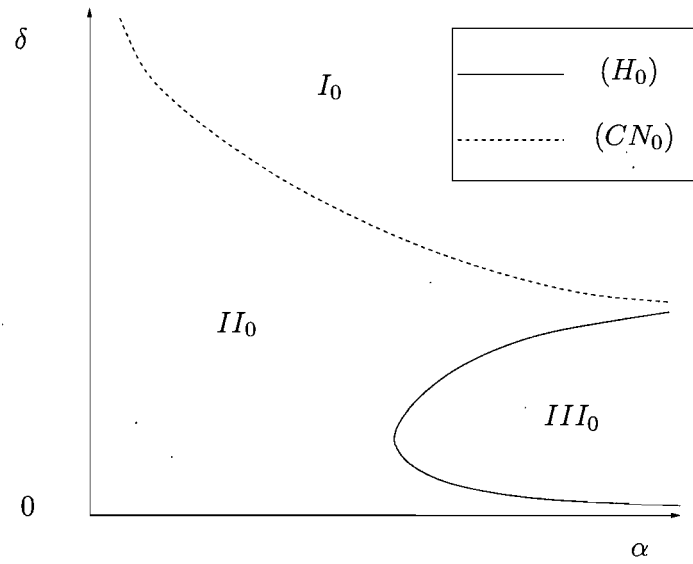


FIG. 5.10. Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (0.0.11) pour $\lambda = 0$.

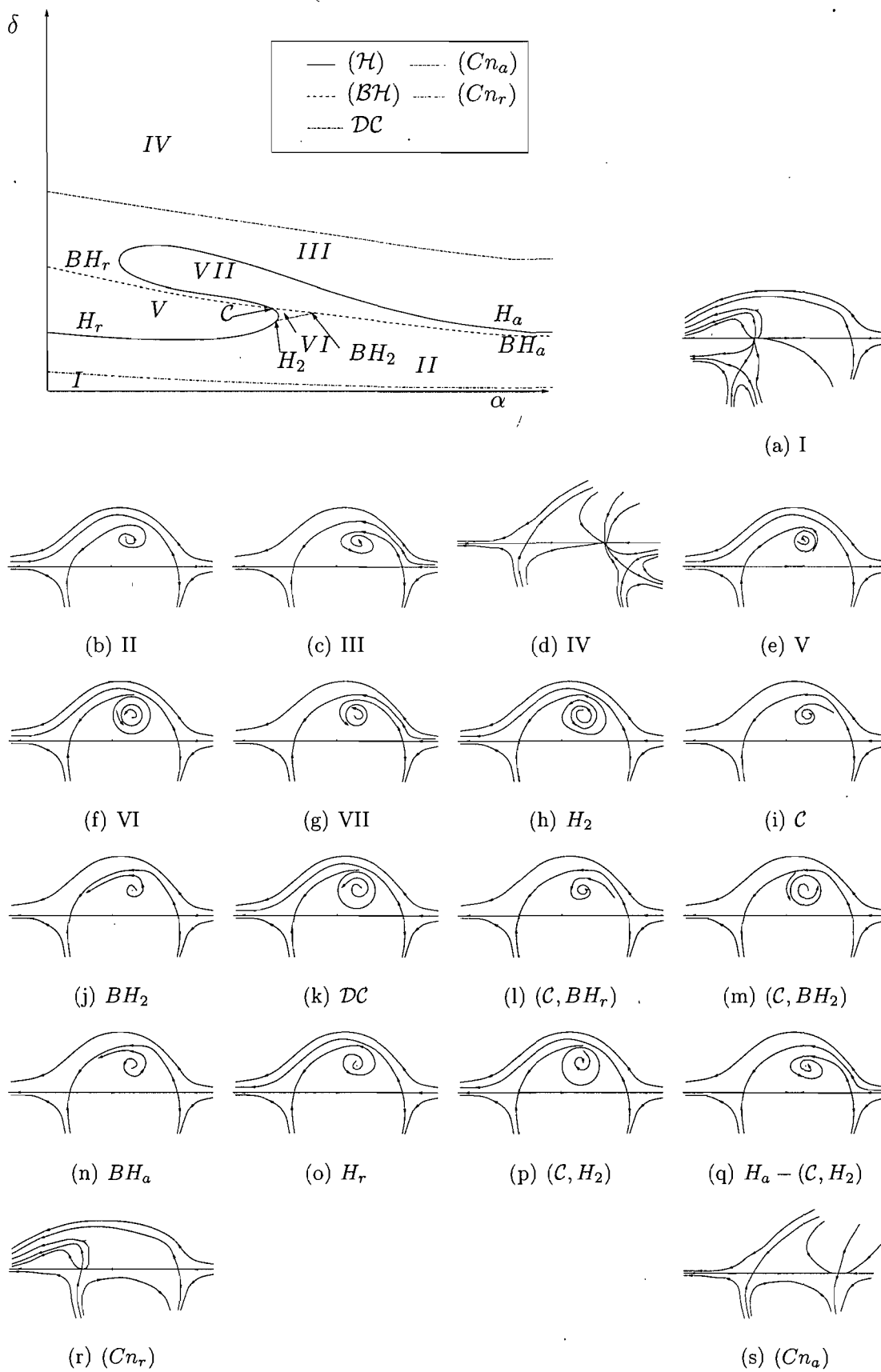


FIG. 5.11. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ est petit

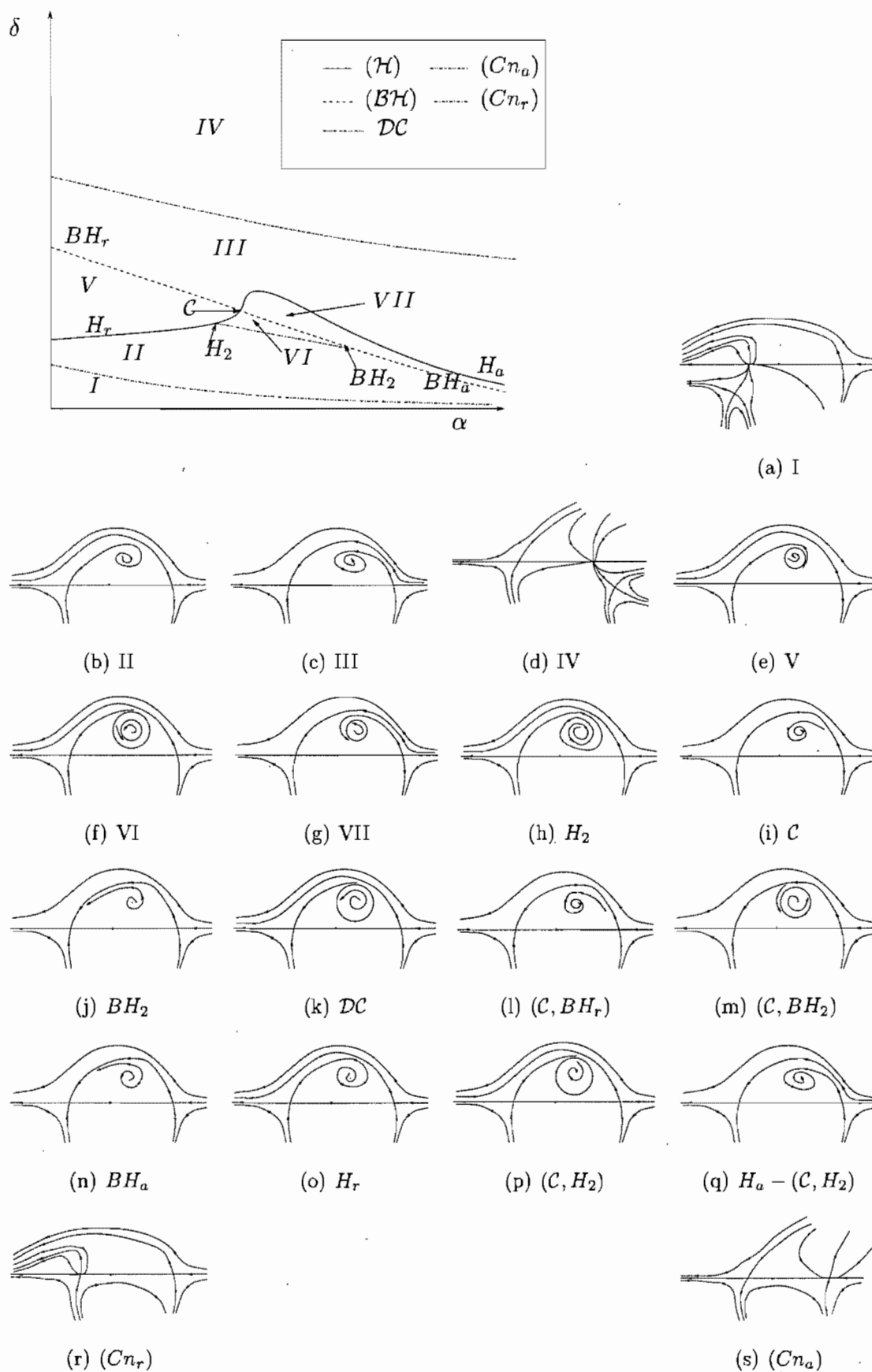


FIG. 5.12. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$

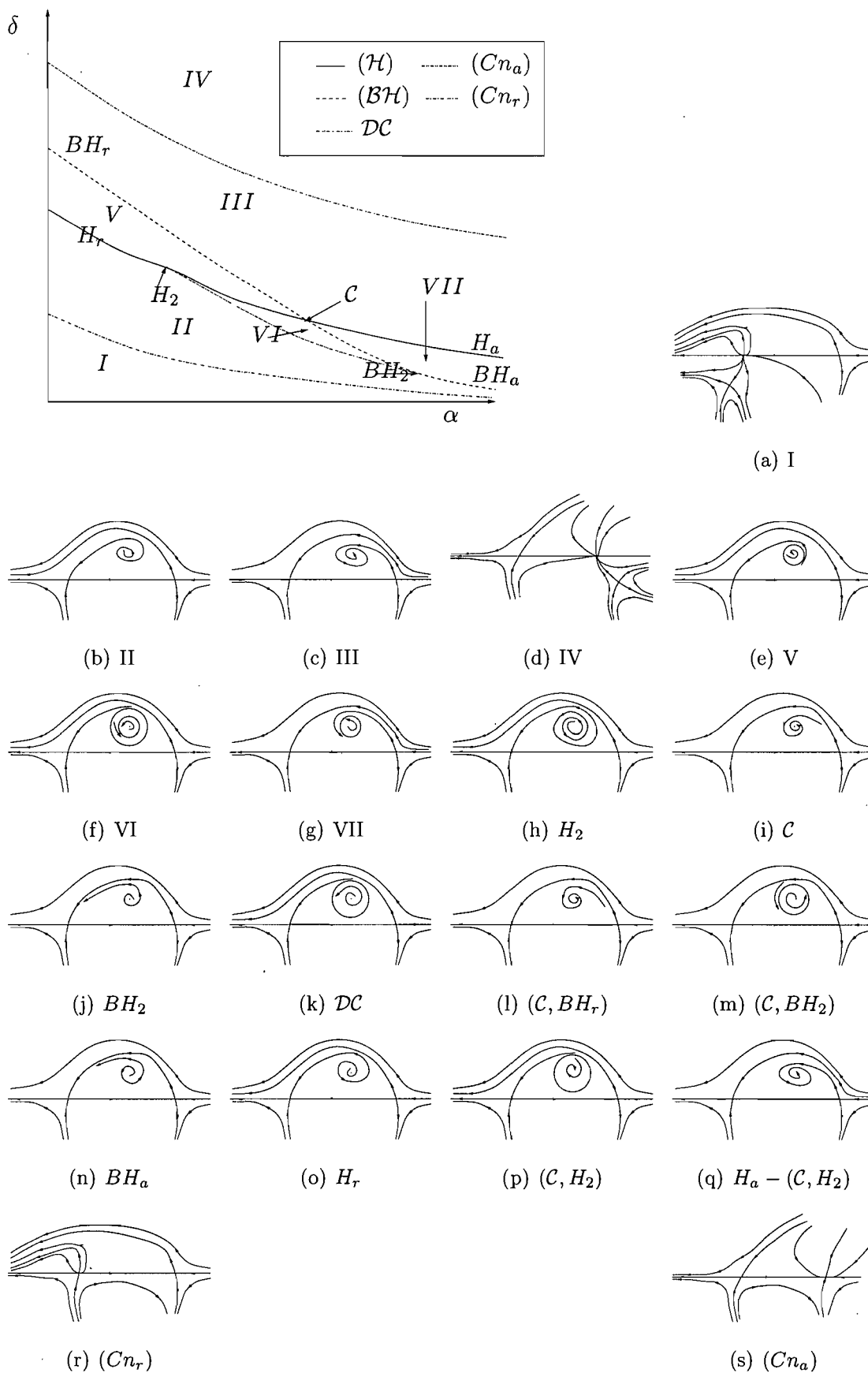


FIG. 5.13. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta > 0$ et λ est proche de $\frac{\rho}{4}$

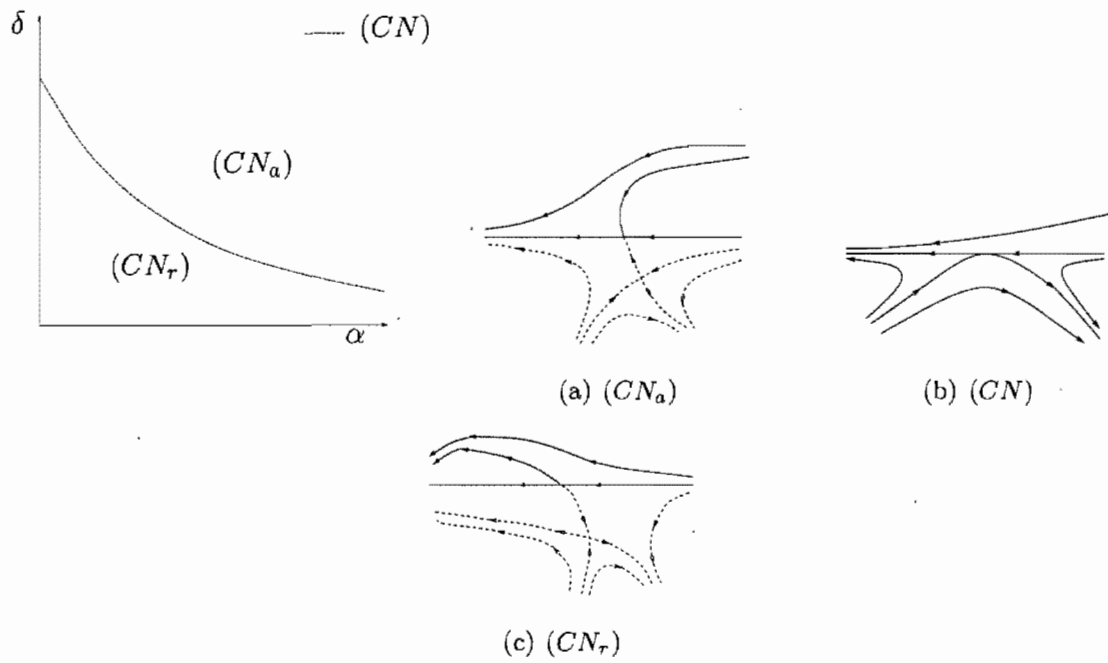


FIG. 5.14. Diagramme de bifurcation et portraits de phase lorsque $\lambda = \frac{\rho}{4}$.

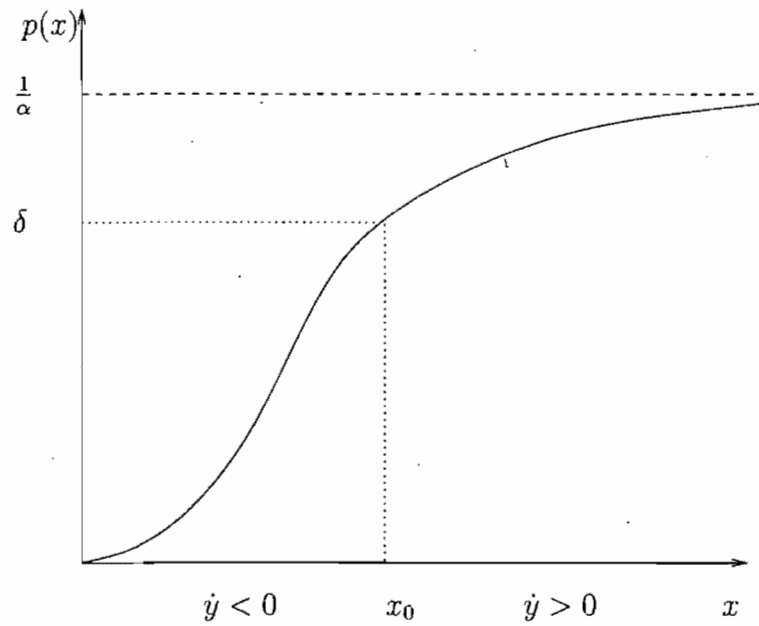


FIG. 5.15. \dot{y} pour $\delta < \frac{1}{\alpha}$

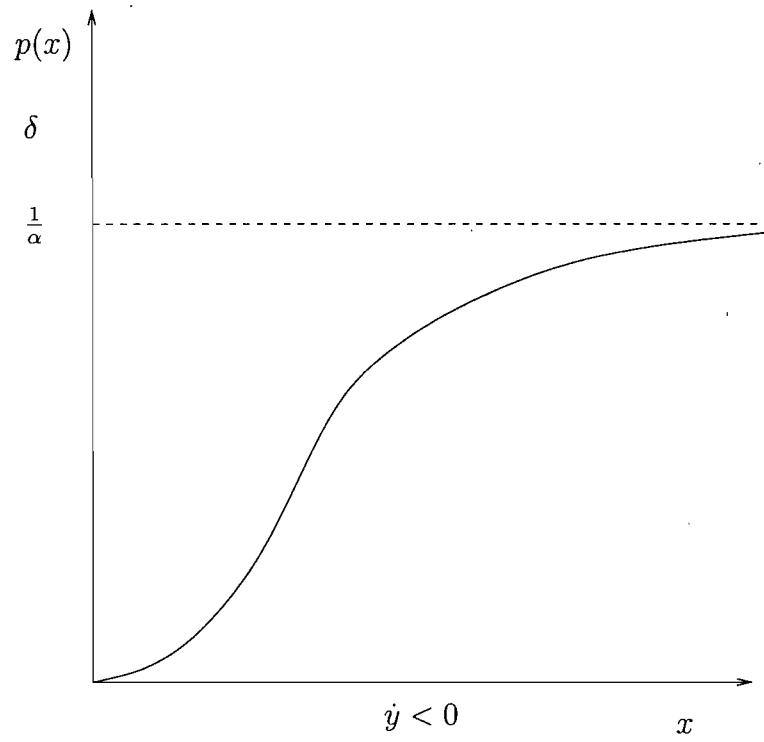


FIG. 5.16. \dot{y} pour $\delta \geq \frac{1}{\alpha}$

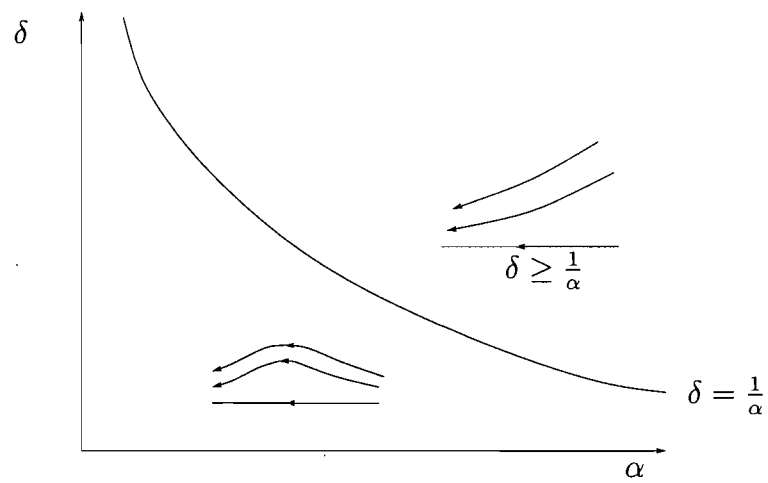


FIG. 5.17. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\lambda > \frac{\rho}{4}$.

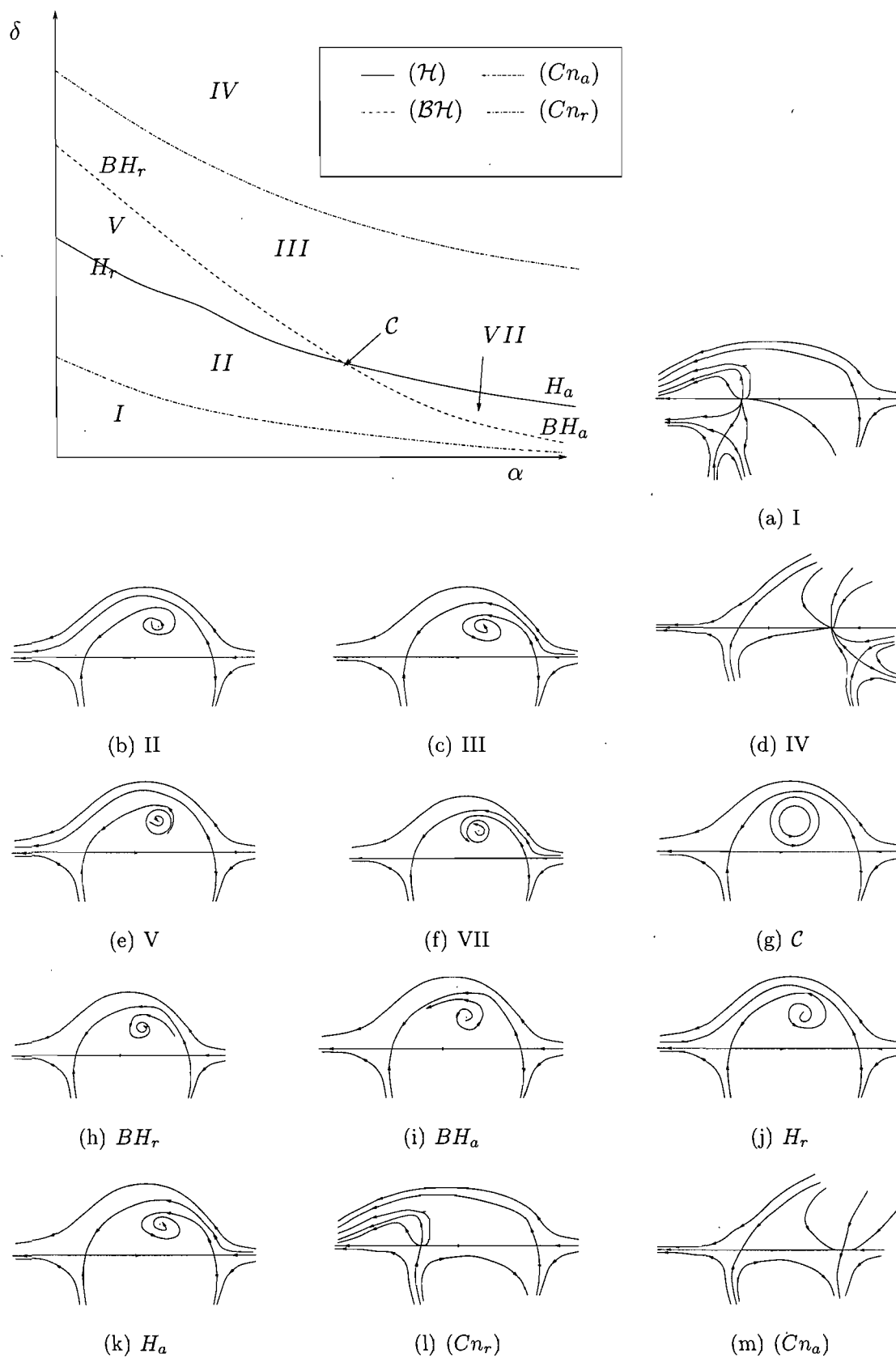


FIG. 5.18. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta = 0$ et $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons étudié le modèle de Gause généralisé avec récolte de proies suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1, \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases}$$

où p est la fonction de Holling de type III généralisée, c'est-à-dire

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

C'est un système prédateur-proie avec récolte de proies ayant 8 paramètres : r, k, m, a, c, d, h_1 sont strictement positifs et $b \geq 0$.

Par un changement de variables linéaire doublé d'un changement d'échelle sur le temps, il est ramené à un système à 5 paramètres réels

$$(\alpha, \beta, \rho, \delta, \lambda) := \left(ak^2, bk, \frac{r}{cmk^2}, \frac{d}{cmk^2}, \frac{h_1}{cmk^3} \right):$$

Après avoir montré que toute trajectoire qui reste toujours dans le premier quadrant vient se terminer dans un rectangle, notre étude a porté sur une analyse des bifurcations de ce modèle : bifurcation de col-noeud, bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2, bifurcation de col nilpotent de codimension 2 et 3, et bifurcation de boucle hétéroclinique. Dans cette analyse, le col nilpotent de codimension 3 est le centre organisateur de notre diagramme de bifurcations.

Lorsque $\beta = 0$, deux conjectures ont été faites sur l'intégrabilité (voir la conjecture 3.2.1) du système et la réversibilité (voir la conjecture 3.3.1) du déploiement du col nilpotent.

Pendant l'étude du déploiement du col nilpotent, nous avons pu :

- illustrer que le coefficient de YX^3 ne joue aucun rôle dans les types et surfaces

des bifurcations ; ce qui nous a conduit à la conjecture 4.3.2 ;

- déterminer analytiquement de bonnes approximations des surfaces de bifurcations de boucle hétéroclinique par la méthode de Melnikov ;
- déterminer le type et la cyclicité de la boucle hétéroclinique.

Les résultats obtenus ont été matérialisés par les coupes du diagramme de bifurcations dans le plan (α, δ) pour les différentes valeurs de λ . Pour le faire, nous avons pu obtenir des courbes de bifurcation exactes sauf celles de boucle hétéroclinique et de double cycle (qui ont été conjecturées). Le lieu de la bifurcation de Hopf de codimension 2 a aussi été conjecturé (voir la conjecture 5.6.1).

Les portraits de phase du diagramme de bifurcations (partiellement conjecturé) nous ont permis de faire une interprétation biologique des comportements possibles des deux espèces animales en fonction des paramètres et des conditions initiales.

Parmi les avenues possibles futures, on pourra :

- Prouver les conjectures 3.2.1, 3.3.1, 4.2.1, 4.3.1, 4.3.2, 5.6.1 et celles du théorème 5.6.1.
- Déterminer numériquement la grandeur des cycles limites et la position des séparatrices du système étudié (0.0.11).
- Étudier le modèle (0.0.1) lorsque $b < 0$.
- Étudier le modèle (0.0.1) lorsque p est une fonction de Holling de type IV et $b \in \mathbf{R}$.
- Étudier le modèle

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - yp(x) - h_1(x), \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)] - h_2(y), \end{cases}$$

où p est une fonction de Holling de type III ou IV et h_i est une fonction constante ou linéaire ou périodique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOLD, *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*, Mir Moscou, (1980).
- [2] A. ANDRONOV, E. LEONTOVIICH, I. GORDON ET A. MAIER, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, (1971).
- [3] ANNIK MARTIN, *Predator-Prey Models with Delays and prey harvesting*, Master of Science thesis, Dalhousie University Halifax.Nova Scotia, (1999).
- [4] A.D. BAZYKIN, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., (1998).
- [5] F. BRAUER ET C. CASTILLO-CHAVEZ, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (2001).
- [6] G. BONIN ET J. LEGAULT, *Comparaison de la Méthode des Constantes de Lyapunov et de la Bifurcation de Hopf*, Canad. Math. Bull. vol. **31** (2), 200-209, (1988).
- [7] H.W. BROER, V. NAUDOT, R. ROUSSARIE, K. SALEH, *Dynamics of a predator-prey model with non-monotonic response function*, Disc. Cont. Dyn. Sys., Vol. 18 (2007), 221-251.
- [8] F. BRAUER ET A.C. SOUDACK, *Stability Regions in Predator-Prey Systems with Constant Rate Prey Harvesting*, J.Math.Biol., 8, 55-71, (1979).
- [9] F. BRAUER ET A.C. SOUDACK, *Coexistence Properties of some Predator-Prey Systems under Constant Rate Harvesting and Stocking*, J.Math.Biol., 12, 101-114, (1981).

- [10] C.W. CLARK, *Mathematical Bioeconomics, The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, Toronto, (1990).
- [11] M. CAUBERGH ET F. DUMORTIER, *Hopf- Takens Bifurcations and Centres*, Journal of Differential Equations, Vol. **202**, 1-31, (2004).
- [12] S.N. CHOW ET J.K. HALE, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1982).
- [13] S.N. CHOW, C. LI ET D. WANG, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, New York, (1994).
- [14] F. DUMORTIER, *Local Study of Planar Vector Fields : Singularities and their Unfoldings, in Structures in Dynamics, Finite Dimensional Deterministic Studies.*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 161-241, (1991).
- [15] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE, C. ROUSSEAU, *Elementary Graphics of Cyclicity One or Two*, Nonlinearity **7**, 1001-1043, (1994).
- [16] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE ET J. SOTOMAYOR, *Generic 3-parameter Families of Planar Vector Fields, Unfolding of Saddle, Focus and Elliptic Singularities with Nilpotent Linear Parts.* In Lecture Notes in Math., Vol. 1480, 1-164, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [17] G.R. DAI ET M. TANG, *Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvested Predator-Prey System*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 58, No. 1, 193-210, (1998).
- [18] G.R. DAI ET C. X. XU, *Constant Rate Predator Harvested Predator-Prey System with Holling-type I Functional Response*, Acta Math.Sci., Vol. 14, 134-144(in Chinese), (1994).
- [19] H.I. FREEDMAN, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, Inc, New-York, (1980).
- [20] H.I. FREEDMAN, *Stability Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Density-Dependent Death Rates*, Bulletin of Mathematical Biology, 41, 67-78, (1979).
- [21] H.I. FREEDMAN ET G.S.K. WOLKOWICZ, *Predator-Prey Systems with Group Defence : The Paradox of Enrichment Revisited*, Bulletin of Mathematical Biology, Vol.48, No.5/6, 493-508, (1986).

- [22] G. FISCHER, *Plane Algebraic Curves*, Student Mathematical Library, vol. 15, (2001).
- [23] G.F. GAUSE, *The Struggle for Existence*, Williams and Wilkins, Baltimore, (1935).
- [24] J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [25] R. GODEAU, *Algèbre Supérieure : Deuxième Édition*, Université Libre de Bruxelles, (1962).
- [26] C.S. HOLLING, *The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation*, Memoirs of the Entomological Society of Canada, Vol. 45, 3-60, (1965).
- [27] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory : Third Edition*, Appl. Math. Sci. 112, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [28] A. LOTKA, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, (1925).
- [29] Y. LAMONTAGNE, C. COUTU ET C. ROUSSEAU, *Bifurcation Analysis of a Predator-prey System with Generalised Holling Type III Function Response*, à paraître dans Journal of Dynamics and Differential Equations.
- [30] C. LI ET C. ROUSSEAU, *A System with Three Limit Cycles Appearing in a Hopf Bifurcation and Dying in a Homoclinic Bifurcation : The Cusp of Order 4*, Journal of Differential Equations **79**, 132-167, (1989).
- [31] C. LI ET C. ROUSSEAU, *Codimension 2 Symmetric Homoclinic and Application to 1 :2 Resonance*, Can. J. Math., Vol. XLII, No. 2, pp. 191-212, (1990).
- [32] A. MOURTADA, *Cyclicité Finie des Polycycles Hyperboliques de Champs de Vecteurs du Plan : Mise sous Forme Normale*, in *Bifurcations of Planar Vector Fields (Luminy, 1989)*, Lecture Notes in Math., 1455, Springer, Berlin, 272-314, (1990).
- [33] MOHAMED EL MORSALANI, *Bifurcations de Polycycles Infinis pour les Champs de Vecteurs Polynomiaux du Plan*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 6^e Série, Tome 3, No 3, P. 387-410, (1994).

- [34] M.L. ROSENZWEIG ET R.H. MACARTHUR, *Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey interactions*, Am.Nat. 47, 209-223, (1963).
- [35] C. ROUSSEAU ET H. ZHU, *Finite Cyclicity of Graphics with a Nilpotent Singularity of Saddle or Elliptic Type*, J. Differential Equations **178**, 325-436, (2002).
- [36] D. SCHLOMIUK, *Algebraic and Geometric Aspects of the Theory of Polynomial Vector Fields, in Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields*, ed D. Schlomiuk (NATO ASI Series) series C, Vol 408, pp 429-467, (1993).
- [37] SHI-SHONGLING, *A Method of Constructing Cycles without Contact around a Weak Focus*, J. Differential Equations **41**, 301-312, (1981).
- [38] V. VOLTERRA, *Fluctuations in the Abundance of Species Considered Mathematically*, "Nature", Vol. CXVIII, 558-560, (1926).
- [39] G.S.K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System Involving Group Defence*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 48, No. 3, 592-606, (1988).
- [40] D. XIAO ET L.S. JENNINGS, *Bifurcations of a ratio-dependent predator-prey system with constant rate harvesting*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 65, No. 3, 737-753, (2005).
- [41] D. XIAO ET S. RUAN, *Global Analysis in Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 61, No. 4, 1445-1472, (2001).
- [42] H. ZHU, S.A. CAMPBELL ET G.S.K. WOLKOWICZ, *Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.63, No. 2, 636-682, (2002).
- [43] C. ROUSSEAU ET H. ZHU, *PP-Graphics with a Nilpotent Elliptic Singularity in Quadratic Systems and Hilbert's 16th Problem*, J. Differential Equations **196**, 169-208, (2004).