

Direction des bibliothèques

AVIS

Ce document a été numérisé par la Division de la gestion des documents et des archives de l'Université de Montréal.

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

This document was digitized by the Records Management & Archives Division of Université de Montréal.

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

**Stabilité magnétohydrodynamique des cuves d'électrolyse:
aspects physiques et idées nouvelles**

par
David Munger

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en physique

Juin, 2008

© David Munger, 2008.



Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

**Stabilité magnétohydrodynamique des cuves d'électrolyse:
aspects physiques et idées nouvelles**

présentée par:

David Munger

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Paul Charbonneau,	président-rapporteur
Alain Vincent,	directeur de recherche
Georges Michaud,	membre du jury
Oleg Zikanov,	examineur externe
Christian Reber,	représentant du doyen de la FES

Thèse acceptée le: 7 août 2008

RÉSUMÉ

La production industrielle de l'aluminium primaire au moyen d'un procédé d'électrolyse de l'alumine, dit procédé de Hall-Héroult, soulève des questions de stabilité magnétohydrodynamique (MHD) en physique. Les cuves d'électrolyse contiennent une mince couche de bain électrolytique flottant sur une couche d'aluminium liquide. Les forces magnétiques qui agissent sur les liquides amplifient les mouvements de l'interface aluminium-électrolyte et limitent ainsi la stabilité et l'efficacité du procédé.

Nous passons en revue et commentons les connaissances établies sur la MHD des cuves, en portant une attention particulière à l'instabilité du roulis de la nappe de métal. Puis, nous discutons d'un point de vue physique de quelques aspects particuliers comme les facteurs influant sur la distribution du courant électrique et les effets d'un gradient horizontal du champ magnétique vertical sur les instabilités déjà connues.

Nous décrivons la méthode numérique que nous avons conçue pour simuler des instabilités dans la cuve d'électrolyse, et ainsi révéler une nouvelle instabilité MHD causée par les gros tourbillons généralement observés dans les cuves en opération. Nous expliquons comment la puissance fournie par la force magnétique est convertie en mouvement ondulatoire radial par le biais des forces centrifuge et de Coriolis.

Nous étudions enfin différents scénarios de contrôle du courant d'électrolyse acheminé à la cuve par les anodes et montrons ainsi que l'intensité des déviations du courant à l'intérieur de la cuve peut être considérablement réduite en variant le potentiel électrique afin de limiter les fluctuations du courant aux anodes, ce qui permet de freiner le développement des instabilités MHD.

Mots clés: magnétohydrodynamique, ondes, instabilités, linéarisation, simulation numérique, Saint-Venant, magnétostatique, courant électrique, électrolyse de l'aluminium.

ABSTRACT

Industrial production of primary aluminum by means of electrolysis of alumina through the Hall–Héroult process raises magnetohydrodynamic (MHD) stability problems in physics. In aluminum reduction cells, a thin layer of electrolytic bath lies on top of a liquid aluminum layer. Magnetic forces acting on the liquids tend to amplify motions of the aluminum–electrolyte interface, thus limiting the process stability and efficiency.

We review and comment the established understanding of the MHD of reduction cells, with a particular focus on the metal pad roll instability. Next, we discuss from a physical standpoint a few specific aspects such as the factors that determine the electric current distribution and how a horizontal gradient of the vertical magnetic field affects already known instabilities.

We describe the numerical method that we devised to simulate instabilities in reduction cells, and thus uncover a new MHD instability caused by the large eddies generally observed in operating cells. We explain how power supplied by the magnetic force is converted to radial wave motion through the action of centrifugal and Coriolis forces.

We finally study different control scenarios for the electrolysis current supplied to the cell by the anodes and thus show that the intensity of the current deflection inside the cell can be considerably reduced by varying the electric potential in such a way as to limit the current fluctuations at the anodes, which allows to slow down the development of MHD instabilities.

Keywords: magnetohydrodynamics, waves, instabilities, linearization, numerical simulation, Saint-Venant, magnetostatics, electric current, aluminum reduction.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
Liste des tableaux	x
Liste des figures	xi
Liste des annexes	xiv
Liste des sigles	xv
NOTATION	xvi
DÉDICACE	xviii
REMERCIEMENTS	xix
AVANT-PROPOS	xx
CHAPITRE 1: INTRODUCTION: LA PHYSIQUE PRÉALABLE	1
1.1 Ondes et instabilités	1
1.1.1 Ondes de gravité à une surface libre	1
1.1.2 Modes propres et relation de dispersion	2
1.1.3 Instabilités	3
1.2 La magnétohydrodynamique en général	5
1.2.1 Interactions MHD	6
1.2.2 Équations de la MHD incompressible	6
1.2.3 Deux mécanismes en concurrence	8
1.2.4 Équations linéarisées de la MHD incompressible	9
1.2.5 Haut Reynolds magnétique	10
1.2.6 Bas Reynolds magnétique	11

1.2.7	Au sujet du champ électrique	13
1.3	Équations de Saint-Venant	15
1.3.1	Équations du mouvement à trois dimensions	15
1.3.2	La règle de Leibniz	16
1.3.3	Transport de l'interface et dérivée matérielle	17
1.3.4	Conservation de la masse	18
1.3.5	Pression hydrostatique	19
1.3.6	Frottement avec les parois horizontales	20
1.3.7	Transport de la quantité de mouvement	21
1.3.8	Linéarisation et équation d'onde	22
1.3.9	Autres forces	23
1.4	Synthèse	24

CHAPITRE 2: LA MHD DE LA CUVE D'ÉLECTROLYSE DE L'ALUMINIUM 25

2.1	La cuve d'électrolyse de l'aluminium	25
2.2	Historique du problème et connaissances établies	27
2.2.1	Le roulis de la nappe de métal	29
2.2.2	Les ondes sur les parois latérales	39
2.2.3	Les modèles analytiques d'ondes progressives	40
2.2.4	Mesures expérimentales	41
2.2.5	Modélisation numérique	42
2.2.6	Écoulement principal	43
2.2.7	Autres avenues	44
2.3	Quelques aspects physiques de la MHD de la cuve	45
2.3.1	Courant électrique	46
2.3.2	Champ magnétique	49
2.3.3	Force magnétique	50
2.3.4	Écoulement	52
2.3.5	Synthèse de la dynamique	52

CHAPITRE 3: MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR SIMULER LES INSTABILITÉS MHD 54

3.1	Introduction	55
-----	------------------------	----

3.2	Physical model	57
3.2.1	Mass and momentum transport	58
3.2.2	Magnetic force	58
3.2.3	Magnetic field evolution	59
3.2.4	Magnetic vector potential formulation	60
3.2.5	Scaling	62
3.2.6	Boundary conditions	63
3.3	Level set method	65
3.4	Discretization	68
3.4.1	Staggered grids	68
3.4.2	Finite volumes	68
3.4.3	Averaging and reconstruction	69
3.4.4	Projection	70
3.4.5	Time integration	70
3.4.6	Overall algorithm	71
3.5	Tests and results	71
3.5.1	Test 1: Single-fluid hydrodynamics. Homogeneous turbulence.	71
3.5.2	Test 2: Two-fluid hydrodynamics. Pure gravity modes.	74
3.5.3	Test 3: Single-fluid MHD. Diffusion along the magnetic field.	76
3.5.4	Test 4: Two-fluid MHD. Metal pad roll.	76
3.6	Conclusion	79
CHAPITRE 4: SIMULATION NUMÉRIQUE DES INSTABILITÉS MHD		81
4.1	Introduction	82
4.2	Physical model	83
4.2.1	Conservation equations	84
4.2.2	Magnetic potential formulation	85
4.2.3	Boundary conditions	85
4.3	Numerical method	86
4.3.1	Level set technique	86
4.3.2	Discretization	86
4.3.3	Magnetic potential	86
4.4	Results	87
4.4.1	Metal pad roll	87

4.4.2	Interfacial vortex instability	89
4.5	Conclusion	92
CHAPITRE 5 : INSTABILITÉ MHD DE ROTATION		94
5.1	Introduction	96
5.2	Idealized system and base state	97
5.2.1	Geometry and physical parameters	98
5.2.2	Base state	99
5.2.3	Boundary conditions	103
5.2.4	Diverted electric current	104
5.2.5	Magnetic field	106
5.3	Basic hydrodynamic model	107
5.3.1	Base state with solid rotation and flat interface	107
5.3.2	Evolution equations	108
5.3.3	Wave equation	108
5.3.4	Dispersion relation	109
5.3.5	Discussion	110
5.3.6	Comparison with the metal pad roll instability	111
5.4	Improved hydrodynamic model	114
5.4.1	Base state with viscous rotation and curved interface	114
5.4.2	Evolution equations	115
5.4.3	Wave equation	116
5.4.4	Numerical resolution of the wave equation	117
5.5	Physics of the instability	118
5.5.1	Energy flow	118
5.5.2	Instability scenarios	123
5.6	Discussion and concluding remarks	124
5.A	Contribution of the azimuthal field	126
5.B	Extension non axisymétrique	128
5.B.1	Équations de transport	128
5.B.2	Équation d'onde et solution	129
5.B.3	Relation de dispersion et quantification des modes	130
5.B.4	Résolution numérique et classification des solution	131
5.B.5	Le RNM modifié par la rotation	131

5.B.6	L'IMHDR non axisymétrique	132
5.B.7	Discussion	132

CHAPITRE 6: CONTRÔLE DU COURANT ÉLECTRIQUE AUX ANODES137

6.1	Introduction	139
6.2	A simple model for the cell	140
6.3	Wave equation	141
6.4	Current deflection	142
6.4.1	Boundary conditions	142
6.4.2	A simple intuitive model	144
6.4.3	General solution	145
6.4.4	Case A: no potential control	147
6.4.5	Case B: constant vertical current	148
6.4.6	Case C: completely eliminating the coupling between modes	150
6.4.7	Case D: discrete anodes	154
6.5	Modal analysis	155
6.6	Metal pad roll and discussion	157
6.7	Conclusion	160
6.A	Normalization of the gradient base	162
6.B	Raising the anodes	162
6.C	Structure of the coupling matrix	163

CHAPITRE 7: CONCLUSION 166

BIBLIOGRAPHIE 169

I.1	Évolution du flux magnétique	xxii
I.2	Signification du terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$	xxiv
I.3	Diffusion magnétique	xxv
II.1	Distribution d'équilibre du courant électrique	xxvi
II.2	Interface entre un bon et un mauvais conducteurs	xxvii

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Paramètres physiques de la cuve	28
3.1	Characteristic times	63
3.2	Non-dimensional numbers	64
5.1	Dominant modes for the metal pad roll in rectangular cells.	113
5.2	Possible instability scenarios.	124

LISTE DES FIGURES

1.1 Ondes dans une couche peu profonde	2
1.2 Ondes à l'interface de deux couches peu profondes	4
1.3 Interactions MHD générales	6
2.1 Cuve de Hall-Héroult moderne (coupe verticale)	26
2.2 Cuves de Hall-Héroult dans une salle de cuves	26
2.3 Déviation du courant électrique	30
2.4 Roulis de la nappe de métal selon Sele [69]	31
2.5 Cuve de Hall-Héroult idéalisée	34
2.6 Ondes sur les parois latérales	40
2.7 Interactions MHD dans la cuve	53
3.1 Vertical cut of a Hall-Héroult cell	56
3.2 Simplified geometry	57
3.3 Level set method	65
3.4 Smooth Heaviside function	66
3.5 Control volume	69
3.6 Finite-volume method (2D cut)	69
3.7 Algorithm dependencies	72
3.8 Hydrodynamic single-fluid turbulence: kinetic energy spectrum versus the normalized wavenumber	73
3.9 Hydrodynamic single-fluid turbulence: turbulent Reynolds number, in- tegral scale, and kinetic energy transfer rate	74
3.10 Pure gravity modes: dispersion relation	75
3.11 Single-fluid MHD: evolution of the momentum anisotropy versus time under a given external magnetic field	77
3.12 Metal pad roll: square cell	78
3.13 Metal pad roll: rectangular cell	79
4.1 Approximate vertical cut of an AP30 Hall-Héroult cell	83
4.2 Time series of the interface displacement at a point of the cell near the boundary	87

4.3	Combined growth rate of modes (1, 0) and (0, 1) as a function of the vertical background magnetic field.	88
4.4	Combined growth rate of modes (1, 0) and (0, 1) as a function of the metal depth H_1	89
4.5	Vertical cut of the current disturbance at the beginning of the interfacial vortex instability at the onset of instability.	90
4.6	Vertical cut of the interface at different times during the development of the interfacial vortex instability.	91
4.7	Evolution of the weighted average displacement of the interface versus the magnitude of the background magnetic field.	91
5.1	Definition sketch for the idealized cylindrical Hall–Héroult cell	99
5.2	Radial profiles of the normalized base-state angular velocity, azimuthal velocity and interface displacement	104
5.3	Comparison of the growth rate of rotational MHD instability (RMHDI) for different rotation	114
5.4	Effect of the viscous rotation profile with no base-state interface deformation	119
5.5	Effect of different base-state rotation velocities and of the incident base-state interface deformation	120
5.6	Effect of varying α continuously	121
5.7	Energy flow diagram	121
5.8	RNM sous rotation, $n = 1$	133
5.9	IMHDR oscillatoire non axisymétrique $n = 1$	134
5.10	IMHDR non oscillatoire non axisymétrique $n = 1$	135
5.11	IMHDR non oscillatoire axisymétrique ($n = 0$).	135
6.1	Diagram of our idealized Hall–Héroult cell	140
6.2	Simple model of the deflected current	144
6.3	Vertical cuts of the theoretical current deflection for case A	148
6.4	Average horizontal current deflection in the aluminum layer versus wave length for different values of s , in case A	149
6.5	Average horizontal current deflection in the aluminum layer versus bath depth for different values of s , in case A	150

6.6	Average horizontal current deflection in the aluminum layer versus wave length for different values of H_2 , in case A	151
6.7	Vertical cuts of the theoretical current deflection for case B	152
6.8	Average horizontal current deflection versus wave length, in case B	152
6.9	Average horizontal current deflection in the aluminum layer versus bath depth, in case B	153
6.10	Average horizontal current deflection in the aluminum layer versus wave length for different values of H_2 , in case B	153
6.11	Vertical cuts of the theoretical current deflection for case C	154
6.12	Map of the eigenmodes of a square-base cell	158
6.13	Analytic solutions of the growth rate as a function of bath depth for different values of N_0	160
6.14	Analytic solutions of the growth rate as a function of bath depth for different values of T_0	161
I.1	Illustration de $\partial\mathcal{V}$	xxii

LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Le flux magnétique dans un milieu en mouvement	xxii
Annexe II :	Un principe variationnel pour la distribution du courant électrique	xxvi

LISTE DES SIGLES

En français :

- 2D bidimensionnel
- 3D tridimensionnel
- MHD magnétohydrodynamique
- RNM roulis de la nappe de métal
- IMHDR instabilité MHD de rotation

En anglais :

- MPRI metal pad roll instability (RNM en français)
- RMHDI rotational MHD instability (IMHDR en français)

NOTATION

η	diffusivité magnétique ($= 1/\mu_0\sigma$)
g	accélération gravitationnelle
h	épaisseur d'une couche de fluide
H	dimension verticale du système
L_x, L_y	dimensions horizontales du système
μ_0	perméabilité magnétique
ν	viscosité dynamique
p	pression
ρ	densité de masse
σ	conductivité électrique
r, θ, z	coordonnées cylindriques
x, y, z	coordonnées cartésiennes
D/Dt	dérivée matérielle ($= \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$)
\mathcal{P}	opérateur de projection dans l'espace des champs à flux conservatif: $\mathcal{P}\{\mathbf{F}\} = \mathbf{F} - \nabla\nabla^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{F})$
\mathbf{A}	potentiel magnétique vectoriel
\mathbf{B}	champ magnétique
\mathbf{E}	champ électrique
\mathbf{J}	densité de courant électrique
\mathbf{u}	champ de vitesse
$\hat{\mathbf{n}}$	vecteur unitaire normal à une surface
$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}}$	vecteurs unitaires (coordonnées polaires)
$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$	vecteurs unitaires (coordonnées cartésiennes)

Dans les systèmes à deux couches, les quantités ayant trait à la couche du bas sont généralement marquées de l'indice 1, et d'un indice 2 pour la couche du haut.

Par souci de concision, on désigne par l'expression *champ magnétique* le champ d'induction magnétique ou densité de flux magnétique \mathbf{B} . Cela ne porte pas à confusion puisque nous considérons uniquement des matériaux non magnétiques, dont la perméabilité magnétique est toujours celle du vide μ_0 . On abrègera également par *courant électrique* la densité de courant électrique \mathbf{J} lorsque cela ne porte pas à confusion, et de la même façon, les densités de force.

À moins d'une indication contraire, l'opérateur gradient ∇ , dans les sections 1.3 et suivantes, est considéré être à deux dimensions dans le plan $x - y$: $\nabla \mapsto \nabla + \hat{z}\partial/\partial z$.

À la mémoire de mon
grand-père, Albert Munger.

REMERCIEMENTS

Cette recherche a fait l'objet d'une bourse du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie (CRSNG) du Canada, ainsi que d'une bourse de la Fondation J.-A. DeSève.

Je remercie mon épouse Binh An pour sa présence, sa patience, son soutien.

Je remercie mon directeur de recherche Alain Vincent pour avoir constamment alimenté et guidé mes réflexions par d'innombrables conversations, pour m'avoir toujours encouragé sur les voies que je choisissais d'emprunter, pour la passion que nous avons partagée, pour tous les dîners-discussions, pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui pendant plus de six ans depuis la maîtrise. Ça me manquera.

AVANT-PROPOS

Vingt-cinq tonnes de métal liquide soumises à d'intenses forces magnétiques, à des températures approchant les 1000 °C. Les mouvements spontanés de la nappe de métal s'amplifient au lieu de se dissiper. La cuve d'électrolyse de l'aluminium abrite d'étonnants phénomènes magnétohydrodynamiques (MHD).

Pour l'industrie de la production de l'aluminium primaire, les mouvements instables de la nappe de métal dans la cuve compromettent la stabilité et l'efficacité du procédé d'électrolyse. Le phénomène est complexe et étranger aux problèmes classiques de magnétohydrodynamique ; le physicien curieux y trouvera son compte. Plusieurs approches sont envisageables pour s'attaquer au problème. Résultats numériques à l'appui, nous favorisons dans cette thèse une démarche théorique, qui a l'avantage d'apporter une compréhension approfondie des mécanismes physiques et qui, d'ailleurs, a porté fruit. L'approche expérimentale demeure limitée : l'hostilité du milieu rend la prise de mesures très difficile, et il est impossible d'observer directement la surface de l'aluminium liquide recouverte d'une solution électrolytique opaque. La simulation numérique constitue donc une source de données utile, mais les modèles numériques existant à ce jour reposent sur d'importantes simplifications, aussi les résultats qu'ils produisent doivent-ils être considérés avec précaution.

Organisation de la thèse

À l'intention du lecteur non spécialiste, la physique préalable est synthétisée de façon ciblée au chapitre 1 : il y est question de propagation des ondes, de magnétohydrodynamique en général et de dynamique des couches de fluides peu profondes. La physique spécifique au problème des ondes d'interface dans les cuves d'électrolyse fait l'objet du chapitre 2, où sont également rapportées, puis commentées, les grandes lignes de la recherche menée sur le sujet au cours des dernières décennies. Les chapitres suivants sont principalement constitués de nos publications, parfois augmentés de résultats complémentaires plus récents.

Au chapitre 3, nous présentons une nouvelle version, améliorée, de la méthode numérique que nous avons développée au cours de la maîtrise pour simuler les phénomènes MHD dans les cuves d'électrolyse, et la soumettons à une série de tests originaux. Nous faisons état au chapitre 4 de simulations numériques, que nous avons effectuées au

moyen de cette méthode, qui révèlent notamment ce qui semble être une nouvelle instabilité d'interface liée à la rotation des fluides, que nous nommons par la suite *instabilité MHD de rotation* (IMHDR). Au chapitre 5, nous identifions formellement le mécanisme du développement de l'IMHDR et nous l'étudions au moyen de méthodes analytiques.

Dans un autre ordre d'idées, nous répondons au chapitre 6 à des questions soulevées par les conditions aux frontières électromagnétiques posées dans la méthode numérique présentée au chapitre 3. Nous y montrons qu'il est possible de limiter le développement des instabilités MHD en contrôlant l'intensité du courant électrique injecté dans la cuve.

Nous concluons au chapitre 7 en rappelant les principales contributions de la présente thèse à l'avancement de la recherche sur la stabilité MHD des cuves d'électrolyse.

C'est, à l'origine, le besoin d'augmenter l'efficacité du procédé d'électrolyse et de réduire les coûts de production qui a motivé l'étude des phénomènes MHD dans les cuves d'électrolyse. Ceux-ci soulèvent toutefois d'intéressantes questions de physique quant à leur dynamique inattendue, que nous abordons dans les pages qui suivent.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION : LA PHYSIQUE PRÉALABLE

Ce chapitre a pour but de présenter de manière ciblée et aussi intuitive que possible la théorie physique générale préalable aux analyses de stabilité magnétohydrodynamique des cuves d'électrolyse de l'aluminium présentées dans les chapitres suivants. Nous commençons par décrire les grandes lignes de la physique des ondes et de la magnétohydrodynamique. Puis, parce qu'elles sont utilisées fréquemment par la suite, nous dérivons les équations qui décrivent l'évolution de l'écoulement dans deux minces couches de fluides.

1.1 Ondes et instabilités

En physique, une onde résulte le plus souvent d'un mécanisme de restauration agissant sur une perturbation d'un milieu. Dans une onde acoustique, par exemple, un déplacement local des particules constituant le milieu engendre une fluctuation de pression qui s'oppose à ce déplacement. Dans le cas d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide, le milieu est perturbé par une fluctuation du champ magnétique, à laquelle s'oppose le champ induit par le courant de déplacement, lui-même causé par la variation initiale du champ magnétique selon la loi de Faraday. De la même façon, dans l'eau, la pression hydrostatique, correspondant au poids d'une colonne d'eau locale, s'oppose à des ondulations de la surface.

1.1.1 Ondes de gravité à une surface libre

Pour illustrer le cas de l'équilibre entre les déformations de la surface d'un liquide et la pression hydrostatique, considérons des ondes de gravité dans une couche peu profonde¹, c'est-à-dire dont les dimensions horizontales sont largement supérieures à sa profondeur, d'un fluide de densité ρ à l'air libre. La couche est sujette à une pression hydrostatique $p_0 + \rho g(H + \zeta)$, où p_0 est la pression à la surface (uniforme), g est l'accé-

¹La présente section se concentre sur la mécanique des ondes. Les aspects plus mathématiques, telle la linéarisation des équations du mouvement dans des couches peu profondes, seront abordés dans la section 1.3, où figure une dérivation complète d'une équation d'onde pour les couches peu profondes, et dans les sections suivantes où des équations d'ondes généralisées sont aussi dérivées.

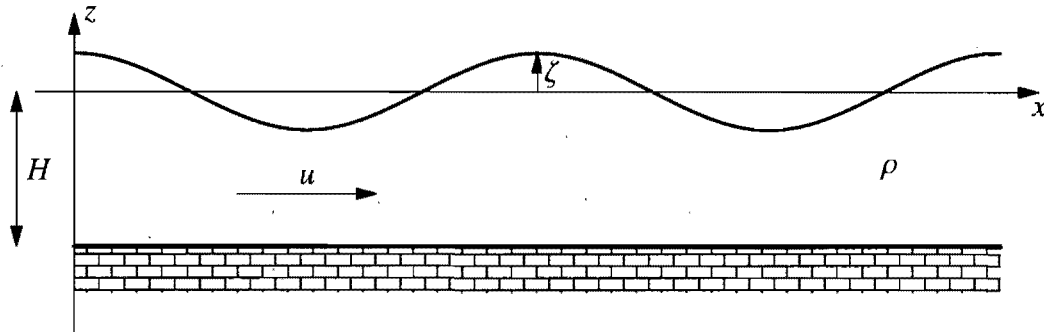


FIGURE 1.1: Ondes dans une couche peu profonde de fluide.

lération gravitationnelle, H est la profondeur moyenne de la couche et ζ est la variation locale de la hauteur de la surface (voir figure 1.1). L'accélération locale $\partial u / \partial t$, où u est la vitesse horizontale unidimensionnelle, est donnée, pour des ondes de faible amplitude, simplement par le gradient de pression :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.1 a)$$

Une augmentation de l'épaisseur locale de la couche est causée par une accumulation locale de fluide, donc par un flux de masse négatif :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.1 b)$$

toujours pour des ondes de faible amplitude. Une équation d'onde est facilement obtenue en substituant (1.1 a) dans la dérivée temporelle de (1.1 b) :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

Elle admet des solutions sinusoïdales de la forme $\zeta = A \exp[ik(x \pm c_g t)]$, où k est le nombre d'onde (arbitraire), $c_g = \sqrt{gH}$ est la vitesse d'une onde de gravité dans une couche peu profonde [45] et $A \ll H$ est l'amplitude de l'onde.

1.1.2 Modes propres et relation de dispersion

Les propriétés ondulatoires d'un système tiennent autant à sa géométrie qu'à la nature du milieu et des forces en influence. D'un point de vue mathématique, ce sont les

conditions aux frontières qui déterminent la forme des modes d'ondulation admis par le système et qui les quantifient. Pour l'illustrer, considérons encore les ondes de gravité décrites par (1.2), mais contenues dans un bassin de longueur $L \gg H$. Le système étant fermé, les ondes sont stationnaires plutôt que progressives. Les parois latérales du bassin sont imperméables au fluide, d'où les conditions aux frontières suivantes :

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0.$$

On trouve la condition analogue sur ζ en utilisant (1.1 a) :

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

Cela contraint la longueur d'onde, laissant comme seules solutions admissibles celles de la forme $\zeta = A \cos(\omega_n t) \cos(k_n x)$, en supposant que l'amplitude est maximale à $t = 0$, où le nombre d'onde satisfait $k_n = n\pi x/L$ pour $n = 1, 2, \dots$, et sa pulsation est donnée par :

$$\omega_n = c_g k_n. \quad (1.3)$$

Chaque valeur de n correspond à un mode propre d'oscillation différent, et la relation de dispersion (1.3) indique comment chacun se comporte. Si on introduit une perturbation de forme arbitraire dans le système (de faible amplitude), chaque mode propre la composant évolue indépendamment. Ce résultat découle du fait que l'équation (1.2) est linéaire. Ce ne serait plus le cas pour des perturbations de grande amplitude.

La relation de dispersion (1.3) est très simple, puisque, pour l'exemple des ondes de gravité dans une couche peu profonde, la vitesse de phase c_g ne dépend pas de la longueur d'onde $2\pi/k_n$ ou de la pulsation ω_n . Dans des cas plus compliqués, comme ceux qui figurent dans les sections suivantes, les solutions auront des pulsations complexes. La partie imaginaire de la pulsation est associée à une croissance exponentielle d'un mode. Les modes décroissants seront considérés comme stables et les autres, comme instables. L'exemple qui suit illustre comment une onde peut devenir instable.

1.1.3 Instabilités

Considérons à nouveau des ondes de gravité de faible amplitude, mais, cette fois-ci, à l'interface entre deux couches peu profondes (voir figure 1.2) de profondeurs moyennes

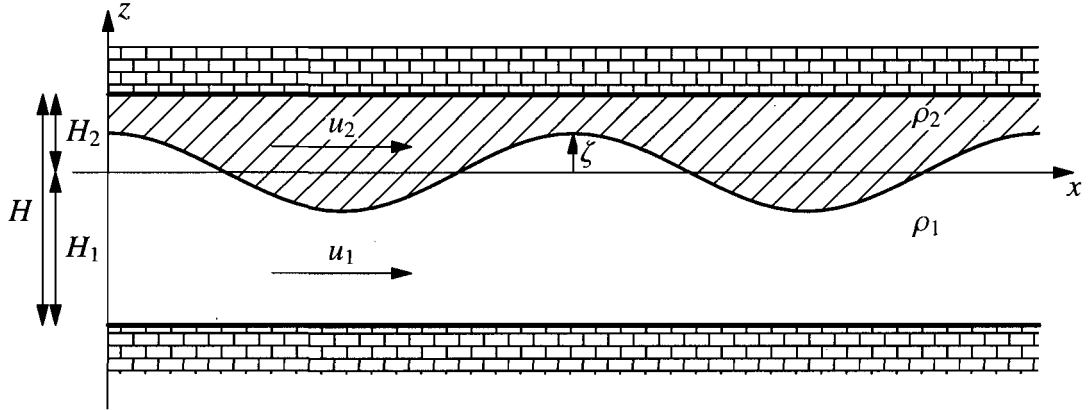


FIGURE 1.2: Ondes à l'interface de deux couches peu profondes de fluide.

H_1 et H_2 et de densités voisines $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = \rho - \Delta\rho$, avec $|\Delta\rho| \ll \rho$. Nous allons démontrer que la stratification est stable si $\Delta\rho > 0$ et instable si $\Delta\rho < 0$. L'équation (1.1 a) devient :

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} - \rho_1 g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.4 a)$$

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} - \rho_2 g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.4 b)$$

où p_0 est la pression à l'interface entre les deux couches. En l'absence d'une deuxième couche, soit à l'air libre, p_0 est uniforme, d'où l'absence du gradient horizontal de p_0 dans (1.1 a). La conservation de la masse (1.1 b) se réécrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad (1.4 c)$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (1.4 d)$$

La différence de signe entre le membre gauche de (1.4 c) et celui de (1.4 d) est due au fait que l'épaisseur de la couche 1 augmente avec ζ alors que celle de la couche 2 diminue d'autant. Les équations (1.4 c) et (1.4 d) impliquent que $u_2 = -(H_1/H_2)u_1$ à une constante près qui correspondrait à un écoulement moyen, qu'on ne considère toutefois pas ici. Ce résultat permet d'éliminer u_2 dans (1.4 b), qu'on soustrait ensuite de (1.4 a)

afin d'éliminer p_0 , pour trouver :

$$\frac{\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\Delta \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Ensuite, on suit la même démarche que pour dériver (1.2) pour obtenir une nouvelle équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\Delta \rho g H_1 H_2}{\rho H} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

où on a simplifié le coefficient de $\partial^2 \zeta / \partial x^2$ en utilisant $\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1 \approx \rho(H_1 + H_2)$ car $|\Delta \rho| \ll \rho$. Il s'agit de l'approximation de Boussinesq [9, 11]. Si $\Delta \rho > 0$, (1.5) admet des solutions de la forme $\zeta = A \exp[ik(x \pm c_g t)]$, où $c_g = \sqrt{|\Delta \rho| g H_1 H_2 / \rho H}$, analogues à celles de (1.2). Ces solutions, soit des ondes de gravité à l'interface entre deux fluides, sont stables, car $|\zeta|$ ne croît pas avec le temps. Si, par contre, $\Delta \rho < 0$, (1.5) admet plutôt des solutions de la forme $\zeta = A \exp(\pm k c_g t) \exp(ikx)$. Les solutions avec le signe positif dans la première exponentielle correspondent à des perturbations sinusoïdales selon la coordonnée spatiale, telles des ondes, mais croissant exponentiellement dans le temps au lieu de se propager, dans le cas d'ondes progressives, ou d'osciller, dans le cas d'ondes stationnaires. Pour que le système soit stable, autrement dit pour qu'il n'admette pas de solutions instables, il faut que le critère de stabilité $\Delta \rho > 0$ soit satisfait. Il s'agit d'une variante des instabilités de Rayleigh–Taylor [24] adaptée aux couches peu profondes. Notons que ce résultat est tout à fait intuitif : le fluide du haut, de densité supérieure, veut couler dans le fluide du bas et aucun mécanisme ne s'y oppose, du moins tant que la perturbation est de suffisamment faible amplitude.

Les ondes et instabilités que nous étudions dans les prochains chapitres se produisent aussi à l'interface entre deux fluides de densités voisines : de l'aluminium liquide et un bain électrolytique. À la différence des instabilités de Rayleigh–Taylor, la source de déstabilisation n'est plus la stratification instable mais la force magnétique. La prochaine section aborde quelques principes élémentaires de la magnétohydrodynamique.

1.2 La magnétohydrodynamique en général

Les écoulements magnétohydrodynamiques (MHD) des métaux liquides à l'échelle du laboratoire évoluent dans des régimes bien distincts des écoulements astrophysiques et géophysiques, principalement en raison des échelles impliquées. Cette section vise à

situer les régimes MHD caractéristiques aux métaux liquides à l'échelle humaine par rapport à la MHD en général et aux régimes plutôt astrophysiques.

1.2.1 Interactions MHD

Le mouvement d'un fluide dans un champ magnétique induit, d'après la loi d'induction de Faraday (ou la loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement), un courant électrique, aussi alimenté par le champ électrique local. Ce courant électrique altère à son tour le champ magnétique, selon la loi d'Ampère. En retour, l'interaction entre le courant et le champ magnétique génère une force magnétique (de Lorentz) sur le fluide. Parallèlement, les variations du champ magnétique influent sur le champ électrique local d'après la loi de Faraday. La figure 1.3 résume ce tissu d'interactions MHD.

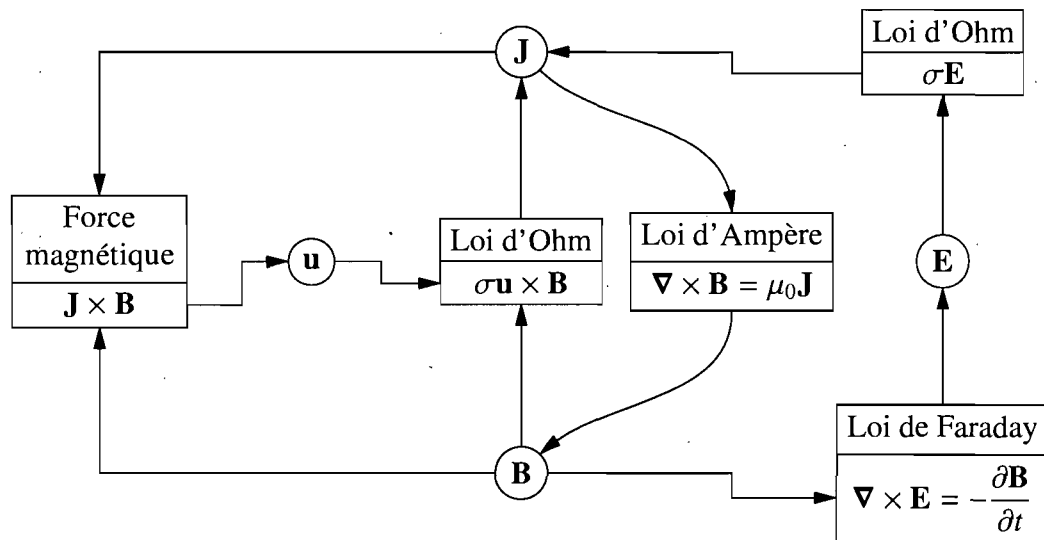


FIGURE 1.3: Schéma des interactions MHD générales entre le courant électrique \mathbf{J} , le champ magnétique \mathbf{B} et l'écoulement \mathbf{u} .

1.2.2 Équations de la MHD incompressible

Heureusement, malgré la complexité des interactions MHD, il est possible de dériver un système relativement simple d'équations de la MHD [16], décrivant l'évolution du champ de vitesse \mathbf{u} et du champ magnétique \mathbf{B} . Il s'agit d'éliminer le champ électrique \mathbf{E} dans la loi de Faraday $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ avec la loi d'Ohm $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, où \mathbf{J} est la densité de courant électrique et σ est la conductivité électrique, puis d'éliminer \mathbf{J} avec

la loi d'Ampère $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique (celle du vide pour les milieux non magnétiques). L'absence du terme du courant de déplacement dans la loi d'Ampère est justifié par le temps de relaxation de la charge électrique typiquement très court dans un conducteur ; il s'agit de l'approximation MHD². La dérivation est directe et aboutit à (1.6 *d*) dans le système suivant :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.6 a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.6 b)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.6 c)$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.6 d)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (1.6 e)$$

où $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée matérielle ou lagrangienne, c'est-à-dire le taux de variation que mesurerait un observateur attaché à un point matériel se déplaçant avec l'écoulement. La conservation de la masse et celle du flux magnétique sont décrites respectivement par la condition d'incompressibilité (1.6 *a*) et par (1.6 *b*). Dans l'équation de Navier–Stokes (1.6 *c*), qui décrit le transport de la quantité de mouvement, p est la pression, ρ est la densité de masse, \mathbf{f} représente les forces externes (force gravitationnelle ou force de Coriolis, par exemple) par unité de volume et ν est la viscosité cinématique. Les termes du membre droit correspondent dans l'ordre aux accélérations dues aux contraintes normales (pression), aux forces externes, à la force magnétique puis aux contraintes visqueuses. Le transport du champ magnétique est décrit par (1.6 *d*), où $\eta = 1/\mu_0 \sigma$ est la diffusivité magnétique. Le dernier terme du membre droit correspond ainsi à la diffusion du champ magnétique par effet Joule. Le sens physique du premier terme est moins évident ; il rend compte de la déformation des tubes de flux magnétique

²L'approximation MHD est très bien expliquée par Davidson [16], pp. 29–32. L'auteur observe, dans un premier temps, que la charge électrique se redistribue sur une échelle de temps $\varepsilon_0/\sigma \sim 10^{-18}$ s dans un conducteur typique, où ε_0 est la permittivité du vide. Il s'agit d'une échelle de temps très courte en comparaison avec celles des phénomènes magnétiques et hydrodynamiques qui nous intéressent. Cela nous permet de négliger le courant de déplacement $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, manifestation de la redistribution de la charge, dans la loi d'Ampère, soit la correction faite par Maxwell pour satisfaire la conservation de la charge. Dans un deuxième temps, l'auteur observe que l'accumulation de la charge attribuable au champ induit par les mouvements des fluides est trop faible pour donner lieu à une force électrique perceptible, donc seule la force magnétique est importante.

par l'écoulement (voir l'explication à l'annexe I).

Remarquons que (1.6 *d*) conserve le flux de \mathbf{B} . Ainsi, pour résoudre les équations de la MHD incompressible (1.6 *a–e*), il n'est théoriquement³ nécessaire d'appliquer (1.6 *b*) qu'aux conditions initiales. Ce n'est pas le cas pour \mathbf{u} dans (1.6 *c*), où la condition d'incompressibilité (1.6 *a*) est essentielle pour déterminer la pression.

La force magnétique $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ comprend une composante irrotationnelle qui peut être compensée par un gradient de pression, et une autre composante, à flux conservatif, qu'on notera $\mathcal{P}\{\mathbf{J} \times \mathbf{B}\}$. L'opérateur linéaire \mathcal{P} projette un champ vectoriel arbitraire dans l'espace des champs à flux conservatif : $\mathcal{P}\{\mathbf{F}\} = \mathbf{F} - \nabla\nabla^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{F})$, où l'opérateur ∇^{-2} symbolise l'inversion du laplacien ∇^2 . On peut vérifier que $\nabla \cdot \mathcal{P}\{\mathbf{F}\} = 0$ et que $\nabla \times \mathcal{P}\{\mathbf{F}\} = \nabla \times \mathbf{F}$, donc d'après le théorème de Helmholtz [83], la projection est unique. En général, la pression hydrodynamique compense la composante irrotationnelle de la force magnétique, et alors seule sa projection est pertinente.

1.2.3 Deux mécanismes en concurrence

Le dernier terme de (1.6 *d*) correspond à la diffusion du champ magnétique. Elle s'effectue d'autant plus vite que le milieu est un mauvais conducteur. Elle transforme l'énergie électromagnétique en chaleur par effet Joule et tend à uniformiser le champ magnétique. On peut estimer, par analyse dimensionnelle, l'échelle de temps sur laquelle le champ magnétique diffuse sur une distance caractéristique L : $|\partial\mathbf{B}/\partial t| \sim |\eta\mathbf{B}/L^2|$, ce qui permet de définir le *temps de diffusion magnétique* $L^2/\eta = \mu_0\sigma L^2$.

En concurrence directe avec ce phénomène, l'écoulement transporte et déforme le champ magnétique sur une même distance caractéristique L pendant un temps, dit d'advection, de l'ordre de L/U , où U est une vitesse caractéristique de l'écoulement. Il s'agit de l'influence du premier terme du membre droit de (1.6 *d*).

La rapport entre le temps de diffusion magnétique et le temps d'advection donne un nombre sans dimension nommé *nombre de Reynolds magnétique* :

$$Rm = \frac{\text{temps de diffusion magnétique}}{\text{temps d'advection}} = \mu_0\sigma UL.$$

Remarquons que ce nombre ne dépend pas du champ magnétique imposé.

³Une résolution numérique peut nécessiter l'application explicite de (1.6 *b*). Cela fait l'objet du chapitre 4.

1.2.4 Équations linéarisées de la MHD incompressible

Dans les sections qui suivent, nous étudierons des phénomènes MHD à partir d'écoulements de faible amplitude immergés dans un champ magnétique imposé uniforme, que l'on choisit orienté en z sans perte de généralité. On écrira le champ magnétique $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}$, où \mathbf{b} est une perturbation du champ magnétique de faible amplitude associée à l'écoulement \mathbf{u} . On définit également $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b} / \mu_0$ comme le courant induisant \mathbf{b} . Le système d'équations (1.6 a-e) linéarisé en \mathbf{u} , en \mathbf{b} et en \mathbf{j} , sans forces externes ni forces visqueuses, se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.7 a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (1.7 b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times (B_0 \hat{\mathbf{z}}) \quad (1.7 c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (1.7 d)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b}. \quad (1.7 e)$$

Puisque la pression $p = \nabla^{-2} \nabla \cdot (\mathbf{j} \times B_0 \hat{\mathbf{z}})$ compense la composante irrotationnelle de la force magnétique, (1.7 c) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \mathcal{P} \{ \mathbf{j} \times (B_0 \hat{\mathbf{z}}) \}.$$

On peut ensuite développer la projection de la force magnétique comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \{ \mathbf{j} \times (B_0 \hat{\mathbf{z}}) \} &= B_0 \mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}} - B_0 \nabla^{-2} \nabla [\nabla \cdot (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}})] \\ &= B_0 \mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}} - B_0 \nabla^{-2} \left\{ \nabla^2 (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{z}})] \right\} \\ &= -B_0 \frac{\partial}{\partial z} \nabla^{-2} \nabla \times \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

pour trouver :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{B_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^{-2} \nabla \times \mathbf{j}. \quad (1.9)$$

On utilisera ce résultat dans les sections 1.2.5 et 1.2.6.

1.2.5 Haut Reynolds magnétique

Lorsque l'advection agit beaucoup plus rapidement que la diffusion ($Rm \gg 1$), le dernier terme de (1.6d) devient négligeable. Il en résulte que le flux magnétique est conservé (voir annexe I), ou autrement dit, les lignes de champ sont gelées dans le fluide. Cela se produit, par exemple, dans le cas du vent solaire, où le Reynolds magnétique est très grand [85] en raison des grandes échelles impliquées et de l'excellente conductivité du plasma, et dans le cas du noyau terrestre externe de fer liquide, où le Reynolds magnétique est assez grand ($Rm \sim 10^2$) [16].

Pour comprendre l'interaction entre le champ magnétique et l'écoulement, récrivons la force magnétique :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right).$$

Le dernier terme, nommé *pression magnétique*, peut être équilibré par un gradient de pression opposé lorsque la pression hydrodynamique et la pression magnétique partagent les mêmes conditions aux frontières, et alors il n'en résulte pas de force nette sur le fluide. Nous examinerons donc le terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}/\mu_0$, du point de vue des lignes de champ magnétique [16, pp. 98–100] :

$$B \frac{d}{ds} \left(\frac{B}{\mu_0} \hat{\mathbf{s}} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{\mathbf{s}} + \frac{B^2}{\mu_0 R} \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.10)$$

où s est une coordonnée spatiale le long d'une ligne de champ magnétique, $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{B}/B$ est le vecteur unitaire associé, et $\hat{\mathbf{n}} = (1/R) d\hat{\mathbf{s}}/ds$ est un vecteur unitaire normal à la ligne de champ pointant vers son centre de courbure, situé à un rayon $R = \|d\hat{\mathbf{s}}/ds\|$. Les deux composantes de (1.10) sont appelées *tensions de Faraday*. D'après (1.10), la force magnétique a toujours une composante en direction du centre de courbure. Puisque les lignes de champ sont gelées dans le fluide à haut Rm , l'accélération du fluide en direction du centre de courbure a pour effet de redresser les lignes de champ. Il en résulte un très fort couplage entre le fluide et le champ magnétique. Il s'agit aussi du mécanisme à l'origine des ondes dites d'Alfvén [16, pp. 160–163] : les lignes de champ sont déformées par l'écoulement tandis que la force magnétique agit comme force restauratrice. La dynamique est dominée par les échanges entre l'énergie mécanique et l'énergie magnétique.

Nous allons dériver ici une forme simplifiée des ondes d'Alfvén en tant que perturbations dans un champ magnétique uniforme⁴. Commençons par substituer (1.7 e) dans (1.9):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho \mu_0} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}, \quad (1.11)$$

puis substituons ce résultat dans la dérivée temporelle de (1.7 d), en négligeant le terme de diffusion magnétique puisque $Rm \gg 1$, pour éliminer \mathbf{u} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2}.$$

Cette équation d'onde admet des solutions de la forme :

$$\mathbf{b} = B_0 \frac{\mathbf{u}}{c_A}$$

$$\mathbf{u} = u_0 \exp[ik(z \pm c_A t)],$$

où u_0 est l'amplitude arbitraire du champ de vitesse et $c_A = B_0 / \sqrt{\rho \mu_0}$ est la vitesse, dite d'Alfvén, de propagation de ces ondes. La relation entre la perturbation du champ magnétique \mathbf{b} et le champ de vitesse \mathbf{u} est déduite de (1.11). Ainsi, par exemple, un champ de vitesse transversal crée une perturbation transversale des lignes de champ, et cette perturbation se propage le long des lignes de champ.

1.2.6 Bas Reynolds magnétique

À l'opposé, lorsque la diffusion magnétique est relativement rapide devant l'écoulement ($Rm \ll 1$), le dernier terme de (1.6 d) domine et alors le champ magnétique relaxe très vite vers une configuration non diffusive (satisfaisant $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$), soit uniforme ou linéaire selon les conditions aux frontières ou le champ imposé.

D'un autre point de vue, un écoulement de vitesse caractéristique U dans un champ magnétique imposé d'intensité de l'ordre de B_0 génère des courants électriques de l'ordre de $\sigma U B_0$. Le champ magnétique induit par ces courants est donc de l'ordre de $\mu_0 \sigma U L B_0 = Rm B_0$. À bas nombre de Reynolds magnétique, ce champ induit est négligeable devant le champ imposé, donc on considérera le champ magnétique constant.

⁴Une dérivation plus générale, pour une viscosité et une diffusivité magnétique non nulles, est donnée par Davidson [16].

Selon les deux points de vue, il semble raisonnable, lorsque $Rm \ll 1$, de considérer que le champ magnétique est constant et égal au champ imposé. Il s'agit de l'*approximation magnétostatique*. Pour simplifier l'analyse qui suit, on supposera que le champ imposé est uniforme : $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Dans ce cas, la force magnétique ne joue plus un rôle de force restauratrice, mais s'avère dissipative, convertissant l'énergie mécanique en chaleur par effet Joule en un temps caractéristique $\rho/\sigma B_0^2$, dit *temps d'amortissement magnétique*. Pour le voir, examinons le comportement de la force magnétique à bas Reynolds magnétique.

La force magnétique n'est pas, en général, à divergence nulle. Un gradient de pression s'installe pour en compenser la composante irrotationnelle, c'est pourquoi on résout ici (1.9). Puisque le champ magnétique est constant, on utilise $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ pour développer davantage la projection de la force magnétique (1.8) :

$$\begin{aligned} -B_0 \frac{\partial}{\partial z} \nabla^{-2} \nabla \times \mathbf{j} &= -\sigma B_0 \nabla^{-2} \frac{\partial}{\partial z} [B_0 \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}) + \nabla \times \mathbf{E}] \\ &= -\sigma B_0^2 \nabla^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Avec ce résultat, (1.9) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} \nabla^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2},$$

qu'on peut résoudre en introduisant une perturbation de faible amplitude de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. En remarquant que $\nabla^{-2}(\partial^2 \mathbf{u}/\partial z^2) = (k_z^2/k^2)\mathbf{u}$, on trouve finalement :

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_0 \exp\left(-\cos^2 \theta \frac{\sigma B_0^2 t}{\rho}\right),$$

où θ est l'angle du nombre d'onde \mathbf{k} par rapport au champ magnétique (ici selon l'axe z). Ce résultat, d'abord obtenu par Sommeria & Moreau [75], révèle le rôle que joue la force magnétique à bas nombre de Reynolds magnétique. Il montre que les perturbations dont le nombre d'onde est aligné avec le champ magnétique se dissipent en un temps caractéristique $\rho/\sigma B_0^2$, alors que celles dont le nombre est perpendiculaire au champ magnétique sont conservées. Autrement dit, la quantité de mouvement diffuse le long des lignes de champ magnétique.

Pour les systèmes de métaux liquides dans les expériences en laboratoire et dans la

plupart des procédés industriels, on a typiquement $L \sim 20$ cm, $U \sim 1$ cm/s – 1 m/s et $\sigma \sim 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui correspond à des temps d'advection de 0,2 – 20 s et de diffusion de 0,05 s, alors $Rm \sim 0,0025 - 0,25$, ce qui est raisonnablement petit.

Le fait que l'écoulement ne modifie pas le champ magnétique permet certaines applications. En voici deux communes.

Pompage MHD. On utilise des champs électrique et magnétique statiques et mutuellement perpendiculaires pour pomper un fluide conducteur dans une conduite elle-même perpendiculaire au plan des deux champs. Des configurations de champs électrique et magnétique plus complexes peuvent également permettre d'entretenir le brassage d'un liquide conducteur dans un bassin.

Génératrice MHD ou amortissement. On peut utiliser l'effet inverse du pompage : un écoulement dans un champ magnétique statique provoque un courant électrique transversal, du moins si le circuit électrique est bouclé à l'extérieur de la conduite. Cela peut servir à convertir l'énergie cinétique en énergie électrique (génératrice MHD) ou à stabiliser un procédé grâce à la dissipation de l'énergie par effet Joule (amortissement de l'écoulement).

On verra au chapitre 2 que, dans le cas de la cuve d'électrolyse de l'aluminium, ce ne sont pas les mécanismes décrits jusqu'ici qui dominent la dynamique de l'écoulement. Les mouvement de l'interface entre deux fluides de conductivités différentes modifient la résistance locale des couches de fluides, causant ainsi des déviations du courant d'électrolyse plus importantes que les courants induits.

1.2.7 Au sujet du champ électrique

Dans les équations de la MHD (1.6 a-e), le champ électrique a été éliminé et seuls le champ magnétique et le courant y figurent. Nous souhaitons clarifier ici le rôle que joue le champ électrique au sein des interactions MHD. Les composantes potentielle $\mathbf{E}_P = -\nabla V$ et à flux conservatif \mathbf{E}_R du champ électrique, telles que $\nabla \times \mathbf{E}_P = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{E}_R = 0$, remplissent des fonctions différentes.

Le potentiel électrique V s'ajuste passivement pour assurer la conservation de la charge $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ en tout temps, de la même façon que la pression s'ajuste pour assurer

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans un écoulement incompressible. Formellement, avec la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \nabla V + \mathbf{E}_R),$$

on obtient :

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Rappelons que si le potentiel électrique semble s'ajuster instantanément, c'est parce que la charge électrique, de laquelle origine la partie potentielle du champ électrique, se redistribue très rapidement dans le contexte de l'approximation MHD. Cela se produit indépendamment du nombre de Reynolds magnétique.

La composante à flux conservatif, elle, s'oppose activement aux courants induits à travers la loi de Faraday :

$$\nabla \times \mathbf{E}_R = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E}_R = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

Procédons à une analyse dimensionnelle en choisissant U , L , L/U , J et B comme échelles de vitesse, de longueur, de temps, de courant et de champ magnétique, respectivement. Sous forme non dimensionnelle, la loi d'Ohm peut s'écrire ainsi :

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma U B}{J} \mathcal{P}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + Rm \nabla^{-2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

À haut Reynolds magnétique, le champ magnétique est principalement dû aux courants induits : $B \sim \mu_0 J L$, alors on trouve

$$\frac{1}{Rm} \mathbf{J} = \mathcal{P}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^{-2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

Le membre droit de cette équation doit donc demeurer petit. Cela implique que le second terme, qui rend compte de l'effet de la composante à flux conservatif du champ électrique, compense en majeure partie le premier, correspondant aux courants induits, ne laissant qu'une différence de l'ordre de $1/Rm$. Donc, à haut Reynolds magnétique, le champ \mathbf{E}_R s'oppose efficacement aux courants induits. Dans le cas opposé, à bas Reynolds magnétique, les courants induits sont principalement dus au champ imposé :

$J \sim \sigma UB$. On trouve alors :

$$\mathbf{J} = \mathcal{P} \{ \mathbf{u} \times \mathbf{B} \} + Rm \nabla^{-2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

Ici, c'est la contribution du dernier terme qui demeure petite. C'est-à-dire que le champ électrique n'arrive pas à compenser les courants induits à bas Reynolds magnétique.

1.3 Équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant [68] ou équations en eaux peu profondes (*shallow-water equations* en anglais) décrivent l'écoulement dans une couche peu profonde d'un fluide incompressible avec une surface libre. Elles constituent une approximation des équations de Navier–Stokes (1.6 a,c) pour le champ de vitesse horizontale dans le cas où la pression est hydrostatique, c'est-à-dire principalement due au poids de la colonne locale de fluide. Ce sera le cas pour des ondes longues, c'est-à-dire $kH \ll 1$ où k est un nombre d'onde et H est la profondeur de la couche. Il existe plusieurs types de dérivations des équations de Saint-Venant. Elles peuvent être obtenues par perturbation des équations de Navier–Stokes (1.6 a,c) avec kH comme petit paramètre [76]. Elles peuvent aussi être obtenues par des arguments physiques en considérant que les colonnes verticales d'eau se déplacent en bloc [23]. On utilisera ici plutôt une approche par moyenne verticale de (1.6 a,c) [84] dans chacune des deux couches représentées dans la figure 1.2, bornées inférieurement (en $z = -H_1$) et supérieurement (en $z = H_2$) par des surfaces rigides. La discussion qui suit est plutôt technique, car elle constitue une dérivation mathématique des équations du mouvement à deux dimensions dans un système à deux couches peu profondes, comme la cuve d'électrolyse de l'aluminium.

1.3.1 Équations du mouvement à trois dimensions

À partir d'ici, on considère que les quantités physiques vectorielles (\mathbf{x} , \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2) et l'opérateur vectoriel ∇ sont à deux dimensions, soit en x et en y . On désignera la vitesse verticale par $w(\mathbf{x}, t)$ à l'interface ($z = \zeta$), et par $w_1(\mathbf{x}, z, t)$ et $w_2(\mathbf{x}, z, t)$ dans chacune des deux couches. Ainsi, $w_1|_{z=-H_1} = w_2|_{z=H_2} = 0$ et $w_1|_{z=\zeta} = w_2|_{z=\zeta} = w$.

Récrivons (1.6 a,c) en terme de nos quantités et opérateurs horizontaux, en prenant seulement la gravité comme force externe (nous traiterons la force magnétique plus

tard) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad (1.13 a)$$

$$\rho_i \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i) + \frac{\partial (\mathbf{u}_i w_i)}{\partial z} \right] = -\nabla p_i + \rho_i \nu_i \left(\nabla^2 \mathbf{u}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial z^2} \right) \quad (1.13 b)$$

$$\rho_i \left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i w_i) + \frac{\partial w_i^2}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i g + \rho_i \nu_i \left(\nabla^2 w_i + \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} \right), \quad (1.13 c)$$

pour $i = 1, 2$.

1.3.2 La règle de Leibniz

Nous utiliserons la règle de Leibniz qui, pour $\phi(\mathbf{x}, z)$, $a(\mathbf{x})$ et $b(\mathbf{x})$, peut être formulée ainsi :

$$\int_a^b \nabla \phi \, dz = \nabla [(b-a) \langle \phi \rangle] - \phi|_{z=b} \nabla b + \phi|_{z=a} \nabla a,$$

où :

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \, dz$$

est la moyenne verticale de ϕ sur une couche s'étendant de $z = a$ à $z = b$. Dans la couche 1, s'étendant de $z = -H_1$ à $z = \zeta$, on aura :

$$\int_{-H_1}^{\zeta} \nabla \phi \, dz = \nabla [(H_1 + \zeta) \langle \phi \rangle_1] - \phi|_{z=\zeta} \nabla \zeta \quad (1.14 a)$$

où :

$$\langle \phi \rangle_1 = \frac{1}{H_1 + \zeta} \int_{-H_1}^{\zeta} \phi \, dz.$$

Dans la couche 2, s'étendant de $z = \zeta$ à $z = H_2$, on a plutôt :

$$\int_{\zeta}^{H_2} \nabla \phi \, dz = \nabla [(H_2 - \zeta) \langle \phi \rangle_2] + \phi|_{z=\zeta} \nabla \zeta, \quad (1.14 b)$$

où :

$$\langle \phi \rangle_2 = \frac{1}{H_2 - \zeta} \int_{\zeta}^{H_2} \phi \, dz.$$

1.3.3 Transport de l'interface et dérivée matérielle

L'interface entre les deux couches peut être décrite comme la surface de niveau zéro de la fonction $Z = z - \zeta$. Puisque l'interface est transportée passivement par l'écoulement, on peut écrire que la dérivée matérielle de Z est nulle à l'interface :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + (\mathbf{u}_i|_{z=\zeta} \cdot \nabla)Z + w \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \mathbf{u}_i|_{z=\zeta} \cdot \nabla \zeta + w = 0$$

et alors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u}_i|_{z=\zeta} \cdot \nabla \zeta = w, \quad (1.15)$$

pour $i = 1, 2$. Cela signifie qu'un observateur se déplaçant avec l'écoulement horizontal verrait la hauteur de l'interface variant à un taux égal à la vitesse verticale à l'interface.

Intégrons verticalement la dérivée matérielle d'une quantité quelconque ϕ dans la couche inférieure :

$$\int_{-H_1}^{\zeta} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \phi) + \frac{\partial (w_1 \phi)}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} [(H_1 + \zeta) \langle \phi \rangle_1] + \nabla \cdot [(H_1 + \zeta) \langle \mathbf{u}_1 \phi \rangle_1] - \phi|_{z=\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u}_i|_{z=\zeta} \cdot \nabla \zeta - w \right),$$

et en utilisant (1.15) :

$$\int_{-H_1}^{\zeta} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \phi) + \frac{\partial (w_1 \phi)}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} [(H_1 + \zeta) \langle \phi \rangle_1] + \nabla \cdot [(H_1 + \zeta) \langle \mathbf{u}_1 \phi \rangle_1]. \quad (1.16 a)$$

En procédant de la même façon dans la couche supérieure, on trouve :

$$\int_{\zeta}^{H_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_2 \phi) + \frac{\partial (w_2 \phi)}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} [(H_2 - \zeta) \langle \phi \rangle_2] + \nabla \cdot [(H_2 - \zeta) \langle \mathbf{u}_2 \phi \rangle_2]. \quad (1.16 b)$$

1.3.4 Conservation de la masse

Pour évaluer l'intégrale verticale de l'équation de conservation de la masse (1.13 a), il suffit de substituer $\phi = 1$ dans (1.16 a,b) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(H_1 + \zeta) \langle \mathbf{u} \rangle_1] = 0 \quad (1.17 a)$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(H_2 - \zeta) \langle \mathbf{u} \rangle_2] = 0. \quad (1.17 b)$$

Ces équations indiquent que les variations de la hauteur de l'interface sont dues à des flux de masse dans les colonnes locales de fluides dans les deux couches.

On peut, avec ces derniers résultats, simplifier les membres droits de la dérivée matérielle (1.16 a,b) :

$$(H_1 + \zeta) \left[\frac{\partial \langle \phi \rangle_1}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{u} \rangle_1 \cdot \nabla \rangle \langle \phi \rangle_1 \right] + \langle \phi \rangle_1 \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle_1 \cdot \nabla \zeta + (H_1 + \zeta) \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle_1 \right] \quad (1.18 a)$$

$$(H_2 - \zeta) \left[\frac{\partial \langle \phi \rangle_2}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{u} \rangle_2 \cdot \nabla \rangle \langle \phi \rangle_2 \right] + \langle \phi \rangle_2 \left[-\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \langle \mathbf{u} \rangle_2 \cdot \nabla \zeta + (H_2 - \zeta) \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle_2 \right], \quad (1.18 b)$$

où on a utilisé l'approximation $\langle \mathbf{u}_i \phi \rangle_i = \langle \mathbf{u} \rangle_i \langle \phi \rangle_i$, qui est valide dans la mesure où les variations de \mathbf{u}_1 et de ϕ sont faibles par rapport à leurs valeurs moyennes. Ce n'est, de toute évidence, pas vrai près des frontières horizontales, où le fluide colle à la paroi ($\mathbf{u}_1|_{z=-H_1} = \mathbf{u}_2|_{z=H_2} = 0$), et nous en tiendrons compte pour traiter le terme visqueux de (1.13 b). On reconnaît (1.17 a,b) dans les derniers termes de (1.18 a,b), alors la dérivée matérielle se réduit à :

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \phi) + \frac{\partial (w_i \phi)}{\partial z} \right\rangle_i = \frac{\partial \langle \phi \rangle_i}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{u} \rangle_i \cdot \nabla \rangle \langle \phi \rangle_i, \quad (1.19)$$

pour $i = 1, 2$.

1.3.5 Pression hydrostatique

Lorsque $w_i = \partial w_i / \partial t = 0$, ce qui ne signifie pas nécessairement que $\mathbf{u}_i = 0$ ni que $\zeta = 0$, (1.13 c) se réduit à :

$$0 = -\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i g. \quad (1.20)$$

Dans le cas d'une seule couche avec une surface à l'air libre en $z = \zeta$, la pression serait égale à la pression atmosphérique p_{air} (constante) augmentée de la pression associée au poids de la colonne d'eau locale, soit la pression hydrostatique. On vérifie facilement que $p_1 = p_{\text{air}} - \rho_1 g(z - \zeta)$ satisfait (1.21) et $p_1|_{z=\zeta} = p_{\text{air}}$. Dans le cas de deux couches, on peut encore prendre la surface mobile comme point de référence et écrire :

$$p_i(\mathbf{x}, z) = p_0(\mathbf{x}) - \rho_i g(z - \zeta(\mathbf{x})), \quad (1.21)$$

où on a explicité les dépendances en \mathbf{x} et en z , et où $p_0(\mathbf{x})$ est la pression à l'interface. Hors de l'équilibre hydrostatique, lorsque $w_i \neq 0$, une fluctuation p' due à l'accélération verticale s'ajoute à (1.21) et (1.13 c) devient :

$$\rho_i \left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i w_i) + \frac{\partial w_i^2}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho_i \nu_i \left(\nabla^2 w_i + \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} \right). \quad (1.22)$$

Pour montrer que p' est négligeable devant p_0 , supposons un écoulement caractérisé par une vitesse verticale W , une vitesse horizontale U et des gradients horizontaux sur une distance k^{-1} beaucoup plus grande que la hauteur du système $H = H_1 + H_2$, de sorte de $kH \ll 1$. D'après (1.13 a), l'échelle de vitesse verticale W dépend de l'échelle de vitesse horizontale U suivant la relation $W \sim kHU$. Conséquemment, l'échelle de temps correspondante est la même pour les mouvements horizontaux et verticaux, soit de $1/kU = H/W$. D'après (1.22), $p' \sim kH\rho U W \sim k^2 H^2 \rho U^2$. Par ailleurs, comme on le verra à la section 1.3.7, la pression à l'interface p_0 s'ajuste aux flux horizontaux, donc $p_0 \sim \rho U^2$. En conclusion, la pression due à l'accélération verticale p' est inférieure d'un facteur $k^2 H^2$ à la pression à l'interface et peut ainsi être négligée pour les ondes longues en général. Toutefois, l'équation (1.22) ne comprend pas de force externe.

1.3.6 Frottement avec les parois horizontales

Le terme visqueux de (1.13 b) comprend deux contributions : l'une due aux gradients horizontaux de vitesse, l'autre due au profil vertical. La dernière, après intégration verticale, s'écrit :

$$\left\langle \rho_1 \nu_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial z^2} \right\rangle_1 = \frac{\rho_1 \nu_1}{H_1 + \zeta} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=-H_1} \right) \quad (1.23 a)$$

$$\left\langle \rho_2 \nu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial z^2} \right\rangle_2 = \frac{\rho_2 \nu_2}{H_2 - \zeta} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} \Big|_{z=H_2} - \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \right). \quad (1.23 b)$$

Ces expressions correspondent manifestement à un frottement contre les parois en $z = -H_1$ et en $z = H_2$ et entre les deux couches en $z = \zeta$. Il existe plusieurs façons de modéliser ce frottement, incluant l'utilisation des coefficients empiriques de Chézy [84] ou de Manning [23]. À titre d'exemple, dans la formulation de Chézy, on modélise le terme de friction avec le bas par la forme quadratique $-g \langle \mathbf{u} \rangle_1 |\langle \mathbf{u} \rangle_1| / C^2 (H_1 + \zeta)$, où C est ici le coefficient de Chézy, ajusté selon la rugosité du fond. Mais, nous nous contenterons ici de la forme linéaire $-\mu_i \langle \mathbf{u} \rangle_i$. Pour des déformations de l'interface de faible amplitude ($\zeta \ll H_1, H_2$), le terme de frottement avec le bas de (1.23 a) s'écrit :

$$-\frac{\rho_1 \nu_1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=-H_1}$$

Utiliser la forme linéaire correspond grossièrement à supposer que la transition de la vitesse nulle au bas vers la vitesse moyenne dans le «coeur» de l'écoulement s'effectue sur une fraction $\rho_1 \nu_1 / \mu_1 H_1^2$ de l'épaisseur de la couche :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=-H_1} = \left(\frac{\mu_1 H_1}{\rho_1 \nu_1} \right) \frac{\langle \mathbf{u} \rangle_1}{H_1}$$

On remplacera donc (1.23 a) par

$$-\mu_1 \langle \mathbf{u} \rangle_1 - \mu_{12} (\langle \mathbf{u} \rangle_1 - \langle \mathbf{u} \rangle_2)$$

dans la couche inférieure pour rendre compte de la friction avec le fond et avec la couche supérieure. De la même façon, on remplacera (1.23 b) par :

$$-\mu_2 \langle \mathbf{u} \rangle_2 - \mu_{12} (\langle \mathbf{u} \rangle_2 - \langle \mathbf{u} \rangle_1).$$

1.3.7 Transport de la quantité de mouvement

Nous allons ici calculer la moyenne verticale de (1.13 *b*). La moyenne du membre gauche s'obtient en appliquant (1.19) :

$$\rho_i \left[\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_i}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle_i \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle_i \right].$$

Ensuite, la moyenne verticale du terme du gradient de pression, en utilisant la pression hydrostatique (1.21), donne :

$$-\langle \nabla p \rangle = -\langle \nabla p_0 + \rho_i g \nabla \zeta \rangle = -\nabla p_0 - \rho_i g \nabla \zeta.$$

Loin des parois verticales, le frottement avec les parois horizontales domine. Mais, près des murs verticaux, les gradients de vitesse horizontaux sont importants dans le terme visqueux de (1.13 *b*). Sa moyenne verticale peut être calculée en utilisant la règle de Leibniz (1.14 *a,b*) une fois pour l'opérateur $\nabla \cdot$ et une autre fois pour l'opérateur ∇ , puisque $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathbf{u}_1 \rangle_1 &= \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle_1 + \frac{(\nabla \zeta \cdot \nabla)(2 \langle \mathbf{u} \rangle_1 - \mathbf{u}_1|_{z=\zeta})}{H_1 + \zeta} \\ \langle \nabla^2 \mathbf{u}_2 \rangle_2 &= \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle_2 - \frac{(\nabla \zeta \cdot \nabla)(2 \langle \mathbf{u} \rangle_2 - \mathbf{u}_2|_{z=\zeta})}{H_2 - \zeta}. \end{aligned}$$

Pour simplifier le modèle, on laissera tomber le dernier terme de chacune de ces équations, qui représentent des corrections de l'ordre de ζ/H_1 et ζ/H_2 , qu'on peut négliger pour des petites déformations de l'interface.

À partir d'ici, on peut cesser d'écrire les symboles de moyenne verticale $\langle \cdot \rangle_i$ sans créer d'ambiguïté. On récrit (1.17 *a,b*) et on rassemble tous les termes intégrés vertica-

lement de (1.13 b) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(H_1 + \zeta)\mathbf{u}_1] \quad (1.24 a)$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(H_2 - \zeta)\mathbf{u}_2] \quad (1.24 b)$$

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 \right] = -\nabla p_0 - \rho_1 g \nabla \zeta - \rho_1 \nu_1 \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \mu_1 \mathbf{u}_1 - \mu_{12}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \quad (1.24 c)$$

$$\rho_2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 \right] = -\nabla p_0 - \rho_2 g \nabla \zeta - \rho_2 \nu_2 \nabla^2 \mathbf{u}_2 - \mu_2 \mathbf{u}_2 - \mu_{12}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \quad (1.24 d)$$

Les équations (1.24 a–d) décrivent les mouvements de l'interface et des fluides dans deux couches peu profondes sur un fond plat et sous un toit rigide plat. La pression à l'interface p_0 est déterminée par la condition obtenue en additionnant (1.24 a) et (1.24 b) :

$$\nabla \cdot [(H_1 + \zeta)\mathbf{u}_1 + (H_2 - \zeta)\mathbf{u}_2] = 0.$$

Il s'agit là de l'équivalent bidimensionnel de la condition d'incompressibilité (1.6 a), qui détermine la pression tridimensionnelle. Ainsi, la pression à l'interface p_0 s'ajuste de sorte à ce que le flux sortant dans la couche inférieure soit compensé par le flux entrant dans la couche supérieure, condition imposée par le toit rigide et le fond du système.

1.3.8 Linéarisation et équation d'onde

Une équation d'onde peut être facilement dérivée à partir de la linéarisation de (1.24 a–d) pour des perturbations de faible amplitude. Nous allons tout de même simplifier les équations en supprimant le terme visqueux et en choisissant $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et $\mu_{12} = 0$ (pas de frottement entre les deux couches). Le système (1.24 a–d) simplifié et linéarisé en \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et en ζ s'écrit alors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (1.25 a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = H_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2 \quad (1.25 b)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_0 - \rho_1 g \nabla \zeta - \mu \mathbf{u}_1 \quad (1.25 c)$$

$$\rho_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_0 - \rho_2 g \nabla \zeta - \mu \mathbf{u}_2. \quad (1.25 d)$$

Pour obtenir une équation d'onde, on élimine p_0 en soustrayant (1.25 d) de (1.25 c), puis on calcule la divergence de cette différence, et enfin on élimine \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 en substituant (1.25 a,b) :

$$\left(\frac{\rho_1}{H_1} + \frac{\rho_2}{H_2}\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \left(\frac{\mu}{H_1} + \frac{\mu}{H_2}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta \rho g \nabla^2 \zeta = 0,$$

où $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$. Nous allons encore simplifier en utilisant l'approximation de Bousinesq, valide pour $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = \rho - \Delta \rho$ avec $|\Delta \rho| \ll \rho$, qui consiste à négliger les corrections d'ordre $\Delta \rho / \rho$ sauf dans le terme de gravité :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - c_g^2 \nabla^2 \zeta = 0, \quad (1.26)$$

où :

$$c_g = \sqrt{\frac{|\Delta \rho| g H_1 H_2}{\Delta \rho H}} \quad (1.27)$$

est la vitesse des ondes de gravité à l'interface. L'équation d'onde (1.26) est une généralisation à deux dimensions et avec frottement de (1.5), et a pour solution l'onde amortie :

$$\zeta = A \exp(-\mu t / 2\rho) \exp\left[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} \pm ct\hat{\mathbf{k}})\right],$$

où $c = \sqrt{c_g^2 - \mu^2 / 4\rho^2 k^2}$ est la vitesse de l'onde, $A \ll H_1, H_2$ est l'amplitude de l'onde, $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ est le nombre d'onde vectoriel et $\hat{\mathbf{k}}$, le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{k} , soit la direction de propagation de l'onde.

1.3.9 Autres forces

L'inclusion d'autres forces externes horizontales dans le modèle est directe. Il suffit d'ajouter la densité de force horizontale à (1.24 c) et à (1.24 d). Par contre, l'inclusion d'une force verticale nécessite le même traitement que la pression hydrostatique dans la section 1.3.5.

Pour illustrer le processus, supposons qu'on veuille inclure une force de composantes horizontale $\mathbf{F}(\mathbf{x}, z)$ et verticale $F_z(\mathbf{x}, z)$. La composante verticale génère une pression hydrostatique supplémentaire :

$$p_F(\mathbf{x}, z) = \int_z^{\infty} F_z(\mathbf{x}, z') dz',$$

qui satisfait $\partial p_F / \partial z = F_z$ et $p_F|_{z=\zeta} = 0$, de sorte que p_F soit continue à travers l'interface et que la pression à l'interface demeure p_0 . Il s'agit enfin d'ajouter aux équations du mouvement horizontal (1.24 c,d) les termes supplémentaires correspondant à la force horizontale et au gradient de pression supplémentaire :

$$+ \langle \mathbf{F} \rangle - \langle \nabla p_F \rangle.$$

C'est ainsi que nous procéderons avec la force magnétique au chapitre 5.

Mentionnons à titre indicatif que Gilman [32] a développé un modèle MHD en eaux peu profondes, mais pour la MHD idéale ($Rm \rightarrow \infty$). Les régimes qui nous intéressent pour les cuves d'électrolyse sont plutôt à bas nombre de Reynolds magnétique.

1.4 Synthèse

J'ai présenté en premier lieu dans ce chapitre la théorie physique générale sous-jacente au problème de la MHD des cuves d'électrolyse de l'aluminium. J'ai mis l'accent sur une compréhension intuitive, bien que pourvue de solides fondements mathématiques, des phénomènes ondulatoires et de la magnétohydrodynamique en terme de mécanismes physiques élémentaires. Le but de cette discussion était, pour le lecteur non expert, de situer le problème de la stabilité MHD des cuves d'électrolyse dans un contexte plus général et possiblement plus familier et, pour le lecteur chevronné, de partager ma vision personnelle de la physique en cause. Et en dernier lieu, puisqu'elles servent de base à la plupart des analyses des chapitres qui suivent, j'ai aussi fourni une dérivation des équations de Saint-Venant décrivant la dynamique de deux couches liquides peu profondes séparées par une interface unique.

CHAPITRE 2

LA MHD DE LA CUVE D'ÉLECTROLYSE DE L'ALUMINIUM

Les chapitres qui suivent traitent de problèmes particuliers ayant trait à la stabilité MHD de la cuve de Hall–Héroult. Nous décrivons donc ici les rudiments de la cuve d'électrolyse avant de présenter un bref historique des recherches effectuées à ce jour. Et finalement, nous commentons et critiquons quelques points possiblement négligés par les auteurs antécédents.

2.1 La cuve d'électrolyse de l'aluminium

L'utilisation universelle de l'aluminium aujourd'hui tient à la découverte d'un procédé d'extraction rentable en 1886, indépendamment par le physicien français Paul Héroult et l'ingénieur américain Charles Martin Hall. L'aluminium est réduit par électrolyse depuis l'alumine (Al_2O_3) au moyen du procédé dit de Hall–Héroult. Le procédé prend place dans une cuve rectangulaire peu profonde telle qu'illustrée sur la figure 2.1, dont les dimensions horizontales se situent autour de $15\text{ m} \times 4\text{ m}$. Le courant d'électrolyse, de l'ordre de 400 kA, circule vers le bas, depuis les anodes de carbone, en passant à travers une mince couche (d'environ 5 cm) de bain électrolytique à base de cryolithe (Na_3AlF_6) et une couche d'aluminium liquide (d'environ 20 cm), avant d'être collecté par la cathode qui constitue le fond de la cuve. Malgré la forte intensité du courant, une différence de potentiel d'environ 4 V seulement sépare les anodes de la cathode, en raison de la faible résistance du mince bain électrolytique, bien que sa résistivité soit 10^4 fois plus grande que celle de l'aluminium. Le chauffage par effet Joule maintient d'ailleurs la température à environ 960°C dans la cuve [34], bien au-delà du point de fusion de l'aluminium de 660°C .

Dans une usine de production d'aluminium, de nombreuses cuves comme celle représentée dans la figure 2.1 sont regroupées dans une salle dite de cuves (figure 2.2), puis branchées en série au moyen de gros conducteurs métalliques. Ceux-ci se doivent d'être disposés avec soin dans la salle de cuve, parce que les 400 kA qu'ils transportent induisent un important champ magnétique ambiant qui influe fortement sur l'écoulement dans les cuves. Celui-ci est notamment à l'origine de la force magnétique qui entretient un brassage permanent et turbulent quoique pratiquement stationnaire, nécessaire

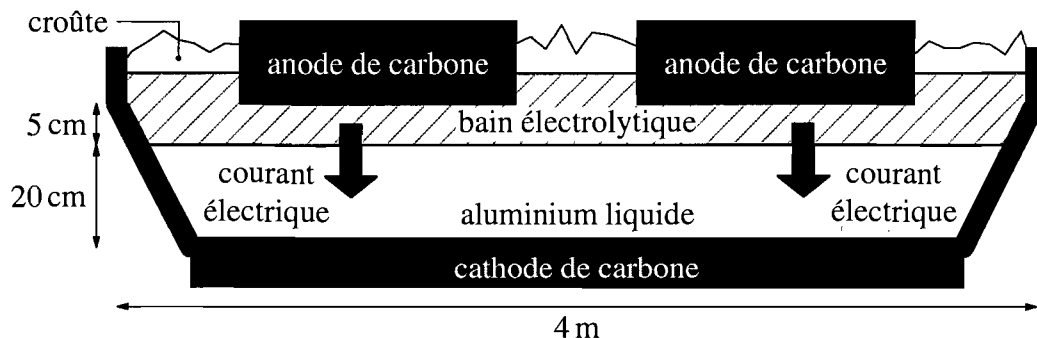


FIGURE 2.1: Coupe verticale schématique d'une cuve de Hall-Héroult moderne. La dimension cachée (perpendiculaire à la coupe) est d'environ 15 m.

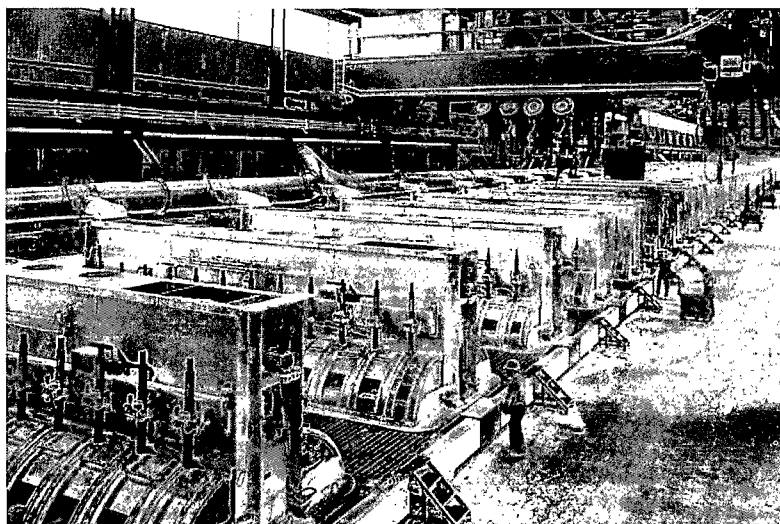


FIGURE 2.2: Cuves de Hall-Héroult dans une salle de cuves (Alcan International Ltée). Les cuves sont recouvertes d'une carcasse d'acier. Les tiges verticales sombres sont les tiges mobiles des anodes.

au mélange du bain électrolytique dans lequel de l'alumine est périodiquement réinjectée. Mais, ce même champ magnétique alimente¹ également des ondes indésirables à l'interface métal-bain² [14]. Étant donné l'épaisseur réduite du bain, une onde d'amplitude suffisante pourrait permettre à la surface de l'aluminium d'entrer en contact avec

¹Les ondes, bien qu'entretenues par la force magnétique, sont à l'origine déclenchées notamment par l'échappement des bulles de CO_2 (sous-produit de la réaction d'électrolyse), le cassage de la croûte de bain gelé pour injecter de l'alumine et les variations du courant électrique [69].

²Les différents auteurs sur le sujet désignent souvent la couche d'aluminium liquide par métal et celle de bain électrolytique, par bain, électrolyte ou cryolithe.

les anodes, causant ainsi un court-circuit. La tendance naturelle de ces ondes à croître en amplitude — à devenir instables — compromet la stabilité électrique de la cuve, d'où l'importance de bien choisir la disposition des conducteurs métalliques pour restreindre le champ magnétique ambiant. Pour limiter le danger que représentent ces instabilités magnétohydrodynamiques, il est pratique courante de maintenir une bonne distance entre les anodes et l'aluminium, donc une bonne épaisseur de bain électrolytique. Cela augmente toutefois la résistance électrique de la couche de bain, ce qui se solde en une rentabilité réduite du procédé. Cela motive l'intérêt de l'industrie pour la recherche sur la MHD de la cuve, et celui du physicien pour la nouvelle physique qu'elle recèle.

La cuve d'électrolyse de l'aluminium, ou cuve de Hall-Héroult, est normalement considérée comme un système fermé à deux couches de fluides comme celui décrit à la section 1.3. Le fond et les côtés de la cuve sont rigides. Les anodes de carbone, également rigides, sont suspendues à des tiges mobiles qui permettent de les descendre dans le bain à mesure qu'elles sont consommées par la réaction d'électrolyse (les ions d'oxygène issus de l'alumine se combinent au carbone des anodes pour former du dioxyde de carbone). Les anodes ne couvrent pas la totalité de la surface du bain : elles sont disposées en deux rangées de quelques dizaines d'anodes, séparées par des canaux de quelques centimètres [1]. Cependant, en surface, et aussi sur les côtés, une croûte de bain gelé se forme, contribuant ainsi à l'isolation thermique des liquides et à faire de la surface du bain une frontière rigide.

Le tableau 2.1 montre les valeurs typiques de paramètres physiques dans la cuve. Notons que le champ magnétique y est beaucoup plus fort que le champ magnétique terrestre, dont l'intensité moyenne est d'environ 0,05 mT.

2.2 Historique du problème et connaissances établies

Déjà en 1960, chez le producteur Péchiney, on avait entrepris la recherche sur la MHD de la cuve [33]. Mais on croyait à tort que la partie irrotationnelle de la force magnétique ne pouvait produire qu'une déformation statique de l'interface métal-bain, sans générer de mouvement. En effet, une force irrotationnelle dans un domaine fermé est contrebalancée par un gradient de pression, et si la pression est différente dans les deux couches, une déformation de l'interface apparaît pour permettre à la poussée d'Archimède d'équilibrer la différence de pression entre les deux couches. Alors, effectivement, la déformation de l'interface est statique... à condition que la force en cause soit égale-

Paramètre	Symbole	Valeur
Longueur de la cuve	L_x	15 m
Largeur de la cuve	L_y	4 m
Épaisseur totale de liquide sous les anodes	H	25 cm
Vitesse typique de brassage	U	10 – 20 cm/s
Courant total	I_0	400 kA
Densité de courant moyenne	J_0	7 kA/m ²
Induction magnétique horizontale moyenne	B_0	10 mT
Induction magnétique verticale moyenne	B_z	2 – 3 mT
Température	T_0	960 °C
Densité	ρ_1	2250 kg/m ³
	ρ_2	2075 kg/m ³
Épaisseur de la couche	H_1	20 cm
	H_2	5 cm
Conductivité électrique	σ_1	$3,3 \times 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
	σ_2	$3,0 \times 10^2 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Viscosité cinématique	ν_1	$1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
	ν_2	$0,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$

TABLEAU 2.1: Paramètres physiques de la cuve. Les valeurs dans le tableau constituent des estimations des ordres de grandeur plutôt que des valeurs exactes. Lorsque deux valeurs sont fournies pour un même paramètre, l'indice 1 correspond à la couche d'aluminium et l'indice 2, au bain. Sources : Centre de recherche et développement d'Alcan à Arvida (2002), Usine Alcan Grande-Baie (2002), et références [1, 34, 82, 87].

ment statique ! En fait, cette force dépend fortement de la forme de l'interface. Il s'avère même que c'est la partie irrotationnelle³ de la force magnétique qui est à l'origine du principal mécanisme déstabilisateur que l'on connaît aujourd'hui, dont il est question dans la section 2.2.1. Cette section passe en revue les contributions les plus marquantes dans l'histoire de la recherche sur la stabilité MHD des cuves. Les divers travaux sont regroupés par objet d'étude et par approche plutôt qu'ordonnés chronologiquement. Notons à titre de référence qu'une revue systématique et exhaustive a été faite par Gerbeau et al. [29].

³Voir la digression sur la décomposition de Helmholtz de la force magnétique à la section 2.3.3.

2.2.1 Le roulis de la nappe de métal

Cette section présente les principales contributions à la recherche sur l'instabilité MHD appelée *roulis de la nappe de métal* (RNM), sans entrer dans les détails mathématiques de la plupart des études. Nous nous attarderons cependant au travail de Davidson & Lindsay [18], qui est le modèle mathématiquement complet le plus simple expliquant bien le RNM.

Urata et al. [82]

Les Japonais Urata et al. [82] de *Mitsubishi Light Metal Industries* sont probablement les premiers à avoir publié, en 1976, une équation d'onde pour l'interface métal-bain, dérivée à partir de l'équation de Navier–Stokes (1.6 c) et de la loi d'Ohm. Leur modèle prédisait le couplage, par la force magnétique, des modes propres d'oscillation gravitationnelle tels que ceux décrits à la section 1.1.1. Ces modes couplés se manifestent sous la forme d'une onde rotative dans la cuve, qu'on nommera roulis de la nappe de métal (*metal pad roll* en anglais) ou simplement roulis, dont la période prédite par le modèle de Urata et al. [82] concorde avec les observations, soit d'environ 30 – 60 s. L'article présentant ce travail innovateur, quoique complet en soi, est excessivement concis et très difficile à comprendre pour le lecteur qui n'est pas déjà un expert de la MHD de la cuve. D'ailleurs Bojarevičs & Romerio [8], qui généraliseront cette étude 18 ans plus tard, en disent :

The importance of this pioneering work is slightly lessened by the absence of mathematical derivation of the equation, conditions of validity and analytic criterion for stability.⁴

Nous nous contenterons donc ici de mentionner la contribution originale de Urata et al. [82]. Nous discuterons plus loin en détail de modèles apparentés au leur, soit ceux de Sneyd & Wang [74], Bojarevičs & Romerio [8] et Davidson & Lindsay [18].

⁴Traduction libre : « L'importance de ce travail innovateur est légèrement minimisée par l'absence d'une dérivation mathématique de l'équation [d'onde], de conditions de validité et d'un critère de stabilité analytique. »

Sele [69]

En 1977, peu après cette découverte, l'ingénieur norvégien Sele [69] a expliqué d'une façon plus intuitive le roulis de la nappe de métal et a fourni un critère de stabilité empirique, soit une information utile pour la conception des cuves. Le mécanisme décrit par Sele est le suivant : lorsque l'interface métal-bain est inclinée, le courant électrique est dévié, la force magnétique résultante pousse la nappe de métal à 90° par rapport à l'angle d'inclinaison, puis le déplacement de celle-ci fait pivoter l'inclinaison de l'interface⁵. La figure 2.3 montre comment la distribution du courant électrique est affectée par une déformation de l'interface : le courant vertical sous les anodes est intensifié dans les régions où le bain est plus mince, car elles offrent une moindre résistance électrique. Ce courant vertical non uniforme pénètre ensuite dans l'aluminium, où il se redistribue uniformément avant de sortir par la cathode⁶ ; il en résulte une déviation du courant qui est surtout horizontale dans l'aluminium. La figure 2.4 montre comment, sous l'action d'un champ magnétique vertical B_z , la composante horizontale du courant dans l'aluminium j_{1h} , causée par l'inclinaison de l'interface, engendre sur la nappe de métal une force magnétique F_1 horizontale perpendiculaire à l'inclinaison de l'interface. Le passage d'une étape à l'autre dans la figure 2.4 illustre la rotation en sens antihoraire de la nappe de métal sous l'effet de cette force magnétique.

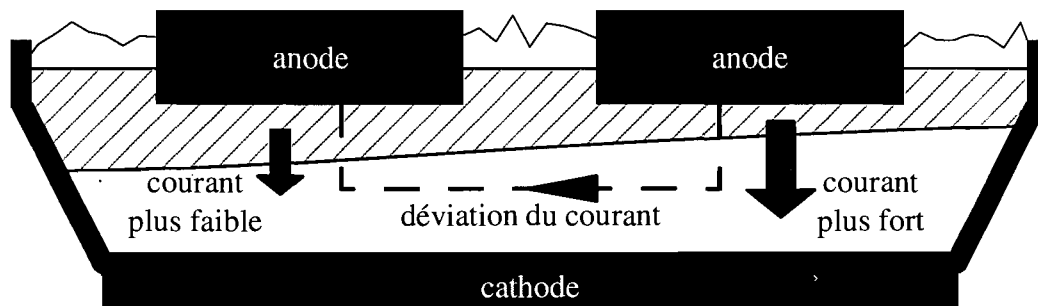


FIGURE 2.3: Déviation du courant électrique par une déformation de l'interface.

Sans doute à cause de la puissance de calcul limitée des ordinateurs à l'époque, Sele utilise un modèle semi-dynamique, moins coûteux en temps de calcul qu'un modèle

⁵L'interface elle-même ne tourne pas, car les fluides ne tournent pas selon le modèle. Ce sont les dénivellations de l'interface qui tournent.

⁶La raison pour laquelle le courant s'uniformise dans la couche de métal n'est pas donnée par Sele. D'autres auteurs [8, 18, 72] l'expliqueront plus tard par la mauvaise conductivité par rapport à celle de l'aluminium liquide de la cathode de carbone, empêchant les déviations du courant de pénétrer dans celle-ci. La distribution du courant électrique est traitée en détail à la section 2.3.1.

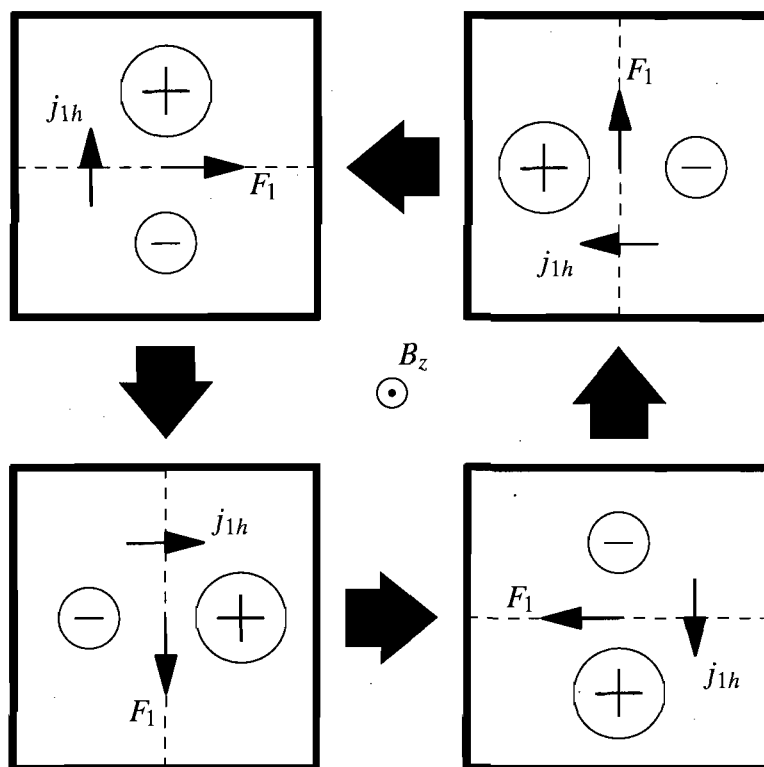


FIGURE 2.4: Représentation schématique du roulis de la nappe de métal (RNM), tel qu'expliqué par Sele [69], vu d'en haut. Les signes + et - correspondent à la dénivellation de l'interface.

pleinement dynamique, pour simuler le roulis de la nappe de métal. Chaque pas de temps correspond à un état stationnaire de l'écoulement et de la déformation de l'interface pour une force magnétique donnée. Celle-ci est calculée à partir de la distribution du courant électrique résultant de la déformation d'interface au pas de temps précédent. De ses simulations, il tire le critère de stabilité empirique suivant :

$$\frac{I_0 B_z}{H_1 H_2} < \text{constante empirique}, \quad (2.1)$$

où I_0 , B_z , H_1 et H_2 sont définis dans le tableau 2.1, p. 28. Son critère de stabilité sera généralisé dans les études ultérieures dont il est question plus bas, où une expression analytique remplace la constante empirique de Sele. Ce qui est le plus intéressant, selon moi, dans (2.1), ce n'est pas l'existence d'un seuil de stabilité, mais plutôt la conclusion suivante : il faut que le membre gauche de (2.1) demeure petit pour éviter les instabilités

ou, en d'autres mots, il faut limiter le champ magnétique vertical et conserver une bonne épaisseur de métal liquide.

Ultérieurement, Gerbeau et al. [31] et Munger & Vincent [59] ont vérifié, par des simulations numériques tridimensionnelles non stationnaires, l'existence du mécanisme décrit par Sele [69].

Sneyd & Wang [74], Bojarevičs & Romerio [8]

Il est remarquable que, au temps des premiers travaux sur la MHD de la cuve, Urata et al. [82] aient découvert le mécanisme de couplage des modes qui, aujourd'hui, est généralement perçu comme étant le mécanisme déstabilisateur dominant, et que Sele [69] en donne une interprétation physique simplifiée satisfaisante. C'est d'autant plus étonnant qu'on ait négligé l'importance de ces deux contributions pendant les 17 années de recherche subséquentes sur la stabilité MHD de la cuve. Ce n'est enfin qu'en 1994 que Sneyd & Wang [74] et Bojarevičs & Romerio [8] ont indépendamment fait une analyse rigoureuse et détaillée par modes normaux [11]. Les deux analyses [8, 74], sans être fondamentalement compliquées, sont plutôt laborieuses en comparaison avec le modèle ultérieur, plus simple, de Davidson & Lindsay [18] expliqué plus bas, aussi n'entrons-nous pas dans les détails ici.

La principale contribution de ces études est de clarifier les détails manquants du travail original de Urata et al. [82], de montrer comment le couplage entre les modes gravitationnels par la force magnétique se produit du point de vue mathématique, et d'appuyer les conclusions de Sele [69]. Un effort remarquable est fourni par Bojarevičs & Romerio [8], Sneyd & Wang [74], et aussi plus tard par Davidson & Lindsay [18], dans le but de dériver un critère de stabilité plus général, plus complet que celui de Sele [69]. La dérivation de ces critères repose toutefois sur de fortes hypothèses comme l'absence de friction, l'absence d'un écoulement à l'état d'équilibre, voire l'existence même d'un état d'équilibre. En fait, la pertinence de prédire un seuil d'instabilité n'a pas été clairement établie, d'autant plus que Davidson [16] montrera plus tard que, à mesure qu'on augmente le paramètre déstabilisant, soit grossièrement le membre gauche de (2.1), les premiers modes à devenir instables ne sont pas toujours les plus instables et parfois même redeviennent stables. Par ailleurs, comme le remarquent Molokov et al. [49], les cuves opèrent bien au-delà du seuil de stabilité, nettement en régime instable. L'important est plutôt de connaître ce qui favorise ou limite le développement des in-

stabilités, une information que le simple critère (2.1) de Sele [69] fournissait déjà et qui est confirmée par les études ultérieures [8, 18, 74]. Celles-ci ont en outre montré que les ondes longues sont plus susceptibles de devenir instables.

Davidson & Lindsay [18]

Bien qu'elle partage avec les analyses antérieures de Sneyd & Wang [74] et de Bojarevičs & Romerio [8] plusieurs aspects concernant les hypothèses simplificatrices, la démarche et les conclusions, l'analyse modale de Davidson & Lindsay [18] a le mérite d'être remarquablement plus simple tout en clarifiant significativement la physique à l'oeuvre, notamment en proposant une analogie avec un pendule. C'est donc l'analyse de Davidson & Lindsay [18] plutôt que les autres que nous présenterons ici en guise d'explication complète du roulis de la nappe de métal, sans intention de minimiser l'importance des contributions originales de Sneyd & Wang [74], de Bojarevičs & Romerio [8] ou de Urata et al. [82]. Nous utiliserons toutefois une notation différente, cohérente avec le reste de la présente thèse.

L'analogie avec le pendule que font Davidson & Lindsay [18] est, en quelque sorte, une version analytique du modèle excessivement simple de Sele [69] expliqué plus haut : la nappe de métal qui, sous l'action de la force magnétique, est poussée contre les parois latérales de la cuve, l'une après l'autre, est analogue à un pendule constitué d'un disque de métal d'épaisseur finie, suspendu à une tige, qui se déplace en rond autour de sa position d'équilibre, également sous l'action de la force magnétique. Puisque l'essentiel de la physique a déjà été extrait par [69], nous ne décrirons pas l'analogie avec le pendule en détail ; nous en dirons simplement que les équations du mouvement du pendule conduisent à un système linéaire à deux variables, chacune associée à un axe de mouvement, très semblable au système linéaire (2.11) dérivé ci-bas à plusieurs variables, chacune correspondant à un mode naturel d'oscillation gravitationnelle.

La cuve est idéalisée comme sur la figure 2.5 : le creuset est un prisme rectangulaire et une anode unique couvre l'entière surface du bain électrolytique. Le modèle repose sur les équations de Saint-Venant linéarisées pour deux couches (1.25 *a-d*), avec force

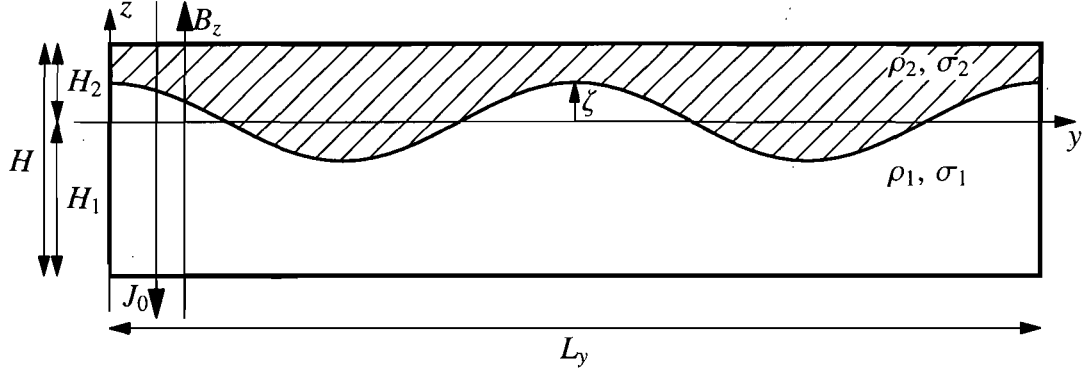


FIGURE 2.5: Coupe verticale schématique d'une cuve de Hall-Héroult idéalisée, comme dans le modèle de Davidson & Lindsay [18]. La dimension cachée (perpendiculaire à la coupe) est de L_x .

magnétique et sans friction :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (2.2 a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = H_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2 \quad (2.2 b)$$

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_0 - \rho_1 g \nabla \zeta + \mathbf{F}_1 \quad (2.2 c)$$

$$\rho_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_0 - \rho_2 g \nabla \zeta + \mathbf{F}_2. \quad (2.2 d)$$

où \mathbf{F}_i est la composante horizontale de la force magnétique. Selon la convention adoptée à la section 1.3, l'opérateur gradient est à deux dimensions ici. Négliger la friction implique que le modèle ne dissipera pas les ondes courtes ; c'est pourquoi celles-ci seront exclues de l'analyse modale.

La subtilité du modèle réside dans le calcul de la distribution du courant électrique. Les différents auteurs [8, 18, 74] font les deux mêmes simplifications : ils négligent les courants induits par l'écoulement et, puisque les ondes de gravité sont très lentes par rapport aux phénomènes électrodynamiques [8], font l'approximation magnétostatique⁷, c'est-à-dire qu'ils considèrent que le courant électrique relaxe immédiatement vers sa distribution d'équilibre $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, donnée par un champ électrique potentiel. La conductivité électrique étant uniforme dans chacune des couches, quoique différente ($\sigma_1 \gg \sigma_2$),

⁷L'approximation magnétostatique est aussi parfois appelée *approximation pseudo-statique*. Nous commenterons cette approximation à la section 2.3.1.

on peut écrire que le courant même découle d'un potentiel :

$$\mathbf{J} = -J_0 \hat{\mathbf{z}} + \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.3)$$

où la perturbation de potentiel Φ satisfait la conservation de la charge :

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Le potentiel total n'est pas Φ mais $\Phi - J_0 z$. Le courant d'électrolyse non perturbé (en l'absence de déformation de l'interface) est purement vertical, orienté vers le bas et de densité J_0 . Au premier ordre en kH , on a $\partial^2 \Phi_2 / \partial z^2 = 0$, qui a pour solution :

$$\Phi_2 = -\frac{J_0 \zeta (z - H_2)}{H_2 - \zeta}. \quad (2.4)$$

Avec la solution (2.4), le potentiel total aux frontières satisfait $(\Phi_2 - J_0 z)|_{z=H_2} = -J_0 H_2$ et $(\Phi_2 - J_0 z)|_{z=\zeta} = 0$: l'interface avec l'aluminium et la frontière avec les anodes sont des équipotentielles. Comme les auteurs depuis Sneyd [72] le justifient, cela découle de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J} / \sigma$: dans un mauvais conducteur comme le bain électrolytique; les surfaces de contact avec l'aluminium et le carbone, excellents conducteurs par rapport au bain, sont des équipotentielles⁸. Par exemple, à l'interface, on a $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_2 = (\sigma_2 / \sigma_1) \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_1 \simeq 0$. En somme, le courant dans le bain, au premier ordre en kH , est donné par :

$$\mathbf{J}_2 = -J_0 \left(1 + \frac{\zeta}{H_2 - \zeta} \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

La continuité du courant normal à travers l'interface, toujours au premier ordre en kH , requiert :

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{j}_{1h} - J_0 \left[1 + \frac{\zeta(z + H_1)}{(H_1 + \zeta)(H_2 - \zeta)} \right] \hat{\mathbf{z}},$$

où \mathbf{j}_{1h} est la composante horizontale du courant dans l'aluminium, de sorte que $J_{1z} = J_{2z}$ en $z = \zeta$ et que $J_{1z} = -J_0$ en $z = -H_1$. Cette dernière condition découle de l'hypothèse que le courant vertical se redistribue uniformément dans l'aluminium, à cause de

⁸Une explication différente, en terme d'un principe variationnel, est proposée à l'annexe II.

la mauvaise conductivité du carbone⁹. Par conservation de la charge, le courant horizontal satisfait, au premier ordre en ζ :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{1h} = \frac{J_0 \zeta}{H_1 H_2}. \quad (2.5)$$

En comparant ce résultat avec (2.2 a) et considérant que $(\nabla \times \mathbf{j}_{1h})_z = 0$ à cause de (2.3) et que les frontières latérales sont imperméables et isolantes ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}_{1h} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_1 = 0$), on peut conclure par le théorème de Helmholtz [83] que :

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{1h}}{\partial t} = -\frac{J_0}{H_2} \mathbf{u}_P, \quad (2.6)$$

où \mathbf{u}_P est la partie potentielle ou irrotationnelle du champ de vitesse, satisfaisant $\nabla \cdot \mathbf{u}_P = \nabla \cdot \mathbf{u}_1$ et $\nabla \times \mathbf{u}_P = 0$. Ce résultat, obtenu originalement par Davidson & Lindsay [18], permet d'exprimer la force magnétique en terme des mouvements des fluides¹⁰. On peut montrer que la contribution dominante à la force magnétique provient de l'interaction entre le champ magnétique vertical et le courant horizontal [8, 74]. Il s'ensuit que :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{j}_{1h}}{\partial t} \times (B_z \hat{\mathbf{z}}) = \frac{J_0 B_z}{H_2} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_P \quad (2.7 a)$$

$$\mathbf{F}_2 = 0. \quad (2.7 b)$$

La dérivation d'une équation d'onde à partir de (2.2 a-d) et (2.6) est semblable à celle de la section 1.3.8, à la différence que Davidson & Lindsay [18] dérivent une équation d'onde en terme de \mathbf{u}_P plutôt que de ζ . Pour dériver cette équation d'onde, remarquons d'abord, grâce à (2.2 a,b), que $\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = -(H_2/H_1) \nabla \cdot \mathbf{u}_P$, puis soustrayons la partie potentielle (irrotationnelle) de (2.2 d) de celle de (2.2 c) pour éliminer le gradient de pression à l'interface :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial t} = -\frac{c_g^2}{H_1} \nabla \zeta + \frac{\omega_m^2 H_2}{J_0 B_z} \mathbf{F}_{1P}, \quad (2.8)$$

⁹Les détails sont discutés à la section 2.3.1.

¹⁰Notons que, bien que l'évolution du courant soit exprimée en terme de l'écoulement, il ne s'agit pas là de courants induits par l'écoulement, mais bien du courant dévié par la déformation de l'interface.

où :

$$c_g = \sqrt{\frac{|\Delta\rho| g H_1 H_2}{\rho H}} \quad (2.9 a)$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{J_0 B_z}{\rho H}}. \quad (2.9 b)$$

La fréquence ω_m constitue un taux d'action caractéristique de la force magnétique. Dans l'histoire de la recherche sur la MHD des cuves, Morris & Davidson [55] sont les premiers à avoir fait l'approximation de Boussinesq. Avant eux, comme dans l'article original de Davidson & Lindsay [18], l'expression $(\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1)/H$ remplaçait ρ dans les dénominateurs de (2.9 a,b). On prend la dérivée temporelle de (2.8) et on y substitue (2.2 a) et (2.7 a) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_P}{\partial t^2} - c_g^2 \nabla^2 \mathbf{u}_P = \omega_m^2 (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_P)_P, \quad (2.10)$$

où on a utilisé l'identité $-\nabla(\partial\zeta/\partial t)/H_1 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_P) = \nabla^2 \mathbf{u}_P$ et l'indice P dans le membre droit de (2.10) désigne, bien sûr, la partie potentielle. L'équation d'onde (2.10) est résolue en faisant le développement en modes normaux suivant :

$$\mathbf{u}_P = e^{-i\lambda t} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \frac{\nabla \psi_{\mathbf{k}}}{k},$$

où les éléments de la base sont les fonctions :

$$\psi_{\mathbf{k}} = C_{\mathbf{k}} \cos(m\pi x/L_x) \cos(n\pi y/L_y)$$

normalisées de sorte que :

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \psi_{\mathbf{k}}^2 dx dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\nabla \psi_{\mathbf{k}} \cdot \nabla \psi_{\mathbf{k}}}{k^2} dx dy = L_x L_y$$

avec $\mathbf{k} = (m\pi x/L_x, n\pi y/L_y)$ et :

$$C_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0, \\ \sqrt{2} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0, \\ \sqrt{2} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } n = 0, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En faisant la projection sur une fonction $\nabla\psi_{\mathbf{k}'}/k'$, c'est-à-dire en faisant le produit scalaire de (2.10) par $\nabla\psi_{\mathbf{k}'}/k'$ puis en intégrant sur la surface de la cuve $0 < x < L_x$ et $0 < y < L_y$, on obtient le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{K} + N\mathbf{\Gamma}) \boldsymbol{\xi} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 c_g^2 / L_y^2} \boldsymbol{\xi}. \quad (2.11)$$

Les éléments $\xi_{\mathbf{k}}$ du vecteur $\boldsymbol{\xi}$ sont les amplitudes des modes $\nabla\psi_{\mathbf{k}}/k$, les éléments de la matrice diagonale \mathbf{K} sont $K_{\mathbf{k},\mathbf{k}} = k^2 L_y^2 / \pi^2 = \epsilon^2 m^2 + n^2$, où $\epsilon = L_y / L_x$ est le rapport d'aspect horizontal de la cuve. Les éléments de la matrice antisymétrique de couplage $\mathbf{\Gamma}$ sont donnés par :

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi^2}{8kk'L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\nabla\psi_{\mathbf{k}} \times \nabla\psi_{\mathbf{k}'})_z \, dx \, dy,$$

ou sous forme explicite :

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} 0 & \text{si } m + m' \text{ ou } \\ & n + n' \text{ sont pairs ;} \\ \frac{C_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}'} \epsilon}{2 \sqrt{(\epsilon^2 m^2 + n^2)(\epsilon^2 m'^2 + n'^2)}} \frac{m'^2 n^2 - m^2 n'^2}{(m^2 - m'^2)(n^2 - n'^2)} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Enfin, le paramètre sans dimension N , qui compare la force magnétique, déstabilisatrice, à la force gravitationnelle, restauratrice, est défini comme :

$$N = \frac{8L_y^2 \omega_m^2}{\pi^4 c_g^2},$$

Dans une cuve réelle, N est de l'ordre de l'unité. La dérivation et la notation même du système linéaire (2.11) sont substantiellement différentes de celles qu'on retrouve

dans l'article original de Davidson & Lindsay [18], mais sont équivalentes. En l'absence de force magnétique, $N = 0$, ce qui signifie que le système (2.11) est diagonal, donc les modes, découplés : il s'agit d'ondes stationnaires de gravité de pulsation $\lambda = \pm kc_g$ évoluant indépendamment les unes des autres. Lorsque $N \neq 0$, les modes propres du système sont des combinaisons linéaires des modes gravitationnels et sont instables lorsque $\text{Im } \lambda > 0$. Des résultats de ce modèle sont présentés à la section 5.3.6. Les modèles de 1994 et 1998 [8, 18, 74] permettent de déduire que les ondes les plus longues sont en général plus susceptibles de devenir instables.

Nous avons présenté le modèle de Davidson & Lindsay [18] dans un niveau de détail supérieur aux autres, puisque c'est celui qui servira de base aux modèles élaborés dans les chapitres suivants. Notons enfin qu'il prédit également des ondes progressives instables dans un canal infini ($L_x \rightarrow \infty$, par exemple).

Lukyanov et al. [47]

Avec un modèle analogue à celui de Davidson & Lindsay [18], Lukyanov et al. [47] ont étudié la réflexion d'ondes progressives sur les parois latérales de la cuve. Ils ont fourni une nouvelle interprétation du RNM en terme de réflexion d'ondes progressives. Ils ont montré que le coefficient de réflexion dépend de l'angle d'incidence, et en particulier, qu'il est supérieur à l'unité lorsque l'angle d'incidence de l'onde est positif (en supposant que le champ magnétique vertical est en sens positif). Dans ce cas, la réflexion alimente l'instabilité, ce qui est cohérent, en ce qui concerne la direction de propagation de l'onde, avec le modèle de Sele [69] notamment. Il ont aussi montré, de la même façon, que le RNM dans une cuve cylindrique est toujours instable.

2.2.2 Les ondes sur les parois latérales

Morris & Davidson [55] et Molokov et al. [49] ont étudié des ondes progressives se propageant le long des parois latérales dans les cuves. Leur existence avait d'abord été suggérée par Lukyanov et al. [47]. Les simulations numériques de Sun et al. [77] ont confirmé qu'à mesure que le champ magnétique devient très fort (plus précisément, pour de grandes valeurs du paramètre N défini dans la section 2.2.1), l'onde du RNM devient de plus en plus localisée près des murs¹¹. Mais les auteurs remarquent également

¹¹Il est aussi possible d'observer ce comportement simplement avec le modèle analytique du RNM (section 2.2.1) pour de grandes valeurs du paramètre N , à condition d'inclure suffisamment de modes. En

que pour les valeurs des paramètres dans une cuve typique, le phénomène demeure très limité. Mentionnons que des études analytiques [36] et par simulation numérique [35] ont été poursuivies sur le comportement asymptotique des ondes sur les bords pour $N \gg 1$.

Dans un rapport interne de l'Université de Coventry, Molokov et al. [49] suggèrent que le mécanisme du RNM n'est pas dominant dans les cuves de Hall-Héroult mais que l'instabilité serait plutôt due à l'action de la force magnétique près des parois latérales. Comme le montre la figure 2.6, une bosse dans l'interface près de la frontière est à l'origine d'une force magnétique qui force l'aluminium liquide à se déplacer de l'arrière vers l'avant de la bosse et ainsi cause sa propagation le long la paroi.

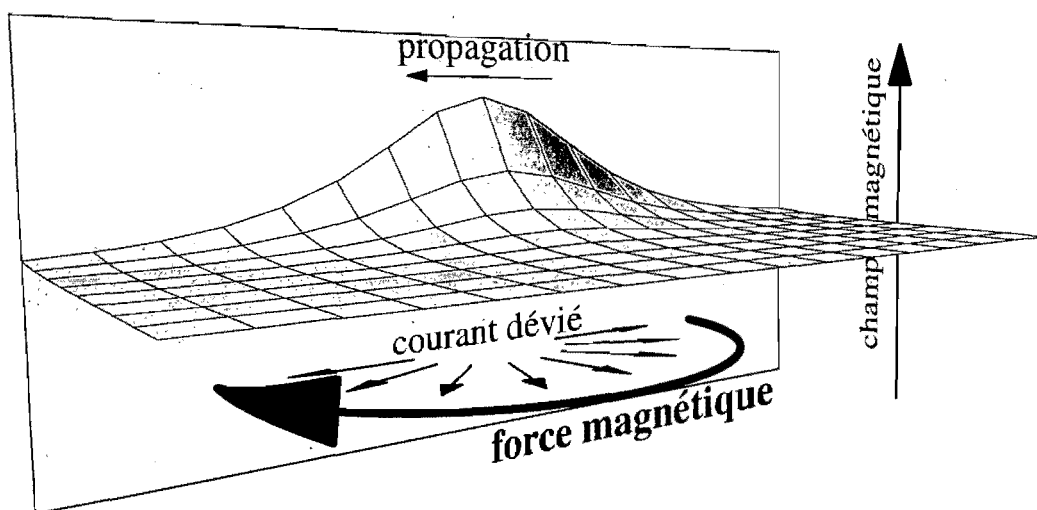


FIGURE 2.6: Explication schématique de la propagation des ondes MHD le long des parois latérales. Le courant dévié dans l'aluminium est orienté vers l'extérieur de la bosse. La force magnétique pousse l'aluminium liquide de l'arrière vers l'avant de la bosse, ce qui détermine la direction de propagation.

2.2.3 Les modèles analytiques d'ondes progressives

De 1977 à 1994, la plupart des études portaient sur des ondes progressives dans des domaines infinis. Typiquement, les auteurs procèdent en introduisant une perturbation sinusoïdale de la forme $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm \lambda t)]$, représentant un train d'onde infini, dans les effet, une fonction localisée spatialement est étendue spectralement, donc un plus grand nombre de modes est nécessaire pour la décrire.

équations (2.2 *a-d*), comme à la section 1.1.3. Depuis Urata et al. [82], les instabilités dans les cuves de Hall–Héroult ont été classées en deux catégories : les unes sont entretenues par le mécanisme MHD décrit à la section 2.2.1, les autres par le mécanisme de Kelvin–Helmholtz. Les instabilités de Kelvin–Helmholtz se développent lorsqu’il y a un cisaillement entre deux couches de densités différentes. À titre d’exemple si l’interface entre deux couches infinies de fluides non visqueux de densités ρ_1 et ρ_2 est déformée par une onde plane de fréquence spatiale k , la déformation est instable si [24] :

$$(\Delta U)^2 |k| \cos^2 \theta > \Delta \rho g \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2},$$

où ΔU est la différence de vitesse entre les deux couches, $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ et θ est l’angle de l’onde par rapport à la direction du cisaillement. Donc, si la stratification est stable ($\Delta \rho > 0$), l’instabilité se produit quand le cisaillement est assez important et si l’onde est assez courte et dans une direction proche de celle du cisaillement.

Moreau [51] et Moreau et al. [52] ont observé que les instabilités de Kelvin–Helmholtz dans la cuve de Hall–Héroult sont modifiées par des effets MHD, notamment un pincement magnétique. Sneyd [72, 73] et Pigny & Moreau [63] ont mis en relief l’effet déstabilisateur de certains gradients du champ magnétique, notamment des gradients horizontaux du champ vertical ou des gradients verticaux du champ horizontal. Dans récente analyse par linéarisation, Kurenkov et al. [39] ont trouvé que les instabilités de Kelvin–Helmholtz étaient complètement indépendantes des instabilités MHD de type RNM.

Le plus gros problème ayant trait à l’étude des ondes progressives dans des domaines infinis est que, selon les observations, les ondes dans un cuve en opération sont de longueur comparable à la taille de la cuve [18]. Molokov et al. [49] insistent sur le fait que la présence de frontières est essentielle au mécanisme déstabilisateur dominant. Par ailleurs, on sait aujourd’hui que le couplage entre les modes joue un rôle important dans la déstabilisation de l’interface ; l’analyse de la propagation d’ondes planes simples ne permettait pas d’isoler ce phénomène.

2.2.4 Mesures expérimentales

Malheureusement, la modélisation mathématique ou numérique ne dispose que de bien peu de mesures «sur le terrain» sur lesquelles s’appuyer. En raison de sa tempéra-

ture extrêmement élevée, le milieu se prête mal à la collecte de données expérimentales. On a néanmoins rapporté quelques mesures de vitesse déduites de l'érosion anisotrope de tiges de fer plongées dans le bain [34] ou obtenues par le suivi d'un traceur radioactif [54]. L'observation directe de l'interface est aussi impossible, quoique sa position peut être approximativement déduite d'après l'intensité du courant dans les anodes [38, 58]. Antille et al. [2] ont développé une méthode pour déduire le champ de vitesse à partir des fluctuations du courant dans les anodes. Par ailleurs, [5, 42] sont parvenus à obtenir quelques mesures utiles de la vitesse et du champ magnétique dans un modèle physique à échelle réduite (à 1/10) d'une cuve de Hall-Héroult, dans lequel ils ont remplacé l'aluminium par le métal de Wood, un alliage de bismuth, de plomb, d'étain et de cadmium, dont le point de fusion est autour de 70 °C.

2.2.5 Modélisation numérique

Cette section décrit la situation générale et actuelle de la modélisation numérique de la MHD de la cuve de Hall-Héroult. Le lecteur intéressé par les détails techniques des différentes méthodes numériques est invité à consulter les références citées ci-après et l'introduction du chapitre 4.

Vu l'importance des hypothèses simplificatrices nécessaires pour permettre les études analytiques (perturbations de faible amplitude, champ magnétique et écoulement excessivement simplifiés, etc.) et la difficulté à recueillir des données expérimentales, on compte beaucoup sur la simulation numérique pour étudier la MHD de la cuve dans un cadre plus réaliste et pour vérifier la théorie.

Lorsqu'il s'agit de vérifier la théorie, par exemple, on considère des écoulements et des champs magnétiques extrêmement simples, comme dans les études analytiques. Mais, généralement, la modélisation numérique (2D et 3D) vise à simuler une situation aussi réaliste que possible, aussi le champ magnétique externe est, en général, imposé à partir de calculs tridimensionnels préalables de la situation magnétostatique à l'extérieur et à l'intérieur de la cuve. Ces calculs sont faits une seule fois, avant les simulations, et tiennent compte des différentes conductivités des milieux conducteurs et des effets ferromagnétiques de la carcasse d'acier de la cuve. La résolution magnétostatique a le seul défaut de ne pas rendre compte du champ généré à l'extérieur de la cuve par les courants à l'intérieur de la cuve.

Les modèles numériques reposant eux-mêmes sur des simplifications non triviales,

la fiabilité des simulations s'en voit limitée. Celle-ci est par ailleurs difficile à estimer, vu la rareté des données expérimentales. Non seulement n'existe-t-il à ce jour aucun modèle de turbulence adapté à la cuve, l'ajustement des paramètres d'un tel modèle (coefficients de frottement visqueux ou turbulent, par exemple) nécessiterait également des données expérimentales.

Il existe principalement deux approches à la simulation numérique : la résolution des équations de Navier–Stokes tridimensionnelles (3D) [3, 29, 31, 41, 44, 59, 64, 81] et la résolution des équations de Saint-Venant bidimensionnelles (2D) [6, 7, 35, 77, 78, 87].

L'approche 2D a l'avantage évident d'être plus rapide, mais repose notamment sur l'hypothèse que la pression est hydrostatique (voir section 1.3.5) partout dans la cuve et dépend d'un modèle de frottement 2D (voir section 1.3.6, par exemple). Celui-ci est typiquement modélisé par un terme de frottement linéaire [50, 77, 78, 87], mais aussi parfois non linéaire [7].

Dans l'approche 3D, bien que potentiellement plus précise car elle nécessite moins de simplifications, la résolution spatiale et temporelle est limitée par le temps de calcul. Il est encore, à ce jour, impossible de simuler une cuve au complet avec suffisamment de points de grille pour résoudre l'échelle de dissipation visqueuse. Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle de turbulence 3D. Mais aucune étude systématique de la turbulence dans la cuve, qui permettrait d'élaborer un tel modèle, n'a été conduite. Faute de meilleures connaissances, dans les codes non commerciaux, la turbulence 3D a été jusqu'ici modélisée par une viscosité turbulente constante [31, 56].

À la lumière de cette discussion, nous comprenons que, même s'ils se veulent d'un niveau de réalisme supérieur aux résultats analytiques, les résultats des simulations numériques doivent être interprétés avec précaution.

2.2.6 Écoulement principal

Des forces magnétiques permanentes dans l'aluminium liquide entretiennent un écoulement qu'on appellera ici *écoulement principal* par opposition aux fluctuations causées par les ondes d'interface ou la turbulence, par exemple. En pratique, dans les cuves en opération, cet écoulement principal prend la forme de deux ou trois grands tourbillons horizontaux [26]. Des mesures dans des modèles réduits [5] et des résultats produits par des modèles numériques [7] supportent ces observations. Des déformations permanentes de l'interface sont causées par ces tourbillons, sous l'action de la pression centripète

[6, 77].

Les simulations numériques de Zikanov et al. [87] ont montré l'effet déstabilisateur de l'écoulement principal sur les ondes du type du RNM. Avec un modèle numérique amélioré, Sun et al. [77] ont montré que différentes caractéristiques de l'écoulement principal affectaient différemment la stabilité de l'interface : un écoulement qui ne déforme pas l'interface est sans effet tandis qu'un écoulement qui cause une déformation de l'interface déstabilise la cuve. Cependant, la nature des instabilités MHD n'est pas modifiée.

Kurenkov et al. [39] ont étudié, par linéarisation, les instabilités MHD dans un canal infini avec un écoulement uniforme : ils ont conclu que les instabilités de Kelvin-Helmholtz n'interfèrent pas avec les instabilités MHD de type RNM, la stabilité desquelles n'est pas affectée par l'écoulement uniforme.

Dupuis & Bojarevics [25] ont montré que la disposition des conducteurs métalliques qui collectent le courant sous la cathode, en modifiant la distribution du courant dans l'aluminium, joue un rôle important sur la nature et la force de l'écoulement principal.

Dans le chapitre 5, nous étudions une instabilité MHD de rotation associée à la présence des grands vortex dans la cuve.

2.2.7 Autres avenues

Nous regroupons ici diverses approches originales qui ne se classent pas parmi les courants dominants décrits dans les sections 2.2.1 à 2.2.6.

Descloux & Romerio [22] et Descloux et al. [21] ont étudié des instabilités dues aux courants induits par l'écoulement $\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ sous forme de couplage entre les modes gravitationnels. Bien que ces études remontent à près de vingt ans, elles méritent d'être mentionnées pour avoir exploré un mécanisme de déstabilisation autrement négligé.

Des méthodes ont été proposées pour limiter les instabilités MHD en déplaçant les anodes [14, 17] ou en contrôlant le courant de façon dynamique dans les anodes individuelles [58].

Les simulations numériques de Zikanov et al. [87] et de Bojarevičs & Pericleous [7] ont montré qu'un effet de saturation se produisait sur les instabilités MHD. Après un régime de croissance exponentielle au cours duquel l'amplitude des mouvements d'interface croît rapidement, un régime non linéaire, où l'amplitude des mouvements se stabilise, s'installe. Les courants induits étant absents de ces études numériques, ils ne

peuvent produire de dissipation par effet Joule ; l'effet de saturation observé est purement attribuable à la non-linéarité des équations du mouvement et du potentiel électrique.

Dans les observations en laboratoire (section 2.2.4) et dans les études sur l'écoulement principal (section 2.2.6), de gros tourbillons horizontaux dans l'aluminium et dans l'électrolyte sont observés. Dans une étude présentée au chapitre 5, nous décrivons un mécanisme de déstabilisation MHD essentiellement lié à la présence de ces tourbillons.

Finalement, d'après Sun et al. [78], les phénomènes les plus importants dont il faudra rendre compte dans les futures études sont les effets des canaux entre les anodes et les bulles de CO_2 produites sous les anodes.

2.3 Quelques aspects physiques de la MHD de la cuve

Récemment, un remarquable travail de bibliographie systématique et exhaustive a été effectué par Gerbeau et al. [29]. Leur revue a comblé un besoin de synthétiser d'un point de vue historique les trois dernières décennies de recherche sur la stabilité MHD des cuves d'électrolyse. Les auteurs dressent notamment une liste des phénomènes physiques à l'oeuvre dans la cuve, dont : transport de la chaleur et chauffage par effet Joule, variation de l'épaisseur du bain gelé sur les bords de la cuve, variation de la concentration d'alumine dans le bain, variation de la hauteur de métal due à la production d'aluminium par la réaction électrolyse, formation de bulles de gaz sous les anodes, et phénomènes magnétohydrodynamiques. Puisque ce sont ces derniers qui nous intéressent ici, on souhaite modéliser le comportement de la cuve sur des échelles de temps allant de quelques secondes à quelques minutes, correspondant aux périodes caractéristiques des ondes MHD ou au temps de retournement d'un grand tourbillon horizontal. Comme le soulignent Gerbeau et al. [29], plusieurs des phénomènes énumérés ci-haut peuvent être négligés sur l'échelle de temps qui nous intéresse. Par exemple, les variations de l'épaisseur du bain gelé sur les bords et en surface se produisent sur des échelles de temps beaucoup plus longues [1], la poussée d'Archimède thermique (due aux différences locales de températures) agit trop lentement [56], puis les effets liés à la réaction chimique d'électrolyse sont aussi trop lents [29]. Enfin, on néglige également la force capillaire, car elle agit sur des ondulations beaucoup plus courtes que les ondes MHD typiquement de longueur comparable à celle de la cuve.

Une revue complète et détaillée des différents aspects physiques de la MHD de la cuve de Hall-Héroult (courant électrique, champ magnétique, bain gelé, bulles de di-

oxyde de carbone, canaux entre les anodes, etc.) peut être trouvée dans les références [1, 29, 40, 56]. Dans les paragraphes suivants, nous discutons de quelques points particuliers, soit parce qu'ils commandent une critique ou une clarification par des arguments physiques, soit parce qu'ils ont simplement été négligés jusqu'ici.

2.3.1 Courant électrique

Nous montrons à l'annexe II que le courant électrique dans un circuit tend à relaxer vers une distribution qui minimise les pertes d'énergie par effet Joule. Ainsi, le courant tend à se répartir de façon optimale dans les mauvais conducteurs et à s'ajuster en conséquence dans les bons conducteurs. C'est notamment pour quoi il est très sensible aux variations de l'épaisseur de l'électrolyte.

Approximation magnétostatique

La totalité des modèles analytiques et la plupart des modèles numériques¹² reposent sur l'*approximation magnétostatique*, qui consiste à considérer que le courant électrique s'ajuste instantanément aux déformations de l'interface, sous l'hypothèse que les phénomènes électromagnétiques se produisent sur des échelles de temps beaucoup plus courtes que celles des phénomènes hydrodynamiques.

Pour déterminer l'échelle de temps sur laquelle la relaxation du courant se produit (voir annexe II), on examine le rotationnel de (1.6 *d*) en l'absence d'écoulement ($\mathbf{u} = 0$):

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{J}. \quad (2.13)$$

Ici, ∇^2 est l'opérateur à trois dimensions. Ainsi, le temps de relaxation du courant est le temps de diffusion magnétique (défini à la section 1.2.3): $T_m = \mu_0 \sigma d^2$ où d est la distance caractéristique sur laquelle la diffusion doit se produire. Sans justifier leur choix, certains auteurs [72] supposent que d est une dimension horizontale L , certains [18] choisissent une dimension \sqrt{HL} ¹³, alors que d'autres [8] se contentent tout simplement de dire que les temps caractéristiques de phénomènes électromagnétiques sont beaucoup plus courts

¹²À ma connaissance, seules les approches de Gerbeau et al. [29] et de Munger & Vincent [59] font exception.

¹³Plus précisément, Davidson & Lindsay [18] posent $T_m/T_g \sim \mu_0 \sigma u H \ll 1$, en laissant u indéterminé. Toutefois, l'équation (2.2 *a*) suggère que $u \sim L/T_g$ et alors leur estimation implique que $T_m \sim \mu_0 \sigma H L$, c'est-à-dire qu'ils choisissent $d = \sqrt{HL}$.

que ceux des phénomènes hydrodynamiques. Mais aucun auteur, à ma connaissance, ne compare réellement les valeurs numériques de ces temps, ni ne fournit une justification rigoureuse du choix des échelles.

Pour déterminer l'échelle de temps pertinente de relaxation du courant électrique, considérons une expérience (analytique) très simple. Initialement, à $t < 0$, l'interface est horizontale et il n'y a aucun courant dévié. Puis, à partir de $t = 0$, on impose soudainement une déformation fixe

$$\zeta = AH_2 \cos(k_x x)$$

de l'interface de sorte à provoquer une déviation du courant. Puisque $\sigma_2 \ll \sigma_1$, le courant relaxe instantanément dans le bain comparativement à dans l'aluminium. De plus, le bain étant un très mauvais conducteur, la distribution du courant dans celui-ci ne dépend pas de ce qui se passe dans l'aluminium. C'est même elle qui détermine la condition à l'interface pour le courant dans l'aluminium. Ainsi, imposer une faible déformation de l'interface (A petit) équivaut à imposer un courant vertical j_{1z} en $z = 0$ dans l'aluminium. D'après (2.4), le courant entrant dans l'aluminium à travers l'interface est approximativement de

$$j_{1z} = -\frac{J_0 \zeta}{H_2} = -AJ_0 \cos(k_x x) \quad (z = 0). \quad (2.14)$$

La solution pour la composante verticale de (2.13) dans l'aluminium pour $t > 0$ peut être écrite comme la somme de la solution à l'équilibre (pour $\partial j_{1z}/\partial t = 0$) et d'une série de sinus dépendant du temps :

$$j_{1z} = -AJ_0 \cos(k_x x) \left\{ \frac{\sinh[k_x(z + H_1)]}{\sinh(k_x H_1)} - \sum_{k_z} a_{k_z} \sin[k_z(z + H_1)] e^{-(k_x^2 + k_z^2)\eta t} \right\}, \quad (2.15)$$

où $k_z = n\pi/H_1$ pour $n = 1, 2, \dots$. Cette solution satisfait (2.14) à l'interface et $j_{1z} = 0$ en $z = -H_1$. La composante horizontale j_{1x} peut être obtenue avec l'équation $\partial j_{1x}/\partial x + \partial j_{1z}/\partial z = 0$, mais il n'est pas utile de l'explicitier ici. Les coefficients a_{k_z} peuvent être déterminés en imposant $j_{1z} = 0$ à $t = 0$:

$$a_{k_z} = \frac{2}{H_1} \int_{-H_1}^0 \frac{\sinh[k_x(z + H_1)]}{\sinh(k_x H_1)} \sin[k_z(z + H_1)] dz.$$

Tous les modes de la série de sinus dans (2.15) se dissipent avec le temps pour ne laisser que la solution d'équilibre. On comprend également qu'il s'agit d'une diffusion verti-

cale et non horizontale : la dépendance horizontale est en phase avec la déformation de l'interface. Pour estimer de temps de relaxation, prenons le mode le plus lent à dissiper, soit $k_z = \pi/H_1$. Puisqu'en général, $k_x \ll k_z$, on peut estimer sa dépendance temporelle comme $\exp(-k_z^2 \eta t)$, d'où

$$T_m = \frac{1}{k_z^2 \eta} = \frac{\mu_0 \sigma_1 H_1^2}{\pi^2} \approx 17 \text{ ms.}$$

La période d'une onde de gravité stationnaire $T_g = 2L/c_g \approx 44$ s, pour $L = 4$ m (la longueur d'onde est $2L$) constitue un choix de temps hydrodynamique raisonnable. Ainsi, $T_m \ll T_g$ et l'approximation magnétostatique est tout à fait justifiée.

Condition à la cathode

Dans l'ensemble des études sur la stabilité MHD des cuves de Hall-Héroult, depuis Sneyd [72], on justifie la condition $\mathbf{J}_1 = -J_0 \hat{\mathbf{z}}$ sur $z = -H_1$ par le fait que la cathode de carbone est isolante pour les perturbations du courant en raison de sa faible conductivité. Cette explication elliptique peut porter à confusion : le bain électrolytique a une conductivité encore plus faible que le carbone et, pourtant, on ne traite pas l'interface métal-bain comme isolante aux perturbations du courant dans l'aluminium, bien au contraire. Une explication plus complète nécessite deux arguments. Le premier est que le courant se distribue dans l'aluminium de sorte à minimiser les pertes par effet Joule dans le bain et dans la cathode. La distribution du courant dans l'aluminium est donc fonction de la géométrie du bain et de la cathode. Puisque, contrairement au bain, la géométrie de la cathode ne change pas avec le temps, le courant à l'intérieur de celle-ci conserve toujours la même distribution, en dépit de ce qui se passe dans le bain. Il serait plus rigoureux de dire « la même distribution *relative* », puisque la cathode pourrait accommoder un changement de l'intensité du courant total en conservant la même distribution, uniformément amplifiée ou réduite. C'est ce qui nous amène au second argument : puisque les cuves sont branchées en série en grand nombre, une variation de la résistance à l'intérieur d'une seule cuve n'est à même d'affecter la résistance totale du circuit [87], donc le courant total est constant. En somme, le courant total traversant la cathode est constant et sa distribution relative ne varie pas, donc la distribution même du courant dans la cathode est constante. Autrement dit, la cathode est imperméable aux fluctuations du courant dans l'aluminium. Dans le cas de la cuve idéalisée, cela signifie que $\mathbf{J}_1 = -J_0 \hat{\mathbf{z}}$ sur $z = -H_1$.

Conditions aux anodes

Les conditions sur le courant électrique aux anodes dépendent de la stratégie de contrôle employée et ont d'importantes répercussions sur la stabilité de la cuve. Nous traitons de la question de façon approfondie au chapitre 6.

Par ailleurs, Moreau & Evans [50] ont montré que la présence des canaux entre les anodes affecte la distribution — même à l'équilibre — du courant électrique. Zikanov et al. [87] ont cependant observé qu'ils représentent une faible correction à la force magnétique.

Rapport de conductivité infini

L'approximation du rapport de conductivité infini entre l'aluminium et l'électrolyte ($\sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$) est de moins en moins valide à mesure que la longueur de la cuve augmente (voir chapitre 6). Elle est conditionnelle à [voir (6.9), par exemple] :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \times \frac{L^2}{4H_1H_2} \ll 1. \quad (2.16)$$

Un paramètre semblable au membre gauche de (2.16) était présent dans l'étude de Bojarevičs & Romerio [8], mais sa signification et ses implications n'étaient pas discutées. Ce paramètre compare en fait la résistance ($\sim 1/\sigma_1 H_1$) du chemin horizontal que parcourt le courant électrique dans l'aluminium à celle ($\sim 4H_2/\sigma_2 L^2$) du chemin vertical du courant dans l'électrolyte.

Les cuves de conception plus récente sont toujours plus longues. Pour $L = 15$ m, par exemple, $L^2/4H_1H_2 = 5625$, et $\sigma_2/\sigma_1 \sim 10^{-4}$, dans quel cas l'approximation est discutable.

2.3.2 Champ magnétique

Le champ magnétique dans la cuve est principalement dû au passage du courant d'électrolyse vertical à l'intérieur de la cuve, donc il est principalement azimutal, comme l'indiquent les observations [5, 42] et les calculs numériques. La composante verticale B_z , bien que moins forte, s'avère très importante en matière de stabilité (voir section 2.2.1). Cependant, Gerbeau et al. [29] remarquent que B_z change typiquement de signe vers du centre de la cuve, et ils en concluent que le mécanisme de Sele [69] n'est

possiblement pas le mécanisme déstabilisateur dominant. Le modèle de Bojarevičs & Romerio [8] permet des variations spatiales du champ magnétique, mais sous forme de sinus seulement. On a plutôt besoin d'une variation linéaire d'un champ qui ne s'annule pas sur les bords.

En pratique, le champ magnétique vertical est grossièrement linéaire et symétrique par rapport au centre en x de la cuve. Cette particularité peut être incluse dans le modèle en remplaçant le B_z uniforme par $(1 - 2x/L_x)B_z$ dans le modèle du roulis (voir section 2.2.1), soit en ajoutant un facteur $(1 - 2x/L_x)$ à l'équation d'onde (2.10). La champ prend donc la valeur B_z en $x = 0$ et $-B_z$ en $x = L_x$. La matrice de couplage Γ s'en trouve remplacée par une matrice modifiée Γ' :

$$\Gamma'_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi^2}{8kk'L_xL_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(1 - \frac{2x}{L_x}\right) (\nabla\psi_{\mathbf{k}} \times \nabla\psi_{\mathbf{k}'})_z dx dy$$

L'intégrale donne presque le même résultat que (2.12), mais la symétrie des couplages est modifiée :

$$\Gamma'_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} 0 & \text{si } m + m' \text{ impair} \\ & \text{ou } n + n' \text{ pair} \\ & \text{ou } m = m' = 0; \\ \frac{-C_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}'}\epsilon}{2\sqrt{(\epsilon^2m^2 + n^2)(\epsilon^2m'^2 + n'^2)}} \frac{n^2 + n'^2}{4(n^2 - n'^2)} & \text{si } m = m'; \\ \frac{C_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}'}\epsilon}{2\sqrt{(\epsilon^2m^2 + n^2)(\epsilon^2m'^2 + n'^2)}} \frac{m'^2n^2 - m^2n'^2}{(m^2 - m'^2)(n^2 - n'^2)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans (2.12), les modes étaient découplés si $m + m'$ était pair et possiblement couplés sinon ; ici, l'inverse se produit en raison de l'antisymétrie du champ magnétique par rapport au centre en x de la cuve. Donc, le mécanisme du roulis ne disparaît pas, seulement la nature du couplage entre les modes change.

2.3.3 Force magnétique

Bojarevičs & Romerio [8] et Sun et al. [78] ont déjà comparé l'importance des différents termes de la force magnétique. Bojarevičs & Romerio [8] ont démontré que $\mathbf{j}_{1h} \times (B_z \hat{\mathbf{z}})$ était la contribution dominante à la force magnétique, mais Sun et al. [78] ont conclu que le terme issu du champ horizontal et du courant vertical dans l'électro-

lyte ne pouvait pas être négligé. Ils montrent aussi que les effets du champ généré par les courants déviés sont beaucoup plus faibles. Leurs simulations numériques [78] ont montré que l'influence des termes supplémentaires de la force magnétique ne se faisaient pas sentir au début du développement de l'instabilité. Par contre, en régime non linéaire, les effets se font sentir surtout sur l'écoulement dans l'aluminium.

Nous comparons différents termes de la force magnétique avec une approche un peu différente aux sections 5.2.5 et 5.A. Le champ magnétique est principalement induit par le courant d'électrolyse vertical et l'écoulement est dominé par des grands tourbillons. Cela suggère une décomposition cylindrique plutôt que cartésienne des champs vectoriels (écoulement, courant, champ magnétique) pour comparer les différents termes de la force magnétique.

Digression sur la décomposition de Helmholtz de la force magnétique

On a vu à la section 2.2.1 que le courant électrique dévié découle d'un potentiel Φ . La force magnétique dans la couche d'aluminium due au champ vertical $B_z \hat{\mathbf{z}}$ (qu'on suppose ici uniforme) peut donc s'écrire :

$$\mathbf{F}_1 = \nabla \Phi \times B_z \hat{\mathbf{z}} = B_z \nabla \times (\Phi \hat{\mathbf{z}}).$$

La force apparaît ainsi comme un champ à flux conservatif ($\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = 0$). Malgré cela, la partie potentielle de \mathbf{F}_1 n'est pas nécessairement nulle, comme le suggère d'ailleurs le second terme du membre droit de (2.8). La décomposition de Helmholtz [83] de la force en une partie rotationnelle et une partie potentielle n'est pas unique si les conditions aux frontières ne sont pas spécifiées. En fait, la décomposition pertinente est celle qui permet à un gradient de pression $-\nabla q$ d'équilibrer la force aux frontières et ainsi assurer $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\hat{\mathbf{n}}$ étant le vecteur unitaire normal à la frontière. On écrit donc :

$$\mathbf{F}_1 = \nabla q + \mathbf{F}'_1,$$

où

$$\nabla^2 q = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{F}'_1 = \nabla \times \mathbf{F}_1,$$

et aux frontières,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla q = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_1 \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}'_1 = 0.$$

Ainsi, la partie potentielle ∇q de la force magnétique peut causer directement des différences de pression entre les deux couches et par conséquent des mouvements ondulatoires, tandis que la partie purement rotationnelle \mathbf{F}'_l alimente plutôt l'écoulement principal dans la cuve. Notons que les instabilités peuvent interagir avec l'écoulement principal, comme c'est le cas avec l'instabilité MHD de rotation présentée au chapitre 5.

2.3.4 Écoulement

Dans l'aluminium, hormis la gravité qui agit comme force restauratrice sur des déformations de l'interface métal-bain, il n'y a aucune source mécanique de mouvement. C'est la force magnétique qui entretient l'écoulement et alimente les mouvements de l'interface. Elle résulte d'une distribution du courant électrique et d'une configuration du champ magnétique complexes. La section 5.2.2 tente de décrire l'essentiel de cette dynamique. Précisons néanmoins que, dans la partie supérieure de la couche d'électrolyte, l'échappement des bulles de dioxyde de carbone (sous-produit de l'électrolyse) peut aussi causer des mouvements [1, 62, 67].

On observe typiquement deux ou trois gros tourbillons dans l'aluminium liquide. Avec un diamètre d'environ $L \sim 4$ m et une vitesse maximale d'environ $U \sim 20$ cm/s, on trouve un nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de l'unité : $Rm \sim \mu_0 \sigma UL \sim 3,3$. L'écoulement dans la cuve se situe donc dans un régime intermédiaire entre le haut Reynolds magnétique, où le champ magnétique est gelé dans le fluide, et le bas Reynolds magnétique, où le champ magnétique n'est pas influencé par l'écoulement. Cependant, les courants électriques dominants ne sont pas les courants induits par l'écoulement $\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ mais plutôt les courants déviés par les déformations de l'interface (voir section 2.2.1).

Enfin, on sait que la turbulence joue un rôle dissipatif important dans l'écoulement dans les cuves. Comme on l'a expliqué à la section 2.2.5, une étude systématique de la turbulence dans les cuves d'électrolyse, sera nécessaire pour pouvoir élaborer un modèle plus approprié à utiliser dans les simulations numériques.

2.3.5 Synthèse de la dynamique

La figure 2.7 résume l'essentiel de la dynamique des ondes dans les cuves de Hall-Héroult. Les déformations de l'interface (ζ) modifient la résistance locale de la couche d'électrolyte, ce qui affecte la répartition du champ électrique (\mathbf{E}) et du même coup, du courant électrique (\mathbf{J}). Le courant dévié et le champ magnétique ambiant (\mathbf{B}) forcent

une accélération horizontale non uniforme des fluides (se déplaçant à vitesse \mathbf{u}), ce qui génère des mouvements de l'interface par conservation de la masse. La poussée d'Archimède sur les dénivellations de l'interface exerce en retour une force sur les fluides. En raison de leur influence non dominante, les courants induits par l'écoulement, le champ magnétique induit par ceux-ci et le champ induit par les courants déviés ne sont pas représentés sur la figure 2.7.

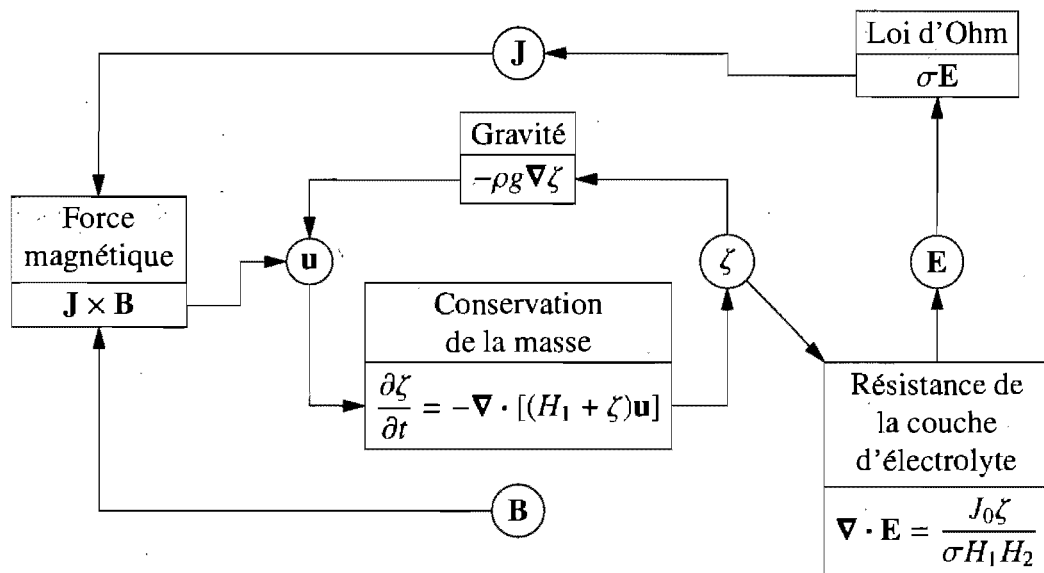


FIGURE 2.7: Schéma des interactions MHD simplifiées entre le courant électrique, le champ magnétique et les mouvements du fluide et de l'interface dans la cuve de Hall-Héroult.

CHAPITRE 3

MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR SIMULER LES INSTABILITÉS MHD

L'article qui suit présente une version améliorée de la méthode numérique tridimensionnelle développée à la maîtrise [56] pour simuler les instabilités dans les cuves de Hall-Héroult. Dans la méthode originale, pour assurer la conservation du flux magnétique ($\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$), on utilisait une formulation du champ magnétique $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ en terme du potentiel magnétique vectoriel \mathbf{a} , dans la jauge $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Cependant, le schéma numérique ne conservait pas $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Dans l'article qui suit, la situation est corrigée en ajoutant une étape projection du potentiel magnétique. Puis, pour valider la méthode numérique, le code est soumis à quatre séries de tests originaux (non tirés de la maîtrise).

Malgré l'amélioration obtenue par l'ajout d'une étape de projection du potentiel magnétique, le schéma numérique n'admet qu'un saut de conductivité limité. La méthode est utile pour faire des prédictions qualitatives, mais elle ne peut pas produire de prédictions quantitatives précises.

La mise en forme de l'article original a été adaptée par souci d'uniformité pour être inclus dans le présent texte, mais la notation mathématique originale a été conservée et peut être différente de celle des autres chapitres.

Ma contribution : développement de la méthode numérique et du code, conception des tests, calculs, simulations et analyse des résultats. Le coauteur m'a aidé à développer les idées, à alimenter la réflexion et à clarifier la rédaction.

Munger, D., Vincent, A. (2006). A level set approach to simulate magnetohydrodynamic instabilities in aluminum reduction cells. *Journal of Computational Physics*. 217:295–311.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.002>

Avec l'aimable permission de Elsevier.

With kind permission from Elsevier.

A level set approach to simulate magnetohydrodynamic instabilities in aluminum reduction cells

D. Munger, A. Vincent

Université de Montréal

Magnetohydrodynamic instabilities at the metal–bath interface in aluminum reduction cells is an important and not fully understood topic. To simulate the two-fluid three-dimensional unstationary flow subject to a background magnetic field, a level set approach is proposed. It features a formulation in terms of the magnetic vector potential to avoid a numerical growth of the divergence of the magnetic field. The same exact projection scheme (with staggered grids) is used for both the velocity field and the magnetic vector potential. Test simulations show that the overall method behaves well in purely hydrodynamic as well as in fully magnetohydrodynamic regimes, in both cases with a single fluid and with two fluids. We also simulate with our technique the metal pad roll instability and trace the behavior of coupled interfacial modes.

3.1 Introduction

Industrial production of aluminum is achieved by means of electrolysis of alumina, an aluminum oxide [34]. The latter is dissolved into a thin layer of electrolytic bath, lying on top of a liquid aluminum layer of 8.6 % higher density inside a rectangular cell (see Fig. 3.1). The horizontal dimensions of the cell are around $10\text{ m} \times 4\text{ m}$, while each

liquid layer is only about 20 cm thick. Since the electrolysis current, of 400 kA in modern cells, is carried out downward through the bath, strong Joule heating occurs, maintaining the temperature of the system around 960 deg C, that is, well over the fusion point of aluminum. Such aluminum reduction cells are lined up into a smelter and connected together in series by bus bars. A background magnetic field is therefore induced over the cells; its intensity and orientation depend on the placement of the bus bars.

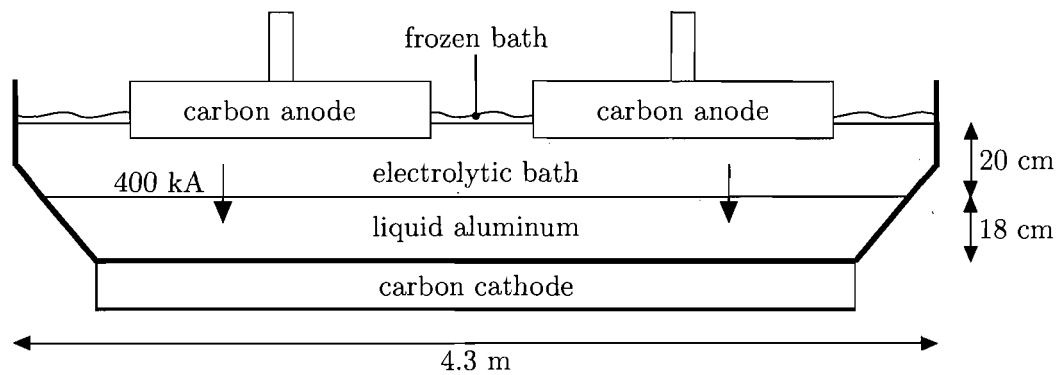


FIGURE 3.1: Vertical cut of a Hall-Héroult cell

This two-liquid layer system has been observed to be subject to interfacial instabilities driven by magnetic forces [50, 72, 73, 82]. Since the bath is 10^4 times more resistive than liquid aluminum, the electric current, which tends to flow through the least resistive paths, is very sensitive to the motion of the aluminum-bath interface. Thus, the vertical electrolysis current is diverted horizontally upon a displacement of the interface, and a magnetic force arises from the interaction between these new current components and the vertical component of the background magnetic field. This is the basis of the instability mechanism of a rotating wave known as the metal pad roll, that has been extensively studied theoretically [8, 18, 69, 74] and proven to follow from the coupling between different oscillation modes by the magnetic force.

Owing to the high temperature inside the cell, experimental data are hardly obtained and are limited, to our knowledge, to the measurement of the erosion of iron rods by the flow [34], of radioactive tracers and of anodic currents intensity [54]. So far, a direct observation of the interface motion is impossible. Thus, numerical simulation turns out to be a useful tool to investigate magnetohydrodynamic (MHD) instabilities in aluminum reduction cells.

Various two-dimensional models resulting from more or less strong approximations

have been used for numerical computations [41]. However, only a few direct three-dimensional simulations have been carried out in the past, by Potočnik [64] using the finite elements industrial code ESTER/PHOENICS, and by Gerbeau et al. [28], who developed their own, mathematically rigorous, arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) numerical method. This consists in a finite elements-like grid discretization. It requires the interface not to be altered by strong topological changes, but has the advantage of being able to handle strong discontinuities at the interface.

Like the ALE approach, the model we propose in this study relies on as little simplifying assumptions as possible. We first discuss the equations that model the physics in a Hall-Héroult cell. Next, we explain the way the interface is treated using a level set method. Then we give the details of the space-time discretization of our model. At last, a few numerical tests with our code are reported, as well as a simulation of the metal pad roll.

3.2 Physical model

We focus on the physical mechanisms that are independent of the geometrical peculiarities of the cell, such as the inclined ledges near the bottom of the cell and the open channels between the anodes [50, 53]. Thus, we consider the simplified geometry depicted in Fig. 3.2: a single anode spanning over all the top of the cell, with purely vertical walls. During the reduction reaction, the oxygen from the alumina combines to the carbon from the anodes to form carbon oxides. Our model does not account for those, unlike in the model of Potočnik [64], nor for the frozen bath that gathers on the ledges. We rather consider insulating vertical walls.

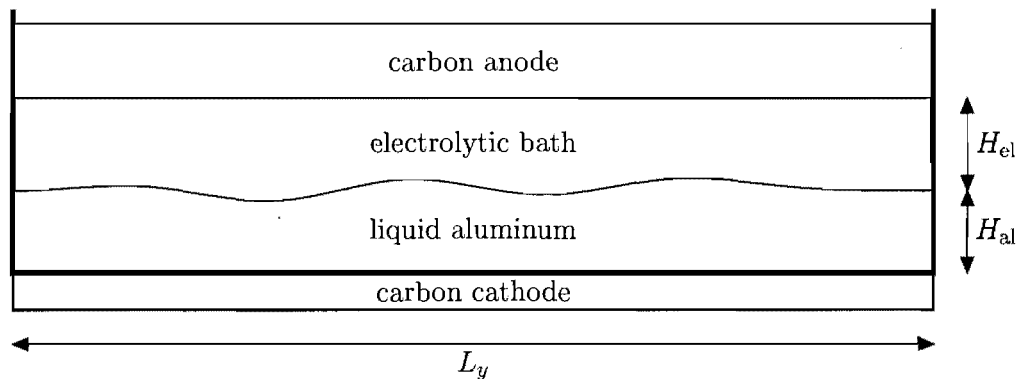


FIGURE 3.2: Simplified geometry

We solve the three-dimensional unsteady incompressible MHD equations of transport, using a formulation in terms of the magnetic vector potential.

3.2.1 Mass and momentum transport

Momentum transport is modeled by the Navier–Stokes equation [37], comprising buoyancy and magnetic effects in the last two terms:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - 2\rho \nu \mathbf{D}) + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m, \quad (3.1)$$

where \mathbf{v} is the flow velocity and ρ is the mass density. The first term on the right-hand side is the gradient of total pressure, including thermodynamic, hydrostatic and magnetostatic pressures, and is determined by the incompressibility condition

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

on mass conservation. Within the parentheses of Eq. (3.1) are the inertia and viscous terms respectively, where $\mathbf{D} = [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]/2$ is the strain rate tensor and ν is the kinematic viscosity.

The total gravitational force density is $-\rho g \hat{\mathbf{z}}$, where g is the gravitational acceleration. But, defining $\rho_0(z)$ as the equilibrium density profile, the total force is split into an hydrostatic pressure gradient $\nabla(-\int \rho_0 g dz)$ and the buoyancy force density

$$\mathbf{F}_g = -(\rho - \rho_0)g \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.2)$$

which is null at equilibrium. When the system is static, the interface is flat and stands at, say, $z = H_{\text{al}}$; then ρ_0 is set to the liquid metal density for $z < H_{\text{al}}$ and to the bath density otherwise.

We apply a similar treatment to the total magnetic force density $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, where \mathbf{J} and \mathbf{B} denote the electric current and magnetic flux densities, respectively. Due to its complexity, this task deserves its own section.

3.2.2 Magnetic force

Our aim here is to decompose the magnetic force into components with different physical meanings, in order to make some simplification, but also to allow a better in-

vestigation of the physical processes.

We first begin with splitting the electric current density into the imposed vertical current $\mathbf{J}_0 = -J_0 \hat{\mathbf{z}}$ and a disturbance \mathbf{j} from equilibrium, each of them inducing some magnetic flux, with corresponding densities \mathbf{B}_0 and \mathbf{b} . Then we add the background magnetic induction due to remote currents \mathbf{B}_{bg} , yet unspecified, so that

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{bg} + \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}. \quad (3.3)$$

Next, we have to guess the form of \mathbf{B}_0 . Though a rigorous analysis would require computing it from Biot–Savart’s law, this would lead to a needlessly complex solution. So, following Sneyd [72, 73], we set \mathbf{B}_0 to a simpler linear expression such that $\nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{J}_0$ according to Ampère’s law:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 J_0}{2} \left[\left(y - \frac{L_y}{2} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{L_x}{2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

This field, nevertheless, may not be induced solely by the current density \mathbf{J}_0 . Indeed, the difference between this expression and the exact solution to Biot–Savart’s law can be regarded as a residual part of the background field, which does not appear in the original definition of \mathbf{B}_{bg} . Next, we require that \mathbf{B}_0 induce no motion at equilibrium [72], but it is readily verified that $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0$ can be written as the gradient of a quantity that we shall call the magnetostatic pressure. The latter can be obtained from direct calculations, but needs not be detailed here. It should be noted that the vertical component of the background field cannot generate motion at equilibrium. Nevertheless, it has to be irrotational so that it is not associated with local currents.

On account of the previous discussion, we consider the following expression for the effective magnetic force:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{J}_0 \times (\mathbf{B}_{bg} + \mathbf{b}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.4)$$

with \mathbf{B} given by Eq. (3.3), and under the constraint $\nabla \times \mathbf{B}_{bg} = 0$.

3.2.3 Magnetic field evolution

Under the assumption that no high-frequency electromagnetic waves would stand in a sufficiently conducting medium, the displacement currents can be neglected in Am-

père's law [16] and this leads to the magnetohydrodynamic approximation:

$$\nabla \times \mathbf{B} \cong \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.5)$$

where μ_0 is the magnetic permeability of void (nearly that of liquid aluminum). It can be further shown that, under the same assumptions, the electric force can also be neglected [16] in the Navier–Stokes equation, which results in Eq. (3.1). The current disturbance in Eq. (3.4) is computed, according to Eq. (3.5), as $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b} / \mu_0$.

Combining Eq. (3.5) with Faraday's and Ohm's laws to eliminate the electric field yields the following evolution equation for the magnetic induction field:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (3.6)$$

The first term on the right-hand side stands for transport and stretching by the flow, while the second one basically corresponds to magnetic diffusion by Joule heating, with its coefficient defined as the magnetic diffusivity $\eta = 1 / \mu_0 \sigma$. Some additional meaning hidden into this term will be revealed in the next section.

Besides, the magnetic field must remain (from Maxwell's equations) solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.7)$$

which of course excludes magnetic monopoles. It is straightforward to show, by taking the divergence of Eq. (3.6), that \mathbf{B} remains divergence-free if $\mathbf{B}(t = 0)$ satisfies Eq. (3.7). However, the numerical resolution of Eq. (3.6) does not preserve this property in general. This is indeed a well-known problem commonly dealt with by using a projection step [43], which turned out to be inefficient in our case [60], rather leading the flow to an obviously non-physical regime. To overcome this difficulty, divergence cleaning algorithms [19, 20] have been proposed. Here, we chose instead to replace the magnetic field with its vector potential \mathbf{A} , thus ensuring $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implicitly [83].

3.2.4 Magnetic vector potential formulation

In virtue of Helmholtz's theorem, the magnetic vector potential \mathbf{a} is uniquely defined by

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

together with a gauge condition, i.e. a constraint on $\nabla \cdot \mathbf{a}$, and suitable boundary conditions. Setting $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, an evolution equation for the potential \mathbf{a} is obtained:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\nabla \varphi + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_{\text{bg}} + \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{a}) + \eta \nabla^2 \mathbf{a} - (\eta - \eta_0) \mu_0 \mathbf{J}_0, \quad (3.8)$$

where φ , the time-dependent part of the electric potential that adjusts to make the current disturbance form closed loops, is determined by the gauge condition. The magnetic diffusivity profile at equilibrium $\eta_0(z)$, constructed in the same manner as $\rho_0(z)$ in Section 3.2.1, is included so that $\partial \mathbf{a} / \partial t = 0$ at equilibrium when $\mathbf{v} = 0$ and $\mathbf{a} = 0$. It is readily verified that taking the curl of this equation leads back to Eq. (3.6).

Observing that

$$\nabla^2 \mathbf{a} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.9)$$

it is easily understood that the third term in Eq. (3.8) corresponds to the diffusion of the field induced by local current disturbances. The last term in Eq. (3.8) deserves some explanation. As opposed to the third one, it is associated to the undisturbed electrolysis current \mathbf{J}_0 , and furthermore it is null at equilibrium. Thus, it can only act through changes of the gradient of electrical conductivity that appear upon a displacement of the aluminum–bath interface. Only the rotational part of this term is physically meaningful; it symbolically writes down as:

$$\mu_0 J_0 \left[(\eta - \eta_0) \hat{\mathbf{z}} - \nabla^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla (\eta - \eta_0) \right].$$

Its contribution to the current can be obtained using Eq. (3.9):

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \dots - J_0 \nabla_h^2 (\eta - \eta_0) \hat{\mathbf{z}} + J_0 \frac{\partial}{\partial z} \nabla_h (\eta - \eta_0), \quad (3.10)$$

where ∇_h is the horizontal projection of the gradient operator, and $\nabla_h^2 = \nabla_h \cdot \nabla_h$. This expression is divergence-free, so the diverted currents form closed loops.

Before pushing this analysis any further, we emphasize that even if, at first sight, it does not make sense to take derivatives across the discontinuity at the interface, we are using, as described in Section 3.3, a level set method in which the jump in conductivity is made smooth. From now on, all discontinuities shall be assumed to be smooth. To illustrate the behavior of the right-hand side of Eq. (3.10), we consider a bump into the

interface, i.e. a zone where the bath is replaced with aluminum, which appears as a hole in the (smooth) function $\eta - \eta_0$. This means that $\nabla_h^2(\eta - \eta_0) > 0$, and from the z-component of Eq. (3.10), we see that the diverted currents flow down through the bump, which is in agreement with the fact that the current prefers the least resistive paths.

To summarize, the last term of Eq. (3.8) is at the origin of the current diversion by displacements of the aluminum–bath interface. Second-order effects are relayed to the $\eta \nabla^2 \mathbf{a}$ term. A last remark should be made about the fact that this vector potential formulation has the drawback of involving higher-order derivatives in the equations. But this is not a problem here, since \mathbf{a} remains pretty smooth because of the strong magnetic diffusion.

3.2.5 Scaling

The physical variables are made non-dimensional using the following units:

- the magnetic force characteristic propagation time $T_0 \equiv \tau_m = 5,96$ s as the unit time, defined in Table 3.1;
- the vertical anode–cathode distance $L_0 \equiv L_z = 38,0$ cm as the unit length;
- the corresponding speed $U_0 \equiv L_0/T_0 = 6,37$ cm/s as the unit velocity;
- the density $\rho_{el} = 2090$ kg/m³ of the electrolytic bath as the unit density;
- the intensity $J_0 = 6,85$ kA of the imposed current as the unit electric current;
- the corresponding magnitude $\mu_0 J_0 L_0 = 3,27$ mT of the induced field as the unit magnetic induction, implying $(\mu_0 J_0 L_0) \times L_0 U_0 = 7,92$ mV for the electric potential.

This choice results in the following non-dimensional forms of eqs. (3.1) and (3.8):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \frac{2\rho \mathbf{D}}{Re} \right) - \frac{\mathbf{F}_g}{Fr^2} + \mathbf{F}_m \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = & -\nabla \varphi + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_{bg} + \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{a}) \\ & + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{a} + \left(\frac{1}{Rm} - \frac{1}{Rm_0} \right) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

where \mathbf{F}_g and \mathbf{F}_m are given by eqs. (3.2) and (3.4), replacing the variables with their non-dimensional homologues. Characteristic times and non-dimensional numbers are shown

in Tables 3.1 and 3.2. The Reynolds number computed from the fluid's viscosity would be of the order of 10^4 , but an estimation of the turbulent transport coefficient [82] implies that our corresponding Reynolds number is rather of the order of 10^2 . It can be regarded as a turbulent Reynolds number and thus roughly accounts for non-resolved turbulent scales.

3.2.6 Boundary conditions

Since the discontinuities in the transport coefficients of eqs. (3.11) and (3.12) are assumed to be smooth (see Section 3.3), the boundary conditions at the interface need not be explicit. However, on the boundary $\partial\Omega$ of the simulation domain Ω corresponding to the inside of the cell, the following conditions hold.

Velocity field. Neglecting the inclined ledges, the frozen bath and the carbon walls roughness, we have no-slip, solid boundaries:

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Pressure. Since the boundary conditions on $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}$ are imposed while solving for the viscous term (see Section 3.4.6), before performing projection (see Section 3.4.4), we want the pressure gradient to have no effect on the normal component of \mathbf{v} :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p|_{\partial\Omega} = 0.$$

Magnetic vector potential. As stated previously, we assume the vertical walls to be insulating and the electrolysis current to be imposed at horizontal walls, so that

Time	Symbol	Definition
Magnetic diffusion	τ_η	L_0^2/η
Buoyancy	τ_g	$\sqrt{\rho_{\text{el}}L_0/\Delta\rho g}$
Magnetic force	τ_m	$\sqrt{\rho_{\text{el}}/\mu_0 J_0^2}$
Turnover	τ_U	L_0/U_0
Viscous diffusion	τ_μ	$\rho_{\text{el}}L_0^2/\mu$

TABLE 3.1: Characteristic times

Number	Symbol	Definition	Value
Interaction parameter	N	τ_U^2/τ_m^2	1
Froude	Fr	τ_g/τ_U	0.11
Magnetic Reynolds	Rm	τ_η/τ_U	9.1×10^{-2} (aluminum) 9.1×10^{-6} (bath)
Reynolds	Re	τ_μ/τ_U	500

TABLE 3.2: Non-dimensional numbers

the current disturbance cannot penetrate the boundaries:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.13)$$

Then, we consider the ferromagnetic shell enclosing the cell, assuming that the carbon wall between the liquid boundary and this shell is thin enough. The continuity of the tangential magnetic field approximates as $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_{\text{shell}}/\mu_{\text{shell}} \approx \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}/\mu_0$ on $\partial\Omega$, where $\mu_0/\mu_{\text{shell}} \ll 1$, since the shell is ferromagnetic. Therefore, the tangential components of the magnetic field are limited in magnitude on the liquids side of the wall. While \mathbf{B}_{bg} is the part of the external field not shielded by the shell, it is reasonable to assume that the tangential components of the disturbance \mathbf{b} remain significantly weaker than those of \mathbf{B}_{bg} , and regarding Eq. (3.13), take a constant value on the boundary, hence we set:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{b}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.14)$$

The second condition follows from $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$.

Recalling that $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, we see that the conditions (3.14) can be satisfied by requiring

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{and} \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.15)$$

Electric potential. Using a similar argument as for the pressure, we observe that the boundary conditions on $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}$ are imposed while solving for the diffusion term and we set:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

3.3 Level set method

In order to track the interface between the two liquids and to account for their different transport coefficients, we advect a function ϕ whose zero-level implicitly defines the location of the interface:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\phi), \quad (3.16)$$

thus passively propagating the zero-level along the flow. This is known as a level set method [61].

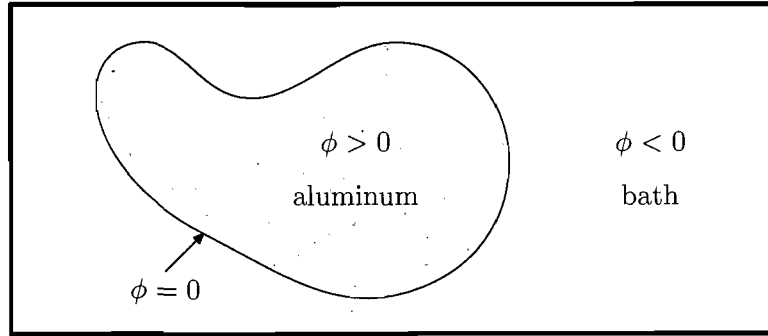


FIGURE 3.3: Level set method

As shown in Fig. 3.3, the level set function ϕ must be positive in one fluid and negative in the other, so that any fluid-dependent physical property, such as the mass density ρ , can be obtained at some given point P in the following manner:

$$\rho(P) = H_\epsilon(\phi(P)) \rho_{al} + [1 - H_\epsilon(\phi(P))] \rho_{el},$$

where ρ_{al} and ρ_{el} are the mass densities of aluminum and electrolytic bath respectively. $H_\epsilon(\phi)$ is a smooth approximate to Heaviside's step function $H_0(\phi)$, and it is defined as [80]:

$$H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi > \epsilon \\ 0 & \text{if } \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) \right] & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (3.17)$$

where the parameter ϵ stands as an effective interface width, as shown in Fig. 3.4. Here, we take this width to be proportional to the vertical grid step (Δz), since the interface is mainly horizontal. We observed, on an empirical basis, that a value of $\epsilon = 1.5 \Delta z$ keeps the scheme stable, given the magnitude of the discontinuities.

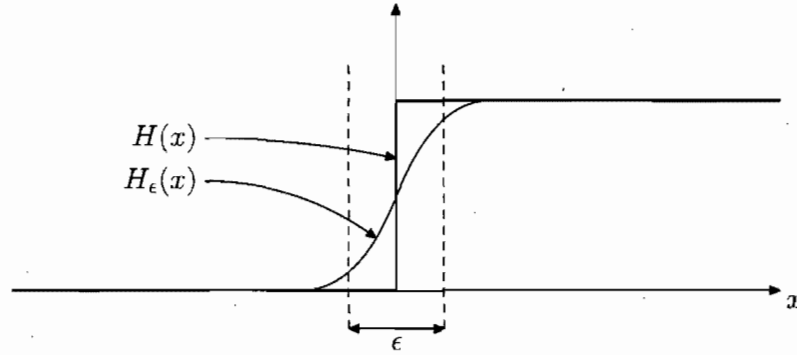


FIGURE 3.4: Smooth Heaviside function

In order for the interface width ϵ from Eq. (3.17) to make sense, $H_\epsilon(\phi)$ must run exactly from value 0, at distance ϵ from the interface on one side, to value 1, at the same distance on the other side. That is, ϕ must run from $-\epsilon$ to ϵ on the same range, i.e. ϕ has to be a signed distance function. This means that, in addition to being positive on one side of the interface and negative on the other, it must satisfy

$$\|\nabla\phi\| = 1. \quad (3.18)$$

This can be achieved thanks to a *redistancing* algorithm [80], which resets any level set function ϕ as a signed distance function, with the side effect of improving numerical mass conservation by eliminating steep gradients of ϕ near the interface. Thus, after each time integration step of Eq. (3.16), the level set function is reset to a signed distance function. First, ϕ_0 is set to the value of ϕ before redistancing and then the following equation is solved:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \mathcal{L}(\phi_0, \phi), \quad (3.19)$$

where τ is some artificial time and

$$\mathcal{L}(\phi_0, \phi) \equiv (1 - \|\nabla\phi\|) \text{sign}_\epsilon(\phi_0). \quad (3.20)$$

Eq. (3.19) reaches its steady state when Eq. (3.18) is satisfied. The sign function, whose purpose is to preserve the sign of ϕ_0 without changing its zero-level, is defined as

$$\text{sign}_\epsilon(x) = 2H_\epsilon(x) - 1.$$

The gradient operator in Eq. (3.20) is discretized using a first-order¹ upwind scheme [71]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \simeq \begin{cases} D_j^+ \phi & \text{if } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) D_j^+ \phi < 0 \text{ and } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) (D_j^+ + D_j^-) \phi < 0 \\ D_j^- \phi & \text{if } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) D_j^- \phi > 0 \text{ and } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) (D_j^+ + D_j^-) \phi > 0 \\ 0 & \text{if } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) D_j^+ \phi > 0 \text{ and } \text{sign}_\epsilon(\phi_0) D_j^- \phi < 0 \end{cases},$$

where D_j^+ and D_j^- are the standard forward and backward first-order finite differences along axis x_j . The use of such a scheme is necessary to preserve the interface's position as well as to reach the steady state of Eq. (3.19). It has been proved [79] that ϕ can be correctly redistanced within a radius $\alpha \Delta x$ when Eq. (3.19) is integrated over a time $\Delta \tau = \alpha \Delta x$. It further has been shown that $\Delta \tau$ is a valid time step for integration. Thus, a few iterations are enough to make ϕ a signed distance function in the neighborhood of the interface, which is indeed the only domain where Eq. (3.18) has to be verified. In fact, there is a volume conservation problem inherent to this redistancing technique [79]. For each control volume \mathcal{V} , a corrective term must be appended to Eq. (3.19):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \mathcal{L}(\phi_0, \phi) + \lambda f(\phi),$$

where λ and $f(\phi)$ depend on \mathcal{V} and have to be defined such that the following constraint be satisfied:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\mathcal{V}} H_\epsilon(\phi) dV = 0,$$

i.e. the volume (of aluminum) enclosed by the interface has to be conserved within the control volume \mathcal{V} . Differentiating the above equation results in:

$$\int_{\mathcal{V}} H'_\epsilon(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dV = \int_{\mathcal{V}} H'_\epsilon(\phi) [\mathcal{L}(\phi_0, \phi) + \lambda f(\phi)] dV = 0.$$

Thus, an expression for λ can be obtained:

$$\lambda = \frac{- \int_{\mathcal{V}} H'_\epsilon(\phi_0) \mathcal{L}(\phi_0, \phi) dV}{\int_{\mathcal{V}} H'_\epsilon(\phi_0) f(\phi) dV}. \quad (3.21)$$

¹Other spatial derivatives in our scheme are discretized at second-order. The purpose of the redistancing process is just to keep the slope of ϕ of order unity; it involves no physical process.

Then, choosing

$$f(\phi) \equiv H'_\epsilon(\phi) \|\phi\|$$

allows the correction to be made only at the interface and thus preserves Eq. (3.18) elsewhere: the derivative H'_ϵ of the smooth Heaviside's function H_ϵ is in fact a smooth approximate of Dirac's distribution δ . So, $f(\phi)$ and thus the correction to Eq. (3.19) are null everywhere but at the interface. Finally, Eq. (3.21) becomes:

$$\lambda = \frac{-\int_{\mathcal{V}} H'_\epsilon(\phi_0) L(\phi_0, \phi) dV}{\int_{\mathcal{V}} [H'_\epsilon(\phi_0)]^2 \|\nabla \phi_0\| dV}.$$

This summarizes the approach proposed by Sussman & Fatemi [79]. For the integrals in the last equation, we use the same discretization as when dealing with averages (see Section 3.4.3), but without normalizing by the volume.

3.4 Discretization

3.4.1 Staggered grids

The fields \mathbf{v} , \mathbf{a} , p , φ and ϕ are defined at discrete locations on a fixed regular mesh, whose control volume of size $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ is illustrated in Fig. 3.5. The velocity and magnetic vector potential fields components are staggered on the faces of this control volume, while all other quantities are defined in the center. This allows for an exact projection (see Section 3.4.4).

3.4.2 Finite volumes

The momentum conservation Eq. (3.1) is written in conservative form:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = Q - \nabla \cdot \mathbf{J},$$

where Q is a source (sink) term and \mathbf{J} is the momentum flux density. Integrating over a control volume \mathcal{V} bounded by the closed surface $\partial \mathcal{V}$ and normalizing by its volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ yields:

$$\frac{d\overline{\rho \mathbf{v}}}{dt} = \overline{Q} - \frac{1}{V} \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad (3.22)$$

where the upper bar $\bar{\cdot}$ denotes the average.

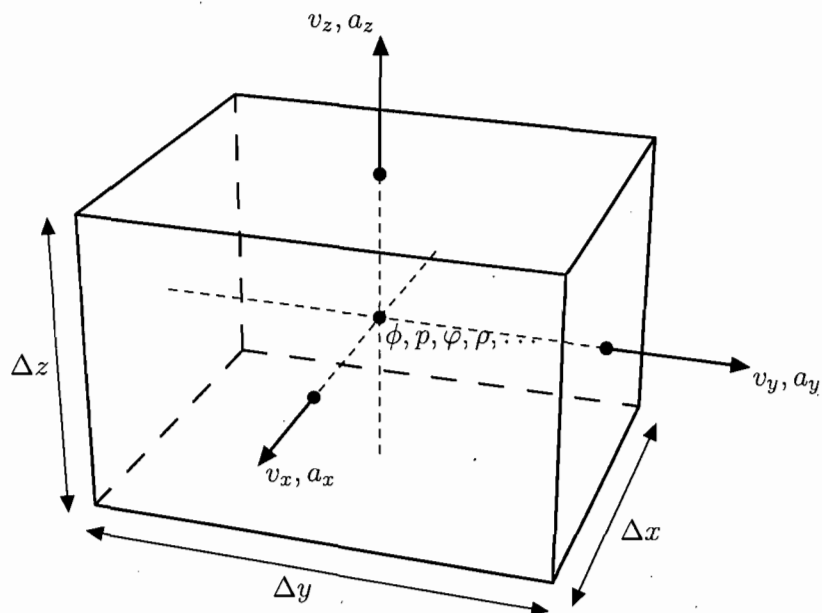


FIGURE 3.5: Control volume

Since the control volume is rectangular, the surface integral in Eq. (3.22) reduces to a sum of the face-averaged components of \mathbf{J} (see Fig. 3.6):

$$\frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{k=1}^3 \frac{\overline{J}_k^+ - \overline{J}_k^-}{\Delta x_k}.$$

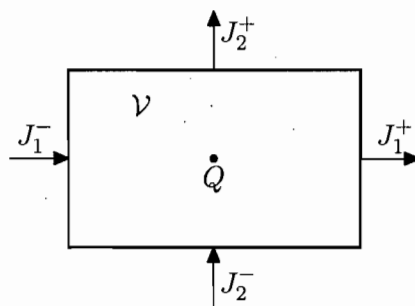


FIGURE 3.6: Finite-volume method (2D cut)

3.4.3 Averaging and reconstruction

After time integration of Eq. (3.22), one has to recover the point values of $\rho \mathbf{v}$ from $\overline{\rho \mathbf{v}}$. This leads to a reconstruction process. We define the (independent) averaging operators

\mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 and \mathcal{A}_3 along each axis inside the control volume \mathcal{V} , such that

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 \rho\mathbf{v} \quad (3.23)$$

and, e.g.

$$\overline{J_1^+} = \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 J_1^+. \quad (3.24)$$

Next, we define the corresponding inverse operators $\mathcal{R}_1 = \mathcal{A}_1^{-1}$, $\mathcal{R}_2 = \mathcal{A}_2^{-1}$ and $\mathcal{R}_3 = \mathcal{A}_3^{-1}$ for reconstruction of point values. Now, substituting eqs. (3.23) and (3.24) in Eq. (3.22), then applying 3D reconstruction $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$ results in the following average-free equation:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} = Q - \sum_{k=1}^3 \frac{\mathcal{R}_k(J_k^+ - J_k^-)}{\Delta x_k}.$$

This method avoids some unwanted numerical diffusion from the usual averaging–reconstruction cycle. Reconstruction is achieved using 3-point stencils derived from Taylor expansions of the averages around the reconstructed point.

3.4.4 Projection

To enforce the $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ and $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ conditions, we solve for p and φ by Hodge–Helmholtz decomposition, using a projection method with staggered grids. See Ref. [27] for a complete description of the method used and Ref. [65] for the treatment of stencils with variable density.

3.4.5 Time integration

Time integration is achieved using a fully explicit second order Adams–Bashforth (AB2) scheme for most terms of eqs. (3.11) and (3.12): $f^{n+1} = f^n + \Delta t (3f_t^n - f_t^{n-1})/2$, where f^n denotes the value of the discrete field f at the n th time step, and f_t , the time derivative of f . The first time step is achieved with a forward Euler scheme. The AB2 scheme is known to be stable and weakly dispersive [10]. It is thus well suitable for simulating a wave-generating system such as the aluminum reduction cell with interfacial waves. There are, however, two exceptions to the use of AB2. First, for the viscous term, a second order semi-implicit Crank–Nicolson (CN) scheme is used: $f^{n+1} = f^n + \Delta t (f_t^n + f_t^{n+1})/2$. Second, since the coefficient of the magnetic diffusion term takes a very large value inside the electrolytic bath, it makes no sense to advance

it with an explicit scheme, hence the unconditionally stable first-order backward Euler (BE) scheme has been chosen: $f^{n+1} = f^n + \Delta t f_i^{n+1}$.

3.4.6 Overall algorithm

The dependencies are illustrated in Fig. 3.7. The method can be summarized as follows:

1. Transport of the level set function ϕ .
2. Redistancing of ϕ about the interface.
3. Partial transport of the momentum density $\rho\mathbf{v}$.
4. Implicit viscous term solver (GMRES).
5. Projection of \mathbf{v} into the space of solenoidal fields (GMRES).
6. Partial transport of \mathbf{a} (GMRES).
7. Implicit resolution of the magnetic diffusion term (GMRES).
8. Projection of \mathbf{a} into the space of solenoidal fields (GMRES).

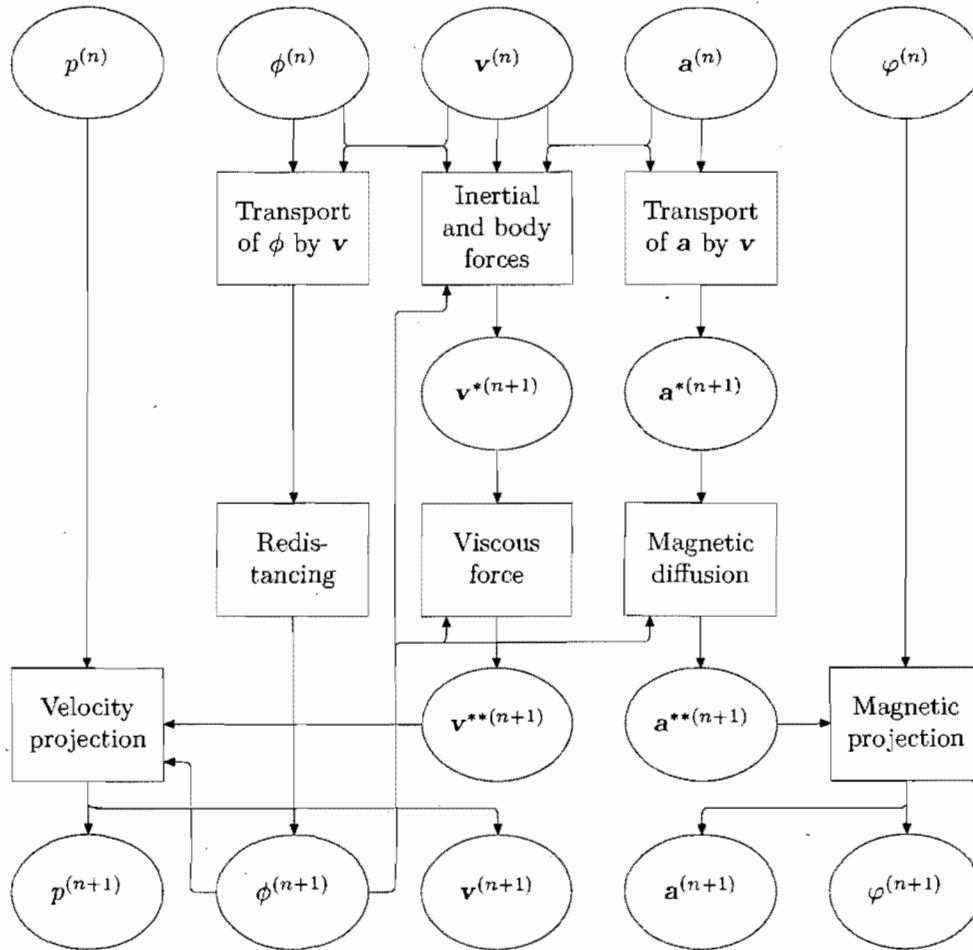
We use the PETSc library's [4] implementation of the generalized minimal residual (GMRES) iterative solver, preconditioned with a symmetric successive over relaxation (SSOR) factorization.

3.5 Tests and results

This section discusses some results computed using the numerical method describe above. In the first two tests, magnetic effects are turned off in order to investigate the hydrodynamic (HD) reliability of the code only. The last two tests concern MHD aspects.

3.5.1 Test 1: Single-fluid hydrodynamics. Homogeneous turbulence.

In this test, we simulate a forced turbulent single-fluid but incompressible viscous flow inside a cubic box of size L_0 , at different resolutions $n \equiv n_x = n_y = n_z$, ranging from 30 to 160 grid points along each direction. The numerical Reynolds number (as



defined in Eq. (3.11) and Table 3.2), is $Re = 500$. Spectral forcing of random orientation is applied to the largest scales, with an energy injection rate kept constant regardless of the resolution. The following analysis displays the properties of the flow averaged over 25 mean turnover times. Average kinetic energy spectra (Fig. 3.8) show that numerically underresolved flows accumulate energy that can not be dissipated. However, the dissipation tails of the spectra do not change anymore for resolutions larger than 100, as the smallest scales become better resolved. Depending on the resolution, the

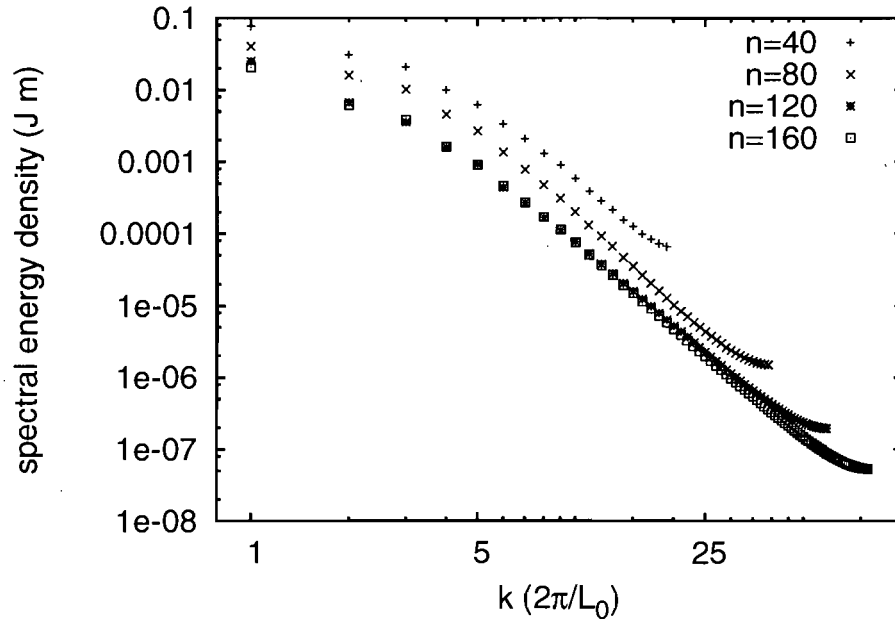


FIGURE 3.8: Test 1: Hydrodynamic single-fluid turbulence. Kinetic energy spectrum versus the normalized wavenumber, in logarithmic scale, for different numbers $n \equiv n_x = n_y = n_z$ of grid points along each axis.

turbulent Reynolds number takes different average values (Fig. 3.9), decreasing from $Re_t \approx 200$ and stabilizing around $Re_t \approx 110$ for the highest resolutions. This is in agreement with the spectra shown in Fig. 3.8. The turbulent Reynolds number is computed as $Re_t = u_0 l_0 / \nu$, in terms of the rms velocity u_0 and the integral scale

$$l_0 = 2\pi \frac{\int e_k / k dk}{\int e_k dk},$$

where e_k is the spectral energy density at wavelength k . The slight increase of l_0 (Fig. 3.9) is expected for higher resolutions because the numerical grid viscosity is weaker [66] but it does not change much for n above 120 and this is also the case for the energy transfer rate $\epsilon = u_0^3/l_0$ (Fig. 3.9). The convergence of the physical properties of the flow for high n reveals that, despite a small residual amount of energy accumulating in the tail of each spectrum, there are enough grid points to account for all relevant scales. Simulating the whole dissipative range [13] is not an easy task and it may not be always necessary [48].

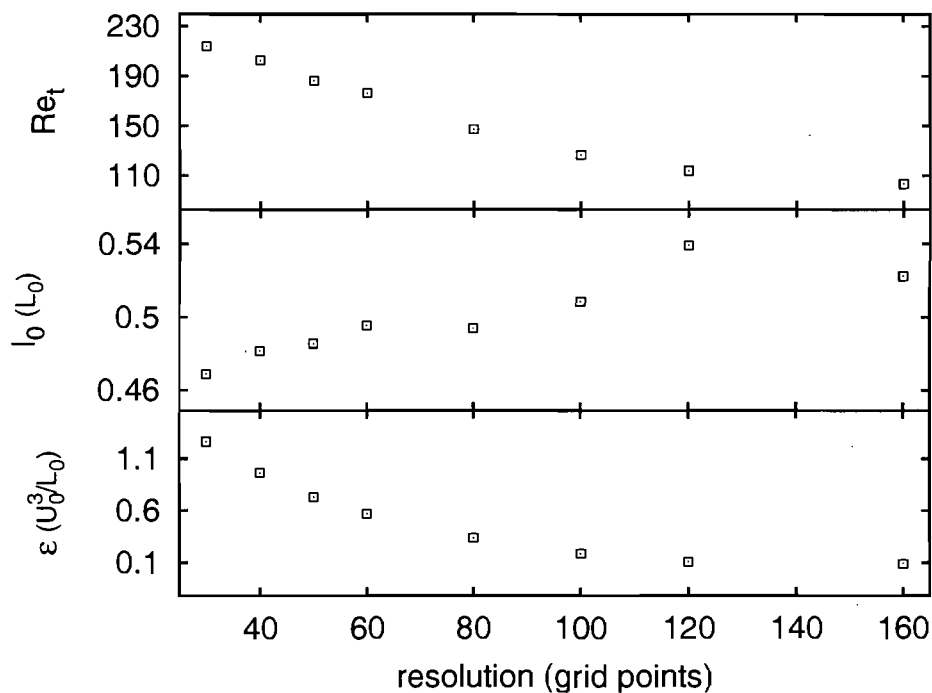


FIGURE 3.9: Test 1: Hydrodynamic single-fluid turbulence. From top to bottom: turbulent Reynolds number Re_t , integral scale l_0 in units of L_0 , and kinetic energy transfer rate ϵ in units of U_0^3/L_0 .

3.5.2 Test 2: Two-fluid hydrodynamics. Pure gravity modes.

We now simulate a two-fluid flow but we still do not consider the magnetic effects. The dispersion relation derived by Sneyd [73] for shallow layers (long waves) reduces,

in this case, to the following interfacial gravity wave dispersion relation:

$$\omega = -i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta\rho g k}{\rho_{al} \coth kH_{al} + \rho_{el} \coth kH_{el}} - \frac{\gamma^2}{4}},$$

where γ is a damping factor depending on linear friction terms in both layers, while H_{al} and H_{el} refer to the respective equilibrium depths of aluminum and bath.

In our three-dimensional case, there is no linear friction but rather viscous effects and no-slip boundary conditions. To keep things simple for purposes of numerical testing, we set the physical viscosity to a value low enough so that we can assume $\gamma = 0$ in the above dispersion relation. At initial time in an 8:1-aspect ratio cell, the velocity field is null and the interface is given the sinusoidal shape of a single mode. Then we compute the wave frequencies based on the period of the first oscillation, for two different resolutions: $n_x = 60, n_z = 40$, and $n_x = 80, n_z = 80$. This is shown in Fig. 3.10. The relative error for both resolutions remains below 3% for all wavenumbers up to $k = 8\pi/L_x$. Wavenumbers greater than $8\pi/L_x$ are less relevant in the context of long waves theory, because in such cases, nonlinear effects arise.

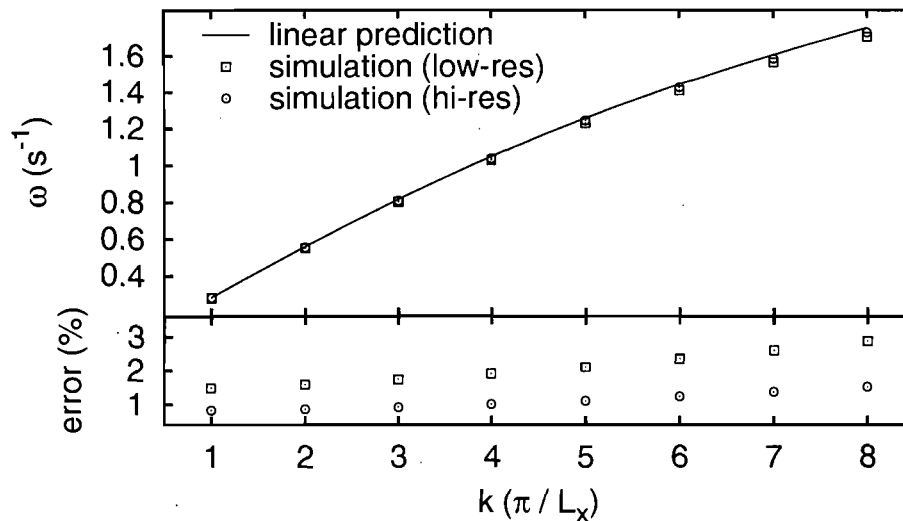


FIGURE 3.10: Test 2: Pure gravity modes. Dispersion relation as predicted by linear theory (solid line) and as computed for an 8:1 aspect ratio with two different resolutions ($n_x = 60, n_z = 40$ (squares)) and ($n_x = 80, n_z = 80$ (circles)) is shown at top. Relative error between computed and predicted values is shown at bottom.

3.5.3 Test 3: Single-fluid MHD. Diffusion along the magnetic field.

In this test, we consider the turbulent flow of a single fluid subject to a strong vertical uniform external magnetic field. Theory [75] predicts that in such a situation, momentum is expected to diffuse along the magnetic field lines, so that the vortices elongate and the flow becomes anisotropic. The horizontal layers near the top and bottom walls become strongly correlated within a characteristic time $\tau_{2D} = \rho L_z^2 / \sigma B_{bg}^2 L_x^2$. With our scaling and definitions from Table 3.1, this is equivalent to $\tau_{2D} = (\tau_m^2 / \tau_\eta)(L_z / L_x)^2 / \beta = \tau_m / \beta Rm$, where β is the dimensionless magnitude of the background magnetic field, in units as chosen in Section 3.2.5.

We performed simulations of a large scale decaying random turbulent flow in a cubic box of size L_0 with a background uniform vertical magnetic field given by:

$$\mathbf{B}_{bg} = \beta \mu_0 J_0 L_0 \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.25)$$

The purpose is to compare the horizontal and vertical correlation lengths which we define respectively as:

$$l_h = 2\pi \frac{\int e_{\mathbf{k}} / \sqrt{k_x^2 + k_y^2} d^3\mathbf{k}}{\int e_{\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}} \quad \text{and} \quad l_z = 2\pi \frac{\int e_{\mathbf{k}} / k_z d^3\mathbf{k}}{\int e_{\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}}.$$

Simulations were carried out for three different magnitudes of the background magnetic field $B_{bg} = \beta \mu_0 J_0 L_0$. The behavior of the ratio l_h / l_z versus the normalized time t / τ_{2D} , plotted in Fig. 3.11, is in agreement with theory [75]: after time τ_{2D} , the vortices are spread vertically and l_h / l_z reaches a steady state, corresponding to an equilibrium between the diffusion of momentum along the magnetic field lines and the restoration of isotropy by nonlinear inertial effects.

3.5.4 Test 4: Two-fluid MHD. Metal pad roll.

The fourth test regards MHD interfacial gravity waves at low magnetic Reynolds number. This simultaneously accounts for all of the previous features. Observations [40] suggest that a uniform vertical background field has important effects on the flow stability [8, 18, 69]. Therefore, as in Ref. [28], we consider such a background magnetic field given by Eq. (3.25). In this context, the dimensionless parameter β is a measure

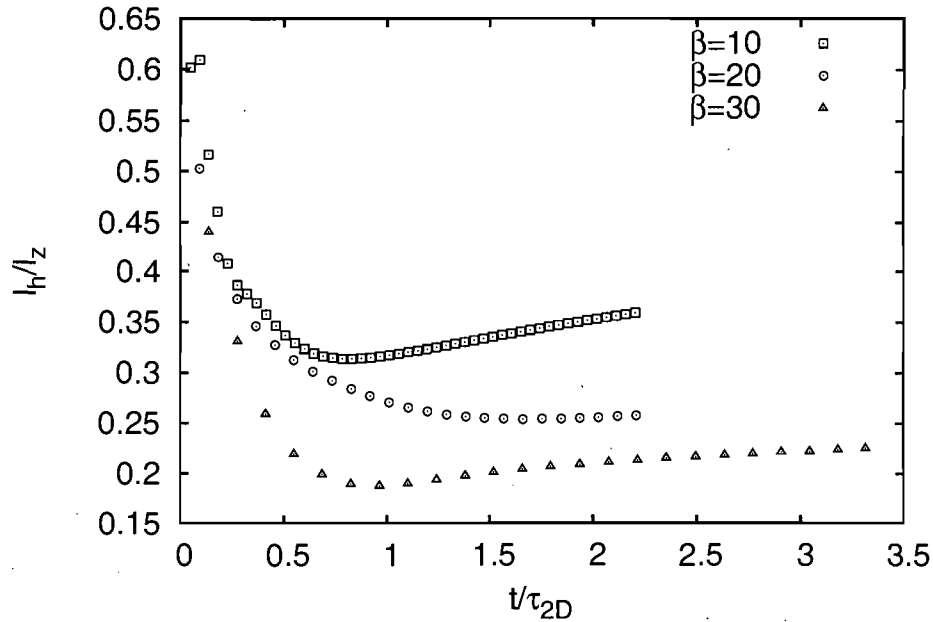


FIGURE 3.11: Test 3: Single-fluid MHD. This plot shows the evolution of the momentum anisotropy versus time under a given external magnetic field. The ratio of the horizontal scale l_h to the vertical scale l_z is plotted against the normalized time t/τ_{2D} for three different magnitudes of the background vertical magnetic field. Around $t = \tau_{2D}$, the anisotropy reaches a nearly steady state as predicted by theory [75].

of the relative intensity of the background field in terms of that induced by the imposed current \mathbf{J}_0 . We have further considered an equal depth of aluminum and bath. In order to be able to compute the flow, we had to reduce the electrical conductivity jump by taking $Rm_{el} = 10^{-3}$ in the electrolytic bath. We believe that this approximation has no important physical drawback, since the $Rm_{el} \ll Rm_{al} < 1$ property is preserved. Following Sneyd & Wang [74], the vertical displacement of the interface $\zeta(x, y)$ is expanded into a cosine series:

$$\zeta(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn}(t) \cos \frac{m\pi x}{L_x} \cos \frac{n\pi y}{L_y}.$$

We now focus on the results from our simulations in a square cell of aspect ratio 3:3:1. At time $t = 0$, all velocity components are set to zero. A perturbation $\zeta(x, y)$ of the interface is set to $a_{10} = -0.025L_0$, i.e. the first x -mode is perturbed by a factor of 2.5 %. All other coefficients a_{mn} are set to zero. As expected, the amplitude of the first y -mode, which is the most strongly coupled mode to a_{10} , grows during the first

oscillations. Later, when the flow has reached a steady state, a_{10} and a_{01} dominate, while all other coefficients have remained two orders of magnitude below. Coefficients a_{10} and a_{01} are plotted in Fig. 3.12, for two different magnitudes of B_{bg} . The roll being a rotating wave, the trajectory through phase space becomes perfectly round after a dozen of oscillations in the stable case, i.e. a_{10} and a_{01} are of same amplitude but the two phases are shifted by $\pi/2$, the modes being in resonance together. Our results are qualitatively the same as in Ref. [28] in that the roll appears, is stable for weak vertical magnetic field, and unstable for a strong one. However, in their study, some parameters were slightly different than ours, with corresponding non-dimensional numbers $Re = 1000$, $Fr = 1.2$, $Rm_{al} = 1$ and $Rm_{el} = 10^{-4}$. It is to be noted that even though our method does not allow for the 10^4 conductivity ratio as opposed to the ALE approach [28], we still achieve a high precision tracking of the interface.

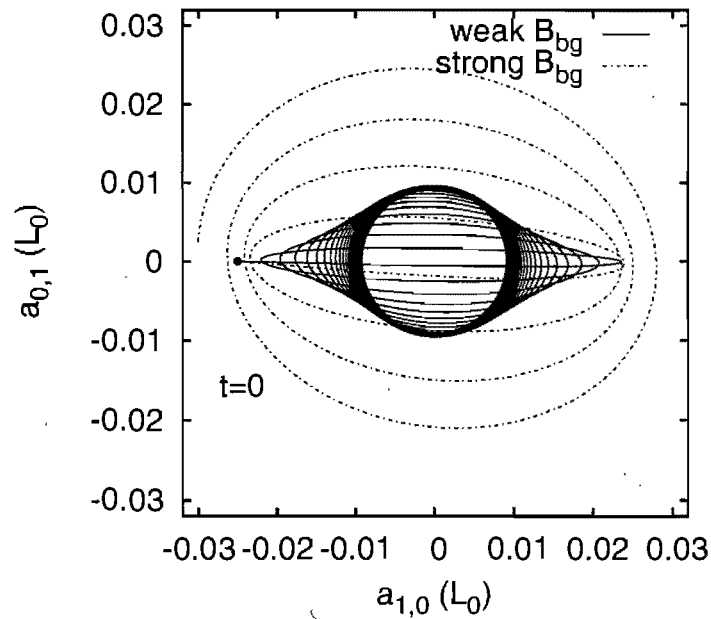


FIGURE 3.12: Test 4: Two-fluid MHD flow: metal pad roll instability. Evolution in time of the first $a_{0,1}$ and $a_{1,0}$ modes of the interface vertical displacement, in units of L_0 , during the metal pad roll in an aspect ratio 3:3:1 cell. The rotating wave is stable for a weak background field ($\beta = 0.3$, total integration time of 4 min 28 s) and unstable for a stronger ($\beta = 1.0$, integration time of 36 s).

In another simulation, we used a rectangular cell of aspect ratio 12:4:1, a background magnetic field of $B_{bg} = 3.27$ mT, and initial conditions $a_{30} = -0.025L_0$, all other cosine

coefficients a_{mn} being null. The dominant modes a_{30} and a_{01} are plotted in Fig. 3.13. As opposed to the square cell, there are also other modes, weaker though non-negligible, namely a_{21} and a_{51} followed by a_{41} . For this simulation, with a resolution of $n_x \times n_y \times n_z = 120 \times 40 \times 20 = 96\,000$ grid points, the integration of one turnover time $\tau_U = \tau_m$, as defined in Table 3.1, takes 2 hours in CPU time on a small AMD Athlon XP 1700+ machine, the biggest part of the time being spent in the GMRES solver. Since the PETSc library is MPI-ready, our code could be readily parallelized.

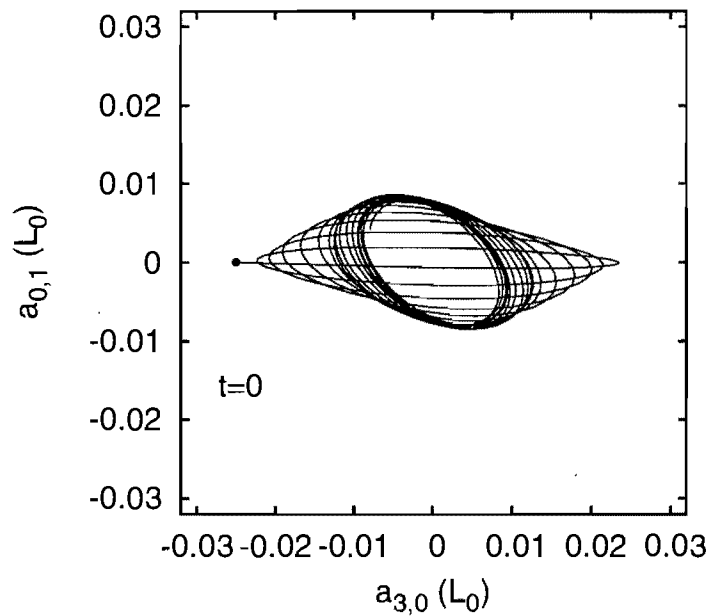


FIGURE 3.13: Test 4: Metal pad roll. Evolution in time of the dominant modes $a_{0,1}$ and $a_{3,0}$ of the interface vertical displacement, in units of L_0 , during the metal pad roll in a cell of aspect ratio 12:4:1. The total integration time is 3 min 17 s.

3.6 Conclusion

We have combined a three-dimensional finite-volume method with a level set technique to simulate the MHD instabilities in aluminum reduction cells. In our model, the magnetic and current fields are both split into a constant part and a flow-dependent disturbance. Keeping $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ is achieved by writing the equations and making the computations in terms of the magnetic vector potential \mathbf{a} instead of the magnetic field

itself. The gauge condition $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ is enforced by using the same exact projection scheme on \mathbf{a} as on \mathbf{v} , both fields being defined on staggered grids.

The code has been subject to four series of tests: (1) HD turbulence and (2) HD interfacial gravity waves; then (3) MHD growth of anisotropy in a single fluid, and finally (4) the metal pad roll. The purpose of this fourfold testing was to verify that the code behaves correctly in single-fluid HD and MHD regime, as well as in two-fluid HD conditions, before considering two-fluid MHD. It is found in test 1 that the kinetic energy spectra, the turbulent Reynolds number and the integral scale of turbulence converge at sufficiently high resolution. In test 2, the computed gravitational wave frequencies are in very good agreement with the ones predicted by the linear shallow-layers theory. Test 3 showed that momentum diffuses along the magnetic field lines during the time scale estimated from low- Rm theory. With the last test (4), the code has proven to be able to successfully reproduce a well-known regime of flow in aluminum reduction cells, namely the metal pad roll. We believe that our method can be used with a good level of confidence to investigate MHD instabilities in two-fluid flows.

Acknowledgments

This research has been supported by *Alcan International Ltd* and the *Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada*, from which the first author has been granted a scholarship. Most of the computations were performed on computers of the *Réseau Québécois de Calcul Haute Performance*. The authors are grateful to Thierry Tomasino from *Alcan CRV* and to Tony Lelièvre from the *Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique*, at *École nationale des ponts et chaussées* for enlightening discussions about their numerical methods. The authors also wish to thank both referees for their interesting remarks and conscientious review.

FIN DE L'ARTICLE

CHAPITRE 4

SIMULATION NUMÉRIQUE DES INSTABILITÉS MHD

Dans l'article qui suit, on simule le roulis de la nappe de métal et on observe ce qui semble être une nouvelle instabilité associée à la rotation des liquides. Cette instabilité particulière fait l'objet du chapitre 5.

La mise en forme et la notation de l'article original ont été adaptés par souci d'uniformité pour être inclus dans le présent texte. Quelques éléments de la notation mathématique demeurent toutefois différents.

Ma contribution : calculs, simulations, analyse des résultats. Le coauteur m'a aidé à développer les idées, à alimenter la réflexion et à clarifier la rédaction.

Munger, D., Vincent, A. (2006). Direct simulations of MHD instabilities in aluminium reduction cells. *Magnetohydrodynamics*. 42(4):417–425.

<http://mhd.sal.lv/contents/2006/4/p417.html>

Avec l'aimable permission de Magnetohydrodynamics.

With kind permission from Magnetohydrodynamics.

Direct simulations of MHD instabilities in aluminum reduction cells

D. Munger, A. Vincent

Université de Montréal

Simulations of magnetohydrodynamic instabilities in aluminum reduction cells are performed using a three-dimensional, nonstationary level set method. The magnetic field is kept divergence-free thanks to a formulation of the MHD equations in terms of the magnetic vector potential. Our simulations show that the metal pad roll becomes unstable for some critical value of the background vertical magnetic field, although the metal depth is also a factor that has a strong influence on the stability of the roll. Finally, we investigate an interfacial vortex instability, causing a central bump in the interface to grow.

4.1 Introduction

Magnetohydrodynamic (MHD) instabilities in aluminum reduction cells (Fig. 4.1) have been the subject of several studies, since the pioneering work of Urata et al. [82]. The interaction between the electrolysis current in the cell and the background magnetic field due to remote currents gives rise to a strong magnetic force acting on the fluids inside the cell. Different kinds of waves thus appear at the interface between the liquid aluminum layer and the electrolytic bath lying on its top. These disturb the current distribution inside the cell so that certain modes become unstable.

It has been shown by means of linear analysis, that the longest waves tend to be more unstable, and that resonance may occur between waves propagating along perpendicular

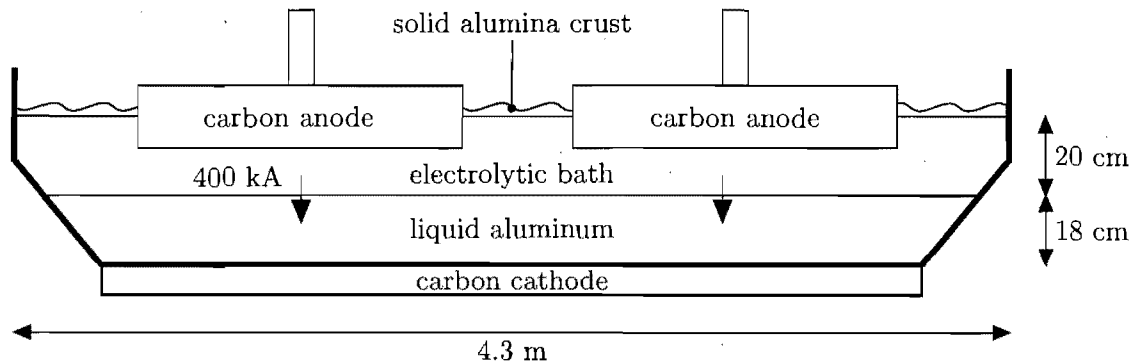


FIGURE 4.1: Approximate vertical cut of an AP30 Hall-Héroult cell. The hidden dimension is about 13.6 m deep.

horizontal directions, coupled together by the magnetic force [8, 18, 74]. On the other hand, numerical simulations were performed either with industrial codes [64] or with a fully three-dimensional research code using finite elements [28]. These studies mainly focused on obtaining the well-known metal pad roll, a particular instability which manifests itself as a rotating wave at the aluminum–electrolyte interface. More recently, the destabilizing effect of distortions of the interface caused by a background flow has been confirmed by numerical simulations using a linearized perturbation analysis based on a shallow-water model [77].

In order to solve the nonstationary magnetohydrodynamic equations in a three-dimensional two-fluid system such as the aluminum reduction cell, we have designed a novel numerical method by combining a level set technique together with a finite volume discretization. Moreover, our equations are written in terms of the magnetic vector potential, thus ensuring the magnetic field to remain exactly divergence-free [56].

Not only we found, as was found already [28, 64], that the metal pad roll becomes unstable for some critical value of the background vertical magnetic field but we also simulated a different configuration which resulted in an unstable bump of aluminum.

4.2 Physical model

For the sake of simplicity, the system is idealized by considering a single anode spanning over the top of the cell, and by approximating the bottom of the cell to be rectangular. These aspects of the geometry are assumed not to influence the essential

physics of the flow.

4.2.1 Conservation equations

The flow in the cell is described by the unsteady dissipative MHD equations [16]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{Rm} \nabla \times \mathbf{B} \right) \quad (4.1)$$

and

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{1}{Fr^2 Al^2} (\rho - \rho_0) - \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \frac{2}{Re Al} \mathbf{D} \right) + \mathbf{f},$$

where ρ_0 is the dimensionless density profile at equilibrium (when the aluminum–electrolyte interface is flat and there is no fluid motion), \mathbf{D} is the usual deformation rate tensor and \mathbf{f} is the magnetic force. The scaling is based on a unitary interaction parameter or Stuart number (ratio of the magnetic to inertial forces), choosing the height of the cell as the length scale and the electrolyte’s density as the reference mass density. Aluminum is 8.6 % more dense than the latter, so $|\rho - \rho_0| < 0.086$ bounds the buoyancy term. Since the electromagnetic influence mostly rely on the electrolysis current of magnitude J_0 , we set J_0 as the electric current unit, and $\mu_0 J_0 L$ as the magnetic field unit. The corresponding dimensionless numbers are the Froude number $Fr \simeq 0.18$, the Alfvén number $Al \simeq 0.64$, and the effective hydrodynamic Reynolds number $Re \simeq 76$, which indeed consists in a zeroth order approximation of the turbulent diffusion of momentum. The magnetic Reynolds number is fluid-dependent and ranges from 9×10^{-2} in the aluminum to 10^4 times smaller in the electrolytic bath. In the numerical simulations, this jump is restricted to a 10^2 ratio for stability and cost considerations. Note, however, that this is almost physically equivalent, since the bath can be considered as a perfect insulator with contrast to the aluminum¹.

The electric current is dominated by the vertical uniform downward electrolysis current $\mathbf{J}_0 = -J_0 \hat{\mathbf{z}}$, perturbed by a deflection \mathbf{j} due to: (1) the displacement of the aluminum–electrolyte interface; and (2) the motion of the electrically conducting fluids. The corresponding induced magnetic fields, \mathbf{B}_0 and \mathbf{b} respectively, add to a background magnetic field \mathbf{B}_{bg} due to remote current sources. The actual configuration of this background field depends on various factors such as the placement of the bus bars

¹Despite the reduced conductivity ratio, the interface remains almost equipotential.

or the magnetic shielding provided by the ferromagnetic shell of the cell. However, in the present study, we consider only the uniform and linear components of \mathbf{B}_{bg} . It is straightforward to show that the force resulting from the interaction of \mathbf{J}_0 with its self-induced field \mathbf{B}_0 is irrotational and balanced by a gradient of pressure. Following Sneyd [72, 73], we constrain \mathbf{B}_{bg} accordingly to such a form that its interaction with \mathbf{J}_0 will give rise to no motion of the fluids. The net magnetic force can therefore be written as $\mathbf{f} = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{b} + \mathbf{j} \times (\mathbf{B}_{bg} + \mathbf{B}_0 + \mathbf{b})$.

4.2.2 Magnetic potential formulation.

To enforce the divergence-free condition on \mathbf{b} , the magnetic field is modeled in terms of the magnetic vector potential \mathbf{a} , uniquely defined by $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ and $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ in virtue of Helmholtz' theorem. Its time evolution is given by:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\nabla \varphi + \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_{bg} + \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{a}) + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{a} - \left(\frac{1}{Rm} - \frac{1}{Rm_0} \right) \mathbf{J}_0, \quad (4.2)$$

where Rm_0 is the vertical profile of the equilibrium magnetic Reynolds number. It is straightforward to show that the curl of the latter equation reduces to Eq. (4.1). The electric potential φ is determined by the gauge condition $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, which allows for a simple, uncoupled diffusion term. While the usual first terms in Eq. (4.2) may be self-explanatory, the last one infers from the deflection of the electric current $\mathbf{j} = -\nabla^2 \mathbf{a}$ due to the displacement of the interface. Taking the Laplacian of Eq. (4.2) shows that the contribution of the last term to $\partial \mathbf{j} / \partial t$, including its counterpart in $\nabla \varphi$, reduces to $\nabla^2 (1/Rm) \mathbf{J}_0 - (\mathbf{J}_0 \cdot \nabla) \nabla (1/Rm)$, which simply depicts the fact that the current tends to flow through the path with the shortest interpolar distance, i.e. the least resistive one. Even though there is a discontinuity in the magnetic Reynolds number at the interface, it makes sense here to use gradients of Rm since, as we will see in Sec. 4.3.1, a continuous smooth approximation is made.

4.2.3 Boundary conditions

The velocity field is subject to no-slip, no-penetration boundary conditions, so that $\mathbf{u} = 0$ on the walls. Then, we set no-penetration conditions on the electric current, i.e. $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, which corresponds to side and bottom walls insulating to the current disturbance. This hypothesis may be verified if the steel casing of the cell provides enough magnetic

shielding for the tangential components of the magnetic field disturbance to vanish. On the top boundary, $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ could be achieved by proper control of the vertical anodic current. This implies $\nabla^2 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ on the magnetic potential, but it is straightforward to show that the latter can be obtained by enforcing $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} = 0$, which is compatible with $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ and much simpler to implement. It should be noted that this latter condition is not verified in the general case in an real cell.

4.3 Numerical method

4.3.1 Level set technique

The motion of the interface is implicitly solved by advecting a scalar level set function ϕ whose zero-level coincide with the interface [61, 79, 80]. The discontinuities at the interface are smoothed as a function of the distance to the interface. For numerical stability, this smooth transition must span over at least a few grid points. An effective interface width of 1.5 grid points was found to be empirically well suitable for a 10^2 conductivity jump ratio.

4.3.2 Discretization

A standard finite volumes spatial discretization with staggered meshes for \mathbf{u} and \mathbf{a} [27] allowing for exact projections is used. The averaging–reconstruction cycle is cut down to a less dissipative single reconstruction process thanks to the regular grid.

Time integration is achieved with a second order Adams–Bashforth scheme for all terms but the diffusive ones. The viscous term uses a semi-implicit second order Crank–Nicolson scheme, while the magnetic diffusion term is solved with a fully-implicit backward Euler, due do the very large magnetic diffusion coefficient.

4.3.3 Magnetic potential

Keeping the magnetic field divergence-free is a common problem in numerical MHD. Without an efficient divergence-cleaning method [19, 20], the numerical errors would give rise to artificial “magnetic monopoles” which cause non-physical flow elements to appear [60]. The magnetic potential formulation allows for keeping $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ exactly, though it is possible that the gauge condition $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ be not satisfied exactly. However,

due to the presence of the electric potential in Eq. (4.2), an efficient projection is easily achieved, in the same manner as for the velocity field.

4.4 Results

4.4.1 Metal pad roll

Here, the background magnetic field \mathbf{B}_{bg} is assumed to be uniform and vertical. As in Refs. [28, 64], we obtained the rotating wave known as the metal pad roll [8, 18, 69].

Our study about the influence of the induced currents revealed that they have a net stabilizing effect [56], as illustrated by Fig. 4.2. The comparison was made by switching on and off the $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ term from Eq. (4.1) in simulations of the metal pad roll, and by tracking the vertical displacement of a single point of the interface. It must be noted that the Hartmann braking effect is probably overrated here because of the low Reynolds number used ($Re = 500$).

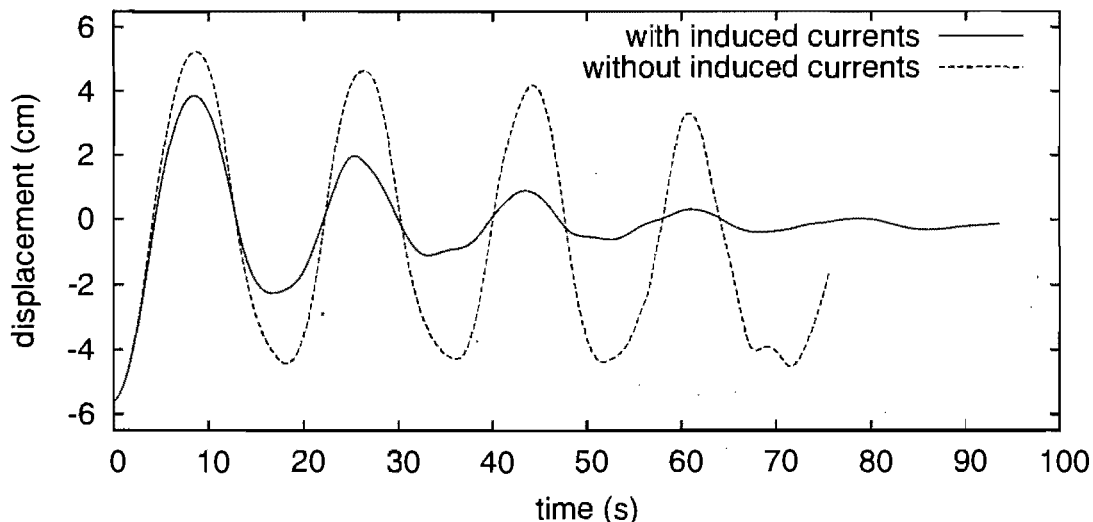


FIGURE 4.2: Time series of the interface displacement at a point of the cell near the boundary, for a regular simulation of the metal pad roll, and for another simulation in which the induced currents were neglected [56].

In the following, the interface displacement is decomposed into cosine modes of the form $\cos(m\pi x/L_x) \cos(n\pi y/L_y)$, each mode denoted by a (m, n) pair. It is well established [8, 18, 74] that, in a square cell, modes $(1, 0)$ and $(0, 1)$ are strongly coupled. Assuming

that their amplitudes are of the form $\exp(\beta t)$, we computed the growth rate β (s^{-1}). The growth rate of the first modes of the metal pad roll in a 4.6 m wide square cell is plotted against the magnitude of the vertical background magnetic field in Fig. 4.3, and against the metal depth in Fig. 4.4. In both cases, we have computed β by using the time series of the amplitudes of modes (1, 0) and (0, 1) between the third to the fifth turnovers (of the roll) inclusively. We did not consider earlier history of the flow at which the coupling between (1, 0) and (0, 1) is not yet fully developed. We stopped before the sixth roll, because after that time, non-linearity effects become important enough to produce secondary mode couplings.

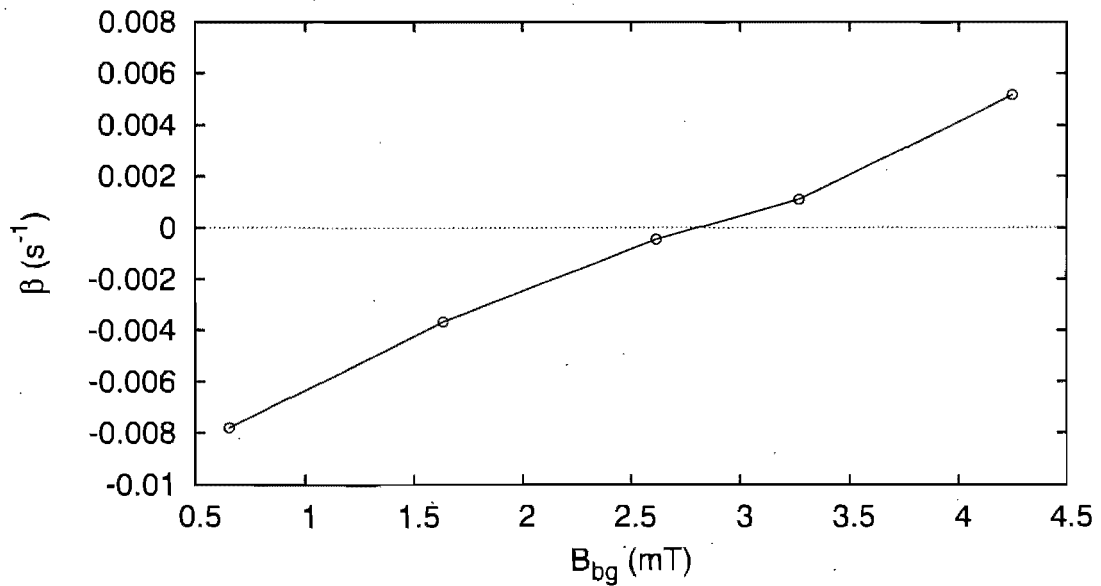


FIGURE 4.3: Combined growth rate of modes (1, 0) and (0, 1) as a function of the vertical background magnetic field.

The stability threshold, corresponding to the dotted line ($\beta = 0$) in Figures 4.3 and 4.4, was observed to depend on both the intensity of \mathbf{B}_{bg} and on the depth of aluminum H_1 . The fact that the square cell does not go unstable for any non-null value of \mathbf{B}_{bg} , in contrast with some analytical studies [47], is due to dissipative effects, mostly viscous here due to the rather low values of the Reynolds number we have used. It is shown in Fig. 4.4 that the flow at $Re = 250$ (Reynolds number for both layers) is always stable whereas for $Re = 500$, there is a destabilization of the layers around

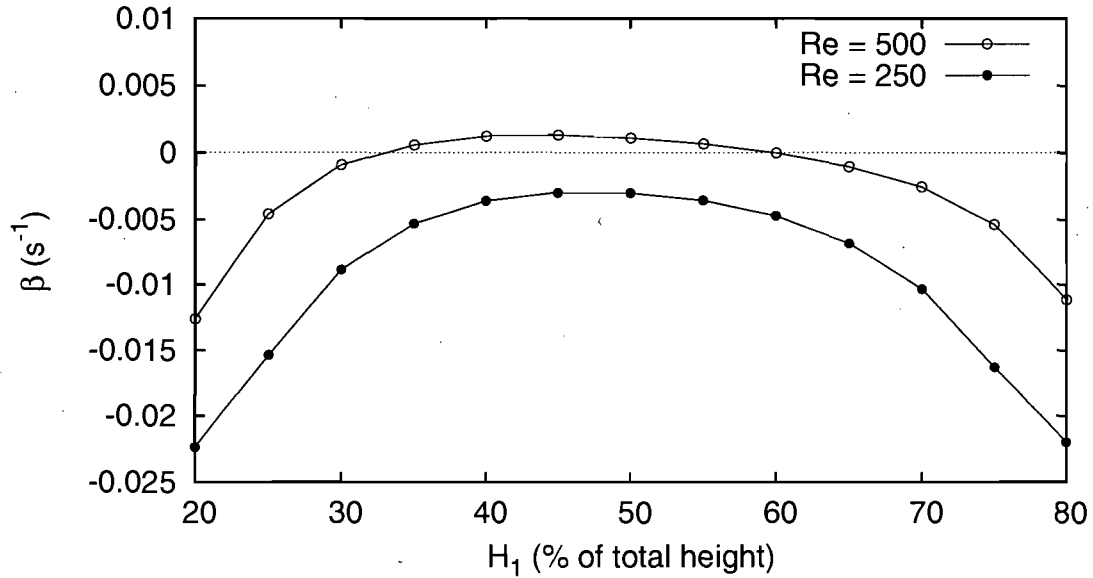


FIGURE 4.4: Combined growth rate of modes (1,0) and (0,1) as a function of the metal depth H_1 .

$35\% < H_1/H < 60\%$, where H denotes the total thickness of both aluminum and electrolytic bath layers. The critical value for the Reynolds number lies near $Re \approx 450$ at $H_1/H \approx 45\%$ approximately.

In our results, the dependence of the stability on $|\mathbf{B}_{bg}|$, as shown in Fig. 4.3, is in agreement with previous linearization studies [8, 18, 69]. However, these also predict, as opposed to Fig. 4.4, that the roll becomes more unstable as the bath layer is made thinner. We think that this discrepancy might be due to the following factors: (1) non-linear inertial effects not taken into account by linear approaches; (2) the presence and the magnitude of viscous or turbulent dissipation; or (3) different boundary conditions, especially on the current disturbance at the top of the cell.

4.4.2 Interfacial vortex instability

Horizontal gradients of the horizontal components of the magnetic field may interact with the vertical imposed current to force a rotation of the two fluids. When the field does not vary vertically, the force is equal in both layers. Since they have different mass densities, the velocity magnitude becomes higher in the bath than in the aluminum.

This process leads to an interfacial vortex instability [56]. The centripetal pressure discontinuity at the interface infers a curvature to it, which in turn causes a deflection of the electric currents (Fig. 4.5). These then interact with the vertical component of the magnetic field to lead to instability.

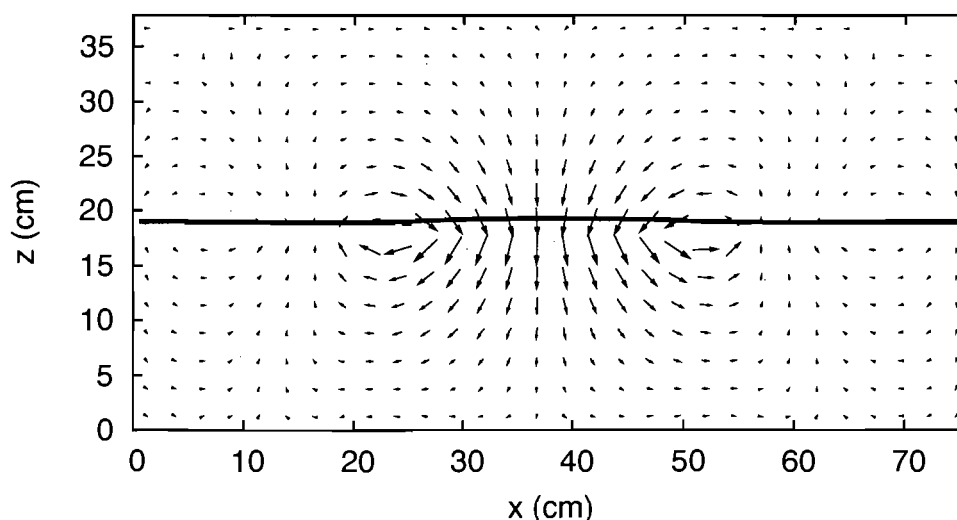


FIGURE 4.5: Vertical cut of the current disturbance at the beginning of the interfacial vortex instability at the onset of instability. The maximum magnitude of the disturbance is 30 % of the imposed current. The thick line indicates the location of the interface.

In order to show that forcing the rotation is not necessary for the instability to develop, we suppressed the horizontal components of the background magnetic field and simply set the initial conditions to a solid rotation of the central part of the layers, but 10 % faster in the electrolyte. This isolates the effect of the magnetic field's vertical component. To illustrate, we provide results from numerical simulations in a small square cell of 76 cm, with a maximum initial rotation velocity of 17 cm/s in the aluminum at a radius of 19 cm from the center of the cell (and 10 % faster in the bath). Fig. 4.5 shows the current loops due to a slight bump in the interface, in a vertical cut (in the xz -plane) of the current deflection at the onset of instability. At that time, the maximum amplitude of the current perturbation reaches up to 30 % of the vertical imposed current. Fig. 4.6 illustrates the typical behavior the unstable interface profile. The swell is localized between $x = 28$ cm and $x = 48$ cm but the growth is maintained near the center of the cell (see Fig. 4.7).

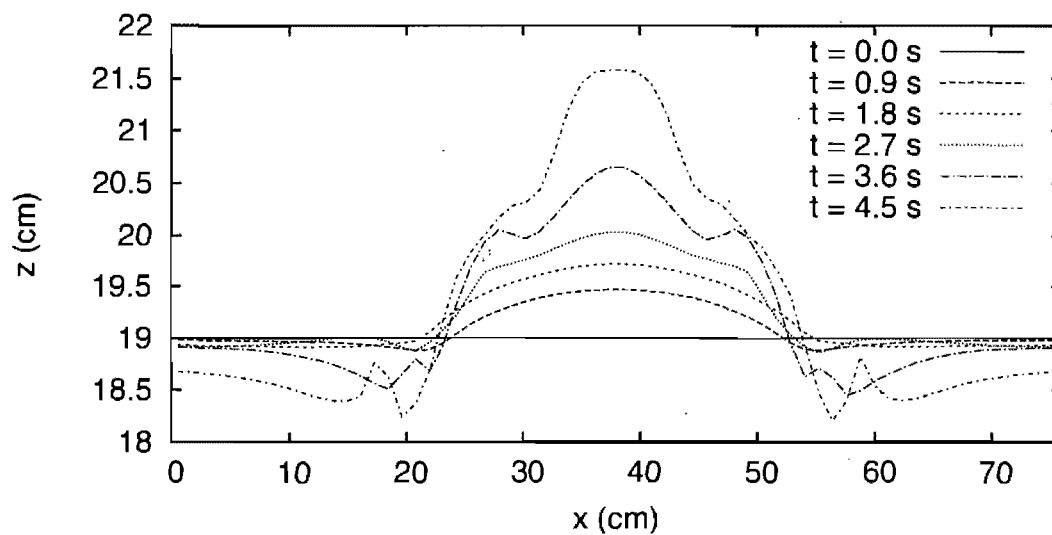


FIGURE 4.6: Vertical cut of the interface at different times during the development of the interfacial vortex instability.

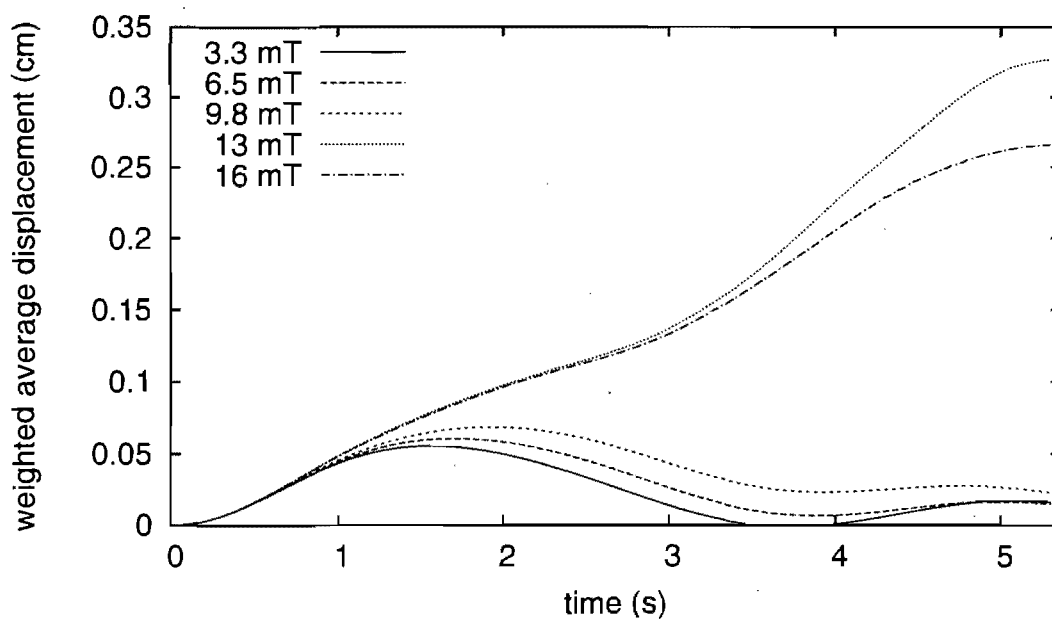


FIGURE 4.7: Evolution of the weighted average displacement of the interface versus the magnitude of the background magnetic field.

When the magnetic field is not strong enough (≈ 12 mT), the bump stops growing and oscillates. To show this, the vertical displacement of the interface is averaged around the bump using a weight function $\exp(-r/r_0)$, where r is the horizontal distance to the center of the cell and r_0 is set to 10 cm, as suggested by Fig. 4.6. The result is displayed in Fig. 4.7. For $|\mathbf{B}_{bg}| \leq 9.8$ mT, we do have oscillations of the bump and for $|\mathbf{B}_{bg}| \geq 13$ mT, the instability amplifies. An analytical study is under way to explain the properties of this type of instability.

4.5 Conclusion

Our new, fully three-dimensional numerical method, featuring a formulation in terms of the magnetic vector potential and based on a level set technique, proves to be successful in reproducing the metal pad roll in aluminum reduction cells, as well as simulating another (independent) vortex-based MHD instability.

- The metal pad roll is globally stabilized by the induced currents, while the onset of instability depends on the vertical background magnetic field, in agreement with previous studies, and also on the depth of metal and on the Reynolds number. However, dissipation may be overestimated in our simulations because the lowering of the Reynolds number to compensate for the lack of an appropriate turbulence model.
- The central vortex, notably caused by the interaction between the vertical imposed current and the horizontal gradients of the horizontal components of the magnetic field, grows into an interfacial instability for a critical value of the vertical background magnetic field.

Our model, because of the underlying approximations such as the simplified geometry and background magnetic field or the lowered Reynolds number, cannot simulate a cell in real operation conditions. Still, it is useful for theoretical investigation of the essential physics of the flow. Work is underway to include an adequate turbulence model.

Acknowledgments

This research has been supported by *Alcan International Ltd* and the *Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada*. Part of the computations were

performed on computers of the *Réseau Québécois de Calcul Haute Performance*. We would like to thank the anonymous referee for useful remarks.

FIN DE L'ARTICLE

CHAPITRE 5

INSTABILITÉ MHD DE ROTATION

Dans l'article qui suit, on analyse une nouvelle instabilité associée à la rotation des fluides (inspirée par les grands tourbillons horizontaux) dans la cuve de Hall-Héroult. Le mécanisme de déstabilisation est significativement différent de celui du roulis de la nappe de métal (RNM) et implique les forces centrifuge et de Coriolis. Selon nos prédictions, cette instabilité magnétohydrodynamique de rotation (IMHDR) serait d'amplitude comparable à celle du RNM, soit d'environ la moitié pour les régimes d'écoulement typiques dans une cuve d'électrolyse.

Une section supplémentaire (section 5.B), non publiée, montre que la rotation a un effet stabilisateur sur le roulis de la nappe de métal.

La mise en forme de l'article original a été adaptée par souci d'uniformité pour l'inclure dans le présent texte.

Ma contribution : théorie, calculs analytiques et numériques, interprétation des résultats. Le coauteur m'a aidé à développer les idées, à alimenter la réflexion et à clarifier la rédaction.

Munger, D., Vincent, A. (2008). A cylindrical model for rotational MHD instabilities in aluminum reduction cells. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 22(5):363–382.

<http://dx.doi.org/10.1007/s00162-008-0082-5>

Avec l'aimable permission de Springer Science+Business Media.

With kind permission of Springer Science+Business Media.

A cylindrical model for rotational MHD instabilities in aluminum reduction cells

D. Munger, A. Vincent

Université de Montréal

Large-scale horizontal vortices associated with deformations of the aluminum-electrolyte interface have been observed in operating aluminum reduction cells as well as in physical and numerical models. To expose their importance, we analyze a particular class of magnetohydrodynamic (MHD) interfacial instabilities which are induced by rotation. As we focus on a single vortex, a cylindrical geometry is preferred. Two analytical models are proposed. In a first model based on the MHD shallow-water approximation, we consider a vortex that has a solid rotation profile to obtain a wave equation and a dispersion relation. A more realistic second model includes a viscous rotation profile and the treatment of the base-state interface deformation. Energetics of the flow gives further insight on how an initial perturbation evolves as an oscillatory or a non-oscillatory instability, depending on the direction of rotation. We find that the mechanism at the very origin of these instabilities is neither due to a shear between the two layers — and are therefore not Kelvin–Helmholtz instabilities — nor simply due to magnetic force alone, but rather to the indirect action of the centripetal pressure due to the rotation induced by magnetic force.

5.1 Introduction

Primary aluminum is reduced from its oxide, known as alumina, by means of electrolysis through the so-called Hall–Héroult process. It is performed inside a shallow rectangular cell of horizontal dimensions approximating 14 m×4 m. The electrolysis current of order 400 kA flows downwards, from carbon anodes at top, through a thin electrolytic bath layer (about 5 cm) and a liquid aluminum layer (about 20 cm), then is collected at the cathode level at bottom. Long waves at the aluminum-electrolyte interface tend to grow larger due to a magnetohydrodynamic (MHD) mechanism, and thereby compromise the stability of the cell.

The basic wave driving mechanism was first unraveled by Sele [69]. The local resistance of the bath (cryolite is 10^4 times more resistive than aluminum) is altered upon a disturbance of the interface. The electrolysis current is thus diverted towards shallower regions of the bath. The resulting horizontal currents and the vertical component of the background magnetic field induce a magnetic force transverse to the slope of the metal surface. Different modes of standing gravity waves thus become coupled and possibly unstable. The reader is referred to [16] for a comprehensive description of the destabilization mechanism, along with key papers [8, 18, 74].

In the present study, we focus our attention on a specific type of MHD interfacial wave related to the large magnetically-driven eddies that are observed to dominate the mean flow in normally operating cells [26], and also in reduced-scale physical models [5] and in numerical models [7]. More precisely, we consider interface deformations that are symmetric about the rotation axis of a given vortex and for that purpose an idealized cylindrical geometry is used. Real cells being rectangular, the modeling of a cylindrical cell is not of direct practical interest, but rather a mathematical accessory. In fact, such cells are known to be always unstable [18, 47], at least when dissipation is not taken into account. So our goal is not to provide useful quantitative predictions for the optimization of Hall–Héroult cells stability, but rather to describe an instability mechanism that has been neglected until the work of Bojarevičs and Pericleous [6, 7]. Their numerical simulations of real rectangular cells showed permanent interface deformations and oscillations due to the horizontal circulation. These instabilities were also simulated by Munger and Vincent [56, 57] in square cells for the purpose of targeting only one eddy. In the present paper, we describe these rotational MHD instabilities from an analytical viewpoint. We expect them to be relevant in real cells, regardless of the

strong simplifying assumptions that we must make in order to allow for a mathematical analysis.

Since the work of Urata [82], instabilities in Hall–Héroult cells have been categorized either as being driven by MHD or by a Kelvin–Helmholtz (KH) mechanism. KH instabilities are, in essence, due to shear between two layers, and are found to be unrelated to MHD instabilities [39, 70, 86]. The instability described in this paper does not rely on any shear in the base flow, yet a shear is produced in the perturbed flow, and therefore cannot be regarded as being of the KH type. In addition, the imposed axisymmetric shape of the interface only allows for standing radial waves, transverse to the azimuthal base flow, whereas KH instabilities involve traveling waves with an interface deformation along the base flow (e.g. [12]).

The new rotational instabilities are indeed fundamentally driven by MHD. However, as opposed to classical MHD instabilities in aluminum reduction cells, the wavelike motion is not directly caused by the magnetic force. As we shall see, interfacial waves are rather produced through the indirect action of the centripetal pressure due to the rotation induced by the magnetic force.

In the following sections, two different levels of modeling are used, both based on a linearization process. After an exhaustive discussion of the idealized system and of the base state in Sect. 5.2, we derive in Sect. 5.3 a shallow-layer MHD model that accounts for the effects of the rotating base flow. A wave equation is obtained for axisymmetric interfacial waves, allowing for two classes of solutions corresponding to oscillatory and non-oscillatory instabilities. In addition, the corresponding dispersion relation allows for some level of quantitative prediction, and thus for a comparison with the traditional metal pad roll instability. However, in order to make an analytical method of resolution possible, a solid rotation profile is assumed and corrections due to the base-state deformation of the interface are ignored. In Sect. 5.4, we extend the latter model to account for a viscous rotation profile and for the base-state interface displacement. We explain the physics of these new rotational MHD instabilities in Sect. 5.5 with energy arguments and an order-of-magnitude analysis. Then, final remarks are made in Sect. 5.6.

5.2 Idealized system and base state

The purpose of this study is to analyze the destabilization mechanism of the aluminum surface due to the large scales of horizontal rotation. Besides the particular

cylindrical geometry and the presence of rotation and interface deformation in the base-state, we make the same simplifying assumptions as earlier authors [8, 18, 74], notably the following ones.

- *Long waves in shallow layers.* Our models are based on a shallow-layer development and as such exclude short waves, although these are generally believed to be subject to rapid decay due to viscous and turbulent dissipation.
- *Linearization.* We study small disturbances with short evolution times. Saturation effects that would possibly stabilize larger disturbances cannot be captured. Neither can nonlinear waves such as solitons be found.
- *Absence of dissipation.* No frictional or turbulent dissipative effects on the perturbations are included, yet they are expected to have a stabilizing influence.

5.2.1 Geometry and physical parameters

The most important simplification we make concerns the geometry of the system. Instead of considering a whole rectangular cell, we restrict the domain to a cylindrical eddy, which we assume surrounded by an insulating vertical wall in order to be able to pose boundary conditions (see Sect. 5.2.3). In addition, we neglect any dependence on the azimuthal coordinate, i.e. we consider axisymmetric disturbances only.

These simplifications imply, however, at least three important limitations. The first one is that the imposed axial symmetry excludes waves of the same type as the metal pad roll. These were previously investigated under cylindrical geometry, notably by Lukyanov *et al.* [47]. It should be stressed that interfacial motions in real cells are essentially non-axisymmetric, although this observation does not exclude the existence of an axisymmetric destabilization mechanism as described in the following sections. The second limitation is the impossibility to account for vortex-vortex interactions. Actual cells are rectangular and generally contain more than one vortex, that could interact with each other. Finally, the third limitation pertains to the shape of the vortex. Actual eddies in rectangular cells, as suggested for instance by the numerical simulations of Zikanov *et al.* [87] and Bojarevičs and Pericleous [7], have slightly elliptic shapes. Our model cannot account for the deviation of a vortex from circular shape, nor for corner effects. These can nevertheless be expected to force mostly smaller-scale, non-axisymmetric motions, which are not relevant to our study of axisymmetric long waves.

The idealized reduction cell, of radius R and height H , is sketched in Fig. 5.1. Subscripts 1 and 2 refer to the aluminum and to the electrolyte, respectively, of densities $\rho_1 = \rho$ and $\rho_2 = \rho - \Delta\rho$. In practice, the aluminum density is $\rho \approx 2250 \text{ kg/m}^3$ whereas the electrolyte is slightly less dense with $\Delta\rho/\rho \approx 8.1 \%$. The cathode lies at the bottom boundary and the anode block is approximated by a single anode spanning over the top boundary, as assumed by earlier authors [8, 18, 47, 74]. At rest — the system in the base-state is not at rest — the interface between the two layers of depths H_1 and H_2 is flat along $z = 0$, and both are traversed by a uniform vertical electrolysis current $-J_0\hat{z}$.

The perturbed interface displacement ζ adds to the base-state displacement ζ_0 . The perturbed radial velocity u_i ($i = 1, 2$) has no unperturbed counterpart, as it would lead to interfacial motion in the base state. The base-state and perturbed angular velocity are Ω_i and ω_i , respectively. Analogously, the radial and vertical components of the base-state diverted current J_{ir} and J_{iz} are respectively perturbed with j_{ir} and j_{iz} . Note that the vertical component of the base-state diverted current J_{iz} does not include the contribution $-J_0$ from the imposed (non-diverted) current.

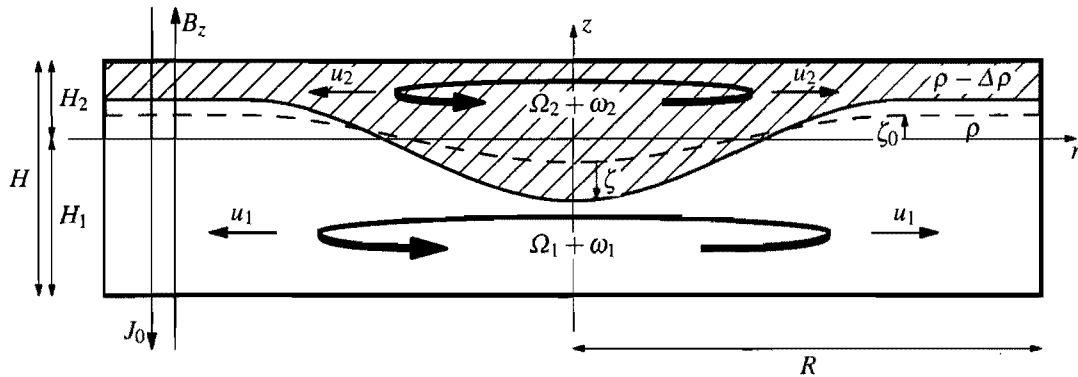


FIGURE 5.1: Definition sketch for the idealized cylindrical Hall-Héroult cell (vertical cut), vertically bounded by a carbon anode at $z = H_2$ and a carbon cathode at $z = -H_1$.

5.2.2 Base state

The distribution of the magnetic field, electric currents and magnetic forces in a real cell are admittedly complex. We are however interested in constructing a base state that reflects the most important features of rotation in a cell, although simple enough to allow for mathematical analysis. In this spirit, we shall artificially prescribe an angular velocity profile $\Omega_i(r)$ that is reasonably representative of reality and, from it, deduce the interface

deformation, while ensuring that these are roughly compatible with the results of relevant numerical simulations. Thus, we shall not try to solve for the elaborate magnetic force and ensuing dissipative forces that balance each other to form the base state, but simply acknowledge their influence and rather base our model on much simplified observations.

In the numerical simulations of Zikanov *et al.* [87] of a P-255 cell immersed in a magnetic field representative of a smelter, the flow is found to reach a steady state when friction is strong enough. The figures in that paper show eddies that have a slightly elliptical shape with low velocities near their center, rapidly increasing then becoming almost constant at their outer edge, roughly like a cosine profile. In a future 500 kA cell model under analogous conditions, the horizontal circulation reaches an almost stationary distribution, according to the computations of Bojarevičs and Pericleous [7]. As their model also accounts for the horizontal diffusion of momentum, the computed eddy velocities decrease to zero on the cell boundary after reaching their maximum magnitude within the eddy. In both references [7, 87], there are interface depressions at the center of the eddies: when the liquids are put under rotation, the interface is displaced vertically until a balance between the hydrostatic pressure and the centripetal pressure is reached.

The rotational flow is driven by the azimuthal magnetic force F_θ and limited by dissipative forces, especially turbulent friction. The base state should satisfy the stationary radial and azimuthal shallow-layer momentum equations (see for instance [87] for the complete nonlinear non-stationary vector form of these):

$$0 = -\frac{dp_0}{dr} - \rho_i g \frac{d\zeta_0}{dr} + \frac{dp_{mi}}{dr} + \rho_i r \Omega_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad (5.1)$$

$$0 = F_{i\theta} - \mu_i r \Omega_i + \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(\nu_i r \frac{d(r\Omega_i)}{dr} \right) - \nu_i \Omega_i \right] \quad (i = 1, 2), \quad (5.2)$$

$$\Omega_i = 0 \quad \text{on } r = R \quad (i = 1, 2). \quad (5.3)$$

In Eq. (5.1), g is the acceleration due to gravity, p_0 is the pressure at the aluminum–electrolyte interface and p_{mi} is the magnetic pressure in layer i , due to the action of the radial and vertical magnetic forces. In Eq. (5.2), $F_{i\theta}$ is the azimuthal magnetic force in layer i , the second term corresponds to turbulent friction of coefficient μ_i with the top ($i = 2$) and bottom ($i = 1$) boundaries, and the last term, in which ν_i is the effective turbulent diffusivity, was originally included in cartesian form by Bojarevičs and Pericleous [7] to model the horizontal diffusion of momentum. The boundary condition Eq. (5.3) makes sense only when that horizontal diffusion term is included. We also observe that the

assumed axial symmetry allows the base-state interface shape to remain static under the effect (advection) of rotation.

The difference of Eq. (5.1) for $i = 1$ and for $i = 2$ yields the balance equation

$$\Delta\rho g \zeta_0 = p_{m1} - p_{m2} + \int_0^r [\rho_1 r' \Omega_1^2(r') - \rho_2 r' \Omega_2^2(r')] dr' + \text{const.}, \quad (5.4)$$

where the integration constant is determined by the mass conservation condition

$$\int_0^R \zeta_0(r) r dr = 0.$$

The interface deformation is therefore dictated by a balance between the buoyancy force and the difference of magnetic pressure and of centripetal pressure between the two layers. Since the latter is known to dominate, we neglect p_{m1} and p_{m2} in Eq. (5.4). Although this is not the case in real cells, we further simplify by assuming that the rotation profiles (but not their magnitudes) are the same in both layers, i.e. we set an angular velocity of $\Omega_1(r) = \Omega(r)$ in the aluminum and of $\Omega_2(r) = \alpha \sqrt{\rho_1/\rho_2} \Omega(r)$, where α^2 can be thought of as a ratio of centrifugal forces in the two layers. Then Eq. (5.4) reduces to

$$\zeta_0(r) \simeq \frac{\rho(1 - \alpha^2)}{\Delta\rho g} \left[\int_0^r \Omega^2(r') r' dr' - \frac{2}{R^2} \int_0^R \int_0^r \Omega^2(r') r' dr' r dr \right] \quad (5.5)$$

We shall use this expression to compute the base-state interface displacement from any prescribed rotation profile.

In real cells, unlike in our idealized model, the carbon side walls are neither completely insulating nor straight and the anode block consists of several anodes separated by channels. Even when the interface is flat, the distribution of the electric current is not uniform and vertical, and comprises strong horizontal components in the aluminum layer (e.g. [7, 87]). Let \tilde{J}_{ir} and \tilde{J}_{iz} denote the radial and vertical components of this non-homogeneous current distribution, that would be observed in a non-idealized cell at rest. These must not be mistaken with the base-state diverted current components J_{ir} and J_{iz} , which are the contributions due to the base-state interface deformation in our simplified cylindrical model. Then the base-state azimuthal magnetic force comprises

the following terms:

$$F_{i\theta} = -J_0 B_r + J_{iz} B_r - J_{ir} B_z + \tilde{J}_{iz} B_r - \tilde{J}_{ir} B_z, \quad (5.6)$$

where B_r and B_z are the radial and vertical components of the magnetic field, respectively. Expressions for the base-state diverted current J_{ir}, J_{iz} are derived in Sect. 5.2.4, following Davidson and Lindsay's [18] method. However, B_r and B_z as well as \tilde{J}_{ir} and \tilde{J}_{iz} have complex distributions (e.g. computed in [7, 87]) from which a simple form of $F_{i\theta}$ is hardly deduced. Moreover, our knowledge about the turbulent friction coefficients μ_i and ν_i in Eq. (5.2) is very limited. So, rather than making awkward assumptions on all of these unknowns, we shall take a shortcut and consider *ad hoc* simple forms for $F_{i\theta}, \mu_i$ and ν_i that yield a fairly realistic angular velocity field, while understanding that it constitutes only an outline of the complex underlying force balance.

In order to improve readability, we consider here a single layer and drop the subscript i . In account of the above discussion, we assume that the whole expression (5.6) of the azimuthal component of the magnetic force is of the form $F_\theta = F_0 r/R$, where F_0 is a constant. We also assume that μ and ν are constants and that the viscous term, i.e. the last term of Eq. (5.2), is negligible everywhere except close to the wall. So, we define ΔR such that last two terms of Eq. (5.2) have comparable magnitudes in the region $R - \Delta R < r < R$. Formally, we define ΔR such that

$$\frac{\nu}{(\Delta R)^2} = \mu. \quad (5.7)$$

It is generally reasonable to assume that this viscous layer is thin ($\Delta R \ll R$). Far from the wall, the solution of Eq. (5.2) is $\Omega = F_0/\mu R$. To this solution we add Ω_w , which must vanish away from the wall. Equation (5.2) then becomes

$$\frac{\nu}{(\Delta R)^2} \frac{d^2 \Omega_w^2}{dx^2} - \mu \Omega_w = \frac{\Delta R}{R} \left[\frac{\nu}{(\Delta R)^2} \left(x \frac{d^2 \Omega_w}{dx^2} + 3 \frac{d\Omega_w}{dx} \right) - \mu x \Omega_w \right] \quad (5.8)$$

where we have defined the new variable $x = (R-r)/\Delta R$ such that $x \sim 1$ near the wall and $x \gg 1$ far from the wall. Because of Eq. (5.7) and $\Delta R/R \ll 1$, we see that the right-hand side of Eq. (5.8) is negligible, so we can solve only for the left-hand side. The final solution, which satisfies $\Omega_w \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$ and the no-slip condition $\Omega_w = -F_0/\mu R$ on

$x = 0$, is

$$\Omega = \Omega_0 G \left[1 - e^{-(R-r)/\Delta R} \right] = \Omega_0 G \left[1 - e^{-\sqrt{\mu/\nu}(R-r)} \right], \quad (5.9)$$

where $\Omega_0 G = F_0/\mu R$ and ΔR is given by Eq. (5.7). We define Ω_0 such that the maximum azimuthal velocity is given by $R\Omega_0$. Hence,

$$G = \frac{R}{\hat{r}} \left[1 - e^{-(R-\hat{r})/\Delta R} \right]^{-1}.$$

In order to make this profile match the observations, ΔR and G must be determined by fitting the optimal radius \hat{r} at which the maximum velocity is reached. Then, the amplitude Ω_0 can be obtained by fitting the maximum velocity itself $R\Omega_0$. According to Eq. (5.9), $r\Omega$ reaches its maximum at $\hat{r}/\Delta R = e^{(R-\hat{r})/\Delta R} - 1$. Although an analytic expression for ΔR cannot be found, it is easily solved for numerically. We can reasonably expect \hat{r} to lie in the region where the viscous force balances friction, i.e. $R - \hat{r} \sim \Delta R$. For example, in the simulations of Bojarevičs and Pericleous [7], we can see that $\hat{r} \approx 0.77R$, which implies $\Delta R \approx 0.111R$ and $G \approx 1.49$, so $R - \hat{r} \approx 2.07\Delta R$. An explicit expression for ζ_0 can be readily obtained from Eq. (5.5), but it is very long and it is not useful to show it here. The profile for the base-state angular velocity is plotted in Fig. 5.2, along with the azimuthal velocity and interface displacement profiles, the shapes of which are roughly in agreement with the flows computed by Zikanov *et al.* [87] and Bojarevičs and Pericleous [7] for instance, in the region surrounding an eddy. We shall consider in Sect. 5.4 circular vortices with the values for ΔR and G suggested above, after considering a simpler inviscid solid rotation profile in Sect. 5.3.

A final note is in order concerning dissipation. Despite the fact that the force balance in the base state relies on (turbulent) frictional and viscous forces, no such forces are modeled in the perturbation equations of Sects. 5.3 and 5.4. The purpose of the dissipative terms in the base-state motion equation (4.2) is to provide a more realistic rotation profile, not to study dissipation.

5.2.3 Boundary conditions

Since we use cylindrical geometry, we impose artificial no-penetration boundary conditions on the flow at the edge of the vortex. This might nevertheless be close to reality since, in a real cell, the edge of a vortex presumably coincides with the edge of either the cell or another vortex. The edge of the cell is impermeable to the flow.

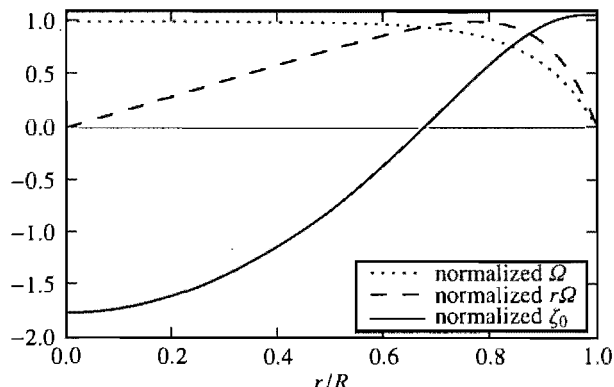


FIGURE 5.2: Radial profiles of the normalized base-state angular velocity $\Omega/\Omega_0 G$ from Eq. (5.9), azimuthal velocity $r\Omega/R\Omega_0$ and interface displacement $\zeta_0/[\rho(1 - \alpha^2)R^2\Omega_0^2 G^2/8\Delta\rho g]$ obtained from Eq. (5.5), with $\Delta R = 0.111 R$ and $G = 1.49$.

However, at the common boundary between two vortices, we do not have enough information to assume that the outflow is weak, although this could be the case for a flow with a sufficient level of symmetry.

In the presence of insulating vertical walls in a real rectangular cell, the electric current perturbation is known from previous studies [8, 18] to be dominantly vertical in the electrolyte and dominantly horizontal in the aluminum, to first order in kH (for a characteristic wavenumber k). More precisely, given that the irrotational part of the velocity field \mathbf{u} and the horizontal current \mathbf{j}_{1h} in the aluminum layer share the same non-penetration boundary conditions, it is shown in [18] that $\partial\mathbf{j}_{1h}/\partial t = -J_0\mathbf{u}/H_2$ inside the cell. This implies that, in a rectangular cell with rigid insulating walls as is commonly idealized [8, 18, 74], if there is no flow through the edge of a vortex ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$, where $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit vector normal to the vortex edge), there is also no electric current passing through that same vortex edge ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$). The assumption that the vortex edge behaves as an insulating boundary follows from the assumption that it behaves as a rigid boundary. We therefore consider that the lateral walls of our idealized cylindrical cell are insulating.

5.2.4 Diverted electric current

In [8, 74], the authors derive relations for the diverted current in terms of the interface displacement ζ , without a base-state interface deformation, under three assumptions regarding the boundary conditions: (1) the vertical electric current is not diverted

at the cathode, because of its low conductivity compared to the aluminum; (2) in the electrolyte, the potential is constant at the boundaries with the anodes and with the aluminum, compared to both of which the electrolyte is a poor conductor; and (3) there are no channels between the anodes. In the following, we adhere to the same assumptions and follow the derivation steps provided by these authors, with the exception that our base-state interface lies at $z = \zeta_0$ instead of $z = 0$. Thus, we consider that the surfaces $z = H_2$ and $z = \zeta_0 + \zeta$ are equipotential in the electrolyte and that the bottom surface $z = -H_1$ is insulating.

As in earlier studies [8, 18, 74], we neglect the induced currents and the induced magnetic field, because the magnetic diffusion time is very short in comparison with the typical MHD wave periods. The magnetostatic approximation follows, so the electric current can be expressed as the gradient of a potential.

To leading order in kH , the current potential Φ_2 in the electrolyte is such that $\partial\Phi_2/\partial z = J_{2z}^{\text{TOT}}$ and $\partial\Phi_2/\partial r = J_{2r}^{\text{TOT}}$, and satisfies $\partial^2\Phi_2/\partial z^2 = 0$, where J_{2r}^{TOT} and J_{2z}^{TOT} are the radial and vertical components of the total diverted electric current in the electrolyte, strictly due to the interface deformation. We define J_{1r}^{TOT} and J_{1z}^{TOT} analogously in the aluminum. There is no azimuthal current because of the imposed axial symmetry. Therefore,

$$\Phi_2 = -\frac{J_0(\zeta_0 + \zeta)(z - H_2)}{H_2 - \zeta_0 - \zeta}, \quad (5.10)$$

which satisfies $\Phi_2 = 0$ on $z = H_2$, and is exact in $\zeta_0 + \zeta$ in the sense that the interface $z = \zeta_0 + \zeta$ also is equipotential (the total potential is $-J_0z + \Phi_2$). Continuity of the vertical electric current through the interface ($J_{1z}^{\text{TOT}} = J_{2z}^{\text{TOT}}$ at $z = \zeta_0 + \zeta$) requires that

$$J_{1z}^{\text{TOT}} = -\frac{J_0(\zeta_0 + \zeta)(z + H_1)}{(H_2 - \zeta_0 - \zeta)(H_1 + \zeta_0 + \zeta)}, \quad (5.11)$$

which also satisfies $J_{1z}^{\text{TOT}} = 0$ on $z = -H_1$. It follows from the zero-divergence condition on the current that

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rJ_{1r}^{\text{TOT}})}{\partial r} = \frac{J_0(\zeta_0 + \zeta)}{(H_2 - \zeta_0 - \zeta)(H_1 + \zeta_0 + \zeta)}. \quad (5.12)$$

Relations for the base-state and perturbed currents, to leading order in kH , are obtained by taking the zeroth- and first-order in ζ terms of the Taylor expansion of J_{1r}^{TOT} , J_{1z}^{TOT} , J_{2r}^{TOT} and J_{2z}^{TOT} in Eqs. (5.10)–(5.12). The components of the base-state current are given

by

$$J_{1z} = -\frac{J_0(z + H_1)\zeta_0}{h_1 h_2}, \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rJ_{1r})}{\partial r} = \frac{J_0 \zeta_0}{h_1 h_2}, \quad (5.14)$$

$$J_{2z} = -\frac{J_0 \zeta_0}{h_2}, \quad (5.15)$$

$$J_{2r} = 0, \quad (5.16)$$

where $h_1 = H_1 + \zeta_0$ and $h_2 = H_2 - \zeta_0$. The corresponding perturbations are given by

$$j_{1z} = -\frac{J_0(H_1 H_2 + \zeta_0^2)(z + H_1)\zeta}{h_1^2 h_2^2}, \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{1r})}{\partial r} = \frac{J_0(H_1 H_2 + \zeta_0^2)\zeta}{h_1^2 h_2^2}, \quad (5.18)$$

$$j_{2z} = -\frac{J_0 H_2 \zeta}{h_2^2}, \quad (5.19)$$

$$j_{2r} = 0. \quad (5.20)$$

Equations (5.17)–(5.20) yield the original results in [18] when $\zeta_0 = 0$.

A note is in order concerning the fact that $j_{1z} \neq j_{2z}$ at the interface. There are two contributions to J_{1z} evaluated at $z = \zeta_0 + \zeta$. The first one does not depend on ζ and is equal to J_{2z} . The second one is $-J_0 \zeta_0 \zeta / h_1 h_2$ and as such contributes to the first-order (in ζ) current perturbation. There is an other first-order contribution coming from j_{1z} , also evaluated at $z = \zeta_0 + \zeta$, equal to $-J_0(H_1 H_2 + \zeta_0^2)\zeta / h_1 h_2^2$. The sum of the two is equal to j_{2z} , which is the only first-order contribution in the electrolyte. Therefore, even though $j_{1z} \neq j_{2z}$, the first-order current perturbation is continuous across the interface.

5.2.5 Magnetic field

As stated in Sect. 5.2.4, we neglect the induced magnetic field. We simply consider a static magnetic field with radial, azimuthal and vertical components B_r , B_θ and B_z , respectively.

Computations [7, 87] and measurements [5] suggest that the magnetic field is dominantly azimuthal, due to the passage of the imposed vertical electrolysis current. How-

ever, an azimuthal field can only induce vertical and radial magnetic forces, whose hydrodynamic effects are expectably weaker than those of the azimuthal magnetic force, as shown in Appendix 5.A. Moreover, these effects vanish when the interface is left flat ($\zeta_0 = 0$).

The radial and vertical components of the magnetic field, although considerably weaker than the azimuthal one, can induce a rotational force, intrinsic to the destabilization mechanism described in the present paper. The perturbed azimuthal magnetic force density comprises two contributions: $j_{iz}B_r$ and $j_{ir}B_z$. It can be argued from a dimensional analysis of Eqs. (5.17)–(5.20), with r scaling as R and the vertical dimensions as H , that

$$\frac{H}{R} \frac{|B_r|}{|B_z|} |j_{1r}B_z| \sim |j_{1z}B_r| \sim |j_{2z}B_r|$$

and the contribution from $j_{2r}B_z$ is obviously negligible. Hence, as $H/R \ll 1$ in practice, it seems reasonable to neglect other contributions to the magnetic force than $j_{1r}B_z$. This also implies that only the vertical component B_z of the magnetic field, already well known for its destabilizing influence [8, 18, 47, 69, 74], has to be considered in our model. For the sake of simplicity, we further assume that B_z is uniform over the vortex; it may be roughly considered as an average value of the vertical field. We shall nevertheless consider the correction due to B_θ in the improved model of Sect. 5.4.

5.3 Basic hydrodynamic model

5.3.1 Base state with solid rotation and flat interface

In this section, we keep $\alpha = 1$ to ensure a flat interface in the base state ($\zeta_0 = 0$ identically), and we consider a solid rotation profile $\Omega = \Omega_0$, where Ω_0 is a constant. Such a profile is obtained from Eq. (5.9) when $\nu \rightarrow 0$. There is therefore no diverted electric current (J_{ir} and J_{iz}) in the base state. We shall generalize in Sect. 5.4 to arbitrary values of α and to a viscous rotation profile.

5.3.2 Evolution equations

The linearized evolution equations of an axisymmetric perturbation, to first order in magnitude of perturbation, are:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{H_1}{r} \frac{\partial(ru_1)}{\partial r} = \frac{H_2}{r} \frac{\partial(ru_2)}{\partial r}, \quad (5.21)$$

$$\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho_i g \frac{\partial \zeta}{\partial r} + 2\rho_i r \Omega_i \omega_i \quad (i = 1, 2), \quad (5.22)$$

$$\rho_i r \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\frac{\rho_i u_i}{r} \frac{\partial(r^2 \Omega_i)}{\partial r} - j_{ir} B_z \quad (i = 1, 2), \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial j_{1r}}{\partial t} = -\frac{J_0 u_1}{H_2}, \quad j_{2r} = 0, \quad (5.24)$$

$$u_i = 0 = j_{ir} \quad (i = 1, 2) \quad \text{on } r = 0, R, \quad (5.25)$$

where p is the interfacial pressure, and u_i and $r\omega_i$ are the radial and azimuthal velocity perturbations. Mass conservation is provided by Eq. (5.21), Eqs. (5.22) and (5.23) are the frictionless shallow-water radial and azimuthal motion equations (see [37], pp. 737–738), while Eq. (5.24) describes the horizontal electric current evolution and was originally derived by Davidson and Lindsay [18] from Eqs. (5.18) (with $\zeta_0 = 0$), (5.21) and (5.25). It is readily verified that the system is at equilibrium when there are no perturbations, i.e. $\zeta = u_i = \omega_i = j_i = 0$, for $i = 1, 2$.

The set of Eqs. (5.21)–(5.25) has already been derived by earlier authors in more general linear [8, 18, 55] and nonlinear [77, 87] forms, but here is simplified for our particular geometry constraints (see Sect. 5.2.1).

5.3.3 Wave equation

We summarize here the procedure to derive a wave equation in terms of u_1 , but as our model relies on the same assumptions as earlier models, the reader is referred to [8, 18] for a detailed derivation. First, the difference of the first-order time derivative of Eq. (5.22) for $i = 1$ and for $i = 2$ is taken, and the Boussinesq approximation is made, as in [55]. Next, $\partial \zeta / \partial t$ is substituted from Eq. (5.21), and $\rho_1 r \partial \omega_1 / \partial t$ and $\rho_2 r \partial \omega_2 / \partial t$ are substituted from Eq. (5.23). Then, u_2 is eliminated by observing from Eqs. (5.21) and (5.25), as done by previous authors, that $u_2 = -H_1 u_1 / H_2$, before differentiating one more time with respect to time to allow $\partial j_{1r} / \partial t$ to be eliminated using Eq. (5.24). The

resulting wave equation is:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{c_g^2}{R^2} D_r^2 u_1 + 4\Omega_0^2 u_1 \right] = 2\Omega_0 \omega_m^2 u_1 \quad (5.26)$$

where D_r^2 , defined as

$$D_r^2 \phi = R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} \right] \quad (5.27)$$

for any function ϕ regular enough, is a linear second-order differential operator, and

$$c_g = \sqrt{\frac{\Delta\rho g H_1 H_2}{\rho H}}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{J_0 B_z}{\rho H}}$$

are respectively the shallow-water celerity of a gravity wave in the absence of rotation and the characteristic rate of action of the magnetic force. We have assumed $J_0 B_z > 0$ in the definition of ω_m without any loss of generality.

It is to be noted that a wave equation in terms of ζ could have equivalently been derived, as was previously done in [8, 47, 82]. However, it is more convenient to use u_1 for a non-solid rotation profile as we shall consider in Sect. 5.4.

Equation (5.26) is a version of the wave equation derived by Davidson and Lindsay [18] modified for base-state rotation and simplified for the case of axisymmetric instabilities. On the one hand, because it does not allow for disturbances along the azimuthal coordinate, Eq. (5.26) is simpler than the more general wave equations derived in previous studies [8, 18, 47]. On the other hand, it also comprises additional terms — most importantly the term on the right-hand side which combines rotation and magnetic effects — due to the inclusion of global rotation in the model.

5.3.4 Dispersion relation

We seek solutions of Eq. (5.26) of the form

$$u_1(r, t) = e^{-i\lambda t} u(r), \quad (5.28)$$

where λ is a complex wave pulsation, i.e. $\text{Re } \lambda$ and $\text{Im } \lambda$ are the wave pulsation and growth rate, respectively. It is found that the radial part $u(r)$ is the first-order Bessel function $\mathcal{J}_1(\kappa r/R)$ with κ subject to $\mathcal{J}_1(\kappa) = 0$ to satisfy (5.25). By substituting for u_1 ,

the wave Eq. (5.26) reduces to the following algebraic equation:

$$-\lambda^2 + \omega_0^2 = \frac{2\Omega_0\omega_m^2}{-i\lambda}, \quad (5.29)$$

where $\omega_0 = \sqrt{c_g^2\kappa^2/R^2 + 4\Omega_0^2}$ is the natural pulsation of a radial gravity wave in a rotating frame (see [37], pp. 612–615). Clearly, if $\Omega_0 = 0$ or $\omega_m = 0$, λ is real, i.e. without rotation or without magnetic force, an axisymmetric perturbation is stable. Equation (5.29) has three analytical solutions, two of which correspond to oscillatory motion and the other one to non-oscillatory motion:

$$\frac{\lambda}{\omega_0} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right) + \frac{i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right), \quad (5.30)$$

$$\frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right), \quad (5.31)$$

where

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{M^2 + \frac{4}{27}} - M}{2} \right)^{-1/3}$$

and

$$M = \frac{2\Omega_0\omega_m^2}{\omega_0^3} = \frac{2\Omega_0\omega_m^2}{(c_g^2\kappa^2/R^2 + 4\Omega_0^2)^{3/2}}. \quad (5.32)$$

The dimensionless parameter M can be seen as the product of a Froude number Ω_0/ω_0 and an interaction parameter ω_m^2/ω_0^2 .

5.3.5 Discussion

A perturbation is unstable when $\text{Im } \lambda > 0$. The dimensionless parameter M is the growth rate under weak magnetic influence of the most unstable disturbance (this is shown below) in units of the natural gravity pulsation ω_0 . It should be noted that M does not only depend on physical parameters, but also on the equivalent spatial wavelength through ω_0 . Obviously, $\beta > 0$ for all values of M , with $\beta < 1$ for $M < 0$, $\beta = 1$ for $M = 0$ and $\beta > 1$ for $M > 0$. So the wave is unstable if and only if $M < 0$ whereas the non-oscillatory disturbance is unstable if and only if $M > 0$. We see from Eqs. (5.30) and (5.31) that the growth rate $\text{Im } \lambda$ of the non-oscillatory disturbance is, in magnitude,

always twice that of the wave.

In practice, $|M| \ll 1$ for long waves. The value of M can be estimated in a real cell, with typical values $H_1, H_2 \approx 20, 5$ cm and $J_0 = 7$ kA/m² and $B_z = 2$ mT, by considering a vortex of diameter $2R = 4$ m reaching its maximum velocity of 20 cm/s on its outer edge. Under these conditions, the first three Bessel modes yield $|M| \approx 0.08370, 0.01834, 0.006485$. These values are significantly smaller than unity, so this situation corresponds to a weak magnetic influence. In this case, $\beta \approx 1 + \sqrt{3}M/2$, so the non-oscillatory disturbance has a growth rate of $\text{Im } \lambda \approx M\omega_0$, while the oscillatory one has $\text{Im } \lambda \approx -M\omega_0/2$. The corresponding peaks of instability, for any fixed value of ω_m , are reached at $\Omega_0 = \kappa c_g/2R$ with $\text{Im } \lambda \approx \omega_m^2 R/2\kappa c_g$, and $\Omega_0 = -\kappa c_g/2R$ with $\text{Im } \lambda \approx \omega_m^2 R/4\kappa c_g$, respectively.

If, on the contrary, a cell is under strong magnetic influence, negative rotation ($M \ll -1$) leads to $\beta \approx (-M)^{-1/3}/\sqrt{3}$ so that $\beta \ll 1$, and thus the wave has a positive growth rate of $\text{Im } \lambda \approx (-2\Omega_0\omega_m^2)^{1/3}/2$. Conversely, positive rotation ($M \gg 1$) leads to $\beta \approx \sqrt{3}M^{1/3}$ so that $\beta \gg 1$, i.e. the non-oscillatory disturbance is unstable with a growth rate of $\text{Im } \lambda \approx (2\Omega_0\omega_m^2)^{1/3}$. In both cases of strong magnetic influence, the instability growth rate only depends on the rate of work done by the magnetic force and not on the natural frequency ω_0 of the wave.

In sum, the wave becomes unstable when $\Omega_0 B_z < 0$, whereas the non-oscillatory disturbance becomes unstable when $\Omega_0 B_z > 0$. The non-oscillatory disturbance is twice as unstable as the wave under the same conditions except the direction of rotation. In addition, when the magnetic influence is relatively weak, like in real cells, the growth rate of the non-oscillatory disturbance can be approximated as $2\Omega_0\omega_m^2/\omega_0^2$.

5.3.6 Comparison with the metal pad roll instability

It is desirable to compare the growth rate of the rotational MHD instability to formerly known MHD instabilities. In order to estimate the growth rate of the metal pad roll instability in a rectangular cell of horizontal dimensions $L_x \times L_y$, we solve the eigenvalue problem derived in [8, 74]:

$$(\mathbf{K} + N\Gamma) \mathbf{x} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 c_g^2 / L_y^2} \mathbf{x}, \quad (5.33)$$

in the base of cosine modes

$$\psi_{\mathbf{k}} = C_{\mathbf{k}} \cos(m\pi x/L_x) \cos(n\pi y/L_y),$$

with their normalization such that $\int \psi_{\mathbf{k}}^2 dx dy = L_x L_y$, i.e.

$$C_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n = 0, \\ \sqrt{2} & \text{if } m = 0 \text{ and } n \neq 0, \\ \sqrt{2} & \text{if } m \neq 0 \text{ and } n = 0, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The elements of the vector \mathbf{x} are mode amplitudes, \mathbf{K} is a diagonal matrix whose elements are $K_{\mathbf{k},\mathbf{k}} = k^2 L_y^2 / \pi^2 = \epsilon^2 m^2 + n^2$, where $\epsilon = L_y / L_x$ is the horizontal aspect ratio of the cell. The elements of the skew-symmetric coupling matrix Γ are given by

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \begin{cases} 0 & \text{if } m + m' \text{ or } n + n' \text{ are even;} \\ \frac{C_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}'} \epsilon}{2 \sqrt{(\epsilon^2 m^2 + n^2)(\epsilon^2 m'^2 + n'^2)}} \frac{m'^2 n^2 - m^2 n'^2}{(m^2 - m'^2)(n^2 - n'^2)} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, the dimensionless parameter N , which compares the strength of the magnetic force to that of the restoring buoyancy force, is defined as:

$$N = \frac{8L_y^2 \omega_m^2}{\pi^4 c_g^2}, \quad \text{so} \quad M = \frac{\pi^4 c_g^2 \Omega_0}{4L_y^2 \omega_0^3} N.$$

Taking $L_y = 2R$ with the typical parameters described in Sect. 5.3.5 yields $N \approx 1.07$ for a real cell.

We have solved Eq. (5.33), with a system truncated to the 30 modes with the lowest natural gravitational frequencies $c_g k$, for rectangular cells with different aspect ratios. We denote by (m, n) the mode whose wavenumber is $(m\pi/L_x, n\pi/L_y)$.

As was revealed by earlier authors [8, 18, 74], our calculations show that the mode that has the largest growth rate may not be the same in different intervals of N . Table 5.1 shows which mode is the most unstable in the relevant regions of N . It is interesting to note that regardless of the aspect ratio, the pair of modes $(1, 0)$ and $(0, 1)$ is always dominant for $N \gtrsim 0.5$. Thus, above that threshold, the growth rate could be well approx-

imated by truncating the linear system of Eq. (5.33) to the two modes (1, 0) and (0, 1). The resulting 2×2 system can be solved analytically and has the solution

$$\frac{\text{Im } \lambda}{c_g \pi / L_y} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\epsilon^2 + N^2} - \epsilon^2 - 1}. \quad (5.34)$$

Aspect ratio	N (lower bound)	Mode
1	0.000	0.71 (0,1) + 0.71 (1,0)
0.5	0.152	0.71 (1,1) + 0.71 (2,0)
	0.465	0.71 (1,0) + 0.70 (0,1)
0.4	0.116	0.71 (3,1) + 0.71 (4,0)
	0.176	0.71 (3,0) + 0.70 (2,1)
	0.357	0.70 (2,0) + 0.70 (1,1)
	0.501	0.70 (1,0) + 0.69 (0,1) + 0.14 (2,1)
0.3	0.012	0.71 (5,1) + 0.71 (6,0)
	0.204	0.69 (3,0) + 0.68 (0,1) + 0.20 (2,1) + 0.16 (1,0)
	0.337	0.70 (4,1) + 0.70 (5,0)
	0.381	0.70 (4,0) + 0.70 (3,1) + 0.11 (1,1) + 0.10 (2,0)
	0.405	0.69 (3,0) + 0.68 (2,1) + 0.18 (0,1) + 0.15 (1,0)
	0.437	0.70 (2,0) + 0.69 (1,1) + 0.14 (3,1) + 0.10 (4,0)
	0.497	0.70 (1,0) + 0.68 (0,1) + 0.20 (2,1) + 0.12 (3,0)

TABLE 5.1: Dominant modes for the metal pad roll in rectangular cells.

The largest growth rate among all modes is plotted as a function of N in Fig. 5.3, together with the approximated rate given by Eq. (5.34). For comparison purposes, the growth wave of the rotational MHD instability, assuming a base-state eddy of radius $R = L_y/2$, is also plotted for three different values of Ω_0 . In the region of interest, i.e. around $N \approx 1.07$ and $\Omega_0 L_y / \pi c_g \approx 0.7$, it can be observed on Fig. 5.3 that the rotational MHD instability is weaker than the metal pad roll instability by a factor of approximately 2.25. However, the metal pad roll rapidly becomes more stable as the magnetic field is decreased, and towards lower values of N , both types of instabilities have comparable strengths, as can be seen in Figs. 5.3c and 5.3d. This comparison between the RMHDI and the MPRI might not be very accurate, because global rotation is not included in the MPRI model. We nevertheless consider it as an rough indicator.

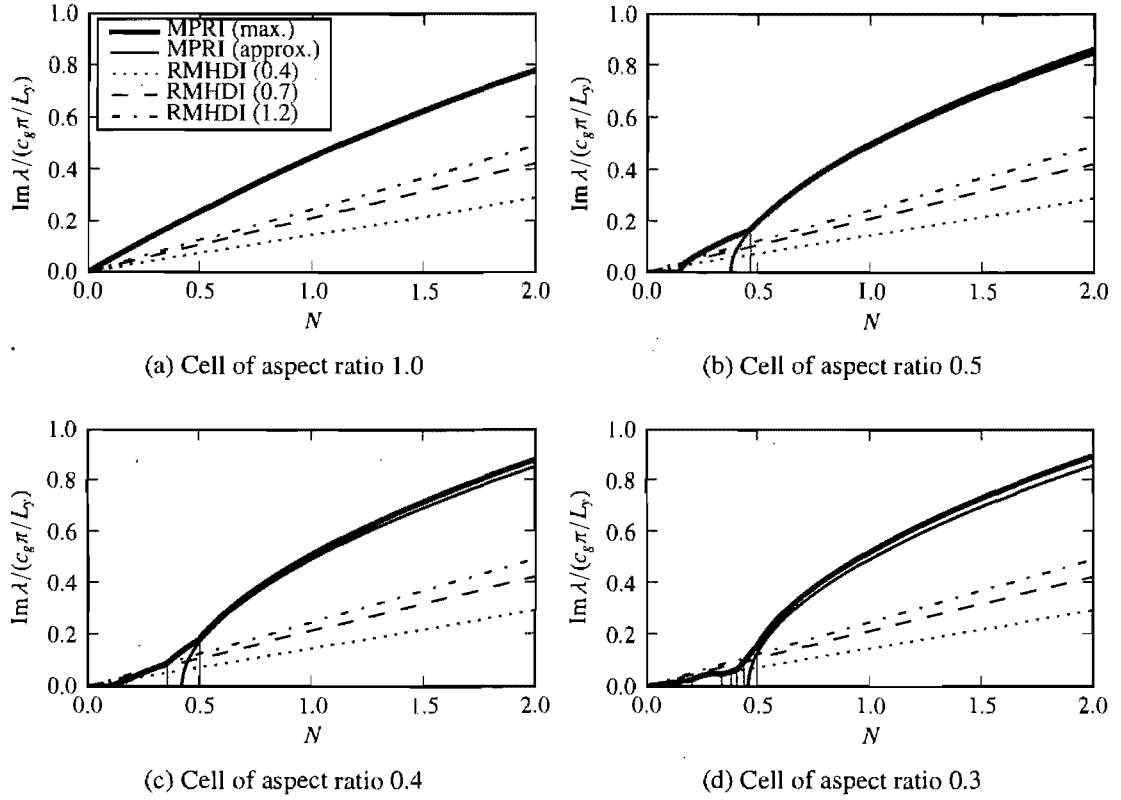


FIGURE 5.3: Comparison of the growth rate of rotational MHD instability (RMHDI) for different rotation rates (the numbers between parentheses in the legend correspond to $\Omega_0/(\pi c_g/L_y) = 0.4, 0.7, 1.2$) with the maximum growth rate of the metal pad roll instability (MPRI) modes, computed (thick solid line) and approximated with Eq. (5.34) (thinner solid line).

5.4 Improved hydrodynamic model

5.4.1 Base state with viscous rotation and curved interface

This section mainly addresses two questions: (1) do we miss important features of the instability development by considering a solid rotation profile as in Sect. 5.3, and (2) how is the instability affected by different base-state angular velocities in the two layers and by the ensuing base-state interface displacement?

We thus consider a more realistic non-solid rotation profile as described in Sect. 5.2.2 with the values for ΔR and G computed therein, and also allow for different rotation velocities in the two layers ($\alpha \neq 1$). Because of the implied base-state interface defor-

mation of finite amplitude, we must introduce the appropriate corrections to the mass conservation and electric current equations. Apart from these generalizations, we make the same assumptions as in Sect. 5.3 and the definition sketch in Fig. 5.1 still applies.

Observations and computations suggest ratios of the rotation velocity in the electrolyte to that in the aluminum ranging from about 1/2 in current cell models [5, 70, 87] to nearly 1 for a proposed 500 kA cell model [7, 25]. In this section, we consider values of α between 1/2 and 1.

For $\alpha = 1/2$, Fig. 5.2 predicts maximum negative and positive base-state interface displacements of $\zeta_0 \approx -0.39 H_2$ at $r = 0$ and $0.22 H_2$ at $r = R$, which is in relatively good agreement with the values of $-0.44 H_2$ and $0.20 H_2$ obtained by Zikanov *et al.* [87] in their numerical simulations of the steady state, with the same maximum aluminum velocity of approximately 20 cm/s and the same value of $H_2 = 5$ cm, although their model did not include a viscous term like in Eq. (5.2). We stress again that our base state, as described in Sect. 5.2.2, should not be considered as accurate, although it aims to be more realistic than the solid rotation profile. It is used only as a rough guide to show that the rotational MHD instability may occur for various rotation profiles.

5.4.2 Evolution equations

The evolution equations, linear in ζ but not in ζ_0 , can be derived:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r h_1 u_1)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r h_2 u_2)}{\partial r}, \quad (5.35)$$

$$\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho_i g \frac{\partial \zeta}{\partial r} + 2\rho_i r \Omega_i \omega_i + F_{ai} \quad (i = 1, 2), \quad (5.36)$$

$$\rho_i r \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\frac{\rho_i u_i}{r} \frac{\partial (r^2 \Omega_i)}{\partial r} - j_{ir} B_z \quad (i = 1, 2), \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial j_{1r}}{\partial t} = -\frac{J_0}{h_2} \mathbf{I}_r u_1, \quad j_{2r} = 0; \quad (5.38)$$

$$u_i = 0 = j_{ir} \quad (i = 1, 2) \quad \text{on } r = 0, R. \quad (5.39)$$

The integrodifferential operator \mathbf{I}_r in Eq. (5.38) is defined as

$$\mathbf{I}_r \phi = \frac{h_2}{r} \int \left(\frac{H_1 H_2 + \zeta_0^2}{h_1^2 h_2^2} \right) \frac{\partial (r h_1 \phi)}{\partial r} dr. \quad (5.40)$$

In Eq. (5.36), F_{ai} is the radial force resulting from the action of the azimuthal magnetic field B_θ , such that

$$F_{a1} = -\langle j_{1z} \rangle B_\theta + \frac{h_1}{2} \frac{\partial(j_{1r} B_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} j_{1r} B_\theta$$

$$F_{a2} = -\langle j_{2z} \rangle B_\theta,$$

where $\langle \cdot \rangle$ denotes the depth average. We assume that $B_\theta = -\mu_0 J_0 r / 2$, where μ_0 the magnetic permeability of vacuum, is primarily induced by the imposed electrolysis current. It can be shown that

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_{a1} - F_{a2}) = -\frac{\rho H \omega_a^2}{h_2} \left[\frac{\zeta_0}{H h_1} \frac{\partial(r h_1 u_1)}{\partial r} - \frac{r}{H} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} I_r u_1, \right]$$

where

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\mu_0 J_0^2}{2\rho}}.$$

The details are given in Appendix 5.A. Under typical conditions as those described in Sect. 5.3.5, $\omega_a \approx 1.34 \omega_g$.

It is readily verified that Eqs. (5.35)–(5.39) reduce to Eqs. (5.21)–(5.25) when $\alpha = 1$, i.e. $\Omega_1 = \Omega_0$, $\Omega_2 = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \Omega_0$ and thus $\zeta_0 = 0$.

5.4.3 Wave equation

Following the same procedure as in Sect. 5.3.3, we can derive a wave equation from Eqs. (5.35)–(5.39), and again assume a time dependence of the form of Eq. (5.28):

$$-\lambda^2 u = \left[\frac{c_g^2}{R^2} D_r^2 - S(r) - \frac{\omega_a^2 \zeta_0}{H} D_r^1 + \left(\frac{i 2 \Omega \omega_m^2}{\lambda} + \frac{\omega_a^2 r}{H} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \right) I_r \right] u, \quad (5.41)$$

where

$$S(r) = \frac{\alpha^2 h_1 + h_2}{H r^3} \frac{\partial(r^2 \Omega)^2}{\partial r}$$

and the base-state functions Ω and ζ_0 are described in Sect. 5.2.2. The new operator D_r^1 is defined as

$$D_r^1 \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(r h_1 \phi)}{\partial r},$$

the operator D_r^2 is updated from Eq. (5.27) to

$$D_r^2 \phi = \frac{h_2 R^2}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r h_1 \phi)}{\partial r} \right],$$

and I_r is given by Eq. (5.40).

5.4.4 Numerical resolution of the wave equation

Because Ω and ζ_0 depend on r , analytically solving Eq. (5.41) using an orthogonal basis of functions is not straightforward, if even possible. So, our strategy is rather to discretize Eq. (5.41) on points $r = r_j$, then numerically solve the following equivalent discrete system:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A & 0 & B \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{u} \\ \lambda^2 \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{u} \\ \lambda^2 \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

where $u_j = u(r_j)$, A and B are the discrete counterparts of the operators

$$-\frac{c_g^2}{R^2} D_r^2 + S + \frac{\omega_a^2 \zeta_0}{H} D_r^1 - \frac{\omega_a^2 r}{H} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} I_r$$

and

$$-i2\Omega\omega_m^2 I_r,$$

respectively. We used a 60-point discretization for the following computations. The results did not change significantly at higher resolutions.

Equation (5.41) does not allow Bessel functions as solutions in general, but as far as the range of physical parameters Ω_0 and ω_m is close to that of a real cell, the spatial solutions $u(r)$ resemble Bessel functions. So we define equivalent mode numbers n such that $\int [u(r) - \mathcal{J}_1(\kappa_n r)]^2 dr$ is minimal when $\kappa_n R$ is the n -th zero of $\mathcal{J}_1(x)$, excluding $x = 0$. We shall denote accordingly oscillatory modes by O_n^+ and O_n^- (the plus or minus sign corresponding to $\text{Re } \lambda > 0$ and $\text{Re } \lambda < 0$, respectively) and non-oscillatory modes by NO_n .

The computed eigenvalues of Eq. (5.42) are plotted in the complex plane in Figs. 5.4, 5.5 and 5.6. Only the first three oscillatory and non-oscillatory modes are shown, as they are the most unstable ones in each series. In all graphics, frequencies are in units of $c_g/R \approx 0.089 \text{ s}^{-1}$; it is indicated by a bar over the frequency variables λ , ω_m and Ω_0 .

The values given in Sect. 5.3.5 yield $\bar{\Omega}_0 \approx 1.1$ and $\bar{\omega}_m \approx 1.8$. Figure 5.4 shows the consequences of having a viscous rotation profile, when there is no base-state interface deformation ($\alpha = 1$). In Fig. 5.4a, $\bar{\omega}_m$ is varied, whereas in Fig. 5.4b, $\bar{\Omega}_0$ is varied. Both show that, for the same maximum azimuthal velocity $R\Omega_0$ (see Sect. 5.2.2) and within a range of parameters suitable for a real cell, viscous rotation is slightly more unstable than solid rotation. The situation is different when the interface is not flat in the base state. Figure 5.5 compares the effect of setting $\alpha = 0.5$ for the two rotation profiles under consideration. While shorter waves are weakly affected, the longest (and most unstable) non-oscillatory mode (NO_1) becomes noticeably more stable, in both cases of solid rotation (Fig. 5.5a) and viscous rotation (Fig. 5.5b). Finally, the effect of varying alpha continuously is displayed in Fig. 5.6.

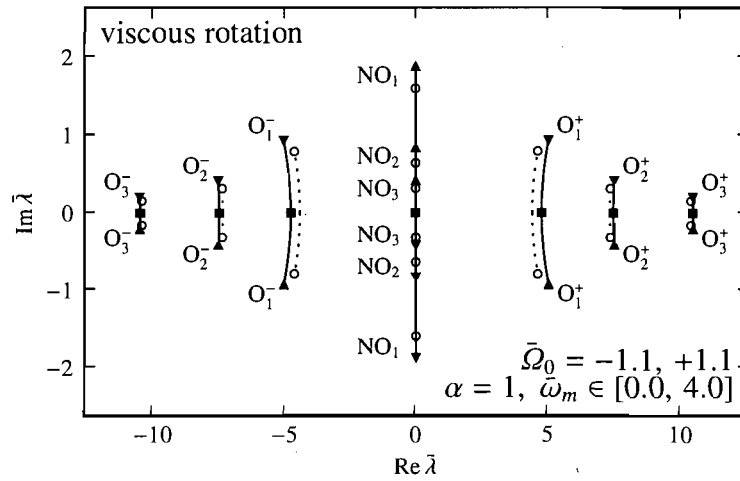
Despite some minor discrepancies, the behavior of the rotational instability is well described by the basic model. Finally, it is worth noting that we did not observe any significant changes in our results by setting $\omega_a = 0$ instead of $\omega_a \approx 1.34\omega_g$, which indicates that the correction due to the azimuthal magnetic field is negligible in practice.

5.5 Physics of the instability

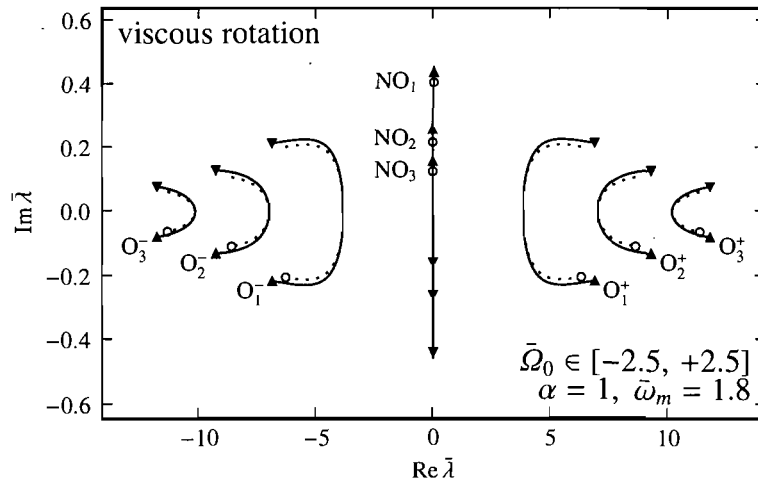
In order to seize upon the essentials of the rotational MHD instability mechanism, we propose here an order-of-magnitude analysis of the energy flow, based on the basic model of Sect. 5.3. To keep the analysis as simple as possible and because most of the mass of the system lies in the aluminum, we shall disregard contributions from the electrolyte to the kinetic energy and inertial forces. We also consider the simplest shape of axisymmetric interface deformation of amplitude ζ_c in the center, i.e. a single smooth swelling ($\zeta_c > 0$) or depression ($\zeta_c < 0$), as illustrated in Fig. 5.1.

5.5.1 Energy flow

The energy flow is described schematically in Fig. 5.7. Energy is supplied to the mechanical system essentially by the azimuthal magnetic force [last term of Eq. (5.23)]. More precisely, the work done by the magnetic force provides rotational kinetic energy E_θ at a rate $W_{m\theta}$, which can be converted into radial wave energy E_w (radial kinetic energy E_r plus gravitational potential energy E_g) at a rate $W_{\theta r}$. This is achieved through the action of the perturbation Coriolis force [first term on the right-hand side of Eq. (5.23)]



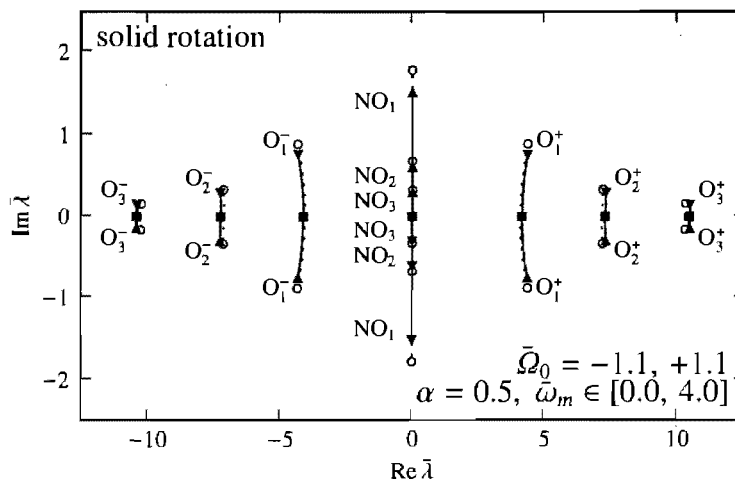
(a) Varying $\bar{\omega}_m$ from 0 (marked by a square) to 4 (marked by a triangle). Two series are included: one with $\bar{\Omega}_0 = 1.1$ (upright triangle) and the other with $\bar{\Omega}_0 = -1.1$ (inverted triangle).



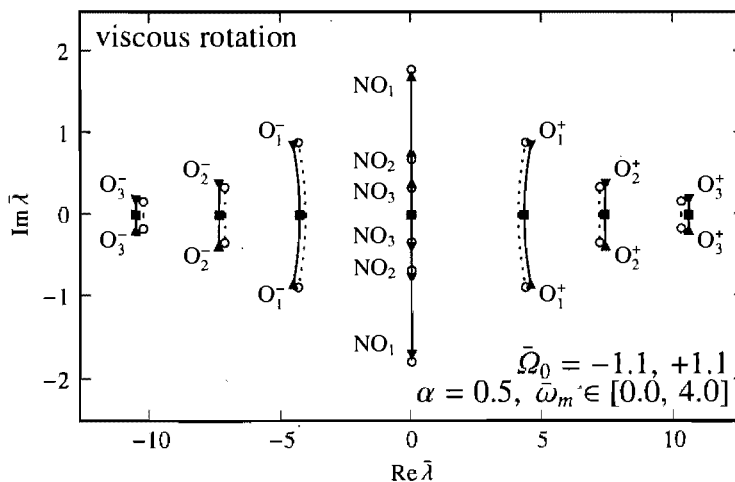
(b) Varying $\bar{\Omega}_0$ from -2.5 (marked by an inverted triangle) to 2.5 (marked by an upright triangle), while keeping $\bar{\omega}_m = 1.8$.

FIGURE 5.4: Effect of the viscous rotation profile with no base-state interface deformation ($\alpha = 1$). The solid curves correspond to the computed solutions of Eq. (5.42) and the dotted curves, ending with a circle, to the theoretical solutions of Eqs. (5.30) and (5.31), i.e. for solid rotation with no base-state interface deformation.

which withdraws rotational kinetic energy, and of the perturbation centrifugal force [last term on the right-hand side of Eq. (5.22)], which provides radial kinetic energy. There



(a) Solid rotation.



(b) Viscous rotation.

FIGURE 5.5: Effect of different base-state rotation velocities in the two layers (with $\alpha = 0.5$) and of the incident base-state interface deformation. In both graphics, $\bar{\omega}_m$ varies from 0 (marked by a square) to 4 (marked by a triangle). Two series are included: one with $\bar{\Omega}_0 = 1.1$ (upright triangle) and the other with $\bar{\Omega}_0 = -1.1$ (inverted triangle). Like in Fig. 5.4, the solid curves correspond to the computed solutions of Eq. (5.42) and the dotted curves, ending with a circle, to the theoretical solutions of Eqs. (5.30) and (5.31).

is also an energy transfer from the radial kinetic to the potential energy at a rate W_{rg} , but this does not modify the energy E_w of the wave. For the instability to develop, W_{gr} must be positive. We shall examine in Sect. 5.5.2 the different possible cases that lead to

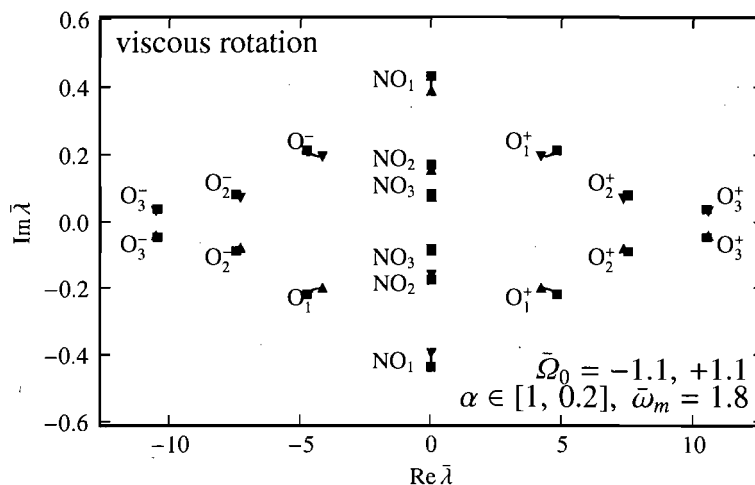


FIGURE 5.6: Effect of varying α continuously from 1.0 (marked by a square) to 0.5 (marked by a triangle). Two series are included: one with $\bar{\Omega}_0 = 1.1$ (upright triangle) and the other with $\bar{\Omega}_0 = -1.1$ (inverted triangle).

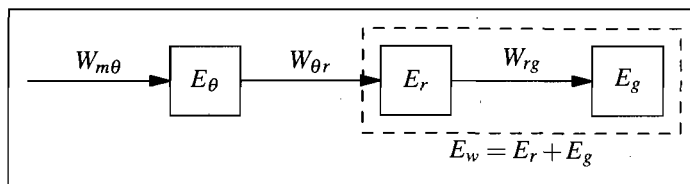


FIGURE 5.7: Energy flow diagram. E_{θ} is the kinetic energy associated with rotation. E_w is the wave mechanical energy, equal to the sum of the kinetic energy associated with radial motion E_r and of the potential energy E_g .

$W_{\theta r} > 0$.

We can estimate the order of magnitude of the quantities on Fig. 5.7. We do not consider the base-state contributions but only the leading-order variations due to the

perturbation. For the energies, we easily find:

$$\begin{aligned}
 E_\theta &\sim \text{volume} \times \text{rotational kinetic energy density} \\
 &\sim (R^2 H)(\rho R^2 \Omega_0 \omega_1), \\
 E_r &\sim \text{volume} \times \text{radial kinetic energy density} \\
 &\sim (R^2 H)(\rho u_1^2), \\
 E_g &\sim \text{base area} \times \text{gravitational energy per unit area} \\
 &\sim (R^2)(\Delta \rho g \zeta_c^2) \sim (R^2 H)(\rho c_g^2 \zeta_c^2 / H^2).
 \end{aligned}$$

Assessing the rates of work first requires two basic observations on $\partial \zeta / \partial r$ and j_{1r} . The first is that if there is a depression of the interface at the center ($\zeta_c < 0$), then ζ must increase towards the edge of the cell, and conversely, so that $\partial \zeta / \partial r \sim -\zeta_c / R$. The second comes from combining Eqs. (5.21) and (5.24) to see that $\partial(r j_{1r}) / \partial r = r J_0 \zeta / H_1 H_2$, then using the condition $j_{1r} = 0$ on $r = 0$ to set the sign of j_{1r} in terms of ζ_c : if ζ_c is positive, j_{1r} starts from zero at $r = 0$ to become positive at $r > 0$, and conversely. Therefore, $j_{1r} \sim J_0 R \zeta_c / H^2$. This result is consistent with the intuition that the current in the aluminum flows inward when there is a depression and outward when there is a swelling of the interface. With these preliminary results, we can estimate the rate of work done against the buoyancy force as

$$\begin{aligned}
 W_{rg} &\sim \text{volume} \times (-\text{buoyancy force}) \times \text{radial velocity} \\
 &\sim (R^2 H) \left(\Delta \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) (u_1) \sim -(R^2 H)(\rho c_g^2 u_1 \zeta_c / R H)
 \end{aligned}$$

and the rate of work done by the perturbation magnetic force as

$$\begin{aligned}
 W_{m\theta} &\sim \text{volume} \times \text{azimuthal magnetic force density} \times \text{azimuthal velocity} \\
 &\sim (R^2 H)(-j_{1r} B_z)(R \Omega_0) \sim -(R^2 H)(\rho R^2 \Omega_0 \omega_m^2 \zeta_c / H).
 \end{aligned}$$

The rate of work done by the perturbation centrifugal force is obtained by multiplying the last term on the right-hand side of Eq. (5.22) for $i = 1$ by u_1 :

$$W_{\theta r} \sim \text{volume} \times \text{centrifugal force density} \times \text{radial velocity} \sim (R^2 H)(\rho R \Omega_0 \omega_1)(u_1). \tag{5.43}$$

The same estimation could be obtained from the rate of work done by the perturbation Coriolis force ($-W_{\theta r}$), by multiplying the first term on the right-hand side of Eq. (5.23) for $i = 1$ by $r\omega_1$.

As shown in Fig. 5.7, rotational kinetic energy is provided to the system at a rate $W_{m\theta}$. The rate of conversion of rotational into radial kinetic energy per unit of perturbation rotational energy is $W_{\theta r}/E_\theta$. Next, the rate of conversion of radial kinetic energy into gravitational potential energy per unit of radial kinetic energy is W_{rg}/E_r . Using Eq. (5.32), it follows that

$$W_{m\theta} \left(\frac{W_{\theta r}}{E_\theta} \right) \left(\frac{W_{rg}}{E_r} \right) \sim (M\omega_0^3) E_g,$$

so we can think of the dimensionless number M as a cubic measure, in units of the natural frequency of the system ω_0 , of the rate of conversion of power provided by the magnetic force into potential energy, per unit of potential energy.

5.5.2 Instability scenarios

For the following discussion, it is useful to express the rate of change of the magnetic torque τ in terms of the perturbation radial velocity u_1 . It is directly obtained from Eq. (5.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &\sim \text{volume} \times \frac{\partial}{\partial t} (\text{azimuthal magnetic force density}) \times \text{radius} \\ &\sim (R^2 H) \left(-\frac{\partial j_{1r}}{\partial t} B_z \right) (R) \\ &\sim (R^2 H) (\rho R \omega_m^2 u_1). \end{aligned} \quad (5.44)$$

The key to reviewing the possible instability scenarios is twofold. Firstly, we note from Eq. (5.43) that for the centrifugal force to produce a positive work on the wave ($W_{\theta r} > 0$) and thus allow the instability to develop, the following condition must be satisfied:

$$\Omega_0 \omega_1 u_1 > 0. \quad (5.45)$$

Secondly, the evolution of ω_1 depends on the magnetic torque τ , whose evolution is in turn dictated by Eq. (5.44). So, if τ is initially zero, we can predict if ω_1 will become positive or negative by looking at the sign of u_1 . We shall therefore consider situations

in which the interface is initially left unperturbed ($\zeta = 0$ uniformly) so that there is no perturbed current and thus no magnetic torque ($\tau = 0$). Then, we introduce a perturbation of the flow with infinitesimal radial and angular velocities u_1 and ω_1 of arbitrary signs.

1. If rotation is amplified by the perturbation ($\Omega_0 \omega_1 > 0$), only $u_1 > 0$ can satisfy the instability condition (5.45). And $u_1 > 0$ also implies $\partial\tau/\partial t > 0$ through Eq. (5.44), so after an infinitesimal time, $\tau > 0$.
 - (a) If $\omega_1 > 0$ (and so $\Omega_0 > 0$ by hypothesis), the torque and the angular velocity perturbation are in the same direction. This leads to an unstable non-oscillatory motion.
 - (b) Conversely, if $\omega_1 < 0$ (and $\Omega_0 < 0$ by hypothesis), the torque and the angular velocity perturbation are out of phase. This causes oscillations.
2. Similar arguments can be used for the case of reduced rotation ($\Omega_0 \omega_1 < 0$ and thus $u_1 < 0$ for unstable motion) to show that (a) a non-oscillatory instability occurs if $\omega_1 < 0$ and $\Omega_0 > 0$, whereas (b) the motion is oscillatory when $\omega_1 > 0$ and $\Omega_0 < 0$.

		$\Omega_0 > 0$	$\Omega_0 < 0$
$\omega_1 > 0$	$u_1 > 0$	non-oscillatory instability	stable motion
$\omega_1 > 0$	$u_1 < 0$	stable motion	oscillatory instability
$\omega_1 < 0$	$u_1 > 0$	stable motion	oscillatory instability
$\omega_1 < 0$	$u_1 < 0$	non-oscillatory instability	stable motion

TABLE 5.2: Possible instability scenarios.

Table 5.2 summarizes these results. By requiring the centrifugal force to do a positive work on the wave, we have found that the instability manifests itself as a motion that can be oscillatory (when $\Omega_0 < 0$) or not (when $\Omega_0 > 0$), depending on whether the magnetic torque is in phase with the angular velocity disturbance. This simple reasoning explains the results found in Sect. 5.3.

5.6 Discussion and concluding remarks

We have proposed two linear models to investigate the magnetohydrodynamic stability of axisymmetric interfacial deformations in aluminum reduction cells, subject to

a rotating flow in a cylindrical geometry. With a basic hydrodynamic model allowing only for solid rotation and a flat base-state interface, we could analytically predict the pulsation and growth rate of the disturbances at their early stage of development in terms of the unique dimensionless parameter

$$M = \frac{2\Omega_0 J_0 B_z}{\rho H (c_g \kappa^2 / R^2 + 4\Omega_0^2)^{3/2}},$$

which is the cubic ratio of the indirect rate of work of the magnetic force on the interface (conversion of magnetic power to potential energy), normalized with the potential energy, to the natural frequency of the system.

We also showed that, under typical conditions of angular velocity and magnetic field, the non-oscillatory rotational MHD instability develops nearly half as fast as the fastest growing modes of the traditional metal pad roll instability (without rotation). With an improved hydrodynamic model allowing for a viscous rotation profile and a curved base-state interface, we observed with numerical computations that the predictions of the basic model gave a good approximation to the complex behaviour of the instabilities. The base state is always unstable when $M \neq 0$. Finally, by examining how energy is supplied to the wave, with simple order-of-magnitude estimations, we explained how unstable disturbances become either oscillatory or non-oscillatory, depending on the direction of rotation.

Although the oscillatory and non-oscillatory axisymmetric instabilities predicted by our models carry a new piece of understanding to the problem of MHD stability of aluminum reduction cells, the analysis relies on important simplifying assumptions (see Sect. 5.2), and thus the predicted growth rates, and even the (non-)oscillatory nature of the instabilities, may be significantly different in real cells. In particular, the conclusion that the system is always unstable whenever $M \neq 0$ should not be interpreted as a stability criterion, but more as an indication that the destabilization mechanism is easy to trigger. Besides the obvious limitations of our models, we believe that the new axisymmetric instabilities rely on a fundamental process which is not likely to be hampered by effects such as the geometry of the cell.

From a more practical viewpoint, the dispersion relations Eqs. (5.30) and (5.31) suggest to keep the rotation rate as low as possible to increase the stability of the cell with respect to the axisymmetric instabilities analyzed in this paper. According to Fig. 5.6, bringing the electrolyte to a rotation rate comparable to that of the aluminum makes the

rotational MHD instabilities slightly more likely to develop.

Acknowledgements

This research has been supported by *Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada*, from which the first author has been granted a scholarship, and the second author has received a Discovery Grant. The authors are also grateful to Oleg Zikanov for enlightening discussions, and to Thierry Tomasino for useful comments.

5.A Contribution of the azimuthal field

Our purpose here is to evaluate the importance of the magnetic force due to the azimuthal magnetic field B_θ . We begin by defining the magnetic analog of the hydrostatic pressure as the part of the pressure whose vertical gradient balances the vertical magnetic force $F_z = j_r B_\theta$. Let p_m be that magnetic pressure. Then $p_m = (z - \zeta_0 - \zeta)F_z$ is found to satisfy $\partial p_m / \partial z = F_z$ and to be continuous across the interface even if F_z is not, although the latter must be independent of z in each single layer. For application to the shallow-water equations, we need to compute the vertical average of the horizontal gradient of p_m , reducing to

$$\frac{1}{h_1} \int_{-H_1}^{\zeta_0} \frac{\partial p_m}{\partial r} dz = -\frac{h_1}{2} \frac{\partial F_{1z}}{\partial r} - F_{1z} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} - \frac{\partial(F_{1z}\zeta)}{\partial r}$$

in the aluminum layer. We shall neglect the last term which is second order in ζ , in regard to Eq. (5.18). The vertical magnetic force, and therefore the magnetic pressure, is null in the electrolyte because we have approximated the radial electric current in that layer to zero in Eq. (5.20).

Thus, the contributions from the radial and vertical magnetic forces to the radial motion equation are $F_{1r} + (h_1/2)\partial F_{1z}/\partial r + F_{1z}\partial\zeta_0/\partial r$ and F_{2r} in the aluminum and electrolyte layers, respectively. To obtain a wave equation such as Eqs. (5.26) or (5.41), the difference of the radial motion equations in the two layers has to be taken. The radial force

difference associated to azimuthal field is:

$$\begin{aligned}
 F_{1r} - F_{2r} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial F_{1z}}{\partial r} + F_{1z} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} &= -(\langle j_{1z} \rangle - \langle j_{2z} \rangle) B_\theta + \frac{h_1}{2} \frac{\partial(j_{1r} B_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} j_{1r} B_\theta \\
 &= \frac{\mu_0 J_0^2}{2} \left[\frac{r \zeta_0 \zeta}{h_1 h_2} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \int \frac{H_1 H_2 + \zeta_0^2}{h_1^2 h_2^2} r \zeta \, dr \right], \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

where we have used the depth average (denoted by $\langle \cdot \rangle$) of Eqs. (5.17) and (5.19) with Eq. (5.18), and we have assumed the azimuthal magnetic field $B_\theta = -\mu_0 J_0 r/2$ to be induced dominantly by the electrolysis current. Interestingly, the right-hand side of Eq. (5.46) vanishes when $\zeta_0 = 0$.

If we disregard the fact that the subtraction in Eq. (5.46) could result in a cancellation of the largest part of the two terms in the right-hand side, dimensional analysis, by taking $|\zeta_0| \sim H_2$ and $H_2 < H_1$, reveals that the correction of Eq. (5.46) is of order

$$\frac{\mu_0 J_0^2 R |\zeta|}{H_1}.$$

In contrast, the order of magnitude of the azimuthal force $-j_{1r} B_z$ is

$$\frac{J_0 B_z R |\zeta|}{H_1 H_2} \sim \frac{\mu_0 J_0^2 R |\zeta|}{H_2},$$

provided that $B_z \sim \mu_0 J_0 H_1$, as is often the case in a real cell (see the parameters given in Sect. 5.3.5). Therefore, the contributions from the radial and vertical components of the magnetic force due to the azimuthal field are likely to be weaker than the azimuthal magnetic force by a factor of approximately H_2/H_1 . This corresponds to a possibly significant correction, but not a dominant force.

FIN DE L'ARTICLE

5.B Extension non axisymétrique

On généralise dans la présente section, en ajoutant une dépendance azimutale aux variables décrivant l'écoulement, le modèle élémentaire de la section 5.3 pour un état de base sans déformation d'interface. Cette généralisation permet de montrer que le roulis de la nappe de métal (RNM) est stabilisé par la rotation et qu'il existe des modes non axisymétriques à l'instabilité MHD de rotation (IMHDR). Il s'agit de résultats à ce jour non publiés, complémentaires à ceux des sections précédentes. La question de l'influence de la rotation sur le RNM s'impose par l'omniprésence de grandes échelles de rotation dans la cuve d'électrolyse. La question de l'IMHDR non axisymétrique est suggérée par la situation en général non axisymétrique dans les cuves en opération.

5.B.1 Équations de transport

Pour inclure la dépendance en θ (azimutale) [37, pp. 737–738] dans le système (5.21)–(5.24), il est plus simple de travailler à partir de la forme vectorielle, comme dans le système (2.2 a–d). Ainsi, on définit $\mathbf{u}_i = u_{ir}\hat{\mathbf{r}} + u_{i\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et, avec l'approximation de Boussinesq ($\Delta\rho \ll \rho$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \zeta = -H_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = H_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2, \quad (5.47)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \mathbf{u}_1 - \rho \Omega_0 \mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \nabla \phi \times B_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.48)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \mathbf{u}_2 - \rho \Omega_0 \mathbf{u}_2 \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial p}{\partial r} - (\rho - \Delta\rho) g \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad (5.49)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{J_0 \zeta}{H_1 H_2}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{sur } r = R, \quad (5.51)$$

$$u_{1r} = u_{2r} = 0 \quad \text{sur } r = R, \quad (5.52)$$

$$-2\rho\Omega_0(u_{1\theta} - u_{2\theta}) + \Delta\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{B_z}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \text{sur } r = R. \quad (5.53)$$

L'équation (5.50) découle directement de $(\nabla \times \mathbf{j}_{1h})_z = 0$ et de (2.5), et la condition $j_{1r} = 0$ implique (5.51), et la condition (5.52) appliquée à (5.48) et à (5.49) implique (5.53).

Pour résoudre le système, on soustrait d'abord (5.49) de (5.48), puis on calcule la

divergence et le rotationnel de l'équation ainsi obtenue :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \zeta = -\frac{H_1 H_2}{H} \nabla^2 \Phi, \quad (5.54)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \nabla^2 \Phi = -2\Omega_0 \nabla^2 \Psi - \frac{\Delta \rho g}{\rho} \nabla^2 \zeta, \quad (5.55)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \nabla^2 \Psi = 2\Omega_0 \nabla^2 \Phi + \frac{B_z}{\rho} \nabla^2 \phi, \quad (5.56)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{J_0 \zeta}{H_1 H_2}, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{sur } r = R, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \Psi = 0 \quad \text{sur } r = R, \quad (5.59)$$

$$2\Omega_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Delta \rho g}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{2\Omega_0}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{B_z}{\rho R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \text{sur } r = R, \quad (5.60)$$

où les potentiels Φ et Ψ sont définis par la décomposition du champ de vitesse $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ en une partie potentielle et une partie solénoïdale : $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \nabla \Phi + \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{z}}$, de sorte que $\nabla \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \nabla^2 \Phi$ et $[\nabla \times (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)]_z = -\nabla^2 \Psi$. Les conditions (5.59) impliquent (5.52) et rendent la décomposition unique [83, pp. 37–38]. L'équation (5.54) résulte de (5.47).

5.B.2 Équation d'onde et solution

On peut dériver une équation d'onde en terme de ζ seulement en appliquant l'opérateur $(\partial/\partial t + \Omega_0 \partial/\partial \theta)$ à (5.55) pour pouvoir éliminer $\nabla^2 \Psi$ avec (5.56), puis en éliminant $\nabla^2 \Phi$ et $\nabla^2 \phi$ avec (5.54) et (5.57) pour obtenir :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^3 \zeta + 4\Omega_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \zeta - c_g^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \nabla^2 \zeta = 2\Omega_0 \omega_m^2 \zeta. \quad (5.61)$$

On trouve des solutions à (5.61), et ainsi au système (5.54)–(5.59), de la forme :

$$\zeta = C J_n(\kappa r/R) e^{i[n(\theta - \Omega_0 t) - \lambda t]}, \quad (5.62)$$

$$\phi = -\frac{J_0 R^2}{\kappa^2 H_1 H_2} \left[\zeta(r) - \frac{r^n}{n R^{n-1}} \zeta'(R) \right], \quad (5.63)$$

$$\Phi = -i\lambda \frac{H R^2}{\kappa^2 H_1 H_2} \left[\zeta(r) - \frac{r^n}{n R^{n-1}} \zeta'(R) \right], \quad (5.64)$$

$$\Psi = \frac{H R^2}{2\Omega_0 \kappa^2 H_1 H_2} \left(\lambda^2 - \frac{c_g^2 \kappa^2}{R^2} \right) \left[\zeta(r) - \frac{r^n}{R^n} \zeta(R) \right], \quad (5.65)$$

où on a utilisé la notation compacte $\zeta'(R) = \partial\zeta/\partial r|_{r=R}$. L'équation (5.62) décrit une onde de fréquence complexe $\lambda + n\Omega$ ou, de façon équivalente, une onde de fréquence complexe λ se propageant dans un référentiel tournant à vitesse angulaire Ω , dont la coordonnée azimutale est $\theta' = \theta - \Omega t$. Le paramètre azimutal n détermine le nombre de cycles angulaires de l'onde.

5.B.3 Relation de dispersion et quantification des modes

Avec les solutions (5.62)–(5.65), on obtient de (5.61) la même relation de dispersion (5.29) qu'à la section 5.3.4 :

$$-\lambda^2 + \frac{c_g^2 \kappa^2}{R^2} + 4\Omega_0^2 = \frac{2\Omega_0 \omega_m^2}{-i\lambda},$$

mais κ peut prendre ici des valeurs complexes. Pour chaque valeur de κ , il y a trois solutions pour λ , une correspondant à chacune des trois racines cubiques complexes de β^3 :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega_0}{\sqrt{3}} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right), \\ \beta^3 &= \frac{i3\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{M^2 + \frac{4}{27}} - M \right), \\ M &= \frac{2\Omega_0 \omega_m^2}{\omega_0^3}, \\ \omega_0^2 &= \frac{c_g^2 \kappa^2}{R^2} + 4\Omega_0^2. \end{aligned}$$

Les valeurs de κ permises par le système sont déterminées par la condition (5.60) qui, au moyen des solutions (5.62)–(5.65), se réécrit :

$$\frac{n\zeta(R)}{n\zeta(R) - R\zeta'(R)} \frac{c_g^2 \kappa^2}{R^2} = \lambda(2\Omega_0 + \lambda) - i\omega_m^2 \quad (5.66)$$

ou, en terme des fonctions de Bessel :

$$\frac{n\kappa \mathcal{J}_n(\kappa)}{\mathcal{J}_{n+1}(\kappa)} = \frac{\lambda(2\Omega_0 + \lambda) - i\omega_m^2}{c_g^2/R^2}.$$

5.B.4 Résolution numérique et classification des solution

Afin de résoudre (5.66), on trouve numériquement les racines de la fonction :

$$f(\kappa) = \frac{n\mathcal{J}_n(\kappa)}{\mathcal{J}_{n+1}(\kappa)} - \frac{\lambda(\kappa)[2\Omega_0 + \lambda(\kappa)] - i\omega_m^2}{\kappa c_g^2/R^2},$$

pour différentes valeurs de n , Ω_0 et ω_m et pour chacune des trois solutions de $\lambda(\kappa)$ (voir section 5.B.4). Il existe plusieurs racines dans chaque cas, chacune correspondant à un mode spatial spécifié par le paramètre azimutal n (entier) et le paramètre radial κ (complexe).

On distingue les différents modes radiaux au moyen de la valeur de κ au point $(\Omega_0, \omega_m) = (0, 0)$, auquel (5.29) devient simplement $\lambda^2 = c_g^2 \kappa^2 / R^2$ et ainsi (5.66) a pour solution $\zeta'(R) = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{J}'_n(\kappa) = 0$. Par exemple, en $(\Omega_0, \omega_m) = (0, 0)$, les valeurs de κ décrivant les trois premiers modes sont $\kappa \approx 1,84, 5,33, 8,54$ pour $n = 1$, et $\kappa \approx 3,05, 6,71, 9,97$ pour $n = 2$. Par la suite, on désignera par *mode primaire* le mode associé à la plus basse valeur de κ en $(\Omega_0, \omega_m) = (0, 0)$ pour une valeur de n donnée, et par *modes secondaires* les autres modes.

Il existe trois classes de solutions : l'une correspondant au RNM modifié par la rotation et les deux autres correspondant à des extensions non axisymétriques de l'IMHDR oscillatoire et non oscillatoire.

5.B.5 Le RNM modifié par la rotation

Les modes primaires, pour tout $n = 1, 2, \dots$, se manifestent sous la forme d'un RNM légèrement modifié par la rotation. La figure 5.8 montre la solution que l'onde

est instable ($\text{Im } \lambda > 0$) lorsque la propagation est en sens antihoraire ($\text{Re } \lambda > 0$), et stable dans le cas contraire. Cela est cohérent avec ce qu'on connaît du RNM (voir sections 2.2.1, 3.5.4 et 6.6) pour $B_z > 0$. Les solutions pour $n = 2, 3, \dots$ ne sont pas illustrées ici, mais sont qualitativement très semblables à celle pour $n = 1$, et diffèrent principalement par leur amplitude plus faible de $\text{Im } \lambda$.

5.B.6 L'IMHDR non axisymétrique

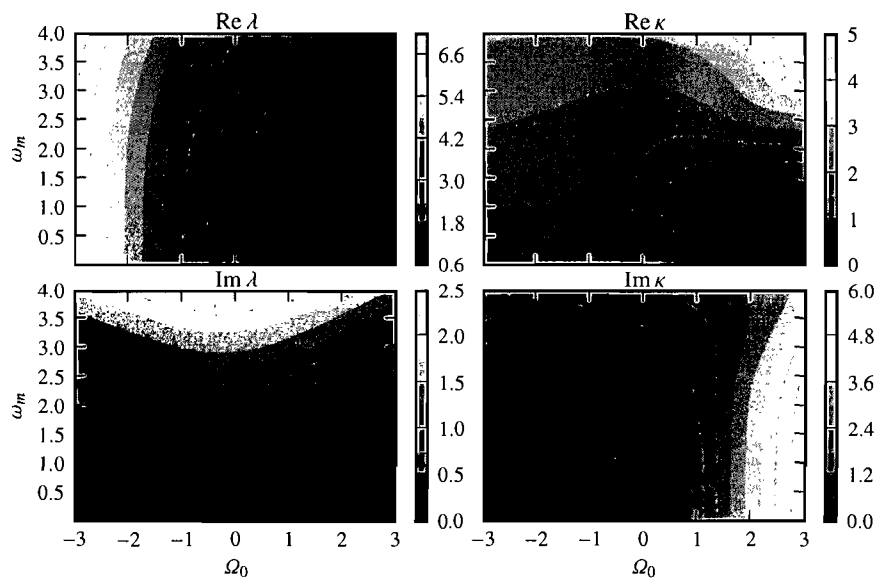
Les modes secondaires, pour tout $n = 1, 2, \dots$, ont un comportement semblable à l'IMHDR. Les solutions de la famille de l'IMHDR oscillatoire se manifestent par une onde instable lorsque la rotation globale est en sens horaire ($\Omega_0 < 0$) et stable dans le cas contraire, indépendamment de la direction de propagation de l'onde. C'est ce que montre la figure 5.9 pour le mode secondaire ayant la plus basse fréquence spatiale κ à l'origine $[(\Omega_0, \omega_m) = (0, 0)]$, pour $n = 1$.

Les solutions de la famille du l'IMHDR non oscillatoire, à l'inverse de l'IMHDR oscillatoire, se manifestent par une onde instable lorsque la rotation globale est en sens antihoraire ($\Omega_0 > 0$) et stable dans le cas contraire, peu importe la direction de propagation de l'onde. Cette classe d'ondes comprend à la fois les modes primaires et les modes secondaires. La figure 5.10 montre la solution pour le mode primaire pour $n = 1$. Les ondes de cette classe sont de la famille de l'IMHDR non oscillatoire, néanmoins contrairement à celle-ci, elles n'apparaissent pas comme des déformations statiques de l'interface d'amplitude croissante, mais se propagent très lentement (l'amplitude de $\text{Re } \lambda$ est relativement faible) dans la direction de la rotation globale. Rappelons ici que λ est la fréquence complexe λ des ondes telles qu'observées depuis le référentiel tournant avec les fluides à vitesse angulaire Ω_0 (voir section 5.B.2).

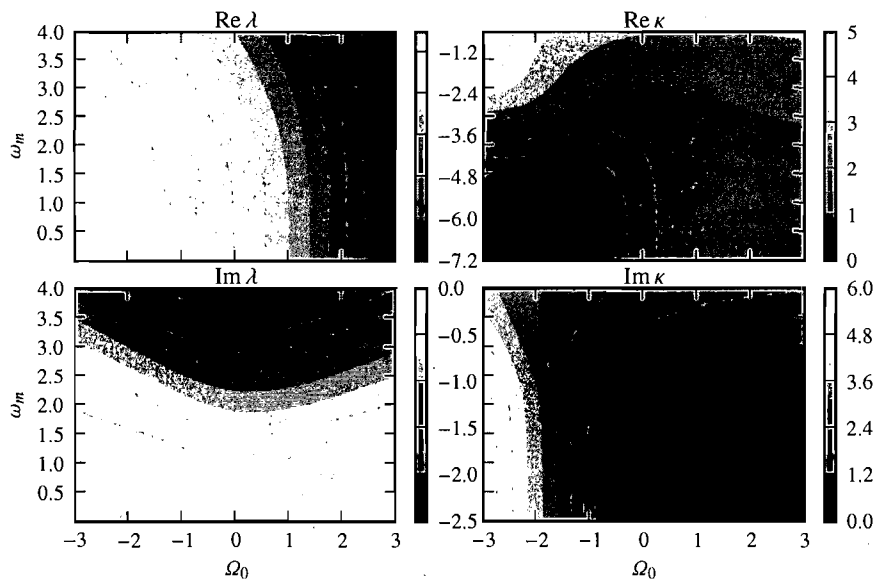
Les autres solutions (modes spatiaux pour de plus grands nombres d'onde ou pour $n = 2, 3, \dots$) ne sont pas illustrées ici, mais, comme c'était le cas à la section 5.B.5, elles sont qualitativement très semblables à celles illustrées par les figures 5.9 et 5.10, et diffèrent principalement par leur amplitude plus faible de $\text{Im } \lambda$.

5.B.7 Discussion

Les résultats des sections 5.3, 5.B.5 et 5.B.6 montrent qu'en régime linéaire, le RNM (sujet à la rotation), l'IMHDR axisymétrique et l'IMHDR non axisymétrique évoluent indépendamment. Les modes propres sont caractérisés par un paramètre angulaire (n) et



(a) Onde en sens antihoraire (instable)

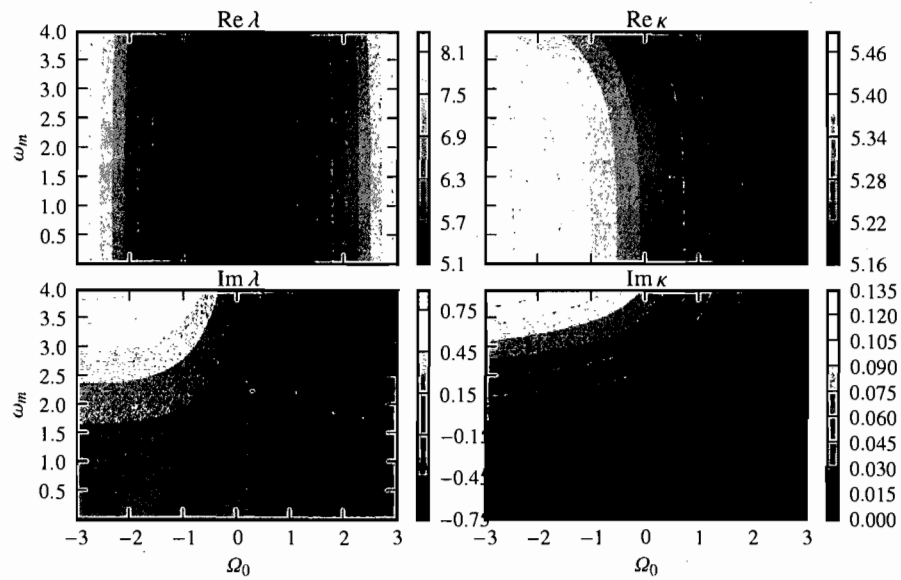


(b) Onde stable en sens horaire (stable)

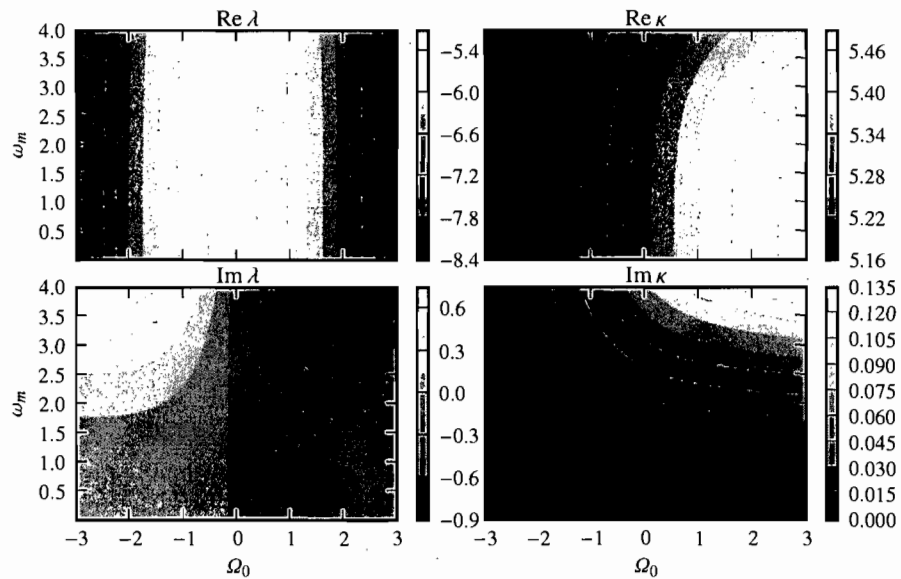
FIGURE 5.8: Fréquence (λ) et nombre d'onde (κ) complexes du RNM sous l'influence de la rotation pour $n = 1$. Toutes les quantités (Ω_0 , ω_m et λ) sont en unités de c_g/R .

un paramètre radial (κ) mais aussi par le choix de l'une des trois branches de solutions de la fréquence complexe λ .

La figure 5.8 suggère que la présence des grands tourbillons dans les cuves n'affectent pas le mécanisme du RNM de façon dominante — les effets de la dissipation



(a) Onde en sens antihoraire



(b) Onde en sens horaire

FIGURE 5.9: Fréquence (λ) et nombre d'onde (κ) complexes de l'IMHDR oscillatoire non axisymétrique pour le premier mode radial, pour $n = 1$. Toutes les quantités (Ω_0 , ω_m et λ) sont en unités de c_g/R .

sont probablement plus importants en pratique — et donc que la théorie du roulis sans rotation [8, 18, 69, 74] constitue une bonne approximation du cas avec rotation.

En ce qui concerne l'IMHDR, comme dans le cas axisymétrique, les ondes (fi-

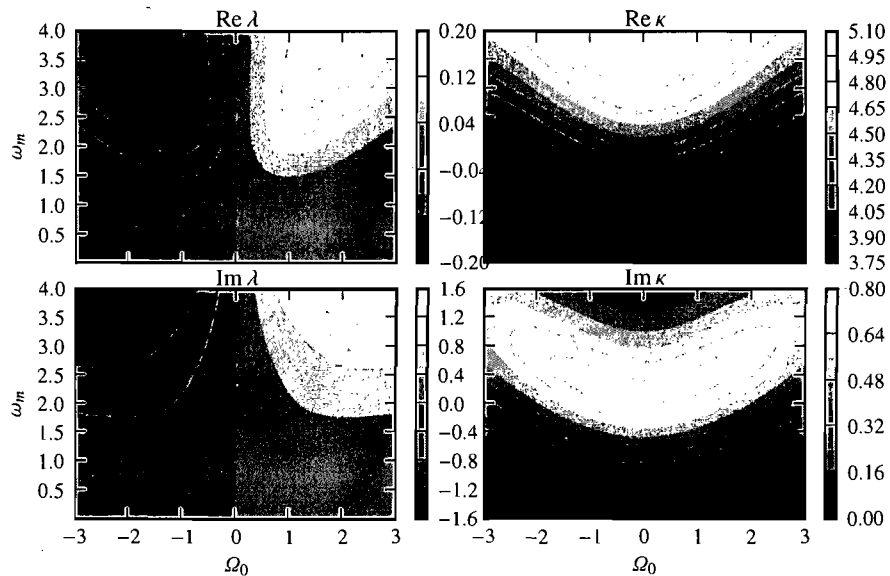


FIGURE 5.10: Fréquence (λ) et nombre d'onde (κ) complexes de l'onde non axisymétrique de la même famille que l'IMHDR non oscillatoire, pour le premier mode radial, pour $n = 1$. Toutes les quantités (Ω_0 , ω_m et λ) sont en unités de c_g/R .

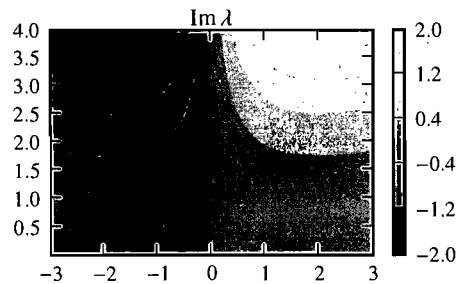


FIGURE 5.11: Taux de croissance ($\text{Im } \lambda$) complexe de l'IMHDR non oscillatoire ($\text{Re } \lambda = 0$) axisymétrique ($n = 0$), pour le premier mode radial. Le nombre d'onde $\kappa \approx 3,83$ est ici uniforme et satisfait $\mathcal{J}'_0(\kappa) = -\mathcal{J}_1(\kappa) = 0$ (voir section 5.3.4). Toutes les quantités (Ω_0 , ω_m et λ) sont en unités de c_g/R .

figure 5.10) de la famille de l'IMHDR non oscillatoire sont plus instables que celles (figure 5.9) de la famille de l'IMHDR oscillatoire. D'autre part, en comparant la figure 5.11, qui montre le taux de croissance du premier mode radial de l'IMHDR non oscillatoire telle que décrite à la section 5.3.4, à la figure 5.10, qui montre celui du premier mode radial non axisymétrique de la même famille, on voit que l'onde non axisymétrique demeure relativement plus faible. Le mécanisme de déstabilisation de l'IMHDR

favorise les modes axisymétriques. Ainsi, on peut s'attendre à ce que ceux-ci dominant, du moins en régime linéaire, même si des modes non axisymétriques sont excités, par exemple par la présence de coins dans une cuve rectangulaire.

CHAPITRE 6

CONTRÔLE DU COURANT ÉLECTRIQUE AUX ANODES

L'article inclus ci-après traite des conditions sur le potentiel et le courant électriques aux anodes dans la cuve de Hall-Héroult. On y montre qu'il est théoriquement possible de limiter très efficacement l'amplitude des courants déviés, et par le fait même le développement des instabilités MHD, au moyen d'une stratégie appropriée de contrôle du courant électrique circulant à travers les anodes.

Nous y montrons par ailleurs que le fait que le rapport des conductivités σ_2/σ_1 demeure fini, malgré que $\sigma_2 \ll \sigma_1$, implique une correction qui se fait de plus en plus sentir à mesure que la taille de la cuve augmente. Les modèles analytiques [8, 18, 74] prédisent jusqu'ici que, plus les ondes sont longues, plus elles sont instables. Cette tendance est limitée par la correction que nous incluons dans l'analyse qui suit.

La notation mathématique et la mise en forme de l'article original ont été adaptés par souci d'uniformité pour être inclus dans le présent texte.

Ma contribution : théorie, calculs analytiques et numériques, interprétation des résultats. Le coauteur m'a aidé à développer les idées, à alimenter la réflexion et à clarifier la rédaction.

Munger, D., Vincent, A. (2006). Electric boundary conditions at the anodes in aluminum reduction cells. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 37(6): 1025-1035.

<http://dx.doi.org/10.1007/BF02735025>

Avec l'aimable permission de Springer Science+Business Media.

With kind permission of Springer Science+Business Media.

Electric boundary conditions at the anodes in aluminum reduction cells

D. Munger, A. Vincent

Université de Montréal

To overcome the problem of magnetohydrodynamic (MHD) instabilities at the aluminum–electrolyte interface in aluminum reduction cells, the use of controlled anodes motion through a feedback mechanism of the interface velocity has been suggested [17]. This would allow for suppressing the lower modes, known to be unstable [8, 18]. Here, we explore the consequences of controlling the electric potential at the anodes, by means of a modal expansion of the MHD variables in terms of orthogonal functions, as previously done by Sneyd & Wang [74]. We pay a special attention to two special cases: (a) the traditional case of a constant potential at the anodes; and (b) the more stable case in which the vertical current injected by the anodes is kept constant by controlling small amplitude variations of the potential. We also comment on the case of an array of discrete anodes [17]. We also consider linear friction in our model, whose stabilizing effect is shown to be in agreement with the results of our numerical simulations of the viscous flow. The conductivity ratio between electrolytic bath and aluminum is assumed finite in our model, which leads to a weaker coupling of long waves when the electrolyte layer is made really thin.

6.1 Introduction

Industrial production of aluminum is achieved in Hall–Héroult cells by means of electrolysis of alumina, which is dissolved for the purpose into a thin electrolytic bath layer floating over a shallow aluminum layer. The involved electric currents are of the order of 10^5 kA, so magnetic forces in aluminum reduction cells are strong enough to induce wave phenomena at the metal–bath interface. The stability of those waves has been extensively investigated by analytical means through linearization processes [18, 39, 69, 74] as well as by numerical simulation of a two-dimensional system [6, 64, 77, 87], though there is a growing interest for three-dimensional numerical simulation of the complete nonstationary MHD equations [30, 59, 81].

In linear stability analysis of interfacial waves at the aluminum–electrolyte interface in Hall–Héroult cells, it is common practice to consider that the electric potential in the electrolytic bath takes a constant value at the anodes boundary [18, 39, 69, 74]. This is a consequence of the low conductivity of the bath compared to that of the carbon anodes. Though this condition must hold for every single anode, it is still conceivable to achieve a per-anode potential control. In terms of modeling, this means that we have to find the relevant electric boundary conditions at the anodes. The purpose of the current study is to investigate the consequences of this novel boundary condition on the stability of the aluminum–electrolyte interface motion. We begin by considering the ideal case of a continuum of independent anodes, which allows the potential to be set to any desired value (one could use for instance variable resistances in the anodes rods).

In this study, we show that, with appropriate control of the potential at the anodes boundary, it is possible to get rid of that leading order current disturbance, thus improving the stability of long interfacial waves. At this point, it becomes necessary to solve for the next significant perturbation order. Next, interfacial waves are investigated by following the method developed by Davidson & Lindsay [18], but with an additional linear friction term. Our results regarding the stabilizing effect of potential control at the anodes and of linear friction are in agreement with numerical simulations performed in the past.

6.2 A simple model for the cell

The physical system under consideration is an idealized rectangular cell of dimensions $L_x \times L_y \times H$ with respective aluminum and electrolyte depths H_1 and H_2 (Fig. 6.1). Throughout the rest of this paper, the subscripts 1 and 2 refer to the aluminum and electrolyte layers respectively. Their electrical conductivities satisfy $\sigma_1 \gg \sigma_2$. The $z = 0$ plane is defined as the equilibrium position of the interface in the absence of motion. The vertical displacement of the metal surface is denoted by $\zeta(x, y, t)$. Since we focus on the onset of instability in a cell with a large aspect ratio, the magnitude of the interface displacement $|\zeta_0| = \sup |\zeta|$ is assumed to be small compared to the electrolyte depth H_2 . We do not consider the effects of a background flow [39, 77, 87]. The electrolysis current $\mathbf{J}_0 = -J_0 \hat{\mathbf{z}}$ is imposed at equilibrium. Since the magnetic Reynolds number $\mu_0 \sigma U L_x$ is typically small in Hall–Héroult cells, the magnetostatic approximation follows from the induction law: $\nabla_3 \times \mathbf{E} = \nabla_3 \times \mathbf{J} / \sigma = 0$, where $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j}$ is the total electric current, and $\mathbf{j} = -\nabla_3 \phi$ is the deflection towards the least resistive path upon a displacement of the interface.

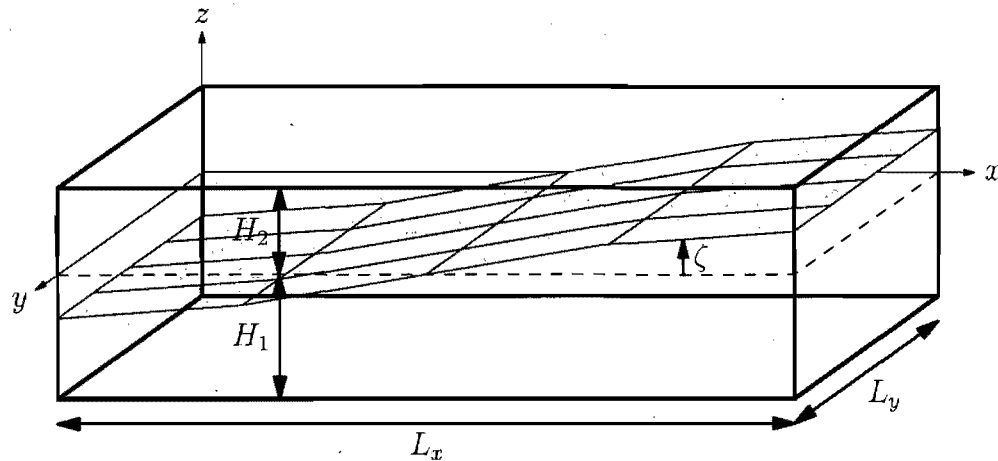


FIGURE 6.1: Diagram of our idealized Hall–Héroult cell, vertically bounded by a carbon anode at $z = H_2$ and a carbon cathode at $z = -H_1$.

A uniform vertical magnetic field $B_z \hat{\mathbf{z}}$, whose destabilizing influence is already well established [8, 18, 47, 69], is applied. It is assumed strong enough for the magnetic force \mathbf{F} to mainly result from the action of this background field on the horizontal deflected currents:

$$\mathbf{F} = \mathbf{j}_h \times B_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (6.1)$$

where the subscript h denotes the horizontal projection of a vector quantity. Because of the magnetohydrodynamic approximation $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla_3 \times \mathbf{B}$, the current must be divergence-free.

6.3 Wave equation

It is theoretically possible to linearize the fully three-dimensional nonstationary MHD two-phase equations [59] under the reasonable and commonly used assumptions that the physics is almost two-dimensional and the interface distortion is small.

In this section we derive a wave equation in a similar fashion to Davidson & Lindsay [18], but we include two new features: (1) the force in the electrolyte layer is not neglected; and (2) we consider a linear friction with a coefficient μ . We shall also use Boussinesq's approximation as argued by Morris & Davidson [55]. However, as underlined by Zikanov et al. [87], the linear-friction approach does not account for small scales, and there is no reliable way of defining μ . We shall then focus on describing qualitatively the influence of dissipation on the behavior of long waves. We finally note that, in addition to model viscous dissipation, the linear friction coefficient could also account for dissipation in a thin Hartmann layer [75] near the bottom quasi-insulating wall or for electromagnetic braking by means of Joule heating.

Including two friction terms to model the shear between each horizontal surface at the fluid interface and at top and bottom wall boundaries, the linear shallow-water equations are

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 g \nabla \zeta = -\nabla p_0 + \mathbf{F}_1 - \mu \mathbf{u}_1 - \mu(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad (6.2)$$

$$\rho_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \rho_2 g \nabla \zeta = -\nabla p_0 + \mathbf{F}_2 - \mu \mathbf{u}_2 - \mu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \quad (6.3)$$

where p_0 is the pressure at the interface and μ is the linear friction coefficient, assumed uniform at all surfaces for the sake of simplicity.

Like in Ref. [18], let \mathbf{u}_p denote the irrotational (or potential) part of \mathbf{u}_1 . From Helmholtz' theorem and the continuity equations $\partial \zeta / \partial t = -H_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = H_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2$, we see that the irrotational part of \mathbf{u}_2 is $-(H_1/H_2)\mathbf{u}_p$. Then, subtracting (6.3) from (6.2) and

taking the irrotational part yields

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \frac{\Delta \rho g H_2}{\rho H} \nabla \zeta = \frac{H_2}{\rho H} (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)_p - \frac{3\mu}{\rho} \mathbf{u}_p,$$

where $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ and we have used Boussinesq's approximation with reference density $\rho \equiv \rho_1$, since $\Delta \rho / \rho \simeq 0.08$. The subscript p refers the irrotational part of a field. Then, we compute the second time-derivative to eliminate ζ , and we obtain the wave equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} - c_g^2 \nabla_3^2 \right) \mathbf{u}_p = \frac{B_z H_2}{\rho H} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j}_{1h} - \mathbf{j}_{2h}) \times \hat{\mathbf{z}} \right]_p, \quad (6.4)$$

where $\gamma = 3\mu/\rho$ is the damping coefficient, and

$$c_g = \sqrt{\frac{\Delta \rho g H_1 H_2}{\rho H}}$$

is the shallow-water celerity of a gravity wave. Obtaining expressions for the horizontal current is the objective of the next section. A similar equation was previously obtained by Davidson & Lindsay [18], in terms of the volume flux $H_1 \mathbf{u}_1$, but it did neither include linear friction nor the magnetic force in the electrolyte layer, which is required to capture higher-order instabilities.

6.4 Current deflection

In this section, we first solve for the distribution of the current deflected by a displacement of the interface, expressed in terms of a basis of orthogonal functions of the horizontal coordinates, in the general case of an arbitrary ξ . Then, we investigate three specific strategies to control the potential at the anodes, and we obtain simple expressions for the current in the long-wave limit.

6.4.1 Boundary conditions

Carbon is 100 times more resistive than aluminum, so at the cathode boundary, it behaves as an insulator of the current disturbance:

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=-H_1} = 0, \quad (6.5)$$

We now consider the case where the electric potential ϕ is controlled at the anodes boundary ($z = H_2$), which we model as an offset of the current potential on that same boundary:

$$\phi_2|_{z=H_2} = J_0\xi, \quad (6.6)$$

where ξ is a function of the horizontal coordinates and has units of length. It should be thought of simply as a potential normalized by the electrolysis current J_0 . Though the function ξ may be smooth in the ideal case of a continuum of anodes, it has to be piecewise constant in the case of real discrete anodes. The condition $\xi = 0$, corresponding to a single anode spanning the top of the cell, has already been treated with analytical techniques [8, 18, 39, 69, 74] and direct numerical simulations [30, 81, 87], whereas setting ξ such that the vertical current disturbance is canceled at the anodes has been simulated [59], but it has not been investigated analytically to our knowledge.

It should be noted that a potential shift of ξJ_0 at $z = H_2$ can be obtained, at first order in $|\zeta_0|$, by raising the anodes by a distance $-\xi$. An approach of this type has been proposed by Davidson et al. [17], and has later become known as the *anode-tilt system* [15]. The anode-tilt system represents one way of controlling the potential at $z = H_2$; there could be others, e.g. using variable resistances in the anodes rods, which, despite causing some energy loss, would have the advantage of not requiring any mechanical motion.

At the interface, we define the (non-unitary) normal vector $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} - \nabla\zeta$ and impose the continuity to leading order in $|\zeta_0|$ of the normal current:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad (6.7)$$

and of the tangent electric field:

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 \right) = 0.$$

This condition approximates as

$$(\hat{\mathbf{z}} - \nabla\zeta) \times \left[\left(J_0 + \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} + \nabla\phi_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(J_0 + \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \nabla\phi_1 \right] \Big|_{z=0} = 0,$$

hence

$$\phi_2|_{z=0} = s \phi_1|_{z=0} - (1-s)J_0\zeta. \quad (6.8)$$

where $s \equiv \sigma_2/\sigma_1$. The integration constant in the last expression is set to zero, so that the potential remains unperturbed ($\phi = 0$) when the interface is flat ($\zeta = 0$) and the anodes potential is unchanged ($\xi = 0$).

6.4.2 A simple intuitive model

Before actually solving for the deflected current distribution, let us make a simple intuitive model based on the resistance of the path through which the current flows: up where the electrolyte layer is thicker and down where it is shallower. In our model, we consider that all the boundaries but the top one are insulating to the current perturbation. Therefore, the deflected current can be split into two components: (A) current loops that are closed outside the cell through the anodes and (B) those that are closed within the cell (see Fig. 6.2). The driving electric potential difference is expected to be of order $J_0|\zeta_0|/\sigma_2$.

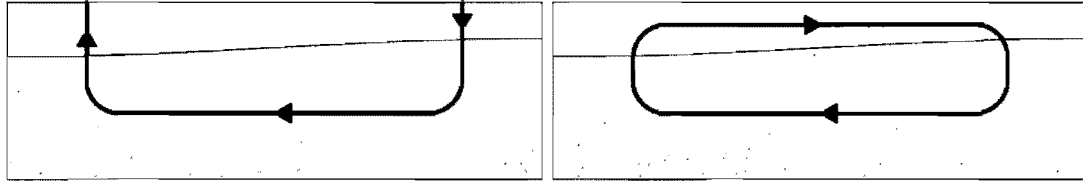


FIGURE 6.2: Simple model of the deflected current for: (A) current loops closed outside the cell (left) and (B) closed inside the cell (right).

The resistance R is proportional to the length of the path and inversely proportional to its area. Thus, in case A, since the current pass through the electrolyte twice through a section of $(L_x/2)L_y$, we have $R \sim (4H_2/L_xL_y\sigma_2) + (L_x/H_1L_y\sigma_1)$. The implied current densities are inversely proportional to R and to the cross section of the current path:

$$|j_{1h}| \sim \frac{J_0|\zeta_0|L_x/4H_1H_2}{1 + sL_x^2/4H_1H_2} \quad \text{and} \quad |j_{2z}| \sim \frac{J_0|\zeta_0|/2H_2}{1 + sL_x^2/4H_1H_2}. \quad (6.9)$$

In case B, we rather have $R \sim L_x/H_2L_y\sigma_2 + L_x/H_1L_y\sigma_1$, but the last term can be neglected

since $s = \sigma_2/\sigma_1 \ll 1$. This results in:

$$|j_{1h}| \sim \frac{J_0 |\zeta_0| H_2}{H_1 L_x} \quad \text{and} \quad |j_{2h}| \sim \frac{J_0 |\zeta_0|}{L_x}. \quad (6.10)$$

6.4.3 General solution

The null-divergence condition on the current, following from the magnetohydrodynamic approximation, can be written as Laplace's equation:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \phi. \quad (6.11)$$

Let $\{\psi_{\mathbf{k}}(x, y)\}$ be a set orthogonal functions depending only on the horizontal coordinates and satisfying $\nabla_3^2 \psi_{\mathbf{k}} = -k^2 \psi_{\mathbf{k}}$ together with the (yet unspecified) horizontal boundary conditions. They are normalized so that $\int_{\Omega} \psi_{\mathbf{k}}^2 da = A$, where Ω is the whole surface of the cell and $A = L_x L_y$ is its (horizontal) area. The functions ζ and ξ are expanded as:

$$\zeta = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} \quad \text{and} \quad \xi = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\xi}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}.$$

Then, in the aluminum and in the electrolyte, the general solution satisfying (6.6) and (6.5) is:

$$\phi_1 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{1,\mathbf{k}}(z) \psi_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}} \cosh k(z + H_1)] \psi_{\mathbf{k}} \quad (6.12)$$

$$\phi_2 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{2,\mathbf{k}}(z) \psi_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}} \sinh k(z - H_2) + J_0 \hat{\xi}_{\mathbf{k}} \cosh k(z - H_2)] \psi_{\mathbf{k}}, \quad (6.13)$$

where the only purpose of the comma before the subscript \mathbf{k} is to separate it from other subscripts. These expressions are a generalization of those first derived by Sneyd & Wang [74], whose model did not take into account a variable potential at the anodes. The conditions (6.7) and (6.8) become:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} \sinh kH_1 &= b_{\mathbf{k}} \cosh kH_2 - J_0 \hat{\xi}_{\mathbf{k}} \sinh kH_2 \\ b_{\mathbf{k}} \sinh kH_2 &= -sa_{\mathbf{k}} \cosh kH_1 + J_0 \hat{\xi}_{\mathbf{k}} \cosh kH_2 + (1-s)J_0 \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

so we find:

$$\left(1 + \frac{s}{\tilde{\epsilon}^2}\right) a_{\mathbf{k}} = J_0 \frac{(1-s)\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} \cosh kH_2 + \hat{\xi}_{\mathbf{k}}}{\sinh kH_1 \sinh kH_2} \quad (6.14)$$

$$\left(1 + \frac{s}{\tilde{\epsilon}^2}\right) b_{\mathbf{k}} = \frac{(1-s)J_0\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\sinh kH_2} + J_0\hat{\xi}_{\mathbf{k}}(s \coth kH_1 + \coth kH_2), \quad (6.15)$$

where

$$\tilde{\epsilon}^2 \equiv \tanh kH_1 \tanh kH_2.$$

Solutions similar to Eqs. (6.14) and (6.15) were previously found by Sneyd & Wang [74] for $\xi_{\mathbf{k}} = 0$ and $s = 0$. For long waves ($kH_1, kH_2 \ll 1$), $\tilde{\epsilon}^2 \simeq k^2 H_1 H_2$ becomes very small, so despite the fact that $s \ll 1$, the ratio $\alpha_{\mathbf{k}} \equiv s/\tilde{\epsilon}^2$ might not vanish. For instance, in a 15 m long cell with aluminum and bath depth of 20 cm and 5 cm respectively, with $s = 1.1 \times 10^{-4}$, we find that $\alpha_{\mathbf{k}} \approx 0.25$ for the longest cosine wave. Making the bath a better electric conductor or increasing the horizontal dimensions of the cell would make the $\alpha_{\mathbf{k}}$ -effects stronger. Let us note that while most authors directly take the limit $s \rightarrow 0$, some [8, 47] explicitly set $\alpha \ll 1$ or an equivalent.

In the following, we derive expressions, needed in Eq. (6.4), for the vertically averaged horizontal current, which can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{1h} &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{j}_{1h,\mathbf{k}} \frac{\nabla \psi_{\mathbf{k}}}{k} & \hat{j}_{1h,\mathbf{k}} &= -k \langle \hat{\phi}_{1,\mathbf{k}} \rangle \\ \mathbf{j}_{2h} &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{j}_{2h,\mathbf{k}} \frac{\nabla \psi_{\mathbf{k}}}{k} & \hat{j}_{2h,\mathbf{k}} &= -k \langle \hat{\phi}_{2,\mathbf{k}} \rangle \end{aligned}$$

where $\langle \cdot \rangle$ denotes the depth-average within a fluid layer. It is shown in Appendix 6.A that the $\nabla \psi_{\mathbf{k}}/k$ functions share the same normalization properties as the $\psi_{\mathbf{k}}$ functions. In a similar fashion, since \mathbf{u}_p is the potential part of the velocity, we will also use

$$\mathbf{u}_p = \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_{p,\mathbf{k}} \frac{\nabla \psi_{\mathbf{k}}}{k} \quad \hat{u}_{p,\mathbf{k}} = \frac{1}{kH_1} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \quad (6.16)$$

thus following Davidson & Lindsay [18].

In the next sections, where we shall investigate specific cases for ξ in greater detail, some numerical results are also reported. They are obtained by solving the equivalent of

(6.11), (6.7) and (6.8) in terms of the electric potential q :

$$\begin{aligned}\nabla_3 \cdot (\sigma \nabla_3 q) &= 0 \\ [q] &= -J_0[\sigma^{-1}]z \\ [\sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_3 q] &= 0\end{aligned}\tag{6.17}$$

where $[\cdot]$ denotes the jump at the interface. A level set method is used with interface discontinuities captured with the method developed by Liu et al. [46] to solve systems like (6.17). The reference cell parameters are: $H_1 = 20$ cm, $H_2 = 5$ cm, $L = 15$ m, $s = 10^{-4}$.

6.4.4 Case A: no potential control

In most previous studies, the anodes are left at the same electric potential without any further control, i.e. $\xi = 0$. The resulting current deflection is plotted in Fig. 6.3. In that case, the current is mostly vertical in the electrolyte, while the leading order current is mostly horizontal inside the aluminum layer [8, 18]. Keeping only the leading-order terms in kH_1 , kH_2 and s , we obtain

$$\begin{aligned}\hat{j}_{1h,k} &= -\frac{J_0 k \hat{\zeta}_k}{k^2 H_1 H_2 (1 + \alpha_k)} \\ \hat{j}_{2h,k} &= \frac{J_0 k \hat{\zeta}_k}{2(1 + \alpha_k)},\end{aligned}\tag{6.18}$$

in agreement with the predicted results in Eq. (6.10), including the $(1 + \alpha_k)^{-1}$ factor. The horizontal current in the electrolyte layer can be neglected since it is weaker by two orders of $k^2 H^2$. The coupling term (*rhs* in Eq. (6.4)) is then given by

$$\frac{\partial \hat{j}_{1h,k}}{\partial t} \simeq -\frac{J_0 \hat{u}_{p,k}}{H_2 (1 + \alpha_k)}.\tag{6.19}$$

The latter results, when $\alpha_k \ll 1$, confirm those previously obtained with somewhat different techniques by Bojarevičs & Romerio [8] and by Davidson & Lindsay [18]: the current deflection becomes stronger as kH_2 is decreased. If, on the other hand, $\alpha_k \gg 1$, we find $\hat{j}_{1h,k} \simeq -J_0(k/s)\hat{\zeta}_k$, so that the current magnitude does not increase forever as kH_2 is decreased. In fact, $\hat{j}_{1h,k}$ reaches an extremum at $\alpha_k = 1$. In modern cells, with

horizontal dimensions made ever larger, it is more likely that $\alpha_{\mathbf{k}}$ will approach unity, in which case the current deflection would be overrated by a factor two by blindly taking the limit $s \rightarrow 0$.

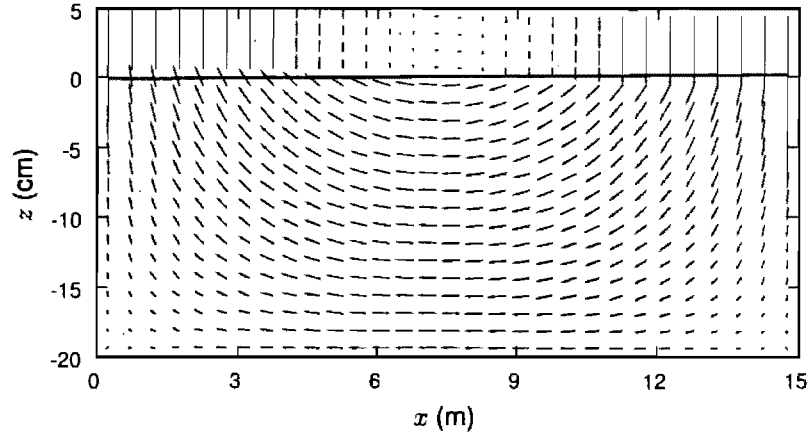


FIGURE 6.3: Vertical cuts of the theoretical current deflection \mathbf{j} for case A. The interface displacement, a fundamental cosine mode of amplitude $|\zeta_0| = 0.025H_2$, is depicted by the plain curve. The predicted and computed values are in very good agreement, so only the predicted distribution is shown here. The maximum vector magnitude is $388J_0|\zeta_0|$.

The average horizontal current in the aluminum layer, as predicted by our linear theory and as computed numerically, is plotted against the wavelength and the electrolyte depth in Figs. 6.4, 6.5 and 6.6. In agreement with previous theories, the current is more sensitive to long waves and shallow bath layers. Nevertheless, by considering finite values of the electrical conductivity, we note that the deflection effect becomes significantly weaker for long wavelengths and for shallow electrolyte layers.

6.4.5 Case B: constant vertical current

By substituting the expansion $\cosh kH_2 = 1 + k^2H_2^2/2 + \dots$ in Eq. (6.14), we see that setting $\hat{\xi}_{\mathbf{k}} \approx -\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ would help to reduce the horizontal current in the aluminum by a factor of about $L^2/\pi^2H_1H_2$ and consequently bring it to the same order of magnitude as in the bath. Doing so could significantly decrease the coupling of waves and thus improve the stability of the system. A quick look at Eq. (6.15) suggests that this could be achieved by taking $b_{\mathbf{k}} = 0$. Noting that the vertical current disturbance at the anodes

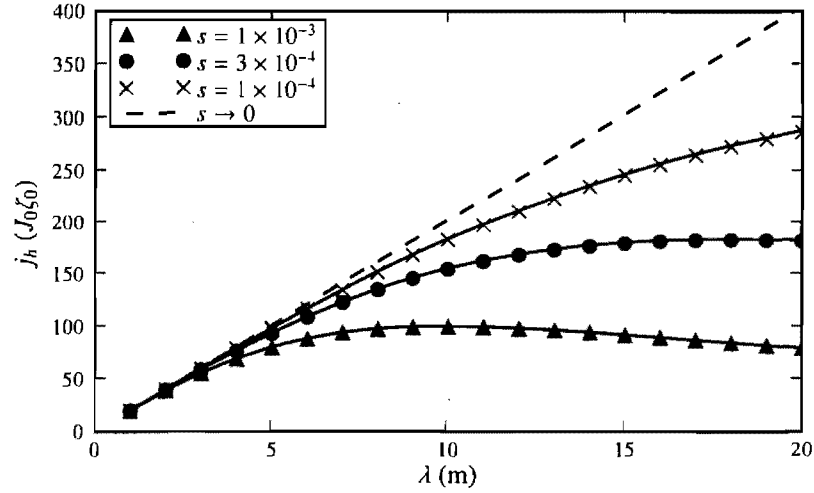


FIGURE 6.4: Average horizontal current deflection in the aluminum layer (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the wave length, for different values of s , in case A. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points). As predicted by previous theories, longer waves cause a stronger current deflection. However, for finite values of the conductivity ratio s , long waves become more stable.

can be written as $j_a \equiv j_{z,k}|_{z=H_2}$ and $\hat{j}_{a,k} = -kb_k$, we see that this strategy means keeping the vertical current constant at the anodes boundary. This is the boundary condition used for numerical simulations in [59]. By doing so and again keeping only the leading-order terms in kH_1 , kH_2 and s , we find

$$\hat{j}_{1h,k} = -J_0 k \frac{H_2 \hat{\zeta}_k}{H_1} \quad (6.20)$$

$$\hat{j}_{2h,k} = J_0 k \hat{\zeta}_k,$$

in agreement with the predicted results in Eq. (6.10). Therefore, the horizontal current has similar magnitudes in both layers but flows in opposite directions, as shown in Fig. 6.7. One might think that it is enough to eliminate the instabilities, but our numerical simulations [59] showed that they still occur, though with a smaller growth rate. Now, instead of (6.19), we have

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{j}_{1h,k} - \hat{j}_{2h,k}) \simeq -J_0 k^2 H \hat{u}_{p,k}, \quad (6.21)$$

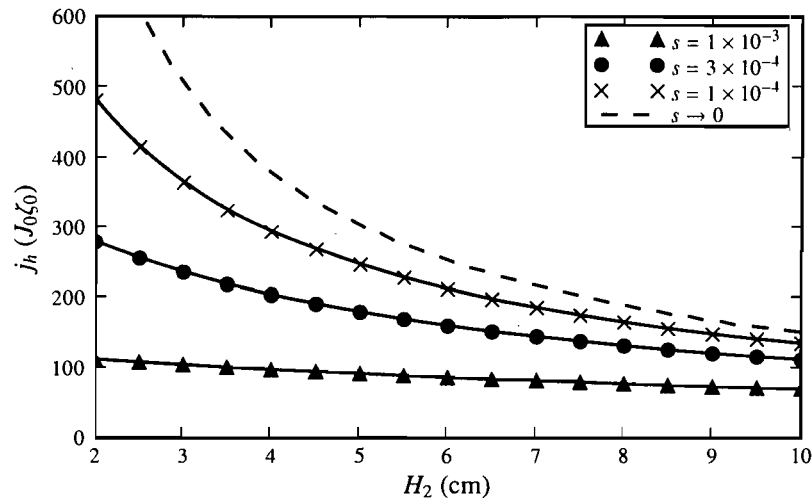


FIGURE 6.5: Average horizontal current deflection in the aluminum layer (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the bath depth, for different values of the conductivity ratio s , in case A. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points). As predicted by previous theories, a shallower depth of electrolyte cause a stronger current deflection, though a bit overrated by neglecting the finite value of s .

which means a magnetic force weaker than in case A by a factor of order $L^2/\pi^2 H_1 H_2 (1 + \alpha_k)$, by the simple strategy of keeping the vertical current constant at the anodes. Consequently, a better stability of the system is to be expected in case B.

An alternative would be to raise the anodes [17] so that they follow the shape of the metal surface. This is equivalent, at first order in $|\zeta_0|$, to setting $\xi = -\zeta$ (see Appendix 6.B).

In case B, the current deflection is virtually independent of the conductivity ratio s . The average horizontal current in the aluminum layer, as predicted by our linear theory and as computed numerically, is plotted against the wavelength and the electrolyte depth in Figs. 6.8, 6.9 and 6.10.

6.4.6 Case C: completely eliminating the coupling between modes

The best approach could be to make the coupling term completely vanish in Eq. (6.4) by setting ξ in such a way that $\mathbf{j}_{1h} = \mathbf{j}_{2h}$, that is

$$J_0 \hat{\xi}_k \frac{\sinh kH_2}{kH_2} = a_k \frac{\sinh kH_1}{kH_1} + b_k \frac{\cosh kH_2 - 1}{kH_2}.$$

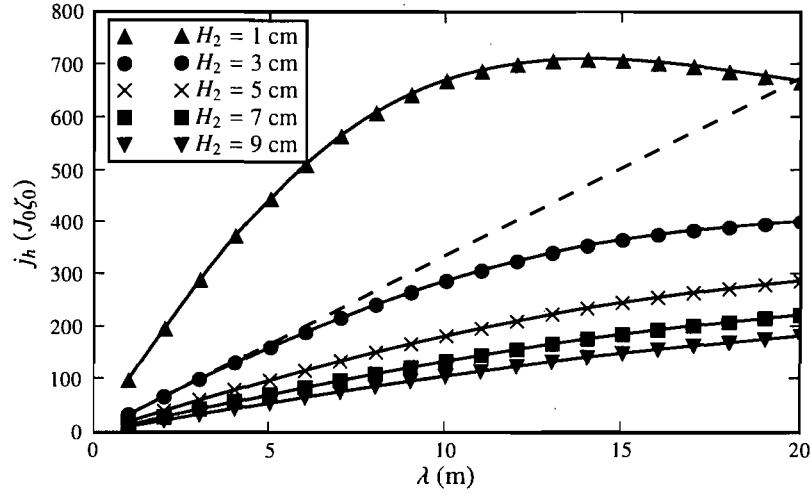


FIGURE 6.6: Average horizontal current deflection in the aluminum layer (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the wave length, for different values of the bath depth H_2 , in case A. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points). The dashed curves illustrates the limit $s \rightarrow 0$ for $H_2 = 3$ cm. Because of the finite value of the conductivity ratio s (equal to 10^{-4} here), when H_2 becomes small enough, there is a wave length above which the current deflection decreases.

With the use of Eqs. (6.14) and (6.15), a_k and b_k can be eliminated to yield

$$\hat{\xi}_k = -\frac{(H \cosh kH_2 - H_1)(1 - s)\hat{\zeta}_k}{H_2 + H_1(\cosh kH_2 - 1)(s \coth kH_1 + \coth kH_2) \sinh kH_2 - H_1(1 + \alpha_k) \sinh^2 kH_2} \quad (6.22)$$

As can be seen from Fig. 6.11, the horizontal components of the resulting current distribution are of equal amplitude in both layers.

Since the potential at the anodes is imposed and since the vertical current at the anodes boundary can be estimated from the current flowing through anode rods, $\hat{\xi}_k$ and b_k are known. Thus, $\hat{\zeta}_k$ can be obtained at any time from Eq. (6.15), and then substituted in (6.22) make the coupling vanish permanently, at least in theory. The resulting magnetic force (Eq. (6.1)) is thus canceled by a pressure gradient, and the instability, at the level at which it is considered in this paper, is eliminated.

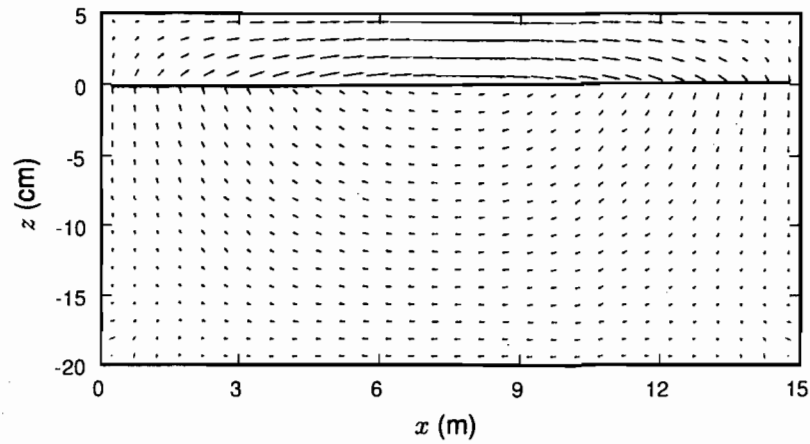


FIGURE 6.7: Vertical cuts of the theoretical current deflection \mathbf{j} for case B. The interface displacement, a fundamental cosine mode of amplitude $|\zeta_0| = 0.025H_2$, is depicted by the plain curve. The predicted and computed values are in very good agreement, so only the predicted distribution is shown here. The maximum vector magnitude is $0.21J_0|\zeta_0|$, which is nearly a factor $L^2/\pi^2H_1H_2(1 + \alpha_k)$ lesser than in case A, as could be expected by comparing (6.18) and (6.20).

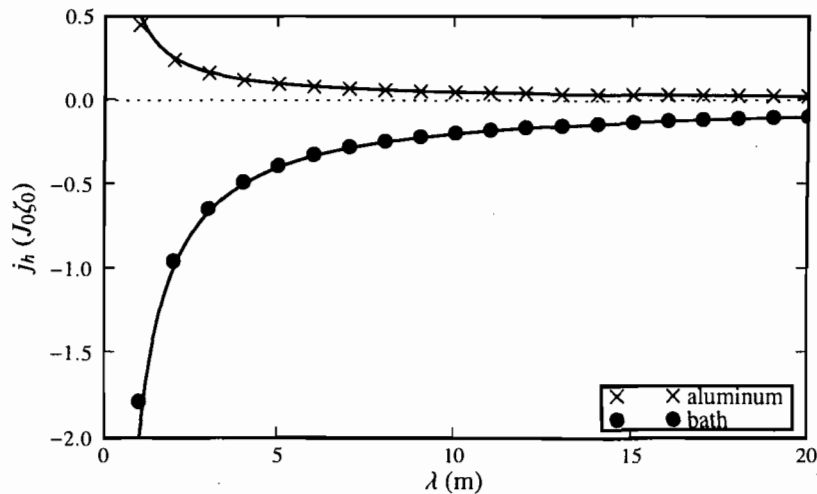


FIGURE 6.8: Average horizontal current deflection (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the wave length, in case B. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points).

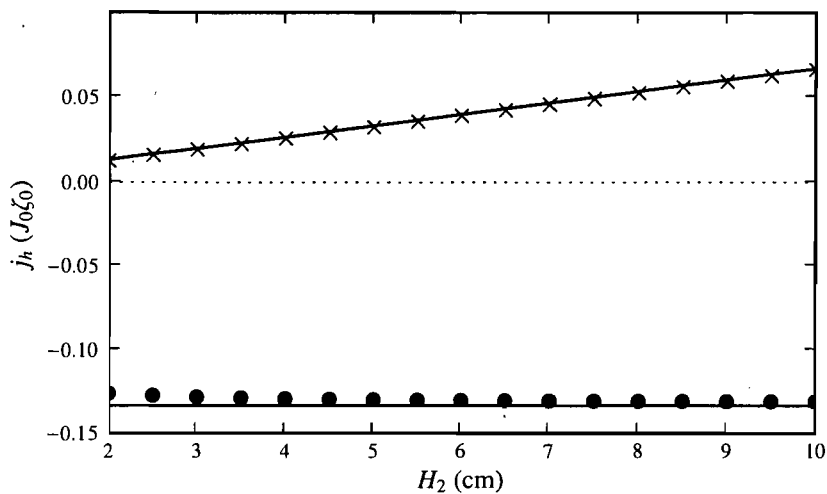


FIGURE 6.9: Average horizontal current deflection in the aluminum layer (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the bath depth, in case B. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points).

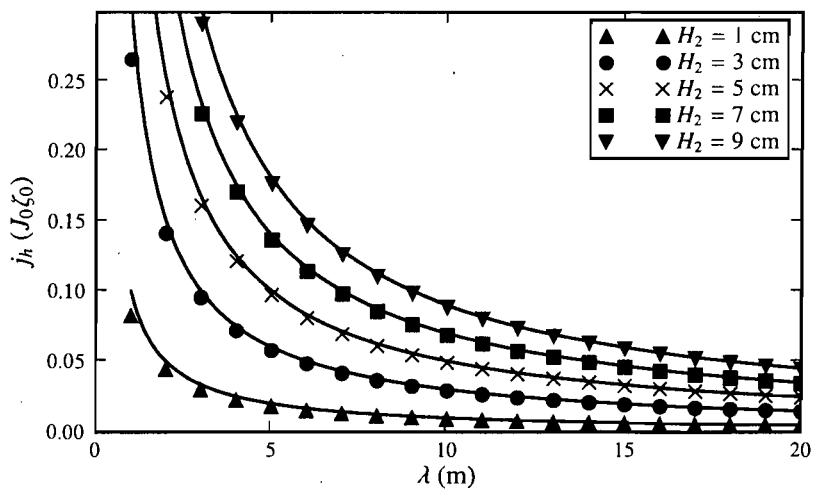


FIGURE 6.10: Average horizontal current deflection in the aluminum layer (in units of $\zeta_0 J_0$) versus the wave length, for different values of the bath depth H_2 , in case B. The theory (curves) displays good agreement with the numerical results (points).

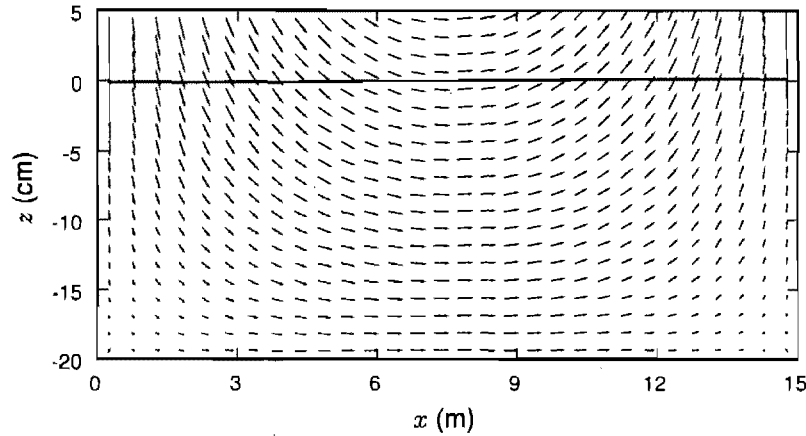


FIGURE 6.11: Vertical cuts of the theoretical current deflection \mathbf{j} for case C. The interface displacement, a fundamental cosine mode of amplitude $|\zeta_0| = 0.025H_2$, is depicted by the plain curve. The maximum vector magnitude is $0.13J_0|\zeta_0|$. The vertically-averaged horizontal are equal in both layers.

6.4.7 Case D: discrete anodes

Let us now consider the case of an array of discrete anodes, each of which can be set to a different potential, or equivalently at first order in $|\zeta_0|$, can be moved only vertically (Davidson [15] further proposed his anode-tilt system). The open channels that lie between the anodes in real cells are not considered in this simple model. As stated in the introduction, the bottom boundary of the anodes is an equipotential surface. This means that ξ has to be piecewise constant, so only a limited number of modes can be canceled. In case A, it has been shown that low wavenumbers are more likely to become unstable. Moreover, as pointed out by previous authors [8, 18], higher wavenumbers, corresponding to smaller motion scales, are more subject to viscous dissipation, so that these modes can be neglected in a modal analysis.

Before going through further analysis, we have to do some algebra. In the space of normal modes, for a discrete anode array where the m -th anode spans a surface S_m of area S and has a potential offset $V_m J_0$, we have

$$A_{\xi_{\mathbf{k}}} = S \sum_m R_{\mathbf{k},m} V_m, \quad R_{\mathbf{k},m} = \frac{1}{S} \int_{S_m} \psi_{\mathbf{k}} da,$$

or in vector form:

$$\hat{\xi} = \frac{S}{A} R V. \quad (6.23)$$

Let us truncate the system to the rank of the matrix R (the number of anodes) so that it becomes a square matrix. Then, we integrate ξ over S_m to find a useful property of the matrix R :

$$V = R^T \hat{\xi} \quad (6.24)$$

By comparing (6.23) and (6.24), we deduce that $R^T R = R R^T = A/S$.

Davidson et al. [17] proposed using some feedback mechanism of the interface velocity and convert it to anodes motion to eliminate a few selected modes (those remaining in the truncated system). We propose here to require $\hat{\xi} = -X \hat{\xi}$, with the diagonal matrix X deduced from Eq. (6.22), or in terms of the anode voltage:

$$V = -R^T X \hat{\xi}, \quad (6.25)$$

while $\hat{\xi}$ can be recovered from the vertical current at the anodes boundary, as explained in the previous section.

A last remark should be made about the fact that this process does not limit any instability related to the truncated modes. Nevertheless, there is no requirement for the selected modes to remain the same over time; the selection could be updated in real-time, in regard to the strongest modes of the moment. We cannot provide numerical data for that case.

6.5 Modal analysis

Substituting the expansion (6.16) for \mathbf{u}_p into the wave equation (6.4) together with (6.19) or (6.21), we compute the projection onto $\nabla \psi_k / k$:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + c_g^2 k^2 \right) \hat{u}_k = -\frac{8\omega_B^2}{\pi^2} \sum_{k'} \Gamma_{k,k'} C_{k'} \hat{u}_{k'}, \quad (6.26)$$

where the couplings between the different modes are given by the elements of the skew-symmetric matrix

$$\Gamma_{k,k'} = \frac{\pi^2}{8Akk'} \int_{\Omega} (\nabla \psi_k \times \nabla \psi_{k'}) \cdot \hat{\mathbf{z}} da, \quad (6.27)$$

with the coupling coefficient

$$\omega_B^2 = \frac{J_0 B_z}{\rho H}$$

that has units of squared frequency, defined in a similar way as by Davidson & Lindsay [18]. Depending on the case, it is altered by the diagonal matrix:

$$C_{\mathbf{k}} = \begin{cases} (1 + \alpha_{\mathbf{k}})^{-1} & \text{in case A;} \\ k^2 H_2 H & \text{in case B.} \end{cases}$$

The structure of the matrix Γ is detailed in Appendix 6.C. Under nondimensional vector form, Eq. (6.26) becomes

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + T \frac{d}{dt} \right) \hat{\mathbf{u}} = - (K + N\Gamma C) \hat{\mathbf{u}}, \quad (6.28)$$

with $k_0 = \pi/L_x$ as units for k and $\omega_0 = ck_0$ as the reciprocal time units. We also defined the nondimensional numbers

$$N = \frac{8\omega_B^2}{\pi^2 \omega_0^2} = \frac{8J_0 B_z}{\pi^2 \Delta \rho g k_0^2 H_1 H_2}, \quad (6.29)$$

which compares the magnetic and buoyancy forces, and

$$T = \frac{\gamma}{\omega_0} = 3\mu \sqrt{\frac{H}{\rho \Delta \rho g k_0^2 H_1 H_2}}, \quad (6.30)$$

which compares the gravity wave and linear friction times. We note that $N \sim N Fr$ and $T \sim Re Fr$, where N , usually referred to as the *interaction parameter*, is the ratio of the magnetic to inertial forces, whereas Re and Fr are the Reynolds number and the Froude number. The matrix K is diagonal and its elements are k^2/k_0^2 . Note that Γ is already nondimensional. Davidson & Lindsay [18] previously obtained an analog equation to Eq. (6.28), but for case A only in the limit $\alpha_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ and without linear friction.

Let us denote by $\beta + i\omega$ the nondimensional eigenvalues of the operator $\partial/\partial t$, and by λ those of the right-hand side of Eq. (6.28). Then, for each given eigenmode, we have

the non-vanishing solutions

$$\beta = -\frac{T}{2} + \sqrt{\frac{|\tilde{\lambda}| - \text{Re } \tilde{\lambda}}{2}} \quad \text{and} \quad \omega = -\text{sign}(\text{Im } \tilde{\lambda}) \sqrt{\frac{|\tilde{\lambda}| + \text{Re } \tilde{\lambda}}{2}}, \quad (6.31)$$

where $\tilde{\lambda} = \lambda - T^2/4$. An eigenmode thus remains stable as long as its eigenvalue is real, even without dissipation. On the other hand, when the imaginary part of $\tilde{\lambda}$ is much greater than its real part (this occurs when $N \gg 1 \gg T$ because of the skew-symmetry of Γ), we have $\beta \sim \pm\omega$. This corresponds to a wave driven by the magnetic force rather than by gravity. Then, the growth time of the wave unsurprisingly yields its period. Fig. 6.12 shows that it is not the same modes that are the most unstable in cases A and B. We notice that even though N is brought to a value 800 times greater in case B, the growth rates remain of the same order, at least for low wavenumbers. The gravity modes are denoted by $|m, n\rangle = \psi_{\mathbf{k}}$ for $\mathbf{k} = (m\pi/L_x, n\pi/L_y)$.

Now, one could think of damping the wave by controlling the electric potential. However, this cannot be achieved by making the magnetic force behave like linear friction through a $\partial \mathbf{u}_p / \partial t$ term on the l.h.s. of Eq. (6.4). In fact, this would require horizontal current loops, but those cannot be obtained by simple control of the electric potential. This can be understood by observing that

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}} \times \left(\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} \right) \propto -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}_{\text{damp}},$$

where \mathbf{J}_{damp} is the current distribution required for wave damping. From the latter equation, we see that this current is rotational:

$$\nabla \times \mathbf{J}_{\text{damp}} \propto -\hat{\mathbf{z}} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} \neq 0,$$

so it cannot be induced by the electric potential.

6.6 Metal pad roll and discussion

We now focus on the the most unstable eigenmode in case A shown in Fig. 6.12: $(1/\sqrt{2})|1, 0\rangle + (e^{\pm i\pi/2}/\sqrt{2})|0, 1\rangle$. This mode takes the form of a rotating wave known as the metal pad roll. For the sake of simplicity, we truncate our system to those two

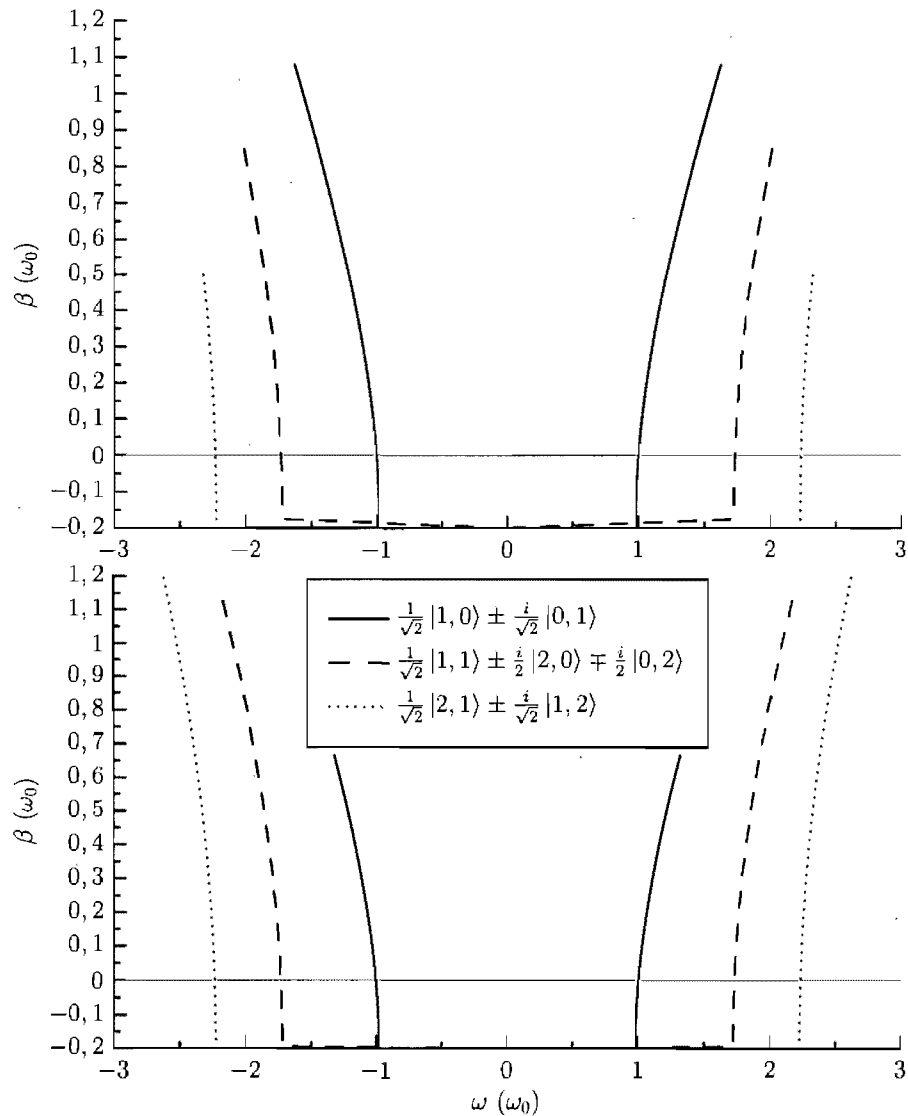


FIGURE 6.12: Map of the eigenmodes, in case A (top) and case B (bottom), of a square-base cell with $L = 15$ m, $H_1 = 20$ cm, $H_2 = 5$ cm, and gravity wave damping number $T = 0.4$. The system is truncated to the 9 first gravity modes. The growth rate β of the eigenmodes and the magnitude of their angular frequency ω (see Eq. (6.31)) increase with the magnetic coupling number N , which varies from 0 to 5 (top) and from 0 to 400 (bottom). Modes are stable in the $\beta < 0$ region. The definitions of the eigenmodes are displayed in the legend, where the amplitudes of the gravity modes components have been rounded; the actual eigenmodes also include other weaker gravity modes.

single modes: $|1, 0\rangle$ and $|0, 1\rangle$. Then

$$\mathbf{K} + N\mathbf{G}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & Nb \\ -Nb & 1 \end{pmatrix},$$

where $b = (1 + \alpha_{k_0})^{-1}$ in case A and $b = k_0^2 H_2 H$ in case B. This matrix has the eigenvectors $(1, e^{\pm i\pi/2})/\sqrt{2}$ with respective eigenvalues $1 \pm iNb$. Since the sign of ω is the inverse sign of $\text{Im } \lambda$, we see that the mode $|0, 1\rangle$ lags by a phase of $\pi/2$ behind $|1, 0\rangle$, so that the wave rotates counterclockwise (if $B_z > 0$). The dimensionless growth rate given in Eq. (6.31) becomes

$$\beta = -\frac{T}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{4}\right)^2 + N^2 b^2} - \left(1 - \frac{T^2}{4}\right)} \quad (6.32)$$

In the frictionless limit cases, we have

$$\beta \simeq \begin{cases} Nb/2 & \text{when } Nb \ll 1; \\ \sqrt{Nb}/2 & \text{when } Nb \gg 1. \end{cases}$$

This means that, even in the worst case ($Nb \gg 1$), the stability is still improved by a factor of order $k_0 H$ in case B.

Before comparing, we first rewrite N and T (Eqs. 6.29 and 6.30) under the forms $N = N_0/(H_2/H_2^0)$ and $T = T_0/\sqrt{H_2/H_2^0}$ respectively, where H_2^0 is some reference bath depth at which $N = N_0$ and $T = T_0$. Let us consider a square cell of side length of 7 m, with $H_1 = 20$ cm, $H_2^0 = 5$ cm, and a 7 kA/m² electrolysis current density and a background magnetic induction of 10 mT. In this case, $N_0 \simeq 16$. Frictionless solutions of the dimensional growth rate of the roll β , obtained by multiplying Eq. (6.32) by ω_0 , are plotted in Fig. 6.13 as a function of the bath depth H_2 . The roll is far more stable in case B than in case A, and even more as the bath is made thinner. We notice, however, a steep decrease of β in case A in the limit of very small H_2 ; this is due to the α -effect associated with the ratio $s/k^2 H_1 H_2$ which becomes significant as H_2 is decreased. It is unlikely that one could take advantage of this effect, in regard to the bubble-effects that take the relay to generate instability for such shallow layers of electrolyte.

When T is weak enough, we see that the main influence of dissipation consists in lowering the center of the $\beta(H_2)$ curve. This behavior is illustrated in Fig. 6.14 for case A and case B, showing that, unsurprisingly, dissipation improves stability. This is in agreement with the numerical simulations performed by Zikanov et al. [87] using a similar linear friction approach in their model. In a Hall-Héroult cell, despite the low viscosity of the fluids, the Joule effect and the turbulence contribute for the greatest part of the dissipation, which should consequently not be neglected.

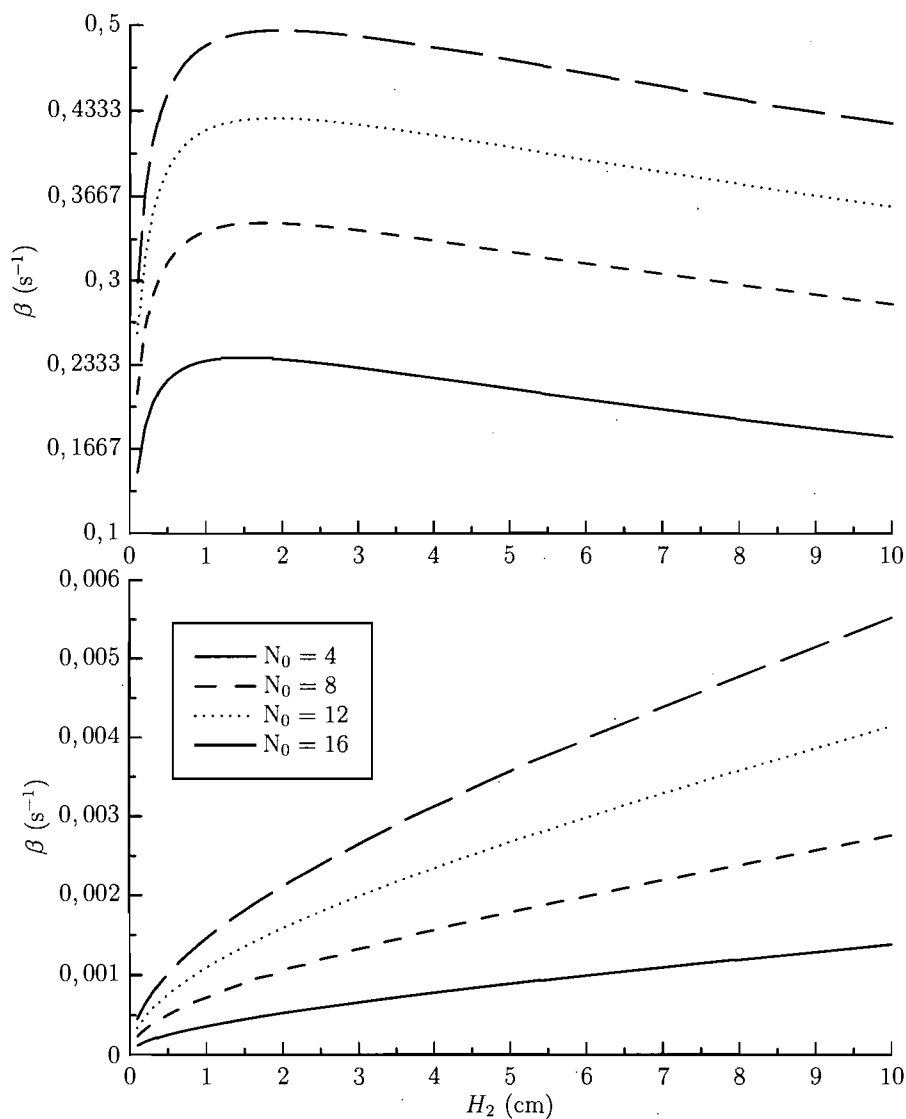


FIGURE 6.13: Analytic solutions of the dimensional growth rate β as a function of the bath depth H_2 for case A (top) and case B (bottom), for different values of N_0 , with $T = 0$. Notice the different scales of the growth rate in case A and case B. Interestingly, whereas making the electrolyte layer thinner increases instability in case A, it makes the roll more stable in case B. In the limit of a very small H_2 in case A, the roll becomes stable because of the α -effect.

6.7 Conclusion

Instead of leaving the anodes potential to a fixed value in aluminum reduction cells, one could adjust it to keep the vertical current constant at the anodes boundary. The pur-

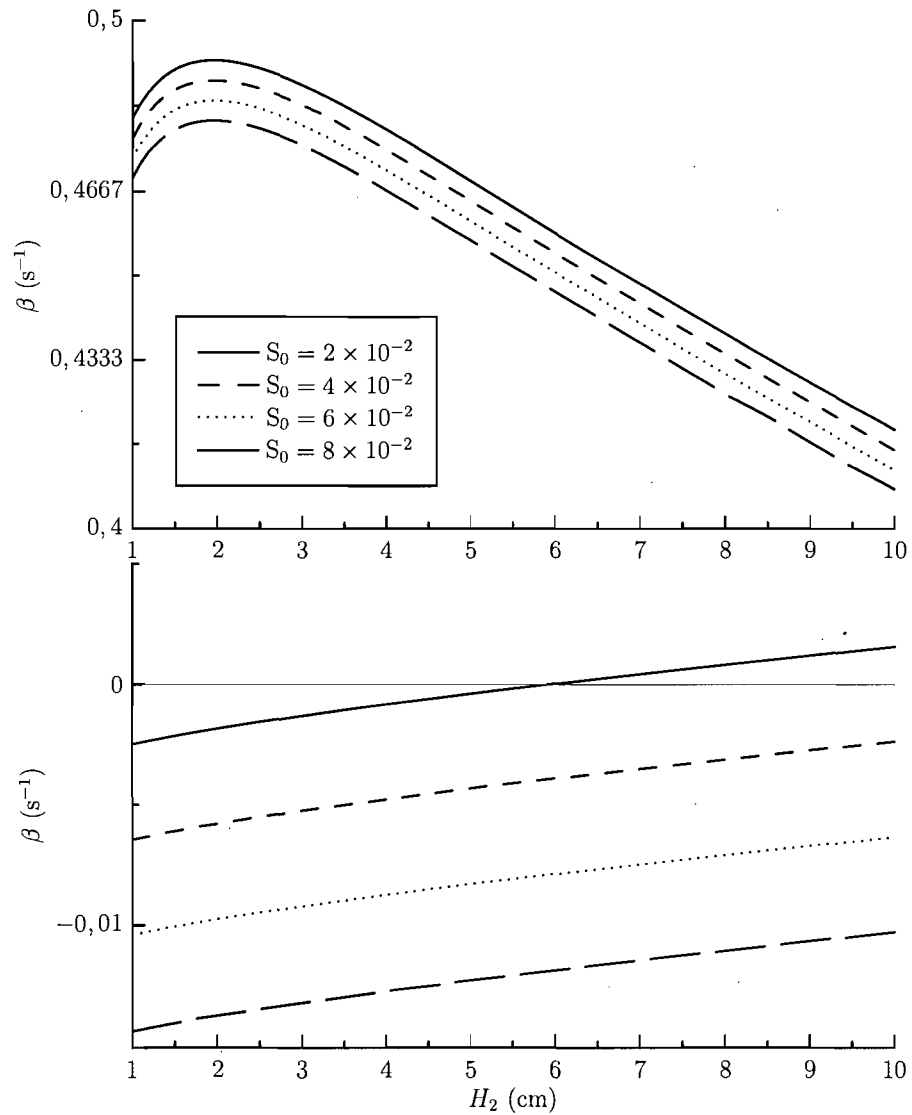


FIGURE 6.14: Analytic solutions of β as a function of the bath depth H_2 for case A (top) and case B (bottom), for different values of T_0 , with $N_0 = 16$. The rolling wave is stable and vanishes in case B where $\beta < 0$.

pose of this study was to test the consequence of this unconventional boundary condition at the anodes. For that purpose we had to adapt the traditional linear models [8, 18].

We found that forcing a constant vertical current at the anodes boundary, which could be achieved by controlling the current in individual anodes, reduces the magnitude of the current deflections due to the interface motion. This means improved stability of the cell, as predicted by our model and observed in our numerical simulations. The stabilizing

effect of dissipation by viscous friction has been made explicit in the linear theory.

To test the validity of the linear prediction of the deflected current distribution, we solved the Laplace equation numerically with a jump-preserving level set method [46]. The simplified linear theory was found to match closely the numerical results. However, experimental validation of the model has yet to be done.

We showed that the limit $\sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$ should not be taken without care, since it has a significant effect on the intensity of the current in the case of fixed anodic potential. In a later work, the non-null conductivity of the other boundaries could also be considered to see if similar effects arise.

6.A Normalization of the gradient base

The orthogonality relation for the $\nabla\psi_{\mathbf{k}}/k$ functions can be written as

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla\psi_{\mathbf{k}} \cdot \nabla\psi_{\mathbf{k}'}}{kk'} da = \int_{\partial\Omega} \frac{\psi_{\mathbf{k}'} \nabla\psi_{\mathbf{k}}}{kk'} \cdot \hat{\mathbf{n}}_w dl - \int_{\Omega} \frac{\psi_{\mathbf{k}'} \nabla_3^2 \psi_{\mathbf{k}}}{kk'} da,$$

where $\hat{\mathbf{n}}_w$ denotes the unit normal vector on the vertical walls boundary. But, since $\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbf{u}$ vanishes on the boundary, so must $\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \nabla\psi_{\mathbf{k}}$ and thus

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla\psi_{\mathbf{k}} \cdot \nabla\psi_{\mathbf{k}'}}{kk'} da = \frac{k}{k'} \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}'} da$$

i.e. the $\nabla\psi_{\mathbf{k}}/k$ functions form an orthogonal base with the same normalization as the $\psi_{\mathbf{k}}$ functions.

6.B Raising the anodes

The unperturbed current potential inside the cell is $J_0 z$. When the anodes are raised by a distance ζ , the total potential at $z = H_2 + \zeta$ is

$$J_0(H_2 + \zeta) + \phi_2|_{z=H_2+\zeta},$$

and if the anode potential is left unchanged, this expression must be equal to the unperturbed anode potential $J_0 H_2$. So, we have $\phi_2|_{z=H_2+\zeta} = -\zeta J_0$, or at first order in $|\zeta_0|$:

$$\phi_2|_{z=H_2} = -\zeta J_0 = \xi J_0,$$

which means $\xi = -\zeta$.

6.C Structure of the coupling matrix

Noting that $\nabla\psi_{\mathbf{k}} \times \nabla\psi_{\mathbf{k}'} = \nabla \times (\psi_{\mathbf{k}} \nabla\psi_{\mathbf{k}'})$ and using Stokes' theorem, we rewrite Eq. 6.27 as

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi^2}{8Akk'} \int_{\partial\Omega} (\psi_{\mathbf{k}} \nabla\psi_{\mathbf{k}'}) \cdot d\mathbf{l},$$

or with the explicit integration path:

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi^2}{8Akk'} \left[\int_0^{L_y} \left(\psi_{\mathbf{k}} \frac{\partial\psi_{\mathbf{k}'}}{\partial y} \right)_{x=0}^{x=L_x} dy - \int_0^{L_x} \left(\psi_{\mathbf{k}} \frac{\partial\psi_{\mathbf{k}'}}{\partial x} \right)_{y=0}^{y=L_y} dx \right]$$

The integration is straightforward and yields

$$\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi^2 \psi_{\mathbf{k}}^0 \psi_{\mathbf{k}'}^0}{8L_x L_y k k'} \left[k'_y (a_x^+ + a_x^-) \left(\frac{a_y^+}{k_y + k'_y} - \frac{a_y^-}{k_y - k'_y} \right) - k'_x (a_y^+ + a_y^-) \left(\frac{a_x^+}{k_x + k'_x} - \frac{a_x^-}{k_x - k'_x} \right) \right],$$

where $\psi_{\mathbf{k}}^0 = \psi_{\mathbf{k}}|_{x=y=0}$ and for $i = x, y$:

$$a_i^\pm = \begin{cases} 1 & \text{if } (L_i/\pi)(k_i \pm k'_i) \text{ is odd;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The normalization of Γ is chosen so that for $\mathbf{k} = (\pi/L_x, 0)$ and $\mathbf{k}' = (0, \pi/L_y)$, we have $\Gamma_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = 1$. The normalization of $\psi_{\mathbf{k}}$, explicitly, is

$$\psi_{\mathbf{k}}^0 = \begin{cases} 1 & \text{if } k_x = k_y = 0; \\ \sqrt{2} & \text{if } k_x = 0 \text{ and } k_y \neq 0; \\ \sqrt{2} & \text{if } k_x \neq 0 \text{ and } k_y = 0; \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

List of symbols

B_z	imposed vertical and uniform magnetic induction field
C	diagonal <i>case</i> -dependent matrix (case A or case B)
c	celerity of a shallow-water gravity wave
\mathbf{E}	electric field
$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$	magnetic force in the aluminum (1) and in the electrolyte (2)
g	gravitational acceleration
H	total height of the cell
H_1, H_2	depths of the aluminum (1) and electrolyte (2) layers
$\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$	total electric current in the aluminum (1) and in the electrolyte (2)
\mathbf{J}_0	unperturbed vertical downward electrolysis current density
$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$	electric current disturbance in the aluminum (1) and in the electrolyte (2)
$\mathbf{j}_{1h}, \mathbf{j}_{2h}$	vertically-averaged horizontal projection of the electric current disturbance in the aluminum (1) and in the electrolyte (2)
K	diagonal matrix of squared wavenumbers
\mathbf{k}	wavenumber
k_0	characteristic wavenumber (π/L_x)
L_x	length of the cell along the x -axis
L_y	width of the cell along the y -axis
N	magnetic coupling number: ratio of the magnetic force to the buoyancy force
\mathbf{n}	upward (non-unitary) normal vector to the interface
$\hat{\mathbf{n}}_w$	normal unit vector to on the vertical walls of the cell
p_0	pressure at the interface
s	electrical conductivity ratio σ_2/σ_1
T	gravity wave damping number: ratio of the gravity wave time to the linear friction time
t	time coordinate
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$	horizontal velocity of the flow in the aluminum (1) and in the electrolyte (2)
\hat{u}_k	amplitude of the $\nabla\psi_k/k$ component of \mathbf{u}_p
\mathbf{u}_p	irrotational or potential part of the horizontal velocity field in the aluminum
x, y	horizontal coordinates
z	vertical coordinate
$\hat{\mathbf{z}}$	vertical unit vector

β	growth rate of an eigenmode
Δ	ratio of the maximum vertical interface displacement to the total height of the cell
ϵ	vertical aspect ratio of the cell
$\nabla_3, \nabla_3^2, \nabla_3^{-2}$	three-dimensional gradient, Laplacian and symbolic inverse. Laplacian operators
∇, ∇^2	horizontal gradient and Laplacian operators
Γ	skew-symmetric mode coupling matrix
γ	damping coefficient
μ_0	magnetic permeability of void
μ	linear friction coefficient
ω	angular frequency of an eigenmode
ω_0	characteristic angular frequency of gravity waves (ck_0)
ω_B	magnetic force coupling angular frequency
ϕ	disturbance of the current potential
$\psi_{\mathbf{k}}$	normal interfacial mode of wavenumber \mathbf{k}
ρ	reference mass density in Boussinesq's approximation
ρ_1, ρ_2	mass density of the aluminum (1) and of the electrolyte (2)
$\Delta\rho$	mass density difference between the aluminum and the electrolyte
σ_1, σ_2	electrical conductivities of the aluminum (1) and of the electrolyte (2)
ξ	normalized variation of anodes potential in units of J_0
ζ	vertical displacement of the aluminum–electrolyte interface
$ m, n\rangle$	gravity wave mode $\psi_{\mathbf{k}}$ with $\mathbf{k} = (m\pi/L_x, n\pi/L_y)$

Acknowledgments

The authors owe to Tony Lelièvre the idea of studying the effect of varying the electrolyte depth on the stability of the roll. They are also very grateful to Thierry Tomasino from Alcan LRF for his invaluable comments.

FIN DE L'ARTICLE

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Nous récapitulons ici point par point les différentes contributions de cette thèse à l'avancement de la compréhension des instabilités MHD dans les cuves d'électrolyse.

Contributions majeures

- Nous avons amélioré, en ajoutant une étape de projection du potentiel magnétique, puis testé de façon systématique et originale la méthode numérique, basée sur une technique de contours et une formulation en terme du potentiel magnétique, développée durant la maîtrise pour simuler les instabilités MHD dans les cuves d'électrolyse (chapitres 3 et 4).
- Nous avons découvert et analysé de façon exhaustive une nouvelle instabilité (l'instabilité MHD de rotation) associée aux grandes échelles de rotation horizontale dans les cuves (chapitres 4 et 5). Elle est due à la force magnétique azimutale, qui amplifie ou réduit la vitesse angulaire des fluides, causant ainsi des variations de pression centripète qui, à leur tour, génèrent des mouvements de l'interface. Son amplitude anticipée est d'environ la moitié de celle du roulis de la nappe de métal pour les régimes dans lesquels les cuves opèrent.
- Nous avons montré qu'il est possible de réduire significativement l'amplitude des déviations du courant électrique en employant une stratégie de contrôle du courant aux anodes appropriée, par exemple en éliminant les fluctuations du courant aux anodes, et ainsi limiter le développement des instabilités (chapitre 6).

Contributions mineures

- Nous avons clarifié la justification de l'approximation magnétostatique (section 2.3.1).
- Nous avons clarifié la justification de la condition à la cathode sur courant électrique (section 2.3.1).

- Nous avons montré que l'approximation du rapport de conductivité infini entre l'aluminium et le bain électrolytique est de moins en moins valide à mesure que la taille horizontale des cuves augmente (chapitre 6).
- Nous avons montré que, si la composante verticale du champ magnétique est antisymétrique par rapport au centre horizontal de la cuve, comme c'est approximativement le cas dans les observations, le mécanisme du roulis de la nappe de métal existe toujours, seulement ce sont d'autres paires de modes qui deviennent couplées (section 2.3.2).
- Nous avons montré que la rotation stabilise en général le roulis de la nappe de métal (section 5.B).
- Nous avons montré que des versions non axisymétriques de l'instabilité MHD de rotation, bien qu'un peu moins menaçantes, existent aussi (section 5.B).

Perspectives

Nous avons étudié l'instabilité MHD de rotation dans des conditions relativement idéalisées, analytiquement par linéarisation et numériquement en la simulant dans une cuve carrée. Les résultats suggèrent néanmoins qu'il s'agit d'un mécanisme de déstabilisation assez robuste pour permettre à l'IMHDR de se manifester dans une cuve en opération. Nous avons effectivement montré qu'elle se développe sous différentes conditions de rotation, aussi dans une cuve carrée, et qu'il en existe des variantes non axisymétriques. De futures études devraient néanmoins vérifier que l'IMHDR peut se développer dans des conditions proches des conditions d'opération, par exemple en la simulant numériquement dans une cuve rectangulaire immergée dans un champ magnétique réaliste, avec un écoulement calculé plutôt que posé.

Enfin, en ce qui concerne les stratégies de contrôle du courant aux anodes, leur efficacité pourrait être confirmée par des simulations numériques effectuées avec un modèle qui permet d'ajuster le potentiel dans chaque anode, puis véritablement testée dans une cuve expérimentale.

La recherche sur la stabilité MHD dans les cuves de Hall-Héroult a mis au jour des mécanismes de déstabilisation inattendus. Interpréter ces mécanismes en termes physiques a exposé leur forme la plus simple, la plus essentielle. Cela profite d'une part au

champ plus général de la magnétohydrodynamique, et d'autre part à la conception de cuves d'électrolyse, en orientant la recherche à l'intérieur de l'ensemble des paramètres à optimiser.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. K. Ai. The hydrodynamics of the Hall–Héroult cell. *Light Metals*, pages 593–607, 1985.
- [2] J. Antille, M. Flueck & M. V. Romerio. Steady velocity fields in aluminium reduction cells derived from measurements of the anodic current fluctuations. *Light Metals*, pages 305–312, 1994.
- [3] G. Arkhipov & A. Rozin. Numerical simulation of metal-bath motion in an aluminium reduction cell. Dans *Proceedings of the joint 15th Riga and 6th PAMIR international conference*, volume II, pages 103–106, 2005.
- [4] Satish Balay, William D. Gropp, Lois C. McInnes & Barry F. Smith. Petsc home page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001.
- [5] S. K. Banerjee & J. W. Evans. Measurements of magnetic fields and electromagnetically driven melt flow in a physical model of a Hall–Héroult cell. *Metall. Trans. B.*, 21B(1):59–69, février 1990.
- [6] V. Bojarevičs & K. Pericleous. Nonlinear MHD stability of aluminium reduction cells. Dans *Proceedings of the joint 15th Riga and 6th PAMIR international conference*, volume II, pages 87–90, 2005.
- [7] V. Bojarevičs & K. Pericleous. Comparison of MHD models for aluminium reduction cells. Dans *Light Metals 2006*, pages 347–352. TMS, 2006.
- [8] V. Bojarevičs & M. Romerio. Long wave instability of liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells : a generalization of Sele’s criterion. *Eur. J. Mech. B*, 13(1):33–56, 1994.
- [9] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*, volume II. Gauthier–Villars, Paris, 1903.
- [10] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni & T. A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer–Verlag, 1987.
- [11] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, Oxford, 1961.

- [12] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, chapitre XI, page 508. Dover, 1961.
- [13] S. Chen, G. Doolen, J. R. Herring, R. H. Kraichnan, S. A. Orszag & Z. S. She. Far-dissipation range of turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 70(20):3051–3054, 1993.
- [14] P. A. Davidson. Magnetohydrodynamics in materials processing. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31:273–300, 1999.
- [15] P. A. Davidson. Overcoming instabilities in aluminium reduction cells : a route to cheaper aluminium. *Materials Science and Technology*, 16(5):475–479, mai 2000.
- [16] P. A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [17] P. A. Davidson, W. R. Graham & H. L. O'Brien. Instability mechanisms in aluminium reduction cells. Dans *Light Metals 1999*, pages 327–331. TMS, 1999.
- [18] P. A. Davidson & R. I. Lindsay. Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells. *J. Fluid Mech.*, 362:273–295, 1998.
- [19] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer & M. Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. *J. Comput. Phys.*, 175:645–673, 2002.
- [20] A. Dedner, D. Kröner, C. Rohde & M. Wesenberg. Efficient divergence cleaning in three-dimensional MHD simulations. *High Performance Computing in Science and Engineering '02*, edited by E. Krause and W. Jäger, pages 323–334, 2003.
- [21] J. Descloux, M. Flueck & M. V. Romerio. Modelling for instabilities in Hall-Heroult cells: Mathematical and numerical aspects. *Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy*, pages 107–110, 1991.
- [22] J. Descloux & M. V. Romerio. On the analysis by perturbation methods of the anodic current fluctuations in an electrolytic cell for aluminium. *Light Metals*, pages 237–243, 1988.
- [23] S. L. Dingman. *Fluvial hydrology*, chapitre 5, 6, pages 63–120. W. H. Freeman and Company, 1984.

- [24] P. G. Drazin & W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, 2^e édition, 2004.
- [25] M. Dupuis & V. Bojarevics. Impact of using selective collector bar rodding on the MHD stability of a 500 kA aluminium electrolysis cell. Dans *CIM Light Metals*, 2005.
- [26] J. W. Evans, Y. Zundelevich & D. Sharma. A mathematical model for prediction of currents magnetic fields, melt velocities, melt topography and current efficiency in Hall-Héroult cells. *Metallurgical Transactions B*, 12B:353-360, 1981.
- [27] J. H. Ferziger & M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 3^e édition, 2002.
- [28] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris & T. Lelièvre. Simulations of MHD flows with moving interfaces. *INRIA research report*, 4277, octobre 2001.
- [29] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris & T. Lelièvre. *Mathematical methods for the magneto-hydrodynamics of liquid metals*. Oxford University Press, New York, 2006.
- [30] J.-F. Gerbeau, T. Lelièvre & C. Le Bris. Simulations of MHD flows with moving interfaces. *J. Comp. Phys.*, 184(1):163-191, 2003.
- [31] J.-F. Gerbeau, T. Lelièvre, C. LeBris, N. Ligonésche & C. Vanvoren. Metal pad roll instabilities. Dans Wolfgang Schneider, éditeur, *Light Metals 2002*, pages 483-487. TMS, 2002.
- [32] P. A. Gilman. Magnetohydrodynamic "shallow water" equations for the solar tachocline. *The Astrophysical Journal*, 544:L79-L82, 2000.
- [33] J. P. Givry. Les effets magnétiques dans les cuves d'électrolyse d'aluminium. *La metallurgia italiana*, 8:503-509, 1960.
- [34] K. Grjotheim, C. Krohn, M. Malinovsky, K. Matiasovsky & J. Thonstad. *Aluminum Electrolysis*. Aluminium-Verlag, Dusseldorf, 2^e édition, 1982.
- [35] H. Kohno & S. Molokov. Finite element analysis of interfacial instability in aluminium reduction cells in a uniform, vertical magnetic field. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 45(2-8):644-659, 2007.

- [36] H. Kohno & S. Molokov. Interfacial instability in aluminium reduction cells in a vertical magnetic field with a transverse gradient to the sidewall. *Phys. Lett. A*, 366: 600–605, 2007.
- [37] P. Kundu. *Fluid mechanics*. Academic Press, 2nd édition, 2002.
- [38] A. Kurenkov, A. Thess & H. Babovsky. Reconstruction of interfaces between electrically conducting fluids from electrical potential measurements. *FDMP Fluid Dyn. Mater. Process.*, 2(1):47–58, 2006.
- [39] A. Kurenkov, A. Thess, O. Zikanov, M. Segatz, Ch. Droste & D. Vogelsang. Stability of aluminum reduction cells with mean flow. *Magnetohydrodynamics*, 40(2): 3–13, 2004.
- [40] A. F. LaCamera, D. P. Ziegler & R. L. Kozarek. Magnetohydrodynamics in the Hall–Heroult process, an overview. *Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy*, pages 91–98, 1991.
- [41] L. Leboucher, K. Pericleous, I. Panaitescu & M. Repetto. A finite-volume shallow layer method, for the MHD instabilities in an aluminium production cell. Dans *The 2nd international conference on CFD in the minerals and process industries*, pages 335–338, Melbourne, Australia, 1999.
- [42] H.-C. Lee & J. W. Evans. A physical model for electromagnetically driven flow in hall cells. *Light Metals*, pages 569–579, 1985.
- [43] R. J. LeVeque, D. Mihalas, E. Dorfi & E. Mueller. *Nonlinear conservation laws and finite volume methods for astrophysical fluid flow, lecture notes*. O. Steiner and A. Gautschy, Springer–Verlag, 1998. 27th Saas-Fee Advanced Course Lecture Notes.
- [44] J. Li, W. Liu, Y. Q. Lai, Q. Y. Li & Y. X. Liu. Coupled simulation of 3D electro-magneto-flow field in Hall–Heroult cells using finite element method. *Acta Metall. Sin.*, 19(2):106–116, 2007.
- [45] J. Lighthill. *Waves in Fluids*, chapitre 3. Water waves. Cambridge University Press, 1978.

- [46] X.-D. Liu, R. P. Fedkiw & M. Kang. A boundary condition capturing method for poisson's equation on irregular domains. *J. Comp. Phys.*, 160:151–178, 2000.
- [47] A. Lukyanov, G. El & S. Molokov. Instability of MHD-modified interfacial gravity waves revisited. *Phys. Lett. A*, 290(3):165–172, 2001.
- [48] M. Meneguzzi, H. Politano, A. Pouquet & M. Zolver. A sparse-mode spectral method for the simulation of turbulent flows. *J. Comp. Phys.*, 123(1):32–44, 1996.
- [49] S. Molokov, G. El & A. Lukyanov. On the nature of interfacial instability in aluminium reduction cells. Rapport technique, Coventry University, 2003. Internal Report AM-01/2003.
- [50] R. Moreau & J. W. Evans. An analysis of the hydrodynamics of aluminum reduction cells. *J. Electrochem. Soc.*, 131(10):2251–2259, 1984.
- [51] R. J. Moreau. Hydrodynamics of aluminum reduction cells. *Liquid–Metal Flows : Magnetohydrodynamics and Applications*, pages 464–480, 1988.
- [52] R. J. Moreau, S. Pigny & S. A. Maslowe. Amplitude evolution of interfacial waves in aluminium reduction cells. *Liquid–Metal Magnetohydrodynamics*, pages 197–204, 1989.
- [53] R. J. Moreau & D. Ziegler. The Moreau–Evans hydrodynamic model applied to actual Hall–Héroult cells. *Metallurgical Transactions B*, 19B:737–744, 1988.
- [54] K. Mori, K. Shiota, N. Urata & H. Ikeuchi. The surface oscillation of liquid metal. *Light Metals*, 11:77–95, 1976.
- [55] S. J. S. Morris & P. A. Davidson. Hydromagnetic edge waves and instability in reduction cells. *J. Fluid Mech.*, 493:121–130, 2003.
- [56] D. Munger. Simulation numérique des instabilités magnétohydrodynamiques dans les cuves de production de l'aluminium. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, août 2004.
- [57] D. Munger & A. Vincent. Direct simulations of MHD instabilities in aluminium reduction cells. *Magnetohydrodynamics*, 42(4):417–425, 2006.

- [58] D. Munger & A. Vincent. Electric boundary conditions at the anodes in aluminum reduction cells. *Metall. Mater. Trans. B*, 37(6):1025–1035, 2006. Accepted for publication on July 12, 2006.
- [59] D. Munger & A. Vincent. A level set approach to simulate magnetohydrodynamic instabilities in aluminum reduction cells. *J. Comp. Phys.*, 217:295–311, 2006.
- [60] David Munger & Alain Vincent. Numerical simulation of the magnetohydrodynamic instabilities in aluminium reduction cells. Dans *12th annual conference of the CFD Society of Canada*, pages 571–578, Ottawa, Canada, mai 2004.
- [61] S. Osher & J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. Comp. Phys.*, 79:12–49, 1988.
- [62] A. L. Perron, L. I. Kiss & S. Poncsák. Motion of singles bubbles moving under a slightly inclined surface through stationary liquids. *Int. J. Multiphase Flow*, 32:1311–1325, 2006.
- [63] S. Pigny & R. Moreau. Stability of fluid interfaces carrying an electric current in the presence of a magnetic field. *Eur. J. Mech*, 11(1), 1992.
- [64] V. Potočnik. Modelling of metal-bath interface waves in Hall–Héroult cells. Dans *Proceedings of the Metallurgical Society of the Canadian Institute of Mining and Metallurgy*. CIM, 3400 Maisonneuve O., Suite 855, Montreal, H3Z 3B8, 1989.
- [65] W. J. Rider. Approximate projection methods for incompressible flows : implementation, variants and robustness. Rapport technique, Los Alamos National Laboratory, 1995.
- [66] P. Roache. *Computational fluid dynamics*. Hermosa, Albuquerque, NM, 1976.
- [67] M. V. Romerio, A. Lozinski & J. Rappaz. A new modelling for simulating bubble motions in a smelter. Dans *Light Metals 2005*, pages 547–552. TMS, 2005.
- [68] A. J. C. B. Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues de rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 73:147–154, 237–240, 1871.

- [69] T. Sele. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells. *Metallurgical Transactions B*, 8B:613–618, December 1977.
- [70] D. Shin & A. D. Sneyd. Metal pad instabilities in aluminium reduction cells. Dans R.D. Peterson, éditeur, *Light Metals 2000*, pages 279–283. The Minerals, Metals & Materials Society, 2000.
- [71] C. W. Shu & S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *J. Comp. Phys.*, 83:32–78, 1989.
- [72] A. D. Sneyd. Stability of fluid layers carrying a normal electric current. *J. Fluid Mech.*, 156:223–236, 1985.
- [73] A. D. Sneyd. Interfacial instabilities in aluminium reduction cells. *J. Fluid Mech.*, 236:111–126, 1992.
- [74] A. D. Sneyd & A. Wang. Interfacial instability due to MHD mode coupling in aluminium reduction cells. *J. Fluid Mech.*, 263:343–359, 1994.
- [75] J. Sommeria & R. Moreau. Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *J. Fluid Mech.*, 118:507–518, 1982.
- [76] J. J. Stoker. *Water waves*. Interscience, New York, 1957.
- [77] H. Sun, O. Zikanov & B.A. Finlayson. Effects of background melt flow and interface distortion on the stability of Hall-Héroult cells. *Magnetohydrodynamics*, 41 (3):273–287, 2005.
- [78] H. Sun, O. Zikanov & D. P. Ziegler. Non-linear two-dimensional model of melt flows and interface instability in aluminum reduction cells. *Fluid Dyn. Res.*, 35: 255–274, 2004.
- [79] M. Sussman & E. Fatemi. An efficient, interface preserving level set re-distancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(4):1165–1191, 1999.
- [80] M. Sussman, P. Smereka & S. Osher. A levelset approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 114:146–159, 1994.

- [81] T. Tomasino, M. Le Hervet, O. Martin & T. Lelièvre. Stability analysis of simplified electrolysis cells with MISTRAL. Dans S. Lindsay, éditeur, *Light Metals 2006*, pages 335–340. TMS, 2006.
- [82] N. Urata, K. Mori & H. Ikeuchi. Behavior of bath and molten metal in aluminum electrolytic cell. *J. Japan Inst. Light Metals*, 26(11):573–583, 1976.
- [83] R. K. Wangsness. *Electromagnetic Fields*. John Wiley and Sons, New York, 2^e édition, 1986.
- [84] P. Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, New York, 2001. ISBN 3-540-67853-0.
- [85] J. M. Weygand, W. H. Matthaeus, S. Dasso, M. G. Kivelson & R. J. Walker. Taylor scale and effective magnetic Reynolds number determination from plasma sheet and solar wind magnetic field fluctuations. *J. Geophys. Res.*, 112:A10201, 2007. doi:10.1029/2007JA012486.
- [86] D. P. Ziegler. Stability of metal/electrolyte interface in Hall–Héroult cells : effect of the steady velocity. *Metallurgical Transactions B*, 24B:899–906, October 1993.
- [87] O. Zikanov, A. Thess, P. A. Davidson & D. P. Ziegler. A new approach to numerical simulation of melt flows and interface instability in Hall–Héroult cells. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 31(6):1541–1550, décembre 2000.

Annexe I

Le flux magnétique dans un milieu en mouvement

Dans cette annexe, nous dérivons un résultat bien connu en électromagnétisme [83, p. 271] (analogue du théorème de Kelvin pour la circulation), puis nous commentons ses conséquences sur l'évolution du flux magnétique et du champ magnétique. L'opérateur gradient ∇ est à trois dimensions dans cette annexe.

I.1 Évolution du flux magnétique

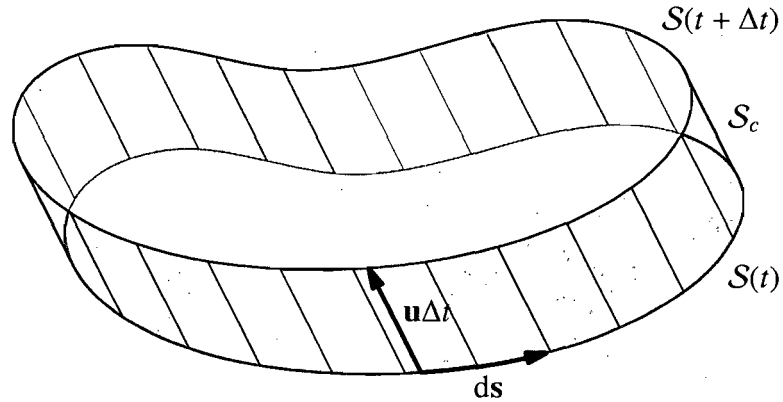


FIGURE I.1: Illustration de $\partial\mathcal{V}$.

Considérons un champ à flux conservatif comme le champ magnétique ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). Soit $\mathcal{S}(t)$, une surface matérielle dans un écoulement \mathbf{u} non uniforme, et soit \mathcal{V} , le volume borné par $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}(t) \cup \mathcal{S}(t + \Delta t) \cup \mathcal{S}_c$, où \mathcal{S}_c est la surface latérale reliant $\mathcal{S}(t)$ à $\mathcal{S}(t + \Delta t)$ (voir figure I.1). Puisque $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, le flux de $\mathbf{B}(t)$ sortant de \mathcal{V} satisfait :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(t) \cdot (-d\mathbf{a}) + \iint_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} + \iint_{\mathcal{S}_c} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (\text{I.1})$$

Le signe de l'élément de surface sur $\mathcal{S}(t)$ est inversé pour pointer vers l'extérieur de \mathcal{V} . Substituons $\mathbf{B}(t)$ dans l'intégrale sur $\mathcal{S}(t + \Delta t)$ un utilisant le développement de Taylor

de $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ autour de t :

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} - \Delta t \iint_{S(t+\Delta t)} \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_t \cdot d\mathbf{a} + O(\Delta t^2). \quad (\text{I.2})$$

De la même façon, on peut approcher la dernière intégrale du membre droit de (I.2) portant sur $S(t + \Delta t)$ par une intégrale sur $S(t)$:

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_t \cdot d\mathbf{a} = \iint_{S(t)} \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_t \cdot d\mathbf{a} + O(\Delta t). \quad (\text{I.3})$$

Puis, en regroupant (I.1), (I.2) et (I.3), on obtient :

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \Delta t \iint_{S(t)} \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_t \cdot d\mathbf{a} - \iint_{S_c} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} + O(\Delta t^2). \quad (\text{I.4})$$

Le membre gauche est en fait égal à :

$$\Delta t \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} + O(\Delta t^2).$$

La surface $S(t)$ se déplaçant à vitesse \mathbf{u} , l'élément $d\mathbf{a}$ de la surface latérale S_c est en fait donné par :

$$d\mathbf{a} = ds \times [\mathbf{u}\Delta t + O(\Delta t^2)],$$

où ds est un élément de la courbe $\partial S(t)$ bornant $S(t)$. Ainsi, le second terme du membre droit de (I.4) se récrit :

$$-\Delta t \oint_{\partial S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot ds \times \mathbf{u} + O(\Delta t^2) = -\Delta t \oint_{\partial S(t)} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}(t)] \cdot ds + O(\Delta t^2),$$

puis en invoquant le théorème de Stokes :

$$-\Delta t \iint_{S(t)} \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}(t)] \cdot d\mathbf{a} + O(\Delta t^2).$$

Enfin, on substitue les développements précédents dans (I.4), dont la limite pour Δt infi-

nitésimal révèle que :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{a} = \iint_{S(t)} \left[\frac{D\mathbf{B}}{Dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \cdot d\mathbf{a}, \quad (\text{I.5})$$

où $\Phi(t) = \iint_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ est le flux magnétique à travers $S(t)$. Ainsi, le flux magnétique à travers $S(t)$ ne varie pas seulement à cause des variations de la densité de flux $D\mathbf{B}/Dt$ sur $S(t)$ mais aussi à cause de la déformation de la surface. C'est ce que la section suivante explique.

I.2 Signification du terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

Dans un conducteur parfait ($\eta \rightarrow 0$), d'après (1.6 d) et (I.5), le flux magnétique est conservé sur toute surface matérielle. Lorsque la surface rétrécit, les lignes de champ se resserrent, produisant ainsi une augmentation de l'intensité du champ magnétique qui compense la diminution de l'aire de la surface, de sorte que le flux soit conservé. C'est cet effet que traduit le terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ dans (1.6 d) et dans (I.5). Si \mathbf{B} était un traceur passif ($D\mathbf{B}/Dt = 0$) ce serait l'intensité du champ magnétique qui serait conservée en tout point matériel, et non le flux magnétique.

L'exemple qui suit vise à donner une formulation plus intuitive physiquement de la conservation du flux magnétique. Si on contracte une surface de flux magnétique avec, par exemple, un champ de vitesse radial vers le centre de la surface, un disque de courant en sens azimutal est induit de sorte à renforcer le champ magnétique (loi de Lenz). On réduit la surface et la densité de flux augmente. C'est la tendance de la Nature à s'opposer à des variations de flux magnétique dans des surfaces *matérielles*. Et quand on ne s'oppose pas à la Nature, c'est-à-dire quand la résistivité est nulle, elle fait son travail parfaitement et l'intensité du courant induit est tel que le flux magnétique est conservé. Dans le cas où la conductivité est finie, le courant induit n'est pas suffisant et une partie du flux magnétique est perdue avec la diminution de la surface.

1.3 Diffusion magnétique

Pour le cas général où $\sigma > 0$, on retrouve une forme intégrale de la loi d'induction de Faraday en combinant (1.6 d) et (1.5) :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\mu_0\sigma} \iint_S \nabla^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{\mu_0\sigma} \oint_{\partial S} \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{\sigma} \oint_{\partial S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}.$$

Le flux magnétique n'est pas conservé parce que le champ magnétique diffuse, transformant l'énergie électromagnétique en chaleur par effet Joule.

Annexe II

Un principe variationnel pour la distribution du courant électrique

Les principes variationnels en physique favorisent le développement d'une intuition physique d'un niveau qui dépasse celle des actions locales. Puisque la distribution du courant électrique joue un rôle fondamental dans l'étude des instabilités MHD dans les cuves d'électrolyse de l'aluminium, il est utile de prendre le temps de comprendre les principes physiques qui déterminent la distribution d'équilibre du courant électrique. La démarche qui suit n'est pas tirée d'un livre ou d'une autre référence sur l'électrodynamique mais plutôt de ma vision personnelle de la matière. Nous allons démontrer ici que :

- la distribution d'équilibre du courant électrique est celle qui minimise les pertes d'énergie par effet Joule ;
- l'interface entre un bon et un mauvais conducteur est une équipotentielle.

II.1 Distribution d'équilibre du courant électrique

On considère un milieu au repos et dans lequel tous les champs ont atteint leur valeur d'équilibre. Soit $W = J^2/\sigma$, la densité de puissance perdue par effet Joule. Minimisons W sous la contrainte de conservation de la charge $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ en introduisant le lagrangien magnétostatique :

$$L = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{J^2}{\sigma} - 2\varphi \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV,$$

où φ est un multiplicateur de Lagrange et \mathcal{V} est le volume contenant le milieu conducteur (la conductivité peut être variable). Perturbons $\mathbf{J} \mapsto \mathbf{J} + \delta\mathbf{J}$ et $\varphi \mapsto \varphi + \delta\varphi$ avec des perturbations $\delta\mathbf{J}$ et $\delta\varphi$ qui s'annulent sur la frontière $\partial\mathcal{V}$ du volume \mathcal{V} . La perturbation linéaire du lagrangien s'écrit alors :

$$\delta L = \iiint_{\mathcal{V}} 2 \left[\frac{\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{J}}{\sigma} - \varphi \nabla \cdot (\delta\mathbf{J}) - (\nabla \cdot \mathbf{J}) \delta\varphi \right] dV.$$

Puis, intégrons par parties le deuxième terme dans la première intégrale :

$$\delta L = \iiint_{\mathcal{V}} 2 \left[\left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \nabla\varphi \right) \cdot \delta\mathbf{J} - (\nabla \cdot \mathbf{J}) \delta\varphi \right] dV - \iint_{\partial\mathcal{V}} 2\varphi \delta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

L'intégrale de surface s'annule, puisque $\delta\mathbf{J} = 0$ sur $\partial\mathcal{V}$. Autour de la distribution d'équilibre, L est minimal, donc $\delta L = 0$. Or, les perturbations $\delta\mathbf{J}$ et $\delta\varphi$ sont indépendantes et arbitraires, alors leurs coefficients doivent s'annuler partout dans le volume, d'où :

$$\mathbf{J} = -\sigma\nabla\varphi \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Le potentiel électrique φ joue donc le rôle d'un multiplicateur de Lagrange qui assure la conservation de la charge dans la minimisation des pertes d'énergie par effet Joule, en guidant le courant électrique selon la loi d'Ohm.

Ces résultats peuvent être confirmés avec une approche traditionnelle (non variationnelle). À l'équilibre, la loi de Faraday s'écrit $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, d'où $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Il s'ensuit par la loi d'Ohm, que $\mathbf{J} = -\sigma\nabla\varphi$. Puis, la loi d'Ampère, $\mu_0\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ implique que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Donc, la distribution d'équilibre du courant électrique est sujette à (II.1).

II.2 Interface entre un bon et un mauvais conducteurs

Dans un circuit composé de bons conducteurs et d'un mauvais conducteur, c'est dans ce dernier que sont concentrées les pertes par effet Joule. La distribution du courant sera contrainte essentiellement par son passage dans le mauvais conducteurs et s'ajustera en conséquence dans les bons conducteurs, où les pertes d'énergie sont négligeables. Pour le voir, supposons qu'un courant total I circule depuis un bon conducteur, à travers une surface \mathcal{S} , vers un mauvais conducteur contenu dans un volume \mathcal{V} . Cette fois-ci, on contraint le courant total passant à travers la surface, en ajoutant le multiplicateur de Lagrange $\varphi_{\mathcal{S}}$ et on prend en compte la dépendance entre \mathbf{J} et φ dès le début. Le lagrangien s'écrit :

$$L = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{J^2}{\sigma} dV - 2\varphi_{\mathcal{S}} \left(I - \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \right).$$

L'élément d'aire $d\mathbf{a}$ sur \mathcal{S} pointe vers le mauvais conducteur, de sorte que le courant total circulant du bon vers le mauvais conducteur soit bien I . Notons que $\varphi_{\mathcal{S}}$ est une constante

car la contrainte sur le courant n'est pas locale mais intégrale. Notre objectif ici est de comprendre ce qui se passe à l'interface \mathcal{S} entre le bon et le mauvais conducteur en terme du courant ou du potentiel électrique. Minimisons L en perturbant le courant électrique au voisinage de \mathcal{S} , c'est-à-dire $\mathbf{J} \mapsto \mathbf{J} + \delta\mathbf{J}$, où $\delta\mathbf{J}$ varie sur \mathcal{S} mais s'annule sur le reste de la surface $\mathcal{S}' = \partial\mathcal{V} - \mathcal{S}$ bornant le volume \mathcal{V} . La variation linéaire du lagrangien s'écrit :

$$\delta L = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{2\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{J}}{\sigma} dV + 2\varphi_S \iint_{\mathcal{S}} \delta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a},$$

puis en utilisant $\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{J}/\sigma = -\nabla\varphi \cdot \delta\mathbf{J} = -\nabla \cdot (\varphi \delta\mathbf{J})$:

$$\begin{aligned} \delta L &= - \oiint_{\partial\mathcal{V}} 2\varphi \delta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \iint_{\mathcal{S}} 2\varphi_S \delta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \oiint_{\mathcal{S}} 2(\varphi - \varphi_S) \delta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \end{aligned}$$

car $\delta\mathbf{J} = 0$ sur \mathcal{S}' . Il s'ensuit que $\varphi = \varphi_S$ sur \mathcal{S} : dans un mauvais conducteur, l'interface avec un bon mauvais conducteur est équipotentielle, ou de façon équivalente, le courant est purement normal à l'interface. Comme on vient de le démontrer, cela se produit afin de minimiser les pertes d'énergie par effet Joule à l'intérieur du mauvais conducteur. C'est aussi cohérent avec la constatation intuitive suivante : la composante normale du courant est continue par conservation de la charge, alors ajouter une composante tangentielle au courant traversant l'interface ne peut qu'augmenter le module du courant ou J^2 , du moins localement.

Notons que ce résultat peut être facilement obtenu d'après la condition de continuité du champ électrique tangentiel : $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_1/\sigma_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_2/\sigma_2$, et si $\sigma_2 \ll \sigma_1$, on obtient $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_2 = 0$. Cette approche, adoptée par Sneyd [72] pour calculer la distribution du courant électrique dans les cuves d'électrolyse, en révèle toutefois moins sur les principes physiques à l'oeuvre.