

Université de Montréal

Lien entre les matrices de transfert de spins
et de boucles du modèle de Potts sur le tore

par
Vincent Genest

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Octobre 2011

©Vincent Genest, 2011.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :
**Lien entre les matrices de transfert de spins
et de boucles du modèle de Potts sur le tore**

présenté par :
Vincent Genest

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard MacKenzie
Président-rapporteur

Yvan Saint-Aubin
Directeur de recherche

Véronique Hussin
Membre du jury

Mémoire accepté le : 19 octobre 2011

Résumé

Le lien entre le spectre de la matrice de transfert Λ de la formulation de spins du modèle de Potts critique et celui de la matrice de transfert double-ligne $D_N(\alpha, \beta)$ de la formulation de boucles est établi. La relation entre la trace des deux opérateurs est obtenue dans deux représentations de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, dont $D_N(\alpha, \beta)$ est un élément. Le résultat est exprimé en termes des traces modifiées $\text{tr}_{d,m}\sigma(D_N(\alpha, \beta))$, qui correspondent à des traces effectuées dans le sous-espace de l'espace de représentation des N -liens W_N^d se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible du groupe cyclique C_d . Le mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, les résultats essentiels concernant les formulations de spins et de boucles du modèle de Potts sont rappelés. Dans le second chapitre, les propriétés de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique et de ses représentations sont étudiées. Enfin, le lien entre les deux traces est construit dans le troisième chapitre. Le résultat final s'apparente à celui obtenu par Richard et Jacobsen en 2007, mais une nouvelle représentation ρ n'ayant pas été étudiée est aussi investiguée.

Mots-clefs

Algèbre de Temperley–Lieb, mécanique statistique, modèles de boucles, modèle de Potts, modèles de spins sur réseau, transitions de phase.

Abstract

The link between the spectrum of the spin transfer matrix Λ of the critical Potts model and that of the double-row transfer matrix $D_N(\alpha, \beta)$ of the loop model is established. The relationship between the two operators is obtained in two different representations of the cyclic Temperley–Lieb algebra, whereof $D_N(\alpha, \beta)$ is an element. The result is given in terms of the modified traces $\text{tr}_{d,m} \sigma(D_N(\alpha, \beta))$ that correspond to tracing out the subspace of the N -link representation space W_N^d that transforms according to the m^{th} representation of the cyclic group C_d . The thesis consists of three chapters. In the first chapter, basic results about the Potts model in the spin and loop pictures are recalled. In the second chapter, the properties of the cyclic Temperley–Lieb algebra and of some of its representations are studied. Finally, the relationship between the traces of the two operators is constructed in the third chapter. The final result is similar to the one obtained by Jacobsen and Richard in 2007, but a new representation ρ that has not been studied is investigated.

Keywords

Temperley–Lieb algebra, statistical mechanics, loop models, Potts model, lattice spin models, phase transitions.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Modèles de Potts et d'Ising	4
1.1	Modèles de spins	4
1.1.1	Modèle de Potts	5
1.1.2	Modèle d'Ising	6
1.2	Matrices de transfert de spins	7
1.2.1	Modèle de Potts	8
1.2.2	Modèle d'Ising	9
1.3	Modèles de boucles	13
1.4	Matrice de transfert de boucles	20
2	L'algèbre de Temperley–Lieb cyclique	25
2.1	Générateurs et relations	26
2.2	Un calcul diagrammatique	30
2.3	Un quotient de $\mathcal{D}_N(\beta)$	37
2.4	Représentations de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$	44
2.4.1	Représentation sur les N-liens	45
2.4.2	Représentation des N-liens cycliques	48
2.5	Classes d'équivalence de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$	51
3	Décomposition des traces	56
3.1	Trace de Markov	57
3.2	Représentations du groupe cyclique	60

3.3	Traces modifiées	63
3.3.1	Trace dans le bloc à d défauts	63
3.3.2	Trace se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation	64
3.3.3	P-traces et K-traces	64
3.4	Décomposition de $\tau(C)$	66
3.4.1	Lemmes de dénombrement	67
3.4.2	Décompositions des $\text{tr}_{k,n}\sigma(C)$	70
3.4.3	Inversion	73
3.5	Modèle de boucles et traces	77
3.5.1	Représentation σ	78
3.5.2	Représentation ρ	78
3.6	Lien avec le modèle de Potts	80
4	Conclusion	83

Liste des figures

1.1	Le réseau carré \mathcal{R} avec $N = 8$ et $M = 3$	5
1.2	Le réseau dual \mathcal{R}' avec $N = 8$ et $M = 3$	16
1.3	États possibles d'une 2-boîte	16

Liste des tableaux

3.1	Valeurs propres de Λ pour $N=4$	82
3.2	Tableau des valeurs propres de $D_N(\alpha, \beta)$ et des poids associés	82

Remerciements

J'aimerais remercier avant tout mon directeur de recherche, Yvan Saint-Aubin, pour son appui. Je désire aussi lui exprimer ma gratitude pour sa lecture attentive des épreuves de ce mémoire. Travailler en sa compagnie fut une expérience des plus enrichissantes. Je veux également exprimer ma reconnaissance envers mon père, Christian Genest, pour ses excellentes suggestions concernant l'écriture de ce document. De plus, je le remercie chaleureusement pour ses nombreux encouragements qui m'ont aidé à progresser tout au long de ma vie.

Chapitre 0

Introduction

Les transitions de phase sont des phénomènes physiques caractérisés par un changement brusque des propriétés macroscopiques d'un système induit par une variation infime des conditions environnantes, aussi appelées paramètres externes. Un exemple commun d'un tel phénomène est le changement de l'eau en glace. En effet, à 0.1°C et à pression normale (les paramètres externes sont donc la pression et la température), les molécules d'eau sont désordonnées et la substance se présente sous sa forme liquide ; à 0°C , les molécules sont organisées en réseau pour former de la glace, dont les propriétés telles que la chaleur spécifique, la densité, etc. sont très différentes de l'eau à l'état liquide.

Bien que ces phénomènes soient pour la plupart bien apprivoisés expérimentalement, leur explication en termes mathématiques demeure encore très difficile et constitue un domaine de recherche très riche. Les outils qui y sont utilisés sont également très variés, allant de la théorie des champs à l'algèbre et la topologie. Mathématiquement, une transition de phase se produit lorsque la fonction décrivant une quantité macroscopique en fonction des paramètres externes, aussi appelée observable, n'est pas analytique ; autrement dit, lorsque cette fonction ou une de ses dérivées diverge. Cette fonction est calculée dans la limite thermodynamique, qui est la limite lorsque le nombre de constituants du système tend vers l'infini. On appelle point critique tout point de l'espace des paramètres externes autour duquel

deux phases ne peuvent plus être distinguées.

Un autre exemple de transition de phase est celui observé dans le ferromagnétisme. En effet, à une certaine température T_c , appelée température de Curie, un aimant ferromagnétique perd son aimantation spontanée pour devenir paramagnétique. Le paramètre externe est ici la température. En 1925, Ising a introduit un modèle visant à reproduire le comportement des matériaux ferromagnétiques. Le modèle est défini sur un réseau sur lequel des spins pouvant prendre deux états (notés $+1$ et -1) interagissent entre voisins immédiats. Dans sa thèse, Ising a analysé son modèle en une dimension et a montré qu'il ne présentait pas de point critique.

En 1944, Onsager a réussi à calculer la forme exacte de la fonction de partition du modèle d'Ising sur le tore et a par le fait même montré que celui-ci présentait une transition de phase. Sa solution, très difficile, est basée sur la diagonalisation d'une matrice, appelée matrice de transfert, dont la trace est égale à la fonction de partition du modèle. Depuis, plusieurs généralisations du modèle d'Ising ont été proposées et utilisées dans divers contextes.

La généralisation qui nous intéressera dans ce mémoire est celle proposée par Potts, où les spins du réseau peuvent prendre un nombre Q arbitraire de valeurs, plutôt que 2. Outre la description classique de spins, il existe une description de ce modèle en termes de boucles sur le réseau. Cette description permet de faire varier Q de façon continue et donne aussi accès à d'autres observables, telle que la corrélation entre deux spins de même état. Tout comme pour la description de spins, la fonction de partition dans la description de boucles peut être exprimée en termes d'une matrice de transfert appelée matrice de transfert double-ligne. Cette matrice, décrite par exemple par Pearce, Rasmussen et Zuber dans [18], est définie de façon diagrammatique et est un élément de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique. Bien que les matrices de transfert de spins et de boucles sont très différentes en apparence, elles proviennent de deux descriptions du même modèle, et

doivent par conséquent être reliées l'une à l'autre. Le but de ce mémoire est de montrer la correspondance entre les spectres de ces deux opérateurs.

Le mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier chapitre rappelle certaines notions concernant les modèles de Potts et d'Ising et explique comment passer de la description de spins à la description de boucles. Les opérateurs de transfert des deux descriptions sont donnés, ainsi que des exemples. Dans le second chapitre, la structure qui héberge la matrice de transfert de boucles, appelée algèbre de Temperley–Lieb cyclique, est étudiée en détail. L'étude de certaines de ses représentations permet de calculer les éléments de matrices de l'opérateur de transfert dans la description de boucles. Finalement, les spectres des deux opérateurs sont reliés l'un à l'autre. Le calcul utilise abondamment les propriétés des représentations définies au chapitre précédent et s'exprime en termes de traces modifiées sur les sous-espaces se transformant selon une représentation donnée du groupe cyclique. Les résultats obtenus sont valides au point critique et reproduisent les résultats de Jacobsen et Richard [11] obtenus pour toute température et ceux de Read et Saleur [19] obtenus dans la limite continue où la taille du réseau tend vers l'infini.

Chapitre 1

Modèles de Potts et d'Ising

Au cours de ce chapitre, les modèles de Potts et d'Ising sont présentés dans leurs descriptions en termes de spins et de boucles. En premier lieu, les deux modèles sont définis dans la formulation de spins sur le réseau carré couvrant un tore. En second lieu, la matrice de transfert pour cette description est construite et le spectre complet en est donné pour le cas du modèle d'Ising critique. Un exemple complet du calcul de la matrice de transfert sur un réseau de largeur $N = 4$ est également fourni. Par la suite, il est montré comment les fonctions de partition des deux modèles peuvent être réinterprétées pour obtenir leurs descriptions en termes de boucles. En dernier lieu, une seconde matrice de transfert est bâtie, celle-ci adaptée aux modèles critiques de boucles sur le tore ; l'opérateur obtenu est la matrice double-ligne, qui constitue l'objet d'étude central de ce mémoire.

1.1 Modèles de spins

La description classique des modèles de Potts et d'Ising est celle de spins interagissant à courte distance sur un réseau \mathcal{R} donné. Dans cette section, le réseau carré torique \mathcal{R} utilisé est décrit et les deux modèles y sont définis. Dans chaque cas, les expressions pour l'énergie et la fonction de partition sont explicitées.

Soit \mathcal{R} , le réseau carré torique $(N/2) \times (2M)$ dessiné à 45° tel qu'illustré à la figure 1.1. Les conditions aux limites toroïdales signifient que les sites des lignes 1

et $2M + 1$ sont identiques, de même que ceux des colonnes 1 et $N/2 + 1$. Notons ici que l'entier N doit être pair. Les arêtes du réseau sont séparées en deux classes ; celles d'orientation NO–SE sont dites de type J (lignes pointillées) et les autres de type K (lignes pleines). Chaque site de \mathcal{R} a quatre voisins immédiats situés de part et autre des arêtes.

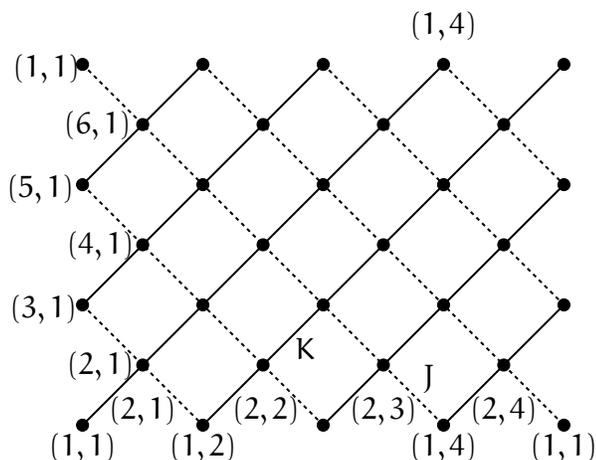


FIGURE 1.1 – Le réseau carré \mathcal{R} avec $N = 8$ et $M = 3$

1.1.1 Modèle de Potts

Le modèle de Potts à $Q \in \mathbb{N}$ états est défini sur \mathcal{R} en associant à chaque site i un scalaire σ_i , appelé spin, qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, Q\}$. L'interaction entre les spins est restreinte aux voisins immédiats σ_i, σ_j , avec une énergie $-X \cdot \delta_{\sigma_i, \sigma_j}$, où $X = J$ si les deux spins sont situés aux extrémités d'une arête de type J et $X = K$ autrement. Les paramètres J, K sont appelés coefficients d'interaction et $\delta_{\sigma_i, \sigma_j}$ est le delta de Kronecker, défini comme

$$\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_i = \sigma_j; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Un choix de valeurs parmi les Q possibles pour chaque spin de \mathcal{R} est appelé une configuration. Pour le réseau $(N/2) \times (2M)$, il y a un total de Q^{NM} configurations possibles. Dénotons par σ l'une d'entre elles ; l'énergie totale sur le réseau pour

cette configuration est

$$E_\sigma = -J \sum_{\langle i,j \rangle_J} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} - K \sum_{\langle i,j \rangle_K} \delta_{\sigma_i, \sigma_j},$$

où $\langle i,j \rangle_X$ dénote la somme sur toutes les arêtes de classe $X \in \{J, K\}$. Dans le modèle de Potts, un réseau de taille fixe à une température donnée est considéré. Il s'ensuit que l'ensemble canonique est de rigueur et donc que la probabilité d'une configuration se conforme à la distribution de Boltzmann; il vient ainsi

$$P_\sigma = e^{-E_\sigma/k_B T} / Z,$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T est la température absolue et Z est la fonction de partition, qui normalise la probabilité. La fonction de partition Z est obtenue en sommant sur toutes les configurations de spins possibles pondérées par leurs facteurs de Boltzmann. Il s'ensuit que

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left(\gamma_J \sum_{\langle i,j \rangle_J} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + \gamma_K \sum_{\langle i,j \rangle_K} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right),$$

où $\gamma_X = X/k_B T$ et $X \in \{J, K\}$. Il est connu [2] que ce modèle admet une transition de phase du second ordre. En effet, à une température T_c , appelée température critique, la chaleur spécifique du système, donnée par la dérivée seconde par rapport à $\beta = k_B T$ de la fonction de partition, diverge. La valeur de T_c sera donnée dans la section 3.

1.1.2 Modèle d'Ising

Dans ce mémoire, une attention particulière est portée au cas $Q = 2$. Cette valeur de Q correspond au célèbre modèle d'Ising, quoique dans une formulation légèrement différente de l'originale. En effet, dans le modèle d'Ising classique, les spins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et l'interaction est simplement le produit des spins adjacents.

Le choix des valeurs $\{1, \dots, Q\}$ pour le modèle de Potts n'est pas fondamental, tout autre choix de Q valeurs distinctes pouvant faire l'affaire. Donc, en prenant $Q = 2$ et en notant que $\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = (1/2)(1 + \sigma_i \sigma_j)$ lorsque $Q \in \{-1, 1\}$, le modèle d'Ising peut être recouvert dans sa description classique (modulo une renormalisation des constantes d'interaction). La fonction de partition du modèle d'Ising est

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left(\gamma_J \sum_{\langle i, j \rangle_J} \sigma_i \sigma_j + \gamma_K \sum_{\langle i, j \rangle_K} \sigma_i \sigma_j \right).$$

Le modèle d'Ising peut ainsi être considéré comme un cas particulier du modèle de Potts correspondant au choix $Q = 2$. Il est bon de mentionner que cette interprétation ne respecte pas la chronologie puisque le modèle d'Ising (1920) a été défini avant celui de Potts (1952); il est cependant utile pour nos fins de considérer le premier comme un cas particulier du second.

La valeur $Q = 2$ est intéressante car il est possible dans ce cas de calculer explicitement la fonction de partition pour toute taille du réseau et à toute température. La solution à ce problème a été obtenue pour la première fois par Onsager et consiste à exprimer Z comme la trace d'une matrice, qui est diagonalisée par la suite. Dans la prochaine section, la méthode pour construire de telles matrices, appelées matrices de transfert, est expliquée pour les modèles de Potts et d'Ising.

1.2 Matrices de transfert de spins

La méthode de la matrice de transfert a été utilisée pour la première fois par Ising pour solutionner le modèle du même nom en une dimension; l'idée de cette méthode a par la suite été reprise dans de nombreux autres modèles de réseaux. Dans cette section, il est montré comment Z_{Potts} peut être écrite comme la trace d'une matrice de transfert Λ^{spin} et les valeurs propres sont explicitées dans le cas du modèle d'Ising.

1.2.1 Modèle de Potts

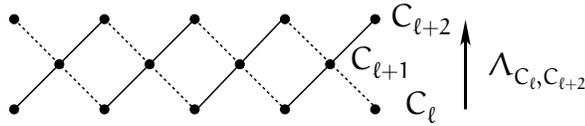
La matrice de transfert pour le modèle de Potts dans la description de spins est obtenue en factorisant la fonction de partition ; celle-ci peut s'écrire

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle_J} \exp(\gamma_J \delta_{\sigma_i, \sigma_j}) \prod_{\langle i,j \rangle_K} \exp(\gamma_K \delta_{\sigma_i, \sigma_j}).$$

Dénotons par $C_{\ell} = \{c_1, \dots, c_{N/2}\}$ l'ensemble des valeurs des spins sur la ligne ℓ . Le vecteur C_{ℓ} a donc $N/2$ composantes et peut prendre $Q^{N/2}$ valeurs distinctes, qui correspondent aux configurations de spins de la ligne ℓ . La somme sur toutes les configurations σ du réseau contenue dans la fonction de partition peut être remplacée par M sommes sur les configurations des lignes impaires. Puisqu'un spin de la ligne ℓ n'interagit qu'avec les spins des lignes $\ell+1$ et $\ell-1$, il est possible d'écrire

$$Z = \sum_{C_1} \sum_{C_3} \cdots \sum_{C_{2M-1}} \Lambda_{C_1, C_3} \Lambda_{C_3, C_5} \cdots \Lambda_{C_{2M-1}, C_1},$$

où $\Lambda_{C_{\ell}, C_{\ell+2}}$ doit contenir tous les poids de Boltzmann dans une tranche de réseau de la forme



La fonction $\Lambda_{CC'}$ dépend donc des configurations des lignes inférieure et supérieure C, C' et doit contenir une somme sur tous les états possibles de la ligne intermédiaire. En dénotant par ρ_j la valeur du $j^{\text{ième}}$ spin de la ligne intermédiaire de configuration ρ , il est clair que

$$\Lambda_{CC'}^{\text{spin}} = \sum_{\rho} \prod_{\langle i,j \rangle_J} \exp(\gamma_J (\delta_{c_i, \rho_j} + \delta_{\rho_j, c'_i})) \prod_{\langle i,j \rangle_K} \exp(\gamma_K (\delta_{c_i, \rho_j} + \delta_{\rho_j, c'_i})). \quad (1.1)$$

L'opérateur Λ^{spin} est appelé matrice de transfert et ses éléments de matrice dans la base des configurations de ligne sont donnés par la formule (1.1) ; il s'agit donc d'un opérateur matriciel agissant sur un espace vectoriel de dimension $Q^{N/2}$. Aux

vues de cette identification, la fonction de partition peut être réécrite comme

$$Z_{\text{potts}} = \text{tr } \Lambda^M. \quad (1.2)$$

Si les valeurs propres de Λ^{spin} sont connues pour tout N pair, alors la fonction de partition peut être calculée pour n'importe quelle taille de réseau et n'importe quelle température. En effet : $Z = \sum_i \lambda_i^M$, où les λ_i sont les valeurs propres de Λ . Le problème du calcul de la fonction de partition a donc été ramené à celui de l'obtention du spectre de la matrice Λ . Tel qu'annoncé précédemment, le spectre de la matrice de transfert est connu pour $Q = 2$, c'est-à-dire pour le modèle d'Ising.

1.2.2 Modèle d'Ising

Dans le cas du modèle d'Ising, la forme explicite des éléments de matrice de Λ est

$$\Lambda_{CC'} = \sum_{\rho} \prod_{j=1}^{N/2} \exp(\gamma_J(c_{j+1}\rho_j + \rho_j c'_j) + \gamma_K(c_j\rho_j + \rho_j c'_{j+1})),$$

avec $c_{N/2+1} = c_1$ en vertu des conditions aux limites toroïdales. Comme mentionné précédemment, le modèle d'Ising en deux dimensions possède un point critique ; ce point peut être localisé à l'aide d'arguments de dualité [2] et il est donné par la condition

$$\sinh(2\gamma_J) \sinh(2\gamma_K) = 1.$$

Dans ce travail, nous nous intéressons exclusivement aux modèles de Potts et d'Ising critiques ; il est donc commode d'introduire une paramétrisation qui permette de faire varier l'anisotropie d'interaction tout en maintenant le système au point critique. À cette fin, le paramètre u est introduit ; il est appelé paramètre d'anisotropie ou paramètre spectral, et est défini comme

$$\sinh(2\gamma_J) = \cot(2u), \quad \sinh(2\gamma_K) = \tan(2u),$$

où $0 < u < \pi/4$. Le cas $u = \pi/8$ correspond à une interaction isotrope des spins.

Le calcul des valeurs propres de Λ au point critique est ardu et il n'est pas présenté ici ; des solutions relativement détaillées peuvent notamment être trouvées dans [2]. Toutefois, l'expression de ces valeurs propres sera utile ultérieurement à des fins de vérifications numériques. C'est pourquoi la formule explicite en est donnée dans ce qui suit ; la formule montrée est celle calculée dans [16].

Les valeurs propres de Λ pour le modèle d'Ising critique se scindent en deux secteurs étiquetés par la valeur propre de l'opérateur d'inversion de tous les spins. En effet, l'opération d'inversion des spins commute avec la matrice de transfert Λ , ce qui rend possible leur diagonalisation simultanée [2]. Le secteur $+$ contient les valeurs propres associées aux vecteurs propres qui sont symétriques ($\lambda^{\text{inv}} = 1$) par rapport à l'inversion. Le secteur $-$, quant à lui, contient les valeurs propres qui correspondent aux vecteurs propres qui sont antisymétriques ($\lambda^{\text{inv}} = -1$) sous l'inversion de tous les spins. Dans le secteur $+$, les valeurs propres critiques sont données par

$$\lambda^+(\mathbf{u}) = \left[\sqrt{2} \left(e^{i(2\mathbf{u}+\pi/4)} \right)^{-N/2} \prod_{k=1}^{N/2} \left(e^{4i\mathbf{u}_k} + i\mu_k \tan \left(\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) \right) \right]^2,$$

où $\mu_k = \pm 1$ et $\prod_k \mu_k = 1$. Une valeur propre différente est obtenue pour chaque choix possible des $N/2$ valeurs de μ_k . Ce secteur contient donc $2^{N/2-1}$ valeurs propres, soit précisément la moitié du spectre. Dans le secteur $-$, les valeurs propres sont

$$\lambda^-(\mathbf{u}) = \left[\sqrt{2N} \left(e^{i(2\mathbf{u}+\pi/4)} \right)^{1-N/2} \prod_{k=1}^{N/2-1} \left(e^{4i\mathbf{u}_k} + i\mu_k \tan \left(\frac{k\pi}{N} \right) \right) \right]^2,$$

avec $\mu_k = \pm 1$. Dans ce secteur, une valeur propre différente est obtenue pour chaque choix possible des $N/2 - 1$ valeurs de μ_k , donnant ainsi $2^{N/2-1}$ valeurs propres. Le spectre complet compte donc $2^{N/2}$ valeurs propres au total, ce qui correspond bien à la dimension de Λ .

Plusieurs concepts ont été exposés jusqu'à maintenant. Le réseau \mathcal{R} employé a été décrit et les modèles de Potts et d'Ising y ont été définis. Par la suite, il a été montré comment ces modèles, dans leur formulation de spins, pouvaient s'exprimer en termes d'une matrice de transfert. Pour le modèle d'Ising, l'expression exacte des valeurs propres de cette matrice au point critique a été donnée. Dans l'exemple qui suit, la matrice de transfert dans le cas d'un réseau $2 \times 2M$ au point critique est calculée explicitement. Ainsi, le spectre tel que calculé exactement par Mathematica et celui donné par les formules ci-haut peuvent être comparés.

Exemple 1.1. Soit le modèle d'Ising critique sur un réseau $2 \times 2M$ avec paramètre d'anisotropie $u = \pi/8$, ce qui correspond à $\gamma_J = \gamma_K$. La base des états de ligne, dans laquelle la matrice de transfert est écrite, compte $2^2 = 4$ éléments. Ainsi,

$$C = \{\{1, 1\}, \{1, -1\}, \{-1, 1\}, \{-1, -1\}\}.$$

Les éléments de matrice sont donnés par

$$\Lambda_{cc'} = \sum_{\rho} \prod_{j=1}^2 \exp \left[\exp(\gamma_J(c_{j+1}\rho_j + \rho_j c'_j) + \gamma_K(c_j\rho_j + \rho_j c'_{j+1})) \right].$$

Chaque élément de matrice de Λ est donc la somme de 4 termes, chacun correspondant à une configuration possible de la ligne centrale. Pour une tranche de réseau 2×1 , la matrice de transfert complète est donc

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 36 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 36 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice sont aisément calculables

à la main ou en utilisant Mathematica ; ils prennent la forme

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 8(3 + 2\sqrt{2}), & \nu_1 &= (1, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1), \\ \lambda_2 &= 32, & \nu_2 &= (-1, 0, 0, 1), \\ \lambda_3 &= 8(3 - 2\sqrt{2}), & \nu_3 &= (1, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 1), \\ \lambda_4 &= 0, & \nu_4 &= (0, -1, 1, 0).\end{aligned}$$

L'opérateur d'inversion de spin est donné par $F_{cc'} = \prod_{j=1}^4 \delta_{c_j, c'_j}$. Dans la base ci-haut spécifiée, il s'écrit

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si S désigne le sous-espace propre correspondant à $\lambda_R = 1$ (symétrique) et si A désigne le sous-espace antisymétrique, il vient

$$S = \text{Sp}\{\nu_1, \nu_3\} \qquad A = \text{Sp}\{\nu_2, \nu_4\}. \qquad (1.3)$$

Tel qu'annoncé, les vecteurs propres de Λ sont aussi vecteurs propres de R , avec valeur propre ± 1 ; ceci est dû au fait que R et Λ commutent. Les valeurs propres données par les formules, dans lesquelles la valeur $u = \pi/8$ est substituée, peuvent maintenant être vérifiées. Calculons tout d'abord la valeur propre dans le secteur + associée au vecteur $\mu = (1, 1)$, c'est-à-dire $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 1$. Le développement de la formule est

$$\lambda^+(\mu = (1, 1)) = \left[\sqrt{2} e^{-2i(2u+\pi/4)} \left(e^{4iu} + i \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \left(e^{4iu} + i \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \right]^2,$$

où l'identité $\tan(3\pi/8) = \cot(\pi/8)$ a été utilisée. En développant le produit, il vient

$$\lambda^+(\mu = (1, 1)) = \left[\sqrt{2} \left(\cot(\pi/8) + \tan(\pi/8) + i \left(e^{-4iu} - e^{4iu} \right) \right) \right]^2.$$

En évaluant les fonctions trigonométriques à $\pi/8$ et utilisant l'expression en expo-

mentielles de la fonction sinus, l'expression devient

$$\lambda^+(\mu = (1, 1)) = \left[4 + 2\sqrt{2} \sin(4u)\right]^2.$$

L'évaluation à $u = \pi/8$ mène donc à $\lambda^+(\mu = (1, 1)) = (4 + 2\sqrt{2})^2 = 8(3 + 2\sqrt{2})$, tel qu'annoncé. Les autres calculs peuvent être fait de manière similaire. Notons que le choix $\mu(-1, -1)$ mène à la seconde valeur propre du secteur $+$ et que le choix $\mu = 1$ correspond à la valeur propre 32 du secteur $-$. ♦

1.3 Modèles de boucles

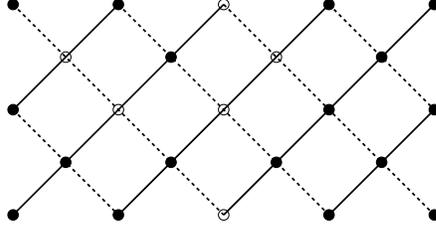
La description du modèle de Potts en termes de boucles est obtenue en réinterprétant la fonction de partition comme une somme sur tous les sous-graphes possibles sur le réseau \mathcal{R} , appelés sous-graphes de Fortuin–Kasteleyn (FK). Dans cette section, la procédure par laquelle un sous-graphe FK peut être construit à partir d'une configuration de Potts donnée est illustrée. Puis, à l'aide de la relation d'Euler, il est expliqué comment la fonction de partition peut être explicitement décomposée en termes d'une somme sur les configurations de boucles sur le réseau dual \mathcal{R}' .

Un sous-graphe de Fortuin–Kasteleyn est construit de la manière qui suit. Les sommets du sous-graphe sont les sites du réseau \mathcal{R} . Pour une configuration donnée, la procédure est la suivante :

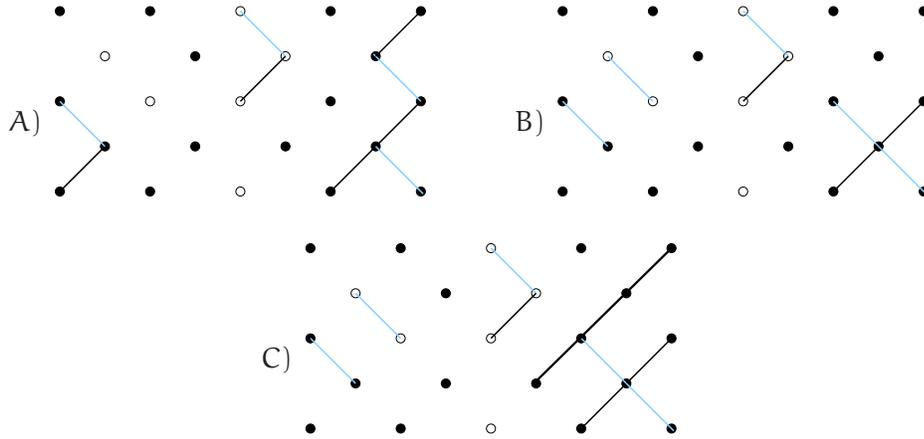
1. Deux sites adjacents de même état sont reliés par une arête avec une probabilité $\exp(\gamma_X) - 1$, où $X \in \{J, K\}$ selon le type d'arête.
2. L'arête entre deux sites d'états distincts est retirée.

Nous appelons un « lien » toute arête ayant survécu à ce processus. Les règles ci-haut impliquent qu'à une configuration donnée peuvent correspondre plusieurs sous-graphes FK mais avec des probabilités différentes ; ce phénomène est illustré dans l'exemple qui suit.

Exemple 1.2. Soit le réseau \mathcal{R} de taille 4×4 avec la configuration de Potts pour $Q = 2$ illustrée ci-bas. L'état des spins sur chaque site est soit « ouvert », soit « fermé ».



Les trois sous-graphes suivants peuvent être obtenus en appliquant la méthode expliquée ci-haut :



Le sous-graphe FK C) possède cinq liens de type J et 6 liens de type K. \blacklozenge

La fonction de partition du modèle de Potts peut être réinterprétée comme une somme sur tous les sous-graphes FK possibles. La fonction de partition s'écrit

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle_J} e^{\gamma_J \delta_{\sigma_i \sigma_j}} \prod_{\langle i,j \rangle_K} e^{\gamma_K \delta_{\sigma_i \sigma_j}}.$$

En posant $v_X = \exp(\gamma_X) - 1$ avec $X \in \{J, K\}$, il vient alors

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle_J} [1 + v_J \delta_{\sigma_i, \sigma_j}] \prod_{\langle i,j \rangle_K} [1 + v_K \delta_{\sigma_i, \sigma_j}]. \quad (1.4)$$

Soit $N_b = N_J + N_K$, le nombre total d'arêtes du réseau \mathcal{R} , où N_X est le nombre d'arêtes de type X . L'argument de la somme \sum_{σ} est une somme de 2^{N_b} termes

dont chaque composante est le produit de $N_J N_K$ facteurs qui sont soit 1, soit $v_J \delta_{\sigma_i \sigma_j}$, soit $v_K \delta_{\sigma_i \sigma_j}$. Pour une configuration donnée, un graphe peut être associé à chaque terme de la sommation. En effet, pour chaque facteur $v_X \delta_{\sigma_i \sigma_j}$, un lien est placé sur l'arête de type X entre les sites i et j ; pour chaque facteur 1, l'arête est retirée. Si le processus est répété pour les 2^{N_b} termes, une bijection est établie entre les termes de la sommation et des sous-graphes FK sur \mathcal{R} . La présence du delta de Kronecker assure que, conformément à la règle de construction 1), deux sites d'états distincts ne peuvent être liés. Par ailleurs, la probabilité de présence d'un lien est clairement celle spécifiée par la méthode qui précède.

La fonction de partition peut être réécrite uniquement en termes des sous-graphes FK; il faut pour cela conférer à chaque sous-graphe \mathcal{G} le poids idoine pour assurer l'égalité avec la décomposition (1.4). Pour un sous-graphe \mathcal{G} ayant N_J et N_K liens de chaque type et N_C composantes connexes (un site isolé compte comme une composante connexe), le terme correspondant du développement (1.4) contient le facteur $v_J^{N_J} v_K^{N_K}$. La somme sur les configurations laisse entière liberté quant au choix des états au sein de chaque composante connexe. Il s'ensuit que

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{\mathcal{G}} v_J^{N_J} v_K^{N_K} Q^{N_C}, \quad (1.5)$$

où la somme porte sur tous les sous-graphes possibles sur le réseau \mathcal{R} . La dernière équation décrit la fonction de partition du modèle de Potts dans la description de Fortuin–Kasteleyn.

Il appert que la fonction de partition (1.5) se traite plus aisément à l'aide d'une décomposition en boucles. Cette reformulation élémentaire permettra ensuite de définir une matrice de transfert dans cette description. Pour construire la décomposition en boucles, le réseau dual \mathcal{R}' est introduit. Celui-ci est obtenu en inscrivant les sites de \mathcal{R} aux extrémités de tuiles carrées, qui seront considérées comme les « sites » de \mathcal{R}' . Le résultat est illustré à la figure 1.2. Le réseau obtenu \mathcal{R}' est donc un réseau carré régulier de dimension $N \times 2M$. Les conditions périodiques

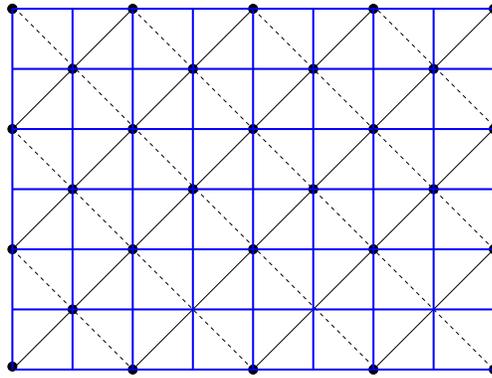


FIGURE 1.2 – Le réseau dual \mathcal{R}' avec $N = 8$ et $M = 3$

sur \mathcal{R} impliquent que les segments droit et gauche sont recollés, de même que les segments du haut et du bas.

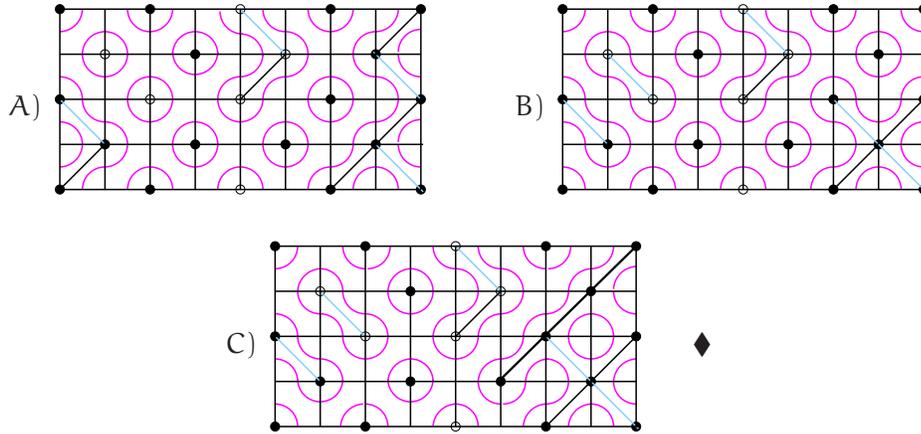
À chaque sous-graphe \mathcal{G} est associée une configuration de boucles sur \mathcal{R}' obtenue en dessinant sur chaque tuile de \mathcal{R}' deux arcs de cercle reliant le centre des côtés de telle sorte que ces arcs n'intersectent jamais un lien et qu'ils séparent deux spins si ceux-ci ne sont pas liés. Les deux états possibles sont illustrés à la figure 1.3.



FIGURE 1.3 – Les deux configurations possibles d'une tuile de \mathcal{R}' . Les lignes pointillées désignent l'absence de lien.

Dans l'exemple qui suit, les configurations de boucles correspondant à la configuration de l'exemple 1.2 et aux trois sous-graphes qui y étaient illustrés sont dessinés. Il est clair de par ces exemples qu'à un sous-graphe \mathcal{G} donné correspond une unique configuration de boucles.

Exemple 1.3. Considérons à nouveau les sous-graphes A, B et C de l'exemple précédent et dessinons les configurations de boucles qui leur correspondent.



Il est possible d'exprimer la fonction de partition (1.5) sur le réseau \mathcal{R}' en termes des variables naturelles pour les configurations de boucles. Pour ce faire, un analogue de la relation d'Euler pour les graphes planaires sera utilisé. Le résultat est énoncé sous forme de lemme. La démonstration est omise mais peut être trouvée à maints endroits, notamment dans [15]. Avant tout, une définition est nécessaire.

Définition 1.1. Un sous-graphe possède la topologie en croix s'il a une composante connexe composée d'au moins deux sous-composantes connexes s'enroulant chacune dans une direction différente du tore et qui s'intersectent. Un exemple peut être trouvé dans l'exemple 1.4 ♣

Lemme 1.1. Soit \mathcal{G} , un sous-graphe sur \mathcal{R} n'ayant pas la topologie en croix et soit $\#\mathcal{G}$ le nombre de boucles fermées dans la configuration de boucles sur le tore. Alors

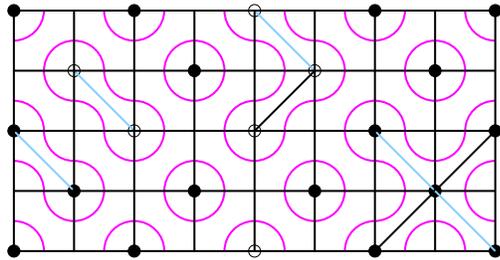
$$N_c = \frac{1}{2}(\#\mathcal{G} + N_s - N_b),$$

où N_c est le nombre de composantes connexes du sous-graphe, $N_b = N_J + N_K$, le nombre total de liens et N_s le nombre total de sites.

Cette relation va permettre de réexprimer la fonction de partition du modèle de Potts en termes des configurations de boucles. Il y a toutefois un élément man-

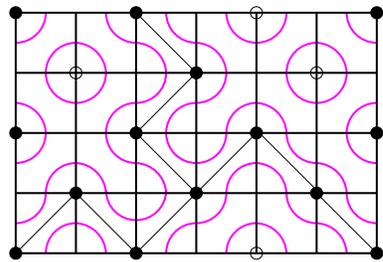
quant ; pour les sous-graphes ayant la topologie en croix, la relation ci-haut doit être corrigée. Avant d'expliquer la nature de cette correction, il convient de faire un exemple montrant comment calculer, à partir d'un sous-graphe donné, les quantités N_s , N_c , N_b et $\#G$ et de vérifier la relation d'Euler $N_c = \frac{1}{2}(\#G + N_s - N_b)$.

Exemple 1.4. Considérons une fois de plus le sous-graphe B sur \mathcal{R} de l'exemple précédent ainsi que sa configuration de boucles sur \mathcal{R}' associée. Nous avons



Le sous-graphe B ne contenant pas de composante connexe en forme de croix, la relation d'Euler devrait être vérifiée. Le nombre de spins est clairement $N_s = 16$ et le nombre de lien est $N_b = 8$. Le nombre $\#G$ requiert plus d'attention. En recollant les côtés gauche et droit ainsi que supérieur et inférieur, 8 boucles peuvent être dénombrées. Ainsi : $\#G = 8$. La relation d'Euler $N_c = \frac{1}{2}(\#G + N_s - N_b)$ prédit donc $N_c = 8$ composantes connexes. Sachant qu'un site isolé est considéré comme une composante connexe, un observation simple montre que le compte est bon.

Soit un sous-graphe ayant la topologie en croix, par exemple :



Le graphe contient $N_s = 12$ sites et compte $N_b = 9$ liens. L'identification des frontières permet d'obtenir $\#G = 5$. La relation d'Euler n'est donc pas vérifiée ici puisque le sous-graphe a $N_c = 5$ composantes connexes, alors que la formule prédit $N_c = 4$.



Pour les graphes à topologie en croix, la correction à apporter a été étudiée par Arguin dans [1]. Le résultat est simple et est à nouveau donné sans démonstration.

Lemme 1.2. *Soit \mathcal{G} , un sous-graphe sur \mathcal{R} ayant la topologie en croix et soit $\#\mathcal{G}$ le nombre de boucles fermées dans la configuration de boucles sur le tore. Alors*

$$N_c = \frac{\#\mathcal{G} + N_s - N_b}{2} + 1,$$

où N_c est le nombre de composantes connexes du sous-graphe, $N_b = N_J + N_K$, le nombre total de liens et N_s le nombre total de sites.

L'exemple ci-haut avec le sous-graphe à topologie en croix vérifie bien la formule ci-haut.

La fonction de partition (1.5) au point critique peut être réexprimée en termes des variables naturelles de \mathcal{G} en utilisant les relations précédentes. Il convient de traiter d'abord la partie excluant la correction pour les graphes à topologie en croix. Il est connu que le point critique du modèle de Potts est atteint lorsque $v_J v_K = Q$ [2]. Puisque nous travaillerons au point critique pour le reste de ce mémoire, nous utilisons la paramétrisation suivante :

$$\sqrt{Q} = 2 \cos \lambda = \beta,$$

$$\frac{v_J}{\sqrt{Q}} = \frac{\sin(\lambda - u)}{\sin(u)}, \quad \frac{v_K}{\sqrt{Q}} = \frac{\sin(u)}{\sin(\lambda - u)},$$

avec $u \in (0, \lambda/2)$, le paramètre d'anisotropie. Appelons Z_B la fonction de partition sans la correction pour les graphes à topologie en croix. En insérant la paramétrisation suggérée dans l'équation (1.5) et en utilisant la relation d'Euler pour les graphes sans croix, il vient

$$Z_B = \frac{Q^{N_s/2}}{(\sin(\lambda - u) \sin(u))^{NM}} \sum_{\mathcal{G}} \beta^{\#\mathcal{G}} \sin^{N_J}(\lambda - u) \sin^{NM - N_J}(u) \sin^{N_K}(u) \sin^{NM - N_K}(\lambda - u).$$

La fonction de partition Z_B n'est pas égale à la fonction de partition du modèle de Potts. En effet, dans Z_B , le poids 1 (plutôt que Q) serait attribué aux graphes avec la topologie en croix. La fonction de partition Z_B peut toutefois être corrigée pour obtenir l'égalité avec la fonction de partition du modèle de Potts. Pour ce faire, il faut sélectionner dans Z_B les configurations avec topologie en croix, retirer leur contribution avec poids 1, puis les rajouter avec le poids Q . Il faut donc ajouter $Q - 1$ fois la fonction de partition Z_B restreinte aux graphes à topologie en croix. Pour obtenir cette restriction, il suffit d'attribuer un poids $\alpha = 0$ aux boucles non contractibles, c'est-à-dire attribuer un poids nul à toute boucle s'enroulant dans un sens ou dans l'autre du tore. Puisque ces configurations sont en bijection avec les graphes triviaux, il faut diviser la correction par un facteur 2 pour éviter un décompte déboublé [3]. Le lien entre les deux fonctions de partition est donc

$$Z_{\text{Potts}} = Z_B + \frac{Q-1}{2} Z_B(\alpha = 0). \quad (1.6)$$

Remarque 1. Notons que la sélection des configurations avec topologie en croix n'est pas évidente à partir de la formule précédente pour Z_B . Il est néanmoins possible de le faire avec la matrice de transfert pour la description de boucles, tel que montré dans la prochaine section. ▲

La relation ci-haut indique que pour obtenir le modèle de Potts critique, il suffit de sommer sur toutes les configurations de boucles de \mathcal{R}' et de les pondérer par $\beta^{\#\mathcal{G}}$ et les facteurs trigonométriques correspondants ; l'information est donc stockée de manière différente dans la formulation de boucles. La formule obtenue pour Z_B suggère comment construire un opérateur de transfert pour cette description ; ce qui sera fait dans la prochaine section.

1.4 Matrice de transfert de boucles

Il est possible de définir une matrice de transfert qui convient à la description du modèle de Potts en termes de boucles. Il a été montré que la fonction de partition Z_{Potts} peut s'exprimer comme une somme sur tous les sous-graphes possibles sur

\mathcal{R} , et donc également comme une somme sur toutes les configurations de boucles possibles sur \mathcal{R}' ; dans cette dernière, chaque terme de la somme est pondéré par un facteur $\beta^{\#\mathcal{G}}$, où $\#\mathcal{G}$ est le nombre de boucles fermées sur le tore et par un facteur qui dépend du nombre de liens de chaque type. Dans cette section, par analogie avec la description de spins, un opérateur contenant l'information sur tous les poids dans une tranche de deux lignes du réseau \mathcal{R}' sera défini.

Chaque tuile du réseau \mathcal{R}' , aussi appelée 2-boîte, doit prendre un état parmi les deux suivants :



L'état d'une tuile dépend de la présence ou de l'absence d'un lien de type X entre les deux spins. Aux vues de l'expression obtenue pour la fonction de partition Z_B , l'opérateur de face $X(u)$ est défini de façon diagrammatique. Alors,

$$X(u) = \boxed{u} = \sin(\lambda - u) \begin{array}{|c|} \hline \text{diag 1} \\ \hline \end{array} + \sin(u) \begin{array}{|c|} \hline \text{diag 2} \\ \hline \end{array}, \quad (1.7)$$

où λ est le paramètre de traversée ($2 \cos \lambda = \sqrt{Q} = \beta$) et u est le paramètre d'anisotropie ($u \in (0, \lambda/2)$). À titre d'exemple, le cas $\lambda = \pi/4$ et $u = \pi/8$ correspond au modèle d'Ising isotrope. Prises individuellement, les 2-boîtes sont des objets purement diagrammatiques, mais l'opérateur de face contient des poids similaires à ceux obtenus dans la section précédente. Outre les poids exprimés en puissances des coefficients $\sin(u)$ et $\sin(\lambda - u)$, il faut également que l'opérateur de transfert puisse « compter » les boucles contractibles avec le poids β et les boucles non contractibles avec le poids α .

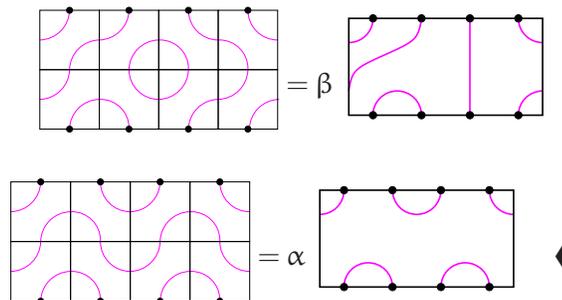
Définition 1.2. La matrice de transfert double-ligne périodique, notée $D_N(\alpha, \beta)$, est définie diagrammatiquement comme suit :

$$D_N(u, \alpha, \beta) = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline \lambda-u & u & \dots & u \\ \hline \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \hline u & \lambda-u & \dots & \lambda-u \\ \hline \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}}_N \cdot \quad (1.8)$$



Cet opérateur diagrammatique contient une somme sur toutes les configurations possibles sur deux lignes de \mathcal{R}' de largeur N ; chacune de ces configurations est pondérée par le poids prescrit par la paramétrisation de la section précédente. Il y a ainsi 2^{2N} configurations. L'autre information importante pour le modèle de boucles est le nombre de boucles contractibles et non contractibles associé à chaque configuration. Le nombre total de ces boucles peut être obtenu en identifiant les côtés droit et gauche de D_N , puis les côtés supérieur et inférieur. Il s'ensuit que pour une configuration donnée, les boucles contractibles et non contractibles qui apparaissent par l'identification des côtés droit et gauche peuvent toujours être factorisées et le diagramme remplacé par une autre configuration préservant la connectivité des points du haut avec ceux du bas. L'exemple suivant illustre ce processus.

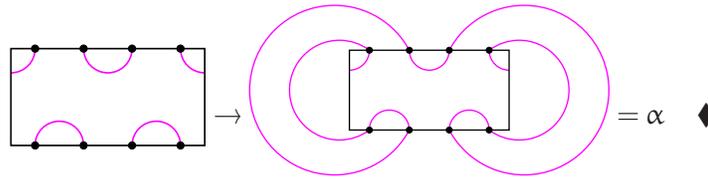
Exemple 1.5. Dans cet exemple, deux configurations dans la somme définissant l'opérateur $D_N(\alpha, \beta)$ sont considérées et il est montré comment les boucles peuvent être factorisées et les brins reconnectés en maintenant la connectivité. Ainsi :



L'opérateur $D_N(\alpha, \beta)$ permet donc de sommer sur toutes les configurations sur

le réseau \mathcal{R}' avec le poids approprié. Pour recouvrir la fonction de partition sur le tore, il faut toutefois concaténer $2M$ lignes et refermer les diagrammes verticalement pour compter le nombre de boucles. Pour calculer le terme de correction, il faut prendre $\alpha = 0$, autrement $\alpha = \beta$. Le prochain exemple montre comment l'identification des points supérieur et inférieur mène à des boucles.

Exemple 1.6. Soit un des diagrammes de l'exemple précédent qui est refermé verticalement. Alors :



À ce stade, l'appellation « matrice » pour $D_N(\alpha, \beta)$ peut paraître curieuse puisqu'aucun espace vectoriel sur lequel $D_N(\alpha, \beta)$ pourrait agir n'a été défini. Dans le chapitre 2, il sera expliqué que $D_N(\alpha, \beta)$ peut être vu comme un élément de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique, dont l'étude des représentations permet d'obtenir une représentation matricielle pour D_N . L'exemple suivant donne la forme explicite de $D_N(\alpha, \beta)$ lorsque $N = 2$.

Exemple 1.7. Nous allons calculer explicitement la matrice de transfert de boucles $D_N(\alpha, \beta)$ pour $N = 2$ et faire les simplifications selon les règles de dénombrement des boucles contractibles et non contractibles expliquées dans ce qui précède. Pour $N = 2$, il y a 2^4 configurations possibles, mais celles-ci ne mènent pas toutes à des diagrammes différents.

$$\begin{aligned}
 D_2(\alpha, \beta) = & \sin^4(u) \left[\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right] + \sin^3(u) \sin(\lambda - u) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) \\
 & + \sin^2(u) \sin^2(\lambda - u) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) \\
 & + \sin(u) \sin^3(\lambda - u) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) + \sin^4(\lambda - u) \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

La factorisation des boucles donne

$$\begin{aligned}
 D_2(\alpha, \beta) = & \left[\beta \sin^4(u) + 4 \sin^3(u) \sin(\lambda - u) \right] \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} \\
 & + \left[4 \sin^2(u) \sin^2(\lambda - u) \right] \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \alpha \sin^2(u) \sin^2(\lambda - u) \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} \right) \\
 & + \left[\beta \sin^4(\lambda - u) + 4 \sin(u) \sin^3(\lambda - u) \right] \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} \blacklozenge
 \end{aligned}$$

Remarque 2. Notons que l'opérateur $D_N(u, \alpha, \beta)$ engendre une famille finie d'opérateurs qui commutent. En effet, si l'équation de Yang–Baxter est satisfaite [2], alors il peut être montré que $[D_N(u), D_N(v)] = 0$ pour tout choix de u et v . Cette relation est très importante dans le cadre des modèles intégrables et de la théorie des champs conformes ; elle ne jouera toutefois aucun rôle dans la suite. Pour de plus amples détails, les écrits [18] et [17] peuvent être consultés. ▲

Remarque 3. La disposition relative des boîtes de types u ou $\lambda - u$ n'est pas unique. D'autres choix peuvent être trouvés dans [15] et [18]. ▲

Deux descriptions possibles des modèles de Potts et d'Ising ont été données, l'une en termes de spins, dont la fonction de partition est $Z^{\text{Spin}} = \text{tr}(\Lambda^{\text{spin}})^M$, et l'autre en termes de boucles, dont la fonction de partition est donnée diagrammatiquement par la concaténation de la matrice double-ligne $D_N(\alpha, \beta)^M$ (M fois). Dans le chapitre 2, il sera expliqué comment les représentations permettent de calculer une représentation matricielle pour la matrice double-ligne. Toutefois, il est déjà clair que l'information est stockée différemment dans les deux opérateurs. En effet, la matrice Λ prend en compte des informations strictement locales sur les états de spins adjacents, tandis que D_N tient compte des liens et boucles non contractibles, qui peuvent s'étendre sur tout le réseau. Le but de ce travail est d'expliquer comment les spectres de Λ et D_N sont reliés entre eux.

Chapitre 2

L'algèbre de Temperley–Lieb cyclique

Dans ce chapitre, la structure algébrique qui sous-tend le modèle de boucles introduit précédemment est examinée. Le chapitre se divise en cinq parties. Dans un premier temps, l'algèbre de Temperley–Lieb (TL) cyclique $\mathcal{D}_N(\beta)$, telle qu'introduite par Green et Fan dans [9], est définie formellement. Dans un second temps, il est montré comment $\mathcal{D}_N(\beta)$ voit sa structure réalisée par le truchement d'un calcul diagrammatique évocateur de la description en boucles. Par la suite l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, obtenue d'un quotient de $\mathcal{D}_N(\beta)$, est définie ; le choix du quotient est tel que la structure résultante fournit une base pour l'écriture de la matrice de transfert de boucles $D_N(\alpha, \beta)$. Dans la quatrième section, deux représentations ρ et σ de l'algèbre \mathcal{A}_N sont obtenues et certaines de leurs propriétés sont détaillées ; ces représentations permettent le calcul des éléments de matrice de l'opérateur de transfert $D_N(\alpha, \beta)$ de la description de boucles. En dernier lieu, les éléments de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sont classifiés selon une relation d'équivalence basée sur l'indice du sous-groupe engendré par un élément dans un groupe cyclique.

2.1 Générateurs et relations

Dans cette section, l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique est définie en termes de générateurs soumis à un ensemble de relations ; la définition utilisée est celle proposée par Green dans [9]. Une algèbre A est un espace vectoriel muni d'un produit bilinéaire \star tel que, pour $a, b \in A$, $(a, b) \mapsto a \star b \in A$. La notation $a \star b = ab \in A$ est aussi employée.

Définition 2.1. Soit $N \in \mathbb{N}$, un entier naturel, et soit $\beta \in \mathbb{C}$, un paramètre complexe. L'algèbre de Temperley–Lieb cyclique, notée $\mathcal{D}_N(\beta)$, est engendrée par les éléments

$$e_1, \dots, e_N, \quad \Omega, \quad \Omega^{-1}.$$

Ces générateurs répondent aux cinq relations suivantes :

$$e_i^2 = \beta e_i, \tag{2.1}$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{si } \bar{i} \neq \overline{j \pm 1}, \tag{2.2}$$

$$e_i e_{\overline{i \pm 1}} e_i = e_i, \tag{2.3}$$

$$\Omega^{-1} e_i \Omega = e_{\overline{i+1}}, \tag{2.4}$$

$$(\Omega^{\pm 1} e_1)^{N-1} = \Omega^{\pm N} (\Omega^{\pm 1} e_1), \tag{2.5}$$

où \bar{i} dénote la classe de congruence $i \pmod N$ prise dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. De plus, $\Omega \Omega^{-1} = \Omega^{-1} \Omega = \text{id}$. ♣

Dans le cas présent, l'espace vectoriel est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles sur les complexes \mathbb{C} des mots distincts pouvant être écrits dans les générateurs e_i et Ω^j . Le produit de deux mots est leur concaténation et celui-ci est clairement associatif. Deux mots sont dit distincts s'ils ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par l'application des règles algébriques (2.1) à (2.5). Par ailleurs, un mot est dit de longueur ℓ s'il s'écrit avec ℓ générateurs ; un mot est qualifié de réduit si sa longueur est minimale. Les exemples suivants illustrent ces notions.

Exemple 2.1. Considérons les éléments $m_1 = e_2 e_4 e_3 e_1 \Omega^3$ et $m_2 = e_2 e_3 e_2 e_4 e_3 e_4 \Omega$. Pour vérifier si deux mots sont distincts, il faut appliquer les relations (2.1) à (2.5)

pour réduire les deux expressions. Ainsi, il vient

$$m_2 = e_2 e_3 e_2 e_4 e_3 e_4 \Omega \stackrel{(2.3)}{=} e_2 e_4 e_3 e_4 \Omega \stackrel{(2.3)}{=} e_2 e_4 \Omega.$$

On remarque que le mot m_1 est déjà sous sa forme la plus courte et il s'ensuit que $m_1 \neq m_2$. ♦

Le prochain exemple montre que les expressions réduites pour un mot de $\mathcal{D}_N(\beta)$ ne sont pas uniques ; il illustre aussi la complexité inhérente à la relation (2.5).

Exemple 2.2. Considérons les mots $m_1, m_2 \in \mathcal{D}_4(\beta)$ définis comme $m_1 = e_4 e_3 e_2$ et $m_2 = \Omega^2 e_2$. Ces deux mots sont réduits et en apparence distincts. Cependant, la relation (2.5) peut être utilisée pour montrer qu'ils sont égaux. Soit la relation (2.5) dans $\mathcal{D}_4(\beta)$; elle s'écrit, en prenant la puissance positive de Ω dans le membre de gauche,

$$(\Omega e_1)(\Omega e_1)(\Omega e_1) = \Omega^4(\Omega e_1).$$

En multipliant de part et d'autre par Ω^{-3} , il vient

$$\Omega^{-2}(e_1)(\Omega e_1)(\Omega e_1) = \Omega^2 e_1.$$

La relation (2.4) peut ensuite être utilisée à trois reprises pour déplacer les Ω à droite de l'expression. Il s'ensuit que

$$e_3 e_2 e_1 = \Omega^2 e_1.$$

En multipliant à gauche par Ω^{-1} et à droite par Ω , il vient finalement

$$e_4 e_3 e_2 = \Omega^2 e_2,$$

ce qui permet de conclure que $m_1 = m_2$. Deux expressions réduites distinctes pour un mot donné dans $\mathcal{D}_N(\beta)$ ont donc été obtenues ; ceci montre que les mots réduits n'ont pas une écriture unique. ♦

Remarque 4. Un examen de la relation (2.4) révèle que les générateurs ne sont pas

tous indépendants. En effet, puisque tout e_i peut être obtenu d'un générateur e_j par « translation » des indices (en utilisant Ω), il pourrait être écrit que $\mathcal{D}_N(\beta) = \langle e_1, \Omega, \Omega^{-1} \rangle$. Il est toutefois pratique de conserver la présente notation, notamment pour la lisibilité des expressions et le lien avec les autres algèbres de Temperley–Lieb. \blacktriangle

Remarque 5. La relation (2.5) et la procédure de l'exemple précédent permettent d'obtenir, pour tout N , l'égalité suivante :

$$e_1 e_N e_{N-1} \cdots e_3 = e_1 \Omega^2.$$

Cette relation, dénotée (1.5'), jouera un rôle dans la suite. \blacktriangle

Il est naturel de se demander s'il est possible de dénombrer les éléments distincts de $\mathcal{D}_N(\beta)$. Le prochain résultat donne une réponse à cette question : l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ compte une infinité d'éléments distincts.

Proposition 2.1. *L'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ est de dimension infinie.*

Démonstration. Pour prouver l'assertion, il suffit de trouver un élément d'ordre infini, c'est-à-dire un élément qui, multiplié par lui-même, produira chaque fois un nouvel élément. Dans $\mathcal{D}_N(\beta)$, une ou deux familles d'éléments qui sont infinies peuvent être trouvées, selon la parité de N .

Tout d'abord, il est clair que les $\Omega^{\pm m}$ forment une famille infinie puisqu'aucune relation algébrique ne permet de réduire leur longueur. Ainsi, l'élément Ω engendre un groupe cyclique infini.

Puis, lorsque l'entier N est pair, une seconde famille infinie peut être trouvée. En effet, si $m_1 = (e_1 e_3 \cdots e_{N-1})$ et $m_2 = (e_2 e_4 \cdots e_N)$, un calcul simple montre que les familles engendrées par $m_1 m_2$ et $m_2 m_1$ sont infinies. \square

L'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ est donc de dimension infinie, ou affine. Cette algèbre est une extension de l'algèbre de Temperley–Lieb périodique, et ces deux structures sont elles-mêmes des généralisations de l'algèbre de Temperley–Lieb classique (ci-après

TL) introduite par les auteurs du même nom dans [20]. Le prochain résultat permet de faire le lien entre $\mathcal{D}_N(\beta)$ et l'algèbre de Temperley–Lieb périodique, qui a davantage été étudiée par le passé. Ce résultat simple permet l'utilisation des résultats obtenus pour TL périodique et prépare le terrain pour la mise en place du calcul diagrammatique de la section suivante. Rappelons d'abord la définition de l'algèbre de TL périodique, notée $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$.

Définition 2.2. L'algèbre de Temperley–Lieb périodique est notée $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$ et est l'algèbre engendrée par les éléments e_1, \dots, e_N soumis aux relations (2.1), (2.2) et (2.3). ♣

Remarque 6. La notation $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$ peut paraître quelque peu surprenante. Elle est due au fait que l'algèbre périodique s'obtient par un quotient de l'algèbre de Iwahori–Hecke affine, qui est reliée au diagramme de Coxeter \hat{A}_{N+1} . Plus de détails sur ce point peuvent être trouvés dans [9]. ▲

De par cette définition, il est clair que $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1}) \subset \mathcal{D}_N(\beta)$ comme algèbres. La prochaine proposition précise comment $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$ arrive dans $\mathcal{D}_N(\beta)$.

Proposition 2.2. Soit $d \in \mathcal{D}_N(\beta)$, un élément de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique. Alors soit d est une puissance pure de Ω , c'est-à-dire que $d = \Omega^j$ pour un $j \neq 0$ donné, ou alors d peut s'écrire sous la forme $d = m\Omega^i$, où m est un mot réduit de $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$ et où i prend les valeurs 0 ou 1.

Démonstration. Si $d = \Omega^j$ directement, il n'y a rien à prouver ; il en va de même si d est déjà écrit uniquement en termes des générateurs e_i . Soit donc un mot contenant à la fois des e_i et des Ω . Si la relation (2.4) est utilisée, toutes les puissances de Ω peuvent être poussées à droite du mot. Par la suite, il est toujours possible, également à l'aide de la relation (2.4), de réécrire le dernier e_i en termes de e_1 et de le conjuguer par Ω^N si nécessaire. Par après, la relation (1.5') peut être utilisée pour faire diminuer ou augmenter la puissance de Ω totale par 2. En répétant le processus, la forme désirée est obtenue. □

Ce résultat et ceux de Green et Fan seront maintenant utilisés pour définir un calcul diagrammatique fidèle qui est une généralisation du calcul diagrammatique

pour l'algèbre TL classique. [9, 14]

2.2 Un calcul diagrammatique

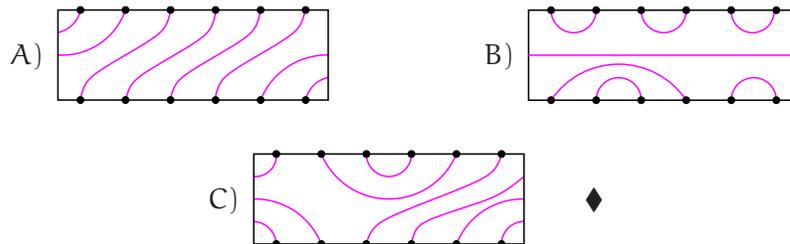
Dans cette section, il est montré comment $\mathcal{D}_N(\beta)$ voit sa structure réalisée de façon fidèle par l'entremise d'un calcul diagrammatique. Ce calcul est une généralisation cyclique du calcul diagrammatique classique proposé par Kauffman [14] pour l'algèbre de TL. Cette formulation en diagrammes rendra apparent le lien entre l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ et la description de boucles présentée au chapitre premier.

Définition 2.3. Un N-diagramme cyclique, ou connectivité, est constitué de deux lignes de N sommets dessinés dans un rectangle ; le diagramme possède des arêtes et respecte les conditions qui suivent.

1. Tout sommet se trouve au bout d'une arête.
2. Toutes les arêtes sont confinées au rectangle de la connectivité.
3. Une arête peut se propager horizontalement sans lier deux sommets.
4. Les arêtes ne peuvent s'intersecter.
5. Les côtés droit et gauche du diagramme sont identifiés, ce qui revient à tracer le diagramme sur un cylindre. ♣

On commence par donner trois exemples de 6-diagrammes cycliques.

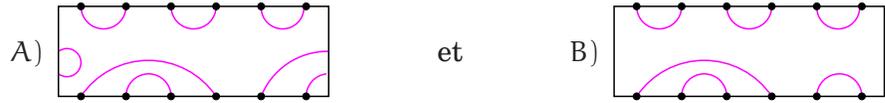
Exemple 2.3. Les trois diagrammes suivants respectent les règles énoncées ci-haut :



Définition 2.4. Deux N-diagrammes sont dit égaux si il est possible de déformer continûment les arêtes de l'un pour obtenir l'autre. ♣

L'exemple qui suit permet de visualiser comment l'égalité de deux diagrammes est définie.

Exemple 2.4. Les diagrammes



sont égaux. En revanche, les deux diagrammes suivants sont distincts :



En effet, pour amener le diagramme C) vers le diagramme D), il faudrait déformer l'arête en sortant du cylindre ; cette transformation est interdite. ♦

L'ensemble des combinaisons linéaires formelles sur \mathbb{C} des diagrammes distincts forme un espace vectoriel. Un produit sera maintenant défini sur cet espace ; ce produit est construit comme dans l'algèbre de TL classique.

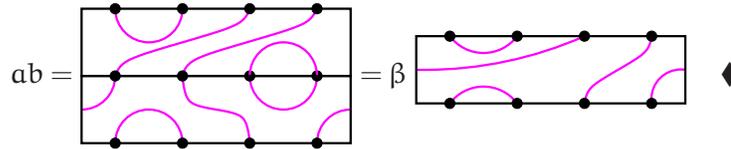
Définition 2.5. Soient a, b , deux N -diagrammes cycliques. Le produit $a \star b$ est calculé comme suit :

1. La connectivité b est placée au-dessus de la connectivité a en identifiant les points de la ligne supérieure de a avec les points de la ligne inférieure de b .
2. Le diagramme obtenu est redessiné en traçant les arêtes le plus directement possible.
3. À chaque boucle fermée sur la surface du cylindre, le résultat est multiplié par β et la boucle peut être effacée. ♣

Exemple 2.5. Considérons les 4-diagrammes suivants :



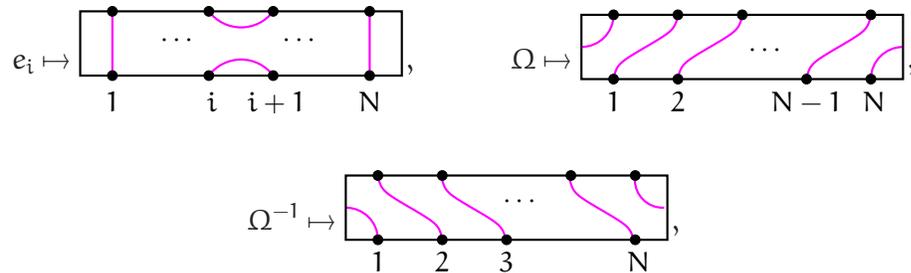
Le résultat de $a \star b$ est donné par



Il est clair que le produit ainsi défini est associatif. Il est également évident que le produit de deux N -diagrammes est également un N -diagramme, à une constante près. Un espace vectoriel muni d'un produit associatif a donc été obtenu ; il s'agit donc d'une algèbre de diagrammes. Il est à présent montré qu'il existe un homomorphisme φ qui envoie $\mathcal{D}_N(\beta)$ vers l'algèbre des diagrammes et que cet homomorphisme est injectif. L'injectivité de l'homomorphisme entraîne que le calcul diagrammatique est fidèle.

Définition 2.6. L'algèbre des diagrammes sur \mathbb{C} est dénotée $\mathcal{D}'_N(\beta)$. ♣

Proposition 2.3. L'application $\varphi : \mathcal{D}_N(\beta) \rightarrow \mathcal{D}'_N(\beta)$, définie comme



et qu'on étend linéairement, est un homomorphisme d'algèbres.

Démonstration. Pour montrer que φ est bel et bien un homomorphisme, il faut vérifier que les diagrammes respectent bien les relations constitutives (2.1) à (2.5). La méthode consiste à appliquer les règles de produit définies plus haut pour les diagrammes.

1. Vérifions la relation (2.1).

$$\begin{aligned}
 \varphi(e_i)\varphi(e_i) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two strands with a loop at } i \text{ and } i+1. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \\
 &= \beta \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Two strands with a crossing at } i \text{ and } i+1. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \beta \varphi(e_i).
 \end{aligned}$$

2. Vérifions la relation (2.2); soient i et j tels que $\bar{i} \neq \overline{j \pm 1}$.

$$\begin{aligned}
 \varphi(e_i)\varphi(e_j) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two strands with loops at } i \text{ and } j. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Two strands with loops at } i \text{ and } j. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Two strands with loops at } j \text{ and } i. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \varphi(e_j)\varphi(e_i)
 \end{aligned}$$

3. La relation (2.3), qui implique 3 diagrammes, peut maintenant être vérifiée.

$$\begin{aligned}
 \varphi(e_i)\varphi(e_{i+1})\varphi(e_i) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Three strands with loops at } i \text{ and } i+1. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Three strands with loops at } i \text{ and } i+1. \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \varphi(e_i)
 \end{aligned}$$

4. La propriété de pseudo-commutation (ou de translation d'indice) peut égale-

ment être vérifiée par le calcul qui suit.

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega^{-1})\varphi(e_i)\varphi(\Omega) &= \begin{array}{c} \text{Diagram with 4 rows and N columns. The top row has dots and ellipses. The bottom row has dots labeled 1, i, i+1, i+2, N. Pink strands connect the dots in a complex pattern across the rows.} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{Diagram with 2 rows and N columns. The bottom row has dots labeled 1, i+1, i+2, N. Pink strands connect the dots in a simpler pattern.} \end{array} = \varphi(e_{i+1}) \end{aligned}$$

5. La vérification de la relation (2.5) pour un N général doit se faire par écrit en donnant une description de la propagation des brins à travers les diagrammes. Un exemple pour $N = 4$ est plus simple et donne une bien meilleure idée de la signification diagrammatique de cette relation. Nous procédons donc par cet exemple, mais il est clair que le raisonnement est valide pour tout N . Ainsi,

$$\varphi(\Omega)\varphi(e_1) = \begin{array}{c} \text{Diagram with 4 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a specific pattern.} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with 2 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a simpler pattern.} \end{array}$$

En prenant le cube de cette expression, il vient

$$[\varphi(\Omega)\varphi(e_1)]^3 = \begin{array}{c} \text{Diagram with 12 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a complex pattern.} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with 6 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a simpler pattern.} \end{array}$$

En considérant l'autre côté de l'égalité, il vient

$$\varphi(\Omega^4)\varphi(\Omega)\varphi(e_1) = \begin{array}{c} \text{Diagram with 12 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a complex pattern.} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with 6 rows and 4 columns. Pink strands connect dots in a simpler pattern.} \end{array} = [\varphi(\Omega)\varphi(e_1)]^3.$$

Il ressort que les règles du calcul diagrammatique entraînent que l'applica-

tion φ est un homomorphisme d'algèbres.

□

Pour montrer que φ est également injective, il faut montrer que deux éléments distincts dans $\mathcal{D}_N(\beta)$ sont envoyés vers deux éléments distincts dans $\mathcal{D}'_N(\beta)$ (deux diagrammes distincts). Dans leur article [9], Green et Fan ont montré que c'était le cas pour $\mathcal{TL}(\hat{\mathcal{A}}_{N+1})$; il est donc sûr que φ est injective lorsqu'on se restreint aux éléments contenant uniquement des générateurs e_i . Il est également connu, par la proposition 2.2, que tout mot de $\mathcal{D}_N(\beta)$ s'écrit soit comme un mot de $\mathcal{TL}(\hat{\mathcal{A}}_{N+1})$ multiplié par une puissance nulle ou unitaire de Ω , soit comme une puissance de Ω non nulle. Pour montrer l'injectivité de φ sur tous les éléments de $\mathcal{D}_N(\beta)$, il y a donc deux choses à montrer.

1. Il faut prouver que deux puissances différentes de Ω ne sont pas envoyées vers le même diagramme.
2. Il faut montrer que tout diagramme n'étant pas directement une puissance non nulle de Ω doit s'écrire comme le produit d'un diagramme de $\mathcal{TL}(\hat{\mathcal{A}}_{N+1})$ multiplié par un diagramme $\varphi(\Omega)$ d'une puissance nulle ou unitaire.

Le premier énoncé peut être démontré aisément sans introduire de nouvelle définition.

Proposition 2.4. *L'application $\varphi : \mathcal{D}_N(\beta) \rightarrow \mathcal{D}'_N(\beta)$ restreinte à la sous-algèbre engendrée par Ω et Ω^{-1} est injective.*

Démonstration. Considérons $\varphi(\Omega^i)$ et $\varphi(\Omega^j)$ avec $i \neq j$. Les deux diagrammes obtenus ont des enroulements différents; puisqu'ils ne peuvent pas être obtenus l'un de l'autre par une déformation continue des brins, ils sont distincts. Autrement dit, $\varphi(\Omega^i) = \varphi(\Omega^j)$ implique que $i = j$. □

Pour montrer que tout diagramme peut s'écrire comme le produit d'un diagramme correspondant à un mot de $\mathcal{TL}(\hat{\mathcal{A}}_{N+1})$ avec un diagramme correspondant à une puissance de Ω nulle ou unitaire, le concept de parité sur les diagrammes est introduit.

Définition 2.7. Un diagramme $d' \in \mathcal{D}'_N(\beta)$ est dit pair si le nombre d'intersections entre une ligne imaginaire située au point $k + 1/2$ pour $1 \leq k \leq N$ et les arêtes de d' est pair. Autrement, le diagramme est dit impair. ♣

Remarque 7. Le choix de k importe peu lorsque l'on veut vérifier la parité d'un diagramme. En effet, une connectivité respectant les règles de définition a forcément une parité identique pour tout k . Le contraire impliquerait qu'il y ait un croisement des arêtes, ce qui ne donnerait pas un diagramme admissible. ▲

On illustre maintenant le concept de parité à l'aide de deux diagrammes.

Exemple 2.6. Considérons les deux diagrammes



Le diagramme a est impair et le diagramme b est pair. Il est possible d'énumérer pour chaque diagramme et pour chaque valeur de $1 \leq k \leq N$ le nombre de brins qui traversent la frontière imaginaire à $k + 1/2$. Le calcul donne $\#a = (1, 1, 3, 3, 3, 3)$ et $\#b = (2, 2, 2, 0, 2, 0)$. ♦

Proposition 2.5. *Tout diagramme qui est l'image par φ d'un élément de $\mathcal{TL}(\hat{\mathbb{A}}_{N+1})$ est de type pair avec au moins un arc reliant deux points de la ligne inférieure ; le diagramme identité est également inclus. Par ailleurs, tout diagramme pair ayant au moins un arc (ou étant l'identité) est l'image par φ d'un élément de $\mathcal{TL}(\hat{\mathbb{A}}_{N+1})$.*

La preuve de cette proposition est difficile et peut être trouvée dans l'article [9]. Il est clair que $\phi(\Omega) = a' \in \mathcal{D}'_N$ est de type impair. De plus, la parité d'un produit de diagrammes est le produit des parités des facteurs. Ceci amène la proposition suivante.

Proposition 2.6. *Tout diagramme $d' \in \mathcal{D}'_N(\beta)$ s'écrit comme le produit d'un diagramme pair avec $\phi(\Omega)$ à la puissance 0 ou 1.*

Démonstration. Tout diagramme est soit pair, soit impair. S'il est impair, alors il peut être écrit comme un diagramme pair multiplié par $\phi(\Omega)$. □

En conséquence, si deux diagrammes pairs sont égaux, alors ils correspondent à deux mots identiques de $\mathcal{TL}(\hat{A}_{N+1})$, ou ils sont deux puissances paires identiques de $\varphi(\Omega)$ (par [9] et par la proposition 2.4). Si deux diagrammes impairs d'_1 et d'_2 sont égaux, alors les diagrammes $d'_1\varphi(\Omega^{-1})$ et $d'_2\varphi(\Omega^{-1})$ sont pairs ; il s'ensuit que d'_1 et d'_2 correspondent à deux mots identiques de $\mathcal{D}_N(\beta)$. L'application $\varphi : \mathcal{D}_N(\beta) \rightarrow \mathcal{D}'_N(\beta)$ est donc injective. Le calcul diagrammatique reproduit donc de façon fidèle la structure de $\mathcal{D}_N(\beta)$.

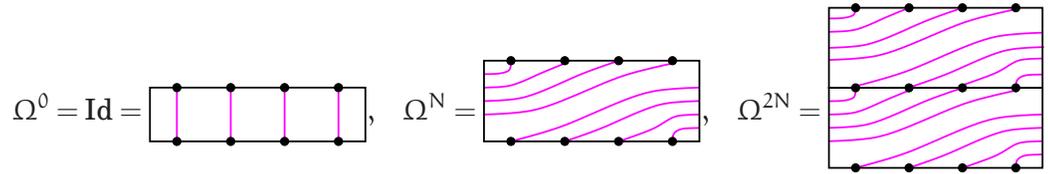
Remarque 8. Puisque le produit de deux diagrammes pairs est également un diagramme pair, il s'ensuit que les diagrammes pairs forment une sous-algèbre de $\mathcal{D}_N(\beta)$. Cette sous-algèbre est généralement dénotée $\mathcal{O}_N(\beta)$ et est appelée la sous-algèbre orientée. Cette terminologie est évocatrice du papier de Jones [13]. \blacktriangle

2.3 Un quotient de $\mathcal{D}_N(\beta)$

Jusqu'à maintenant, l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ a été étudiée et la fidélité du calcul diagrammatique pour cette algèbre a été démontrée. Toutefois, la structure n'est pas encore celle qui sous-tend l'écriture de la matrice de transfert double-ligne $D_N(\alpha, \beta)$. En effet, pour un réseau \mathcal{R}' fini, le nombre de configurations de la matrice sera lui aussi fini ; de plus ces configurations correspondent à des éléments de $\mathcal{D}_N(\beta)$. Cependant, l'algèbre compte une infinité d'éléments. De surcroît, pour mettre en correspondance les modèles de Potts et d'Ising avec la description de boucles, il faut compter les boucles non contractibles sur le tore ; il est clair que $\mathcal{D}_N(\beta)$ permet le dénombrement des boucles contractibles (de poids β), mais pas celui des boucles non contractibles. Dans cette section, l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ sera quotientée par deux nouvelles relations diagrammatiques ; le résultat sera l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, une algèbre finie ayant toute la structure requise. Notons que cette algèbre a été proposée par Green dans [8], qui l'a toutefois définie sans justification physique sous-jacente.

Pour mettre en lien la description de boucles et les modèles de Potts et d'Ising sur le tore, il faut compter les boucles à partir de la matrice de transfert $D_N(\beta)$. Considérons alors l'élément $\Omega \in \mathcal{D}_N(\beta)$. Si les diagrammes correspondant aux puissances

$\Omega^0, \Omega^N, \Omega^{2N}$, etc. sont dessinés, il vient, pour $N = 4$:



On sait que pour compter le nombre de boucles totales d'une configuration, il faudra, après avoir empilé suffisamment de lignes de la matrice pour pouvoir représenter le réseau en question, refermer les diagrammes verticalement. Si les diagrammes ci-haut sont imaginés sur un tore et qu'ils sont refermés verticalement, il appert que les boucles fermées sont en nombre égal dans tous les diagrammes (on a N boucles dans chaque cas). Par ailleurs, la relation (2.4) indique que l'élément Ω^N est dans le centre de $\mathcal{D}_N(\beta)$; ceci suggère le quotient qui suit.

Définition 2.8. Soit I_Ω , l'idéal de $\mathcal{D}_N(\beta)$ engendré par $\Omega^N = \text{Id}$ et soit $\mathcal{J}_N(\beta)$, l'algèbre définie par

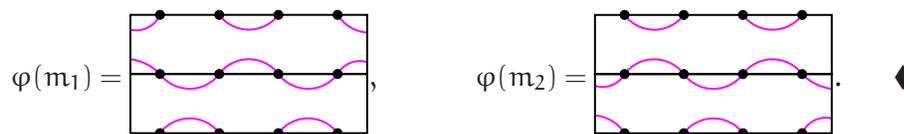
$$\mathcal{J}_N(\beta) = \mathcal{D}_N(\beta) / I_\Omega. \spadesuit$$

Lorsque N est impair, ce quotient est suffisant pour rendre l'algèbre finie. Cependant, lorsque N est pair, ce qui correspond à notre cas d'intérêt, d'autres éléments sont d'ordre infini et ce sont précisément ces éléments qui engendrent des boucles non contractibles.

Remarque 9. L'algèbre $\mathcal{J}_N(\beta)$ a été étudiée par Jones dans [13]. \blacktriangle

Revenons tout d'abord à la démonstration de la proposition 2.1 pour le cas où N est pair.

Exemple 2.7. Considérons à nouveau les éléments $m_1 = (e_1 e_3 \cdots e_{N-1}) (e_2 e_4 \cdots e_N)$ et $m_2 = (e_2 e_4 \cdots e_N) (e_1 e_3 \cdots e_{N-1})$ et voyons comment, dans le cas $N = 4$, ces éléments d'ordre infini se comportent sous l'homomorphisme φ . Il vient



Aucune relation dans la définition de $\mathcal{D}_N(\beta)$ ne permet de compter les boucles non contractibles. Dans les diagrammes, les éléments de l'exemple précédent sont d'ordre infini puisqu'une boucle non contractible peut toujours être ajoutée pour obtenir un élément distinct. À l'aide d'un second quotient, ce dénombrement sera permis et par la même occasion l'algèbre deviendra finie.

Définition 2.9. Soit $d_1 = \prod_{i=1}^N e_{2i} \prod_{i=1}^N e_{2i-1}$ et $d_2 = \prod_{i=1}^N e_{2i-1} \prod_{i=1}^N e_{2i}$ et soit $I_0(\alpha)$, l'idéal engendré par $d_1 - \alpha$ et $d_2 - \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ est une constante complexe. ♣

En quotientant l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$ par I_Ω et I_0 , toutes les puissances de Ω^N sont envoyées vers l'identité et il y a une relation qui permet de retirer toute boucle non contractible d'un diagramme en la remplaçant par un facteur multiplicatif α , comme pour les boucles contractibles avec le poids β . Il aurait été tentant de prendre $\alpha = \beta$; cependant, pour corriger le poids accordé aux configurations à topologie cruciforme, il faut pouvoir sélectionner dans la fonction de partition de boucles Z_B les configurations possédant des boucles non homotopes à un point (non contractibles). L'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, qui possède toute la structure désirée, peut à présent être définie. Il est clair que $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ est la structure qui héberge la matrice de transfert, c'est-à-dire que la matrice $D_N(\alpha, \beta)$ est un élément de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$.

Définition 2.10. Soit

$$\mathcal{A}_N(\alpha, \beta) := \mathcal{D}_N(\beta) / \langle \Omega^N - \text{id}, d_1 - \alpha, d_2 - \alpha \rangle. \quad \clubsuit$$

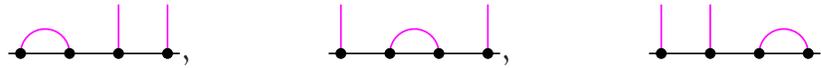
Remarquons que $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta) \cong \mathcal{J}_N(\beta)$ lorsque N est impair. Cette nouvelle algèbre est de dimension finie; le reste de cette section est consacré au calcul de sa dimension. Il faut d'abord construire et dénombrer les connectivités possibles dans une ligne de N points. Le premier résultat fait fi de la périodicité.

Lemme 2.1. Soit N , un entier positif. Le nombre de façons de relier N points disposés sur une ligne deux à deux en permettant à d points d'être reliés à l'infini par des courbes qui ne s'intersectent pas est noté Z_N^d et prend les valeurs données par

$$Z_N^d = \binom{N}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N}{\frac{N-d-2}{2}}.$$

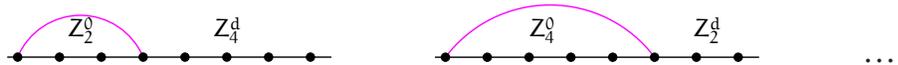
Avant d'entamer la démonstration, un exemple est donné en dénombrant manuellement un cas.

Exemple 2.8. Considérons les valeurs $N = 4$ et $d = 2$. Alors



La formule ci-haut donne $Z_4^2 = \binom{4}{1} - \binom{4}{0} = 3$, tel que prévu. Ces diagrammes partiels seront appelés des diagrammes à bulles. ♦

Démonstration. On construit une relation de récurrence et on procède ensuite par induction. Fixons N et d tels que $d \leq N$. Si le premier point est envoyé à l'infini, il reste $d - 1$ infinis à distribuer sur les $N - 1$ points restants. Les diagrammes commençant par un infini au point 1 sont donc au nombre de Z_{N-1}^{d-1} . Par ailleurs, le point 1 peut être relié à n'importe quel point pair. Les points à l'intérieur de l'arc commençant au point 1 ne peuvent être envoyés à l'infini sans croisement. Il reste ainsi d infinis à distribuer sur les points restants. Graphiquement, pour $N = 8$ et d infinis, il vient



Ainsi, il se trouve que :

$$Z_N^d = Z_{N-1}^{d-1} + \sum_{j=1}^k Z_{2j-2}^0 Z_{N-2j}^d,$$

où $k = (N - d)/2$. Passons à l'induction. La première étape est simple : il est clair que $Z_N^N = 1$ car il n'y a qu'une façon de distribuer N infinis sur N points. La formule suggérée donne le bon résultat. Par ailleurs, $Z_0^0 = 1$ par le même argument. Fixons maintenant d et N tel que $0 \leq d \leq N$ et supposons que la formule est valide $Z_N^{d'}$,

avec $N' < N$ et $d' \leq d$. Alors

$$Z_N^d = \binom{N-1}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}} + \sum_{j=1}^k \left\{ \binom{2j-2}{j-1} - \binom{2j-2}{j-2} \right\} \left\{ \binom{N-2j}{\frac{n-2j-d}{2}} - \binom{N-2j}{\frac{N-2j-d-2}{2}} \right\}$$

Si l'identité

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \frac{n-2k+1}{n+1} \binom{n+1}{k}$$

est utilisée sur le premier terme de la convolution, il vient

$$Z_N^d = \binom{N-1}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}} + \sum_{j=1}^k \frac{\binom{2j-1}{j-1}}{2j-1} \left\{ \binom{N-2j}{\frac{n-2j-d}{2}} - \binom{N-2j}{\frac{N-2j-d-2}{2}} \right\}.$$

Ces deux convolutions se trouvent directement dans le livre de Graham, Knuth et Patashnick [6]. Le résultat obtenu en utilisant les identités est

$$\begin{aligned} Z_N^d &= \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}} + \left\{ \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}} - \binom{N-1}{\frac{N-d-4}{2}} \right\} \\ &= \binom{N-1}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N-1}{\frac{N-d-4}{2}} = \binom{N}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N}{\frac{N-d-2}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. \square

Les diagrammes de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sont dessinés sur un cylindre ; le nombre de façons d'obtenir les diagrammes à bulles sur un anneau est donc calculé.

Lemme 2.2. *Le nombre de diagrammes à bulles sur un anneau de N points comportant d brins envoyés à l'infini est donné par*

$$Y_N^d = \binom{N}{\frac{N-d}{2}}.$$

Avant de démontrer cette formule, reprenons l'exemple précédent en ajoutant les nouveaux diagrammes à bulles obtenus en vertu des conditions périodiques.

Exemple 2.9. Considérons à nouveau les valeurs $N = 4$ et $d = 2$. Les diagrammes de Z_4^2 sont toujours admissibles. Il est toutefois possible de rajouter une bulle par-

tant du point 4 au point 1. Ainsi :



La formule suggérée donne bien $Y_4^2 = \binom{4}{1} = 4$. ♦

Démonstration. La méthode de preuve est identique à la dernière. La seule différence est que lorsque le point 1 est situé dans un arc, il peut se connecter à un point pair en partant des deux côtés de l'anneau. Conséquemment :



La relation de récurrence devient donc

$$Y_N^d = Z_{N-1}^{d-1} + 2 \sum_{j=1}^k Z_{2j-2}^0 Y_{N-2j}^d,$$

où $k = (N - d)/2$. On procède par induction. Il est clair que $Y_N^N = 1$. En supposant que la formule est vraie pour les d et N inférieurs, il vient

$$Y_N^d = Z_{N-1}^{d-1} + 2 \sum_{j=1}^k \frac{\binom{2j-1}{j-1}}{2j-1} \binom{N-2j}{k-j}.$$

Il s'agit encore d'une convolution qu'on trouve directement dans [6]. Le résultat final est donc

$$\begin{aligned} Y_N^d &= \left\{ \binom{N-1}{\frac{N-d}{2}} - \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}} \right\} + 2 \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}}, \\ &= \binom{N-1}{\frac{N-d}{2}} + \binom{N-1}{\frac{N-d-2}{2}}, \\ &= \binom{N}{\frac{N-d}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

Toutes les quantités nécessaires pour calculer la dimension de l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sont maintenant connues.

Proposition 2.7. *La dimension de l'algèbre est donnée par*

$$\dim \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) = \binom{N}{N/2}^2 + \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 < d \leq N}} d \cdot \binom{N}{\frac{N-d}{2}}^2.$$

Démonstration. Une connectivité de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ est construite de deux diagrammes à bulles ayant le même nombre d de brins infinis. Si deux de ces diagrammes à bulles sont choisis, les brins allant du bas vers le haut peuvent être permutés de façon cyclique, ce qui entraîne une dégénérescence de d ; ceci n'est évidemment pas le cas lorsque $d = 0$. Le nombre de brins allant de haut en bas doit être de même parité que N . Alors les résultats du lemme 2 terminent la preuve. \square

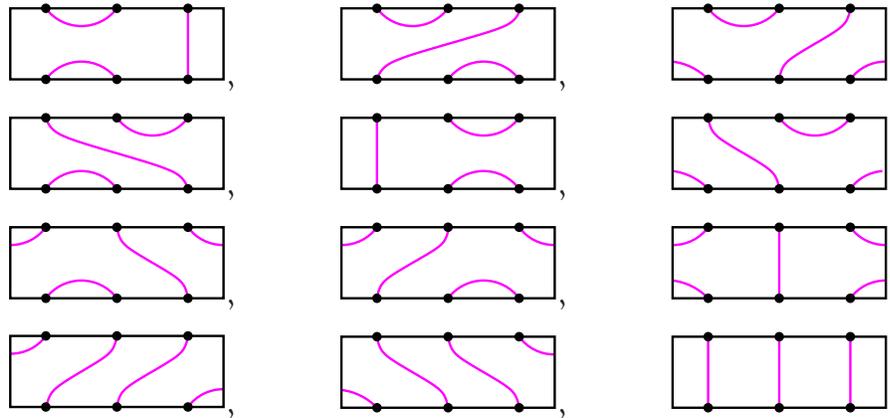
Remarque 10. Lorsque N est pair, la formule de la dimensionalité de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ peut être simplifiée quelque peu. En effet, en manipulant les coefficients binomiaux, on trouve que la dimension de l'algèbre peut être exprimée en terme du coefficient binomial central. En effet :

$$\dim \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) = \frac{4+N}{4} \binom{N}{N/2}^2. \quad \blacktriangle$$

Il convient de faire, dans un exemple, l'énumération complète des diagrammes de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ pour un N donné. Bien que pour faire le lien avec le modèle de boucles il faille prendre N pair, les diagrammes sont énumérés ici pour $N = 3$. La raison est que le nombre de diagrammes augmente très rapidement. Le premier cas d'intérêt pour N pair est $N = 4$, qui compte 72 diagrammes. On prend donc $\mathcal{A}_3(\alpha, \beta)$, qui compte 12 diagrammes.

Exemple 2.10. On fait l'énumération complète de tous les éléments de l'algèbre

de Temperley-Lieb cyclique $\mathcal{A}_3(\alpha, \beta)$. On a



◆

On a donc obtenu l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ comme un quotient de l'algèbre $\mathcal{D}_N(\beta)$. Le résultat est une algèbre finie possédant toute la structure nécessaire afin qu'on puisse voir la matrice de transfert $D_N(\alpha, \beta)$ comme un élément de cette algèbre. À présent, certaines représentations de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ seront étudiées ; elles permettront d'exprimer $D_N(\alpha, \beta)$ comme une matrice et il sera ainsi possible d'étudier concrètement le lien entre la matrice de transfert dans la description de boucles et celle dans la description de spins.

2.4 Représentations de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$

Dans ce qui précède, l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ été définie. Il a également été remarqué que la matrice de transfert de boucles D_N pouvait être écrite comme un élément de \mathcal{A}_N . Pour relier la fonction de partition de la description de boucles à celle du modèle de Potts et d'Ising, c'est-à-dire à la trace de la matrice de transfert, il faut trouver des représentations de \mathcal{A}_N . Dans cette section, deux représentations de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sont définies ; le lien entre les traces des deux matrices sera par la suite établi dans le 3^{ème} chapitre pour les deux représentations.

On rappelle tout d'abord la définition d'une représentation.

Définition 2.11. Une représentation d'une algèbre \mathcal{A} est une application $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que, pour $a, b \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} \rho(a + b) &= \rho(a) + \rho(b), & \rho(ab) &= \rho(a)\rho(b), \\ \rho(\lambda a) &= \lambda\rho(a), & \rho(\text{id}) &= \text{Id}_{n \times n}, \end{aligned}$$

où $\text{Id}_{n \times n}$ est la matrice identité. La dimension de la représentation est alors n . ♣

2.4.1 Représentation sur les N-liens

Pour construire cette première représentation ρ , la structure d'espace vectoriel est mise sur les diagrammes à bulles.

Définition 2.12. Un N-lien est un diagramme de N points disposés sur un anneau et reliés entre eux deux à deux par des courbes, appelés arcs, qui ne s'intersectent pas. Il est aussi permis à certains points d'être reliés à l'infini; ces points sont appelés des défauts. L'espace vectoriel sur \mathbb{C} des N-liens à d défauts sera noté V_N^d . Soit également V_N , l'espace vectoriel donné par la somme directe

$$V_N = \bigoplus_{\substack{0 \leq d \leq N \\ d \equiv N \pmod{2}}} V_N^d.$$

♣

Exemple 2.11. V_4^2 a été écrit précédemment, sans toutefois posséder la structure d'espace vectoriel. Il vient

$$V_4^2 = \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\}.$$

♦

Proposition 2.8. La dimension de V_N^d a déjà été obtenue au lemme 2.2 :

$$\dim V_N^d = \binom{N}{\frac{N-d}{2}}.$$

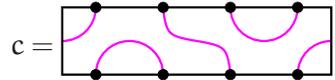
Celle de V_N est donc $\sum_{\substack{0 \leq d \leq N \\ d \equiv 0 \pmod{2}}} \dim V_N^d$. Alors $\dim V_N = 2^{N-1}$ pour N impair et $\dim V_N = 2^{N-1} + \frac{1}{2} \binom{N}{N/2}$ pour N pair.

Pour obtenir une représentation, il faut définir une action des éléments de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sur ces vecteurs. Celle-ci est définie de la façon naturelle dans ce qui suit.

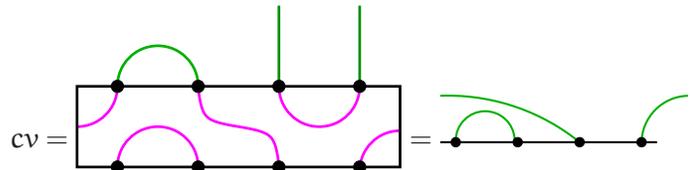
Définition 2.13. Soit $c \in \mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, une connectivité, et soit $v \in V_N$, un N -lien. L'action de c sur v est calculée comme suit :

1. Placer le N -lien v au-dessus du diagramme c et identifier les N points de la ligne supérieure de c avec les N points de v .
2. Suivre la connectivité des points du bas de c . Calculer le N -lien résultant et ajouter un poids β pour chaque boucle contractible et α pour chaque boucle non contractible. ♣

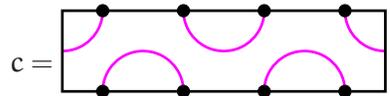
Exemple 2.12. Soit $c \in \mathcal{A}_4(\alpha, \beta)$, la connectivité



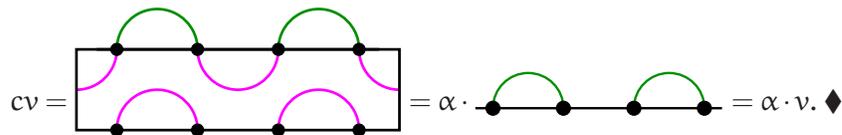
et soit $v \in V_4$, le vecteur $v = |\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\rangle$. Le produit cv est alors



Similairement, si



et $v = |\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\rangle$, alors



Remarque 11. La manière dont un défaut est relié à l'infini n'a pas à être spécifiée ;

le nombre de tours importe donc nullement. Il est aussi évident que les boucles non contractibles ne peuvent apparaître que lorsque N est pair. \blacktriangle

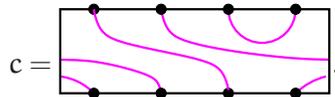
Définition 2.14. On définit $\rho : \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) \rightarrow \text{End}(V_N)$ par l'action définie ci-haut et qu'on étend linéairement. \clubsuit

Proposition 2.9. L'application $\rho : \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) \rightarrow \text{End}(V_N)$ est une représentation.

Démonstration. On doit montrer que $\rho(cd) = \rho(c)\rho(d)$ pour toutes connectivités $c, d \in \mathcal{A}_N(\beta)$. Le produit cd est également, à un facteur multiplicatif près, une connectivité. Par ailleurs, la multiplication d'une connectivité avec un N -lien résultant en un seul N -lien, il n'y a qu'un élément non nul par colonne dans $\rho(c)$, $\rho(d)$ et $\rho(cd)$. Fixons un N -lien $u \in V_N$ et considérons $v, w \in V_N$ tels que $(\rho(d))_{vu}$ et $(\rho(cd))_{wu}$ sont non nuls. Puisque les actions des connectivités entre elles et sur les N -liens sont associatives, il faut que $(\rho(cd))_{wv}$ soit également non nul. En conséquence, la seule chose à vérifier est si les facteurs α ou β dans $(\rho(cd))_{wu}$ et $(\rho(c))_{wv}(\rho(d))_{vu}$ sont les mêmes. Les deux facteurs sont bel et bien identiques car ils sont tous deux le nombre de boucles dans le produit cdu . Cette démonstration est due à Morin-Duchesne et Saint-Aubin dans [15]. \square

Nous avons donc une première représentation $\rho : \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) \rightarrow V_N$ qui utilise les N -liens. Il convient maintenant de faire un exemple d'un calcul complet de la matrice associée à un élément de l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$.

Exemple 2.13. Considérons l'élément



L'espace vectoriel V_4 est donné par la somme directe des sous-espaces à $d = 0, 2, 4$ défauts, aussi appelés secteurs. Il vient

$$\begin{aligned}
 V_4 &= \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \end{array} \right\}, \\
 &\oplus \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\} \oplus \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\}, \\
 &= V_4^0 \oplus V_4^2 \oplus V_4^4.
 \end{aligned}$$

La matrice $\rho(c)$ est obtenue en prenant le produit avec chaque vecteur de la base. Le résultat est donc

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les différents blocs de la matrice ont été marqués à l'aide de lignes pointillées. ♦

Remarque 12. L'action d'une connectivité ne peut que diminuer ou laisser constant le nombre de défauts. En conséquence, les matrices sont toutes bloc triangulaires supérieures. ▲

On va maintenant construire une autre représentation de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ en déformant chaque sous-espace V_N^d par le groupe cyclique C_d .

2.4.2 Représentation des N-liens cycliques

On remarque que dans l'espace vectoriel V_N^d , il n'y a aucune information sur la façon dont un défaut s'est propagé. Puisqu'on travaille avec des conditions aux limites périodiques, il est naturel de permettre aux défauts de subir une permutation ; pour éviter les croisements, ces permutations doivent être cycliques. À titre d'exemple, il faudrait distinguer les 4 N-liens



dans lesquels les permutations subies par les défauts sont respectivement $\{\text{id}, (1234), (13)(24), (1432)\}$. Ceci amène la prochaine définition.

Définition 2.15. Soit W_N^d l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des N-liens déformés par le groupe cyclique C_d . ♣

Il est clair que $V_N^d \subseteq W_N^d$, où l'égalité prévaut lorsque $d = 0$.

Exemple 2.14. Considérons cette fois W_4^2 ; l'espace contient tous les vecteurs de V_4^2 énumérés dans l'exemple 2.11 ainsi que leur déformation par les éléments non triviaux de C_2 . Ainsi,

$$W_4^2 = V_4^2 \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \curvearrowleft \text{---} \curvearrowleft \text{---} \curvearrowleft \text{---} \curvearrowleft \text{---} \end{array} \right\}.$$

Notons qu'on a omis de tracer complètement les défauts ayant fait le tour du cylindre afin d'alléger les diagrammes. ♦

On peut écrire l'espace W_N^d comme la somme directe des V_n^d de la manière suivante

$$W_N^d = \bigoplus_{i=1}^d \pi_i V_N^d,$$

où les π_i sont les d permutations du groupe cyclique C_d .

Remarque 13. Dans la définition de l'espace vectoriel W_N^d , les N -liens déformés sont distingués selon la permutation subie par les défauts. Cependant, à une permutation fixée peuvent correspondre deux façons de dessiner les défauts. En effet, il peut être écrit que



Bien que les deux N -liens aient l'air différent, ils correspondent tous les deux à la permutation $\pi_3 = (1432)$ du groupe cyclique C_4 . ▲

Proposition 2.10. On a

$$\dim W_N^d = d \binom{N}{\frac{N-d}{2}},$$

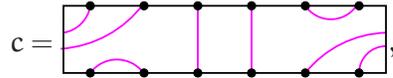
pour $d \neq 0$.

Démonstration. Il a déjà été montré que $\dim V_N^d = \binom{N}{\frac{N-d}{2}}$. W_N^d est construit par la somme directe montrée ci-haut. L'ordre du groupe cyclique C_d est d et le résultat en découle. □

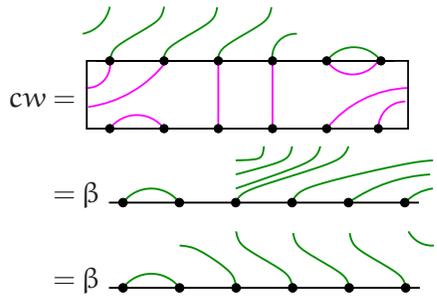
Puisque $W_N = \bigoplus_d W_N^d$, il suit que $\dim W_N = W_N^0 + \sum_d \dim W_N^d$. Les formules ne peuvent cependant pas être simplifiées davantage. L'action d'un élément $c \in$

$\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ sur un vecteur $w \in W_N^d$ est définie de manière complètement analogue à celle sur V_N , en tenant toutefois compte des permutations subies par les défauts.

Exemple 2.15. Considérons l'élément



et $w = |\langle \text{four green arcs on top} \rangle \in W_6^4$. Le produit $cw \in W_6$ est alors

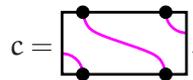


◆

Définition 2.16. On définit $\sigma : \mathcal{A}_N(\beta) \rightarrow \text{End}(W_n)$ avec l'action définie précédemment. ♣

Considérons à nouveau un exemple de calcul complet d'une matrice dans la représentation σ .

Exemple 2.16. Considérons la connectivité



qui est un élément de $\mathcal{A}_2(\alpha, \beta)$. L'espace vectoriel W_2 est donné par

$$W_2 = \text{Sp} \left\{ \text{two green arcs on top}, \text{two green arcs on bottom} \right\} \oplus \text{Sp} \left\{ \text{two vertical green lines}, \text{two green arcs on top} \right\}.$$

La matrice résultante dans cette base est

$$\sigma(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que toute puissance de Ω sera représentée par une matrice de permutation dans le secteur à $N = d$ défauts. ♦

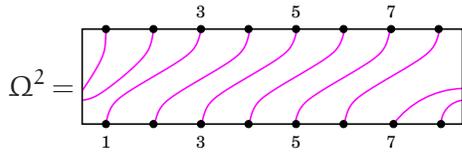
Il est clair que la preuve donnée plus haut pour ρ est également valide pour σ et il s'ensuit que σ est aussi une représentation de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$. Les deux représentations obtenues nous permettent ainsi de donner en sens à l'appellation « matrice » pour l'opérateur $D_N(\alpha, \beta)$ qu'on a défini diagrammatiquement dans le chapitre précédent. Pour faire le lien entre les deux descriptions, celle de spin et celle de boucles, il faudra mettre en relation le spectre de D_N avec le spectre de la matrice de transfert de spins. Avant d'entamer le calcul, une classification des connectivités selon une relation d'équivalence est introduite. Cette classification s'avérera cruciale dans la suite.

2.5 Classes d'équivalence de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$

La représentation $\sigma : \mathcal{A}_N(\alpha, \beta) \rightarrow \text{End}(W_N)$ permet de tenir compte des éléments de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ qui réalisent des permutations cycliques sur les défauts. La permutation réalisée et son ordre dans le groupe cyclique auquel elle appartient joueront un rôle clef dans le calcul de sa trace. Dans cette section, une façon de classer les éléments de $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$ est construite en se basant sur ces permutations.

Il faut d'abord identifier dans quel groupe cyclique une connectivité va agir. Pour le savoir, il faut connaître le nombre maximal de défauts sur lesquels cette connectivité peut réaliser une permutation. Dans le cas où la connectivité est simplement une puissance de Ω , le problème est simple : le nombre maximal de défauts est N et le groupe cyclique est C_N . Considérons, à titre d'exemple, la connectivité suivante

dans \mathcal{A}_8 :



Cette connectivité réalise la permutation $\pi = (1357)(2468) \in C_8$. Pour une connectivité possédant des arcs, la question est moins évidente. Un algorithme est donc suggéré pour trouver la permutation réalisée.

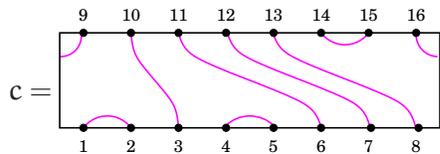
Définition 2.17. Le diagramme obtenu en appliquant l'algorithme suivant sur c est appelé le diagramme résiduel de c :

1. Si les points \bar{i} et $\overline{i+1}$ sont connectés par un arc dans le bas de la connectivité c , l'arc est recopié au-dessus de c .
2. Le diagramme est redessiné en éliminant les points \bar{i} et $\overline{i+1}$.
3. Le processus est répété jusqu'à temps qu'il n'y ait plus d'arcs, ou plus de point.



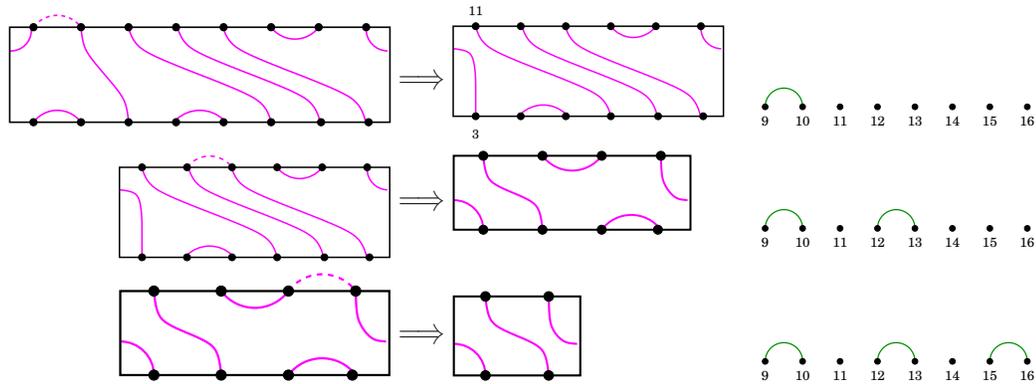
Cette procédure peut paraître à la fois étrange et complexe. En voici donc un exemple d'utilisation.

Exemple 2.17. Considérons la connectivité suivante de $\mathcal{A}_8(\alpha, \beta)$:



Appliquons le processus décrit dans la définition précédente. Dans la troisième colonne, nous gardons en mémoire les points qui ont été effacés à chaque fois qu'on

applique l'algorithme.



Ceci nous montre que la connectivité c réalisera la permutation (12) dans le groupe cyclique C_2 ; ce sera également la permutation subie par les deux défauts d'un vecteur $w \in W_{\mathbb{N}}^d$ si ces défauts sont situés sur les points 11 et 14 et si les arcs sont tels qu'indiqués. ♦

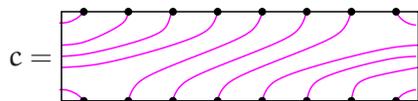
À l'aide de cette construction unique, une relation d'équivalence est définie.

Définition 2.18. Soit $\delta(c)$ le nombre de brins dans le diagramme résiduel de c . ♣

Définition 2.19. Deux diagrammes c, d sont dit équivalents si $\delta(c) = \delta(d)$ et si l'indice des sous-groupes engendrés par les diagrammes résiduels dans le groupe $C_{\delta(c)}$ est le même. ♣

Dans le groupe cyclique C_δ de générateur g , l'indice k d'un sous-groupe engendré par g^p est donné par $k = \gcd(\delta, p)$. Ainsi, à toute connectivité peut être associée la paire $(k(c), n(c))$, où $k(c)$ est le plus grand commun diviseur entre $\delta(c)$ et $p(c)$ et $n(c) = \delta(c)/k(c)$.

Exemple 2.18. La connectivité Ω^2 dans $\mathcal{A}_8(\alpha, \beta)$ est de classe $(\delta(\Omega^2), n(\Omega^2)) = (2, 4)$. La seconde connectivité de l'exemple précédent est de classe $(1, 2)$. Prenons enfin la connectivité



Le diagramme résiduel a $\delta(c) = 6$. La permutation réalisée est (14)(25) (36), ce qui correspond à la troisième puissance du générateur (123456), qui engendre le groupe cyclique C_6 . Ainsi : $k(c) = \gcd(3, 6) = 3$ et par suite $c \in (3, 2)$. ♦

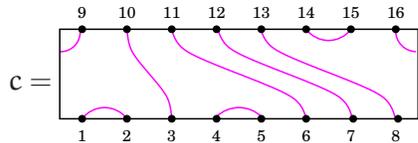
Remarque 14. Le nombre $k(c)$ correspond aussi au nombre de cycles dans la permutation. Si on considère les connectivités dont le diagramme résiduel contient six brins, les possibilités sont alors

Classe	Permutations
(1,6)	(654321), (234561)
(2,3)	(531)(642), (351)(462)
(3,2)	(14)(25)(36)
(6,1)	id.

On remarque aussi que tous les nombres seront des diviseurs de δ . ▲

Il est clair que la relation définie ci-haut est une relation d'équivalence. En effet, un élément de \mathcal{A}_N possède un unique diagramme résiduel et celui-ci appartient à une seule classe ; les classes sont disjointes.

Une autre fonction du diagramme résiduel est celle de trouver certains vecteurs propres d'une connectivité ; plus particulièrement, le diagramme résiduel permet de trouver les éléments de la base des N-liens qui sont vecteurs propres. En effet, pour être vecteur propre, un N-lien devra absolument posséder des arcs aux endroits prescrits par la construction de son diagramme résiduel. Considérons à nouveau le diagramme



Un vecteur propre de la base des N-liens doit au moins être de la forme $v = |\underbrace{\curvearrowright}_{9,10} \cdot \underbrace{\curvearrowright}_{11,12} \cdot \underbrace{\curvearrowright}_{13,14} \cdot \underbrace{\curvearrowright}_{15,16}\rangle$, tel que dicté par la construction. La permutation réalisée par le diagramme résiduel est $(12) \in C_2$. Ainsi, le vecteur $v_1 = |\underbrace{\curvearrowright}_{9,10} \downarrow \underbrace{\curvearrowright}_{11,12} \downarrow \underbrace{\curvearrowright}_{13,14} \downarrow \underbrace{\curvearrowright}_{15,16}\rangle$ est un vecteur propre de $\rho(c)$, mais pas de $\sigma(c)$, car les permutations y sont considérées. Également, les vecteurs $v_2 = |\underbrace{\curvearrowright}_{9,10} \underbrace{\curvearrowright}_{11,12} \underbrace{\curvearrowright}_{13,14} \underbrace{\curvearrowright}_{15,16}\rangle$ et $v_3 = |\overleftarrow{\curvearrowright}_{9,10} \underbrace{\curvearrowright}_{11,12} \underbrace{\curvearrowright}_{13,14} \underbrace{\curvearrowright}_{15,16}\rangle$ ne seront pas vecteurs propres de $\sigma(c)$ ni de $\rho(c)$. Si toutefois la permutation réalisée par le diagramme

résiduel est la permutation identité, alors les N -liens qui seront vecteurs propres seront tous ceux qui possèdent les arcs aux bons endroits, peu importe la connectivité des autres points.

Dans le prochain chapitre, le lien entre la trace de la matrice de transfert dans la formulation de spins et celle du modèle de boucles sera établi. En outre, des résultats qui permettent de dénombrer les vecteurs subissant telle ou telle permutation en fonction de la classe d'équivalence de la connectivité seront dérivés ; ces résultats systématiseront les réflexions ci-haut concernant les vecteurs propres.

Chapitre 3

Décomposition des traces

Dans le premier chapitre, le modèle de Potts a été décrit sous deux formes : une première à l'aide de spins et l'autre au moyen de boucles. Pour chacune d'elles, l'opérateur de transfert idoine a été défini, à savoir la matrice de transfert de spins et la matrice double-ligne. Dans la description de spins, il a été montré que la fonction de partition Z_{Potts} sur le réseau carré torique \mathcal{R} de taille $N/2 \times M$ s'écrivait comme la trace de la matrice de transfert de spins Λ^M . Dans la description de boucles, l'opérateur $D_N(\alpha, \beta)$ a été défini diagrammatiquement et il a alors été montré que pour obtenir la fonction de partition de boucles, il faut concaténer l'opérateur M fois sur lui-même et le refermer verticalement en comptant les boucles.

Le second chapitre a porté sur l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, dont la matrice de transfert double-ligne est un élément. L'étude des représentations de cette algèbre a permis de calculer une forme matricielle pour $D_N(\alpha, \beta)$.

Dans le présent chapitre, le lien entre les traces de la matrice de transfert de spins Λ^M et de la matrice double-ligne sera calculé explicitement. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de Jacobsen et Richard dans [11] ; le réseau, la matrice de transfert et les représentations utilisés sont toutefois différents.

Avant d'entreprendre ce calcul, il convient de rappeler certaines formules déjà obtenues. Dans la description de spins, la fonction de partition est donnée par

$$Z_{\text{Potts}} = \text{tr } \Lambda^M.$$

Dans la description de boucles, la fonction de partition est

$$Z_{\text{Potts}} = Z_{\text{B}}(\alpha = \beta) + \frac{Q-1}{2} Z_{\text{B}}(\alpha = 0),$$

où $Z_{\text{B}} = D_{\text{N}}^{\text{M}}(\alpha, \beta)$; l'exposant indique la concaténation et il est implicite que les diagrammes de D_{N} doivent être refermés verticalement pour compter le nombre de boucles de chaque type sur le tore.

Il est illusoire d'espérer que Z_{B} soit ici une simple trace des représentations $\rho(D_{\text{N}})$ ou $\sigma(D_{\text{N}})$. En effet, le calcul des éléments de matrice pour chaque configuration de D_{N} ne tient pas compte de la nécessité de refermer les diagrammes verticalement. Cependant, il est possible d'établir une relation exacte entre Z_{B} et la trace de D_{N} dans les représentations ρ et σ . Le résultat dépend, sans surprise, de la représentation choisie. Dans le cas de la représentation σ , la fonction de partition Z_{B} s'exprime comme une trace pondérée dans chaque secteur de défaut d se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible du groupe cyclique C_d . Pour la représentation ρ , la fonction de partition est simplement une trace pondérée.

Dans ce qui suit, le lien entre Z_{B} et la trace de D_{N} dans la représentation σ est calculé; par après, le cas de la représentation ρ est dérivé et, dans un troisième temps, les boucles non contractibles sont traitées pour recouvrer Z_{Potts} . Jusqu'à nouvel ordre, les boucles contractibles ne sont plus distinguées des boucles non contractibles. La condition $\alpha = \beta$ est donc valide.

3.1 Trace de Markov

Il a déjà été expliqué que la fonction de partition Z_{B} était obtenue de la matrice de transfert double-ligne en refermant les diagrammes verticalement et en comptant le nombre de boucles de chaque type fermées par le processus. Afin de permettre un traitement mathématique, cette procédure est formalisée au moyen d'une définition.

Définition 3.1. Soit $c \in \mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, une connectivité. Alors

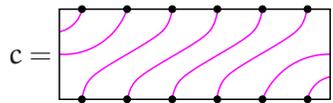
$$\tau(c) = \beta^{\#(c)},$$

où $\#(c)$ est le nombre de boucles fermées lorsque la connectivité c est repliée sur elle-même verticalement. ♣

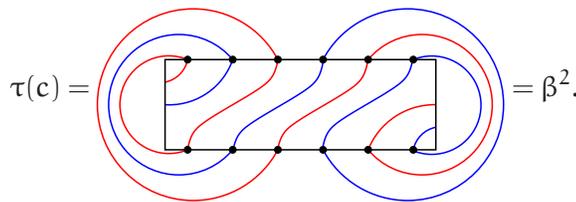
L'opération $\tau(c)$ est appelée la trace de Markov sur l'algèbre $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$. Cette appellation est due à la propriété $\tau(cd) = \tau(dc)$, valable pour tous $c, d \in \mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$, que τ a en commun avec la trace usuelle en algèbre linéaire.

Remarque 15. τ n'est pas une représentation puisque, en général, l'égalité $\tau(cd) = \tau(c)\tau(d)$ n'est pas respectée pour tous $c, d \in \mathcal{A}_N$. ▲

Exemple 3.1. Considérons la connectivité



Alors



Si les boucles contractibles et les boucles non contractibles étaient distinguées, le poids serait plutôt α^2 . ♦

La matrice double-ligne D_N est un élément de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique $\mathcal{A}_N(\alpha, \beta)$; elle peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de connectivités

$$D_N^M(\alpha, \beta) = \sum_c \alpha_c c,$$

où c dénote les connectivités de \mathcal{A}_N et où les α_c sont des coefficients complexes s'exprimant comme des polynômes en $\alpha^i \beta^j \sin^k(u) \sin^\ell(\lambda - u)$. Soit C , un élément générique de l'algèbre TL, c'est-à-dire une combinaison linéaire quelconque de connecti-

vités ; il prend la forme

$$C = \sum_c \gamma_c c.$$

Notre but est de relier $\tau(C)$ à $\rho(C)$ et $\sigma(C)$. La somme précédente sera donc scindée sur les classes d'équivalence de \mathcal{A}_N qui, tel qu'expliqué précédemment, sont étiquetées par les paires $(k(c), n(c))$ qui dépendent des diagrammes résiduels. Alors,

$$C = \sum_{k,n} C_{k,n}, \quad \text{avec} \quad C_{k,n} = \sum_{\substack{c \\ k(c)=k \\ n(c)=n}} \gamma_c c.$$

Autrement dit, $C_{k,n}$ est une combinaison linéaire de connectivités appartenant à une classe d'équivalence (k, n) fixée. La trace de Markov de C est

$$\tau(C) = \sum_{k,n} \tau(C_{k,n}), \quad \text{avec} \quad \tau(C_{k,n}) = \sum_{\substack{c \\ k(c)=k \\ n(c)=n}} \gamma_c \tau(c).$$

Remarque 16. Le bris de C en double somme $C_{k,n}$ amène naturellement la question suivante : pour un N donné, quelles sont les paires (k, n) possibles? La réponse est simple. Il faut d'abord se demander quelles sont les valeurs possibles de $\delta(c)$, c'est-à-dire les valeurs possibles du nombre de points restants dans le diagramme résiduel. Puisque le processus de construction des diagrammes résiduels élimine les points deux par deux, la seule restriction sur le nombre $\delta(c)$ est qu'il doit être de même parité que N . Ensuite, les paires (k, n) sont des paires de diviseurs de δ tels que $k \times n = \delta$. Soit $N = 6$; alors $\delta \in \{6, 4, 2, 0\}$. Pour $\delta = 6$, on a $(k, n) \in \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$. Toutes les autres possibilités peuvent être trouvées de cette manière. ▲

Pour relier $\tau(C)$ à la trace de la représentation $\sigma(C)$, il faudra utiliser certains outils de la théorie de la représentation du groupe cyclique, laquelle est analogue à l'analyse de Fourier discrète.

3.2 Représentations du groupe cyclique

Les représentations irréductibles du groupe cyclique joueront un rôle important dans la suite ; certaines caractéristiques en sont rappelées ici. Un traitement plus détaillé et des justifications peuvent être trouvées dans [12].

Il découle du lemme de Schur que toutes les représentations irréductibles du groupe cyclique C_d sont de degré 1. Ainsi, le groupe cyclique C_d possède d représentations irréductibles. Soit $g = (1, \dots, d)$, la permutation qui engendre le groupe cyclique à d éléments. Le caractère de la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible est

$$\chi_m(g^a) = e^{-\frac{2\pi i}{d} m \cdot a}.$$

Le groupe cyclique C_d a une action naturelle sur l'espace vectoriel des N -liens cycliques W_N^d . Il s'ensuit qu'une représentation de C_d sur W_N^d peut être définie.

Définition 3.2. Soit $\sigma : C_d \rightarrow \text{End}W_N^d$ définie par l'action de permutation sur les défauts. ♣

Il est clair que σ est une représentation de C_d ; il est également évident que cette représentation est réductible car son degré est toujours supérieur à 1. Dans cette représentation, la partie se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible peut être sélectionnée. Pour ce faire, il faut utiliser l'idempotent e_m , aussi appelé projecteur ; celui-ci est donné par

$$e_m = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \bar{\chi}_m(g^i) g^i, \tag{3.1}$$

où $\bar{\chi}$ dénote la conjugaison complexe. Il peut être vérifié que $e_m^2 = e_m$ et que $\sum_{m=1}^d e_m = \text{id}$. Le symbole $\sigma(e_m)$ désigne la représentation de l'idempotent sur l'espace W_N^d .

Exemple 3.2. Considérons l'espace vectoriel W_4^2 . Ses éléments sont

$$W_4^2 = \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \right\} \oplus \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \right\} \\ \oplus \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \right\} \oplus \text{Sp} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \right\}.$$

Le groupe cyclique impliqué est le groupe C_2 , qui possède deux représentations irréductibles dont les caractères sont $\chi_1(g) = -1$ et $\chi_2(g) = 1$, où $g = (12)$ la permutation qui engendre C_2 . La représentation $\sigma(g)$ est simple à calculer. En effet, en définissant

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

il vient

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix},$$

qui est une matrice de dimension 8. Les matrices de $\sigma(g)$ seront toujours des sommes directes de blocs de dimension d . Dans le cas de l'action de C_d sur l'espace W_d^d , il n'y aura alors qu'un seul bloc. Pour l'idempotent e_1 , le calcul donne

$$\begin{aligned} \sigma(e_1) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{\chi}_1(g^i) \sigma(g^i) \\ &= \frac{1}{2} [\sigma(\text{id}) - \sigma(g)] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◆

Le prochain résultat, simple mais utile, concerne l'action du groupe cyclique et

celle d'un bloc de la matrice de transfert double-ligne D_N .

Proposition 3.1. Soit $\sigma_d(D_N^M)$ le bloc sur W_N^d de la matrice de transfert double-ligne D_N^M . Alors

$$[\sigma(g^i), \sigma_d(D_N^M)] = 0,$$

où $g = (1, \dots, d)$ et $g^i \in C_d$.

Démonstration. Par définition, $\sigma_d(D_N^M) \in \text{End } W_N^d$; ainsi, l'action la plus générale du bloc est de déplacer les bulles d'un vecteur $v \in W_N^d$ et d'appliquer une permutation $\mathcal{P} \in C_d$ sur les d défauts. Or, toutes les permutations du groupe cyclique commutent entre elles et l'action de $\sigma(g^i)$ ne prend pas en compte les bulles. Il est donc clair que les deux matrices commutent. \square

Dans le chapitre 2, une relation d'équivalence sur \mathcal{A}_N basée sur le groupe cyclique a été définie. En effet, à toute permutation du groupe cyclique C_d , qui est de la forme g^a où $g = (1, \dots, d)$, est associée la paire (k, n) où $k = \text{gcd}(a, d)$ et $n = d/\text{gcd}(a, d)$. Il sera nécessaire dans ce qui suit d'avoir une formule pour la somme des caractères de la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible des éléments d'une classe donnée. Deux fonctions classiques en théorie des nombres [6] sont d'abord définies.

Définition 3.3. La fonction $\varphi(n)$ donne le totient de l'entier n , c'est-à-dire le nombre d'entiers parmi $\{0, \dots, n-1\}$ qui sont relativement premiers à n . La fonction φ est également appelée la fonction d'Euler. ♣

Définition 3.4. Soit $\mu(n)$, la fonction de Möbius, donnée par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{si } n = p_1 \cdots p_r; \\ 0, & \text{s'il existe un } p^2 \text{ divisant } n, \end{cases}$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts. ♣

Ces deux fonctions permettent d'énoncer le résultat suivant concernant les sommes de classes.

Proposition 3.2. *La somme des caractères de la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible du groupe cyclique des éléments g^i appartenant à une classe donnée $g^i \in (k, n)$ est donnée par*

$$\sum_{g \in (k, n) \subset C_d} \bar{\chi}_m(g) = \sum_{\substack{a \\ \gcd(a, d) = k}} e^{\frac{2\pi i}{d} ma} = \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon, m)}\right) \varphi(\epsilon)}{\varphi\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon, m)}\right)}, \quad (3.2)$$

où $\epsilon = d/k$.

Démonstration. L'entier k divise les entiers d et a ; il s'ensuit que $d = \epsilon \cdot k$ et $a = b \cdot k$ pour des entiers ϵ et b quelconques. En substituant ces expressions dans la somme, il vient

$$\sum_{g \in (k, n) \subset C_d} \bar{\chi}_m(g) = \sum_{\substack{b \\ \gcd(b, \epsilon) = 1}} e^{\frac{2\pi i}{\epsilon} mb}.$$

Il s'agit de la somme de Ramanujan; cette somme est classique en théorie des nombres et sa valeur est précisément celle annoncée. Une démonstration du résultat peut être trouvée dans le livre de Hardy et Wright [10]. \square

Ceci constitue l'essentiel des résultats requis concernant le groupe cyclique.

3.3 Traces modifiées

Le but de ce chapitre est de relier $\tau(C)$ à la trace de la représentation $\sigma(C)$, où C est une combinaison linéaire quelconque de connectivités. Il appert qu'il n'est pas possible de réexprimer $\tau(C)$ en termes d'une simple trace. C'est pourquoi une série de traces modifiées, en termes desquelles il sera possible d'exprimer $\tau(C)$, sera définie. Le vocabulaire introduit dans cette section est crucial pour la suite du calcul.

3.3.1 Trace dans le bloc à d défauts

La trace du secteur à d défauts de la représentation $\sigma(c)$, où c est une connectivité de \mathcal{A}_N , est d'abord définie. Le résultat à l'effet que le bloc à d défauts de $\sigma(c)$ commute avec le groupe cyclique peut être employé pour simplifier cette trace.

Définition 3.5. Soit $\text{tr}_d \sigma(c)$, la trace du bloc à d défauts de la matrice $\sigma(c)$. Puisque ce bloc commute avec le groupe cyclique C_d , il s'ensuit que

$$\text{tr}_d \sigma(c) = d \cdot \sum_{v \in V_n^d} \langle v | \sigma(c) | v \rangle, \quad d > 0.$$

♣

La matrice $\sigma(c)$ est de dimension $\dim W_N^d$. Cependant, la somme est effectuée sur les éléments diagonaux correspondant aux vecteurs de V_N^d . Dans le secteur à $d = 0$, la trace sur W_N^d coïncide avec celle sur V_N^d .

3.3.2 Trace se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation

Dans la base W_N^d , il n'est pas possible d'exprimer $\tau(C)$ simplement en termes des $\text{tr}_d \sigma(C)$. Il faut donc introduire une trace plus sophistiquée, soit la trace dans le secteur d se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible du groupe cyclique C_d .

Définition 3.6. La trace sur le sous-espace se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation irréductible du groupe cyclique C_d dans le secteur d est dénotée $\text{tr}_{d,m} \sigma(c)$. Elle s'écrit

$$\text{tr}_{d,m} \sigma(c) = d \cdot \sum_{v \in V_N^d} \langle v | \sigma(e_m) \sigma(c) | v \rangle, \quad (3.3)$$

où $\sigma(e_m)$ est le projecteur sur ce sous-espace (éq. (3.1)). ♣

Remarque 17. Les traces $\text{tr}_{d,m} \sigma(c)$ peuvent être vues comme les coefficients de Fourier de la trace tr_d . Cette interprétation ne sera toutefois pas poursuivie. ▲

La fonction de partition Z_B sera ultimement reliée aux $\text{tr}_{d,m} D_N^M(\alpha, \beta)$. Pour l'heure, il est nécessaire d'introduire deux autres types de traces.

3.3.3 P-traces et K-traces

Les $\tau(C)$ seront décomposés en termes de deux nouveaux types de traces, les P-traces et les K-traces. Dans cette sous-section, les définitions de ces traces sont données et le lien entre celles-ci est établi.

Définition 3.7. La trace modifiée dans laquelle l'état final diffère de l'état initial par une permutation P du groupe cyclique est appelée P -trace. Dans le secteur d , elle est notée $\text{tr}_{d,p}\sigma(c)$ et

$$\text{tr}_{d,p}\sigma(c) = \sum_{v \in V_{\mathbb{N}}^d} \langle v|(p)^{-1}\sigma(c)|v \rangle.$$



En accord avec cette définition, un N -lien v sera dit P -propre de $\sigma(c)$ si $\sigma(c)v = \lambda p v$, où P est une permutation du groupe cyclique et λ une puissance de β . Puisque les connectivités sont classées selon les paires (k, n) , une trace plus appropriée à cette classification peut être définie.

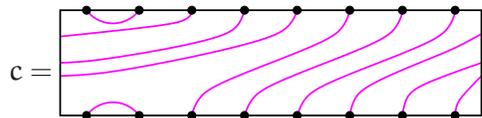
Définition 3.8. La trace modifiée dans laquelle l'état final diffère de l'état initial par une permutation de classe k est appelée K -trace. Cette trace est notée $\text{tr}_{k,n}\sigma(c)$ et se trouve dans le secteur à $d = k \cdot n$ défauts. Ainsi,

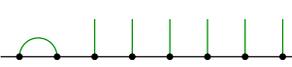
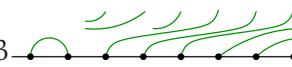
$$\text{tr}_{k,n}\sigma(c) = \sum_{p \in (k,n) \subset C_{k \cdot n}} \sum_{v \in V_{\mathbb{N}}^d} \langle v|(p)^{-1}\sigma(c)|v \rangle = \sum_{p \in (k,n) \subset C_{k \cdot n}} \text{tr}_{d,p}\sigma(c).$$



De manière similaire, un N -lien v sera dit K -propre de valeurs propres k et λ de $\sigma(c)$ si $\sigma(c)v = \lambda p v$, où p est une permutation de classe k du groupe cyclique et λ est une puissance de β . Avant de poursuivre, il convient d'illustrer par un exemple les différents types de trace qui ont été introduites.

Exemple 3.3. Soit la connectivité $c \in \mathcal{A}_8(\alpha, \beta)$



Prenons $v_1 =$ , alors $cv_1 = \beta$  et donc $cv_1 = \beta \cdot p \cdot v_1$ avec $p = (14)(25)(36)$. Le N -lien v_1 est P -propre de c avec la permutation p et $\lambda = \beta$. De même, puisque la permutation p est de classe $p \in (3,2)$

dans C_6 , on dira que v_1 est K -propre de valeurs propres $k = 3$ et $\lambda = \beta$. Si $v_2 =$ , alors $cv_2 = \beta \cdot p \cdot v_2$ avec $p = (12)$. Le vecteur v_2 est donc P -propre de c avec le p indiqué; il est aussi K -propre de c avec valeur propre $k = 1$ puisque $p \in (1, 2) \in C_2$. \blacklozenge

Pour revenir aux $\text{tr}_{d,m}\sigma(c)$ après la décomposition en $\text{tr}_{k,n}$, il faut établir le lien entre les deux objets. En substituant l'expression de l'idempotent (3.1) dans l'expression de (3.3), le lien entre la trace de (3.3) et les P -traces est directement établi. En effet,

$$\text{tr}_{d,m}\sigma(c) = \sum_{p \in C_d} \chi_m(p) \text{tr}_{d,p}\sigma(c), \quad (3.4)$$

où la sommation porte sur tous les éléments du groupe cyclique C_d . La relation d'orthogonalité des caractères se lit

$$\sum_{m=1}^d \bar{\chi}_m(p') \chi_m(p) = d \cdot \delta_{pp'}.$$

Cette relation permet d'inverser (3.4) pour trouver

$$\text{tr}_{d,p}\sigma(c) = \sum_{m=1}^d \frac{\bar{\chi}_m(p)}{d} \text{tr}_{d,m}\sigma(c).$$

En termes des K -traces, le résultat est

$$\text{tr}_{k,n}\sigma(c) = \sum_{m=1}^d \sum_{p \in (k,n) \subset C_{k \cdot n}} \frac{\bar{\chi}_m(p)}{d} \text{tr}_{d,m}\sigma(c). \quad (3.5)$$

La somme sur l'indice m est la somme sur les d représentations irréductibles du groupe cyclique C_d , où $m = 1, \dots, d$ et $d = k \cdot n$. La somme interne porte sur les éléments de C_d qui appartiennent à la classe d'équivalence (k, n) .

3.4 Décomposition de $\tau(C)$

Notre objectif est de calculer le lien entre $\tau(C)$, qui donne ultimement la fonction de partition de boucles Z_B , et les traces $\text{tr}_{d,m}\sigma(C)$. La relation la plus générale

prend la forme

$$\tau(C) = \sum_{d,m} \Theta_{d,m} \text{tr}_{d,m} \sigma(C), \quad (3.6)$$

où $C = \sum_c \gamma_c c$, une combinaison linéaire quelconque de connectivités. Notre cheminement se fera toutefois en sens inverse. Tout d'abord, une relation de la forme

$$\text{tr}_{k,n} \sigma(C) = \sum_{k',n'} F_{k,n}^{k',n'} \tau(C_{k',n'}), \quad (3.7)$$

sera recherchée. Elle devra par la suite être inversée pour obtenir la forme désirée. Une étape importante consiste à dénombrer le nombre de vecteurs de V_N^d qui sont vecteurs propres (ou K -propres) d'une connectivité de classe donnée.

3.4.1 Lemmes de dénombrement

À la fin du chapitre 2, la façon dont les diagrammes résiduels permettent d'identifier quels vecteurs de V_N subissent quelle permutation a été illustrée. Ce raisonnement peut être adapté et formalisé pour les différents types de trace.

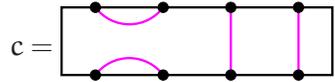
Lemme 3.1. *Le nombre de N -liens de V_N qui ont d défauts et qui sont vecteurs propres d'une connectivité de classe $c \in (k, 1)$ avec $k \geq d$ est donné par*

$$\dim V_k^d = \binom{k}{\frac{k-d}{2}}.$$

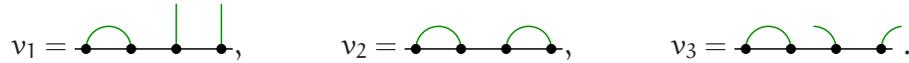
Une remarque et un exemple sont formulés avant d'entamer la démonstration.

Remarque 18. Dans le lemme 1, les connectivités de classe $(k, 1)$ sont traitées. Ceci correspond aux connectivités dont le diagramme résiduel contient k brins et réalise la permutation identité. En général, il faudra calculer la K -trace associée à une connectivité de classe k mais ici, puisque la permutation réalisée est l'identité, la k -trace coïncide avec la trace usuelle. ▲

Exemple 3.4. Soit la connectivité



dont le diagramme résiduel est simplement le diagramme identité à deux points. Le nombre de brins du diagramme résiduel est $\delta(c) = 2$ et la puissance correspondante du générateur $g = (12)$ est $p(c) = 2$; la connectivité est donc de classe $c \in (2, 1)$. Tout vecteur de V_N qui est vecteur propre de c doit posséder une arc liant les points 1 et 2. En revanche, les deux autres points peuvent être connectés de n'importe quelle manière admissible. Les vecteurs propres de la base des N-liens sont donc les suivants :



Il y a ainsi deux vecteurs propres à $d = 0$ défaut et un vecteur propre à $d = 2$ défauts. Un calcul élémentaire montre que ce sont bien les nombres prédits par la formule du lemme 1. ♦

Démonstration. Soit c , une connectivité dont le diagramme résiduel réalise la permutation identité. Pour être vecteur propre de c , un vecteur $v \in V_N$ doit posséder des arcs aux endroits prescrits par la construction de son diagramme résiduel c' . Par ailleurs, si la classe de c est $c \in (k, 1)$, alors c' compte k brins se propageant verticalement. Puisque ces k brins réalisent la permutation identité, tout patron de lien sur ces k brins sera reproduit dans le N-lien résultant. Combien y a-t-il de façons de relier k points entre eux en laissant d défauts ? Exactement $\dim V_k^d$. □

Le dernier lemme permet de dénombrer les vecteur de V_N qui sont vecteurs propres d'une connectivité dont le diagramme résiduel réalise la permutation identité. Dans le prochain lemme, les vecteurs de V_N qui sont K -propres d'une connectivité dont le diagramme résiduel réalise une permutation de classe (k, n) sont dénombrés. Ce résultat concerne donc les connectivités appartenant à la classe (k, n) , avec $n \neq 1$.

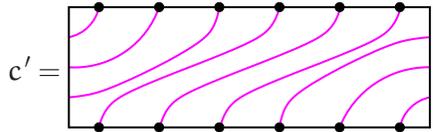
Lemme 3.2. *Le nombre de N-liens de V_N qui sont K-propres avec valeur propre k' d'une connectivité c de classe $c \in (k, n)$ avec $n \neq 1$ est*

$$\dim V_{k(c)}^{k'} = \binom{k(c)}{\frac{k(c)-k'}{2}}, \quad k' \neq 0,$$

où k' représente la classe de la permutation subie par les $d = k' \cdot n$ défauts des N-liens.

Le lemme 2 est très important et bien qu'il ait un aspect simple, sa signification ne l'est pas pour autant. Un exemple suit.

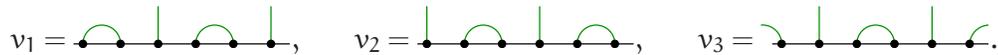
Exemple 3.5. Soit c , une connectivité dont le diagramme résiduel c' prend la forme



Alors $\delta(c) = 6$ et la permutation est $p = (14)(25)(36)$. Ainsi, $c \in (3, 2)$. Il devrait y avoir un seul N-lien qui subit la permutation de classe $k' = 3$ et qui a $d = 3 \cdot 2 = 6$ défauts. Il s'agit du N-lien



La formule du lemme 3.2 prévoit qu'il y ait trois N-liens à $d = 1 \cdot 2 = 2$ défauts qui subissent la permutation de classe $k' = 1$. Pour subir cette permutation, les vecteurs doivent présenter deux patrons identiques de trois points contenant un défaut. Ces trois vecteurs sont



Lorsque c' agit sur ces vecteurs, ils subissent tous la permutation $p = (12)$ du groupe cyclique C_2 . ♦

Démonstration. Pour être K-propre d'une connectivité c , un N-lien $v \in V_N$ doit posséder des arcs aux endroits prescrits par la construction de son diagramme résiduel

c' . Puisque $c \in (k, n)$, le diagramme c' compte $k \cdot n$ brins se propageant verticalement en réalisant une permutation de classe (k, n) dans le groupe cyclique $C_{k \cdot n}$. De plus, un diagramme résiduel c' réalisant la permutation de classe (k, n) agit par translation sur n blocs de k points. Ainsi, pour qu'un vecteur $v \in V_N$ subisse une permutation de classe k' sur ses défauts, il doit forcément présenter n patrons identiques qui comportent chacun k' défauts. Combien y-a-t-il de façons de connecter entre eux les k points d'un bloc en laissant k' défauts dans chaque bloc? Précisément $\dim V_k^{k'}$. \square

Le cas $k' = 0$ n'a pas été pris en compte dans le dernier lemme et ceci pour deux raisons. Tout d'abord, la permutation de classe $k' = 0$ n'a pas été définie; a priori, elle n'a donc pas de signification. Ensuite, le cas $k' = 0$ devrait forcément concerner les N -liens à $d = 0$ défaut, qui ne peuvent subir de permutation. La valeur de $k' = 0$ sera utilisée pour désigner le nombre de vecteurs de V_N à zéro défaut qui sont vecteurs propres (dans le sens usuel) d'une connectivité $c \in (k, n)$. L'énoncé du lemme 2 tient alors pour ces vecteurs et la preuve est similaire.

Corollaire. *Le nombre de N -liens de V_N qui ont $d = 0$ défaut et qui sont vecteurs propres d'une connectivité c de classe $c \in (k, n)$ avec $n \neq 1$ est donné par*

$$\dim V_{k(c)}^0 = \binom{k(c)}{\frac{k(c)}{2}},$$

où il est implicite que tout coefficient binomial demi-entier est nul.

3.4.2 Décompositions des $\text{tr}_{k,n} \sigma(C)$

Les résultats montrés précédemment peuvent maintenant être utilisés pour décomposer les $\text{tr}_{k,n} \sigma(C)$ en termes des $\tau(C_{k,n})$. Il faut obtenir une forme de type (3.6) en inversant une relation de la forme (3.7).

Décomposition des $\text{tr}_{k,1} \sigma(C)$

La trace $\text{tr}_{k,1} \sigma(C)$, qui correspond à la trace usuelle dans le secteur à $k \cdot 1$ défauts de la représentation $\sigma(C)$, est d'abord décomposée. Une connectivité c agissant sur

un N -lien peut uniquement diminuer ou garder constant le nombre de ses défauts. Par conséquent, la trace dans le secteur $d = k \cdot 1$ peut recevoir des contributions de connectivités de classe $k(c) \geq k$.

Dans le cas où $k \geq 2$, seules les connectivités ayant $n(c) = 1$ peuvent contribuer aux $\text{tr}_{k,1}\sigma(c)$. En effet, par définition, les connectivités ayant $n(c) \neq 1$ réalisent une permutation non triviale sur les défauts. Le lemme 3.1 permet de compter le nombre de vecteurs contribuant à la trace $\text{tr}_{k,1}\sigma(c)$. Puisque $\tau(c) = \beta^{\#(c)}$, il ne peut y avoir que $\#(c) - k(c)$ boucles qui sont fermées lorsque la connectivité de classe $(k(c), 1)$ et le vecteur propre sont concaténés. La valeur propre est ainsi $\beta^{\#(c)-k(c)}$. Ainsi, pour $k \geq 2$, la décomposition est

$$\begin{aligned} \text{tr}_{k,1}\sigma(C) &= \sum_{k' \geq k} \sum_{\substack{c \\ k(c)=k'}} \gamma_c \beta^{\#(c)-k'} \dim V_{k'}^k \\ &= \sum_{k'=k}^N \binom{k'}{\frac{k'-k}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',1}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ici, k, k' et N doivent avoir la même parité. Le cas N pair est le seul qui ait du sens du point de vue du modèle de Potts. Il est donc tenu pour acquis que N est effectivement pair.

Pour le secteur $k = 0$, la situation est différente. En effet, en plus des contributions des connectivités réalisant la permutation identité, le secteur à $d = 0$ défaut reçoit des contributions des connectivités réalisant d'autres permutations ($n(c) \neq 1$). Après usage du corollaire précédent et en répétant l'argument concernant les valeurs propres, il vient

$$\text{tr}_{0,1}\sigma(C) = \sum_{k'=0}^N \binom{k'}{\frac{k'}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',1}) + \sum_{n=2}^N \sum_{k'=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \binom{k'}{\frac{k'}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',n}), \quad (3.9)$$

où, de manière générale, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Le premier terme du membre de droite est la contribution des connectivités réalisant la permutation identité. Le second terme provient des connectivités réalisant des permutations non triviales. Dans la somme double du terme de droite, seule la borne de la somme

interne dépend de n . Soit

$$\tau(C_{k',n>1}) = \sum_n \tau(C_{k',n}),$$

où n est compatible avec N , c'est-à-dire que $k' \times n \leq N$. Ceci permet de simplifier la dernière expression pour obtenir

$$\text{tr}_{0,1}\sigma(C) = \sum_{k'=0}^N \binom{k'}{\frac{k'}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',1}) + \sum_{k'=1}^{N/2} \binom{k'}{\frac{k'}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',n>1}). \quad (3.10)$$

La décomposition des traces usuelles $\text{tr}_{k,1}\sigma(C)$ en fonction de la trace de Markov a donc été obtenue. La décomposition des autres traces est faite de manière analogue dans ce qui suit.

Décomposition des $\text{tr}_{k,n}\sigma(C)$

Les traces $\text{tr}_{k,n}\sigma(C)$ sont des traces dans le secteur à $d = k \cdot n$ défauts dans lesquelles l'état final diffère de l'état initial par une permutation de classe k du groupe cyclique C_d . Pour un n fixé, il est clair que $\text{tr}_{k,n}\sigma(C)$ peut recevoir des contributions de toutes les connectivités ayant un $n(c) = n$ et $k(c) \geq k$. Le lemme 3.2 permet de dénombrer les vecteurs qui subissent cette permutation de classe k . Par ailleurs, par le même argument que précédemment, la valeur propre doit être $\beta^{\#(c)-k(c)}$. Ainsi,

$$\text{tr}_{k,n}\sigma(C) = \sum_{k'=k}^{\lfloor N/n \rfloor} \binom{k'}{\frac{k'-k}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',n}). \quad (3.11)$$

En prenant les n compatibles avec N , il vient

$$\text{tr}_{k,n>1}\sigma(C) = \sum_{k'=k}^{N/2} \binom{k'}{\frac{k'-k}{2}} \beta^{-k'} \tau(C_{k',n>1}). \quad (3.12)$$

Les formules obtenues peuvent être traitées plus facilement lorsqu'exprimées dans le langage de l'algèbre linéaire.

Définition 3.9. Soit la matrice

$$[A]_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{\frac{i-i}{2}} \beta^{-j}, & j \geq i; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il n'y a aucune restriction sur les indices i, j , qui sont éléments de $[0, N]$. La sous-matrice dont les indices sont tous pairs est notée A^* . ♣

Avec cette définition, les résultats obtenus précédemment s'écrivent sous la forme suivante pour N pair :

$$\text{tr}_{k,1}\sigma(C) = \sum_{k'=k}^N [A^*]_{kk'} \tau(C_{k',1}), \quad \text{pour } k \geq 2, \quad (3.13)$$

$$\text{tr}_{0,1}\sigma(C) = \sum_{k'=0}^N [A^*]_{0k'} \tau(C_{k',1}) + \sum_{k'=2}^{N/2} [A]_{0,k'} \tau(C_{k',n>1}), \quad (3.14)$$

$$\text{tr}_{k,n>1}\sigma(C) = \sum_{k'=k}^{N/2} [A]_{kk'} \tau(C_{k',n>1}). \quad (3.15)$$

Il s'agit de relations similaires à (3.7). Ces relations peuvent être inversées pour obtenir la forme désirée (3.6).

3.4.3 Inversion

Les formules (3.13) à (3.15) étant exprimées en termes des matrices A et A^* , leur inversion nécessite de calculer l'inverse de ces deux matrices.

Proposition 3.3. *L'élément de matrice inverse de A est*

$$[A^{-1}]_{ij} = \begin{cases} (-1)^{(j-i)/2} \begin{bmatrix} 2j \\ i+j \end{bmatrix} \binom{(j+i)/2}{(j-i)/2} \beta^i, & j \geq i; \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases}$$

avec $[A]_{00} = 1$.

Démonstration. Il faut montrer que

$$\sum_{s=r}^m [A]_{rs} [A^{-1}]_{sm} = \delta_{rm},$$

Les indices r et m sont choisis de même parité. Tout d'abord,

$$\sum_{s=r}^m [A]_{rs} [A^{-1}]_{sm} = \sum_{s=r}^m (-1)^{(m-s)/2} \left[\frac{2m}{m+s} \right] \binom{(s+m)/2}{(m-s)/2} \binom{s}{(s-r)/2}.$$

Avec la relation de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, il vient

$$\sum_{s=r}^m [A]_{rs} [A^{-1}]_{sm} = \sum_{s=r}^m (-1)^{(m-s)/2} \left[\frac{2m}{m+s} \right] \binom{(s+m)/2}{s} \binom{s}{(s-r)/2}.$$

L'identité $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$ peut ensuite être employée ; l'expression devient, après une nouvelle utilisation de la relation de symétrie,

$$\sum_{s=r}^m [A]_{rs} [A^{-1}]_{sm} = \sum_{s=r}^m (-1)^{(m-s)/2} \left[\frac{2m}{m+s} \right] \binom{(s+m)/2}{(m+r)/2} \binom{(m+r)/2}{(s+r)/2}.$$

Sachant que $\frac{1}{r} \binom{r}{k} = \frac{1}{k} \binom{r-1}{k-1}$ et que $\binom{r-1}{k-1} = \binom{r}{k} - \binom{r-1}{k}$, il s'ensuit que

$$\frac{2m}{m+r} \sum_{s=r}^m (-1)^{(m-s)/2} \left\{ \binom{(s+m)/2}{(m+r)/2} - \binom{(s+m-2)/2}{(m+r)/2} \right\} \binom{(m+r)/2}{(s+r)/2}.$$

En posant $\ell = s - r$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{2m}{m+r} (-1)^{(m-r)/2} & \left[\sum_{\ell=0}^{m-r} (-1)^{\ell/2} \binom{(m+r)/2}{(2r+\ell)/2} \binom{(r+m+\ell)/2}{(m+r)/2} \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=0}^{m-r} (-1)^{\ell/2} \binom{(m+r)/2}{(2r+\ell)/2} \binom{(r+m+\ell-2)/2}{(m+r)/2} \right]. \end{aligned}$$

Posons $\alpha = 2r$ et $v = m + r$, l'expression devient

$$\frac{2m}{m+r} (-1)^{(m-r)/2} \left[\sum_{\ell=0}^{m-r} (-1)^{\ell/2} \binom{v/2}{(\alpha+\ell)/2} \binom{(v+\ell)/2}{v/2} + \sum_{\ell=0}^{m-r} (-1)^{\ell/2} \binom{v/2}{(\alpha+\ell)/2} \binom{(v+\ell-2)/2}{v/2} \right].$$

Puisque si s et r sont de parités différentes $[A]_{sr}$ s'annule, $\ell/2$ doit être un entier.

Soit l'équation (5.24) de [6] qui stipule que

$$\sum_k (-1)^k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l}.$$

Après l'utilisation cette identité sur chacune des deux sommations, l'expression devient

$$\sum_{s=r}^m [A]_{rs} [A^{-1}]_{sm} = \frac{2m}{m+r} (-1)^{2m} \left[\binom{(m-r)/2}{0} - \binom{(m-r-2)/2}{0} \right] = \delta_{rm}$$

ce qui donne le résultat souhaité puisqu'un coefficient binomial négatif a une valeur nulle. \square

Cette dernière proposition, valide autant pour A que pour A^* , permet l'inversion des relations (3.13) à (3.15). Il s'ensuit que

$$\tau(C_{k,1}) = \sum_{k'=k}^N [(A^*)^{-1}]_{kk'} \text{tr}_{k',1} \sigma(C), \quad k \geq 2, \quad (3.16)$$

$$\tau(C_{0,1}) = \sum_{k'=0}^N [(A^*)^{-1}]_{0,k'} \text{tr}_{k',1} \sigma(C) + \sum_{k'=2}^{N/2} [A^{-1}]_{0k'} \text{tr}_{k',n>1} \sigma(C), \quad (3.17)$$

$$\tau(C_{k,n>1}) = \sum_{k'=k}^{N/2} [A^{-1}]_{kk'} \text{tr}_{k',n>1} \sigma(C), \quad (3.18)$$

où les expressions inversées pour $\tau(C_{k,1})$ et $\tau(C_{k,n>1})$ ont été utilisées pour obtenir $\tau(C_{0,1})$. Il reste maintenant à calculer $\tau(C) = \sum_{k,n} \tau(C_{k,n})$ et à réexprimer le tout en termes des traces $\text{tr}_{d,m} \sigma(C)$. Puisque $\tau(C)$ est simplement la somme de tous les $\tau(C_{k,n})$, il faut entre autres sommer sur les colonnes de la matrice A^{-1} .

Définition 3.10. Soit

$$\gamma_k = \sum_{k'=0}^k [A^{-1}]_{k'k}.$$

La somme des éléments d'une colonne de A est égale à la somme des éléments d'une colonne de $(A^*)^{-1}$, pour autant que la parité des indices soit la même. ♣

Ceci permet de faire la synthèse des trois équations précédentes pour écrire

$$\tau(C) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^N \gamma_k \operatorname{tr}_{k,1} \sigma(C) + \sum_{k=1}^{N/2} \gamma_k \operatorname{tr}_{k,n>1} \sigma(C). \quad (3.19)$$

Une forme close pour la valeur de γ_k peut être obtenue. Ceci est fait dans la proposition qui suit.

Proposition 3.4. En prenant $\beta = 2 \cos(\lambda)$, le coefficient γ_k s'écrit

$$\gamma_k = \sum_{k'=0}^k (-1)^{(k-k')/2} \left[\frac{2k}{k+k'} \right] \binom{(k+k')/2}{(k-k')/2} \beta^{k'} = 2 \cos(k\lambda).$$

Démonstration. Les parités de k et k' doivent être identiques pour que les coefficients binomiaux soient non nuls. Supposons alors que k et k' soient pairs. En posant $k = 2m$ et $k' = 2\ell$, il vient

$$\gamma_k = 2 \sum_{\ell'=0}^m (-1)^{m-\ell} \left[\frac{m}{m+\ell} \right] \binom{m+\ell}{2\ell} (2 \cos(\lambda))^{2\ell},$$

avec $m = k/2$. Cette dernière somme peut être trouvée intégralement (identité 3.22) dans les tables d'identités combinatoires de H. W. Gould [5]. Elle prend la valeur $\cos(2m\lambda)$. Le résultat est le même si on choisit k et k' impairs. \square

L'expression de $\tau(C)$ peut maintenant être réécrite en termes des traces $\operatorname{tr}_{d,m} \sigma(C)$. Si la formule de la proposition (3.4) est insérée dans le résultat (3.19), il vient

$$\tau(C) = \operatorname{tr}_{0,n} \sigma(C) + 2 \left(\sum_{\substack{k=2 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^N \cos(k\lambda) \operatorname{tr}_{k,1} \sigma(C) + \sum_{k=1}^{N/2} \cos(k\lambda) \operatorname{tr}_{k,n>1} \sigma(C) \right).$$

L'équation (3.5) peut maintenant être substituée afin de remplacer les $\text{tr}_{k,n}$; il faut noter que le nombre k doit être un diviseur du nombre de défauts. L'expression peut donc être réécrite comme

$$\tau(C) = \text{tr}_0 \sigma(C) + \sum_{d=2,4,\dots}^N \sum_{m=1}^d \sum_{k|d} 2 \frac{\cos(k\lambda)}{d} \sum_{p \in (k,n) \subset C_d} \bar{\chi}_m(p)$$

Le résultat de la somme de Ramanujan peut maintenant être utilisé. En insérant (3.2), il vient

$$\tau(C) = \sum_{d=0,2,\dots}^N \sum_{m=1}^d \Theta_{d,m}(\lambda) \text{tr}_{d,m} \sigma(C), \quad (3.20)$$

où

$$\Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \sum_{k|d} \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\text{gcd}(\epsilon,m)}\right) \varphi(\epsilon)}{d \times \varphi\left(\frac{\epsilon}{\text{gcd}(\epsilon,m)}\right)} \cos(k\lambda), \quad (3.21)$$

et où $\Theta_{0,0} \equiv 1$ et $\epsilon = d/k$. Il s'agit du lien recherché entre la trace de Markov d'une combinaison linéaire de connectivités et sa représentation matricielle σ .

3.5 Modèle de boucles et traces

Dans cette section, le lien entre la fonction de partition Z_B et les traces de la matrice de transfert de boucles $D_N(\alpha, \beta)$ dans les représentations σ et ρ est explicité. La fonction de partition de boucles a été définie au premier chapitre comme

$$\begin{aligned} Z_B &= \sum_{\mathcal{G}} v_J^{N_J} v_K^{N_K} Q^{N_C} \\ &= \kappa \sum_{\mathcal{G}} \beta^{\#\mathcal{G}} \sin^{N_J}(\lambda - u) \sin^{NM - N_J}(u) \sin^{N_K}(u) \sin^{NM - N_K}(\lambda - u), \end{aligned}$$

où $\kappa = Q^{N_s/2} \{\sin(\lambda - u) \sin(u)\}^{-NM}$. La somme $\sum_{\mathcal{G}}$ est la somme sur toutes les configurations possibles du réseau dual \mathcal{R}' et $\beta^{\#\mathcal{G}}$ indique le poids à attribuer à chaque boucle fermée sur le tore. La matrice de transfert double-ligne $D_N^M(\alpha, \beta)$ est de la forme $\sum_c \alpha_c c$, où la somme est faite sur l'ensemble des connectivités de l'algèbre \mathcal{A}_N et où les coefficients contiennent les poids $\sin(u) \sin(\lambda - u)$ associés au nombre de liens et les poids $\alpha\beta$ dûs aux boucles qui apparaissent sur le réseau. Il est donc

clair que, à un facteur κ près,

$$Z_B = \tau(D_N^M(\beta, \beta)),$$

où N doit être pair pour pouvoir faire le lien avec le modèle de Potts.

3.5.1 Représentation σ

Dans la représentation σ de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique $\mathcal{A}_N(\beta, \beta)$, les résultats de ce chapitre permettent d'écrire

$$Z_B = \sum_{d=0,2,\dots}^N \sum_{m=1}^d \Theta_{d,m} \text{tr}_{d,m} \sigma(D_N^M(\beta, \beta)),$$

avec

$$\Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \sum_{k|d} \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right) \varphi(\epsilon)}{d \times \varphi\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right)} \cos(k\lambda),$$

et où $\Theta_{0,0} = 1$ et $\epsilon = d/k$.

3.5.2 Représentation ρ

Le résultat pour la représentation ρ peut aussi être calculé. Cette représentation ne possède pas la liberté sur les permutations du groupe cyclique, ce qui aurait rendu impossible l'inversion des relations dans la décomposition de $\tau(C)$; les résultats de la représentation σ peuvent cependant être utilisés pour déduire le poids à donner à chaque secteur pour la représentation ρ . Puisque dans cette représentation toutes les permutations du groupe cyclique agissent comme l'identité, il faut sommer dans chaque secteur sur toutes les représentations irréductibles possibles. Le résultat est donné dans la proposition suivante.

Proposition 3.5. *La somme sur les représentations irréductibles dans le secteur à d défauts est*

$$\sum_m \Theta_{d,m} = 2 \sum_{m=1}^d \sum_{k|d} \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right) \varphi(\epsilon)}{d \times \varphi\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right)} \cos(k\lambda) = 2 \cos(d\lambda),$$

où $\epsilon = d/k$ et $d > 0$.

Démonstration. Sommer sur $k|d$ est équivalent à sommer sur $\epsilon|d$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_m \Theta_{d,m}(\lambda) &= 2 \sum_{m=1}^d \sum_{\epsilon|d} \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right) \varphi(\epsilon)}{d \times \varphi\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right)} \cos\left(\frac{d \cdot \lambda}{\epsilon}\right), \\ &= 2 \sum_{\epsilon|d} \frac{\cos(d\lambda/\epsilon)}{d} \sum_{m=1}^d \frac{\mu\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right) \varphi(\epsilon)}{\varphi\left(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}\right)}. \end{aligned}$$

En retournant dans la formulation de la somme de Ramanujan, il vient

$$\sum_m \Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \sum_{\epsilon|d} \frac{\cos(d\lambda/\epsilon)}{d} \sum_{m=1}^d \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,\epsilon)=1}}^{\epsilon} e^{\frac{2\pi i}{\epsilon} am}.$$

En inversant les sommes internes et en multipliant par le nombre de « tours » de l'exponentielle, l'expression devient

$$\sum_m \Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \sum_{\epsilon|d} \frac{\cos(d\lambda/\epsilon)}{d} \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,\epsilon)=1}}^{\epsilon} \frac{d}{\epsilon} \sum_{m=1}^{\epsilon} e^{\frac{2\pi i}{\epsilon} am}.$$

Le dernier terme est une somme géométrique ; il faut cependant distinguer le cas où $e^{2\pi i a/\epsilon} = 1$; il vient alors

$$\sum_m \Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \cos(d\lambda) + 2 \sum_{\substack{\epsilon|d \\ \epsilon \neq 1}} \cos(d\lambda/\epsilon) \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,\epsilon)=1}}^{\epsilon} \frac{\sin(a\pi)}{\epsilon \sin(a\pi/\epsilon)} e^{ia(1+\epsilon)\pi/\epsilon}.$$

Or, le facteur $\sin(a\pi)$ est toujours nul ; il s'ensuit que

$$\sum_m \Theta_{d,m}(\lambda) = 2 \cos(d\lambda).$$

□

Dans le cas où $d = 0$, la valeur du coefficient n'a pas à être changée puisque les représentations ρ et σ coïncident dans ce secteur. Conséquemment, la fonction de partition de boucles en termes de la représentation ρ de la matrice de transfert

s'écrit

$$Z_B = \sum_{d=0,2,\dots}^N \Delta_d \text{tr}_d \rho(D_N^M(\beta, \beta)),$$

où $\Delta_d(\lambda) = 2 \cos(d\lambda)$ pour $d > 0$, $\Delta_0(\lambda) = 1$ et où $\text{tr}_d \rho(\cdot)$ est la trace usuelle du secteur à d défauts.

3.6 Lien avec le modèle de Potts

Le but ce mémoire était de montrer le lien entre la matrice de transfert de boucles et celle de spins, qui décrit le modèle de Potts. Dans le chapitre 1, il a été montré que pour obtenir la fonction de partition du modèle de Potts Z_{Potts} à partir de la fonction de partition de boucles Z_B , il fallait apporter une correction dû au poids erroné donné aux graphes à topologie en croix. Il a également été expliqué que ces graphes pouvaient être sélectionnés en donnant le poids $\alpha = 0$ aux boucles non homotopes à un point (aussi qualifiées de non contractibles). Dans cette courte section, les boucles non contractibles seront traitées pour donner la fonction de partition Z_{Potts} en termes de la trace de $D_N^M(\alpha, \beta)$ dans les deux représentations.

Retournons aux décompositions élémentaires (3.8) à (3.10). Il a été établi que pour une connectivité $c \in (k, n)$, il fallait ajouter le poids β^{-k} aux facteurs contribuant à la trace. S'il ne peut y avoir que $\#(c) - k(c)$ boucles fermées lors de la concaténation de c avec un vecteur propre (ou K -propre), alors $k(c)$ est également le nombre de boucles non contractibles fermées lorsqu'on replie le diagramme c verticalement sur lui-même. Ainsi, le facteur $\beta = 2 \cos(\lambda)$ apparaissant dans les coefficients $\Theta_{d,m}(\lambda)$ et $\Delta_d(\lambda)$ est dû à des boucles non contractibles.

Par ailleurs, les boucles non contractibles apparaissant sur le réseau peuvent être prises en compte dans la matrice double-ligne $D_N^M(\alpha, \beta)$. En conséquence, la sélection des configurations possédant la topologie cruciforme se fait en prenant $\lambda = \pi/2$ et $\alpha = 0$. Dans la représentation σ , il est donc possible d'exprimer, à un facteur multiplicatif près, la fonction de partition du modèle de Potts critique avec conditions aux limites toroïdales en termes des pseudo-traces de la matrice de

transfert de boucles $D_N^M(\alpha, \beta)$ sur le réseau \mathcal{R}' comme

$$Z_{\text{Potts}} = \text{tr } \Lambda^M = \sum_{d=0,2,\dots}^N \sum_{m=1}^d \Theta_{d,m}(\lambda) \text{tr}_{d,m} \sigma(D_N^M(\beta, \beta)) + \frac{(Q-1)}{2} \sum_{d=0,2,\dots}^N \sum_{m=1}^d \Theta_{d,m}(\pi/2) \text{tr}_{d,m} \sigma(D_N^M(0, \beta)). \quad (3.22)$$

Par ailleurs, dans la représentation ρ , l'expression trouvée est

$$Z_{\text{Potts}} = \text{tr } \Lambda^M = \sum_{d=0,2,\dots}^N \Delta_d(\lambda) \text{tr}_d \rho(D_N^M(\beta, \beta)) + \frac{(Q-1)}{2} \sum_{d=0,2,\dots}^N \Delta_d(\pi/2) \text{tr}_d \rho(D_N^M(0, \beta)). \quad (3.23)$$

Les poids à donner à chaque secteur sont

$$\Theta_{d,m}(\lambda) = \begin{cases} 1 & d = m = 0; \\ 2 \sum_{\epsilon|d} \frac{\mu(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)}) \varphi(\epsilon)}{d \times \varphi(\frac{\epsilon}{\gcd(\epsilon,m)})} \cos\left(\frac{d\lambda}{\epsilon}\right) & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$\Delta_d(\lambda) = \begin{cases} 1 & d = 0; \\ 2 \cos(d\lambda) & d = 2, 4, \dots, N. \end{cases} \quad (3.25)$$

Ces résultats ont été vérifiés numériquement dans le cas du modèle d'Ising ($\lambda = \pi/4$) pour les valeurs $N = 4, 6, 8, 10$. Pour ce faire, la matrice de transfert $D_N^M(\alpha, \beta)$ a été programmée dans les représentations ρ et σ et les traces obtenues ont été comparées avec les valeurs propres de la matrice de transfert de spins Λ^M . L'exemple qui suit illustre, pour $N = 4$, les résultats numériques avec la représentation ρ .

Exemple 3.6. Soit le modèle d'Ising critique isotrope avec $N = 4$ et $M = 1$. Les valeurs des différents paramètres sont donc

$$Q = 2, \quad \lambda = \pi/4, \quad u = \pi/8, \quad \beta = \sqrt{2}.$$

Pour cette valeur de N , la matrice de transfert de spins a une dimension $2^{N/2} \times$

$2^{N/2} = 4$. Les valeurs propres de la matrice de transfert de spins Λ ont été calculées dans ce cas au chapitre 1 ; les résultats sont

Valeurs propres	Λ
λ_1^+	$8(3 + 2\sqrt{2})$
λ_2^+	$8(3 - 2\sqrt{2})$
λ_1^-	32
λ_2^-	0

TABLE 3.1 – Valeurs propres de Λ pour $N = 4$

Pour la matrice de transfert de boucles $D_4(\alpha, \beta)$, les valeurs propres avec $\alpha = \beta$ et $\alpha = 0$ sont données dans le tableau ci-contre. Les deuxième et quatrième colonnes correspondent aux valeurs propres pondérées par les facteurs $\Delta_d(\lambda)$ avec le λ approprié. Les valeurs propres dans le cas $\alpha = 0$ sont ici déjà multipliées par le facteur $(Q - 1)/2 = 1/2$.

Valeurs propres $\lambda_i^{(d)}$	$D_4(\alpha, \beta)$ $\alpha = \beta = \sqrt{2}$	$W(\lambda)D_4(\alpha, \beta)$ $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ $\lambda = \pi/4$	$(\frac{1}{2})D_4(\alpha, \beta)$ $\alpha = 0, \beta = \sqrt{2}$	$(\frac{1}{2})W(\lambda)D_4(\alpha, \beta)$ $\alpha = 0, \beta = \sqrt{2}$ $\lambda = \pi/2$
$\lambda_1^{(0)}$	$8(3 + 2\sqrt{2})$	$8(3 + 2\sqrt{2})$	16	16
$\lambda_2^{(0)}$	$(968 - 672\sqrt{2})$	$(968 - 672\sqrt{2})$	16	16
$\lambda_3^{(0)}$	$8(3 - 2\sqrt{2})$	$8(3 - 2\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$
$\lambda_4^{(0)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$
$\lambda_5^{(0)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	0	0
$\lambda_6^{(0)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	0	0
$\lambda_1^{(2)}$	$(968 - 672\sqrt{2})$	0	$(1/2)(968 - 672\sqrt{2})$	$-(968 - 672\sqrt{2})$
$\lambda_2^{(2)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	0	$(1/2)(136 - 96\sqrt{2})$	$-(136 - 96\sqrt{2})$
$\lambda_3^{(2)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	0	$(1/2)(136 - 96\sqrt{2})$	$-(136 - 96\sqrt{2})$
$\lambda_4^{(2)}$	$(136 - 96\sqrt{2})$	0	$(1/2)(136 - 96\sqrt{2})$	$-(136 - 96\sqrt{2})$
$\lambda_1^{(4)}$	$2(136 - 96\sqrt{2})$	$-4(136 - 96\sqrt{2})$	$(136 - 96\sqrt{2})$	$2(136 - 96\sqrt{2})$

TABLE 3.2 – Tableau des valeurs propres de $D_N(\alpha, \beta)$ et des poids associés

Si les colonnes 2 et 4 sont additionnées, on constate que seules les valeurs propres communes avec Λ survivent, et donc l'égalité des traces est vérifiée. \blacklozenge

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce mémoire, le lien entre les spectres de la matrice de transfert Λ de la description en termes de spins du modèle de Potts critique et la matrice de transfert double-ligne $D_N(\alpha, \beta)$ de la description de boucles a été explicité. Le lien a été établi dans deux représentations de l'algèbre de Temperley–Lieb cyclique, dont la matrice double-ligne est un élément. Dans la représentation des N -liens cyclique σ , il a été montré que la trace de la matrice de transfert de spins $\text{tr}\Lambda$ était égale à la trace modifiée $\text{tr}_{d,m}\sigma(D_N(\alpha, \beta))$ de la matrice de transfert double-ligne, où $\text{tr}_{d,m}$ est une trace dans le secteur à d défauts se transformant selon la $m^{\text{ième}}$ représentation du groupe cyclique. Les poids $\Theta_{d,m}$ attribués à chaque secteur de cette représentation sont donnés en termes des fonctions d'Euler et de Möbius. Il a également été montré qu'une correction devait être apportée pour tenir compte des boucles non contractibles. Le même travail a été fait dans le cas de la représentation ρ sur les N -liens. Le résultat obtenu a alors été simplifié à une simple trace pondérée par des coefficients simples ; ce résultat est une simplification notable des résultats de Jacobsen et Richard dans [11].

Il est remarquable que les secteurs $+$ et $-$ de la matrice de transfert Λ soient également scindés dans la matrice de transfert de boucles. En effet, les valeurs propres du secteur $-$ se retrouvent intégralement dans le spectre de $D_N(0, \beta)$, avec le poids des boucles non contractibles mis à zéro, alors que les valeurs propres du secteur

+ se retrouvent intégralement dans le spectre de $D_N(\beta, \beta)$. Il serait intéressant, dans le prolongement de ce travail, de chercher une explication mathématique de ce phénomène. Il faudrait pour ce faire calculer un opérateur analogue à l'inversion de spin dans la formulation de boucles.

Une autre piste intéressante est celle qui a été poursuivie par Saint-Aubin et Morin-Duchesne dans [15]. Dans cet article, les auteurs étudient la localisation des blocs de Jordan dans la matrice double-ligne avec conditions aux limites cylindriques. Le cas des conditions aux limites toroïdales représente toutefois un défi de taille puisque certains outils utiles, notamment le projecteur de Wenzl–Jones, ne sont pas disponibles pour ces conditions.

Bibliographie

- [1] Louis-Pierre Arguin. Homotopie de amas de Fortuin-Kasteleyn pour le modèle de potts sur le tore. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2002.
- [2] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [3] P. di Francesco, H. Saleur, et J.B. Zuber. Relations between the coulomb gas picture and conformal invariance of two-dimensional critical models. *Journal of Statistical Physics*, 49(1-2) :57–79, mars 1987.
- [4] P. Etingof. *Introduction to representation theory*. M.I.T, 2011.
- [5] H.W. Gould. *Combinatorial identities III*, 2010. Manuscrits de H.W. Gould.
- [6] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Mathématiques concrètes*. Vuibert, 2003.
- [7] R.M. Green. On representations of affine Temperley-Lieb algebras I. *J. Algebra*, 60 :498–517, 1997.
- [8] R.M. Green et K. Erdmann. On representations of affine Temperley-Lieb algebras II. *J. Algebra*, 1998.
- [9] R.M. Green et C.K. Fan. On the affine Temperley–Lieb algebras. *J. Algebra*, juin 1997.
- [10] G.H. Hardy et E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1980.
- [11] J.L. Jacobsen et J.-F. Richard. Eigenvalue amplitudes of the Potts model on a torus. *Nuclear Physics B*, 769 :256–274, août 2007.

- [12] G. James et M. Liebeck. *Representations and characters of groups*. Cambridge University Press, 2001.
- [13] V.F.R. Jones. A quotient of the affine Hecke algebra in the Brauer algebra. *L'enseignement Mathématique*, (40) : 313-344, 1994.
- [14] Louis H. Kauffman. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26(3) :395–407, septembre 1987.
- [15] Alexi Morin-Duchesne et Yvan Saint-Aubin. The Jordan structure of two dimensional loop models. *Journal of Statistical Mechanics : theory and experiment*, 2011(04) :1–55, avril 2011.
- [16] David L. O'Brien, Paul A. Pearce, et S. Ole Warnaar. Finitized conformal spectrum of the Ising model on the cylinder and torus. *Physica A*, 228(1-4) :63–77, juin 1996.
- [17] Paul A. Pearce, David L. O'Brien, et R.E. Behrend. Interaction round-a-face models with fixed boundary conditions : the abf fusion hierarchy. *Journal of Statistical Physics*, 84(1) :1–48, juillet 1996.
- [18] Paul A. Pearce, J.B. Zuber, et Jorgen Rasmussen. Logarithmic minimal models. *Journal of Statistical Mechanics : theory and experiment*, 2006(11) :1–40, novembre 2006.
- [19] H. Saleur et N. Read. Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions. *Nuclear Physics B*, 613 :409, juin 2001.
- [20] N. Temperley et E. Lieb. Relations between the percolation and colouring problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the percolation problem. dans *Proceedings of the Royal Societies A*, volume 322, pages 251–280, avril 1971.