Université de Montréal

Universalité, variables complexes et réarrangement

par
Jérôme-Melville Giguère

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

février, 2011

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Universalité, variables complexes et réarrangement

présenté par:

Jérôme-Melville Giguère

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

André Giroux,	président-rapporteur
Richard Fournier,	directeur de recherche
Paul M. Gauthier,	membre du jury

Mémoire accepté le: 22 mars 2011

RÉSUMÉ

Nous allons exposer dans ce mémoire divers résultats sur l'universalité en analyse complexe. Nous énoncerons d'abord des résultats généraux sur les séries universelles, puis sur un type d'universalité dû à Fournier et Nestoridis qui établit un lien nouveau entre l'universalité et la non-normalité d'une famille de fonctions. Par la suite, nous introduirons un type différent de séries universelles obtenues en réarrangeant les termes de séries arbitraires. Nous prouverons dans ce mémoire la généricité algébrique de ce type de séries universelles pour tout espace de Banach et la généricité topologique dans les espaces de dimension finie. Aussi, nous démontrerons que pour toute série universelle par réarrangement il existe un réarrangement de ses termes pour lequel cette série devient universelle au sens usuel.

Mots clés: Universalité, réarrangement, séries universelles, lemme de Zalcman.

ABSTRACT

This Master's thesis mainly concerns universality in complex analysis. First, we shall summarize general results on universal series and on a new type of universality introduced by Fournier and Nestoridis. Then, we shall introduce a new kind of universal series which are obtained by rearranging terms of arbitrary series. We will prove the algebraic genericity of these series for any Banach space and the topological genericity for finite dimensional spaces. Also, we will demonstrate that for any universal series in this sense, there exists a rearrangement of its terms for which it becomes universal in the usual sense.

Keywords: Universality, rearrangement, universal series, Zalcman's Lemma.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier Richard Fournier pour ses judicieux conseils et sa grande générosité. Il a toujours été là pour m'épauler et je lui en suis grandement redevable.

Aussi, je voudrais remercier ma famille, ainsi que Patricia et Cindy pour leur précieux et incommensurable soutien.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Il est apparu au début du 20e siècle que certaines séries de puissance avaient un comportement plutôt imprévu. En effet, il est possible d'associer à toute fonction indéfiniment dérivable sur [-1,1] une série de puissance en 0. Cette série peut bien entendu converger vers cette fonction si elle est analytique. Dans le cas contraire, cette série est divergente ou ne converge pas vers la fonction de départ. Fekete a démontré l'existence d'une série de puissance formelle f dont les sommes partielles divergent de la pire façon possible : la suite des sommes partielles de cette série n'est pas seulement divergente, elle admet comme point d'accumulation toute fonction continue g avec $g(0) = f(0)$ sur tout compact n'intersectant pas 0. En fait, on peut trouver pour toute série de puissance une fonction f indéfiniment dérivable sur [-1,1] pour laquelle cette série de puissance est en fait la série de Taylor de f au point 0. Cette série de puissance (ou une fonction f associé à cette série) est le premier exemple connu d'universalité : à partir d'un seul objet, on peut à l'aide de transformations fixées (ici, les sommes partielles de sa série de Taylor) approximer tous les éléments d'un espace donné.

De nombreux autres exemples d'universalité ont par la suite été découverts. On peut par exemple associer à toute fonction indéfiniment dérivable sur [-1,1], la suite de ses dérivées de différents ordres. Tout comme pour le cas précédent, il a été démontré par Maclane [14] en 1952 qu'il existe une fonction f pour laquelle la suite de ses dérivées est dense dans $C[-1,1]$; c'est-à-dire que toute fonction continue sur [-1,1] peut être obtenue comme limite d'une suite de dérivées d'ordre croissant de f. En fait, le terme d'universalité est dû à Marcinkiewicz [15] qui démontra en 1935 l'existence d'une fonction universelle où l'approximation est faite par des quotients différentiels. Marcinkiewicz a prouvé pour toute suite de nombres réels $\{h_n\}$ avec $h_n \to 0$ l'existence d'une telle fonction ; c'est-à-dire l'existence d'une fonction $f \in C[0,1]$ telle que pour toute fonction g

mesurable sur l'intervalle [0,1], il existe une sous-suite $\{h_{n_k}\}$ pour laquelle

$$\frac{f(x+h_{n_k})-f(x)}{h_{n_k}} \to g(x) \quad \text{presque partout.}$$

L'un des exemples les plus connus d'universalité est celui obtenu par translation. Birkhoff [4] a montré qu'il existait une fonction entière f dont les translatées permettent d'approximer uniformément sur les compacts toute fonction entière. En fait, la fonction que Birkhoff a obtenue est universelle par rapport à la suite de translation $q_n(z) = z+n$; c'est-à-dire, que pour toute fonction g entière il existe une suite n_k telle que $f(z+n_k)$ converge vers la fonction g uniformément sur les compacts. De telles fonctions sont dites hypercycliques. Duyos-Ruiz [7] a démontré en 1984 que les fonctions entières ayant cette propriété d'universalité sont topologiquement génériques. Tout comme pour les cas d'universalité précédents, la preuve de l'existence de fonctions universelles par translation ne permettait pas d'exhiber un exemple concret de fonction ayant cette propriété. Voronin a remédié à ce problème en démontrant que la fonction zêta de Riemann était, dans un certain sens, universelle par translation [21]. En effet, il est possible d'approximer toutes les fonctions continues sur le disque de rayon $\frac{1}{4}$ centré au point $z_0 = \frac{3}{4}$ et holomorphes à l'intérieur de ce disque, par des translations de la fonction zêta en autant que la fonction continue n'ait pas de zéro sur ce disque.

En fait, ce problème est intimement relié à la conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction zêta. Les translations sont ici de la forme $q_t(z) = z + \frac{3}{4} + it$ et l'image par ces translations du disque décrit précédemment reste dans la bande $\frac{1}{2} < Re(z) < 1$. Puisque les fonctions constantes sur ce disque peuvent être approximées par des translations de la fonction zeta, on peut utiliser un argument de diagonalisation pour montrer qu'il en est de même pour la fonction identiquement nulle. L'existence d'une fonction holomorphe possédant un zéro isolé et pouvant être approximée par ces translations de la fonction zêta contredirait cependant l'hypothèse de Riemann [18]. Il a été démontré que d'autres fonctions étaient universelles par translations et qu'il était possible d'approximer avec celles-ci des fonctions s'annulant sur le domaine d'approximation. Nous mentionnerons comme exemples la dérivée de la fonction zêta et la fonction $\log(\zeta)$ [9].

L'exemple de Birkhoff montre qu'il existe beaucoup de fonctions entières f ayant un comportement chaotique au voisinage de l'infini : il est possible d'obtenir dans tout voisinage de l'infini et pour toute fonction holomorphe, un compact sur lequel la fonction f est aussi proche que l'on veut de cette fonction. En compactifiant le plan complexe, le point ∞ est en fait la frontière du domaine de définition de f. Topologiquement parlant, la majorité des fonctions entières ont donc un comportement chaotique lorsqu'on s'approche de la frontière. Ce fait n'est pas restreint au cas des fonctions entières. Luh a démontré en 1988 l'existence et la généricité topologique de fonctions holomorphes ayant un comportement chaotique au voisinage de tous points de la frontière pour les domaines Ω simplement connexes. Ces fonctions, qu'il a nommées monstres holomorphes (*holomorphic monsters*), permettent d'approximer toutes fonctions holomorphes sur un compact de complément connexe en s'approchant d'un point quelconque de la frontière de Ω.

Théorème 1 (Luh [13])**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert avec $\Omega \neq \mathbb{C}$ dont les composantes sont simplement connexes. Alors, il existe une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que*

1. *Pour tout point $\zeta \in \partial\Omega$, pour tout compact K de complément connexe et toute fonction g continue sur K et analytique sur l'intérieur de K, il existe une suite de transformations linéaires $q_n(z) = a_n z + b_n$ pour laquelle $q_n(K) \subset \Omega$, $\sup_{z\in K} |q_n(z) - \zeta| \to 0$ et $f(q_n(z)) \to g(z)$ uniformément sur K.*
2. *Les dérivées et anti-dérivées de tout ordre de f ont aussi la propriété d'approximation précédente.*

D'autre cas d'universalité peuvent être obtenus par des transformations conformes qui ne sont pas nécessairement des translations. Par exemple, il existe un produit de Blaschke B ayant la propriété d'universalité suivante : pour toute fonction $f \in H(D)$ avec $\|f\| \leq 1$, il existe une suite de translations (non-euclidiennes) pour laquelle

$$B\left(\frac{z+z_n}{1+\bar{z}_n z}\right) \to f$$

uniformément sur les compacts de D, le disque unité centré à l'origine [10]. Il est possible d'obtenir un résultat semblable pour le cas de plusieurs variables complexes à l'aide d'une fonction intérieure plutôt qu'un produit de Blaschke [5]. Dans tout ces cas, nous dirons qu'une fonction f est universelle pour une suite de transformations $\{q_n\}$ si la suite $\{f \circ q_n\}$ est dense dans un espace fixé à l'avance. Dans le cas du plan complexe, Bernal et Montes [3] ont obtenu un critère applicable pour la majorité des ouverts qui permet de déterminer si il existe une fonction universelle pour une suite $\{q_n\}$ d'automorphismes conformes de cet ouvert.

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert qui n'est pas conformément équivalent à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et soit $\{q_n\}$ une suite d'automorphismes conformes de Ω. Il existe alors une fonction universelle $f \in H(\Omega)$ pour cette suite d'automorphismes si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $K \cap q_n(K) = \emptyset$. Si une fonction universelle existe pour cette suite d'automorphismes, l'ensemble de ces fonctions est alors résiduel dans $H(\Omega)$.*

Malgré le fait qu'il est très rare de pouvoir expliciter des exemples concrets d'éléments universels, ces éléments universels sont en fait génériques dans la plupart des cas. À notre connaissance, des exemples concrets d'universalité ont été trouvés seulement pour le cas de l'universalité par translation de fonctions reliées à la fonction zêta et pour celui par réarrangement que nous exposerons en détail au chapitre 4. La difficulté d'exhiber des exemples concrets provient des méthodes même pour prouver l'existence d'objets universels. Il existe deux principales méthodes pour démontrer l'existence de tels éléments. La preuve est soit constructive et nécessite une contruction par récurrence, soit elle repose sur le théorème de Baire. Dans chacun de ces cas, la preuve ne fournit donc pas un exemple concret d'élément universel. Il fut en fait possible, grâce au théorème de Baire, de démontrer que dans tous les cas d'universalité précédents, l'ensemble des éléments universels est un ensemble G_δ dense [9] et donc un ensemble topologiquement générique. La théorie des catégories de Baire permet de parler de la grosseur d'un ensemble de manière analogue à la théorie de la mesure : un ensemble résiduel (i.e. qui contient un ensemble G_δ dense) dans un espace de Baire est en quelque sorte plus gros que son complémentaire tout comme le sont les ensembles dont le complémentaire est de mesure 0 dans un espace mesuré. La première preuve qu'un ensemble de fonctions universelles est résiduel est dû à Marcinkiewicz et concerne le cas de l'universalité par quotients différentiels. De même que pour la généricité topologique, il est possible de définir une notion de généricité algébrique. Nous en définirons en fait deux. Dans aucun de nos exemples d'universalité décrits précédemment, l'élément 0 n'est universel. On peut cependant pour chacun de ceux-ci trouver un espace vectoriel fermé de dimension infinie dont tous les éléments non-nuls sont universels et un espace vectoriel dense dont tous les éléments non-nuls sont universels. Le fait de contenir ces types d'espaces vectoriels démontre bien la grosseur de l'ensemble des éléments universels (d'où le terme de généricité). Il est important de remarquer que la généricité topologique n'est aucunement reliée à la généricité algébrique ; un ensemble peut-être résiduel sans contenir d'espace vectoriel et il existe des espaces vectoriels denses ou fermés de dimension infinie qui ne sont pas résiduels.

Dans tous ces cas d'universalité, l'existence d'éléments universels semble impliquer la généricité topologique et algébrique de tels éléments. L'étude de l'universalité dans un cadre plus abstrait, en relation avec la théorie des opérateurs, permet de mieux comprendre ce phénomène. Dans chacun de nos exemples d'universalité, nous avons deux espaces différents. Le premier est l'espace dans lequel nous cherchons un élément universel qui permettra d'approximer tout les éléments du second espace. Soit X et Y des espaces topologiques et $\{T_i\}_{i\in I}$ un ensemble d'opérateurs continus de X vers Y . On défini un élément $x \in X$ comme étant universel si l'ensemble $\{T_l(x)\}_{l\in I}$ est dense dans Y. Dans le cas où les espaces X et Y coïncident et que l'ensemble $\{T_l\}_{l\in I}$ est obtenu en itérant un opérateur T, on appelle les éléments universels des éléments hypercycliques. Dans ces cas, l'ensemble $\{T_l\}_{l\in I}$ est dénombrable. Les translations du plan complexe de la forme $q_n(z) = z+n$ pouvant être obtenus en itérant la translation $q_1(z) = z+1$, l'appelation de fonction hypercyclique pour les fonctions universelles au sens de Birkhoff est donc justifié. Lorsque X est un espace de Baire, il est possible sous différentes hypothèses d'obtenir le résultat suivant : soit il n'existe aucun élément universel pour la suite d'opérateurs $\{T_n\}$, soit l'ensemble des éléments universels est topologiquement générique.Dans le cas où les opérateurs sont linéaires, on a par exemple la proposition suivante [9, p. 352] :

Proposition 1. *Soient X un espace vectoriel topologique de Baire et Y un espace vectoriel métrisable et séparable. Aussi, soit $\{T_n : X \to Y\}$ une suite d'opérateurs linéaires et continus telle que $\{T_n(x)\}$ converge pour un ensemble dense d'éléments de X. On a alors que soit il n'existe aucun élément universel dans X, soit l'ensemble de ces éléments est résiduel.*

Il n'est donc pas surprenant que pour tout nos exemples précédents, l'ensemble des éléments universels soit topologiquement générique.

Un exemple important d'universalité est celui des séries universelles que nous aborderons dans le chapitre suivant. En plus de l'exemple de Fekete pour les séries de puissance, il existe une universalité semblable pour le cas des séries trigonométriques [12] ; c'est-à-dire, il existe une série trigonométrique dont les sommes partielles sont denses dans l'espace des fonctions 2π-périodiques mesurables. En fait, Talalyan [20] a généralisé le résultat à $L^2[0,1]$ de la façon suivante : en remplaçant les fonctions trigonométriques par n'importe quelle base complète orthonormée $\{\phi_j\}$, on obtient qu'il existe une suite $\{a_j\}$ telle que pour toute fonction g mesurable sur [0,1] il existe une suite $\{n_k\}$ pour laquelle

$$\sum_{j=1}^{n_k} a_j \phi_j(t) \to f(t) \quad \text{presque partout sur } [0,1]$$

Pour ces deux exemples d'universalité, les éléments universels sont des séries qui convergent peu. Dans le cas des séries de puissance, elles convergent en un point alors que pour les séries trigonométriques, elles convergent au plus sur un ensemble de mesure nulle. Sinon, il serait impossible d'obtenir une approximation dans un espace maximal. Il est cependant possible d'obtenir des séries universelles qui convergent sur un domaine et dont les sommes partielles ont un grand pouvoir d'approximation à l'extérieur de ce domaine. Le premier exemple de ce type de phénomène est du à Chui et Parnes [6] qui ont construit une série de puissance convergeant sur le disque unité ouvert et dont les sommes partielles peuvent approximer toutes fonctions continues sur un compact et holomorphes sur l'intérieur de ce compact si celui-ci respecte certaines hypothèses que nous expliciterons au chapitre 2. Nestoridis [16] a par la suite réussi à améliorer ce résultat à l'aide du théorème de Baire. En plus d'obtenir la généricité topologique et algébrique de ces séries, il a pu affaiblir les hypothèses nécessaire sur les compacts pour lesquelles l'approximation peut être faite. De nombreux autres exemples de séries universelles convergeant sur un domaine ont été trouvés : séries de Dirichlet universelles, séries de Faber universelles, etc. Ce type d'universalité est relié au cadre général décrit précédemment. Pour $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et toutes suites $\{x_n\}$ d'un espace de Banach X, les fonctions

$$T_N : K^{\mathbb{N}} \to X \quad \text{définie par} \quad T_N(\{k_n\}) = \sum_{n=1}^{N} k_n x_n$$

sont linéaires et continues. De plus, les séries universelles de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} k_n x_n$ sont celles pour lequel l'ensemble $\{T_N(\{k_n\})\}_{N\in\mathbb{N}}$ est dense dans un espace X approprié. On peut donc appliquer certains éléments de la théorie générale sur l'universalité. Le problème de la convergence des séries n'est cependant pas couvert par cette théorie. Bayart, Grosse-Erdmann et al. [1] ont cependant introduit une théorie abstraite des séries universelles, que nous exposerons en partie dans le chapitre suivant, ce qui nous permettra d'obtenir de nombreux résultats sur ce sujet dans un cadre abstrait. L'existence de séries universelles repose alors simplement sur des théorèmes d'approximation.

Une partie importante de l'étude de l'universalité consiste à caractériser les propriétés des éléments universels. Par exemple, les séries de puissance universelles au sens de Nestoridis ont de nombreuses propriétés supplémentaires. La partie réelle et imaginaire de ces séries sont aussi des séries universelles au sens trigonométrique lorsqu'on remplace z par $e^{i\theta}$ [16] dans la série de puissance. De plus si l'on associe à une série universelle la fonction analytique qu'elle représente, le développement en série de Faber de cette fonction est universel [2]. Nous présenterons au chapitre 3, un type différent d'universalité dû à Fournier et Nestoridis qui établit un lien nouveau entre l'universalité et les familles non-normales de fonctions. Cette universalité est obtenue à partir d'une suite $\{q_n\}$ de fonctions holomorphes fixée en prenant les limites d'une suite de la forme $\{f_n \circ q_n\}$. Il sera possible de démontrer que pour certaines suites $\{q_n\}$, les éléments universels seront toujours des suites non-normales.

Aussi, la théorie de Bayart, Grosse-Erdmann et al. ne nous semble pas couvrir tout les cas possibles d'universalité pour les séries. Nous introduirons au chapitre 4 un type différent d'universalité obtenu en réarrangeant les termes d'une série. Nous y démontrerons la généricité de ce type de série universelle et montrerons qu'elles possèdent toujours un réarrangement grâce auquelle elle deviennent universelles au sens usuel.

CHAPITRE 2

SÉRIES UNIVERSELLES

Nous présenterons ici quelques théorèmes tirés d'un article de Bayart, Grosse-Erdmann et al. [1] qui permettent d'obtenir de nombreux résultats sur les séries universelles à partir d'une théorie abstraite et unificatrice. Nous débuterons avec quelques exemples d'universalités pour des séries, puis indiquerons qu'il est possible de montrer facilement l'existence de telles séries à l'aide de cette théorie.

Le premier exemple d'une série universelle, dû à Fekete [17], était une série de puissance de rayon de convergence 0, dont les sommes partielles pouvaient approximer uniformément toute fonction continue h sur [-1, 1] avec $h(0) = 0$: c'est-à-dire, qu'il existe une série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ à coefficients réels telle que pour toute fonction $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue avec $h(0) = 0$, on peut trouver une suite croissante $\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ pour laquelle

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{n=1}^{\lambda_m} a_n x^n - h(x) \right| = 0.$$

Aussi, en 1951, Seleznev [19] a amélioré le résultat de Fekete en démontrant l'existence d'une série de puissances à coefficients complexes de rayon de convergence 0, dont les sommes partielles peuvent approximer toute fonction holomorphe sur l'intérieur d'un compact (ne contenant pas l'origine) de complément connexe et continue sur ce compact.

Pour chacun de ces exemples d'universalité, il est à remarquer que les séries ne convergent seulement qu'en 0. Une question demeurait : était-il possible d'obtenir une série de puissances convergente sur un ouvert et dont les sommes partielles auraient un grand pouvoir d'approximation en dehors du disque de convergence. Chui et Parnes [6] ont répondu par l'affirmative à cette question, en démontrant à l'aide du théorème de Mergelyan l'existence d'une série de Taylor universelle de rayon r non-nul dont les sommes partielles approximent uniformément toute fonction analytique à l'intérieur d'un compact et continue sur sa frontière pourvu que ce compact soit disjoint de la fermeture du disque de convergence et que son complémentaire soit connexe. L'hypothèse que le complémentaire du compact est connexe est nécessaire. Sinon, il existerait pour un compact K de complémentaire non-connexe une suite de polynômes (les sommes partielles de notre série) dense dans $A(K)$ où

$$A(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ avec } f \text{ holomorphe à l'intérieur de } K \text{ et continue sur } K\}.$$

Or, cela est impossible. En effet, puisque K est de complémentaire non-connexe on peut trouver une composante connexe V de $\mathbb{C} \setminus K$ qui est bornée. Posons $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ pour $\alpha \in V$ fixé. $f(z)$ est une fonction holomorphe sur K, car le seul pôle de f est dans V. Supposons que nous puissions approximer uniformément f sur K par des polynômes. On peut alors trouver un polynôme $p(z)$ tel que

$$|p(z) - f(z)| < 1/m$$

où $m = \max_{z \in K} |z - \alpha|$. On obtient alors en multipliant par $|z - \alpha|$

$$|(z-\alpha)p(z) - 1| < \frac{|z-\alpha|}{m} \leq 1$$

pour $z \in K$. Cette inégalité est vraie en particulier pour $z \in \partial V$ car $\partial V \subset K$. Par le principe du maximum, si $|(z-\alpha)p(z) - 1| < 1$ sur la frontière de V cela doit aussi être vrai sur V. Or, en posant $z = \alpha$ on a $|(z-\alpha)p(z) - 1| = 1$, ce qui est une contradiction. La restriction à la frontière du disque de convergence n'est, quant à elle, pas nécessaire ; V. Nestoridis [16] a montré l'existence d'une série de Taylor universelle au sens suivant :

Définition 1. *Une série de Taylor universelle de rayon $r > 0$ est définie comme étant une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ayant les deux propriétés suivantes :*

1. *Le rayon de convergence la série est exactement r.*
2. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{C} \setminus \{|z| < r\}$ avec K^c connexe et pour toute fonction $h : K \to \mathbb{C}$ continue sur K et holomorphe sur l'intérieur de K, il existe une sous-suite $S_{\lambda_m} = \sum_{n=0}^{\lambda_m} a_n z^n$ des sommes partielles telle que S_{λ_m} converge uniformément vers h sur K.*

Nestoridis a démontré, à l'aide du théorème de Baire, que cette propriété d'universalité est en fait générique : l'ensemble des séries universelles est un ensemble G_δ dense et aussi algébriquement générique (dans un sens qui sera précisé plus loin) dans l'espace des séries de Taylor de rayon r.

Parallèlement à cette définition de séries de Taylor universelles, il est possible de définir un analogue pour les séries trigonométriques [12] :

Définition 2. *Une série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ sera dite universelle si toute fonction mesurable sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ à valeurs complexes peut être approximée presque partout par une sous-suite des sommes partielles $S_{\lambda_m}(t) = \sum_{n=-\lambda_m}^{\lambda_m} a_n e^{int}$; c'est-à-dire, pour toute fonction $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mesurable, il existe une suite $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ telle que $\lim_{m\to\infty} S_{\lambda_m}(t) = h(t)$ presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Tout comme dans le cas des séries de Taylor universelles, il est possible de démontrer l'existence de telles séries. Menshov a en fait prouvé que toute série trigonométrique pouvait être écrite comme somme de deux séries trigonométriques universelles et que si les coefficients de cette première série tendent vers 0, il est possible de prendre des séries universelles ayant cette même propriété. En particulier, Menshov a donc prouvé l'existence de séries universelles. Dans chacun de ces cas d'universalité, il est à noter que nous avons deux espaces différents : un espace de fonctions et un espace de séries qui contient (possiblement) un élément permettant d'approximer tous les éléments du premier espace à l'aide de ses sommes partielles.

Bayart, Grosse-Erdmann, Nestoridis et Papadimitropoulos ont en fait montré que tous ces exemples d'universalité peuvent être obtenus comme conséquence d'une théorie plus abstraite dont nous exposerons maintenant le théorème central. Soit X un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et dont la topologie est engendrée par une métrique invariante ρ. Nous rappelons que, par définition, l'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire sont continues dans un espace vectoriel topologique. Fixons une suite d'éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dans X et dénotons par $\mathbb{N}_0$ l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Soit A un sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ muni d'une métrique invariante d. Nous dénoterons par e_j la suite donte la j^{e} composante est 1 et dont toutes les autres composantes sont nulles. De plus, nous exigerons que A possède les propriétés suivantes :

- Les projections sur les coordonnées sont continues.
- L'ensemble $G = \left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in A \,\middle|\, \exists N \text{ tel que } n > N \implies a_n = 0\right\}$ est inclus dans A.
- G est dense dans A
- A muni de la métrique d est complet

Il est possible de mettre en relation ces espaces abstraits avec nos exemples de départ. En effet, X sera l'espace des fonctions que nous essayons d'approcher et A l'espace des coefficients pour les termes x_j des séries considérées. La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ étant fixée, l'ensemble A est en fait associé à un sous-ensemble des séries formelles de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x_n$ où les a_n sont des éléments de $\mathbb{K}$. Dans cette optique, il sera logique d'appeler G, qui est l'ensemble des suites finies, l'ensemble des polynômes.

Nous définirons maintenant une série universelle à l'aide de cette terminologie.

Définition 3. *Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in A$ est dite universelle si pour tout $x \in X$, il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ telle que*

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j x_j = x$;
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Nous dénoterons par U_A l'ensemble de ces suites. De plus, soit $\mu = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite croissante. Nous dénoterons par U_A^μ l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in A$ telles que pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de μ pour laquelle

3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j x_j = x$;
4. $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Cette définition concorde bien avec l'idée que nous avions exprimée précédemment sur différents types de séries universelles. La première propriété implique que les sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x_n$ (qui sont des éléments de l'espace X) sont denses dans X. La deuxième propriété impose la convergence des sommes partielles vers la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x_n$, si l'on associe l'espace des séries considérées à A.

La deuxième condition implique aussi que la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tend vers l'infini si X n'est pas constitué d'un seul point. En effet, soit $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in G$. On obtient alors que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x_n$ ne contient qu'un nombre fini de points différents . La suite b ne peut donc pas être universelle. Donc, $a \in U_A$ implique que $a \notin G$ et la condition 2 ou 4 oblige $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ à tendre vers l'infini.

Les auteurs obtiennent, sous les hypothèses décrites plus haut, l'équivalence entre le fait que U_A n'est pas vide et d'autres conditions plus faciles à vérifier dans la pratique. Nous avons pour des raisons de clarté inclus une partie de la preuve de ce théorème dans le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in U_A$ et $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in G$, alors $a + b \in U_A$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Puisque $b \in G$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x_n$ est en fait une somme finie et il existe un indice N à partir duquel tout les termes de la série sont nuls. Posons $\sum_{n=0}^{N} b_n x_n = y \in X$. Puisque a est universelle, il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j x_j = x - y \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

On a donc pour la suite $a + b$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} (a_j + b_j) x_j &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} (a_j x_j) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} (b_j x_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lambda_n} (a_j x_j) + \sum_{n=0}^{N} b_n x_n \\
&= (x - y) + y \\
&= x
\end{aligned}$$

Aussi, puisque

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} b_je_j = \sum_{j=0}^{N} b_je_j = b,$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n}(a_j+b_j)e_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_je_j + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} b_je_j = a+b.$$

La suite $a+b$ est donc universelle. □

Théorème 3. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$U_A \neq \emptyset$.*

2. *Pour tout $p \in \mathbb{N}_0, x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $n \geq p$ et des scalaire $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ tels que*

$$\rho(\sum_{j=p}^{n} a_jx_j, x) < \varepsilon \quad et \quad d(\sum_{j=p}^{n} a_je_j, 0) < \varepsilon.$$

3. *La condition 2 est vraie pour $p = 0$.*

4. *Pour toute suite infinie croissante μ de naturels, l'ensemble U_A^{μ} est un ensemble G_δ dense dans A.*

5. *Pour toute suite infinie croissante μ de naturels, l'ensemble $U_A^{\mu} \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel dense dans A.*

Démonstration. $(1) \implies (2)$: Soit $a \in U_A$. On a par définition que

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_je_j - a) = 0.$$

On peut donc trouver un $q \geq p$ pour lequel $d(\sum_{j=q}^{\infty} a_je_j, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$.
La suite $b = \{0, \ldots, 0, a_q, a_{q+1}, \ldots\}$ étant universelle par le lemme 1, il existe un $n > q$ pour lequel $\rho(\sum_{j=q}^{n} a_jx_j, x) < \varepsilon$ et $d(\sum_{j=q}^{n} a_je_j, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. On obtient par l'inégalité du triangle que

$$d(\sum_{j=q}^{n} a_je_j, 0) < d(\sum_{j=q}^{n} a_je_j, b) + d(\sum_{j=q}^{\infty} a_je_j, 0) < \varepsilon.$$

En posant $a_j = 0$ pour $p \leq j < q$, on obtient bien que

$$\rho(\sum_{j=p}^{n} a_j x_j, x) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d(\sum_{j=p}^{n} a_j e_j, 0) < \varepsilon.$$

(2) $\implies$ (3) : Cette implication est évidente.

(3) $\implies$ (4) : Montrons d'abord que la condition (3) implique que X est séparable. Soit $x \in X$. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des scalaires $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ tels que $\rho(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j, x) < \varepsilon$. Or, en prenant des a'_j dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ satisfaisant pour $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\rho((a'_j - a_j)x_j, 0) < \frac{\varepsilon - \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j, x)}{n},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j, \sum_{j=0}^{n} a'_j x_j) &= \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j - \sum_{j=0}^{n} a'_j x_j, 0) \\ &< \sum_{j=0}^{n} \rho\big((a_j - a'_j)x_j, 0\big) \\ &< \varepsilon - \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j, x). \end{aligned}$$

Un tel choix de a'_j est possible car la multiplication par un scalaire est continue dans X. On a donc par l'inégalité du triangle que $\rho(\sum_{j=0}^{n} a'_j x_j, x) < \varepsilon$. Ainsi,

$$\overline{\bigcup_{n \in N} \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x_j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{Q} \right\}} = X$$

et X est séparable, car il s'agit de la fermeture d'une union dénombrable d'ensembles dénombrables.

Soit $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans X et posons pour n, l et $s \in \mathbb{N}$:

$$E^{\mu}(n, l, s) = \left\{ a \in A \;\middle|\; \rho\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j x_j, y_l\Big) < \frac{1}{s} \right\}$$

$$F^{\mu}(n,s) = \left\{ a \in A \;\middle|\; d\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j e_j, a\Big) < \frac{1}{s} \right\}.$$

Montrons maintenant que l'ensemble U_A^{μ} est égal à $\bigcap_{l,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E^{\mu}(n,l,s) \cap F^{\mu}(n,s))$. Soit $a \in U_A^{\mu}$. On a alors que pour tout l et $s \in \mathbb{N}$, il existe un indice n tel que

$$\rho\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j x_j, y_l\Big) < 1/s \quad \text{et} \quad d\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j e_j, a\Big) < 1/s.$$

On a donc $U_A^{\mu} \subset \bigcap_{l,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E^{\mu}(n,l,s) \cap F^{\mu}(n,s))$.

Soit alors $a \in \bigcap_{l,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E^{\mu}(n,l,s) \cap F^{\mu}(n,s))$ et soit $x \in X$. Puisque la suite $\{y_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ est dense dans X, il existe une sous-suite $\{y_{l_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x. On a donc qu'il existe pour chaque k un indice n_k pour lequel

$$\rho\Big(\sum_{j=0}^{\mu_{n_k}} a_j x_j, y_{l_k}\Big) < 1/k \quad \text{et} \quad d\Big(\sum_{j=0}^{\mu_{n_k}} a_j e_j, a\Big) < 1/k.$$

Pour la suite $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\mu_{n_k}} a_j x_j = \lim_{k\to\infty} y_{l_k} = x \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\mu_{n_k}} a_j e_j = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

a est donc universelle. Aussi, l'espace A étant un espace métrique complet, le théorème de Baire est applicable et il suffit donc d'obtenir que, pour tout l et $s \in \mathbb{N}$, les ensembles $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E^{\mu}(n,l,s) \cap F^{\mu}(n,s))$ soient des ouverts denses pour démontrer l'assertion.

Soit $f : \mathbb{K}^{n+1} \to X$ définie par $f(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{j=0}^{n} k_j x_j$. Cette fonction est continue car l'addition de vecteurs et la multiplication par des scalaires sont continues dans X. Aussi, puisque la projection sur les coordonnées est continue dans A et que la fonction distance $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue, on a que pour $y_l \in X$ la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}_0} \mapsto \rho(\sum_{j=0}^{n} b_j x_j, y_l)$ est continue. L'ensemble

$$g^{-1}(]-\infty, 1/s[) = E^{\mu}(n,l,s)$$

est donc un ouvert. De même, $F^{\mu}(n,s)$ est un ouvert. On a donc que les ensembles $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E^{\mu}(n,l,s)\cap F^{\mu}(n,s))$ sont ouverts. Montrons que ces ensembles sont denses. Soit $b\in G$ et $\varepsilon>0$. Par (3), il existe des scalaires $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n$ tels que

$$d(\sum_{j=0}^{n}c_je_j,\vec{0})<\varepsilon \quad \text{et} \quad \rho(\sum_{j=0}^{n}c_jx_j,y_l-\sum_{j=0}^{n}b_jx_j)<\frac{1}{s}.$$

Le polynôme $c=\{c_0,c_1,c_2\ldots,c_n,0,\ldots\}$ a donc les propriétés que $d(c,0)<\varepsilon$ et

$$\rho(\sum_{j=0}^{n}c_jx_j,y_l-\sum_{j=0}^{n}b_jx_j)=\rho(\sum_{j=0}^{\infty}c_jx_j,y_l-\sum_{j=0}^{n}b_jx_j)<\frac{1}{s}.$$

Soit $a=b+c$, on a alors que $d(a,b)=d(a-b,b-b)=d(c,0)<\varepsilon$. Choisissons N tel que $m>\mu_N$ implique $b_m=c_m=0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\rho(\sum_{j=0}^{\mu_N}a_jx_j,y_l)=\rho(\sum_{j=0}^{\infty}a_jx_j,y_l) &= \rho(\sum_{j=0}^{\mu_N}(b_j+c_j)x_j,y_l)\\
&= \rho(\sum_{j=0}^{\mu_N}(b_j+c_j)x_j-\sum_{j=0}^{\mu_N}b_jx_j,\ y_l-\sum_{j=0}^{\mu_N}b_jx_j)\\
&= \rho(\sum_{j=0}^{\infty}c_jx_j,y_l-\sum_{j=0}^{\infty}b_jx_j)\\
&< 1/s
\end{aligned}$$

et $d(\sum_{j=0}^{\mu_N}a_je_j,a)=0<1/s$. Donc,

$$a\in\big(E^{\mu}(N,l,s)\cap F^{\mu}(N,l)\big)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E^{\mu}(n,l,s)\cap F^{\mu}(n,s)) \quad \text{et} \quad d(a,b)<\varepsilon.$$

Les ensembles $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E^{\mu}(n,l,s)\cap F^{\mu}(n,s))$ sont donc bel et bien des ouverts denses.

(4) $\implies$ (5) : Soit $a\in U_A$. Puisque G est dense dans A, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un élément $b\in G$ tel que $d(a,b)<\varepsilon$. Il est en fait possible de prendre les b_j dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On a donc, comme pour l'espace X, que A est séparable. Soit $\{c^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans A. Posons $\mu^0=\mu$. Choisissons un élément $a^1\in U_A^{\mu^0}$ tel que $d(a^1,c^1)<1$. Nous noterons par a_j^l le j^{e} élément de la suite a^l. Puisque a^1 est

universelle, il existe une sous-suite $\mu^1 = \{\mu_n^1\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la suite μ^0 telle que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\mu_n^1} a_j^1 x_j = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\mu_n^1} a_j^1 e_j = \{a_n^1\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

On peut maintenant choisir une suite $a^2 \in U_A^{\mu^1}$ telle que $d(a^2, c^2) < \frac{1}{2}$.

On peut ainsi par récurrence construire pour tout $l \in \mathbb{N}$, une suite $\{a^l\}_{l\in N}$ et une suite de naturels μ^l ayant les propriétés suivantes :

1. μ^l est une sous-suite de μ^{l-1};
2. $d(a^l, c^l) < \frac{1}{l}$;
3. $a^l \in U_A^{\mu^{l-1}}$;
4. $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l x_j = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l e_j = a^l$.

Posons B comme étant l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ engendré par les a^l. Puisque l'ensemble $\{c^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ est dense dans A, l'ensemble $\{a^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. B est donc dense, car il contient les suites a^l. Aussi, soit $a = k_1a^1 + k_2a^2 + \ldots + k_ma^m$ un élément de $B\setminus\{0\}$ où les $k_i \in \mathbb{K}$ et $k_m \neq 0$. Montrons que $a \in U_A^{\mu}$. Par construction des suites a^l, il existe pour tout élément $x \in X$ une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mu^{m-1}$ pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} k_m a_j^m x_j = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^m e_j = \{a^m{}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Or, la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une sous-suite de la suite μ^l pour $l < m$. Par la propriété 4, on a donc pour $l < m$ que $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} k_l a_j^l x_j = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} k_l a_j^l = k_l a^l$. Il suit que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j x_j &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n}(k_1a_j^1 + k_2a_j^2 + \ldots + k_m a_j^m)x_j \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} k_m a_j^m x_j \\
&= x
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n}(k_1 a_j^1 + k_2 a_j^2 + \ldots + k_m a_j^m) e_j \\
&= \sum_{l=1}^{m} k_l (\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^l e_j) \\
&= \sum_{l=1}^{m} k_l a^l \\
&= a.
\end{aligned}$$

$B \subset U_A^{\mu} \cup \{0\}$ est donc un espace vectoriel dense.

(5) $\implies$ (1) : Ceci est évident.

□

Nous montrerons maintenant quelques applications de ce théorème. Seleznev a obtenu [19] qu'il existait une série de puissances dont les sommes partielles approximent uniformément sur les compacts $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ toutes les fonctions entières. Nous nous servirons d'une proposition basée sur la proposition 2 de [1]. Nous y avons ajouté le fait que la série obtenue a un rayon de convergence r possiblement non-nul. Pour ce faire, nous avons simplement transformé l'ensemble A de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ en l'ensemble des séries de Taylor de rayon de convergence r et modifié la distance sur A en conséquence.

Posons pour $r \in]0,\infty], r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ et pour un compact $K \subset \mathbb{C}$

$$A(K) = \{h : K \to \mathbb{C} \text{ avec } h \text{ holomorphe à l'intérieur de } K \text{ et continue sur } K\}.$$

Proposition 2. *Soit $r \geq 0$ et soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec K^c connexe. De plus, nous supposerons que $K \cap r\mathbb{D} = \emptyset$ si $r > 0$ et que $0 \notin K$ si $r = 0$. Il existe alors un élément $a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ tel que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ converge sur le disque $r\mathbb{D}$ et dont les sommes partielles $S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ont la propriété suivante : pour tout $h \in A(K)$, il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ telle que $S_{\lambda_n} \to h$ uniformément sur K.*

De plus, l'ensemble de ces suites est un ensemble G_δ dense dans l'ensemble des séries de Taylor de rayon au moins r.

Démonstration. Soit $r > 0$. Posons A comme étant l'ensemble des séries de Taylor de centre 0 dont le rayon de convergence est égal ou supérieur à r. Soit $\{r_j\}$ une suite strictement croissante de nombres positifs convergeant vers r. Posons comme distance sur A, la distance d suivante :

$$d(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{j=0}^{\infty} \min\{\frac{1}{2^j}, \sup_{|z|\leq r_j} \left|\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)z^n\right|\}.$$

Cette distance est équivalente à la convergence uniforme sur les compacts du disque ouvert de rayon r centré à l'origine . Posons $X = A(K)$ et pour $f \in X, \|f\| = \sup_{z\in K}|f(z)|$. Les espaces X et A respectent alors les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème 3. Montrons que la condition (3) de celui-ci est satisfaite.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $K \cup \overline{r_N \mathbb{D}}$ est un compact de complémentaire connexe, par le théorème de Mergelyan il existe une suite de polynômes $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\leq r_N} |p_n(z)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |p_n(z) - h(z)| = 0.$$

Prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{|z|\leq r_N} |p_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \quad \text{et} \quad \sup_{z\in K} |p_n(z) - h(z)| < \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(p_n, 0) &= \sum_{j=0}^{\infty} \min\{\frac{1}{2^j}, \sup_{|z|\leq r_j} |p_n(z)|\} \\ &= \sum_{j=0}^{N} \min\{\frac{1}{2^j}, \sup_{|z|\leq r_j} |p_n(z)|\} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \min\{\frac{1}{2^j}, \sup_{|z|\leq r_j} |p_n(z)|\} \\ &< (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aussi, $\|p_n - h\| < \varepsilon$. On a donc par le théorème 3 que U_A n'est pas vide et que U_A est un ensemble G_δ dense dans A. Le cas $r = 0$ se fait de manière analogue avec $A = \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ et

$$d(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a_n - b_n\|}{1 + \|a_n - b_n\|}.$$

□

Il est possible à partir de cette proposition d'obtenir le théorème de Seleznev et l'existence de séries de puissances universelles au sens décrit plus haut.

Corollaire 1. *Il existe une série de puissances $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ telle que pour toute fonction $h \in H(\mathbb{C})$ et tout compact K avec K^c connexe et $0 \notin K$, on peut trouver une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pour laquelle $S_{\lambda_n} \to h$ uniformément sur K.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2. *Il existe une suite de compacts du plan complexe $K_k \subset \mathbb{C}$ telle que $0 \notin K_k$, K_k^c est connexe et pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ avec $0 \notin K$ et K^c connexe il existe un k tel que $K \subset K_k$.*

Démonstration du corollaire. Soit $\{K_k\}$ une suite de compacts respectant les conditions du lemme 2. Soit $A = \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ muni de la métrique d décrite dans la preuve de la proposition 2 et soient A_k l'ensemble des séries $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_j \in A$ telles que

$$\forall h \in H(\mathbb{C}), \text{ il existe une suite } \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ avec} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j z_j \to h$$

où la convergence est uniforme sur K_k. Par la proposition 2, A_k contient un ensemble G_δ dense dans A. Puisque A est un espace de Baire, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ n'est pas vide. Soient $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_j \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $h \in H(\mathbb{C})$ et K un compact tel que $0 \notin K$ et K^c connexe. On a alors qu'il existe un k tel que $K \subset K_k$ et une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ telle que $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j z_j \to h$ uniformément sur K_k. Puisque $K \subset K_k$, cela sera aussi vrai sur K. La série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_j$ a donc les propriétés énoncées. □

On obtient aussi l'existence d'une série de Taylor universelle au sens de Nestoridis.

Corollaire 2. *Il existe une série de Taylor universelle de rayon $r > 0$. L'ensemble de ces séries est un ensemble G_δ dense dans $H(r\mathbb{D})$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Il existe alors une suite de compacts $K_k \subset \mathbb{C}$ telle que $K_k \cap \Omega = \emptyset$, K_k^c est connexe et pour tout compact K avec $K \cap \Omega = \emptyset$ et K^c connexe, il existe un k tel que $K \subset K_k$.*

Démonstration du corollaire. Soit K_k une suite de compacts respectant les conditions du lemme 3 où $\Omega = r\mathbb{D}$. Soit A l'ensemble des séries de Taylor de rayon égal ou supérieur à r et soit A_k l'ensemble des séries $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_j \in A$ telles que

$$\forall h \in A(K_k), \text{ il existe une suite } \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ avec } \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j z_j \to h$$

et où la convergence est uniforme sur K_k. Par la proposition 2, A_k est un ensemble G_δ dense dans A. Puisque A est un espace de Baire, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est un ensemble G_δ dense. Soient $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ et K un compact tel que $K \cap r\mathbb{D} = \emptyset$ avec K^c connexe. Aussi, soit h une fonction continue sur K et holomorphe sur l'intérieur de K. On a alors qu'il existe un k tel que $K \subset K_k$ et une suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ telle que $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j z_j \to h$ uniformément sur K_k. Puisque $K \subset K_k$, cela sera aussi vrai sur K. Tous les séries de $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ sont donc des séries de Taylor universelles de rayon r. Aussi, si $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ est une série universelle, on a évidemment

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est donc l'ensemble des séries de Taylor universelles de rayon r et est un ensemble G_δ dense.

□

Montrons maintenant qu'il est possible d'utiler la proposition 2 pour montrer l'existence de séries trigonométriques universelles. Nous aurons, pour ce faire, besoin du lemme d'approximation [1] suivant :

Lemme 4. *Soit $\varepsilon > 0$ et $p(t)$ un polynôme trigonométrique. Il existe alors $K \subset \mathbb{T}$ un compact tel que $\lambda(K^c) \leq \varepsilon$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ et un polynôme trigonométrique $q(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_j e^{ijt}$ tel que $|p(t) - q(t)| < \varepsilon$ sur K et $\left|b_j\right| < \varepsilon$ pour $j = -N, \ldots N$.*

Corollaire 3 (théorème de Menshov)**.** *Il existe une suite $\{a_j\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}$ de nombres complexes telle que $\lim_{|j|\to\infty} a_j = 0$ et pour laquelle la série $\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} a_j e^{ijt}$ est universelle.*

Démonstration. Soit X l'ensemble des classes d'équivalences des fonctions mesurables sur $\mathbb{T}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. Munissons X de la topologie de la convergence en mesure. X est alors un espace métrique et nous dénoterons par ρ la métrique sur X.

Posons $A = c_0(\mathbb{Z}) = \left\{\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \lim_{|j|\to\infty} a_j = 0\right\}$ muni de la norme

$$\left\|\{a_j\}\right\| = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left|a_j\right|.$$

Pour tout polynôme trigonométrique $p(t) = \sum_{j=-M}^{M} a_j e^{ijt}$, nous poserons

$$\|p(t)\| = \left\|\{a_j\}\right\|$$

où $a_j = 0$ pour $|j| > M$. Bien que ici $A \subset K^{\mathbb{Z}}$, nous pouvons tout de même utiliser notre théorème. En effet, puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable, il serait possible de travailler avec $A \subset K^{\mathbb{N}_0}$ en utilisant une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}_0$. Nous continuerons tout de même à utiliser l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour des raisons de clarté. Posons $x_j = e^{jnt}$ pour $j \in \mathbb{Z}$. Les espaces X et A respectent alors les hypothèses du théorème 3.

Puisque les polynômes trigonométriques de forme $\sum_{j=-M}^{M} b_j e^{ijt}$ sont denses dans X, il suffit de prouver que la condition (3) est vrai pour tout polynôme $p(t) = \sum_{j=-M}^{M} b_j e^{ijt}$ pour montrer que cette condition est vraie pour tout élément $x \in X$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit p un polynôme trigonométrique. Le lemme 4 nous assure qu'il existe une suite $\{q_n\}$ de polynômes trigonométriques et une suite d'ensembles $\{W_n\}$ telles que

$$\sup_{t\in W_n} |p(t) - q_n(t)| < \frac{1}{n}, \quad \lambda({W_n}^c) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|q_n(t)\| < \varepsilon.$$

Puisque la suite q_n converge en mesure vers p, il existe un indice N pour lequel le polynôme q_N est dans l'ouvert

$$\{x \in X \mid \rho(x, p(t)) < \varepsilon\}.$$

On a alors

$$\rho(q_N(t), p(t)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|q_N(t)\| < \varepsilon.$$

En applicant le théorème 3, on obtient l'existence d'une série trigonométrique universelle dont les coefficients tendent vers 0. □

Il est en fait possible d'utiliser le dernier résultat pour démontrer un autre théorème du à Menshov :

Théorème 4. *Toute série trigonométrique $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{ijt}$ dont les coefficients tendent vers 0 peut s'écrire comme la somme de deux séries trigonométriques universelles dont les coefficients tendent aussi vers 0.*

Démonstration. Soit $a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^{ijt}$ une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers 0. Soit $U = U_{c_0(\mathbb{Z})}$ l'ensemble des séries trigonométriques universelles dont les coefficients tendent vers 0. On sait par la preuve du théorème de Menshov que cet ensemble est un ensemble G_δ dense dans A. Il en sera de même pour l'espace translaté $a+U$, la métrique sur $c_o(\mathbb{Z})$ étant invariante sous translation. Puisque l'intersection de deux ensembles G_δ dense est aussi G_δ dense, il existe une série trigonométrique $b \in U \cap [a+U]$. On a donc $b \in U$. Aussi $b \in a+U \iff b-a \in U$. Ainsi $a = (b-a)+b$ est la somme de deux séries trigonométriques dont les coefficients tendent aussi vers 0. □

CHAPITRE 3

UNIVERSALITÉ ET FAMILLES NON-NORMALES

Nous avons montré dans le chapitre précédent qu'il était possible d'obtenir de nombreux résultats d'universalité dans le cadre d'une théorie abstraite. Malgré les nombreux résultats pouvant se déduire de cette théorie, il nous semble possible d'obtenir des types d'universalité ne découlant pas de celle-ci. Nous en présenterons ici un exemple dû à R. Fournier et V.Nestoridis [8] dont l'idée principale provient du lemme de Zalcman sur les familles normales.

Soit Ω un domaine du plan complexe. Une famille de fonctions analytiques $\mathscr{F} \subseteq H(\Omega)$ est dite normale si toute suite $\{f_n\}$ d'éléments de $\mathscr{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts soit vers une fonction $f \in H(\Omega)$ ou soit vers l'infini. Réciproquement, une famille $\mathscr{F} \subseteq H(\Omega)$ est dite non-normale en un point $z_0 \in \Omega$ si pour tout voisinage de z_o la famille $\mathscr{F}$ n'est pas normale sur ce voisinage ; c'est-à-dire pour tout voisinage U de z_0, il existe une suite $\{f_n\}$ d'éléments de $\mathscr{F}$ telle que pour toute sous-suite $\{f_{n_k}\}$, cette sous-suite ne converge pas uniformément sur les compacts vers une fonction $f \in H(U)$ ou vers l'infini.

Lemme 5 (Lemme de Zalcman [22])**.** *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions analytiques sur D le disque unité. Si $\mathscr{F}$ n'est pas normale en 0, il existe alors une suite de fonctions $\{f_n\} \subseteq \mathscr{F}$, deux suites de nombres complexes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ tendant vers 0 et une fonction entière non-constante $g(z)$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a_n + b_n z) = g(z)$$

uniformément sur les compacts du plan.

Le lemme de Zalcman nous assure que pour toute suite de fonctions $\{f_n\}$ non-normale en 0, il existe une suite de transformations conformes $q_n = a_n + b_n z$ ayant la propriété que la suite $\{f_n \circ q_n\}$ possède une sous-suite convergente sur les compacts du plan vers une fonction entière non-constante. La question à laquelle s'attardent Fournier et Nestoridis est de savoir si pour une suite de transformations $\{q_n\}$ fixée, il existe une suite de fonctions $\{f_n\}$ telle que, pour chaque fonction entière non-constante, une sous-suite de $\{f_n \circ q_n\}$ converge vers cette fonction. Cette situation est bien un exemple d'universalité. Contrairement aux cas d'universalité précédents, il est possible d'exhiber des exemples de telles suites. Prenons comme suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes dense dans $H(\mathbb{C})$ et tous les $a_n = 0$ et tous les $b_n = 1$. On aura alors que la suite $\{f_n \circ q_n\} = \{f_n\}$ est bien évidemment dense dans $H(\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Aussi, l'existence d'une fonction f hypercyclique pour la famille de transformations $\{q_n = z+n\}$ ayant été démontrée [4], il est possible pour cette suite de transformations de prendre la suite $\{f_n\}$ où $f_n = f$ pour chaque n. Dans notre premier exemple, la suite $\{f_n\}$ n'est évidemment pas normale alors que la suite $\{f\}$ du deuxième exemple l'est trivialement. Il n'est donc pas nécessaire de considérer des suites de fonctions non-normales pour obtenir l'universalité. Nous reviendrons à ce problème un peu plus loin pour montrer qu'il existe bel et bien un lien entre ce type d'universalité et la non-normalité d'une famille de fonctions.

Nous poserons maintenant le problème de façon plus formelle. Soient des domaines (i.e. des ouverts connexes) Ω et Ω_n pour $n \in \mathbb{N}$. Nous supposerons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un indice n_m tel que le disque ouvert $\{|z| < m\} \subset \Omega_n$ pour $n_m < n$. Aussi, soient $q_n \colon \Omega_n \to \Omega$ des fonctions holomorphes bijectives. Nous dirons que la suite de fonctions $\{f_n\} \subset H(\Omega)$, est universelle si pour toute fonction entière g il existe une sous-suite $\{n_k\}$ telle que

$$f_{n_k} \circ q_{n_k}(z) \to g(z) \quad \text{uniformément sur les compacts.}$$

La fonction $f_{n_k} \circ q_{n_k}$ étant une fonction de Ω_{n_k} dans $\mathbb{C}$, il est possible qu'il existe des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la fonction n'est pas définie. On peut cependant toujours trouver un indice N pour lequel $N < k$ implique que la fonction $f_{n_k} \circ q_{n_k}(z)$ soit définie, car les disques de rayons fixés et centrés à l'origine sont dans les domaines Ω_n pour n assez grand. Pour un compact K, la limite n'est donc prise qu'à partir de l'indice N où $K \subset \Omega_n$ pour $N \leq n$. Les domaines Ω et Ω_n et la suite $\{q_n\}$ étant fixés, nous dénoterons par E l'ensemble des suites universelles. Non seulement il existe toujours une suite de fonctions universelles une fois les domaines et la suite $\{q_n\}$ fixés, mais ces suites de fonctions sont aussi génériques comme en témoigne le théorème suivant :

Théorème 5. *Si on munit l'ensemble* $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ *de la topologie produit, on a alors que*

1. *E est un ensemble G_δ dense de* $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$
2. *$E \cup \{0\}$ contient la fermeture d'un espace vectoriel de dimension infinie*
3. *$E \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel dense dans* $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$.

Démonstration. 1) Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $H(\mathbb{C})$. Montrons d'abord que

$$E = \bigcap_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}} \bigcup_{n>n_m} \left\{ \{g_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z|\leq m} \left|g_n \circ q_n(z) - w_j(z)\right| < 1/s \right\}.$$

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est universelle, il existe pour tout j une sous-suite $\{n_k\}$ telle que

$$f_{n_k} \circ q_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} w_j \quad \text{uniformément sur les compacts.}$$

Donc pour tout s, m et j, on peut trouver un indice $n_k \geq n_m$ tel que
$\left|f_{n_k} \circ q_{n_k} - w_j\right| < \frac{1}{s}$ sur le compact $|z| \leq m$ et

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}} \bigcup_{n>n_m} \left\{ \{g_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z|\leq m} \left|g_n \circ q_n(z) - w_j(z)\right| < 1/s \right\}.$$

Supposons maintenant que

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}} \bigcup_{n>n_m} \left\{ \{g_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z|\leq m} \left|g_n \circ q_n(z) - w_j(z)\right| < 1/s \right\}$$

et montrons que $\{f_n\}$ est universelle. Soit $g \in H(\Omega)$, on a alors qu'il existe une suite $\{n_j\}$ croissante telle que $w_{n_j} \to g$ sur les compacts. En posant $s = m = j$, on obtient pour chacun des j qu'il existe un l_j tel que $\sup_{|z|<j} \left| f_{l_j} \circ q_{l_j} - w_j \right| < \frac{1}{j}$. On peut supposer la suite $\{l_j\}$ croissante, car sinon en prenant m tel que $m \geq j$ et $n_m > l_{j-1}$ on a alors pour l'indice l_j :

$$l_j > n_m > l_{j-1} \quad \text{et} \quad \sup_{|z|<j} \left| f_{l_j} \circ q_{l_j} - w_j \right| \leq \sup_{|z|<m} \left| f_{l_j} \circ q_{l_j} - w_j \right| < \frac{1}{j}.$$

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. On a alors qu'il existe un N tel que $K \subset \{z \,|\, |z| < N\}$. Donc pour $j > N$

$$\sup_{z \in K} \left| f_{l_j} \circ q_{l_j}(z) - w_j(z) \right| \leq \sup_{z \leq j} \left| f_{l_j} \circ q_{l_j}(z) - w_j(z) \right| < \frac{1}{j}$$

et $f_{l_j} \circ q_{l_j} \to g$ uniformément sur K. On obtient donc que $f_{l_j} \circ q_{l_j} \underset{j \to \infty}{\to} g$ uniformément sur les compacts et $\{f_n\}$ est universelle. Donc,

$$E = \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}} \bigcup_{n > n_m} \left\{ \{g_l\}_{l \in \mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z| \leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s \right\}.$$

Puisque $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ est complet, il suffit par le théorème de Baire de montrer que, pour s, m et j fixés,

$$\bigcup_{n > n_m} \left\{ \{g_l\}_{l \in \mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z| \leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s \right\}$$

est un ouvert dense dans la topologie produit pour obtenir que E est un ensemble G_δ dense. Soit $n \in N$. On a par hypothèse que $q_n : \Omega_n \to \Omega$ est bijective. Posons pour $z \in \Omega_n,\ q_n(z) = \zeta$. On a alors que

$$\sup_{|z| \leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s$$

si et seulement si

$$\sup_{\zeta \in q_n(\{z \,|\, |z| \leq m\})} \left| g_n(\zeta) - w_j \circ q_n^{-1}(\zeta) \right| < 1/s.$$

Or l'ensemble des fonctions g_n ayant cette dernière propriété est un ouvert dans la topologie de la convergence sur les compacts. En effet, q_n étant continue, $q_n(\{z \,|\, |z| \leq m\})$ est un compact dans Ω. Soit $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une exhaustion du domaine Ω par des compacts et posons $K_0 = q_n(\{z \,|\, |z| \leq m\})$. La famille $\{\| \ \|_k\}_{k=0}^{\infty}$ de semi-normes sur $H(\mathbb{C})$ définie par $\| \ \|_k = \sup_{z \in K_k} |f(z)|$ induit la même topologie que la convergence sur les compacts. Or,

$$U := \left\{ g_n \in H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{\zeta \in q_n(\{z \,|\, |z| \leq m\})} \left| g_n(\zeta) - w_j \circ q_n^{-1}(\zeta) \right| < 1/s \right\}$$

est évidemment un ouvert pour la semi-norme $\| \ \|_0$. L'ensemble

$$\left\{ \{g_l\}_{l \in \mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z| \leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s \right\}$$

est l'ensemble de toutes les suites dont le n^{e} élément g_n est dans l'ouvert U. Cet ensemble est donc le produit de U et de copies de $H(\mathbb{C})$. Il s'agit donc d'un ouvert de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ muni de la topologie produit. On obtient donc que

$$\bigcup_{n > n_m} \left\{ \{g_l\}_{l \in \mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z| \leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s \right\}$$

est ouvert dans $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ car il s'agit d'une réunion d'ouverts.

Montrons que cet ensemble est dense. Soit

$$U = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p \times \prod_{l=p+1}^{\infty} H(\Omega)$$

un ouvert de base de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ et soit $\{f_n\} \in U$. On a alors que pour $k > \max\{n_m, p\}$, la suite $\{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, w_j \circ q_k^{-1}, f_{k+1}, \ldots\}$ est élément de

$$U \cap \bigcup_{n>n_m} \left\{ \{g_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega) \,\middle|\, \sup_{|z|\leq m} \left| g_n \circ q_n(z) - w_j(z) \right| < 1/s \right\}.$$

En effet, la fonction $g_k = w_j \circ q_k^{-1}$ respecte trivialement la condition

$$\sup_{\zeta \in q_k(\{z \,|\, |z|\leq m\})} \left| g_k(\zeta) - w_j \circ q_k^{-1}(\zeta) \right| < 1/s$$

et la suite $\{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, w_j \circ q_k^{-1}, f_{k+1}, \ldots\}$ est dans U car $k > p$.

2) Soit $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une partition des naturels telle que tout ces ensembles sont disjoints deux à deux et telle que $|N_m| = \infty$ pour tout m. Nous définirons le support d'une suite $\{f_n\}$ par $supp(\{f_n\}) := \{n \in \mathbb{N} \,|\, f_n \neq 0\}$ et dénoterons le i^{e} élément d'une suite α par $\alpha(i)$. En applicant la première partie de ce théorème à l'ensemble de fonctions $\{q_n\}_{n\in N_m}$ et à l'ensemble de domaines Ω_n pour $n \in N_m$, on peut trouver pour chaque m une suite de fonctions $\alpha_m = \{f_n^m\}$ universelle où $supp(\alpha_m) \subseteq \mathbb{N}_m$.

Montrons que la fermeture de l'espace vectoriel V engendré par les suites $\{\alpha_m\}$ est incluse dans $E \cup \{0\}$. Soit $\alpha = \lim_{s\to\infty} \beta_s$ avec β_s une combinaison linéaire des éléments de $\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Puisque les supports des suites α_m sont disjoints, on a pour tout $i \in \mathbb{N}_m$ que $\beta_s(i) = c_j^s \alpha_m(i)$ pour un $c_j^s \in \mathbb{C}$. Supposons $\alpha \neq 0$. On a alors qu'il existe i et m avec $i \in N_m$ tels que $\alpha(i) \neq 0$. On a donc que la suite c_j^s associé tend vers un scalaire c_j différend de 0. Sinon, on aurait $\alpha(i) = 0$. Donc pour tout $i \in N_m$

$$\alpha(i) = \lim_{s\to\infty} \beta_s(i) = \lim_{s\to\infty} c_j^s \alpha_m(i) = c_j \alpha_m(i)$$

Pour une fonction entière g, on peut donc trouver une sous-suite $\{n_k\}$ dans N_m telle que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(n_k) = \lim_{k\to\infty} c_j \alpha_m(n_k) = c_j \lim_{k\to\infty} f_{n_k}^m = g$$

et cela uniformément sur les compacts. On a donc que $\alpha \in E$ et que la fermeture de V est un ensemble vectoriel fermé dans E. Il est aisé de vérifier que V est de dimension infinie et donc que sa fermeture l'est aussi.

3) Nous proposerons ici une preuve plus simple que la preuve originale de Fournier et Nestoridis. Puisque $H(\Omega)$ est séparable, il en est de même pour $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$. On peut donc trouver une suite $\{\beta_m\}$ d'éléments de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ dense dans cet espace. On peut en fait supposer que le support de chacune de ces suites est fini. Prenons $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une partition des naturels et des suites de fonctions α_m respectant les mêmes hypothèses que précédemment. Nous affirmons que l'espace vectoriel V engendré par les suites $\{\alpha_m+\beta_m\}$ est inclus dans $E\cup\{0\}$ et dense dans $\prod H(\Omega)$. Montrons d'abord que V est dense. Soit

$$U = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p \times \prod_{l=p+1}^{\infty} H(\Omega)$$

un ouvert de base de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ et soit $\{f_n\} \in U$. Puisque l'ensemble $\{1,2,\ldots,p\}$ est fini, on peut trouver N tel que $N<m$ implique $N_m \cap \{1,2,\ldots,p\} = \emptyset$. Aussi, puisque $\{\beta_m\}$ est dense, il existe une infinité d'indices m pour lesquels $\beta_m \in U$. On peut donc trouver un m tel que $\beta_m \in U$ et tel que $supp(\alpha_m) \subseteq \mathbb{N}_m \subseteq \{p+1, p+2\ldots\}$. Soit $i \in \{1,2,\ldots,p\}$.

$$(\beta_m+\alpha_m)(i) = \beta_m(i) \in I_i,$$

car $i \notin supp(\alpha_m)$. Aussi pour $p<i$, on a trivialement que $(\beta_m+\alpha_m)(i) \in H(\Omega)$. On a donc pour m que $\beta_m+\alpha_m \in U$ et V est dense dans $\prod H(\Omega)$. Pour montrer que $V \subset E\cup\{0\}$, il suffit de répéter les étapes de la partie 3. En effet, pour toute combinaison linéaire $\gamma = \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{m_j}+\beta_{m_j})$ où $c_n \neq 0$, il existe un N tel que $supp(\beta_{m_n}) \subseteq \{1,2,\ldots N\}$. On a donc $\lim_{k\to\infty} \beta_{m_n}(k) = 0$. Soit g une fonction entière. Il existe une sous-suite $\{n_k\}$ dans N_{m_n} telle que $\alpha_{m_n}(n_k) \to \frac{g}{c_n}$ uniformément sur les compacts. On aura pour la suite de fonction γ

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \gamma(n_k) &= \lim_{k\to\infty} c_n(\alpha_{m_n}(n_k)+\beta_{m_n}(n_k)) \\
&= \lim_{k\to\infty} c_n\alpha_{m_n}(n_k) + \lim_{k\to\infty} c_n\beta_{m_n}(n_k) \\
&= g
\end{aligned}$$

uniformément sur les compacts. On a donc bel et bien que $V \subset E\cup\{0\}$.

□

Nous nous écarterons quelque peu du sujet de l'universalité pour souligner quelques conséquences du théorème précédent. Nous avons démontré qu'il existe des suites $\{q_n\}$ pour lesquelles nous avons une suite de fonction $\{f_n\}$ universelle et normale. Il est en fait aussi toujours possible une fois la suite $\{q_n\}$ fixée de trouver une suite universelle qui n'est pas normale. Nous fournirons d'abord une preuve élémentaire de ce fait qui montre comment transformer une suite normale et universelle en suite universelle normale sur aucun ouvert. Puis, nous montrerons la généricité au sens du théorème de Baire de ces suites à l'aide du théorème précédent.

Soit $\{f_n\}$ une suite universelle pour la suite $\{q_n\}$ et soit $\{n_k\}$ une sous-suite telle que $f_{n_k} \circ q_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$ uniformément sur les compacts. Prenons $\{n_{k_j}\}$ une sous-suite de $\{n_k\}$ telle que $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \setminus \{n_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est un ensemble infini. Soit $\{g_{n_k}\}$ une suite non-normale sur tout ouvert de Ω. Une preuve de l'existence d'une telle suite sera donné par le corollaire 4. Posons

$$h_s = \begin{cases} f_s & \text{si } s \notin \{n_{k_j}\} \\ g_s & \text{si } s \in \{n_{k_j}\} \end{cases}$$

La famille obtenue ainsi est évidemment non-normale sur tout ouvert : $\{g_{n_k}\}$ contient une suite ne possédant pas de sous-suite convergente vers une fonction holomorphe ou vers l'infini sur cet ouvert. Aussi, la suite $\{h_n\}$ conserve son caractère d'universalité : soit g une fonction entière différente de 0 et $\{n_s\}$ une suite telle que $f_{n_s} \circ q_{n_s} \underset{s\to\infty}{\to} g$. On a $\left|\{n_s\} \cap \{n_{k_j}\}\right| \neq \infty$ car sinon

$$g = \lim_{s\to\infty} f_{n_s} \circ q_{n_s} = \lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}} \circ q_{n_{k_j}} = 0.$$

Donc, on peut trouver une sous-suite $\{n_j\}$ de la suite $\{n_s\}$ telle que $h_{n_j} = f_{n_j}$ et

$$\lim_{j\to\infty} h_{n_j} \circ q_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f_{n_j} \circ q_{n_j} = g.$$

Pour le cas g=0, le fait que $\left|\{n_k\} \setminus \{n_{k_j}\}\right| = \infty$ implique l'existence d'une sous-suite

$\{n_{k_s}\}$ pour laquelle $h_{n_{k_s}} = f_{n_{k_s}}$ et donc

$$\lim_{s\to\infty} h_{n_{k_s}} \circ q_{n_{k_s}} = \lim_{s\to\infty} f_{n_{k_s}} \circ q_{n_{k_s}} = 0.$$

La suite $\{h_n\}$ est donc bel et bien universelle.

Nous montrerons maintenant que pour toute suite $\{q_n\}$, tout domaine Ω et toute suite de domaines Ω_n respectant nos hypothèses de départ, l'ensemble des suites universelles et normales sur aucun ouvert est un ensemble G_δ dense dans $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$. Nous aurons pour ce faire besoin du lemme suivant :

Lemme 6. *Soit Δ un domaine du plan contenant deux disques disjoints fermés D_1 et D_2. Posons pour $k,n \in \mathbb{N}$*

$$S_{k,n} = \left\{ \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in \prod H(\Delta) \,\middle|\, \sup_{z\in D_1} |f_n(z)| < \frac{1}{k} \textit{ et } \sup_{z\in D_2} |f_n(z) - (k+1)| < 1 \right\}.$$

On a alors que $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{k,n}$ est un ensemble G_δ dense dans $\prod H(\Delta)$ qui ne contient que des suites qui ne sont pas normales sur $D_1 \cup D_2$.

Démonstration. Montrons d'abord que F est un ensemble G_δ dense. Soit $k \in \mathbb{N}$. La condition

$$\sup_{z\in D_1} |f(z)| < \frac{1}{k} \text{ et } \sup_{z\in D_2} |f(z) - (k+1)| < 1$$

définit un ouvert dans $H(\Delta)$. On a donc que $S_{k,n}$ est un ouvert dans $\prod H(\Delta)$, car il s'agit de la préimage de cet ouvert par la projection sur le n^{e} élément et car cette fonction est continue. Soient

$$U = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p \times \prod_{l=p+1}^{\infty} H(\Omega)$$

un ouvert de base de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$ et $\{f_n\} \in U$. Par le théorème de Runge, on peut trouver un polynôme $q(z)$ tel que

$$\sup_{z\in D_1} |q(z)| < \frac{1}{k} \text{ et } \sup_{z\in D_2} |q(z) - (k+1)| < 1$$

Donc, la suite $\{f_1, \ldots, f_p, q, f_{p+1}, \ldots\}$ est à la fois dans l'ouvert U et dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{k,n}$.

Puisque l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{k,n}$ est un ouvert dense pour tout k et que $\prod H(\Delta)$ est un espace de Baire, F est un ensemble G_δ dense.

Soit $\{f_n\} \in F$. Montrons que $\{f_n\}$ n'est pas normale sur $D_1 \cup D_2$. On a pour tout k qu'il existe un n_k tel que

$$\sup_{z\in D_1} |f_{n_k}(z)| < \frac{1}{k} \text{ et} \sup_{z\in D_2} |f_{n_k}(z) - (k+1)| < 1.$$

Puisqu'il n'existe aucune fonction f respectant ces deux conditions pour tout les $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite croissante d'entier $\{j\}$ telle que $\{n_j\}$ est strictement croissante. Or, $f_{n_j} \to 0$ uniformément sur D_1 alors que sur D_2, $f_{n_j} \to \infty$ uniformément. La suite $\{f_{n_j}\}$ ne peut donc avoir de sous-suite convergeant uniformément vers une fonction holomorphe ou uniformément vers l'infini. $\{f_n\}$ n'est donc pas normale sur $D_1 \cup D_2$
. $\square$

Corollaire 4. *L'ensemble des suites $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ universelles et normales sur aucun ouvert de Ω contient un ensemble G_δ dense.*

Démonstration. Soit $\{z_n\}$ une suite de nombres complexes dense dans Ω. Soit r tel que

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_n| \leq r\} \subset \Omega. \tag{3.1}$$

On a alors en posant

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_n| \leq \frac{r}{4} \right\} \text{ et } D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| z - (z_n + \frac{3}{4}r) \right| \leq \frac{r}{4} \right\}$$

que D_1 et D_2 respectent les hypothèses du lemme 6. Posons pour les couples z_n et $r = \frac{1}{s}$ respectant (3.1), $F(n, \frac{1}{s}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{k,n}$ où les ensembles $S_{k,n}$ sont définis comme dans le lemme. On a alors que $F(n, \frac{1}{s})$ est un ensemble G_δ dense de suites non-normales sur $D_1 \cup D_2$. Ces suites ne seront pas normales en particulier sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_n| < r\}$. Posons pour les couples z_n et $r = \frac{1}{s}$ ne respectant pas la condition

(3.1), $F(n, \frac{1}{s}) = H(\Omega)$ et soit

$$\bar{E} = E \cap \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ s \in \mathbb{N}}} F(n, \frac{1}{s}).$$

$\bar{E}$ est un ensemble G_δ dense car cet ensemble est l'intersection dénombrable d'ensembles G_δ denses dans un espace de Baire. Aussi, montrons que $\bar{E}$ ne contient que des suites normales sur aucun ouvert. Soit $U \subset \Omega$ un ouvert. On a alors qu'il existe un indice n et une fraction $\frac{1}{s}$ tels que $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - z_n| \leq \frac{1}{s}\right\} \subset U$. Remarquons que puisque le couple n et $\frac{1}{s}$ vérifie 3.1, les suites qui sont éléments de $F(n, \frac{1}{k})$ ne sont pas normales sur U. $\bar{E} \subset F(n, \frac{1}{s})$ implique que toute suite $\{f_j\} \in \bar{E}$ n'est pas normale sur U. $\square$

On obtient immédiatement la conséquence suivante :

Corollaire 5. *Pour tout domaine $\Omega_n = \Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des suites de fonctions holomorphes normales sur aucun ouvert de Ω est un ensemble G_δ dense dans $\prod H(\Delta)$.*

Il est à remarquer que cette technique ne nous donne pas directement la généricité algébrique. Le lemme suivant, qui caractérise des suites de transformations $\{q_n\}$ pour lesquelles les suites $\{f_n\}$ ne sont pas normales, nous permettra d'obtenir ce fait pour le domaine $\Omega = \mathbb{C}$

Lemme 7. *Soit $\{q_n\}$ une suite de bijections holomorphes et soient Ω et Ω_n des domaines respectant les hypothèses précédentes. Supposons que la suite $\{q_n\}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction $q : \mathbb{C} \to \Omega$. Si pour $z_0 \in q(\mathbb{C})$, la suite $q_n^{-1}(z_0)$ converge dans $\mathbb{C}$, alors $\{f_n\}$ n'est pas normale dans tout voisinage de z_0.*

Démonstration. Soit $\hat{z} = \lim_{n \to \infty} q_n^{-1}(z_0)$. Soit

$$C_m = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \hat{z}| = \frac{1}{m} \right\}$$

le cercle de rayon $\frac{1}{m}$ autour de $\hat{z}$. Montrons qu'on peut construire par récurrence une suite croissante $\{n_k\}$ et une suite $\{\zeta_k\}$ avec $\zeta_k \in C_k$ telles que

$$|f_{n_k}(z_0)| \leq \frac{2}{k+1} \quad \text{et} \quad |f_{n_k} \circ q_{n_k}(\zeta_k)| \geq k - \frac{1}{k+1}.$$

Soit $\{n_j^1\}$ telle que $f_{n_j^1} \circ q_{n_j^1} \to z - \hat{z}$. On peut trouver un n_1 tel que

$$\sup_{|z-\hat{z}|\leq 1} |f_{n_1} \circ q_{n_1}(z) - (z - \hat{z})| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left|q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $\zeta_1 \in C_1$. On a que

$$\begin{aligned} ||f_{n_1} \circ q_{n_1}(\zeta_1)| - 1| &= ||f_{n_1} \circ q_{n_1}(\zeta_1)| - |(\zeta_1 - \hat{z})|| \\ &\leq |f_{n_1} \circ q_{n_1}(\zeta_1) - (\zeta_1 - \hat{z})| \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc

$$|f_{n_1} \circ q_{n_1}(\zeta_1)| \geq \frac{1}{2}.$$

Aussi, puisque $\left|q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left||f_{n_1}(z_0)| - \left|(q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right|\right| &\leq \left|f_{n_1}(z_0) - (q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right| \\ &= \left|f_{n_1} \circ q_{n_1}(q_{n_1}^{-1}(z_0)) - (q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right| \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or, $\left|q_{n_1}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq \frac{1}{2}$ implique que $|f_{n_1}(z_0)| \leq 1$.

Supposons que tous les indices $n_1, \ldots, n_{k-1}$ et les nombres complexes $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ sont trouvés. Soit $\{n_j^2\}$ tel que $f_{n_j^2} \circ q_{n_j^2} \to k^2(z - \hat{z})$. On peut donc trouver un $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\sup_{|z-\hat{z}|\leq 1} \left|f_{n_k} \circ q_{n_k}(z) - k^2(z - \hat{z})\right| \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \left|q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

Soit $\zeta_k \in C_k$. On a que

$$|f_{n_k} \circ q_{n_k}(\zeta_k) - k| = \left|f_{n_k} \circ q_{n_k}(\zeta_k) - k^2(\zeta_k - \hat{z})\right| \leq \frac{1}{k+1}$$

et donc

$$|f_{n_k} \circ q_{n_k}(\zeta_k)| \geq k - \frac{1}{k+1}.$$

Aussi, puisque $\left|q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\left||f_{n_k}(z_0)| - k^2 \left|(q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right|\right| &\leq \left|f_{n_k}(z_0) - k^2(q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right| \\
&= \left|f_{n_k} \circ q_{n_k}(q_{n_k}^{-1}(z_0)) - k^2(q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z})\right| \\
&\leq \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Or, $\left|q_{n_k}^{-1}(z_0) - \hat{z}\right| \leq \frac{1}{k^2(k+1)}$ implique que

$$|f_{n_k}(z_0)| \leq \frac{1}{k+1} + \frac{k^2}{k^2(k+1)} = \frac{2}{k+1}.$$

Les suites $\{n_k\}$ et $\{\zeta_k\}$ ayant les propriétés annoncées existent donc.

Soit U un voisinage de z_0. Puisque $|f_{n_k}(z_0)| \leq \frac{2}{k+1}$, $f_{n_k}(z_0) \to 0$ et f_{n_k} ne peut converger vers l'infini sur U. Supposons que la suite $\{f_{n_k}\}$ contient une sous-suite $\{f_{n_{k_j}}\}$ convergeant vers une fonction f sur U. On a pour toute suite $\{z_n\}$ telle que $z_n \in C_n$ que $q_n(z_n) \to q(\hat{z}) = z_0$, car $z_n \to \hat{z}$ et $q_n \to q$ uniformément sur les compacts. Puisque $\{f_{n_{k_j}}\}$ converge uniformément, on a

$$|f(z_0)| = \lim_{j\to\infty} \left|f_{n_{k_j}} \circ q_{n_{k_j}}(\zeta_{k_j})\right| \geq \lim_{j\to\infty} k_j - \frac{1}{k_j} = \infty.$$

Ce qui est impossible. La suite $\{f_{n_k}\}$ ne contient donc pas de sous-suite uniformément convergente ou uniformément divergente vers l'infini.$\{f_n\}$ n'est donc pas normale sur U.

$\square$

Si la suite $\{q_n\}$ admet une limite q, cette limite est alors injective ou constante car les $\{q_n\}$ sont injectives. Pour le cas où q est injective, nous pouvons alors définir son inverse q^{-1} qui sera aussi injective. Tous les points $z_0 \in \Omega$ respecteront alors les hypotèses du lemme 7 et la suite $\{f_n\}$ ne sera pas normale sur tous les ouverts de Ω.

On obtient à partir de ce lemme et du théorème 5, cette version plus forte du corollaire 5 qui ne s'applique cependant qu'à $\mathbb{C}$.

Corollaire 6. *Soit $\Omega = \mathbb{C}$; l'ensemble F des suites de fonctions entières normales sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$ possèdent les propriétés suivantes :*

1. *F contient un ensemble G_δ dense de $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$*
2. *$F \cup \{0\}$ contient la fermeture d'un espace vectoriel de dimension infini*
3. *$F \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel dense dans $\prod_{l=1}^{\infty} H(\Omega)$*

Démonstration. Soit $\Omega_n = \mathbb{C}$ et $q_n(z) = z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites. Aussi, le lemme 7 et le commentaire qui précède nous assurent que tout les suites universelles ne seront pas normales sur tout ouvert de $\mathbb{C}$. L'ensemble E des suites universelles est donc inclus dans F et les énoncés de ce théorème sont vrais pour F, car vrais pour E. □

Il est possible de démontrer à l'aide du lemme suivant que les familles non-normales et universelles sont génériques pour une plus grande classe de domaines.

Lemme 8. *Soient Ω et Ω_n des domaines du plan complexe tels que pour tout m il existe un indice n_m pour lequel $\{|z| < m\} \subset \Omega_n$ pour $n_m < n$. Soient $w_n : \Omega_n \to \Omega$ et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ deux suites de fonctions holomorphes . Si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *La fermeture de $\{f_n \circ w_n\}$ est $H(\mathbb{C})$*
2. *$\{w_n(0)\}$ a tout ses points d'accumulation dans Ω*
3. *Ω est borné ou il existe une transformation conforme $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$.*

Alors la suite $\{f_n\}$ n'est pas normale sur Ω.

Démonstration. Démontrons d'abord le lemme pour le cas Ω borné. Nous rappellons que par définition $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Aussi, pour $k \in]0, \infty[$ nous dénoterons par $k\mathbb{D}$ l'ensemble $\{|z| < k\}$. Soit g une fonction entière non-constante. Il existe alors une suite $\{n_k\}$ telle que $f_{n_k} \circ w_{n_k}$ converge vers g uniformément sur les compacts. Puisque pour tout m il existe un indice n_m tel que $m\mathbb{D} \subset \Omega_n$ pour $n_m < n$, on peut supposer que $k\mathbb{D} \subset \Omega_{n_k}$. Sinon, cela serait vrai pour une sous-suite de $\{n_k\}$. Dénotons encore par w_{n_k} la restricition de la fonction w_{n_k} au disque $\{|z| < k\}$. On a alors que la fonction

$$w_{n_k}(kz) : \mathbb{D} \to \Omega$$

est holomorphe. Puisque Ω est borné, il existe par le théorème de Montel une sous-suite $\{n_{k_j}\}$ et une fonction holomorphe $w : D \to \Omega$ telles que

$$w_{n_k}(kz) \to w(z) \quad \text{uniformément sur les compacts}$$

Cela sera aussi vrai pour les dérivées de tout ordre et

$$k^t \; w_{n_k}^{(t)}(kz) = w_{n_k}(kz)^{(t)} \to w^{(t)}(z) \text{ pour tout } t \in \mathbb{N}$$

Puisque $\lim_{k\to\infty} k^t = \infty$, $\lim_{k\to\infty} w_{n_k}^{(t)}(0) = 0$ car sinon on aurait $w^{(t)}(0) = \infty$. Donc pour tout $t \in \mathbb{N}$, $w^{(t)}(0) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k}^{(t)}(0) = 0$. On a donc que la suite de fonctions $\{w_{n_k}(z)\}$ converge vers une fonction constante sur Ω et

$$\lim_{k\to\infty} w_{n_k}(z) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k}(0) = w(0) \quad \text{uniformément sur les compacts.}$$

Aussi, l'hypothère 2 nous assure que $w(0) = \lim w_{n_k}(0) \in \Omega$. Supposons que la suite $\{f_n\}$ est une suite normale. On aura que la suite $\{f_{n_k}\}$ contient une sous-suite convergeant uniformément vers ∞ ou uniformément vers une fonction holomorphe. On a que l'ensemble des points d'accumulation de $\{w_n(0)\}$ est inclus dans Ω. Cet ensemble est compact, car fermé et borné. Or, $f_{n_k} \circ w_{n_k}(0) \to g(0) \neq \infty$ implique que $\{f_{n_k}\}$ ne converge pas uniformément vers l'infini. Supposons que $\{f_{n_k}\}$ possède une sous-suite

$\{f_{n_{k_j}}\}$ convergeant vers une fonction holomorphe f. On aurait alors

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}} \circ w_{n_{k_j}}(z) = f(w(0))$$

car la suite $f_{n_{k_j}}$ converge uniformément vers f et que $w_{n_{k_j}}(z)$ converge vers $w(0)$. Or, on a aussi

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}} \circ w_{n_{k_j}}(z) = g(z).$$

Donc, $g(z) = f(w(0))$. Ceci est impossible car $g(z)$ n'est pas constante. On obtient donc que la suite $\{f_n\}$ n'est pas normale sur Ω.

Le cas où il existe une transformation conforme $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ s'obtient du cas où Ω est borné. Puisque ϕ est conforme, on peut poser $g_n = f_n \circ \phi$ et $v_n = \phi^{-1} \circ w_n$. On a pour les suites de fonctions $\{g_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\}$ et $\{v_n : \Omega_n \to \mathbb{D}\}$ que

1. La fermeture de $\{g_n \circ v_n\} = \{f_n \circ w_n\}$ est $H(\mathbb{C})$

2. Le domaine $\mathbb{D}$ est borné

Aussi, z est un point d'accumulation de $\{w_n(0)\}$ si et seulement si $\phi^{-1}(z)$ est un point d'accumulation de $\{\phi^{-1}(w_n(0)\} = \{v_n(0)\}$. Les points d'accumulation de $\{v_n(0)\}$ sont donc a l'intérieur du disque ouvert $\mathbb{D}$, car cela est le cas pour le domaine Ω et la suite $\{w_n(0)\}$. On peut donc appliquer le lemme à la suite $\{g_n\}$ et on obtient que cette suite n'est pas normale sur $\mathbb{D}$. Or, soit V un ouvert de $\mathbb{D}$ et $\{g_{n_k}\}$ une sous-suite ne possédant pas de sous-suite convergeant vers l'infini ou vers une fonction g sur V. On a alors que la suite $\{f_{n_k}\}$ a la même propriété sur l'ouvert $\phi(V)$. En effet, soit $K \subset \phi(V)$ un compact et posons $\zeta = \phi(z)$. On a pour toute fonction $g \in H(V)$ que

$$\sup_{z\in\phi^{-1}(K)} |g_{n_k}(z) - g(z)| = \sup_{\zeta\in K} \left| f_{n_k}(\zeta) - g \circ \phi^{-1}(\zeta) \right|$$

Donc, les suite $\{g_{n_k}\}$ et $\{f_{n_k}\}$ convergent ou divergent ensembles. Il en est de même pour le cas $g = \infty$. $\{f_n\}$ n'est donc pas normale sur Ω.

$\square$

Il est à noter qu'ici les suites peuvent être normales sur certains ouverts de Ω, mais ne le seront pas sur Ω en entier. On obtient de ce dernier lemme le corollaire suivant :

Corollaire 7. *Soit Ω un domaine borné ou tel qu'il existe une transformation conforme $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$. On a alors que l'ensemble F des suites de fonctions non-normales sur Ω a les propriétés suivantes :*

1. *F contient un ensemble G_δ dense de $\prod H(\Omega)$*
2. *$F \cup \{0\}$ contient la fermeture d'un espace vectoriel de dimension infini*
3. *$F \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel dense dans $\prod H(\Omega)$.*

Démonstration. Soit Ω_n et $q_n : \Omega_n \to \Omega$ respectant les hypothèses habituelles. On a alors par le lemme 8 que l'ensemble E des suites universelles ne contient que des suites non-normales sur Ω. Il suffit d'appliquer le théorème 5 pour obtenir les assertions. $\square$

CHAPITRE 4

UNIVERSALITÉ PAR RÉARRANGEMENT

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à un type différent d'universalité obtenue en réarrangeant les termes d'une série.

Définition 4. *Soit X un espace de Banach à scalaires réels ou complexes ; une série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sera dite universelle par réarrangement (ou simplement universelle) si pour tout élément $x \in X$, il existe une bijection σ des naturels telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = x$*

Nous noterons par U_X l'ensemble des séries universelles pour un espace X ; lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion, nous utiliserons seulement U. L'existence de telles séries pour les espaces de Banach à scalaires réels de dimension finie est une conséquence simple du théorème classique de Riemann sur les réarrangements de séries réelles conditionnellement convergentes. En effet, soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et soit $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ une série conditionnellemment convergente. On a alors que la série formée en intercalant les termes des séries $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_1, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_2, \ldots, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_n$ est universelle ; c'est-à-dire que la série

$$a_1e_1 + \ldots + a_1e_n + a_2e_1 + \ldots + a_2e_n + \ldots$$

est universelle. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors qu'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour lesquelles $x = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots c_ne_n$. La série $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ étant conditionnellement convergente, il existe pour $i = 1, 2, \ldots, n$ une permutation σ_i des naturels telle que $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\sigma_i(j)} = c_i$. On a alors que la série obtenue en intercalant les termes des séries $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\sigma_1(j)}e_1, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\sigma_2(j)}e_2, \ldots, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\sigma_n(j)}e_n$, c'est-à dire la série

$$a_{\sigma_1(1)}e_1 + \ldots + a_{\sigma_n(1)}e_n + a_{\sigma_1(2)}e_1 + \ldots + a_{\sigma_n(2)}e_n + \ldots,$$

converge vers x. En effet, cette série converge composante par composante vers x et converge donc vers x. Aussi, cette série est clairement un réarrangement de la première.

En fait, si l'on définit le domaine de somme d'une série, noté $DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n)$, par

$$DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijective telle que } \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = x \right\},$$

il est évident que les séries universelles sont celles pour lesquelles $DS(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n) = X$. Remarquons que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ne converge pour aucun des réarragement de ses termes, alors son domaine de somme est $\emptyset$ et qu'il est donc possible de définir un domaine de somme pour ces séries. Pour les séries convergentes ou possédant un réarrangement convergent dans les espaces de Banach de dimension finie , il est possible de déterminer le domaine de somme à l'aide du théorème de Steinitz [11].

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ une série formelle ; nous noterons par Γ l'ensemble des fonctionnelles linéaires f absolument convergentes, c'est-à-dire telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| < \infty$.

Théorème 6 (Steinitz)**.** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ une série convergente dans un espace de Banach de dimension finie, alors*

$$DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n + \Gamma_0 \tag{4.1}$$

où $\Gamma_0 = \{x \in X \,|\, f(x) = 0, \forall f \in \Gamma\}$.

Le théorème est énoncé pour une série convergente. Or, si $\sum_{n\in N} x_n$ ne converge pas mais que pour un réarrangement σ la somme $\sum_{n\in N} x_{\sigma(n)}$ converge, on a tout de même

$$DS(\sum_{n\in N} x_n) = DS(\sum_{n\in N} x_{\sigma(n)}) = \sum_{n\in N} x_{\sigma(n)} + \Gamma_0.$$

Aussi, $\Gamma_0 = X$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout élément $x \in X$ et pour toute fonctionnelle absolument convergente. Supposons qu'il existe une fonctionnelle absolument convergente f différente de 0. On a alors qu'il existe un élément x dans X pour lequel $f(x) \neq 0$ et donc $\Gamma_0 \neq X$. Aussi,

$$\Gamma = \{0\} \implies \Gamma_0 = X,$$

car on a alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in \Gamma$. Une série dans un espace de Banach de dimension finie sera donc universelle si et seulement si cette série possède un réarragement convergent et que $\Gamma = \{0\}$; c'est à dire si et seulement si pour toute fonctionnelle f différente de 0, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)|$ diverge. Pour $f \neq 0$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|f(x_n)|}{\|f\|}$ convergent ou divergent ensemble. On peut donc pour vérifier si une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est universelle se limiter à l'étude des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)|$ avec f de norme 1.

Il est important de noter que le théorème de Steinitz n'est pas vrai pour tout espace de Banach de dimension infinie. En effet, puisque Γ_0 est un espace vectoriel pour toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, (4.1) impliquerait alors que le domaine de somme est toujours le translaté d'un espace vectoriel. Or, dans tout espace de Banach de dimension infinie, il existe des séries dont le domaine de somme n'est pas le translaté d'un espace vectoriel. Nous reproduirons ici la preuve pour le cas où X est un espace de Hilbert. Pour ce faire, nous montrerons qu'il existe une série dans $L^2[0,1]$ dont le domaine de somme n'est pas convexe. Le cas où X n'est pas un espace de Hilbert s'obtient à l'aide d'un plongement de $L^2[0,1]$ dans X ; la preuve de ce fait [11, p.69] est légèrement technique et nous ne la reproduirons pas ici.

Posons pour $i \in \mathbb{N}$ et $j = \{1,2,\ldots,2^i\}$,

$$f_i^j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{j-1}{2^i} \leq t < \frac{j}{2^i} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que pour tout i, $\sum_{j=1}^{2^i} f_i^j(t) = 1$ et $f_i^j(t) = f_{i+1}^{2j-1}(t) + f_{i+1}^{2j}(t)$. Nous montrerons maintenant que le domaine de somme de la série

$$\sum_{j\in N} x_j := f_1^1 + f_1^2 - f_2^1 - f_2^2 - f_2^3 - f_2^4 + f_3^1 + \ldots$$

n'est pas un espace vectoriel. On a que

$$f_1^1 - f_2^1 - f_2^2 + f_1^2 - f_2^3 - f_2^4 + f_3^1 - f_4^1 - f_4^2 + \ldots = 0$$

dans L^2. En effet, soit $n \in N$. On a alors que pour un certain $i \in \mathbb{N}$ et un certain

$k \in \{1,2,\ldots,2^i\}$,

$$\begin{aligned} S_{3n} &= (f_1^1 - f_2^1 - f_2^2) + (f_1^2 - f_2^3 - f_2^4) + \ldots + (-1)^{(i+1)}(f_i^k - f_i^{2k-1} - f_i^{2k}) \\ &= 0 + 0 + \ldots + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aussi, $\|S_{n+1} - S_n\|_2 = \left\| f_{i_n}^{k_n} \right\|_2$ pour un $i_n \in \mathbb{N}$ et un $k_n \in \{1,2,\ldots,2^{i_n}\}$. Puisque l'ensemble $\{f_i^1, \ldots, f_i^{2^i}\}$ est fini pour tout i, il existe un N à partir duquel $i < i_n$ pour $n > N$. Donc si n tends vers l'infini, il en sera de même pour i_n. Aussi, $\left\|f_i^k\right\|_2 = \left\|f_i^1\right\|_2 = \frac{1}{2^i}$ entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n+1} - S_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{i^n}} = 0.$$

On a donc que la suite S_n tends vers 0.

Considérons maintenant la série

$$f_1^1 + f_1^2 - f_2^1 + f_3^1 + f_3^2 - f_2^2 + f_3^3 + f_3^4 + \ldots$$

qui est un réarrangement de notre première série. On a que ce réarrangement converge vers 1. En effet, $f_1^1 + f_1^2 = 1$ et on peut montrer comme précédemment que

$$-f_2^1 + f_3^1 + f_3^2 - f_2^2 + f_3^3 + f_3^4 + \ldots = 0.$$

Donc, les fonctions constantes 0 et 1 sont éléments de $DS(\sum_{j\in N} x_n)$. Or, puisque les f_i^k ne prennent que des valeurs entières, la fonction constante $\frac{1}{2}$ n'est pas dans le domaine de somme. $DS(\sum_{j\in N} x_n)$ n'est donc pas le translaté d'un espace vectoriel, car cet ensemble n'est pas convexe.

Nous présenterons deux lemmes qui nous permettront d'abord de montrer l'existence de séries universelles par réarrangement pour des espaces de dimension infinie mais aussi de démontrer leur généricité.

Lemme 9. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ une série universelle d'éléments de X et soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ une série finie (i.e. qu'il existe un N tel que $y_n = 0$ pour $n > N$). On a alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n + y_n)$ est* *universelle.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est universelle, il existe une permutation des naturels σ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = x - \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$. La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ étant finie, on obtient pour la permutation σ,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_{\sigma(n)} + y_{\sigma(n)}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} + \sum_{n\in\mathbb{N}} y_{\sigma(n)} \\ &= (x - \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \\ &= x.\end{aligned}$$

Donc, $DS(\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n + y_n)) = X$ □

En particulier, le fait d'enlever ou de rajouter un nombre fini de termes à une série universelle ne changera pas son caractère d'universalité.

Lemme 10. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ deux séries et notons par $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ la série*

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots.$$

On a alors

$$DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) + DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n) \subset DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n)$$

Démonstration. Soit $x \in DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n)$ et $y \in DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n)$, il existe alors des permutations des naturels σ et σ' telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = x \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} y_{\sigma'(n)} = y$$

On obtient donc que le réarrangement $x_\sigma(1) + y_{\sigma'}(1) + x_\sigma(2) + y_{\sigma'}(2) + \dots$ converge vers $x + y$. □

On obtient en particulier que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est universelle et si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ converge, alors la série $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots$ et tous ses réarrangements seront universels.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $X^{\mathbb{N}}$ contienne une série universelle par réarrangement est en fait que X soit séparable, que la dimension de X soit finie ou pas. Nous aurons besoin du lemme suivant sur les réarrangements des termes d'une somme dans un espace de dimension finie [11].

Lemme 11. *Soit $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ un ensemble fini de vecteurs dans un espace vectoriel normé de dimension m. Il existe alors une permutation*

$$\sigma : \{1,2\ldots,n\} \to \{1,2\ldots,n\}$$

telle que pour tout $1 \leq k \leq n$ on ait

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\sigma(i)} - \frac{k-m}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leq m \max_i \|x_i\|.$$

En particulier, ce lemme et l'inégalité

$$|(\|x\| - \|y\|)| \ \leq \|x-y\|$$

impliquent que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\sigma(i)} \right\| \leq m \max_i \|x_i\| + (m+1) \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|.$$

Proposition 3. *Soit X un espace de Banach. $U_X \neq \emptyset$ si et seulement si X est séparable*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition de séparabilité est nécessaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ une série universelle d'éléments de X et soit

$$x = x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_k} \quad \text{avec} \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k.$$

Il existe alors un ensemble fini $I = \{n_i\}_{i=1}^{k}$ d'indices tel que $x = \sum_{i\in I} x_i$. Aussi, $x = \sum_{n\in N} x_\sigma(n)$ implique qu'il existe une suite d'ensembles $I_k = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{k}$ finis telle que $x \in \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_k} x_i}$.

L'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{i\in I} x_i$$

représentant le résultat de toutes les sommes $\sum_{i\in I} x_i$ avec I fini, on a donc les inclusions suivantes :

$$X \subseteq DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{i\in I} x_i} \subseteq X$$

Or, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{i\in I} x_i$ est dénombrable car il s'agit d'une union dénombrable d'ensembles dénombrables. On obtient donc que X est séparable.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit X un espace de Banach séparable sur $\mathbb{R}$. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ dense dans X. Soit $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ une série conditionnellement convergente avec $\left|a_j\right| \leq 1$. Posons

$$A(n,j) = \frac{a_j x_n}{2^n \|x_n\|} \quad \text{et} \quad \mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\} \times \mathbb{N}.$$

Remarquons qu'on a alors $\|A(n,j)\| \leq \frac{1}{2^n}$ et montrons maintenant que

$$\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A(n,j)$$

est universelle. Il est à noter que l'ordre de sommation n'importe pas du moment qu'il est fixé, un réarrangement d'une série universelle restant une série universelle. Soit $x \in X$; trouvons une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ qui converge vers x et qui est un réarrangement de notre série de départ. Puisque $\{x_n\}$ est dense, il existe une suite $\{n_k\}$ tel que $x_{n_k} \to x$. Soit V_k l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par l'ensemble $\{x_i\}_{i=1}^{i=k}$. Puisque $x_n \in V_k$ pour $k > n$, on peut trouver une suite $\{y_k\}$ telle que $y_k \in V_k$ et $y_k \to x$. Nous supposerons d'abord pour simplifier la preuve que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|y_k - y_{k-1}\| < \frac{1}{2^k}. \tag{4.2}$$

Remarquons qu'ici la dimension réelle de l'espace vectoriel V_k est k. Aussi, il est aisé de vérifier que la série suivante est universelle dans V_1 :

$$a_1 \frac{x_1}{2^1 \|x_1\|} + a_2 \frac{x_1}{2^1 \|x_1\|} + \dots.$$

La série $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}_1} A(n,j)$ étant un réarrangement de cette dernière série, elle est aussi universelle. Puisque $y_1 \in V_1$, il existe une bijection $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ telle que $\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\sigma_1(j)) = y_1$. Choisissons N_1 tel que $\left\|\sum_{j=1}^{N_1} A(\sigma_1(j)) - y_1\right\| < \frac{1}{2}$ et tel que

$$\|A(n,j)\| > \frac{1}{4} \text{ implique que } (n,j) \in \{\sigma_1(j)\}_{j=1}^{N_1}.$$

Puisque la dimension de V_1 est 1, on peut supposer sans perdre de généralité que pour $1 \leq n \leq N_1$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} A(\sigma_1(j))\right\| \leq \max_{j\leq N_1} \|A(\sigma_1(j))\| + 2\left\|\sum_{j=1}^{N_1} A(\sigma_1(j))\right\| \tag{4.3}$$

Sinon, le lemme 11 nous dit que cela est vrai pour une permutation de $\{\sigma_1(j)\}_{j=1}^{N^1}$. Posons $z_j = A(\sigma_1(j))$ pour $1 \leq n \leq N_1$ et $I_1 = \{\sigma_1(j)\}_{j=1}^{N^1}$. I_1 est l'ensemble de tous les indices de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pour lesquels l'élément $A(n,j)$ correspondant est placé dans notre série $\sum z_n$. Puisque $\|A(n,j)\| \leq \frac{1}{2}$, (4.3) devient :

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} z_j\right\| \quad \leq \quad 1/2 + 2\left\|\sum_{j=1}^{N_1} z_j\right\|$$

La série $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}_2\setminus I_1} A(n,j)$ peut être obtenue de la série universelle sur V_2

$$a_1 \frac{x_1}{2^1 \|x_1\|} + a_1 \frac{x_2}{2^2 \|x_2\|} + a_2 \frac{x_1}{2^1 \|x_1\|} + \dots$$

en modifiant un nombre fini de termes et en leur appliquant une permutation. Cette série est aussi universelle sur V_2. Aussi puisque $(y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j) \in V_2$, il existe une bijection $\sigma_2 : \mathbb{N} \to N_2 \setminus I_1$ telle que $\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\sigma_1(j)) = (y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j)$. On peut donc trouver un indice m_2 pour lequel les deux conditions suivantes soient satisfaites

1. $\left\|\sum_{j=1}^{m_2} A(\sigma_1(j)) - (y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j)\right\| < \frac{1}{4}$

2. $\|A(n,j)\| \geq \frac{1}{2^2}$ implique que $(n,j) \in I_1 \cup \{\sigma_2(j)\}_{j=1}^{m^2}$.

Aussi, par le lemme 11 on peut supposer que pour $1 \leq n \leq m_2$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} A(\sigma_1(j))\right\| \leq 2\max_{j\leq m_2} \|A(\sigma_2(j))\| + 3\left\|\sum_{j=1}^{m_2} A(\sigma_2(j))\right\|. \tag{4.4}$$

Posons $z_{j+N_1} = A(\sigma_2(j))$ pour $1 \leq j \leq m_2$ et $I_2 = \{\sigma_2(j)\}_{j=1}^{m_2}$. Puisque pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\|A(2,j)\| \leq \frac{1}{4}$ et que si $\|A(1,j)\| > \frac{1}{4}$ pour un indice $j \in \mathbb{N}$ alors $(1,j) \in I_1$, on a que

$$\max_{j\leq m_2} \|A(\sigma_2(j))\| \leq \frac{1}{4}.$$

En posant, $N_2 = N_1 + m_2$, la condition (1) devient alors

$$\left\|\sum_{j=1}^{N_2} z_j - y_2\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{N_1+m_2} z_j - y_2\right\| < \frac{1}{4}$$

et (4.4) implique pour tout $1 \leq n \leq N_2 - N_1$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N_1+1}^{N_1+n} z_j\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n} z_{j+N_1}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} A(\sigma_2(j))\right\| \\
&\leq 2\max_{j\leq N_2} \|A(\sigma_2(j))\| + 3\left\|\sum_{j=1}^{N_2} A(\sigma_2(j))\right\| \\
&\leq \frac{1}{2} + 3\left\|\sum_{j=N_1+1}^{N_2} z_j\right\|.
\end{aligned}$$

On peut donc construire par récurrence une suite d'ensembles finis disjoints $I_k \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, une suite $\{z_n\}$ d'éléments de X, une suite strictement croissante de nombres $\{N_k\}$ et une suite $\sigma_k : \{1,2,\ldots,N_k - N_{k-1}\} \to I_k$ de permutations telles que pour tout k on ait

1. $z_{j+N_{k-1}} = A(\sigma_k(j))$ pour $1 \leq n \leq N_k - N_{k-1}$

2. $\left\|\sum_{j=1}^{N_k} z_j - y_k\right\| < \frac{1}{2^k}$

3. Si $\|A(n,j)\| > \frac{1}{2^n}$ alors $(n,j) \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$

4. Pour $1 \leq n \leq N_k - N_{k-1}$, l'inégalité suivante est vraie :

$$\left\|\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_{k-1}+n} z_j\right\| \leq \frac{k}{2^k} + (k+1)\left\|\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} z_j\right\|$$

La condition 2 entraine que pour la sous-suite $\{N_m\}$, on a

$$S_{N_m} = \sum_{j=1}^{N_m} z_j \to x.$$

Aussi, la condition 4, entraine que la suite S_n converge. En effet, soit $n < p < q$. Il existe alors m et s tels que $N_{m-1} < p \leq N_m$ et $N_{s-1} < q \leq N_s$ On a alors

$$\begin{aligned}
\|S_q - S_p\| = \left\|\sum_{j=p+1}^{q} z_j\right\| &= \left\|\sum_{j=N_{m-1}+1}^{N_{s-1}} z_j + \sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j - \sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=N_{m-1}+1}^{N_{s-1}} z_j\right\| + \left\|\sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j\right\| + \left\|\sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j\right\| \\
&= \|S_{N_{s-1}} - S_{N_{m-1}}\| + \left\|\sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j\right\| + \left\|\sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j\right\|
\end{aligned}$$

Or, si n tend vers l'infini chacun des termes de cette dernière égalité tend vers 0 : la suite $\{S_{n_m}\}$ est de Cauchy et les deux autre termes tendent vers 0 par l'inégalité 4. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j\right\| &\leq \frac{s}{2^s}+(s+1)\left\|\sum_{j=N_{s-1}+1}^{N_s} z_j\right\| \\
&\leq \frac{s}{2^s}+(s+1)(\left\|S_{N_s}-S_{N_{s-1}}\right\|) \\
&\leq \frac{s}{2^s}+(s+1)(\left\|y_s-y_{s-1}+S_{N_s}-y_s+y_{s-1}-S_{N_{s-1}}\right\|) \\
&\leq \frac{s}{2^s}+(s+1)(\|y_s-y_{s-1}\|+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{s-1}}) \\
&\leq \frac{s}{2^s}+(s+1)(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{s-1}}) \to 0
\end{aligned}$$

Il reste donc seulement à montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ est un réarrangement de $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A(n,j)$. Montrons que la fonction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ définie par

$$\sigma : \{1,2,3,\ldots\} \mapsto \{\sigma_1(1),\sigma_1(2),\ldots,\sigma_1(N_1),\sigma_2(1),\sigma_2(2),\ldots,\sigma_2(N_2-N_1),\sigma_3(1),\ldots\}$$

est bijective. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La condition (3) implique qu'il existe un $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$(n,m)\in I_k=\{\sigma_k(j)\}_{j=1}^{N_k-N_{k-1}}.$$

σ est donc surjective. Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tels que $\sigma(n_1)=\sigma(n_2)$. Puisque les ensembles I_k sont disjoints deux à deux, il existe un unique k tel que $\sigma(n_1)=\sigma(n_2)\in I_k$. La fonction σ_k étant bijective, on a forcément que $n_1=n_2$. σ est donc injective.

Le cas où il existe un k pour lequel l'inégalité 4.2 n'est pas respectée s'obtient de manière analogue. En ajoutant entre tout les termes de la suite $\{y_k\}$ des termes de la forme $y_{k-1}+\frac{s(y_k-y_{k-1})}{2^k}$, on trouve une suite y_l telle que

$$y_l \to x \quad \text{et} \quad \|y_l-y_{l-1}\| \leq \frac{1}{2^{\nu(l)}}$$

où $\nu(l)$ est le plus petit entier telle que $y_l\in V_{\nu(l)}$. Remarquons que l'on a $\nu(l)+1<l$ pour l assez grand (sinon l'inégalité 4.2 aurait été respectée par $\{y_k\}$). On répète alors les mêmes étapes que précédemment en approximant le terme y_l à l'aide d'un réarrangement

de la série

$$\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}_{v(l)}\backslash I_{l-1}} A(n,j).$$

Tous les termes de cette série étant dans $v(l)$, on pourra alors remplacer l'inégalité 4 par

$$\left\|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_{l-1}+n} z_j\right\| \leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)\left\|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} z_j\right\|$$

et obtenir comme précédemment que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{q} z_j\right\| &\leq \frac{l}{2^l} + (l+1)\left\|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} z_j\right\| \\
&\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)(\|S_{N_l} - S_{N_{l-1}}\|) \\
&\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)(\|y_l - y_{l-1}\| + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}}) \\
&\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)(\frac{1}{2^{v(l)}} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}}) \\
&\leq \frac{l}{2^l} + \frac{v(l)+1}{2^{v(l)}} + \frac{l}{2^l} + \frac{l}{2^{l-1}} \to 0
\end{aligned}$$

□

Nous présentons maintenant le résultat nouveau et principal de ce chapitre qui montre que, comme pour les cas d'universalité précédents, les séries universelles par réarrangement sont génériques.

Théorème 7. *Soient X un espace de Banach séparable, $X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des séries formelles muni de la topologie produit et S le sous-espace des séries convergentes muni de la topologie induite. On a alors :*

1. *U_X est dense dans $X^{\mathbb{N}}$ (et en particulier dans S)*

2. *$U_X \cup \{0\}$ contient la fermeture dans S d'un espace vectoriel de dimension infinie*

3. *$U_X \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel de dimension infinie dense dans $X^{\mathbb{N}}$*

Démonstration. 1) Soit $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans X contenant l'élément 0. L'ensemble

$$P = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \;\middle|\; \exists N \text{ tel que } x_n = 0 \text{ pour } n > N \text{ et } x_n \in \{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \right\}$$

est donc dense dans $X^{\mathbb{N}}$ et dans S muni de la topologie produit. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in U_X$; l'ensemble $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n + P$ est donc dénombrable et dense dans chacun des espaces considérés. Aussi, par le lemme 9, chacun des éléments de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n + P$ est universel.

2) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ une série universelle telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$. Soit $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une partition des naturels telle que tout ces ensembles sont disjoints deux à deux et telle que $|N_m| = \infty$ pour tout m. Nous noterons par $N_m(i)$ le i^e^ plus petit élément de N_m et par $\alpha(i)$ le i^e^ terme pour une série α. Construisons une suite de séries $\{\alpha_m\}$ en posant

$$\alpha_m(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin N_m \\ x_n & \text{si } i \in N_m \text{ avec } N_m(n) = i \end{cases}$$

Montrons que l'ensemble vectoriel V engendré par les suites $\{\alpha_m\}$ a les propriétés requises. Il est aisé de remarquer que V est de dimension infinie. Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{N} c_j \alpha_{m_j}$ une combinaison linéaire des éléments de $\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ avec $c_j \neq 0$. Alors, on a par construction des α_{m_n}, que pour $i \in N_m$

$$\alpha(i) = \sum_{j=1}^{N} c_j \alpha_{m_j}(i) = c_j x_n \text{ où } N_m(n) = i$$

car $\alpha_{m_j}(i) = 0$ pour $i \notin N_m$. Aussi, la série

$$\alpha' = \sum_{j=2}^{N} c_j \alpha_{m_j} = \sum_{j=2}^{N} c_j \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{j=2}^{N} c_j x$$

converge. On a donc que α est un réarrangement de la série

$$c_1 x_1 + \alpha'(1) + c_1 x_2 + \alpha'(2) + \ldots$$

qui est universelle par le lemme 10, car $c_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est universelle et α' converge. On a donc que α est universelle et que V est un espace vectoriel inclus dans $U_X \cup \{0\}$. Il reste à montrer que la fermeture de V dans S est incluse dans $U_X \cup \{0\}$. Soit $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V convergeant vers un élément $\beta \in S \setminus \{0\}$. On a alors qu'il existe m et $i \in \mathbb{N}_m$ tels que $\beta(i) \neq 0$. Par construction de l'espace V, on a

$$\beta_j(i) = c_j x_n \text{ où } N_m(n) = i$$

pour une suite de scalaires $\{c_j\}$ et

$$\beta(i) = \lim_{j\to\infty} \beta_j(i) = cx_n \quad \text{pour} \quad c = \lim_{j\to\infty} c_j.$$

Or, on aura aussi $\beta(k) = c_j x_n$ où $N_m(n) = k$ et donc $\beta(k) = cx_n$ pour n tel que $N_m(n) = k$. Ainsi,

$$\sum_{k\in N_m} \beta(k) = c \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

qui est universelle car $c \neq 0$. Il suffit donc, par le lemme 10 pour montrer que $DS(\beta) = X$ de démontrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus N_m} \beta(k)$ converge. Or, puisque la série $c\alpha_m(k) = 0$ pour $k \notin N_m$ et que $c\alpha_m(k) = \beta(k)$ pour $k \in N_m$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus N_m} \beta(k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta(k) - \sum_{k\in N_m} c\alpha_m(k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta(k) - c\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\end{aligned}$$

et donc la série converge car il s'agit de la somme de deux séries convergentes.

3) Soit $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une énumération de l'ensemble P. Pour démontrer la dernière assertion, il suffit de poser

$$\alpha_m(i) = \begin{cases} p_m(i) & \text{si } i \notin N_m \\ p_m(i) + x_n & \text{si } i \in N_m \text{ et où } N_m(n) = i \end{cases}$$

et de prendre comme espace vectoriel l'espace engendré par $\{\alpha_m\}$. Par le lemme 9, les α_m sont évidemment universelles et tout comme précédemment les combinaisons linéaires différentes de la série identiquement nulle le sont aussi. Aussi, l'ensemble $\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ étant dense, il en va de même pour l'espace engendré par$\{\alpha_m\}$.

□

En fait, la principale différence entre ce dernier théorème et ceux vus dans les chapitres précédents est que U_X n'est peut-être pas nécessairement un ensemble G_δ dense dans $X^{\mathbb{N}}$: nous ne sommes ni en mesure de prouver ou de réfuter cet énoncé. Pour les espaces de dimension finie, il existe cependant des sous-espaces de $X^{\mathbb{N}}$ pour lesquels les séries universelles sont un ensemble G_δ dense. Nous ne savons pas si un théorème semblable est valable pour les espaces de dimension infinie.

Théorème 8. *Soit X un espace de Banach de dimension finie et soit V un sous-espace vectoriel de $X^{\mathbb{N}}$ contenant les polynômes et tel que pour tout élément $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in V$, il existe σ tel que*

$$DS(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \sum_{n\in N} x_{\sigma(n)} + \Gamma_0$$

(i.e. le théorème de Steinitz est vrai pour tout élément de V ou un de ses réarrangements) ; alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. *$U_X \cap V \neq \emptyset$*

2. *$U_X \cap V$ est un ensemble G_δ dense dans V muni de la topologie induite.*

Démonstration. L'implication 2. $\Longrightarrow$ 1. est évidente.

Pour 1. $\Longrightarrow$ 2., nous montrerons d'abord que $U_X \cap V$ est un ensemble G_δ puis que celui-ci est dense. Posons pour s et $n \in \mathbb{N}$,

$$E(s,N) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in V \;\middle|\; \sum_{n=1}^{N} |f(x_n)| > s, \forall f \in X^* \text{avec } \|f\| = 1 \right\}$$

Montrons que $E(s,N)$ est ouvert. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E(s,N)$. Puisque l'ensemble

$$F = \{f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

est compact pour X de dimension finie, le $\min\limits_{f\in F}\sum\limits_{n=1}^{N}|f(x_n)|$ existe. Aussi, puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E(s,N)$, on a

$$\min_{f\in F}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)| > s.$$

Posons

$$\delta = \frac{\min_{f\in F}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)| - s}{N} > 0$$

Donc, si pour un élément $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$, on a $\|x_n - y_n\| < \delta$ pour $n\in\{1,\ldots,N\}$, on obtient pour tout $f\in F$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)| - \sum_{n=1}^{N}|f(y_n)|)\right| &\leq \sum_{n=1}^{N}\Big||f(x_n)| - |f(y_n)|\Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}|f(x_n) - f(y_n)| \\
&= \sum_{n=1}^{N}|f(x_n - y_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\|x_n - y_n\| \times \|f\| \\
&< N\times\delta \\
&= \min_{f\in F}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)| - s
\end{aligned}$$

Donc, $\sum_{n=1}^{N}|f(y_n)| > s$ et l'ensemble $E(s,N)$ est ouvert.

Pour montrer que $U_X\cap V$ est un ensemble G_δ dans V, nous montrerons que

$$U_X\cap V = \bigcap_{s\in\mathbb{N}}\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E(s,N).$$

En effet, les ensembles $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E(s,N)$ étant ouverts comme réunion d'ouverts et l'intersection étant dénombrable, il suffit de démontrer l'égalité pour obtenir que $U_X\cap V$ est un ensemble G_δ. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} E(s,N)$ et soit $g \in X^*$. Posons $f = \frac{g}{\|g\|}$; puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E(s,N)$, on a pour tout $s \in \mathbb{N}$ qu'il existe N tel que

$$\sum_{n=1}^{N} |f(x_n)| > s.$$

Donc, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)|$ diverge ; ce qui entraîne la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g(x_n)|$. On obtient donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est universelle car pour toute fonctionnelle g différente de 0, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g(x_n)|$ diverge.

Supposons maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in V$ est universelle. Fixons la variable s et montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E(s,N)$. Puisque l'équation (4.1) est valable, on a pour toute fonctionnelle non-nulle $g \in X^*$ que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g(x_n)|$ diverge. Cela est donc vrai en particulier pour toutes les fonctionelles $f \in F$. Donc pour toute fonctionnelle $f \in F$, il existe N_f tel que

$$\sum_{n=1}^{N_f} |f(x_n)| > s$$

Il suffit pour démontrer l'assertion donc de montrer qu'il existe un N indépendant de f pour lequel

$$\sum_{n=1}^{N} |f(x_n)| > s$$

pour toute fonctionnelle $f \in F$. Supposons le contraire. On aurait alors l'existence d'une suite $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctionelles de norme 1 et d'une suite $\{N_{f_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de naturels tendant vers l'infini telles que

$$\sum_{n=1}^{N_{fm}} |f_m(x_n)| \leq s.$$

Or, puisque F est compact, la suite $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possède un point d'accumulation f avec $\|f\| = 1$. Nous pouvons donc supposer la suite $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente et on obtient par continuité de la fonction $g \mapsto \sum_{n=1}^{N_f} |g(x_n)|$ les inégalités suivantes :

$$s < \sum_{n=1}^{N_f} |f(x_n)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N_f} |f_m(x_n)|$$

Aussi, puisque $\{N_{f_m}\}$ tend vers l'infini et que les fonctions $N \mapsto \sum_{n=1}^{N} |f(x_n)|$ sont croissantes pour toute fonctionnelle f, on a

$$s < \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N_f} |f_m(x_n)| \leq \limsup_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N_{f_m}} |f_m(x_n)| \leq s$$

Ceci est impossible. On a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E(s,N)$.

Il reste à démontrer que $U_X \cap V$ est dense dans V. Or, soit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in U_X \cap V \quad (U_X \cap V \neq \emptyset).$$

La séparabilité de X implique que V est séparable. Soit $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de séries finies qui est dense dans V. On a alors que $\{v_m + \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ est dense dans $U_X \cap V$. Aussi, chacun des éléments de cette suite est universel par le lemme 9.

□

Nous obtenons à l'aide des deux théorèmes précédents et du théorème de Steinitz le corollaire suivant :

Corollaire 8. *Pour X un ensemble de Banach de dimension finie, l'ensemble U_X des séries universelles est un ensemble G_δ dense dans l'espace des séries convergentes. De plus, $U_X \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel dense dans $X^{\mathbb{N}}$ et la fermeture d'un espace vectoriel de dimension infinie.*

Bien que les séries universelles par réarrangement et celles universelles par approximation par leurs sommes partielles soient différentes, il est possible d'établir un lien entre ces deux types d'universalité.

Théorème 9. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in U_X$; alors il existe une permutation σ de l'ensemble des naturels telle que pour tout élément $x \in X$, il existe une suite $\{n_k\}$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_k} x_{\sigma(n)} = x.$$

De plus, on peut choisir pour toute suite croissante fixée $\mu = \{\mu_n\}$ de naturels la permutation σ de telle sorte que pour tout $x \in X$ la suite $\{n_k\}$ associée soit incluse dans μ.

Démonstration. Soit $\{v_n\}$ une suite dense dans X et soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in U_X$; nous construirons un réarrangement σ ayant la propriété désirée. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in U_X$, il existe une permutation σ_1 de l'ensemble des naturels telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma_1(n)} = v_1$. Soit $n_1 \in \mu$ tel que

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_1} x_{\sigma_1(n)} - v_1 \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 \in \{\sigma_1(n)\}_{n=1}^{n_1}.$$

Posons $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_1} = \{\sigma_1(n)\}_{n=1}^{n_1}$ et posons $N_1 = \mathbb{N} \setminus \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_1}$. Par le lemme 9, on a que la série $\sum_{n\in N_1} x_n$ est encore universelle, car elle est obtenue en enlevant un nombre fini de termes à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Il existe donc une bijection $\sigma_2 : \mathbb{N} \to N_1$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma_2(n)} = v_2 - \sum_{n=1}^{n_1} x_{\sigma(n)}.$$

Soit $m_2 > 0$ tel que $2 \in \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_1} \cup \{\sigma_2(n)\}_{n=1}^{m_2}$, $n_1 + m_2 \in \mu$ et

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_2} x_{\sigma_2(n)} - \big(v_2 - \sum_{n=1}^{n_1} x_{\sigma(n)}\big) \right\| < \frac{1}{4}$$

En posant $\{\sigma(n)\}_{n=n_1+1}^{n_1+m_2} = \{\sigma_2(n)\}_{n=1}^{m_2}$ et $n_2 = n_1 + m_2$, on obtient que

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_2} x_{\sigma(n)} - v_2 \right\| < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \{1,2\} \subset \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_2}.$$

Nous définirons N_2 par $\mathbb{N} \setminus \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_2}$. Aussi, la fonction

$$\sigma : \{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_2\} \to N_2 \setminus N_1$$

est une bijection. On peut ainsi construire par récurrence deux suites de nombres naturels $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ et $\{\sigma(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles de nombres naturels $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telles que pout tout j on ait :

1. $\{1,2,3,...,j\} \subset \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_j}$

2. $\left\|\sum_{n=1}^{n_j} x_{\sigma(n)} - v_j\right\| < \frac{1}{2^j}$.

3. $\mathbb{N} = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq N_3 \supsetneq \dots$

4. La restriction de la fonction $\sigma(n)$ à l'ensemble

$$\{n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, \dots, n_j\}$$

   est une bijection de cet ensemble vers $N_{j-1} \setminus N_j$.

5. $n_j \in \mu$

Montrons d'abord que la fonction σ est une bijection des naturels. La fonction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est surjective car pour $j \in \mathbb{N}$, on a $j \in \{\sigma(n)\}_{n=1}^{n_j}$. Aussi, σ est injective, car soient s_1 et s_2 tels que $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$. On a par 3 qu'il existe un unique j tel que $\sigma(s_1)$ et $\sigma(s_2)$ soient dans l'ensemble $N_{j-1} \setminus N_j$. Or, par 4 on a que $s_1, s_2 \in \{n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, \dots, n_j\}$ et que $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$ si et seulement si $s_1 = s_2$

Il reste à montrer que le réarrangement a bel et bien la propriété d'approximation voulue. Soit $x \in X$. Puisque $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense, il existe $\{n_j\} \subset \mu$ tel que $\lim_{j\to\infty} v_{n_j} = x$. Or,

$$\left\|\sum_{n=1}^{n_j} x_{\sigma(n)} - v_{n_j}\right\| < \frac{1}{2^j}$$

implique que l'on a aussi

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{n_j} x_{\sigma(n)} = x.$$

□

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Nous avons exposé dans ce mémoire plusieurs exemples d'universalité et démontré que les éléments universels avaient souvent certaines propriétés particulières. Par exemple, toute série trigonométrique est la somme de deux séries trigonométriques universelles. Aussi pour le cas des suites de fonctions universelles au sens de Nestoridis et Fournier, les lemmes 7 et 8 démontrent qu'il existe des suites de transformations conformes $q_n : \Omega_n \to \Omega$ pour lesquelles les suites universelles $\{f_n\}$ sont toujours non-normales. De plus, pour toute série universelle par réarrangement il existe un réarrangement de ses termes pour lequel cette série devient universelle au sens usuel.

Nous avons aussi démontré que plusieurs résultats sur les séries universelles au sens usuel (i.e. celles dont les sommes partielles sont denses dans l'espace considéré) étaient aussi valables pour les séries universelles par réarrangement ; en particulier, celles-ci sont algébriquement génériques dans tout espace de Banach et sont, dans un certaint sens, topologiquement génériques pour les espaces de dimension finie. Nous ne savons pas si ce dernier résultat se généralise au cas de dimension infinie. En effet, notre preuve se base sur le théorème de Steinitz qui n'est jamais vrai dans un espace de Banach de dimension infinie et sur la compacité de la boule de rayon 1 pour l'espace dual. Même si le théorème de Steinitz est vrai pour des sous-espaces (non-complets) d'espace de Banach, nous ne pouvons pas non plus généraliser notre résultat à ces espaces : la boule de rayon 1 dans l'espace dual n'est pas séquentiellement compact pour ceux-ci.

Il existe cependant une différence fondamentale entre les résultats sur les séries universelles que nous avons exposés au chapitre 2 et ceux que nous avons obtenus au chapitre 4. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n z^n$ une série de Taylor universelle de rayon 1. On a alors que pour tout compact K admissible et toute fonction $g \in A(K)$, il existe une suite croissante $\{n_k\}$ telle que

$$S_{n_k} = \sum_{n=0}^{n_k} a_n z^n \to g \quad \text{uniformément sur } K.$$

Or, on a aussi pour cette suite que

$$S_{n_k} = \sum_{n=0}^{n_k} a_n z^n \to \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n z^n \quad \text{uniformément sur les compacts de } \mathbb{D}.$$

La suite S_{n_k} converge donc vers g sur K et vers la fonction définie par la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n z^n$ sur le disque unité. Cette situation n'est pas restreinte au disque unité. Les séries universelles décrites au chapitre 4 n'ont pas cette propriété. En effet bien qu'une série universelle par réarrangement peut converger vers une première fonction f, nous ne nous approchons plus de celle-ci lorsque nous approximons une autre fonction en réarrangeant les termes de cette série. Nous ne savons pas s'il est possible d'obtenir un résultat général pour les séries universelles par réarrangement qui serait semblable à celui des séries universelles : c'est-à-dire, démontrer l'existence d'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ universelle pour un premier espace X mais dont les réarrangements (nécessaires à l'approximation maximale dans X) convergent toujours vers le même élément dans un deuxième espace Y. En particulier pour Ω_1 et Ω_2 deux domaines du plan complexes, nous ne savons pas s'il est possible d'obtenir une série de fonctions entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ convergente vers une fonction f sur Ω_1 et telle que pour toute fonction $g \in \Omega_2$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{\sigma(n)} = f \text{ sur } \Omega_1 \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} f_{\sigma(n)} = g \text{ sur } \Omega_2$$

dans la topologie de la convergence sur les compacts. Il est cependant possible d'obtenir ce type de résultats pour des exemples relativement triviaux. Par exemple, pour deux intervalles disjoints $[a,b]$ et $[c,d]$ on peut aisément créer ce type de séries universelles. En effet, soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues universelle dans $C[a,b]$. Pour chaque n, il existe alors une fonction g_n qui est un prolongement continue de f_n qui est identiquement nul sur $[c,d]$. On a alors qu'il existe pour toute fonction $g \in C[a,b]$ un réarrangement σ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} g_{\sigma(n)} = g \text{ sur } [a,b] \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} g_{\sigma(n)} = 0 \text{ sur } [c,d].$$

Aussi, les auteurs de [1] ont obtenu qu'il était possible d'obtenir des séries universelles à partir d'une fonction et d'un (ou plusieurs) centre d'expansion. Par exemple, pour tout domaine Ω il existe une fonction f holomorphe sur Ω telle que la série de Taylor de f en ζ est universelle et cela pour tout point $\zeta \in \Omega$. Nous ne savons pas non plus si nous pouvons prouver ou réfuter l'existence d'une fonction holomorphe f sur un domaine Ω telle que pour tout point $\zeta \in \Omega$ la série de Taylor de f en ζ est universelle par réarrangement. Puisqu'une série de puissance est absolument convergente dans son disque de convergence et que les termes de cette série ne tendent pas vers 0 à l'extérieur de la fermeture de ce disque, la série de puissance ne pourra au mieux qu'être universelle par réarrangement sur le cercle bornant ce disque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Bayart, K. G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis et C. Papadimitropoulos. Abstract theory of universal series and applications. *Proceeding of the London Mathematical Society*, 96(Part 2):417–463, 2008.

[2] Frédéric Bayart et Vassili Nestoridis. Universal taylor series have a strong form of universality. *Journal d'Analyse Mathématique*, 104:69–82, 2008.

[3] L. Bernal González et A. Montes Rodríguez. Non-finite dimensional closed vector spaces of universal functions for composition operators. *J. Approx. Theory*, 82: 375–391, 1995.

[4] G. D. Birkhoff. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189:473–475, 1929.

[5] P. S. Chee. Universal functions in several complex variables. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 28:189–196, 1979.

[6] C. K. Chui et M. N. Parnes. Approximation by overconvergence of a power series. *J. Math. Anal. Appl.*, 36:693–696, 1971.

[7] S. M. Duĭos Ruis [S. M. Duyos-Ruiz]. Universal functions and the structure of the space of entire functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 279:792–795, 1984. English transl. in : Soviet Math. Dokl. 30 (1984), 713–716.

[8] R. Fournier et V. Nestoridis. Non normal sequences of holomorphic functions and universality. *Comput. Methods Funct. Theory*, 11:309–316, 2011.

[9] K.-G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36:345–381, 1999.

[10] M. Heins. A universal Blaschke product. *Arch. Math.*, 6:41–44, 1955.

[11] V. M. Kadets et M.I. Kadets. *Rearrangements of Series in Banach Spaces*, volume 86 de *Translations of Mathematical Monographs*. AMS, 1991.

[12] J.-P. Kahane. Baire's category theorem and trigonometric series. *J. Anal. Math.*, 80:143–182, 2000. ISSN 0021-7670.

[13] W. Luh. Holomorphic monsters. *J. Approx. Theory*, 53:128–144, 1988.

[14] G. R. MacLane. Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.*, 2:72–87, 1952/53.

[15] J. Marcinkiewicz. Sur les nombres dérivés. *Fund. Math.*, 24:305–308, 1935.

[16] V. Nestoridis. Universal Taylor series. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46:1293–1306, 1996.

[17] J. Pál. Zwei kleine Bemerkungen. *Tôhoku Math. J.*, 6:42–43, 1914/15.

[18] A. Reich. Werteverteilung von Zetafunktionen. *Arch. Math.*, 34:440–451, 1980.

[19] A. I. Seleznev. On universal power series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 28(70):453–460, 1951.

[20] A. A. Talalyan. On the convergence almost everywhere of subsequences of partial sums of general orthogonal series. *Akad. Nauk Armyan. SSR Izv. Fiz.-Mat. Estest. Tekhn. Nauki*, 10(3):17–34, 1957.

[21] S. M. Voronin. A theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39:475–486, 1975. English transl. in : Math. USSR-Izv. 9 (1975), 443–453.

[22] L. Zalcman. A heuristic principle in complex function theory. *The American Mathematical Monthly*, 82:813–818, 1975.