



Structures quantiques de certaines sous-variétés lagrangiennes non-monotones

par

Fabien Ngô

Thèse de doctorat effectuée en cotutelle au

Département de mathématiques et statistiques,
Faculté des arts et sciences

Université de Montréal

et

Département de mathématiques,
Faculté des sciences

Université Libre de Bruxelles

juin 2010

©Fabien Ngô

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

et

Université Libre de Bruxelles
Faculté des sciences

Cette thèse intitulée

**STRUCTURES QUANTIQUES DE CERTAINES
SOUS-VARIETES LAGRANGIENNES NON-MONOTONES**

présentée par

Fabien Ngô

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Simone Gutt, ULB

(président-rapporteur)

Octavian Cornea, UdeM

(Directeur de recherche)

Frédéric Bourgeois, ULB

(Directeur de recherche)

Joel Fine, ULB

(Membre du Jury)

François Lalonde, UdeM

(Membre du Jury)

Mihai Damian, Université de Strasbourg

(Examineur Externe)

Sommaire

Soit (M, ω) un variété symplectique fermée et connexe. On considère des sous-variétés lagrangiennes $\alpha : L \rightarrow (M, \omega)$. Si α est monotone, c.-à-d. s'il existe $\eta > 0$ tel que $\eta\mu = \omega$, Paul Biran et Octav Conea [BC07], [BC09] ont défini une version relative de l'homologie quantique. Dans ce contexte ils ont déformé l'opérateur de bord du complexe de Morse ainsi que le produit d'intersection à l'aide de disques pseudo-holomorphes. On note $(QH(L), *)$, l'homologie quantique de L munie du produit quantique.

Le principal objectif de cette dissertation est de généraliser leur construction à un classe plus large d'espaces. Plus précisément on considère soit des sous-variétés presque monotone, c.-à-d. α est C^1 -proche d'un plongement lagrangian monotone ; soit les fibres toriques de variétés toriques Fano. Dans ces cas non nécessairement monotones, $QH(L)$ va dépendre de certains choix, mais cela sera irrelevant pour les applications présentées ici.

Dans le cas presque monotone, on s'intéresse principalement à des questions de déplaçabilité, d'uniréglage et d'estimation d'énergie de difféomorphismes hamiltoniens. Ceci généralise quelque peu les résultats obtenus dans [BC09] dans le cas monotone.

Dans le cas des fibres toriques de variétés toriques de Fano, le but est de retrouver les résultats obtenus dans [CO06], [Cho08] en utilisant l'homologie quantique relative plutôt que la version Morse-Bott de l'homologie de Floer.

Enfin nous terminons par une application combinant les deux approches, concernant la dynamique d'un hamiltonien déplaçant toutes les fibres toriques non-monotones dans $\mathbb{C}P^n$.

Mots-clés : topologie symplectique, sous-variété lagrangienne, homologie quantique, homologie de floer, norme de Hofer, capacité, complexe des perles, fibres toriques.

Summary

Let (M, ω) be a closed connected symplectic manifold. We consider lagrangian submanifolds $\alpha : L \hookrightarrow (M, \omega)$. If α is monotone, i.e. there exists $\eta > 0$ such that $\eta\mu = \omega$, Biran and Cornea [BC07], [BC09] defined a relative version of quantum homology. In this relative setting they deformed the boundary operator of the Morse complex as well as the intersection product by means of pseudoholomorphic discs. We note $(QH(L, \Lambda), *)$ the quantum homology of L endowed with the quantum product.

The main goal of this dissertation is to generalize their construction to a larger class of spaces. Namely, we consider : either the so called almost monotone lagrangian submanifolds, i.e. α is C^1 -close to a monotone lagrangian embedding, or the toric fibers of toric Fano manifolds. In those cases, we are able to generalize the constructions made in [BC07]. However, in those non necessarily monotone cases, $QH(L)$ will depend on some choices, but in a way irrelevant for the applications we have in mind.

In the almost monotone case, we are mainly interested in displaceability, uniruling and energy estimates for hamiltonian diffeomorphisms. Those are slight generalisation of results obtained in [BC09] in the monotone case.

For toric fibers in toric Fano manifolds, the goal is to recover results obtained in [CO06] and [Cho08] using relative quantum homology instead of Morse-Bott version of Floer homology.

Finally, we end by an application, that combine the two approaches, concerning the dynamics of hamiltonian that displace all non-monotone toric fibers of $\mathbb{C}P^n$.

Keywords : symplectic topology, lagrangian submanifold, quantum homology, Floer homology, Hofer norm, capacity, pearl complex, toric fiber.

Remerciements

A mes femmes, Elisabeth, Eve et Léa évidemment.

"It is not the knowledge but the learning, not the possessing, but the earning, not the being there but the getting there, which gives us the greatest pleasure."

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
à son ami Hongrois Janos B'olyai

Pour ceux qui me croiraient polygame, je les rassure tout de suite ; les femmes dont je parle sont dans l'ordre : ma mère, ma conjointe et ma fille. Je ne pourrai jamais assez les remercier pour m'avoir enduré durant ces nombreuses années¹. D'autant plus que j'ai moi-même, parfois, éprouvé l'envie de me fuir. Je tiens également à remercier non-moins chaleureusement des hommes² à savoir mon père et mon frère. Bien qu'étant parfois très dur avec le premier j'apprécie les nombreux sacrifices auquel il a consenti pour que j'arrive là où je suis³. Quant au second, je crois qu'il vaut mieux ne rien en dire aux risques de dévoiler nos folies communes.

Trêve de billevesées, car il est temps de remercier mes deux superviseurs qui doivent, j'en suis sûr, en avoir marre de mon humour de potache. Je tiens donc à remercier tout d'abord Frédéric qui a été, et ce dès le début, bien plus qu'un directeur ou un professeur. Il m'a littéralement appris le métier de mathématicien et m'a souvent enchanté lors de ses envolés lyriques concernant. Il m'a aussi aidé dans les dédales de l'administrations plus que je ne pouvais l'espérer. Je me doute que je ne suis pas le meilleur des padawan⁴ mais

¹Bien que Léa n'ait pas encore eu cette chance ; ma mère ayant clairement le plus de mérite.

²La raison pour laquelle je n'ai cité que des femmes étaient bien sûr pour faire une feinte sur la polygamie.

³Avec tous ces sacrifices j'aurais pu au moins avoir la médaille Fields... what a shame.

⁴j'ai pas pu m'empêcher.

j'ai pris un réel plaisir à travailler et discuter avec lui et j'espère que le plaisir fut partagé. Je remercie aussi Octav qui m'a donné ce sujet. Ce n'est pas facile de changer de sujet en court de route mais ce fut très enrichissant. Nos discussions diverses et variées sur le temps de midi au Bench, ou au Pho me manqueront à n'en pas douter. En y réfléchissant, elles me manquent déjà. Je m'estime chanceux d'avoir eu d'aussi bon directeur⁵

Je remercie encore une fois ma mère ainsi que ma marraine Marie-Paul pour avoir relu mon manuscrit⁶

Pour en finir avec les remerciements⁷ il y a une liste de personnes que je qualifierais "d'autres" que j'aimerais aussi remercier : Klaus avec qui j'ai appris l'homologie de contact et les actions hamiltoniennes. Shengda et Sam pour leurs conseils avisés et ces longues soirées passées au DMS à parler de maths. Enfin je voulais remercier tout spécialement Nico, alias Néo,⁸ sans qui cette thèse ressemblerait à un agencement chaotique de caractères noirs. Sa maîtrise de la matrice, et de Latex en particulier, dépasse tout entendement.

⁵J'ai du être Gandhi ou Jésus dans une vie antérieure.

⁶S'il reste des fautes, elles en ont donc l'entière responsabilité... Je suis injuste je sais.

⁷car je sens que le lecteur est impatient de commencer à lire ma thèse... s'il savait.

⁸Pour lui le monde se résume à un agencement de petits caractères verts.

Table des matières

- 1 Introduction** 1

- I Prérequis.** 5

- 2 Notions de base.** 7
 - 2.1 Variétés symplectiques : 7
 - 2.2 Symplectomorphismes et difféomorphismes hamiltoniens. 11
 - 2.3 Sous-variétés lagrangiennes. 12
 - 2.4 Déplaçabilité et énergie de déplacement. 13
 - 2.5 Capacité de Gromov. 15
 - 2.6 Topologie symplectique. 17

- 3 Introduction à la théorie des courbes pseudo-holomorphes.** 19
 - 3.1 Généralités. 19
 - 3.2 Opérateur de Cauchy-Riemann. 22
 - 3.3 Opérateur de Cauchy-Riemann linéarisé. 25
 - 3.4 Energie 27
 - 3.5 Propriétés locales : continuation unique. 29
 - 3.6 Transversalité. 29
 - 3.6.1 Enoncés des théorèmes. 30
 - 3.6.2 Théorème des fonctions implicites et de Sard-Smale. 31
 - 3.6.3 Espace des modules universel 33
 - 3.6.4 Transversalité de $\mathcal{M}(A, L, J, H)$ 34
 - 3.7 Structure des disques pseudo-holomorphes. 38
 - 3.7.1 Graphe de non-injectivité. 39

3.8	Compacité et recollement.	40
3.8.1	Le bouillonnement.	41
4	Complexe des perles : cas monotone.	43
4.1	L'opérateur de bord.	45
4.2	Le produit quantique.	45
II	Variétés lagrangiennes presque Monotones.	49
5	Transversalité.	51
5.1	Préliminaires techniques.	55
6	Le complexe des perles.	63
6.1	L'opérateur de bord.	64
6.2	Produit quantique.	77
7	Applications.	93
III	Structure quantique des fibres toriques.	105
8	Fibres toriques.	107
8.1	Variétés toriques.	107
8.2	Structure des espaces de disques.	113
8.2.1	Disques holomorphes d'indice 2	114
8.3	Transversalité.	114
8.4	Opérateur de bord	118
8.5	Invariance.	120
8.6	Canonicité du morphisme de comparaison.	122
8.7	Le produit quantique.	124
8.8	Outils de calculs.	126
8.8.1	Conjecture large-étroite :	128
8.9	Représentations de $\pi_2(M, L)$ et anneaux de coefficients.	131
8.10	Applications et calculs.	134
8.10.1	Déplaçabilité.	134
8.10.2	Potentiel de Landau-Ginzburg.	136

8.11 Quelques calculs.	137
A Indice de Maslov	141
A.1 Indice de Maslov d'un lacet de lagrangienne dans \mathbb{C}^n	141
A.2 classe de Maslov d'une lagrangienne L.	144
B Suite spectrale.	147
C Convergence de Gromov	149
C.1 Application stable.	149
C.2 Convergence de Gromov.	151

Table des figures

- 3.1 Le graphe de non-injectivité \mathcal{G} de u 40
- 5.1 Élément de $\mathcal{P}(x, y, A; f, g, J)$ 52
- 5.2 Élément de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; f, g, J)$ 53
- 5.3 Cas $-1, +1 \in D_1$ à droite et $-1 \in D_1$ et $+1 \in D_2$ à gauche. 61
- 6.1 Élément de $\mathcal{P}(x, y, z; f, f', f'', g, J)$ 78
- 6.2 Arbre labellisé. 80
- 8.1 Ci-dessus les 5 polytopes correspondants au cinq variétés toriques de Fano de dimension réelle 4. De gauche à droite : $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^2$, éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en un point fixe de l'action hamiltonienne, éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en deux points fixes et enfin éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en trois points fixes. 115
- C.1 application stable 150

Chapitre 1

Introduction

La théorie des courbes pseudo-holomorphes a été introduite par Gromov en 1985 [Gro85]. Ces techniques s'avèrent être des outils puissants pour étudier les phénomènes de rigidité qui apparaissent lorsque l'on étudie les variétés symplectiques. Pour ne citer que quelques exemples, pensons aux théorèmes de non-tassement de Gromov¹, aux problèmes d'intersections lagrangiennes ou de points fixes de difféomorphismes hamiltoniens. Dans cette dissertation nous nous intéressons principalement aux sous-variétés lagrangiennes. Ces dernières forment une classe remarquable de sous-variétés, qui ont été étudiées abondamment. En particulier, Floer [Flo88] a prouvé la conjecture d'Arnold dans le cas asphérique en développant une théorie de Morse pour la fonctionnelle d'action symplectique, donnant lieu à une homologie qui porte aujourd'hui son nom. Malheureusement l'homologie de Floer lagrangienne n'est pas toujours définie et une théorie d'obstructions a été développée par Fukaya, Ohta, Ono, Oh [FOOO09b], [FOOO09c]. En outre, même lorsqu'elle est définie, l'homologie de Floer lagrangienne n'est pas toujours aisément calculable. Ces dernières années diverses techniques ont été développées permettant de la calculer. Chekanov [Che98] a développé une version locale de l'homologie de Floer lagrangienne qui elle est toujours définie, ce qui lui a permis de montrer que si une lagrangienne est déplaçable, il y a un seuil énergétique en dessous duquel elle ne l'est plus. Dans [BC07] et [BC09], Biran et Cornea en particulier ont développé, pour les sous-variétés lagrangiennes monotones, un complexe, appelé complexe des perles, dont l'homologie, appelée homologie quantique relative, calcule l'homologie de Floer. Leurs techniques leur ont permis de tirer une série de conclusions intéressantes concernant entre

¹non-squeezing dans la terminologie anglo-saxonne.

autre des problèmes d'uniréglage et de packing relative. Concomitamment, Cho et Oh dans [CO06], [Cho04], [Cho08], ont calculé l'homologie de Floer des fibres toriques de variétés toriques Fano. Plus tard, FOOO ont généralisé leurs techniques au cas des fibres toriques de variétés toriques quelconques. Ce qui leur a permis, entre autre, d'exhiber une famille à un paramètre de fibre torique non-déplaçable dans l'éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en 1 point.

Dans ce travail nous généralisons la construction du complexe des perles à deux classes d'exemples :

1. les variétés lagrangiennes presque monotones.
2. Les fibres toriques de variétés toriques de Fano.

Dans le premier cas on a le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone dont la constante de monotonie vaut η . Soit J_0 une structure presque complexe compatible avec ω . Pour toutes constantes positives ϵ et pour tout $K > 3\eta + 2\epsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ et un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ tels que pour tout $L \in \mathcal{W}(L_0)$ et pour presque tout $J \in \mathcal{W}(J_0)$, l'homologie quantique relative de L , $QH(L, \Lambda; J_0, K, \epsilon)$ est bien définie. De plus il existe un produit, appelé produit quantique :*

$$* : QH_k(L) \otimes QH_l(L) \rightarrow QH_{k+l-n}$$

dotant $QH(L)$ d'une structure d'algèbre associative, non-commutative, avec unité.

On prouve alors les corollaires suivants :

Corollaire 1. *Soit L une variété lagrangienne presque monotone déplaçable. Alors pour tout K, ϵ suffisamment grand, $QH(L) = 0$ et L est uniréglée.*

Corollaire 2. *Si L_0 est une variété lagrangienne monotone déplaçable, alors toute lagrangienne C^1 -proche de L_0 est uniréglée.*

Pour les fibres toriques de variétés toriques de Fano, on a :

Théorème 2. *Soit (X, ω_0, J_0) une variété torique de Fano. Si $L \hookrightarrow (X, \omega_0)$ est une fibre torique, alors pour toutes constantes K, ϵ suffisamment grande, l'homologie quantique relative de L , $QH(L, \Lambda; J_0, K, \epsilon)$ est bien définie et muni du produit quantique. De plus $QH(L)$ ne dépendant ni de K ni de ϵ .*

Corollaire 3. *Les résultats obtenus dans [CO06] et [Cho08].*

Nous n'avons pas réussi à obtenir le résultat des FOOO concernant la famille à un paramètre de fibres toriques non-déplaçables. Pour le faire il faudrait définir l'homologie quantique avec bulk, que nous n'avons pas réussi à interpréter à temps. Il semblerait que l'on puisse le faire car la déformation avec bulk est en fait une généralisation de l'action de module de l'homologie quantique de la variété ambiante sur l'homologie quantique de L . Cette action est définie dans [BC07]. Enfin on cite un corollaire qui combine les deux techniques.

Corollaire 4. *Soit $H : \mathbb{C}P^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien qui déplace toutes les fibres toriques sauf le tore de Clifford. Alors il existe des cordes hamiltoniennes de H à bord dans le tore de clifford qui sont dégénérées.*

Ce corollaire n'est pas spectaculaire, mais heuristiquement on peut espérer qu'un tel hamiltonien a un nombre infini de cordes dégénérées. Malheureusement nous n'avons pas réussi à prouver ce résultat car il faudrait adapter le résultat de compacité (7.0.7) au cas d'orbites isolées mais dégénérées. Ce que nous n'avons pas encore réussi à prouver.

Nous donnons ici une description de la thèse. Elle est séparée en trois parties. La partie 1 est, comme son nom l'indique un rappel. Dans le deuxième chapitre on rappelle les définitions et notions de base en motivant leur introduction dans un style qui je l'espère plaira au lecteur. Le chapitre 3 rappelle quelques faits bien connus de la théorie des courbes pseudoholomorphes. Enfin le chapitre 4 de cette première partie donne la définition du complexe des perles dans le cas monotone. Etant constitué de rappels, le lecteur expérimenté peut donc sans problème sauter cette première partie.

La partie 2 est consacrée à la construction de l'homologie quantique relative dans le cas presque monotone. Le chapitre 5 traite des problèmes de transversalité d'espace des modules et le chapitre 6 de compacité. C'est là qu'on prouve l'identité $\delta^2 = 0$, l'invariance et qu'on construit le produit quantique. Enfin le chapitre 7 est dédié aux applications dont nous avons parlées. Toutes les preuves du chapitre 7 sont basées sur l'existence d'une homotopie de chaîne entre l'identité et l'application nulle.

La partie 3 enfin est dédié à la construction du complexe des perles pour les fibres toriques de variétés toriques de Fano.

Première partie

Prérequis.

Chapitre 2

Notions de base.

"Everything is a lagrangian submanifold"

Alan Weinstein¹

Ce chapitre a pour but de rappeler certaines notions fondamentales de géométrie symplectique. Ce n'est certainement pas une introduction exhaustive au sujet mais ce chapitre tente de motiver l'introduction de certaines notions de topologie symplectique dont certaines sont étudiées dans cette dissertation. C'est donc une sorte de mise en bouche qui se veut moins aride qu'une liste de définitions. Le lecteur désireux d'obtenir de plus amples informations sur les motivations mathématiques, physiques et historiques de la géométrie symplectique ainsi que des notions introduites dans ce chapitre est invité à consulter l'abondante littérature sur le sujet. On conseille particulièrement les livres de Arnold [Arn99], Mc Duff et Salamon [MS98], ainsi que les notes de Weinstein [Wei79].

2.1 Variétés symplectiques :

Mécanique hamiltonienne :

La géométrie symplectique est une fille de la mécanique classique. Elle apparaît lorsque l'on écrit les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien. Rappelons que les équations du mouvement d'un système de particules sont obtenues en résolvant le principe variationnel dit de Hamilton pour des fonctionnelles d'actions du

¹[Wei79]

type :

$$S(q) = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt.$$

où $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction lagrangienne associée au système dynamique. Les équations d'Euler-Lagrange qui fournissent les extrémums de S , et donc les équations du mouvement, sont des équations différentielles du second ordre en la position :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Elles se réécrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2} \ddot{q} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial v} \dot{q} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial v} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$$

Lorsque l'on désire faire un changement de variables pour obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre, le résultat obtenu n'est pas très satisfaisant. Il est plus judicieux de poser :

$$p = \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}(q, \dot{q}).$$

On obtient alors un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= + \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec

$$H(q, p) = \langle p, v \rangle - \mathcal{L}(q, v) \quad (2.3)$$

Cette fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction hamiltonienne et représente l'énergie totale du système.

Les équations (2.2), appelées **équations de Hamilton**, sont étonnamment symétriques et cachent une étonnante structure géométrique². En posant

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_n \\ \text{id}_n & 0 \end{pmatrix},$$

et $z = (q, p)$ on peut encore réécrire les équations (2.2) de la manière suivante :

$$\dot{z}(t) = -J_0 \nabla H(z(t)). \quad (2.4)$$

²Historiquement ces équations apparaissent dans une oeuvre posthume de 1810 de Lagrange dans un problème de dynamique céleste. On peut dire que 2010 est donc le bicentenaire de la géométrie symplectique.

En étudiant le flot associé au champ de vecteur $X_{H_t} = -J_0 \nabla H_t$ on peut se demander quelle quantité ce dernier préserve. Il se trouve que le flot associé à (2.4), c.-à-d.

$$\phi_t : (q, p) \rightarrow (q(t), p(t)), \quad (2.5)$$

où $(q(t), p(t))$ sont solutions de (2.2), préserve la structure suivante :

$$\omega_0(z, z') = -(z, J_0 z').$$

qu'on peut réécrire en coordonnées positions-impulsions généralisées (q_i, p_i) : $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ ou encore plus simplement $dp \wedge dq$. Cette 2-forme est appelée la **2-forme symplectique standard** de \mathbb{R}^{2n} . On voit donc apparaître une structure symplectique de manière naturelle comme une structure invariante sous l'action du flot des hamiltoniens (2.5), c.-à-d. invariante sous l'évolution de n'importe quel système physique. Remarquons qu'on peut définir le champ de vecteur hamiltonien par la condition :

$$\iota_{X_{H_t}} \omega_0 = -dH_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Le même raisonnement peut être fait pour des espaces de configurations³ quelconques L . Dans ce cas un système dynamique est décrit dans l'espace des phases qui est l'espace des conditions initiales possibles⁴ : positions et impulsions conjuguées (q, p) et qui n'est autre que l'espace cotangent à L . La dynamique du système est quant à elle entièrement encodée dans la fonction hamiltonienne H associée à ce système. Cette dernière représente l'énergie totale du système. Dans ce cas également apparaît une structure symplectique qui localement peut s'écrire comme $dp \wedge dq$. De manière abstraite la structure symplectique standard ω_{can} sur T^*L est définie par $\omega_{\text{can}} = -d\lambda$ où λ la forme tautologique sur T^*L , c.-à-d. tel que pour toute 1-forme $\alpha : L \rightarrow T^*L$, λ vérifie $\alpha^* \lambda = \alpha$, condition qu'on peut reformuler en disant que la restriction de λ à n'importe quel graphe de 1-forme est la 1-forme elle-même. Comme précédemment on définit un champ de vecteurs hamiltonien par $\iota_{X_{H_t}} \omega_{\text{can}} = -dH_t$ où $H : \mathbb{R} \times T^*L \rightarrow \mathbb{R}$. Ici aussi le flot hamiltonien préserve la structure symplectique.

Les formes d'aire sur une surface sont un autre exemple de variétés symplectiques. On montre que localement ces formes d'aire prennent la forme $dp \wedge dq$. Il est donc naturel de

³Les physiciens appellent espace de configurations les variétés différentiables apparaissant dans leurs problèmes.

⁴on peut aussi voir cet espace comme l'espace des positions et impulsions possibles ou encore comme l'espace des états classiques.

vouloir généraliser ces structures et étudier la géométrie qui leur est associée. En particulier on peut se demander si en dimension supérieure la notion de volume est différente de la notion de structure symplectique. On verra plus loin que ces différences justifient l'introduction d'invariants symplectiques appelés *capacités symplectiques* qui jouent, pour les formes symplectiques, le même rôle que le volume total pour les formes volumes ; mais qui sont fortement et étonnamment différentes de ces derniers.

Plus généralement on voudrait donc définir une structure symplectique comme une 2-forme qui est localement la structure standard. La bonne généralisation de la notion de structures symplectiques est donnée par la définition suivante :

Définition 2.1. *Une variété symplectique* (M, ω) , est la donnée d'une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ fermée et non-dégénérée sur la variété lisse M ⁵.

Il y a donc deux conditions pour qu'une 2-forme définisse une structure symplectique. La première est de nature analytique puisqu'elle nous dit que ω est une solution de $d\omega = 0$. Condition qui peut aussi être vue comme une condition topologique : $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$. En particulier ω est localement exacte. La non-dégénérescence est une condition algébrique et est équivalente à demander que :

$$I_\omega : T_x M \rightarrow T_x^* M : X \rightarrow \zeta \rightarrow \omega(\zeta, \cdot),$$

soit un isomorphisme. Ces deux conditions ont des conséquences très surprenantes. Par exemple la deuxième condition est similaire à celle définissant une métrique riemannienne. Cependant dans un cas le tenseur est anti-symétrique, c.-à-d. une 2-forme, alors que dans l'autre c'est un tenseur symétrique. Ces dissemblances ont des conséquences complètement différentes quant aux propriétés géométriques de ces structures. D'abord la géométrie symplectique est bien plus flexible que la géométrie riemannienne. En effet contrairement à la géométrie riemannienne il n'y a pas d'invariant local pour une variété symplectique (Théorème de Darboux⁶). En géométrie riemannienne la courbure définit un tel invariant et le groupe des isométries est par conséquent fini-dimensionnel contrairement au groupe des symplectomorphismes (voir plus loin pour la définition.) qui, comme on le verra, est toujours infini-dimensionnel. Par contre les structures symplectiques sont moins abondantes que les structures riemanniennes. C'est d'ailleurs toujours une question ouverte

⁵Remarquons que ces conditions forcent M à être de dimension paire.

⁶Voir par exemple [MS98].

de savoir quelles variétés admettent une structure symplectique. Bien qu'il existe beaucoup d'obstructions à l'existence d'une structure symplectique sur une variété donnée, il n'y a pas encore de critères généraux qui identifient les variétés en admettant une⁷.

2.2 Symplectomorphismes et difféomorphismes hamiltoniens.

Dans la suite de ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, on ne considère plus que des variétés symplectiques compactes⁸. Comme nous l'avons mentionné le flot hamiltonien préserve la structure symplectique standard. De manière générale, si (M, ω) est une variété symplectique, un **symplectomorphisme** est un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ satisfaisant : $\phi^*\omega = \omega$. On note $\text{Symp}(M, \omega)$ le groupe des symplectomorphismes et $\text{Symp}_0(M, \omega)$ sa composante connexe à l'identité. Soit maintenant $\phi \in \text{Symp}_0(M, \omega)$ un symplectomorphisme faisant partie de la composante connexe à l'identité. Il existe une **isotopie symplectique**⁹ $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ joignant ϕ à l'identité. On considère le champ de vecteurs X_t défini par $\dot{\phi}_t = X_t \circ \phi_t$. On peut vérifier que ce dernier vérifie :

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega = d\iota_{X_t} \omega = 0, \quad (2.6)$$

c.-à-d. $\iota_{X_t} \omega$ est fermée. De même étant donné un champ de vecteurs vérifiant (2.6), on peut lui associer une isotopie qui sera une isotopie symplectique.

Une classe remarquable de symplectomorphismes est donnée par ceux provenant de l'évolution de systèmes dynamiques, c'est à dire, comme on l'a vu plus haut, associés à une fonction d'énergie H .

Définition 2.2. *Un difféomorphisme Hamiltonien est un symplectomorphisme $\phi \in \text{Symp}_0(M, \omega)$ pour lequel il existe une isotopie symplectique ayant un champ de vecteur associé X_t pour lequel $\iota_{X_t} \omega$ est exact, c.-à-d. qu'il existe une fonction $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\iota_{X_t} \omega = -dH_t, \quad (2.7)$$

On note $\text{Ham}(M, \omega)$ l'ensemble de ces difféomorphismes. Remarquons que par construction $\text{Ham}(M, \omega) \subset \text{Symp}_0(M, \omega)$.

⁷Pour toutes ces questions et plus, voir [MS98] et [Wei79].

⁸La raison est que cela simplifie les explications en évitant de devoir parler de certaines conditions que les fonctions qu'on considère devraient vérifier dans les cas ouvert et avec bord. Le lecteur curieux peut alors consulter [MS98] et [Pol01] pour compléter l'exposition faite ici.

⁹un chemin de symplectomorphismes

Comme nous l'avons mentionné plus haut, en dimension 2 les notions de forme symplectique et de forme volume se confondent. En particulier le groupe des difféomorphismes préservant le volume $\text{Vol}(M, \text{dvol})$ coïncident avec $\text{Symp}(M, \omega)$. Si la dimension de M vaut $2n$, avec $n > 1$, le fait que ω soit non-dégénérée, implique que ω^n est une forme volume sur M . Il s'ensuit que $\text{Symp}(M, \omega) \subset \text{Vol}(M, \omega^n)$. On peut alors se demander si ces groupes sont différents ou non et si oui à quel point. Rappelons que les variétés symplectiques sont bien plus flexibles que les variétés riemanniennes. A l'autre bout du spectre, il y a les variétés munies d'une forme volume qui sont elles très flexibles. C'est une des découvertes remarquables, due à Gromov [Gro85], que les structures symplectiques sont en fait bien plus rigides que les formes volumes. Nous reviendrons avec un peu plus de détails sur cette question lorsque nous motiverons l'introduction de la notion de capacité à la fin de ce chapitre.

2.3 Sous-variétés lagrangiennes.

Rappelons que le principal objet d'étude de cette dissertation est les sous-variétés lagrangiennes. Les sous-variétés sont presque plus importantes dans l'étude des structures symplectiques que les structures symplectiques elles-mêmes. La plupart des problèmes apparaissant en géométrie symplectique ont une interprétation en terme de sous-variétés lagrangiennes.

Définition 2.3. Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Soit L une variété de dimension n . Une *sous-variété lagrangienne* est un plongement $\alpha : L^n \rightarrow M^{2n}$ vérifiant $\alpha^* \omega = \omega$.

Exemple 2.1. Il est facile de voir que le graphe d'une 1-forme $\alpha : L \rightarrow T^*L$ est une sous-variété lagrangienne ssi $d\alpha = 0$. Si α est exacte, c.-à-d. $\alpha = df$ où $f : L \rightarrow \mathbb{R}$; le plongement lagrangien est dit exact et f est appelé fonction génératrice. Bien sûr la section nulle $O_{T^*L} \cong L$ est une sous-variété lagrangienne¹⁰

L'exemple suivant lie la notion de symplectomorphisme à celle de sous-variétés lagrangiennes et montre l'importance de ces objets.

¹⁰On comprend maintenant mieux la citation apparaissant au début du chapitre puisque de cette manière n'importe quelle variété peut être vue de manière canonique comme une sous-variété lagrangienne.

Exemple 2.2. Soit $\phi : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ un symplectomorphisme. Munissons $M \times M$ de la structure symplectique produit $\omega \oplus -\omega$. On peut vérifier aisément que le graphe de ϕ , Γ_ϕ , est une sous-variété lagrangienne de $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$.

L'exemple précédent montre un des nombreux intérêts des sous-variétés lagrangiennes. Certains problèmes concernant la dynamique d'un symplectomorphisme ϕ peuvent se traduire en problèmes géométriques concernant son graphe vu comme sous-variété lagrangienne. Pour ne citer qu'un exemple, l'étude des points fixes de ϕ revient à étudier des problèmes d'intersections de Γ_ϕ avec la diagonale de $\Delta \subset (M \times M, \omega \oplus -\omega)$.

Le théorème de voisinage de Weinstein montre un autre aspect de la grande flexibilité des structures symplectiques :

Théorème 2.3.1 (Théorème de voisinage). Soit $\alpha : L \hookrightarrow (M, \omega)$ une variété sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω) . Alors il existe un voisinage $\mathcal{N}(L)$ de L , un voisinage $\mathcal{W}(\mathcal{O}_{T^*L})$ de la section nulle \mathcal{O}_{T^*L} et un symplectomorphisme $\phi : (\mathcal{N}(L), \omega) \rightarrow (\mathcal{W}(\mathcal{O}_{T^*L}), -d\lambda)$. Par conséquent au voisinage d'une lagrangienne, toutes les variétés symplectiques sont diffeomorphes.

Comme nous venons de le voir, étant donné un symplectomorphisme $\phi : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$, on peut voir son graphe Γ_ϕ comme une sous-variété lagrangienne. Si ϕ est C^1 proche de l'identité, on peut alors appliquer le théorème de voisinage ci-dessus ainsi que l'exemple (2.1) et constater qu'il y a une correspondance biunivoque entre les symplectomorphismes C^1 -proche de l'identité et les 1-formes fermées C^1 proches de la section nulle de \mathcal{O}_{T^*M} .

2.4 Déplaçabilité et énergie de déplacement.

Une des questions adressée dans cette dissertation concerne la *déplaçabilité* des lagrangiennes et surtout l'estimation de leur *énergie de déplacement*. Il est intéressant de noter que certaines lagrangiennes ne peuvent être disjointes d'elles même par un diffeomorphisme hamiltonien. Ce phénomène montre un autre aspect de la rigidité en géométrie symplectique. Leur preuve est basée sur l'inégalité suivante :

$$E(K) \geq \frac{1}{2} \text{Gr}(K).$$

Définition 2.4. Une sous-variété lagrangienne $\alpha : L \rightarrow (M, \omega)$ est dite **déplaçable**, si il existe un difféomorphisme hamiltonien $\phi_H \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que :

$$\phi_H(L) \cap L = \emptyset \quad (2.8)$$

Avant de parler d'énergie de déplacement, nous faisons un détour sur une découverte remarquable due à Hofer¹¹. Nous n'entrerons bien sûr pas dans les détails et renvoyons le lecteur à la littérature précédemment citée. La notion d'énergie particulièrement féconde développée par Hofer porte aussi le nom de *norme de Hofer*. Elle permet d'associer une métrique biinvariante (sous l'action de $\text{Ham}(M, \omega)$) sur le groupe $\text{Ham}(M, \omega)$. Ce qui permet de faire de la géométrie sur le groupe $\text{Ham}(M, \omega)$. Nous n'étudierons cependant pas ces questions mais nous nous servirons de cette notion pour avoir une approche quantitative de la question suivante : *Si L est une lagrangienne déplaçable, est-il facile de la déplacer ?*

Définition 2.5. Soit $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$. Etant donné un chemin $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ dans $\text{Ham}(M, \omega)$ joignant l'identité à ϕ , on peut considérer le chemin de hamiltoniens normalisés associé $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelons qu'un hamiltonien est dit normalisé ssi $\int_M H \omega^n = 0$. Posons :

$$\ell(\phi_t) = \int_0^1 \|H_t\|_\infty dt.$$

où

$$\|H_t\|_\infty = \max_{x \in M} H_t(x) - \min_{x \in M} H_t(x).$$

La **norme de Hofer**, ou encore l'**énergie**, de ϕ est définie par :

$$E(\phi) = \inf\{\ell(\phi_t)\}, \quad (2.9)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins hamiltoniens joignant l'identité à ϕ .

Revenons maintenant à la notion de déplaçabilité.

Définition 2.6. Soit $K \hookrightarrow (M, \omega)$ un sous-ensemble de (M, ω) . L'**énergie de déplacement** de K est définie par :

$$E(K) = \inf\{E(\phi) \mid \phi \in \text{Ham}(M, \omega) \text{ et } \phi(K) \cap K = \emptyset\}. \quad (2.10)$$

Dans le cas où K ne peut être disjoint de lui même par un difféomorphisme hamiltonien on pose $E(K) = +\infty$.

¹¹Voir [Hof92], ainsi que [Pol01] pour une introduction détaillée et agréable.

2.5 Capacité de Gromov.

Afin de comprendre le groupe des symplectomorphismes, on peut étudier l'action du groupe des symplectomorphismes sur certains sous-ensembles de la variété M et chercher s'il y a des propriétés partagées par tous les symplectomorphismes. Pour comprendre le problème reprenons la comparaison avec le groupe des difféomorphismes préservant le volume. C'est un théorème bien connu, démontré par Moser [Mos65]¹², qu'étant donné deux formes volumes σ et τ sur une M vérifiant $\int_M \sigma = \int_M \tau$ il existe un difféomorphisme ϕ vérifiant $\phi^*\tau = \sigma$. Par conséquent pour que des formes volumes soient équivalentes il faut et il suffit qu'elles calculent le même volume total.

Notons : $(B(r), \sigma_0)$ est la boule de rayon r dans \mathbb{R}^N , où σ_0 est le volume euclidien. Soit (M, τ) une variété munie d'une forme volume τ . Alors il existe un plongement $B(r) \rightarrow M$ vérifiant $\phi^*\tau = \sigma_0$ ssi $\int_M \tau \geq \int_{B(r)} \sigma_0$ ¹³.

En géométrie symplectique la situation est complètement différente. Une forme symplectique est un objet de nature bidimensionnelle. On voudrait par analogie avec les formes volumes avoir une notion de taille liée à la structure symplectique. Bien sûr cette notion doit encoder plus d'informations que le volume. Ces observations mènent à la notion de capacité symplectique.

Définition 2.7. Soit (M, ω) une variété symplectique. La *capacité de Gromov* de M est :

$$\text{Gr}(M, \omega) := \sup\{\pi r^2 \mid \exists \text{ un plongement } \phi : (B(r), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega), \phi^*\omega = \omega_0\} \quad (2.11)$$

On peut montrer que Gr vérifie les propriétés suivantes :

- **Monotonie** : Si $\phi : (M_1, \omega_1) \hookrightarrow (M_2, \omega_2)$ est un plongement symplectique, $\text{Gr}(M_1, \omega_1) \leq \text{Gr}(M_2, \omega_2)$.
- **Conformalité** : $\text{Gr}(M, \lambda\omega) = \lambda \text{Gr}(M, \omega)$
- **Non-trivialité** : $\text{Gr}(B(1), \omega_0) > 0$ et $\text{Gr}(Z(1), \omega_0) < +\infty$, où $Z(r) = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, où on a considéré les coordonnées impulsions-positions conjuguées $z = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$ ¹⁴.

¹²généralisé par Greene et Shiohama [GS79] pour les variétés non-compactes.

¹³Pour la preuve de ce résultat il suffit de considérer une fonction de Morse avec un seul maximum. La variété instable de ce maximum est un disque dont le volume égale le volume de M ; on applique ensuite le théorème de Moser pour obtenir le résultat.

¹⁴Il est important de considérer un splitting symplectique pour $Z(r)$. En effet dans le cas contraire la non-trivialité n'est pas assurée, voir le chapitre 12 de [MS98] pour un contre-exemple.

La non-trivialité découle du célèbre Théorème de non-tassement démontré par Gromov [Gro85]. :

Théorème 2.5.1. *Soit $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ la structure symplectique standard. Soit*

$$\phi : B(r) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow Z(R) \subset \mathbb{R}^{2n}$$

un plongement symplectique de la boule de rayon r $B(r)$ dans le cylindre de rayon R , $Z(R)$. Alors

$$r \leq R.$$

En particulier $\text{Gr}(B(1), \omega_0) = \pi = \text{Gr}(Z(1), \omega_0)$.

Ce théorème nous apprend que les structures symplectiques sont bien plus rigides que les formes volumes. En effet ici il n'est pas possible de plonger symplectiquement une grosse boule dans un cylindre long et fin. Ce qui comme on l'a vu serait possible dans le cas d'un plongement préservant le volume. Il y a aussi une interprétation physique du théorème de non-tassement. En effet celui-ci peut être vu comme une version classique du théorème d'incertitude d'Heisenberg. Bien sûr je mens un peu en disant ça car il n'y a pas de constante \hbar qui apparaît. Cependant, la dynamique hamiltonienne garde en quelque sorte une trace du quantique. Pour comprendre ceci considérons un système à un degré de liberté. Il y a donc une position q et une impulsion conjuguée p dans l'espace des phases \mathbb{R}^2 . Supposons que la constante \hbar me soit donnée. Au temps $t = 0$, ma particule se trouve dans un disque de rayon \hbar centrée en l'origine. Le théorème du non-tassement m'apprend alors que peu importe le système dynamique, l'évolution du système ne pourra pas faire diminuer l'incertitude. En outre au plus, ma connaissance sur la position augmente au plus l'ellipsoïde sera long dans la direction des p . Ici le phénomène est équivalent au théorème de Moser car on est en dimension 2 mais ceci reste vrai en dimension supérieure. Pour une discussion passionnante et détaillée sur le sujet voir [dGL09] ainsi que les références s'y trouvant.

Les foncteurs c de la catégorie dont les objets sont les variétés symplectiques et les morphismes, les plongements symplectiques, dans la petite catégorie (\mathbb{R}, \leq) et vérifiant les propriétés précédentes sont appelés **capacités symplectiques**. Remarquons que la condition de monotonie exprime la functorialité de c .

Le volume total ne diffère d'une capacité que par l'axiome de non-trivialité. La notion de capacité est en quelque sorte une fille de la notion de volume, puisqu'en dimension 2 ces deux notions coïncident.

Il existe un lien entre l'énergie de déplacement et la capacité de Gromov. Ce lien a permis à Lalonde et McDuff [LM95] de montrer que la norme de Hofer définie précédemment est non-dégénérée, c.-à-d. que $E(\phi) = 0$ ssi $\phi = \text{id}$. Leur preuve repose sur l'inégalité suivante :

$$E(K) \geq \frac{1}{2} \text{Gr}(K).$$

Dans un papier célèbre [Che98], l'auteur développe une théorie de Floer lagrangienne locale et montre directement que pour ouvert non-vide U , $E(U) > 0$ retrouvant le résultat de [LM95].

Capacité de Gromov lagrangienne.

Pour les sous-variétés Lagrangiennes il existe une notion un raffinement de la notion de capacité. Elle est définie de la manière suivante :

Définition 2.8. Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne. On s'intéresse au plongement $\phi : (B(r) \subset \mathbb{C}^n, \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega)$ vérifiant :

1. ϕ est un plongement symplectique et,
2. $\phi^{-1}(L) = B_{\mathbb{R}}(r)$ où $B_{\mathbb{R}}(r)$ est la partie réelle de la boule.

Un tel plongement est appelé **plongement symplectique relatif** à L . On peut alors définir la **capacité de Gromov relative** ou plus simplement la **largeur de Gromov** de L par :

$$\text{Gr}(L) = \sup\{\pi r^2 \mid \exists \text{ un plongement symplectique relatif } \phi : B(r) \rightarrow M\} \quad (2.12)$$

Il s'avère que cette notion est plus pertinente dans le cas des sous-variétés lagrangiennes. Cela est dû au fait que les sous-variétés lagrangiennes déplaçables sont uniréglées par des disques pseudo-holomorphes et que l'aire de ces disques est liée à la largeur de Gromov lagrangienne. Nous verrons aussi que comme la capacité de Gromov absolue la largeur de Gromov d'une lagrangienne est liée à l'énergie de déplacement de la lagrangienne.

2.6 Topologie symplectique.

Les phénomènes de rigidité cités ci-dessus ainsi que l'absence d'invariant local non-trivial (théorème de Darboux), nous force à étudier les structures symplectiques de manière globale. Dans son article visionnaire [Gro85], Gromov a introduit la théorie des

courbes pseudo-holomorphes. Ces idées ont permis à Floer¹⁵ [Flo86] de développer des invariants algébriques puissants qui ont permis notamment de résoudre la célèbre conjecture d'Arnold¹⁶ :

Le nombre de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique fermée est au moins aussi grand que le nombre point fixe d'une fonction de Morse.

On peut voir la théorie des courbes pseudo-holomorphes comme une manière de sélectionner des surfaces symplectiques plongées dans la variété symplectique (M, ω) . De plus dans des cas heureux, ces courbes apparaissent en familles fini-dimensionnelles ce qui permet le comptage. La section suivante est donc consacrée à rappeler les bases de cette théorie.

¹⁵et beaucoup d'autres bien sûr, mais la liste serait trop longue pour être énumérée. Raison pour laquelle nous ne citons que le principal acteur.

¹⁶en tout cas dans un cas particulier. Les preuves dans les autres cas ne sont que des raffinements techniques de ces techniques.

Chapitre 3

Introduction à la théorie des courbes pseudo-holomorphes.

"the local theory of pseudoholomorphic curves is closely akin to that of holomorphic curves."

Simon K. Donaldson

Ce chapitre est destiné à rappeler certains résultats bien connus de la théorie des courbes pseudo-holomorphes et à introduire le complexe des perles. Nous nous concentrons sur les résultats de transversalité permettant de montrer que les espaces de modules de disques et de sphères pseudo-holomorphes sont des variétés différentiables. La plupart des résultats sont des adaptations directes du chapitre 2 et 3 de [MS04] (voir aussi [Oh97]). Beaucoup de résultats sont donc cités sans démonstrations. Le lecteur curieux est invité à consulter la littérature citée.

3.1 Généralités.

Structures presque complexes compatibles.

Définition 3.1. Soit M une variété lisse de dimension paire. Une **structure presque complexe** est un endomorphisme lisse $J : TM \rightarrow TM$ vérifiant $J^2 = -\text{Id}$. On peut penser à J comme la multiplication complexe par i sur chaque fibre.

On note que (M, J) n'est pas nécessairement une variété complexe. Il n'est en général pas possible de trouver un système de cartes dont les fonctions de transitions sont biho-

lomorphic pour J . Un J pour lequel les fonctions de transitions sont holomorphes est dit intégrable, et définit alors une structure complexe sur M .

Le critère algébrique suivant caractérise entièrement les structures presque complexes intégrables.

Théorème 3.1.1 (Théorème d'intégrabilité¹). *Soit $J : TM \rightarrow TM$ une structure presque complexe. Une condition nécessaire et suffisante pour que J soit intégrable est donnée par l'annulation du tenseur de Nijenhuis :*

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Appliqué au cas des surfaces réelles le théorème précédent implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1.1. *Soit Σ une surface réelle. Si $j : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ est une structure presque complexe alors j est intégrable, c.-à-d. $N_j \equiv 0$.*

Gromov dans son célèbre article [Gro85] a montré que si J vérifie certaines conditions de compatibilité avec une structure symplectique, les propriétés locales des courbes pseudo-holomorphes sont assez proches de celles des courbes "vraiment" holomorphes (J est intégrable, c.-à-d. $N_J = 0$). On verra par exemple que le principe de continuation unique est encore vrai dans le cas pseudo-holomorphe.

Définition 3.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique. On dit qu'une structure presque complexe J est :*

1. *adaptée à ω ssi*

$$X \neq 0 \implies \omega(X, JX) > 0.$$

2. *si de plus $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ on dit que J est compatible.*

Remarquons que la condition de compatibilité est équivalente à dire que $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne.

Remarque 3.3. *Dans la suite de cet exposé on travaillera seulement avec des structures presque complexes compatibles. Cependant tous les résultats restent vrais si on remplace compatible par adaptée.*

¹Voire [NN57]

Proposition 3.1.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. L'espace*

$$\mathcal{J}(M, \omega) = \{J : TM \rightarrow TM \text{ presque complexe compatible avec } \omega\}$$

est non-vide et contractile.

Remarque 3.4. *Le théorème précédent n'est pas anodin. En effet il n'est pas vrai que toute variété orientable de dimension paire possède une structure presque complexe. L'existence d'une structure de fibré complexe est une contrainte forte. Un exemple particulièrement éclairant est celui de la sphère de dimension 4 : S^4 . La théorie des fibrés vectoriels complexes nous apprend qu'une variété de dimension 4 possédant une structure presque complexe vérifie l'égalité algébrique suivante²*

$$\langle c_1^2, M \rangle = 3\sigma + 2\chi \quad (3.1)$$

où $c_1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$ désigne la première classe de Chern, σ est la signature de la forme quadratique associée au produit cup restreint à $H_2(M, \mathbb{Z})$ et χ est la caractéristique d'Euler. Si $M = S^4$, $H_2(S^4) = 0$ d'où $c_1 = 0$ et $\sigma = 0$; mais $\chi = 2$. En fait on a la caractérisation suivante³ :

Proposition 3.1.2. *Sur une variété M , l'ensemble des classes d'homotopie de structures presque complexes est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes d'homotopie de 2-formes non-dégénérées.*

En particulier hormis S^2 et S^6 , aucune sphère ne possède de structure presque complexe.

Avec le résultat précédent on voit poindre un lien subtil entre structures presque complexes et structures symplectiques⁴.

Sous-variétés totalement réelles.

Soit V^{2n} un espace vectoriel de dimension réel $2n$ muni d'une structure complexe, c.-à-d. un endomorphisme $J : V \rightarrow V$ vérifiant $J^2 = -\text{Id}$. On dit qu'un sous espace $W \subset V$ est totalement réel si $W \cap JW = \{0\}$.

Soit maintenant (M, J) une variété presque complexe. Une sous-variété $L \hookrightarrow M$ est dite **totalement réelle** (pour la structure presque complexe J), si pour tout $x \in L$, $T_x L \subset T_x M$ est totalement réelle pour la structure complexe J_x . Supposons maintenant que J est

²voir [Wu52] ainsi que [LA94]

³Voir [MS98]

⁴Rappelons que symplectos en grec signifie complexe.

compatible avec une structure symplectique ω . On vérifie alors aisément que toute sous-variété lagrangienne est totalement réelle pour J .

L'importance des sous-variétés totalement réelles est qu'elles constituent de bonnes conditions au bord pour les courbes pseudo-holomorphes (cfr. paragraphe suivant).

Remarque 3.5. *Dans la suite nous nous restreignons au cas des sous-variétés lagrangiennes, ce qui est naturel puisque ces dernières sont l'objet principal de ce travail.*

3.2 Opérateur de Cauchy-Riemann.

Soit $(\Sigma, \partial\Sigma, j)$ une surface de Riemann compacte de genre 0 dont le bord est connexe. Par conséquent Σ est soit une sphère $\partial\Sigma = \emptyset$, soit un disque $\partial\Sigma = S^1$.

Dans la suite nous noterons j la structure (presque) complexe sur Σ et J une structure presque complexe sur M compatible avec ω .

Définition 3.6. *Une application $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$ est dite pseudo-holomorphe ou plus exactement (j, J) -holomorphe⁵ si elle vérifie :*

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}u(z) + J(u(z)) \circ \mathrm{d}u(z) \circ j(z)) = 0, \text{ pour tout } z \in \Sigma. \quad (3.2)$$

Remarque 3.7. *Les équations aux dérivées partielles (3.2) sont appelées : équations de Cauchy-Riemann et sont, comme leur nom l'indique, une généralisation des équations de Cauchy-Riemann rencontrées en analyse complexe. Remarquons aussi qu'être (j, J) -holomorphe est équivalent à demander que la différentielle est (j, J) -linéaire.*

On définit aussi l'opérateur de Cauchy-Riemann :

$$\bar{\partial}_{j,J} : u \rightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{d}u + J \circ \mathrm{d}u \circ j)$$

Pour des raisons de simplicité nous écrirons souvent $\bar{\partial}_J$ au lieu de $\bar{\partial}_{j,J}$ ce qui est justifié puisqu'une surface de genre 0 ne possède à isomorphisme près qu'une seule structure complexe. Les applications pseudo-holomorphes se révèlent être un outil puissant dans l'étude des variétés symplectiques (et de contact). Dans le cas fermé ($\partial\Sigma = \emptyset$) les courbes pseudo-holomorphes permettent de définir des invariants numériques associés à la variété symplectique appelés invariants de Gromov-Witten⁶. Dans le cas relatif il

⁵ou encore **J-holomorphe**

⁶invariants signifie ici qu'ils ne dépendent pas du choix de structure presque complexe compatible J .

est connu que de tels invariants sont en général mal définis et dépendent fortement de la structure presque complexe J . La principale différence réside dans le phénomène dit de *bouillonnement* (bubbling) qui est un phénomène de codimension 2 dans le cas fermé ($\partial\Sigma = \emptyset$), alors que celui-ci peut être de codimension 1 dans le cas relatif ($\partial\Sigma \neq \emptyset$). Cependant, dans certains cas, les espaces de modules de disques pseudo-holomorphes possèdent suffisamment de propriétés pour définir un invariant algébrique et obtenir malgré tout beaucoup d'informations dignes d'intérêt.

Donnons maintenant une expression locale des équations de Cauchy-Riemann. Puisque Σ est une variété complexe il existe un système de cartes holomorphes : $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, $df_\alpha \circ j = i \circ df_\alpha$. Rappelons que les applications de transitions $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ sont biholomorphes. Dans ce système de coordonnées holomorphes ($s + it$), les équations de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_J u = 0$ se réécrivent :

$$\partial_s u_\alpha + J(u_\alpha) \partial_t u_\alpha = 0 \quad (3.3)$$

Il se trouve que dans certains cas l'espace des solutions de (3.2) représentant une classe d'homotopie (ou d'homologie) $A \in \pi_2(M, L)$ qu'on note $\mathcal{M}(A, L, J)$ jouit de propriétés remarquables. Il s'avère par exemple que sous certaines hypothèses il possède une structure de variété différentiable dont la dimension est donnée par l'indice de Fredholm de la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann. En outre, en dimension zéro, ces espaces sont compacts, ce qui permettra le comptage.

Supposons maintenant qu'on permette à J de dépendre du domaine. Ceci présente un intérêt car pour montrer les résultats de transversalité que l'on vient de mentionner on peut soit se restreindre à un ensemble restreint de courbes pseudo-holomorphes appelées courbes simples ; soit considérer toutes les courbes mais en autorisant la structure presque complexe de dépendre du domaine. Il est alors confortable de se laisser cette liberté : soit fixer J et se restreindre aux courbes simples, soit permettre à J de varier, et considérer l'ensemble de toutes les solutions. Donc supposons qu'on ait une famille lisse de structures presque complexes compatibles $J : \Sigma \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega)$. On s'intéresse aux solutions de

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}u(z) + J_z(u(z)) \circ \mathrm{d}u(z) \circ j(z)) = 0 \quad (3.4)$$

Pour différencier l'opérateur de Cauchy-Riemann lorsque J est fixe et lorsque J varie on inscrit en gras l'indice du $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial}_J : u \rightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{d}u + J \circ \mathrm{d}u \circ j)$$

On notera

$$\mathcal{J}(D, M, \omega) = \{J : D \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega) \mid J \text{ est lisse} \},$$

l'espace des familles lisses de structures presque complexes compatibles.

Perturbation hamiltonienne et équation de Floer.

On fera aussi usage de versions non-homogènes des équations de Cauchy-Riemann. Les termes non-homogènes seront tous construits à partir de ce qu'on appelle des perturbations Hamiltoniennes. Ces perturbations seront définies ici uniquement pour le disque $\Sigma - \{\pm 1\}$ qu'on peut voir comme une bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$ ⁷.

Soit $\mathcal{H} : M \rightarrow \Lambda^1(\Sigma, TM)$. Par définition, pour tout $\xi \in T_z \Sigma$, $z \in \Sigma$: $\mathcal{H}\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ ⁸. Si pour tout $z \in \Sigma$, $\text{im} \mathcal{H} \subset \text{Ham}(M, \omega)$ ⁹ ; la partie (j, J) -antilinéaire

$$\mathcal{H}^{0,1} = \frac{1}{2}(\mathcal{H} + J \circ \mathcal{H} \circ j)$$

de \mathcal{H} est appelée **perturbation hamiltonienne**. Dans un système de coordonnées $\mathcal{H} = -X_F \otimes ds - X_H \otimes dt$. La partie antilinéaire de \mathcal{H} vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{0,1} &= -\frac{1}{2}(X_F \otimes ds + X_H \otimes dt - JX_F \otimes dt + JX_H \otimes ds) \\ &= \frac{1}{2}\{-(X_F + JX_H) \otimes ds - (X_H - JX_F) \otimes dt\} \end{aligned}$$

Remarque 3.8. *Dans la suite de ce travail nous ne considérerons que des perturbations hamiltoniennes vérifiant $X_F \equiv 0$.*

On s'intéresse alors aux équations de Cauchy-Riemann perturbées aussi appelées **équations de Floer** :

$$\bar{\partial}_J u + \mathcal{H}^{0,1}(u) = 0. \quad (3.5)$$

qui dans un système de coordonnées $z = (s + it)$ se réécrivent :

$$\partial_s u + J(u)(\partial_t u - X_H(t, u)) = 0 \quad (3.6)$$

On notera $\bar{\partial}_{J,H}$ l'opérateur $u \rightarrow \bar{\partial}_J u + \mathcal{H}(u)$.

⁷Pour une définition plus générale voir le chapitre 8 de [MS04].

⁸ $\mathfrak{X}(TM)$ est l'espace des champs de vecteurs lisses de M .

⁹rappelons que $\text{Ham}(M, \omega)$ est l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens dépendants éventuellement du temps t .

Supposons maintenant qu'on permette à J de dépendre du domaine : $\mathbf{J} : \Sigma \times TM \rightarrow TM$. Pour $R > 0$, on introduit la fonction plateau : $\beta_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ à support dans $(-R-2, R+2)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\beta_R(s) = \begin{cases} R & \text{pour } 0 \leq R \leq 1, \text{ et } -R \leq s \leq R \\ 1 & \text{pour } R \geq 1, \text{ et } -R \leq s \leq R \end{cases} \quad (3.7)$$

On pose alors l'équation suivante :

$$\bar{\partial}_{\mathbf{J}}\mathbf{u} + \beta_R(s)\mathcal{H}^{0,1}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.8)$$

qui en coordonnées se réécrit :

$$\partial_s \mathbf{u} + \mathbf{J}(z, \mathbf{u})(\partial_t \mathbf{u} - \beta_R(s)\mathcal{X}_H(t, \mathbf{u})) = 0 \quad (3.9)$$

Enfin comme précédemment on note $\bar{\partial}_{\mathbf{J}, H, R}$ l'opérateur associé à l'équation (3.8).

3.3 Opérateur de Cauchy-Riemann linéarisé.

Jusqu'à présent nous avons été un peu vague concernant les espaces sur lesquels sont définis l'opérateur de Cauchy-Riemann (ou l'opérateur de Floer). Notons

$$\mathcal{B}^{k,p} := W^{k,p}(\Sigma, \partial\Sigma; M, L)$$

la complétion de $C^\infty(\Sigma, \partial\Sigma; M, L)$ muni de la norme de Sobolev $W^{k,p}$, c.-à-d. l'espace des fonctions L^p dont les dérivées faibles jusqu'à l'ordre k existent et sont L^p . Ces espaces sont des variétés de Banach séparables dont l'espace tangent en une courbe u est donné par :

$$T_u \mathcal{B}^{k,p} = W^{k,p}(\Sigma, \partial\Sigma; u^*TM),$$

qui n'est autre que l'espace des champs de vecteurs au-dessus de u dont les dérivées faibles jusqu'à l'ordre k existent et sont intégrables.

Remarque 3.9. Les espaces $\mathcal{B}^{k,p}$ ne sont bien définis que si :

$$kp > 2.$$

Cette condition est d'autant plus naturelle que les preuves (que nous ne ferons pas), servant à montrer la régularité des solutions des équations de Cauchy-Riemann, Floer..., font appel, de manière essentielle, au théorème de plongement de Sobolev qui n'est vrai que si $kp > 2$. Pour de plus amples détails le lecteur est invité à consulter la section 1 du chapitre 3 de [MS04] ainsi que l'appendice C du même livre.

Pour $u \in W^{k,p}(\Sigma, \partial\Sigma; M, L)$, nous posons

$$\mathcal{E}_u^{k-1,p} := W^{k-1,p}(\Sigma, \partial\Sigma; \Lambda^{0,1}(M) \otimes u^*TM)$$

la complétion de $C^\infty(\Sigma, \partial\Sigma; \Lambda^{0,1}(M) \otimes u^*TM)$ muni de la norme de Sobolev $W^{k-1,p}$. On définit ensuite le fibré de Banach

$$\pi : \mathcal{E}^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{B}^{k,p}$$

où la fibre en un point u de la base $\mathcal{B}^{k,p}$ est $\mathcal{E}_u^{k-1,p}$.

Notons enfin $\mathcal{B}^{k,p}(A)$ l'espace des applications de $\mathcal{B}^{k,p}$ représentant l'élément $A \in \pi_2(M, L)$. Cet espace est une composante connexe de $\mathcal{B}^{k,p}$. On considère alors la restriction de π sur l'une des composantes $\mathcal{B}^{k,p}(A)$:

$$\pi_A : \mathcal{E}^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{B}^{k,p}(A),$$

qui définit aussi un fibré.

On peut voir les opérateurs définis précédemment comme des sections de ce fibré de Banach infini dimensionnel. Par exemple pour l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_J$, on définit la section :

$$\mathcal{S}_J : \mathcal{B}^{k,p}(A) \rightarrow \mathcal{E}^{k-1,p} : u \rightarrow (u, \bar{\partial}_J u) \quad (3.10)$$

La section \mathcal{S}_J intersecte transversalement la section nulle de $\mathcal{E}^{k-1,p}$ en u , si et seulement si l'image de la linéarisation de \mathcal{S}_J en u ,

$$d\mathcal{S}_J(u) : T_u \mathcal{B}^{k,p}(A) \rightarrow T_u \mathcal{B}^{k,p}(A) \oplus \mathcal{E}_u^{k-1,p}$$

est un sous-espace complémentaire de $T_u \mathcal{B}^{k,p}$ ou encore si **la différentielle verticale** en u définie par :

$$D_u = \pi_u \circ d\mathcal{S}_J(u) : T_u \mathcal{B}^{k,p}(A) \rightarrow \mathcal{E}_u^{k-1,p} \quad (3.11)$$

où

$$\pi_u : T\mathcal{E}_u^{k,p} = T_u \mathcal{B}^{k-1,p}(A) \oplus \mathcal{E}_u^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{E}_u^{k,p}$$

est surjective. Il n'est en général pas possible de montrer un tel résultat. Cependant en se restreignant, comme on l'a dit, au cas des courbes dites *simples*, il est possible de montrer que, pour un ensemble générique de structures presque complexes, on a transversalité de la section associée à l'opérateur de Cauchy-Riemann (ou de Floer) avec la section nulle. Il

est aussi possible d'obtenir la transversalité si on se permet de faire dépendre la structure presque complexe du domaine.

Donnons maintenant une expression explicite de D_u . Cette expression ne dépendant pas de Σ on suppose que $\Sigma = S^2$. Soit $u \in \mathcal{B}^{k,p}$ une solution des équations de Cauchy-Riemann¹⁰ (3.2). Considérons le vecteur tangent u_τ , $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ défini par $u_0 = u$ et $\frac{d}{d\tau}u_\tau = \xi \in T_u\mathcal{B}^{k,p}$. Alors :

$$\begin{aligned} D_u(\xi) &= \frac{d}{d\tau} \bar{\partial}_J(u_\tau)|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} (du_\tau + J(u_\tau) \circ du_\tau \circ j) \right\} |_{\tau=0} \\ &= \bar{\partial}_J(\xi) + \frac{1}{2} (\partial_\xi(J) \circ du \circ j) \\ &= \bar{\partial}_J(\xi) + \frac{1}{2} (\partial_\xi(J) \circ J \circ du) \\ &= \bar{\partial}_J(\xi) - \frac{1}{2} J \circ \partial_\xi(J) \circ du \end{aligned}$$

Or le dernier terme vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J(\partial_\xi(J) du) &= \frac{1}{4} (J \partial_\xi(J) du - \partial_\xi(J) J^2 du j) \\ &= \frac{1}{4} (J \partial_\xi(J) du - J \partial_\xi(J) J \circ du \circ j) \\ &= -\frac{1}{2} (J \partial_\xi(J)) \left(\frac{1}{2} (du + J \circ du \circ j) \right) \\ &= \frac{1}{2} (J \partial_\xi(J) \circ \partial_J(u)) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$D_u(\xi) = \bar{\partial}_J(\xi) - \frac{1}{2} (J \circ \partial_\xi(J) \circ \partial_J(u)) \quad (3.12)$$

3.4 Energie

Soit $J \in \mathcal{J}(\Sigma, M, \omega)$. Notons $J_z = J(z, \cdot) \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Pour tout $z \in \Sigma$, J_z définit une métrique riemannienne via :

$$g_{J_z}(X, Y) := \langle X, Y \rangle_{J_z} := \omega(X, J_z Y).$$

¹⁰Si u n'est pas une solution il n'y a pas de sous-espace horizontale privilégié et il faut remplacer d par une connexion, cfr. [MS04] pour de plus amples détails.

On a donc une famille de métrique riemannienne $g_J := \langle \cdot, \cdot \rangle_J$ sur M . On note $|\cdot|_J$ la famille de normes induite par g_J . L'énergie d'une courbe lisse $u : \Sigma \rightarrow M$ est la norme L^2 de la 1-forme du par rapport à la famille de métrique g_J :

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|du\|_J^2 d\sigma \quad (3.13)$$

où pour tout application linéaire $L : T_z \Sigma \rightarrow T_{u(z)} M$:

$$\|L\|_J = |\xi|^{-1} \sqrt{|L(\xi)|_{J_z}^2 + |L(j\xi)|_{J_z}^2} \quad (3.14)$$

On montre aisément que cette norme ne dépend pas de $\xi \in T_z \Sigma - \{0\}$.

Lemme 3.4.1. *Soit J une famille de structures presque complexes compatibles avec ω . Alors pour tout application lisse $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$,*

$$E(u) = \int_{\Sigma} u^* \omega + \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J u\|_J^2 d\sigma \quad (3.15)$$

Démonstration. Choisissons un système de coordonnées complexes sur Σ , i.e. $z = s + it$, avec $j\partial_s = \partial_t$. Alors en choisissant $\xi = \partial_s$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|du\|_J^2(z) &= \frac{1}{2} |\partial_s u|_{J_z}^2 + |\partial_t u|_{J_z}^2, \\ &= \frac{1}{2} |\partial_s u + J_z(u) \partial_t u|_{J_z}^2 - \langle \partial_s u, J_z \partial_t u \rangle_{J_z}, \\ &= |\bar{\partial}_J u|_{J_z}^2 + \omega(du(\partial_s), du(\partial_t)), \\ &= |\bar{\partial}_J u|_{J_z}^2 + u^* \omega(\partial_s, \partial_t). \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant est crucial pour la suite. Il nous apprend qu'une courbe pseudo-holomorphe non-constante ne peut pas avoir une énergie arbitrairement petite. Lorsque nous aborderons le phénomène de bouillonnement et que nous étudierons la compacité, nous utiliserons ce fait pour déduire qu'il ne peut pas y avoir un nombre arbitraire de bulles¹¹. Le lecteur est une fois de plus invité à consulter [MS04].

Théorème 3.4.1. *Soient (M, ω) une variété symplectique compacte et $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$ une application J -holomorphe non-constante. Il existe une constante $\hbar(M, \omega, L, J) > 0$ telle que*

$$E(u) = \int_{\Sigma} u^* \omega \geq \hbar \quad (3.16)$$

¹¹cfr plus loin

3.5 Propriétés locales : continuation unique.

Dans cette section nous montrons que, sous bien des aspects, la théorie locale des applications pseudo-holomorphes est identique à la théorie des applications holomorphes. Nous aurons besoin de certaines de ces propriétés pour prouver la transversalité. Il est bien connu (et facile de montrer) que deux fonctions holomorphes $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ dont les jets d'ordre infini coïncident en un point sont égales. Autrement dit, deux fonctions f, g , dont le jet d'ordre infini de la différence $f - g$ s'annule, coïncident.

Dans le cas non-intégrable, plusieurs difficultés apparaissent immédiatement. On ne sait pas si une fonction pseudo-holomorphe est analytique, a priori on ne sait même pas si elle est différentiable ou même continue. En réalité un argument de régularité elliptique permet de montrer que les solutions de l'équation (3.3)¹² sont lisses dès que J est lisse. On peut montrer que si J et X_H sont de classe C^k , u est aussi de classe C^k . Nous reviendrons sur ce fait plus tard, pour l'instant on se contentera de le retenir dans un coin de notre esprit.

On dit qu'une fonction intégrable $u : B(\epsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$ **s'annule à l'ordre infini** en 0 ssi :

$$\int_{|z| \leq r} |u(z)| = O(r^k) \text{ pour tout } k > 0. \quad (3.17)$$

On constate que si u est lisse, (3.17) veut dire que le jet à l'ordre infini de u s'annule. On dit alors que deux fonctions $u, v : B_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ **coïncident à l'ordre infini** en 0 ssi $u - v$ s'annule à l'ordre infini en 0. Le théorème suivant est tiré de [FHS95]

Théorème 3.5.1. *Continuation unique.* Soient $u, v \in C^1(B_\epsilon, \mathbb{C}^n)$ deux fonctions solutions de (3.6) pour une certaine structure presque complexe de classe C^1 et pour une fonction X_H aussi de classe C^1 . Supposons qu'elles coïncident à l'ordre infini en 0. Alors $u \equiv v$.

Corollaire 3.5.1.1. Deux fonctions $u, v : \Sigma \rightarrow M$ de classe C^1 solutions de (3.5), pour un J et un X_H de classe C^1 , coïncidant à l'ordre infini en un point $p \in \Sigma$, alors $u \equiv v$.

3.6 Transversalité.

Les résultats généraux de transversalité sont au coeur de la théorie des courbes pseudo-holomorphes et méritent qu'on leur dédie une section entière. Nous commencerons par énoncer les deux principaux résultats de cette section. La stratégie de la preuve

¹²On utilise l'expression locale des équations de Cauchy-Riemann car la nature du problème est purement locale.

vaut pour une catégorie très vaste d'espaces de modules ; c'est pourquoi nous nous attarderons quelque peu à la décrire de manière générale avant de rentrer dans les détails propres à un des cas qui nous intéresse. Bien sûr certains résultats ne seront pas prouvés et le lecteur est invité à consulter la littérature existante (en particulier le chapitre 3 de [MS04] ainsi que [Oh96]). Dans cette section $\mathcal{M}(A, J)$, respectivement $\mathcal{M}(A, L, J)$ désigne l'espace des sphères J-holomorphes représentant la classe $A \in \pi_2(M)$, respectivement l'espace des disques J-holomorphes à bord dans L représentant la classe $A \in \pi_2(M, L)$ ¹³. On définit de même $\mathcal{M}(A, J)$ ainsi que $\mathcal{M}(A, L, J)$. Enfin on note $\mathcal{M}(A, L, J, H, R)$ l'espace des solutions de l'équation de Floer perturbée (3.8) représentant la classe A.

3.6.1 Enoncés des théorèmes.

Comme on l'a déjà dit, il n'est en général pas possible d'obtenir la transversalité pour toutes les courbes pseudo-holomorphes. On a alors deux choix : on peut soit faire varier la structure presque complexe, soit se restreindre aux courbes simples. Le cas des courbes simples est une adaptation de résultats détaillés dans ([MS04]).

Définition 3.10. Une application J-holomorphe $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (M, L)$ est dite *simple* s'il existe un ensemble dense $S \subset \Sigma$ tel que pour tout $z \in S$:

$$u^{-1}(u(z)) = z \text{ et } du(z) \neq 0 \quad (3.18)$$

dans le cas de la sphère cette condition est équivalente à l'existence d'un point z vérifiant (3.18) ce qui est équivalent à dire que u n'est pas multiplement revêtue.

On note respectivement $\mathcal{M}^*(A, J)$ et $\mathcal{M}^*(A, L, J)$ l'espace des sphères, respectivement des disques, J-holomorphes simples¹⁴. représentant la classe A.

On a alors les résultats suivants :

Théorème 3.6.1. Il existe un sous-ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que l'espace des modules $\mathcal{M}^*(A, J)$ possède une structure de variété différentiable dont la dimension est donnée par :

$$\dim \mathcal{M}^*(A, J) = 2n + 2c_1(A) \quad (3.19)$$

¹³dans beaucoup de cas il sera préférable de travailler avec $H_2^D(M, L)$ qui est le quotient de l'image de $\pi_2(M, L)$ dans $H_2(M, L)$ par l'application d'Hurewicz par sa torsion.

¹⁴Si J dépend du domaine, il n'y a pas, comme on le verra, lieu de faire une telle distinction.

Théorème 3.6.2. Soit $L \rightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne¹⁵. Fixons $A \in \pi_2(M, L)$. Il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que l'espace des modules $\mathcal{M}^*(A, L, J)$ possède une structure de variété différentiable de dimension :

$$\dim \mathcal{M}^*(A, L, J) = \mu(A) + n \quad (3.20)$$

Notons maintenant $\mathcal{M}(A, L, J, H) = \{(u, R) \text{ solutions de (3.8)}\}$ avec $J \in \mathcal{J}(D, M, \omega)$ et $A \in \pi_2(M, L)$.

Théorème 3.6.3. [Alb08] Soit $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien. Soit $A \neq 0$. Il existe un sous-ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(D, M, \omega)$ tel que $\mathcal{M}(A, L, J, H)$ est une variété différentiable dont la dimension est :

$$\dim \mathcal{M}(A, L, J, H) = \mu(A) + n + 1.$$

Si $A = 0$, on suppose de plus que le difféomorphisme hamiltonien ϕ_H n'a pas de point fixe dans L .

Dans les deux théorèmes précédents μ désigne l'indice de Maslov¹⁶. Nous prouverons seulement le dernier résultat. Pour prouver les résultats de transversalité nous aurons besoin de divers résultats préliminaires. Tout d'abord certains résultats de la théorie des opérateurs de Fredholm. Ensuite une version du théorème des fonctions implicites et du théorème de Sard-Smale pour les espaces de Banach dont nous rappellerons les énoncés. Enfin nous utiliserons ces connaissances pour dresser la stratégie de la preuve à proprement parler.

Remarque 3.11. Remarquons qu'une solution constante de (3.8) est nécessairement un point fixe de ϕ_t^H pour tout $t \in [0, 1]$. En effet dans ce cas on déduit de (3.9) que $u = x \in L$ avec $X_H(t, x) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3.6.2 Théorème des fonctions implicites et de Sard-Smale.

Nous ne rappellerons que les définitions et résultats de base de la théorie des opérateurs de Fredholm et nous ne fournirons aucune preuve. Le lecteur est donc une fois de plus invité à consulter l'appendice A de [MS04].

¹⁵ou plus généralement totalement réelle.

¹⁶voir l'appendice pour la définition

Définition 3.12. Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur entre deux espaces de Banach E et F . L'opérateur T est de **Fredholm** si son image est fermée et si son noyau ainsi que son conoyau est de dimension finie. On peut alors définir l'**indice de Fredholm** de T :

$$\text{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \text{coker} T \quad (3.21)$$

Plus généralement, une application continûment différentiable $f : E \rightarrow F$ entre deux espaces de Banach est de **Fredholm** si sa différentielle $df_x : E \rightarrow F$ est de Fredholm pour tout $x \in E$.

On a alors les propriétés suivantes (cfr. appendice A de [MS04]) :

Proposition 3.6.1. Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur de Fredholm.

1. Si $K : E \rightarrow F$ est un opérateur compact (l'image de la boule unité est précompacte) alors $T + K$ est aussi un opérateur de Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(T + K)$.
2. Il existe un $\epsilon > 0$ tel que si $P : E \rightarrow F$ est un opérateur linéaire borné de norme plus petite que ϵ , c.-à-d. $\|P\| < \epsilon$, alors $T + P$ est de Fredholm et a le même indice que T .

La dernière assertion implique que l'espace des opérateurs de Fredholm est ouvert pour la topologie de la norme uniforme et que l'indice est constant dans chaque composante connexe. En particulier l'indice de Fredholm d'une application continûment différentiable est bien défini.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application continûment différentiable. Une valeur régulière de f est un point $y \in F$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(y)$, df_x est surjectif et possède un inverse à droite.

Théorème 3.6.4 (Théorème des fonctions implicites.). Soit E et F deux espaces des Banach. Soit $U \subset E$ un ouvert et l un entier positif. Si $f : U \rightarrow F$ est de classe C^l et que $y \in F$ est une valeur régulière de f , alors :

$$\mathcal{M} := f^{-1}(y)$$

est une variété de classe C^l et $T_x \mathcal{M} = \ker df_x$, pour tout $x \in \mathcal{M}$. De plus si f est de Fredholm $\dim \mathcal{M} = \text{ind}(f)$.

Par la suite il sera utile de savoir à quelle condition un opérateur linéaire borné surjectif possède ou non un inverse à droite. Un tel inverse à droite existe ssi le noyau de l'opérateur possède un complémentaire dans E (ce qui est le cas des espaces de Hilbert par exemple). Il est connu que les opérateurs de Fredholm possèdent un inverse à

droite. Malheureusement, les opérateurs que nous rencontrerons par la suite ne seront pas nécessairement de Fredholm. Cependant ils auront au pire la forme suivante :

$$D \oplus L : E \oplus F \rightarrow X : (x, y) \rightarrow Dx + Ly. \quad (3.22)$$

où $D : E \rightarrow X$ est de Fredholm et $L : F \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné. Pour ce type d'opérateur on prouve :

Lemme 3.6.1. *Supposons que $D \oplus L : E \oplus F \rightarrow X$ est surjectif. Alors $D \oplus L$ a un inverse à droite et de plus la projection $\pi : \ker(D \oplus L) \rightarrow F$ est un opérateur de Fredholm de noyau $\ker \pi \cong \ker D$ et $\text{coker} \pi \cong \text{coker} D$. Par conséquent :*

$$\text{ind}(\pi) = \text{ind}(D).$$

Enfin la dernière pièce de notre puzzle est le théorème de Sard-Smale [Sma65] dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 3.6.5 (Théorème de Sard-Smale.). *Soient E et F des espaces de Banach séparables. Soit U un ouvert de E . Supposons que $f : U \rightarrow F$ est une application de Fredholm de classe C^l , où $l \geq \max\{1, \text{ind}(f) + 1\}$. Alors l'ensemble des valeurs régulières de f est un ensemble de la seconde catégorie de Baire dans F .*

3.6.3 Espace des modules universel

Avec ces quelques rappels, nous sommes en mesure de donner l'argument général permettant de prouver la transversalité d'une large classe d'espaces de modules. Exposons notre problème de manière générale. Nous avons un fibré de Banach $\Pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ de fibre \mathcal{F} . Nous avons aussi une famille lisse de sections paramétrée par une variété de Banach \mathcal{J} :

$$S : \mathcal{B} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Théorème 3.6.6 (Transversalité : cas général). *Supposons que $S : \mathcal{J} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ satisfait les conditions suivantes :*

1. *il existe une trivialisation $\{(\psi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathcal{F})\}_{i \in I}$ où U_i est un ouvert de \mathcal{B} , et I est au plus dénombrable.*
2. *dans chacune des cartes trivialisantes, $0 \in \mathcal{F}$ est une valeur régulière pour la partie verticale de S ,*

3. pour tout $J \in \mathcal{J}$ la section $S_J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ est une section de Fredholm dans le sens où sa différentielle verticale $DS_J(u)$ est un opérateur de Fredholm d'indice k .

Alors il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}$, $S_J^{-1}(0) = \mathcal{M}(J)$ est une variété dont la dimension est égale à k .

Démonstration. Remarquons que dans chaque carte trivialisante (ψ, \cdot, u) de \mathcal{E} , $S^{-1}(0) = (p_2 \circ \psi \circ S)^{-1}(0)$. Etant donné qu'on a supposé que $0 \in \mathcal{F}$ est une valeur régulière pour la partie verticale de $p_2 \circ \psi \circ S$, le théorème des fonctions implicites nous permet de conclure que l'espace des modules universels $\mathcal{M}(\mathcal{J}) = S^{-1}(0)$ est une variété de Banach dont l'espace tangent est égal au noyau de DS .

Ensuite la différentielle de S en un point (u, J) est $DS_J(u) \oplus DS_u(J) : T_u \mathcal{B} \times T_J \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E}_u$ et est donc de la forme $D \oplus L$ avec $D = DS_J(u)$ est la partie verticale de la différentielle qui est par hypothèse de Fredholm et $L = DS_u(J)$ est un opérateur linéaire borné. Par hypothèse $DS(u, J) = D \oplus L$ est surjective et possède un inverse à droite en tout point $(u, J) \in \mathcal{M}(\mathcal{J})$.

Considérons alors la projection

$$\Pi : \mathcal{M}(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J}.$$

Par le lemme (3.6.1) sa différentielle $d\Pi : T_{(u,J)} \mathcal{M}(\mathcal{J}) = \ker D \oplus L \rightarrow T_J \mathcal{J}$ est donc un opérateur de Fredholm dont l'indice est égal à celui de D et est surjectif ssi D l'est. Or par le théorème de Sard-Smale l'ensemble des valeurs régulières de Π est dense dans \mathcal{J} . En une telle valeur régulière $\Pi^{-1}(J) = \mathcal{M}(J)$ est une variété de Banach dont la dimension est précisément l'indice de D . \square

3.6.4 Transversalité de $\mathcal{M}(A, L, J, H)$.

Nous prouvons maintenant le théorème (3.6.3)

Preuve du théorème (3.6.3). Nous allons d'abord montrer que l'espace de modules universel $\mathcal{M}(A, L, \mathcal{J}, H)$ est une variété de Banach de classe C^1 . Rappelons que

$$\mathcal{M}(A, L, \mathcal{J}, H) = \{(R, u, J) | \bar{\partial}_J(u) + \beta_R(s) \mathcal{H}^{0,1} = 0\}.$$

Nous voulons donc montrer que la linéarisation de :

$$S : (0, +\infty) \times \mathcal{B}^{k,p}(A) \times J^1(\Sigma, M, \omega) \rightarrow L^p(D, \Lambda D \otimes TM),$$

est surjective en un point (R, u, J) vérifiant $S(R, u, J) = 0$. Soit (R_τ, u_τ, J_τ) un vecteur tangent en une solution (R, u, J) . Notons $v = \partial_\tau(R_\tau)|_{\tau=0}$, $\xi = \partial_\tau u|_{\tau=0}$ et $Y = \partial_\tau J|_{\tau=0}$. Calculons $DS(v, \xi, Y)$:

$$\begin{aligned} DS(v, \xi, Y) = & \nabla \xi + J \circ \nabla \xi \circ j + Y \circ du \circ j - \frac{1}{2} J \nabla_\xi J \partial_J(u) \\ & - \partial_\tau \beta(R, s) v(\mathcal{H}^{0,1}) - \beta(R, s)(Y \circ X_H \otimes ds \\ & + \nabla_\xi J \circ X_H \otimes ds + J \nabla_\xi X_H \otimes ds + \nabla_\xi X_H \otimes dt). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous allons montrer que pour $v = 0$, DS est déjà surjectif. Posons :

$$D_{u,J} \xi = (\nabla \xi)^{0,1} - \frac{1}{2} J \nabla_\xi J \partial_J(u) - \beta(R, s)(\nabla_\xi J \circ X_H \otimes ds + \nabla_\xi X_H \otimes dt).$$

Cet opérateur est un opérateur de Fredholm (voir [MS04]) et on a :

$$DS(0, \xi, Y) = D_{u,J} \xi + Y \circ (du - \beta(R, s) X_H \otimes dt) \circ j. \quad (3.24)$$

On déduit donc que $DS_{(R,u,J)}$ a une image fermée. Par conséquent, pour montrer la surjectivité de DS , il suffit de montrer que son image est dense. Supposons le contraire ; un corollaire du théorème de Hahn-Banach implique qu'il existe un $\eta \in L^q(D, \Omega D \otimes u^* TM)$ (avec $1/p + 1/q = 1$) non-nul tel que :

$$\int_D \langle \eta, D_{u,J} \xi \rangle dz = 0, \forall \xi \quad (3.25)$$

et

$$\int_D \langle \eta, Y(z, u) \circ (du - \beta_R(s) X_H(t, u)) \circ j \rangle dz = 0, \forall Y. \quad (3.26)$$

La première équation nous apprend que :

$$D_{u,J}^* \eta = 0, \quad (3.27)$$

où $D_{u,J}^*$ est l'adjoint formel de $D_{(u,J)}$. Un argument de régularité elliptique¹⁷ nous permet de déduire que η est de classe C^1 dès que J est de classe C^1 . Nous allons montrer que η doit être identiquement nul. Par le théorème de continuation unique (3.5.1) il suffit de montrer que η est nul sur un ouvert arbitraire de D . Ceci découle du fait que η vérifie (3.27). En utilisant le principe de similarité de Carleman et la continuation unique on prouve que $\eta \equiv 0$.

¹⁷Voir l'appendice B de [MS04].

Choisissons des coordonnées (s, t) sur D . On montre maintenant que pour tout $R > 0$, il existe $z_0 = (s_0, t_0) \in D$ tel

$$du(z_0) - \beta_R(s_0)X_H(t_0, u(z_0)) \neq 0.$$

Raisonnons par contradiction et supposons que $du(z) - \beta_R(s)X_H(t, u(z)) = 0$ pour tout $z \in D$. De cette dernière équation on déduit que :

$$\begin{aligned} \partial_s u &\equiv 0, \text{ et} \\ \partial_t u &= \beta_R(s)X_H(t, u). \end{aligned}$$

Par conséquent u ne dépend pas de s et la dernière équation n'a de sens que s'il existe $x \in L$ tel que $X_H(t, x) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, c.-à-d. ϕ_t^H possède un point fixe $x \in L$ pour tout t . En effet $\beta_R(s)$ n'est pas constant et dépend par conséquent de s , alors que u , comme on vient de le voir, ne dépend pas de s . Ceci contredit nos hypothèses.

On vient de prouver qu'il existe z_0 tel que $du(z_0) - \beta_R(s_0)X_H(t_0, u(z_0)) \neq 0$. Il est bien connu que¹⁸, qu'on peut alors trouver Y tel que

$$\langle \eta(z_0), Y(z_0, u(z_0)) \circ (du(z_0) - \beta_R(s_0)X_H(t_0, u(z_0))) \circ j \rangle > 0.$$

On choisit une fonction cutt-off $\alpha : D \rightarrow [0, 1]$ à support dans un voisinage \mathcal{N} de z_0 suffisamment petit pour que

$$\langle \eta(z), \alpha(z)Y(z, u(z)) \circ (du(z) - \beta_R(s)X_H(t, u(z))) \circ j \rangle > 0, \forall z \in \mathcal{N}$$

On déduit alors que $\eta(z) = 0$ pour tout $z \in \mathcal{N}$ et comme on l'a mentionné, un argument de continuation unique implique que $\eta \equiv 0$. On a donc prouvé que $\mathcal{M}(A, L, \mathcal{J}, H)$ est une variété de Banach de Classe C^l .

Pour conclure on considère la projection :

$$\pi : \mathcal{M}(A, L, \mathcal{J}^l, H) \rightarrow \mathcal{J}^l.$$

Celle-ci est une application de classe C^{l-1} entre des variétés de Banach C^{l-1} séparable. Comme on l'a vu dans la preuve du théorème (3.6.6), la différentielle de cette projection est un opérateur de Fredholm qui est surjectif ssi $D\mathcal{S}$ est surjectif. Par le théorème de Sard-Smale, l'ensemble des valeurs régulières de π est dense dans \mathcal{J}^l pour la topologie C^l dès que $l \geq \mu(A) + n + 2$. Finalement si $J \in C^l$, $\pi^{-1}(J) = \mathcal{M}(A, L, J, H)$.

¹⁸voir le chapitre 3.2 de [MS04]

Posons

$$\mathcal{J}_{\text{reg}}^l = \{J \in \mathcal{J}^l(D, M, \omega) \mid D_{(R, u, J)} \text{ est surjectif pour tout } u \in \mathcal{M}(A, L, J, H)\}$$

$$\mathcal{J}_{\text{reg}} = \{J \in \mathcal{J}(D, M, \omega) \mid D_{(R, u, J)} \text{ est surjectif pour tout } u \in \mathcal{M}(A, L, J, H)\}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons aussi :

$$\mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l = \{J \in \mathcal{J}^l(D, M, \omega) \mid D_{(R, u, J)} \text{ est surjectif } \forall u \in \mathcal{M}(A, L, J, H) \mid \|u\| < N\},$$

$$\mathcal{J}_{\text{reg}, N} = \{J \in \mathcal{J}(D, M, \omega) \mid D_{(R, u, J)} \text{ est surjectif } \forall u \in \mathcal{M}(A, L, J, H) \mid \|u\| < N\}.$$

Notons que :

$$\mathcal{J}_{\text{reg}} = \bigcap_{N \geq 0} \mathcal{J}_{\text{reg}, N},$$

$$\mathcal{J}_{\text{reg}}^l = \bigcap_{N \geq 0} \mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l.$$

Nous venons de montrer que pour l suffisamment grand $\mathcal{J}_{\text{reg}}^l$ est dense dans $\mathcal{J}(D, M, \omega)$ pour la topologie C^l . Pour finir l'argument, nous allons montrer que l'espace \mathcal{J}_{reg} ci-dessus est dense au sens de la topologie C^∞ . Nous voulons montrer que pour tout $J \in \mathcal{J}(D, M, \omega)$, il existe une suite $J_n \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ tel que J_n converge vers J . Au vu de l'équation 3.28, il suffit de prouver que $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ est ouvert et dense. On prouve d'abord que le complémentaire de $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ dans $\mathcal{J}(D, M, \omega)$ est fermé, c.-à-d. $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ est ouvert. Soit J_n une suite dans le complémentaire de $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}$, convergeant vers un élément $J \in \mathcal{J}(D, M, \omega)$. Un élément $J_n \notin \mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ ssi il existe un élément $u_n \in \mathcal{M}(A, L, J, H)$ vérifiant $\|du_n\|_{L^\infty} \leq N$, tel que D_{R, u_n} n'est pas surjectif. Etant donné que $\|du_n\|_{L^\infty} \leq N$ et que $u_n \in \mathcal{M}(A, L, J, H)$, il existe une sous-suite toujours notée u_n convergeant vers un élément u vérifiant $\|du\|_{L^\infty} \leq N$ ¹⁹. De plus la surjectivité étant une condition ouverte $D_{R, u}$ n'est pas surjectif. Un raisonnement tout à fait similaire permet de déduire que $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l$ est aussi ouvert.

Montrons maintenant que $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ est dense dans $\mathcal{J}(D, M, \omega)$. Soit $J \in \mathcal{J}(D, M, \omega)$. Nous allons trouver une suite $J_l \in \mathcal{J}_{\text{reg}, N}$ convergeant vers J au sens C^∞ .

Puisque $\mathcal{J}_{\text{reg}}^l$ est dense dans $\mathcal{J}^l(D, M, \omega)$ pour $l \geq \mu(A) + n + 2$, il existe une suite J_l tel que :

$$\|J_l - J\|_{C^l} \leq 2^{-l}.$$

Ensuite, $J_l \in \mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l$ pour tout N , et $\mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l$ est ouvert pour la topologie C^l ; par conséquent il existe $\epsilon_l > 0$, tels que pour tout $J' \in \mathcal{J}^l(D, M, \omega)$:

$$\|J' - J_l\|_{C^l} < \epsilon_l \implies J' \in \mathcal{J}_{\text{reg}, N}^l.$$

¹⁹Pour ce fait voir le théorème de compacité de l'appendice B dans [MS04]

On peut donc choisir $J'_1 \in \mathcal{J}(D, M, \omega)$ tels que : $\|J'_1 - J_1\| \leq \min\{\epsilon_1, 2^{-l}\}$. Il s'ensuit que $J'_1 \in \mathcal{J}_{\text{reg}, N}$. Enfin :

$$\|J'_1 - J\|_{C^1} \leq \|J'_1 - J_1\|_{C^1} + \|J_1 - J\|_{C^1} \leq 2^{-l+1}.$$

□

3.7 Structure des disques pseudo-holomorphes.

Au vu des théorèmes (3.6.1) et (3.6.2), il est important d'avoir un moyen de s'assurer que les espaces de modules que l'on étudie sont constitués de courbes simples. Etant donné que les disques sont les objets de première importance dans ce travail, nous résumons ici les techniques développées par Lazzarini dans [Laz00] permettant d'extraire un disque simple à partir d'un disque pseudo-holomorphe non-constant. Le cas fermé, et en particulier celui de la sphère, est traité dans [MS04]. Contrairement au cas fermé la question de l'injectivité des disques pseudo-holomorphes est bien plus délicate. L'exemple suivant montre qu'il n'y a pas de dichotomie "multiplement revêtu" vs "simple" comme dans le cas fermé (surface de Riemann sans bord). Rappelons qu'un disque pseudo-holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est multiplement revêtu s'il existe un disque simple v et un revêtement ramifié holomorphe $\phi : D \rightarrow D$ de degré supérieur à 1 tel que $u = v \circ \phi$.

Exemple 3.1. La lanterne. On présente ici un exemple, dû à Dietmar Salamon, de disque pseudo-holomorphe non-constant ne pouvant être factorisé par un disque simple. Dans ce qui suit, on voit le disque comme le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} . Son bord étant identifié à $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{\infty\}$. On considère l'application

$$u : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathbb{R} \cup \{\infty\}) : z \rightarrow z^3.$$

On a :

$$u^{-1}(u(\partial D)) = \partial D \cup \{re^{ik\frac{\pi}{3}} | k = 1, 2\}.$$

L'ensemble $u^{-1}(u(\partial D))$ décompose le plan de Poincaré en trois secteurs :

$$S_k = \{re^{i\theta} | (k-1)\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq k\frac{\pi}{3}\} \cup \{\infty\}.$$

Avec $k \in \{1, 2, 3\}$. L'image de S_1 et de S_3 est le demi-plan supérieur et l'image de S_2 est le demi-plan inférieur. Si on voit \mathbb{H} comme le disque et $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ comme la sphère

complexe $\mathbb{C}P^1$. L'image de S_1 est l'hémisphère nord de cette sphère et l'image de S_2 ou S_3 l'hémisphère sud. Notons que la cardinalité de $u^{-1}(u(z))$ vaut 1 si $z \in \text{int}S_2$ et 2 si $z \in \text{int}S_1 \cup \text{int}S_3$. Donc u n'est pas le revêtement multiple d'un disque simple. Cependant on peut factoriser u sur chacun des secteurs et extraire un disque simple à partir de u .

L'exemple précédent²⁰ nous montre une partie des difficultés d'extraire un disque simple à partir d'un disque pseudo-holomorphe non-constant. Cependant il nous invite à investiguer l'espace $u^{-1}(u(\partial D))$ et à essayer d'extraire une composante simplement connexe de $D - \{u^{-1}(u(\partial D))\}$. En réalité travailler avec $u^{-1}(u(\partial D))$ n'est pas la meilleure chose à faire et il vaut mieux introduire la notion de **graphe de non-injectivité** ou de repère (Framing) d'un disque pseudo-holomorphe.

3.7.1 Graphe de non-injectivité.

Soit $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ un disque pseudo-holomorphe non constant. Notons $\mathfrak{G}(u) = \{z \in D \mid du_z = 0\}$. On définit alors la relation $\mathcal{R}_u \subset \text{int}D - \mathfrak{G}(u) \times \text{int}D - \mathfrak{G}(u)$ par $z\mathcal{R}_u z'$ si et seulement si pour tout voisinage V , resp. V' , de z , resp. z' , il existe des voisinages $U \subset V$ et $U' \subset V'$ tel que :

1. $z \in U$ et $z' \in U'$,
2. $u(U_1) = u(U_2)$.

On note $\bar{\mathcal{R}}_u$ la fermeture de \mathcal{R}_u dans $D \times D$. Cette dernière relation est réflexive, symétrique mais pas transitive.

Définition 3.13 (Graphe de non-injectivité). Soit $(D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ un disque pseudo-holomorphe non constant. Ici (M, J) est une variété presque complexe et L est une variété totalement réelle. Le **graphe de non-injectivité** ou encore **repère** de u est défini par :

$$\mathfrak{G}(u) = \{z \in D \mid \exists z' \in \partial D \text{ tel que } z\bar{\mathcal{R}}_u z'\}. \quad (3.28)$$

Lemme 3.7.1 (Lazzarini). Le graphe de non-injectivité $\mathfrak{G}(u)$ d'un disque pseudo-holomorphe non-constant $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathfrak{G}(u)$ est un graphe.
2. $D - \mathfrak{G}(u)$ possède un nombre fini de composantes connexes.

²⁰Pour d'autres exemples éclairants le lecteur est invité à consulter [Laz00].

Le théorème suivant, dû à Lazzarini ([Laz00]), décrit la structure des disques pseudo-holomorphes :

Théorème 3.7.1 (Théorème de décomposition [Laz00]). *Soit (M, J) une variété presque complexe. Soit $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$, avec L une sous-variété totalement réelle, un disque J -holomorphe non-constant. Alors il existe un nombre fini de disques J -holomorphes simples $v_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que pour chaque composante connexe $D_i \subset D - \mathfrak{G}(u)$ il existe une application $\pi_i : \bar{D}_i \rightarrow D$ holomorphe sur D_i et continue sur \bar{D}_i tel que $u|_{D_i} = v_i \circ \pi_i$. En outre les applications π_i ont un degré bien défini n_i et :*

$$[u] = \sum_i n_i [v_i].$$

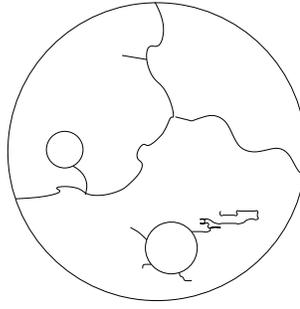


FIG. 3.1 – Le graphe de non-injectivité \mathfrak{G} de u .

Bien sûr il n'est pas toujours vrai que D_i est un disque. Cependant, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.7.1.1 (Lemme d'extraction). *Pour tout disque pseudo-holomorphe non-constant u il existe un disque simple v tel que :*

1. $v(D) \subset u(D)$ et
2. $v(\partial D) \subset u(\partial D)$.

3.8 Compacité et recollement.

Les espaces de modules de courbes J -holomorphes ont suffisamment de propriétés pour admettre une compactification bien comprise (du moins théoriquement)²¹. Le lecteur

²¹On comprend les raisons de non compacité ainsi que les éléments à ajouter pour rendre les espaces compacts.

intéressé est invité à consulter [Fra08], pour une discussion détaillée. Rappelons le résultat de compacité obtenu par Urs Frauenfelder dans [Fra08].

3.8.1 Le bouillonnement.

Nous allons décrire de manière heuristique et par des exemples le phénomène de bouillonnement. Celui-ci se produit lorsque l'on considère des suites d'applications pseudoholomorphes. Il est dû à l'invariance conforme locale des surfaces de Riemann comme le laisse entrevoir l'exemple suivant :

Exemple 3.2. *Considérons la suite d'application holomorphe*

$$u_l : S^2 \rightarrow S^2 \times S^2 : z \rightarrow (z, \frac{1}{lz}).$$

On voit S^2 comme $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$. On a alors :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} u_l = u : S^2 \rightarrow S^2 \times S^2 : z \rightarrow (z, 0).$$

Cependant si on applique la transformation de Möbius $z \rightarrow lz$ à u_l , on obtient à la limite $u(z) = (0, z)$. Par conséquent la limite des images des courbes u_l est $S^2 \times \{0\} \cup \{0\} \times S^2$.

Plus généralement le phénomène de bouillonnement est dû d'une part au fait que le $\sup_l |du_l|_{L^\infty}$ n'est pas bornée et à l'invariance conforme des applications pseudoholomorphes²².

On peut cependant définir une notion qui permet de parler de convergence même lorsque ces bouillonnements se produisent. Pour ce faire on définit la notion d'application stable introduite par Kontsevich dans [Kon95] et adaptée par Frauenfelder dans [Fra08] au cas des courbes à bord dans une variété lagrangienne. Pour les définitions précises, voir l'appendice C.

Théorème 3.8.1 (Compacité de Gromov [Fra08]). *Fixons une sous-variété lagrangienne L ainsi qu'une structure presque complexe compatible avec ω . Soient J_n une suite de structures presque complexes compatibles avec ω et L_n une suite de sous-variétés lagrangiennes. Supposons que les dites suites convergent respectivement vers J et L au sens de la topologie C^k ($k \in \{1, \dots, \infty\}$). Si $u_n : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_n)$ est une suite de disques J_n -holomorphe satisfaisant $\sup_n \omega(u_n) < +\infty$, alors il existe une sous-suite de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, qu'on notera par simplicité notacionnelle $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge au sens de Gromov vers une application stable²³*

²²Pour une discussion précise et détailler le lecteur est invité à consulter la section 2 de [MS04].

²³Voir [Fra08] pour les définitions de convergence au sens de Gromov et d'application stable.

Remarque 3.14. *L'énergie de la courbe étant bornée le théorème (3.4.1) nous assure que le nombre de bulles apparaissant à la limite est bornée.*

Nous donnerons en temps voulu une brève description des phénomènes de bouillonnement pouvant survenir.

En plus du théorème de compacité il existe un théorème qui est en quelque sorte l'inverse du théorème de compacité de Gromov et appelé *théorème de recollement* qui stipule que toute courbe stable peut être vue comme la limite d'une suite de courbes pseudo-holomorphes. Nous ne rentrerons cependant pas dans les détails et le lecteur est invité à consulter [BC07] ainsi que le chapitre 10 de [MS04].

Chapitre 4

Complexe des perles : cas monotone.

Rappelons d'abord la construction du complexe des perles dans le cas monotone¹. Fixons une sous-variété lagrangienne $L \hookrightarrow (M, \omega)$. On peut lui associer deux morphismes :

$$E_{\omega, L} : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R} : A \rightarrow \int_A \omega \quad (4.1)$$

$$\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z} : A \rightarrow \mu(A) \quad (4.2)$$

où $\mu(A)$ est l'indice de Maslov (cfr. [RS93] ou [Pol93] pour la définition). Par la suite on notera souvent $E_{\omega, L}(A)$ par $\omega(A)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. On pose aussi $N_L := \inf\{\mu(A) > 0 : A \in \pi_2(M, L)\}$ **le nombre de Maslov minimal**.

Définition 4.1. *On dit qu'une sous-variété lagrangienne est **monotone** s'il existe $\eta > 0$ tel que :*

$$\omega(A) = \eta\mu(A) \quad (4.3)$$

et si N_L est plus grand ou égal à 2..

Remarque 4.2. *Bien sûr, étant donné que les images respectives des morphismes E_{ω} et μ sont des groupes abéliens, on aurait pu remplacer $\pi_2(M, L)$ par son image dans $H_2(M, L)$ par le morphisme d'Hurewicz qu'on note $H_2^D(M, L)$. Dans la suite on peut choisir l'un ou l'autre sans que cela n'ait aucune conséquence sur les énoncés et les preuves des théorèmes.*

La condition de monotonie implique que la sous-variété lagrangienne occupe une position "symétrique" dans la variété symplectique ambiante. Il est donc nécessaire que

¹La raison pour laquelle nous nous restreignons au cas monotone est qu'elle permet d'éviter certaines difficultés techniques. Le lecteur désireux d'obtenir plus de précisions est invité à consulter [BC07].

la variété symplectique dans laquelle est plongée la L soit aussi symétrique. Prosaiquement cette observation provient du fait que la première classe de Chern c_1 de TM vérifie $2c_1(A) = 2\mu(A)$, pour tout $A \in \pi_2(M)$. Il est bien sûr entendu que $\mu(A) = \mu(\iota(A))$ où $\iota : \pi_2(M) \rightarrow \pi_2(M, L)$ est le morphisme canonique (on voit la sphère comme un disque dont les points du bord ont été envoyés sur le même point dans L).

Définition 4.3. Une variété symplectique est dite monotone ssi il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$\rho c_1 = \omega.$$

Exemple 4.1. (S^2, σ) , où $\sigma_x(V, W) = x \cdot (V \times W)$. Il est évident que S^2 est monotone puisque $\pi_2(S^2)$ ne possède qu'un générateur d'aire positive C et que $c_1(C) = 2 = e(TS^2)$. Puisque S^2 est de dimension 2, toute courbe plongée dans S^2 est une sous-variété lagrangienne. Il est alors facile de voir que les grands cercles (comme par exemple l'équateur) sont monotone. La raison est qu'une telle courbe sépare la sphère en deux disques plongés d'aire égale. Chacun de ces disques étant un générateur de $\pi_2(M, L)$.

Exemple 4.2. Plus généralement l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ munit de la forme de Fubini-Study ω_{FS} est une variété symplectique monotone. Comme dans l'exemple précédent $\pi_2(\mathbb{C}P^n)$ n'a qu'un générateur d'aire symplectique positive qui est donné par l'inclusion canonique de $\mathbb{C}P^1$ dans $\mathbb{C}P^n$, $\iota : \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Ce dernier vérifie $c_1([\iota(\mathbb{C}P^1)]) = n + 1$. Soit maintenant l'application moment

$$\pi : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}^n : [z_0 : \dots : z_n] \rightarrow \left(\frac{|z_1|^2}{\|z\|^2}, \dots, \frac{|z_n|^2}{\|z\|^2} \right),$$

avec $\|z\|^2 = \sum_i |z_i|^2$. Alors $\pi^{-1}(a)$ est un tore lagrangien pour tout $a \in \text{int}(\text{im}(\pi))$, et $\pi^{-1}(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ est monotone.

Exemple 4.3. Si (M, ω) est monotone, alors $(M \times M, \Omega = \omega \otimes -\omega)$ est monotone et la diagonale $\Delta : M \rightarrow (M \times M, \Omega)$ est un plongement lagrangien monotone. De même supposons que $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ soit un symplectomorphisme proche de l'identité. On a vu que $L_\Psi = \text{graph}(\Psi)$ est une sous-variété lagrangienne de $(M \times M, \Omega)$. De plus par le théorème de voisinage de Weinstein on peut voir L_Ψ comme une 1-forme fermée α_Ψ proche de la section nulle de T^*M . Il est alors facile de voir que α_Ψ est exacte ssi L_Ψ est monotone.

Fixons un couple (f, g) Morse-Smale pour L ainsi qu'une structure presque complexe $J : TM \rightarrow TM$ compatible avec ω .

Dans le cas monotone on choisit l'anneau $\Lambda_L = \mathbb{Z}_2[t^{-1}, t]$ ou encore $\mathbb{Z}_2[t]$. On définit ensuite une graduation sur Λ en posant $|t| = -N_L$.

4.1 L'opérateur de bord.

Notons $\text{Crit}(f) = \{x \in L \mid df_x = 0\}$. Le module du complexe des perles est défini par :

$$C_*(f, g, J) = C_*(f, g) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_L,$$

où $C_*(f, g)$ est le module du complexe de Morse associé au couple Morse-Smale (f, g) . L'opérateur de bord est de la forme

$$\delta : C_k(L; f, g, J) \rightarrow C_{k-1}(f, g, J) : x \rightarrow \delta x = \sum_{y, A} n_y^x(A) t^{\bar{\mu}(A)} \quad (4.4)$$

où les coefficients $n_y^x(A)$ comptent modulo 2 le nombre d'éléments d'un espace de module noté $\mathcal{M}(x, y, A; f, g, J)$ dont les éléments sont des chaînes de disques pseudo-holomorphes vérifiant certaines propriétés d'incidence définies grâce au flot du gradient de f . Pour une définitions précises des espaces $\mathcal{M}(x, y; f, g, J)$ voir le chapitre 4. Cet opérateur vérifie :

Lemme 4.1.1 (Biran-Cornéa [BC07]²). *Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne. Alors l'opérateur δ défini par (4.4) vérifie.*

$$\delta \circ \delta = 0 \quad (4.5)$$

On peut donc définir l'**homologie quantique relative** ou encore **homologie des perles** $\text{QH}(L, \Lambda)$ comme étant l'homologie du complexe des perles $(C_*(f, g, J), \delta)$. On peut alors prouver que :

Théorème 4.1.1 (Biran-Cornea [BC07]). *L'homologie quantique relative ne dépend pas des choix auxiliaires, de couple Morse-Smale et de structure presque complexe compatible.*

4.2 Le produit quantique.

Comme dans le cas absolu, on peut définir une structure de produit sur $\text{QH}(L, \Lambda)$ appelé produit quantique.

$$*_L : C_k(f, g, J) \otimes C_l(f', g, J) \rightarrow C_{l+k-n}(f'', g, J) : (x, y) \rightarrow \sum_{z, A} n_z^{x, y}(A) t^{\bar{\mu}(A)} z, \quad (4.6)$$

Avec $x \in \text{Crit}_k(f)$, $y \in \text{Crit}_l(f')$, $z \in \text{Crit}(f'')$ et $A \in H_2^D(M, L)$ tel que $|x| + |y| - |z| + \mu(A) - n = 0$. Les coefficients $n_z^{x, y}(A)$ comptent (modulo 2) des éléments d'espace de

²Voir aussi [BC09]

modules $\mathcal{M}(x, y, z, A; f, f', f'', g, J)$ ³. Ce produit peut être vu comme une déformation du produit d'intersection classique et vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 4.2.1 (Biran-Cornea [BC07]). *Le produit $*_{\mathbb{L}}$ défini par (4.6) vérifie les propriétés suivantes :*

Règle de Leibniz : Pour tout $a, b \in C_*(f, g, J)$,

$$\delta(a *_{\mathbb{L}} b) = \delta a *_{\mathbb{L}} b + a *_{\mathbb{L}} \delta b.$$

Invariance : *Le produit $*_{\mathbb{L}}$ ne dépend pas des choix fait lors de sa construction (couples Morse-Smale, s.p.c.c.).*

Associativité *le produit $*_{\mathbb{L}}$ induit donc un produit en homologie aussi noté*

$$*_{\mathbb{L}} : \text{QH}_*(L, \Lambda) \otimes \text{QH}_*(L, \Lambda) \rightarrow \text{QH}_*(L, \Lambda),$$

qui est associatif.

Unité *il existe un élément $\ell \in \text{QH}(L, \Lambda)$ tel que pour tout $a \in \text{QH}(L, \Lambda)$: $a *_{\mathbb{L}} \ell = \ell *_{\mathbb{L}} a = a$.*

Discussion sur la méthode :

Nous avons mentionné que les opérations algébriques sont obtenues en comptant des éléments d'espace de modules construits à partir de courbes pseudo-holomorphes. Les preuves des résultats énoncés plus haut, opérateur de bord, invariance, produits, sont toutes basées sur trois résultats fondamentaux de la théorie des courbes pseudo-holomorphes à savoir :

1. **la transversalité** : pour s'assurer que les espaces de modules servant à définir la théorie sont soit vides soit des variétés différentiables de dimensions données ;
2. **la compacité** : pour s'assurer qu'en dimension 0 le compte est bien défini ;
3. **le recollement** : qui allié à la compacité permet de montrer certaines propriétés que vérifient les opérateurs définis plus haut et d'autres qu'on a pas mentionné mais qui apparaissent dans la preuve de l'invariance de $\text{QH}(L, \Lambda)$ ou de l'associativité de $*_{\mathbb{L}}$.

Pour toutes ces preuves, la condition de monotonie est cruciale. Elle permet d'éviter les disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov inférieur à 2. La raison est que de tels

³voir section 2 du chapitre 5 pour la définition.

disques sont responsables du bouillonnement de disques de co-dimension 1 qui doit être absolument évité. Il est donc impératif, lorsqu'on désire définir l'homologie quantique d'une lagrangienne, de s'assurer que de tels disques n'apparaissent pas. La monotonie est un moyen économique d'y arriver. Mais ce n'est certainement pas nécessaire.

Le reste de cette thèse est consacré à la généralisation de la construction précédente pour certaines variétés non-monotones. Cette généralisation ne se fera pas sans compromis. Elle se fera au prix de l'invariance par rapport à la structure presque complexe notamment. Cependant pour les applications qu'on a en tête, la théorie sera suffisamment invariante et ce prix ne sera donc pas si élevé.

Deuxième partie

**Variétés lagrangiennes presque
Monotones.**

Chapitre 5

Transversalité.

Après cette brève description du complexe des perles dans le cas monotone, on répète ici la construction de manière plus détaillée dans un cas un peu plus général. On considère des sous-variétés lagrangiennes qui sont C^1 -proches d'une lagrangienne monotone donnée.

Le *Théorème du voisinage de Weinstein* munit l'espace des plongements lagrangiens d'une structure de variété de Banach ou de Fréchet suivant la régularité demandée. On s'intéresse alors aux sous-variétés lagrangiennes qui sont proches au sens de la topologie C^k d'une lagrangienne monotone donnée¹. Pour être tout à fait explicite les sous-variétés lagrangiennes C^k -proches de L , sont les graphes de 1-formes fermées C^k -proches de la section nulle dans le voisinage de Weinstein de L . En particulier on déduit facilement que l'espace des plongements lagrangiens muni de la topologie C^k est localement connexe par arc.

Voyons maintenant comment la construction esquissée à la section précédente peut être adaptée au cas des sous-variétés lagrangiennes C^k -proches d'une lagrangienne monotone donnée. Les principales étapes menant à la définition du complexe des perles sont : la transversalité, la compacité et le recollement. Le dernier n'ayant rien à voir avec la monotonie, seule la transversalité et la compacité doivent être investiguées. La compacité n'est pas vraiment problématique et sera réglée aisément en temps utile.

Définition 5.1. Une sous-variété L est dite *presque monotone* si elle est C^1 -proche² de L_0 , où

¹Ici k peut être fini ou infini, ce qui correspond respectivement aux mots Banach et Fréchet ci-dessus.

²Notons qu'on aurait pu remplacer C^1 par C^k sans que cela ait une quelconque influence sur la suite du travail.

L_0 une sous-variété lagrangienne monotone.

Définissons d'abord de manière précise les espaces $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$ évoqués au chapitre 3.

Si $x, y \in \text{Crit}(f)$ et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ avec $A_1, \dots, A_k \in H_2^D(M, L)$, on définit l'application d'évaluation :

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}(A_1, L, J) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}(A_2, L, J) \times \cdots \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}(A_k, L, J) \\ \downarrow \text{ev}_{\mathbf{A}} \\ L \times (L \times L)^{k-2} \times L \end{array}$$

où

$$\text{ev}_{\mathbf{A}}(u_0, t_1, u_1, \dots, t_{k-1}, u_{k-1}) = (u_0(-1), \dots, \phi_{t_q} u_q(1), u_{q+1}(-1), \dots, u_{k-1}(1))$$

où ϕ_t est le flot du gradient de f . Notons Δ la diagonale dans $L \times L$. On pose alors :

$$\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}, f, g, J) = \text{ev}_{\mathbf{A}}^{-1}(W^u(x) \times (\Delta)^{k-1} \times W^s(y)). \quad (5.1)$$

et

$$\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_k) \\ \sum_i A_i = \mathbf{A}}} \mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$$

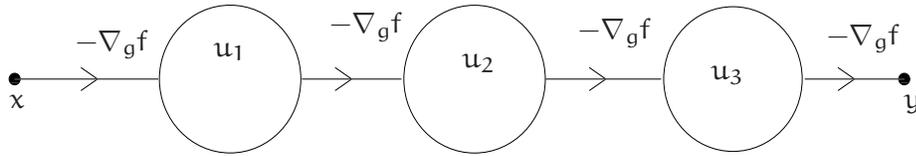


FIG. 5.1 – Élément de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$.

Définition 5.2. Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une variété lagrangienne.

1. rappelons qu'une courbe J -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est dite **simple** s'il existe un ouvert dense $S \subset D$ tel que pour tout $z \in S$, $u^{-1}(u(z)) = z$ et $du_z \neq 0$.
2. Soit $(u_k)_{k=1, \dots, \nu}$ un ν -uple de courbes J -holomorphes. On dit que $(u_k)_{k=1, \dots, \nu}$ sont **absolument distincts** si pour tout k ,

$$u_k(D) \not\subset \bigcup_{l \neq k} u_l(D)$$

On note $\mathcal{P}^*(x, y, \mathbf{A}, f, g, J)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$ constitué de t -uplets de disques J -holomorphes simples et absolument distincts.

Dans la suite on devra aussi considérer des sous-espaces de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{C}; f, g, J)$ dont les chaînes de disques ont une et une seule trajectoire du gradient, définissant une relation d'incidence, de longueur nulle (cfr. figure (5.2)). Plus précisément si $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ et $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_l)$ avec $\mathbf{C} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ sont des tuples de classes d'homotopie relatives, on considère l'application d'évaluation :

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}(A_1, J) \times \mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathcal{M}(A_k, J) \times \mathcal{M}(B_1, J) \dots \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}(B_l, J) \\ \downarrow \text{ev}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \\ L \times (L \times L)^{k-1} \times L \times L \times (L \times L)^{l-1} \times L \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{ev}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}((u_1, t_1) \dots u_k; (v_1, \tau_1), \dots, v_l) = & (u_1(-1), \phi_{t_1}(u_1(1)), \dots \\ \dots, \phi_{t_i}(u_i(1)), u_{i+1}(-1), \dots, u_k(1), v_1(-1), \dots, & \phi_{\tau_j}(v_j(1)), v_j(-1), \dots, v_l(1)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

On pose alors :

$$\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J) = \text{ev}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}^{-1}(W^u(x) \times \Delta^{k-1} \times \Delta \times \Delta^{l-1} \times W^s(y)). \quad (5.3)$$

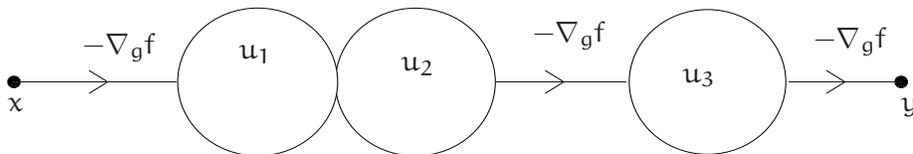


FIG. 5.2 – Élément de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J)$.

Remarque 5.3. Par souci de clarté, voici un petit intermède concernant les notations utilisées. Une lettre majuscule désigne une classe dans $H_2^D(M, L)$ ou dans $\pi_2(M, L)$. Quand celle-ci est en gras comme par exemple \mathbf{A} , elle représente un t -uplet de classes d'homologie (ou d'homotopie) relatives, et quand nous écrivons $\mu(\mathbf{A})$, resp. $\omega(\mathbf{A})$, cela signifie $\sum_i \mu(A_i)$, resp. $\sum_i \omega(A_i)$. Enfin les lettres minuscules représentent les composantes d'une classe de $H_2^D(M, L)$ dans une base donnée³

Ensuite, dans bien des cas, afin d'alléger les notations, on écrira $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; J)$ au lieu de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$.

³voir section suivante.

Reparamétrisation :

Le groupe de reparamétrisation de (D, j) est le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui peut être vu comme le quotient de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ par l'action de \mathbb{Z}_2 . Le disque unité ouvert \mathring{D} est conforme au demi plan supérieur $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ (le bord du disque est identifié avec la droite réelle). Explicitement $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est le sous-ensemble des transformations de Möbius dont les éléments sont de la forme :

$$\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : z \rightarrow \phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5.4)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $ad - bc = 1$. Ce groupe étant un quotient de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ par l'action d'un groupe discret, sa dimension est égale à 3.

L'espace $\mathcal{M}(A, L, J)$ hérite d'une action $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ induite par les reparamétrisations du domaine. Cette action est triviale si $A = 0$ (application constante). Cependant elle est libre si $A \neq 0$, par conséquent l'espace quotient $\mathcal{M}(A, L, J)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ hérite d'une structure de variété différentiable de dimension $\mu(A) + n - 3$.

Fixons les points -1 et 1 sur le bord de D . Ceci revient à fixer 0 et $+\infty$ dans le demi-plan supérieur. Un calcul direct montre que le sous-groupe G de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ fixant 0 et $+\infty$ est formé des transformations de Möbius pour lesquelles $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1/a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Le groupe G agit donc par homothétie de centre 0 et de rapport a^2 .

Enfin, le groupe G^k agit sur l'espace $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$. Comme précédemment cette action est libre dès que \mathbf{A} est non nul et est triviale autrement. On définit alors $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$ qui est le quotient de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$ par cette action. On note $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; f, g, J)$ ou encore $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J)$ l'espace des courbes simples et absolument distinctes.

Bien sûr on peut faire de même avec les espaces $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J)$ et on note alors $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J)$ le quotient de $\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J)$ par son groupe de reparamétrisation et $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}, J)$, le sous-ensemble constitué des éléments simples et absolument distincts.

Un résultat standard⁴ montre qu'il existe un ensemble générique⁵ de structures presque complexes $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ pour lequel pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ et pour tout \mathbf{A} non nul, $\mathcal{P}^*(x, y, \mathbf{A}, J)$ ⁶, est soit vide, soit une variété de dimension :

$$\dim \mathcal{P}^*(x, y, \mathbf{A}; J) = |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) + k - 1$$

⁴cfr [MS04].

⁵générique signifie une intersection d'ouverts denses.

⁶A partir de maintenant nous allons omettre de spécifier le choix de couple Morse-Smale (f, g) sauf lorsque nous aurons besoin de faire une distinction entre plusieurs de ces couples.

, où $|\cdot|$ est l'indice de Morse. Par conséquent $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J)$ hérite lui aussi d'une structure de variété différentiable de dimension :

$$|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1.$$

De même on peut montrer qu'il existe un ensemble générique $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J)$ est soit vide, soit une variété lisse de dimension :

$$|x| - |y| + \mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - 2.$$

On a aussi les théorèmes suivants :

Théorème 5.0.2. (Paul Biran, Octav Cornea [BC07])

Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone. Alors il existe un ensemble générique de structures presque complexes $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que si $\dim \mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J) \leq 1$ alors $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J) = \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; J)$.

Corollaire 5.0.2.1. Une conséquence immédiate est que le résultat précédent s'applique aussi aux espaces $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J)$. Si $\dim \mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; J) = |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1 = 0$, $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; J)$ est compact et consiste en un ensemble fini de points.

Proposition 5.0.1. (Paul Biran, Octav Cornea [BC07])

Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone. Alors il existe un ensemble générique de structures presque complexes $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que si \mathbf{A} et \mathbf{B} ne sont pas triviales, et si $\dim \mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J) \leq 0$ alors $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J) = \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J)$.

En particulier si $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - 1 \leq 0$, $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J) = \emptyset$ et si $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - 1 = 1$ alors $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; \mathbf{B}; J)$ est un ensemble fini de points.

5.1 Préliminaires techniques.

Cette section est purement technique et vise à développer les résultats de transversalité nécessaires à la définition des opérations algébriques (opérateur de bord, produit quantique, etc...). Nous désirons généraliser le théorème (5.0.2) aux variétés presque monotones. Dans un premier temps nous allons énumérer certains résultats préliminaires qui nous permettront de prouver un analogue de ce théorème. Nous avons décidé de les séparer en deux groupes. Le premier est constitué de résultats assez généraux qui apparaissent dans la preuve du théorème (5.0.2) et qui sont tirés de [BC07]⁷. Le second est

⁷Voir aussi [BC09].

quant à lui spécifique à la situation étudiée et permettra une adaptation des arguments de la dite preuve.

A la fin du chapitre 2 nous avons évoqué le problème de la simplicité ou non simplicité des disques pseudo-holomorphes. La sous-section suivante présente des raffinements du **Lemme d'extraction** de Lazzarini. Les preuves de ces résultats peuvent être trouvées dans [BC07].

Lemmes d'extraction :

Lemme 5.1.1. *Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne de dimension $\dim L \geq 3$. Alors il existe un ensemble de seconde catégorie $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ l'assertion suivante est vraie : si $u, v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ sont des disques J -holomorphes simples tels que $\#u(D) \cap v(D) = \infty$, alors*

- $u(D) \subset v(D)$ et $u(\partial D) \subset v(\partial D)$, ou
- $v(D) \subset u(D)$ et $v(\partial D) \subset u(\partial D)$

De plus sous les mêmes hypothèses :

Lemme 5.1.2. *Il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ on a la propriété suivante : si $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est un disque J -holomorphe non-constant vérifiant $u(-1) \neq u(+1)$ alors il existe un disque J -holomorphe simple $v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $u(D) = v(D)$, $u(\partial D) = v(\partial D)$,
2. $v(\pm 1) = u(\pm 1)$
3. $\omega([v]) \leq \omega([u])$; cette inégalité étant stricte ssi u n'est pas simple.

et

Lemme 5.1.3. *Il existe un ensemble générique $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$: si $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est un disque J -holomorphe vérifiant $u(e^{i\frac{2k\pi}{3}}) \neq u(e^{i\frac{2l\pi}{3}})$ pour $k \neq l$, avec $k, l \in \{1, 2, 3\}$, alors il existe un disque J -holomorphe simple $v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $u(D) = v(D)$, $u(\partial D) = v(\partial D)$,
2. $v(e^{i\frac{2l\pi}{3}}) = u(e^{i\frac{2l\pi}{3}})$ pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$.
3. $\omega([v]) \leq \omega([u])$; cette inégalité étant stricte ssi u n'est pas simple.

Remarque 5.4. *Nous désirons attirer l'attention du lecteur sur le point suivant : si L est monotone, et si u vérifie les hypothèses du lemme précédent, alors le disque simple v obtenu dans les lemmes précédents vérifie $\mu([v]) \leq \mu([u])$, avec égalité ssi $u = v$. Cette propriété est primordiale dans la preuve du théorème (5.0.2). Cependant sans la monotonie le résultat n'est plus nécessairement vrai. Nous allons donc essayer de s'assurer de cette propriété dans le cas presque monotone.*

Lemmes préparatoires.

Lemme 5.1.4. *Soit L_0 une sous-variété lagrangienne monotone. Pour toute constante $K > 0$ et pour toute s.p.c.c. $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$ il existe un voisinage⁸ $\mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 et un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 tels que : pour tout $J \in \mathcal{N}(J_0, K)$, pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et pour tout disque J -holomorphe, $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ on a :*

$$\omega([u]) < K \Rightarrow \mu([u]) \geq 2$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un K et J_0 tels que : pour tout voisinage $\mathcal{N}(L_0)$ de L_0 et pour tout voisinage $\mathcal{N}(J_0)$ de J_0 il existe $L \in \mathcal{N}(L_0)$, $J \in \mathcal{N}(J_0)$ et un disque J -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ d'énergie $\omega([u]) < K$ ayant un indice de Maslov $\mu([u]) < 2$. Parmi ces lagrangiennes et ces structures presque complexes compatibles, choisissons une suite de lagrangiennes $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ convergeant au sens C^1 vers L_0 ainsi qu'une suite de s.p.c.c. $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ convergeant au sens C^1 vers J_0 . Etant donné qu'on peut choisir les voisinages C^1 de L_0 et J_0 arbitrairement, de telles suites existent. Donc pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un disque J_i -holomorphe $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_i)$ vérifiant : $\omega([u_i]) < K$ et $\mu([u_i]) < 2$. D'après le théorème de compacité (3.8.1) il existe une sous-suite de u_i convergeant au sens de Gromov vers une application stable J_0 -holomorphe u . Cependant $H_2^D(M, L_i) \cong H_2^D(M, L)$ est un groupe discret, par conséquent il existe un entier N tel que pour tout $i > N$, $[u_i] = A$ avec $A \in H_2^D(M, L)$ vérifiant $0 < \omega(A) < K$ et $\mu(A) < 2$; ce qui constitue une violation de la condition de monotonie. \square

Grâce à ce lemme, nous pouvons régler le problème mentionné dans la remarque (5.4) :

Lemme 5.1.5. *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone. Pour tout $K > 0$, pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$, notons $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et $\mathcal{N}(J_0; K)$ des voisinages vérifiant la thèse du lemme précédent. Pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ il existe un ensemble générique⁹ $\mathcal{J}_{\text{reg}}(L) \subset$*

⁸rappelons que les voisinages sont des voisinages au sens de la topologie C^1 .

⁹Générique signifie de seconde catégorie de Baire.

$\mathcal{N}(J_0, K)$, dépendant de L , tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L)$, si $v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est le disque simple extrait d'un disque J -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ via le lemme (5.1.2) et si $\omega([u]) < K$ alors $\mu([v]) \leq \mu([u])$ avec égalité ssi $u = v$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le disque v est obtenu à partir du lemme de décomposition¹⁰. Le lemme (5.1.4) nous permet alors de conclure. \square

Transversalité revisitée.

On prouve ici une variante du théorème (5.0.2) dans le cas où la condition de monotonie a été relaxée. Rappelons que si L est une sous-variété lagrangienne quelconque, des arguments standards¹¹ montrent que les espaces de modules de perles $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J)$ sont soit vides soit des variétés lisses de dimension :

$$|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1.$$

Théorème 5.1.1. Soient $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone, et $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$ une structure presque complexe compatible. Pour toute constante $K > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 ainsi qu'un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 tel que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$, il existe un ensemble générique $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0; K)$ tel que pour tout $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ avec $A_i \in H_2^{\mathbb{D}}(M, L)$ et pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$, vérifiant $0 < \omega(\mathbf{A}) < K$, et $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1 \leq 1$ on a :

$$\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}, L, J) = \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J). \quad (5.5)$$

où l'espace $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J)$ est soit vide, soit une variété de dimension $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1$. De plus, si $\dim \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J) = 0$, $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$ est compacte. En particulier $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$ est un ensemble fini de points.

Démonstration. Rappelons d'abord que l'obstruction qui nous empêcherait de prouver le résultat est l'existence de disques pseudo-holomorphes d'indice de Maslov strictement inférieur à 2. Or nous allons voir que si $\dim L \geq 3$ nous pouvons nous placer sous les hypothèses du lemme (5.1.4). On peut donc appliquer le lemme (5.1.5). En dimension plus petite ou égale à deux, il faudra argumenter de manière différente.

¹⁰cfr [BC07] pour les détails.

¹¹cfr. [MS04] pour les détails.

1. $\dim L \geq 3$: Supposons d'abord que $\dim L \geq 3$. Fixons une constante positive K et choisissons les voisinages $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et $\mathcal{N}(J_0; K)$ comme dans le lemme (5.1.4). La preuve se fait par induction sur $\bar{\mu}(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A})/N_L = k$.

Soit \mathbf{A} un t -tuple de classe d'homotopie (ou d'homologie) vérifiant $\mu(\mathbf{A}) = N_L$ et $\omega(\mathbf{A}) < K$. Supposons qu'il existe un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$ avec $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) \leq 1$. Le théorème de *décomposition* (3.7.1) ainsi que le lemme (5.1.4) nous permettent de déduire que \mathbf{u} est constitué d'un seul disque d'indice N_L qui est par conséquent simple et absolument distinct puisque tout les disques non-constants ont des indices de Maslov plus grands ou égaux à 2.

Supposons maintenant que l'équation (5.5) est vrai pour tout \mathbf{A} avec $\bar{\mu}(\mathbf{A}) \leq m$. Soit \mathbf{A} tel que $\bar{\mu}(\mathbf{A}) = m + 1$. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$ avec $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) \leq 1$, raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ n'est pas dans $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}, L, J)$. Remarquons avant toute chose qu'aucun disque de \mathbf{u} ne vérifie $u_i(-1) = u_i(1)$. En effet si un tel disque existait, on obtiendrait, après omission de celui-ci, une chaîne de disques J -holomorphes \mathbf{u}' appartenant à l'espace de module $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}', L, J)$ avec $\mu(\mathbf{A}') \leq \mu(\mathbf{A}) - 2$ et $\omega(\mathbf{A}') < \omega(\mathbf{A})$. Le dit espace aurait alors une dimension négative ce qui par hypothèse d'induction sur la transversalité impliquerait qu'il est vide, d'où la contradiction.

Ce petit laïus nous permet de nous placer sous les hypothèses du lemme (5.1.2).

simplicité des disques : Supposons une fois encore par l'absurde¹² qu'il existe une composante non-simple u_i de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$. Le lemme (5.1.5), nous permet d'extraire de u_i un disque J -holomorphe v ayant les propriétés énumérées dans l'énoncé du lemme (5.1.2), en particulier $v(\pm 1) = u_i(\pm 1)$, $\omega([v]) < \omega([u_i])$ et $\mu([v]) < \mu([u_i])$. On remplace alors u_i par v obtenant ainsi un élément $\mathbf{u}' \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}', L, J)$. L'énergie de \mathbf{A}' est strictement inférieure à l'énergie de \mathbf{A} , ce qui nous place encore sous les hypothèses de l'induction ; l'indice de Maslov baisse alors d'au moins 2 lors de la procédure d'extraction. Nous pouvons alors déduire que $\dim \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}', L, J) < 0$. Une fois encore l'hypothèse d'induction fournit la contradiction.¹³

¹²A n'en pas douter, l'usage répété de preuves par l'absurde n'enchanterait guère le regretté Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

¹³Pour aider le lecteur remarquons qu'on vient d'utiliser deux fois et de manière essentielle le fait que $N_L \geq 2$ ainsi que les lemmes (5.1.4) et (5.1.5).

absolument distincts : Supposons maintenant l'existence d'une chaîne de disques $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ simples mais pas absolument distincts. Il existe alors un entier $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que $u_l(D) \subset \bigcup_{j \neq l_0} u_j(D)$. Par conséquent il existe un autre entier $l' \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\#u_l(D) \cap u_{l'}(D)$ est infini. Le lemme (5.1.1) nous apprend que soit :

- $u_l(D) \subset u_{l'}(D)$ et $u_l(\partial D) \subset u_{l'}(\partial D)$, soit
- $u_{l'}(D) \subset u_l(D)$ et $u_{l'}(\partial D) \subset u_l(\partial D)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_l(D) \subset u_{l'}(D)$ et $u_l(\partial D) \subset u_{l'}(\partial D)$.

$l < l'$: Si $l < l'$ on peut à nouveau extraire une chaîne de disques J-holomorphes \mathbf{u}' joignant x à y et vérifiant $\mu([\mathbf{u}']) \leq \mu([\mathbf{u}]) - 2$. En effet, en omettant les disques u_j de \mathbf{u} avec $j = \{l, \dots, l' - 1\}$, on obtient la chaîne de disques désirée. Par ailleurs, il existe un point $p \in \partial D$ tel que $u_{l'}(p) = u_l(-1)$. Si $p \neq 1$ on peut trouver un élément σ of $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\sigma(1) = 1$ and $\sigma(p) = -1$. Ce faisant, on obtient une nouvelle chaîne de disques par omission des disques J-holomorphes $\{u_i\}_{i \in \{l, \dots, l' - 1\}}$. La contradiction s'obtient de manière en tout point identique à celle obtenue ci dessus pour la simplicité des disques. Si $p = 1$ on peut même omettre u'_l et raisonner comme précédemment.

$l' < l$: L'argument est en tout point similaire au point précédent. On laisse au lecteur le soin de le vérifier.

2. $\dim L \leq 2$: Puisque $\dim L \leq 2$, $\mu(\mathbf{A}) \leq 4$. Si $\mu(\mathbf{A}) \leq 3$ il n'y a qu'un seul disque qui est simple car d'indice de Maslov minimal. Supposons donc que $\mu(\mathbf{A}) = 4$. Les deux seuls types de configurations possibles sont :

- (a) $\mathbf{A} = A \in \pi_2(M, L)$ avec $\mu(A) = 4$,
- (b) $\mathbf{A} = (A, B)$ avec $\mu(A) = \mu(B) = 2$.

Comme dans le cas $\dim L \geq 3$ on peut supposer, comme précédemment, que si $u \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J)$, $u(1) \neq u(-1)$.

Cas (a) : Soit $u \in \mathcal{M}(x, y, A, L, J)$ avec $\mu(A) = 4$. Remarquons que puisque $\mu(A) = 4$ et $|x| - |y| + \mu(A) - 1 \leq 1$, $|y| = 2$ et $|x| = 0$. Supposons d'abord que le graphe de non-injectivité $\mathfrak{G}(u)$ est connexe. Le théorème de factorisation de Lazzarini nous permet de factoriser u via un revêtement holomorphe de degré 2 et d'obtenir ainsi un disque simple v . Puisque $u(-1) \neq u(1)$, il existe $q, q' \in \partial D$ tel que $v(q) = u(-1)$ et $v(q') =$

$u(+1)$. On peut alors reparamétriser v de tel sorte que $v \in \mathcal{M}(x, y, B, J, L)$ avec $\mu(B) = 2$. Mais puisque 2 est l'indice de Maslov minimal, $\mathcal{M}(x, y, B, J, L)$ contient uniquement des courbes simples. Il est donc vide puisque $\mu(B) - 4 = -2$

Supposons ensuite que $D - \mathfrak{G}(u)$ n'est pas connexe. Puisque $\mu(A) = 4$, le nombre de composantes connexes est 2. Notons D_i , avec $i = 1, 2$, les composantes connexes de $D - \mathfrak{G}(u)$. La formule de décomposition fournit $[u] = [v_1] + [v_2]$ avec $\mu([v_1]) = \mu([v_2]) = 2$.

On distingue alors les sous-cas suivants :

- $-1, +1 \in D_1$: Notons $A_1 = [v_1]$ et $A_2 = [v_2]$. Puisque $-1, 1 \in D_1$, on peut supposer que $v_1 \in \mathcal{M}(x, y, A_1, L, J)$. Etant donné que $\mu(A_1) = 2$ est d'indice de Maslov minimal, $\mathcal{M}(x, y, A_1, L, J)$ est constitué de courbes simples. La formule de dimension de cet espace fournit une fois de plus une contradiction. Voir dessin

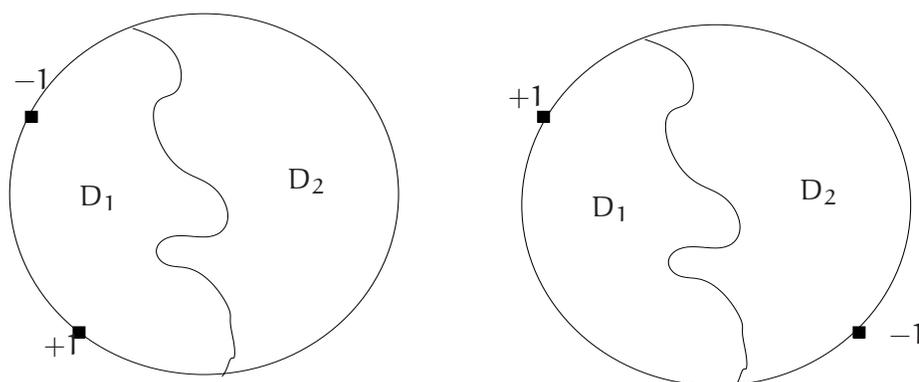


FIG. 5.3 – Cas $-1, +1 \in D_1$ à droite et $-1 \in D_1$ et $+1 \in D_2$ à gauche.

- $-1 \in D_1$ et $+1 \in D_2$: Supposons d'abord que v_1 et v_2 ne soit pas absolument distincts. On peut alors supposer que $v_1(D) \subset v_2(D)$ et $v_1(\partial D) \subset v_2(\partial D)$. Par conséquent il existe $p \in \partial D$ tel que $v_2(p) = v_1(-1)$. En reparamétrant v_2 on obtient un élément de $\mathcal{M}^*(x, y, A_2; J)$ de dimension $|x| - |y| + \mu(A_2) - 1 \leq |x| - |y| + \mu(A) - 2 < 0$. Par conséquent on obtient une contradiction. On peut donc supposer que v_1 et v_2 sont absolument distincts.

Il existe des arcs $\gamma_1 \in \partial D$ et $\gamma_2 \in \partial D$ tels que $u_1(\gamma_1) = u_2(\gamma_2)$. Ces arcs correspondent à l'arc séparant le disque initial $[u]$ en deux.

De cette manière on obtient une famille à un paramètre d'éléments de $\mathcal{M}(x, y, A_1; A_2, J)$. Or $\mathcal{M}(x, y, A_1; A_2, J)$ est constitué de courbes simples, puisque

$\mu(A_1) = \mu(A_2) = 2 = N_L$, et absolument distinctes par hypothèse. Sa dimension est comme on l'a vu

$$|x| - |y| + \mu(A_1 + A_2) - 2 = 0.$$

Ce qui constitue une contradiction.

cas (b) : Encore une fois il existe donc deux classes $A = [u]$, $B = [v]$ telles que $\mu(A) = \mu(B) = 2$. Supposons d'abord que v et w ne soit pas absolument distincts. Sans perte de généralité on peut donc supposer que $u(D) \subset v(D)$. Supposons d'abord que $u(-1) \in v(\partial D)$. Il s'ensuit alors que $u \in \mathcal{M}(x, y, A, L, J)$ qui est soit une variété, soit vide. Sa dimension étant négative elle est vide.

On peut donc supposer que $u(-1) \in v(\text{int}D)$. Pour tout $A \in \pi_2(M, L)$ tel que $\mu(A) = 2$. On considère l'application d'évaluation suivante :

$$ev_A : (\mathcal{M}(A, J) \times \text{int}D) / \text{Stab}_1 \longrightarrow M \times L.$$

Il existe un ensemble générique de structures presque complexes $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0; K)$ tel que pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$ l'espace $ev_A^{-1}(W^u(x) \cap W^s(y))$ est une variété de dimension $|x| - |y| + 2 - n$. Puisque $u(-1) \in v(\text{int}D)$, il existe $z \in \text{int}D$ tel que $u(-1) = v(z)$. Par conséquent $v \in ev_A^{-1}(W^u(x) \cap W^s(y))$. Mais :

$$|x| - |y| + 2 - n \leq 2 - \mu(A) \leq -2,$$

d'où l'on tire la contradiction.

□

Chapitre 6

Le complexe des perles.

Le chapitre précédent nous a permis de préparer le terrain en vue de la construction du complexe des perles pour des lagrangiennes presque monotones. Nous pouvons maintenant répéter avec plus de détails la construction esquissée au chapitre 3 dans le cas monotone.

L'anneau de coefficients.

Les anneaux de coefficients que nous allons considérer sont un peu plus généraux que celui introduit dans le cas monotone. On note $\Lambda_L = \mathbb{Z}_2[\pi_2(M, L)]$. Ici L est une lagrangienne quelconque. Un élément de Λ_L est de la forme $\sum_A n_A e^A$ (la somme est finie). On introduit aussi l'anneau de Novikov suivant :

$$\Lambda_\omega = \left\{ \sum_{A \in \pi_2(M, L)} n_A q^{\omega(A)} t^{\mu(A)} \mid \forall c \in \mathbb{R}, \#\{n_A \neq 0 \mid \omega(A) < c\} < +\infty \right\}.$$

Bien sûr on introduit un degré pour les éléments de Λ_L et Λ_ω défini de la manière suivante : si $A \in \pi_2(M, L)$ vérifie $\mu(A) = kN_L$, $\deg(e^A) = k \deg(t) = -kN_L$.

Comme on l'a déjà fait remarquer, étant donné que les cibles des morphismes E_ω et μ sont abéliennes, on peut remplacer $\pi_2(M, L)$ par $H_2^D(M, L)$ dans la définition de Λ_L , resp. Λ_ω .

6.1 L'opérateur de bord.

Au vu du théorème (5.1.1) on peut maintenant définir :

$$\begin{aligned} \delta : C_k(f, g, J) &\longrightarrow C_{k-1}(f, g, J) \\ x &\longrightarrow \delta x = \sum_{y, \mathbf{A} | \omega(\mathbf{A}) < K} n_y^x(\mathbf{A}) q^{\omega(\mathbf{A})} t^{\bar{\mu}(\mathbf{A})} y \end{aligned} \quad (6.1)$$

où :

$$n_y^x(\mathbf{A}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, J) & \text{si } |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \pi_2(M, L)^k$. Nous allons maintenant prouver que sous certaines hypothèses, cet opérateur vérifie $\delta \circ \delta = 0$ et par conséquent le complexe des perles définit une homologie. Mais avant, nous avons besoin d'expliciter la relation qui lie l'aire symplectique des disques à leur indice de Maslov.

Remarque 6.1. *Remarquons que le théorème de compacité de Gromov (3.8.1) nous assure que la somme apparaissant dans (6.1) est finie.*

L'identité $\delta \circ \delta = 0$:

Fixons un plongement lagrangien monotone $\alpha_0 : L \hookrightarrow M$ ayant comme constante de monotonie η . On note par L_0 l'image de α_0 . Soit $\alpha : L \hookrightarrow M$ une sous-variété lagrangienne presque monotone, c'est-à-dire C^1 -proche de L_0 . Puisqu'on se trouve dans un voisinage de Weinstein on peut considérer que α_0 est la section nulle O_{T^*L} de T^*L et que α est une 1-forme fermée C^1 -proche de la section nulle.

Rappelons que $\pi_2(M, L_0)$ est isomorphe à $\pi_2(M, L_\alpha)$. En effet, l'espace des plongements lagrangiens étant localement connexe par arc on peut construire un isomorphisme explicite de la manière suivante :

Joignons α_0 et α par une isotopie lagrangienne $\alpha_s : L \hookrightarrow M$, $s \in [0, 1]$ où les α_s sont des 1-formes fermées C^1 -proches de α_0 ¹. Cette dernière induit une isotopie ψ_s à support compact telle que $\psi_s(\alpha_0(q)) = \alpha_s(q)$, pour tout $q \in L$. Notons D_s le disque de rayon $1+s$. Si $(\rho, \theta) = z$ sont les coordonnées polaires du plan, notons $\gamma(\theta) := u(1, \theta)$ et considérons ;

$$u_{\alpha_s}(z) := \begin{cases} u(z) & \text{pour } \rho \leq 1 \\ \gamma_\rho(\theta) := \psi_{\rho-1}(\gamma(\theta)) & \text{pour } 1 \leq \rho \leq 1+s \end{cases} \quad (6.2)$$

¹Etant donné qu'on travaille dans le voisinage de Weinstein, α_0 représente la section nulle de T^*L .

L'application $\Phi_s : \pi_2(M, L_0) \rightarrow \pi_2(M, L_{\alpha_s}) : [u] \rightarrow [u_{\alpha_s}]$ est un isomorphisme pour tout s . En effet, on vérifie aisément que ψ_s relève n'importe quelle homotopie de disques à bord dans L_0 en une homotopie de disques à bord dans L_{α_s} .

Comparons : $E_{\omega, L_\alpha}(\Phi_\alpha(A))$ avec $E_{\omega, L_0}(A)$. Posons $A_\alpha = \Phi_\alpha(A)$. Si u est un représentant de A ,

$$E_{\omega, L_\alpha}(A_\alpha) = \int_{D_2} u_\alpha^* \omega = \int_D u^* \omega + \int_C \gamma^* \omega \quad (6.3)$$

où $C = [0, 1] \times S^1$. Si λ désigne la forme Liouville, le dernier terme de l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} - \int_C \gamma_1^* d\lambda &= - \int_{\partial C} (\gamma|_{\partial C})^* \lambda = - \int_{S^1 \times \{1\}} \gamma^* \lambda \\ &= - \int_{S^1} \gamma_1^* \alpha = - \int_{\partial A_\alpha} \alpha = -\alpha \circ \partial(A_\alpha) \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$E_{\omega, L_\alpha}(A_\alpha) = \eta\mu(A_\alpha) - \alpha(\partial A_\alpha), \quad (6.4)$$

pour toute 1-forme fermée α C^1 -proche de α_0 .

Remarque 6.2. Dans la suite on notera par $\omega = E_{\omega, L_\alpha}$. Il n'y aura pas de confusion possible car on ne considérera qu'une lagrangienne presque monotone à la fois et $E_{\omega, L_0} = \eta\mu$. On notera donc toujours $\eta\mu$ au lieu de E_{ω, L_0} .

Proposition 6.1.1. Soit L_0 une sous-variété lagrangienne monotone. Pour tout $K > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; K, \epsilon)$ de L_0 ainsi qu'un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K, \epsilon)$ de J_0 , tels que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; K, \epsilon)$, si $J_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{N}(J_0; K, \epsilon)$ est l'ensemble générique pour lequel l'opérateur de Cauchy-Riemann linéarisé est surjectif en toute courbe simple, alors pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L)$ et pour tout $A \in \pi_2(M, L)$ vérifiant :

- $0 < \omega(A) < K$ et,
- $\mathcal{M}^*(A, L) \neq \emptyset$,

on a :

$$|\eta\mu(A) - \omega(A)| = |\alpha(\partial A)| < \epsilon.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $K > 0$, $\epsilon > 0$ et $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$, tel que pour tous voisinages $\mathcal{N}(L_0)$ de L_0 et $\mathcal{N}(J_0)$ de J_0 , il existe $L \subset \mathcal{N}$, $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{N}(J_0)$, $A \in \pi_2(M, L)$ tel que $0 < \omega(A) < K$, $\mathcal{M}^*(A, L) \neq \emptyset$ avec $|\alpha(\partial A)| > \epsilon$. On trouve alors une suite $\{\alpha_i :$

$L \rightarrow (M, \omega)_{i \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers $L_0 = \alpha_0(L)$, une suite $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers J_0 et une suite $\{u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_i) : \bar{\partial}_{J_i} u_i = 0, 0 < \omega([u_i]) < K\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ avec $|\alpha_i(\partial[u_i])| > \epsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. On peut alors extraire une sous-suite toujours notée u_i convergeant vers une courbe stable \mathbf{u} . Cette dernière vérifie $|\alpha_0(\partial \mathbf{u})| = 0$ car α_0 est la section nulle, ce qui constitue une contradiction. \square

On peut maintenant montrer :

Proposition 6.1.2. *Soit L un sous-variété lagrangienne. Soit (f, g) un couple Morse-Smale. Il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que : pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$ pour tout $A \in \pi_2(M, L)$ et pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$,*

1. Si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 = 0$ alors, $\mathcal{M}^*(x, y, A; J)$ est soit vide soit une union de points.
2. Si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 = 1$ alors, $\mathcal{M}^*(x, y, A; J)$ est soit vide soit une variété ouverte de dimension 1 possédant une compactification $\overline{\mathcal{M}^*}(x, y, A; J)$ vérifiant :

$$\partial \overline{\mathcal{M}^*}(x, y, A; J) = \bigcup_{\substack{z \in \text{Crit}(f), \mathbf{B}, \mathbf{C} \\ \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A} \\ |x| - |z| + \mu(\mathbf{B}) - 1 = 0, \\ |z| - |y| + \mu(\mathbf{C}) - 1 = 0}} \mathcal{M}^*(x, z, \mathbf{B}; J) \times \mathcal{M}^*(z, y, \mathbf{C}; J) \quad (6.5)$$

Démonstration. Nous allons étudier la compactification de l'espace $\mathcal{M}^*(x, y, A; f, gJ)$. Soit $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(x, y, A; J)$ une suite de perles. On sait, par le théorème de compacité de Gromov (3.8.1), qu'il existe une sous-suite convergeant vers une courbe brisée. Énonçons d'abord la liste des brisures possibles :

- (B1) la sous-suite u_ν converge vers une courbe brisée constituée de deux trajectoires perlées \mathbf{u} et \mathbf{v} la première joignant x à un point critique z et la deuxième joignant z à y . En outre, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, x, z$ et y vérifient :

$$\begin{aligned} |x| - |z| + \mu([\mathbf{u}]) - 1 &= 0, \\ |z| - |y| + \mu([\mathbf{v}]) - 1 &= 0, \\ [\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] = \mathbf{A}, \text{ où } \mathbf{A} \text{ vérifie } \sum_i A_i &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

On remarquera qu'il peut y avoir plusieurs de ces brisures et que leur nombre dépend de la dimension de $\mathcal{M}^*(x, y, A; J)$. En particulier si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 = 1$, il ne peut y en avoir qu'une alors qu'il n'y en a aucune si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 = 0$.

(B2) Un disque v bouillonne en un point différent de ± 1 . L'occurrence d'un tel bouillonnement n'est possible que si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 > 1$. En effet, si $|x| - |y| + \mu(A) - 1 \leq 1$, un tel disque a nécessairement un indice de Maslov strictement supérieur à 2. Il suffit alors d'omettre le disque en question pour obtenir une trajectoire perlée $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, A'; f, g, J)$ avec $\mu(A') < \mu(A) - 1$. Mais alors :

$$|x| - |y| + \mu(A') - 1 \leq |x| - |y| + \mu(A) - 3 \leq -1.$$

Ce qui constitue une contradiction.

- (B3) Une sphère bouillonne en un point intérieur du disque. Comme pour le point (B2) ceci ne se produit jamais pour les espaces de dimensions 0 ou 1 car ce type de bouillonnement est de codimension au moins 2.
- (B4) Un disque bouillonne au point 1 ou -1 .
- (B5) La situation symétrique de la précédente, deux disques en relation d'incidence se recollent, c.-à-d. que la longueur d'une des trajectoires du gradient définissant une relation d'incidence tend vers 0.

Les points (B4) et (B5) peuvent être interprétés de deux manières équivalentes. Soit on les considère comme des points intérieurs en autorisant les trajectoires du gradient de longueur nulle dans la définition de $\mathcal{M}(x, y, A; f, g, J)$. Soit on les considère comme des trajectoires du bord de $\mathcal{M}(x, y, A; f, g, J)$. Dans ce dernier cas on peut cependant les négliger du décompte puisque qu'ils apparaissent par paire et fournissent par conséquent une contribution nulle lors du décompte modulo 2. C'est pourquoi nous omettons ces phénomènes de la formule (6.5).

□

Théorème 6.1.1 ($\delta^2 = 0$). *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une variété lagrangienne monotone de constante de monotonie $\eta > 0$. Pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$; pour tout ϵ et pour tout $K > \eta(n + 2) + 2\epsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon) \subset \mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 et un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon) \subset \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 tel que² :*

$$\delta \circ \delta = 0. \tag{6.6}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier (6.6) sur les générateurs du complexe :

$$\delta \circ \delta(x) = \sum_{\substack{y, A \\ \omega(A) < K}} \sum_{\substack{z, B \\ \omega(B) < K}} n_y^x(A) n_z^y(B) q^{\omega(A+B)} t^{\bar{\mu}(A+B)} z.$$

²Ici $\mathcal{N}(J_0; K)$ et $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ sont les voisinages apparaissant dans le théorème (5.1.1).

Nous allons interpréter les coefficients $n_y^x(A)n_z^y(B)$ comme le compte (modulo 2) des éléments du bord de l'espace de modules $\bar{\mathcal{M}}(x, z, A + B, L; J)$ de dimension 1. Il faut s'assurer que :

- **brisure :**

lorsqu'un élément de $\mathcal{M}(x, z, C, L; J)$ se brise, les éléments constitutifs de la courbe brisée ont une aire inférieure à K ,

- **recollement :** lorsque deux éléments appartenant à des espaces $\mathcal{M}(x, y, A, L; J)$ et $\mathcal{M}(y, z, B, L; J)$ de dimension 0 se recollent, l'aire symplectique de l'élément ainsi obtenu est encore d'aire symplectique inférieure à K .

Le premier point est trivial puisque les courbes pseudo-holomorphes non-constantes sont toujours d'énergie positive. Le deuxième point l'est moins. Il est facile de voir que l'indice de Maslov des courbes apparaissant dans la formule $\delta^2 = 0$ est borné par $n + 2$. En effet en écrivant la formule de dimension pour ces espaces on a : $|x| - |y| + \mu(A) = 2$, par conséquent $\mu(A) = |y| - |x| + 2 \leq n + 2$.

Par conséquent le nombre de disques pseudo-holomorphes apparaissant dans une trajectoire perlée est bornée par $\frac{n+2}{N_L}$. Cette borne ne dépend aucunement de $L \subset \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$. On peut alors considérer les voisinages $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon) = \mathcal{N}(L_0; J_0, K, \epsilon') \cap \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon) = \mathcal{N}(J_0; K, \epsilon') \cap \mathcal{N}(J_0; K)$ où $\mathcal{N}(L_0; J_0, K, \epsilon')$ et $\mathcal{N}(J_0; K, \epsilon')$ sont les voisinages apparaissant dans la proposition (6.1.1) avec $\epsilon' = \epsilon N_L / (n + 2)$. Il s'ensuit que pour tout $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$, pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ et pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, J)$ avec $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1 \leq 1$ on a :

$$|\omega(\mathbf{A}) - \eta\mu(\mathbf{A})| < \epsilon.$$

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L; J)$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{M}(y, z, \mathbf{B}, L; J)$. Supposons que ces deux courbes se recollent en un élément $\mathbf{w} \in \mathcal{M}(x, z, \mathbf{C}, L; J)$ avec $C = A + B$. On a :

$$\begin{aligned} \omega([\mathbf{w}]) &= \omega([\mathbf{u}]) + \omega([\mathbf{v}]) \\ &= \eta\mu([\mathbf{u}]) - \alpha(\partial[\mathbf{u}]) + \eta\mu([\mathbf{v}]) - \alpha(\partial[\mathbf{v}]) < \eta(n + 2) + 2\epsilon < K. \end{aligned}$$

Les nombres $n_y^x(A)n_z^y(B)$ comptent donc bien des éléments du bord des espaces de modules $\bar{\mathcal{M}}(x, z, C, L; J)$. \square

Au vue du résultat précédent, l'homologie de $C_*(L', f, g, J, K, \epsilon)$ qu'on note momentanément $\text{QH}_*(L'; f, g, J, K, \epsilon)$ est bien définie.

Invariance.

L'homologie $QH_*(L; f, g, J, K, \epsilon)$ dépend a priori des choix suivants :

- un couple Morse-Smale (f, g) ,
- une structure presque complexe $J \in \mathcal{W}$
- des constantes K et ϵ .

On va montrer qu'en réalité $QH_*(L; f, g, J, K, \epsilon)$ ne dépend que des constantes K et ϵ et de J_0 . C'est pourquoi dorénavant nous noterons l'homologie du complexe des perles associée à une lagrangienne $QH_*(L; J_0, K, \epsilon)$ ou même $QH(L)$.

Remarque 6.3. *Nous verrons plus loin que dans beaucoup de cas intéressants $QH(L; J_0, K, \epsilon) = 0$ pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$.*

Etant donné que l'opérateur du complexe des perles est une déformation de celui apparaissant en théorie de Morse classique, il paraît naturel de généraliser les constructions de la théorie de Morse à notre situation. De fait, toutes les preuves concernant l'invariance sont des adaptations des preuves d'invariance en théorie de Morse.

Soit $\mathfrak{T}_0 = (f_0, g_0, J_0)$ et $\mathfrak{T}_1 = (f_1, g_1, J_1)$ deux triples génériques. Il y a deux étapes dans la preuve de l'invariance. Premièrement, on montre qu'à partir d'une homotopie régulière bien choisie $\mathcal{H}(F, G, J)$ joignant \mathfrak{T}_0 à \mathfrak{T}_1 on peut construire un morphisme

$$\Phi_{\mathcal{H}} : C_*(L, \mathcal{T}_0; K) \longrightarrow C_*(L, \mathcal{T}_1; K)$$

induisant un isomorphisme en homologie. On montre ensuite que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de l'homotopie régulière \mathcal{H} .

Morphisme de comparaison : $\Phi_{\mathcal{H}}$:

A l'instar de ce qui se fait en théorie de Morse classique, nous utilisons un **cobordisme de Morse**. La différence entre le morphisme de comparaison que nous construisons ici et celui rencontré en théorie de Morse est le type d'objet que l'on compte : des trajectoires perlées dans notre situation ; des trajectoires du gradient en théorie de Morse classique. Rappelons d'abord quelques définitions provenant de la théorie de Morse classique.

Définition 6.4. *Soit (f_0, g_0) et (f_1, g_1) des couples Morse-Smale sur L . Un **cobordisme de Morse** consiste en la donnée d'une fonction $F : L \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une métrique riemannienne G sur $L \times [0, 1]$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $f_0 + c = F|_{L \times \{0\}}$, $f_1 = F|_{L \times \{1\}}$ (on choisit c de telle sorte que $f_0 + c > f_1$),
2. $\partial_\lambda F \leq 0$ avec égalité ssi $\lambda = 0, 1$,
3. Le couple (F, G) est Morse-Smale,
4. $\text{Crit}_k(F) = \text{Crit}_k(f_0) \cup \text{Crit}_{k-1}(f_1)$.

L'existence d'un tel cobordisme est assurée par la construction suivante : on peut, sans perte de généralité, supposer que $f_0 > f_1$. Définissons la fonction $F : L \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x, \lambda) = \varphi(\lambda)f_0 + (1 - \varphi(\lambda))f_1$$

où la fonction réelle φ^3 vérifie :

- $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$,
- $\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda) < 0$ pour $\lambda \in (0, 1)$ et 0 autrement,
- $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}(0) < 0$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}(1) > 0$.

On choisit ensuite une métrique G qui étend g_1 et g_0 de telle sorte que (F, G) soit Morse-Smale. On peut par exemple choisir une petite perturbation de la métrique $G = (1 - \lambda)g_0 + \lambda g_1 + d\lambda \otimes d\lambda$. Bien sûr la perturbation est choisie de telle sorte que le couple (F, G) soit Morse-Smale.

On note $\mathcal{J}_\lambda(M, \omega)$ l'espace des homotopies \mathbf{J} de structures presque complexes compatibles avec ω . On définit alors l'espace $\mathcal{P}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ dont les éléments sont des couples (λ, \mathbf{u}) où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ avec $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L) \times \{\lambda_i\}$ sont des courbes J_{λ_i} -holomorphes⁴ ayant les propriétés suivantes :

- $[\mathbf{u}] = \mathbf{A}$,
- $u_1(-1) \in W^u(x_0)$ et $u_k(+1) \in W^s(x_1)$, avec $x_0 \in \text{Crit}(f_0)$ et $x_1 \in \text{Crit}(f_1)$;
- il existe $t_i \in (0, \infty)$ tel que $\phi_{t_i}^F(u_i(1)) = u_{i+1}(-1)$, où ϕ_t^F est le flot du gradient de F .

Le quotient de $\mathcal{P}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ par son groupe de reparamétrisation est noté $\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$. On note :

$$\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_k) \\ \sum A_i = A \in \pi_2(M, L)}} \mathcal{P}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}).$$

³une telle fonction est donnée par exemple par $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}(\cos(\pi\lambda) + 1)$.

⁴Ici on a posé $J_{\lambda_i} = J(\lambda_i, \cdot)$.

Les espaces $\mathcal{P}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$, etc... désigne le sous-espace des éléments simples et absolument distincts de $\mathcal{P}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$, etc... Enfin si $\mathcal{N}(J_0) \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ est un voisinage de J_0 , on note $\mathcal{N}_\lambda(J_0) = \{\mathbf{J} \in \mathcal{J}_\lambda(M, \omega) : J_\lambda \in \mathcal{N}(J_0) \forall \lambda \in [0, 1]\}$. On a un résultat de transversalité similaire au théorème (5.1.1) pour les espaces $\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$, on montre que :

Proposition 6.1.3. *Pour tout K et pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 et un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 tels que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ il existe un ensemble générique $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}_\lambda(J_0; K)$ tel que pour tout $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$, pour tout $x_0 \in \text{Crit}(f_0) \times \{0\}$ pour tout $y_1 \in \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$ et pour tout \mathbf{A} tel que $0 < \omega(\mathbf{A}) < K$, l'espace $\mathcal{M}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ constitué des éléments simples et absolument distincts de $\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ possède une structure de variété différentiable de dimension $|x_0|_{f_0} - |x_1|_{f_1} + \mu(\mathbf{A})$. En outre si $\dim \mathcal{M}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) \leq 1$ alors :*

$$\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) = \mathcal{M}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}).$$

Démonstration. Nous ne faisons pas la preuve en détail puisque cette dernière ressemble très fort à la preuve du théorème (5.1.1).

$\dim L \geq 3$: Une fois de plus on ne montre que la dernière assertion. Pour la simplicité des disques l'argument est exactement le même que dans la preuve du théorème (5.1.1). Pour montrer que les éléments sont absolument distincts, il suffit de remarquer que soit l'image des disques est dans une des tranches $M \times \{0\}$ ou $M \times \{1\}$, auquel cas on applique les mêmes arguments que dans le théorème (5.1.1), soit leur image appartient à une tranche $M \times \{\lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$. Dans ce cas le disque est seul dans sa tranche (car le flot du gradient "descend" de $L \times \{0\}$ vers $L \times \{1\}$).

$\dim L \leq 2$: La preuve est immédiate en combinant les arguments du cas $\dim L \geq 3$ et ceux de la preuve du théorème (5.1.1). \square

Remarquons, comme précédemment, que $\mathcal{M}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ admet une compactification et qu'en dimension zéro il est déjà compact. On peut alors définir :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{H}} : C_*(L, \mathcal{T}_0) &\longrightarrow C_*(L, \mathcal{T}_1) \\ x_0 &\longrightarrow \sum_{x_1, \mathbf{A} | \omega(\mathbf{A}) < K} n_{x_1}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) q^{\omega(\mathbf{A})} t^{\bar{\mu}(\mathbf{A})} x_1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

où

$$n_{x_1}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) & \text{si } |x_0| - |x_1| + \mu(\mathbf{A}) = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.8)$$

Remarque 6.5. Attirons l'attention du lecteur sur le fait que les indices de Morse apparaissant dans la formule de dimension de $\mathcal{M}_\lambda^*(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ sont pris par rapport aux fonctions f_0 et f_1 et non par rapport à F . Par la suite nous n'indiquerons plus par rapport à quelle fonction l'indice de Morse est pris.

Proposition 6.1.4. (Comparaison) Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème (6.1.1), il existe un voisinage $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ de J_0 et un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0K, \epsilon)$ de L_0 tels que pour tout $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0K, \epsilon)$, l'application $\Phi_{\mathcal{H}}$ est un morphisme de chaînes, c.-à-d.

$$\delta \circ \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{\mathcal{H}} \circ \delta = 0. \quad (6.9)$$

Démonstration. Une fois encore nous devons étudier la compactification d'espace des modules pour interpréter les termes apparaissant dans le développement de l'expression (6.9). Explicitons d'abord $\delta \circ \Phi_{\mathcal{H}}$:

$$\delta \circ \Phi_{\mathcal{H}}(x_0) = \sum_{x_1, \mathbf{A}} \sum_{y_1, \mathbf{B}} n_{x_1}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) n_{y_1}^{x_1}(\mathbf{B}) e^{A+B} y_1. \quad (6.10)$$

avec $|x_0| - |x_1| + \mu(\mathbf{A}) = 0$ et $|x_1| - |y_1| + \mu(\mathbf{B}) - 1 = 0$. Ensuite :

$$\Phi_{\mathcal{H}} \circ \delta(x_0) = \sum_{y_0, \mathbf{A}} \sum_{y_1, \mathbf{B}} n_{y_0}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) n_{y_1}^{y_0}(\mathbf{B}, \mathcal{H}) e^{A+B} y_1. \quad (6.11)$$

avec $|x_0| - |y_0| + \mu(\mathbf{A}) = 0$ et $|y_0| - |y_1| + \mu(\mathbf{B}) - 1 = 0$.

Nous allons montrer que si $\omega(\mathbf{A}) < K$ et si $|x_0| - |x_1| + \mu(\mathbf{A}) = 1$, alors :

$$\begin{aligned} \partial \bar{\mathcal{M}}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) &= \bigcup_{\substack{\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \\ x_1, y_1}} \mathcal{M}_\lambda(x_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) \times \mathcal{M}(x_1, y_1, \mathbf{A}) \\ &\cup \bigcup_{\substack{\mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \\ y_0, y_1}} \mathcal{M}(x_0, y_0, \mathbf{A}) \times \mathcal{M}_\lambda(y_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Comme précédemment on procède en deux étapes. La première consiste à décrire les éléments limites possibles de $\mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ (compacité). Ensuite il faut montrer que tout élément limite est atteint (recollement).

Compacité : Il faut tenir compte de trois phénomènes :

- *Bouillonnement de codimension 2* : à la limite, un disque J_λ -holomorphe bouillonne en un point n'étant relié par aucune relation d'incidence. Supposons qu'un tel disque apparaisse. En l'omettant, on obtient un élément d'un espace $\mathcal{M}(x_0, x_1, A', \mathcal{H})$ avec $\omega(A - A') < K$. Par conséquent $\mu(A') \leq \mu(A) - 2$ et $\dim \mathcal{M}(x_0, x_1, A', \mathcal{H}) \leq -1$, d'où l'on tire la contradiction. Une sphère peut bouillonner en un point intérieur. Ce phénomène étant de codimension 2, on arrive, par un raisonnement similaire au précédent, à une contradiction.
- *Bouillonnement de codimension 1* : Un disque pseudo-holomorphe bouillonne en un point définissant une relation d'incidence. On a déjà traité ces cas qui donnent des points intérieurs.
- *Trajectoire brisée* : C'est le phénomène le plus important. Une trajectoire du gradient de F ne peut se briser pour des $\lambda \neq 0, 1$ car il n'y a aucun point critique ailleurs. Soit la trajectoire se brise en $\lambda = 0$, soit elle se brise en $\lambda = 1$. Si on arrive à prouver le recollement ; ce sont ces phénomènes qui fournissent la relation (6.9)

recollement : Pour le recollement il faut vérifier qu'un élément $\mathbf{w} \in \mathcal{M}_\lambda(x_0, y_1, A+B, \mathcal{H})$ obtenu par recollement de deux trajectoires perlées $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x_0, y_0, A)$, avec $|x_0| - |y_0| + \mu(A) - 1 = 0$ et $\omega(A) < K$, et $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_\lambda(y_0, y_1, B, \mathcal{H})$, avec $|y_0| - |y_1| + \mu(B) + 1 = 0$ et $\omega(B) < K$, vérifie : $\omega([\mathbf{w}]) < K$. Choisissons les voisinages $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ et $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ du théorème (6.1.1). Dans ces voisinages on a : $\omega([\mathbf{w}]) = \omega([\mathbf{u}]) + \omega([\mathbf{v}]) = \eta\mu(A) - \alpha(\partial A) + \eta\mu(B) - \alpha(\partial B) \leq \eta(n+1) + 2\epsilon$. Or on a choisi $K > \eta(n+2) + 2\epsilon$. \square

Canonicité du morphisme de comparaison.

Il reste à prouver que $\Phi_{\mathcal{H}}$ induit un isomorphisme en homologie et qu'il ne dépend ni de l'homotopie régulière de structures presque complexes compatibles ni du cobordisme de Morse. Nous prouvons d'abord la canonicité de $\Phi_{\mathcal{H}}$ ⁵.

Soient $\mathcal{H}_\alpha = (F_\alpha, G_\alpha, J_\alpha)$ et $\mathcal{H}_\beta = (F_\beta, G_\beta, J_\beta)$ deux triples admissibles. Nous allons montrer que le morphisme $\Phi_\alpha = \Phi_{\mathcal{H}_\alpha}$ est chaîne-homotope à $\Phi_\beta = \Phi_{\mathcal{H}_\beta}$, i.e. il existe un morphisme $\zeta_{\beta\alpha} : C_*(f_0, g_0, J_0) \rightarrow C_{*+1}(f_1, g_1, J_1)$ tel que :

$$\Phi_\alpha + \Phi_\beta = \delta \circ \zeta_{\beta\alpha} + \zeta_{\beta\alpha} \circ \delta \quad (6.12)$$

⁵Bien sûr, $\Phi_{\mathcal{H}}$ dépend de J_0 , mais pas du $J \in \mathcal{W}(J_0)$

Nous allons construire l'homotopie de chaîne $\zeta = \zeta_{\beta\alpha}$. Cette dernière est construite de manière parfaitement similaire au morphisme de comparaison Φ excepté qu'il y a un paramètre additionnel.

Supposons, sans perte de généralité, que $f_0 > f_1$. Nous considérons une fonction $\bar{F} : L \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une métrique $\bar{G} \in \mathfrak{Met}(L \times [0, 1] \times [0, 1])$ et une famille à deux paramètres de structures presque complexes compatibles \bar{J} ayant les propriétés suivantes :

- $\bar{F}(q, 0, \tau)$ respectivement $\bar{F}(q, 1, \tau)$ sont des homotopies triviales pour f_0 respectivement f_1 .
- $\bar{F}(q, \lambda, 0) = F_\alpha(q, \lambda) + c$, $\bar{F}(q, \lambda, 1) = F_\beta(q, \lambda)$ avec $c \in \mathbb{R}$. La constante c est déterminée en fonction des constantes choisies dans la construction des homotopies triviales respectives de f_0 et f_1 . On peut choisir ces constantes comme étant égales à une constante c .
- $\text{Crit}_k(\bar{F}) = \text{Crit}_{k-2}(f_0) \times \{(0, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_0) \times \{(1, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_1) \times \{(0, 1)\} \cup \text{Crit}_{k-2}(f_1) \times \{(1, 1)\}$
- (\bar{F}, \bar{G}) est Morse-Smale et $\bar{G}|_{L \times \{0\} \times [0, 1]} = G_\alpha$ et $\bar{G}|_{L \times \{1\} \times [0, 1]} = G_\beta$
- $\bar{J}(q, \lambda, 0) = J_\alpha(q, \lambda)$ et $\bar{J}(q, \lambda, 1) = J_\beta(q, \lambda)$.

A partir de ces données on définit des espaces de modules similaires à ceux apparaissant dans la construction des morphismes de comparaisons mais avec un paramètre de plus. Plus précisément, pour tout $x_0 \in \text{Crit}_k(f) \times \{0, 0\}$, $y_1 \in \text{Crit}_{k+1}(f_1) \times \{(1, 1)\}$ et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in (\pi_2(M, L))^k$, on définit $\mathcal{P}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ comme étant l'espace des triples $(\lambda, \tau, \mathbf{u})$ avec $(\lambda, \tau \in [0, 1] \times [0, 1])$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ avec $u_i : (D, \partial D) \in (M, L)$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ et $[\mathbf{u}] = \mathbf{A}$,
- (ii) pour chaque u_i il existe (λ_i, τ_i) tel que u_i est $\bar{J}_{\lambda_i, \tau_i}$ -holomorphes.
- (iii) $u_1(-1) \in W(x_0)$
- (iv) il existe $t_i \in (0, \infty)$ tel que $\Phi_{t_i}^{\bar{F}}(u_i(1)) = u_{i+1}(-1)$. Où $\Phi^{\bar{F}}$ est le flot du gradient de \bar{F} .

Comme précédemment, on note $\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ le quotient de $\mathcal{P}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ par son groupe de reparamétrisation. On pose

$$\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A}) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_k) \\ \sum A_i = \mathbf{A} \in \pi_2(M, L)}} \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A}).$$

Finalement on décore nos \mathcal{M} et nos \mathcal{P} d'une étoile pour signifier qu'on se restreint aux chaînes de disques simples et absolus distincts. On note $\mathcal{J}_{\lambda,\tau}(\mathcal{M}, \omega)$ l'ensemble des familles à deux paramètres (λ, τ) de structures presque complexes compatibles. Si $\mathcal{N}(J_0)$ est un voisinage de $J_0 \in \mathcal{J}(\mathcal{M}, \omega)$, on note $\mathcal{N}_{\lambda,\tau}(J_0) = \{\bar{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}_{\lambda,\tau}(\mathcal{M}, \omega) : J_{\lambda,\tau} \in \mathcal{N}(J_0) \forall (\lambda, \tau) \in \mathbb{I}^2\}$.

Proposition 6.1.5. *Pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(\mathcal{M}, \omega)$, pour tout ϵ et pour tout $K > \eta(n+2) + 2\epsilon$ il existe un voisinage $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ de J_0 , $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ de L_0 et un ensemble générique de familles à deux paramètres de s.p.c.c $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{W}_{\lambda,\tau}(J_0; K, \epsilon)$ tels que pour tout $\bar{\mathbf{J}} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}(L)$, pour tout $x_0 \in \text{Crit}(f_0) \times \{(0, 0)\}$, pour tout $y_1 \in \text{Crit}(f_1) \times \{(1, 1)\}$ et pour tout $A \in \pi_2(\mathcal{M}, L)$ tel que $0 < \omega(A) < K$, l'espace $\mathcal{M}_{\beta\alpha}^*(x_0, y_1, A)$ est une variété différentiable de dimension*

$$|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(A) + 1.$$

De plus si $|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(A) \leq 0$. Alors

$$\mathcal{M}_{\beta\alpha}^*(x_0, y_1, A) = \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, A).$$

Enfin si $|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(A) + 1 = 0$, $\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, A)$ est compact.

Démonstration. Hormis un paramètre de plus, il n'y a absolument aucune différence avec la preuve de la proposition (6.1.4). \square

Nous posons alors :

$$\xi_{\beta\alpha}(x_0) = \sum_{\substack{y, A \\ \omega(A) < K}} n_{y_1}^{x_0}(A, \beta\alpha) e^A y_1 \quad (6.13)$$

où

$$n_y^x(A, \beta\alpha) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, A) & \text{si } |x| - |y| + \mu(A) + 1 = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Proposition 6.1.6. (Canonicité) *Sous les mêmes hypothèses que celle du théorème (6.1.1), il existe un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ et un voisinage $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ tel que pour tout $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ et pour tout $\bar{\mathbf{J}} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}_{\lambda,\tau}(J_0; K, \epsilon)$; le morphisme $\Phi_{\mathcal{H}} : \text{QH}(L, \mathcal{T}_0; K) \rightarrow \text{QH}(L, \mathcal{T}_1; K)$ est canonique (ne dépend pas de \mathcal{H}).*

Démonstration. Nous prouvons d'abord que pour un triple trivial \mathcal{H}_0 , $\Phi_{\mathcal{H}_0}$ est l'identité. Par trivial nous voulons dire que le $J = J_0$ est une homotopie constante, $G = g_0 + d\lambda \otimes d\lambda$ et $F(\lambda, x) = f_0(x) + \varphi(\lambda)$ où $\varphi(\lambda) = \frac{c}{2}(\cos(\pi\lambda) + 1)$ avec c une constante positive arbitraire. La fonction F ainsi définie vérifie avec G les propriétés d'un cobordisme de Morse. Ensuite, puisque J ne dépend pas de λ et qu'il est régulier pour chaque tranche, les seules courbes J -holomorphes apparaissant dans la définition de $\Phi_{\mathcal{H}_0}$ sont les courbes constantes. En effet, J ne dépendant pas de λ et étant régulier, toute courbe non-triviale apparaît nécessairement dans une famille à au moins un paramètre (qui est le paramètre λ). On est donc réduit au cas du cobordisme de Morse trivial où seules les trajectoires du gradient de F se projetant sur un point critique contribuent. On a donc bien l'identité.

Preuve de l'identité (6.12) : Encore une fois nous étudions la compactification des espaces de modules de dimension 1. L'analyse étant parfaitement similaire à celle produite pour le morphisme de comparaison, nous nous contentons de la décrire brièvement :

- *Bouillonnement de codimension 2 :* Comme précédemment, il n'intervient pas dans la compactification.

Bouillonnement de codimension 1 : Hormis un paramètre en plus rien ne change ici non plus. Le bouillonnement d'un disque holomorphe en un point définissant une relation d'incidence est le symétrique du collapse de deux disques l'un sur l'autre lorsqu'une trajectoire du gradient tend vers un point.

- *Trajectoire brisée :* C'est ce phénomène qui donne la relation (6.12). Etant donné que $\text{Crit}_k(\bar{F}) = \text{Crit}_{k-2}(f_0) \times \{(0, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_0) \times \{(1, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_1) \times \{(0, 1)\} \cup \text{Crit}_{k-2}(f_1) \times \{(1, 1)\}$, les configurations brisées sont les suivantes :

1. une brisure en un point critique se trouvant dans $L \times \{(0, 0)\}$, respectivement $L \times \{(1, 1)\}$, qui donne la contribution $\zeta \circ \delta$, respectivement $\delta \circ \zeta$, dans (6.12) ;
2. une brisure en un point critique se trouvant dans $L \times \{(0, 1)\}$, respectivement $L \times \{(1, 0)\}$, qui donne la contribution Φ_α , respectivement Φ_β , dans (6.12).

Concernant l'étape de recollement, l'argument est exactement le même que dans la preuve de la proposition 6.1.4.

Concaténation : La concaténation de deux homotopies d'homotopies permet de prouver que $\zeta_{\beta\sigma} \circ \zeta_{\sigma\alpha}$ et $\zeta_{\beta\alpha}$ sont homotopes. Il en est bien sûr de même pour $\zeta_{\alpha\alpha}$ et l'identité. \square

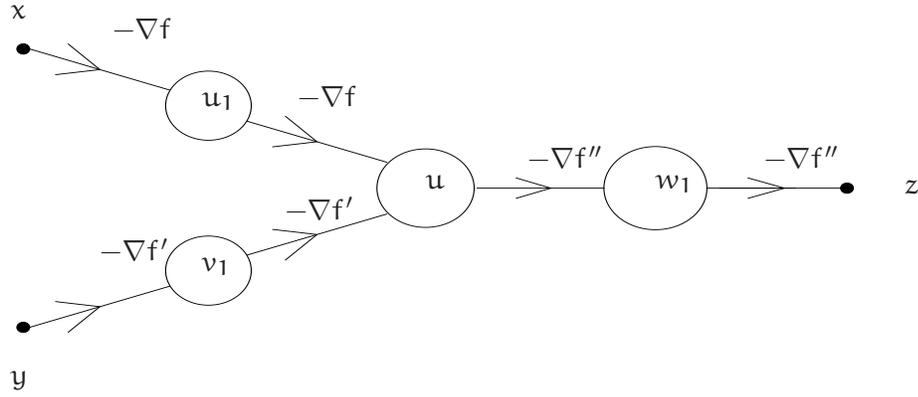
6.2 Produit quantique.

Dans cette section, nous montrons que $\text{QH}(L)$ peut être munie d'une structure d'anneau non-commutatif, dont le produit est une déformation du produit d'intersection classique. Rappelons que le produit d'intersection classique est obtenu à partir du comptage de configurations de trajectoires de Morse ayant deux entrées et une sortie. Dans notre situation il paraît donc naturel de construire un produit en comptant des configurations de trajectoires perlées ayant deux entrées et une sortie. On choisit trois fonctions de Morse $f, f', f'' : L \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi qu'une métrique $g \in \mathcal{M}\text{et}(L)$. On fixe aussi une s.p.c.c. J dans un ensemble générique \mathcal{J}_{reg} à déterminer ultérieurement. On définit le produit quantique : Soit $x \in \text{Crit}(f)$, $y \in \text{Crit}(f')$ et $z \in \text{Crit}(f'')$. On considère les tuples $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, u)$ ayant les propriétés suivantes :

1. $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est un disque J -holomorphe.
2. $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$, respectivement $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l)$, est un tuple de disques J -holomorphes à bord dans L dont les composantes vérifient les propriétés d'incidences suivantes :
 - $u_1(-1) \in W^u(x)$, respectivement $v_1(-1) \in W^u(y)$.
 - Pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, resp. $j \in \{1, \dots, l-1\}$, il existe $t_i \in (0, \infty)$, resp. $t_j \in (0, \infty)$, tel que $\phi_{t_i}^f(u_i(+1)) = u_{i+1}(-1)$, resp. $\phi_{t_j}^{f'}(v_j(+1)) = v_{j+1}(-1)$
 - Enfin il existe $t_k \in (0, \infty)$, resp. $t_l \in (0, \infty)$, tel que $\phi_{t_k}^f u_k(+1) = v(e^{-2\pi i/3})$, resp. $\phi_{t_l}^{f'} v_l(+1) = v(e^{2\pi i/3})$.
3. $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ est un tuple de disques J -holomorphes à bord dans L vérifiant les propriétés d'incidences suivantes :
 - Il existe $t_1 \in (-\infty, 0)$ tel que $\phi_{t_1}^{f''}(w_1(-1)) = v(1)$,
 - Pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, il existe $t_i \in (0, \infty)$ tel que $\phi_{t_i}^{f''}(w_i(1)) = w_{i+1}(-1)$.
 - $w_m(1) \in W^s(z)$
4. $\sum [u_i] + \sum [v_j] + \sum [w_r] + [u] = A \in \pi_2(M, L)$.

Le disque u (celui ayant trois points marqués) est appelé le **coeur** de la trajectoire. Soit $\mathfrak{F} = \{f, f', f''\}$. On note $\mathcal{P}(x, y, z, A, L; \mathfrak{F}, g, J)$, respectivement $\mathcal{M}(x, y, z, A, L; \mathfrak{F}, g, J)$, l'espace de ces configurations perlées, respectivement le quotient de \mathcal{P} par son groupe de reparamétrisation. On notera parfois simplement $\mathcal{M}(x, y, z, A, L; J)$ au lieu de $\mathcal{M}(x, y, z, A, L; \mathfrak{F}, g, J)$ pour ne pas alourdir les notations.

On a le résultat suivant :

FIG. 6.1 – Élément de $\mathcal{P}(x, y, z; f, f', f'', g, J)$.

Proposition 6.2.1. *Soit L_0 une variété lagrangienne monotone. Pour tout $K > 0$ et pour tout J_0 , il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K)$, tel que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ il existe un ensemble générique de s.p.c.c. $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0; K)$, tels que : Pour tout $A \in \pi_2(M, L)$ vérifiant $0 < \omega(A) < K$, l'espace $\mathcal{M}^*(x, y, z, A, L; J)$ est une variété lisse de dimension :*

$$\dim \mathcal{M}^*(x, y, z, A, L; J) = |x| + |y| - |z| + \mu(A) - n \quad (6.14)$$

De plus si $|x| + |y| - |z| + \mu(A) - n \leq 1$ alors :

$$\mathcal{M}^*(x, y, z, A, L; J) = \mathcal{M}(x, y, z, A, L; J).$$

Enfin, en dimension 0, $\mathcal{M}(x, y, z, A, L; J)$ est compacte et consiste en une collection finie de points.

Démonstration. La preuve de ce théorème est identique à la preuve du théorème (5.1.1). La seule différence concerne l'utilisation du lemme (5.1.2) qui doit être remplacé par le lemme (5.1.3). \square

On définit :

Définition 6.6. [Produit quantique] Soit (\mathfrak{F}, g, J) comme précédemment. Pour tout $K > 0$ on définit :

$$\begin{aligned} * : C_k(L; f, g, J) \otimes C_l(L; f', g, J) &\rightarrow C_{k+l-n}(L; f'', g, J) \\ (x, y) \longrightarrow x * y &= \sum_{\substack{z, A \\ \omega(A) < K}} n_z^{x, y}(A) q^{\omega(A)} t^{\mu(A)} z \end{aligned} \quad (6.15)$$

où

$$n_z^{x,y}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}(x, y, z, \mathbf{A}, L) & \text{si } \dim \mathcal{M}(x, y, z, \mathbf{A}, L) = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.16)$$

Théorème 6.2.1. *Ce produit vérifie les propriétés suivantes :*

1. **Morphisme de chaîne et invariance :** *Pour tout J_0 , pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $K > \eta(2n + 1) + 2\epsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ de L_0 et $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ tel que le produit défini en (6.15) et (6.16) est une application de chaîne, c-à-d. qu'il satisfait la règle de Leibniz :*

$$\delta(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \delta(\mathbf{a}) * \mathbf{b} + \mathbf{a} * \delta(\mathbf{b}). \quad (6.17)$$

Par conséquent elle induit une opération en homologie appelée produit quantique.

2. **Invariance :** *Ne dépend pas du choix générique de (f, f', f'') et de $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$.*
3. **Associativité :** *Pour tout ϵ , et pour tout $K > \eta(3n) + 2\epsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ et $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ tel que $*$ est associatif.*
4. **Neutre** *Il existe un élément $\ell \in \text{QH}(L, \Lambda)$ tel que pour tout $\mathbf{a} \in \text{QH}(L, \Lambda) : \mathbf{a} * \ell = \ell * \mathbf{a} = \mathbf{a}$.*

En résumé le produit quantique $$ munit $\text{QH}(L, \Lambda)$ d'une structure de Λ -algèbre associative avec unité.*

Formalisme combinatoire.

Comme on le constate, la description des espaces de modules devient de plus en plus compliquée. C'est pourquoi nous allons introduire un formalisme combinatoire nous permettant d'unifier en quelque sorte les descriptions de ces espaces de Modules. Nous allons modéliser nos espaces de modules à partir d'un arbre. Les arbres intervenant dans la définition sont des arbres planaires orientés dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. Le lecteur est invité à consulter la figure (6.2) ci-dessous.

Soit $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_l) | A_i \in \pi_2(M, L), \omega(A_i) \geq 0, \forall i$ une collection de classes d'homotopie (ou d'homologie sphériques relatives) d'énergie positive. Soit $\mathfrak{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ une collection de fonctions de Morse. Nous définissons un **arbre** \mathcal{T} labellisé par \mathbf{A} , plus simplement \mathbf{A} -labellisé, et colorié par \mathfrak{F} , ou plus simplement \mathfrak{F} -colorié s'il vérifie les propriétés suivantes :

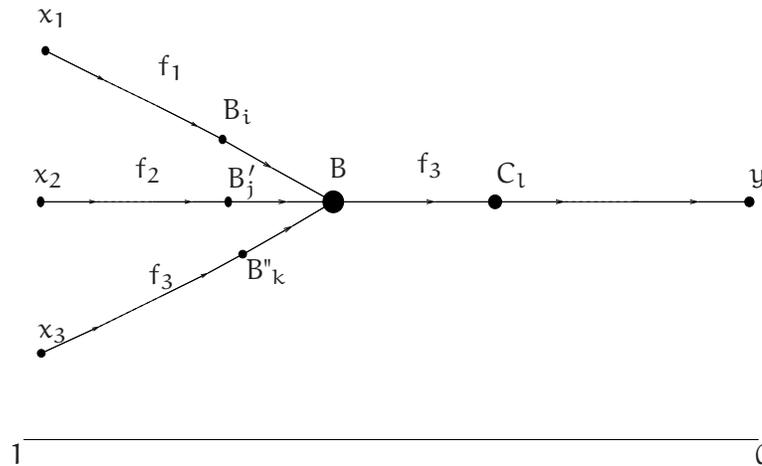


FIG. 6.2 – . Arbre labéllisé par $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathbf{B}'', \mathbf{B}, \mathbf{C})$ et colorié par $\{f_1, f_2, f_3\}$ de symbole $(x_1, x_2, x_3; y)$ avec un sommet de valence 4. Cet arbre apparaît dans la définition des espaces de modules apparaissant dans l'associativité.

1. Sommets :

- (a) *Entrées-sortie* : Les sommets de valence 1, appelés sommets *extérieurs*, se trouvent sur les droites $\mathbb{R} \times \{i\}$ avec $i = 0, 1$. Ceux se trouvant en $\mathbb{R} \times \{1\}$ sont appelés entrées et sont au plus au nombre de 3. Il n'y en a qu'un sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ qui est appelé sortie. On a donc au plus trois entrées et une sortie. Elles sont désignées par des lettres latines minuscules avec un exposant $-$, resp. $+$ pour la sortie. Donc par exemple s^- correspond à une entrée, tandis que s^+ serait une sortie.
- (b) *Coloriage des sommets intérieurs* : Les entrées, resp. la sortie, sont coloriées par des points critiques d'une fonction de Morse $f \in \mathfrak{F}$.
- (c) *Valence des sommets intérieurs* : Les sommets intérieurs ont une valence d'au moins 2. De plus on demande qu'ils ne possèdent qu'une arête sortante. On note $s_{\text{int}}(\mathcal{T})$ l'ensemble des sommets intérieurs.
- (d) *Labellisation des sommets intérieurs* : A chaque sommet intérieur, est associé une classe d'homologie A_i . La classe d'un sommet s est noté $[s]$. La classe de l'arbre \mathcal{T} est définie par $\sum_i A_i = \sum_{s \in \mathcal{T}} [s]$ et est notée A . On définit aussi l'indice de Maslov de \mathcal{T} par $\mu(\mathcal{T}) = \mu(A)$.

2. Arêtes :

- (a) *arêtes orientées* : les arêtes sont des graphes de fonctions $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ strictement croissantes ou strictement décroissantes⁶. Leur orientation fait décroître l'ordonnée. On note $a(\mathcal{T})$ l'ensemble des arêtes et $a_{\text{int}}(\mathcal{T})$ les arêtes intérieurs (non-adjacentes à une entrée ou sortie). Si $a \in a(\mathcal{T})$, on note a^- , respectivement a^+ le sommet d'où part, respectivement où arrive, l'arête a (suivant l'orientation de \mathcal{T}).
- (b) *Coloriage des arêtes* : Les arêtes sont, elles aussi, coloriées par des fonctions de Morse de \mathfrak{F} . Une arête incidente à une entrée ou à la sortie est colorié par la fonction de Morse correspondant au point critique coloriant cette entrée ou la sortie.
- (c) *Transversalité* : Pour les sommets de valence 3 ou 4, les arêtes entrantes ne peuvent être coloriées par la même fonction de Morse ; par contre, la fonction de Morse coloriant l'arête sortante peut être la même que l'une des fonctions coloriant une des arêtes entrantes.

Nous avons aussi besoin d'une règle de sortie, pour notre coloriage, liant les fonctions de Morse coloriant les arêtes entrantes à celle coloriant l'arête sortante ainsi que d'une propriété permettant de spécifier comment les trajectoires du gradient d'une fonction de Morse coloriant une arête vient s'accrocher au disque J-holomorphe représentant la classe d'homologie labellisant le sommet correspondant.

3. **règle de sortie pour le coloriage** : Une règle de sortie Θ associe à chaque tuple (f_1, \dots, f_m) avec $f_i \in \mathfrak{F}$ une fonction $\Theta(f_1, \dots, f_m) \in \mathfrak{F}$ de tel sorte que l'arête sortante de chaque sommet, dont les arêtes entrantes sont coloriés par f_1, \dots, f_m , est coloriée par $\Theta(f_1, \dots, f_m)$.
4. **sélecteur de points marqués** : Soit s un sommet de \mathcal{T} . Notons par a_1, \dots, a_m les arêtes arrivant en s et e son arête sortante. Un *Sélecteur de points marqués* \mathfrak{S} associe à chaque sommet s une collection finie $\{q_-(a_1), \dots, q_-(a_m), q_+(e)\} \subset \partial D$ de points distincts sur le bord du disque, en correspondance biunivoque avec les arêtes de s et ordonnée par le sens horlogé sur $S^1 = \partial D$.

En résumé un arbre \mathbf{A} -labellisé et \mathfrak{F} -colorié vérifiant en plus les propriétés (3.) et (4.) est dit admissible pour la loi de sortie Θ et muni du sélecteur de points marqués \mathfrak{S} . On notera un tel arbre $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \Theta, \mathfrak{S})$

⁶Ici I est un intervalle fermé de \mathbb{R} .

Pour faire plus court on dira que $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \Theta, \mathfrak{S})$ est arbre colorié avec points marqués. Si x_1^-, \dots, x_m^- , resp. y^+ , sont les points critiques labellisant les entrées, resp. la sortie, de \mathcal{T} , on définit le **symbole** de \mathcal{T} par $\mathfrak{s}(\mathcal{T}) := (x_1^-, \dots, x_m^- : y^+)$. Finalement on dira que deux arbres coloriés avec points marqués sont équivalents, s'ils sont isomorphes en tant que graphe et si l'isomorphisme préserve le coloriage, la labellisation, l'admissibilité et la règle de sélection des points marqués.

Espace de Modules associé à un arbre colorié avec points marqués :

Soit $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \Theta, \mathfrak{S})$ un arbre colorié avec points marqués. Fixons une métrique riemannienne g sur L . Pour tout $f \in \mathfrak{F}$ on note ϕ_t^f le flot du gradient associé à f et g , c-à-d. que ϕ_t^f est le flot du champ de vecteurs $-\nabla_g(f)$ vérifiant $g(\nabla_g f, Y) = df(Y)$ pour tout Y .

Définition 6.7 (Espaces de perles.). Soit $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \Theta, \mathfrak{S})$ un arbre colorié avec points marqués. Un **espace de modules de perles**, ou plus simplement **espace de perles**, modelé sur $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \Theta, \mathfrak{S})$ et noté $\mathcal{P}((\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J))$ est défini de la manière suivante :

- (P1) *perles triviales* : si il n'y a pas de sommets intérieurs, l'arbre ne possède qu'une seule arête, alors $\mathcal{P}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J) = \mathcal{P}(x^-, y^+; f, g)$ où $\mathcal{P}(x^-, y^+; f, g)$ est l'espace des trajectoires du gradient non-paramétrées joignant x^- à y^+ .
- (P2) *perles non-triviales* : Si \mathcal{T} possède des sommets intérieurs ; on définit $\mathcal{P}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J)$ comme étant le sous ensemble de

$$\prod_{s \in \mathfrak{s}(\mathcal{T})} \mathcal{M}([s], L, J),$$

soumis aux contraintes suivantes :

- Pour toute arête interne $a \in \mathfrak{a}(\mathcal{T})$ il existe $\tau \geq 0$, appelé la *longueur* de a , tel que :

$$\phi_{\tau}^{f_a}(u_{a_+}(q_+(a))) = u_{a_-}(q_-(a)).$$

- Pour toute arête a correspondant à une entrée e_+ labellisée par un point critique x^+ , on a :

$$u_{a_+}(q_+(a)) \in W^u(x^+).$$

- Soit l'arête a correspondant à la sortie e^- . Si y^- est le point critique labellisant e^- , on a

$$u_{a_-}(q_-(a)) \in W^s(y^-).$$

On note $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J}) = \mathcal{P}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J})/G$, où G est le groupe de reparamétrisation de $\mathcal{P}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J})$. Enfin on note : $\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J})$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J})$ constitué de disques simples et absolument distincts.

Soit $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F})$ un arbre colorié avec points marqués. Notons $(x_1^-, \dots, x_m^- : y)$ son symbol. La dimension virtuelle d'un espace de perles $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); \mathfrak{g}, \mathbb{J})$ modelé sur $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F})$ est donnée par :

$$d(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F})) = \sum_{i=1}^m |x_i^-| - |y^+| + \mu(\mathcal{T}) + m - 2 - (m - 1)n. \quad (6.18)$$

Preuve du théorème (6.2.1). Les arguments des preuves sont très similaires à ceux des sections précédentes, raison pour laquelle nous n'entrerons pas dans les détails.

Morphisme de chaîne :

Comme toujours on interprète les termes apparaissant dans l'expression de (6.17) comme le compte d'éléments du bord d'un espace de module. On décrit ici brièvement la construction de cet espace ainsi que son bord. Enfin on mentionnera l'argument de recollement comme dans les preuves de $\delta^2 = 0$ et d'invariance.

On considère les espaces de modules $\mathcal{M}(a, b, c, A, L)$ de dimension 1, c.-à-d. $|a| + |b| - |c| + \mu(A) - n - 1 = 0$. En examinant leur bord il est facile de retrouver la relation (6.17). Bien sûr il n'y a pas de bouillonnement de codimension 2, cependant il y a une petite subtilité à noter concernant les bouillonnements de disques de codimension 1. Il se peut qu'un disque bouillonne en un point d'incidence du coeur et que le coeur devienne un disque fantôme (disque constant à trois points marqués). Néanmoins, ce phénomène peut être négligé pour la raison suivante : soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, u)$ avec $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, un élément d'un $\mathcal{M}(a, b, c, , L)$. Il se peut qu'à la limite, la longueur de la trajectoire du gradient de, disons pour fixer les idées f' et joignant u_k au coeur u de la trajectoire perlée, tendent vers 0. Ceci correspond au symétrique du phénomène précédent. Il ne contribue donc pas au décompte des éléments du bord $\bar{\mathcal{M}}(x, y, z, \mathbf{A}; L, \mathbb{J})$. On peut aussi interpréter de tels éléments comme des points intérieurs puisqu'on s'autorise les trajectoires de longueurs nulles.

Il faut encore considérer les brisures le long d'une trajectoire du gradient. Nous distinguons les cas suivants :

- La brisure se fait le long de la trajectoire perlée joignant le point critique a , resp. b , au coeur de la trajectoire ; ces éléments contribuent à $\delta(a) * b$, resp. $a * \delta(b)$ dans (6.17)

- La brisure se fait le long de la trajectoire perlée joignant le coeur à c . Ces éléments fournissent les contributions donnant $\delta(a * b)$

Il faut bien sûr s'assurer que tous les éléments obtenus par recollement d'éléments $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(a, x, B, L)$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{M}(x, b, c, C, L)$ avec $B + C = A$ vérifient $\omega(A) < K$, dès que $\omega(B), \omega(C) < K$. On constate que l'indice de Maslov apparaissant dans les espaces de modules de dimensions 1 $\mathcal{M}(a, b, c, A, J)$ vérifie $\mu(A) \leq 2n + 1$. Par conséquent le nombre de disques pseudo-holomorphes apparaissant dans une de ces configurations, est au plus $2n + 1/N_L$. On considère alors $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon) = \mathcal{N}(J_0; K, \epsilon') \cap \mathcal{N}(J_0; K)$ et $\mathcal{W}(L; J_0, K, \epsilon) = \mathcal{N}(L_0; J_0, K, \epsilon') \cap \mathcal{N}(L_0; J_0; K)$ où

- $\epsilon' = \epsilon(2n + 1)/N_L$

- $\mathcal{N}(J_0; K, \epsilon')$ et $\mathcal{N}(L_0; J_0, K, \epsilon')$ sont les voisinages apparaissant dans la proposition (6.1.1) et

- $\mathcal{N}(L_0; J_0; K)$ et $\mathcal{N}(J_0; K)$ sont les voisinages apparaissant dans la proposition (6.2.1).

Sous ces conditions, si \mathbf{u} est un élément de $\mathcal{M}(a, b, c, A, J)$ de dimension inférieure à 1, on a :

$$|\omega([\mathbf{u}]) - \eta\mu(\mathbf{u})| < \epsilon.$$

Mais $\omega(A) = \omega(B) + \omega(C) = \eta\mu(A) + \alpha(\partial B) + \alpha(\partial C) < \eta(2n + 1) + 2\epsilon$.

Remarque 6.8. Dans le cas où l'anneau de coefficients est $\Lambda = \Lambda_\omega$, on remarque que l'opérateur δ peut être décomposé de la manière suivante :

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_{\frac{[n+A]}{N_L}} t^{\frac{[n+A]}{N_L}}.$$

où

$$\delta_k x = \sum_{y, A | \mu(A) = 2l} n_y^x(A) q^{\omega(A)},$$

compte les trajectoires perlées joignant d'indice $2l$. Remarquons que δ_0 est la différentielle du complexe de Morse.

On a bien sûr une décomposition similaire pour le produit quantique :

$$* = *_0 + *_1 t + \cdots + *_2 n/N_L t^{2n/N_L}.$$

Le terme $*_0$ correspondant au produit d'intersection usuel. On peut alors expliciter la règle de Leibniz (6.17) via cette décomposition et déduire que :

$$\sum_{k=0}^i \delta_{i-k}(a *_k b) = \sum_{l=0}^i \delta_{i-l}(a) *_l b + a *_l \delta_{i-l} b. \quad (6.19)$$

Invariance :

Soit f_i, f'_i, f''_i, g_i et J_i avec $i = 0, 1$. Notons $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\sigma$ les morphismes de comparaisons associés à $(f_i, g_i, J_i), (f'_i, g_i, J_i)$ et (f''_i, g_i, J_i) . On va montrer qu'il existe un morphisme

$$\zeta : C_1(f_0, g_0, J_0) \otimes C_k(f'_0, g_0, J_0) \rightarrow C_{k+l-n+1}(f''_1, g_1, J_1)$$

vérifiant :

$$\zeta \circ \delta(a \otimes b) + \delta \circ \zeta(a \otimes b) = \Phi_\alpha(a) * \Phi_\beta(b) + \Phi_\sigma(a * b) \quad (6.20)$$

Le morphisme ζ est construit en comptant des trajectoires perlées dans $[0, 1] \times L$. On considère les tuples $((\lambda, \mathbf{u}); (\tau, \mathbf{v}); (\theta, \mathbf{w}); (\lambda, \mathbf{u}))$ ayant les propriétés suivantes⁷ :

1. $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ est un disque J_λ -holomorphe.
 - $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$, t tel que u_i est J_{λ_i} -holomorphe pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$
 - $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in [0, 1]^l$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l)$, tel que v_i est J_{τ_i} -holomorphe pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$
 - $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in [0, 1]^m$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, tel que w_i est J_{θ_i} -holomorphe pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$
2. Ces disques vérifient les propriétés d'incidences suivantes :
 - $u_1(-1) \in W^u(a)$, respectivement $v_1(-1) \in W^u(b)$.
 - Pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, resp. $j \in \{1, \dots, l-1\}$, il existe $t_i \in (0, \infty)$, resp. $t_j \in (0, \infty)$, tels que $\phi_{t_i}^{F_\alpha}(u_i(+1)) = u_{i+1}(-1)$, resp. $\phi_{t_j}^{F_\beta}(v_j(+1)) = v_{j+1}(-1)$
 - Il existe $t_k \in (0, \infty)$, resp. $t_l \in (0, \infty)$, tels que $\phi_{t_k}^{F_\alpha} u_k(+1) = v(e^{-2\pi i/3})$, resp. $\phi_{t_l}^{F_\beta} v_l(+1) = v(e^{2\pi i/3})$.
 - Il existe $t_1 \in (-\infty, 0)$ tels que $\phi_{t_1}^{F_\sigma}(w_1(-1)) = v(1)$,
 - Pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, il existe $t_i \in (0, \infty)$ tel que $\phi_{t_i}^{F_\sigma}(w_i(1)) = w_{i+1}(-1)$.
 - $w_m(1) \in W^s(c)$
3. $\sum [u_i] + \sum [v_j] + \sum [w_r] + [u] = A \in \pi_2(M, L)$.

On Note $\mathcal{M}_\lambda(a, b, c, A, L)$ l'espace de ces éléments modulo reparamétrisation. On montre, en utilisant des arguments maintes fois répétés, qu'en dimension 0, 1, ces espaces sont

⁷Attention il y a trois cobordisme de Morse.

constitués d'éléments simples et absolus distincts pourvu que $\omega(A) < K$ et que la formule de dimension est donnée par :

$$\dim \mathcal{M}_\lambda(a, b, c, A, L) = |a| + |b| - |c| + \mu(A) - n + 1.$$

Enfin on pose :

$$\zeta(a \otimes b) = \sum_{c, A | \omega(A) < K} n_c^{a, b}(\lambda, A) e^{\Lambda c}. \quad (6.21)$$

avec

$$n_c^{a, b}(\lambda, A) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}_\lambda(a, b, c, A, L) & \text{si } \dim \mathcal{M}_\lambda(a, b, c, A, L) = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.22)$$

On étudie ensuite les brisures des espaces $\mathcal{M}_\lambda(a, b, c, A, L)$ de dimension 1. Il est facile de voir que l'analyse de ces brisures fournissent la relation (6.20).

Associativité :

Pour prouver l'associativité nous allons utiliser le formalisme combinatoire introduit au début de cette section. Les arbres \mathcal{T} coloriés avec points marqués sont du type suivant :

- $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$.
- le symbole de \mathcal{T} est du type $(x_1, x_2, x_3 : y)$ avec $x_i \in \text{Crit}(f_i)$ et $y \in \text{Crit}(f_3)$.
- la règle de sortie est donnée par $\Theta(f_{i_1}, \dots, f_{i_k}) = f_{\max\{i_1, \dots, i_k\}}$.

Le sélecteurs de points marqués \mathfrak{S} vérifie les propriétés suivantes :

- si s est un sommet de valence 2 et a est l'arête entrante et e l'arête sortante de s , alors $q_-(e) = -1$, resp. $q_+(a) = 1$.
- si s est un sommet de valence 3, notons a_1, a_2 ses arêtes entrantes dont l'ordre correspond à l'ordre horlogé et e son arête sortante. Alors $q_+(e) = 1$ et $q_-(a_k) = e^{-2i \frac{k\pi}{3}}$, $k = 1, 2$.
- si s est de valence 4, nous aurons besoin d'une famille à un paramètre de sélecteurs $\{\mathfrak{S}_\lambda\}_{\lambda \in (0, 2\pi/3)}$ telle que \mathfrak{S}_λ a la propriété suivante : notons a_1, a_2, a_3 les arêtes entrantes considérées dans l'ordre horlogé et e l'arête sortante. Alors \mathfrak{S}_λ suit la même règle de sélection que \mathfrak{S} pour (a_1, a_2, e) et assigne $q_-(a_3) = e^{i\lambda}$.

Pour les arbres dont la valence des sommets est au plus 3⁸, on a l'espace de Modules de perles :

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \mathfrak{S}; g, J).$$

Pour les arbres dont un des sommets a pour valence 4, on définit l'espace de Modules de perles :

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J) = \bigcup_{\lambda \in (0, 2\pi/3)} \mathcal{M}(\mathcal{T}, \mathfrak{F}), \mathfrak{S}_\lambda; g, J) \times \{\lambda\}. \quad (6.23)$$

Dans les deux cas, la dimension virtuelle est donnée par :

$$d(\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J)) = \sum_{i=1}^3 |x_i| - |y| + \mu(\mathcal{T}) - 2n + 1.$$

Proposition 6.2.2. *Soit L_0 une lagrangienne monotone. Pour tout $K > 0$ et pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$ il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 , un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 tels que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0)$, il existe un ensemble dense $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0; K)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ et pour tout arbre colorié $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F})$ du type précédent vérifiant $\omega(\mathcal{T}) < K$, alors :*

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \mathfrak{S}; g, J).$$

et

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J)$$

sont soit vide, soit des variétés de dimension :

$$\sum_{i=1}^3 |x_i| - |y| + \mu(\mathcal{T}) - 2n + 1.$$

de plus si la dimension virtuelle $\sum_{i=1}^3 |x_i| - |y| + \mu(\mathcal{T}) - 2n + 1 \leq 1$, on a :

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \mathfrak{S}; g, J) = \mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \mathfrak{S}; g, J).$$

et

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J) = \mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J).$$

En dimension 0, ces espaces sont déjà compacts et consistent en une collection finie de points.

⁸cette condition fixe le type topologique de l'arbre. Celui-ci a exactement deux sommets de valence 3.

Démonstration. Dans le cas $\dim L \geq 3$, la preuve est la même que les autres preuves de transversalité. On utilise essentiellement le lemme (5.1.2). Dans le cas $\dim L \leq 2$, la situation est un peu plus compliquée car au lieu d'avoir $\mu(\mathcal{T}) \leq 4$ on a $\mu(\mathcal{T}) \leq 6$. On prouve donc le résultat dans le cas $\dim L \leq 2$. Si $\mu(\mathcal{T}) \leq 4$, on procède comme dans la preuve du théorème (5.1.1). Si $\mu(\mathcal{T}) = 6$, il faut distinguer plusieurs cas :

- a. $\mathbf{A} = (A, B)$ avec $\mu(A) = \mu(B) = 3$,
- b. $\mathbf{A} = (A, B)$ avec $\mu(A) = 2$ et $\mu(B) = 4$,
- c. $\mathbf{A} = (A, B, C)$ avec $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = 2$,
- d. $\mathbf{A} = A$ avec $\mu(A) = 6$

Cas a. Premièrement les disques u , représentant A , et v , représentant B , sont simples. En effet, étant d'indice de Maslov minimal, ces derniers sont nécessairement simples. Supposons qu'ils ne soient pas absolument distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u(D) \subset v(D)$. En utilisant les lemmes (5.1.2), 5.1.3 et (5.1.5) on peut alors omettre le disque u de la chaîne obtenant ainsi un élément appartenant à un espace de modules $\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{G}_\lambda\}; g, J)$ constitué d'éléments n'ayant qu'une seule courbe simple (car $N_{\mathbb{L}} = 3$). Le lemme (5.1.3) nous permet de déduire que cet espace est soit une variété soit vide, mais puisque sa dimension est négative, il est vide ; d'où une contradiction.

Cas b. et c. Ces cas se traitent essentiellement de la même manière que le cas précédent avec la seule difficulté supplémentaire qu'il faut distinguer quel disque est inclus dans l'autre et qu'il faut discuter la simplicité des disques dans le cas (b.). Celle-ci se traite cependant exactement de la même manière que dans la preuve des théorèmes (5.1.1) et (6.2.1).

Cas d. C'est le seul cas vraiment nouveau. Ici il n'y a qu'un seul disque. Le graphes possède par conséquent un seul sommet intérieur s . Notons a_1, a_2, a_3 , les arrêtes entrantes de s et e l'arrête sortante.

Il faut s'assurer qu'il est simple. Notons \mathfrak{G} le graphe de non-injectivité. Le nombre de composantes connexes de $D - \mathfrak{G}$ est d'au plus 3. Notons que le théorème de décomposition (3.7.1) nous assure l'existence de : $\pi_i : D_i \rightarrow D$, $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tels que :

- les π_i sont holomorphes et ont un degré bien défini,
- les u_i sont J -holomorphes,

- et enfin $[u] = \sum_i \deg(\pi_i)[u_i]$.

On distingue les cas suivants :

1. il existe i tel que $\{q_-(a_1), q_-(a_2), q_-(a_3), q_+(e)\} \subset D_i$. Remarquons qu'ici on ne distingue pas les cas $\#(D - \mathcal{G}) = 2$ ou 3 .
2. pour tout i , $\{q_-(a_1), q_-(a_2), q_-(a_3), q_+(e)\} \not\subset D_i$. On distingue alors les sous-cas suivants :
 - i. $\#(D - \mathcal{G}) = 2$,
 - ii. $\#(D - \mathcal{G}) = 3$.

Commençons par le **cas n° 1**. Puisque $\{q_-(a_1), q_-(a_2), q_-(a_3), q_+(e)\} \subset D_i$, on peut omettre le(s) autre(s) disque(s) u_j pour $j \neq i$. On obtient alors un disque élément $v = u_i \in \mathcal{M}(\mathcal{T}([u_i], \mathfrak{F}), \mathcal{G}; g, J)$. Mais $\mu([u_i]) \leq \mu([u]) - 2$. Par hypothèse d'induction $\mathcal{M}(\mathcal{T}([u_i], \mathfrak{F}), \mathcal{G}; g, J) = \mathcal{M}^*(\mathcal{T}([u_i], \mathfrak{F}), \mathcal{G}; g, J)$, mais cet espace a une dimension négative, il est donc vide.

On va maintenant montrer que le sous-cas (ii) du **cas n° 2** peut se réduire au sous-cas (i). Remarquons d'abord que soit : $\pi(D_i) = 0$ pour tout i , soit il existe un i tel que $\pi_1(D_i) \neq 0$. Dans ce dernier cas, il existe D_j , avec $j \neq i$, tel que $D_j \subset D - D_k$ avec $k \neq j$ et $k \neq i$. Etant donné que $D_i \cup D_j$ est simplement connexe, il est conforme au disque. Notons $\phi : (D_i \cup D_j) \rightarrow D$, le biholomorphisme donné par le théorème de l'application conforme de Riemann. On peut alors se réduire au sous-cas (i) en considérant le disque $v = u|_{D_i \cup D_j} \circ \phi^{-1}$. On a alors une décomposition de u en deux disques u_k et v qui joueront le rôle des disques u_i dans la décomposition de Lazzarini⁹. Dans le cas $\pi_1(D_i) = 0$ pour tout i . On peut raisonner de la même manière et obtenir une décomposition en deux disques dont un n'est pas simple. Remarquons enfin qu'un des disques est nécessairement d'indice 2 et l'autre d'indice 4.

Traitons maintenant le sous-cas (i). On a donc deux disques dans la décomposition de Lazzarini que nous notons : u_1 et u_2 . Remarquons que puisqu'on a supposé que $\{q_-(a_1), q_-(a_2), q_-(a_3), q_+(e)\} \not\subset D_i$ pour tout i , D_1 et D_2 sont des disques et $D_1 \cap D_2 = \gamma$ ou γ est un arc joignant des points distincts du bord. Supposons que $\{q_-(a_1), q_-(a_2), q_-(a_3)\} \subset D_1$ et $q_+(e) \in D_2$; les autres cas se traitent de la même manière. D'abord peut supposer que u_1 et u_2 sont absolument distincts. En effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait omettre un des deux disques, obtenir un élément d'un espace de modules de dimension négative pour lequel on a au surplus prouvé la transversalité. D'où

⁹sauf qu'ils ne sont pas nécessairement simples.

une contradiction. Supposons donc sans perte de généralité que les u_i sont absolument distincts.

Puisque $D_1 \cap D_2 = \gamma$, les éléments u_1 et u_2 forment une famille à un paramètre de trajectoires perlées $\mathbf{u}_p \in \mathcal{M}_0(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J)$, où $\mathcal{M}_0(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J) \subset \mathcal{M}(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J)$ est constitué des éléments pour lesquels la longueur de la trajectoire joignant u_1 à u_2 est nulle. Or l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J)$ correspond au cas (a) ou (b). On a montré que dans ces cas les éléments sont simples et absolument distincts. Il s'ensuit qu'on a les mêmes propriétés pour $\mathcal{M}_0(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J)$. Mais $\dim \mathcal{M}_0(\mathcal{T}(A_1, A_2, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}\}; g, J) = \sum_i |x_i| - |y| - 2n + \mu(A_1 + A_2) \leq 0$, ce qui constitue une contradiction. \square

A partir de ces espaces nous allons construire une homotopie de chaîne entre $\{(\cdot * \cdot) * \cdot\}$ et $\{\cdot * (\cdot * \cdot)\}$. Définissons :

$$\begin{aligned} \Xi : C_*(f_1, J) \otimes C_*(f_2, J) \otimes C_*(f_3, J) &\rightarrow C_*(f_3) \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \sum_{\substack{y, \mathcal{T} | \omega(\mathcal{T}) < K \\ \text{symb}(\mathcal{T}) = (x_1, x_2, x_3; y)}} n(\mathcal{T}) q^{\omega(\mathcal{T})} t^{\mu(\mathcal{T})} y. \end{aligned} \quad (6.24)$$

avec :

$$n(\mathcal{T}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J) & \text{si } \sum_i |x_i| - |y| + \mu(\mathcal{T}) - 2n + 1 = 0, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.25)$$

L'associativité découle de la propriété suivante :

Proposition 6.2.3. *Pour tout $J_0 \subset \mathcal{J}(M, \omega)$, $\epsilon > 0$ et pour tout $K > 3n\eta + 2\epsilon$, il existe des voisinages $\mathcal{W}(L_0; J_0 K, \epsilon)$ et $\mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ tels que pour tout $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0, K, \epsilon)$ il existe un ensemble générique $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}(J_0; K, \epsilon)$ tel que l'application Ξ définie ci-dessus vérifie :*

$$\Xi \circ \delta(a \otimes b \otimes c) + \delta \circ \Xi(a \otimes b \otimes c) = (a * b) * c - (a * b) * c \quad (6.26)$$

Démonstration. La preuve est très similaire à la preuve de la règle de Leibniz. On pointe juste le point essentiellement différent. Dans la compactification des espaces $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J)$ de dimension 1, il se peut qu'en plus des évènements habituels, $\theta \rightarrow 0$ ou $2\pi/3$. Ceci ne constitue pas un problème car on interprète l'image du point 0 (ou $2\pi/3$) comme un disque constant stable (3 points marqués). On obtient donc un élément qui était dans l'intérieur d'un espace $\mathcal{M}(\mathcal{T}'(\mathbf{A}', \mathfrak{F}), \{\mathfrak{S}_\lambda\}; g, J)$ où \mathcal{T}' possède un sommet de plus s et \mathbf{A}' est obtenu à partir de \mathbf{A} en rajoutant la classe 0 et en l'associant au sommet s . \square

Neutre :

Sans perte de généralité on peut supposer que $f_2 = f_3$, dans la définition du produit. On peut aussi supposer que f_1 ne possède qu'un seul maximum qu'on note ℓ . On choisit $\epsilon, K > \eta(3n) + 2\epsilon$ et J générique tel que $(QH(L, \Lambda_\omega), *)$ est bien défini, invariant et vérifie l'associativité pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0, K, \epsilon)$. On sait que $\delta\ell = 0$. On montre maintenant que pour tout point critique $x \in \text{Crit}_{f_2}$ $\ell * x = x$. En effet, étant donné qu'il n'y a pas de trajectoires perlées rigides de l'un des espaces $\mathcal{M}(x, y, z, L, J)$ dont l'un des disques non-constants intersecte la variété instable de ℓ , la preuve découle du fait qu'on a choisi $f_2 = f_3$. \square

Chapitre 7

Applications.

Nous allons maintenant appliquer la théorie développée ci-dessus pour étudier les problèmes suivants :

1. **déplaçabilité** : des lagrangiennes presque monotones. Rappelons qu'une sous-variété lagrangienne L est dite **déplaçable** s'il existe un difféomorphisme hamiltonien $\phi^H \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\phi^H(L) \cap L = \emptyset$. Nous allons montrer que cette dernière condition implique la nullité de $\text{QH}(L, \Lambda_\omega)$.
2. **Uniréglage, Energie de déplacement, Capacité** : Comme corollaire du point précédent nous allons montrer que :
 - Les lagrangiennes déplaçables sont uniréglées. On dit qu'une variété lagrangienne est **uniréglée**, si pour tout point $\ell \in L$, il existe un ensemble dense de structures presque complexes compatibles $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$, il existe un disque J -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que $\ell \in u(\partial D)$.
 - Comme corollaire de l'uniréglage nous allons pouvoir trouver une borne inférieure pour l'énergie de déplacement des lagrangiennes presque-monotones déplaçables. Enfin nous allons trouver un estimé de la largeur de Gromov d'une lagrangienne monotone vers laquelle convergent au sens C^1 une suite de lagrangiennes déplaçables, cfr. définitions (2.6) et (2.8).

Nous allons introduire un morphisme qui, dans le cas où L est monotone et déplaçable, est une nulle-homotopie, c.-à-d. une homotopie de chaîne entre l'identité et l'application nulle. Dans le cas presque monotone et déplaçable cette homotopie de chaîne présente certaines subtilités, mais le résultat est essentiellement le même.

Avant, nous allons donner une autre construction du morphisme de comparaison :

$$\varphi : C_*(L; \mathcal{F}_0) \rightarrow C_*(L; \mathcal{F}_1) : x \rightarrow \sum_{\substack{a \in \text{Crit}(f_1), \\ A \in \pi_2(M, L)}} n_y^x(A) t^{\mu(A)} y, \quad (7.1)$$

où les $n_y^x(A)$ comptent comme d'habitude les éléments d'un espace de modules $\mathcal{M}(x, y, A, L; \mathbf{J})$ où $x, y \in \text{Crit}(f)$, et $A \in \pi_2(M, L)$ vérifient $|x| - |y| + \mu(A) = 0$.

Les espaces de modules associés à ce morphisme est construit de la manière suivante : Soit $\mathbf{J} : D \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega)$ une famille de structures presque complexes compatibles de la forme suivante : \mathbf{J} est non-constante seulement sur $\{z \in D : |\Re z| \leq 1/2\}$ et joint deux structures presque complexes J_0 et J_1 régulières¹. On note $\mathcal{J}(D, J_0, J_1)$ cet espace.

On définit maintenant l'espace $\mathcal{M}(A, L; \mathbf{J})$. On pose $J_z(q) = \mathbf{J}(z, q)$. Un élément de $\mathcal{M}(A, L; \mathbf{J})$ est un disque $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ solution de

$$\partial_{\mathbf{J}} u = \partial_s u + J_z(u) \partial_t u = 0 \quad (7.2)$$

et représentant $A \in \pi_2(M, L)$ ou $H_2^D(M, L)$. Rappelons que $\mathcal{J}(D, M, \omega) = \{\mathbf{J} : D \times TM \rightarrow TM \mid \mathbf{J}(z, \cdot) = J_z(\cdot) \in \mathcal{J}(M, \omega)\}$.

Théorème 7.0.2. *Pour tout J, J' réguliers. Il existe un ensemble de seconde catégorie de Baire : $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{J}(D, J, J')$, tel que pour tout $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$ et pour tout $A \in \pi_2(M, L)$, l'espace $\mathcal{M}(A, L; \mathbf{J})$ est soit vide soit une variété de dimension $\mu(A) + n$ ².*

Remarque 7.1. *L'énergie d'un élément de $u \in \mathcal{M}(A, L, \mathbf{J})$ est donnée par $\omega(A)$. Par conséquent si $A \neq 0$, son énergie est strictement positive comme dans le cas des \mathbf{J} constants.*

On peut maintenant définir $\mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J})$ de la même manière qu'on a défini $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ sauf que les $j - 1$ premiers disques sont J -holomorphes, le j -ième est un disque solution de (7.2), les autres disques étant J' -holomorphes. Ensuite on définit $\mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J}) \subset \mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J})$ le sous-ensemble des éléments absolument distincts dont tous les disques, hormis le j -ième, sont simples³.

Si $\mathcal{N}(J_0) \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ est un voisinage de J_0 , on note :

- $\mathcal{N}_D(J_0) \subset \mathcal{J}(D, M, \omega)$, $J_z \in \mathcal{N}(J_0)$ pour tout $z \in D$.
- $\mathcal{N}(J_0, J, J') := \mathcal{N}_D(J_0) \cap \mathcal{J}(D, J, J')$

¹c'est-à-dire telles que la linéarisation de l'opérateur de Cauchy Riemann en une courbe simple est surjectif

²Remarquons qu'on a utilisé la lettre \mathcal{M} et non la lettre \mathcal{P} car le groupe de reparamétrisation est trivial.

³Comme \mathbf{J} est non-constant nous n'avons pas besoin de demander qu'il soit simple

Proposition 7.0.4. Soit L_0 une lagrangienne monotone. Pour tout $K > 0$ et pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$ il existe des voisinages $\mathcal{N}(J_0; K)$ et $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ tels que pour tout :

$$L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K),$$

$$J, J' \in \mathcal{N}(J_0, K) \text{ régulier,}$$

il existe $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0, J, J'; K)$ générique, tel que pour tout $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$, pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$, pour tout $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in H_2^D(M, L)^k$ avec $\omega(\mathbf{A}) < K$ et pour tout $j = 1, \dots, k$, l'espace de module $\mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ est soit vide, soit une variété de dimension :

$$|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}).$$

Comme précédemment, si $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) \leq 1$, $\mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J}) = \mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$.

Corollaire 7.0.2.1. Le théorème reste vrai pour l'espace

$$\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}, L : \mathbf{J}) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A} \in \pi_2(M, L)^k \\ \sum_{i=1}^k A_i = \mathbf{A}}} \bigcup_{j=1}^k \mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J}).$$

Démonstration. Le résultat concernant la transversalité de $\mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ ainsi que la formule de dimension sont des applications directes des résultats obtenus dans [MS04]. En outre si $J \neq J'$, la preuve de l'égalité entre $\mathcal{M}_j^*(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ et $\mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ lorsque $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) \leq 1$ est à quelques détails mineurs près la même que la preuve du théorème (5.0.2). Le seul cas vraiment problématique est quand $J = J'$.

Dans ce cas il est plus difficile de montrer que les éléments de $\mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ sont absolument distincts. Par souci de clarté nous allons donc faire la preuve en entier. On ne traite que le cas $\dim L \geq 3$. La preuve dans les autres cas étant la même que pour les espaces $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$.

$\dim L \geq 3$: La preuve se fait par induction sur l'indice de Maslov $\mu(\mathbf{A}) = kN_L$. Supposons d'abord que $\mu(\mathbf{A}) = N_L$. Puisque L est presque-monotone, il s'en suit que $\mathbf{A} = A \in H_2^D(M, L)$. Puisqu'il n'y qu'un seul disque, et que ce disque correspond au disque solution de (7.2), on obtient le résultat. Supposons que le résultat soit vrai pour k et montrons qu'il est vrai pour $k+1$. D'abord remarquons qu'il n'existe pas de $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $u_i(-1) = u_i(+1)$. En effet supposons que cela soit le cas, on pourrait omettre le disque u_i et ainsi obtenir un trajectoire perlée d'un espace de module dont la dimension serait négative. Notre hypothèse d'induction nous assure que cet espace est donc vide.

Pour montrer la simplicité des disques on procède exactement de la même manière que dans le théorème (5.0.2) et il n'y a aucune difficulté. Par contre pour montrer qu'ils sont absolument distincts il faudra plus de travail. Supposons que les disques ne soient pas absolument distincts. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_k) \in \mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$. On suppose qu'il existe $i, l \in \{1, \dots, k\}$ tels que $u_i(D) \subset u_l(D)$

On distingue alors les cas suivants :

1. $1 \leq i, l < j$: ce cas se traite exactement de la même manière que dans la preuve du théorème (5.0.2).
2. $j < i, l \leq k$: Ici aussi on répète la preuve du théorème (5.0.2)
3. $i < j < l$ et $l < j < i$. Ces deux cas sont les plus problématiques.

Traitons le cas $i < j < l$, l'autre se traitant de la même manière et est laissé au lecteur. Il suffit d'omettre la chaîne u_i, \dots, u_{l-1} . On obtient alors un élément $\mathbf{u}' \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}', L, J_0)$ dont la dimension est $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}') - 1$. Cependant on a omis au moins deux disques : le disque u_j et le disque u_l ; donc $\mu(\mathbf{A}') \leq \mu(\mathbf{A}) - 2N_L \leq \mu(\mathbf{A}) - 4$. Un rapide calcul nous mène à une contradiction. \square

On va maintenant étudier la compacité de ces espaces de modules. Le fait que φ est application de chaînes découle directement de la proposition suivante :

Proposition 7.0.5. *Pour tout ϵ et pour tout $K > \eta(n + 1) + 2\epsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0, K, \epsilon)$ de L_0 , et un voisinage $\mathcal{N}(J_0; K)$ de J_0 tel que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; K, \epsilon)$, pour tout $J, J' \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(L) \subset \mathcal{N}(J_0; K, \epsilon)$ et pour tout $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$: Soient $x, y \in \text{Crit}(f)$ et $\mathbf{A} \in \pi_2(\mathcal{M}, L)$ tel que $\omega(\mathbf{A}) < \epsilon$. Si $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) = 1$, alors $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J})$ possède une compactification $\overline{\mathcal{M}}(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J})$ telle que :*

$$\partial \overline{\mathcal{M}}(x, y, \mathbf{A}, L; \mathbf{J}) = \bigcup_{q \in \text{Crit}(f)} \bigcup_{\substack{\mathbf{B}, \mathbf{C} \\ \mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{A}}} \mathcal{M}(x, q, \mathbf{B}, L; \mathbf{J}) \times \mathcal{M}(q, y, \mathbf{C}, L; \mathbf{J})$$

$$\cup \bigcup_{q \in \text{Crit}(f)} \bigcup_{\substack{\mathbf{B}, \mathbf{C} \\ \mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{A}}} \mathcal{M}(x, q, \mathbf{B}, L; \mathbf{J}) \times \mathcal{M}(q, y, \mathbf{C}, L; \mathbf{J})$$

Par conséquent :

$$\delta\varphi + \varphi\delta = 0.$$

Démonstration. Il suffit de constater que les brisures possibles sont exactement les mêmes que celles apparaissant dans le cas des espaces de modules $\mathcal{M}(x, y, A, L; J)$. En répétant l'étude faite dans ce cas il est facile de retrouver les identités ci-dessus. \square

Nous allons maintenant faire une remarque importante :

Remarque 7.2. *Le morphisme $\varphi : C_*(f, g, J) \rightarrow C_*(f, g, J)$ est de la forme suivante :*

$$\varphi(x) = \text{Id} + \sum_{\substack{y, A \\ 0 < \omega(A) < K}} n_y^x(A) q^{\omega(A)} t^{\tilde{u}(A)} y.$$

Etant donné qu'on considère des séries formelles, les morphismes du type :

$$\text{Id} + P,$$

où P est un morphisme ayant tous ses coefficients d'énergie strictement positive, sont toujours inversibles. Il est facile de voir que l'inverse est donné par $\sum_{i=0}^{+\infty} P^i$.

On définit alors une application d'évaluation $ev_{H,j}$ identique à l'application d'évaluation définie en (5.2) sauf que le j -ème espace de modules est remplacé par $\mathcal{M}(A_j, L; J, H)$. On définit ensuite :

$$\mathcal{P}_j(x, y, \mathbf{A}; J, H) = ev_{H,j}^{-1}(W^u(x) \times \Delta^{k-1} \times W^s(y)),$$

$$\mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; J, H) = \bigcup_j \mathcal{P}_j(x, y, \mathbf{A}; J, H, R)$$

et enfin

$$\mathcal{P}(x, y, A; J, H) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_k) \\ \sum_i A_i = A}} \mathcal{P}(x, y, \mathbf{A}; J, H).$$

L'espace $\mathcal{M}_j(x, y, \mathbf{A}; J, H)$ est obtenu après avoir effectué le quotient de l'espace \mathcal{P} correspondant par son groupe de reparamétrisation. Il en va de même pour les autres espaces \mathcal{M} . Enfin on décore les espaces de modules d'un astérisque $*$ pour désigner le sous-ensemble de trajectoires perlées absolument distinctes et constituées de disques simples. En utilisant les arguments répétés maintes fois dans les sections précédentes on prouve :

Proposition 7.0.6. *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone. Pour tout $J_0 \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ et pour tout $K > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 et $\mathcal{N}(J_0, K)$ de J_0 ayant la propriété suivante : Si $L \in \mathcal{N}(L_0, K)$ et $J, J' \in \mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0, K)$, il existe $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0, J, J')$ tel que pour tout $J \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$, pour tout $A \in H_2^D(M, L)$ avec $\omega(A) < K$, et pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$, $\mathcal{M}^*(x, y, A, L, J, H)$ est soit vide, soit une variété de dimension :*

$$\dim \mathcal{M}^*(x, y, A, L; J, H) = |x| - |y| + \mu(A) + 1.$$

En outre si $\dim \mathcal{M}^(x, y, A, L; J, H) \leq 1$ alors $\mathcal{M}^*(x, y, A, L; J, H) = \mathcal{M}(x, y, A, L; J, H)$.*

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que la preuve de la proposition (7.0.4). On remarquera cependant que, pour que l'argument marche tel quel, il faut impérativement que J soit différent de J' . \square

A tout difféomorphisme hamiltonien $\phi_H \in \text{Ham}(M, \omega)$, on associe alors le morphisme :

$$\Psi : C_*(f, g, J) \rightarrow C_*(f, g, J') : x \longrightarrow \sum_{\substack{y, A \\ \omega(A) < K}} n_y^x(A, H) q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} y.$$

où

$$n_y^x(A, H) = \begin{cases} \#2\mathcal{M}(x, y, A, L; H, J) & \text{si } |x| - |y| + \mu(A) + 1 = 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (7.3)$$

Compacité :

Proposition 7.0.7 (Albers, [Alb08]). *Soient $L_\nu \hookrightarrow (M, \omega)$ une suite de lagrangiennes convergant vers une lagrangienne L et $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction hamiltonienne. Supposons que H soit générique pour tout L_ν dans le sens où les cordes hamiltonienne de H à bord dans L_ν sont non-dégénérées. Soit $\{(u_\nu, R_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de disques avec (u_ν, R_ν) vérifiant $\bar{\delta}_J u_\nu + \beta_{R_\nu}(s) X_H(u_\nu) = 0$ et $u_\nu(\partial D) \subset L_\nu$. Supposons que $\omega(u_\nu) < K$. Alors :*

1. *Si $R_\nu \rightarrow R_\infty$ avec $0 < R_\infty < +\infty$, u_ν possède une sous-suite convergant vers une courbe stable dont seul le coeur est solution des équations de Cauchy-Riemann perturbées.*
2. *Si $R_\nu \rightarrow 0$ alors u_ν possède une sous-suite convergant vers une courbe pseudo-holomorphe stable.*

3. Si $R_\nu \rightarrow +\infty$, alors u_ν possède une sous-suite convergeant vers une courbe stable dont le coeur est un disque brisé le long d'orbite(s) hamiltonienne(s) de H .

En outre si H est non-dégénéré pour L , la limite des $A_\nu = [u_\nu] \in H_2^D(M, L_\nu)$ est bien définie.

Remarque 7.3. Une remarque importante est que dans certains cas (comme nous allons le voir) il n'est pas toujours vrai que si H est non-dégénéré pour tout L_ν , il l'est aussi pour la lagrangienne limite. Il se peut par exemple que l'ensemble des cordes hamiltoniennes forment une variété, comme c'est le cas par exemple pour la rotation de 180° sur la sphère et l'équateur.

On aimerait prouver que $\delta\Psi + \Psi\delta = \varphi$. Malheureusement ce n'est pas possible en général car il n'est pas possible de prouver un lemme similaire au lemme (6.1.1) pour les espaces $\mathcal{M}(A, L, J, H)$. Cependant on peut prouver :

Théorème 7.0.3. Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une variété lagrangienne monotone. Pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(M, \omega)$, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $K > 3n\eta + 2\epsilon$, il existe des voisinages $\mathcal{N}(L_0, K, \epsilon)$ et $\mathcal{N}(J_0; K, \epsilon)$ ayant la propriété suivante :

Si $L \in \mathcal{N}(L_0, K, \epsilon)$ et $J, J' \in \mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_0; K, \epsilon)$ il existe un ensemble dense $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \in \mathcal{N}(J_0, J, J')$ tel que pour tout $J \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$ et pour tout $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi_H(L) \cap L = \emptyset$, on a :

$$(\Psi \circ \delta + \delta \circ \Psi)x = \varphi(x) + \sum_{\substack{A|K \leq \omega(A) < 2K \\ y \in \text{Crit}(f)}} n_A q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} y. \quad (7.4)$$

Démonstration. Ecrivons le membre de gauche de (7.4) :

$$\sum_{\substack{y, A| \\ \omega(A) < K}} \sum_{\substack{z, B| \\ \omega(B) < K}} n_y^x(A) n_z^y(B, H) q^{\omega(A+B)} t^{\bar{\mu}(A+B)} z \quad (7.5)$$

$$+ \sum_{\substack{y, A| \\ \omega(A) < K}} \sum_{\substack{z, B| \\ \omega(B) < K}} n_y^x(A, H) n_z^y(B) q^{\omega(A+B)} t^{\bar{\mu}(A+B)} z \quad (7.6)$$

Interprétons ces termes, comme nous le faisons à chaque fois, en terme de bord d'espaces de modules de dimension 1 en gardant à l'esprit que nous n'avons pas d'équivalent de la proposition (6.1.1). On ne sait donc pas a priori que $\omega(A + B) < K$ à partir de la connaissance de $\omega(A), \omega(B) < K$. Néanmoins pour les classes A, B apparaissant dans les expressions ci-dessus vérifiant $\omega(A + B) < K$ on peut appliquer la stratégie introduite plus haut. Donc lorsque $\omega(A + B) < K$ on a la transversalité des espaces de modules

$\mathcal{M}(x, z, A + B, L; H, J)$ qui sont donc des variétés différentiables de dimension 1. On pose alors :

$$\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta = (\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{<K} + (\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{\geq K} \quad (7.7)$$

Où $(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{<K}$, respectivement $(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{\geq K}$, désigne les termes de $\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta$ avec $\omega(A + B) < K$, respectivement $\omega(A + B) \geq K$.

Etudions la compactification des espaces $\mathcal{M}(x, z, A + B, L; H, J)$ de dimension 1 avec $\omega(A + B) < K$.

Soit u_ν une suite convergeant dans $\mathcal{M}(x, y, A + B, L, H, J)$. D'abord, la lagrangienne étant déplaçable il existe $R_\infty < \infty$ tel que $u_\nu \rightarrow u$ où u . En effet, l'absence de corde hamiltonienne force la suite à converger pour des valeurs finie de R . De plus lorsque $R_\infty = 0$, on obtient des éléments des espaces de modules $\mathcal{M}(x, z, A + B, J)$ correspondant aux termes de φ dans (7.4). Maintenant pour $0 < R_\infty < \infty$ on distingue les cas suivants

1. Bouillonnement de sphère(s) en un point intérieur au disque ou de disque(s) en un point du bord ne définissant pas une relation d'incidence. Comme on l'a déjà répété maintes fois c'est un phénomène de codimension 2 qu'on peut négliger puisque notre espace est de dimension 1.
2. Bouillonnement de disques en une relation d'incidence. Ceci correspond à un point intérieur.
3. Brisures d'une trajectoire du gradient définissant une relation d'incidence qui correspond aux termes $(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{<K}$.

En conclusion nous avons donc :

$$(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{<K} = \varphi \quad (7.8)$$

L'expression de $(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta)^{\geq K}$ ne peut s'interpréter en termes du bord d'espace de modules car $\omega(A + B)$ étant plus grande ou égale à K nous n'avons pas la transversalité pour ces espaces de modules. On retrouve donc bien l'équation (7.4). \square

Corollaire 7.0.3.1. Soient L_α une lagrangienne C^1 -proche d'une lagrangienne monotone. Supposons que L_α soit déplaçable, alors $\text{QH}(L, \Lambda_\alpha) = 0$.

Démonstration. Par la remarque (7.2), le membre de droite de l'identité (7.4) est un isomorphisme. Il suffit de prouver que cet isomorphisme est un morphisme de chaînes. Ceci impliquera en effet qu'un isomorphisme induit l'application nulle en homologie.

On doit donc prouver que :

$$\delta \circ (\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta) + (\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta) \circ \delta = 0.$$

Or $\delta \circ (\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta) = \delta\Psi\delta$ et de même $(\delta \circ \Psi + \Psi \circ \delta) \circ \delta = \delta\Psi\delta$. \square

Corollaire 7.0.3.2. *Les variétés presque monotones déplaçables sont uniréglées.*

Démonstration. Nous allons donner deux preuves. La première est plus générale puisque nous allons montrer que si L est presque monotone et $\text{QH}(L, \Lambda_\omega) = 0$, alors L est uniréglée. Cette preuve permet de borner la largeur de Gromov de L . La deuxième preuve concernera les sous-variétés lagrangiennes déplaçables et a l'avantage de pouvoir donner de manière très explicite une borne inférieure pour l'énergie de déplacement.

Preuve 1 : Soit L_0 une sous-variété monotone de constante de monotonie $\eta > 0$. Soit L une variété presque monotone, et J une structure presque complexe régulière pour L . Soient $\ell \in L$ et $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur L ayant pour unique maximum ℓ . Puisque ℓ est le maximum $\delta\ell = 0$. Mais $\text{QH}(L, \Lambda_\omega)$ étant nul, il existe $x \in C_*(f, g, J)$ tel que $\ell = \delta x$. Ceci implique qu'il existe un espace de perles $\mathcal{M}(y, \ell, A, J)$ non-vide avec $A \neq 0$. De plus étant donné que $\mu(A) = n - |y| + 1 \leq n + 1$, on déduit que $\omega(A) \leq \eta(n + 1) + 2\epsilon$.

Preuve 2 : En écrivant (7.4) pour $x = \ell$ on obtient :

$$\delta \circ \Psi\ell = \ell + \sum_{\substack{A|0 < \omega(A) < 2K \\ y \in \text{Crit}(f)}} n_A q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}A} y.$$

En outre

$$\delta \circ \Psi\ell = \sum_{\substack{y, A| \\ \omega(A) < K}} \sum_{\substack{z, B| \\ \omega(B) < K}} n_y^\ell(A, H) n_z^y(B) q^{\omega(A+B)} t^{\bar{\mu}(A+B)} z.$$

Puisque $\mu(A) = |y| - n - 1 < -1$, on a $\mu(A) < -N_L$. On déduit qu'il existe $A, B \in H_2^D(M, L)$ non-nuls et $y \in \text{Crit}(f)$ tel que $\mu(A) = -\mu(B)$, $\omega(A) = -\omega(B)$ et $n_y^\ell(A, H) n_z^y(B) = 1$. Ceci implique que $n_z^y(B) \neq 0$ et donc $\mathcal{M}(y, \ell, B, L, J) \neq \emptyset$. Par conséquent il existe un disque pseudo-holomorphe représentant la classe $B \neq 0$ passant par ℓ . Remarquons que puisque $\omega(A) \geq -\|H\|_\infty$, $\omega(B) \leq \|H\|_\infty$. \square

De la preuve précédente, on retrouve un cas particulier du théorème bien connu [Che98] :

Corollaire 7.0.3.3. *Soit L une lagrangienne presque-monotone déplaçable. Alors :*

$$E(L) \geq \inf\{\omega([u]) > 0 \mid u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L) \text{ et } \bar{\partial}_J u = 0\}.$$

Corollaire 7.0.3.4. *Soit L_0 une sous-variété lagrangienne monotone déplaçable. Alors toutes les lagrangiennes C^1 -proche de L_0 sont uniréglées.*

Démonstration. Au vue du corollaire (7.0.3.1), il suffit de montrer qu'un voisinage de L_0 est déplaçable. Soit $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ un difféomorphisme hamiltonien effectuant la disjonction de L_0 avec lui même. Puisque $L_0 \cap \phi(L_0) = \emptyset$, il existe un voisinage \mathcal{N} de L_0 et \mathcal{W} de $\phi(L_0)$ tel que $\mathcal{N} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. En prenant $\phi^{-1}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{N}$ on trouve un voisinage C^1 de L_0 qui peut être disjoint de lui-même par le difféomorphisme ϕ . \square

Corollaire 7.0.3.5. *Soit $\{L_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de lagrangienne déplaçable convergeant au sens C^1 vers une lagrangienne monotone L_0 . Alors L_0 est uni-réglée.*

La proposition suivante est tiré de [BC07] :

Proposition 7.0.8 ([BC07]). *Soient $E > 0$ et $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété langrangienne. Si pour $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ il existe un voisinage $\mathcal{N}(J) \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ et un sous ensemble de seconde catégorie de Baire $\mathcal{J} \subset \mathcal{N}(J)$ tel que pour tout $J' \in \mathcal{J}$ et pour tout $\ell \in L$, il existe un disque $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que :*

- u est J' -holomorphe
- $\ell \in \partial D$,
- $\omega([u]) \leq E$

Alors $\frac{\text{Gr}(L)}{2} \leq E$.

Avant de prouver cette inégalité rappelons le lemme de monotonicté dû à Lelong [Lel50] :

Lemme 7.0.1 (Lemme de monotonicté). *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une surface minimale passant par 0, alors :*

$$\text{Area}(S \cap B(r)) \geq \pi r^2 \tag{7.9}$$

Démonstration. Soit $\phi : (B(r), B_{\mathbb{R}}(r)) \rightarrow (M, L)$ tel que $\phi^{-1}(L) = B_{\mathbb{R}}(r)$. Soit $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ une structure presque complexe compatible vérifiant : $\phi_* J_0 = J \# \text{im} \phi$. Soit $\ell \in L$. Considérons une suite de structures presque complexes compatibles $\{J_n\}$ dans $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset$

$\mathcal{N}(J)$. Par hypothèse il existe une suite de disques $\{u_n\}$, J_n -holomorphes passant par $\ell = \phi(0)$ et dont l'énergie est bornée par E . Il existe un sous-suite convergeant vers une courbe stable passant par ℓ (dont le bord contient ℓ). Il s'ensuit qu'il existe un disque J -holomorphe passant par ℓ et dont l'énergie est inférieure à E . Posons

$$\mathcal{D} = \text{int}(B(r)) \cap \{\phi^{-1}(u(\mathcal{D})) \cup (\phi^{-1}(u(\mathcal{D})))^*\},$$

où l'étoile désigne la conjugaison complexe. Il est connu que l'image d'une application pseudo-holomorphe est une surface minimale pour la métrique $\omega(\cdot, J\cdot)$. Par conséquent, on peut appliquer le lemme de monotonie à \mathcal{D} :

$$\pi r^2 \leq \omega_0(\mathcal{D}) \leq 2\omega([u]) \leq 2E. \quad (7.10)$$

□

Corollaire 7.0.3.6. *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne monotone. Supposons que qu'il existe une suite de sous-variétés lagrangiennes presque monotones déplaçables L_α convergeant vers L_0 au sens C^1 , alors :*

$$\frac{1}{2} \text{Gr}(L_0) \leq \sup_{\alpha} E(L_\alpha). \quad (7.11)$$

Troisième partie

**Structure quantique des fibres
toriques.**

Chapitre 8

Fibres toriques.

Dans ce chapitre nous étudions le complexe des perles des variétés toriques de Fano. Ces variétés ont déjà été étudiées intensément dans [CO06] et [Cho08] ainsi que dans [FOOO10] [FOOO09a].

Nous pouvons cependant retrouver la plupart de leurs résultats sans faire appel aux structures Kuranishi. La raison est que dans leur contexte ils considèrent les espaces de modules de dimensions arbitraires alors que dans le cas du complexe des perles on ne considère que ceux de dimension 0 ou 1. L'approche qui suit est assez élémentaire dans le sens où elle ne fait intervenir que des résultats de transversalité standard et qu'elle évite les discussions techniques concernant les obstructions à $\delta^2 = 0$. Récemment Chris Woodward a généralisé et retrouvé tous les résultats de [FOOO10] en utilisant les équations Vortex. Malheureusement nous n'avons pas eu le temps d'investiguer les déformations bulk pour les perles.

8.1 Variétés toriques.

On rappelle d'abord brièvement la définition et les propriétés élémentaires des variétés toriques. Ces dernières fournissent une classe d'exemples de variétés de Khäler intéressante et possèdent des propriétés géométriques remarquables qui nous permettront d'investiguer la structure des espaces de modules de disques holomorphes à bord dans certaines sous-variétés lagrangiennes appelées fibres toriques. On suit essentiellement l'approche se trouvant dans [Aud04], [CdS01], [CO06].

Définition 8.1. Une *variété torique symplectique* est une variété (X^{2n}, ω) munie d'une action hamiltonienne effective du tore de dimension n , T^n avec application moment μ .

Ce type de variété peut être décrite par un objet purement combinatoire appelé polytope de Delzant :

Définition 8.2. Un *polytope de Delzant* est un polytope convexe $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes :

1. Δ est **simple** : la valence de chaque sommet est n ou de manière équivalente n faces se rencontrent en chaque sommet¹.
2. Δ est **rationnel** : les arêtes joignant p sont de la forme $p + tu_i$ avec $u_i \in \mathbb{Z}^n$.
3. Δ est **lisse** : en chaque sommet $p \in \Delta$, les vecteurs u_i forment une base de \mathbb{Z}^n .

On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{Z}^n$ est **primitif** s'il ne peut pas s'écrire $v = kw$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $|k| > 1$.

Un polytope de Delzant peut être décrit algébriquement à l'aide de ses faces. Notons N le nombre de faces de Δ . Pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ on considère le vecteur primitif $v_i \in \mathbb{Z}^n$ normal à la face $\Gamma_i = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* | \langle x, v_i \rangle = \lambda_i\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et pointant vers l'intérieur du polytope Δ . On peut alors écrire :

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* | \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N\} \quad (8.1)$$

Nous allons maintenant décrire comment obtenir une variété torique à partir d'un polytope de Delzant. Nous énoncerons ensuite le *théorème de classification des variétés toriques* de Delzant.

Soit Δ un polytope de Delzant. Notons

$$\pi_\Delta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n : e_i \rightarrow v_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

où les v_i sont un des vecteurs primitifs définissant Δ . Cette projection induit une projection :

$$\pi_\Delta : T^N \rightarrow T^n,$$

où $T^j = \mathbb{R}^j / \mathbb{Z}^j$, $j \in \{n, N\}$. On a alors les courtes suites exactes suivantes :

¹Une face est une facette de dimension $n - 1$ et une facette est un sous-polytope de Δ . A noter que certains auteurs utilisent la convention inverse. Mais la nôtre paraît plus appropriée puisqu'étymologiquement une facette est une petite face.

$$0 \longrightarrow K_\Delta \xrightarrow{i} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\pi_\Delta} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0.$$

et

$$0 \longrightarrow T_\Delta \xrightarrow{i} T^N \xrightarrow{\pi_\Delta} T^n \longrightarrow 0. \quad (8.2)$$

où $K_\Delta = \ker \pi_\Delta$ et $T_\Delta = \ker \pi_\Delta$. Notons \mathfrak{t} l'algèbre de Lie du tore T_Δ . La courte suite exacte (A.3) induit des courtes suites exactes au niveau des algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{t}_\Delta \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^N \xrightarrow{(\pi_\Delta)_*} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0. \quad (8.3)$$

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{(\pi_\Delta)^*} (\mathbb{R}^N)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{t}^* \longrightarrow 0. \quad (8.4)$$

Considérons maintenant l'action hamiltonienne standard de T^N sur (\mathbb{C}^N, ω_0) :

$$(e^{i2\pi t_1}, \dots, e^{i2\pi t_N}) \cdot (z_1, \dots, z_N) \rightarrow (e^{i2\pi t_1} z_1, \dots, e^{i2\pi t_N} z_N).$$

L'application moment de cette action est donnée par

$$\mu : X \rightarrow \mathfrak{t}^* : (z_1, \dots, z_N) \rightarrow \pi(|z_1|^2, \dots, |z_N|^2) \quad (8.5)$$

L'injection i induit une action hamiltonienne du sous-tore T_Δ sur \mathbb{C}^N dont l'application moment est donnée par :

$$\mu'_\Delta : X \rightarrow \mathfrak{t}_\Delta^* : (z_1, \dots, z_N) \rightarrow i^* \circ \mu(z_1, \dots, z_N). \quad (8.6)$$

Plus explicitement si I est la représentation de i_* dans une base, l'application moment ci-dessus est donnée par :

$$\mu'_\Delta(z_1, \dots, z_N) = \pi\left(\sum_l I_{|l|} |z_l|^2, \dots, \sum_l I_{|N-k|} |z_l|^2\right).$$

On pose alors $M_\Delta = (\mu'_\Delta)^{-1}(0)$ ². La réduction symplectique X_Δ :

$$X_\Delta = M_\Delta / T_\Delta = \mathbb{C}^N // T_\Delta.$$

possède donc une structure symplectique ω_Δ qui est invariante sous l'action hamiltonienne d'un tore de dimension n T^N / T_Δ et l'image de l'application moment qui lui est

²Il se peut que 0 ne soit pas une valeur régulière auquel cas on prend $z \in \mathbb{C}^N$ régulier et arbitrairement proche de 0.

associée est précisément Δ . Insistons sur le fait que ce sont les λ_i qui déterminent la structure symplectique.

Pour décrire l'espace des disques nous aurons besoin d'une autre description des variétés toriques du point de vue de la géométrie complexe. L'approche qui suit est complémentaire et est mieux adaptée à la géométrie complexe. La combinaison des deux permet alors d'étudier les variétés toriques symplectiques avec les outils de la géométrie complexe. Plus précisément nous verrons que l'on pourra associer à chaque polytope de Delzant un autre objet combinatoire appelé *éventail*, et que cet éventail permet de voir immédiatement que la variété obtenue est une variété complexe. Nous énoncerons ensuite le théorème de Delzant qui assure le lien entre ces différentes notions.

Cône régulier et éventail :

Un sous-ensemble $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ est un **cône convexe régulier** de dimension $k \geq 1$, ou plus simplement un cône régulier, s'il existe k vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ linéairement indépendants appartenant à une sous-base entière de \mathbb{Z}^n tels que :

$$\sigma = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}^+\}.$$

Les vecteurs v_i sont appelés les générateurs du cône σ .

Un cône régulier σ' est appelé une **facette** d'un cône régulier σ , si l'ensemble de ses générateurs forment un sous-ensemble des générateurs de σ . On note alors $\sigma' < \sigma$.

Un ensemble de cônes réguliers de \mathbb{R}^n $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ est appelé **éventail** de dimension n , si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. si $\sigma' < \sigma \in \Sigma$, alors $\sigma' \in \Sigma$,
2. si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, alors $\sigma' \cap \sigma < \sigma$ et $\sigma' \cap \sigma < \sigma'$ (les cônes de l'éventail s'intersectent en des faces).
3. $\mathbb{R}^n = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$. Cette condition est ajoutée pour des questions de compacité.

Le **k-squelette** de Σ (l'ensemble de tous les cônes réguliers de dimension k de Σ) est noté $\Sigma^{(k)}$.

Tore complexe associé à un éventail :

Soit Σ un éventail. Notons $G = \{v_1, \dots, v_N\}$ l'ensemble des générateurs de $\Sigma^{(1)}$. Nous allons lui associer un tore complexe de la manière suivante : On considère la suite exacte

s suivante :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{N-n} \rightarrow \mathbb{Z}^N \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^n \rightarrow 0,$$

où $\pi(e_i) = v_i$. Le noyau de π ,

$$\ker \pi = K_\Sigma = \{(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{Z}^N \mid t_1 v_1 + \dots + t_N v_N = 0\}.$$

En prenant le produit tensoriel avec \mathbb{C} on obtient de la sorte un sous-tore $T_\Sigma = \ker(\pi \otimes \mathbb{C}) - \{0\} \subset (\mathbb{C}^*)^N$.

Action du tore.

L'action du tore T_Σ sur \mathbb{C}^N induite par l'action diagonale de $(\mathbb{C}^*)^N$ sur \mathbb{C}^N :

$$(t_1, \dots, t_N; z_1, \dots, z_N) \rightarrow (t_1 z_1, \dots, t_N z_N),$$

est effective, mais pas libre. Nous allons donc chercher ses orbites singulières. Soit $I \subset \{1, \dots, N\}$. Fixons les notations suivantes :

$$- e_I = \{(z_1, \dots, z_N) \mid j \notin I \Rightarrow z_j = 0\}$$

$$- T_I = \{(t_1, \dots, t_N) \mid j \notin I \Rightarrow t_j = 1\}$$

On note aussi \bar{I} le complémentaire de I .

Proposition 8.1.1. [Aud04] *Les orbites singulières de T_Σ dans \mathbb{C}^N sont constituées des points $z \in e_I$ tels que :*

$$K_\Sigma \cap e_{\bar{I}} \neq 0.$$

Démonstration. Un point z fait partie d'une orbite singulière ssi il existe un sous-ensemble propre $I \subset \{1, \dots, N\}$ tel que :

$$T_\Sigma \cap T_{\bar{I}} \neq 1.$$

En linéarisant cette dernière condition on obtient le résultat désiré. \square

Remarquons alors que le tore T_Σ agit librement sur :

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^N - \bigcup_{I \mid K \cap e_{\bar{I}}} e_I,$$

et que ce dernier (qui est ouvert et dense) est le plus grand sur lequel T_Σ agit librement.

Remarque 8.3. Les points $(z_1, \dots, z_N) \in \mathcal{U}(\Sigma)$ satisfont :

$$z_{i_1} = z_{i_2} = \dots = z_{i_p} = 0 \iff t_{i_1} = \dots = t_{i_p} = 0.$$

Soit $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, N\}$. Posons $v_I = \{v_i \in G \mid i \in I\}$. On note $\langle v_I$ le cône engendré par v_I :

$$\langle v_I = \{a_1 v_{i_1} + \dots + a_p v_{i_p} \mid a_i \in \mathbb{R}^+\}.$$

Une collection de générateurs v_I est dite **primitive** si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. v_I n'engendre pas un cône de dimension $p = \#I$, c.à-d. $\langle v_I \notin \Sigma^{(p)}$,
2. Pour tout sous-ensemble propre $I' \subset I$, $\langle v_{I'}$ est un cône de dimension $k = \#I'$.

On note $\mathcal{P}(\Sigma)$ l'ensemble des collections primitives.

Lemme 8.1.1. L'ensemble

$$\mathcal{U}(\Sigma) = \mathbb{C}^N - \bigcup_{I \mid v_I \in \mathcal{P}(\Sigma)} e_I.$$

Démonstration. La preuve découle de la remarque (8.3) □

Définition 8.4 (Variété torique). Une *variété torique* associée à un éventail de cône régulier Σ est définie par :

$$X_\Sigma = \mathcal{U}(\Sigma)/T_\Sigma$$

Lien entre les deux constructions.

Considérons un polytope de Delzant Δ . Nous allons lui associer un éventail construit de la manière suivante :

Soit Γ une face de Δ , et $p \in \Gamma$. On définit son **cône tangent** :

$$\sigma_\Gamma = \bigcup_{r \geq 0} r(\Delta - p).$$

On considère ensuite son **cône dual** :

$$\sigma_\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \text{ pour tout } y \in \sigma_\Gamma\}.$$

On note alors

$$\Sigma(\Delta) := \{\sigma_\Gamma^*\}_{\Gamma < \Delta}$$

l'éventail associé à Δ .

On énonce enfin le théorème de Delzant³ :

Théorème 8.1.1 (Delzant, [Del88]). *Il existe une correspondance biunivoque entre variété torique symplectique et polytope de Delzant, de plus :*

$$X_\Delta \cong X_{\Sigma(\Delta)} \quad (8.7)$$

La forme symplectique ω_Δ obtenue par réduction symplectique est invariante sous l'action hamiltonienne du tore $T^n = T^N/T_\Delta$. Et son application moment μ_Δ vérifie $\mu_\Delta(\Delta) = \Delta$.

On peut obtenir encore plus d'informations grâce au polytope des moments Δ . En effet, la préimage d'un point de ce tore correspond à une orbite de T^n . En particulier les points intérieurs correspondent à des tores lagrangiens appelés **fibres toriques**, et l'image inverse d'un des sommets correspond aux points fixes de l'action⁴

8.2 Structure des espaces de disques.

Les théorèmes suivants sont tirés de [CO06].

Théorème 8.2.1 (Formule d'indice.). *Soit $(X_\Delta, \omega_\Delta, J_\Delta, \mu_\Delta)$ une variété torique compacte de dimension $2n$ associée à un polytope Δ . Soit $L_\alpha = \mu_\Delta^{-1}(\alpha)$, où $\alpha \in \text{int}\Delta$, une fibre torique. Alors l'indice de Maslov d'un disque holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (X, L_\alpha)$ à bord dans L_α est donnée par :*

$$\mu([u]) = 2 \sum_{j=1}^N \#u(D) \cap V(v_j), \quad (8.8)$$

où $V(v_j)$ est l'hyperplan complexe vérifiant $\pi^{-1}(V(v_j)) = \{z_j = 0\}$, avec $\pi : U(\Sigma(\Delta)) \rightarrow X_\Delta$.

Théorème 8.2.2 (Théorème de classification). *Tout disque holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (X, L_\alpha)$ peut être relevé en un disque holomorphe :*

$$u' : (D, \partial D) \rightarrow (U(\Sigma), \pi^{-1}(L_\alpha))$$

³Voir [Aud04], [Del88] pour les détails.

⁴Les préimages d'un point d'une facette de codimension k correspondent à des tores isotropes de dimension k .

dont les coordonnées $z_1(\mathbf{u}'), \dots, z_N(\mathbf{u}')$ sont données par un produit de Blaschke avec facteur constant :

$$z_j(\mathbf{u}')(z) = c_j \prod_{k=1}^{\mu_j} \frac{z - \alpha_{j,k}}{1 - \bar{\alpha}_{j,k}z}, \text{ pour tout } z \in D,$$

avec $c_j \in \mathbb{C}^*$, $\mu_j \in \mathbb{N}$. En outre l'indice de Maslov de \mathbf{u} , $\mu(\mathbf{u}) = 2 \sum \mu_j$.

Théorème 8.2.3 (Transversalité). [\[\[CO06\]\]](#) Les disques apparaissant dans le théorème précédent sont réguliers, c.-à-d. que la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann en une solution est surjective.

8.2.1 Disques holomorphes d'indice 2

Le théorème de classification (8.2.2) nous apprend que les disques d'indice 2 sont de la forme

$$u_j : (D, \partial D) \rightarrow (X, L_a) : z \longrightarrow (c_1, \dots, c_j z, \dots, c_n) \quad (8.9)$$

où les c_j sont choisis de telle sorte que $u_j(\partial D) \subset L_a$.

Proposition 8.2.1. Soit $L_a \hookrightarrow (X, \omega)$ une fibre torique d'une variété torique. L'aire d'un disque u_j est donnée par :

$$\omega([u_j]) = 2\pi(\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}_j \rangle - \lambda_j). \quad (8.10)$$

où λ_j définit la face du polyèdre des moments : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j$ correspondant à l'hyperplan $z_j = 0$.

La proposition précédente ainsi que le théorème de classification permettent de calculer l'aire de n'importe quel disque holomorphe à bord dans une fibre torique. On peut aussi montrer que les u_j représente les générateurs β_j de $\pi_2(X_\Delta, L_a)$ ⁵, de plus

$$\partial \beta_j = v_j^1 e_1 + v_j^2 e_2 + \dots + v_j^n e_n, \quad (8.11)$$

où $e_j = [\gamma_j] \in H_1(L_a, \mathbb{Z}_2)$ avec :

$$\gamma_j : S^1 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n : e^{i\theta} \rightarrow (c_1, \dots, c_j e^{i\theta}, \dots, c_n) \quad (8.12)$$

Corollaire 8.2.3.1. Soit $u : (D, \partial D) \rightarrow (X, L_a)$ un disque holomorphe dont le relevé $u' : (D, \partial D) \rightarrow (U(\Sigma), \pi^{-1}(L_a))$ a pour coordonnées homogènes :

$$z_j(u')(z) = c_j \prod_{k=1}^{\mu_j} \frac{z - \alpha_{j,k}}{1 - \bar{\alpha}_{j,k}z},$$

⁵cf. [\[Aud04\]](#), [\[CO06\]](#).

Alors

$$\omega([u]) = 2\pi \sum_{j=1}^N \mu_j (\langle \alpha, v_j \rangle - \lambda_j) \quad (8.13)$$

8.3 Transversalité.

Il est possible de définir le complexe des perles pour les fibres toriques de variétés toriques de Fano.

Définition 8.5. Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit J une structure presque complexe compatible avec ω . Le triple (M, ω, J) est dite de **Fano** si pour tout $0 \neq A \in H_2(M)$ pouvant être représenté par une courbe J -holomorphe, $\langle c_1(J), [A] \rangle > 0$. Notons que puisque l'espace $\mathcal{J}(M, \omega)$ est contractible, $c_1(J)$ ne dépend pas de J .

Pour une variété torique on a le théorème suivant :

Théorème 8.3.1. Soit $(X_\Delta, \omega_\Delta, J_\Delta)$ une variété torique associée au polytope de Delzant Δ . Chaque face de Δ est l'enveloppe convexe d'une base de \mathbb{Z}^n ssi X_Δ est de Fano.

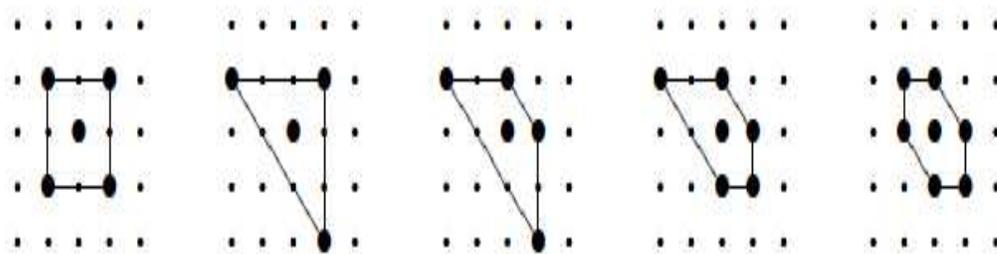


FIG. 8.1 – Ci-dessus les 5 polytopes correspondant aux cinq variétés toriques de Fano de dimension réelle 4. De gauche à droite : $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^2$, éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en un point fixe de l'action hamiltonienne, éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en deux points fixes et enfin éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en trois points fixes.

Pour définir le complexe des perles, on devra se restreindre aux structures presque complexes proches de la structure complexe standard de la variété torique. Une fois encore le théorème de compacité de Gromov jouera un rôle essentiel dans les preuves des théorèmes qui suivent.

Lemme 8.3.1. Soit $(X_\Delta, \omega_\Delta, J_\Delta, \mu_\Delta)$ une variété torique de Fano compacte associée à Δ . Soit $L \hookrightarrow (X_\Delta, \omega_\Delta)$ une fibre torique. Alors pour toute constante positive K , il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K) \subset \mathcal{J}(X_\Delta, \omega_\Delta)$ de J_Δ , tel que pour tout $J \in \mathcal{N}(J_\Delta; K)$: si $u : (D, \partial D) \rightarrow (X, L)$ est J -holomorphe :

$$\omega([u]) \leq K \implies \mu([u]) \geq 2.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe K tel que pour tout voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$, il existe une structure presque complexe compatible $J \in \mathcal{N}(J_\Delta, K)$ et un disque J -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (X, L)$ ayant une aire symplectique plus petite que K et un indice de Maslov inférieur à 2. On peut alors trouver une suite de s.p.c.c. J_ν convergeant vers J_Δ et une suite u_ν de disques J_ν -holomorphes à bord dans L , dont l'aire est uniformément bornée par K . Par conséquent il existe une sous-suite u_ν convergeant vers une application stable u constituée de disques J_Δ holomorphes à bord dans L dont l'indice total est inférieur à 2. Remarquons qu'il se pourrait qu'à la limite un bouillement de sphère pseudo-holomorphe de classe de Chern négative se produise, par conséquent l'application stable obtenue pourrait avoir un indice de Maslov négatif. Cependant la condition de Fano nous garantit que ceci n'arrive pas, c.-à-d. que puisque la classe de Chern de toute sphère pseudo-holomorphe non-constante est strictement positive, l'indice de Maslov de u est positif et donc plus grand ou égal à deux (car les tores sont orientables). On a donc bien une contradiction. □

Remarque 8.6. Le lemme précédent nous assure que dans le cas des fibres toriques d'une variété torique de Fano, le disque simple v extrait du disque u dans le lemme (5.1.2) a un indice de Maslov $\mu([v])$ plus petit ou égal à $\mu([u]) - 2$.

Théorème 8.3.2. Soit $L \hookrightarrow (X_\Delta, \omega_\Delta)$ une fibre torique d'une variété torique de Fano. Pour toute constante $K > 0$ il existe un voisinage C^1 , $\mathcal{N}(J_\Delta; K)$ de \mathcal{J}_Δ et un ensemble générique de structures presque complexes $\mathcal{J}_{\text{reg}}(J_\Delta) \subset \mathcal{N}(J_\Delta; K)$ de la structure complexe standard J_Δ pour lequel : pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(J_\Delta)$, pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$ et pour tout \mathbf{A} non-nul tel que $\omega(\mathbf{A}) < K$, $\mathcal{P}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J)$, est soit vide, soit une variété de dimension :

$$\dim \mathcal{P}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J) = |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) + k - 1.$$

Par conséquent $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J)$ hérite lui aussi d'une structure de variété différentiable de dimension :

$$|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1.$$

En outre si $\dim \mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J) \leq 1$ alors $\mathcal{M}^*(x, y, \mathbf{A}; L, J) = \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; L, J)$.

Démonstration. La preuve est en tout point similaire à la preuve du théorème (5.1.1). Comme pour ce dernier on ne prouve que le dernier point. On distingue aussi les cas $\dim L \geq 3$ et $\dim L \leq 2$.

1. $\dim L \geq 3$: Rappelons que la preuve se fait par induction sur $\mu(\mathbf{A})$. Notons $d(x, y, \mathbf{A}) = |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) - 1$. Premièrement si $\mu(\mathbf{A}) = 2$ il ne peut y avoir qu'un seul disque, celui-ci est donc simple et absolument distinct. Supposons que la propriété soit vérifiée pour tout espace $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}; L, J)$ tel que $d(x, y, \mathbf{A}) \leq 1$ et $\mu(\mathbf{A}) \leq 2k$ et montrons qu'elle est vraie encore vrai pour $\mu(\mathbf{A}) = 2(k + 1)$. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l) \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, J)$ avec $d(x, y, \mathbf{A}) \leq 1$ et $\mu(\mathbf{A}) = 2(k + 1)$. Remarquons d'abord que $u_i(-1) \neq u_i(1)$ pour tout $1 \leq i \leq l$. S'il existait un $j \in \{1, \dots, l\}$ tel que $u_j(1) = u_j(-1)$, on pourrait, en omettant le disque u_j , obtenir un élément \mathbf{u} appartenant à l'espace de module $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}'; L, J)$, avec $\mathbf{A}' = (A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_l)$, pour lequel la propriété est vraie. Mais $\mu(\mathbf{A}') \leq \mu(\mathbf{A}) - 2 \leq -1$, par conséquent cet espace est vide.

Simplicité des disques : Supposons qu'il existe $1 \leq i \leq l$ tel que u_i n'est pas simple. En appliquant le lemme (5.1.2) ainsi que la remarque suivant le lemme (8.3.1) à u_i , on obtient un disque u'_i tel que $u_j(\pm 1) = u'_i(\pm 1)$ et $\mu(u'_i) \leq \mu(u_i) - 2$. Par conséquent, en remplaçant u_i par u'_i dans \mathbf{u} on obtient un élément \mathbf{u}' appartenant à un espace de modules $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}', J)$ pour lequel la transversalité est vérifiée et de dimension négative. Cet espace est donc vide.

Les disques sont absolument distincts : On peut donc supposer que tout les disques apparaissant dans un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, J)$ sont simples. Supposons une fois de plus par l'absurde qu'ils ne soient pas absolument distincts. Dans ce cas il existe i tel que $u_i(D) \subset \cup_{k \neq i} u_k(D)$. Il s'ensuit (par le lemme (5.1.1)) qu'il existe $j \in \{1, \dots, l\}$ tel que :

- $u_i(D) \subset u_j(D)$ ou $u_i(\partial D) \subset u_j(\partial D)$, ou
- $u_j(D) \subset u_i(D)$ ou $u_j(\partial D) \subset u_i(\partial D)$.

Supposons sans perte de généralité que $u_i(D) \subset u_j(D)$. Premièrement, si $i < j$, on omet les disques u_k pour $i \leq k < j$ et on obtient un élément \mathbf{u}' . Il existe un point $p \in \partial D$ tel que $u_i(-1) = u_j(p)$. Si $p = 1$ on peut aussi omettre u_j obtenant ainsi un élément \mathbf{u}'' appartenant à un espace de modules $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}''; L, J)$ de dimension négative. Si $p \neq 1$,

on peut remplacer u_j par $u_j \circ \phi$ où $\phi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ vérifie $\phi(p) = -1$ et $\phi(1) = 1$. Une fois encore l'élément \mathbf{u}' appartient à un espace de modules $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}'; L, J)$ de dimension négative.

Ensuite si $i > j$, on obtient un nouvel élément \mathbf{u}' en omettant les disques u_k pour $j < k \leq i$. Il existe alors $p \in \partial D$ tel que $u_j(p) = u_i(1)$. Si $p = -1$, on omet u_j et on obtient un élément \mathbf{u}'' appartenant à un espace de modules $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}''; L, J)$ pour lequel la transversalité est vérifiée et dont la dimension est négative. Si $p \neq -1$, un raisonnement en tout point similaire à celui donné pour le cas $i < j$ fournit le résultat.

2. $\dim L \leq 2$: La preuve est exactement la même que dans le cas presque monotone. Le lecteur est donc renvoyé à la preuve du théorème (5.1.1). \square

8.4 Opérateur de bord

Soit L_a une fibre torique d'une variété torique de Fano. Notons $H_2^D(M, L_a)$ l'image par le morphisme d'Hurewicz de $\pi_2(M, L_a)$. Comme précédemment, notons β_j les générateurs de $H_2^D(M, L_a)$. On pose aussi $\alpha_j = 2\pi(\langle a, v_j \rangle - \lambda_j) = \omega(\beta_j)$. Nous choisissons comme anneau de base, l'anneau de coefficients de Novikov :

$$\Lambda_\omega = \left\{ \sum_{A \in H_2^D(M, L)} \lambda_A q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} \mid \forall c \in \mathbb{R}, \#\{\lambda_A \neq 0 \mid \omega(A) < c\} < \infty \right\} \quad (8.14)$$

avec $\bar{\mu}(A) = \mu(A)/2$, et $|t| = -2$. Rappelons que, puisque \mathbb{Z}_2 est un corps, Λ_ω est aussi un corps. Le module associé à notre complexe des perles est l'espace vectoriel gradué $C_*(f, g, J) = C_*(f, g) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda_\omega$. On peut décomposer $C_*(f, g, J)$ via le degré $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k(f, g, J)$ où

$$C_k(f, g, J) = \bigoplus_{p+q=k} C_q(f, g) \otimes \Lambda_\omega^q.$$

Où Λ_ω^q est constitué des éléments de degré q .

L'opérateur de bord est donné par :

$$\begin{aligned} \delta : C_k(L_a, f, \rho, J) &\longrightarrow C_{k-1}(L_a, f, \rho, J) \\ x &\longrightarrow \delta x = \sum_{y, A \mid \omega(A) < K} n_y^x(\mathbf{A}) q^{\omega(\sum A_i)} t^{\bar{\mu}(\sum A_i)} y \end{aligned} \quad (8.15)$$

où :

$$n_y^x(\mathbf{A}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, J) & \text{si } |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

avec $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in H_2^D(X_\Delta, L_a)^k$. Les nombres $n_y^x(\mathbf{A})$ étant bien définis, l'opérateur de bord δ^K l'est lui aussi. L'opérateur de bord a la propriété suivante :

Proposition 8.4.1. *Pour tout $K > \sup\{\alpha_j\} \frac{n+2}{2}$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$ de J_Δ et un sous-ensemble dense $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_\Delta, K)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$:*

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Démonstration. Fixons $K > \sup\{\alpha_j\} \frac{n+2}{2}$. Prouvons d'abord qu'il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$, tel que pour tout $u \in \mathcal{M}(A, L_a, J)$, avec $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ et $\omega(A) < K$, $[u] = \sum_j m_j \beta_j$ avec $m_j \geq 0$ pour tout j . Supposons le contraire. Pour tout voisinage il existe un J et une courbe J -holomorphe u , avec $[u] = \sum_j m_j \beta_j$, avec au moins un m_j négatif. Il existe donc une suite J_ν convergeant vers J_Δ , et une suite u_ν d'aire uniformément bornée par K possédant une sous-suite convergeante. Chaque élément de cette sous-suite vérifie : $[u_\nu] = \sum m_j \beta_j$ avec au moins un des m_j négatif. La courbe limite est une courbe constituée de disques J_Δ -holomorphes. Or, le théorème de classification (8.2.2) nous apprend qu'un tel élément représente une classe $B = \sum_j n_j \beta_j$ avec tous les n_j positifs ou nuls. Ceci constitue une contradiction.

Prouvons maintenant que $\delta \circ \delta = 0$. Ecrivons :

$$\delta \circ \delta x = \sum_{y, \mathbf{A}} \sum_{z, \mathbf{B}} n_y^x(\mathbf{A}) n_z^y(\mathbf{B}) q^{\omega(\mathbf{A}+\mathbf{B})} t^{\bar{\mu}(\mathbf{A}+\mathbf{B})} z,$$

avec $\omega(A), \omega(B) < K$. Nous allons interpréter les nombres $n_y^x(\mathbf{A}) n_z^y(\mathbf{B})$, comme le compte modulo 2 du bord des espaces de modules $\bar{\mathcal{M}}(x, y, \mathbf{A} + \mathbf{B}, L, J)$ de dimension 1. Il faudra bien sûr s'assurer que $\omega(\mathbf{A} + \mathbf{B}) < K$.

Notons $\alpha = \sup_j \{\alpha_j\}$. On sait que pour toute classe $C \in H_2^D(M, L)$ représentant une courbe J -holomorphe (pour un certain $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ et d'aire symplectique inférieure à K ,

$$\omega(C) = \sum_j m_j \alpha_j \leq \sum_j m_j \alpha = \frac{1}{2} \alpha \mu(C).$$

En effet, on vient de montrer que pour une telle classe les m_j sont tous positifs. Maintenant, les formules d'indice fournissent :

$$|x| - |z| + \mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - 1 = 1.$$

En particulier $\mu(A + B) \leq n + 2$. Il s'ensuit que

$$\omega(A + B) \leq \frac{1}{2}\mu(A + B)\alpha \leq \frac{N + 2}{2}\alpha < K.$$

Les espaces $\mathcal{M}(x, z, \mathbf{C}, L, J)$ sont par conséquent des variétés de dimension 1 qui possèdent une compactification dès que $\omega(C) < K$. Le bord de ces espaces est de la forme :

$$\partial\bar{\mathcal{M}}(x, z, \mathbf{A} + \mathbf{B}, L, J) = \bigcup_{y, \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}} \mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, L, J) \times \mathcal{M}(y, z, \mathbf{B}, L, J).$$

Or $n_y^x(\mathbf{A})n_z^y(\mathbf{B})$ fournit précisément le compte (modulo 2) des éléments de ces espaces. \square

On peut donc définir

$$QH(L_a; f, g, J, K) = \ker \delta / \text{im} \delta.$$

8.5 Invariance.

Dans ce qui suit nous fixons K . Nous allons montrer que $QH(L, K)$ ne dépend pas du choix générique de triple (f, g, J) . Comme précédemment, étant donné deux triples génériques (pour lesquels $QH(L, K)$ est défini) : $\mathcal{T}_0 = (f_0, g_0, J_0)$ et $\mathcal{T}_1 = (f_1, g_1, J_1)$, nous allons construire un morphisme :

$$\Phi : C(L; \mathcal{T}_0) \rightarrow C(L; \mathcal{T}_1) \tag{8.16}$$

induisant un isomorphisme en homologie. Ce morphisme est associé à un choix (générique) d'homotopie $\mathcal{H} = (F, G, J)$ joignant \mathcal{T}_0 à \mathcal{T}_1 . Ce morphisme est canonique et ne dépend donc pas du choix de l'homotopie régulière \mathcal{H} joignant \mathcal{T}_0 à \mathcal{T}_1 .

Construction de $\Phi_{\mathcal{H}}$.

On rappelle qu'ici (F, G) est un cobordisme de Morse⁶ joignant (f_0, g_0) à (f_1, g_1) , et que J est une homotopie de structures presque complexes compatibles joignant J_0 à J_1 .

On choisit l'homotopie J dans $\mathcal{N}(J_{\Delta}, K)$. On définit l'espace de module $\mathcal{P}_{\lambda}(x_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ dont les éléments sont des couples (λ, \mathbf{u}) où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ avec $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M \times \{\lambda_i\}, L \times \{\lambda_i\})$ J_{λ_i} -holomorphes. et ayant les propriétés suivantes :

- $[\mathbf{u}] = \mathbf{A}$,

⁶cfr définition (6.4)

- $u_1(-1) \in W_{x_0}^u$ et $u_{k+1}(+1) \in W_{y_1}^s$, avec $x_0 \in \text{Crit}(f_0)$ et $y_1 \in \text{Crit}(f_1)$,
- il existe $t_j \in (0, \infty)$ tels que $\phi_{t_j}^F(u_i(1)) = u_{i+1}(-1)$, où ϕ_t^F est le flot du gradient de F .

Une fois encore on note $\mathcal{M}_\lambda(x_0, y_1, \mathbf{A}, L, \bar{\mathbf{J}})$, le quotient de $\mathcal{P}_\lambda(x_0, y_1, \mathbf{A}, L, \mathbf{J})$ par son groupe de reparamétrisation, l'étoile désignant les éléments simples et absolument distincts. Si $\mathcal{N}(J_\Delta) \subset \mathcal{J}(X_\Delta, \omega_\Delta)$ est un voisinage C^1 de J_Δ on note :

$$\mathcal{N}_\lambda(J_\Delta) = \{\mathbf{J} : J_\lambda \in \mathcal{N}(J_\Delta; K) \forall \lambda \in [0, 1]\}.$$

Théorème 8.5.1. *Pour tout K , il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta; K)$ de J_Δ , et un ensemble générique d'homotopie $\mathcal{H} = (F, G, \mathbf{J})$ avec $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}_\lambda(J_\Delta; K)$, tel que : pour tout \mathbf{A} tel que $\omega(\mathbf{A}) < K$, l'espace $\mathcal{M}_\lambda^*(x_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H})$ possède une structure de variété différentiable de dimension :*

$$d(x_0, y_0, \mathbf{A}) = |x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(\mathbf{A}).$$

En outre si $d(x_0, y_1, \mathbf{A}) \leq 1$:

$$\mathcal{M}_\lambda^*(x_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) = \mathcal{M}_\lambda(x_0, y_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}).$$

Bien sûr en dimension 0 ces espaces sont compacts et consistent donc en une collection finie de points.

Démonstration. Répéter la preuve du théorème (8.3.2). □

On définit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{H}} : C_*(L, \mathcal{T}_0) &\longrightarrow C_*(L, \mathcal{T}_1) \\ x_0 &\longrightarrow \sum_{x_1, \mathbf{A} | \omega(\mathbf{A}) < K} n_{x_1}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) q^{\omega(\mathbf{A})} t^{\bar{\mu}(\mathbf{A})} x_1 \end{aligned} \quad (8.17)$$

où

$$n_{x_1}^{x_0}(\mathbf{A}, \mathcal{H}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}_\lambda(x_0, x_1, \mathbf{A}, \mathcal{H}) & \text{si } |x_0| - |x_1| + \mu(\mathbf{A}) = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (8.18)$$

Proposition 8.5.1. (Comparaison) *Pour tout $K > \sup\{\alpha_j\} \frac{n+2}{2}$, il existe $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$ tel que pour toute homotopie régulière \mathbf{J} dans $\mathcal{N}_\lambda(J_\Delta, K)$*

$$\delta \circ \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{\mathcal{H}} \circ \delta = 0. \quad (8.19)$$

Démonstration. Etant donné que le type d'arguments pour ce genre d'identité a été répété de nombreuses fois dans cet exposé, on se contente de vérifier la propriété de recollement. Pour une analyse détaillée voir la preuve de la proposition (6.1.4) du chapitre précédent. Supposons qu'on ait une trajectoire perlée $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(x_0, y_0, \mathbf{A}, J)$ ainsi qu'un élément $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_\lambda(y_0, y_1, \mathbf{B}, \mathcal{H})$ se recollant en un élément $\mathbf{w} \in \mathcal{M}_\lambda(x_0, y_1, \mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathcal{H})$. Ici on suppose que $|x_0| - |y_0| + \mu(\mathbf{A}) - 1 = 0$ et $|y_0| - |y_1| + \mu(\mathbf{B}) = 0$. On doit vérifier que

$$\omega(\mathbf{A}) < K \text{ et } \omega(\mathbf{B}) < K \implies \omega(\mathbf{A} + \mathbf{B}) < K.$$

Notons d'abord que $\mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq (n + 1)$ et $\omega(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sum_i m_i \alpha_i$ avec $m_i \geq 0$. Reprenant les arguments de la preuve de (8.4.1), on a $\omega(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \frac{n+1}{2} \alpha < K$. \square

8.6 Canonicité du morphisme de comparaison.

Le morphisme $\Phi_{\mathcal{H}}$ induit un isomorphisme en homologie qui est canonique, c.à-d. il ne dépend ni de l'homotopie régulière de structure presque complexe ni du cobordisme de Morse.

Soient $\mathcal{H}_\alpha = (F_\alpha, G_\alpha, J_\alpha)$ et $\mathcal{H}_\beta = (F_\beta, G_\beta, J_\beta)$ deux triples admissibles. Nous allons montrer qu'il existe un morphisme $\zeta_{\beta\alpha} : C_*(f_0, g_0, J_0) \rightarrow C_{*+1}(f_1, g_1, J_1)$ tel que :

$$\Phi_\alpha + \Phi_\beta = \delta \circ \zeta_{\beta\alpha} + \zeta_{\beta\alpha} \circ \delta \quad (8.20)$$

On rappelle brièvement la construction de ζ . Sans perte de généralité, $f_0 > f_1$. Nous considérons une fonction $\bar{F} : L \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une métrique $\bar{G} \in \mathfrak{Met}(L \times [0, 1] \times [0, 1])$ et une famille à deux paramètres de structures presque complexes compatibles \bar{J} ayant les propriétés suivantes :

- $\bar{F}(q, 0, \tau)$ respectivement $\bar{F}(q, 1, \tau)$ sont des homotopies triviales pour f respectivement f' .
- $\bar{F}(q, \lambda, 0) = F_\alpha(q, \lambda) + c$, $\bar{F}(q, \lambda, 1) = F_\beta(q, \lambda)$ avec $c \in \mathbb{R}$. La constante c est déterminée en fonction des constantes positives choisies dans la construction des homotopies triviales respectives de f et f' . On peut choisir ces constantes comme étant égales à une constante c .
- $\text{Crit}_k(\bar{F}) = \text{Crit}_{k-2}(f_0) \times \{(0, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_0) \times \{(1, 0)\} \cup \text{Crit}_{k_1}(f_1) \times \{(0, 1)\} \cup \text{Crit}_{k-2}(f_1) \times \{(1, 1)\}$
- (\bar{F}, \bar{G}) est Morse-Smale et $\bar{G}|_{L \times \{0\} \times [0, 1]} = G_\alpha$ et $\bar{G}|_{L \times \{1\} \times [0, 1]} = G_\beta$

- $\bar{\mathbf{J}}(q, \lambda, 0) = \mathbf{J}_\alpha(q, \lambda)$ et $\bar{\mathbf{J}}(q, \lambda, 1) = \mathbf{J}_\beta(q, \lambda)$.

A partir de ces données, on définit des espaces de modules similaires à ceux apparaissant dans la construction des morphismes de comparaisons mais avec un paramètre de plus. Plus précisément, pour tout $x_0 \in \text{Crit}_k(f) \times \{0, 0\}$, $y_1 \in \text{Crit}_{k+1}(f_1) \times \{(1, 1)\}$ et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in (\pi_2(M, L))^k$, on définit $\mathcal{P}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ comme étant l'espace des triples $(\lambda, \tau, \mathbf{u})$ avec $(\lambda, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ avec $u_i : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ et $[\mathbf{u}] = \mathbf{A}$,
- (ii) pour chaque u_i il existe (λ_i, τ_i) tel que u_i est J_{λ_i, τ_i} -holomorphes.
- (iii) $u_1(-1) \in W(x_0)$
- (iv) il existe $t_i \in (0, \infty)$ tel que $\Phi_{t_i}^{\bar{F}}(u_i(1)) = u_{i+1}(-1)$. Où $\Phi^{\bar{F}}$ est le flot du gradient de \bar{F} .

Comme précédemment, note $\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ le quotient de $\mathcal{P}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ par son groupe de reparamétrisation. On note

$$\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A}) = \bigcup_{\substack{\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_k) \\ \sum A_i = \mathbf{A} \in \pi_2(M, L)}} \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A}).$$

On décore évidemment nos \mathcal{M} et nos \mathcal{P} d'une étoile pour signifier qu'on se restreint aux chaînes de disques simples et absolument distincts. Enfin on pose pour tout voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta; K)$ on note :

$$\mathcal{N}_{\lambda, \tau} = \{\bar{\mathbf{J}} | J_{\lambda, \tau} \in \mathcal{N}(J_\Delta; K), \forall (\lambda, \tau)\}.$$

Proposition 8.6.1. *Pour tout $K > \frac{\alpha}{2}(n+2)$ il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$ et ensemble générique de famille à deux paramètres de s.p.c.c $\hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}_{\lambda, \tau}(J_\Delta; K)$, tel que pour tout $\mathbf{J} \in \hat{\mathcal{J}}_{\text{reg}}$ et pour tout $x_0 \in \text{Crit}(f_0) \times \{(0, 0)\}$, pour tout $y_1 \in \text{Crit}(f_1) \times \{(1, 1)\}$ et pour tout $\mathbf{A} \in \pi_2(M, L)$ tel que $\omega(\mathbf{A}) < K$, l'espace $\mathcal{M}_{\beta\alpha}^*(x_0, y_1, \mathbf{A})$ est une variété différentiable de dimension*

$$|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(\mathbf{A}) + 1.$$

De plus si $|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(\mathbf{A}) \leq 0$. Alors

$$\mathcal{M}_{\beta\alpha}^*(x_0, y_1, \mathbf{A}) = \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A}).$$

Enfin si $|x_0|_{f_0} - |y_1|_{f_1} + \mu(\mathbf{A}) + 1 = 0$, $\mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, \mathbf{A})$ est compact.

Démonstration. Encore une fois cette preuve est la même que dans le cas presque monotone. □

On pose :

$$\xi_{\beta\alpha}(x_0) = \sum_{\substack{y, A \\ \omega(A) < K}} n_{y_1}^{x_0}(A, \beta\alpha) q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} y_1 \quad (8.21)$$

où

$$n_y^x(A, \beta\alpha) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}_{\beta\alpha}(x_0, y_1, A) & \text{si } |x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) + 1 = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Proposition 8.6.2. (Canonicité) *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème (8.4.1), il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0, K, \epsilon)$ tel que le morphisme $\Phi_{\mathcal{H}} : \text{QH}(L, \mathcal{T}_0; K) \rightarrow \text{QH}(L, \mathcal{T}_1; K)$ est canonique (ne dépend pas de \mathcal{H}).*

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition (6.1.6) en utilisant les arguments de la preuve de la proposition (8.5.1) pour le recollement. \square

8.7 Le produit quantique.

Rappelons brièvement le formalisme combinatoire introduit au chapitre précédent. Les espaces de modules que nous considérons sont modélés sur des *arbres coloriés avec points marqués* $(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}), \Theta, \mathfrak{S})$ avec $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Pour le produit quantique on considère des arbres dont le symbole est du type $(x_1, x_2 : y)$ (de longueur 3) le sélecteur de points marqués \mathfrak{S} vérifie les propriétés suivantes :

- si s est un sommet de valence 2 et a est l'arête entrante et e l'arête sortante de s , alors $q_-(e) = -1$, resp. $q_+(a) = 1$.
- si s est un sommet de valence 3, notons a_1, a_2 ses arêtes entrantes dont l'ordre correspond à l'ordre horlogé et e son arête sortante. Alors $q_+(e) = 1$ et $q_-(a_k) = e^{-2i \frac{k\pi}{3}}$, $k = 1, 2$.

La règle de sortie Θ vérifie quant à elle :

- $\Theta(f_i) = f_i$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
- $\Theta(f_1, f_2) = f_3$. Remarquer qu'on permet $f_2 = f_3$ ou $f_1 = f_3$.

On note les *espaces de perles* associés à ce type d'arbre $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J)$ où encore $\mathcal{M}(x, y, z; g, J)$ lorsqu'on veut insister sur le symbole de \mathcal{T} . On a alors le résultat suivant :

Théorème 8.7.1. Soit $(X_\Delta, \omega_\Delta, J_\Delta)$ une variété torique Fano associée à Δ . Pour tout K , il existe un voisinage $\mathcal{N}(J_\Delta, K)$ de J_Δ , et un ensemble dense de s.p.c.c $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J_\Delta, K)$ tel que pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ et pour tout arbre colorié avec points marqués \mathcal{T} de symbole $(x, y : z)$, l'espace $\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J)$ est soit vide, soit une variété de dimension :

$$|x| + |y| - |z| + \mu(\mathcal{T}) - n.$$

En outre en dimension plus petite ou égale à 1 :

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J) = \mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J).$$

Enfin en dimension 0, $\mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J)$ est compact et consiste en une collection finie de points.

Démonstration. La preuve est la même que celle du théorème (8.3.2). \square

On peut donc maintenant définir le produit quantique :

$$\begin{aligned} * : C_*(f_1, J) \otimes C_*(f_2, J) &\rightarrow C_*(f_3, J) : \\ x \otimes y &\rightarrow \sum_{\substack{z, \mathcal{T} | \omega(\mathcal{T}) < K \\ \text{symb}(\mathcal{T}) = (x, y : z)}} n_z^{x, y}(\mathcal{T}) q^{\omega(\mathcal{T})} t^{\mu(\mathcal{T})} z. \end{aligned} \quad (8.22)$$

où :

$$n_z^{x, y}(\mathcal{T}) = \begin{cases} \#_2 \mathcal{M}(\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathfrak{F}); g, J) & \text{si } |x| + |y| - |z| + \mu(\mathcal{T}) - n = 0, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (8.23)$$

Ce produit vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 8.7.2. Soit L une fibre torique d'une variété torique de Fano (X, ω, J) . Posons comme précédemment $\alpha = \sup_j \alpha_j$. Pour tout $K > \alpha(3n)/2$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(J, K)$ de s.p.c.c. et un sous-ensemble dense $\mathcal{J}_{\text{reg}} \subset \mathcal{N}(J, K)$ tel que pour tout $J' \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$ le produit quantique défini en (8.22) et (8.23) vérifie :

1. **Morphisme de chaîne et invariance :** le produit $*$ satisfait la règle de Leibniz :

$$\delta(x * y) = \delta(x) * y + x * \delta y. \quad (8.24)$$

De plus il ne dépend pas des choix auxiliaires génériques faits lors de sa construction.

2. **Associativité** : Il existe une homotopie de chaîne $\Xi : C_*(f_1, J') \otimes C_*(f_2, J') \otimes C_*(f_3, J') \rightarrow C_*(f_3, J')$ vérifiant :

$$\Xi \circ \delta(a \otimes b \otimes c) + \delta \circ \Xi(a \otimes b \otimes c) = (a * b) * c + a * (b * c). \quad (8.25)$$

3. **Neutre** : Il existe un élément $\ell \in \text{QH}(L, \Lambda_\omega)$ tel que pour tout $a \in \text{QH}(L, \Lambda_\omega)$:

$$\ell * b = b * \ell = b.$$

Démonstration. Hormis les constantes, les preuves des faits énoncés ci dessus sont les mêmes que dans le cas presque monotone. □

8.8 Outils de calculs.

Dans cette section nous allons retrouver les résultats de Cho et Oh [CO06] et de [Cho08] concernant les critères d'annulation et de non-annulation de $\text{QH}(L)$. Certaines preuves sont très similaires, d'autres sont nouvelles et ont l'avantage de ne pas dépendre de la structure torique de la variété. Enfin certaines preuves sont des adaptations de certains arguments tirés de [BC07] et [BC09].

Nous allons nous servir de la structure des variétés toriques pour établir la dichotomie *large vs étroite*. Nous montrerons aussi qu'une fibre torique déplaçable a nécessairement une homologie quantique relative nulle. Ces résultats ont déjà des résultats obtenus par Cho et Oh dans [CO06]. Notons $C_*(f, J) = C_*(f, g) \otimes \Lambda_\omega$ le complexe des perles associés à une fibre torique L_α .

Lemme 8.8.1. *Soit $L_\alpha \hookrightarrow (X, \omega, J)$ une fibre torique d'une variété torique Fano. Soit K une constante suffisamment grande de telle sorte que $(\text{QH}(L_\alpha, \Lambda_\omega), *)$ soit bien définie. Notons que l'opérateur de bord du complexe de chaînes δ se décompose comme :*

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \cdots + \delta_{\frac{[n+1]}{2}} t^{\frac{[n+1]}{2}}.$$

Alors $\delta_k \equiv 0$ pour tout $k \geq 2$.

Démonstration. On montre le résultat pour $k = 2$. Les autres cas se traitent de manière similaire. Supposons que f est une fonction de Morse parfaite. Il s'ensuit que $\delta_0 \equiv \partial_{\text{Morse}} \equiv 0$. Rappelons que puisque $L_\alpha \cong T^n$, $H_*(L_\alpha, \mathbb{Z}_2)$ est engendré multiplicativement via le produit d'intersection par $H_{n-1}(L_\alpha, \mathbb{Z}_2)$. Puisque f est une fonction de Morse, chaque point

critique représente un cycle qui est un générateur de $H_*(L, \mathbb{Z}_2)$. Nous allons montrer que δ_2 est nul sur $H_{n-1}(L, \mathbb{Z}_2)$ et qu'il satisfait la règle de Leibniz.

Notons $y_i \in \text{Crit}_{n-1}(f)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ les générateurs de $H_{n-1}(L_a, \mathbb{Z}_2)$. Pour des raisons de dimensions $\delta_2 y_i = 0$ pour tout i . Nous allons montrer que $\delta_2(y_i \cap y_j) = \delta_2 y_i \cap y_j + y_i \cap \delta_2 y_j = 0$. Remarquons d'abord qu'en général :

$$\begin{aligned} \delta_2(x \cdot y) &= \delta_2 x \cdot y + x \cdot \delta_2 y \\ &\quad + \delta_1 x *_1 y + x *_1 \delta_1 y + \delta_1(x *_1 y) \\ &\quad + \delta_0 x *_2 y + x *_2 \delta_0 y + \delta_0(x *_2 y). \end{aligned}$$

Dans notre situation $\delta_0 \equiv 0$. De plus soit $\delta_1 y_i = 0$ soit $\delta_1 y_i$ est proportionnel à $\ell = \max(f)$. Par conséquent, pour des raisons dimensionnelles, $\delta_1(y_i) *_1 y_j$, $\delta_1(y_i *_1 y_j)$ et $y_i *_1 \delta_1(y_j)$ sont nuls. Enfin $\delta_2 y_i = 0$ pour tout i . Donc on a bien que $\delta_2 \equiv 0$. L'annulation de δ_2 permet d'appliquer le même argument pour $k > 2$. Ce dernier fonctionne même encore mieux dans ces cas. \square

Remarque 8.7. Dans leur article Cho et Oh [CO06], montre le même résultat pour la différentielle de l'homologie de Floer. Cependant leur preuve fait intervenir de manière explicite la structure des espaces de disques. Il montre que l'application d'évaluation apparaissant dans la formule de δ_k fait trop descendre la dimension. Il s'ensuit que la dimension réelle est plus petite que la dimension virtuelle. Par conséquent $\delta_k \equiv 0$ pour $k \geq 2$.

En réalité ce lemme ne dépend pas de la structure torique de la variété ambiante. Une lecture attentive de la preuve précédente permet de généraliser le résultat :

Proposition 8.8.1. Soit $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne d'une variété de Fano. Supposons que :

1. L'indice de Maslov de tout disque pseudo-holomorphe est plus grand ou égal à 2.
2. la cohomologie de L soit engendré multiplicativement par $H^1(L, \mathbb{R})$ et L admet une fonction de Morse parfaite⁷

De plus si $N_L > 2$ alors $\delta_1 \equiv 0$ et $\text{QH}(L, \Lambda_\omega) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2)$.

⁷Cette hypothèse est vraisemblablement superflue si on utilise la suite spectrale cfr. Annexe B.

8.8.1 Conjecture large-étroite :

Nous allons fournir un critère géométrique qui nous permettra de calculer $QH(L)$. Ce critère est une adaptation du critère d'annulation et de non-annulation de l'homologie de Floer développé dans [BC07]⁸

Définition 8.8. Rappelons qu'une lagrangienne L est dite :

1. *large* si $QH_*(L, \Lambda_\omega) = H_*(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_\omega$.
2. *étroite* si $QH_*(L, \Lambda_\omega) = 0$.

Remarque 8.9. Lorsqu'on travaille avec d'autres anneaux de coefficients⁹ que Λ_ω on spécifie pour quel type d'anneau la lagrangienne est étroite, respectivement large, en insérant en préfixe l'anneau en question. Lorsqu'on utilise le qualificatif large, respectivement étroite, on signifie que la lagrangienne est Λ_ω -large, respectivement Λ_ω -étroite.

Le but de cette section est de prouver :

Théorème 8.8.1. Conjecture large-étroite : Soit $(X_\Delta, \omega_\Delta, J_\Delta)$ une variété torique de Fano. Soit L_α une fibre torique de X . Alors L_α est soit étroite soit large.

Dans la suite on notera souvent $(X_\Sigma, \omega_\Sigma, J_\Sigma)$ la variété torique associée à $\Delta(\Sigma)$ ou même (X, ω, J) .

Soit $G_1 = \{v_1, \dots, v_N\}$ les générateurs de Σ_1 . Ces générateurs sont des vecteurs orthogonaux aux faces du polytope de Delzant Δ . On peut les choisir pointant vers l'intérieur du polytope, et rappelons que Δ est défini par les relations :

$$\{\langle x, v_j \rangle \geq \lambda_j, j = 1, \dots, N\}.$$

Considérons une fibre torique $L_\alpha = \pi^{-1}(a_1, \dots, a_n)$ et notons β_i les générateurs de $H_2^D(X, L_\alpha)$. Rappelons que : $\alpha_j = \omega(\beta_j) = 2\pi(\langle x, v_j \rangle - \lambda_j)$ et $\partial\beta_j = v_j^1 e_1 + v_j^2 e_2 + \dots + v_j^n e_n$ avec $e_j = [\gamma_j] \in H_1(L_\alpha, \mathbb{Z}_2)$ et

$$\gamma_j : S^1 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n : e^{i\theta} \rightarrow (c_1, \dots, c_j e^{i\theta}, \dots, c_n)$$

sont les générateurs de $H_1(L, \mathbb{Z}_2)$.

⁸Voir aussi [CO06].

⁹cfr section suivante.

On peut montrer que pour un choix générique de s.p.c.c $J \in \mathcal{N}(J_\Sigma)$, $\mathcal{M}(\beta_i, L_\alpha, J)$ n'est jamais vide et qu'il consiste en une variété de dimension $2 + n$ de plus si J est une homotopie régulière joignant $J_0 \in \mathcal{N}(J_\Sigma)$ à $J_1 \in \mathcal{N}(J_\Sigma)$, $\mathcal{M}(\beta_i, L_\alpha, J_0)$ et $\mathcal{M}(\beta_i, L_\alpha, J_1)$ sont cobordantes. On note :

$$I_c = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid \alpha_i = \omega(\beta_i) = c\}.$$

Etant donné $\beta_j \in H_2^D(M, L)$ et $J \in \mathcal{N}(J_\Sigma)$, on définit l'application d'évaluation :

$$ev_{j,J} : (\mathcal{M}(\beta_j, L, J) \times \partial D) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow L : [(u, z)] \rightarrow u(z) \quad (8.26)$$

Notons une fois encore que pour un choix générique $J_{\text{reg}} \in \mathcal{N}(J_\Sigma)$,

$$\mathcal{M}(q, \beta_i, J) = ev_{i,J}^{-1}(q) = \{[(u, z)] \in \mathcal{M}(\beta_i, L_\alpha, J) \times \partial D / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid u(z) = q\}.$$

est un ensemble fini de points et que pour J_0 et J_1 génériques dans $\mathcal{N}(J_\Sigma)$; $\mathcal{M}(q, \beta_i, J_0)$ et $\mathcal{M}(q, \beta_i, J_1)$ sont cobordants. On définit alors :

$$\delta_c(q) = \sum_{i \in I_c} \deg_2(ev_{i,J}) \partial_{\mathbb{Z}_2} \beta_i. \quad (8.27)$$

Sa classe d'homologie $D_c = [\delta_{J,c}(q)] \in H^1(L, \mathbb{Z}_2)$ ne dépend ni du choix générique de J , ni du point q . De plus au vue du théorème de classification (8.2.2) $\deg_2(ev_{i,J}) = 1$. On a le critère suivant :

Proposition 8.8.2. Critère structurel. Soit $L = L_\alpha$ une fibre torique d'une variété torique Fano et K une constante suffisamment grande pour que $\text{QH}(L, \Lambda_\omega, K, \epsilon, J)$ soit bien défini (pour $J \in \mathcal{N}(J_\Sigma; K, \epsilon)$), alors :

1. si $D_c = 0$ pour tout c , alors $\text{QH}(L, \Lambda, K, \epsilon, J_\Sigma) = H(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_\omega$
2. sinon $\text{QH}(L, \Lambda, K, \epsilon, J_\Sigma) = 0$.

Démonstration. Fixons K suffisamment grand, $J \in \mathcal{N}(J_\Sigma; K, \epsilon)$ générique. Soit $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse parfaite dont l'unique maximum est noté ℓ . Si $y \in \text{Crit}_{n-1}(f)$ est un point critique d'indice $n - 1$ on a pour des raisons dimensionnelles :

$$\delta y = \partial_M y + \sum_{c \in \{\alpha_i\}} \#_2\{W^u(y) \cap D_c\} q^c t \ell$$

$D_{c_0} \neq 0$: Supposons d'abord qu'il existe un c_0 tel que $D_{c_0} \neq 0$. Par dualité de Poincaré il existe un cycle $[C] \in H_{n-1}(L, \mathbb{Z}_2)$ tel que $C \cap D_{c_0} \neq \emptyset$. La fonction f étant parfaite, on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe un point critique $z = \text{Crit}_{n-1}(f)$ dont la variété instable représente le cycle C . On a alors :

$$\delta(z) = \sum_c \#_2\{W^u(x) \cap D_c\} q^c t \ell.$$

Puisque $D_{c_0} \neq \emptyset$,

$$\sum_c \#_2\{W^u(x) \cap D_c\} q^c \neq 0.$$

Mais Λ_ω est un corps ; par conséquent ℓ est un bord pour δ . Mais ℓ est l'unité pour le produit quantique, donc $\text{QH}(L, \Lambda) = 0$ ¹⁰.

$D_c = 0$ **pour tout** c : Supposons maintenant que tous les D_c sont nuls. Grâce au lemme (8.8.1) il suffit de montrer que $\delta_1 \equiv 0$. Remarquons d'abord que $\delta_0 = \partial_M = 0$ et δ_1 est identiquement nul sur $C_{n-1}(f, g) \otimes \Lambda_\omega$. Puisque $\delta = \delta_0 + \delta_1$, on déduit que $C_{n-1}(f, g) \otimes \Lambda_\omega \cong H_{n-1}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_\omega$. Mais $H_{n-1}(L, \mathbb{Z}_2)$ engendre $H_*(L, \mathbb{Z}_2)$ en tant qu'algèbre via le produit d'intersection. Au vue de ces observations si δ_1 respecte la règle de Leibniz par rapport au produit d'intersection classique, $\delta_1 \equiv 0$.

Montrons donc que pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$:

$$\delta_1(x \cdot y) = \delta_1(x) \cdot y + x \cdot \delta_1 y. \quad (8.28)$$

Rappelons que le produit quantique s'écrit lui aussi sous la forme :

$$x * y = x \cdot y + x *_1 y t + \dots + x *_k y t^k. \quad (8.29)$$

Où

$$x *_1 y = \sum_{\substack{A | \mu(A)=2l \\ \omega(A) < K}} \#_2 \mathcal{M}(x, y, A, L, J) q^{\omega(A)}.$$

Considérons maintenant des espaces de modules $\mathcal{M}(x, y, A, L, J)$ de dimension 1 avec $\mu(A) = 2$. L'étude du bord de leur compactification fournit la relation suivante :

$$\delta_1(x \cdot y) + \delta_0(x *_1 y) = \delta_0 x *_1 y + x *_1 \delta_0 y + \delta_1 x \cdot y + x \cdot \delta_1 y. \quad (8.30)$$

¹⁰En effet, supposons que $\delta x = 0$, alors $x = 1 * x = \delta y * x = \delta(y * x)$.

Dans le cas où la fonction de Morse f est parfaite l'équation 8.30 se résume à :

$$\delta_1(x \cdot y) = \delta_1(x) \cdot y + x \cdot \delta_1 y.$$

Ceci prouve que δ_1 est identiquement nul et donc :

$$QH(L, \Lambda_\omega) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_\omega.$$

□

Corollaire 8.8.1.1. *Lorsque définie, l'homologie quantique relative munie du produit quantique $(QH(L_\alpha, \Lambda_\omega, K, \epsilon, J_\Delta), *)$ d'une fibre torique de Fano ne dépend ni de ϵ ni de K (pourvu que ce dernier soit assez grand). On peut donc noter $QH(L_\alpha, \Lambda_\omega)$ au lieu de $QH(L_\alpha, \Lambda_\omega, K, \epsilon, J_\Delta)$*

Remarque 8.10. *Le résultat précédent peut s'interpréter en terme de suite spectrale (voir annexe A). Dans ce cas il n'est cependant pas nécessaire de supposer que f est une fonction parfaite. En réalité la dichotomie large vs étroite ne dépend que des faits suivants :*

1. *l'indice de Malsov de tout disque pseudo-holomorphe est au moins 2.*
2. *L'homologie de L à coefficients dans \mathbb{Z}_2 $H_*(L, \mathbb{Z})$ est engendrée en tant qu'algèbre (par rapport au produit d'intersection) par $H_{n-1}(L, \mathbb{Z}_2)$.*

Plus précisément étant donné une s.p.c.c régulière J et un élément $B \in H_2^D(M, L)$ tel que $\mu(B) = 2$, on définit :

- $ev_{B,J} : (\mathcal{M}(B, L, J) \times \partial D) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow L : [(u, z)] \rightarrow u(z)$
- $\mathcal{M}(q, B, J) = ev_{B,J}^{-1}(q)$
- $\mathcal{D}_c = \{B \in H_2^D(M, L) | \mu(B) = 2, \omega(B) = c, deg(ev_{B,J}) \neq 0\}$.
- $\delta_c(q) = \sum_{\beta \in \mathcal{D}_c} deg(ev_{B,J}) \partial B$ et $D_c = [\delta_c(q)]$

En combinant les preuves du lemme (8.8.1) (proposition (8.8.1)) et de la proposition (8.8.2) on retrouve donc un la proposition (6.1.4) de [BC07]¹¹.

8.9 Représentations de $\pi_2(M, L)$ et anneaux de coefficients.

Avertissement : Dans cette section $H_2^D(M, L)$ désigne **la partie libre** (sans torsion) de l'image de $\pi_2(M, L)$ par le morphisme d'Hurewicz. De même $H_1(L)$ désigne la partie libre de $H_1(L, \mathbb{Z})$.

¹¹La différence entre leur preuve et la nôtre tient dans la proposition (8.8.1), où nous montrons que $\delta_k \equiv 0$ pour tout $k \geq 2$.

Orientation :

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec l'anneau de base \mathbb{Z}_2 . La raison principale est que cela rend la discussion conceptuellement plus claire et que cela évite de parler d'orientation. Dans cette section nous allons mentionner un résultat qui nous permet de considérer des anneaux de base plus généraux, essentiellement \mathbb{R} et \mathbb{C} . Contrairement au cas absolu (courbes pseudo-holomorphes sans bord), les espaces des disques pseudo-holomorphes n'héritent pas d'une orientation naturelle. Cependant dans certain cas il est tout de même possible de les orienter mais le choix n'est pas canonique. Cependant ces résultats étant quelque peu techniques nous ne ferons que les mentionner et les utiliser sans aucun scrupule.

Rappelons d'abord qu'un fibré $\pi : E \rightarrow B$ est orientable ssi il existe une classe d'homotopie de trivialisations du 0-squelette s'étendant en une trivialisations du 1-squelette. Cette observation donne lieu à la définition de la première classe de Stiefel-Whitney¹². Plus précisément :

Théorème 8.9.1. *Un fibré $\pi : E \rightarrow B$ est orientable ssi la première classe de Stiefel-Whitney $w_1 \in H_1(B, \mathbb{Z}_2)$ est nulle.*

Une variété est donc orientable si la première classe de Stiefel-Whitney de son espace tangent est nulle.

Pour que les espaces de modules de disque $\mathcal{M}(A, L, J)$ admettent une orientation il faut demander une condition un peu plus forte que l'orientabilité de L .

Définition 8.11. *Une **structure spin** sur une variété lisse et orientée L est une classe d'homotopie de trivialisations de son fibré tangent sur le 2-squelette de L . De manière équivalente une variété est **spin** si ses deux premières classes de Stiefel-Whitney $w_1, w_2 \in H_*(B, \mathbb{Z}_2)$ s'annulent. On voit donc que c'est une variété qui est en quelque sorte juste un peu plus qu'orientable.*

Théorème 8.9.2. *[FOOO09c] Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une variété lagrangienne spin ; alors le choix d'une structure spin détermine une orientation $\mathcal{M}^*(A, L, J)$ de manière canonique pour tout $A \in \pi_2(M, L)$ qui est cohérente avec l'opération de recollement.*

Remarque 8.12. *Pour une preuve de ce théorème voir [Cho04].*

De cette manière nous pouvons orienter les espaces $\mathcal{M}^*(\mathcal{T}(A, \mathfrak{F}); g, J)$ ¹³ et considérer des anneaux de coefficients généraux.

¹²voir [MS74] et [Hus94] pour une exposition complète du sujet.

¹³voir [BC10] pour les détails.

Coefficients et représentations :

Dans ce qui suit l'anneau de base est \mathbb{C} . On considère des représentations, c'est-à-dire des morphismes :

$$\rho : (H_2^D(M, L), \circ) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) : A \rightarrow \rho(A) \quad (8.31)$$

On note $\text{Rep}_2(L)$ le groupe de ces morphismes. Une classe importante de représentations est donnée par les représentations $\rho = \alpha \circ \partial$ où $\alpha : H_1(L) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme et $\partial : H_2^D(M, L) \rightarrow H_1(L)$ est le connectant. On note $\text{Rep}(L) \subset \text{Rep}_2(L)$, le groupe de ces représentations.

Si $r = \text{rang} H_2^D(M, L)$ et $r' = \text{rang} H_1(L)$ on a des isomorphismes de groupes : $\text{Rep}_2(L) \cong (\mathbb{C}^*)^r$ et $\text{Rep}(L) \cong (\mathbb{C}^*)^{r'}$. Plus précisément choisissons une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de $H_2^D(M, L)$ ¹⁴. On a $\rho(e_i) = z_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Par conséquent si $A = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r$, on a :

$$\rho(A) = z_1^{a_1} \dots z_r^{a_r}. \quad (8.32)$$

De même si $\{e_1, \dots, e_{r'}\}$ est une base de $H_1(L)$. On a $\alpha(e_i) = z_i$ pour $1 \leq i \leq r'$, et

$$\alpha \circ \partial A = z_1^{\langle \partial A, e_1 \rangle} \dots z_{r'}^{\langle \partial A, e_{r'} \rangle} \quad (8.33)$$

Pour $\rho \in \text{Rep}_2(L)$, on considère l'anneau :

$$\Lambda^\rho = \left\{ \sum_{A \in H_2^D(M, L)} \lambda_A \rho(A) q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} \mid \forall c \in \mathbb{R}, \#\{\lambda_A \neq 0 \mid \omega(A) < c\} < \infty \right\} \quad (8.34)$$

Pour des représentations $\alpha \circ \partial = \rho \in \text{Rep}(L)$, on notera Λ^α au lieu de Λ^ρ .

Remarque 8.13. Dans [FOOO09b], [FOOO09c] et [FOOO10], les auteurs se servent d'un fibré complexe plat pour changer leur anneau de coefficients. Dans ce qui précède nous suivons l'approche abordée dans [BC10] que l'on trouve plus simple à comprendre plus générale, et qui dans le cas où $\rho = \alpha \circ \partial$ est tout à fait équivalente.

Pour une sous-variété lagrangienne L spin, pour laquelle $\text{QH}(L, \Lambda_\omega)$ est définie invariante, etc... on pose

- $\text{QH}(L, \Lambda^\rho)$ l'homologie quantique relative de L à coefficients dans Λ^ρ où $\rho : H_2^D(M, L) \rightarrow \mathbb{C}^*$.

¹⁴Rappelons que dans cette section $H_2^D(M, L) \cong H_2^D(M, L)/\text{Tor}$.

- $\text{QH}(L, \Lambda^\alpha)$ l'homologie quantique relative de L à coefficients dans Λ^α où $\alpha : H_1(L_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}^*$.
- Enfin on note l'opérateur de bord modifié :

$$\delta^\rho(x) = \sum_{y, A | \omega(A) < K} n_y^x(A) \rho(A) q^{\omega(A)} t^{\tilde{\mu}(A)} y.$$

Les preuves de la section précédente s'adaptent aisément au cas des anneaux de coefficients. Il faut juste tenir compte des signes. Par exemple l'identité de Leibniz devient :

$$\delta(x * y) = \delta(x) * y + (-1)^{|x|} x * \delta(y). \quad (8.35)$$

Théorème 8.9.3. *Les résultats de la section précédente sont encore vrais si on remplace Λ_ω par Λ^ρ .*

8.10 Applications et calculs.

8.10.1 Déplaçabilité.

Nous montrons maintenant que pour les fibres toriques déplaçables, $\text{QH}(L, \Lambda_\omega) = 0$. Comme dans le cas presque monotone on peut associer à chaque difféomorphisme hamiltonien ϕ_H un morphisme :

$$\Psi : C_*(f, g, J) \rightarrow C_{*+1}(f, g, J),$$

vérifiant :

$$\delta\Psi\ell + \Psi\delta\ell = (1 + \sum_{A | \omega(A) > K} q^{\omega(A)} t^{\tilde{\mu}(A)})\ell \quad (8.36)$$

où ℓ est l'unique maximum de la fonction de Morse f , et K est la constante servant à définir le complexe. C'est le cas intermédiaire entre le cas monotone où

$$\delta\Psi\ell = \ell$$

et presque monotone où

$$\delta\Psi\ell = \ell + \sum_{\substack{A | \omega(A) > K \\ y \in \text{Crit}(f)}} q^{\omega(A)} t^{\tilde{\mu}(A)} y.$$

Rappelons brièvement la définition de Ψ . On définit $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, H, \mathbf{J})$ l'espace des trajectoires perlées joignant x à y . La seule différence avec les espaces de modules $\mathcal{M}(x, y, \mathbf{A}, \mathbf{J})$ est qu'un des disques est un élément $(R, v) \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{\delta}_J v - \beta_R \chi_H(u) = 0$. On rappelle qu'en dimension plus petite ou égale à 1 et pour un choix générique de famille de structures presque complexes cet espace est une variété différentiable de dimension $|x| - |y| + \mu(\mathbf{A}) + 1$. Bien sûr on ne considère que les \mathbf{A} tel que $\omega(\mathbf{A}) \leq K$. En étudiant la compactification des espaces de modules de dimension 1 on obtient le résultat suivant :

Lemme 8.10.1. *Soit K une constante suffisamment grande. Si L est déplaçable, le morphisme $\Psi : C_*(f, g, J) \rightarrow C_{*+1}(f, g, J)$ vérifie :*

$$\delta \circ \Psi(x) + \Psi \circ \delta(x) = \varphi(x) + \sum_{\substack{A|\omega(A)>K, \\ y \in \text{Crit}(f)}} q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} y \quad (8.37)$$

où $\varphi : C_*(f, g, J) \rightarrow C_*(f, g, J)$ est un isomorphisme de chaîne de la forme :

$$\varphi(x) = x + \sum_{A, y | 0 < \omega(A) < K} n_y^x(A, J) q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} y$$

Rappelons que dans le cas où $x = \ell$, $\varphi(\ell) = \ell$.

Proposition 8.10.1. *Soit L_α une fibre torique déplaçable. Soit K une constante suffisamment grande. Notons $\ell = \max(f)$ l'unique maximum de la fonction de Morse f . Si L_α déplaçable, alors*

$$\delta \Psi \ell = \left(1 + \sum_{A|\omega(A)>K} q^{\omega(A)}\right) \ell. \quad (8.38)$$

et

$$\text{QH}(L, \Lambda_\omega) = 0.$$

Démonstration. L'identité (8.38) se déduit du lemme (8.8.1). On déduit alors facilement que $\text{QH}(L) = 0$. En effet, l'identité (8.38) revient à dire que ℓ est exact. Soit $a \in C_*(J)$ un cycle : $\delta a = 0$. Si $\ell = \delta b$ on a :

$$a = \ell a = \delta b * a = \delta(b * a).$$

On peut aussi montrer que $\text{QH}(L) = 0$ de manière plus directe. Supposons sans perte de généralité que f est une fonction de Morse parfaite. Supposons que L est déplaçable, avec $\text{QH}_*(L, \Lambda_\omega) \neq 0$. Les critères structurels nous apprennent que $\delta_i = 0$ pour tout i , ce qui viole (8.37). □

8.10.2 Potentiel de Landau-Ginzburg.

Le critère d'annulation ou de non-annulation justifie l'introduction d'une fonction appelée potentiel de Landau-Ginzburg voir [FOOO10], [CO06], [BC10]. Nous la définissons d'abord de manière générale (pour les variétés lagrangiennes vérifiant les propriétés 1.-2. de la remarque (8.10)). Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_r\}$ une base de $H_1(L)$.

Définition 8.14. *La fonction :*

$$\mathfrak{P}(\alpha, L) : \text{Rep}(L) \rightarrow \mathbb{C}^* : (z_1, \dots, z_r) \rightarrow \mathfrak{P}(\alpha, L) = \sum_c \sum_{B \in \mathcal{D}_c} \text{deg}(\text{ev}_{B,J}) \alpha(\partial B) q^c. \quad (8.39)$$

est appelée *potentiel de Landau-Ginzburg*.

Dans la base \mathcal{B} s'écrit :

$$\mathfrak{P}(z_1, \dots, z_r; L) = \sum_c \sum_{B \in \mathcal{D}_c} \text{deg}(\text{ev}_B) z_1^{\langle \partial B, e_1 \rangle} \dots z_r^{\langle \partial B, e_r \rangle} q^c. \quad (8.40)$$

Pour une fibre torique L_a , le potentiel de Landau-Ginzburg s'écrit :

$$\mathfrak{P}(\alpha, a) = \sum_c \sum_{j \in I_c} \rho(\beta_j) q^c = \sum_{j=1}^N \rho(\beta_j) q^{\omega(\beta_j)} \quad (8.41)$$

Mais puisque $\partial \beta_j = v_j^1 e_1 + \dots + v_j^n e_n$ on obtient :

$$\mathfrak{P}(\alpha, a) = \sum_{j=1}^n z_1^{v_j^1} \dots z_n^{v_j^n} q^{\omega(\beta_j)}. \quad (8.42)$$

Proposition 8.10.2. *Soit L_a une fibre torique. La représentation α est un point critique de $\mathfrak{P}(\alpha, a)$, ssi $\text{QH}(L_a, \Lambda^\alpha) \cong H_*(L_a) \otimes \Lambda^\alpha$*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si f est une fonction de Morse parfaite et si y_j est un point critique d'indice $n - 1$, dont la variété instable représente le cycle C_j où $\{C_j\}$ est la base de $H_{n-1}(L_a)$ duale de la base e_i , on a

$$\delta^\alpha(y_j) = z_j \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z_j}(\alpha, u) t \ell. \quad (8.43)$$

En effet :

$$\delta^\rho(y_j) = \sum_{k=1}^N \# \{C_j \cap \partial \beta_k\} \rho(\beta_k) q^{\beta_k} t \ell = \sum_{k=1}^N v_k^j z_1^{v_k^1} \dots z_n^{v_k^n} q^{\beta_k} t \ell \quad (8.44)$$

□

8.11 Quelques calculs.

En guise d'illustration nous allons reproduire ici quelques calculs explicites [CO06] et [Cho08]. Le théorème suivant a été prouvé par Entov et Polterovich [BEP04] **refexacten** utilisant la théorie des quasi-états. Une preuve utilisant la théorie de Floer a été fournie par Cho dans [Cho08]. Nous reproduisons cette preuve ici.

Théorème 8.11.1 ([Cho08]). *Soit L une fibre torique monotone d'une variété torique de Fano. Alors L n'est pas déplaçable.*

Démonstration. Puisque L est monotone son potentiel s'écrit :

$$\mathfrak{P}(\alpha) = \left(\sum_j z_j^{v_j^1} \dots v_n^{v_j^n} \right) q^c.$$

Les points critiques de \mathfrak{P} sont donnés par les équations :

$$\sum_j v_j^k z_j^{v_j^1} \dots z_n^{v_j^n} = \sum_j v_j^k z_j = 0, \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (8.45)$$

où $z_j^{v_j^1} \dots z_n^{v_j^n} = z_j \in \mathbb{C}^*, j \in \{1, \dots, N\}$. Remarquons qu'un tel système possède toujours une solution dans \mathbb{C}^N puisqu'il y a n équations pour N inconnues. Il nous faut donc trouver des $z_j \neq 0$ solution des équations (8.45). Mais cette condition est équivalente à demander que l'espace vectoriel des solutions n'est inclu dans aucun plan de coordonnées de \mathbb{C}^N . Pour montrer cette dernière propriété nous allons montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ il existe une solution (z_1, z_2, \dots, z_n) avec $z_i \neq 0$. Posons $u_1 = v_i$ et complétons avec des éléments $\{u_i\}_{i=2, \dots, n} \in G - \{v_i\}$ de telle sorte que les u_i engendrent un cône de dimension n ou de manière équivalente qu'ils soient linéairement indépendants. Etant donné que $N > n$ et que Σ est un cône, il existe $u_{n+1} \neq u_1$ dans G tel que u_2, \dots, u_n, u_{n+1} sont aussi linéairement indépendants. Etant donné que $\{u_j\}_{j=1, \dots, n+1}$ sont linéairements dépendants :

$$u_{n+1} = \sum_{j=1}^n z'_j u_j,$$

avec $z'_1 \neq 0$ (car sinon u_2, \dots, u_{n+1} ne seraient pas linéairement indépendants). Or $u_1 = v_i$. On a donc prouvé le résultat. □

L'espace projectif.

Soit $L_a \in \mathbb{C}P^n$ une fibre torique de l'application moment

$$\pi : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}^n(z_0 : \dots : z_n) \rightarrow \left(\frac{|z_1|^2}{\|z\|^2}, \dots, \frac{|z_n|^2}{\|z\|^2} \right),$$

avec $\|z\|^2 = |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2$ et $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta$.

Le polytope de Delzant associé à π est donné par :

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\},$$

avec :

- $v_i = e_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, $v_{n+1} = -\sum_i e_i$;
- $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_{n+1} = -1$

On déduit que les générateurs β_i de $\pi_2(M, L)$ vérifient :

Classe	aire	bord
$\beta_i, 1 \leq i \leq n$	$2\pi a_i$	C_i
β_{n+1}	$2\pi(1 - \sum_i a_i)$	$-\sum_i C_i$

où C_i est la base de $H^1(L_a, \mathbb{Z})$ donné par $(a_1, \dots, a_i e^{i\theta}, \dots, a_n)$ dans L_a .

Potentiel de Landau-Ginzburg.

On peut maintenant calculer le potentiel de Landau-Ginzburg associé à L_a :

$$\mathfrak{P}(\alpha, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n z_j q^{2\pi a_j} + \prod_{j=1}^n z_j^{-1} q^{2\pi(1 - \sum_i a_i)} \quad (8.46)$$

On déduit facilement que les points critiques de \mathfrak{P} sont donnés par :

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z_i} = z_i q^{2\pi a_i} - z_i^{-2} \prod_{j \neq i} z_j^{-1} q^{2\pi(1 - \sum_i a_i)},$$

par conséquent, la seule fibre non-déplaçable est le tore de Clifford qui est monotone. De plus si y_j est un point critique d'indice $n - 1$ d'une fonction de Morse parfaite dont la variété instable est le dual de Poincaré de C_i on a :

$$\delta y_j = (z_i q^{2\pi a_i} - \prod_{j=1}^n z_j^{-1} q^{2\pi(1 - \sum_i a_i)}) t \ell \quad (8.47)$$

où ℓ est le maximum.

Théorème 8.11.2. Soit $\phi \in \text{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_0)$ un difféomorphisme hamiltonien Si ϕ déplace toutes les fibres toriques sauf le tore de Clifford, alors les cordes hamiltoniennes de ϕ à bord dans L_c sont dégénérées.

Démonstration. Pour prouver ce résultat nous allons combiner nos connaissances théoriques sur les variétés presque monotones et pratiques concernant les fibres toriques. On va supposer que $\alpha = (1, \dots, 1)$ et que l'anneau de base est \mathbb{Z}_2 .

Supposons que les cordes hamiltoniennes du tore Clifford sont non-dégénérées. On choisit une famille de Lagrangienne L_ν avec $\omega(\beta_i) = \omega(\beta_{n+1})$ pour tout $i \neq 1$. Pour ν , suffisamment grand, on peut supposer que L_ν est presque monotone.

Par ailleurs $\delta y_1 = (q^{\omega(\beta_1)} + q^{\omega(\beta_{n+1})})t\ell$ et $\delta y_j = 0$ pour tout $j \neq 1$. En outre :

$$\delta\Psi\ell = \left(1 + \sum_{A|K \leq \omega(A) < 2K} q^{\omega(A)}\right)\ell.$$

Par conséquent $\Psi\ell$ est proportionnel à y_1 : $\Psi\ell = \sum_B q^{\omega(B)}t^{-1}y_1$.

En calculant explicitement $\delta\Psi\ell$ on a :

$$\delta\Psi\ell = \sum_B q^{\omega(B)}(q^{\omega(\beta_1)} + q^{\omega(\beta_{n+1})})\ell.$$

Etant donné que l'inverse de $q^{\omega(\beta_1)} + q^{\omega(\beta_{n+1})}$ dans Λ_ω est donné par une somme infinie, $\sum_B q^{\omega(B)}$ ne peut pas l'inverser. Pour faciliter les calculs utilisons les notations suivantes : Dans $\sum_B q^{\omega(B)}$ on note $e^B = q^{\omega(B)}$ et $\beta_1 = \sigma$, $\beta_{n+1} = \theta$. On a alors :

$$\sum_B e^B(e^\sigma + e^\theta) = 1 + \sum_A e^A.$$

On déduit :

$$\sum_B e^B e^\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{k(\sigma-\theta)})(1 + \sum e^A).$$

Le membre de droite de l'équation précédente étant une somme finie (puisque provenant de l'expression de δy_1), le membre de gauche doit lui aussi être une somme finie. Par conséquent pour tout A , $e^A = e^{(k_A(\sigma-\theta))}$ pour un certain k_A . Donc :

$$\sum_A e^A = e^{-\theta} \left(1 + \sum_{j=1}^m e^{k_j(\sigma-\theta)}\right), \quad (8.48)$$

et

$$\sum_B e^B = e^{-\theta} \left(1 + \sum_{i=1}^j e^{l_i(\sigma-\theta)}\right). \quad (8.49)$$

Cependant puisque $\omega(\beta_1 - \beta_{n+1}) \rightarrow 0$ lorsque $\nu \rightarrow \infty$, $\inf\{k_j\}$ dans (8.48) croît sans cesse. Il en est donc de même pour l_i . On vient par conséquent de montrer que pour tout ν tel que $\mathcal{M}(\ell, y_1, \nu(\sigma - \theta); J, H, L_\nu) \neq \emptyset$. On trouve alors une suite de disques $\{u_\nu\}$ solutions de (3.9) d'énergie bornée par K à bord dans L_ν et représentant des classes distinctes deux à deux. Ce qui contredit la proposition (7.0.7) □

Nous montrons maintenant l'existence d'un difféomorphisme hamiltonien ϕ déplaçant toutes les fibres toriques de π hormis le tore de Clifford.

Proposition 8.11.1. *Il existe $\phi \in \text{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ tel que pour toute fibre torique $L = \pi^{-1}(a)$ avec $a \neq (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$,*

$$\phi(L) \cap L = \emptyset.$$

Démonstration. Rappelons que l'action $U(n+1)$ sur \mathbb{C}^{n+1} induit une action hamiltonienne sur $\mathbb{C}P^n$. Notons $B = \{e_0, \dots, e_n\}$ la base standard de \mathbb{C}^{n+1} . Soit $\phi' \in U(n+1)$ la transformation unitaire définie par $\phi'(e_j) = e_{j+1} \bmod n$. Notons ϕ le difféomorphisme hamiltonien induit par ϕ' .

Notons que $L_a = \pi^{-1}(a) = \{(\sqrt{1 - \sum a_i} : a_1 e^{i\theta_1} : a_2 e^{i\theta_2} : \dots : a_n e^{i\theta_n})\}$. Nous allons montrer que

$$\phi(L_a) \cap L_a \neq \emptyset \implies L_a = L_c.$$

Supposons qu'il existe $(\sqrt{1 - \sum a_i}, a_1 e^{i\theta_1}, a_2 e^{i\theta_2}, \dots, a_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$\phi'(\sqrt{1 - \sum a_i}, a_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n e^{i\theta_n}) = \lambda(\sqrt{1 - \sum a_i}, a_1 e^{i\varphi_1}, a_2 e^{i\varphi_2}, \dots, a_n e^{i\varphi_n}).$$

Un rapide calcul montre que $|\lambda| = 1$ et que par conséquent $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n+1}$. □

Annexe A

Indice de Maslov

Nous rappelons ici la définition d'indice de Maslov. L'indice de Maslov est en réalité un terme générique donné à toute une série d'indices défini pour des chemins ou lacets dans $\Lambda(n)$ et $Sp(n)$.

A.1 Indice de Maslov d'un lacet de lagrangienne dans \mathbb{C}^n .

Application de Souriau.

Nous allons donner plusieurs description de l'ensemble $\Lambda(n)$ des sous-espaces lagrangiens de (\mathbb{C}^n, ω_0) . Etant donné qu'un sous espace lagrangien est de dimension n , on peut le voir comme l'image d'une matrice de rang n :

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

où $X, Y \in \text{Mat}(n \times n)$.

On vérifie aisément que l'image de la matrice Z , qu'on note L , définit un sous espace lagrangien ssi $\text{rang}(Z) = n$ et si

$$X^t Y = Y^t X \tag{A.2}$$

En particulier le graphe d'une application $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lagrangienne ssi $Y = Y^t$.

La matrice Z est appelé **référentiel lagrangien**. Bien sûr, ce référentiel n'est pas unique. Remarquons cependant qu'une matrice $U = X + iY$ unitaire, avec X, Y des matrices réelles, vérifie (A.2)¹. Un référentiel lagrangien Z pour lequel $X + iY$ est unitaire, est appelé

¹Toute matrice unitaire peut s'écrire de cette manière.

référentiel unitaire. Eux non plus ne sont pas unique. Si $O \in O(n)$ et Z est un référentiel unitaire, on vérifie aisément que :

$$Z' = \begin{pmatrix} XO \\ YO \end{pmatrix}$$

est encore un référentiel unitaire.

On a le théorème suivant² :

Lemme A.1.1. *Soit $\Lambda(n)$ l'espace des lagrangiennes de (\mathbb{C}^n, ω_0) . Le groupe symplectique $Sp(n)$ agit transitivement sur $\Lambda(n)$. Autrement dit pour tout $L \in \Lambda(n)$ il existe $\Psi \in Sp(n)$ tel que :*

$$\Psi L_0 = L,$$

où $L_0 = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : y = 0\}$.

Démonstration. Soit $U = X + iY$ un référentiel unitaire pour L . Posons :

$$\Psi = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\Psi \in Sp(n)$ et par définition $\Psi L_0 = L$. □

Corollaire A.1.0.1. *L'espace $\Lambda(n)$ est difféomorphe à $U(n)/O(n)$.*

Du corollaire précédent on peut tout de suite déduire que $\pi_1(\Lambda(n)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. En effet, le déterminant $\det : U(n) \rightarrow S^1$ est une fibration au-dessus du cercle avec fibre $SU(n)$. La suite exacte des groupes d'homotopies fournit :

$$\cdots \rightarrow \pi_1(SU(n)) \rightarrow \pi_1(U(n)) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(SU(n)). \quad (\text{A.3})$$

Il suffit alors de montrer que $SU(n)$ est simplement connexe. On montre ce résultat par induction sur n . Pour $n = 1$, c'est clairement vérifié. Supposons que ce soit vrai pour $n - 1$. Considérons la fibration suivante :

$$\pi : SU(n) \rightarrow S^{2n-1} : U \rightarrow (u_1 1, u_2 1, \dots, u_n 1). \quad (\text{A.4})$$

La fibre de cette fibration est bien entendu $SU(n - 1)$ et on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_1(SU(n - 1)) \rightarrow \pi_1(SU(n)) \rightarrow 0. \quad (\text{A.5})$$

²Pour de plus amples informations voir [MS98] et [LA94].

Il est clair que le déterminant n'est pas bien défini sur $U(n)/O(n)$, cependant son carré l'est : $\det^2 : U(n)/O(n) \rightarrow S^1$. Ce dernier définit une fibration au-dessus du cercle dont la fibre est $SU(n)/SO(n)$. Cette dernière est contractile car $SO(n)$ est connexe et $SU(n)$ est simplement connexe. On a donc la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \pi_1(U(n)/O(n)) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0. \quad (\text{A.6})$$

Définition A.1. (Classe de Maslov) Soit $[d\theta]$ le générateur de $H^1(S^1, \mathbb{Z})$. La **classe de Maslov** $\mu_n : \pi_1(\Lambda(n)) \rightarrow \mathbb{Z}$, c.-à-d. $\mu_n \in H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$, est définie par : $\mu_n = (\det^2)^*[d\theta]$.

Nous allons maintenant fournir une description plus géométrique et plus explicite de μ_n et fournir un générateur explicite de $\pi_1(\Lambda(n))$.

Définition A.2. Soit $L \in \Lambda(n)$ et $U = X + iY$ un référentiel unitaire. On définit l'**application de Souriau** :

$$S : \Lambda(n) \rightarrow \text{Sym}(U(n)) : L \rightarrow UU^t \quad (\text{A.7})$$

Ici $\text{Sym}(U(n)) \subset U(n)$ est l'ensemble des matrices unitaires symétriques. Notons que $\text{Sym}(U(n))$ n'est pas un groupe.

Il est aisé de vérifier que l'application S est bien définie (ne dépend que de L). En effet, puisque deux référentiels unitaires ne diffèrent l'un de l'autre que par la multiplication à droite d'une matrice orthogonale réelle on a : $UO O^t U^t = UU^t$. De même, l'application S est injective. La surjectivité de S découle quant à elle du lemme suivant :

Lemme A.1.2. Soit $W \in \text{Sym}(U(n))$. Il existe $U \in \text{Sym}(U(n))$ tel que $W = UU^t = U^2$.

Démonstration. L'application W peut s'écrire $W = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Puisque $WW^* = \text{Id}$, on a $X = X^t$, $Y = Y^t$ et $XY = YX$. Me rappelant mon cours de mécanique quantique, je sais qu'un ensemble de matrices hermitiennes sont simultanément diagonalisables ssi elles commutent deux à deux. Donc on peut diagonaliser X et Y en utilisant le même changement de base orthogonale C . Posons : $A = C^t X C$ et $B = C^t Y C$. Notons a_j , resp. b_j , les valeurs propres de A , resp. B . On aimerait trouver des matrices X', Y' diagonales telles que

$$(X' + iY')^2 = X^2 - Y^2 + 2iXY = A + iB,$$

équation qui se traduit en termes de composantes :

$$x_j^2 - y_j^2 = a_j, \quad (\text{A.8})$$

$$2x_j y_j = b_j. \quad (\text{A.9})$$

Puisque $A^2 + B^2 = \text{id}$, $a_j^2 + b_j^2 = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Cette dernière condition impose que $x_j^2 + y_j^2 = 1$. Il suffit alors de poser $x_j = \cos \theta_j$, $y_j = \sin \theta_j$ et de résoudre pour trouver θ_j . On conclut en posant $U = C^t(X' + iY')C$. \square

On a donc un homéomorphisme entre $\Lambda(n)$ et $\text{Sym}(U(n))$. On peut alors calculer $\mu_n(\mathbf{L})$ pour tout chemin $\mathbf{L} : S^1 \rightarrow \Lambda(n)$:

$$\mu_n(\mathbf{L}) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d(\det W)}{\det(W)}. \quad (\text{A.10})$$

Pour terminer, on donne un générateur de $\pi_1(\Lambda(n))$. Remarquons d'abord que $\Lambda(1) = S^1$. Notons $g : S^1 \rightarrow S^1 : t \rightarrow e^{2\pi i t}$. On considère alors le lacet $\mathbf{W}_n^g \in \pi_1(\text{Sym}(U(n)))$ défini par :

$$W_n^g(t) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i t} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{2n-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

On associe via l'application de Souriau le lacet de sous-espace lagrangien \mathbf{L}_n^g . On calcul alors facilement que $\mu_n((\mathbf{L}_n^g)^m) = m$.

Pour résumer on a montré que μ_n vérifie les propriétés suivantes :

-Homotopie : Si \mathbf{L} et \mathbf{L}' sont deux lacets homotopes dans $\Lambda(n)$, alors $\mu_n(\mathbf{L}) = \mu_n(\mathbf{L}')$.

-Somme directe : si \mathbf{L}_i est un lacet dans $\Lambda(n_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mu_n(\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_m) = \sum_{i=1}^m \mu_{n_i}(\mathbf{L}_i).$$

-Normalisation : $\mu(\mathbf{L}_g^1) = 1$.

A.2 classe de Maslov d'une lagrangienne L.

Soit $\alpha : L \rightarrow (M, \omega)$ un plongement lagrangien. Notons $\pi_2(M, L)$ le groupe d'homotopie de disques à bord dans L , c.-à-d. :

$$\pi_2(M, L) = \{[u] | u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)\} \quad (\text{A.12})$$

On montre que c'est un groupe (non-nécessairement commutatif). Choisissons un représentant $u : (D, \partial) \rightarrow (M, L)$ de $[u] \in \pi_2(M, L)$. Notons $\gamma := u|_{\partial D} : S^1 \rightarrow L$. Notons

d'abord que puisque D est contractile, u^*TM est trivialisable. Etant donné une trivialisat-
 tion sur D , on obtient une trivialisat-
 ion sur ∂D . On a donc des trivialisat-
 ion :

$$\begin{aligned}\tau_z : T_{u(z)}M &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, z \in D \text{ et} \\ \tau_s : T_{\gamma(s)}M &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, s \in S^1.\end{aligned}$$

Dans cette trivialisat-
 ion, γ^*TL est un lacet de lagrangiennes $\tau_s(T_{\gamma(s)}L) = L_\tau(s)$ dans \mathbb{R}^{2n} .
 On définit l'**indice de maslov** de u par :

$$\mu(u) = \mu_n(L_\tau(s)). \quad (\text{A.13})$$

On montre alors :

Théorème A.2.1. *L'indice de Maslov défini ci-dessus ne dépend que de $[u]$. En particulier il ne dépend pas de la trivialisat-
 ion choisie une fois u fixé. De plus il définit un morphisme $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que μ est aussi bien défini sur $H_2^D(M, L)$ qui est l'image de $\pi_2(M, L)$ dans $H_2(M, L)$ par le morphisme d'Hurewicz.*

Annexe B

Suite spectrale.

Notons $C_*(f, J) = C_*(f, g) \otimes \Lambda_\omega$ le complexe des perles associés à une fibre torique L_α . Rappelons que :

$$\Lambda_\omega = \left\{ \sum_{A \in H_2^D(M, L)} \lambda_A q^{\omega(A)} t^{\bar{\mu}(A)} \mid \forall c \in \mathbb{R}, \#\{\lambda_A \neq 0 \mid \omega(A) < c\} < \infty \right\} \quad (\text{B.1})$$

avec $\bar{\mu}(A) = \mu(A)/N_L$, et $|t| = -N_L$. Rappelons que puisque \mathbb{Z}_2 est un corps Λ_ω est aussi un corps.

Notons Λ_p le sous-ensemble de Λ_ω des éléments de degré p . L'anneau Λ_ω est filtré par le degré : $\mathcal{F}_p \Lambda_\omega = \bigoplus_{j \geq -p} \Lambda_j$. Cette filtration induit une filtration sur $C_*(L, f, J)$:

$$\mathcal{F}_p C_q(L, f, J) = \bigoplus_{j \geq -p} C_{q+2j}(L, f, J) t^j$$

Notons que l'opérateur de bord

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}. \quad (\text{B.2})$$

où $\langle \delta_{1x}, y \rangle = \sum_{A \mid \mu(A)=2l} n_y^*(A) q^{\omega(A)} y$ compte les disques d'indice de Maslov $2l$. On note que δ_0 n'est autre que l'opérateur de bord du complexe de Morse standard qu'on note ∂_M

Cette filtration donne lieu à une suite spectrale $\{(E_{p,q}^r, d_r), r \geq 0\}$

Lemme B.0.1. *[[BC07]] La suite spectrale $\{(E_{p,q}^r, d_r), r \geq 0\}$ possèdent les propriétés suivantes.*

1. $(E_{p,q}^0, d_0) = C_{q-2p}(f, g) \otimes \Lambda_{-p}$, $\delta_0 = \partial_M$,
2. $(E_{p,q}^1, d_1) = H_{q-2p}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_{-p}$, δ_1 ,
3. de plus pour $r > 1$, $d_r = \delta_\nu$, en particulier, la longueur r de $\{E_{*,*}^r, d_r\}$ est finie.

4. $E^\infty \cong \text{QH}_*(L, \Lambda_\omega)$.
5. le morphisme de comparaison entre des complexes de perles $C_*(f, J)$ et $C_*(f', J)$ associés à deux fonctions de Morse distinctes mais suffisamment proche (au moins C^2 -proche), est un isomorphisme préservant les bases. Par conséquent on peut identifier les suites spectrales correspondantes.
6. La filtration par le degré est compatible avec le produit quantique, c-à-d. :

$$* : \mathcal{F}_{p_1} C_{q_1}(f, J) \otimes \mathcal{F}_{p_2} C_{q_2}(f', J) \rightarrow \mathcal{F}_{p_1+p_2} C_{q_1+q_2-n}(f, g).$$

Par conséquent la suite spectrale est multiplicative, et on note $*_\tau$ le produit induit par $*$ sur $(E_{*,*}^r, d_\tau)$.

7. Le produit $*_1 : E_{p_1, q_1}^1 \otimes E_{p_2, q_2}^1 \rightarrow E_{p_1+p_2, q_1+q_2-n}^1$ est le produit cap :

$$\begin{aligned} \cap : H_{q_1-2p_1}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_{-p_1} &\otimes H_{q_2-2p_2}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_{-p_2} \\ &\rightarrow H_{q_1+q_2-n+2(p_1-p_2)}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_{-(p_1+p_2)}. \end{aligned}$$

8. δ_1 satisfait à la règle de Leibniz pour \cap . Il s'ensuit que $\{E_{p,q}^1\}_{q-2p \geq n-1}$ engendrent $E_{*,*}^1$.

Démonstration. Les points (1.) à (5.) découlent directement de la définition de suite spectrale et de la décomposition (B.2) de l'opérateur de bord δ . Le point (6.) et (7.) découlent de la définition de la filtration et du fait que le produit quantique est un opérateur de degré $-n$.

Le point (8.) mérite un peu plus d'explications. Remarquons que la structure de la compactification d'espace de module du type $\mathcal{M}(x, y, z, A)$ de dimension $|x| + |y| - |z| + \mu(A) - n = 1$ avec $\mu(A) = 2$ et le fait que le produit quantique peut lui aussi s'écrire sous la forme :

$$* = *_0 + *_1 + \cdots + *_k,$$

où $*_k$ ne compte que les arbres perlés d'indice $2k$. implique que :

$$\delta_1(x *_0 y) = \delta_0(x *_1 y) + \delta_0(x) *_1 y + x *_1 \delta_0(y) + \delta_1(x) *_0 y + x *_0 \delta_1(y). \quad (\text{B.3})$$

Or $*_0 = \cap$ et $\delta_0 = \partial_M$. Puisque $E_{p,q}^1 = H_{q-2p}(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda_p$, tout les termes de (B.3) faisant intervenir δ_0 sont nuls dans E^1 . Par conséquent on trouve bien que δ_1 satisfait la règle de Leibniz par rapport au produit \cap induit sur E^1 . \square

Annexe C

Convergence de Gromov

C.1 Application stable.

Cet appendice est essentiellement un recopiage de certaines parties de [Fra08]. On commence par la définition d'une application stable. Pour fixer les notations, Notons par (T, E) un **arbre**, c'est-à-dire un ensemble T muni d'une relation $E \subset T \times T$:

1. *Symétrique* : si $(\alpha, \beta) \in E$, alors $(\beta, \alpha) \in E$. Nous noterons souvent $\alpha : \beta$ pour dire que $(\alpha, \beta) \in E$.
2. *connexe* : Pour tout $\alpha, \beta \in T$ avec $\alpha \neq \beta$, il existe $\gamma_i \in T$, avec $i = 0, \dots, m$ tels que $\gamma_0 = \alpha, \gamma_m = \beta$ et $\gamma_i : \gamma_{i+1}$.
3. *acyclique* : si $\{\gamma_i\}_{0 \leq i \leq m} \subset T$, avec $\gamma_i : \gamma_{i+1}$ et $\gamma_i \neq \gamma_{i+2}$ pour tout i , alors $\gamma_0 \neq \gamma_m$.

Un **morphisme d'arbre** est une application $f : (T, E) \rightarrow (T', E')$ telle que :

$f^{-1}(\alpha')$ est un arbre pour tout $\alpha' \in T'$

Si $\alpha : \beta$ et si $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $f(\alpha) : f(\beta)$.

Un morphisme d'arbre est une application $f : T \rightarrow T'$ vérifiant les propriétés suivantes :

- l'image inverse d'un sommet est un arbre,
- si $\alpha : \beta$, et $f(\alpha) \neq f(\beta)$, alors $f(\alpha) : f(\beta)$.

Un isomorphisme d'arbre est un morphisme d'arbre bijectif dont l'inverse est aussi un morphisme d'arbre. Une application stable est un arbre connexe, dont les sommets sont des applications pseudo-holomorphes. Dans notre cas nous nous restreignons aux applications dont le domaine est une sphère ou un disque. Nous notons (T, E) le graphe, où T est l'ensemble des sommets et $E \subset T \times T$ représente les arrêtes.

On a donc une famille d'application $u_\alpha : (\Sigma_\alpha, \Gamma_\alpha) \rightarrow (M, L)$. Ici Σ_α est soit un disque soit une sphère. Nos applications peuvent avoir des points marqués qu'on note $z_{\alpha,i}$ avec $0 \leq i \leq j_\alpha$. Chaque arête du graphe représente ce qu'on appelle un point nodal $z_{\alpha,\beta} \in \Sigma_\alpha$ vérifiant la propriété $u_\alpha(z_{\alpha,\beta}) = u_\beta(z_{\beta,\alpha})$. Un point marqué ne coïncide jamais avec un point nodal et deux points nodaux ne coïncident jamais pour des arêtes différentes. On demande que les sphères constantes aient au moins 3 points spéciaux (nodaux ou marqués) et que les disques ont au moins un point spécial sur le bord et un point spécial dans son intérieur, ou au moins 3 points spéciaux. Cette condition s'appelle la condition de stabilité et est là pour s'assurer que le groupe d'automorphisme de l'application stable est fini. Quant à l'ensemble Γ_α il est soit vide soit consiste en un unique point si Σ_α est une sphère. Si Σ_α est un disque, $\Gamma_\alpha = \partial\Sigma_\alpha$. En outre, l'ensemble $\partial T = \{\alpha \in T \mid \Gamma_\alpha \neq \emptyset\}$ consiste soit en des disques soit en une et une seule sphère. La figure suivante esquisse une courbe stable :

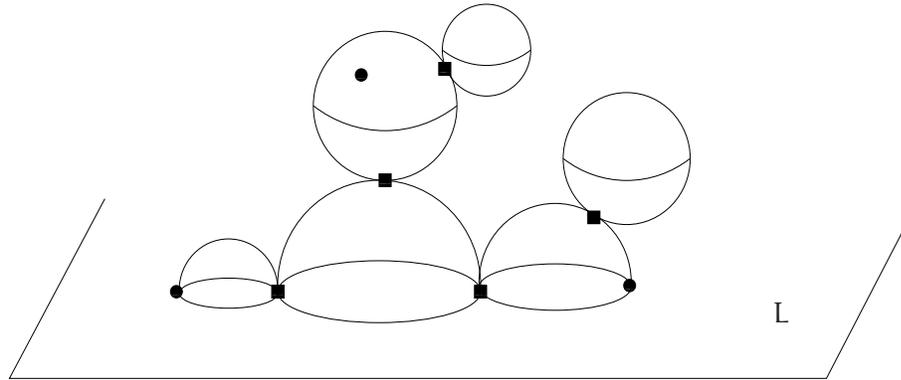


FIG. C.1 – Application stable. Les points carrés représentent les points nodaux et les points ronds les points marqués.

Voici une liste de notation que nous utiliserons par la suite. Ces dernières sont bien sûr plagier de [Fra08] qui s'est lui même inspiré de [MS04].

- Une application stable est notée :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\{\Sigma_\alpha, \Gamma_\alpha, u_\alpha\}_{\alpha \in T}, \{z_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}, \{z_{\alpha,i}\}_{i=0 \leq i \leq j_\alpha})$$

- Si ∂T consiste en un unique point on note z_α^∞ , **le point du bord**. Ici α correspond à la sphère touchant L en l'unique point z_α^∞ .

- Pour tout $\alpha \in T$, on définit l'ensemble :

$$\Xi_\alpha = \begin{cases} \{z_\alpha\beta, \text{ avec } \alpha : \beta\} & \text{si } \Sigma_\alpha = D, \\ \{z_\alpha^\infty\} \cup \{z_\alpha\beta, \text{ avec } \alpha : \beta\} & \text{si } \Sigma_\alpha = S^2. \end{cases}$$

- Si (\mathbf{u}, \mathbf{z}) est une application stable, on note :

$$m_\alpha(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Sigma_\alpha} \mathbf{u}_\alpha^* \omega.$$

- On appelle une **branche** d'un arbre est un sous-ensemble :

$$T_{\alpha\beta} := \{\gamma \in T : \beta \in [\alpha, \gamma]\},$$

où $[\alpha, \gamma]$ est l'unique suite de sommets $\alpha = \gamma_0, \dots, \gamma_m = \gamma$ tel que $\gamma_i : \gamma_{i+1}$ pour tout i . L'énergie d'une telle branche est donnée par :

$$m_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \sum_{\gamma \in T_{\alpha\beta}} E(\mathbf{u}_\gamma).$$

- Enfin on note :

$$E_\alpha(\mathbf{u}, O) = \int_O \mathbf{u}_\alpha^* + \sum_{\substack{\alpha:\beta \\ z_{\alpha\beta} \in O}} m_{\alpha\beta}(\mathbf{u}).$$

c'est l'énergie de toutes les bulles qui touchent l'ouvert O ainsi que l'énergie de $\mathbf{u}_\alpha|_O$.

Deux applications stables (\mathbf{u}, \mathbf{z}) et $(\mathbf{u}', \mathbf{z}')$ sont **équivalentes** ssi il existe un isomorphisme d'arbre $f : T \rightarrow T'$ et une collection de transformations de Möbius $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in T}$ tels que :

- (i) Pour tout sommet Σ_α et $\Sigma_{f(\alpha)}$ sont difféomorphes et si $\alpha \in T$, $\mathbf{u}'_{f(\alpha)} = \mathbf{u}_\alpha \circ \phi_\alpha$.
- (ii) Pour tout $\alpha, \beta \in T$ avec $\alpha : \beta$, $z'_{f(\alpha), f(\beta)} = \phi_\alpha(z_{\alpha, \beta})$.
- (iii) Si k est le nombre de points marqués, pour tout $i = 1, \dots, k$, $z'_{f(\alpha)i} = \phi_\alpha(z_i)$.
- (iv) $\Gamma_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(\Gamma_{f(\alpha)})$.

C.2 Convergence de Gromov.

Nous pouvons maintenant donner la définition de la convergence de Gromov :

Définition C.1. Soit (M, ω) une variété symplectique compacte (avec éventuellement un bord). Si $L \hookrightarrow (M, \omega)$ est une sous-variété lagrangienne compacte sans bord (close), considérons les données suivantes :

- Une suite de structures symplectiques ω_ν sur M , tels que L est lagrangienne pour tout ν et ω_ν converge au sens C^k
- une suite de structures presque complexe $\{J_\nu \in \mathcal{J}(M, \omega_\nu)\}$, convergeant au sens C^k vers une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$.

On dit alors qu'une suite de courbes J_ν -holomorphes avec points marqués $(u_\nu; (z_1^\nu, \dots, z_k^\nu))$ converge au sens de Gromov vers une application stable (\mathbf{u}, \mathbf{z}) si il existe une collection de suite de transformations de Möbius $\{(\phi_\alpha^\nu)\}_{\alpha \in T}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si $\Sigma_\alpha = D$, alors $\phi_\alpha^\nu \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
2. Si $\Sigma_\alpha = S^2$, alors pour tout sous-ensemble compact $K \subset S^2 - \{z_\alpha^\infty\}$, il existe $\nu_0(K)$ tel que $\phi_\alpha^\nu(K) \subset D$ pour tout $\nu \geq \nu_0$.
3. Pour tout $\alpha \in T$, et pour tout compact $K \subset \Sigma_\alpha - \{\Xi_\alpha\}$ la suite $u_\nu \circ \phi_\alpha^\nu$ converge vers u_α sur tout compact au sens C^k .
4. Si $\beta \in T$, avec $\alpha : \beta$, alors :

$$m_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow \infty} E(u_\nu, \phi_\alpha^\nu(B_\epsilon(z_{\alpha,\beta})) \cap D).$$

5. Si $\#\Gamma_\alpha = 1$, alors :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow \infty} E(u_\nu \circ \phi_\alpha^\nu, B_\epsilon(z_\alpha^\infty) \cap (\phi_\alpha^\nu)^{-1}B) = 0.$$

6. La suite $(\phi_\alpha^\nu)^{-1} \circ \phi_\beta^\nu$ converge uniformément sur tout compact de $\Sigma_\beta - \{z_{\beta,\alpha}\}$ vers l'application constante $z_{\alpha,\beta}$.
7. $z_{\alpha i} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\phi_\alpha^\nu)^{-1}(z_i^\nu)$. De plus les points du bord converge vers les points du bord.

Théorème C.2.1 ((Compacité de Gromov)). Soit L une sous-variété lagrangienne close d'une variété symplectique compact (M, ω) . Soient $\{\omega_\nu\}$, $\{J_\nu\}$, comme dans la définition (C.1). Alors pour toute suite d'applications J_ν -holomorphes (u_ν, \mathbf{z}) à bord dans L à k points marqués, vérifiant

$$\sup E(u_\nu) \leq \infty,$$

il existe une sous-suite u_{ν_i}, z_{ν_i} convergeant au sens de Gromov vers une application stable (\mathbf{u}, \mathbf{z}) .

Bibliographie

- [Alb08] Peter Albers. A Lagrangian Piunikhin-Salamon-Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4) :Art. ID rnm134, 56, 2008.
- [Arn99] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.
- [Aud04] Michèle Audin. *Torus actions on symplectic manifolds*, volume 93 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, revised edition, 2004.
- [BC07] Paul Biran and Octav Cornea. Quantum structures for lagrangian submanifolds. *Arxiv 0708.4221*, 2007.
- [BC09] Paul Biran and Octav Cornea. Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds. *Geom. Topol.*, 13(5) :2881–2989, 2009.
- [BC10] Paul Biran and Octav Cornea. Lagrangian topology and enumerative geometry. *in preparation*, 2010.
- [BEP04] Paul Biran, Michael Entov, and Leonid Polterovich. Calabi quasimorphisms for the symplectic ball. *Commun. Contemp. Math.*, 6(5) :793–802, 2004.
- [CdS01] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Che98] Yu. V. Chekanov. Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves. *Duke Math. J.*, 95(1) :213–226, 1998.
- [Cho04] Cheol-Hyun Cho. Holomorphic discs, spin structures, and Floer cohomology of the Clifford torus. *Int. Math. Res. Not.*, (35) :1803–1843, 2004.

- [Cho08] Cheol-Hyun Cho. Non-displaceable Lagrangian submanifolds and Floer cohomology with non-unitary line bundle. *J. Geom. Phys.*, 58(11) :1465–1476, 2008.
- [CO06] Cheol-Hyun Cho and Yong-Geun Oh. Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds. *Asian J. Math.*, 10(4) :773–814, 2006.
- [Del88] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3) :315–339, 1988.
- [dGL09] Maurice de Gosson and Franz Luef. Symplectic capacities and the geometry of uncertainty : the irruption of symplectic topology in classical and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, 484(5) :131–179, 2009.
- [FHS95] Andreas Floer, Helmut Hofer, and Dietmar Salamon. Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action. *Duke Math. J.*, 80(1) :251–292, 1995.
- [Flo86] Andreas Floer. Proof of the Arnol’d conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds. *Duke Math. J.*, 53(1) :1–32, 1986.
- [Flo88] Andreas Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom.*, 28(3) :513–547, 1988.
- [FOOO09a] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II : Bulk deformations. *arXiv :0810.5654v2*, 2009.
- [FOOO09b] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part I*, volume 46 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [FOOO09c] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part II*, volume 46 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [FOOO10] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds. I. *Duke Math. J.*, 151(1) :23–174, 2010.

- [Fra08] Urs Frauenfelder. Gromov convergence of pseudoholomorphic disks. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 3(2) :215–271, 2008.
- [Gro85] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [GS79] R. E. Greene and K. Shiohama. Diffeomorphisms and volume-preserving embeddings of noncompact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 255 :403–414, 1979.
- [Hof92] Helmut Hofer. Properties of symplectic maps. In *Progress in variational methods in Hamiltonian systems and elliptic equations (L'Aquila, 1990)*, volume 243 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 113–118. Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.
- [Hus94] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.
- [Kon95] Maxim Kontsevich. Enumeration of rational curves via torus actions. In *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, volume 129 of *Progr. Math.*, pages 335–368. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [LA94] Jacques Lafontaine and Michèle Audin. Introduction : applications of pseudo-holomorphic curves to symplectic topology. In *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progr. Math.*, pages 1–14. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [Laz00] L. Lazzarini. Existence of a somewhere injective pseudo-holomorphic disc. *Geom. Funct. Anal.*, 10(4) :829–862, 2000.
- [Lel50] Pierre Lelong. Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 67 :393–419, 1950.
- [LM95] François Lalonde and Dusa McDuff. The geometry of symplectic energy. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :349–371, 1995.
- [Mos65] Jürgen Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :286–294, 1965.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. *Annals of Mathematics Studies*, No. 76.

- [MS98] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.
- [MS04] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [NN57] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 65 :391–404, 1957.
- [Oh96] Yong-Geun Oh. Fredholm theory of holomorphic discs under the perturbation of boundary conditions. *Math. Z.*, 222(3) :505–520, 1996.
- [Oh97] Yong-Geun Oh. On the structure of pseudo-holomorphic discs with totally real boundary conditions. *J. Geom. Anal.*, 7(2) :305–327, 1997.
- [Pol93] Leonid Polterovich. The Maslov class rigidity and nonexistence of Lagrangian embeddings. In *Symplectic geometry*, volume 192 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 197–201. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Pol01] Leonid Polterovich. *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [RS93] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4) :827–844, 1993.
- [Sma65] S. Smale. An infinite dimensional version of Sard’s theorem. *Amer. J. Math.*, 87 :861–866, 1965.
- [Wei79] Alan Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds*, volume 29 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. Corrected reprint.
- [Wu52] Wen-Tsun Wu. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*. *Actualités Sci. Ind.*, no. 1183. Hermann & Cie, Paris, 1952. *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg* 11, pp. 5–89, 155–156.