

Université de Montréal

**Les Produits Dérivés des Marchés Européens du
Carbone**

par

Frédéric Godin

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques et Statistiques

Orientation Actuariat

août 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Les Produits Dérivés des Marchés Européens du
Carbone**

présenté par

Frédéric Godin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Louis Doray

(président-rapporteur)

Manuel Morales

(directeur de recherche)

Mylène Bédard

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

17 juin 2010

SOMMAIRE

Au cours de la dernière décennie, l'Union Européenne a instauré une réglementation environnementale afin de limiter les émissions de Gaz à Effet de Serre sur son territoire. Ceci a contribué à la mise en place d'un marché du carbone européen (EU ETS) où s'échangent des certificats d'émission de CO_2 (les EUA et les CER) ainsi que des produits dérivés liés à ceux-ci. Ce mémoire aura pour objectif d'évaluer et de comparer différents modèles afin de représenter le prix des certificats d'émission et de tarifer les produits dérivés des marchés du carbone.

MOTS CLÉS : Marchés du carbone, Produits dérivés, Tarification, Certificats d'émission, EU ETS, EUA, CER.

SUMMARY

During the last decade, the European Union has regulated emissions of Greenhouse Gases on its own territory. Consequently, a European Carbon Market (EU ETS) is currently emerging where CO_2 emission certificates (EUA and CER) and derivatives are traded on Exchanges. The objectif of this research is to evaluate and compare different models to represent the emission certificates' price and to price derivatives of the carbon markets.

KEYWORDS : Carbon Markets, Derivatives, Asset Pricing, Emission Certificates, EU ETS, EUA, CER.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	vii
Liste des abréviations et des sigles	ix
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Rappel de notions	5
1.1. Rappel de notions de mathématiques.....	5
1.1.1. Définitions et théorèmes divers.....	5
1.1.2. Vraisemblance maximale pour une série chronologique.....	10
1.2. Rappel de notions de finance.....	13
1.3. Fonctionnement du EU ETS.....	17
Chapitre 2. Modélisation du prix des EUA et des CER	20
2.0.1. Description des données utilisées.....	21
2.1. Différents processus stochastiques.....	21
2.1.1. Mouvement Brownien Géométrique (modèle de Black-Scholes)..	21
2.1.2. Modèle de Merton.....	24
2.1.3. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.....	26
2.1.4. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel.....	28
2.1.5. Processus à Racine Carrée.....	29

2.1.6.	Processus Normale Inverse Gaussienne exponentiel	30
2.1.7.	Processus Autorégressif d'ordre 1 : AR(1)	35
2.2.	Sélection de modèle	37
2.3.	Résultats	38
Chapitre 3.	Tarification de contrats à terme	57
3.1.	Description des données utilisées	57
3.2.	Modèles pour le prix des contrats à terme	59
3.2.1.	Modèle classique	59
3.2.2.	Modèle à taux de convenance fixe	60
3.2.3.	Modèle de Gibson	62
3.3.	Résultats	64
3.3.1.	Contrats à terme intraphase	66
3.3.2.	Contrats à terme interphase	72
Chapitre 4.	Tarification d'options sur les contrats à terme	75
4.1.	Description des données utilisées	75
4.2.	Présentation des modèles de tarification utilisés	76
4.2.1.	Parité des options d'achat et de vente	77
4.2.2.	Modèle de Black	77
4.2.3.	Modèle de Merton	78
4.2.4.	Modèle NIG	80
4.3.	Résultats	81
Conclusion	85	
Bibliographie	87	

LISTE DES FIGURES

2.1	Graphiques des prix des EUA et des CER.....	39
2.2	Paramètres calibrés pour les séries des EUA.....	40
2.3	Paramètres calibrés pour les séries des CER.....	41
2.4	Simulation d'une trajectoire pour chacun des processus des certificats	43
2.5	Simulation d'une trajectoire pour chacun des processus des certificats	44
2.6	Résultats de la calibration pour les séries des EUA.....	45
2.7	Résultats de la calibration pour les séries des CER.....	46
2.8	Autocorrélations partielles des prix des certificats	47
2.9	Intervalles de confiance pour le coefficient autorégressif.....	47
2.10	Distribution des log-rendements des EUA : période complète.....	49
2.11	Distribution des log-rendements des EUA : après le 19-05-2009	50
2.12	Distribution des log-rendements des CER : période complète.....	51
2.13	Distribution des log-rendements des CER : après le 19-05-2009	52
2.14	Logarithme de la densité des log-rendements des EUA : période complète.....	53
2.15	Logarithme de la densité des log-rendements des EUA : après le 19-05- 2009.....	54
2.16	Logarithme de la densité des log-rendements des CER : période complète.....	55
2.17	Logarithme de la densité des log-rendements des CER : après le 19-05- 2009.....	56

3.1	Paramètres pour les contrats à terme intraphase	67
3.2	Erreurs pour les contrats à terme intraphase	68
3.3	Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase EUA sur ECX	69
3.4	Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase EUA sur Bluenext	70
3.5	Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase CER sur ECX	71
3.6	Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase CER sur Bluenext	72
3.7	Paramètres pour les contrats à terme interphase	73
3.8	Erreurs pour les contrats à terme interphase	73
3.9	Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme interphase	74
4.1	Paramètres pour les options	82
4.2	Erreurs pour les options	82
4.3	Comparaison des prix empiriques et théoriques des options EUA	83
4.4	Comparaison des prix empiriques et théoriques des options CER	84

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

BIC : Cote de Schwarz (voir texte pour définition)

CER : Certified Emission Reduction (Nom d'un certificat d'émission du EU ETS)

ECX : European Climate Exchange (Nom d'une bourse du carbone européenne)

EDS : Équation différentielle stochastique d'Itô

EEX : European Energy Exchange (Nom d'une bourse du carbone européenne)

EU ETS : European Union Emission Trading Scheme (Nom du marché du carbone européen)

EUA : European Union Allowance (Nom d'un certificat d'émission du EU ETS)

GES : Gaz à effet de serre

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: boréliens de \mathbb{R}

\mathbb{E} : espérance

ℓ : fonction de log-vraisemblance

\mathcal{L} : fonction de vraisemblance

$\lim_{s \uparrow t} f(s)$: la limite à gauche de f au point t

$\lim_{s \downarrow t} f(s)$: la limite à droite de f au point t

\mathbb{P} : mesure de probabilité

\mathbb{Q} : mesure de probabilité

\mathbb{R}^+ : $[0, \infty)$

$\sigma(X)$: sigma-algèbre engendrée par la variable aléatoire X

$A \times B$: produit cartésien entre A et B

$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$: \mathbb{Q} est absolument continue par rapport à \mathbb{P}

REMERCIEMENTS

Je tiendrais à remercier tout d'abord mon superviseur Manuel Morales qui m'a beaucoup aidé au cours de la réalisation de ce mémoire et de mes deux années de maîtrise. Je voudrais aussi remercier les différents professeurs qui m'ont aidé à plusieurs reprises au cours de mes années de maîtrise au département de mathématiques et statistiques, dont Marlène Frigon et Charles Patrick Dugas. Finalement, j'aimerais remercier les membres du jury Louis G. Doray et Mylène Bédard pour leurs recommandations qui ont contribué à l'amélioration de ce mémoire.

INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, la communauté scientifique a mis en lumière le rôle de l'humanité par rapport à l'émission de GES (gaz à effet de serre) dans l'atmosphère, et a lié ces émissions au phénomène du réchauffement climatique. Le rapport du GIEC [IPCC] rapporte différents faits à ce sujet. Le GIEC est un organisme intergouvernemental regroupant des experts de l'évolution du climat provenant de divers pays à travers le monde. Le réchauffement climatique représente un important risque pour l'être humain. Il peut affecter la vie de différentes populations de plusieurs manières, dont par exemple par le biais d'inondations, de tempêtes tropicales, de sécheresses, etc. Le réchauffement pourrait donc causer d'énormes coûts économiques à l'humanité. On peut se référer à Stern [STR] pour une discussion plus détaillée de ceux-ci.

Parmi les gaz à effet de serre, le dioxyde de carbone (CO_2) est celui qui a le rôle le plus important par rapport à ce phénomène. Afin de limiter les émissions de CO_2 provenant du territoire européen, l'Union Européenne a instauré une réglementation qui a donné naissance à un marché du carbone ; plusieurs entreprises européennes doivent maintenant détenir des permis d'émission afin d'avoir le droit d'émettre du CO_2 , et la quantité que celles-ci peuvent émettre est proportionnelle au nombre de permis détenus. De plus, ces permis peuvent être échangés sur différentes bourses européennes, ce qui crée un marché. En anglais, ce mécanisme porte le nom de *Cap and Trade*. Le nom du marché du carbone européen se nomme *European Union Emission Trading Scheme* (EU ETS). Celui-ci est présentement de loin le plus grand marché du carbone au monde : il comptait pour 98% des transactions mondiales sur des permis d'émission de CO_2 en 2007 (voir Daskalakis, [DA1]).

Il est important d'étudier le comportement du prix des permis d'émission de CO_2 , car celui-ci devrait influencer de manière significative le coût de l'énergie, et ainsi affecter économiquement différentes activités reliées aux émissions de gaz carbonique (voir Kara, [KAM]). Un des principaux défis relié aux marchés du carbone est la modélisation mathématique du prix des certificats d'émission. Ce mémoire s'attardera entre autres à cette problématique. Lors de l'étude des marchés du carbone, il faut tenir compte du fait que la nature des certificats d'émission est différente de celle d'autres actifs traditionnels du marché tels que les actions et les obligations. Les modèles mathématiques doivent être adaptés en conséquence ; plusieurs articles de la littérature scientifique décrits dans les prochaines lignes s'attardent précisément aux particularités des marchés du carbone. L'étude des marchés du carbone constitue un domaine de recherche qui est présentement très actif. La première raison qui explique ceci est que ce marché dans la forme telle qu'il l'est présentement est très nouveau : l'EU ETS est devenu opérationnel en 2005 (voir [DIR]). De plus, un rapport de Fusaro [FUS] estime que malgré que la valeur totale en 2007 des actifs financiers du carbone n'était que de 41 milliards US\$, les perspectives de croissance de ce marché sont énormes vu que cette valeur double à chaque année.

Différents articles de recherche ont paru au cours des dernières années à propos du marché EU ETS. Daskalakis [DA1] a effectué la modélisation stochastique du prix des permis d'émission (nommés EUA) et a proposé un modèle pour la tarification des contrats à terme et des options sur les EUA. Benz et Trück [BEN1] ont aussi modélisé les rendements du prix des EUA à l'aide du modèle GARCH et d'une approche à changement de régime. Chesney et Taschini [CHE] ont développé un modèle endogène afin de décrire le comportement du prix des EUA dans un marché avec plusieurs participants où l'information est asymétrique. Paoletta et Taschini [PAO] ont présenté une analyse économétrique du prix des EUA. Trück et al. [TRU] ont étudié les taux de convenance (*convenience yield*) des contrats à termes sur les EUA. Seifert et al. [SEI] ont présenté un modèle d'équilibre stochastique pour représenter le prix des EUA. Borovkov et al. [BOK] ont présenté un modèle de diffusion avec sauts pour représenter le mouvement du

prix des EUA et ont étudié certaines propriétés de la mesure martingale correspondant au modèle. Carmona et Hinz [CA1] ont proposé un modèle pour le prix des EUA sous la mesure à risque neutre afin de tarifer les options européenne sur les contrats à livrer ayant comme sous-jacent les EUA. Çetin [CET] a suggéré un modèle de diffusion à changement de régime pour représenter le prix des certificats d'émission et tarifer les contrats à terme des marchés du carbone. Daskalakis et al. [DA2] ont analysé les prix historiques des EUA sur la bourse EEX et discutent de l'adéquation d'un modèle à sauts pour ceux-ci. Benz et Klar [BEN2] ont effectué une analyse des prix à l'intérieur de la journée (*intraday prices*) des contrats à terme sur les EUA. Cette liste d'articles traitant des marchés du carbone n'est pas exhaustive, mais elle témoigne du récent intérêt de la communauté scientifique par rapport à ce sujet.

L'objectif de ce mémoire de maîtrise sera, en s'inspirant de l'article de Daskalakis [DA1], de déterminer un modèle valable pour les prix des EUA à l'aide de données empiriques afin de pouvoir ensuite tarifer les contrats à terme et les options européennes sur ces mêmes contrats à terme. Cependant, contrairement à l'article de Daskalakis, les données utilisées seront celles de la deuxième phase du EU ETS; ce mémoire se voudra ainsi une forme d'exploration des données historiques de la deuxième phase. Le mémoire sera divisé en plusieurs sections. Dans le chapitre 1, un rappel de certains notions de finance, de probabilités, de statistiques, de processus stochastiques et de calcul stochastique sera effectué. Ensuite, une description du fonctionnement du marché du carbone européen EU ETS sera donnée. Après, dans le chapitre 2, des modèles pour le prix des EUA et des CER seront présentés et ensuite calibrés aux données du marché. Leur performance sera ensuite comparée. Par la suite, dans le chapitre 3, la tarification de contrats à terme sur les EUA et les CER sera effectuée : trois modèles différents seront présentés, et ensuite calibrés aux données du marché. La performance des trois modèles sera finalement comparée. Ensuite, au chapitre 4, la tarification d'options sur les contrats à terme sur les certificats d'émission sera effectuée : les mêmes étapes qu'au chapitre 3 seront suivies.

Chapitre 1

RAPPEL DE NOTIONS

Certaines définitions et certains théorèmes de mathématiques et de finance seront rappelés dans cette section afin de clarifier la compréhension des concepts décrits lors des chapitres subséquents. Par la suite, une brève description du fonctionnement du EU ETS sera effectuée.

1.1. RAPPEL DE NOTIONS DE MATHÉMATIQUES

1.1.1. Définitions et théorèmes divers

Tout d'abord, rappelons quelques définitions relatives aux probabilités ainsi que certains théorèmes de processus stochastiques. Il est nécessaire de comprendre ceux-ci afin de pouvoir comprendre le développement mathématique au cours du reste du mémoire.

Soit, pour tout le reste de la section, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tous les processus stochastiques et toutes les variables aléatoires dans cette section sont définis sur un tel espace. Pour une définition formelle de ceci, le lecteur est référé à Billingsley [BIL]. Parfois, cet espace sera muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. La définition d'une filtration est la suivante :

Définition 1.1.1. *Une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est un ensemble de tribus \mathcal{F}_t tel que*

- (1) $\forall t \in [0, \infty[, \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.
- (2) $\forall s, t \in [0, \infty[$ tels que $s < t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

On pose par la suite $F_\infty = \sigma(F_t; t \in [0, \infty[)$, la plus petite tribu contenant tous les F_t . Définissons maintenant ce qu'est un temps d'arrêt ; ceci est nécessaire

pour définir le processus de Poisson un peu plus tard. Cette définition se trouve dans Protter [PRO].

Définition 1.1.2. *Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est dite un temps d'arrêt si $\forall t \in [0, \infty]$, l'évènement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Maintenant, afin de commencer les rappels sur les processus stochastiques, décrivons tout d'abord le Mouvement Brownien, un des processus stochastiques les plus importants dans ce mémoire. La définition suivante du Mouvement Brownien (qu'on prendra toujours univarié au cours de ce mémoire) se retrouve dans Steele [STL].

Définition 1.1.3. *Le Mouvement Brownien $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique $Z : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que*

- (1) $Z_0 = 0$.
- (2) *Les accroissements de Z_t sont indépendants, c'est-à-dire que pour tout ensemble fini de temps $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $Z_{t_2} - Z_{t_1}, Z_{t_3} - Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*
- (3) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 < s < t$, on a que $Z_t - Z_s$ suit une loi normale $N[0, t - s]$.
- (4) *Les trajectoires de $\{Z_t, t \geq 0\}$ sont continues presque sûrement.*

Un tel processus stochastique existe, et on peut en trouver la construction dans [STL]. Le Mouvement Brownien joue un rôle important dans la définition d'une classe beaucoup plus large de processus stochastiques : les processus d'Itô. Ces processus sont définis à l'aide d'une intégrale par rapport au Mouvement Brownien, nommée intégrale d'Itô. La définition d'une intégrale d'Itô se retrouve elle aussi dans Steele [STL]. Étant donné que l'objectif du mémoire n'est pas de faire un compte rendu de la théorie d'intégration d'Itô, le lecteur est référé aux sources [STL] et [OKS] pour un compte rendu plus élaboré de cette théorie. Cependant, la prochaine proposition est énoncée ici, étant donné qu'elle sera utile lors de l'étude du processus d'Ornstein-Uhlenbeck plus tard dans ce mémoire. Cette proposition est le Lemme 4.15 du livre de Björk [BJO].

Proposition 1.1.1. Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ le Mouvement Brownien et $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$. Alors $\forall t \in]0, \infty[$, l'intégrale d'Itô $\int_0^t f(s) dZ_s$ a une distribution normale d'espérance 0 et de variance $\int_0^t f(s)^2 ds$.

Il est possible de généraliser le Mouvement Brownien à une classe plus générale de processus stochastiques nommés les *processus de Lévy*. La théorie du calcul stochastique développée par rapport aux intégrales d'Itô peut aussi être généralisée pour cette classe plus large de processus. En fait, les processus de Lévy font tous partie d'une famille encore plus large de processus stochastiques, nommée la famille des semimartingales. Il existe toute une théorie permettant de définir des intégrales stochastiques ayant comme intégrateurs des semimartingales. Une bonne référence pour comprendre cette théorie est le livre de Protter [**PRO**].

Les processus de Lévy permettent entre autres de définir des processus stochastiques discontinus où des sauts sont présents dans les trajectoires. Cette propriété peut se révéler souhaitable lors de la modélisation stochastique de différents actifs en finance. Les définitions suivantes permettent de décrire les processus de Lévy. Une référence pour ces définitions est Sato [**SAT**].

Définition 1.1.4. Un processus stochastique $\{L_t, t \geq 0\}$ est dit continu en probabilité si $\forall t \geq 0 \forall \epsilon > 0, \lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0$.

Définition 1.1.5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite càdlàg (continue à droite limite à gauche) si

- (1) $\forall t \in D \lim_{s \uparrow t} f(s)$ existe et
- (2) $\forall t \in D \lim_{s \downarrow t} f(s)$ existe et est égale à $f(t)$.

Définition 1.1.6. Un processus Stochastique $\{L_t, t \geq 0\}$ est dit un processus de Lévy si

- (1) $L_0 = 0$ presque sûrement.
- (2) Les accroissements de L_t sont indépendants, c'est-à-dire que pour tout ensemble fini de temps $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $L_{t_2} - L_{t_1}, L_{t_3} - L_{t_2}, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
- (3) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 < s < t$, $L_t - L_s$ a la même distribution que L_{t-s} .

- (4) Le processus L est continu en probabilité.
- (5) Les trajectoires du processus L (les fonctions $t \rightarrow L_t$) sont càdlàg presque sûrement.

Il existe une relation intéressante entre l'ensemble des processus de Lévy et les distributions infiniment divisibles. Cette relation, qui sera décrite par les prochaines propositions, nous permet d'affirmer l'existence de certains processus de Lévy dont les accroissements ont une certaine distribution déterminée. Une référence pour ces résultats est Boyarchenko [BOY]. Définissons tout d'abord ce qu'est une distribution infiniment divisible.

Définition 1.1.7. Soit μ une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont les boréliens de \mathbb{R} . On dit que μ est infiniment divisible si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall X$ étant une variable aléatoire ayant μ comme distribution, $\exists X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ a la distribution μ .

Les théorèmes suivants effectuent le lien entre les distributions infiniment divisibles et les processus de Lévy.

Théorème 1.1.1. Soit $\{L_t, t \geq 0\}$ un processus de Lévy. Alors, $\forall t \geq 0$, la distribution de L_t , qu'on dénote μ_{L_t} , est infiniment divisible.

Théorème 1.1.2. Soit μ une distribution infiniment divisible. Alors, il existe un processus de Lévy $\{L_t, t \geq 0\}$ tel que la distribution de L_1 est μ .

Introduisons maintenant deux exemples de processus de Lévy. Ceux-ci sont le processus de Poisson et le processus de Poisson Composé. Nous allons tout d'abord décrire ce qu'est un processus de Poisson. La compréhension de ce processus est nécessaire lors de la définition du processus de Poisson Composé. La définition de ce dernier processus se révélera utile afin de définir le processus de Merton, un processus qui sera décrit plus tard dans ce mémoire. Les définitions et théorèmes suivants se trouvent dans Protter [PRO].

Définition 1.1.8. Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Soit une suite de temps d'arrêts $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ strictement croissante avec $T_0 = 0$ presque sûrement. Dénotons la fonction indicatrice $1_{\{A\}}$ qui vaut 1 si l'évènement A est réalisé et 0 sinon. Alors, un processus de Poisson adapté

$N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique $N : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{N}$ de la forme $N_t = \sum_{j \geq 1} 1_{\{t \geq T_j\}}$ qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq s < t$, on a que $N_t - N_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s .

(2) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq s < t$, on a que $N_t - N_s$ et N_{t-s} ont la même distribution.

Théorème 1.1.3. Soit un processus de Poisson adapté $N = \{N_t, t \geq 0\}$. Alors le processus N est continu en probabilité. De plus, $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, \infty[\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$, c'est-à-dire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

La paramètre λ est nommé le taux du processus du Poisson. Décrivons maintenant le processus de Poisson Composé.

Définition 1.1.9. Soit $N = \{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson adapté avec un taux λ et soit une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ qui est indépendante de N_t . Alors, le processus stochastique $S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ est appelé un processus de Poisson Composé.

On notera que la convention de notation est que $\sum_{i=1}^{N_t} X_i := 0$ si $N_t = 0$. Le processus de Poisson Composé produit des trajectoires avec des sauts discrets où la taille du i ème saut est X_i . Entre les sauts, la valeur du processus est constante. Le processus de Poisson Composé est un processus de Lévy (voir Protter [PRO]).

Les deux définitions suivantes nous décrivent les *processus de Markov*, et les *processus de Markov homogènes*. Ces propriétés se révéleront importantes lors du calcul de certaines fonctions de vraisemblance dans le chapitre 2, car la densité conjointe des composantes d'un processus stochastique peut s'écrire sous une forme particulière lorsque le processus stochastique est un processus de Markov homogène.

Définition 1.1.10. Un processus stochastique à temps continu $M_t, t \in \mathbb{R}$ est dit un processus de Markov si $\forall T \geq t \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, $\mathbb{E}[f(M_T) | \sigma(M_t)] = \mathbb{E}[f(M_T) | \sigma(M_s : s \leq t)]$.

Définition 1.1.11. Soit un processus de Markov $M_t, t \in \mathbb{R}$. Supposons que la densité conditionnelle de M_T par rapport à M_t , que l'on dénote $f_{M_T | M_t}$ existe

$\forall T, t \in \mathbb{R}$. On dit alors que le processus M_t est homogène si $\forall T, t, x, y \in \mathbb{R}$, $f_{M_T|M_t}(x|y) = f_{M_{T-t}|M_0}(x|y)$.

Les deux prochains théorèmes se retrouvent dans le livre d'Øksendal [OKS]. Le premier traite de l'existence et de l'unicité d'une solution aux équations différentielles d'Itô (EDS). Ce résultat est important lors de la définition de certains processus stochastiques du chapitre 2, car certains de ceux-ci sont définis implicitement par une EDS, et il est important de savoir si la solution existe et si elle est unique. Le deuxième théorème permet de déterminer dans certains cas si une solution d'une EDS est un processus de Markov homogène.

Théorème 1.1.4. Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ deux constantes et soient $\mu : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables qui satisfont :

- (1) $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leq C(1 + |x|)$ et
- (2) $\exists D \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|$.

Alors, l'équation différentielle stochastique d'Itô $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dZ_t$, $t \in [0, T]$, $X_0 = x_0$ possède une unique solution t -continue presque sûrement $X_t(\omega)$ adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s : s \leq t)$.

Théorème 1.1.5. Soit un processus de diffusion X_t qui a la représentation $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dZ_t$ (i.e les coefficients de dérive et de volatilité sont fonction uniquement du processus X_t) où μ et σ sont des fonctions mesurables telles que $\exists D \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|$. Alors, X_t est un processus de Markov homogène.

Il est à noter que tous les processus de diffusion présents dans cette étude sont des processus de Markov homogènes. Le seul qui ne satisfait pas la condition $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|$ est le processus à Racine Carrée, mais celui-ci est quand même un processus de Markov homogène vu qu'il a une unique solution forte (Dufresne, [DUF]).

1.1.2. Vraisemblance maximale pour une série chronologique

Plus tard au cours de ce mémoire, certaines hypothèses paramétriques seront effectuées lorsque l'on supposera que certaines séries chronologiques ont été

généérées par certaines familles de processus stochastiques. Cependant, il sera nécessaire de calibrer ces processus aux séries chronologiques disponibles. Dans le cadre de ce mémoire, ces suppositions paramétriques seront effectuées lors de la démarche de modélisation du prix des certificats d'émission.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de ces familles de processus : les moindres carrés, le maximum de vraisemblance, la méthode des moments, etc. Phillips [**PHI**] soutient que lorsqu'un processus stochastique est un processus de diffusion, la méthode du maximum de vraisemblance possède de nombreux avantages ; l'efficacité et la convergence asymptotique sont des arguments qui justifient l'utilisation de cette méthode. De plus, c'est exactement cette méthode qui a été utilisée dans l'article de Daskalakis [**DA1**] qui effectue des tests similaires à ceux du présent mémoire pour des produits financiers de la première phase de l'EU ETS ; ceci permettra d'avoir des résultats analogues.

Décrivons donc la méthodologie du maximum de vraisemblance utilisée dans cet article. Celle-ci est aussi décrite dans Phillips [**PHI**].

Soient $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ des indices de temps. Soit une série chronologique $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, c'est-à-dire une réalisation discrète d'un processus stochastique continu S_t , $t \in \mathbb{R}$. On suppose que cette série chronologique provient d'une certaine famille paramétrique connue de processus stochastiques. Cependant, les paramètres $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_p)$ du processus d'où provient la série chronologique restent inconnus, et l'on voudrait les estimer.

On suppose que S_0 est une constante presque sûrement, donc on peut faire comme si cette valeur n'était pas aléatoire. Dénotons la densité conjointe de S_1, \dots, S_n par f_{S_1, \dots, S_n} . La fonction de vraisemblance est définie comme étant la densité $f_{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}}$ évaluée en la réalisation $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$:

$$\mathcal{L} = f_{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta). \quad (1.1.1)$$

Cette fonction dépend des paramètres de Θ . Soit $D \subseteq \mathbb{R}^p$ le domaine où les paramètres de Θ peuvent se situer. La méthodologie de maximum de vraisemblance définit l'estimateur de Θ (noté $\hat{\Theta}_{EVM}$) comme étant le vecteur qui maximise la fonction de vraisemblance \mathcal{L} . $\hat{\Theta}$ est appelé *estimateur à vraisemblance maximale* (EVM). Vu que le logarithme est une fonction croissante, ceci est équivalent à dire

que $\hat{\Theta}_{EVM}$ est le vecteur qui maximise la fonction de *log-vraisemblance* $\ell := \ln \mathcal{L}$.
En résumé,

$$\hat{\Theta}_{EVM} = \operatorname{argmax}_{\Theta \in D} \ell(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta) \quad (1.1.2)$$

$$= \operatorname{argmax}_{\Theta \in D} \ln (f_{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta)). \quad (1.1.3)$$

Cependant, lorsque S_t est un processus de Markov homogène, on peut écrire la densité de $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ d'une façon particulière :

$$f_{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = f_{S_{t_1}}(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} f_{S_{t_{i+1}}|S_{t_i}}(x_{i+1}|x_i). \quad (1.1.4)$$

De plus, vu qu'on considère que $S_{t_0} = S_0$ est une constante, on peut écrire

$$f_{S_{t_1}}(x_1) = f_{S_{t_1}|S_{t_0}}(x_1|S_{t_0}).$$

Donc, on peut réécrire la densité conjointe comme suit :

$$f_{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{n-1} f_{S_{t_{i+1}}|S_{t_i}}(x_{i+1}|x_i), \quad S_0 = x_0. \quad (1.1.5)$$

Donc finalement, en substituant 1.1.5 dans 1.1.1 et en prenant le logarithme, on peut réécrire la fonction de log-vraisemblance d'un processus Markovien homogène comme suit :

$$\ell(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln f_{S_{t_{i+1}}|S_{t_i}}(X_{t_{i+1}}|X_{t_i}), \quad S_0 = X_0. \quad (1.1.6)$$

Cette fonction de vraisemblance sera utilisée afin de calibrer certains processus stochastiques et de comparer ceux-ci lors de la modélisation du prix des certificats d'émission plus loin dans ce mémoire.

Une dernière remarque qui sera utilisée à quelques reprises au cours de ce mémoire est que dans le cas d'un processus de Markov homogène, la maximisation par maximum de vraisemblance appliquée sur les valeurs de l'actif S_t (tel que décrit précédemment) est équivalent à maximiser la densité conjointe des log-rendements $R_i = \ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i})$:

$$\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta) = \prod_{i=0}^{n-1} f_{S_{t_{i+1}}|S_{t_i}}(x_{i+1}|x_i) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{d}{dx_{i+1}} \mathbb{P}(S_{t_{i+1}} \leq x_{i+1} | S_{t_i} = x_i) =$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{d}{dx_{i+1}} \mathbb{P}(R_i \leq \ln(x_{i+1}/S_{t_i}) | S_{t_i} = x_i) =$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} f_{R_i|S_{t_i}}(\ln(x_{i+1}/x_i)|x_i) \frac{1}{x_{i+1}} = \prod_{i=0}^{n-1} f_{R_i|S_{t_i}}(\ln(x_{i+1}/x_i)|x_i) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_{i+1}}$$

On remarque que dans la dernière équation, $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_{i+1}}$ ne dépend pas du vecteur de paramètres Θ . Donc, maximiser $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta)$ est équivalent à maximiser $\prod_{i=0}^{n-1} f_{R_i|S_{t_i}}(\ln(x_{i+1}/x_i)|x_i)$, et cette dernière expression est la densité conjointe des log-rendements. Ceci donne comme résultat la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. *Soit une famille de processus de Markov homogène avec un domaine D pour les paramètres Θ . Alors l'estimateur à vraisemblance maximale pour Θ peut être décrit par la formule suivante :*

$$\hat{\Theta}_{EVM} = \operatorname{argmax}_{\Theta \in D} \prod_{i=0}^{n-1} f_{R_i|S_{t_i}}(\ln(x_{i+1}/x_i)|x_i).$$

Cette proposition sera utilisée pour l'estimation à vraisemblance maximale de certains processus dont on connaît une méthode pour la maximisation de la densité conjointe des log-rendements.

1.2. RAPPEL DE NOTIONS DE FINANCE

Les définitions suivantes concernent la description de certains produits dérivés typiques que l'on retrouve sur les marchés financiers. Ces définitions s'inspirent de celles données dans le livre de Hull [HUL].

Définition 1.2.1. *Un contrat à livrer est une entente financière entre deux agents économiques qui oblige un des deux agents à acheter un certain actif (qu'on nomme sous-jacent) à l'autre agent à une date future prédéterminée dans le contrat (l'échéance) et à un prix futur prédéterminé (le prix d'exercice).*

On dit de l'agent qui devra acheter l'actif qu'il a la partie *longue* du contrat. Celui-ci reçoit donc l'équivalent d'un flux monétaire à l'échéance de $S_T - K$ où S_T est le prix du sous-jacent à échéance et K est le prix d'exercice.

Définition 1.2.2. *Un contrat à terme est un contrat tout à fait similaire au contrat à livrer. Il sera donc présumé dans cette étude que les deux sont identiques*

à une seule différence près. La seule différence entre les deux est que le contrat à terme, contrairement au contrat à livrer, a la propriété d'être marqué-au-marché.

La propriété d'être marqué-au-marché stipule que lorsque la valeur au marché du contrat varie, cette variation de la valeur du contrat est immédiatement transférée d'un des agents à l'autre dans un compte de la chambre de compensation de la bourse qui régit les transactions de contrats à terme. Les flux monétaires associés à la détention d'un contrat à terme ne surviennent donc pas exclusivement à l'échéance, contrairement au contrat à livrer.

Définition 1.2.3. *Une option sur un actif (qu'on nomme sous-jacent) est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation d'acheter (pour une option d'achat) ou de vendre (pour une option de vente) le sous-jacent à une certaine date (l'échéance) et à un certain prix (le prix d'exercice) prédéterminés.*

Celui qui détient une option d'achat reçoit donc l'équivalent d'un flux monétaire à l'échéance de $\max(S_T - K, 0)$, où S_T est le prix du sous-jacent à l'échéance et K est le prix d'exercice. Le détenteur d'une option de vente reçoit plutôt l'équivalent d'un flux monétaire de $\max(K - S_T, 0)$.

Maintenant, afin de comprendre les modèles de tarification de produits dérivés qui seront décrits au cours de ce mémoire, il est important de comprendre la théorie de la tarification sans arbitrage. Depuis la parution de l'article de Black-Scholes [BS], cette méthodologie s'est très largement développée et elle est largement utilisée lors de la tarification de différents produits dérivés en finance. Une source pour la description de cette théorie dans le cas où les actifs du marché sont des processus de diffusion peut être trouvée dans [BJO].

Le terme arbitrage signifie essentiellement d'avoir l'opportunité de créer un portefeuille d'actifs autofinancé d'une valeur initiale nulle qui a une probabilité non-nulle d'avoir une valeur finale strictement positive et qui a une valeur finale non-négative presque sûrement. Ceci signifie qu'il existe des possibilités dans le marché de s'enrichir sans prendre de risque ni rien investir au départ. Bien évidemment, les termes «portefeuilles» et «autofinancés» doivent être définis plus rigoureusement si l'on veut définir l'arbitrage exactement. Cependant, ceci représente l'idée principale derrière les définitions. En pratique, des opportunités

d'arbitrage sur les marchés peuvent exister, mais généralement celles-ci se voient rapidement corrigées par la loi de l'offre et de la demande (voir Hull [HUL]). Une hypothèse est donc souvent effectuée en mathématiques financières : les marchés n'admettent pas d'opportunités d'arbitrage.

Pour les prochains théorèmes, on considérera que l'on est en présence d'un marché qui contient trois actifs différents. Le premier est un actif sans risque B dont le prix au temps t est de la forme $B_t = e^{rt}$, où r est le taux d'intérêt sans risque qui est considéré constant. Le second actif est un actif à risque S , dont on suppose que le prix est un processus de diffusion d'Itô par rapport au Mouvement Brownien Z_t . Le troisième actif sera un produit dérivé C ayant S comme sous-jacent. Le prix de C est lui aussi supposé comme étant un processus de diffusion ; ceci peut être considéré comme une conséquence du Lemme d'Itô. On rappelle que ces trois processus stochastiques sont définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on munira cette fois-ci de la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} = \{\sigma(Z_s; s \leq t)\}_{t \geq 0}$. Définissons maintenant ce qu'est une mesure martingale équivalente. Avant ceci, il faut introduire le concept de martingale locale, que l'on retrouve dans Jacod et Shiryaev [JAC].

Définition 1.2.4. *Soit un processus stochastique $\{M_t\}_{t \geq 0}$. On dit que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$ presque sûrement et $\forall k \in \mathbb{N}, M_{\min(T_k, t)}$ est une martingale.*

Définition 1.2.5. *Une mesure martingale équivalente locale \mathbb{Q} est une mesure sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) telle que*

$$(1) \quad \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \text{ et } \mathbb{Q} \gg \mathbb{P}.$$

$$(2) \quad \text{Les processus } M_{1,t} = e^{-rt}B_t, \quad M_{2,t} = e^{-rt}S_t \text{ et } M_{3,t} = e^{-rt}C_t \text{ sont des martingales locales sous } \mathbb{Q}.$$

Un théorème bien connu effectue le lien entre l'existence d'une mesure martingale équivalente locale et la possibilité d'effectuer de l'arbitrage sur le marché précédemment décrit. On donne souvent le nom de «Premier Théorème Fondamental des Mathématiques Financières» à ce théorème. D'une façon imprécise, il est souvent formulé de la façon suivante :

Théorème 1.2.1. *Le modèle de marché est sans-arbitrage essentiellement si et seulement si il existe une mesure martingale équivalente locale \mathbb{Q} .*

Cependant, afin d'être plus rigoureux, il faut définir exactement la notion d'arbitrage utilisée dans ce théorème, puis quel est le sens exact du mot «essentiellement». Afin de définir rigoureusement ces concepts, il est nécessaire de définir plusieurs autres notions auparavant, et ceci nécessiterait un travail plutôt long qui ne correspond pas aux objectifs de ce mémoire. Nous nous contenterons de citer une version plus exacte du théorème en référant le lecteur au livre de Björk [BJO] pour obtenir plus de détails sur les définitions rigoureuses et les subtilités mathématiques. Voici donc une définition plus exacte du «Premier Théorème Fondamental des Mathématiques Financières».

Théorème 1.2.2. *Soit le marché précédemment décrit au cours de cette section. Alors, les deux conditions sont équivalentes :*

- (1) *Le modèle de marché satisfait à la condition NFLVR.*
- (2) *Il existe une mesure martingale équivalente locale \mathbb{Q} .*

La condition NFLVR (*No Free Lunch Vanishing Risk*) utilisée dans ce théorème définit précisément ce qui est sous-entendu par «absence d'arbitrage» dans le modèle de marché. Pour la définition rigoureuse de ceci, voir Björk [BJO].

Il existe aussi un «Second Théorème Fondamental des Mathématiques Financières». Celui-ci s'emploie à déterminer dans quel cas cette mesure martingale équivalente locale est unique. Celui-ci ne sera pas donné ici, à cause des autres notions préalables qu'il serait nécessaire de définir pour le comprendre ; le lecteur est encore une fois référé à Björk [BJO] pour ceci.

La notion de mesure martingale équivalente locale, que nous appellerons à partir de maintenant simplement *mesure martingale*, permet d'effectuer la tarification de nombreux produits dérivés dans ce marché. Supposons qu'il existe une mesure martingale \mathbb{Q} pour le marché précédemment défini. Vu que sous \mathbb{Q} , le prix escompté au taux sans risque du produit dérivé $e^{-rt}C_t$ est une martingale, alors son prix initial a donc la représentation suivante :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T] \quad (1.2.1)$$

Il est à noter que dans le cas où la mesure martingale n'est pas unique, il existe plusieurs prix possibles pour le prix du produit dérivé. Il s'agit donc de déterminer quelle mesure martingale sera choisie pour effectuer la tarification.

Une extension de tous ces théorèmes dans un contexte plus général où les actifs du marché sont des semi-martingales est donnée dans Delbaen et Schachermayer [DEL]. En utilisant les théorèmes de ce dernier article, [BOY] soutient que les théorèmes d'existence de mesures martingales équivalentes et d'absence d'arbitrage, ainsi que la formule 1.2.1 sont encore valides dans le contexte où le prix du sous-jacent S du produit dérivé est de la forme $S_t = e^{L_t}$ où $\{L_t, t \geq 0\}$ est un processus de Lévy.

Ces théorèmes seront utilisés subséquemment lors de la description des modèles de tarification des contrats à terme et des options sur des contrats à terme. Ceux-ci seront appliqués à la tarification des produits dérivés de l'EU ETS.

1.3. FONCTIONNEMENT DU EU ETS

Le EU ETS sépare le temps en trois périodes (aussi appelées phases) distinctes : la première phase (2005-2007), la deuxième phase (2008-2012), et la troisième phase (2013-2020). Au début d'une phase, des permis d'émission de CO_2 (les EUA) sont distribués à différentes compagnies sur le territoire européen. Chaque EUA détenu par une compagnie donne le droit d'émettre une tonne de CO_2 au cours de la phase. Durant cette même phase, la quantité de CO_2 émise dans l'atmosphère par les industries soumises aux réglementations du EU ETS sont comptabilisées. De plus, les différents émetteurs de CO_2 peuvent se vendre les EUA entre eux. À la fin de la phase, les EUA viennent à échéance, et chaque compagnie dont les émissions de GES sont soumises à la réglementation du EU ETS doit avoir émis une quantité de CO_2 inférieure ou égale au nombre qui lui est permis par les EUA qu'elle a achetés. En cas contraire, une pénalité doit être payée. Il n'est pas possible de transporter des EUA d'une phase à une autre, c'est-à-dire que si une compagnie a un surplus d'EUA pour une certaine phase par rapport à ses émissions, il lui est impossible d'utiliser le surplus d'EUA dans

une phase subséquente. À cause de ceci, il est important de tenir compte de l'existence des différentes phases du EU ETS lors de la modélisation des EUA et de la tarification des produits dérivés liés à ceux-ci.

Ce ne sont pas toutes les entreprises européennes qui sont soumises aux réglementations du EU ETS. Cependant, en 2007, 10 000 installations responsables de près de 50% des émissions de CO_2 de l'Union Européenne étaient légiférées par le EU ETS (voir le Mémo de l'Union Européenne, [DIR]).

Afin d'harmoniser le fonctionnement du EU ETS avec les mécanismes du protocole de Kyoto, l'Union Européenne a permis l'utilisation de certains certificats alternatifs (CER et ERU) à la place des EUA qui donnent aussi le droit d'émettre une tonne de CO_2 pour chaque unité détenue. L'obtention de ces certificats, qui doivent être certifiés par la UNFCCC (*United Nations Framework Convention on Climate Change*), se fait par la réalisation de projets qui permettent la réduction d'émissions de GES à l'étranger. L'existence de ces certificats donne un choix supplémentaire aux entreprises européennes dont les émissions de CO_2 sont régies par la réglementation du EU ETS.

Les EUA et les CER s'échangent sur différentes bourses européennes, telles que Bluenext, European Energy Exchange (EEX) et Nord Pool. On donne l'appellation *Spot trading* à l'action de transiger directement les certificats sur les marchés. Il est à noter que les EUA et les CER qui s'échangent sur les marchés sont seulement ceux de la phase en cours dans le EU ETS. Par exemple, en 2010, seulement les EUA et CER de la deuxième phase s'échangent présentement sur les marchés.

De plus, des contrats à terme et des options européennes s'échangent aussi sur certaines bourses, comme par exemple sur European Climate Exchange (ECX) et European Energy Exchange (EEX). Certains de ces produits dérivés ont comme sous-jacent des EUA et des CER de la phase en cours. Nous qualifierons ces produits dérivés d'*intraphase*. Cependant, certains autres de ces produits dérivés échangés sur les marchés ont comme sous-jacent des EUA et des CER de la phase ultérieure. On appellera ceux-ci des produits dérivés *interphase*. Dans le cas de ceux-ci, vu que les sous-jacents ne s'échangent pas sur les marchés, les arguments

d'absence d'arbitrage usuellement invoqués lors de la tarification de produits dérivés peuvent ici se révéler inexacts. Ceci représente un défi supplémentaire pour la tarification de certains produits dérivés du carbone.

Des données de marché contenant les prix historiques de ces produits financiers sont disponibles sur plusieurs de ces bourses, et peuvent donc être utilisées à des fins d'analyse. Une description détaillée des données utilisées lors de la présente analyse du marché du carbone européen sera donnée plus tard au sein de ce mémoire.

Chapitre 2

MODÉLISATION DU PRIX DES EUA ET DES CER

Le premier objectif de ce mémoire est la modélisation du prix des EUA et des CER à l'aide de processus stochastiques. La modélisation sera effectuée en trois étapes principales. Tout d'abord, une liste de modèles qui sont des candidats pour représenter le prix des permis d'émission sera choisie et présentée. Ensuite, ces modèles seront calibrés aux données historiques des EUA et des CER, c'est-à-dire que les paramètres de chaque modèle seront estimés. Finalement, dans la dernière étape, il s'agit de comparer les modèles à l'aide de certains critères afin de déterminer lesquels sont les plus adéquats pour représenter le prix des EUA et des CER. La méthodologie utilisée dans ce chapitre est très similaire à celle utilisée dans l'article de Daskalakis [DA1]. Cependant, l'article de Daskalakis effectue les tests statistiques pour les EUA de la première phase, alors que la présente étude s'attarde aux EUA et aux CER de la deuxième phase. Il existe aussi d'autres modèles qui ont été développés récemment afin de modéliser le prix des certificats d'émission ; le modèle endogène de Chesney [CHE], le modèle de diffusion à sauts de Borovkov [BOK], le modèle d'équilibre stochastique de Seifert [SEI], le modèle de diffusion à changement de régime de Çetin [CET] et le modèle AR-GARCH à changement de régime de Benz [BEN1] n'en sont que quelques exemples. Cependant, la présente étude ne s'attardera pas à ceux-ci.

2.0.1. Description des données utilisées

Pour effectuer la modélisation du prix des EUA et des CER, les données utilisées sont deux séries chronologiques (une pour les EUA, l'autre pour les CER) qui contiennent le prix au marché des certificats d'émission de la deuxième phase sur la bourse Bluenext. On peut retrouver ces données sur le site <http://www.bluenext.fr/statistics/downloads.html>. La première série utilisée contient le prix d'un EUA à la fermeture de la bourse Bluenext pour chaque journée ouvrable en partant du 26 février 2008 jusqu'au 26 février 2010. La deuxième série contient le prix quotidien d'un CER pour la période allant du 12 août 2008 au 26 février 2010 ; les CER ne s'échangeaient pas sur Bluenext avant le 12 août 2008. Les prix affichés sont le prix pour un droit d'émission d'une tonne de CO₂. On considérera que chaque année contient 252 jours, car la bourse n'est ouverte que la semaine.

2.1. DIFFÉRENTS PROCESSUS STOCHASTIQUES

Il est maintenant utile d'introduire différents processus stochastiques qui peuvent potentiellement servir de modèle pour représenter le comportement du prix des EUA et des CER observé sur les bourses du carbone. De plus, les méthodes pour estimer les paramètres de ces processus et les calculs de la fonction de log-vraisemblance, qui sera utilisée lors de la comparaison des modèles, seront aussi présentés.

2.1.1. Mouvement Brownien Géométrique (modèle de Black-Scholes)

Le premier processus stochastique qui sera étudié afin de déterminer s'il peut servir pour la modélisation du prix des EUA et des CER est le *Mouvement Brownien Géométrique*. Ce processus a été largement utilisé en finance mathématique dans différents contextes. Une utilisation très répandue de ce processus a été effectuée lors de la modélisation du prix d'une action ou de différents autres actifs, et ce dans le but de tarifier des options ou d'autres produits dérivés. Le célèbre article de Black-Scholes [BS] illustre cette application. La raison pour laquelle ce

processus fait partie de la liste des modèles qui seront évalués pour la modélisation du prix des certificats d'émission est que ce processus représente souvent un modèle de référence dans de nombreuses autres recherches sur les prix d'actifs financiers.

Le *Mouvement Brownien Géométrique* S_t est la solution à l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t. \quad (2.1.1)$$

où μ et σ sont des constantes, Z_t est le Mouvement Brownien, et l'intégrale stochastique considérée est celle au sens d'Itô. Par le théorème 1.1.4, il existe une unique solution à cette EDS, et celle-ci a la représentation explicite suivante :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma Z_t}. \quad (2.1.2)$$

Ce processus stochastique est nommé *Mouvement Brownien Géométrique*. Soient $T > t$ deux indices de temps. Nous pouvons donc écrire

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t)}. \quad (2.1.3)$$

Ceci nous permet donc de déduire que la distribution conditionnelle de S_T par rapport à S_t est une loi lognormale $[\tilde{\mu}; \tilde{\sigma}^2]$ avec $\tilde{\mu} = \ln(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$ et $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(T - t)$:

$$f_{S_T|S_t}(x|S_t) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp \left[-\frac{\left(\ln(x/S_t) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right] \quad (2.1.4)$$

où $x > 0$.

Afin de modéliser le prix des EUA et des CER, il faudra estimer les paramètres de processus à l'aide des deux séries chronologiques des prix historiques. Décrivons la méthode utilisée pour le Mouvement Brownien Géométrique.

On voudrait à priori utiliser la méthodologie du maximum de vraisemblance, car celle-ci est décrite comme étant la plus souhaitable pour des processus stochastiques à temps continu par Phillips [PHI]. Pour le Mouvement Brownien Géométrique, la distribution des log-rendements est gaussienne, donc plus facile à manipuler que celle du processus S_t . On pourra donc utiliser la proposition 1.1.2

qui stipule qu'on trouve l'estimateur à vraisemblance maximale en maximisant la densité conjointe des log-rendements.

On voit bien par 2.1.3 que la distribution conditionnelle des log-rendements $\ln(\frac{S_T}{S_t})$ par rapport à S_t est une loi normale de paramètres $[\mu^* = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t); (\sigma^*)^2 = \sigma^2(T - t)]$. De plus, les log-rendements pour des intervalles de temps disjoints sont indépendants à cause de l'indépendance des accroissements du Mouvement Brownien. Cette propriété sera utilisée afin de calibrer le Mouvement Brownien Géométrique. Dans les deux séries chronologiques, les prix des EUA et des CER sont donnés à des intervalles de temps de même longueur, où nous dénoterons la longueur de ces intervalles temporels par h . La première étape de la calibration est de calculer les log-rendements $R_t = \ln(\frac{S_{t+h}}{S_t})$ de la série chronologique. Dénoteons le nombre de prix de la série chronologique par $n + 1$. Nous avons donc n log-rendements disponibles. Étant donné que ces variables suivent des lois normales indépendantes et identiquement distribuées, on connaît une formule qui donne les estimateurs à vraisemblance maximale pour la moyenne et la variance de ceux-ci (voir Anderson [AND]) :

$$\widehat{\mu}^* = \bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t_i}, \quad \widehat{(\sigma^2)^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{t_i} - \bar{R})^2.$$

Cependant, il est un fait connu que l'estimateur précédent pour la variance des log-rendements est un estimateur biaisé. Une correction sera effectuée pour avoir un estimateur sans-biais pour la variance. Cette correction est parfois nommée «correction de Bessel». Une référence pour ceci est Anderson [AND]. Voici les estimateurs qui seront utilisés :

$$\widehat{\mu}^* = \bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t_i}, \quad \widehat{(\sigma^2)^*} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_{t_i} - \bar{R})^2.$$

Nous avons que :

$$\widehat{\mu}^* = (\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})h, \quad \widehat{(\sigma^*)^2} = \hat{\sigma}^2 h.$$

Quelques simples manipulations algébriques nous donnent

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{h(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (R_{t_i} - \bar{R})^2, \quad \hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{h} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}. \quad (2.1.5)$$

Par le théorème 1.1.5, on sait que le Mouvement Brownien Géométrique est un processus de Markov homogène. Donc, la fonction de logvraisemblance est de la forme 1.1.6. On n'a qu'à remplacer 2.1.4 dans 1.1.6 et nous obtenons :

$$\ell(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{1}{X_{i+1} \sqrt{2\pi \hat{\sigma}^2 h}} e^{-\frac{(\ln X_{i+1} - \ln X_i - (\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})h)^2}{2\hat{\sigma}^2 h}} \right). \quad (2.1.6)$$

Cette fonction de vraisemblance sera utilisée un peu plus tard lors de la comparaison des différents modèles à l'aide du critère de Schwarz.

2.1.2. Modèle de Merton

Une généralisation du Mouvement Brownien Géométrique qui a été proposée par Merton [MER] produit des sauts au sein de ses trajectoires. Étant donné que le Mouvement Brownien Géométrique produit des trajectoires continues presque sûrement, et que cette caractéristique n'est pas nécessairement représentative des trajectoires des prix de différents actifs observées sur les marchés boursiers, le modèle proposé par Merton peut permettre de modéliser de façon plus exacte ces dernières. Ce processus a été identifié par Daskalakis [DA1] comme étant performant pour modéliser le prix des certificats d'émission, donc il serait judicieux de l'évaluer encore une fois dans ce mémoire.

Dans le modèle de Merton, le processus S_t prend la forme suivante :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_J + 0.5\sigma_J^2} - 1))t + \sigma Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}. \quad (2.1.7)$$

où $\mu, \mu_J, \sigma, \sigma_J$ et λ sont des constantes, puis Z_t est le Mouvement Brownien. On pose des restrictions sur les valeurs possibles des paramètres : $\sigma \geq 0, \sigma_J \geq 0$ et $\lambda \geq 0$.

Le processus $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ est un processus de Poisson Composé (voir Définition 1.1.9) où le taux du processus de Poisson est λ . La suite $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ est définie comme étant une suite de variables aléatoires normales indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ_J et d'écart-type σ_J . Lorsque $\lambda \neq 0$, le processus de Poisson Composé produit des sauts dans les trajectoires du processus S_t , ce qui

crée des discontinuités dans celles-ci. Il est à noter que si l'on pose $\lambda = 0$, on récupère le modèle de Black-Scholes, c'est-à-dire que S_t est le Mouvement Brownien Géométrique.

Soient $T > t$ deux indices de temps. Nous pouvons donc écrire

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_J + 0.5\sigma_J^2} - 1)\right)(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t) + \sum_{i=N_t+1}^{N_T} Y_i}. \quad (2.1.8)$$

Ceci nous permet donc de déduire la distribution conditionnelle de S_T par rapport à S_t . Remarquons tout d'abord que $N_T - N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(T-t)$. Remarquons aussi que Z_t et les Y_i ont tous une distribution normale et sont indépendants. À cause de ceci, lorsque l'on conditionne S_T par rapport à S_t et à l'évènement $\{N_T - N_t = m\}$, on remarque que $S_T | (S_t, \{N_T - N_t = m\})$ a une distribution lognormale $[\mu^*, (\sigma^*)^2]$ où

$$\mu^* = \ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_J + 0.5\sigma_J^2} - 1)\right)(T-t) + \mu_J m, \quad (\sigma^*)^2 = \sigma^2(T-t) + \sigma_J^2 m,$$

c'est-à-dire,

$$f_{S_T | S_t, N_T - N_t}(x | S_t, m) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} e^{\frac{\ln x - \mu^*}{2(\sigma^*)^2}}, \quad x > 0. \quad (2.1.9)$$

On peut donc en déduire la densité conditionnelle de S_T par rapport à S_t :

$$f_{S_T | S_t}(x | S_t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{S_T | S_t, N_T - N_t}(x | S_t, m) * \mathbb{P}(N_T - N_t = m) \quad (2.1.10)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} e^{\frac{\ln x - \mu^*}{2(\sigma^*)^2}} \frac{e^{-\lambda(T-t)} (\lambda(T-t))^m}{m!}. \quad (2.1.11)$$

Afin d'estimer les paramètres du processus de Merton et de calibrer le processus aux séries chronologiques des prix des EUA et des CER, la méthodologie du maximum de vraisemblance sera utilisée. Le processus de Merton est un *processus de Markov homogène*, étant donné qu'il est de la forme

$$S_t = S_0 e^{L_t}$$

où L_t est un processus de Lévy. Ainsi, la fonction de log-vraisemblance est obtenue en substituant 2.1.10 dans 1.1.6. Les estimateurs des paramètres seront donnés par 1.1.2. Ici, $\Theta = (\mu, \sigma, \lambda, \mu_J, \sigma_J)$. À cause des restrictions sur les paramètres, le domaine où les paramètres peuvent se situer est $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

La maximisation de la fonction de vraisemblance sera effectuée numériquement à l'aide de la routine *nlm* du logiciel R.

2.1.3. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

L'utilisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck en finance mathématique a été popularisée par Vasicek [VAS] afin de modéliser le comportement des taux d'intérêt. Une propriété intéressante de ce modèle est celle du *retour à la moyenne* ; la valeur de ce processus tend à osciller autour d'une certaine valeur (le paramètre μ du modèle). Afin d'évaluer si les prix des certificats devraient avoir une propriété de retour à la moyenne, il serait intéressant d'évaluer la performance de ce processus.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck S_t est représenté par la solution unique de l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \theta(\mu - S_t)dt + \sigma dZ_t. \quad (2.1.12)$$

où μ , θ et σ sont des constantes, Z_t est le Mouvement Brownien et l'intégrale stochastique considérée est celle prise au sens d'Itô. On pose les restrictions suivantes sur les paramètres : $\theta > 0$ et $\sigma > 0$. On voit ici la raison pour laquelle le processus S_t a la propriété de retour à la moyenne ; la dérive du processus est négative lorsque $S_t > \mu$ et positive quand $S_t < \mu$, ce qui tend à ramener S_t proche du paramètre μ . On appelle μ la moyenne à long terme. Le paramètre θ caractérise la vitesse à laquelle S_t tend à retourner vers μ . On sait que cette EDS possède une unique solution grâce au théorème 1.1.4, car les coefficients de dérive et de volatilité sont Lipschitziens. On peut se référer à Steele [STL] pour affirmer que la solution possède la représentation explicite suivante :

$$S_t = S_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dZ_s. \quad (2.1.13)$$

Par cette dernière expression et grâce à la proposition 1.1.1, on voit que la distribution de $S_t|S_0$ est une loi normale $N[S_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) ; \int_0^t \sigma^2 e^{2\theta(s-t)} ds]$. De plus, $\int_0^t \sigma^2 e^{2\theta(s-t)} ds = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})$. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus de Markov homogène à cause du théorème 1.1.5 ; les coefficients de dérive et de volatilité satisfont à la condition de régularité du théorème (ils

sont Lipschitziens) et ne dépendent que de la valeur du processus S_t et non directement du paramètre de temps t . On peut donc affirmer que si $T > t$, $S_T|S_t$ a une distribution normale

$$N[S_t e^{-\theta(T-t)} + \mu(1 - e^{-\theta(T-t)}) ; \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(T-t)})]. \quad (2.1.14)$$

À cause de cette dernière propriété, on voit que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut produire des valeurs négatives pour S_t , étant donné que la distribution conditionnelle $S_T|S_t$ est normale; une loi normale produit des valeurs négatives et positives. Ceci n'est pas une propriété voulue pour modéliser le prix d'actifs tels que les EUA et les CER.

On déduit directement de 2.1.14 que la densité conditionnelle de $S_T|S_t$ est donnée par la formule suivante :

$$f_{S_T|S_t}(x|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} e^{-\frac{(x-\mu^*)^2}{2(\sigma^*)^2}}, \quad (2.1.15)$$

où $\mu^* = S_t e^{-\theta(T-t)} + \mu(1 - e^{-\theta(T-t)})$ et $(\sigma^*)^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(T-t)})$.

Étant donné que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus de Markov homogène, la fonction de log-vraisemblance peut être obtenue en substituant 2.1.15 dans 1.1.6.

Il existe une formule fermée pour les estimateurs à vraisemblance maximale des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck; si $(Y_0, Y_h, Y_{2h}, \dots, Y_{mh})$ est une réalisation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètres $[\theta_Y; \mu_Y; \sigma_Y]$, alors soient les quantités suivantes :

$$M_x = \sum_{i=1}^m S_{i-1}, \quad M_y = \sum_{i=1}^m S_i, \quad M_{xy} = \sum_{i=1}^m S_{i-1} S_i$$

$$M_{xx} = \sum_{i=1}^m S_{i-1}^2, \quad M_{yy} = \sum_{i=1}^m S_i^2.$$

Alors les estimateurs des paramètres sont donnés par les formules suivantes (voir [VAN]) :

$$\hat{\mu}_Y = \frac{M_y M_{xx} - M_x M_{xy}}{m(M_{xx} - M_{xy}) - (S_x^2 - S_x S_y)} \quad (2.1.16)$$

$$\hat{\theta}_Y = -\frac{1}{h} \ln \left(\frac{M_{xy} - \hat{\mu} M_x - \hat{\mu} M_y + m \hat{\mu}^2}{M_{xx} - 2\hat{\mu} M_x + m \hat{\mu}^2} \right) \quad (2.1.17)$$

$$\alpha = e^{-\hat{\theta} h} \quad (2.1.18)$$

$$\hat{\sigma}_Y = \frac{2\hat{\theta} (M_{yy} - 2\alpha M_{xy} + \alpha^2 M_{xx} - 2\mu(1-\alpha)(M_y - \alpha M_x) + m \hat{\mu}^2 (1-\alpha)^2)}{m(1 - e^{-2\alpha})} \quad (2.1.19)$$

2.1.4. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck décrit à la section précédente a l'inconvénient de pouvoir produire des valeurs négatives pour S_t . Afin de pallier à cet inconvénient, il est possible de modifier légèrement le modèle ; nous allons supposer que $\ln S_t$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous utiliserons le nom *Processus d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel* pour se référer à ce modèle :

$$d \ln S_t = \theta(\mu - \ln S_t) dt + \sigma dZ_t. \quad (2.1.20)$$

Comme la distribution de $\ln S_t$ nous est donnée par 2.1.15, il suffit d'appliquer la transformation exponentielle $T(x) := e^x$ à $\ln S_t$ pour déduire directement la loi conditionnelle de $S_T | S_t = T(\ln S_T) | T(\ln S_t)$: celle-ci est une distribution lognormale de paramètres $[(\ln S_t) e^{-\theta(T-t)} + \mu(1 - e^{-\theta(T-t)}) ; \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(T-t)})]$. On peut résumer ceci à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 2.1.1. *Si S_t est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel décrit par 2.1.20, alors la densité conditionnelle de $S_T | S_t$ est donnée par :*

$$f_{S_T | S_t}(x | S_t) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu^*)^2}{2(\sigma^*)^2}},$$

$$\text{où } \mu^* = (\ln S_t) e^{-\theta(T-t)} + \mu(1 - e^{-\theta(T-t)}) \text{ et } (\sigma^*)^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta(T-t)}).$$

Étant donné que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus de Markov homogène, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel l'est aussi. La fonction de log-vraisemblance peut donc être obtenue en substituant 2.1.1 dans 1.1.6.

On sait que le processus $\ln S_t$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètres $[\theta; \mu; \sigma]$. On peut donc utiliser les estimateurs à vraisemblance maximale

d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck régulier décrits à la section précédente sur la série $\{e^{X_{t_i}}\}$ pour estimer les paramètres θ , μ et σ .

2.1.5. Processus à Racine Carrée

L'utilisation de ce modèle en finance mathématique a été popularisée par Cox, Ingersoll et Ross [CIR] afin de modéliser les taux d'intérêt. Contrairement au processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ce processus ne produit que des valeurs non-négatives. Ceci est donc un atout positif pour la modélisation des certificats. De plus, ce modèle a aussi une propriété de retour à la moyenne, ce qui en fait un autre candidat potentiel pour tester la présence de cette propriété pour le prix des certificats.

Le processus à Racine Carrée est représenté par l'unique (Dufresne, [DUF]) solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$dS_t = \kappa(\theta - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dZ_t, \quad (2.1.21)$$

où κ , θ et σ sont des constantes et Z_t est le Mouvement Brownien. On pose les restrictions suivantes sur les paramètres : $\theta > 0$, $\kappa > 0$ et $\sigma > 0$.

L'EDS (2.1.21) ressemble à celle du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Le processus à Racine Carrée a aussi la propriété de retour à la moyenne (vers θ). Cependant, dans le cas du processus à Racine Carrée, la volatilité est proportionnelle à $\sqrt{S_t}$. Contrairement au processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le processus à Racine Carrée ne produit pas de valeurs négatives pour S_t . La densité conditionnelle $f_{S_T|S_t}$ est donnée dans Cox et al. [CIR] :

$$f_{S_T|S_t}(x|S_t) = Ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q \left(2(uv)^{\frac{1}{2}}\right), \quad (2.1.22)$$

où

$$C = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}, \quad u = CS_t e^{-\kappa(T-t)}$$

$$v = Cx, \quad q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1.$$

I_q est la fonction de Bessel modifiée de type 1 avec ordre q donnée par

$$I_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^j}{j! \Gamma(\alpha + j + 1)}.$$

Cette densité conditionnelle est la densité d'une variable aléatoire chi-carré non-centrée $\chi^2[2Cx; 2q + 2; 2u]$ où $2q + 2$ est le nombre de degrés de liberté, $2u$ est le paramètre de non-centralité et $2Cx$ est le point où la densité est évaluée.

L'estimation des paramètres du processus à Racine Carrée sera effectuée à l'aide du maximum de vraisemblance. Le processus à Racine Carrée est un processus de Markov homogène ; voir la remarque après le théorème 1.1.5. La fonction de log-vraisemblance peut être obtenue en substituant 2.1.22 dans 1.1.6. Les estimateurs à vraisemblance maximale des paramètres seront donnés par 1.1.2. Ici, $\Theta = (\kappa, \theta, \sigma)$. Le domaine des paramètres est $D = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$. La maximisation de la fonction de vraisemblance sera effectuée numériquement à l'aide de la routine *nlm* du logiciel R.

Il est cependant utile de prendre en considération une caractéristique particulière du modèle à Racine Carrée ; Guo [GUO] a montré que pour un marché contenant un actif sans-risque et un actif suivant le processus à Racine Carrée, il n'existe pas de mesure martingale équivalente, sauf si $\kappa\theta = 0$, ce qui est un cas peu intéressant. Ce résultat indique que ce modèle peut être considéré inadéquat pour effectuer la tarification de produits dérivés, étant donné que la formule 1.2.1 provenant de la théorie de tarification sans arbitrage ne pourra pas être utilisée pour effectuer la tarification.

2.1.6. Processus Normale Inverse Gaussienne exponentiel

Lorsque l'on utilise le Mouvement Brownien Géométrique afin de modéliser le comportement d'un actif financier, on effectue la supposition que les log-rendements de cet actif ont une distribution normale. Or, un problème soulevé par la littérature scientifique est que dans le monde réel, on peut observer dans la distribution empirique des log-rendements de l'asymétrie, ou encore un aplatissement (kurtosis) supérieur à celui de la loi normale (voir Eberlein [EB2]). Afin de prendre en compte ces observations, certains ont proposé d'utiliser la famille des processus hyperboliques généralisés pour modéliser le comportement des actifs financiers : voir Eberlein et Keller [EB1] et Eberlein [EB2]. Le processus de Lévy Normale Inverse Gaussienne (NIG) fait partie de cette famille. Les trajectoires

d'un processus Normale Inverse Gaussienne exponentiel sont composées d'un très grand nombre de petits sauts. Étant donné que Daskalakis [DA1] a identifié les processus à sauts comme étant de bons candidats pour modéliser le prix des certificats d'émission, le processus Normale Inverse Gaussienne exponentiel pourrait se révéler efficace pour accomplir cet objectif.

Tout d'abord, introduisons la distribution Normale Inverse Gaussienne (NIG). On dit qu'une variable aléatoire X a une distribution NIG si sa densité est de la forme

$$f_X(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha \delta e^{\delta \gamma} K_1 \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\beta(x - \mu)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.23)$$

où $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ et K_λ est la fonction de Bessel modifiée de type 3 avec ordre λ donnée par

$$K_\lambda(x) = \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}x(u^{-1}+u)} du, \quad x > 0.$$

Les paramètres doivent faire partie du domaine D défini de la façon suivante : $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\alpha^2 > \beta^2$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Cette distribution a originellement été proposée par Barndorff-Nielsen [BN1].

La transformée de Laplace de cette distribution est donnée par

$$\mathbb{L}(z) = e^{-\mu z + \delta(\gamma - \gamma z)}, \quad |\beta - z| < \alpha, \quad (2.1.24)$$

où $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ et $\gamma_z^2 = \alpha^2 - (\beta - z)^2$.

Cette transformée de Laplace nous permet de déduire certaines propriétés intéressantes de la distribution NIG. Une première est que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes respectivement de distributions $\text{NIG}[\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1]$ et $\text{NIG}[\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2]$, alors $Y_1 + Y_2$ a une distribution $\text{NIG}[\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2]$. De plus, si Y a une distribution $\text{NIG}[\alpha, \beta, \delta, \mu]$ et si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $aY + b$ a une distribution $\text{NIG}[\alpha/a, \beta/a, a\delta, a\mu + b]$.

Il a été démontré par Barndorff-Nielsen et Halgreen [BN2] que la distribution NIG est infiniment divisible. À cause de cette propriété, les théorèmes 1.1.1 et 1.1.2 nous apprennent qu'il est possible de construire un processus de Lévy dont tous les accroissements ont une distribution NIG. Soit L_t un processus de Lévy où n'importe quel accroissement de longueur h a une distribution $\text{NIG}[\alpha, \beta, \delta h, \mu h]$.

Le processus NIG exponentiel S_t est de la forme

$$S_t = S_0 e^{L_t}. \quad (2.1.25)$$

Pour obtenir la densité conditionnelle $f_{S_T|S_t}$ du processus, on remarque qu'on peut écrire

$$S_T = e^{\ln S_t + L_T - L_t}, \quad (2.1.26)$$

où $L_T - L_t$ et S_t sont indépendants. De plus, $L_T - L_t$ a une distribution NIG $[\alpha, \beta, \delta(T-t), \mu(T-t)]$ et donc $\ln S_T | S_t$ a une distribution NIG $[\alpha, \beta, \delta(T-t), \mu(T-t) + \ln S_t]$. On peut donc déduire de ceci et de 2.1.23 que

$$f_{S_T|S_t}(x|S_t) = \frac{\alpha \delta^* e^{\delta^* \gamma} K_1 \left(\alpha \sqrt{\delta^{*2} + (\ln x - \mu^*)^2} \right)}{\pi x \sqrt{\delta^{*2} + (\ln x - \mu^*)^2}} e^{\beta(\ln x - \mu^*)}, \quad x > 0 \quad (2.1.27)$$

avec $\delta^* = \delta(T-t)$, $\mu^* = \mu(T-t) + \ln S_t$ et $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

Décrivons maintenant l'estimation des paramètres du processus NIG exponentiel. À cause de 2.1.25, le processus NIG exponentiel S_t est un processus de Markov homogène. Sa fonction de log-vraisemblance est donc obtenue en substituant 2.1.27 dans 1.1.6.

Afin de calibrer le processus S_t aux données disponibles, il convient tout d'abord de remarquer que les log-rendements $R_t = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$ pour des intervalles de temps de longueur h dont les intérieurs sont disjoints sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Leur distribution est une NIG $[\alpha, \beta, \delta h, \mu h]$. La calibration du processus sera donc effectuée en maximisant la fonction de vraisemblance (densité conjointe) des log-rendements ; la Proposition 1.1.2 nous garantit qu'il est possible de procéder ainsi pour maximiser la log-vraisemblance du processus $\{S_t, t \geq 0\}$. Un algorithme développé par Karlis [KAR] sera utilisé à cette fin.

Selon Karlis [KAR] la complexité de la fonction de vraisemblance de la distribution NIG rend difficile la maximisation directe de la fonction de log-vraisemblance à l'aide des méthodes d'optimisation numérique traditionnelles. Ainsi, dans son article, un algorithme du type EM est proposé afin d'effectuer

la maximisation de la fonction de log-vraisemblance. Selon cet auteur, cet algorithme permet de surpasser certaines difficultés reliées à l'optimisation exécutée à l'aide des méthodes traditionnelles. L'explication du fonctionnement des algorithmes de type EM est donnée dans Dempster [DEM]. De tels algorithmes ont été désignés afin d'estimer les paramètres de mixtures, et la distribution NIG est une mixture d'une distribution Normale et d'une distribution Inverse Gaussienne (voir Karlis [KAR]).

L'algorithme de Karlis est du type itératif. Voici comment il fonctionne. Soit (Y_1, \dots, Y_m) une suite de variables aléatoires i.i.d. de distribution NIG $[\alpha, \beta, \delta, \mu]$. La première étape est de calculer les estimateurs des moments pour chacun des paramètres. Ces estimateurs sont ceux qui font concorder les quatre premiers premiers moments centrés de la distribution NIG aux quatre moments échantillonnaires centrés. Considérons les quantités suivantes :

$$\bar{Y} = m^{-1} \sum_{i=1}^m Y_i, \quad s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\mu_k = m^{-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^k, \quad k = 2, 3, 4$$

$$\bar{\gamma}_1 = \mu_3 / \mu_2^{3/2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \mu_4 / \mu_2^2 - 3.$$

Alors, les estimateurs de moments (voir Karlis [KAR]) sont données par

$$\hat{\gamma}_M = \frac{3}{s\sqrt{3\bar{\gamma}_2 - 5\bar{\gamma}_1^2}}, \quad \hat{\beta}_M = \frac{\bar{\gamma}_1 s \hat{\gamma}_M^2}{3}, \quad \hat{\alpha}_M = \sqrt{\hat{\gamma}_M^2 + \hat{\beta}_M^2}, \quad (2.1.28)$$

$$\hat{\delta}_M = \frac{s^2 \hat{\gamma}_M^3}{\hat{\beta}_M^2 + \hat{\gamma}_M^2}, \quad \hat{\mu}_M = \bar{Y} - \hat{\beta}_M \frac{\hat{\delta}_M}{\hat{\gamma}_M}. \quad (2.1.29)$$

Il est à noter que lorsque $3\bar{\gamma}_2 < 5\bar{\gamma}_1^2$, les estimateurs des moments n'existent pas. Heureusement, cette situation ne s'est jamais produite dans cette présente étude. Ces estimateurs serviront comme itération initiale pour l'algorithme de Karlis :

$$(\hat{\alpha}^{(0)}, \hat{\beta}^{(0)}, \hat{\delta}^{(0)}, \hat{\gamma}^{(0)}, \hat{\mu}^{(0)}) := (\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M, \hat{\delta}_M, \hat{\gamma}_M, \hat{\mu}_M). \quad (2.1.30)$$

Lorsqu'on connaît la valeur de l'itération k , l'itération $k+1$ est calculée ainsi :

$$\phi^{(k)}(x) = 1 + ((x - \mu^{(k)})/\delta^{(k)})^2 \quad (2.1.31)$$

$$s_i = \frac{\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} K_0 \left(\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} \right)}{\alpha^{(k)} K_1 \left(\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} \right)} \quad (2.1.32)$$

$$w_i = \frac{\alpha^{(k)} K_{-2} \left(\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} \right)}{\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} K_{-1} \left(\delta^{(k)} (\phi^{(k)}(Y_i))^{1/2} \right)} \quad (2.1.33)$$

$$\hat{M} = m^{-1} \sum_{i=1}^m s_i \quad (2.1.34)$$

$$\hat{\Lambda} = m \left(\sum_{i=1}^m (w_i - \hat{M}^{-1}) \right)^{-1} \quad (2.1.35)$$

$$\delta^{(k+1)} = \hat{\Lambda}^{1/2} \quad (2.1.36)$$

$$\gamma^{(k+1)} = \delta^{(k+1)} / \hat{M} \quad (2.1.37)$$

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i w_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^m w_i}{m - \hat{M} (\sum_{i=1}^m w_i)} \quad (2.1.38)$$

$$\mu^{(k+1)} = \bar{Y} - \beta^{(k+1)} \hat{M} \quad (2.1.39)$$

$$\alpha^{(k+1)} = ((\gamma^{(k+1)})^2 + \beta^{(k+1)})^{1/2}, \quad (2.1.40)$$

où K_a est la fonction de Bessel modifiée du troisième type d'ordre a . Le critère utilisé pour déterminer à quel moment le processus d'itération doit s'arrêter sera de la forme suivante : on arrête le processus lorsque

$$\|(\hat{\alpha}^{(k+1)} - \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k+1)} - \hat{\beta}^{(k)}, \hat{\delta}^{(k+1)} - \hat{\delta}^{(k)}, \hat{\mu}^{(k+1)} - \hat{\mu}^{(k)})\| < Tol.$$

où Tol est une constante déterminée à l'avance (0,0005 dans notre cas). L'EVM des paramètres sera donc la dernière itération calculée.

Selon Karlis [**KAR**], l'algorithme de Karlis converge certainement vers un maximum local. De plus, encore selon Karlis [**KAR**], si les paramètres posés comme itération initiale sont dans D (leur domaine admissible), alors la valeur finale donnée par l'algorithme sera aussi dans D . Cependant, étant donné que la

convergence se fait vers un maximum local, il peut être recommandé de partir l'algorithme avec différentes itérations initiales pour atteindre le maximum global.

2.1.7. Processus Autorégressif d'ordre 1 : AR(1)

Le processus AR(1) est, contrairement aux modèles présentés précédemment, un processus stochastique à temps discret. Il est un cas particulier des processus ARIMA(p,d,q) qui est une large famille de processus stochastiques utilisés afin de modéliser des séries chronologiques. On peut se référer à Schumway et Stoffer [SHU] pour une discussion élaborée sur ces processus. Les processus ARIMA ont été popularisés par Box et Jenkins [BOX] pour l'analyse de séries chronologiques de différents types. Ceux-ci ont par la suite été largement utilisés en économétrie pour la modélisation de différentes séries chronologiques macroéconomiques. Dépendamment de la valeur du paramètre α_1 qui sera défini plus loin, le processus AR(1) peut soit être stationnaire et avoir une propriété de retour à la moyenne, ou encore être non-stationnaire et ne pas avoir cette propriété de retour à la moyenne. Ce processus sera donc utile pour tester la stationnarité et le retour à la moyenne du prix des certificats.

Le modèle AR(1) a la forme suivante :

$$S_t - \alpha_0 = \alpha_1(S_{t-1} - \alpha_0) + \epsilon_t. \quad (2.1.41)$$

Ici, α_0 et α_1 sont des constantes, $\{S_t\}$ représente le prix du certificat d'émission à chaque jour (où l'indice t s'évalue en jours), $\{\epsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires non-corrélées d'espérance nulle de variance constante σ^2 . Dans la présente étude, il sera supposé que les ϵ_t sont une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale $N[0, \sigma^2]$. Il est nécessaire de supposer une distribution pour les ϵ_t si l'on veut calculer une fonction de vraisemblance. L'idée de ce modèle est de supposer que le prix d'un actif au jour t est une fonction du prix du jour précédent et d'une modification stochastique qui est représentée par ϵ_t . Le livre de Schumway et Stoffer [SHU] nous apprend que dans le cas où $\alpha_1 \neq 1$, le processus S_t a une représentation stationnaire. De plus, si $|\alpha_1| < 1$, alors cette représentation stationnaire est causale.

Un cas particulier du AR(1) se produit lorsque $\alpha_1 = 1$. Dans ce cas, le modèle se réduit à

$$S_t = S_{t-1} + \epsilon_t. \quad (2.1.42)$$

Dans ce cas, le processus S_t n'est pas stationnaire. Ce modèle est nommé ARIMA(0,1,0).

Décrivons maintenant la démarche d'estimation des paramètres du modèle AR(1). On sait, grâce à la distribution des ϵ_t , que la distribution de $S_t|S_{t-1}$ est une loi normale $N[\alpha_0 + \alpha_1(S_{t-1} - \alpha_0), \sigma^2]$. On peut donc écrire la densité conditionnelle de cette distribution :

$$f_{S_{t+1}|S_t}(x|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - \alpha_0 - \alpha_1(S_{t-1} - \alpha_0))^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.1.43)$$

où t se calcule en jours. Un processus AR(1) de ce type est une chaîne de Markov homogène, et donc un processus Markov homogène. La définition d'un processus de Markov homogène à temps discret est tout à fait analogue à celle d'un processus de Markov homogène à temps continu. On peut donc écrire la fonction de log-vraisemblance de la manière suivante :

$$\ell(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \Theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln f_{S_{i+1}|S_i}(X_{t_{i+1}}|X_{t_i}), \quad S_0 = X_0. \quad (2.1.44)$$

L'estimation des paramètres se fait à l'aide de la méthodologie du maximum de vraisemblance. Les estimateurs à vraisemblance maximale sont donnés dans Shumway et Stoffer [SHU] :

$$\bar{x}_{(1)} = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} X_{t_j}, \quad \bar{x}_{(2)} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_{t_j}, \quad (2.1.45)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{t_j} - \bar{x}_{(2)})(X_{t_{j-1}} - \bar{x}_{(1)})}{\sum_{j=1}^n (X_{t_{j-1}} - \bar{x}_{(1)})^2}, \quad (2.1.46)$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\bar{x}_{(2)} - \hat{\alpha}_1 \bar{x}_{(1)}}{1 - \hat{\alpha}_1}, \quad (2.1.47)$$

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n [X_{t_j} - \hat{\alpha}_0(1 - \hat{\alpha}_1) - \hat{\alpha}_1 X_{t_{j-1}}]^2. \quad (2.1.48)$$

2.2. SÉLECTION DE MODÈLE

Une fois que tous les modèles qui représentent les prix des EUA et des CER sont calibrés, il faut maintenant les comparer entre eux afin de déterminer lequel est le plus performant. Plusieurs méthodes peuvent être employées à cette étape pour effectuer le choix des meilleurs modèles. Certaines méthodologies sont plutôt subjectives et font appel au jugement, mais il existe certains critères qui ont été développés afin de rendre ce choix plus objectif.

Deux objectifs que nous considérons ici afin de décider quels modèles sont les meilleurs sont la précision (ou l'exactitude) du modèle, et la parcimonie de celui-ci. La précision du modèle signifie que celui-ci produit des résultats qui sont similaires et proches de ceux qui sont observés empiriquement. La parcimonie d'un modèle signifie qu'il n'est pas trop compliqué sans raison ; par exemple, un modèle qui contient un très grand nombre de paramètres est jugé peu parcimonieux.

Une approche possible pour comparer les modèles est de comparer la fonction de log-vraisemblance pour chacun de ceux-ci (où les paramètres utilisés dans celles-ci sont ceux estimés précédemment). Plus un modèle a une fonction de log-vraisemblance élevée, plus celui-ci s'ajuste précisément aux données, et donc plus on pourrait le considérer adéquat. Cependant, un problème avec cette approche est discuté dans Klugman [KLU] : il n'y a aucun incitatif à la parcimonie dans l'utilisation de ce critère. Un modèle plus général sera toujours considéré plus précis qu'un cas particulier du modèle général selon ce critère.

Un critère a été développé par Schwarz [SCW] afin de remédier à ce problème et de tenir compte des deux objectifs : la précision et la parcimonie. Ce critère porte le nom de *Bayesian Information Criterion*. Lors de l'utilisation de celui-ci, une cote est attribuée à chacun des modèles. Plus le modèle a une cote basse, plus celui-ci est jugé adéquat. La cote du critère de Schwarz prend la forme suivante : $BIC = -2\ell + k \log n$, où k est le nombre de paramètres du modèle, n est le nombre de données utilisées pour calibrer le modèle et ℓ est la fonction de log-vraisemblance calculée précédemment, où les paramètres utilisés sont les estimateurs à vraisemblance maximale calculés précédemment. On remarque que plus il y a de paramètres dans le modèle, plus la cote BIC est haute, ce qui signifie

que les modèles peu parcimonieux seront pénalisés par rapport aux modèles avec moins de paramètres.

Il faut cependant rester vigilant par rapport à l'utilisation de ce critère. Un modèle peut mieux s'ajuster aux données de marché qu'un autre, sans toutefois que celui-ci capture des propriétés intrinsèques au marché supplémentaires ; certains modèles sont simplement plus flexibles. Alors, si l'on voulait considérer un modèle qui est plus efficace pour effectuer des prédictions, le critère de Schwartz n'est pas nécessairement le meilleur critère. Cependant, dans le cadre de ce mémoire, on utilisera celui-ci ; nous nous limiterons à évaluer la précision et la parcimonie des modèles.

2.3. RÉSULTATS

Il y a en tout quatre séries chronologiques qui ont été analysées. La première représente les prix des EUA sur Bluenext du 26-02-2008 au 26-02-2010, soit la totalité des prix quotidiens des EUA de la deuxième phase. La deuxième représente la totalité de prix quotidiens sur Bluenext des CER pendant la deuxième phase, soit du 12-08-2008 au 26-02-2010. Or, les prix des EUA et des CER ont connu une sévère baisse dans la période précédent le 19-05-2009, et ceci est probablement dû à la lourde récession et à la crise économique qui ont sévi à travers le monde durant cette période. Les deux dernières séries étudiées sont donc les prix des EUA et CER sur Bluenext de la période allant du 19-05-2009 au 26-02-2010, car les prix des certificats d'émission ont possiblement eu un comportement inhabituel et non-représentatif de l'avenir avant le 19-05-2009. Le graphique de ces quatre séries chronologiques est donné par la figure 2.1.

Voici maintenant les résultats des calibrations des différents modèles aux séries chronologiques des EUA et des CER. Les figures 2.2 et 2.3 contiennent toutes les valeurs des paramètres estimés pour chacun des modèles. On rappelle que les estimations des paramètres ont été faites pour tous les modèles en suivant la méthodologie de vraisemblance maximale décrite par l'équation 1.1.2. La seule exception pour ceci a été faite pour le Mouvement Brownien Géométrique où l'on a utilisé un autre estimateur pour la volatilité afin d'obtenir un estimateur non-biaisé. La

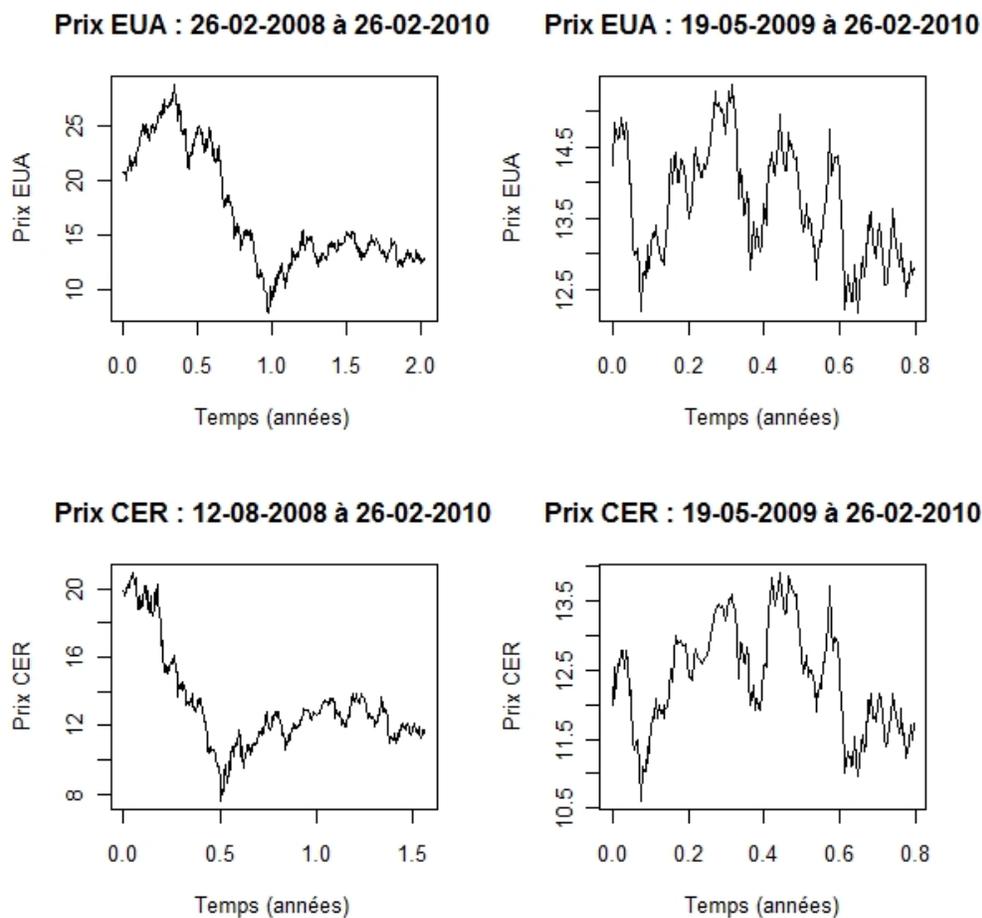


FIGURE 2.1. Graphiques des prix des EUA et des CER

maximisation de log-vraisemblance a été effectuée numériquement à l'aide des routines *nlm* ou *optim* du logiciel R, sauf pour les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel et AR(1) où des formules analytiques connues pour les estimateurs à vraisemblance maximale ont été utilisées.

Effectuons un survol des résultats des figures 2.2 et 2.3 qui donnent les paramètres estimés de chacune des distributions. Seulement les résultats de la colonne de droite où les données pendant la crise financière de 2008-2009 ont été retirées sera commentée, par souci de concision.

Pour le Mouvement Brownien Géométrique, le paramètre de dérive μ vaut respectivement -0,0771 pour les EUA et 0,0231 pour les CER. Cependant, la période sur laquelle les données sont prises est probablement trop courte pour

Calibration pour les EUA		
Paramètres	26-02-2008 au 26-02-2010	19-05-2009 au 26-02-2010
Modèle de Black-Scholes		
μ	-0.1445	-0.0771
σ	0.4329	0.3413
Modèle de Merton		
μ	-0.1441	-0.0771
σ	0.3135	0.3413
λ	94.4548	49.9792
μ_J	-0.0072	2.8678e-05
σ_J	0.0301	0.0000
Modèle NIG Exponentiel		
α	48.3557	230.9110
β	-5.9546	-97.2481
δ	8.8926	19.9619
μ	0.8653	9.1337
Modèle Ornstein-Uhlenbeck Exponentiel		
θ	1.0527	17.3842
μ	2.5619	2.6070
σ	0.4333	0.3474
Modèle Ornstein-Uhlenbeck		
θ	0.7955	16.9509
μ	12.0917	13.5797
σ	6.8069	4.7044
Processus à Racine Carrée		
κ	1.1095	17.3005
θ	13.4839	13.5818
σ	1.6718	1.2775
Modèle AR(1)		
α_0	16.9952	13.6659
α_1	0.9961	0.9325
σ^2	0.1834	0.0820
Modèle ARIMA(0,1,0)		
σ^2	0.1838	0.0849

FIGURE 2.2. Paramètres calibrés pour les séries des EUA

inférer une tendance générale à long terme des prix des certificats à la hausse ou à la baisse. Le paramètre de volatilité est comparable dans les deux cas (proche de 0,3).

Pour le Modèle de Merton, on découvre que pour les EUA, les paramètres μ_J et σ_J sont pratiquement nuls. Ceci implique que le Modèle de Merton est dans ce cas presque identique au Mouvement Brownien Géométrique ; il n'amène donc aucune amélioration. Pour le cas des CER, le processus calibré produit

Calibration pour les CER		
Paramètres	12-08-2008 au 26-02-2010	19-05-2009 au 26-02-2010
Modèle Black-Scholes		
μ	-0.2459	0.0231
σ	0.4249	0.3184
Modèle de Merton		
μ	-0.2458	0.0233
σ	0.2505	0.1744
λ	159.9163	419.0600
μ_J	-0.0051	-0.0019
σ_J	0.0267	0.0129
Modèle NIG Exponentiel		
α	40.7427	98.2134
β	-6.4187	-14.8477
δ	7.1859	9.6415
μ	0.8103	1.4469
Modèle Ornstein-Uhlenbeck Exponentiel		
θ	3.7715	13.5444
μ	2.4682	2.5129
σ	0.4255	0.3228
Modèle Ornstein-Uhlenbeck		
θ	3.5045	13.2131
μ	11.6885	12.3646
σ	5.3658	3.9383
Processus à Racine Carrée		
κ	4.0429	13.3621
θ	11.8857	12.3648
σ	1.4876	1.1264
Modèle AR(1)		
α_0	14.5440	12.3106
α_1	0.9955	0.9456
σ^2	0.1144	0.0582
Modèle ARIMA(0,1,0)		
σ^2	0.1146	0.0599

FIGURE 2.3. Paramètres calibrés pour les séries des CER

un très grand nombre de sauts ($\lambda = 419,06$) qui sont de magnitude très petite ($\mu_J = -0,0019$ et $\sigma_J = 0,0129$).

Pour le Modèle de NIG, il est un peu plus difficile d'interpréter les paramètres. Cependant, on remarque que le paramètre β est négatif pour les EUA ($\beta = -97,2481$) et les CER ($\beta = -14,8477$). Ceci signifie qu'on observe une asymétrie à gauche dans la distribution empirique des log-rendements.

Pour le Modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, le paramètre θ représente la vitesse à laquelle s'effectue le retour à la moyenne, et le paramètre σ représente la volatilité des prix. Cependant, il est difficile d'interpréter intuitivement la valeur de ces deux paramètres estimés. Le paramètre μ nous indique la moyenne à long terme autour de laquelle s'effectue le retour à la moyenne. Cette valeur est 13,5797 pour les EUA et 12,3646 pour les CER. Donc, selon un tel modèle, le prix oscillerait dans le temps autour de 13 Euros.

Pour le Modèle d'Ornstein-Uhlenbeck exponentiel, on remarque que la volatilité σ est proche de 0,3 pour les EUA et les CER, ce qui se compare avec les paramètres du Mouvement Brownien Géométrique. La moyenne à long terme pour ce processus est e^μ , qui vaut respectivement 13,5583 pour les EUA et 12,3407 pour les CER, ce qui est proche de la moyenne à long terme du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour le processus à Racine Carrée, il est ardu de donner une interprétation concrète aux valeurs des paramètres κ et σ , même si on sait que κ régit la vitesse à laquelle s'effectue le retour à la moyenne et σ contrôle la volatilité du processus. Le paramètre θ est ici la moyenne à long terme du processus autour duquel le processus oscille. Celui-ci vaut 13,5818 dans le cas des EUA et 12,3648 dans le cas des CER, ce qui est pratiquement identique aux valeurs du paramètre μ du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour le processus AR(1), le paramètre σ représente l'écart-type du prix quotidien des certificats (conditionnel au prix de la dernière journée). Celui-ci est 0.2864 pour les EUA et 0,2412 pour les CER. Le paramètre α_1 représente la vitesse de retour à la moyenne, mais il est difficile d'interpréter la valeur de ce paramètre. Finalement, le paramètre α_0 est la moyenne à long terme du processus. Elle vaut 13,6659 pour les EUA et 12,3106 pour les CER, ce qui est très proche des moyennes à long terme déterminées par les autres processus.

Afin de pouvoir comparer visuellement le comportement des processus stochastiques utilisés pour la modélisation des certificats avec les prix empiriques des certificats, une trajectoire a été simulée pour chacun des modèles. Les paramètres utilisés lors de la simulation étaient les estimateurs à vraisemblance

maximale pour les EUA des données d'après la crise financière (deuxième colonne de la figure 2.2). Plusieurs de ces processus sont aisément simulables de façon exacte. Cependant, il est à noter que la méthode de Milstein, décrite dans Higham [HIG], a été utilisée pour simuler le processus à Racine Carrée. De plus, afin d'obtenir des variables aléatoires de la distribution NIG, la méthode traditionnelle d'inversion décrite dans Klugman [KLU] a été utilisée ; si U suit une loi uniforme $[0,1]$ et F_{NIG} est la fonction de répartition d'une variable aléatoire NIG, alors $F^{-1}(U)$ a la distribution donnée par F_{NIG} .

Simulation des processus avec paramètres calibrés, partie 1

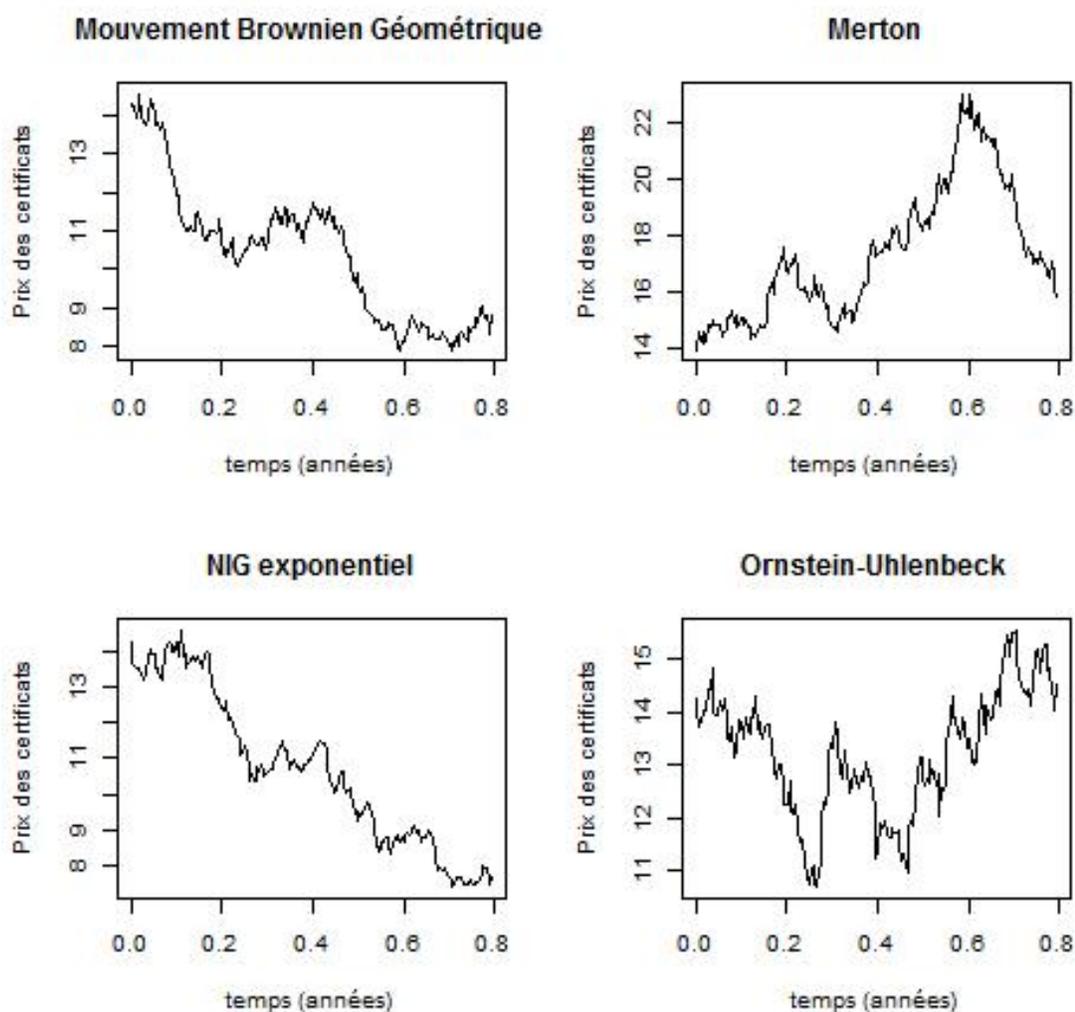


FIGURE 2.4. Simulation d'une trajectoire pour chacun des processus des certificats

Simulation des processus avec paramètres calibrés, partie 2

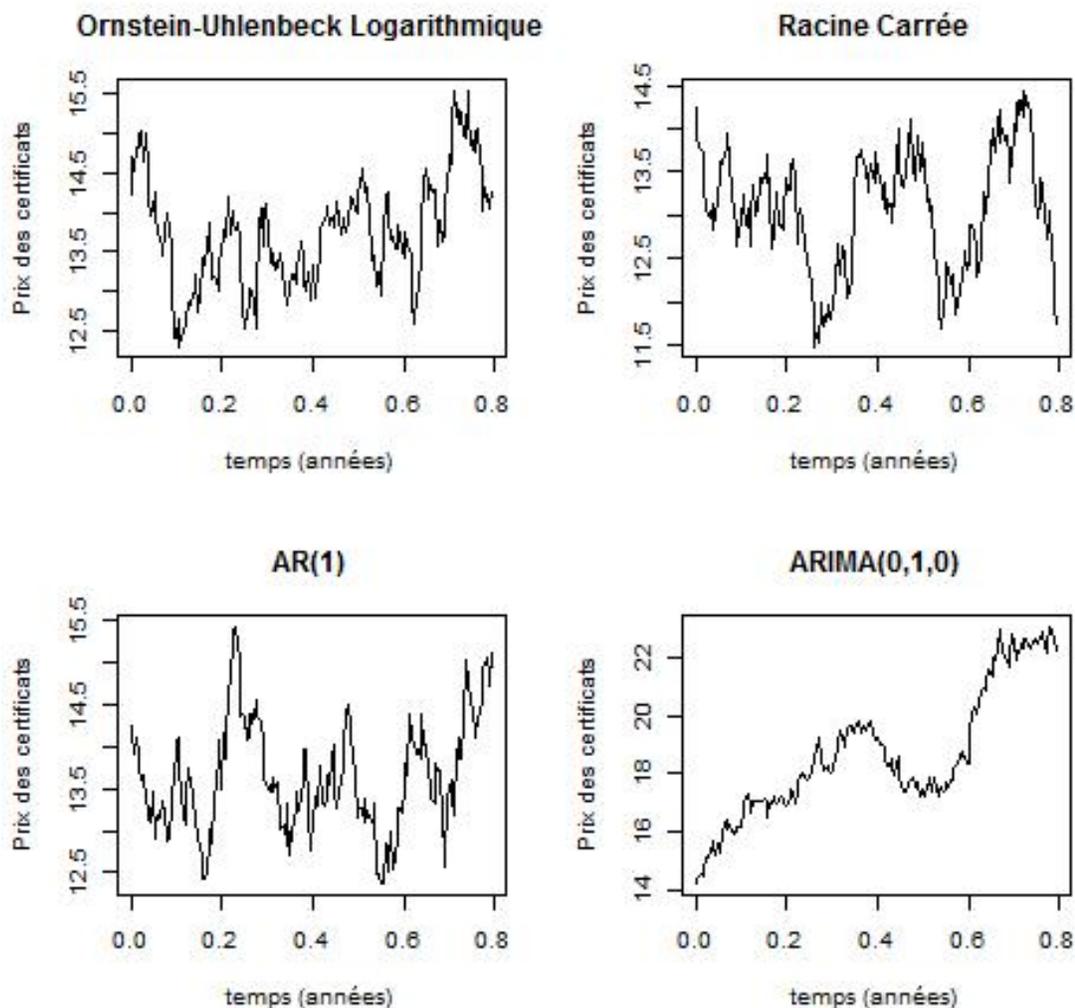


FIGURE 2.5. Simulation d'une trajectoire pour chacun des processus des certificats

On voit les trajectoires simulées dans les figures 2.4 et 2.5. Les prix des certificats d'après la crise (colonne droite de la figure 2.1) ressemblent plutôt à ceux des processus possédant un retour à la moyenne, soit Ornstein-Uhlenbeck, Ornstein-Uhlenbeck logarithmique, Racine Carrée et AR(1), ce qui donne un indice qui pourrait indiquer que ces processus risquent d'être plus adaptés à la situation des certificats d'émission.

Par la suite, la performance de chacun des modèles est maintenant présentée dans les figures 2.6 et 2.7. Celles-ci illustrent le nombre de paramètres, la fonction

de log-vraisemblance et la cote de Schwarz (BIC) pour chacun des modèles et pour chacune des quatre séries chronologiques. Ces résultats seront discutés dans les prochains paragraphes.

EUA : 26-02-2008 au 26-02-2010			
Modèle	Nb. paramètres	Log-vraisemblance	Cote Schwarz (BIC)
Black-Scholes	2	-308.3051	629.0790
Merton	5	-294.5081	620.1882
NIG Exponentiel	4	-295.1979	615.3335
O-U Exponentiel	3	-307.7709	634.2450
Ornstein-Uhlenbeck	3	-290.9959	600.6949
Racine Carrée	3	-285.5675	589.8382
AR(1)	3	-291.3469	601.3971
ARIMA(0,1,0)	1	-291.7151	589.6646

EUA : 19-05-2009 au 26-02-2010			
Modèle	Nb. paramètres	Log-vraisemblance	Cote Schwarz (BIC)
Black-Scholes	2	-38.7464	88.0894
Merton	5	-38.7464	103.9843
NIG Exponentiel	4	-36.6620	94.5173
O-U Exponentiel	3	-35.4562	86.8073
Ornstein-Uhlenbeck	3	-33.8918	83.6785
Racine Carrée	3	-34.5072	84.9093
AR(1)	3	-33.9341	83.7631
ARIMA(0,1,0)	1	-37.1614	79.6210

FIGURE 2.6. Résultats de la calibration pour les séries des EUA

Les autocorrélations partielles (PACF) des séries chronologiques des prix des certificats peuvent être de bons indices pour aider à déterminer si le processus autorégressif d'ordre 1 est un choix approprié. Celles-ci sont données dans la figure 2.8. On remarque que pour les quatre séries, la première autocorrélation est hautement significative, et la grande majorité des autres autocorrélations ne le sont pas. Ceci est typique d'une série AR(1) stationnaire. À priori, le modèle AR(1) semble donc raisonnable.

Afin de déterminer quel modèle est le meilleur entre le AR(1) général et le ARIMA(0,1,0), on peut effectuer un test statistique pour déterminer si le coefficient $\alpha_1 = 1$. Les intervalles de confiance gaussiens d'un niveau de confiance

CER : 12-08-2008 au 26-02-2010			
Modèle	Nb. paramètres	Log-vraisemblance	Cote Schwarz (BIC)
Black-Scholes	2	-139.5174	290.9825
Merton	5	-123.5217	276.9125
NIG Exponentiel	4	-123.9393	271.7738
O-U Exponentiel	3	-137.1320	292.1854
Ornstein-Uhlenbeck	3	-128.6411	275.2036
Racine Carrée	3	-126.5589	271.0393
AR(1)	3	-131.0831	280.0876
ARIMA(0,1,0)	1	-132.0232	270.0202

CER : 19-05-2009 au 26-02-2010			
Modèle	Nb. paramètres	Log-vraisemblance	Cote Schwarz (BIC)
Black-Scholes	2	-4.9304	20.4575
Merton	5	-2.8966	32.2848
NIG Exponentiel	4	-3.0739	27.3410
O-U Exponentiel	3	-2.3391	20.5732
Ornstein-Uhlenbeck	3	0.2028	15.4893
Racine Carrée	3	-0.8801	17.6551
AR(1)	3	0.1756	15.5438
ARIMA(0,1,0)	1	-2.3282	9.9548

FIGURE 2.7. Résultats de la calibration pour les séries des CER

de 5% pour α_1 sont donnés par la figure 2.9. On remarque que la valeur 1 est comprise dans les intervalles de confiance des deux séries qui contiennent les prix des certificats avant le 19-05-2009. Donc, pour ces deux séries chronologiques, on préférera le ARIMA(0,1,0) au AR(1). Cependant, pour les deux séries qui ne contiennent que les données après le 19-05-2009, on voit que la valeur 1 n'est pas comprise dans les intervalles de confiance, et donc on préférera dans ce cas le processus AR(1) général. Ces résultats sont peu suprenants, étant donné que la baisse des prix des certificats avant le 19-05-2009 donne l'impression que la série des prix provient d'un processus non-stationnaire.

Si on regarde les figures 2.6 et 2.7, on remarque que les trois processus qui performant le mieux selon le critère de Schwarz (sauf peut-être pour la série des CER qui commence le 12-08-2008) sont le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le processus à Racine Carrée et le processus AR(1) (où le ARIMA(0,1,0) est considéré comme un cas particulier de celui-ci). Ces trois processus, si l'on exclut le cas

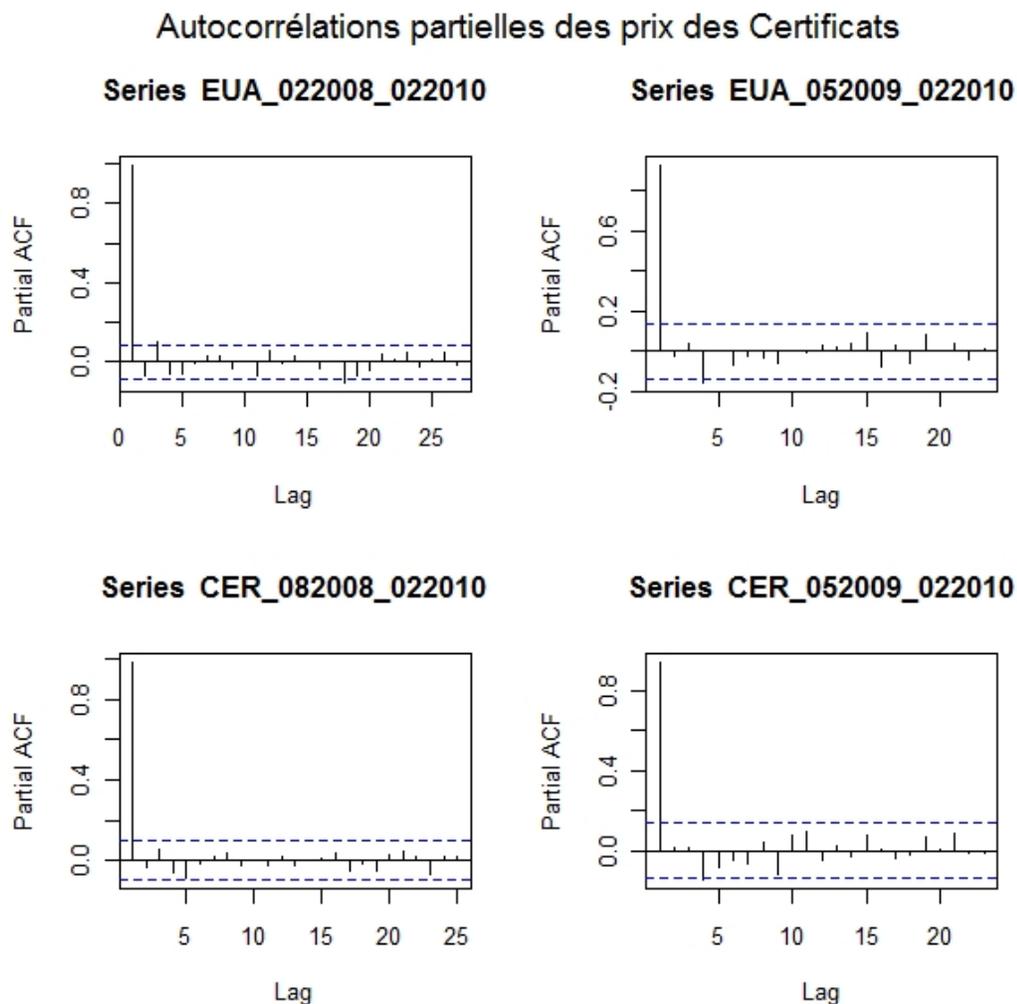


FIGURE 2.8. Autocorrélations partielles des prix des certificats

Intervalles de confiance pour α_1 du AR(1)		
Période	Estimation Ponctuelle	Intervalle de confiance (95%)
EUA : 26-02-2008 au 26-02-2010	0.9961	[0.9903 ; 1.0020]
EUA : 19-05-2009 au 26-02-2010	0.9325	[0.8843 ; 0.9807]
CER : 12-08-2008 au 26-02-2010	0.9955	[0.9872 ; 1.0038]
CER : 19-05-2009 au 26-02-2010	0.9456	[0.9032 ; 0.9879]

FIGURE 2.9. Intervalles de confiance pour le coefficient autorégressif

du ARIMA(0,1,0), ont une propriété de retour à la moyenne, en plus d'avoir des log-rendements qui ne sont pas indépendants. De plus, si on se restreint aux séries qui commencent après la crise (après le 19-05-2009), on voit que les processus les plus performants sont le AR(1) général et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Le test statistique qui a été effectué sur le coefficient α_1 indique la présence d'une propriété de retour à la moyenne, qui est aussi présente dans le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il serait judicieux de s'interroger s'il est sensé que le processus choisi pour représenter le prix des certificat ait une telle propriété, et si on pouvait donner une interprétation financière à ce phénomène.

Étant donné que le Mouvement Brownien Géométrique, le processus de Merton et le processus NIG exponentiel sont des processus de Lévy exponentiels de la forme 2.1.25, ils produisent des log-rendements indépendants et identiquement distribués (pour des périodes de temps disjointes de même longueur). On peut alors comparer la distribution empirique de ceux-ci ainsi que leur distribution théorique estimée par la méthodologie du maximum de vraisemblance. De plus, on peut observer les autocorrélations empiriques des log-rendements afin de déterminer si l'hypothèse de log-rendements indépendants est plausible ; si ceux-ci sont corrélés, alors ils ne seront certainement pas indépendants. Les figures 2.10, 2.11, 2.12 et 2.13 montrent les distributions empiriques et théoriques des log-rendements en plus des autocorrélations de ceux-ci pour chacune des quatre séries chronologiques.

Afin de mieux observer et comparer les ailes des distributions empiriques et théoriques pour le Mouvement Brownien Géométrique, le processus de Merton et le processus NIG exponentiel, le logarithme des densités est montré dans les figures 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17.

Dans le graphique des autocorrélations des log-rendements (figures 2.10, 2.11, 2.12 et 2.13), la barre pointillée horizontale respresente le seuil significatif pour les autocorrélations. On remarque que pour les séries qui contiennent des données pendant la crise (avant le 19-05-2009), plusieurs autocorrélations sont significatives, et les processus Lévy-exponentiels de la forme 2.1.25 peuvent donc représenter un choix inadéquat dans ce cas. Cependant, si l'on se restreint aux données d'après le 19-05-2009, on voit que pratiquement aucune des autocorrélations n'est significative. Il est à noter que la première autocorrélation du graphique est celle d'ordre 0, et donc elle vaut toujours 1 : ce n'est pas une autocorrélation significative. Donc, dans le cas des données d'après la crise, un modèle exponentiel Lévy

EUA : Distribution des log-rendements du 26-02-2008 au 26-02-2010

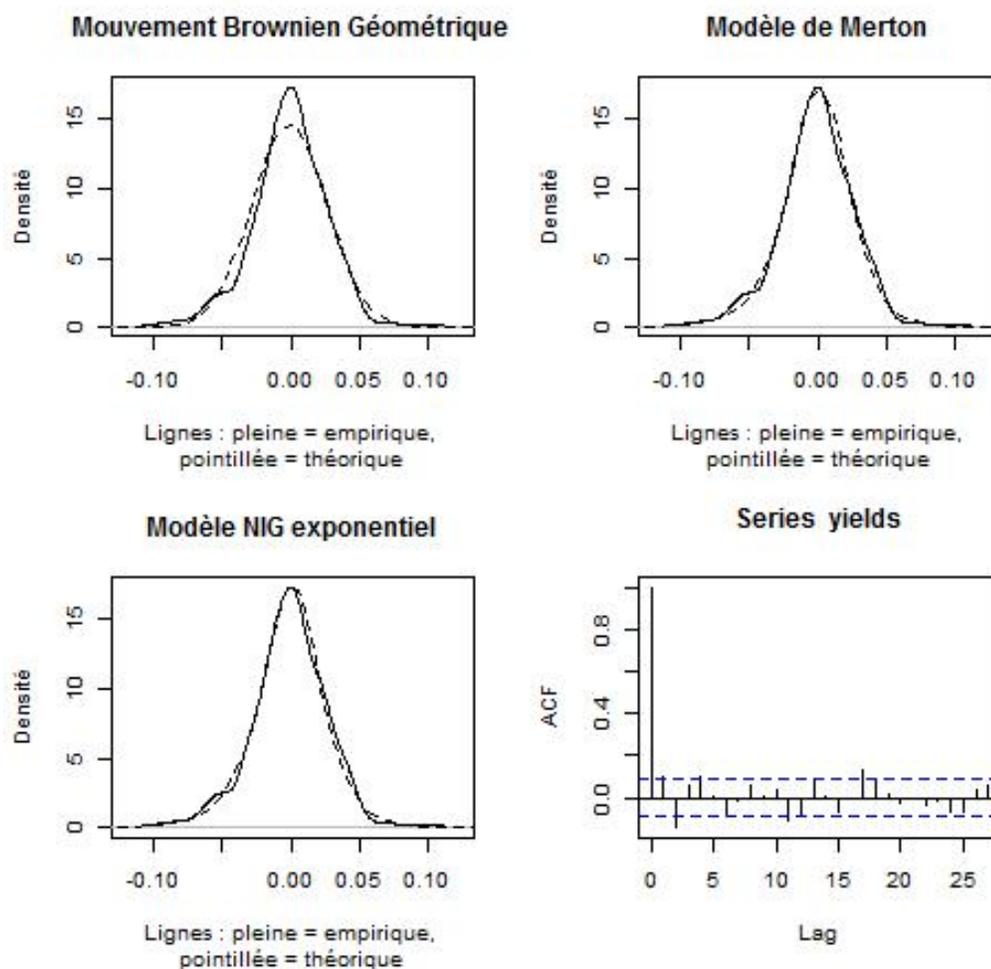


FIGURE 2.10. Distribution des log-rendements des EUA : période complète

pourrait peut-être modéliser adéquatement les données. Pour les quatre séries de prix des certificats, on observe sur les graphiques 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17 que les log-rendements des modèles de Merton et NIG sont mieux ajustés aux données empiriques que ceux du modèle de Black-Scholes. Donc, même si le modèle de Merton et le modèle NIG exponentiel ne sont pas dans les plus performants de la liste selon le critère de Schwarz, ils pourraient probablement constituer des modèles raisonnables dans cette situation.

En conclusion, les processus les plus performants selon le critère de Schwarz pour les séries commençant après la crise financière (après le 19-05-2009) sont le

EUA : Distribution des log-rendements du 19-05-2009 au 26-02-2010

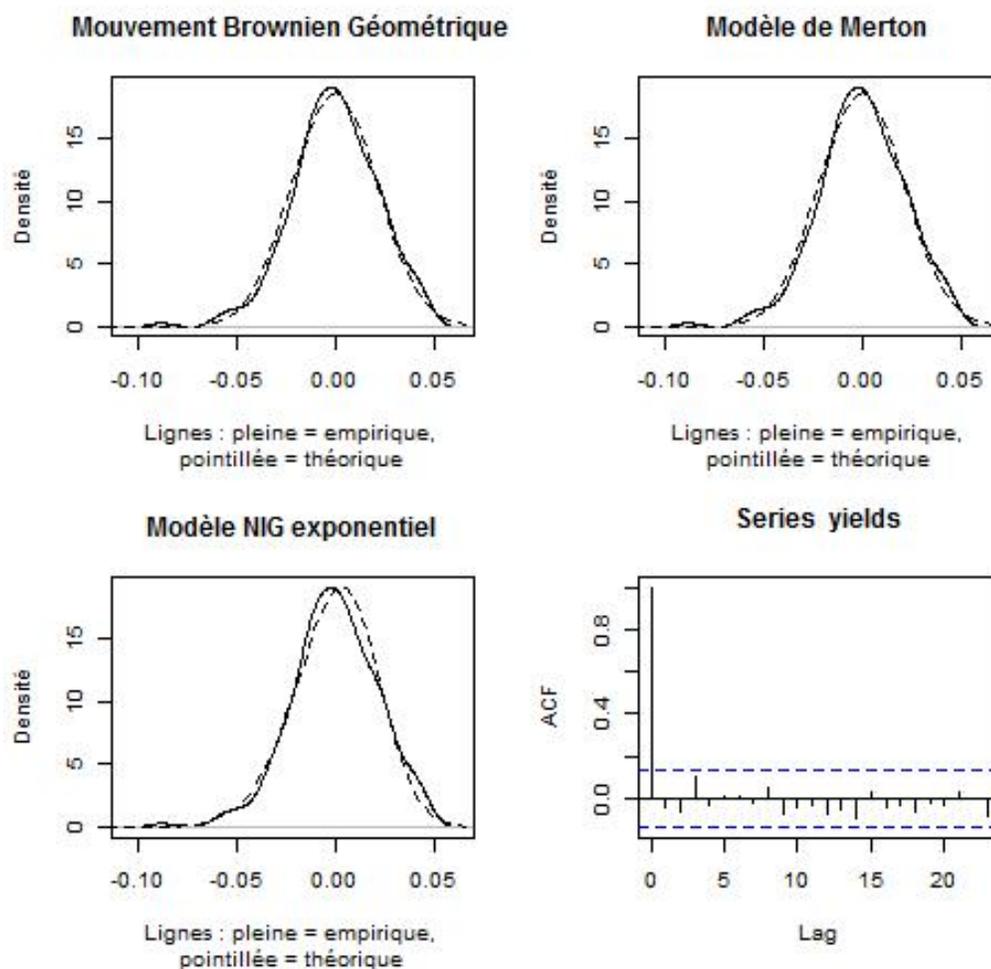


FIGURE 2.11. Distribution des log-rendements des EUA : après le 19-05-2009

processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le AR(1) non-stationnaire. Cependant, lorsqu'on regarde l'autocorrélation des log-rendements, on remarque que des processus de Lévy exponentiels de la forme 2.1.25 pourraient représenter des modèles raisonnables, même si le processus NIG exponentiel et le processus de Merton ne sont pas les plus performants selon le critère de Schwarz.

Cependant, il ne faudrait pas considérer les résultats obtenus dans ce chapitre comme définitifs. Tout d'abord, étant donné l'immaturité du EU ETS, la structure du marché est appelée à changer dans le futur, et donc la modélisation des processus devra être modifiée en conséquence. De plus, la comparaison des processus s'est faite à l'aide du critère de Schwarz, qui compare la précision et

CER : Distribution des log-rendements du 12-08-2008 au 26-02-2010

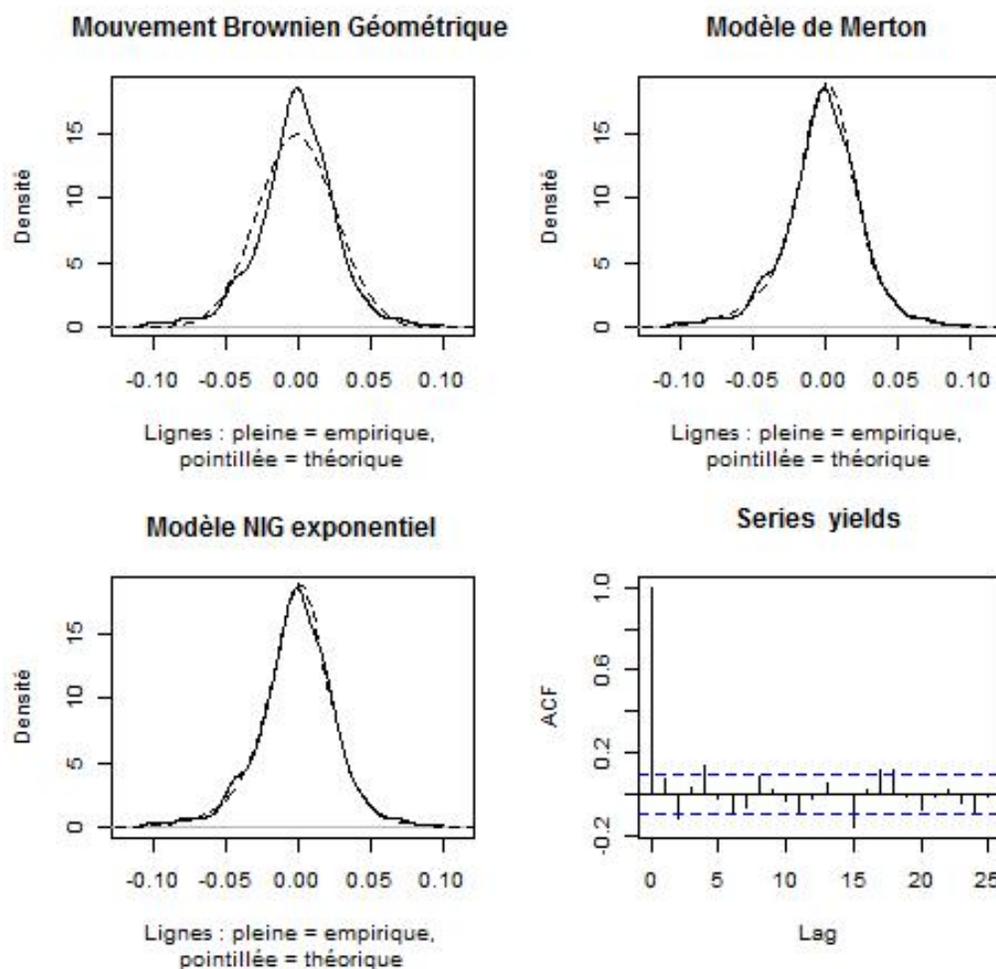


FIGURE 2.12. Distribution des log-rendements des CER : période complète

la parcimonie des modèles utilisés. Cependant, d'autres objectifs pourraient être pris en considération lors de la modélisation du prix des certificats. Tout d'abord, la capacité de prédiction des modèles n'a pas été testée, et ceci pourrait être un objectif important. De plus, la capacité des modèles à prévoir le prix des produits dérivés (ce qui sera évalué lors des prochaines sections du mémoire) est aussi une considération pouvant avoir de l'importance. Ainsi, dépendamment de l'objectif de la modélisation, les modèles considérés comme étant les plus performants pourraient différer pour des objectifs différents. Les prochaines sections s'attaqueront à la problématique de la tarification de produits dérivés.

CER : Distribution des log-rendements du 19-05-2009 au 26-02-2010

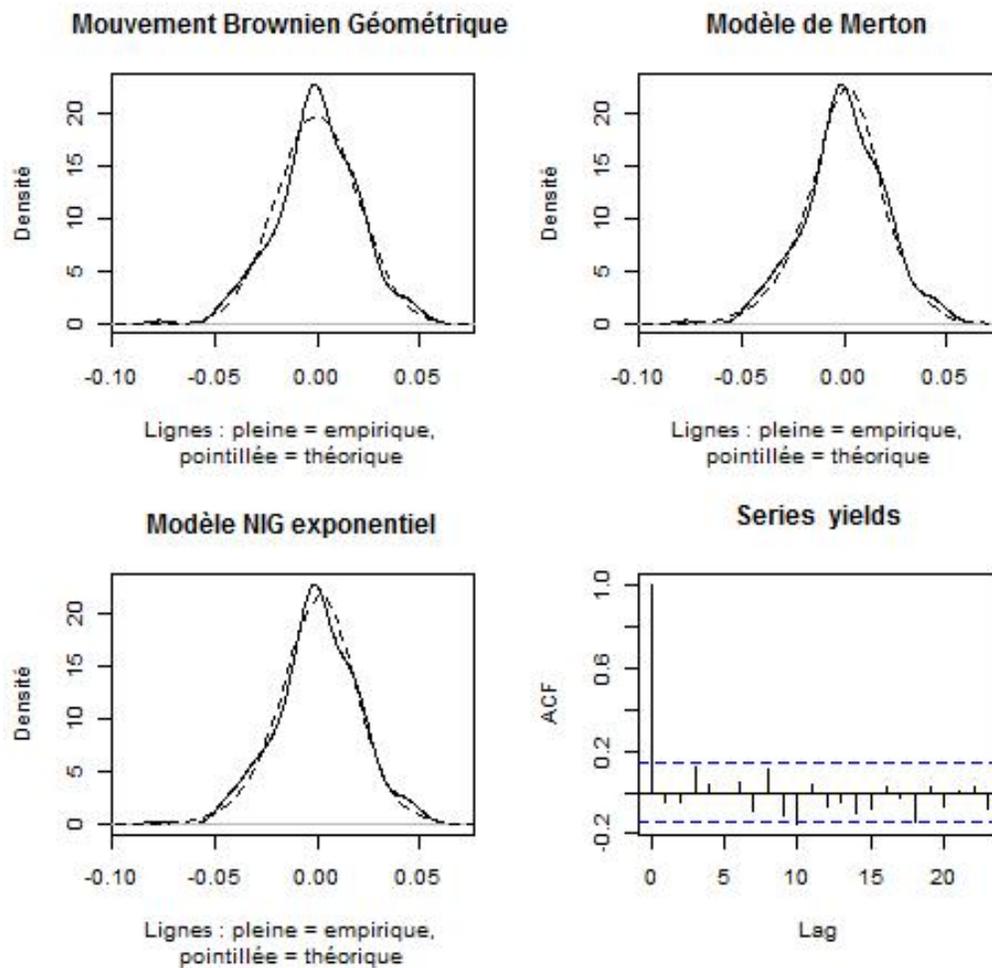


FIGURE 2.13. Distribution des log-rendements des CER : après le 19-05-2009

EUA : Log-densité des log-rendements du 26-02-2008 au 26-02-2010

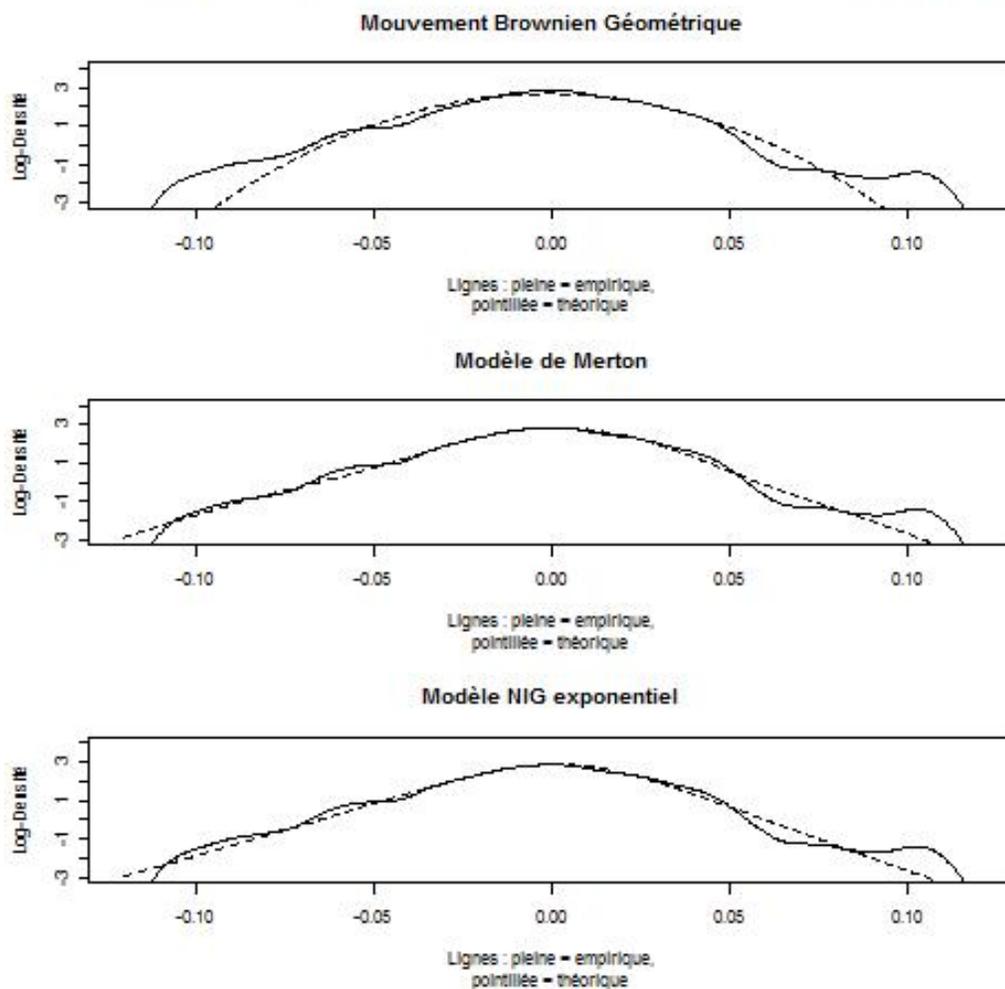


FIGURE 2.14. Logarithme de la densité des log-rendements des EUA : période complète

EUA : Log-densité des log-rendements du 19-05-2009 au 26-02-2010

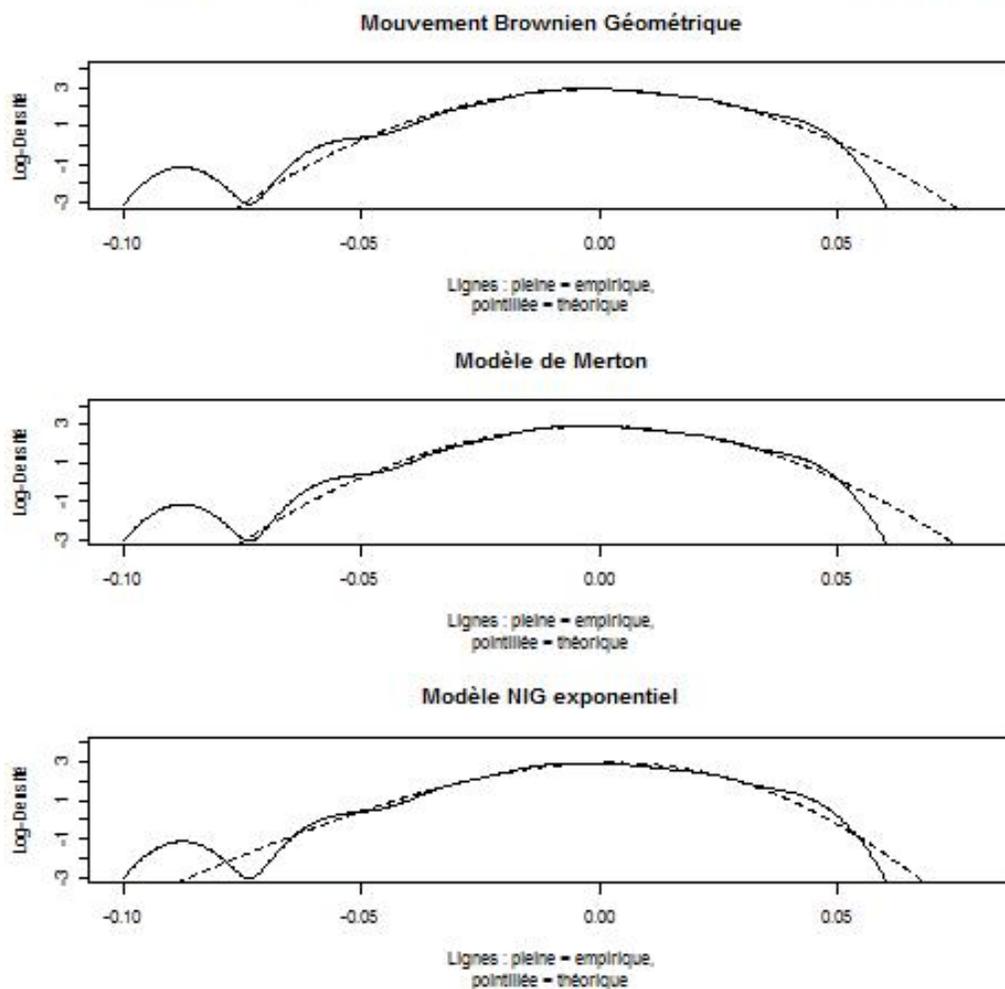


FIGURE 2.15. Logarithme de la densité des log-rendements des EUA : après le 19-05-2009

CER : Log-densité des log-rendements du 12-08-2008 au 26-02-2010

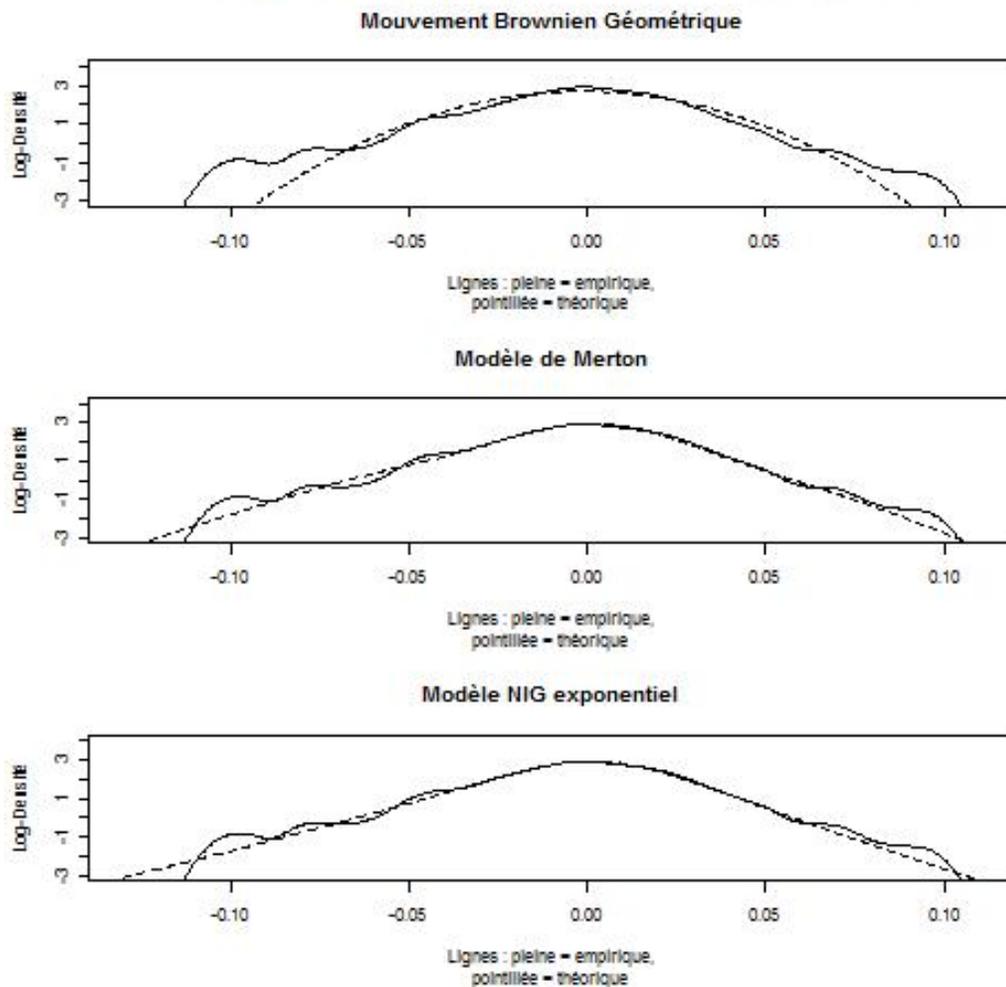


FIGURE 2.16. Logarithme de la densité des log-rendements des CER : période complète

CER : Log-densité des log-rendements du 19-05-2009 au 26-02-2010

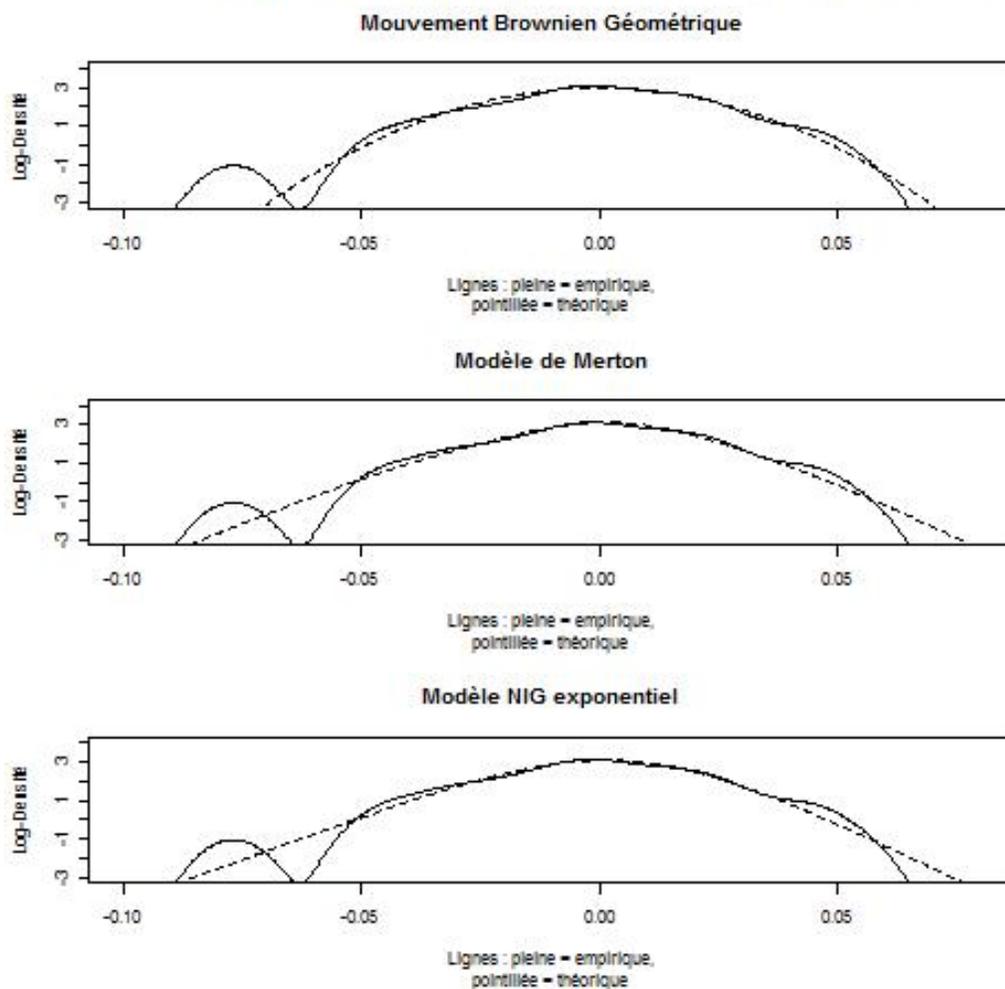


FIGURE 2.17. Logarithme de la densité des log-rendements des CER : après le 19-05-2009

Chapitre 3

TARIFICATION DE CONTRATS À TERME

Des contrats à terme ayant comme sous-jacent les EUA et les CER s'échangent sur les bourses européennes Bluenext et ECX. Le but de cette section est de trouver des modèles valables pour représenter le prix de ces contrats à terme. Dans cette section, des modèles de tarification de contrats à terme seront présentés et calibrés aux données de marché selon la méthode des moindres carrés. Ensuite, la performance des différents modèles sera comparée.

Les contrats à terme de l'EU ETS peuvent être séparés en deux catégories différentes : les contrats intraphase et interphase. Les contrats à terme intraphase sont ceux dont l'échéance est située avant la fin de la phase en cours. Le sous-jacent de ces contrats est donc le certificat d'émission de la phase en cours, et il s'échange donc sur les bourses du carbone européennes. Les contrats à terme interphase sont ceux dont l'échéance est située après la fin de la phase en cours. Le sous-jacent de ces contrats est le certificat d'émission de la phase suivant la phase en cours, et celui-ci ne s'échange pas sur les bourses au moment présent. Cette caractéristique peut compliquer la tarification des contrats à terme interphase.

3.1. DESCRIPTION DES DONNÉES UTILISÉES

Afin de comparer les différents modèles de tarification des contrats à terme, il est nécessaire d'utiliser des données de marché. Ces données permettront de calibrer les différents modèles, puis ensuite d'évaluer leur performance.

L'historique des prix quotidiens des contrats à terme sur les EUA et les CER sur les bourses Bluenext et ECX sera utilisée lors de la tarification. Pour la bourse

Bluenext, les échéances des contrats à terme disponibles sont 2008 à 2012 (le mois de décembre pour chaque année). Donc tous les contrats à terme de cette bourse qui seront étudiés sont des contrats intraphase de la deuxième phase. Les prix des contrats à termes sont considérés à partir du 21 avril 2008 jusqu'au 26 février 2010 pour les EUA et à partir du 2 mai 2008 jusqu'au 26 février 2010 pour les CER. Deux listes de contrats à terme distinctes seront étudiées : les contrats sur des EUA et les contrats sur des CER. Pour chacune de ces listes et chacune des différentes échéances, le prix quotidien d'un contrat à terme est donné. Le jeu de données est disponible sur le site <http://www.bluenext.fr/statistics/downloads.html>. Pour la bourse ECX, on utilisera aussi le prix quotidien des contrats à terme pour chacune des échéances et pour chacun des sous-jacents (EUA et CER). Cependant les échéances disponibles pour les contrats à terme sont 2008 à 2014 pour les EUA et 2008 à 2012 pour les CER (le mois de décembre pour chaque année). Les contrats avec des échéances entre 2008 et 2012 sont intraphase, et ceux avec une échéance en 2013 ou 2014 sont interphase. Les prix contrats à termes sont considérés à partir du 2 janvier 2008 jusqu'au 25 février 2014 pour les EUA et à partir du 14 mars 2008 jusqu'au 25 février 2010 pour les CER. Il est à noter que les contrats interphase ne sont pas échangés sur Bluenext (nous utiliserons seulement ceux d'ECX pour la présente étude). Les données sont disponibles sur les sites <http://www.ecx.eu/EUA-Futures> et <http://www.ecx.eu/CER-Futures>.

Étant donné que les EUA et les CER ne s'échangent pas sur la bourse CEX, les prix disponibles sur Bluenext seront utilisés pour le prix des certificats d'émission. Il est à noter que ces certificats d'émission sont ceux de la deuxième phase. Pour les contrats à terme interphase dont le sous-jacent est le certificat de la troisième phase, le prix des certificats de la deuxième phase seront ceux utilisés pour représenter le prix du sous-jacent ; il n'y a pas de certificats de la troisième phase qui s'échangent présentement sur les marchés.

De plus, étant donné que la tarification des contrats à terme oblige à connaître certaines informations sur les taux d'intérêt sans-risque, l'historique des taux Euribor d'échéance 6 mois sera utilisé. Une série chronologique montrant l'évolution

quotidienne du taux Euribor 6 mois entre le 2 janvier 2008 et le 26 février 2010 sera donc utilisée. Ces données proviennent du site internet <http://www.euribor.org/>.

3.2. MODÈLES POUR LE PRIX DES CONTRATS À TERME

Les différents modèles utilisés pour effectuer la tarification des contrats à terme sont présentés ici. Aussi, des explications sur la provenance de ces modèles et des hypothèses posées lors de l'élaboration de ceux-ci seront données. L'objectif des prochaines sections sera ensuite de déterminer lequel de ces modèles parvient le mieux à décrire et expliquer les prix empiriques observés sur les marchés pour les contrats à terme.

En posant différentes hypothèses sur les marchés, on peut arriver à poser différents modèles pour tarifier les contrats à terme. Certaines hypothèses concernent par exemple la liquidité du marché et les taux d'intérêt. Certaines hypothèses sont posées pour chacun des modèles. Tout d'abord, on suppose l'absence de toute forme d'imposition ou de taxes sur les revenus. On suppose que le marché dans lequel s'échangent les contrats à terme est viable, c'est-à-dire qu'il n'y existe pas d'opportunités d'arbitrage. De plus, on fait l'hypothèse qu'il existe un actif sans-risque dans l'économie (qui croît au taux sans-risque) que l'on peut acheter ou vendre (possiblement à découvert) en tout temps et ce à n'importe quelle quantité. On suppose aussi que l'achat ou la vente d'un actif n'a aucun effet sur le prix de celui-ci. De surcroît, on fait l'hypothèse qu'on peut acheter ou vendre des fractions d'actifs. D'autres hypothèses particulières seront posées pour chacun des différents modèles.

3.2.1. Modèle classique

Pour ce modèle, on suppose que le marché comporte au moins deux actifs : le sous-jacent du contrat à terme, dénoté S_t , et un actif sans-risque dénoté B_t . On suppose que l'actif sans-risque croît de façon déterministe à un taux d'intérêt sans-risque constant : $B_t = B_0 e^{rt}$. On suppose aussi que le marché est assez liquide pour qu'il soit possible d'acheter ou de vendre (possiblement à découvert)

n'importe quelle quantité des deux actifs en tout temps. Entre autres, il est possible de prêter ou d'emprunter en tout temps au taux sans-risque. Grâce à cette dernière hypothèse, on peut déduire que dans ce cas, le prix d'un contrat à terme et d'un contrat à livrer sont les mêmes (voir Hull [HUL], p.126). On sait aussi qu'un certificat d'émission ne verse pas de dividendes.

Avec ces hypothèses, il est possible de montrer que si le marché composé de nos deux actifs ne permet pas d'opportunités d'arbitrage, alors le prix d'un contrat à terme doit être donné par la formule suivante :

$$F_0 = S_0 e^{rT}, \quad (3.2.1)$$

où r est le taux d'intérêt sans-risque, T est l'échéance du contrat à terme, S_0 est le prix du sous-jacent à la date d'évaluation de contrat à terme et F_0 est le prix du contrat à terme à sa date d'évaluation. Un aspect intéressant de ce modèle est qu'il n'est pas nécessaire de formuler aucune hypothèse paramétrique sur le comportement de l'actif à risque S_t pour arriver à cette conclusion.

La raison pour laquelle la formule 3.2.1 tient est que si celle-ci n'est pas vérifiée, il est possible de construire une stratégie d'arbitrage (voir Hull [HUL]). Si $F_0 < S_0 e^{rT}$, la stratégie d'arbitrage implique l'achat de contrats à terme et la vente à découvert du sous-jacent. Si $F_0 > S_0 e^{rT}$, alors la stratégie implique la vente à découvert de contrats à terme et l'achat du sous-jacent. Donc la seule possibilité restante dans un marché sans arbitrage est donnée par 3.2.1.

3.2.2. Modèle à taux de convenance fixe

Pour ce modèle, on suppose encore une fois que le taux d'intérêt sans-risque est constant, et qu'il est possible de prêter ou d'emprunter en tout temps à ce taux. Cependant, l'hypothèse de liquidité du modèle classique sera ici affaiblie. Tel qu'affirmé dans Hull [HUL], ceci limite la portée des arguments d'arbitrage invoqués pour le modèle classique, et les prix des contrats à terme peuvent donc être différents des prix données par l'équation 3.2.1. Par exemple, supposons qu'il existe des restrictions sur les ventes à découvert, les stratégies d'arbitrage invoquées précédemment pour le modèle classique lorsque $F_0 \neq S_0 e^{rT}$ peuvent être

impossibles à mettre en place. Donc, il est possible que 3.2.1 ne soit pas vérifiée sur les marchés.

Dans le cas des marchés du carbone, il est possible qu'il y ait des difficultés pratiques à vendre les certificats d'émission à découvert. Aussi, pour les contrats à terme interphase, le sous-jacent ne s'échange pas sur les marchés ; il est donc impossible d'en acheter ou d'en vendre. Ces facteurs pourraient justifier l'utilisation d'un modèle différent du modèle classique pour la tarification de certains contrats à terme.

Afin de pouvoir ajuster notre modèle à l'écart entre les prix des contrats à terme et ceux donnés par le modèle classique lorsque les hypothèses de ce dernier se révèlent invalides, il est nécessaire de corriger la formule 3.2.1. Une possibilité suggérée dans Hull [**HUL**] est d'ajouter un facteur de correction à l'équation 3.2.1 . Ce facteur est nommé taux de convenance, et sera dénoté par q . Dans ce modèle, nous ferons l'hypothèse que le taux de convenance est constant et que le prix d'un contrat à terme est donné par :

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}, \quad (3.2.2)$$

où r est le taux d'intérêt sans-risque, q est le taux de convenance que l'on a supposé constant, T est l'échéance du contrat à terme, S_0 est le prix du sous-jacent à la date d'évaluation de contrat à terme et F_0 est le prix du contrat à terme à sa date d'évaluation.

On remarque qu'ici, aucune hypothèse n'a été posée sur le comportement du sous-jacent du contrat à terme (le certificat d'émission). On a directement fait l'hypothèse sur la forme du prix du contrat à terme.

On peut interpréter le taux de convenance comme une mesure de bénéfice reliée à la détention immédiate de l'actif plutôt que du contrat à terme. On peut donc le traiter mathématiquement comme un taux de dividendes. On retrouve une discussion plus élaborée du taux de convenance dans le livre de Hull [**HUL**]. Dans le cas des marchés du carbone, il n'y a pas de coûts de stockage pour les certificats d'émission. De plus, il n'y a pas de possibilité de «consommation» immédiate des certificats d'émission (contrairement à certains autres actifs physiques tels que les métaux, l'énergie, etc.). Donc, dans le cas des contrats à terme intraphase (où

le sous-jacent s'échange sur les marchés), une interprétation plausible d'un taux de convenance positif serait l'existence de restrictions pratiques sur la vente à découvert de certificats d'émissions. Dans le cas des contrats interphase, si l'on suppose que S_0 est le prix d'un certificat de la deuxième phase, S n'est pas le sous-jacent du contrat F , donc il n'existe aucune relation nécessaire (pour exclure la présence d'arbitrage dans les marchés) entre S_0 et F_0 , donc il est plus difficile de donner une interprétation concrète au taux de convenance. On le considérera donc comme un simple facteur de correction numérique.

3.2.3. Modèle de Gibson

Pour ce modèle, on suppose encore que le taux d'intérêt sans-risque est constant. Cependant, tout comme pour le dernier modèle, on abandonne l'idée que le marché a une liquidité absolue et qu'il est possible de transiger n'importe quelle quantité de contrats à terme et de sous-jacents en tout temps. Encore une fois, la formule 3.2.1 n'est plus valide. Il faut trouver une manière de la modifier. L'idée du taux de convenance est ici retenue encore une fois.

Tout comme pour le modèle à convenance constante, on corrige la formule 3.2.1 avec un facteur numérique qu'on nomme taux de convenance. Ce taux de convenance est encore une fois traité exactement de la même manière qu'un taux de dividendes (tel que discuté dans la dernière sous-section). Cependant, cette fois-ci, on suppose que celui-ci est stochastique. Ce modèle a initialement été proposé par Gibson [GIB].

Dans le modèle de Gibson, on y fait les deux hypothèses suivantes :

$$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma_s S_t dZ_1, \quad (3.2.3)$$

$$dq_t = \kappa_c (\alpha_c - q_t) dt + \sigma_c dZ_2, \quad (3.2.4)$$

où μ_s , σ_s , κ_c , α_c et σ_c sont des constantes. (Z_1, Z_2) est un Mouvement Brownien multivarié avec un facteur de corrélation ρ constant. On voit donc que S_t est un Mouvement Brownien Géométrique et que q_t , qui est le taux de convenance instantané, suit un processus de Ornstein-Uhlenbeck. On remarque ici que

contrairement au cas des deux premiers modèles, le modèle de Gibson effectue une hypothèse paramétrique sur le comportement du sous-jacent S_t .

Pour le modèle de Gibson, Hilliard [**HIL**] détermine un prix sans-arbitrage possible d'un contrat à terme sous les hypothèses de ce modèle. Celui-ci est donné par :

$$F(S_0, q_0, T) = e^{rT} S_0 A(T) e^{-H_c(T) q_0}, \quad (3.2.5)$$

où

$$H_c(T) = \frac{1 - e^{-\kappa_c T}}{\kappa_c},$$

$$A(T) = \exp \left[\frac{(H_c(T) - T)(\kappa_c^2 \alpha_c - \kappa_c \lambda_c \sigma_c - \sigma_c^2 / 2 + \rho \sigma_c \sigma_s \kappa_c)}{\kappa_c^2} - \frac{\sigma_c^2 H_c(T)^2}{4 \kappa_c} \right].$$

La constante λ_c est nommée le prix du risque au marché pour le taux de convenance, et dépend des préférences des investisseurs sur le marché. Le fait de la supposer constante est compatible avec une fonction d'utilité logarithmique (Gibson, [**GIB**]). Étant donné que cette valeur n'est pas observée explicitement, elle doit généralement être calibrée selon les données du marché. Cependant, afin de simplifier notre modèle, nous allons supposer que $\lambda_c = 0$ et $\rho = 0$. Un problème avec ce modèle qui est énoncé dans Carmona [**CA2**] est que le taux de convenance instantané au moment de l'évaluation du prix du contrat à terme (q_0) n'est pas observable directement à partir des données du marché. Il faut donc utiliser une méthode pour l'estimer à partir des données disponibles.

Une information qui nous est donnée par les données est l'ensemble des taux de convenance moyens (*taux spot*), qui seront dénotés par $\hat{q}_{t,T}$. Ceux-ci nous sont donnés par l'égalité

$$F_{t,T} = S_t e^{(r - \hat{q}_{t,T})(T-t)}, \quad (3.2.6)$$

où $\hat{q}_{t,T}$ est le taux de convenance moyen de la période allant de t à T et $F_{t,T}$ est le prix du contrat à terme évalué au temps t qui a une échéance à T . À l'aide de ceux-ci, on peut retrouver les *taux forward* qui sont de la forme $\hat{q}_{t,t+1/252}$ qui peuvent servir comme bonne approximation des taux de convenance instantanés. On peut donc retrouver ceux-ci à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{q}_{t,t+1/252} = \frac{\hat{q}_{t,T}(T-t) - \hat{q}_{t+1/252,T}(T-t-1/252)}{1/252}, \quad (3.2.7)$$

où $\hat{q}_{t,T}$ et $\hat{q}_{t+1/252,T}$ sont trouvés à l'aide de 3.2.6. Cependant, les suites des taux de convenance obtenus de cette façon sont empiriquement beaucoup trop instables ; les séries oscillent beaucoup trop fortement dans l'étude présente pour être directement utilisées sans modifications. Il sera donc judicieux de regrouper ces taux pour stabiliser la suite.

Les taux de convenance sont donc regroupés en groupes de 50 jours, et une moyenne des taux de convenance de ces 50 jours est calculée :

$$\forall j = 0, \dots, 49, \quad \bar{q}_{j/252,(j+1)/252} = \frac{1}{50} \sum_{j=0}^{49} \hat{q}_{j/252,(j+1)/252} \quad (3.2.8)$$

$$\forall j = 50, \dots, 99, \quad \bar{q}_{j/252,(j+1)/252} = \frac{1}{50} \sum_{j=50}^{99} \hat{q}_{j/252,(j+1)/252} \quad (3.2.9)$$

$$etc... \quad (3.2.10)$$

La série de taux de convenance empirique qui sera utilisée sera celle des $\bar{q}_{t,t+1/252}$, et non celle des $\hat{q}_{t,t+1/252}$. Les taux de convenance instantanés empiriques seront donc constants sur 50 jours. Ceci stabilise largement les suites des taux de convenance empiriques. Une dernière précision nécessaire est que l'on obtient une suite de taux de convenance pour chacune des échéances possibles des contrats terme. Cependant, il faut n'utiliser qu'une seule série de taux de convenance valide pour toutes les échéances de contrats à terme. La série de taux de convenance empiriques finale qui sera utilisée pour toutes les échéances sera une moyenne arithmétique de chacune des suites initiales correspondant à une échéance particulière.

3.3. RÉSULTATS

Les trois modèles de la section précédente ont été calibrés à chacun des jeux de données, et les résultats de cette calibration seront présentés dans cette section. La méthode de calibration de ceux-ci sera aussi décrite au cours de cette section. Par la suite, une comparaison de la performance des modèles sera effectuée. Les résultats sont séparés en deux sous-sections : une première pour les contrats intraphase, et une deuxième pour les contrats interphase.

Au cours de cette section, le taux d'intérêt (préssumé constant dans chacun des trois modèles) qui est utilisé est $r = 0,028868$. Ce taux représente la moyenne quotidienne des taux Euribor d'échéance de 6 mois pour la période durant du 1er janvier 2008 au 26 février 2010, qui a ensuite été transformé en un taux composé continuellement. Les données du taux Euribor proviennent de <http://www.euribor.org>.

La calibration des paramètres a été effectuée à l'aide de la méthode des moindres carrés. Le but de la calibration des modèles est de trouver les paramètres de celui-ci qui font que les prix des contrats à terme donnés par le modèle sont le plus proche possible des prix empiriques. Cependant, il faut déterminer le sens que l'on donne au terme «proche».

La méthodologie des moindres carrés non-linéaires précise cette notion, et elle peut être utilisée pour la calibration des modèles de produits dérivés. La méthode des moindres carrés a déjà été utilisée dans la littérature pour la tarification de produits dérivés en finance (voir Cont et Tankov [CON]). Décrivons un peu cette méthode. Nous avons à notre disposition la liste des prix empiriques des contrats à terme $F_i, i = 1, \dots, n$. Lorsque l'on fixe les paramètres $\vec{\theta}$ d'un modèle, on obtient une liste des prix théoriques des contrats à terme $\hat{F}_i, i = 1, \dots, n$. Le paramètre utilisé lors de l'utilisation du modèle est celui qui minimise la somme des carrés des différences entre les prix empiriques et théoriques (somme des moindres carrés) : $\vec{\theta}_{MC} := \underset{\vec{\theta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left(F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}) \right)^2$. La minimisation de la somme des moindres carrés a été effectuée numériquement à l'aide des algorithmes d'optimisation de R. Un problème soulevé dans Cont et Tankov [CON] à propos de cette méthodologie est que si la somme des moindres carrés n'est pas une fonction convexe, l'algorithme d'optimisation peut aboutir à un minimum local, plutôt qu'un minimum absolu. Afin de résoudre ce problème, les algorithmes ont été utilisés avec de nombreuses valeurs initiales différentes afin d'améliorer l'optimisation.

Il est cependant à noter que pour le modèle de Gibson, les paramètres α_c, κ_c et σ_c qui décrivent le processus des taux de convenance ont été calibrés à l'aide

de la méthodologie du maximum de vraisemblance à partir de la série chronologique des taux de convenance. Vu que le modèle de Gibson suppose que le taux de convenance est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, l'estimateur à vraisemblance maximale est celui décrit dans la section précédente sur l'estimation de ce processus. Le fait d'estimer ces paramètres préalablement à la minimisation des moindres carrés facilite l'optimisation des moindres carrés en diminuant le nombre de paramètres à estimer.

Pour des fins d'analyse, il peut être utile de voir d'autres mesures d'erreurs que la somme des moindres carrés. Les mesures d'erreur suivantes seront aussi présentées dans les tableaux de résultats de la calibration :

$$MPE_rel = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{|F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}_{MC})|}{F_i}, \quad (3.3.1)$$

$$ME_rel = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{(F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}_{MC}))}{F_i}, \quad (3.3.2)$$

$$MSE_rel = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{(F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}_{MC}))^2}{F_i}, \quad (3.3.3)$$

$$MPE_abs = n^{-1} \sum_{i=1}^n |F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}_{MC})|, \quad (3.3.4)$$

$$MSE_abs = n^{-1} \sum_{i=1}^n (F_i - \hat{F}_i(\vec{\theta}_{MC}))^2. \quad (3.3.5)$$

3.3.1. Contrats à terme intraphase

La figure 3.1 montre les paramètres calibrés, et la figure 3.2 montre les erreurs pour chacun des modèles et des jeux de données. Les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 illustrent les prix empiriques et les prix théoriques calculés par les modèles des contrats à terme intraphase.

En observant les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6, on voit que pour les contrats à terme EUA, la performance des trois modèles semble plutôt similaire. Pour les contrats à terme CER, le modèle à convenance constante et le modèle de Gibson semblent mieux performer que le modèle classique.

Paramètres	EUA ECX	EUA BLUENEXT	CER ECX	CER BLUENEXT
Convenance constante :				
q	-0.0054	-0.0066	0.0196	0.0195
Gibson :				
κ_c	4.8035	75271.08	4.4098	60497.99
α_c	-0.0067	-0.0065	0.3662	0.0251
σ_c	0.2215	1099.513	3.7237	6444.2

FIGURE 3.1. Paramètres pour les contrats à terme intraphase

Comparons d'abord le modèle classique et le modèle à taux de convenance constant. Pour les quatre ensembles de prix (EUA ECX, EUA Bluenext, CER ECX, CER Bluenext), on remarque que la réduction de la somme des moindres carrés est respectivement de 28,3% , 38,5% , 66,9% et 66,5%. Selon le critère des moindres carrés, le modèle à convenance constante semble donc plus performant que le modèle classique.

On voit dans la figure 3.1 que pour les contrats à termes sur les EUA, le taux de convenance constant estimé est d'environ 0,54% et 0,66% (pour ECX et Bluenext). Ceci est petit, et pourrait indiquer que l'amélioration des erreurs due à l'existence d'un taux de convenance constant n'est peut-être que le résultat d'une légère erreur dans le taux sans-risque utilisé. On sait qu'en réalité, le taux sans-risque n'est pas constant, et donc que de petites déviations peuvent se produire. Cependant, dans le cas des CER, le taux de convenance constant estimé est de 1,96% et 1,95% (pour ECX et Bluenext), ce qui n'est pas négligeable. Ceci n'est probablement pas dû à une erreur dans l'estimation du taux sans risque, car le taux de convenance des CER est différent de celui des EUA (alors que le taux sans-risque est le même dans les deux cas). Pour le cas de CER, le modèle à taux de convenance constant semble donc plus adapté à la situation. Une interprétation plausible de ceci pourrait être une restriction pratique sur la possibilité de vendre des CER à découvert.

Comparons maintenant les résultats pour le modèle de Gibson et le modèle à taux de convenance constant. Pour les quatre ensembles de prix (EUA ECX, EUA Bluenext, CER ECX, CER Bluenext), on remarque que la réduction de

EUA ECX			
	MODÈLE CLASSIQUE	MODÈLE CONVENANCE CONSTANTE	MODÈLE DE GIBSON
MPE_rel	0.0206	0.0173	0.0161
ME_rel	0.0145	0.0029	0.0004
MSE_rel	0.0156	0.0106	0.0082
MPE_abs	0.3928	0.3414	0.3060
MSE_abs	0.3128	0.2242	0.1730

EUA BLUENEXT			
	MODÈLE CLASSIQUE	MODÈLE CONVENANCE CONSTANTE	MODÈLE DE GIBSON
MPE_rel	0.0214	0.0162	0.0162
ME_rel	0.0160	0.0019	0.0019
MSE_rel	0.0160	0.0092	0.0092
MPE_abs	0.4047	0.3142	0.3142
MSE_abs	0.3231	0.1987	0.1987

CER ECX			
	MODÈLE CLASSIQUE	MODÈLE CONVENANCE CONSTANTE	MODÈLE DE GIBSON
MPE_rel	0.0574	0.0271	0.0188
ME_rel	-0.0567	-0.0151	-0.0013
MSE_rel	0.0567	0.0159	0.0079
MPE_abs	0.7279	0.3711	0.2627
MSE_abs	0.7280	0.2413	0.1201

CER BLUENEXT			
	MODÈLE CLASSIQUE	MODÈLE CONVENANCE CONSTANTE	MODÈLE DE GIBSON
MPE_rel	0.0577	0.0270	0.0270
ME_rel	-0.0570	-0.0152	-0.0152
MSE_rel	0.0567	0.0160	0.0160
MPE_abs	0.7307	0.3690	0.3690
MSE_abs	0.7251	0.2426	0.2426

FIGURE 3.2. Erreurs pour les contrats à terme intraphase

la somme des moindres carrés est respectivement de 22,8% , 0% , 50,2% et 0%. Dans deux des cas, l'amélioration est simplement nulle. Il n'est donc pas clair que le modèle de Gibson permet de décrire beaucoup mieux les prix des certificats d'émission.

Lorsqu'on regarde l'estimation des paramètres pour le modèle de Gibson, on remarque que dans les cas des EUA et des CER sur le marché Bluenext, les paramètres K_c et σ_c semblent démesurément élevés. Lorsque l'on observe la formule

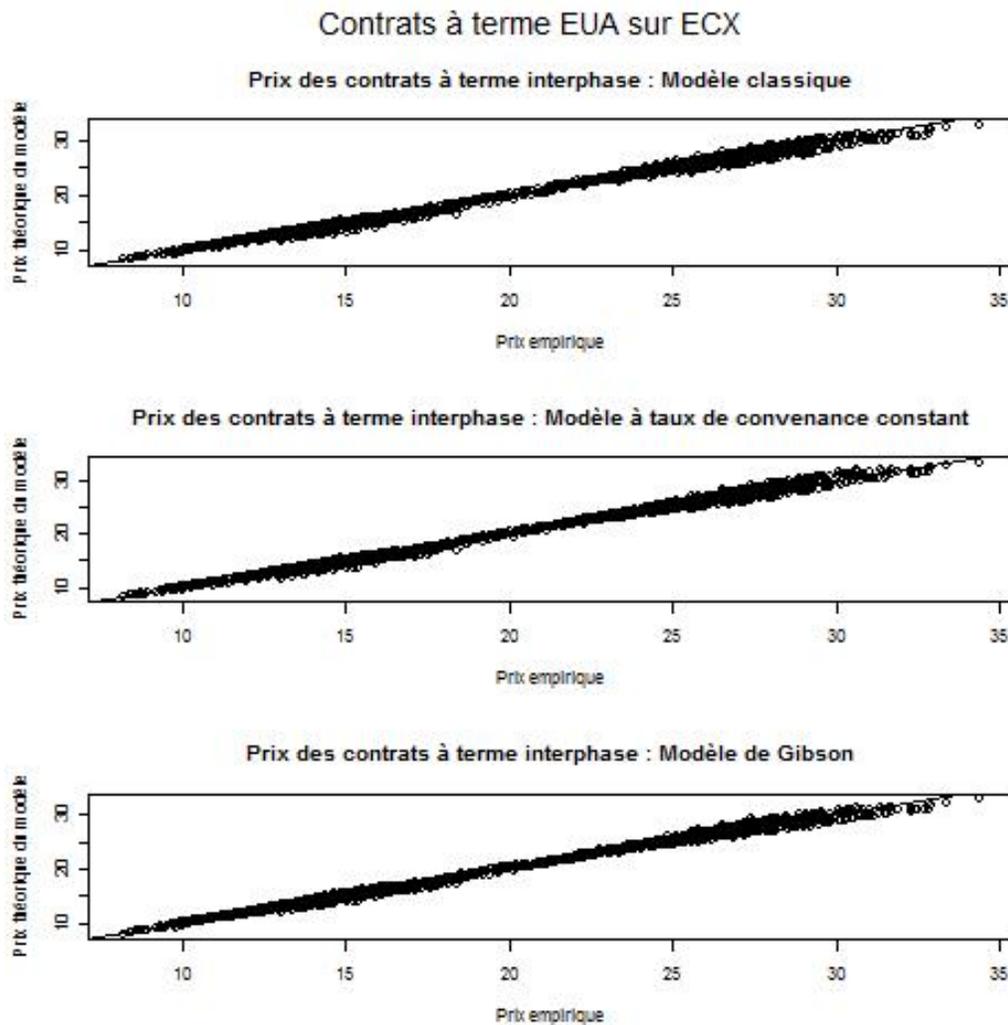


FIGURE 3.3. Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase EUA sur ECX

3.2.5 qui donne le prix d'un contrat à terme pour le modèle de Gibson, on observe que lorsque K_c est très grand, le prix du contrat à terme est numériquement très proche de $F_0 = S_0 e^{(r-\alpha_c)T}$, ce qui revient au modèle de taux de convenance constant. C'est pour cette raison que les erreurs du modèle à taux de convenance constant et du modèle de Gibson sont pratiquement identiques pour la bourse Bluenext.

Pour ce qui est des EUA du ECX, la différence entre l'erreur relative moyenne (MPE_rel) du modèle à convenance constante et celle du modèle de Gibson est de 0,12%, ce qui est négligeable. Pour les CER du ECX, l'amélioration est d'environ

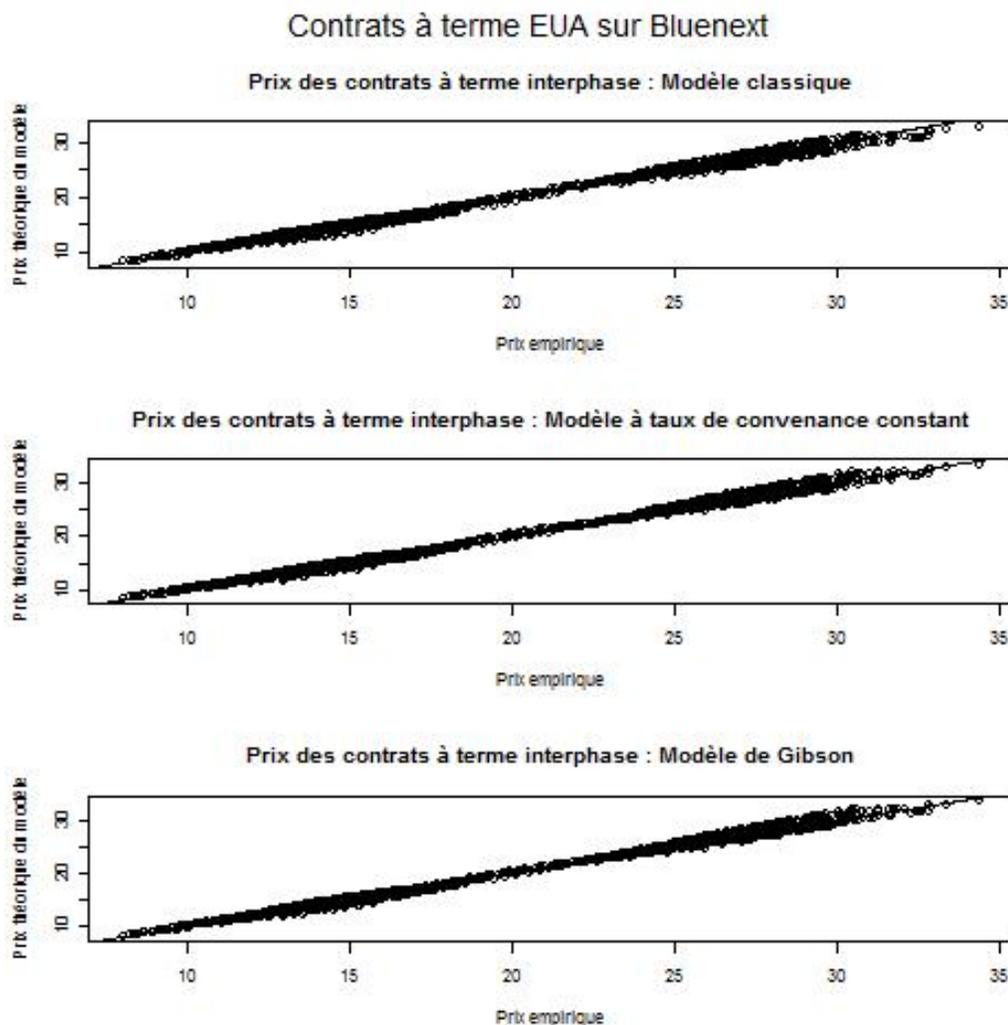


FIGURE 3.4. Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase EUA sur Bluenext

0,83%, ce qui n'est pas énorme. De plus, quand on regarde les paramètres estimés pour les CER du ECX, la magnitude de σ_c , qui est de 372,37% semble beaucoup trop élevée par rapport à ce que l'on peut attendre d'une volatilité d'un taux de convenance. Ceci laisse croire que cette optimisation des paramètres n'est pas raisonnable, et qu'elle produit seulement des erreurs faibles par une coïncidence numérique ; l'optimisation du modèle de Gibson dans ce cas retourne un modèle qui n'est donc pas raisonnable.

Tout ceci semble montrer que le modèle à taux de convenance constant est le mieux adapté des trois pour les contrats à terme intraphase. L'amélioration du

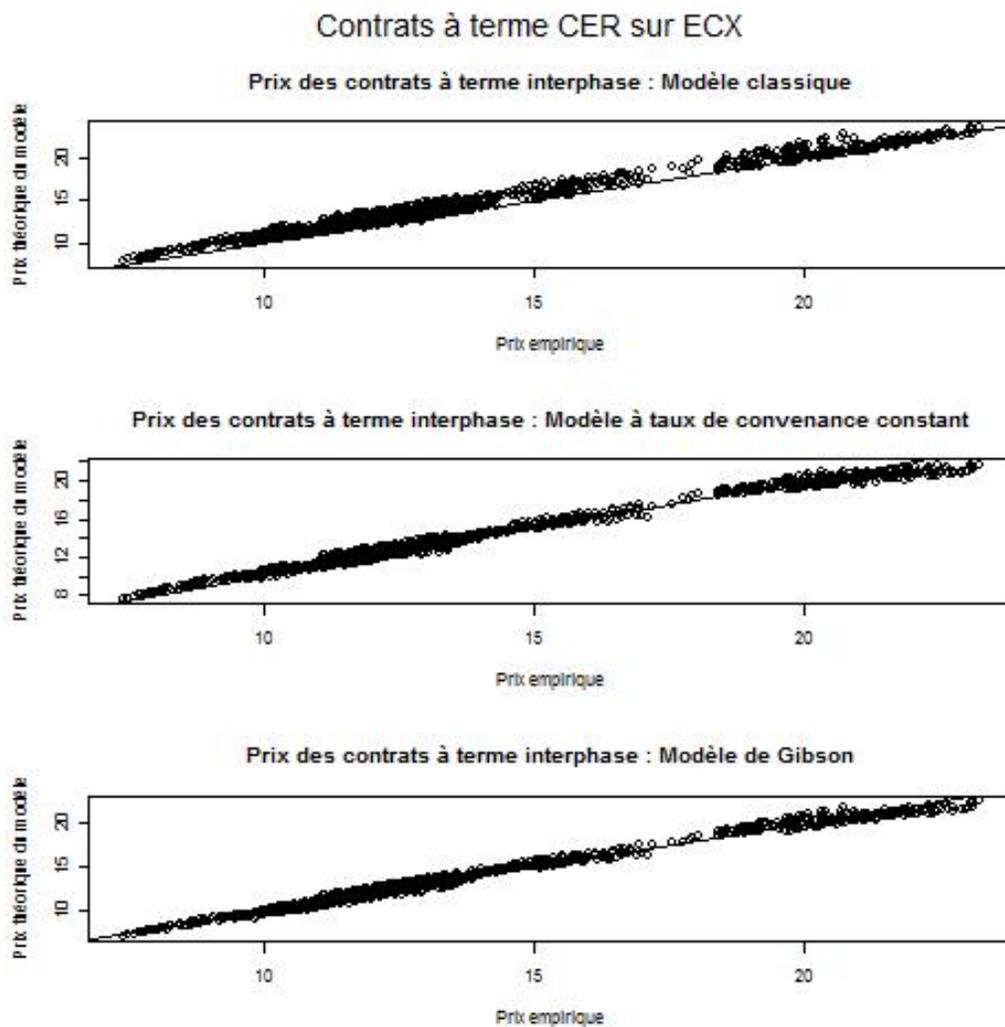


FIGURE 3.5. Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase CER sur ECX

modèle de Gibson par rapport au modèle à convenance constante ne semble pas notable. De plus, le modèle à convenance constante réduit de façon non-négligeable la somme des moindres carrés, surtout pour le cas des CER. Pour le cas des EUA, cette réduction n'est peut-être due qu'à une légère erreur d'estimation du taux d'intérêt sans-risque ; le modèle classique pourrait donc être un modèle convenable pour les contrats à terme intraphase sur les EUA, à condition de bien estimer le taux d'intérêt.

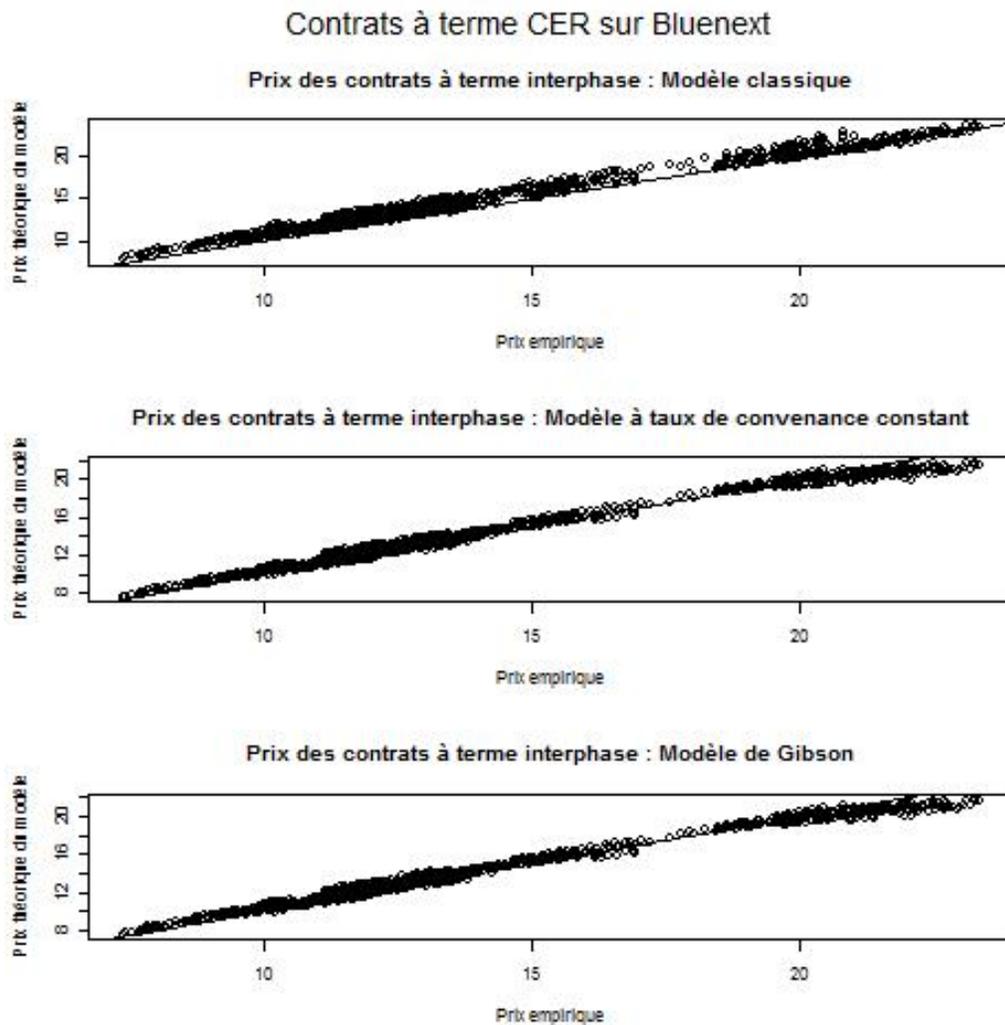


FIGURE 3.6. Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme intraphase CER sur Bluenext

3.3.2. Contrats à terme interphase

Pour les contrats interphase, le seul jeu de données disponible est l'ensemble des contrats à terme sur des EUA du ECX. La figure 3.7 montre les paramètres calibrés, et la figure 3.8 montre les erreurs pour chacun des modèles. La figure 3.9 illustre les prix théoriques et les prix empiriques des contrats à terme interphase.

Lorsque l'on regarde la figure 3.9, on s'aperçoit que l'ajustement du modèle classique aux données semble moins bon que celui des deux autres. Cependant, il est difficile sur cette figure de distinguer la qualité de l'ajustement du modèle de Gibson de celui du modèle à convenance constante. On remarque que le modèle

de Gibson donne des erreurs quadratiques moindres que le modèle à convenance fixe et le modèle classique ; la somme des moindres carrés du modèle de Gibson est réduite de 81,2% par rapport à celle du modèle classique et de 44,1% par rapport à celle du modèle à convenance constante. Ceci nous mène à croire que le modèle de Gibson pourrait être un meilleur modèle que les deux autres pour les contrats à terme interphase pour ce qui en est de la précision de l'ajustement du modèle aux données. Ce résultat est compatible avec ce qui est rapporté dans Daskalakis [DA1]. Ce résultat n'est pas surprenant ; étant donné que le sous-jacent du contrat à terme (le certificat de la phase subséquente) n'est pas échangé sur les marchés, il est normal que le modèle classique soit peu performant.

Paramètres	EUA ECX
Convenance constante :	
q	-0.0137
Gibson :	
κ_c	5.4456
α_c	-0.0124
σ_c	0.5963

FIGURE 3.7. Paramètres pour les contrats à terme interphase

EUA ECX			
	MODÈLE CLASSIQUE	MODÈLE CONVENANCE CONSTANTE	MODÈLE DE GIBSON
MPE_rel	0.0942	0.0459	0.0303
ME_rel	0.0936	0.0259	0.0129
MSE_rel	0.2042	0.0636	0.0333
MPE_abs	1.8652	0.9441	0.6609
MSE_abs	4.1219	1.3861	0.7749

FIGURE 3.8. Erreurs pour les contrats à terme interphase

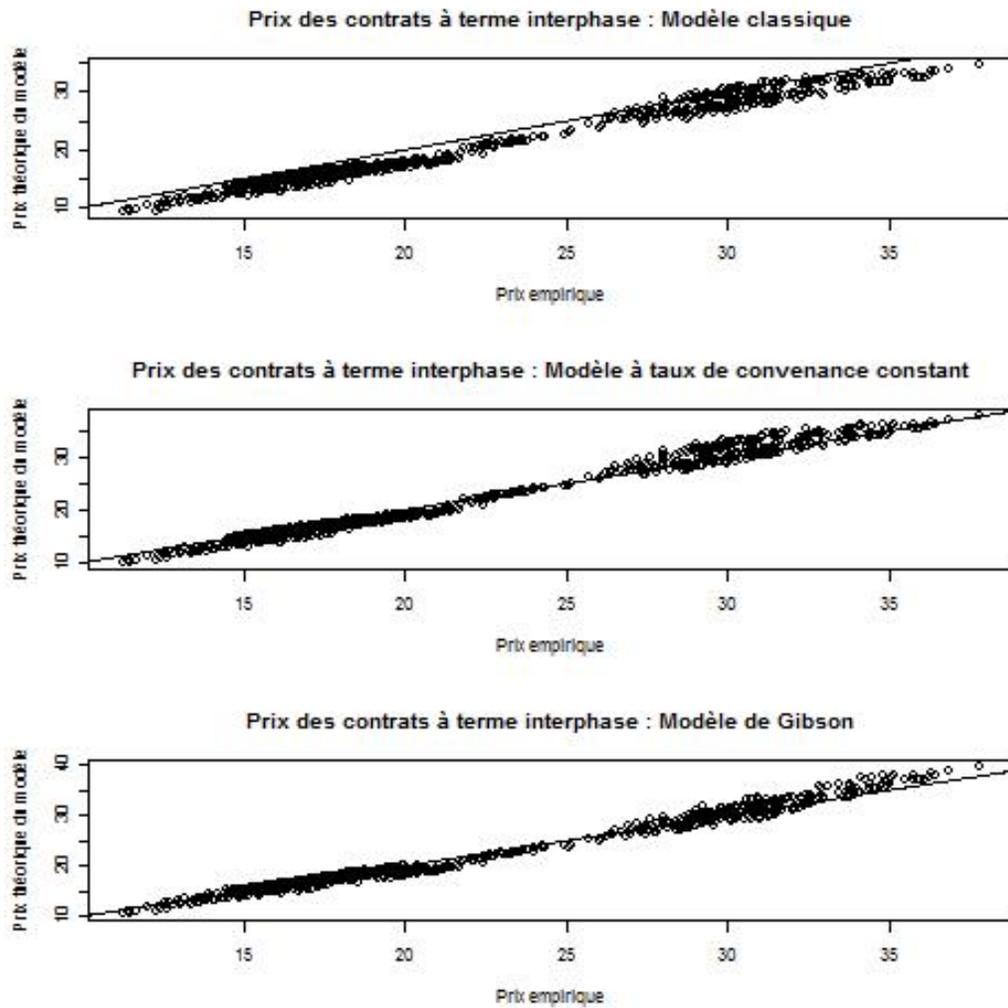


FIGURE 3.9. Comparaison des prix empiriques et théoriques des contrats à terme interphase

Chapitre 4

TARIFICATION D'OPTIONS SUR LES CONTRATS À TERME

Sur la bourse ECX, des options vanille européennes (où l'exercice ne peut s'effectuer qu'à l'échéance de l'option) ayant comme sous-jacent les contrats à terme sur les EUA et les CER sont transigées. Les options peuvent être des options d'achat ou des options de vente. L'objectif de cette section est de comparer différents modèles qui auront pour but de tarifier ces options. Les modèles de tarification d'options qui seront comparés supposent différentes hypothèses sur le comportement du sous-jacent du contrat à terme (les certificats). Les hypothèses effectuées par les trois modèles présentés dans cette section sont que le prix des certificats est respectivement représenté par le Mouvement Brownien Géométrique, le processus de Merton et le processus NIG exponentiel (qui ont été décrits au chapitre 2). Cette section présentera donc l'évaluation de la capacité de prédiction des différentes hypothèses effectuées au chapitre 2 par rapport au prix des options du EU ETS .

4.1. DESCRIPTION DES DONNÉES UTILISÉES

Pour effectuer la modélisation du prix des options, les données utilisées sont l'historique des transactions d'options sur des contrats à terme sur des EUA ou des CER ayant eu lieu sur le marché ECX (il n'y a pas de transactions d'options sur Bluenext). Nous avons donc deux listes distinctes : une pour les options sur des contrats à terme sur des EUA, et une autre pour les options sur des contrats

à terme sur des CER. Pour les options EUA, l'historique utilisé représente l'ensemble des transactions entre le 2 janvier 2008 et le 25 février 2010. Pour les options CER, les données utilisées sont les transactions entre le 16 mai 2008 (il n'existe aucune autre transaction avant cette date pour les options CER sur le ECX) et le 25 février 2010. Les options des données utilisées sont exclusivement des options ayant comme sous-jacent des contrats à terme sur des EUA et de CER de la deuxième phase. Ce sont donc des options intraphase.

On peut retrouver les données sur les sites <http://www.ecx.eu/EUA-Options> et <http://www.ecx.eu/CER-Options>. Les données sur les transactions nous procurent les informations suivantes : la date de la transaction, la date d'échéance de l'option et du contrat à terme sous-jacent, le type d'option (achat ou vente), le prix d'exercice, le prix du sous-jacent (le contrat à terme) à la date de la transaction et le prix pour lequel l'option s'est vendue.

4.2. PRÉSENTATION DES MODÈLES DE TARIFICATION UTILISÉS

Différents modèles de tarification d'options seront utilisés, et leurs performances respectives seront comparées afin de déterminer lesquels de ces modèles sont les plus adaptés à la tarification des options des marchés du carbone.

Dans les données, la très vaste majorité des options ont la même échéance que leur contrat à terme sous-jacent. Afin de simplifier la tarification, seulement les options qui ont la même échéance que leur sous-jacent seront considérées (les autres seront rejetées du jeu de données). Ceci simplifie la tarification, étant donné que lorsque les deux échéances coïncident, le prix d'une option sur un contrat à terme est identique au prix d'une option sur le sous-jacent du contrat à terme (voir Hull [HULL] p.344). Ceci est dû au fait qu'à l'échéance d'un contrat à terme, le prix du contrat à terme et du sous-jacent doivent concorder afin d'éliminer les possibilités d'arbitrage : $S_T = F_T$. Alors, le paiement à échéance d'une option sur le sous-jacent du contrat à terme $\max(S_T - K, 0)$ et le paiement à échéance d'une option sur le contrat à terme $\max(F_T - K, 0)$ sont identiques, et ainsi, leurs prix doivent concorder. La tarification d'une option sur le sous-jacent du contrat à terme pourra donc se substituer à la tarification d'une option sur le contrat

à terme dans ce cas. Il faut cependant noter que les résultats de cette section ne s'appliquent qu'aux options dont l'échéance du contrat à terme concorde avec l'échéance de l'option.

4.2.1. Parité des options d'achat et de vente

Sous certaines hypothèses par rapport au marché, il est possible de trouver une relation entre le prix d'une option d'achat sur un contrat à terme et d'une option de vente sur le même sous-jacent lorsque le prix d'exercice et l'échéance des deux options concordent. On suppose premièrement que le taux d'intérêt sans-risque continuellement composé (noté r) est constant. Cette hypothèse permet entre autres de supposer que le prix d'un contrat à terme et d'un contrat à livrer sont identiques (voir chapitre 3). On peut donc faire comme si l'option sur un contrat à terme est une option sur un contrat à livrer. De plus, on suppose que le marché est assez liquide pour pouvoir acheter et vendre (possiblement à découvert) les deux options et le sous-jacent de ces deux options. De plus, on suppose qu'on peut emprunter et prêter en tout temps au taux sans-risque. Ces hypothèses ne sont en fait qu'une approximation de la réalité, mais celles-ci seront utilisées afin de simplifier la tarification. Soient C le prix de l'option d'achat, P le prix de l'option de vente, K le prix d'exercice des deux options, T l'échéance des deux options et F_0 le prix du contrat à terme à la date d'évaluation. On peut donc en déduire la célèbre formule de parité des options d'achat et de vente suivante (voir Hull [HUL]) :

$$C + Ke^{-rT} = P + F_0e^{-rT}. \quad (4.2.1)$$

Grâce à cette formule, on peut obtenir un modèle pour le prix d'une option de vente directement à partir du modèle de tarification de l'option d'achat. Il ne reste donc qu'à proposer des modèles pour le prix des options d'achat.

4.2.2. Modèle de Black

Afin d'étendre les résultats du modèle de Black-Scholes [BS], Black [BLA] a proposé une formule pour effectuer la tarification des options sur des contrats à

terme. On suppose tout d'abord que le taux d'intérêt sans-risque composé continuellement est constant, et que le marché est assez liquide pour acheter ou vendre le contrat à terme et l'option en tout temps. De plus, le modèle de Black effectue l'hypothèse suivante par rapport au prix du sous-jacent du contrat à terme (le certificat d'émission dans ce cas) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t, \quad (4.2.2)$$

qui est le Mouvement Brownien Géométrique, ce qui est l'hypothèse du modèle de Black-Scholes. De plus, il est supposé que le modèle à convenance constante pour le prix du contrat à terme (donné par 3.2.2) est valide.

Soient r le taux d'intérêt sans risque, T l'échéance de l'option, F_0 le prix du contrat à terme à la date d'évaluation de l'option et K le prix d'exercice. Cette notation sera utilisée pour le reste de cette section. Soit $N(\cdot)$ dénotant la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $N(0,1)$. Avec ces hypothèses, on arrive à la formule suivante pour une option d'achat sur un contrat à terme :

$$C_{Black}(r, T, F_0, K, \sigma) = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad \text{où} \quad (4.2.3)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}. \quad (4.2.4)$$

Il est à noter que le prix de l'option ne dépend pas du taux de convenance, ce qui évite d'avoir à l'estimer pour ce modèle.

4.2.3. Modèle de Merton

Merton [**MER**] a suggéré une formule pour évaluer une option d'achat ayant comme sous-jacent un actif qui a la propriété de l'équation (2.1.8) c'est-à-dire qui suit le modèle de Merton. Tout d'abord, supposons que le taux d'intérêt sans-risque est constant. On suppose aussi que le sous-jacent a un taux de dividendes constant. Étant donné qu'un marché composé de l'actif qui a la propriété (2.1.8) et d'un actif sans risque est incomplet, la mesure martingale équivalente utilisée pour effectuer la tarification de l'option d'achat dans ce cas n'est pas unique. Donc le prix sans-arbitrage de l'option d'achat n'est pas unique non plus. Cependant, en choisissant une mesure martingale particulière, il est possible d'arriver à une formule fermée pour le prix d'une option d'achat sur l'actif ayant la propriété

(2.1.8). Sous la mesure martingale particulière \mathbb{Q} choisie par Merton, qui est en fait la mesure martingale «correctrice de moyenne» décrite dans Schoutens [SCO], l'actif S a la représentation suivante :

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_J + 0.5\sigma_J^2} - 1))t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}, \quad (4.2.5)$$

où N_t , $Z_t^{\mathbb{Q}}$ et $\{Y_i\}$ restent indépendants sous \mathbb{Q} , la distribution de N_t et des Y_i reste inchangée par rapport à la mesure \mathbb{P} initiale et $Z_t^{\mathbb{Q}}$ est un Mouvement Brownien sous la mesure martingale \mathbb{Q} .

Dénotons par q le taux de dividende (supposé constant) de l'actif S . La formule pour l'option d'achat sous cette mesure martingale particulière \mathbb{Q} a la forme suivante (voir Merton [MER]) :

$$C_{Merton}(r, q, T, S_0, K, \sigma, \lambda, \mu_J, \sigma_J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\lambda}T} (\bar{\lambda}T)^i}{i!} C_{BS}(\sigma_i, r_i). \quad (4.2.6)$$

où

$$\bar{\lambda} = \lambda e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}}, \quad \sigma_i^2 = \sigma^2 + \frac{i\sigma_J^2}{T},$$

$$r_i = r - \lambda(e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1) + \frac{i(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})}{T},$$

$$C_{BS}(\sigma_i, r_i) = C_{BS}(r_i, q, T, S_0, K, \sigma_i) = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-r_i T} N(d_2), \quad (4.2.7)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_i - q + \sigma_i^2)T/2}{\sigma_i \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{T}.$$

Il est à noter que (4.2.7) est la célèbre formule de Black-Scholes [BS] avec les paramètres modifiés r_i et σ_i .

On suppose aussi que le modèle à taux de convenance constant pour le contrat à terme 3.2.2 est valide, c'est à dire que le taux de convenance, qui est traité comme un taux de dividendes, est constant. En substituant 3.2.2 dans 4.2.7, on obtient

$$C_{BS}(\sigma_i, r_i) = C_{BS}(r_i, r, T, S_0, K, \sigma_i) = F_0 e^{-rT} N(d_1) - K e^{-r_i T} N(d_2), \quad (4.2.8)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + (r_i - r + \sigma_i^2)T/2}{\sigma_i \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{T}.$$

On remarque donc que le prix de l'option d'achat de ce modèle ne dépend pas du taux de convenance (en ayant supposé celui-ci constant). Donc, lors de la tarification, on pourra supposer qu'il est nul.

Finalement, on rappelle que si l'on suppose que l'échéance de l'option et du contrat à terme sont identiques (ce qui est le cas dans cette étude), on peut utiliser cette formule pour la tarification d'options sur les contrats à termes, même si celle-ci était à priori destinée à la tarification d'options sur les sous-jacents des contrats à termes.

4.2.4. Modèle NIG

D'une façon un peu analogue au modèle de Merton, il existe sous certaines hypothèses une formule fermée pour tarifier des options d'achat sur des sous-jacent qui suivent un processus *NIG* exponentiel. Supposons d'abord que le taux d'intérêt sans-risque est constant. On suppose aussi que le sous-jacent a un taux de convenance constant (qu'on traite comme un taux de dividendes constant). De plus, on suppose que le sous-jacent du contrat à terme a la représentation Lévy-exponentielle 2.1.25 où L_t est un processus de Lévy dont n'importe quel accroissement de longueur h a une distribution $NIG[\alpha, \beta, \delta h, \mu h]$. Ce processus est celui qui est décrit dans le chapitre 2. Encore une fois, un marché composé d'un tel actif et d'un actif sans risque est incomplet, et il existe plusieurs mesure martingales équivalentes. Afin de tarifier une option d'achat sur l'actif *NIG* exponentiel, il faut donc choisir une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} particulière. Dans l'étude présente, la mesure \mathbb{Q} choisie sera la mesure «correctrice de moyenne» décrite dans le livre de Schoutens [SCO]. Sous cette mesure \mathbb{Q} , les accroissements de longueur h du processus L_t ont une distribution $NIG[\alpha, \beta, \delta h, \theta h]$ où

$$\theta = r - q + \delta \left[\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right].$$

Le prix d'une option d'achat, lorsque la tarification est effectuée à l'aide de cette mesure \mathbb{Q} , est donné par la formule suivante (Morales [MOR]) :

$$C_{NIG}(r, q, T, S_0, K, \alpha, \beta, \delta) = S_0 e^{-qT} \overline{NIG} \left(\ln \frac{K}{S_0}; \alpha, \beta + 1, \delta T, \theta T \right) \quad (4.2.9)$$

$$- K e^{-rT} \overline{NIG} \left(\ln \frac{K}{S_0}; \alpha, \beta, \delta T, \theta T \right),$$

où $\overline{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire NIG de paramètres respectifs α, β, δ et μ évaluée en x . Lorsque l'on suppose que le modèle de convenance constante pour les contrats à terme 3.2.2 est valide, et que l'on substitue cette équation dans 4.2.9, on obtient

$$C_{NIG}(r, T, F_0, K, \alpha, \beta, \delta) = F_0 e^{-rT} \overline{NIG} \left(\ln \frac{K}{F_0}; \alpha, \beta + 1, \delta T, \tilde{\theta} T \right) \quad (4.2.10)$$

$$-K e^{-rT} \overline{NIG} \left(\ln \frac{K}{F_0}; \alpha, \beta, \delta T, \tilde{\theta} T \right),$$

où $\tilde{\theta} = \delta \left[\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right]$. On remarque donc qu'encore une fois, le prix de l'option d'achat ne dépend pas du taux de convenance constant q . On pourra donc le supposer nul lorsque la tarification sera effectuée. On remarque aussi que le prix de l'option d'achat ne dépend pas de μ . Cette formule nous donne le prix d'une option d'achat sur le sous-jacent du contrat à terme. Cependant, vu qu'on a supposé que l'échéance du contrat à terme et de l'option sont identiques, cette formule est aussi valide pour donner le prix d'une option sur le contrat à terme.

4.3. RÉSULTATS

Deux listes de prix d'options distinctes ont été étudiées dans cette section : les options intraphase de la deuxième phase sur des EUA et les options intraphase de la deuxième phase sur des CER. Chacune des deux listes contient les options d'achat et les options de vente. Les trois modèles présentés précédemment ont été comparés : le modèle de Black, le modèle de Merton et le modèle NIG . Encore une fois, la méthodologie des moindres carrés a été appliquée afin de calibrer les paramètres des modèles aux données du marché. Cette méthodologie est exactement la même que celle décrite au chapitre 3 sur la tarification des contrats à terme. Les estimateurs des moindres carrés obtenus sont donc caractérisés par la formule suivante : $\vec{\theta}_{MC} := \underset{\vec{\theta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left(C_i - \hat{C}_i(\vec{\theta}) \right)^2$, où les C_i sont les prix au marché des options d'achat, et les \hat{C}_i sont les prix donnés par le modèle.

Les définitions des erreurs utilisées sont tout à fait analogues à 3.3.1, où l'on remplace respectivement F_i et \hat{F}_i par C_i et \hat{C}_i dans les formules. La figure 4.1

montre les paramètres calibrés pour chacun des modèles, et la figure 4.2 montre les résultats de la calibration des trois modèles. De plus, les figures 4.3 et 4.4 montrent les prix empiriques des options par rapport aux prix théoriques donnés par les modèles.

OPTIONS ECX		
PARAMÈTRES	EUA	CER
MODÈLE DE BLACK		
σ	0.4883	0.5191
MODÈLE DE MERTON		
σ	0.3840	0.3609
λ	0.7629	0.1587
μ_j	0.0177	0.7401
σ_j	0.3437	0.1815
MODÈLE NIG		
α	5.0520	4.9180
β	0.2286	2.2463
δ	1.1934	0.7633

FIGURE 4.1. Paramètres pour les options

EUA ECX : OPTIONS			
	MODÈLE DE BLACK	MODÈLE DE MERTON	MODÈLE NIG
MPE_rel	0.1769	0.1851	0.1870
ME_rel	0.0119	-0.0263	-0.0283
MSE_rel	0.1169	0.1183	0.1186
MPE_abs	0.2575	0.2529	0.2534
MSE_abs	0.3031	0.3003	0.3004

CER ECX : OPTIONS			
	MODÈLE DE BLACK	MODÈLE DE MERTON	MODÈLE NIG
MPE_rel	0.1823	0.1629	0.1749
ME_rel	0.0805	0.0241	0.0080
MSE_rel	0.0899	0.0760	0.0773
MPE_abs	0.3921	0.3678	0.3672
MSE_abs	0.2476	0.2261	0.2261

FIGURE 4.2. Erreurs pour les options

Si l'on regarde les figures 4.3 et 4.4, on a l'impression que les trois modèles performant de façon très similaire ; les graphiques se ressemblent. Dans la figure

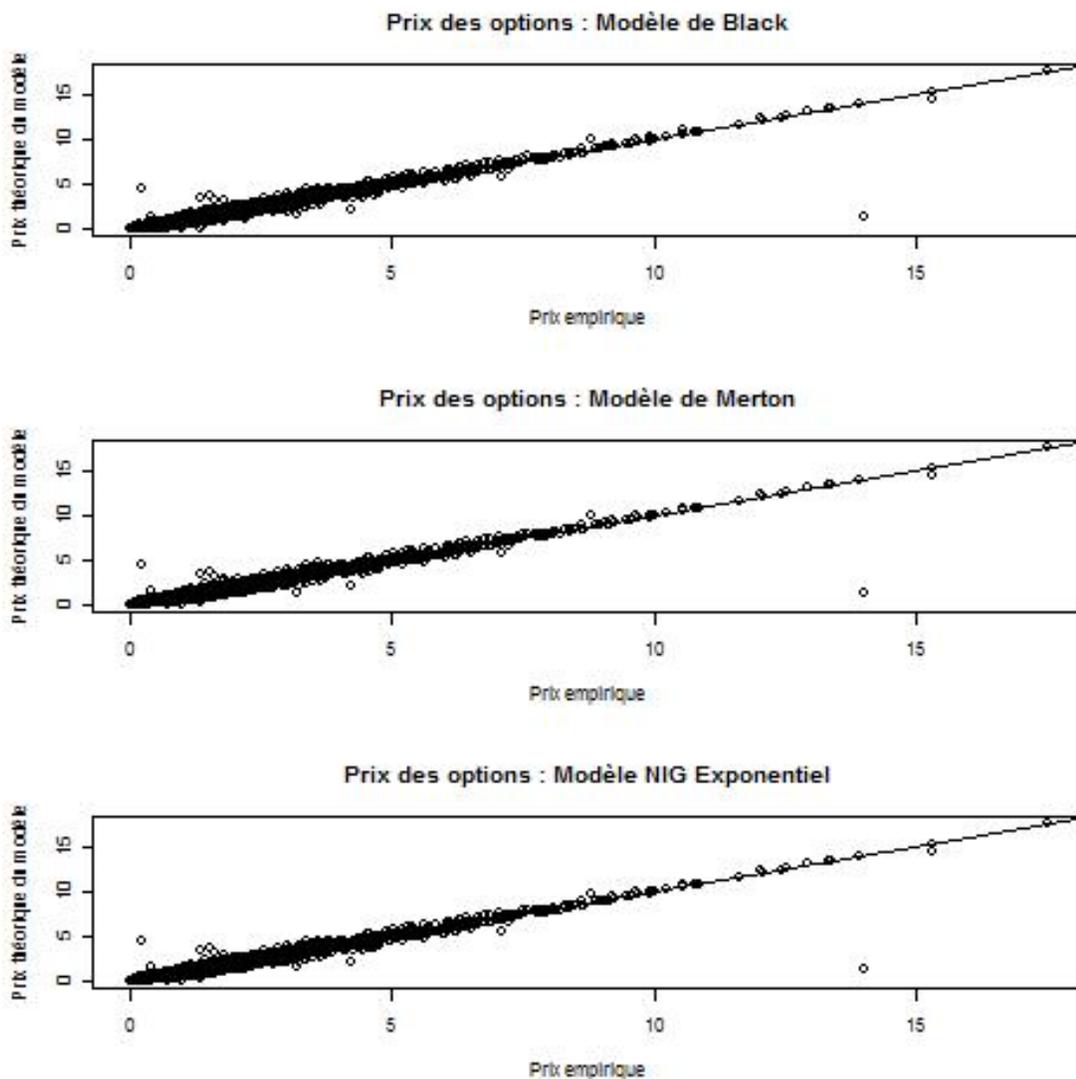


FIGURE 4.3. Comparaison des prix empiriques et théoriques des options EUA

4.2, si on regarde l'erreur MSE_{abs} qui est celle qui est minimisée lors de l'estimation des paramètres, on remarque que la performance du modèle de Merton et du modèle NIG est très légèrement supérieure à celle du modèle de Black. Cependant, le modèle de Black est beaucoup plus parcimonieux que les deux autres ; il est beaucoup plus simple d'optimiser la fonction des moindres carrés pour un modèle à un seul paramètre que pour un modèle à trois ou quatre paramètres. Ainsi, vu que la différence des erreurs est très petite, il est probablement préférable d'utiliser le modèle de Black. De plus, lorsque l'on regarde l'estimation des

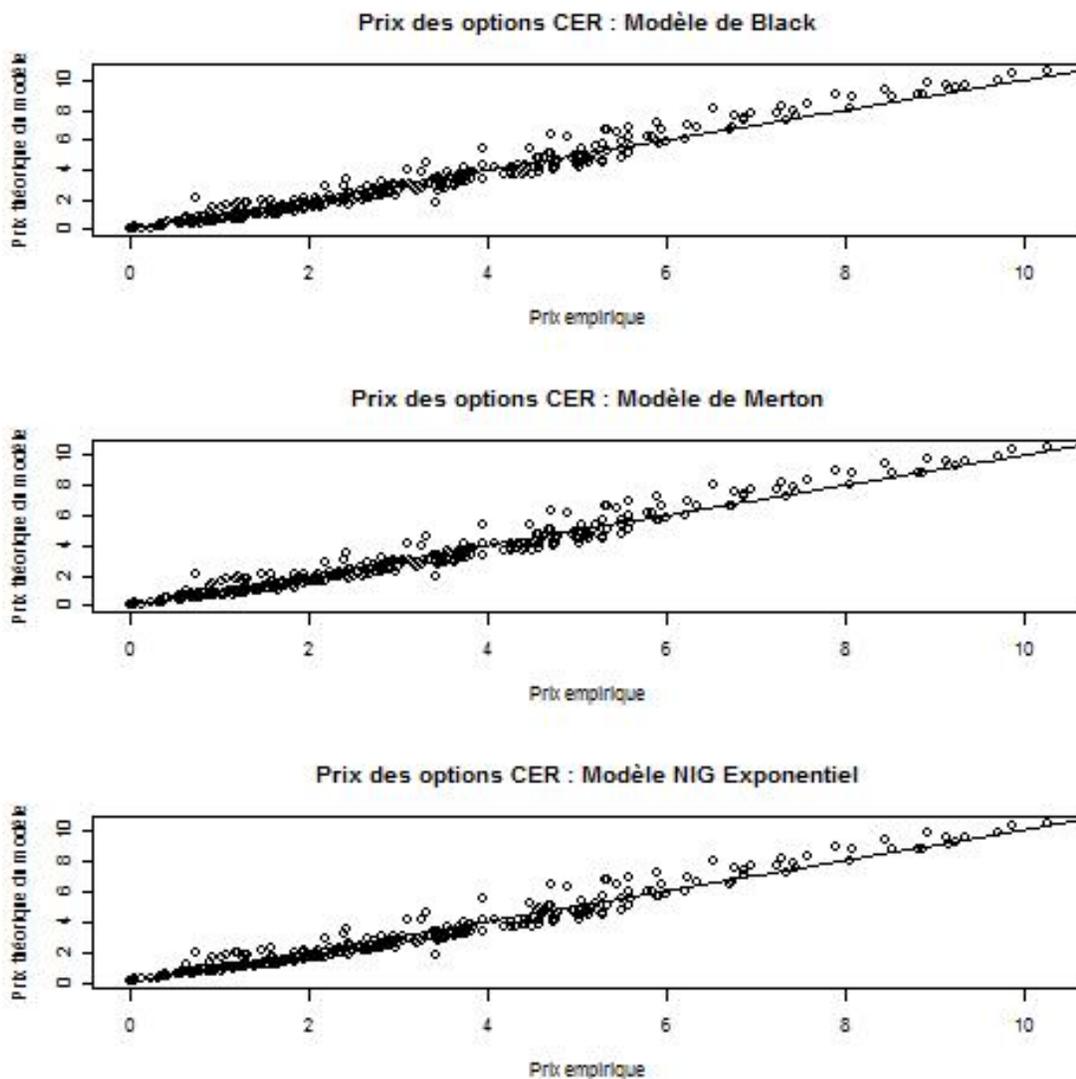


FIGURE 4.4. Comparaison des prix empiriques et théoriques des options CER

paramètres du modèle de Merton, on remarque que le paramètre λ , qui régit le nombre de sauts dans la trajectoire du sous-jacent, est inférieur à 1 pour les deux listes, ce qui indique que les prix estimés du modèle de Merton sont probablement proches des prix estimés du modèle de Black.

CONCLUSION

Tout d'abord, différents modèles ont été comparés afin de représenter le prix des certificats d'émission EUA et CER de la deuxième phase, des contrats à terme sur ceux-ci et des options sur ces contrats à terme. Lorsque seulement les données d'après la récession de 2008 sont sélectionnées, on remarque que parmi les processus qui ont été comparés, le processus AR(1) et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sont ceux qui sont les plus performants selon le critère de Schwarz. Or, le critère de Schwarz n'évalue seulement que la parcimonie d'un modèle ainsi que sa capacité de s'ajuster aux données.

Pour tarifier les contrats à terme intraphase (où le sous-jacent s'échange sur les marchés), le modèle à convenance constante semble le plus approprié. Il n'est pas clair que le modèle de Gibson a significativement une meilleure capacité à s'ajuster aux données que le modèle à convenance constante. De plus, selon le critère des moindres carrés, le modèle à convenance constante performe mieux que le modèle classique, surtout pour les contrats à terme sur les CER. Pour les EUA, le modèle classique pourrait cependant représenter un modèle raisonnable, à condition d'évaluer précisément le taux sans risque.

Cependant, pour les contrats à terme interphase, où le sous-jacent n'est pas échangé sur les marchés, le modèle de Gibson se révèle plus performant ; il s'ajuste beaucoup mieux aux prix du marché selon le critère des moindres carrés.

Finalement pour les options sur les contrats à terme, les modèles de Merton et NIG n'offrent que peu d'améliorations par rapport au modèle de Black selon le critère des moindres carrés. Étant donné que le modèle de Black est plus parcimonieux, on peut donc le considérer préférable aux deux premiers modèles.

L'étude des données sur les certificats d'émission et les produits dérivés du EU ETS contenue dans ce mémoire est une étude exploratoire qui avait pour objectif d'identifier des modèles pouvant représenter le prix de ces actifs financiers. Cependant, d'autres travaux seront probablement nécessaires afin d'identifier avec plus de précision ceux-ci, et d'adapter ces derniers à la situation particulière des marchés du carbone. Tout d'abord, étant donné que le EU ETS est un marché immature qui est en pleine expansion, la structure de ce marché pourrait changer et les résultats obtenus au cours du présent travail pourraient se révéler invalides dans le futur. Ensuite, la capacité des modèles à effectuer des prédictions n'a pas été évaluée dans le présent mémoire. Finalement, certaines modifications pourraient être ajoutées aux modèles pour que ceux-ci soient faits sur mesure pour les marchés du carbone ; les raisons pour lesquelles des acteurs économiques transigent des certificats d'émission ainsi que des produits dérivés sur ceux-ci peuvent être différentes des raisons pour lesquelles sont échangés d'autres actifs financiers tels que les actions. Il pourrait donc y avoir une possibilité d'adapter les modèles à ces particularités.

BIBLIOGRAPHIE

- [AND] T.W. ANDERSON, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley, 1958.
- [BN1] O.E. BARNDORFF-NIELSEN, *Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, **353**, 1977, pp. 401-419.
- [BN2] O. BARNDORFF-NIELSEN, ET C. HALGREEN, *Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distributions*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **38**, 1977, pp. 309-311.
- [BEN1] E. BENZ, ET S. TRÜCK, *Modeling the price dynamics of CO2 emission allowances*, Energy Economics, **31**, 2009, pp. 4-15.
- [BEN2] E. BENZ, ET J. KLAR, *Liquidity and price discovery in the European CO2 futures market : an intraday analysis*, Cahier de Recherche, Bonn Graduate School of Business, 2008
- [BIL] P. BILLINGSLEY, *Probability and measure*, Wiley, 2ème édition, 1986.
- [BJO] T. BJÖRK, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford, 2ème édition, 2004.
- [BLA] F. BLACK, *The pricing of commodity contract*, Journal of Financial Economics, **3**, 1976, pp. 167-179.
- [BS] F. BLACK, ET M. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, **81**, 1973, pp. 637-654.
- [BOK] K. BOROVKOV, G. DECROUEZ, ET J. HINZ, *Jump-diffusion modeling in emission markets*, Quantitative Finance Papers 1001.3728, arXiv.org, 2010.
- [BOX] G.E.P. BOX, ET G.M. JENKINS, *Time Series Analysis : forecasting and control*, Holden-Day, Revised edition, 1976.
- [BOY] S.I. BOYARCHENKO, ET S.Z. LEVENDORSKIĬ, *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*, World Scientific, 2002.

- [CA1] R. CARMONA, ET J. HINZ, *Risk neutral modeling of emission allowance prices and option valuation*, Rapport technique, Princeton University, 2009.
- [CA2] R. CARMONA, ET M. LUDKOVSKI, *Spot convenience yield models for the energy markets*, Mathematics of finance, **351**, 2004, pp. 65-79.
- [CET] U. ÇETIN, ET M. VERSCHUERE, *Pricing and hedging in carbon emissions markets*, International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF), **12**, 2009, pp. 949-967.
- [CHE] M. CHESNEY, ET L. TASCHINI, *The endogenous price dynamics of emissions allowances : An application to CO2 option pricing*, Swiss Finance Institute Research Paper Series no. 08-02, 2008.
- [CON] R. CONT, ET P. TANKOV, *Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models*, Journal of Computational Finance, **7**, 2004, pp. 1-49.
- [CIR] J.C. COX, J.E. INGERSOLL, ET S.A. ROSS, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, **53**, 1985, pp. 385-407.
- [DA1] G. DASKALAKIS, D. PSYCHOYIOS, ET R. MARKELLOS, *Modeling CO₂ emission allowance prices and derivatives : Evidence from the European trading scheme*, Journal of Banking and Finance, **33**, 2009, pp. 1230-1241.
- [DA2] G. DASKALAKIS, D. PSYCHOYIOS, ET R. MARKELLOS, *Modeling CO₂ emission allowance prices and derivatives : Evidence from the EEX*, ERIM Report Series ERS-2005-052-F&A, 2005.
- [DEL] F. DELBAEN, ET W. SCHACHERMAYER, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen, **300**, 1994, pp. 463-520.
- [DEM] A.P. DEMPSTER, N.M. LAIRD, ET D.B. RUBIN, *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), **39**, 1977, pp. 1-38.
- [DIR] DIRECTORATE GENERAL COMMUNICATION, *Questions and Answers on the Commission's proposal to revise the EU Emissions Trading System*, MEMO/08/35 de la Commission Européenne, 2008, Disponible en ligne : <http://europa.eu/rapid/pressReleasesAction.do?reference=MEMO/08/35&format=HTML&aged=0&language=EN&guiLanguage=en>
- [DUF] D. DUFRESNE, *The integrated square-root process*, Papier de Recherche no. 90, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne, 2001.

- [EB1] E. EBERLEIN ET U. KELLER, *Hyperbolic Distributions in Finance*, Bernoulli, **1**, 1995, pp. 281-299.
- [EB2] E. EBERLEIN, *Application of Generalized Hyperbolic Lévy Motions to Finance*, Lévy Processes : Theory and Applications, Birkhäuser, 2001, pp. 319-336
- [FUS] P.C. FUSARO, *Energy and environmental hedge funds*, Commodities Now, Septembre 2007. pp. 1-2.
- [GIB] R. GIBSON, ET E.S. SCHWARTZ, *Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims*, Journal of Finance, **45**, 1990, pp. 959-976.
- [GUO] Z.J. GUO, *A note on the CIR process and the existence of equivalent martingale measures*, Statistics and Probability Letters, **78**, 2008, pp. 481-487.
- [HIG] D.J. HIGHAM, *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review, **43**, 2001, pp. 525-546.
- [HIL] J.E. HILLIARD, ET J. REIS, *Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **33**, 1998, pp. 61-86.
- [HUL] J.C. HULL, *Options, Futures and other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, 7ème édition, 2009.
- [IPCC] INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE, *Climate Change 2007 : The Physical Science Basis*, Cambridge University Press, 2007.
- [JAC] J. JACOD, ET A.N. SHIRYAEV, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 2ème édition, 2003.
- [KAM] M. KARA, S. SYRI, ET AL, *The impacts of EU CO₂ emissions trading on electricity markets and electricity consumers in Finland*, Energy Economics, **30**, 2008, pp.193-211.
- [KAR] D. KARLIS, *An EM type algorithm for maximum likelihood estimation for the normal inverse Gaussian distribution*, Statistics and Probability Letters, **57**, 2002, pp. 43-52.
- [KLU] S.A. KLUGMAN, H.H. PANJER ET G.E. WILLMOT, *Loss Models : From Data to Decisions*, Wiley, 2ème édition, 2004.
- [MER] R.C. MERTON, *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3**, 1976, pp. 125-144.

- [MOR] M. MORALES, S. MAYORAL, ET F. GODIN, *Contingent Claim Pricing Using a Normal Inverse Gaussian Probability Distortion Operator*, Cahier de recherche no. CRM-3290, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 2009.
- [OKS] B. ØKSENDAL, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, Springer, 6ème édition, 2007.
- [PAO] M.S. PAOLELLA, ET L. TASCINI, *An econometric analysis of emission trading allowances*, Journal of Banking and Finance, **32**, 2008, pp. 2022-2032.
- [PHI] P.C.B. PHILLIPS, ET J. YU, *Maximum Likelihood and Gaussian Estimation of Continuous Time Models in Finance*, Handbook of Financial Time Series, Elsevier, 2010.
- [PRO] P.E. PROTTER, *Stochastic Integration and Differential equations*, Springer, 2ème édition, 2004.
- [SAT] K.-I. SATO, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999.
- [SCO] W. SCHOUTENS, *Lévy Processes in Finance : Pricing Financial Derivatives*, Wiley, 2003.
- [SCW] G. SCHWARZ, *Estimating the Dimension of a Model*, Annals of Statistics, **6**, 1978, pp. 461-464.
- [SEI] J. SEIFERT, M. UHRIG-HOMBURG, ET M. WAGNER, *Dynamic behavior of CO₂ spot prices*, Journal of Environmental Economics and Management, **56**, 2008, pp. 180-194.
- [SHU] R.H. SHUMWAY, ET D.S. STOFFER, *Time series analysis and its applications*, Springer, 2ème édition, 2006.
- [STL] M.J. STEELE, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 2001.
- [STR] N. STERN, *The Economics of Climate Change*, American Economic Review, **98**, 2008, pp. 1-37.
- [TRU] S. TRÜCK, S. BORAK, W. HÄRDLE, ET R. WERON, *Convenience yields for CO₂ emission allowance futures contracts*, Sfb 649 discussion paper 2006-076, SFB Economic Risk Berlin, 2007.
- [VAN] M.A. VAN DEN BERG, *Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck model*, Sitmo, [http : //www.sitmo.com/doc/Calibrating_the_Ornstein-Uhlenbeck_model](http://www.sitmo.com/doc/Calibrating_the_Ornstein-Uhlenbeck_model).

- [VAS] O. VASICEK, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, **5**, 1977, pp. 177-188.