

Université de Montréal

**Étude des transitions de phase dans le modèle de Higgs abélien en
(2+1) dimensions et l'effet du terme de Chern-Simons**

par
Faïza Nebia-Rahal

Département physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en physique

octobre, 2009

© Faïza Nebia-Rahal, 2009.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

**Étude des transitions de phase dans le modèle de Higgs abélien en
(2+1) dimensions et l'effet du terme de Chern-Simons**

présentée par:

Faïza Nebia-Rahal

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Normand Mousseau,	président-rapporteur
Richard MacKenzie,	directeur de recherche
Manu Paranjape,	codirecteur
Georges Azuelos,	membre du jury
Howard Trottier,	examineur externe
Yvan Saint-Aubin,	représentant du doyen de la FES

Thèse acceptée le:

RÉSUMÉ

Nous avons investigué, via les simulations de Monte Carlo, les propriétés non-perturbatives du modèle de Higgs abélien en 2+1 dimensions sans et avec le terme de Chern-Simons dans la phase de symétrie brisée, en termes de ses excitations topologiques : vortex et anti-vortex. Le but du présent travail est de rechercher les phases possibles du système dans ce secteur et d'étudier l'effet du terme de Chern-Simons sur le potentiel de confinement induit par les charges externes trouvé par Samuel. Nous avons formulé une description sur réseau du modèle effectif en utilisant une tessellation tétraédrique de l'espace tridimensionnel Euclidien pour générer des boucles de vortex fermées. En présence du terme de Chern-Simons, dans une configuration donnée, nous avons formulé et calculé le nombre d'enlacement entre les différentes boucles de vortex fermées. Nous avons analysé les propriétés du vide et calculé les valeurs moyennes de la boucle de Wilson, de la boucle de Polyakov à différentes températures et de la boucle de 't Hooft en présence du terme de Chern-Simons.

En absence du terme de Chern-Simons, en variant la masse des boucles de vortex, nous avons trouvé deux phases distinctes dans le secteur de la symétrie brisée, la phase de Higgs habituelle et une autre phase caractérisée par l'apparition de boucles infinies. D'autre part, nous avons trouvé que la force entre les charges externes est écrantée correspondant à la loi périmètre pour la boucle de Wilson impliquant qu'il n'y a pas de confinement. Cependant, après la transition, nous avons trouvé qu'il existe toujours une portion de charges externes écrantée, mais qu'après une charge critique, l'énergie libre diverge. En présence du terme de Chern-Simons, et dans la limite de constante de couplage faible de Chern-Simons nous avons trouvé que les comportements de la boucle de Wilson et de la boucle de 't Hooft ne changent pas correspondants à une loi périmètre, impliquant qu'il n'y a pas de confinement. De plus, le terme de Chern-Simons ne contribue pas à la boucle de Wilson.

Mots clés : Higgs abélien, confinement, Chern-Simons, paire de vortex-antivortex, boucle de vortex, nombre d'enlacement, Simulations de Monte Carlo, Transition de phase.

ABSTRACT

We investigate, via Monte Carlo simulations, non-perturbative properties of a 2+1 dimensional Abelian Higgs model without and with the Chern-Simons term in the symmetry broken phase in terms of its topological excitations: vortices and anti-vortices. The aim of the present work is to understand what phases exist for the system in that sector and the effect of the Chern-Simons term on the confining potential induced between external charges found by Samuel. We formulate a lattice description of the effective model starting from a tetrahedral tessellation of Euclidean three space to generate non-intersecting closed vortex loops. In the presence of the Chern-Simons term, for a given configuration, we formulate and compute the linking number between different closed vortex loops. We analyse properties of the vacuum and compute the expectation value of Wilson loop operator, Polyakov loop operator at different temperatures and the 't Hooft loop operator in the presence of the Chern-Simons term.

In the absence of a Chern-Simons term, as we vary the mass of the vortex loops, we find two distinct phases in the symmetry broken sector, the usual Higgs phase and a novel phase which is heralded by the appearance of the so-called infinite loops. On the other hand, we find that the force between all external charges is screened, corresponding to a perimeter law for the Wilson loop implying no confinement. However, after the transition, we find that small external charges are still screened, but after a critical value of the external charge, free energy diverges. In the presence of Chern-Simons term, and in the limit where the coupling constant is low for Chern-Simons we find that the behavior of Wilson loop does not change: it is still a perimeter law, implying no confinement. Moreover, the Chern-Simons term does not contribute to the Wilson loop. 'tHooft loop behaves like a perimeter law too.

Key words: abelian Higgs, confinement, Chern-Simons, vortex- antivortex pair, vortex loop, Linking number, Monte Carlo simulations, phase transition.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
ABSTRACT	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES ANNEXES	xv
DÉDICACE	xvi
REMERCIEMENTS	xvii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : CONCEPTS GÉNÉRAUX	4
1.1 Introduction	4
1.2 Méthode des intégrales de chemin de Feynman	4
1.2.1 Méthode des intégrales de chemin en mécanique quantique	5
1.2.2 Représentation des intégrales de chemin des Fonctions de Green bosoniques en théorie des champs	9
1.3 Un gaz de cordes vu comme une théorie des champs	10
1.3.1 Cas d'une boucle non fermée	10
1.3.2 Cas d'une boucle fermée	13
CHAPITRE 2 : ÉTUDE DU MODÈLE DE HIGGS ABÉLIEN EN (2+1)D AVEC TERME DE CHERN-SIMONS : SOLUTIONS VORTEX DE NIELSEN-OLESEN	15
2.1 Introduction	15
2.2 Modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions	15
2.2.1 Spectre perturbatif	16
2.2.2 Solution vortex de Nielsen-Olesen	17

2.2.3	La limite de couplage fort	27
2.3	Modèle de Higgs abélien avec terme de Chern-Simons en (2+1) dimensions	27
2.3.1	La limite κ petit	30
2.3.2	Le nombre d'enlacement	31
2.3.3	Loi de conservation topologique : Invariant de Hopf	32

CHAPITRE 3 : ÉTUDE D'UN GAZ DE BOUCLES SUR RÉSEAU- MOTIVATIONS ET INTÉRÊTS 35

3.1	Introduction	35
3.2	Le confinement prouvé par Samuel	35
3.3	Transition de phase observée par Einhorn et Savit	37
3.4	Motivation et conclusion	37

CHAPITRE 4 : THÉORIE EFFECTIVE SUR RÉSEAU ET MÉTHODE DE SIMULATIONS MONTE CARLO 39

4.1	Introduction	39
4.2	La théorie effective	39
4.3	Discrétisation de l'espace Euclidien	40
4.4	Boucles fermées sur le réseau	44
4.5	Méthode de simulations numériques sur le réseau	48
4.5.1	Idée générale	48
4.5.2	Processus de mises à jours- Chaînes de Markov	50
4.5.3	Estimation des erreurs	52
4.5.4	Méthode de Metropolis	53
4.6	Nombre d'enlacement sur le réseau	57
4.6.1	Notre méthodologie	61
4.6.2	Algorithme de déformation d'une boucle	64
4.6.3	Nombre d'enlacement de deux boucles quelconques- Algorithmes	66
4.6.4	Nombre d'enlacement en terme de nombre d'enroulement dans la direction z	66

4.6.5	Nombre d'enlacement de deux boucles, basé sur l'approche de Lacher and Sumners	67
-------	--	----

CHAPITRE 5 : SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE EFFECTIF		72
5.1	Introduction	72
5.2	Méthode de Monte Carlo	72
5.2.1	Générateur de nombres aléatoires	72
5.2.2	Thermalisation	74
5.2.3	Corrélation dans les séquences successives de configurations	78
5.2.4	Équilibre thermodynamique	81
5.3	Résultats numériques sans terme de Chern-Simons	85
5.3.1	Évidence pour le changement de phase	85
5.3.2	Distribution des boucles fermées	87
5.3.3	Longueur moyenne des boucles	90
5.3.4	Boucle de Wilson	91
5.3.5	Boucle de Polyakov	112
5.3.6	Analyse d'échelle	118
5.3.7	Discussion et conclusion	125
5.4	Résultats numériques avec le terme de Chern-Simons	126
5.4.1	Détails des simulations	126
5.4.2	Nombre d'enlacement total des boucles fermées	127
5.4.3	La phase de Chern-Simons	130
5.4.4	Boucle de Wilson	137
5.4.5	Boucle de 't Hooft	144
5.4.6	Discussion et conclusion	145
CONCLUSION		147
BIBLIOGRAPHIE		152

LISTE DES FIGURES

1.1	Un chemin qui relie les points dans l'espace-temps (q, τ) et (q', τ') . Ce chemin contribue à l'intégrale 1.17. Figure tirée de [5].	8
1.2	(b) et (d) sont les approximations macromolécules de (a) et (c), respectivement. (c) est une courbe fermée. Figure tirée de [7].	11
2.1	Potentiel de type sombrero pour la symétrie $U(1)$ brisée montrant des cercles de dégénérescence des minima. Figure tirée de [13].	17
2.2	Comportement du champ scalaire à $r = \infty$ dans la solution vortex ($n=1$). Quand le champ scalaire aurait parcouru un tour du cercle de l'espace réel, sa phase aurait parcouru un tour complet dans le cercle complexe. Figure tirée de [14].	20
2.3	Un exemple de comportement de ϕ et du champ magnétique. Figure tirée de [9].	21
2.4	La forme des fonctions $f(r)$ (courbe solide) et $\alpha(r)$ (courbe en pointillés) pour la solution vortex ($n = 1$) au point critique $\beta \equiv 2\lambda/e^2$. Figure tirée de [13].	24
2.5	Une section d'une ligne de vortex de Nielsen-Olesen. (a) : Le vecteur de jauge. Il a la forme de tourbillon autour de l'origine d'où l'appellation vortex.(b) : Le champ scalaire $ \phi $ en rouge et le champ magnétique B_z en vert. (c) : Le champ scalaire $ \phi $ en rouge et la densité d'énergie en bleu. Le champ magnétique et la densité d'énergie sont bien localisés à l'endroit où $ \phi = 0$ (à l'origine). Figures tirées de [13] et [15].	25
2.6	Dépendance de l'énergie par unité de longueur d'une boucle de vortex sur les masses de Higgs et du vecteur boson, $g(\beta) = \mu/2\pi\eta^2$, $\beta = 2\lambda/e^2 = (m/M)^2$. Figure tirée de [13].	26
2.7	Les particules chargées de charge e ont chacune un flux de champ magnétique e/κ lié à leur charge. La charge et le flux restent liés tout au long du mouvement de la particule. Les particules sont des anyons. Figure tirée de [17].	30

2.8	Quand une particule tourne adiabatiquement autour d'une autre particule, en plus de l'interaction électrique entre elles, la fonction d'onde acquiert une phase Aharonov-Bohm $\exp(ie \oint A \cdot dx) = \exp(ie^2/\kappa)$. La phase d'échange anyonique est $2\pi\Delta\theta = e^2/(2\kappa)$. Figure tirée de [17].	31
2.9	Illustration d'un enlacement entre deux courbes dans l'espace tridimensionnel. Pour trouver la valeur algébrique du nombre d'enlacement il faut orienter les deux courbes.	34
4.1	Notre maille élémentaire conventionnelle pour générer la tessellation tétraédrique, à partir d'une structure cubique centrée. Il y a huit vertex aux sommets et un vertex au centre. Tous ces vertex sont reliés par des arêtes.	42
4.2	(a) : Une des 6 pyramides formées dans la maille conventionnelle est montrée. La base est une face du cube élémentaire. Le vertex central est en rouge. (b) : En divisant la pyramide en deux, nous obtenons 2 sites tétraédriques non réguliers comme celui montré ici. Un tétraèdre est formé d'un vertex du centre (en rouge) et de trois vertex de trois sommets (en noir). Dans une maille élémentaire, au total, il y a 12 tétraèdres.	43
4.3	Exemple d'un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$	44
4.4	Génération d'une ligne de vortex dans un tétraèdre. (a) : Il n'y a pas de ligne de vortex traversant ce tétraèdre. (b) : Une ligne de vortex peut traverser ce tétraèdre puisque deux faces triangulaires contiennent la combinaison des spins 1, 2 et 3. La ligne de vortex est représentée en bleu dans (c). Son orientation : du haut vers le bas de l'image.	46
4.5	Boucle fermée de longueur 4 (en jaune) dans une maille cubique élémentaire.	47
4.6	À gauche : Boucle de longueur 30 fermée dans un réseau $3 \times 3 \times 3$ (en jaune). Les conditions périodiques ont été utilisées. À droite : Cette boucle est représentée avec le réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$	48

4.7	Exemples de liaisons entre deux boucles fermées. Le degré de leur liaison représente le nombre d'enlacement qui est donné en dessous de chaque paire de boucles [37].	59
4.8	Exemples de liaisons entre deux boucles fermées. (a) : La corde épaisse représente la première boucle. Les lignes qui sont entrelacées autour de cette corde représentent la deuxième boucle. (b) : La corde épaisse représente la première boucle. Les lignes qui sont entrelacées autour de cette corde représentent la deuxième boucle. D'après [38], $L_k = -8$ dans (a) et $L_k = 10$ dans (b). Figure tirée de [38].	60
4.9	(a) : L'indice $C(p)$ est défini pour tous les points de croisements entre deux courbes. (b) : En appliquant les règles données en (a), on trouve $L_k = -2$. Figures tirées de [38].	61
4.10	Deux boucles en jaune et en vert sont représentées dans un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$. Les conditions périodiques sont utilisées. En rouge est la boucle déformée de celle en jaune.	64
4.11	La boucle en jaune et sa boucle déformée en rouge dans un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$	65
4.12	Vue en plongée du plan qu'on obtient en projetant dans la direction $(1,1,1)$ pour un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$	68
4.13	Vue en plongée de la figure 4.10 dans le plan perpendiculaire à la direction $(1, 1, 1)$ de la diagonale principale du réseau original.	69
5.1	Un million de nombres aléatoires sont générés et représentés en paires consécutives sur l'axe des X (X_i) et l'axe des Y (X_{i+1}) en utilisant le générateur de Mersenne Twister [40].	73
5.2	Longueur totale de boucles en échelle logarithmique en fonction du temps de simulation pour un réseau cubique 100^3 . Du haut vers le bas, $\mu = 0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.9, 1.5$. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. L'unité du temps est une mise à jour sur tous les vertex du réseau.	75

5.3	(Haut) : Longueur totale de boucles en fonction du temps de simulation pour un réseau 100^3 pour $\mu = 0,13$ en utilisant deux configurations initiales différentes. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (Bas) : La région de convergence des courbes en bleu et rouge de la figure du haut est agrandie.	76
5.4	(Haut) : Longueur totale de boucles en fonction du temps de simulation pour un réseau 100^3 pour $\mu = 0,5$ en utilisant deux configurations initiales différentes. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (Bas) : La région de convergence des courbes en bleu et rouge de la figure du haut est agrandie.	77
5.5	Fonction d'autocorrelation de la longueur totale des boucles $\Phi_{L_T}(t)$ pour un réseau cubique 100^3 . Les valeurs de μ sont indiquées sur chaque figure. L'unité du temps utilisée pour t est une mise à jour par vertex. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées.	80
5.6	Fonction d'autocorrelation de la longueur totale des boucles $\Phi_{L_T}(t)$ pour un réseau cubique 100^3 . Les valeurs de μ sont indiquées sur la figure. L'unité du temps utilisée pour t est une mise à jour par vertex. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. . .	81
5.7	Histogrammes de longueur totale des boucles. (a), (b) et (c) : $\mu = 0.13$, $N = 10000, 4000, 1000$, respectivement. (d), (e) et (f) : $\mu = 0.3$, $N = 10000, 5000, 1000$, respectivement.	83
5.8	Longueur totale des boucles en fonction du temps en équilibre thermodynamique pour $N = 10000$. (a) : $\mu = 0.13$. (b) : $\mu = 0.2$. (c) : $\mu = 0.3$. (d) : $\mu = 0.6$	84
5.9	(a) : Valeur moyenne de la longueur totale des boucles en fonction de μ , $0 \leq \mu \leq 1.9$, pour un réseau cubique 100^3 . Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (b) : La région qui contient le point d'inflexion dans (a) est agrandie.	86
5.10	Images instantanées de boucles fermées prises en équilibre dans un réseau de dimensions 100^3 . (a) : Seules les plus longues boucles ($1400 \leq L \leq 3000$) sont représentées pour $\mu = 0.152$. (b) : Une seule boucle est représentée ($L \simeq 155500$) pour $\mu = 0.148$	88

5.11	Densité de boucles finies en fonction de la densité totale pour $0 \leq \mu \leq 1.5$ pour un réseau cubique 100^3 . Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées.	89
5.12	Longueur moyenne de boucles finies en fonction du logarithme de la masse des vortex ($0 \leq \mu \leq 1.2$). Le réseau utilisé est 100^3 . Les conditions périodiques aux frontières sur le réseau ont été utilisées. .	91
5.13	Boucle de Wilson orientée. Les deux charges, q et $-q$, sont séparées d'une distance L pour une durée T euclidienne.	92
5.14	Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille (L, T) avec les boucles de vortex pour $\mu = 0.13$. (a) : $(L, T) = (20, 80)$. (b) : $(L, T) = (40, 80)$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3	96
5.15	Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (20, 80)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.15$. (b) : $\mu = 0.21$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3	97
5.16	Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (20, 80)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.3$. (b) : $\mu = 0.6$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3	97
5.17	Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (40, 150)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.13$. (b) : $\mu = 0.3$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$	98
5.18	Variance du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de μ . $(L, T) = (40, 80); (20, 80)$. Le réseau utilisé est 100^3	99
5.19	Variance du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson (L, T) avec les boucles de vortex en fonction du périmètre $(L + T)$ pour $\mu = 0.13; 0.2; 0.3; 0.6$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$	100
5.20	Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.152; 0.2; 0.3$. $(L, T) = (20, 80)$	102
5.21	Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0; 0.13; 0.14; 0.147; 0.152$. $(L, T) = (20, 80)$	102
5.22	Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.2; 0.3$. Les tailles (L, T) sont indiquées sur la figure.	103

5.23	Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.13$. Les tailles (L, T) sont indiquées sur la figure.	104
5.24	Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson en fonction du périmètre $(L + T)$ (en croix bleu) pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Ajustement linéaire (en courbe rouge) est : $-\ln(W) = -0.002(3E - 3) + 0,00111(2E - 5) \times (L + T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standard. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$	105
5.25	Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction du périmètre $(L + T)$ (en croix bleu) pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Ajustement linéaire (en courbe rouge) : $-\ln(W) = -0,0035(5E - 4) + 0,009280(4E - 6).(L + T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$	106
5.26	Paramètre C en fonction de la masse des vortex μ pour $2\pi q/e = 0.4$. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$	106
5.27	Énergie potentielle en fonction de la taille spatiale de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour $T = 100$, $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$	107
5.28	Énergie potentielle en fonction de la taille spatiale de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour $T = 100$, $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$	108
5.29	Variation d'énergie $d\Delta/dL$ en fonction de la dimension Euclidienne T de $W_{(L,T)}$ pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Ajustement (en courbe bleu) : $d\Delta/dL = 1.44E - 7(1.21E - 7) + 0.00105(0.00002)/T$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$	109
5.30	Variation d'énergie $d\Delta/dL$ en fonction de la dimension Euclidienne T de $W_{(L,T)}$ pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Ajustement (en courbe bleu) : $d\Delta/dL = 0.07E - 8(8E - 8) + 0,009270(9E - 6).(1/T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$	109

- 5.31 Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de l'aire (LT) . Le réseau utilisé est 100^3 . Le meilleur ajustement linéaire obtenu est : $-\ln(W) = 0.96(0.02) + 1E - 6(8E - 6).(LT)$ 110
- 5.32 $d\Delta/dL$ en fonction de la charge externe pour différentes valeurs de T taille temporelle de la boucle de Wilson. Les points sont nos données et les courbes solides sont les ajustements de la forme $C(T) \times \sin^2((2\pi q/e)/2)$. 111
- 5.33 $C(T)$ en fonction de $(1/T)$. La courbe en pointillés est l'ajustement linéaire de nos données en points solides. Équation de l'ajustement : $-C(T) = 2E - 5(1E - 5) + 0.023(0.001).(1/T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. 112
- 5.34 Boucle de Polyakov orientée le long de la direction du temps euclidien. La figure est tirée de la référence [5]. 113
- 5.35 Valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $N_\tau = 20$ et pour différentes valeurs de μ 117
- 5.36 Valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $N_\tau = 20, 100$. En rouge, $\mu = 0.2$ et en bleu, $\mu = 0.13$ 118
- 5.37 Valeur moyenne de la longueur totale des boucles $\langle L_T \rangle$ en fonction de $1/\mu$ pour différentes tailles du réseau mentionnées dans le graphique. 119
- 5.38 (a) : Valeur moyenne de la longueur totale Normalisée des boucles $\langle L_T \rangle / L_{max}$ en fonction de l'inverse μ pour différentes tailles du réseau mentionnées dans le graphique. (b) : la région de la transition de phase dans (a) a été agrandie. 120
- 5.39 (a) : Valeur moyenne de la longueur totale Normalisée des boucles $\langle L_T \rangle / L_{max}$ en fonction de l'inverse μ pour deux tailles du réseau : 10^3 et 120^3 . (b) : la région de la transition de phase dans (a) a été agrandie. 121
- 5.40 Densité finie des boucles de vortex en fonction de leur densité totale pour différentes tailles du réseau mentionnées sur la figure. 122
- 5.41 Densité finie des boucles de vortex en fonction de leur densité totale pour différentes tailles du réseau mentionnées sur la figure. 123

5.42	Boucle de Wilson (L, T) en fonction de la charge externe pour différentes tailles du réseau pour $\mu = 0.2$ (haut) et $\mu = 0.13$ (bas).	124
5.43	Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.13$	127
5.44	Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.14$	128
5.45	Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.15$	129
5.46	Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.16$	129
5.47	Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.17$	130
5.48	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.13$	131
5.49	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.13$	132
5.50	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.14$	132
5.51	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.14$	133
5.52	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.15$	133
5.53	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.15$	134
5.54	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.16$	135
5.55	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.16$	135
5.56	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.17$	136
5.57	Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour différentes valeurs de μ mentionnées sur le graphique. . .	137

5.58	Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $(\kappa = 0; 0.015\pi; 0.02\pi; 0.025\pi)$ et $\mu = 0.13$.	139
5.59	Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $(\kappa = 0; 0.015\pi; 0.02\pi)$ et $\mu = 0.13$.	139
5.60	Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $(\kappa = 0; 0.1\pi; 0.4\pi)$ et $\mu = 0.16$.	140
5.61	Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $(\kappa = 0; 0.1\pi)$ et $\mu = 0.16$.	140
5.62	Valeur moyenne de la boucle de Wilson en présence du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour la valeur de la charge externe $2\pi q/e = 0.18\pi$ pour différentes valeurs de la masse de vortex μ .	142
5.63	Valeur moyenne de la boucle de 't Hooft en présence du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour différentes valeurs de la masse de vortex μ .	145

LISTE DES ANNEXES

Annexe I : Phase transitions in a 3 dimensional lattice loop gas clv

À

ma mère et mon père,

à Farid et Chokri Khalil,

à la mémoire de papa Mansour,

à la mémoire de mes grands parents.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier de tout cœur les Professeurs Richard MacKenzie et Manu Paranjape, mes directeurs de thèse, pour m'avoir donné la chance de réaliser ce projet qui est le doctorat, pour leur soutien, leur grande disponibilité, leurs judicieux conseils ainsi que leur rigueur scientifique. Toute au long de ces années, j'ai beaucoup appris avec eux.

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Normand Mousseau d'avoir été président-rapporteur du Jury de cette thèse.

Je remercie le Professeur Georges Azuelos d'avoir accepté de faire partie du Jury. Merci pour les corrections et remarques fructueuses apportées à cette thèse.

Je remercie aussi le Professeur Howard Trottier d'avoir été examinateur externe et membre du Jury de cette thèse.

Enfin, je remercie le Professeur Yvan Saint-Aubin d'avoir été représentant du doyen de la faculté des études supérieures et membre du Jury de cette thèse. Merci pour les discussions fructueuses que nous avons eu au début des travaux de cette thèse.

Merci au Réseau Québécois de Calcul de Haute Performance RQCHP pour le temps alloué à toutes les simulations réalisées dans ce travail sur leur réseau de calcul de haute performance à l'université de Montréal et à l'université de Sherbrooke.

J'adresse toute ma sympathie aux membres de l'équipe de RQCHP de l'université de Montréal pour leur aide et support technique. Particulièrement, je remercie l'analyste Jacques Richer qui m'a introduit aux machines de RQCHP, qui m'a appris optimisation et développements des algorithmes et qui a suivi avec beaucoup d'enthousiasme et curiosité toutes les étapes importantes de l'évolution de mes simulations et de mes travaux de recherches en général. Merci à Jonathan Ferland qui a optimisé mon dernier programme à un facteur presque un tiers.

Merci à tous les Professeurs, mes amis et collègues de travail avec qui j'ai cotoyés et discutés durant toutes ces années de doctorat à l'université de Montréal.

Je remercie nos secrétaires Hélène Lamothe et par la suite, Joanne Borduas, de m'avoir facilité toutes les paperasses administratives.

Rien n'aurait été possible sans le financement que je dois à mes directeurs de thèse ainsi qu'à la bourse de fin de doctorat de la FESP durant ma dernière année de doctorat.

Merci à toi, mon cher époux Farid, de m'avoir fabriqué en bois une maille élémentaire de mon réseau qui m'a servie à mieux visualiser mon réseau et pour ton aide en programmation de temps à autre.

Aussi, un grand merci à toute ma famille qui n'a cessé de m'encourager et de me soutenir, particulièrement, ma mère Rafika, mon père ElHadj, ma belle mère Melika et mon beau père Mansour (que Dieu le bénisse), sans oublier mon cher mari Farid. Merci à mes frères Omar, Karim, Nassim et leurs épouses, Naziha, Samia et Wafae, respectivement, et à ma soeur Nesrine et son époux Réda ainsi que ma deuxième soeur Samia et son époux Farid.

Enfin je dédie ce travail à notre nouvelle génération, à mon fils bien aimé Chokri Khalil ainsi que mes neveux Mustapha, Abderahmane et Myriam.

INTRODUCTION

Malgré sa simplicité, le modèle de Higgs abélien a démontré un succès spectaculaire tant en physique des particules élémentaires et théorie des champs, qu'en physique de la matière condensée et même en cosmologie. En effet, en physique des particules élémentaires et théorie des champs, ce modèle est considéré comme un paradigme pour trouver la solution du problème de masse des particules élémentaires : fermions et bosons de jauge, en présence de l'invariance de jauge locale [1] [2]. Aussi, les mécanismes de Higgs et de brisure spontanée de symétrie sont les piliers sur lesquels repose tout le modèle standard de la physique des particules [49] [47]. En physique de la matière condensée, l'étude des modèles de vortex de types solitons correspond aux théories de la supraconductivité de type I et II [3]. De plus, les études sur la phénoménologie de l'effet hall quantique, sur les supraconducteurs à haute température ainsi que sur la condensation de Bose-Einstein sont toutes basées sur la notion de vortex de type solitons. En cosmologie, les études sur les cordes cosmiques [13] sont basées sur la notion de vortex.

Par ailleurs, la formulation des théories de jauge sur le réseau par Wilson [43] et Polyakov [53] a permis d'étudier ces théories pour différentes valeurs des constantes de couplage. Particulièrement, le régime de couplage fort présente un intérêt inestimable pour étudier l'interaction forte et le confinement des sources statiques.

Les théories de Chern-Simons quant à elles présentent des effets topologiques intéressantes en physique tant qu'en mathématiques [17]. Les théories de jauge avec Chern-Simons présentent des propriétés tout aussi intéressantes. À titre d'exemple, elles donnent une masse topologique au champ de jauge sans évoquer la brisure spontanée de symétrie. Elles jouent un rôle important dans la théorie des statistiques fractionnaires, de l'effet hall quantique fractionnaire et de la formation des anyons [19].

Par ailleurs, les techniques de simulations par Monte Carlo ont démontré leur importance primordiale pour étudier les transitions de phase dans les théories de

jauge sur réseau [43] [56] [29].

Notre recherche porte, dans le présent travail, sur le modèle de Higgs abélien en $(2 + 1)$ dimensions en l'absence et en présence du terme de Chern-Simons.

La présente thèse est organisée comme suit. Le premier chapitre présente deux concepts généraux qui sont à la base de notre sujet. Le premier concept est une description des intégrales de chemin de Feynman en mécanique quantique et en théorie des champs dans le cas bosonique. Le deuxième concept démontre qu'un gaz de boucles continues fermées peut être décrit par une théorie des champs Euclidienne relativiste. Cette étude est d'une importance primordiale pour connecter la théorie des champs à la mécanique statistique.

Le second chapitre est dédié à la présentation du modèle étudié ici. Nous commençons par présenter le modèle abélien de Higgs en $(2+1)$ dimensions, avec description détaillée de ses propriétés dans la phase de Higgs brisée qui nous intéresse. Les solutions des équations de mouvement sont données. La nature et les propriétés de ces solutions sont exposées. Nous ajoutons ensuite un terme dit de Chern-Simons. Nous discutons de ces théories de Chern-Simons et présentons les propriétés de ce terme et ses implications sur le modèle initial.

Après cette présentation, le chapitre 3 expose nos motivations et intérêts pour une étude du modèle de Higgs abélien en l'absence et en présence du terme de Chern-Simons.

Les chapitres 4 et 5 sont consacrés exclusivement à nos travaux de recherches menés dans le cadre de cette thèse. Au chapitre 4, nous décrivons sur le réseau le modèle effectif de Higgs abélien en $(2 + 1)$ dimensions sans et avec le terme de Chern-Simons. Nous présentons une originalité dans la discrétisation de l'espace temps tridimensionnel et la formation de boucles fermées sans interaction. Ensuite, nous présentons les méthodes de simulations par méthode Monte Carlo que nous avons utilisées. L'étape suivante est en rapport avec le terme de Chern-Simons. Nous présentons les méthodes et les algorithmes utilisés pour calculer le nombre d'enlacement total entre les différentes boucles de vortex fermées. Le chapitre 5 présente tous nos résultats de simulations que nous avons obtenus ainsi qu'une

analyse et des discussions détaillées de ces résultats en les comparant aussi avec les résultats d'autres travaux. Il est divisé en deux parties. La première concerne le modèle de Higgs en l'absence du terme de Chern-Simons. La deuxième partie concerne le modèle au complet.

Enfin, une conclusion.

En annexe, est attaché notre article soumis pour publication qui regroupe nos résultats obtenus du modèle effectif de boucles de vortex fermées en l'absence du terme de Chern-Simons.

CHAPITRE 1

CONCEPTS GÉNÉRAUX

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons des définitions de certains concepts physiques en théorie des champs qui seront évoqués tout au long de la thèse. Nous commençons par aborder les intégrales de chemin de Feynman afin d'extraire la fonction de Green bosonique qui sera utilisée dans la partie analyse numérique de cette thèse. Nous expliquons le passage du référentiel Minkowskien au référentiel Euclidien. Par la suite, nous montrons qu'un gaz de boucles continues fermées peut être décrit par une théorie des champs Euclidienne relativiste tel que démontré par Samuel [7]. Cette correspondance s'avère d'une importance primordiale pour connecter la mécanique statistique avec la théorie des champs et ainsi, utiliser les méthodes statistiques pour extraire les paramètres d'ordre physiques d'un modèle de particules donné.

1.2 Méthode des intégrales de chemin de Feynman

Depuis son introduction par Feynman en 1948, la méthode des intégrales de chemins est devenue sans doute un outil primordial pour les physiciens des particules élémentaires. En effet, plusieurs développements récents en physique théorique des particules élémentaires sont basés sur cette méthode. A titre d'exemple, la formulation sur réseau de la théorie des champs quantiques a ouvert un nouvel horizon pour l'étude non-perturbative des différentes théories de particules telles que la chromodynamique quantique (QCD) et l'électrodynamique quantique (QED) [5]. Pour une revue plus détaillée de ces méthodes des intégrales de chemin et leurs applications, voir par exemple [4] et ses références. Dans ce qui suit, nous dérivons une représentation des intégrales de chemin des fonctions de Green bosoniques en théorie des champs. Celle-ci nous sera utile pour calculer toutes les valeurs moyennes des paramètres d'ordre dans cette thèse. Avant cela, nous commençons par présenter cette méthode en mécanique quantique.

1.2.1 Méthode des intégrales de chemin en mécanique quantique

Étant donné un espace de Hilbert, les états d'un système en mécanique quantique représentent les vecteurs dans cet espace et les observables sont représentées par des opérateurs hermitiens agissant dans cet espace.

Soient $q = \{q_\alpha\}$ l'ensemble des coordonnées du système et $|q\rangle$ l'ensemble des états propres correspondants aux opérateurs $\{Q_\alpha\}$:

$$Q_\alpha |q\rangle = q_\alpha |q\rangle, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

L'évolution dans le temps de $|\psi(t)\rangle$ est déterminée par l'équation de Schrödinger appliquée à l'état $|\psi(t_0)\rangle$ au temps initial t_0

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle, \quad (1.2)$$

où H est l'hamiltonien du système.

La question centrale en utilisant la méthode des intégrales de chemin est : connaissant une particule à la position q au temps t , quelle est l'amplitude de probabilité de la trouver un instant plus tard à la position q' au temps t' , notée $\langle q', t' | q, t \rangle$? Cette amplitude de probabilité est appelée aussi fonction de Green. Notre but dans ce qui suit est de trouver une expression pour cette fonction en utilisant la méthode des intégrales de chemin.

L'équation 1.2 implique pour la fonction d'onde $\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle$

$$\psi(q', t') = \int dq G(q', t'; q, t) \psi(q, t), \quad (1.3)$$

où

$$G(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \quad (1.4)$$

est la fonction de Green, et où la mesure d'intégration est donnée par

$$dq = \prod_{\alpha=1}^n dq_\alpha. \quad (1.5)$$

Une propriété importante de la fonction de Green 1.4 est qu'elle vérifie la loi de composition

$$G(q', t'; q, t) = \int dq'' G(q', t'; q'', t'') G(q'', t''; q, t). \quad (1.6)$$

Passage de l'espace de Minkowski à l'espace Euclidien :

Jusqu'à présent l'espace Minkowskien est sous entendu. Il s'avère qu'en mécanique quantique ou même en théorie des champs quantique travailler dans l'espace Euclidien est très utile, entre autre, pour trouver l'analogie avec la mécanique statistique. Donc pour passer de l'espace Minkowskien à l'espace Euclidien, on effectue ce qu'on appelle *la rotation de Wick* de la coordonnée du temps $t \rightarrow -ix^0$ obtenant par conséquent un temps imaginaire dans l'espace Euclidien. Un vecteur dans l'espace Minkowskien se transforme donc comme

$$x^2 = t^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -(x^0)^2 - \vec{x}^2 = -|x_E|^2. \quad (1.7)$$

Passons donc au temps Euclidien en posant $t \rightarrow -i\tau, t' \rightarrow -i\tau'$.

Considérons l'élément de matrice

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \quad (1.8)$$

où

$$|q, t\rangle = e^{iHt} |q\rangle \quad (1.9)$$

sont les états propres des opérateurs d'Heisenberg

$$Q_\alpha(t) = e^{iHt} Q_\alpha e^{-iHt}. \quad (1.10)$$

En insérant une sommation sur les vecteurs propres de l'énergie à droite et à gauche de l'exponentiel dans 1.8 et en utilisant le passage à l'espace Euclidien, on obtient

$$\langle q', t' | q, t \rangle_{t=-i\tau; t'=-i\tau'} = \sum_n e^{-E_n(\tau'-\tau)} \psi_n(q') \psi_n^*(q), \quad (1.11)$$

qui est égale à

$$\langle q', t' | q, t \rangle_{t=-i\tau; t'=-i\tau'} = \langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle \quad (1.12)$$

Pour arriver à une représentation des intégrales de chemin au membre de droite de l'équation 1.12, on divise l'intervalle de temps Euclidien $[\tau, \tau']$ en N segments infinitésimaux de longueur $\epsilon = (\tau' - \tau)/N$. Soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}$ les temps intermédiaires tel que $\tau < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N-1} < \tau'$. La fonction de Green Euclidienne correspondante peut être obtenue par application d'une séquence d'étapes infinitésimales. On trouve que

$$\langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle = \int \prod_{l=1}^{N-1} dq^{(l)} \langle q' | e^{-H\epsilon} | q^{(N-1)} \rangle \langle q^{(N-1)} | e^{-H\epsilon} | q^{(N-2)} \rangle \dots \langle q^{(1)} | e^{-H\epsilon} | q \rangle, \quad (1.13)$$

où

$$dq^{(l)} = \prod_{\alpha=1}^n dq_{\alpha}^{(l)}. \quad (1.14)$$

En considérant

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}^2 + V(Q), \quad (1.15)$$

où P_{α} sont les moments canoniques conjugués de Q_{α} , et en faisant l'approximation

$$\langle q^{(l+1)} | e^{-H\epsilon} | q^{(l)} \rangle \approx \langle q^{(l+1)} | e^{-\frac{\epsilon}{2} \sum_{\alpha} P_{\alpha}^2} | q^{(l)} \rangle e^{-\epsilon V(q^{(l)})}, \quad (1.16)$$

on démontre que

$$\langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle \approx \int \prod_{l'=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^n \frac{dq_{\alpha}^{(l')}}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\sum_{i=0}^{N-1} \epsilon L_E(q^{(i)}, \dot{q}^{(i)})}, \quad (1.17)$$

où

$$L_E(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)}) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \dot{q}_{\alpha}^{(l)2} + V(q^{(l)}) \quad (1.18)$$

et

$$\dot{q}_{\alpha}^{(l)} \equiv \frac{q_{\alpha}^{(l+1)} - q_{\alpha}^{(l)}}{\epsilon}, \quad (1.19)$$

et $q^0 \equiv q, q^{(N)} \equiv q'$. Nous pouvons interpréter le membre de droite de l'équation 1.17 comme suit : en considérant un chemin arbitraire dans l'espace des q connectant

les points (q, τ) et (q', τ') et qui consiste en une somme de segments dans chaque intervalle de temps infinitésimal, on constate que 1.19 est la vitesse Euclidienne dans l'intervalle de temps $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ d'une particule se déplaçant dans un espace de configuration de n dimensions. Ainsi L_E est la version discrète du Lagrangien classique Euclidien.

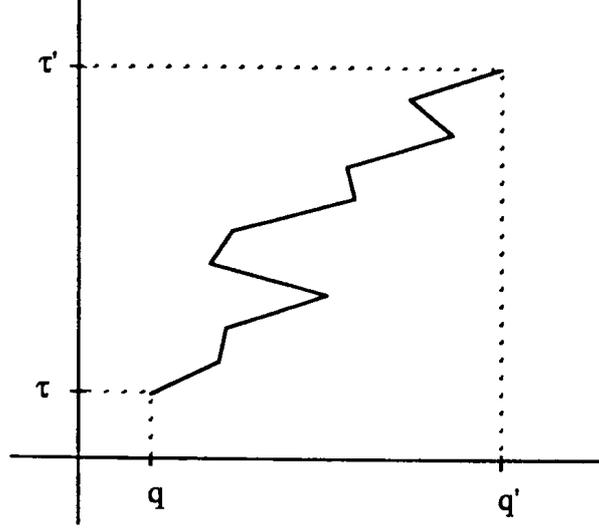


Figure 1.1 – Un chemin qui relie les points dans l'espace-temps (q, τ) et (q', τ') . Ce chemin contribue à l'intégrale 1.17. Figure tirée de [5].

L'action correspondante au chemin représenté sur la figure 1.1 est

$$S_E[q] = \sum_{l=0}^{N-1} \epsilon \left[\sum_{\alpha} \frac{1}{2} \dot{q}_{\alpha}(\tau_l)^2 + V(q(\tau_l)) \right]. \quad (1.20)$$

Ainsi, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ tel que $N\epsilon = (\tau' - \tau)$ reste une constante, nous arrivons à l'expression dans l'espace Euclidien

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int_q^{q'} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]} \quad (1.21)$$

où

$$S_E[q] = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' L_E(q(\tau''), \dot{q}(\tau'')). \quad (1.22)$$

En revenant à la formulation en terme du temps réel, la représentation intégrale

de chemin de 1.4 est

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \int_{q(s=t)}^{q'(s=t')} Dq(s) e^{iS[q]}, \quad (1.23)$$

avec $S[q]$ est l'action pour un temps réel.

1.2.2 Représentation des intégrales de chemin des Fonctions de Green bosoniques en théorie des champs

En mécanique quantique, toute l'information sur un système quantique est contenue dans la fonction de Green (équation 1.4). En théorie des champs, cette information est stockée dans la valeur moyenne de produits d'opérateurs de champs d'Heisenberg ordonnés dans le temps,

$$G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}(t_1, t_2, \dots, t_l) = \langle E_0 | T(Q_{\alpha_1}(t_1) Q_{\alpha_2}(t_2) \dots Q_{\alpha_l}(t_l)) | E_0 \rangle, \quad (1.24)$$

où $|E_0\rangle$ est l'état fondamental du système et l'opération chronologique T ordonne les opérateurs de gauche à droite suivant un ordre en temps décroissant. Les opérateurs $Q_{\alpha_l}(t_l)$ sont définis dans l'équation 1.10.

Nous sommes intéressés à trouver une représentation des intégrales de chemin de 1.24.

En suivant la même démarche que dans [5], on démontre que cette fonction de Green prend la forme

$$\langle E_0 | T(Q_{\alpha_1}(t_1) Q_{\alpha_2}(t_2) \dots Q_{\alpha_l}(t_l)) | E_0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q \, q_{\alpha_1}(t_1) q_{\alpha_2}(t_2) \dots q_{\alpha_l}(t_l) e^{iS[q]}}{\int \mathcal{D}q \, e^{iS[q]}}. \quad (1.25)$$

Pour un champ scalaire $\phi(x)$, ce qui nous intéresse, la fonction de Green s'écrit donc

$$\langle \phi(x) \phi(y) \dots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, \phi(x) \phi(y) \dots e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}}. \quad (1.26)$$

Dans l'espace Euclidien, les fonctions de Green 1.25 et 1.26 s'écrivent, respectivement,

$$\langle E_0 | T(Q_{\alpha_1}(t_1) Q_{\alpha_2}(t_2) \dots Q_{\alpha_l}(t_l)) | E_0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q \, q_{\alpha_1}(t_1) q_{\alpha_2}(t_2) \dots q_{\alpha_l}(t_l) e^{-S_E[q]}}{\int \mathcal{D}q \, e^{-S_E[q]}} \quad (1.27)$$

et

$$\langle \phi(x)\phi(y)\dots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y)\dots e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}}. \quad (1.28)$$

Il est à noter que, si l'action Euclidienne $S_E[\phi]$ est bien définie ayant une borne inférieure ($S_E[\phi] > 0$), alors le membre de droite de l'équation 1.28 est une expression qui a la même forme qu'une moyenne d'un ensemble statistique, avec une distribution de Boltzmann donnée par $\exp(-S_E[\phi])$. À cause de cette similarité, les fonctions de Green Euclidiennes sont appelées aussi fonctions de corrélations. On écrit l'équation 1.28 sous la forme

$$\langle \phi(x)\phi(y)\dots \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y)\dots e^{-S_E[\phi]}, \quad (1.29)$$

où

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (1.30)$$

est la fonction de partition. Cette correspondance nous permettra d'utiliser des méthodes statistiques bien connues pour calculer les fonctions de Green en théorie ayant un grand nombre de degrés de liberté.

1.3 Un gaz de cordes vu comme une théorie des champs

Considérons une courbe continue, divisée en N segments. Elle ressemble à un polymère possédant $(N + 1)$ vertex et (N) segments. Les vertex agissent comme des atomes alors que les segments agissent comme des liens (figure 1.2).

Nous allons procéder en deux étapes. D'abord, nous considérons la courbe ouverte. Ensuite, nous la considérerons fermée.

1.3.1 Cas d'une boucle non fermée

Dans un premier temps, considérons que cette courbe est non fermée subdivisée en $(N + 1)$ vertex. Soient x_0 le vertex initial et x_N le vertex final passant par les vertex intermédiaires x_1, x_2, \dots, x_{N-1} (figure 1.2.b). Dans l'approximation d'une courbe continue, la distance entre vertex voisins doit être petite et fixe, on la pose égale à ϵ . La longueur totale du polymère est donc $N\epsilon$. Différentes courbes peuvent avoir différentes longueurs totales. Ceci implique une sommation sur N dans la

fonction de partition. Pour rendre le problème plus physique, on suppose que les atomes ont un potentiel chimique μ et interagissent avec un potentiel externe $V(x)$ via la constante de couplage g . La grande fonction canonique de partition pour une macromolécule ayant deux extrémités x_0 et $x_f \equiv x_N$ est donc égale à

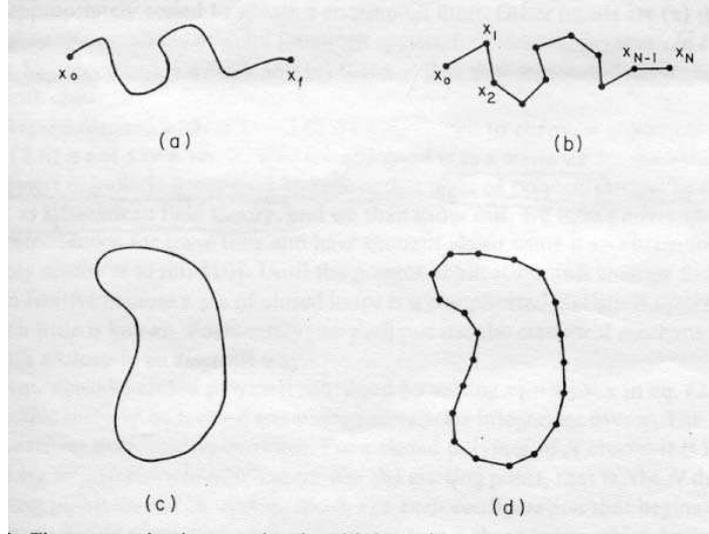


Figure 1.2 – (b) et (d) sont les approximations macromolécules de (a) et (c), respectivement. (c) est une courbe fermée. Figure tirée de [7].

$$Z(x_0, x_f) = \sum_{N=1}^{\infty} \exp(-\beta\mu N) Z_N(x_0, x_f), \quad (1.31)$$

avec

$$Z_N(x_0, x_f) = \left[\prod_{i=1}^{N-1} \int d^3x_i \right] \prod_{i=1}^N \left[\frac{\delta(|x_i - x_{i-1}| - \epsilon)}{4\pi\epsilon^2} \right] \times \exp[-\beta \sum_{i=1}^N gV(x_i)], \quad (1.32)$$

la fonction de partition pour une macromolécule ayant $N + 1$ atomes et N liens, est une sommation (une intégrale dans le cas continu) sur toutes les positions des atomes intermédiaires pesée par les facteurs de Boltzmann, $\exp[-\beta gV(x_i)]$, avec la contrainte (fonction δ) que la longueur des liens soit égale à ϵ . La constante ($\beta = 1/kT$) est l'inverse de la température. Le facteur $(1/4\pi\epsilon^2)$ est un facteur de normalisation de telle sorte que, pour une position d'atome (i) donnée, en intégrant sur les positions ($i + 1$) on obtient la valeur un. Dans la limite où ϵ tend vers zéro,

Z_N prend la forme d'une intégrale de chemin de Feynman. Pour le montrer, écrivons N comme le produit de deux entiers nm avec n et m sont considérés grands, c'est-à-dire divisons la macromolécule en m unités de n atomes. Considérons aussi le cas où ϵ est petit, n est grand mais $\sqrt{n}\epsilon$ reste petit. Ainsi,

$$\prod_{i=\nu n}^{(\nu+1)n-1} \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \delta(|x_i - x_{i-1}| - \epsilon) \rightarrow \left(\frac{3}{2\pi n\epsilon^2}\right)^{3/2} \times \exp\left[-\frac{3}{2n\epsilon^2}(x_{(\nu+1)n} - x_{\nu n-1})^2\right], \quad (1.33)$$

où les valeurs i dans l'intervalle $[\nu n, (\nu + 1)n - 1]$ correspondent aux atomes de l'unité ν . Le membre de gauche de l'équation 1.33 représente une marche aléatoire entre $x_{\nu n-1}$ et $x_{(\nu+1)n-1}$, qui, d'après le théorème central limite, s'approche d'une distribution gaussienne. Si $\sqrt{n}\epsilon$ est petit comparé à la distance sur laquelle varie $V(x)$ de façon significative, alors on peut considérer $V(x)$ comme étant constant dans chaque unité. On obtient

$$Z = \sum_{N=1}^{\infty} \left[\prod_{\nu=1}^{m-1} d^3 x_{\nu} \right] \left[\left(\frac{3}{2\pi n\epsilon^2}\right)^{3m/2} \exp\left(-\frac{3}{2} \sum_{\nu=1}^m \frac{(x_{\nu} - x_{\nu-1})^2}{n\epsilon^2}\right) \right] \quad (1.34)$$

$$\times \exp\left[-\beta \sum_{\nu=1}^m nV(x_{\nu}) - \beta \sum_{\nu=1}^m n\mu\right]. \quad (1.35)$$

En prenant la limite ϵ tend vers zéro et en redéfinissant les variables

$$s \equiv \frac{1}{6} n\epsilon^2 \nu, \quad \tau \equiv \frac{1}{6} \epsilon^2 N, \quad (1.36)$$

avec les constantes bares de couplage et de masse

$$m_0^2 = \frac{6\beta\mu}{\epsilon^2}, \quad g_0^2 = \frac{6g}{\epsilon^2}, \quad (1.37)$$

équation 1.35 devient

$$Z = \frac{6}{\epsilon^2} \int_0^{\infty} d\tau \int \int_{x(0)=x_0, x(\tau)=x_f} \mathcal{D}x \exp\left[-\int_0^{\tau} \left(\frac{1}{4}\dot{x}^2(s) + m_0^2 + \beta g_0 V(x(s))\right) ds\right], \quad (1.38)$$

où la somme sur N est devenue une intégrale sur τ . L'équation 1.38 a la forme d'une fonction de Green $G(x_f, x_0)$ qui apparaît en théorie des champs pour décrire la dynamique d'une particule scalaire.

En résumé, les fonctions de Green $G(x_f, x_0)$ décrivant la dynamique des particules en théorie des champs correspondent aux grandes fonctions de partition des polymères d'extrémités x_0 et x_f . La somme est réalisée sur tous les chemins continus possibles de différentes formes et longueurs. Le carré de la masse correspond au potentiel chimique. On prend n grand pour avoir l'approche gaussienne, $\sqrt{n}\epsilon \rightarrow 0$ pour considérer le potentiel $V(x)$ constant dans chaque unité et $\epsilon \rightarrow 0$ pour retrouver le cas continu.

1.3.2 Cas d'une boucle fermée

Considérons, à présent, que la courbe ouverte dans la section précédente devient fermée $x_f = x_0 \equiv x$. Il s'agit donc, d'une courbe à N vertex qui peut être localisée n'importe tout dans l'espace d'où il faut intégrer sur x dans la fonction de partition. De plus, comme les vertex sont indiscernables pour fixer un atome comme point initial, les configurations sont surcomptées d'un facteur N . Il faut donc diviser par N dans la fonction de partition. Finalement, la fonction de partition pour un polymère fermé de longueur et localisation dans l'espace arbitraires est égale à

$$Z = \int d^3x \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \exp(-\beta\mu N) Z_N(x, x), \quad (1.39)$$

où Z_N est donnée par l'équation 1.32.

En utilisant les mêmes étapes que la section précédente nous arrivons à

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \int d^3x \int \int_{x(0)=x_0, x(\tau)=x_f} \mathcal{D}x \exp \left[- \int_0^{\tau} \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2(s) + m_0^2 + \beta g_0 V(x) \right) ds \right]. \quad (1.40)$$

Finalement, la grande fonction de partition pour un gaz de boucles est

$$\mathcal{L} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{M!} Z^M = \exp(Z) \quad (1.41)$$

En utilisant 1.40, on trouve

$$\mathcal{L} = \eta \exp(-tr \ln[p^2 + m_0^2 + \beta g_0 V]) \quad (1.42)$$

Enfin, l'expression recherchée

$$\mathcal{L} = \eta \int \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi(x) + m_0^2 \phi^2(x) + \beta g_0 V(x) \phi^2(x)] d^3x \right). \quad (1.43)$$

η est une constante de normalisation infinie ! Elle est, cependant, sans importance puisqu'elle se simplifie lors du calcul des valeurs moyennes.

Enfin notons qu'une généralisation de ce résultat en considérant des boucles orientées peut être effectuée. La direction de l'orientation indique l'écoulement de la charge. Dans ce cas, dans l'intégrale fonctionnelle 1.43 apparaîtra plutôt un champ complexe, ainsi que la forme de l'action

$$A = \int [|(\partial_\mu - ieA_\mu) \phi|^2 + m_0^2 \phi^* \phi]. \quad (1.44)$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE DU MODÈLE DE HIGGS ABÉLIEN EN (2+1)D AVEC TERME DE CHERN-SIMONS : SOLUTIONS VORTEX DE NIELSEN-OLESEN

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle abélien de Higgs en deux dimensions spatiales et une dimension temporelle qu'on notera dans cette thèse (2+1) dimensions. Dans cette dimension, et en considérant la phase de symétrie brisée du modèle, il apparaît des solutions très intéressantes aux équations de champs classiques nommées vortex de Nielsen-Olesen [9]. En trois dimensions spatiales elles forment des boucles de vortex fermées. Nous présentons les propriétés de ces solutions et considérons, particulièrement, le régime de couplage fort. Par la suite, nous ajoutons au modèle initial le terme de Chern-Simons et considérons la limite où la constante de couplage du terme de Chern-Simons est petite. L'effet de ce terme sur les boucles de vortex est présenté.

2.2 Modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions

Le modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions décrit l'interaction d'une particule scalaire complexe chargée $\phi(x)$ avec un champ de jauge $A_\mu(x)$. Sa densité lagrangienne est donnée par :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi(D^\mu\phi)^* - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2) \quad (2.1)$$

où la dérivée covariante est : $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, et le tenseur de champ est : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; λ , e et η^2 sont des constantes positives. Aussi, les constantes λ , e^2 et η^2 ont une dimension d'une masse chacune.

Les deux premiers termes de l'équation 2.1 représentent la dynamique des champs de jauge et scalaire respectivement. Le dernier terme (sans le signe $-$) décrit le potentiel du champ scalaire. C'est le potentiel de type sombrero (en faisant référence

au chapeau mexicain). Il est représenté à la figure 2.1.

2.2.1 Spectre perturbatif

Dans le cas où η^2 est négatif, l'énergie de ce système est bien définie et le spectre d'énergie consiste en une particule scalaire chargée de charge e et de masse au carré égale à $(-\lambda\eta^2)$, ainsi qu'un photon sans masse. Pas plus de pertinence, nous considérons le cas où η^2 est positif pour la suite de ce travail. Cela entraînera la brisure spontanée de la symétrie du modèle et la formation d'un certain type de vortex comme nous allons le voir ci-dessous.

Ce modèle est invariant sous une transformation de phase locale appelée la symétrie locale $U(1)$ où les champs se transforment comme suit :

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad (2.2)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.3)$$

où la phase $\alpha(x)$ dépend de la position et du temps.

Les minima du potentiel se situent sur un cercle de rayon $|\phi| = \eta$ (figure 2.1) et l'état fondamental de la théorie est caractérisé par une valeur moyenne non nulle :

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \eta e^{i\sigma}, \quad (2.4)$$

pour une phase σ arbitraire.

La transformation de phase locale (2.2) change σ à $\sigma + \alpha$; ainsi, l'état du vide $|0\rangle$ n'est plus invariant et la symétrie est dite spontanément brisée. Avec un choix de jauge où $\phi(x)$ est réel, écrivons $\phi(x) = \eta + \phi_1(x)/\sqrt{2}$, où $\phi_1(x)$ est un champ scalaire réel. En substituant cette valeur de ϕ dans (2.1), le lagrangien 2.1 prend la forme :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.5)$$

[H]

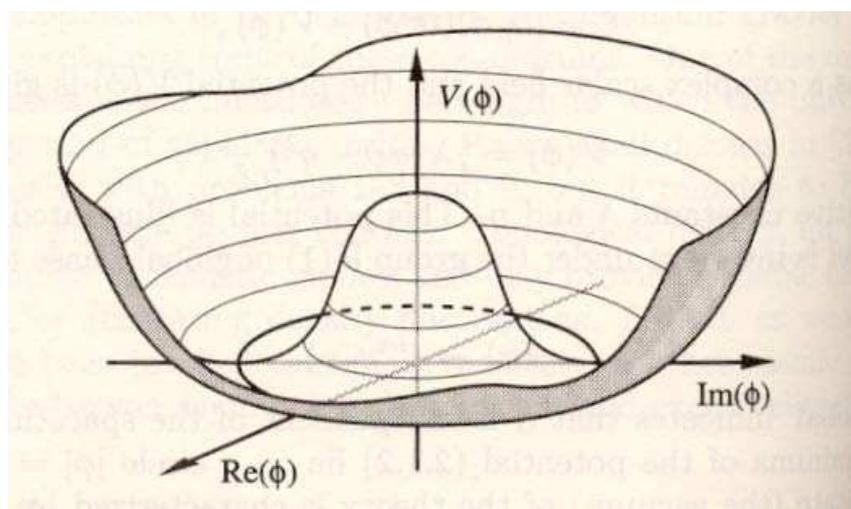


Figure 2.1 – Potentiel de type sombrero pour la symétrie $U(1)$ brisée montrant des cercles de dégénérescence des minima. Figure tirée de [13].

où $m = \sqrt{2\lambda} \eta$ et $M = e \eta$. \mathcal{L}_{int} contient des termes cubiques et d'ordres supérieurs en ϕ_1 et A_μ .

On en déduit que dans le cas de brisure de la symétrie de jauge, le spectre perturbatif consiste en un boson scalaire neutre de masse m et un boson vecteur, le photon, de masse M . Le degré de liberté perdu par le premier est absorbé par le deuxième qui devient massif en possédant, à présent, trois polarisations au lieu de deux, initialement.

2.2.2 Solution vortex de Nielsen-Olesen

On pourra s'intéresser aussi au spectre de cette théorie au delà de la théorie perturbative. Plus précisément, on pourra se poser la question : existe-il d'autres solutions aux équations de champ classique, autres que celle de l'état fondamental, stables et indépendantes du temps ayant une énergie finie ? La réponse est oui. La solution en deux dimensions spatiales consiste en un soliton [8] citePoitras de densité d'énergie localisée connu sous le nom de vortex de Nielsen-Olesen [9] ; Ces vortex se comportent comme des particules en théorie classique et sont supposés survivre dans le spectre de la théorie quantique [7].

2.2.2.1 Analyse d'énergie

Pour identifier la solution, commençons par exprimer l'énergie totale d'une configuration de champs statiques du modèle abélien en (2+1) dimensions. Nous travaillons dans la jauge $A_0 = 0$. Dans ce cas, en identifiant le champ électrique $E_i = -F_{0i} = 0$ et le champ magnétique $\epsilon_{ijk}B_k = -F_{ij}$, l'énergie s'écrit comme la somme de trois termes non négatifs :

$$E = \int d^2x \mathcal{E} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} B_i B^i + |D_i \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2 \right], \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Pour avoir une énergie totale finie, il est nécessaire que chacun de ces trois termes soit fini dans l'espace bidimensionnel. En particulier, pour le troisième terme, cela implique qu'à l'infini, le potentiel doit tendre vers zéro et donc la norme du champ scalaire doit tendre vers la valeur minimale η sans pour autant fixer sa phase. En supposant que la frontière de l'espace deux dimensionnel est un cercle de rayon infini, cette condition se résume à :

$$\phi(r \rightarrow \infty, \theta) \equiv \phi^\infty(\theta) = \eta e^{i\sigma(\theta)}, \quad (2.7)$$

où $e^{i\sigma(\theta)}$ est une phase arbitraire, une fonction périodique de l'angle polaire θ de période 2π . ϕ^∞ est la valeur que prend le champ sur le cercle infini ; or, à cause de sa phase $e^{i\sigma(\theta)}$, l'ensemble des valeurs varie dans un cercle dans un plan complexe. Donc, tout en parcourant le cercle infini, l'orientation du champ ϕ change ; Le champ ϕ tourne dans le cercle du plan complexe autour du cercle infini. Ainsi, on vient de trouver une application du cercle de l'espace réel vers le cercle complexe. Ce genre d'application définit le premier groupe d'homotopie d'un cercle $\pi_1(S^1)$. Celui-ci est isomorphe au groupe des entiers $\pi_1(S^1) = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Les éléments du groupe $\pi_1(S^1)$ sont formés par des secteurs topologiques (dits aussi classes d'homotopie), dans lesquels sont regroupés toutes les configurations de champs qui se déforment de façon continue l'une entre l'autre. Comme on ne peut pas passer d'une valeur entière vers une autre valeur entière de façon continue, le groupe Z étant discret, de même on ne peut pas passer continuellement d'une configuration de champs appartenant à une classe d'homotopie vers une autre. Il en

découle un invariant topologique, entier, appelé le *nombre d'enroulement*. Il mesure le nombre de tours que fait le champ ϕ dans le cercle complexe autour du cercle de l'espace réel. Il est donné par :

$$n = \frac{1}{2\pi}[\sigma(\theta = 2\pi) - \sigma(\theta = 0)]. \quad (2.8)$$

Notons que le nombre d'enroulement doit être préservé par les petites déformations des champs qui laissent l'énergie inchangée. De plus, comme l'évolution dans le temps est continue, il doit être une constante du mouvement. Ainsi, on vient de trouver une *loi de conservation topologique* qui n'a rien à voir avec la symétrie de l'action, contrairement à ce qu'on a l'habitude de constater en théorie des champs classiques.

Apparemment, il est donc possible de construire un soliton, solution classique, en cherchant une configuration d'énergie minimale avec une unité de nombre d'enroulement $n = \pm 1$. Ce soliton est appelé vortex pour $n = 1$ ou anti-vortex quand $n = -1$. Le comportement de ϕ à l'infini pour un vortex est montré sur la figure 2.2. Mais avant de confirmer, il faut analyser aussi les autres termes de l'énergie.

Revenons au deuxième terme de (2.6) où apparaît la dérivée covariante de ϕ . La partie angulaire du terme gradient

$$\int d^2r \left| \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - ie A_\theta \right) \phi \right|^2 \quad (2.9)$$

est finie seulement si pour $r \rightarrow \infty$ le champ de jauge se comporte comme

$$A_\theta \rightarrow_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{er} \frac{d\sigma}{d\theta} + \dots, \quad (2.10)$$

les autres termes sont des corrections qui décroissent plus rapidement que $1/r$, afin d'éviter la divergence logarithmique de l'énergie quand r est grand. Avec cette forme asymptotique pour le champ de jauge, le premier terme de (2.6) s'annule suffisamment rapidement, donc il est fini.

Ainsi, on vient de montrer l'existence d'une configuration d'énergie finie avec un nombre d'enroulement ($n=1$). C'est le vortex de Nielsen-Olesen [9]. Le flux magnétique correspondant, traversant le plan spatial dans la troisième direction,

peut être évalué en utilisant le théorème de Stokes. Il est égal à :

$$\Phi_m = \int F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint A_\mu(x) dx^\mu, \quad (2.11)$$

où la seule composante non nulle de $F_{\mu\nu}$ est F_{12} . Elle mesure le nombre de lignes de vortex traversant une surface unitaire $d\sigma^{12}$ vers la troisième direction. En coordonnées cylindriques et en utilisant l'équation (2.10), cette intégrale donne :

$$\oint rd\theta A_\theta = \frac{1}{e} [\sigma(\theta = 2\pi) - \sigma(\theta = 0)] = \frac{2\pi}{e} n. \quad (2.12)$$

Le flux magnétique est quantifié et le nombre de quanta de flux est le nombre d'enroulement n .

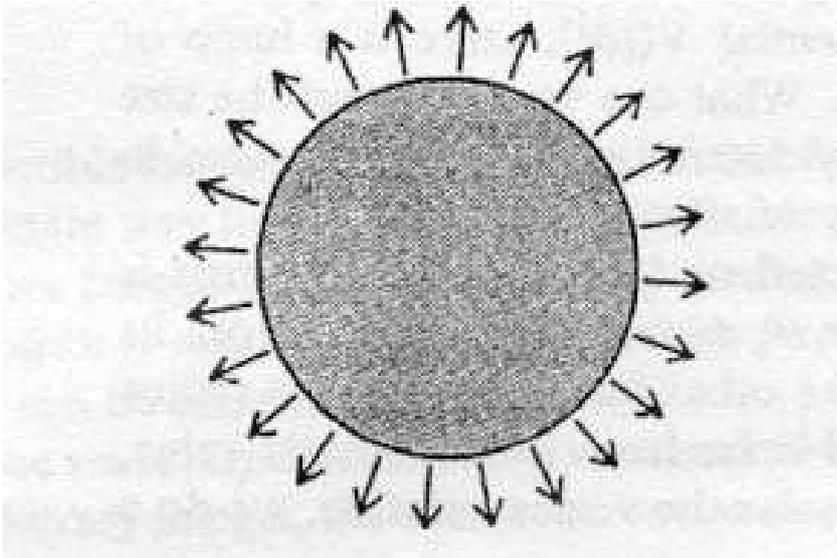


Figure 2.2 – Comportement du champ scalaire à $r = \infty$ dans la solution vortex ($n=1$). Quand le champ scalaire aurait parcouru un tour du cercle de l'espace réel, sa phase aurait parcouru un tour complet dans le cercle complexe. Figure tirée de [14].

Enfin, notons une autre propriété importante que doit posséder le champ ϕ pour garantir l'existence d'un nombre d'enroulement non trivial ($n \neq 0$), à savoir le champ ϕ s'annule dans le core du vortex. Autrement, en ramenant, de façon continue, le cercle de l'infini à un cercle infinitésimal autour de l'origine du vortex, on peut déformer l'application de $\sigma(x)$ vers l'application triviale $\sigma = \text{constante}$ ($n = 0$).

2.2.2.2 Propriétés du vortex

Dans cette section, nous donnons les propriétés du vortex, à savoir, sa taille et sa masse, à un ordre de grandeur près sans recourir aux détails du calcul. Suivant [13] et [14] par exemple, en appliquant un calcul variationnel avec minimisation de

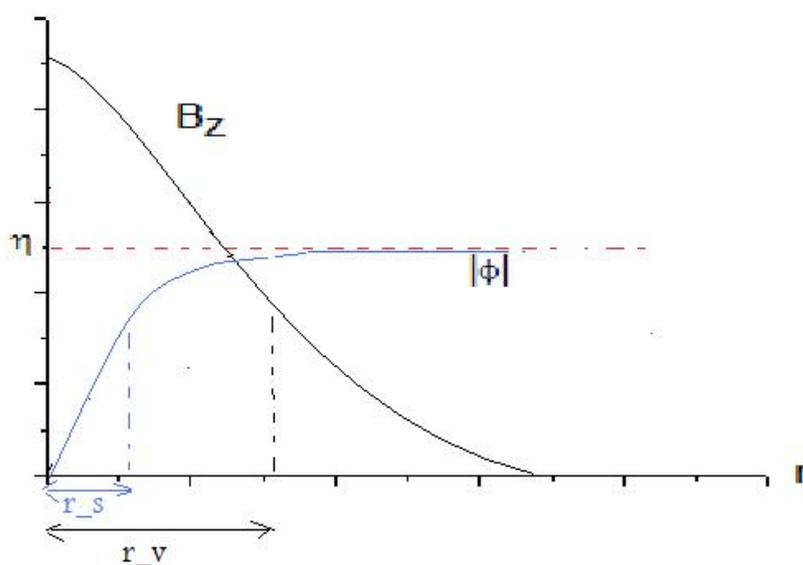


Figure 2.3 – Un exemple de comportement de ϕ et du champ magnétique. Figure tirée de [9].

l'énergie, l'équation 2.6 s'écrit sous la forme :

$$E \simeq 2\pi\eta^2 \left[\frac{1}{e^2\eta^2 r_v^2} + \theta(r_v - r_s) \ln \left(\frac{r_v}{r_s} \right) + \lambda\eta^2 r_s^2 \right], \quad (2.13)$$

où la longueur caractéristique r_s définit la région où le champ ϕ s'éloigne de sa valeur minimale η . Quant à la longueur caractéristique r_v , elle représente le rayon de la région où le champ de jauge est loin de sa valeur asymptotique (equation 2.10) ou encore la region où le champ magnétique est appréciablement non nul (voir figure 2.3). D'après cette figure 2.3, on peut remarquer que si r_s et r_v sont du même ordre de grandeur, la ligne de vortex est bien définie. En fait, $r_s = r_v$ correspond à la limite critique du couplage, comme on va le voir ci-dessous. Le premier terme de l'équation 2.13 représente l'énergie dûe au champ magnétique. Il favorise les grandes valeurs de r_v car le flux magnétique n'aime pas être confiné à une petite région. Le dernier terme est l'énergie potentielle du champ scalaire. Il favorise les petites valeurs de r_s car le champ scalaire doit fournir de l'énergie pour se déplacer de sa valeur minimale $|\phi| = \eta$. Le deuxième terme relie les deux longueurs r_s et r_v . L'énergie est minimisée par :

$$r_s \approx (\sqrt{2\lambda}\eta)^{-1} = m^{-1}, \quad r_v \approx (e\eta)^{-1} = M^{-1}, \quad (2.14)$$

pour $m > M$. Ces deux largeurs du coeur du vortex correspondent aux longueurs d'onde Compton pour le champ scalaire et le champ de jauge, respectivement. En substituant ces deux longueurs dans 2.13, l'énergie minimale du vortex ou encore la masse du vortex est égale à :

$$\mu \approx 2\pi\eta^2 \ln \left(\frac{m}{M} \right), \quad m > M. \quad (2.15)$$

Enfin, notons qu'en un espace tridimensionnel de ce modèle de Higgs abélien, la solution vortex indépendante du temps peut être vue comme une section surfacique d'une boucle infinie et la masse du vortex 2.15 représente dans ce cas *l'énergie par unité de longueur de la boucle*.

2.2.2.3 Structure détaillée du vortex

Une analyse plus détaillée sur les solutions vortex est nécessaire, particulièrement sur le comportement asymptotique des champs, afin de mieux comprendre le type d'interaction entre les vortex et de construire une action effective de vortex.

En appliquant les équations d'Euler-Lagrange, les équations du mouvement pour le système (2.1) sont :

$$(\partial_\mu - ie A_\mu)(\partial^\mu - ie A^\mu) \phi + \lambda(|\phi|^2 - \eta^2)\phi = 0, \quad (2.16)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} \equiv j_\mu = \frac{1}{2}ie (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + e^2 A_\mu |\phi|^2. \quad (2.17)$$

Avec le changement de variable $\phi \rightarrow \eta^{-1}\phi$, $A^\mu \rightarrow \eta^{-1}A^\mu$ et $x \rightarrow \eta x$, et posons $\eta = 1$, ensuite le changement $x \rightarrow ex$, on s'aperçoit que le seul paramètre important est le rapport des masses de Higgs et du boson vecteur, $\beta \equiv m^2/M^2 = 2\lambda/e^2$. β représente aussi le rapport des longueurs caractéristiques 2.14. Des solutions statiques de type vortex en considérant la symétrie cylindrique suggèrent que (ϕ, \vec{A}) ont les formes suivantes ([9]) :

$$\phi(\vec{r}) = e^{in\theta} f(r), \quad (2.18)$$

$$A_i(\vec{r}) = -\epsilon_{ij} x_j \frac{n}{er^2} \alpha(r), \quad i, j = 1, 2, \quad (2.19)$$

où les fonctions $f(r)$, $\alpha(r)$ doivent être nulles à l'origine et doivent tendre vers 1 à l'infini pour que l'on retrouve la forme asymptotique des champs. En substituant ces deux formes dans les équations du mouvement (2.16) et (2.17), on obtient un système d'équations en f et α dont la solution exacte n'est pas connue. Toutefois, une solution asymptotique approximée est obtenue pour r grand ainsi que des solutions numériques pour les petites valeurs et intermédiaires de r . Les solutions numériques de $f(r)$, $\alpha(r)$ obtenues pour $n = 1$ sont illustrées à la figure (2.4) [13]. Sur la figure 2.5, sont résumés les profils des champs magnétique et scalaire ainsi que la densité d'énergie d'une ligne de vortex. La solution est bien localisée. Avec ces techniques numériques, il est montré, que l'énergie d'une configuration est égale

à

$$\mu = 2\pi\eta^2 g(\beta), \quad (2.20)$$

où la fonction $g(\beta)$ varie lentement et est égale à 1 quand $\beta \equiv 2\lambda/e^2 = 1$ (voir figure 2.6).

2.2.2.4 Limite critique du couplage

Des propriétés mathématiques des vortex peuvent être exploitées en considérant la limite critique du couplage pour laquelle $\beta = 1$. En effet, dans le modèle de Landau-Ginzburg pour la supraconductivité, $\beta = 1$ correspond à l'interface entre la supraconductivité de type I et de type II ; alors qu'en théorie des champs quantiques, à ce point critique, le modèle abélien en (2+1) dimensions peut être étendu au modèle supersymétrique avec $N = 2$ [10][11]. En terme du modèle de Higgs abélien, ce point critique correspond à l'énergie liée saturée de Bogomol'nyi [12] pour les vortex. En effet, en utilisant l'énergie du vortex 2.6, Bogomol'nyi a démontré qu'elle peut s'écrire sous cette forme :

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (B \mp e(|\phi|^2 - \eta^2))^2 + |D_{\pm}\phi|^2 + \left(\lambda - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - \eta^2)^2 \mp e\eta^2 B \right]. \quad (2.21)$$

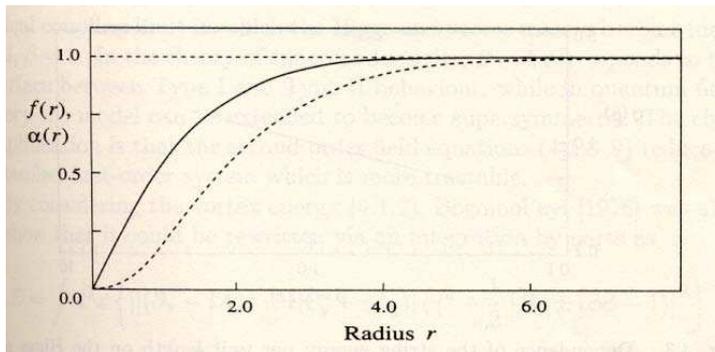


Figure 2.4 – La forme des fonctions $f(r)$ (courbe solide) et $\alpha(r)$ (courbe en pointillés) pour la solution vortex ($n = 1$) au point critique $\beta \equiv 2\lambda/e^2$. Figure tirée de [13].

où $D_{\pm} \equiv (D_1 \pm iD_2)$.

Au point critique, le terme du potentiel s'annule, et on peut constater que l'énergie est liée. Sa valeur minimale est un multiple de flux magnétique (on choisit le signe

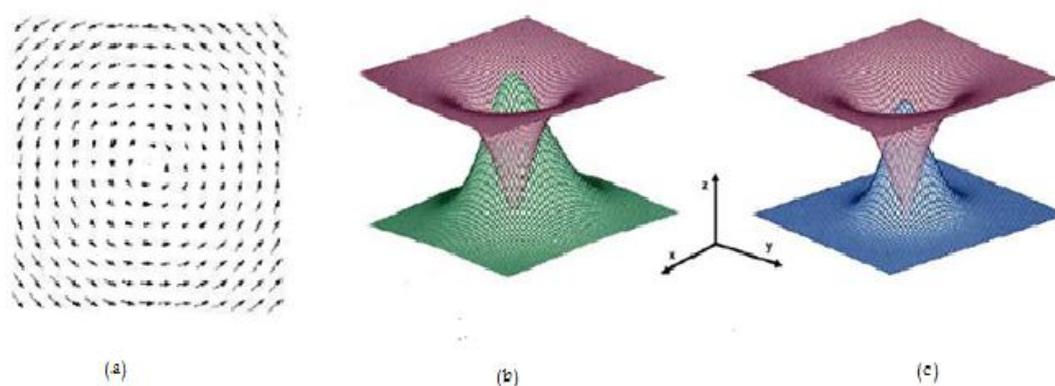


Figure 2.5 – Une section d’une ligne de vortex de Nielsen-Olesen. (a) : Le vecteur de jauge. Il a la forme de tourbillon autour de l’origine d’où l’appellation vortex.(b) : Le champ scalaire $|\phi|$ en rouge et le champ magnétique B_z en vert. (c) : Le champ scalaire $|\phi|$ en rouge et la densité d’énergie en bleu. Le champ magnétique et la densité d’énergie sont bien localisés à l’endroit où $|\phi| = 0$ (à l’origine). Figures tirées de [13] et [15].

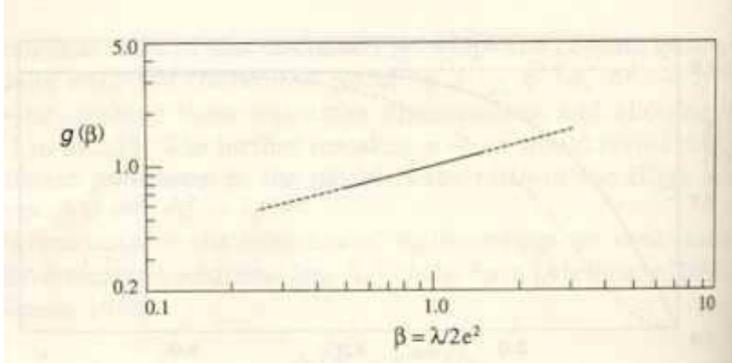


Figure 2.6 – Dépendance de l'énergie par unité de longueur d'une boucle de vortex sur les masses de Higgs et du vecteur boson, $g(\beta) = \mu/2\pi\eta^2$, $\beta = 2\lambda/e^2 = (m/M)^2$. Figure tirée de [13].

(+) pour un flux positif et un signe (-) pour un flux négatif) :

$$E \geq \eta^2 |\Phi|. \quad (2.22)$$

Cette limite n'est saturée que si les deux premiers termes de l'équation 2.21 sont nuls, impliquant les équations de mouvement de Bogomol'nyi de premier ordre suivantes [12] :

$$D_{\pm}\phi = 0 \quad (2.23)$$

$$B = \pm e (|\phi|^2 - \eta^2) \quad (2.24)$$

Ainsi au point critique, les équations du mouvement du deuxième ordre 2.16 et 2.17 se réduisent aux équations du mouvement de premier ordre 2.23 et 2.24 plus faciles à analyser.

Dans ce contexte, mentionons un résultat intéressant de Taubes [16]. Celui-ci a démontré l'existence de solutions lisses (C^∞) aux équations de Bogomol'nyi uniquement dans le cas où les nombres d'enroulement $|n|$, d'une configuration de champs de multi-vortex, sont des points de l'espace coïncidant avec les zéros du champ scalaire. Si ces points sont représentés dans le plan complexe, $z = x + iy$,

ainsi, localement autour d'un zéro z_i quelconque, la solution prend la forme :

$$\phi(z) \approx g_i(z)(z - z_i)^{n_i}, \quad (2.25)$$

où n_i est la multiplicité de z_i en zéro et $g_i(z)$ est une fonction C^∞ non-nulle. Ces solutions représentent des configurations de multi-vortex stables et statiques, indiquant qu'il n'y a pas de forces agissant entre les vortex statiques au point critique.

2.2.3 La limite de couplage fort

D'après l'équation 2.20, la masse des vortex $\mu \propto \eta^2 g(\beta)$. Comme $\beta \equiv m^2/M^2 = 2\lambda/e^2$, il est possible de prendre la limite de couplage fort $\lambda, e \rightarrow \infty$ de sorte que $\eta, \lambda/e$ restent fixes. Dans ces limites la masse des bosons scalaire et de jauge tendent vers l'infini $m, M \rightarrow \infty$. Donc les particules initiales se découplent laissant ainsi les vortex les seules excitations effectives du modèle de Higgs abélien.

2.3 Modèle de Higgs abélien avec terme de Chern-Simons en (2+1) dimensions

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous ajoutons le terme dit de Chern-Simons [17] à notre modèle initial. Dans ce cas, c'est la théorie de Maxwell-Chern-Simons couplée au champ scalaire complexe ϕ avec le potentiel de symétrie brisée considéré précédemment. La densité lagrangienne (2.1) est alors modifiée à :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{\text{CS}}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}, \quad (\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2) \quad (2.27)$$

où \mathcal{L}_{CS} et κ sont, respectivement, la densité lagrangienne et la constante de couplage positive, de dimension d'une masse, du terme de Chern-Simons. $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ est le symbole Levi-Cevita antisymétrique.

Explicitement, \mathcal{L} s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2) \quad (2.28)$$

où les deux premiers termes représentent la densité lagrangienne de la théorie Maxwell-Chern-Simons.

Remarquons que \mathcal{L}_{CS} est une dérivée de premier ordre de l'espace-temps donnant des propriétés différentes de celles de la théorie de jauge maxwellienne.

D'abord, \mathcal{L}_{CS} n'existe qu'en dimensions impaires de l'espace-temps, dans notre cas (2+1) dimensions, à cause de ses propriétés de symétrie. Sous la transformation de phase locale (2.2) et (2.3), alors que \mathcal{L}_1 est invariant, \mathcal{L}_{CS} se transforme par une dérivée totale de l'espace-temps :

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{4e} \partial_\mu (\alpha \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}). \quad (2.29)$$

Ce terme est, dans l'action, une intégrale de surface nulle si le champ A_μ et la phase $\alpha(x)$ se comportent bien aux frontières, ce qui est le cas pour notre modèle abélien de Higgs.

Ensuite, les équations du mouvement (2.16) et (2.17) s'écrivent dans ce cas :

$$(\partial_\mu - ie A_\mu)(\partial^\mu - ie A^\mu) \phi + \lambda(|\phi|^2 - \eta^2)\phi = 0, \quad (2.30)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}ie (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + e^2 A_\mu |\phi|^2 + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho}, \quad (2.31)$$

avec, à présent, deux courants de charge conservés

$$j_\mu = \frac{ie}{2} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + e^2 A_\mu |\phi|^2, \quad (2.32)$$

et

$$\tilde{j}_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho}. \quad (2.33)$$

Comme on peut le voir de l'équation (2.31), une conséquence physique directe de l'ajout du terme de Chern-Simons consiste à engendrer une masse topologique m_{MCS} au photon, $m_{MCS} = \kappa$ [18]. Cette masse est complètement indépendante de la masse du photon M obtenue par brisure spontanée de la symétrie de jauge U(1). Une autre façon de comprendre l'origine de cette masse serait de calculer le propagateur du champ de jauge dans l'espace des impulsions [17] et de déterminer la masse au pôle.

D'autre part, en identifiant, comme précédemment, le champ électrique $E_i = -F_{0i}$ et le champ magnétique $\epsilon_{ijk}B_k = -F_{ij}$, l'équation (2.31) s'écrit en terme de ses composantes :

$$\partial_i E_i = \rho + \kappa(-B), \quad (2.34)$$

$$\epsilon_{ji} \partial_j B = \partial_0 E_i + j_i + \kappa \epsilon_{ij} E_j, \quad (2.35)$$

où (ρ, j_i) sont les composantes du courant conservé j_μ , $(\tilde{\rho} = (-B), \tilde{j}_i = \epsilon_{ij} E_j)$ sont les composantes du courant conservé \tilde{j}_μ et B est le champ magnétique.

L'intégration de l'équation 2.34, en utilisant le théorème de Gauss et le théorème de Stokes, donne

$$\int d^2x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int d^2x \rho + \kappa \int d^2x (-B), \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{s} = Q + \kappa(-\Phi_m). \quad (2.37)$$

D'après l'équation 2.37, le champ électrique est engendré par la présence de charges électriques Q qui découlent de la symétrie $U(1)$ et d'un flux magnétique Φ_m qui représente la charge du courant conservé dû au terme de Chern-Simons. Inversement, d'après l'équation (2.35), un champ électrique, même statique, induit un champ magnétique. De plus, si on considère une surface fermée S qui englobe la charge électrique de telle sorte que le champ électrique à l'extérieur de S soit nul, $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = 0$, on trouve, d'après l'équation 2.37, que le flux magnétique et la charge électrique sont intimement liées (figure 2.7).

$$\Phi_m = Q/\kappa. \quad (2.38)$$

Par conséquent, on est en présence de particules massives que l'on peut représenter comme étant des tubes de flux magnétique confinés perpendiculaires au plan où ils évoluent. Ce sont des *anyons*. Comme ils engendrent une nouvelle interaction de type Aharonov-Bohm (figure 2.8), ces particules obéissent à une statistique fractionnaire [19] [20].

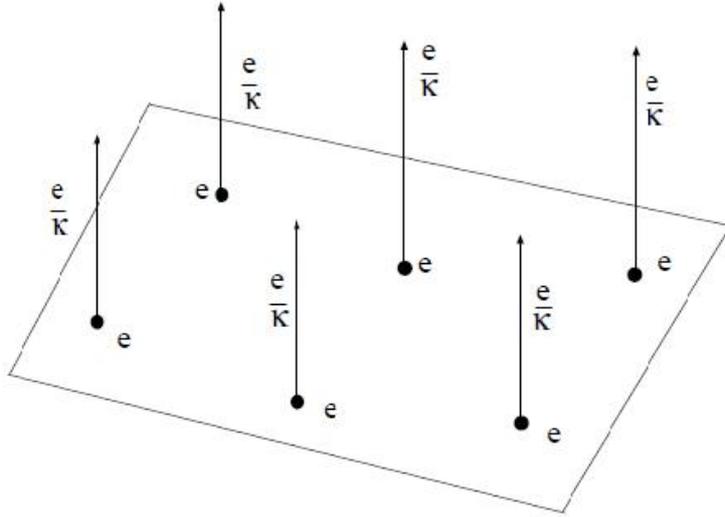


Figure 2.7 – Les particules chargées de charge e ont chacune un flux de champ magnétique e/κ lié à leur charge. La charge et le flux restent liés tout au long du mouvement de la particule. Les particules sont des anyons. Figure tirée de [17].

2.3.1 La limite κ petit

Le système de Maxwell Chern-Simons a été déjà étudié [17] et l'existence de solutions vortex chargés d'énergie finie a été démontré [21]. Cependant, dans l'espace Euclidien, le terme de Chern-Simons devient complexe [6] [22]. Par conséquent, les équations du mouvement deviennent aussi complexes et des solutions en terme des champs réels n'existent pas.

Pour ces raisons et pour les motivations qui seront présentées dans le chapitre suivant, nous nous intéressons, dans la présente thèse, au cas où κ est petit de tel sorte que les solutions vortex de Nielsen-Olesen trouvées pour $\kappa = 0$ sont toujours présentes lorsqu'on ajoute le terme de Chern-Simons. Dans cette approximation, celui-ci est considéré comme une perturbation au modèle initial.

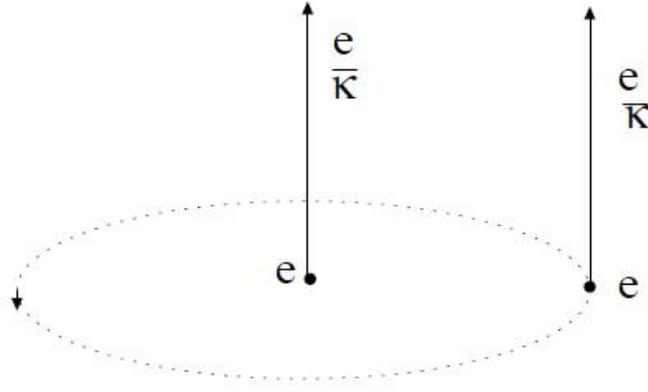


Figure 2.8 – Quand une particule tourne adiabatiquement autour d’une autre particule, en plus de l’interaction électrique entre elles, la fonction d’onde acquiert une phase Aharonov-Bohm $\exp(ie \oint A \cdot dx) = \exp(i\theta)$. La phase d’échange anyonique est $2\pi\Delta\theta = e^2/(2\kappa)$. Figure tirée de [17].

2.3.2 Le nombre d’enlacement

Dans un espace-temps tridimensionnel, l’effet du terme de Chern-Simons sur deux boucles de vortex qui ne se croisent pas, C et C' , est de mesurer *le nombre d’enlacement* entre ces deux boucles $L_k(C, C')$. Ou aussi, mesurer le nombre de liaisons entre celles-ci. En effet, comme on va le voir ci-dessous, l’intégrale du terme de Chern-Simons représente *l’invariant de Hopf* qui est équivalent au nombre d’enlacement.

Le nombre d’enlacement L_k est donc donné par (voir figure 2.9)

$$L_k(C, C') = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}. \quad (2.39)$$

C’est un invariant topologique, un nombre entier conservé ($\subset Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

D’autre part, en géométrie différentielle on définit le nombre d’enlacement entre deux courbes fermées qui ne se croisent pas par

$$L_k(C, C') = - \frac{1}{4\pi} \int_C d\mathbf{x} \cdot \int_{C'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times d\mathbf{y}}{(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^3}. \quad (2.40)$$

Cette définition est analogue à celle utilisée en magnétisme pour calculer la circulation le long d'une courbe fermée C' du champ magnétique engendré par une distribution de courant, dans notre cas le courant circulant le long d'une courbe fermée C , qui est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour C' . C'est précisément le théorème d'Ampère [27].

Dans ce qui suit, nous illustrons de manière succincte ces notions. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [20] [23] [26] [15], ainsi que les manuels sur la géométrie différentielle et la théorie d'homotopie [24] [25] [26].

2.3.3 Loi de conservation topologique : Invariant de Hopf

Pour faire apparaître l'invariant topologique de Hopf, il faut trouver des solutions statiques d'énergie finie aux équations du mouvement du modèle $O(3)$ non-linéaire en $(2+1)$ dimensions et les généraliser à $(3+1)$ dimensions [23] [15].

En $(2+1)$ dimensions, c'est un modèle qui décrit un champ vectoriel \vec{n} à trois composantes scalaires $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, avec la contrainte

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (2.41)$$

ayant la symétrie de rotation dans l'espace interne $O(3)$. Donc, l'espace interne de \vec{n} est une sphère unitaire. Le modèle est décrit par la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu n^a)(\partial^\mu n^a), \quad \mu = 0, 1, 2; \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.42)$$

D'une manière similaire que précédemment, la recherche de configurations statiques d'énergie finie pose des contraintes sur le vecteur \vec{n} à l'infini. Dans le cas présent, il faut que $\vec{n}(\vec{r} \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow \vec{n}_\infty$. Cette condition implique que l'espace bidimensionnel R^2 soit compacté à une sphère S^2 en utilisant une projection stéréographique, afin que tous les points à l'infini soient projetés en un seul et même point de la sphère. On en déduit l'application S^2 (de l'espace physique) $\rightarrow S^2$ (de l'espace interne) : c'est le groupe d'homotopie $\pi_2(S^2)$ qui est isomorphe à $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Il en découle un invariant topologique qui compte le nombre de fois que la surface de la sphère de \vec{n} est recouverte lorsqu'on balaye l'espace S^2 d'un point jusqu'à son

antipole.

Le courant topologique est

$$J^\mu = \left(\frac{1}{8\pi} \right) \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon^{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c. \quad (2.43)$$

Ainsi, la charge topologique de ce courant est égale à

$$Q = \int d^2x J^0 = \left(\frac{1}{8\pi} \right) \int d^2x \epsilon^{ij} \epsilon^{abc} n^a \partial_i n^b \partial_j n^c. \quad (2.44)$$

Les configurations topologiques de ce modèle décrivent un certain type de soliton appelé bébé skyrmion [23] [15].

Dans la généralisation de ce modèle σ $O(3)$ non-linéaire à (3+1) dimensions, il est possible d'ajouter un terme topologique dans l'action, qui est exactement le terme de Chern-Simons, appelé invariant de Hopf

$$H = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} = - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int d^3x A_\mu J^\mu, \quad (2.45)$$

où $J^\mu = 1/2\epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$.

Dans ce cas, l'espace physique est R^3 . À cause de la contrainte imposée à \vec{n} cet espace est compacté à une hypersphère S^3 (où l'infini est compacté à un point). D'où l'homotopie $\pi_3(S^2) = Z$. On en déduit la charge topologique appelée *invariant de Hopf* H . Par ailleurs, il existe un théorème en théorie d'homotopie [26] qui explique l'équivalence entre l'invariant de Hopf et le *nombre d'enlacement* entre deux courbes dans R^3 .

Pour illustrer ce théorème, considérons l'application $S^3 \rightarrow S^2$ [23]. L'image inverse d'un point dans S^2 est une courbe dans S^3 , qui elle aussi, est une courbe dans R^3 en utilisant la projection stéréographique. Donc à titre d'exemple, pour l'application considérée, le vecteur $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ correspond au cercle $|z_1| = 1, z_2 = 0$ sur S^3 , alors que le vecteur $\vec{n}_2 = (0, 0, -1)$ correspond à $z_1 = 0, |z_2| = 1$. (z_1, z_2) sont des composantes complexes du spineur z représentant l'hypersphère S^3 . En écrivant les composantes réelles de (z_1, z_2) comme $(\cos \psi, \sin \psi \cos \theta, \sin \psi \sin \theta \cos \phi, \sin \psi \sin \theta \sin \phi)$ et projetant dans R^3 à $r(\psi) \times (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$, on peut constater que les courbes correspondants à \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ont un nombre d'enroulement égal à un ($n = 1$).



Figure 2.9 – Illustration d'un enlacement entre deux courbes dans l'espace tridimensionnel. Pour trouver la valeur algébrique du nombre d'enlacement il faut orienter les deux courbes.

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UN GAZ DE BOUCLES SUR RÉSEAU- MOTIVATIONS ET INTÉRÊTS

3.1 Introduction

Après avoir présenté, au chapitre 2, les solutions vortex de Nielsen-Olesen aux équations du mouvement dans la phase de symétrie brisée du modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions, et étudié leurs propriétés ainsi que l'ajout du terme de Chern-Simons au modèle initial, nous nous intéressons, dans le présent chapitre, à l'étude d'un gaz de boucles de vortex sur réseau, objectif de la présente thèse. Pour cela nous présentons les résultats trouvés et spéculés par des travaux antérieurs. D'abord, il a été démontré par Samuel qu'il y a présence de confinement dans la phase brisée de Higgs. Ce confinement apparaît suite à la transition de phase dans le modèle causée par les excitations topologiques qui sont les boucles de vortex. Ça été observé dans les travaux de Einhorn et Savit.

3.2 Le confinement prouvé par Samuel

En examinant en détail le modèle abélien de Higgs en (2+1) dimensions, décrit comme un gaz de boucles de vortex, Samuel [7] calcula analytiquement et semi classiquement la valeur moyenne de la boucle de Wilson $\langle WL \rangle$ (cette notion sera discutée en détail au chapitre 5) de deux sources externes de même charge arbitraire q , mais de signes opposés, placées dans le système. Cela se traduit par l'évaluation de la quantité suivante

$$\left\langle \exp[iq \oint A \cdot dy] \right\rangle, \quad (3.1)$$

où l'intégral est effectué sur une boucle rectangulaire fermée de taille (r, t) appelée *la boucle de Wilson*. r est la dimension spatiale de la boucle et t la dimension temporelle.

En utilisant le théorème de Stokes, $(\oint A \cdot dy)$ mesure le flux de boucles de vortex qui

passé à travers la surface de la boucle de Wilson vers la troisième direction. Ainsi, cet intégral mesure le nombre d'enlacement (L_k) de la boucle de Wilson avec les boucles de vortex. Par conséquent, l'équation 3.1 donne

$$\langle WL \rangle = \exp [(i2\pi/e)q \times L_k]. \quad (3.2)$$

Ou encore de façon plus générale,

$$\langle WL \rangle = \exp [(i2\pi/e)q \times (L_k^+ - L_k^-)], \quad (3.3)$$

où L_k^+ et L_k^- mesurent les nombres d'enlacement totaux positifs et négatifs, respectivement, de la boucle de Wilson avec les boucles de vortex.

D'abord, en utilisant un système de gaz de boucles de vortex idéalisé de Nielsen-Olesen, Samuel montra que le calcul de l'expression 3.1 se ramène à la forme suivante qui n'est autre que la valeur moyenne de la boucle de Wilson dans la représentation des intégrales de chemin

$$\left\langle \exp[iq \oint A \cdot dy] \right\rangle = \frac{\int \int \mathcal{D}\psi \exp(-\int |(\partial_\mu - (i2\pi q/e)B_\mu)\psi|^2)}{\int \int \mathcal{D}\psi \exp(-\int |\partial_\mu \psi|^2)}, \quad (3.4)$$

où $\psi(x)$ est le champ du vortex et $B_\mu(x)$ est le champ magnétique.

Si les vortex ont une masse non nulle et interagissent mutuellement, l'équation 3.4 sera remplacée par l'équation plus générale suivante

$$\left\langle \exp[iq \oint A \cdot dy] \right\rangle = \frac{\int \int \mathcal{D}\psi \exp(-\int |(\partial_\mu - (i2\pi q/e)B_\mu)\psi|^2 + m^2\psi^*\psi + V(\psi^*\psi))}{\int \int \mathcal{D}\psi \exp(-\int |\partial_\mu \psi|^2 + m^2\psi^*\psi + V(\psi^*\psi))}, \quad (3.5)$$

où m et $V(\psi^*\psi)$ sont respectivement la masse et le potentiel d'interaction des vortex.

Samuel montra que dans le cas de la brisure de symétrie topologique du modèle caractérisée par ($m^2 < 0$) et par l'état du vide qui se remplit de vortex tel que la valeur moyenne du champ de vortex devient non nulle ($\langle \psi \rangle = \psi_0$), alors la valeur moyenne de la boucle de Wilson (équation 3.5) se comporte comme

$$\left\langle \exp[iq \oint A \cdot dy] \right\rangle \sim \exp[-\frac{1}{2}(\Delta q)^2 t \psi_0^2 \ln \frac{r}{r_0}], \quad (3.6)$$

où (r, t) sont les dimensions spatiale et temporelle de la boucle de Wilson. ($\Delta q = m - q/e$), où m est l'entier le plus proche à la valeur de q/e . r_0 est une constante de l'ordre de la largeur du vortex.

L'équation 3.6 indique l'existence d'un potentiel logarithmique et donc d'un confinement logarithmique entre les charges externes fractionnaires dans la phase topologique de symétrie brisée. Cette phase correspond à la condensation des boucles de vortex donnant l'image d'un vide rempli de *spaghetti* de boucles de vortex. Samuel a donc démontré que la loi Coulombienne logarithmique classique est restaurée.

3.3 Transition de phase observée par Einhorn et Savit

Einhorn et Savit [55] ont investigué dans le modèle de Higgs abélien sur le réseau dans une dimension de l'espace-temps Euclidienne arbitraire, particulièrement, en trois dimensions Euclidiennes. Pour cela, ce groupe a utilisé deux représentations de la théorie : une en termes des champs scalaire et de jauge, et l'autre en termes des excitations topologiques qui sont les vortex du modèle. Son but était d'extraire toutes les phases du système.

En analysant analytiquement la fonction de partition et l'énergie libre de ce modèle en terme de la longueur des boucles (L) de vortex fermées et ouvertes dans un réseau tridimensionnel et des différentes constantes de couplages du modèle, Einhorn et Savit déduisent toutes les phases du système. Parmi ces phases une transition de phase de la phase de configurations de petites boucles vers la phase de configurations de boucles infinies (la définition de boucles finie et infinie est donnée plus loin au chapitre 5). Ainsi, dans la phase de configurations de boucles infinies, ce groupe spécula aussi la présence de la loi de confinement pour des sources statiques externes placées dans le système.

3.4 Motivation et conclusion

En se basant sur ces références, il y a donc possibilité de trouver une transition de phase et un confinement des sources externes dans la phase de Higgs de symétrie

brisée dans la limite de couplage fort. Des simulations ont été réalisées dans [59] pour démontrer la présence d'un potentiel de confinement logarithmique. Cependant la taille du réseau utilisé pour les simulations est de 16^3 trop petite pour en tirer des conclusions.

Ainsi, nous nous sommes donnés comme objectif, dans cette thèse, d'investiguer numériquement sur le réseau les phases possibles de la version Euclidienne du modèle effectif de Higgs abélien en $(2+1)$ dimensions dans la limite de couplage fort. Nous nous intéressons donc aux excitations topologiques (les boucles de vortex) dans le secteur de brisure de symétrie spontanée de la version non compacte du modèle de Higgs. Numériquement sur le réseau consiste à utiliser la méthode de simulation par Monte Carlo sur des réseaux de dimensions importantes afin d'éliminer les effets du volume fini d'une part, et d'autre part, pour avoir des résultats qui sont complètement indépendants de la taille du réseau. Par ailleurs, la dimension du réseau dépendra de la performance de nos algorithmes et des ressources informatiques disponibles dans le cas présent de la réalisation de ces travaux.

Par ailleurs, comme nous travaillons dans une dimension de l'espace-temps impaire, il sera tout aussi intéressant d'inclure le terme de Chern-Simons dans le modèle initial et d'investiguer son effet sur le confinement ou la présence de nouvelles phases.

CHAPITRE 4

THÉORIE EFFECTIVE SUR RÉSEAU ET MÉTHODE DE SIMULATIONS MONTE CARLO

4.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous commençons par formuler la théorie effective Euclidienne de notre modèle de Higgs abélien avec le terme de Chern-Simons en $(2+1)$ dimensions. Nous passons ensuite à l'étude de ce modèle effectif sur le réseau. Nous commençons par présenter la discrétisation de l'espace-temps et la tessellation que nous avons adoptée dans cette thèse. Nous présentons ensuite notre concept de génération de boucles fermées. Par ailleurs, nous discutons de la méthode de simulations de Monte Carlo ainsi que l'algorithme de métropolis que nous avons utilisés dans nos simulations numériques. La dernière section concerne le terme de Chern-Simons, nous présentons la méthode et les algorithmes que nous avons développés pour calculer le nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées du modèle effectif étudié.

4.2 La théorie effective

Dans le chapitre 2, nous avons présenté le modèle de Higgs abélien en $(2+1)$ dimensions sans et avec le terme de Chern-Simons. Nous avons vu que les solutions statiques aux équations du mouvement sont les vortex de Nielsen-Olesen. La continuation de ces vortex dans la troisième direction donne un système de tubes de flux magnétique fermés. Ce sont les boucles de vortex fermées qui sont quantifiés. En absence du terme de Chern-Simons et dans la limite de couplage fort, les masses des deux bosons scalaire et de jauge deviennent très grandes devant les masses des boucles. Par conséquent, ces deux particules se découplent du spectre laissant les boucles de vortex comme seules particules dans le système, qui, dans la limite critique $\beta = 1$, n'interagissent pas mutuellement. Par conséquent, on peut construire une théorie effective de notre modèle initial en termes des boucles de vortex, dans ces limites. Les boucles de vortex étant caractérisées par leur masse μ ainsi que leur

longueur totale L_T dans la troisième direction qui représente le temps Euclidien, l'action effective Euclidienne est par conséquent

$$S_{1,\text{eff},E} = \mu \times L_T. \quad (4.1)$$

En présence du terme de Chern-Simons et pour κ petit, nous avons vu aussi que les solutions de boucles de vortex existent toujours avec, cependant, l'ajout à l'action d'un invariant topologique : le nombre d'enlacement entre les tubes de flux magnétiques. Aussi, l'action due au terme de Chern-Simons devient imaginaire dans l'espace Euclidien. L'action effective Euclidienne 4.1 devient alors

$$S_{\text{eff},E} = S_{1\ \text{eff},E} + i\kappa \sum_{C;C' \neq C} L_k(C, C'), \quad (4.2)$$

$$S_{\text{eff},E} = \mu \times L_T + i\kappa \sum_{C;C' \neq C} L_k(C, C'). \quad (4.3)$$

Dans l'équation 4.3, κ est la constante de couplage du terme de Chern-Simons, $L_k(C, C')$ représente le nombre d'enlacement entre les boucles C et C' , et la somme est effectuée sur toutes les paires de boucles C, C' présentes dans le système.

Dans la suite de cette thèse, les indices (eff, E) dans $S_{\text{eff},E}$ ou $S_{1\ \text{eff},E}$ seront omis.

4.3 Discrétisation de l'espace Euclidien

Sur le réseau, et dans le but de construire des boucles fermées, nous considérons une tessellation tétraédrique de l'espace Euclidien tridimensionnel. Pour engendrer cette tessellation, l'espace Euclidien est représenté d'abord, par un réseau de structure cubique centrée, de taille $N = N_s^2 N_\tau$ avec N_s étant la dimension spatiale et $N_\tau \sim k_b \beta$ étant la dimension temporelle Euclidienne qui représente aussi l'inverse de la température. La structure cubique centrée élémentaire que nous avons adoptée dans cette thèse est représentée sur la figure 4.1. Celle-ci est caractérisée par huit vertex aux sommets du cube et un vertex central. En joignant le vertex central avec les vertex aux sommets, il se forme six pyramides identiques de bases carrées qui représentent les faces du cube. Chaque pyramide est ensuite coupée en deux en joignant dans chaque face du cube deux vertex opposés suivant une convention

bien définie (figure 4.2). Ainsi, chaque pyramide est convertie en deux tétraèdres non réguliers, au total 12 tétraèdres dans un cube élémentaire. En translatant cette maille cubique élémentaire dans les trois directions du réseau, nous obtenons la tessellation tétraédrique désirée. Sur la figure 4.3 est montré un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$.

Par ailleurs, dans le but de s'approcher de la limite continue du modèle étudié et en même temps de réduire l'effet du volume fini, la méthode généralement utilisée consiste à utiliser des réseaux de grandes dimensions. La taille est cependant contrainte aux limitations imposées par la technologie informatique, à savoir la capacité mémoire et les temps de calcul. Dans la présente thèse, nous avons considéré N_s et N_τ de l'ordre de 100. Nous avons aussi considéré des conditions périodiques aux frontières et non périodiques.

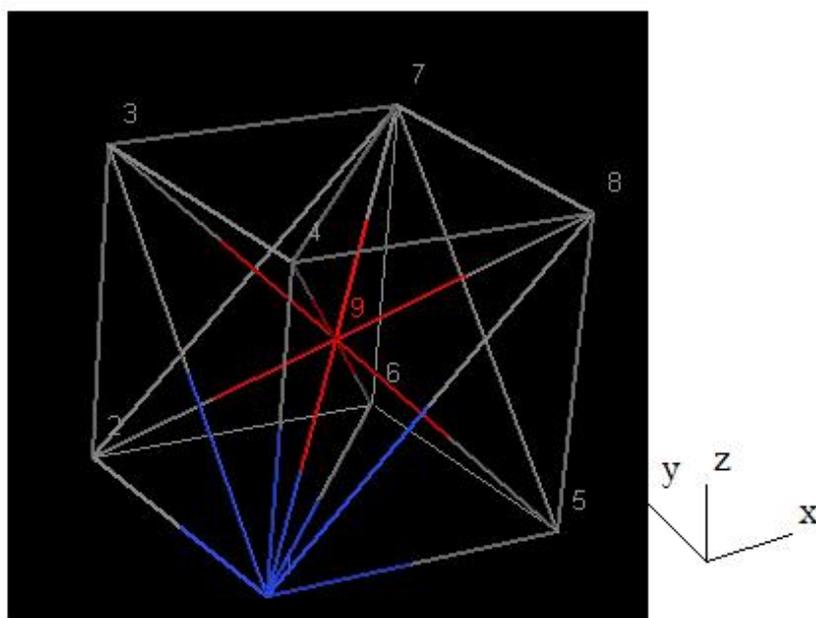


Figure 4.1 – Notre maille élémentaire conventionnelle pour générer la tessellation tétraédrique, à partir d'une structure cubique centrée. Il y a huit vertex aux sommets et un vertex au centre. Tous ces vertex sont reliés par des arêtes.

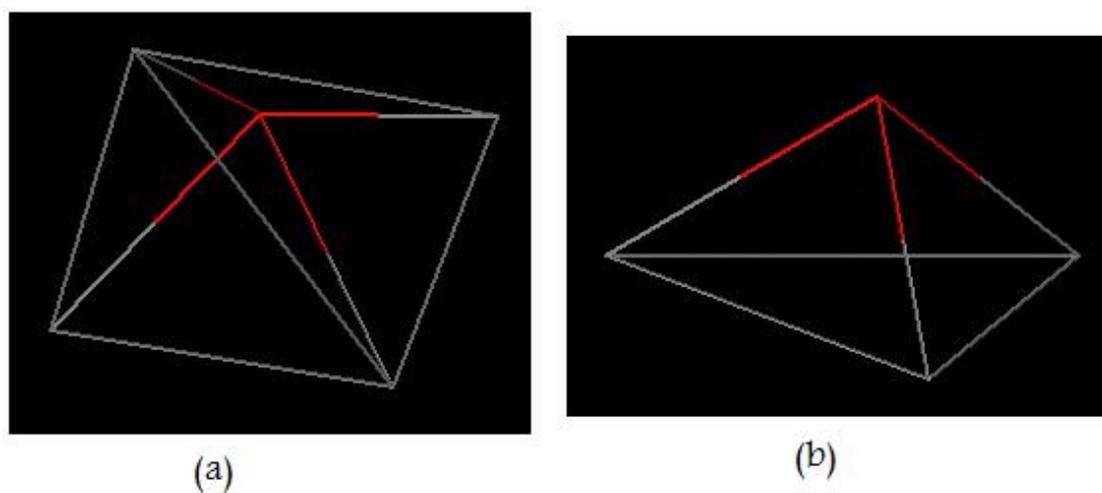


Figure 4.2 – (a) : Une des 6 pyramides formées dans la maille conventionnelle est montrée. La base est une face du cube élémentaire. Le vertex central est en rouge. (b) : En divisant la pyramide en deux, nous obtenons 2 sites tétraédriques non réguliers comme celui montré ici. Un tétraèdre est formé d'un vertex du centre (en rouge) et de trois vertex de trois sommets (en noir). Dans une maille élémentaire, au total, il y a 12 tétraèdres.

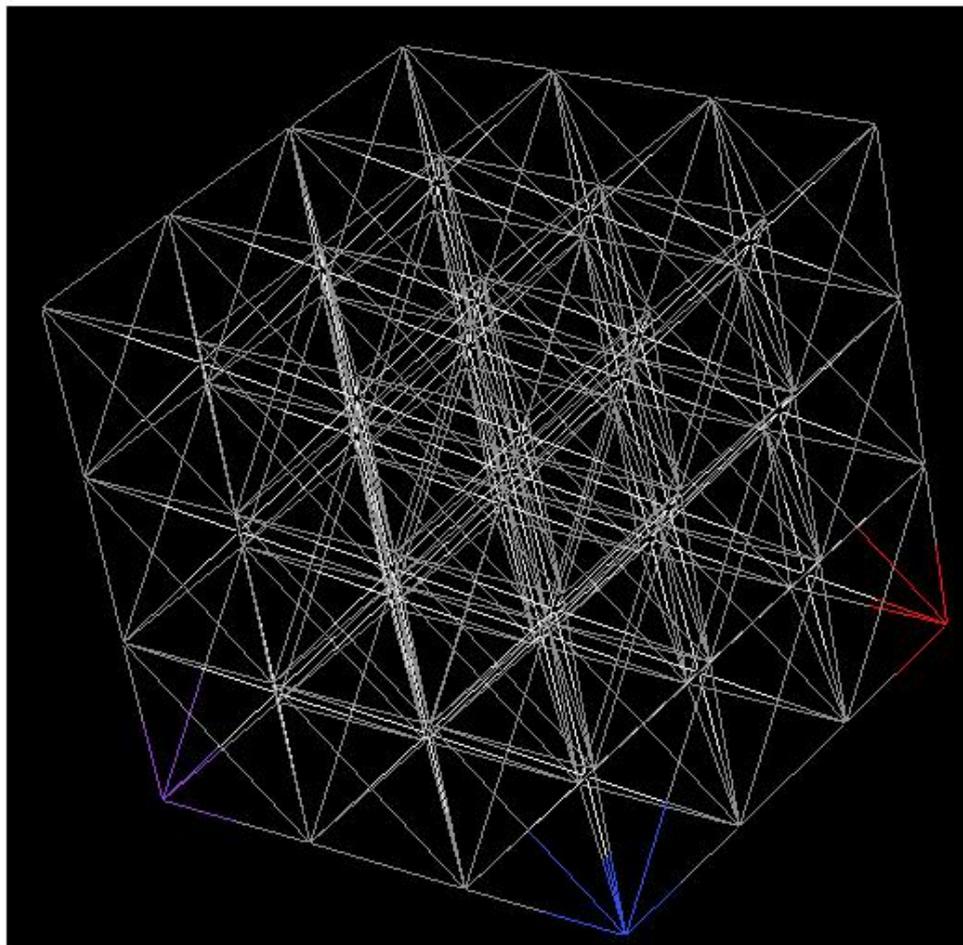


Figure 4.3 – Exemple d'un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$.

4.4 Boucles fermées sur le réseau

Afin de générer des boucles fermées sur le réseau, nous considérons trois *pseudospins* qui sont les trois racines cubiques de un. On les désigne par les numéros : 1, 2 et 3. À chaque vertex du réseau est attribuée une valeur de spin parmi les trois valeurs possibles des spins. C'est l'équivalent du groupe discret $Z(N)$ des théories de jauge sur réseau, N étant le nombre de spins distribués sur un cercle unitaire. Par exemple, $N = 2$ correspond à la version de jauge invariante du modèle d'Ising.

Dans notre cas, N serait égale à 3. Une face triangulaire est parcourue de son centre par une ligne de vortex si les spins assignés aux trois vertex de cette face triangulaire sont tous différents. Ceci correspond à une différence de phase autour de cette face égale à $\pm 2\pi$. Autrement, pour une autre distribution de spins de cette face triangulaire, la différence de phase serait égale à zéro : il n'y a pas de ligne de vortex traversant la face dans ce cas. L'orientation de la ligne de vortex est donnée par la règle de la main droite. La contrainte topologique sur le site tétraédrique fait que lorsqu'un tétraèdre est parcouru par une ligne de vortex entrante par une de ses faces triangulaires, cette ligne de vortex doit sortir par une autre face unique de ce même tétraèdre (figure 4.4). Une face triangulaire étant partagée par deux tétraèdres, la ligne de vortex est donc rentrée dans un nouveau tétraèdre et ainsi de suite. Il n'est pas difficile de suivre cette ligne de vortex dans le réseau et de constater qu'elle se refermera en revenant à la première face triangulaire considérée formant ainsi une boucle fermée. La longueur de la boucle est proportionnelle au nombre de faces triangulaires traversées par la ligne de vortex. La figure refchap4 :boucle4 montre une boucle fermée de longueur 4 dans un cube élémentaire. Selon notre construction c'est la plus petite boucle dans le réseau. La figure 4.6 montre une boucle fermée dans un réseau 3^3 . Par construction, les boucles générées de cette manière dans le réseau sont bien séparées les unes des autres et ne se croisent jamais. Par conséquent, ils sont sans interactions.

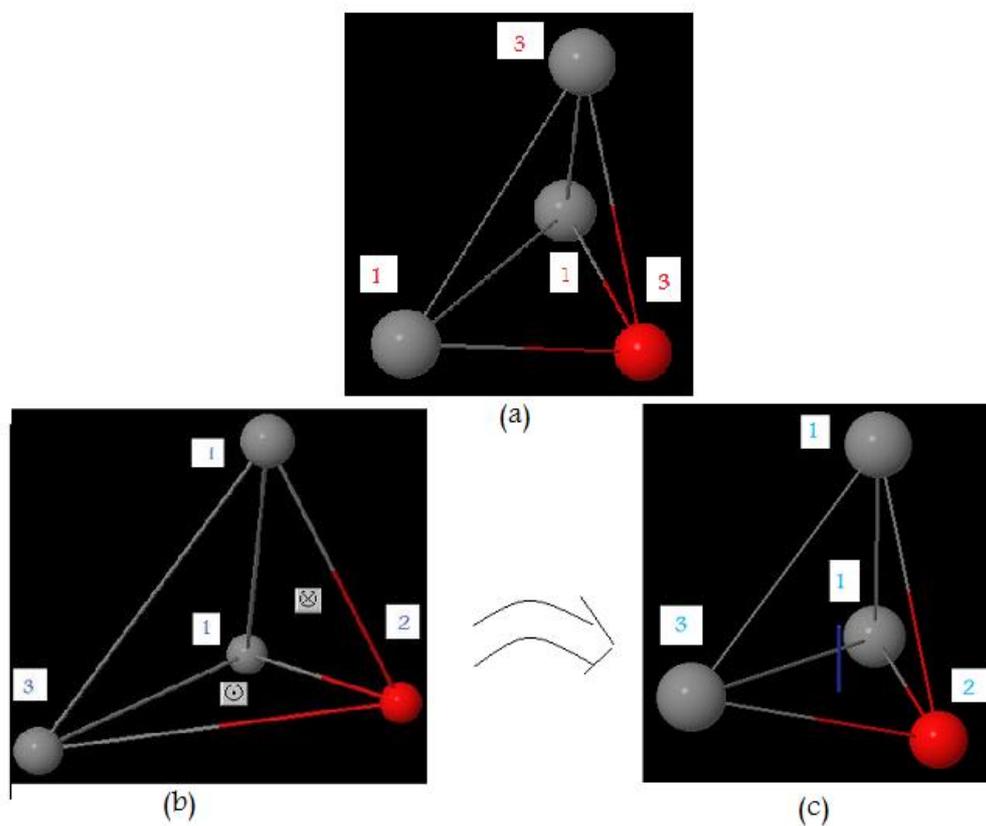


Figure 4.4 – Génération d’une ligne de vortex dans un tétraèdre. (a) : Il n’y a pas de ligne de vortex traversant ce tétraèdre. (b) : Une ligne de vortex peut traverser ce tétraèdre puisque deux faces triangulaires contiennent la combinaison des spins 1, 2 et 3. La ligne de vortex est représentée en bleu dans (c). Son orientation : du haut vers le bas de l’image.

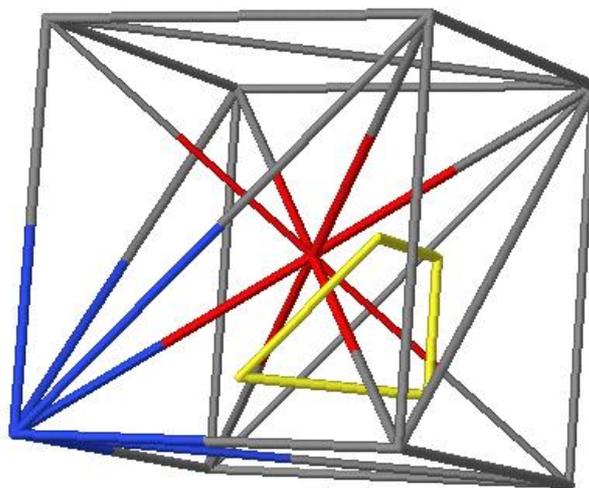


Figure 4.5 – Boucle fermée de longueur 4 (en jaune) dans une maille cubique élémentaire.

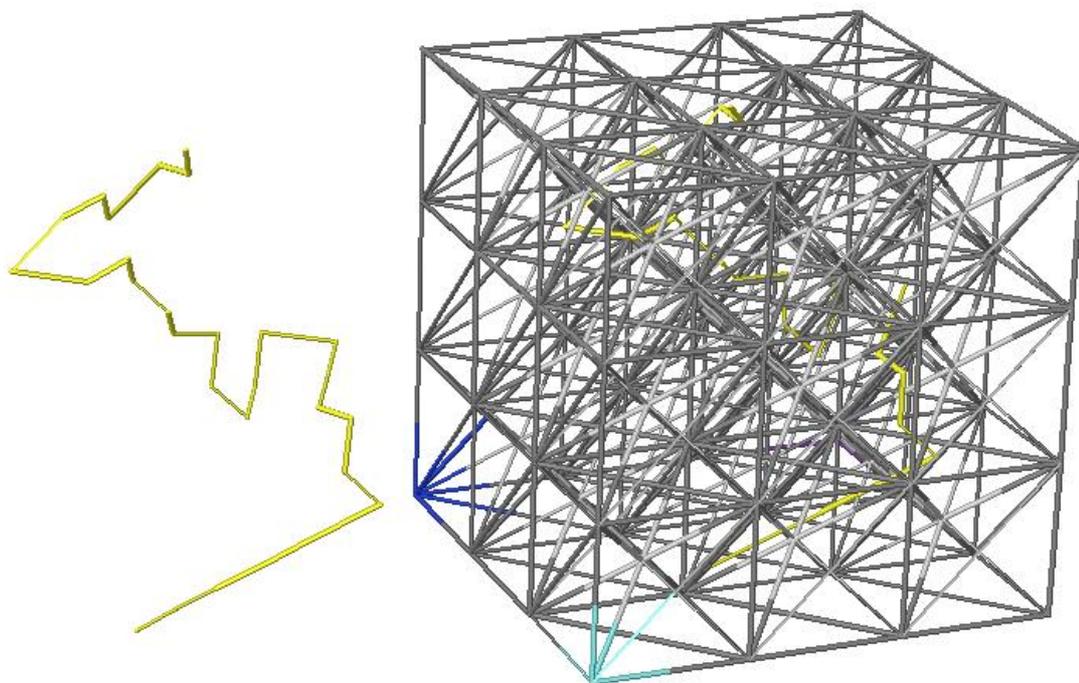


Figure 4.6 – À gauche : Boucle de longueur 30 fermée dans un réseau $3 \times 3 \times 3$ (en jaune). Les conditions périodiques ont été utilisées. À droite : Cette boucle est représentée avec le réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$.

4.5 Méthode de simulations numériques sur le réseau

4.5.1 Idée générale

Le but des simulations numériques en théorie des champs quantiques sur réseau [28] [5] [29] [30] [31] [32] [33] [34] est d'estimer des valeurs moyennes des fonctions de Green de types équation (1.9) de la forme

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int [\mathcal{D}\phi] A[\phi] e^{-S[\phi]}. \quad (4.4)$$

Les fonctions $A[\phi]$ dépendent des variables champs $[\phi] \equiv \phi_{x\alpha}$, où $\phi_{x\alpha}$ désigne la composante α au vertex x du champ ϕ . $S[\phi]$ est l'action sur le réseau, une fonction réelle des variables champs.

Sur le réseau de dimension finie, une telle intégrale est bien définie mais fait intervenir un très grand nombre de variables d'intégration. À titre d'exemple, pour notre réseau de dimensions $100 \times 100 \times 100$, il y a 2×10^6 vertex. À chaque vertex peuvent être attribuées trois valeurs possibles de spins ; au total donc, il y a $3^{2 \cdot 10^6}$ variables ! L'évaluation numérique d'une telle intégrale est rendue possible par les méthodes de simulations de Monte Carlo. Dans le cas le plus simple, cela veut dire de générer des champs $[\phi_n]$ dans *des configurations* n ($n = 1, 2, 3, \dots$) de l'espace des variables champs de façon aléatoire. Cependant, cette méthode serait inefficace. En effet, une action typique sur réseau dépend de la sommation sur le volume Ω du réseau

$$S[\phi] \equiv \beta E[\phi] \equiv \Omega \beta \epsilon[\phi], \quad (4.5)$$

où $\epsilon[\phi]$ est la densité d'énergie qui, pour un champ scalaire par exemple, est donnée en moyennant sur les liens du réseau. Comme le nombre Ω est très grand, seule la région autour du minimum de la densité d'énergie contribuera de façon appréciable à l'intégrale de chemin. En conséquence, une intégration de Monte Carlo efficace doit tenir compte de cet effet. Donc, ce qui est demandé c'est un échantillonnage important de configurations de champs avec le poids $e^{-S[\phi]}$. Autrement dit, la distribution des configurations dans l'échantillon généré durant l'intégration de Monte Carlo doit suivre le facteur de Boltzmann $e^{-S[\phi]}$. Dans ce contexte, d'après l'analogie avec la mécanique statistique, il est important d'introduire le concept d'un ensemble de configurations : *un ensemble consiste en un nombre infini de configurations de champs, avec une densité $W[\phi]$ définie sur la mesure $[\mathcal{D}\phi]$* . Dans un *ensemble canonique, appelé aussi ensemble en équilibre*, la densité W_c est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$W_c[\phi] \propto e^{-S[\phi]}. \quad (4.6)$$

En simulations numériques, il serait question donc de générer sur le réseau, en équilibre thermodynamique, des échantillons de grand nombre N de configurations,

$\{[\phi_n], n = 1, 2, \dots, N\}$, telle que la distribution obtenue à partir d'un échantillon s'approche de la distribution désirée dans l'ensemble canonique. La valeur moyenne de la quantité A à partir d'un échantillon est :

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A[\phi_n]. \quad (4.7)$$

\bar{A} est appelée aussi *un estimateur* de la valeur moyenne de l'ensemble, $\bar{\bar{A}}$, qui est égale aussi à l'espérance :

$$\bar{\bar{A}} = \langle A \rangle. \quad (4.8)$$

La distinction entre la valeur moyenne de l'échantillon et la valeur moyenne de l'ensemble est importante dans la discussion de l'estimation des erreurs. Par ailleurs, on démontre que la valeur moyenne de l'estimateur moyennée sur un grand nombre d'échantillons, dans le cas idéal un nombre infini d'échantillons, est égale à la valeur moyenne de l'ensemble.

$$\langle \bar{A} \rangle = \langle A \rangle. \quad (4.9)$$

4.5.2 Processus de mises à jours- Chaînes de Markov

Une configuration dans un échantillon est générée dans les simulations numériques en une séquence $[\phi_n]$ ($1 \leq n \leq N$). Cette séquence de configuration de champs est préparée par application répétée d'un algorithme qui crée une nouvelle configuration à partir de la configuration présente : $[\phi_n] \rightarrow [\phi_{n+1}]$. Cette procédure de création d'une séquence de configuration est appelée *mise à jour*. La mise à jour est un processus stochastique dans le sens qu'une transition $[\phi] \rightarrow [\phi']$ a lieu avec une probabilité de transition $P([\phi'] \leftarrow [\phi])$.

Dans un ensemble de configurations, une séquence de mise à jour change la densité de l'ensemble W suivant la relation

$$W'[\phi'] = \sum_{[\phi]} P([\phi'] \leftarrow [\phi]) W[\phi] \equiv \int [d\phi] P([\phi'] \leftarrow [\phi]) W[\phi]. \quad (4.10)$$

En notation matricielle simple, cette équation s'écrit : $W' = P W$ si les densités

sont considérées comme des vecteurs et la probabilité de transition comme une matrice. La probabilité de transition, quant à elle, doit satisfaire :

$$\sum_{[\phi]} P([\phi'] \leftarrow [\phi]) \equiv \int [d\phi] P([\phi'] \leftarrow [\phi]) = 1. \quad (4.11)$$

De plus, il est supposé que pour toute paire de configurations, la probabilité de transition est positive :

$$P([\phi'] \leftarrow [\phi]) > 0. \quad (4.12)$$

Cette condition est nommée "condition d'ergodicité forte" car elle nous renseigne que chaque configuration peut être atteinte avec une probabilité finie à partir de n'importe quelle autre configuration. En ce qui concerne la densité W , il est naturel de supposer la condition de normalisation :

$$\sum_{[\phi]} W[\phi] \equiv \int [d\phi] W[\phi] = 1. \quad (4.13)$$

Un processus stochastique qui satisfait les équations (4.11) à (4.13) est appelé *processus de Markov* ; les séquences de configurations forment *la chaîne de Markov*.

Une autre condition importante pour le processus de Markov, étant donné un ensemble initial de configurations de densité W_0 , une application répétée des mises à jours amène le système vers l'ensemble canonique (ou en équilibre) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k W_0 = W_c. \quad (4.14)$$

Ceci veut dire qu'à partir d'une configuration initiale considérée comme un ensemble de densité égale à 1, l'application répétée des mises à jours amène le système vers l'ensemble en équilibre désiré. De l'équation 4.14 on en déduit que l'ensemble canonique est un point fixe de la probabilité de transition :

$$P W_c \approx W_c. \quad (4.15)$$

De plus, ce point fixe est unique. Autrement, le résultat de la simulation numérique

serait non-unique. Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour l'équation 4.15 est *la balance détaillée* :

$$P([\phi'] \leftarrow [\phi]) W_c[\phi] = P([\phi] \leftarrow [\phi']) W_c[\phi']. \quad (4.16)$$

En effet, en introduisant la somme sur $[\phi]$ dans les deux membres de cette équation et en utilisant l'identité 4.11, on trouve que

$$\sum_{[\phi]} P([\phi'] \leftarrow [\phi]) W_c[\phi] = \sum_{[\phi]} P([\phi] \leftarrow [\phi']) W_c[\phi'] = W_c[\phi'], \quad (4.17)$$

qui est identique à l'équation 4.15. La condition dans 4.14 est aussi satisfaite. Car en suivant le théorème de Piron sur les matrices positives, la valeur propre 1 de P est non dégénérée et les autres valeurs propres sont inférieures à 1. Donc l'application répétée de P sur W élimine toutes les composantes orthogonales excepté la composante parallèle au vecteur propre de valeur propre 1.

Enfin, avant de terminer cette section, notons les deux remarques suivantes. La première est relative à l'équation 4.14. En réalité la densité initiale W_0 doit satisfaire la condition d'une probabilité non-nulle de chevauchement avec l'ensemble canonique. Avec la condition d'ergodicité forte, cette condition est toujours vérifiée pour n'importe quelle configuration initiale. La deuxième concernant la fonction $A[\phi]$ dans l'équation 4.4. Théoriquement, cette fonction peut être n'importe quelle fonction intégrable d'une configuration de champ $[\phi]$. En pratique, cependant, la fonction A doit répondre à certains critères, afin que la moyenne de l'échantillon \bar{A} , dans un échantillon qui n'est pas aussi grand comparativement à l'ensemble infini lui même et où il nous est impossible de visiter toutes les configurations afin d'en extraire les plus importantes, s'approche de la moyenne de l'ensemble canonique $\bar{\bar{A}}$ [30].

4.5.3 Estimation des erreurs

Dans le processus de mise à jour, on génère des configurations $[\phi_n]$, ($n = 1, 2, \dots, N$). L'objectif est de déterminer la valeur moyenne de différentes quantités. S'il s'agit d'une fonction qui dépend des variables champs comme $A[\phi]$ de l'équation

4.4, alors un estimateur de la valeur moyenne sur l'échantillon est donné par \bar{A} de l'équation 4.7. Cette quantité est appelée aussi quantité primaire, en distinction avec des quantités secondaires déterminées à partir des fonctions de quantités primaires telle que la fonction de corrélation (AB) de deux quantités primaires $A[\phi]$ et $B[\phi]$

$$(AB) \equiv \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (4.18)$$

Une question générale importante dans ce genre de simulation s'impose, à savoir, à quel point sont fiables les quantités estimées obtenues à partir d'un nombre fini d'échantillons de configurations.

Dans le cas idéal, où les configurations obtenues dans un échantillon sont statistiquement indépendantes, la moyenne de l'échantillon \bar{A} est distribuée suivant la loi normale autour de la valeur moyenne \bar{A} , de variance

$$\sigma_A^2 = \frac{\overline{A^2} - \bar{A}^2}{N-1} = \frac{\overline{(A - \bar{A})^2}}{N-1}. \quad (4.19)$$

C'est une conséquence du théorème de la limite centrale. Donc l'erreur sur la moyenne serait σ_A .

Notons aussi qu'il y a des corrélations entre les mesures successives en générant les séquences des configurations. Il faut donc étudier la fonction d'autocorrélation en fonction du temps de simulation. Celle-ci est définie comme suit

$$\phi_A(t) = \frac{[\langle A(0)A(t) \rangle - \langle A \rangle^2]}{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (4.20)$$

$\phi_A(t)$ est une fonction monotone décroissante lorsque t croît avec $\phi_A(t=0) = 1$ et $\phi_A(t \rightarrow \infty) = 0$. Cette fonction sera étudiée dans le chapitre suivant.

4.5.4 Méthode de Metropolis

Revenons à notre réseau Euclidien de sites tétraédriques sur lequel notre théorie effective de champs a été développée. Indexons par n l'ensemble des vertex du réseau et $S(i)$ ($i = 1, n$), la valeur du spin au vertex i . L'ensemble de tous ces spins forment une configuration $\{S\}$. L'étape cruciale dans notre calcul numérique

consiste à générer un échantillon d'un grand nombre N de configurations de spins $\{S\}$ indépendantes en équilibre thermodynamique. Cet échantillon sera utilisé pour l'analyse des données présentée au chapitre suivant.

La méthode de Metropolis, originellement proposée par Metropolis et al. [35], en général applicable à n'importe quel système, est bien adaptée à l'étude de notre modèle effectif de boucles fermées sur le réseau de tessellation tétraédrique.

4.5.4.1 Algorithme de Metropolis

Dans ce qui suit nous décrivons les étapes que nous avons utilisées basées sur l'algorithme de Metropolis. La première étape consiste à préparer le système pour atteindre l'équilibre thermodynamique. **L'algorithme de Metropolis** correspondant :

1. d'une configuration de départ, obtenue soit en distribuant de façon aléatoire les spins 1, 2 et 3 sur tous les vertex du réseau (configuration désordonnée), soit en attribuant à tous les vertex la même valeur de spin (configuration ordonnée), nous passons à une configuration différente en changeant le spin d'un vertex donné de façon aléatoire : nous générons un nombre aléatoire P entre $[0,1]$; si $P \in [0, 0.5]$ nous changeons de façon circulaire ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$) ce spin ; sinon nous le changeons de façon anti-circulaire.
2. nous calculons la différence d'énergie ΔS_1 entre les deux configurations.
3. la nouvelle configuration est acceptée avec la probabilité :

$$e^{-\Delta S_1} \quad \text{si } \Delta S_1 > 0, \quad (4.21)$$

$$1 \quad \text{si } \Delta S_1 < 0. \quad (4.22)$$

4. nous répétons les étapes précédentes pour tous les vertex du réseau de manière systématique.
5. une fois tous les vertex traités, nous répétons la procédure M fois jusqu'à l'obtention de l'équilibre. M est un nombre entier à déterminer. Il varie lorsque les paramètres de la simulation varient tels que la taille du réseau ou la masse des vortex.

La deuxième étape consiste à former notre échantillon en équilibre thermodynamique. Nous appliquons de nouveau **l'algorithme de Metropolis** :

1. d'une configuration en équilibre, de spins bien déterminés sur chaque vertex, nous passons à une autre configuration en changeant le spin d'un vertex comme précédemment.
2. nous calculons la différence d'énergie ΔS_1 entre les deux configurations.
3. la nouvelle configuration est acceptée avec la probabilité :

$$e^{-\Delta S_1} \quad \text{si } \Delta S_1 > 0, \quad (4.23)$$

$$1 \quad \text{si } \Delta S_1 < 0. \quad (4.24)$$

4. nous répétons les étapes précédentes pour tous les vertex du réseau de manière systématique.
5. une fois tous les vertex traités, nous répétons la procédure τ fois afin d'éliminer la corrélation entre les mesures successives.
6. nous enregistrons la configuration de spins obtenue.
7. nous répétons la procédure N fois.

En pratique, les deux conditions 4.23 et 4.24 qui sont identiques à 4.21 et 4.22, respectivement, sont réalisées comme suit : si $\Delta S_1 < 0$, nous acceptons le changement de spin et c'est la nouvelle configuration. Si $\Delta S_1 > 0$, nous générons un nombre aléatoire P entre $[0, 1]$. Si $P \leq e^{-\Delta S_1}$ nous acceptons le changement. Sinon le changement de spin est refusé.

4.5.4.2 Preuves

Nous montrons dans ce qui suit que pour M grand, l'algorithme de Metropolis converge vers l'équilibre thermodynamique d'une part, et d'autre part, qu'il vérifie le théorème de la balance détaillée.

Commençons par démontrer la première propriété.

Soient $P_M(S) \equiv$ la probabilité d'avoir la configuration $\{S\}$ à la M_{iemme} itération, et $W(\acute{S} \leftarrow S) \equiv$ la probabilité de transition de $\{S\}$ vers $\{\acute{S}\}$.

Alors, à la $M + 1_{ieme}$ itération, nous aurons

$$P_{M+1}(S) = \sum_{\acute{S}} W(S \leftarrow \acute{S}) P_M(\acute{S}) + \left[1 - \sum_{\acute{S}} W(\acute{S} \leftarrow S) \right] P_M(S) \quad (4.25)$$

$$= P_M(S) + \sum_{\acute{S}} \left[P_M(\acute{S}) W(S \leftarrow \acute{S}) - P_M(S) W(\acute{S} \leftarrow S) \right], \quad (4.26)$$

et à l'équilibre nous aurons

$$P_M(\acute{S}) W(S \leftarrow \acute{S}) = P_M(S) W(\acute{S} \leftarrow S). \quad (4.27)$$

Si nous posons selon l'algorithme de Metropolis

$$W(\acute{S} \leftarrow S) = \begin{matrix} 1, & S_1(\acute{S}) < S_1(S) \end{matrix} \quad (4.28)$$

$$= e^{-(S_1(\acute{S}) - S_1(S))}, \quad S_1(\acute{S}) > S_1(S) \quad (4.29)$$

alors l'équation 4.27 devient

$$P_M(\acute{S}) = P_M(S) e^{-(S_1(\acute{S}) - S_1(S))}. \quad (4.30)$$

Cette égalité est satisfaite si $P_M(S)$ est proportionnel au facteur de Boltzmann tel que demandé

$$P_M(S) \propto e^{-S_1(S)}. \quad (4.31)$$

Il reste maintenant à vérifier que l'algorithme tend vers l'équilibre lorsque M augmente. Considérons

$$\frac{P_M(S)}{P_M(\acute{S})} > (<) \frac{W(S \leftarrow \acute{S})}{W(\acute{S} \leftarrow S)} \quad (4.32)$$

alors l'équation 4.26 révèle que

$$P_{M+1}(S) < (>) P_M(S) \quad (4.33)$$

de sorte que l'on se rapproche de l'équilibre par itération.

Passons maintenant à la deuxième propriété.

En utilisant le fait que la probabilité pour la transition de $\{S\}$ vers $\{\acute{S}\}$ est égale au produit de la probabilité $P_0(\acute{S} \leftarrow S)$ pour la suggestion d'une nouvelle configuration $\{\acute{S}\}$ et de la probabilité pour accepter cette configuration, on constate que l'algorithme de Metropolis pour $P(\acute{S} \leftarrow S)$ implique le raisonnement suivant : si $S_1(\acute{S}) < S_1(S)$, alors

$$P(\acute{S} \leftarrow S) = P_0(\acute{S} \leftarrow S), \quad (4.34)$$

et

$$P(S \leftarrow \acute{S}) = P_0(S \leftarrow \acute{S}) \frac{e^{-S_1(S)}}{e^{-S_1(\acute{S})}}. \quad (4.35)$$

Comme $P_0(\acute{S} \leftarrow S) = P_0(S \leftarrow \acute{S})$ (appelée condition de microréversibilité de Metropolis [5]), on voit que l'équation 4.16 est vérifiée. D'autre part, si $S_1(\acute{S}) > S_1(S)$, alors

$$P(\acute{S} \leftarrow S) = P_0(\acute{S} \leftarrow S) \frac{e^{-S_1(\acute{S})}}{e^{-S_1(S)}}, \quad (4.36)$$

et

$$P(S \leftarrow \acute{S}) = P_0(S \leftarrow \acute{S}), \quad (4.37)$$

et l'équation de la balance détaillée est toujours vérifiée. L'algorithme de Metropolis est ainsi vérifié.

4.6 Nombre d'enlacement sur le réseau

Comme discuté plus haut, le terme de Chern-Simons a pour conséquence d'introduire un nouveau terme dans l'action effective qui apparaît dans l'équation 4.3 qui rend compte de la somme du nombre d'enlacement de toutes les paires (C, C') des boucles de vortex du modèle effectif.

Sur le réseau, et en utilisant la méthode de Monte Carlo, il est possible de calculer un nombre d'enlacement total dans une configuration i en équilibre thermodynamique. Celui-ci représente la somme du nombre d'enlacement de toutes les paires

(C, C') présentes dans cette configuration i

$$L_{KT} = \sum_{C; C' \neq C} L_k(C, C'), \quad (4.38)$$

avec $(C, C') \in i$.

Maintenant, on peut se poser la question : *qu'est-ce qu'un nombre d'enlacement $L_k(C, C')$ et comment peut-on calculer le nombre d'enlacement total sur le réseau ?* La réponse à la deuxième partie de cette question est d'une importance primordiale pour nos simulations numériques sur le réseau. Pour cela et à cause de la complexité de notre réseau tridimensionnel, d'intenses investigations ont été nécessaires par notre groupe pour mettre au point et donc résoudre tous les problèmes rencontrés à tous les niveaux : de la visualisation des liaisons en $3D$ et l'identification des erreurs à la construction des algorithmes adaptés, à notre système à leur implémentation sur le réseau ainsi qu'à la performance du programme lui-même, compte tenu des ressources informatiques disponibles.

Commençant d'abord par la première partie de la question précédente. En mathématiques, on définit le nombre d'enlacement ($L_k(C, C')$) de deux courbes (C, C') comme étant un invariant numérique [37] qui décrit le nombre de liaisons entre ces deux courbes qui sont fermées dans un espace tridimensionnel. Ce nombre d'enlacement est un entier positif ou négatif dépendamment de l'orientation des deux courbes ($L_k \in \mathbb{Z}$) où la règle de la main droite est utilisée : en parcourant la première boucle dans le même sens que son orientation, si l'orientation de la deuxième boucle est la même que l'orientation donnée par le pouce, le nombre d'enlacement est positif sinon il est négatif. Sur la figure 4.7 on montre des exemples de deux courbes entrelacées. Leur degré d'enlacement est inscrit en dessous de chaque exemple. De plus, par déformations continues [25], il est possible de ramener n'importe quelles deux courbes fermées dans un espace tridimensionnel à un des cas de cette figure où le nombre d'enlacement est un entier conservé ($L_k \in \mathbb{Z}$). Les nombres d'enlacement pour $L_k = \pm 1$ portent le nom de *invariant de Hopf* discuté dans le chapitre 2.

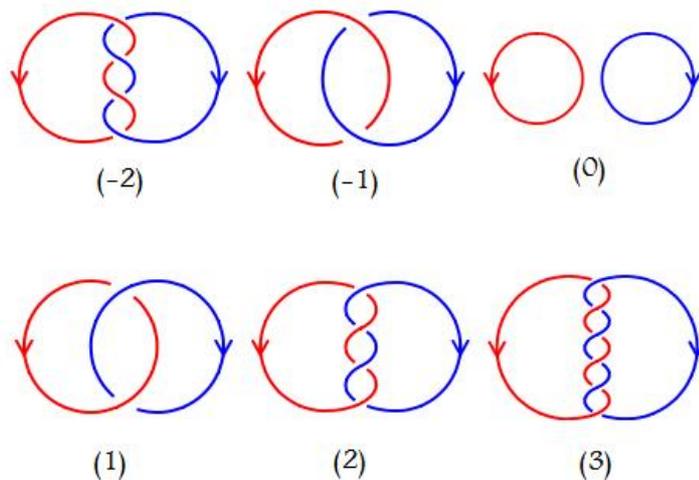


Figure 4.7 – Exemples de liaisons entre deux boucles fermées. Le degré de leur liaison représente le nombre d’enlacement qui est donné en dessous de chaque paire de boucles [37].

Sur la figure 4.8, on représente deux cas de courbes entrelacées avec leur nombre d’enlacement dans chaque cas. Ces courbes sont tirées de [38] où le nombre d’enlacement est calculé. Cependant il faudra indiquer sur les figures l’orientation de chaque corde ainsi que l’orientation des lignes entrelacées autour de chaque corde pour trouver le bon signe dans les nombres d’enlacements donnés.

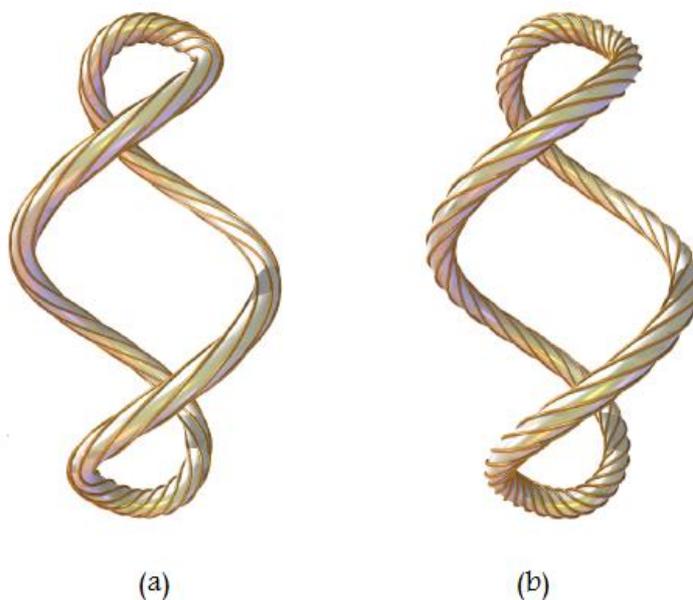


Figure 4.8 – Exemples de liaisons entre deux boucles fermées. (a) : La corde épaisse représente la première boucle. Les lignes qui sont entrelacées autour de cette corde représentent la deuxième boucle. (b) : La corde épaisse représente la première boucle. Les lignes qui sont entrelacées autour de cette corde représentent la deuxième boucle. D’après [38], $L_k = -8$ dans (a) et $L_k = 10$ dans (b). Figure tirée de [38].

On calcule généralement le nombre d’enlacement de deux courbes représentées en espace tridimensionnel en les projetant dans un plan. On associe, ensuite, à chaque croisement externe des courbes projetées un indice $C(p)$, entier, comme défini à la figure 4.9.a. Il respecte la règle de la main droite [37]. Le nombre d’enlacement se calcule alors en sommant tous les indices $C(p)$ divisés par deux

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_p C(p). \quad (4.39)$$

Sur la figure 4.9.b, en comptant les indices $C(p)$ suivant la règle de la figure 4.9.a, on trouve $L_k = -2$.

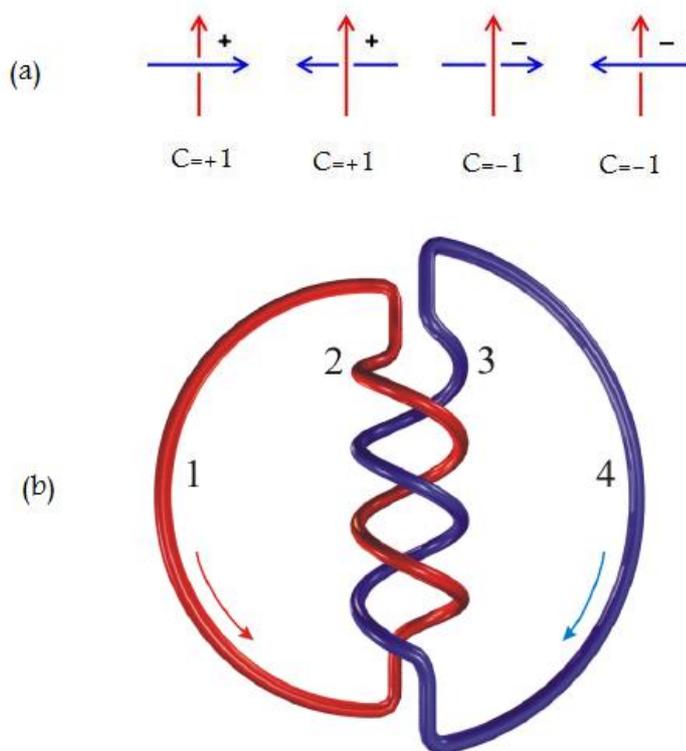


Figure 4.9 – (a) : L'indice $C(p)$ est défini pour tous les points de croisements entre deux courbes. (b) : En appliquant les règles données en (a), on trouve $L_k = -2$. Figures tirées de [38].

4.6.1 Notre méthodologie

Dans ce qui suit, notre objectif est de répondre à la deuxième partie de la question précédente, c'est-à-dire de pouvoir calculer numériquement le nombre d'enlacement total (équation 4.38) dans une configuration donnée. Ce résultat sera utilisé dans les simulations numériques (chapitre 5) pour étudier les paramètres d'ordre de notre système en présence du terme de Chern-Simons.

Commençons par présenter la problématique dans le calcul du nombre d'enlacement. Soient une configuration de spins donnée en équilibre thermodynamique et une boucle fermée α particulière parmi l'ensemble des boucles fermées générées dans cette configuration. La méthode de Wilson, telle qu'appliquée sur les vertex du réseau pour déterminer si il y a un flux qui passe à travers une surface de Wilson donnée ne peut être appliquée pour la boucle α . Celle-ci passe à travers les centres des faces triangulaires du réseau. La méthode de Wilson ne peut être appliquée à n'importe quelle autre boucle du réseau, d'ailleurs. En effet, d'après notre convention, les centres des faces des tétraèdres ou triangulaires ne sont pas assignés par des spins.

Or, d'après le théorème de Gauss, le nombre de flux traversant la surface de la boucle α représente le nombre d'enlacement total de cette boucle α avec toutes les autres boucles β tel que la paire (α, β) présente des liaisons, dans la même configuration considérée. Il sera noté $L_k(\alpha)$. Et c'est exactement ce que nous recherchons. Ainsi, si le calcul était possible, le problème aurait été résolu facilement !

Par conséquent, nous avons dû recourir à d'autres méthodes alternatives qui elles-mêmes engendrent d'autres méthodes aussi à cause de la complexité du problème. Nous résumons dans ce qui suit notre démarche :

1. nous déformons la boucle α de façon à ce que les segments de la nouvelle boucle obtenue par déformation continue de α coïncident avec les segments du réseau. Autrement dit, cette nouvelle boucle traverse les vertex du réseau. Pour cela, nous appliquons notre algorithme de déformation d'une boucle présenté dans la section suivante 4.6.2. Nous appelons cette nouvelle boucle : la *boucle déformée* α_D de la boucle α .
2. en utilisant la méthode de Wilson, nous calculons le nombre d'enlacement total de la boucle α_D soit, $L_k(\alpha_D)$. Par ailleurs, il s'avère que notre algorithme de déformation engendre de nouvelles liaisons entre les boucles α et α_D (voir figure 4.10 et explications ci-dessous).
3. nous utilisons donc d'autres algorithmes (voir section 4.6.3) pour calculer le nombre d'enlacement entre deux boucles quelconques. Dans notre cas les deux boucles sont (α, α_D) .

4. le nombre d'enlacement total de α est donc égal à $L_k(\alpha) = L_k(\alpha_D) - L_k(\alpha, \alpha_D)$.
5. nous répétons les procédures (1 à 4) pour toutes les boucles présentes dans la configuration considérée et générons $L_k(i)$ pour chaque boucle ($i = 1, \dots, NB$), où NB est le nombre total de boucles de vortex dans la configuration.
6. à la fin, nous sommes $\sum_i L_k(i)$ et c'est le nombre d'enlacement total (L_{KT}) dans la configuration considérée. C'est bien le résultat recherché. Il n'est pas difficile de constater que le nombre d'enlacement total est un nombre entier pair.

Sur la figure 4.10, deux boucles sont représentées en jaune et en vert générées dans une configuration pour un réseau $3 \times 3 \times 3$. La boucle représentée en rouge est la boucle déformée de celle en jaune, obtenue en appliquant l'algorithme de déformation d'une boucle (section 4.6.2) . Il y a une nouvelle liaison qui s'est formée entre ces deux boucles. Sur la figure 4.11 est illustré une boucle en jaune générée en équilibre thermodynamique pour un réseau 3^3 et sa boucle déformée en rouge obtenue avec application de l'algorithme de déformation d'une boucle.

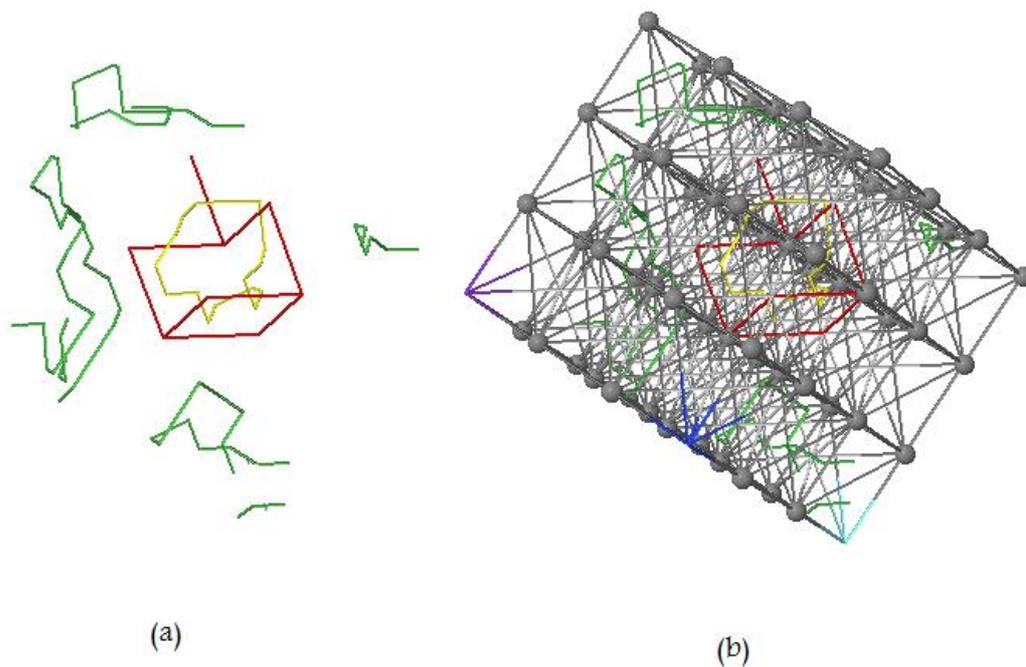


Figure 4.10 – Deux boucles en jaune et en vert sont représentées dans un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$. Les conditions périodiques sont utilisées. En rouge est la boucle déformée de celle en jaune.

4.6.2 Algorithme de déformation d'une boucle

Sachant qu'il y a deux types de faces triangulaires dans une maille cubique centrée : internes qui sont propres à une maille cubique et externes droites qui se trouvent sur les faces de la maille et donc appartiennent à deux mailles cubiques adjacentes. Notre algorithme, qui fut proposé initialement par [36] et exploité par la suite par notre groupe, est le suivant :

En parcourant la boucle α suivant son sens d'orientation, nous constituons une nouvelle boucle α_D orientée dans le même sens que α qui passe par les vertex du réseau tel que

1. si α traverse une face interne, α_D parcourt le vertex central,
2. si α traverse une face externe, α_D parcourt le vertex d'angle droit.
3. nous répétons cette procédure jusqu'à fermer la boucle α .
4. si le nouveau vertex formé de α_D est identique au vertex précédent, nous ne l'enregistrons pas dans la nouvelle chaîne formée de α_D .

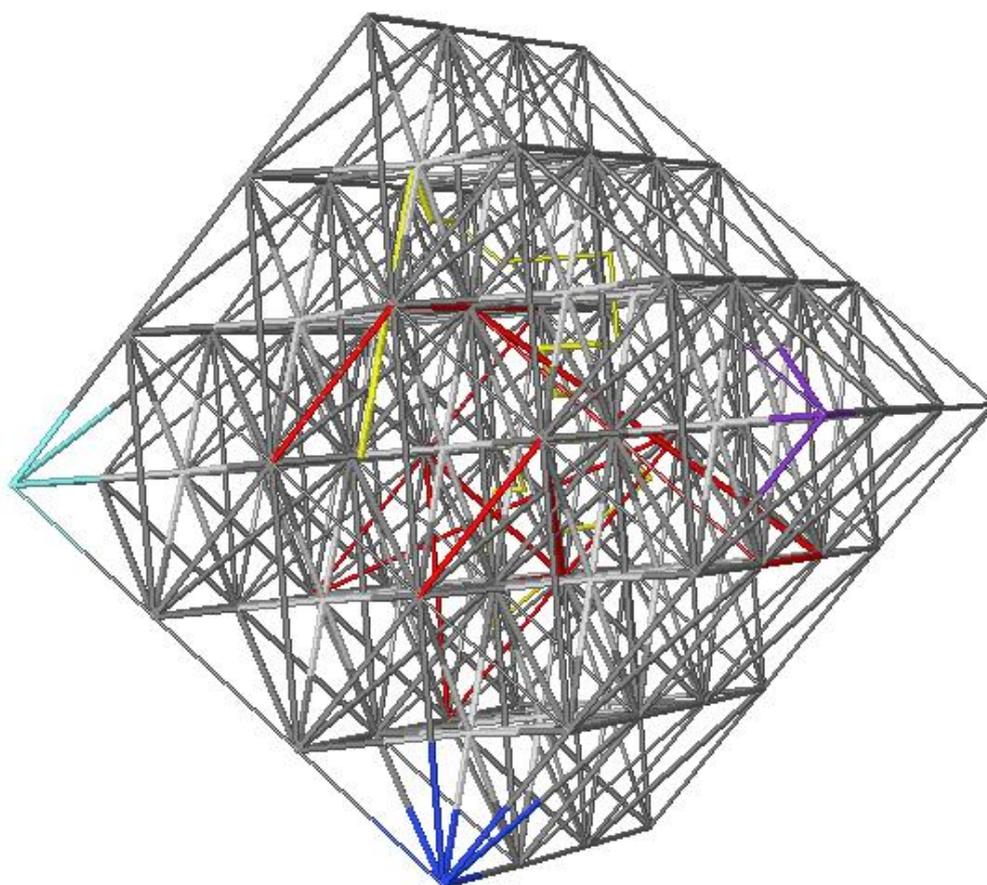


Figure 4.11 – La boucle en jaune et sa boucle déformée en rouge dans un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$.

4.6.3 Nombre d'enlacement de deux boucles quelconques- Algorithmes

Étant donné la boucle α et sa boucle déformée α_D . Notre objectif est de développer un algorithme pour calculer le nombre d'enlacement entre ces deux boucles. Cet algorithme peut être appliqué pour calculer le nombre d'enlacement d'une paire de boucles quelconques. Dans notre cas, la boucle α passe par les centres des faces triangulaires du réseau et la boucle α_D traverse les vertex du réseau. Nous avons donc utilisé deux méthodes que nous présentons dans ce qui suit. La première méthode, n'étant pas assez efficace et performante telle que nous l'avons programmée, a servi de test pour développer la deuxième méthode plus performante que nous avons pu utiliser pour des réseaux de taille $100 \times 100 \times 100$ et même au delà.

4.6.4 Nombre d'enlacement en terme de nombre d'enroulement dans la direction z

Les auteurs de [38] ont démontré que l'intégrale double dans la définition du nombre d'enlacement entre deux boucles C_1 et C_2

$$L_k(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{x} \cdot (d\vec{y} \times (\vec{x} - \vec{y}))}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (4.40)$$

peut être réduite en une sommation des intégrales simples le long d'une direction privilégiée. L'intégrale simple représente le nombre d'enroulement autour de cette direction. Il est expliqué dans ce qui suit.

Supposons une direction quelconque z . Une courbe dans le réseau est constituée d'un nombre fini de points discrets donc de segments. Supposons que la boucle α possède n segments nommés i ($i = 1, n$) et la boucle α_D possède m segments nommés j ($j = 1, m$). Soit Θ_{ij} l'orientation du vecteur relatif $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j(z) - \vec{r}_i(z)$ le long de cette direction z .

Le nombre d'enroulement pour ces deux boucles est donné par

$$L_k(\alpha, \alpha_D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i \sigma_j \frac{d\Theta_{ij}}{dz} dz, \quad (4.41)$$

$$L_k(\alpha, \alpha_D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\pi} \Delta\Theta_{ij}, \quad (4.42)$$

où σ_i (σ_j) est un nombre entier égal à 1, -1 ou 0 si le segment i (j) a une pente positive, négative ou n'existe pas, respectivement, pour la côte z de la direction (Z) choisie.

4.6.5 Nombre d'enlacement de deux boucles, basé sur l'approche de Lacher and Sumners

Pour calculer le nombre d'enlacement total des deux boucles α et α_D , nous nous sommes basés sur l'approche de Lacher et Sumners [39] pour développer notre méthode adaptée à notre système de boucles. Il s'avère que cette méthode est très intéressante avec une meilleure performance par rapport à la méthode précédente. Nous l'avons appliquée pour un réseau de dimension 100^3 . Mais elle peut être appliquée pour des réseaux plus grands. Cependant, nous nous sommes limités à l'application des conditions aux frontières de Dirichlet c'est-à-dire non périodiques. Cette méthode utilise l'idée de la projection des boucles sur un plan et le calcul des croisements externes (équation 4.39).

Le principe de l'algorithme est le suivant : on projette les deux courbes α et α_D sur un plan P perpendiculaire au vecteur de direction $(1, 1, 1)$ qui représente la diagonale principale du réseau cubique. La figure 4.12 montre une vue en plongée du plan qu'on obtient en projetant notre réseau tridimensionnel par rapport à l'axe de la diagonale principale du cube. Ce plan constituera notre nouveau plan de travail. C'est un réseau bidimensionnel ayant la forme d'un hexagone dont l'intérieur est uniformément subdivisé en deux types de triangles équilatéraux ou encore en trois types d'arêtes ou de segments. Si on projetait selon la direction d'une autre diagonale du cube, ou une direction quelconque, on n'aurait pas cette simplicité pour le nouveau réseau triangulaire bidimensionnel.

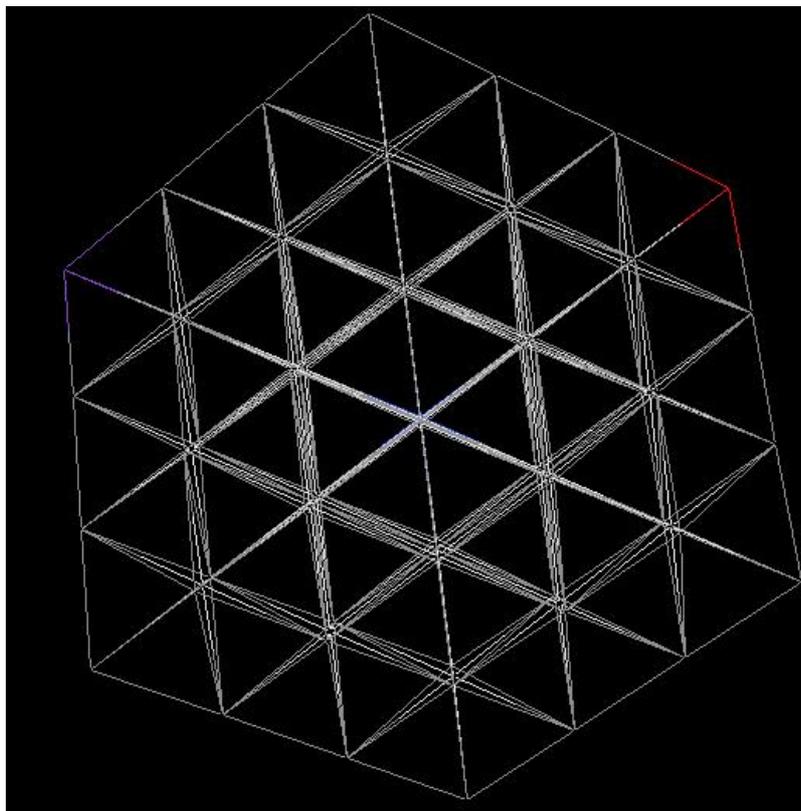


Figure 4.12 – Vue en plongée du plan qu'on obtient en projetant dans la direction $(1,1,1)$ pour un réseau de dimension $3 \times 3 \times 3$.

La figure 4.13 montre une vue en plongée de la figure 4.10 sur notre nouveau réseau bidimensionnel. Les segments des boucles types α (qui traversent les centres triangulaires du réseau original) se projettent en croisant les segments du réseau triangulaire bidimensionnel. La projection des boucles types α_D (qui traversent les vertex du réseau original) sera complètement confinée aux segments du réseau triangulaire. Elle sera un chemin à travers ce réseau. Ce chemin peut repasser sur lui même plusieurs fois en plusieurs endroits. C'est d'ailleurs vrai pour la boucle α_D avant sa déformation dans le réseau tridimensionnel original. Notons qu'il n'y a pas donc de mélange entre les deux types de boucles. De plus, comme les deux boucles α et α_D ne traversent pas les mêmes segments dans le réseau original, elle ne se croisent jamais exactement c'est-à-dire qu'elle n'ont aucun point commun. Cette

condition est très importante pour calculer le nombre de croisements dans le plan bidimensionnel.

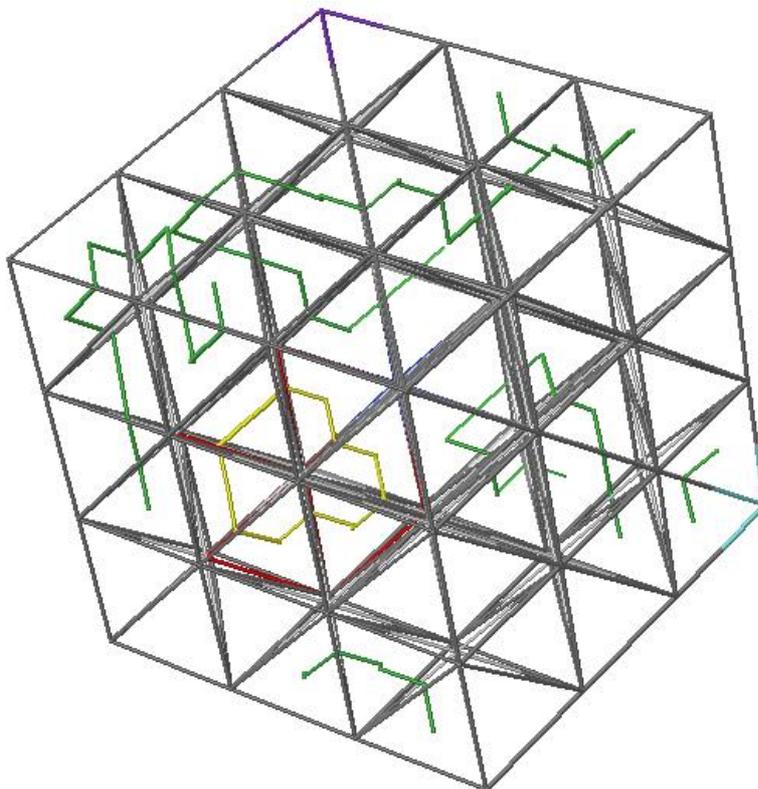


Figure 4.13 – Vue en plongée de la figure 4.10 dans le plan perpendiculaire à la direction $(1, 1, 1)$ de la diagonale principale du réseau original.

Toutes les projections de la courbe α devraient croiser le réseau triangulaire en un nombre fini de points identifiables de P donc croiser aussi la boucle α_D , formée par les segments du nouveau réseau, en un nombre fini de points identifiables de P . Il est probable que les croisements entre ces deux boucles seront multiples en certains points de P , mais ils seront distinguables par une cote z (hauteur du point de croisement de α_D au-dessus du plan P , dans le réseau original).

On appliquera presque textuellement l'algorithme de Lacher et Samners aux

courbes α et α_D projetés sur P . Il y a une simplification mineure par rapport à leur algorithme : il n'est pas nécessaire de considérer un petit déplacement relatif $(s1, s2, s3)$ entre les deux réseaux supportant les deux courbes, puisque ces réseaux sont déjà décalés l'un par rapport à l'autre. Il y a par contre une complication mineure : on a trois types de segments et deux façons de croiser chaque type de segment en allant de droite vers la gauche ou de gauche vers la droite. On aura donc besoin de stocker de l'information sur la boucle α_D afin de connaître le type de segment, et de l'information sur α pour connaître le sens de son parcours en croisant un type particulier de segment.

Par conséquent, il y a deux étapes majeures à suivre :

1. Préparer un tableau de données bidimensionnel de la boucle déformée projetée α_D . Ce tableau est nommé *PD* (relatif à projection data en anglais). Il contiendra une présentation explosée de α_D en ses segments élémentaires, répartis dans le tableau selon le type de segment. Pour cela un système de coordonnées deux dimensionnels incliné $[u, v]$ est utilisé dans ce nouveau réseau bidimensionnel. Trois types de segments formant un triangle droit (notre choix) dans le réseau bidimensionnel seront identifiés par les coordonnées (u, v) indiquant la position de ce triangle dans le plan. Nous ajoutons une autre coordonnée (k) pour identifier le type de segment. Ainsi, chaque segment de α_D sera caractérisé par les coordonnées (u, v, k) dans le plan 2D, et en préservant toute l'information nécessaire telle que la cote z de ce segment ainsi que son orientation par rapport au vecteur direction $(1, 1, 1)$: $(+1)$ si dans le même sens et (-1) si dans le sens opposé. En conséquence, chaque élément (u, v, k) du tableau *PD* représente une liste associée à un segment particulier dans le réseau 2D contenant l'information $\{z, rsign\}$ de tous les segments de α_D projetés dans cette case (u, v, k) . Nous devons aussi maintenir cette liste en ordre décroissant des valeurs z qui s'y trouvent ou faire un réarrangement de la liste une fois la boucle α_D est complètement parcourue et enregistrée dans *PD*.
2. On parcourt ensuite la boucle α dans le même sens que son orientation un

segment à la fois, en appliquant à chacun ce qui suit :

- (a) identifier les coordonnées (u, v, k) du segment i dans le plan 2D. Les coordonnées (u, v) indiquent dans quel triangle droit dans le plan 2D se trouve le segment i . La coordonnée (k) indique que le croisement du segment i se fait avec le segment k ième de ce triangle droit.
- (b) définir une côte unique pour ce segment i . Ce segment relie deux points q_1 et q_2 en 3 dimensions, de côtes respectives z_1 et z_2 . Nous lui associons une côte unique moyenne de ces deux côtes appelée $z_{moy}(i)$. Associer aussi une orientation $lsign$ indiquant si le segment i croise le segment type k en se dirigeant vers lui ou en sortant de lui.
- (c) comparer cette côte $z_{moy}(i)$ à toutes les entrées de la liste (u, v, k) dans le tableau PD qui ont une cote plus grande que $z_{moy}(i)$, et pour chacune, ajouter la contribution du croisement au nombre d'enlacement : $(L_K+ = lsign \times PD[u, v, k] - > item.rsign)$.

Ceci conclut donc la fin de l'algorithme.

CHAPITRE 5

SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE EFFECTIF

5.1 Introduction

Après avoir décrit au chapitre 4 la version discrète de la théorie effective euclidienne de boucles de vortex fermées de notre modèle de Higgs abélien avec le terme de Chern-Simons en $(2+1)$ dimensions, nos algorithmes de génération de boucles fermées et de calcul des nombres d'enlacement entre les boucles ainsi que les méthodes de simulation Monte Carlo utilisées dans la présente thèse, nous présentons dans ce chapitre une description détaillée de toutes les simulations de Monte Carlo que nous avons effectuées sur le réseau discret dans le cadre de cette thèse ainsi qu'une analyse détaillée de tous nos résultats numériques obtenues. Nous commençons d'abord, par présenter la méthode Monte Carlo appliquée à notre système, la phase de thermalisation et de préparation du système pour l'équilibre thermodynamique. Ensuite, La présentation et la discussion des résultats se fait en deux parties, la première partie concerne les simulations du modèle effectif en absence du terme de Chern-Simons. La deuxième partie concerne le modèle effectif avec la considération du terme de Chern-Simons.

5.2 Méthode de Monte Carlo

5.2.1 Générateur de nombres aléatoires

Nous avons commencé par examiner les propriétés des générateurs de nombres aléatoires qui sont essentiels dans toutes nos simulations réalisées dans cette thèse dans le but de distribuer les spins 1, 2 et 3 sur les vertex du réseau aléatoirement et de générer des configurations de spins de façon aléatoire avec la méthode de Monte Carlo. Un générateur de nombres aléatoires est un algorithme qui génère une séquence de nombres qui présentent certaines propriétés du hasard. Parmi ces propriétés, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle. De façon générale le choix d'un bon générateur

de nombres aléatoires repose sur trois critères [33], à savoir, les séquences de nombres aléatoires doivent être uniformes, non corrélées et d'une extrêmement longue période c'est à dire que les nombres ne se répètent pas sur des intervalles assez longs. Nous avons effectué plusieurs tests de qualité sur plusieurs générateurs tels que ceux de Mersenne Twister [40], Lecuyer [41] et de Marsaglia [42]. À titre d'exemple, nous avons généré un million de nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant le générateur de Mersenne Twister et effectué le test de parking (parking lot test en anglais) représenté sur la figure 5.1. Sur cette figure, les points correspondent aux paires consécutives de nombres aléatoires représentées sur l'axe des X (X_i) et l'axe des Y (X_{i+1}). Nous remarquons que les points occupent tout l'espace bidimensionnel de la figure sans pour autant suivre une forme particulière. Pour la suite de nos simulations nous avons utilisé le générateur de Mersenne Twister.

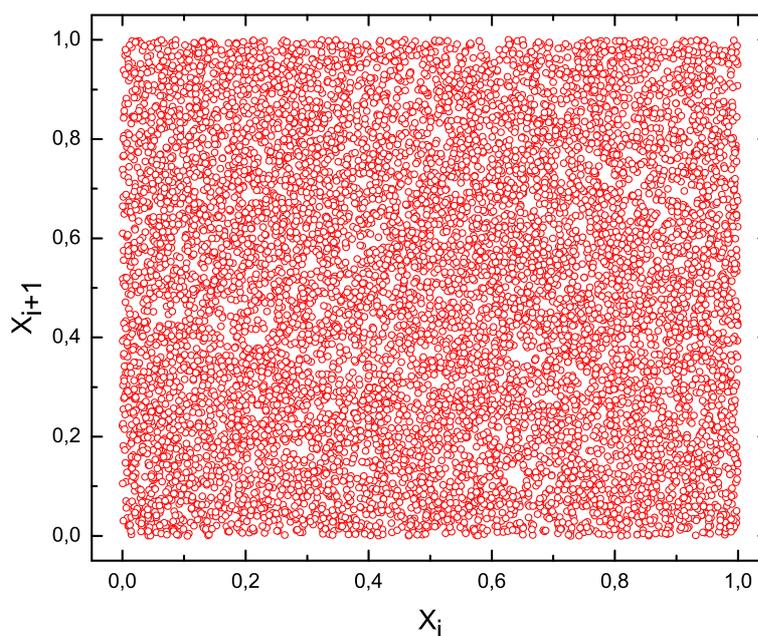


Figure 5.1 – Un million de nombres aléatoires sont générés et représentés en paires consécutives sur l'axe des X (X_i) et l'axe des Y (X_{i+1}) en utilisant le générateur de Mersenne Twister [40].

5.2.2 Thermalisation

Dans ce qui suit, nous montrons la convergence de la longueur totale des boucles de vortex L_T en fonction du temps de la simulation. La longueur totale L_T dans une configuration donnée est proportionnelle au nombre de faces triangulaires qui sont traversées, chacune, par une ligne de vortex (voir la section 4.4). Pour cela nous avons utilisé un réseau de dimensions 100^3 et appliqué les conditions périodiques aux frontières. Une configuration initiale est obtenue en distribuant aléatoirement les spins 1, 2 et 3 sur tous les vertex du réseau. La longueur totale initiale des boucles fermées correspondante est de l'ordre de 5×10^6 unités. Pour une valeur particulière de la masse des vortex μ , nous avons ensuite généré les configurations subséquentes en utilisant la méthode de Monte Carlo, plus précisément, l'algorithme de Métropolis présenté à la section 4.5.4 avec le poids de Boltzmann de l'équation 4.6 où l'action est donnée par l'équation 4.1. Nous avons refait la même simulation pour plusieurs valeurs de la masse μ . Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 5.2 : la longueur totale des boucles L_T en échelle logarithmique en fonction du temps de simulation. L'unité du temps est une mise à jour complète sur tous les vertex du réseau. De cette figure nous remarquons que l'état d'équilibre dépend fortement de la valeur de la masse des boucles μ qui varie dans la région comprise entre $\mu = 0$ et $\mu = 1.9$. Dans cette région, lorsque μ augmente, la longueur totale des boucles converge vers des longueurs de plus en plus petites, les fluctuations relatives augmentent et le temps de convergence augmente. Pour des valeurs de μ plus grandes, la longueur totale des boucles décroît vers zéro. Dans la suite de nos simulations, nous varions μ dans l'intervalle $[0, 1.9]$.

Par ailleurs, nous testons que l'état d'équilibre des configurations ne dépend pas du choix de la configuration initiale. Pour cela, nous avons étudié la convergence de la longueur totale des boucles en fonction de la masse des boucles μ en considérant différentes configurations initiales : celles où les spins sont distribués aléatoirement sur les vertex du réseau dont la longueur totale correspondante est de l'ordre de 5×10^6 unités (état désordonné), et celles où tous les vertex prennent la même valeur de spin qui lui correspond une longueur totale des boucles nulle (état ordonné).

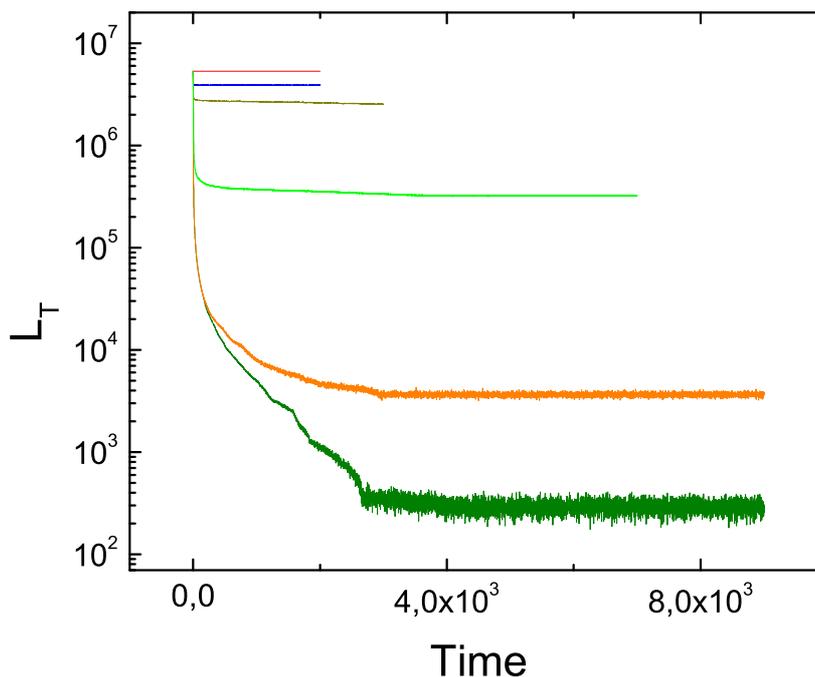


Figure 5.2 – Longueur totale de boucles en échelle logarithmique en fonction du temps de simulation pour un réseau cubique 100^3 . Du haut vers le bas, $\mu = 0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.9, 1.5$. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. L'unité du temps est une mise à jour sur tous les vertex du réseau.

Les figure 5.3 et 5.4 illustrent la convergence de la longueur totale des boucles vers l'équilibre pour $\mu = 0.13$ et $\mu = 0.5$, respectivement, en utilisant ces deux choix de configurations initiales représentées en courbe bleu pour l'état initial désordonné et en courbe rouge pour l'état initial ordonné. Nos simulations ont été réalisées sur un réseau de dimensions 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Nous remarquons que les deux courbes en bleu et en rouge convergent dans le temps pour ces deux valeurs de μ (voir les figures du bas de 5.3 et 5.4). Notre remarque s'applique pour toutes les simulations que nous avons réalisées en fonction de μ ($0 \leq \mu \leq 1.9$). Nous déduisons que l'état d'équilibre est indépendant du choix de l'état initial quelque soit la valeur de μ .

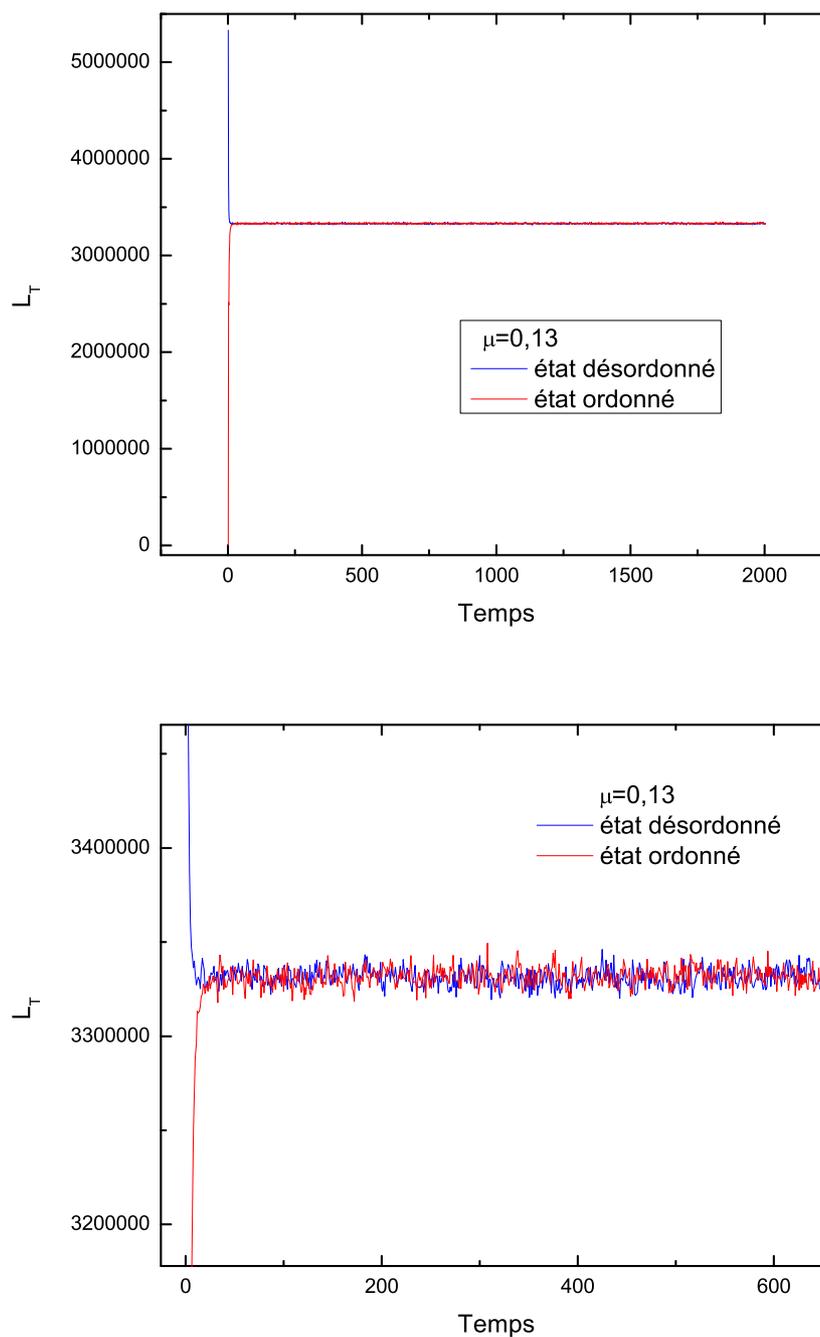


Figure 5.3 – (Haut) : Longueur totale de boucles en fonction du temps de simulation pour un réseau 10^3 pour $\mu = 0,13$ en utilisant deux configurations initiales différentes. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (Bas) : La région de convergence des courbes en bleu et rouge de la figure du haut est agrandie.

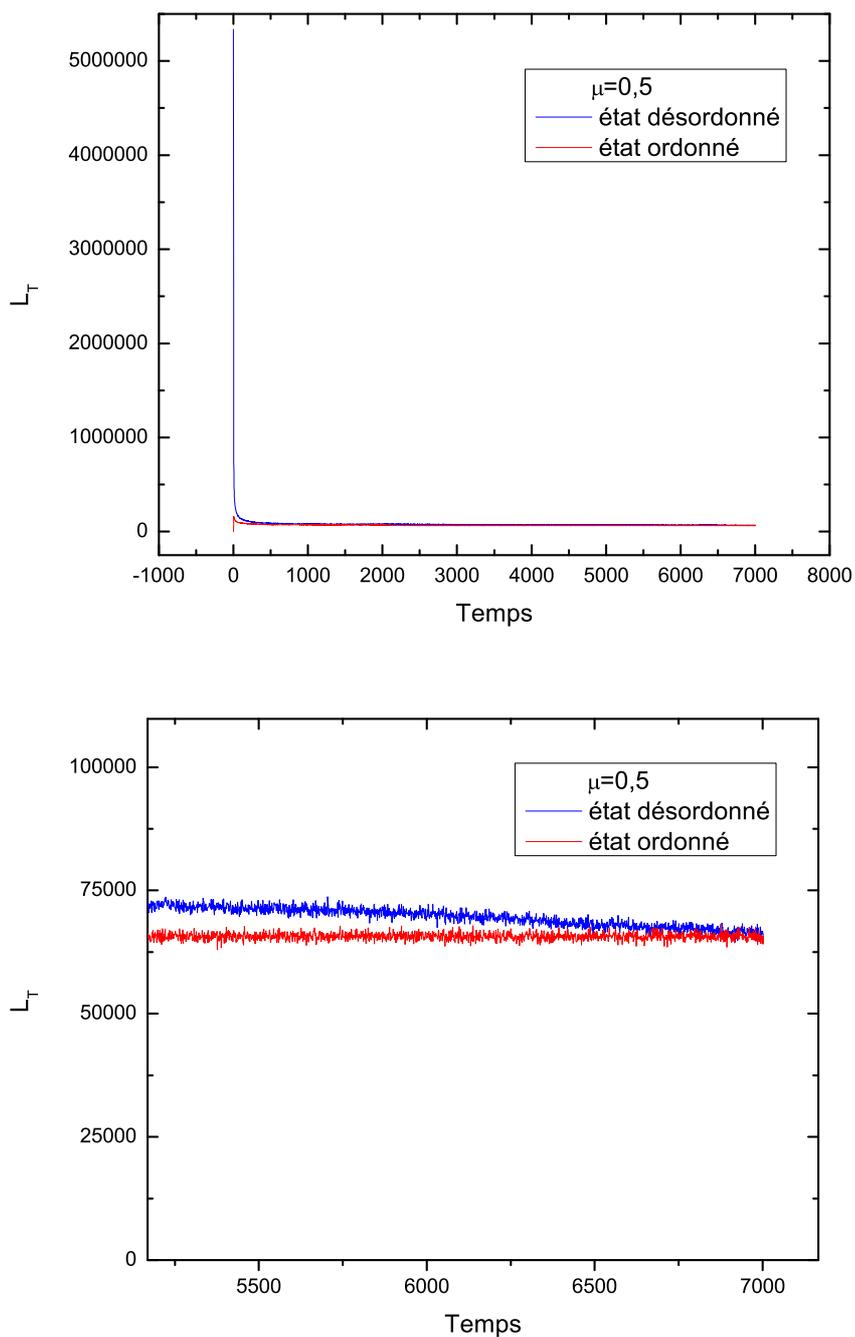


Figure 5.4 – (Haut) : Longueur totale de boucles en fonction du temps de simulation pour un réseau 10^3 pour $\mu = 0,5$ en utilisant deux configurations initiales différentes. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (Bas) : La région de convergence des courbes en bleu et rouge de la figure du haut est agrandie.

5.2.3 Corrélation dans les séquences successives de configurations

En équilibre thermodynamique et dans le but de générer un échantillon de N configurations de spins indépendantes nous étudions la fonction d'autocorrélation $\Phi_{L_T}(t)$ de la longueur totale des boucles en fonction du pas t de la mesure de la longueur totale dans le temps de simulation. La fonction d'autocorrélation des longueurs est définie par la relation

$$\Phi_{L_T}(t) = \frac{[\langle L_T(0)L_T(t) \rangle - \langle L_T \rangle^2]}{\langle L_T^2 \rangle - \langle L_T \rangle^2}, \quad (5.1)$$

où le cas ($t = 0$), par exemple, correspond à un pas nul c'est à dire aux mesures de L_T suite aux configurations générées successivement dans le temps de simulation. Le cas ($t = 1$) correspond à une mesure de L_T enregistrée seulement chaque deux configurations générées successivement, et ainsi de suite.

Lorsque ($t = 0$), la fonction d'autocorrélation est égale à un, $\Phi_{L_T}(t = 0) = 1$, indiquant que les longueurs totales enregistrées sont fortement corrélées. Par contre, lorsque t tend vers l'infini $\Phi_{L_T}(t \rightarrow \infty) = 0$ indiquant dans ce cas que les longueurs enregistrées sont complètement indépendantes les unes des autres. Donc, l'étude de cette fonction d'autocorrélation nous permet de déterminer le temps nécessaire τ entre deux enregistrements de L_T pour générer un échantillon de N longueurs totales indépendantes en fonction de μ . Dans nos simulations, nous avons considéré une décorrelation lorsque $\Phi_{L_T}(t) \rightarrow 0.05$.

Sur les figures 5.5 et 5.6 nous représentons le comportement de la fonction d'autocorrélation $\Phi_{L_T}(t)$ pour plusieurs valeurs de μ indiquées sur chaque graphique. Nous avons considéré le réseau de dimensions 100^3 et appliqué les conditions périodiques aux frontières. L'unité de temps que nous avons utilisée pour t est une mise à jour par vertex. Nous avons appliqué la méthode de la transformée de Fourier accélérée (Fast Fourier Transform en anglais notée par le symbole FFT) [32] pour calculer cette fonction d'autocorrélation sur un grand échantillon de longueurs, en fonction de μ . Nous constatons que lorsque t augmente, $\Phi_{L_T}(t)$ décroît à partir de la valeur un, comme prévu, et tend vers zéro. En variant μ , nous déterminons τ dans chaque expérience pour lequel $\Phi_{L_T}(t = \tau) \rightarrow 0.05$. Nous trouvons que dans

la région $\mu < 0.13$ ou $\mu \geq 0.2$ la valeur de τ est d'environ 2 unités de temps de simulation de Monte Carlo c'est à dire deux mises à jours complètes sur tout le réseau. Quand μ s'approche de la valeur 0.152 de droite ou de gauche, τ devient de l'ordre de 50 unités de temps. Sachant qu'en transitions de phases des systèmes statistiques, autour des points critiques le temps de corrélation tend vers l'infini, on en déduit un changement de comportement dans la phase de Higgs du modèle effectif autour de $\mu = 0.152$.

Nous appliquons ces résultats dans la suite de nos simulations pour générer des échantillons de configurations indépendantes.

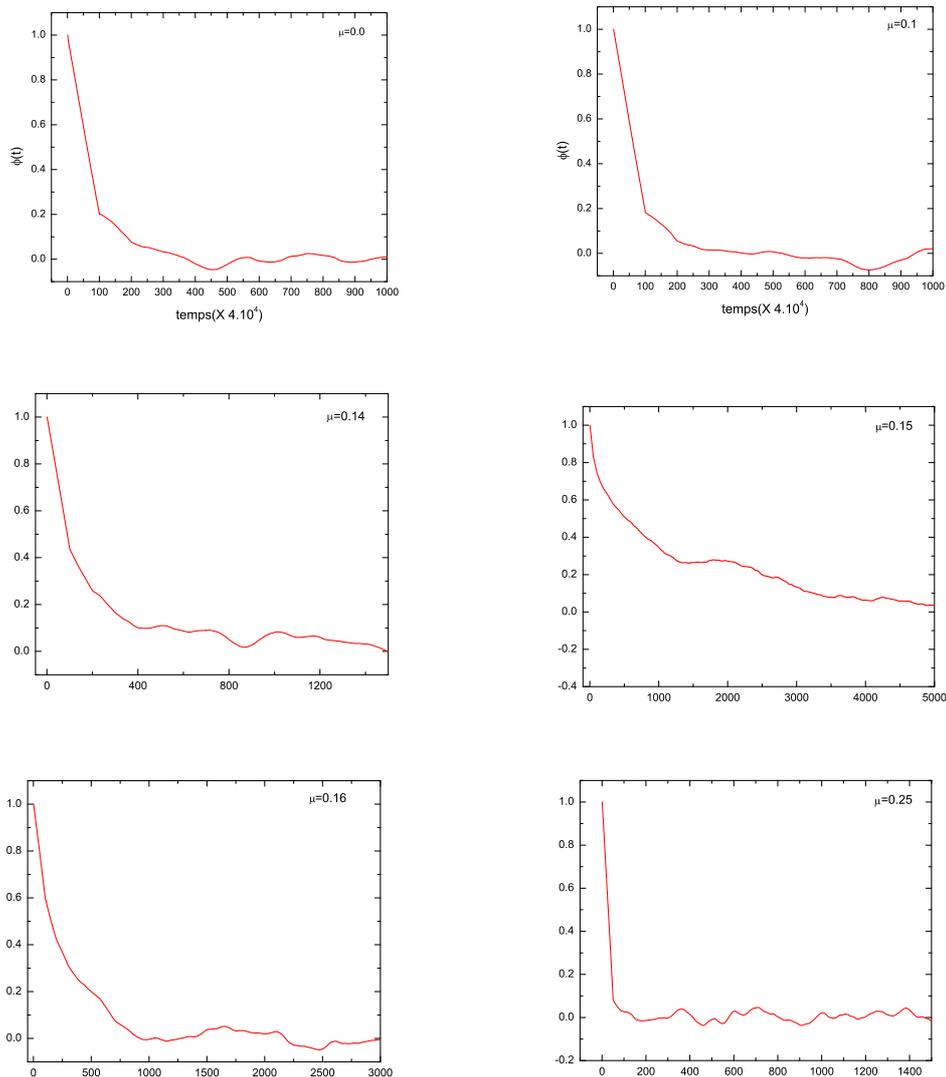


Figure 5.5 – Fonction d'autocorrelation de la longueur totale des boucles $\Phi_{L_T}(t)$ pour un réseau cubique 100^3 . Les valeurs de μ sont indiquées sur chaque figure. L'unité du temps utilisée pour t est une mise à jour par vertex. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées.

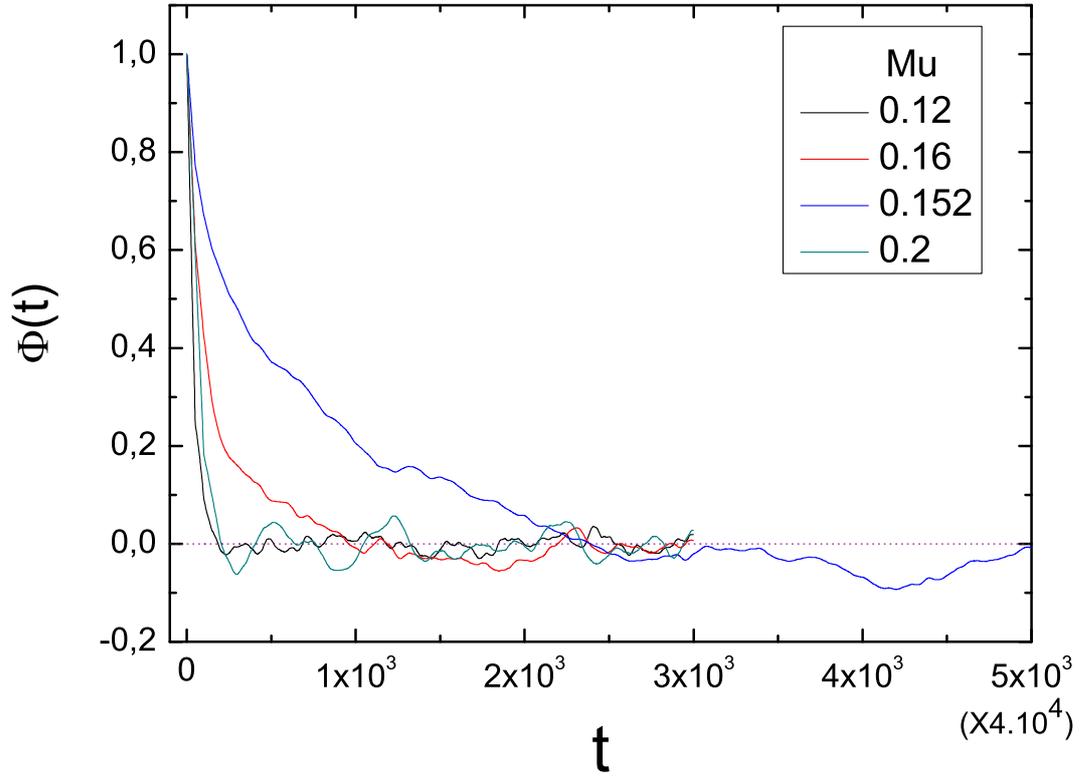


Figure 5.6 – Fonction d'autocorrelation de la longueur totale des boucles $\Phi_{L_T}(t)$ pour un réseau cubique 100^3 . Les valeurs de μ sont indiquées sur la figure. L'unité du temps utilisée pour t est une mise à jour par vertex. Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées.

5.2.4 Équilibre thermodynamique

Une fois que le système atteint l'équilibre thermodynamique, nous réinitialisons le compteur de temps à zéro en choisissant une configuration en équilibre thermodynamique comme initiale de façon assez arbitraire, et nous générons un échantillon de configurations de spins indépendantes en terme de L_T de taille N pour chaque valeur de la masse μ .

Dans la représentation des intégrales de chemin, la valeur moyenne de la longueur totale des boucles $\langle L_T \rangle$ s'écrit

$$\langle L_T \rangle = \frac{\int D\phi L_T e^{-S_1}}{\int D\phi e^{-S_1}}, \quad (5.2)$$

où l'intégrale est effectuée sur toutes les configurations possibles des champs du modèle effectif. e^{-S_1} est le facteur de Boltzmann et l'action effective S_1 est donné par l'équation (4.1).

Cette valeur moyenne (équation 5.2) se réduit avec la méthode de Monte Carlo à

$$\langle L_T \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_{T,i}. \quad (5.3)$$

Nous utilisons donc ce résultat pour calculer numériquement, dans les sections suivantes, la valeur moyenne $\langle L_T \rangle$.

D'abord, dans ce qui suit, nous voulons analyser les distributions des longueurs totales des boucles en fonction de la taille de l'échantillon N . Le but étant de déterminer quelle est la taille optimale N qui représentera au mieux l'ensemble statistique *infini* du système étudié.

La figure 5.7 illustre le comportement de la distribution des longueurs totales pour $\mu = 0.13$ pour $N = 10000$, $N = 4000$ et $N = 1000$ (voir les figures 5.7(a), 5.7(b) et 5.7(c), respectivement) et pour $\mu = 0.3$ pour $N = 10000$, $N = 5000$ et $N = 1000$ (voir les figures 5.7(d), 5.7(e) et 5.7(f), respectivement). Nous avons utilisé le réseau 100^3 et appliqué les conditions périodiques aux frontières. Nous remarquons sur ces figures que les distributions des longueurs que nous obtenons peuvent être ajustées avec la forme d'une distribution gaussienne [33]. De plus, lorsque N augmente, les caractéristiques de cette distribution, à savoir la longueur moyenne ainsi que la largeur ou l'écart type, convergent et les erreurs relatives correspondantes diminuent. Pour $N = 10000$, les erreurs relatives sont de l'ordre de un pour cent ou moins. Ces résultats sont en parfait accord avec le théorème central limite [33]. D'après ce théorème, dans la limite $N \rightarrow \infty$ la longueur totale moyenne de l'ensemble de N configurations est ajustée suivant la distribution gaussienne et la variance $\sigma^2 \propto 1/N$. Nous pouvons considérer donc que $N = 10000$ est une très bonne approximation d'un échantillon assez grand. En conclusion, nous considérons la taille de tous nos échantillons ($N = 10000$) dans la suite de cette thèse.

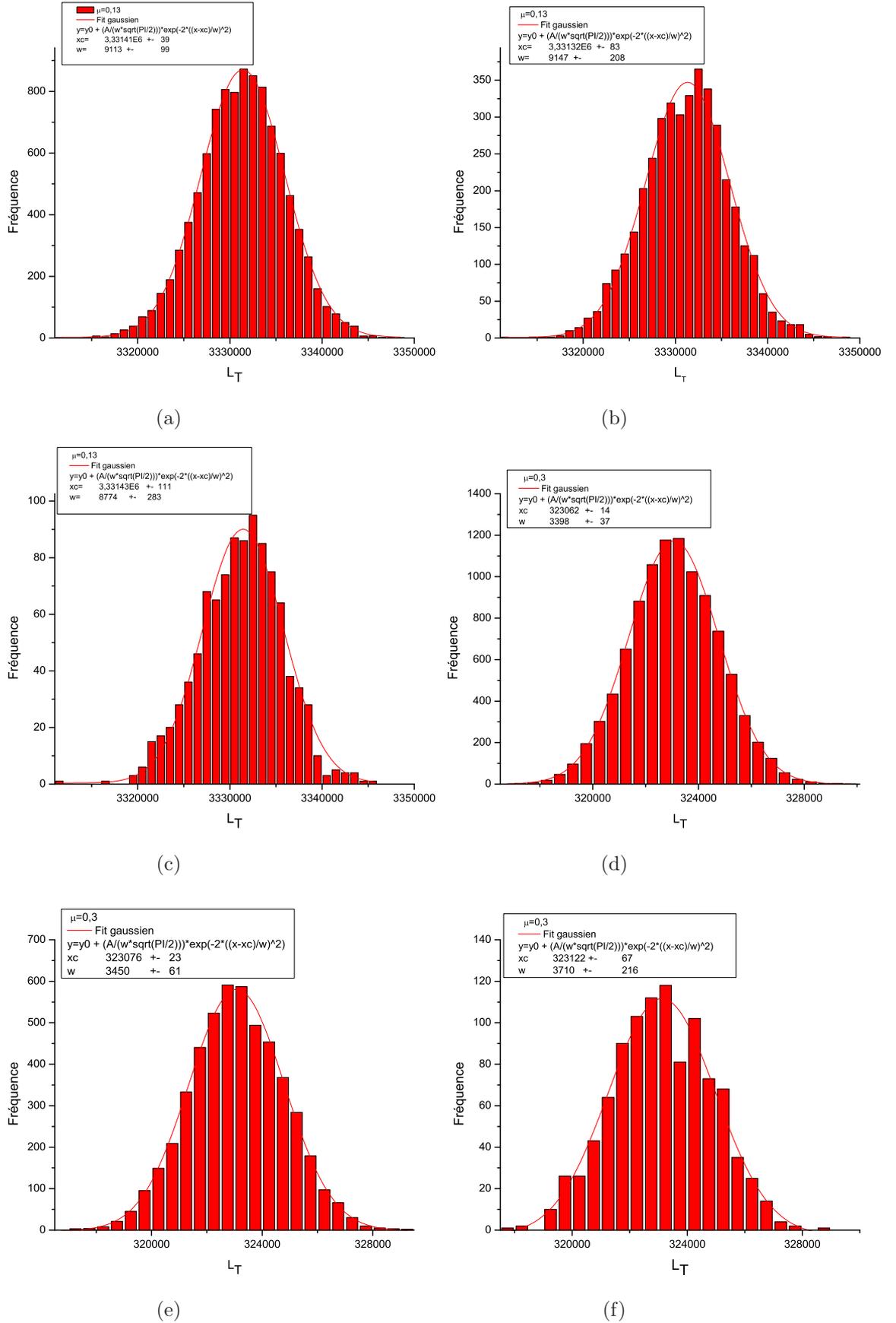


Figure 5.7 – Histogrammes de longueur totale des boucles. (a), (b) et (c) : $\mu = 0.13$, $N = 10000, 4000, 1000$, respectivement. (d), (e) et (f) : $\mu = 0.3$, $N = 10000, 5000, 1000$, respectivement.

Sur la figure 5.8, la longueur totale des boucles de vortex générée en équilibre thermodynamique pour $N = 10000$ est représentée, à titre d'illustration, pour $\mu = 0.13, 0.2, 0.3, 0.6$ (les figures 5.8(a), 5.8(b), 5.8(c) et 5.8(d), respectivement) pour une taille du réseau $100 \times 100 \times 300$ avec application des conditions périodiques aux frontières.

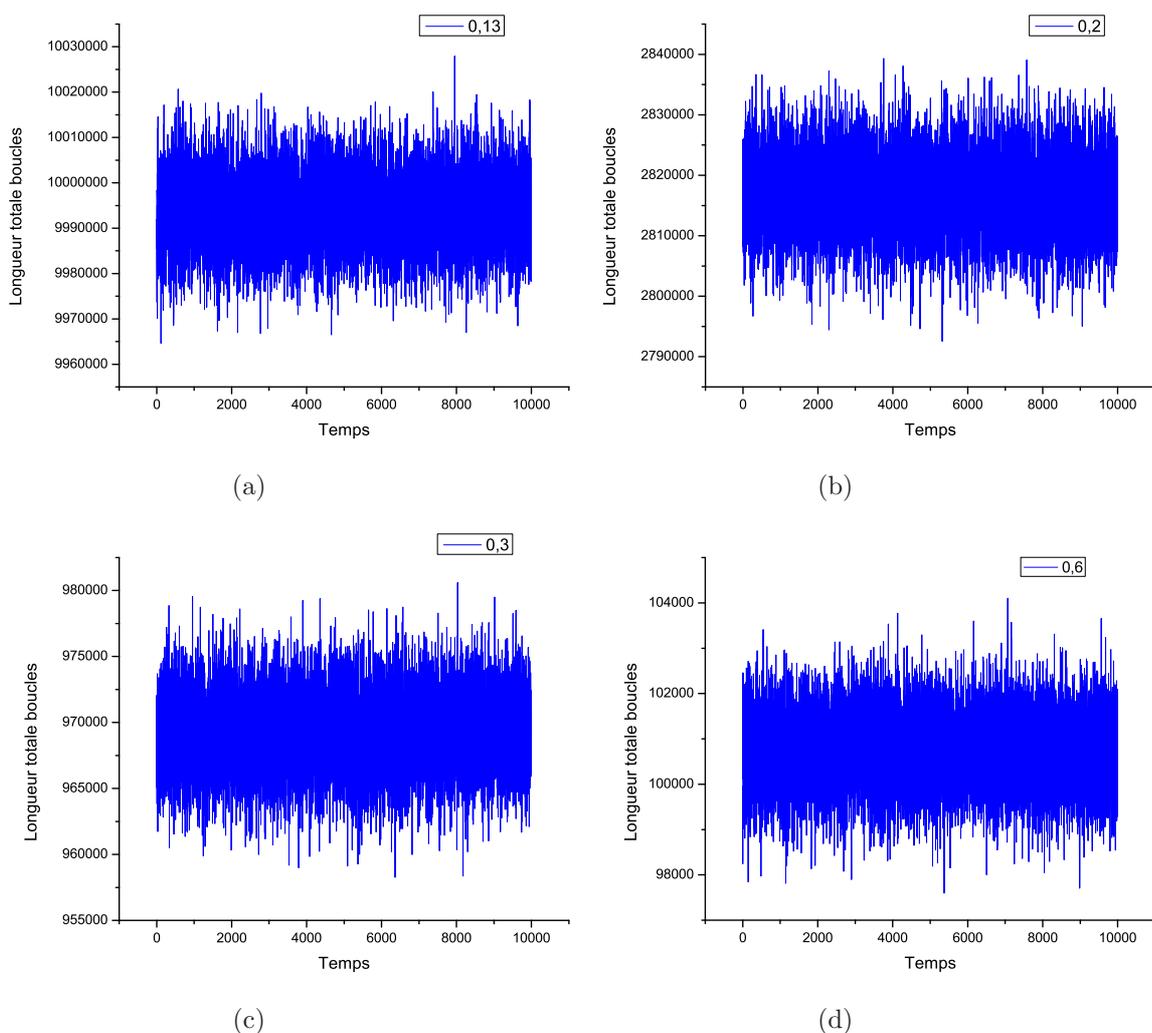
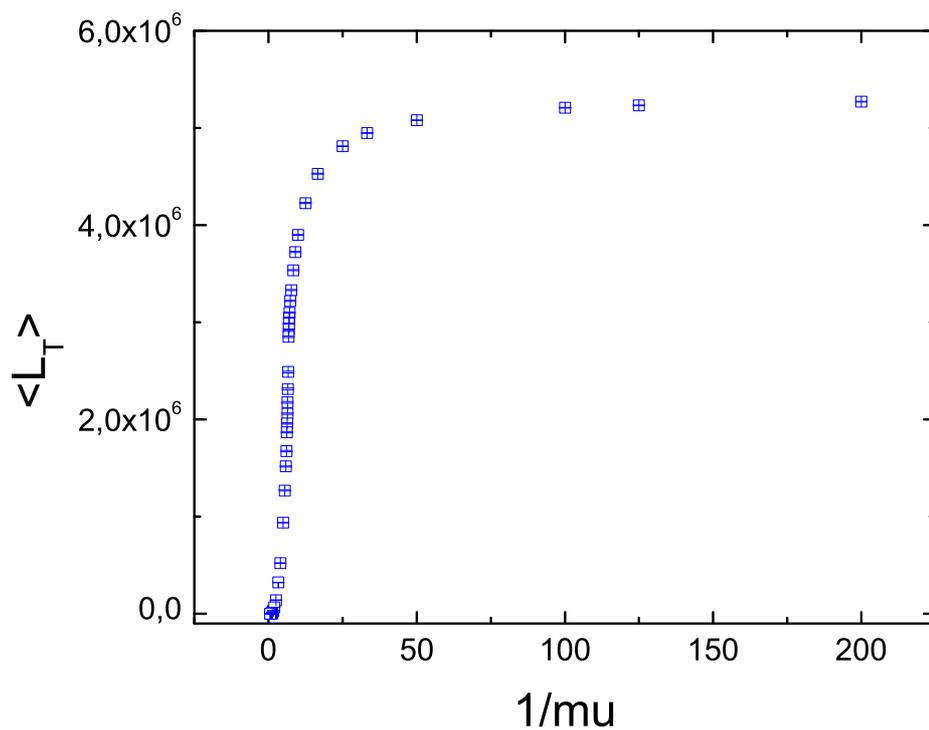


Figure 5.8 – Longueur totale des boucles en fonction du temps en équilibre thermodynamique pour $N = 10000$. (a) : $\mu = 0.13$. (b) : $\mu = 0.2$. (c) : $\mu = 0.3$. (d) : $\mu = 0.6$.

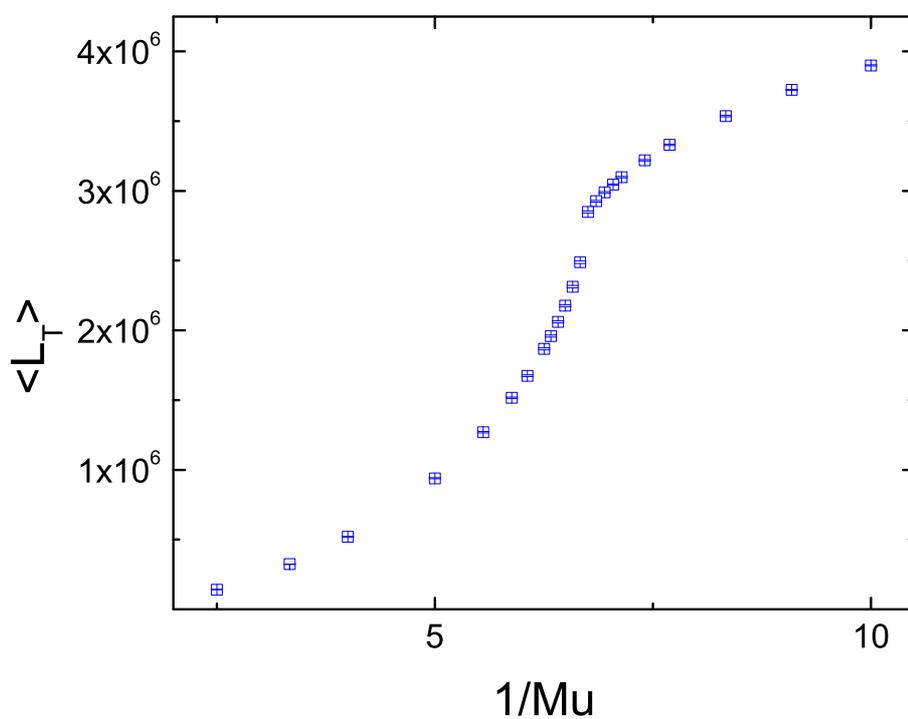
5.3 Résultats numériques sans terme de Chern-Simons

5.3.1 Évidence pour le changement de phase

Dans la figure 5.9, nous représentons la valeur moyenne de la longueur totale des boucles L_T en fonction de l'inverse de μ ($0 \leq \mu \leq 1.9$). Nous avons considéré un réseau de dimensions 100^3 et appliqué les conditions périodiques aux frontières. À partir de cette figure nous remarquons que la longueur totale des boucles augmente quand μ diminue. De plus, cette longueur augmente de façon dramatique de zéro jusqu'à l'ordre de millions. Nous constatons aussi qu'il y a un point d'inflexion autour de $\mu = 0.152$ où la pente de la courbe change de signe (voir figure 5.9(b)) indiquant un changement de comportement dans la phase brisée de Higgs du modèle effectif et donc une transition de la phase de Higgs vers une nouvelle phase. Afin d'étudier les propriétés statistiques de cette transition, nous étudions la distribution des longueurs des boucles fermées.



(a)



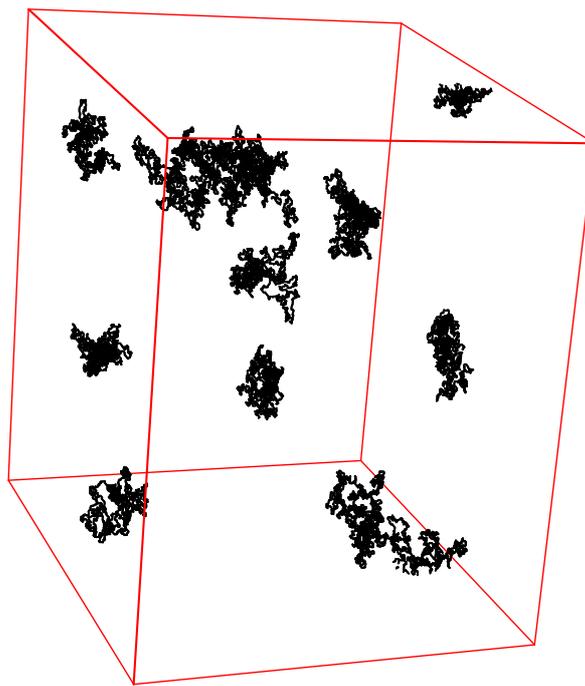
(b)

Figure 5.9 – (a) : Valeur moyenne de la longueur totale des boucles en fonction de μ , $0 \leq \mu \leq 1.9$, pour un réseau cubique 100^3 . Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées. (b) : La région qui contient le point d'inflexion dans (a) est agrandie.

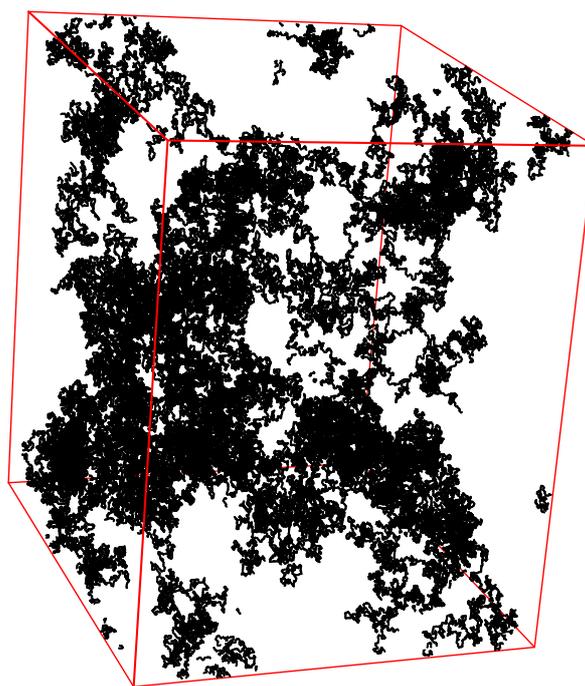
5.3.2 Distribution des boucles fermées

On définit la densité totale des boucles ρ comme étant le rapport de la valeur numérique L_T par la longueur maximale obtenue par notre construction du réseau discret, $L_{T,max}$. Une boucle fermée est dite infinie [47] dans un volume fini si sa longueur L est beaucoup plus grande que la longueur que devrait avoir cette boucle si elle correspondait à une marche aléatoire fermée non intersectant. La taille d'une marche aléatoire non intersectant dans un réseau cubique simple se comporte comme $L \sim 3/5$. S'il s'agit d'une boucle fermée une autre contrainte est ajoutée mais ne doit pas influencer de beaucoup sur cette loi d'échelle. Actuellement, la valeur de l'exposant trouvée est légèrement inférieure à $3/5$, mais la valeur exacte n'a pas été encore déterminée analytiquement [48]. Dans notre modèle, pour un réseau de dimensions 100^3 , avec l'utilisation de la tessellation tétraédrique, il n'est pas clair comment la taille d'une marche aléatoire fermée non intersectant doit se comporter avec sa longueur. En utilisant un réseau cubique simple comme un guide, un calcul simple donne $400^{5/3} \approx 21800$, où 400 est le nombre d'étapes dans une direction du réseau. Ainsi on traite n'importe quelle boucle de longueur supérieure substantiellement à 25000 comme une boucle infinie.

Sur la figure 5.10, nous représentons une image instantanée des boucles présentes à l'équilibre thermodynamique pour $\mu = 0.152$ (figure 5.10(a)) et $\mu = 0.148$ (figure 5.10(b)). Nous avons considéré un réseau de dimensions 100^3 et appliqué les conditions périodiques aux frontières. Dans la première figure, seules les plus longues boucles ($1400 \leq L \leq 3000$) sont représentées. D'après notre critère sur les boucles infinies, elles correspondent à des boucles finies dans le réseau. Dans la deuxième figure, une seule boucle de longueur $L \simeq 155500$ est représentée. Selon notre critère nous constatons qu'elle est infinie. Cependant, pour cette valeur de $\mu = 0.148$, il existe une autre boucle et en fait *une seule* boucle qui sera considérée comme la *vraie* boucle infinie de longueur de l'ordre de $L \sim 2 - 3 \times 10^6$. En variant μ , nous remarquons que cette boucle infinie apparaît lorsque $\mu < 0.152$ et disparaît soudainement au delà de $\mu = 0.152$. Nous déduisons que la transition que nous avons observée dans la section précédente (figure 5.9) correspond, en fait, à la formation de cette boucle infinie dans la nouvelle phase observée ($\mu < 0.152$).



(a)



(b)

Figure 5.10 – Images instantanées de boucles fermées prises en équilibre dans un réseau de dimensions 100^3 . (a) : Seules les plus longues boucles ($1400 \leq L \leq 3000$) sont représentées pour $\mu = 0.152$. (b) : Une seule boucle est représentée ($L \simeq 155500$) pour $\mu = 0.148$.

Sur la figure 5.11, nous reportons la densité des boucles finies en fonction de la densité totale des boucles fermées en variant μ (de 0 à 1.5) en moyennant sur l'échantillon de $N = 10000$ généré en équilibre sur un réseau de dimensions 100^3 avec application de conditions périodiques aux frontières. Nous constatons que pour les petites valeurs de la densité totale il n'y a pas de boucles infinies. La courbe étant une droite de pente égale à un (1). Cependant, au delà de $\rho = 0.207$, ce qui correspond à $\mu > 0.152$, la densité des boucles finies décroît légèrement pour rester essentiellement constant en fonction de la densité totale. Dans ce cas, il apparaît une réorganisation des boucles en une boucle infinie discutée plus haut et un ensemble de boucles finies.

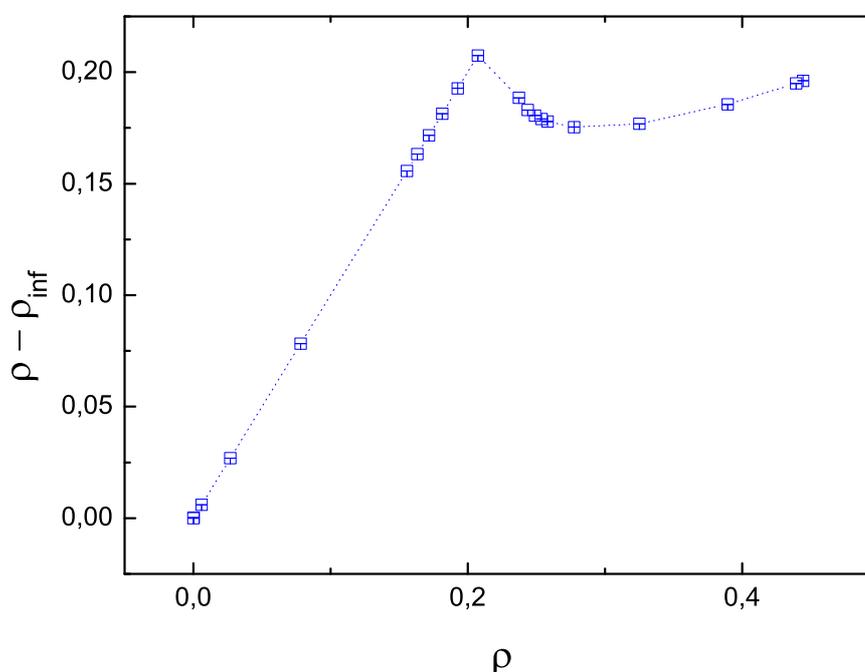


Figure 5.11 – Densité de boucles finies en fonction de la densité totale pour $0 \leq \mu \leq 1.5$ pour un réseau cubique 100^3 . Les conditions périodiques sur le réseau ont été utilisées.

Par ailleurs, ce phénomène a été aussi observé dans le cadre des études dynamiques des cordes cosmiques et une explication physique a été donnée. Les auteurs de [45] ont expliqué qu'à la formation de l'Univers, la densité élevée des états de l'Univers est dominée par de longues boucles qui contiennent plus d'énergie. Au fur et à mesure que l'univers se refroidit le régime de haute température décroît vers le

régime de basse température et l'espace de phase favorise la formation de petites boucles.

Dans le but de clarifier la nature de la transition que nous observons, nous étudions le système autour du point de transition. Pour cela, nous passons à l'étude des paramètres d'ordre, à savoir, la longueur moyenne des boucles, l'opérateur boucle de Wilson [43] ainsi que l'opérateur boucle de Polyakov [53].

5.3.3 Longueur moyenne des boucles

Sur la figure 5.12, nous reportons la valeur moyenne des boucles $\langle L_M \rangle$ en fonction du logarithme de la masse des vortex ($\ln \mu$). μ varie dans l'intervalle $[0, 1.2]$. Dans une configuration en équilibre thermodynamique, la longueur moyenne des boucles (L_M) est obtenue en divisant la longueur totale des boucles (L_T) par le nombre de boucles fermées. La valeur moyenne est ensuite obtenue en utilisant notre échantillon de $N = 10000$ configurations indépendantes. Nos simulations ont été réalisées sur le réseau de dimension 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Nous constatons que la longueur moyenne décroît de la valeur maximale ($\langle LM \rangle \approx 29$) lorsque μ augmente de la valeur zéro. Il y a un point d'inflexion qui est autour de $\ln \mu \approx -1.9$, ce qui correspond à $\mu \approx 0.15$. Cette valeur correspond à l'apparition de la boucle infinie décrite dans la section précédente. Ainsi, la transition est clairement identifiée en terme du paramètre d'ordre : la longueur moyenne des boucles de vortex.

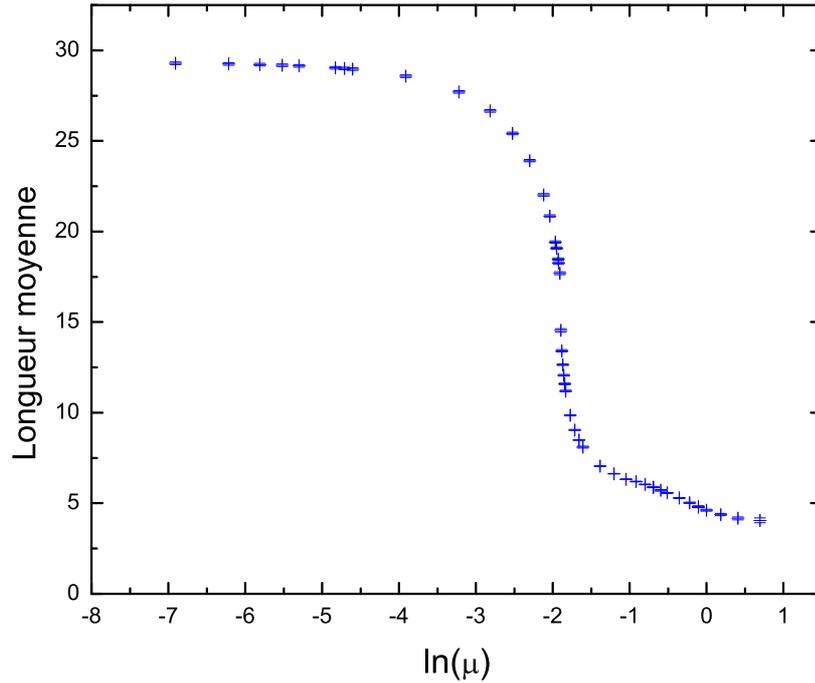


Figure 5.12 – Longueur moyenne de boucles finies en fonction du logarithme de la masse des vortex ($0 \leq \mu \leq 1.2$). Le réseau utilisé est 100^3 . Les conditions périodiques aux frontières sur le réseau ont été utilisées.

5.3.4 Boucle de Wilson

5.3.4.1 Critère de confinement : loi des aires

L'idée de la boucle de Wilson a débuté en 1974 avec les travaux de Wilson [43] dans le but d'étudier sur le réseau le confinement des quarks dans les théories de jauge abélienne et non abélienne dans un espace-temps Euclidien dans la limite où la constante de couplage est forte. C'est une quantité invariante de jauge ; elle consiste en une intégrale sur un chemin fermé du champ de jauge $A_\mu(x)$. En théorie de l'électrodynamique quantique (quantum electrodynamics en anglais désignée par le symbol QED), son expression exprimée dans un espace-temps euclidien est [8] [49] :

$$W_P(y, y) = \exp \left[-ie \oint_P dx_\mu A_\mu(x) \right], \quad (5.4)$$

où l'intégrale est effectuée d'un point de l'espace-temps y vers lui-même en utilisant un chemin fermé P . e est la charge du champ de jauge A_μ .

Dans le but d'étudier le potentiel de confinement des quarks, on considère

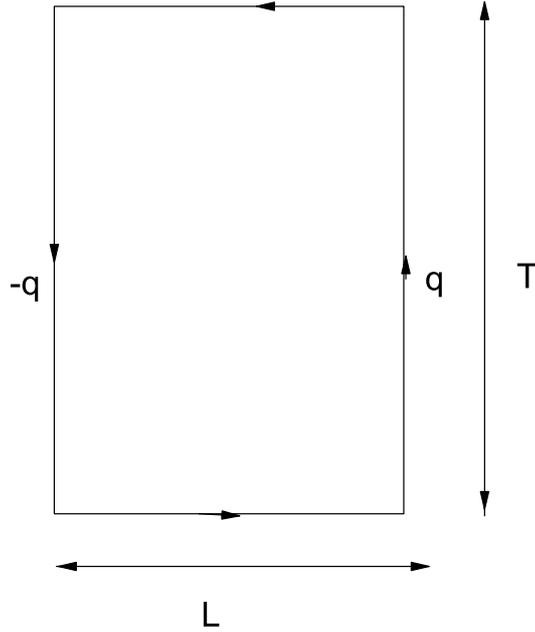


Figure 5.13 – Boucle de Wilson orientée. Les deux charges, q et $-q$, sont séparées d’une distance L pour une durée T euclidienne.

l’expérience suivante avec la boucle de Wilson [50] : dans notre réseau décrivant la théorie effective de boucles fermées, introduisons deux charges externes statiques de magnitude égale, q , mais de signes opposés, séparées par une distance L pour une durée T euclidienne avec la condition ($T \gg L$) (voir la figure 5.13). Les deux charges sont ensuite annihilées. La valeur moyenne de l’opérateur boucle de Wilson est alors définie par

$$W_{(L,T)} \equiv \langle W_{(L,T)} \rangle = \left\langle e^{(-i\frac{q}{e} \oint_{(L \times T)} A_\mu dx_\mu)} \right\rangle, \quad (5.5)$$

où l’intégrale est réalisée sur le parcours fermé ($L \times T$) montré sur la figure 5.13. D’après le théorème de Stokes, $\oint A_\mu dx_\mu$ mesure le flux qui traverse la surface de Wilson ; plus exactement, il mesure 2π fois le nombre d’enlacement L_k total de la boucle de Wilson avec les boucles de vortex fermées. Ainsi, l’équation 5.5 devient :

$$W_{(L,T)} = \left\langle e^{(-i(\frac{2\pi q}{e}) \times L_k)} \right\rangle. \quad (5.6)$$

Dans la représentation des intégrales de chemin, cette valeur moyenne de la

boucle de Wilson (équation 5.6) s'écrit

$$W_{(L,T)} = \frac{\int D\phi e^{-S_1} e^{(-i(\frac{2\pi q}{e})L_k)}}{\int D\phi e^{-S_1}}, \quad (5.7)$$

où l'intégrale est effectuée sur toutes les configurations possibles des champs du modèle effectif et S_1 est donné par l'équation (4.1).

Lorsque T devient très grand ($T \rightarrow \infty$), le dénominateur de l'équation 5.7, qui est une amplitude de probabilité, sera dominé par la contribution de l'énergie de l'état fondamental E_0 du modèle effectif. Il sera donc égal à $e^{-E_0 N_\tau}$, où N_τ est la dimension du réseau dans la direction du temps Euclidien. Le numérateur donnera la même contribution ; cependant, l'énergie de l'état fondamental dans ce cas est modifiée en ajoutant à l'énergie de l'état fondamental sans charges externes E_0 un terme supplémentaire dû à l'énergie potentielle $\Delta(L)$ des charges externes séparées par la distance L . Ce terme représente aussi la variation d'énergie de l'état fondamental du modèle effectif en incluant la paire de quarks externes. L'équation 5.7 devient alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W_{(L,T)} = \frac{\exp[-E_0 N_\tau - \Delta(L) \times T]}{\exp[-E_0 N_\tau]}. \quad (5.8)$$

De cette équation 5.8, on peut tirer l'expression de $\Delta(L)$:

$$\Delta(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} - \left(\frac{1}{T} \right) \ln W_{(L,T)}. \quad (5.9)$$

Cette équation 5.9 représente la prescription de Wilson pour déterminer l'énergie potentielle de la paire de charges externes en fonction de leur séparation L .

Dans le cas où cette énergie potentielle augmente linéairement avec la séparation L

$$\Delta(L) = KL, \quad (5.10)$$

où K est une constante, on dit qu'on est en présence de *confinement linéaire*. Par conséquent, la boucle de Wilson décroît exponentiellement avec l'aire ($L \times T$)

$$W_{(L,T)} \propto e^{-K LT}, \quad (5.11)$$

et on dit que la boucle de Wilson a une *loi d'aire*.

En ce qui concerne notre modèle effectif et dans la phase de Higgs de symétrie brisée, nous prévoyons que les boucles fermées de longueurs finies contribuent seulement au périmètre de la boucle de Wilson. Celle-ci se comporte alors

$$W_{(L,T)} \propto e^{-C(L+T)}, \quad (5.12)$$

où C est une constante. On dit que la boucle de Wilson a une *loi périmètre*. Par conséquent, l'énergie potentielle aura une dépendance de la forme

$$\Delta(L) = \frac{CL}{T} + C, \quad (5.13)$$

qui, lorsque $T \rightarrow \infty$, devient une constante indépendante de L indiquant le signal de non confinement. Dans ce cas, les charges externes sont écrantées. Cependant, dans la nouvelle phase, les boucles infinies peuvent donner un comportement de la boucle de Wilson qui n'est pas périmètre.

De façon générale, en considérant les lois périmètre et d'aire en même temps, alors la forme générale pour la boucle de Wilson est

$$W_{(L,T)} \propto e^{-C(L+T)-KLT}, \quad (5.14)$$

et l'énergie potentielle aura la dépendance

$$\Delta(L) = \frac{CL}{T} + C + KL. \quad (5.15)$$

D'autre part, on démontre [8] [50] que l'énergie potentielle est une fonction périodique de la charge externe q de la forme

$$\Delta(L) \propto F(L) \sin^2((2\pi q/e)/2), \quad (5.16)$$

où $F(L)$ est la dépendance en L de $\Delta(L)$.

Nous verrons plus loin, que nos données seront bien ajustées suivant la forme de la première harmonique sphérique qui correspond exactement à cette forme de l'équation 5.16.

La loi périmètre (équation 5.13) impliquera donc

$$\Delta(L) = C' \cdot \sin^2((2\pi q/e)/2) \cdot \frac{L + T}{T}, \quad (5.17)$$

alors que la loi d'aire (équation 5.10) impliquera

$$\Delta(L) = K' \cdot \sin^2((2\pi q/e)/2) \cdot \frac{L \times T}{T}, \quad (5.18)$$

où C' et K' sont des constantes.

5.3.4.2 Détail des simulations et résultats

Après une revue sur la définition de la boucle de Wilson et de son comportement dans le cas de confinement (loi des aires) et dans le cas de non confinement (loi périmètre), revenons aux simulations numériques de notre modèle effectif sur le réseau tridimensionnel. À présent, notre objectif est de déterminer le comportement de la boucle de Wilson en présence de boucles fermées finies et infinies et de chercher l'existence possible d'un confinement dans la nouvelle phase caractérisée par ces boucles fermées infinies.

Nous commençons, d'abord, par calculer la valeur moyenne du nombre d'enlacement total de l'opérateur boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ avec toutes les boucles de vortex fermées présentes dans l'échantillon de $N = 10000$ configurations, en fonction de la masse des vortex μ .

Pour ce faire, nous avons considéré dans un premier temps, le réseau de dimensions 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Pour une valeur donnée de μ , nous avons varié la taille spatiale L de la boucle de Wilson de 20 à 60 avec un pas de 2 et la taille temporelle T de 80 à 98 avec un pas de 2 ; pour chaque valeur de T , nous avons lancé une simulation. Au total donc, nous avons lancé 10 simulations et effectué 210 calculs, pour chaque valeur de μ .

Par la suite, nous avons augmenté la dimension du réseau à $100^2 \times 300$ avec toujours la considération des conditions périodiques aux frontières. Pour une valeur de μ donnée, nous avons varié L de 20 à 60 avec un pas de 2 et T de 80 à 298 avec un pas de 10 ; pour chaque valeur de T , nous avons lancé une simulation. Au total,

nous avons lancé 13 simulations et effectué 273 calculs, pour chaque valeur de μ , dans ce cas-ci.

De plus, dans une configuration de spins donnée, nous avons déplacé la boucle de Wilson de taille (L, T) à travers différentes positions du réseau et enregistré le nombre d'enlacement correspondant pour chaque position de la boucle de Wilson.

Sur les figures 5.14, 5.15, 5.16 et 5.17 sont illustrées les distributions du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson en présence des boucles de vortex fermées obtenues à partir de l'échantillon de $N = 10000$ configurations pour $\mu = 0.13$ et $(L, T) = ((20, 80); (40, 80))$ (figure 5.14); pour $\mu = 0.15; 0.21$ et $(L, T) = (20, 80)$ (figure 5.15); pour $\mu = 0.3; 0.6$ et $(L, T) = (20, 80)$ (figure 5.16) et pour $\mu = 0.13; 0.3$ avec $(L, T) = (40, 150)$ (figure 5.17). Ces résultats sont extraits des simulations réalisées sur le réseau de dimensions 100^3 sauf pour la figure 5.17 où le réseau de dimensions $100^2 \times 300$ a été utilisé. Les conditions périodiques aux frontières ont été utilisées.

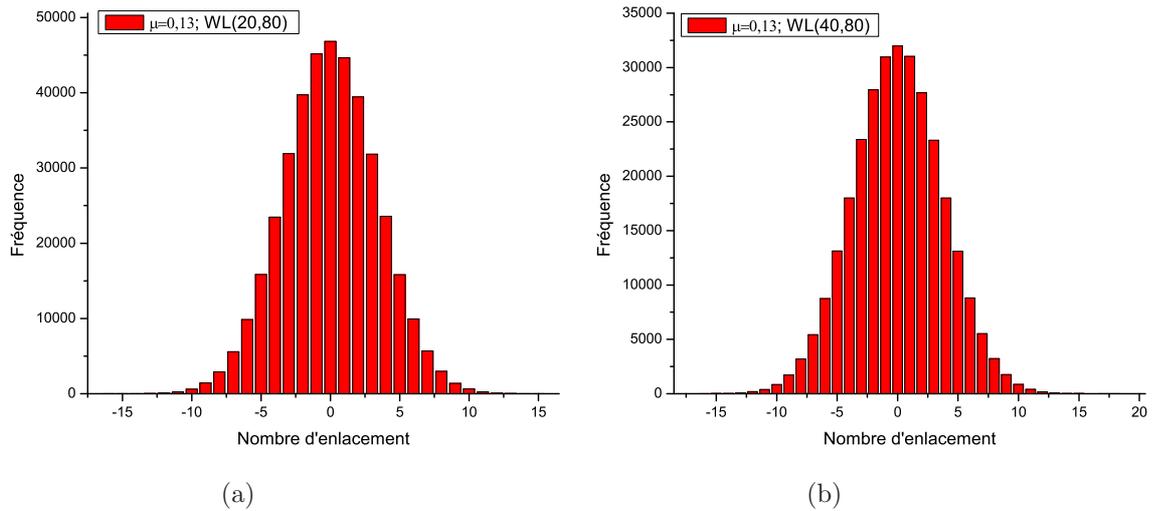
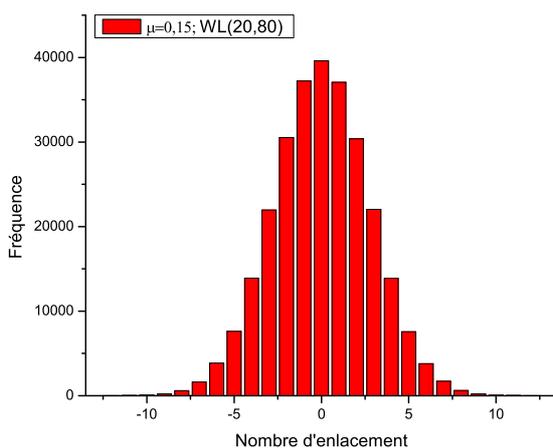
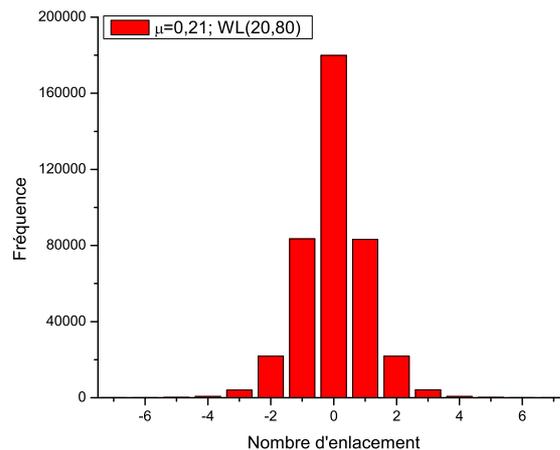


Figure 5.14 – Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille (L, T) avec les boucles de vortex pour $\mu = 0.13$. (a) : $(L, T) = (20, 80)$. (b) : $(L, T) = (40, 80)$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3 .

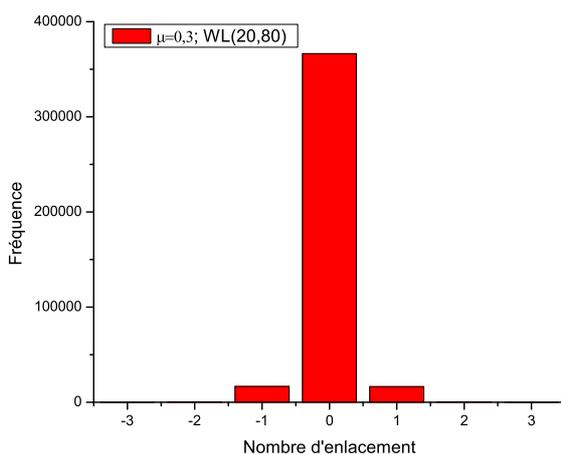


(a)

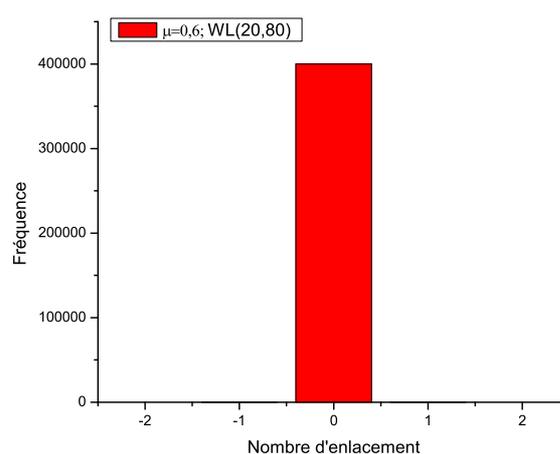


(b)

Figure 5.15 – Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (20, 80)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.15$. (b) : $\mu = 0.21$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3 .



(a)



(b)

Figure 5.16 – Histogrammes du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (20, 80)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.3$. (b) : $\mu = 0.6$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3 .

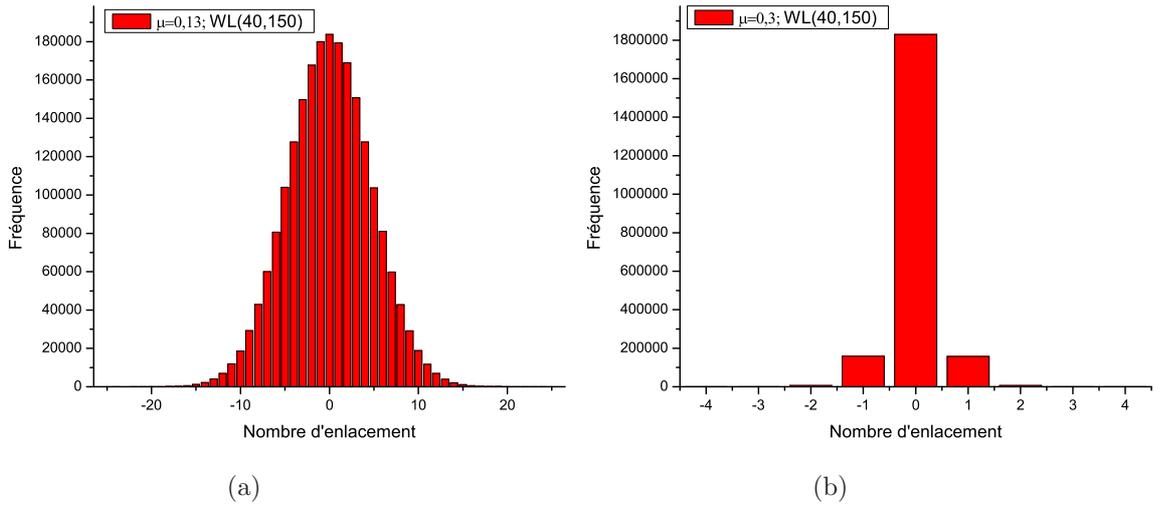


Figure 5.17 – Histogrammes du nombre d’enlacement total de la boucle de Wilson de taille $(L, T) = (40, 150)$ avec les boucles de vortex. (a) : $\mu = 0.13$. (b) : $\mu = 0.3$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$.

D’après ces figures, nous constatons que les distributions du nombre d’enlacement ont la forme d’une gaussienne centrée autour de $L_k = 0$. Pour une valeur donnée de μ , l’étendue de cette gaussienne augmente lorsque la taille de la boucle de Wilson augmente (voir les figures 5.14(a), 5.14(b) et 5.17(a) pour $\mu = 0.13$). Lorsque μ augmente, l’étendue et donc la largeur des distributions diminue. Cette diminution est drastique lorsque $\mu > 0.15$. À $\mu = 0.3$, le nombre d’enlacement prend essentiellement les valeurs $0, \pm 1$ (figures 5.16(a) et 5.17(b)) et à $\mu = 0.6$, il prend essentiellement la valeur zéro (figure 5.16(b)). De plus, comme les distributions du nombre d’enlacement (L_k) sont symétriques autour de $L_k = 0$ seule la partie réelle de la boucle de Wilson (équation 5.4) contribue dans la moyenne des équations 5.5 à 5.7. La valeur moyenne de la boucle de Wilson (équation 5.7) se réduit alors à

$$W_{(L,T)} = \left\langle \cos \left(\frac{2\pi q}{e} \cdot L_k \right) \right\rangle = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \cos \left(\frac{2\pi q}{e} \cdot L_k(i, j) \right), \quad (5.19)$$

où la première sommation dans l’équation 5.19 est sur l’échantillon de N configurations et la deuxième sommation est sur les M différentes positions occupée par la boucle de Wilson dans le réseau dans chaque configuration.

Ou encore, en utilisant une sommation sur les différentes valeurs que prend le

nombre d'enlacement total pour une masse de vortex donnée représentées par les histogrammes des figures précédentes (5.14, 5.15, 5.16 et 5.17), la valeur moyenne de la boucle de Wilson est égale à

$$W_{(L,T)} = \left(\frac{1}{\sum_i^{L_k \text{ max}} N(i)} \right) \sum_{i=L_k \text{ min}}^{L_k \text{ max}} N(i) \cos \left(\frac{2\pi q}{e} \times L_k(i) \right), \quad (5.20)$$

où $N(i)$ est le nombre de configurations ayant un nombre d'enlacement $L_k(i)$.

Sur la figure 5.18 est représenté le comportement de la variance σ^2 du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson avec les boucles de vortex $W_{(L,T)}$ en fonction de la masse des vortex μ pour $0 \leq \mu \leq 1.5$ et pour deux tailles de la boucle de Wilson $(L, T) = (40, 80); (20, 80)$. Le réseau utilisé est de dimensions 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Pour une taille fixe de la boucle de Wilson, nous constatons que la variance diminue quand μ augmente pour décroître rapidement vers zéro à partir de la valeur de $\mu = 0.152$. De plus, pour μ fixe, la variance augmente lorsque la taille de la boucle de Wilson augmente. Ce résultat est évident car le nombre d'enlacement augmente lorsque la taille de la boucle de Wilson augmente.

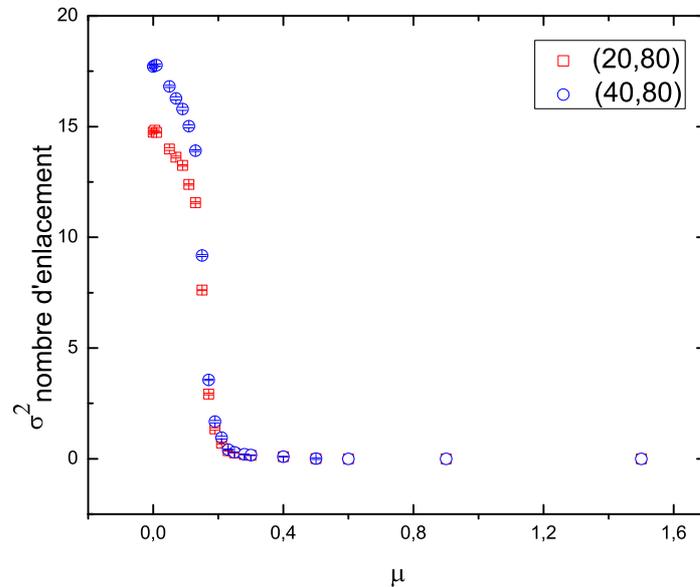


Figure 5.18 – Variance du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de μ . $(L, T) = (40, 80); (20, 80)$. Le réseau utilisé est 100^3 .

La dépendance de la variance σ^2 du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson de taille (L, T) sur le périmètre $(L + T)$ est représentée sur la figure 5.19 pour $\mu = 0.13; 0.2; 0.3$ et 0.6 . Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$. Les conditions périodiques aux frontières sur le réseau ont été utilisées. Sur cette figure, les points solides sont nos résultats de nos simulations et les courbes en pointillés sont les ajustements linéaires réalisés sur ces données. Nous constatons que pour la masse de vortex variant entre 0 et 0.3 ($0 \leq \mu \leq 0.3$) la variance augmente linéairement lorsque le périmètre augmente. De plus, cette augmentation est beaucoup plus rapide lorsque $\mu < 0.152$. Pour $\mu > 0.3$ la variance s'annule. On en conclut que la variance suit une loi périmètre sur toute la région de variation de la masse de vortex ($0 \leq \mu \leq 0.3$). De plus, il y a une croissance linéaire accélérée dans la nouvelle phase pour $\mu < 0.152$.

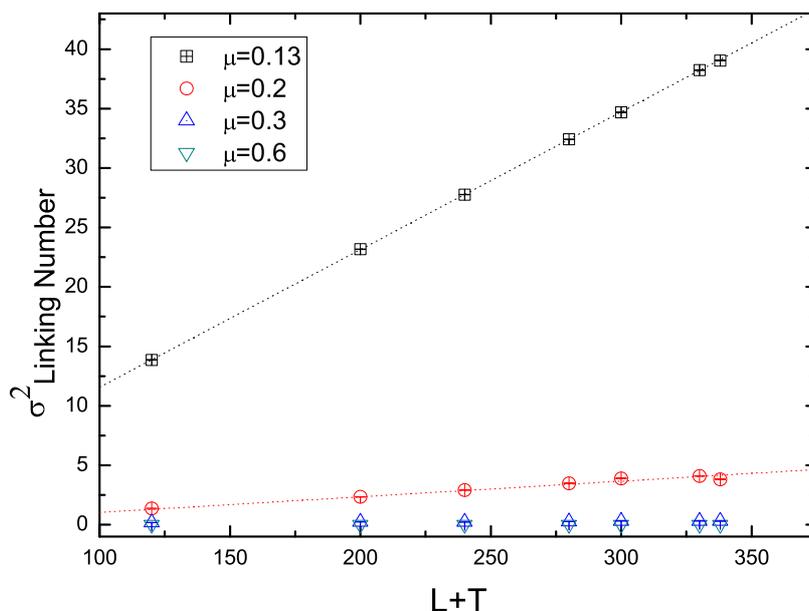


Figure 5.19 – Variance du nombre d'enlacement total de la boucle de Wilson (L, T) avec les boucles de vortex en fonction du périmètre $(L + T)$ pour $\mu = 0.13; 0.2; 0.3; 0.6$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$.

D'autre part, et sachant que la valeur moyenne du nombre d'enlacement de la boucle de Wilson est zéro, la variance que nous venons d'analyser n'est autre que

la valeur moyenne du carré du nombre d'enlacement de la boucle de Wilson

$$\sigma^2 = \langle L_k^2 \rangle. \quad (5.21)$$

Pour des valeurs de charges externes très petites ($2\pi q/e \ll 1$), le développement au deuxième ordre de la valeur moyenne de la boucle de Wilson (équation 5.19) donne

$$(W_{(L,T)} - 1) \propto \langle L_k^2 \rangle, \quad (5.22)$$

la boucle de Wilson a un comportement similaire au comportement de la variance σ^2 .

Par conséquent, nous venons de trouver une première évidence de la loi périmètre pour la boucle de Wilson et cela même en présence de boucles fermées infinies.

À partir des valeurs de nombre d'enlacement L_k de la boucle de Wilson générées dans $N = 10000$ configurations, et en utilisant l'équation 5.20 nous calculons la valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour différentes valeurs de la charge externe ($0 \leq 2\pi q/e \leq \pi$) et différentes valeurs de la masse des vortex ($0 < \mu < 1.5$).

La dépendance de la valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ est montrée sur les figures 5.20 et 5.21 pour $\mu = 0.152; 0.2; 0.3$ et $\mu = 0; 0.13; 0.14; 0.147; 0.152$, respectivement, pour la taille de la boucle $(L, T) = (20, 80)$ en utilisant le réseau de dimensions 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Sur le domaine de variation de la charge externe considéré, nous remarquons que la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ décroît lorsque $2\pi q/e$ augmente. La valeur maximale de la boucle de Wilson ($W_{(L,T)} = 1$) correspond à une charge externe nulle. Pour $\mu > 0.152$, la décroissance est moins rapide à fur et à mesure que μ augmente mais ne s'annule pas. Pour $\mu \leq 0.152$ la boucle de Wilson décroît et tend vers zéro autour de $2\pi q/e = 0.8$. Cette décroissance est aussi rapide lorsque μ diminue. Comme nous sommes intéressés pour extraire le potentiel à partir des données de la boucle de Wilson, il est évident que celles-ci doivent être non nulles. Par conséquent, pour $\mu \leq 0.152$ seule la région où ($0 \leq 2\pi q/e < 0.8$) peut être exploitée pour la suite de l'analyse.

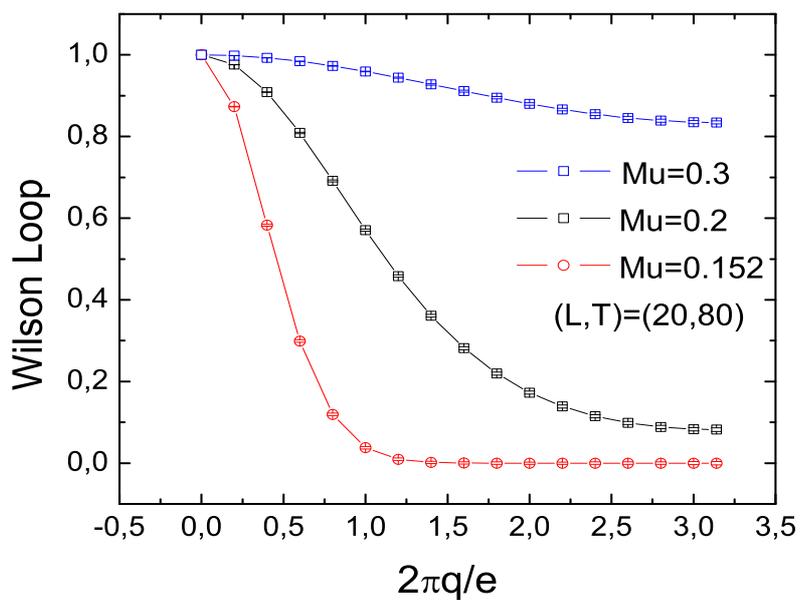


Figure 5.20 – Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.152; 0.2; 0.3$. $(L, T) = (20, 80)$.

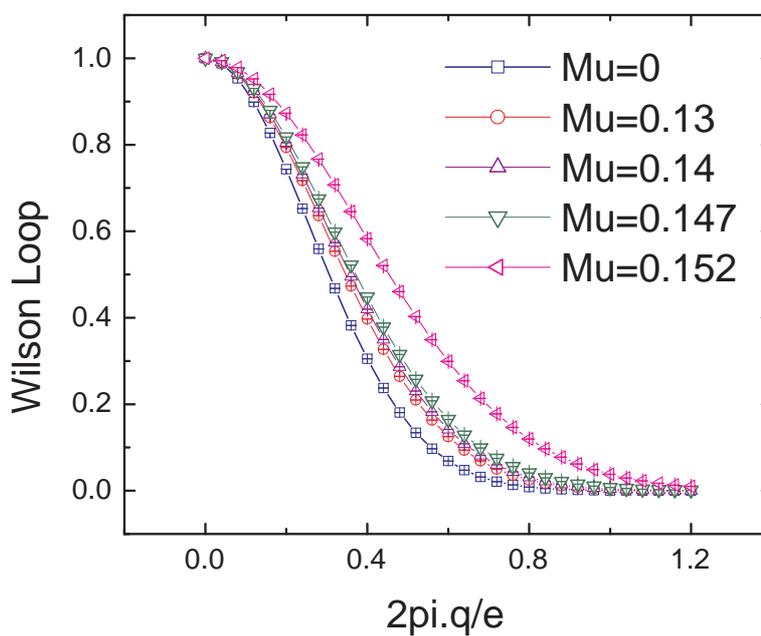


Figure 5.21 – Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0; 0.13; 0.14; 0.147; 0.152$. $(L, T) = (20, 80)$.

Sur les figures 5.22 et 5.23 est représentée la dépendance de la valeur moyenne

de la boucle de Wilson en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour des valeurs de masse de vortex $\mu = 0.2; 0.3$, et $\mu = 0.13$, respectivement. Dans ce cas, nous avons agrandi la dimension du réseau à $100^2 \times 300$ avec application des conditions périodiques aux frontières et fais varier la taille de la boucle de Wilson (L, T) de $(20, 80)$ à $(60, 290)$ comme expliqué précédemment. Nous constatons que la boucle de Wilson décroît lorsque $2\pi q/e$ augmente. Pour μ fixe la boucle de Wilson décroît plus rapidement lorsque la taille (L, T) augmente et tend même vers zéro lorsque T devient très grand pour $\mu = 0.2$. Dans la région $\mu < 0.152$, la boucle de Wilson décroît rapidement vers zéro en fonction de la charge externe lorsque la taille (L, T) augmente. À titre d'exemple, pour $\mu = 0.13$, lorsque $(L, T) = (20, 80)$ la boucle de Wilson devient nulle autour de $2\pi q/e = 0.8$ alors qu'elle devient nulle autour de $2\pi q/e = 0.45$ pour $(L, T) = (60, 290)$. En conséquence, le domaine de variation de la charge externe qui sera utilisé pour la suite de l'analyse dépend de la taille de la boucle de Wilson considérée.

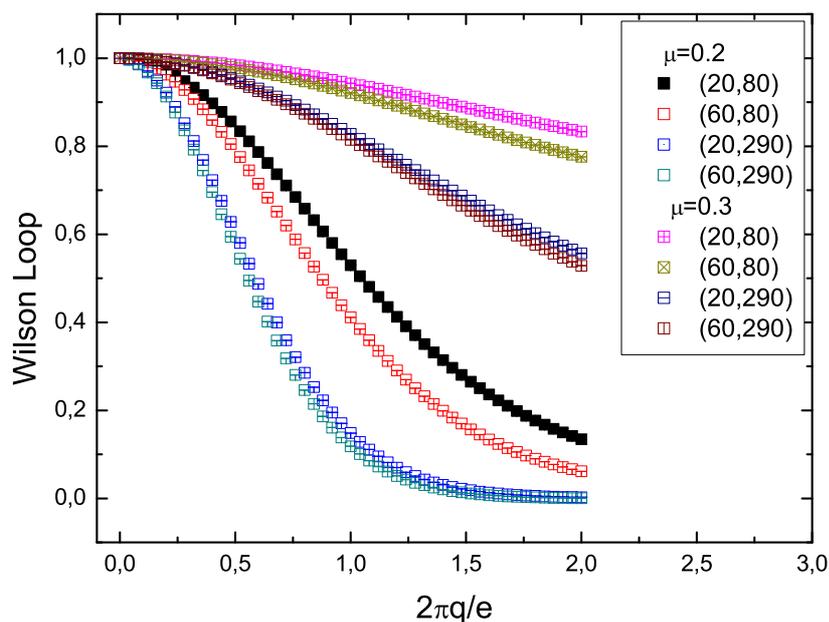


Figure 5.22 – Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.2; 0.3$. Les tailles (L, T) sont indiquées sur la figure.

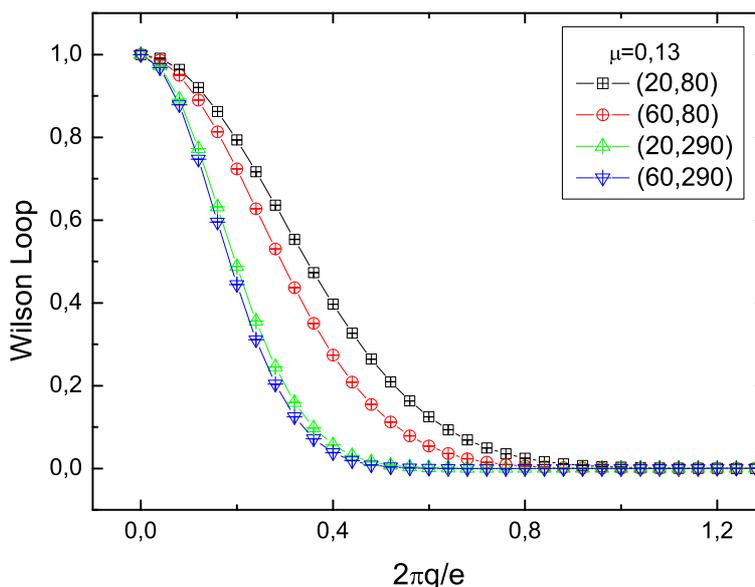


Figure 5.23 – Boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.13$. Les tailles (L, T) sont indiquées sur la figure.

Sur les figures 5.24 et 5.25 est représentée la dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ sur le périmètre $(L+T)$ pour des masses de vortex $\mu = 0.2$ et $\mu = 0.13$, respectivement, et pour la valeur de la charge externe $2\pi q/e = 0.42$ dans la première figure et $2\pi q/e = 0.4$ dans la deuxième figure. Avec ce choix de la valeur de la charge externe, les données correspondantes de la boucle de Wilson sont non nulles. Le réseau utilisé est de dimension $100^2 \times 300$ avec application des conditions périodiques aux frontières. Nos données sont représentées en croix bleu et le meilleur ajustement linéaire obtenu dans chaque figure est représenté en une droite en pointillés en rouge. Son équation est indiquée aussi avec les erreurs standards sur les deux paramètres ajustés à savoir : la pente de la droite et l'ordonnée à l'origine. D'après ces figures, la boucle de Wilson croît linéairement en fonction de son périmètre en présence de boucles fermées de longueurs finies (figure 5.24) et aussi en présence de boucles fermées infinies (figure 5.25). D'après les équations obtenues des ajustements linéaires effectués, la pente des droites qui correspond au paramètre C dans l'équation 5.14 est non nulle alors que l'ordonnée à l'origine qui correspond au paramètre K dans l'équation 5.14 est nulle, suivant la résolution permise par notre réseau. Nous avons étudié le même comportement de la boucle de Wilson pour différentes valeurs de la masse des vortex μ et avons tiré les mêmes

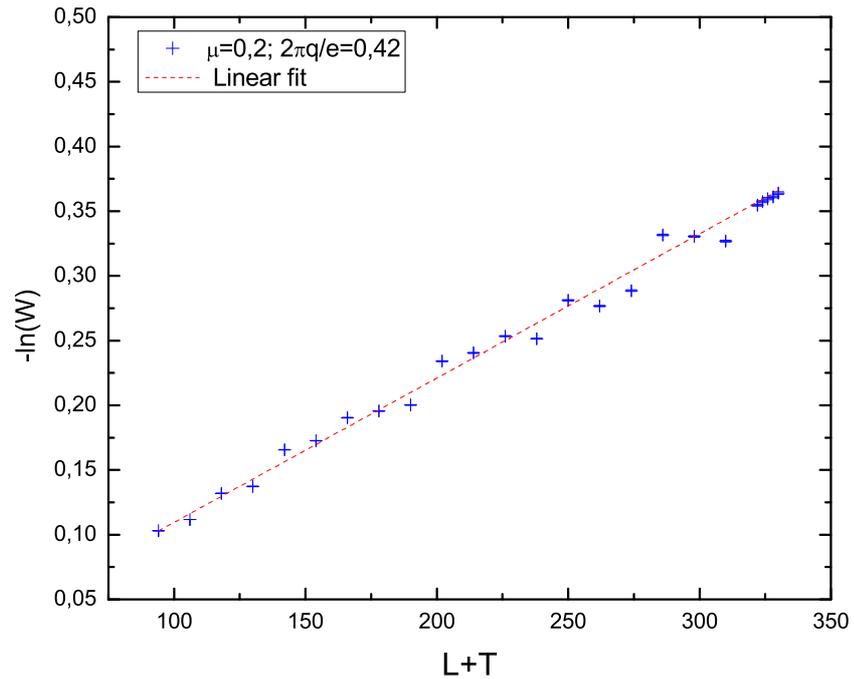


Figure 5.24 – Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson en fonction du périmètre ($L+T$) (en croix bleu) pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Ajustement linéaire (en courbe rouge) est : $-\ln(W) = -0.002(3E - 3) + 0,00111(2E - 5) \times (L+T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standard. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$.

conclusions. On en déduit une autre évidence que la boucle de Wilson suit une loi périmètre (équation 5.20) sur tout le domaine de variation de la masse des vortex et cela même en présence de boucles infinies et qu'il n'y a pas de signe de confinement. Nous pouvons remarquer aussi sur ces figures qu'il y a plus de fluctuations sur nos données pour $\mu = 0.2$ par rapport à celles pour $\mu = 0.13$. Nous pensons que cela est dû au fait que les fluctuations à atteindre l'équilibre augmentent lorsque μ augmente.

La valeur du paramètre C obtenue dans l'analyse de chaque graphique de la dépendance logarithmique de la boucle de Wilson en fonction de son périmètre est représentée sur la figure 5.26 en fonction de la masse des vortex μ pour la valeur de la charge externe $2\pi q/e = 0.4$. Le paramètre C décroît lorsque μ augmente pour s'annuler au delà de $\mu = 0.3$. La décroissance change de pente autour de $\mu = 0.15$, caractérisée par la disparition de boucles infinies.

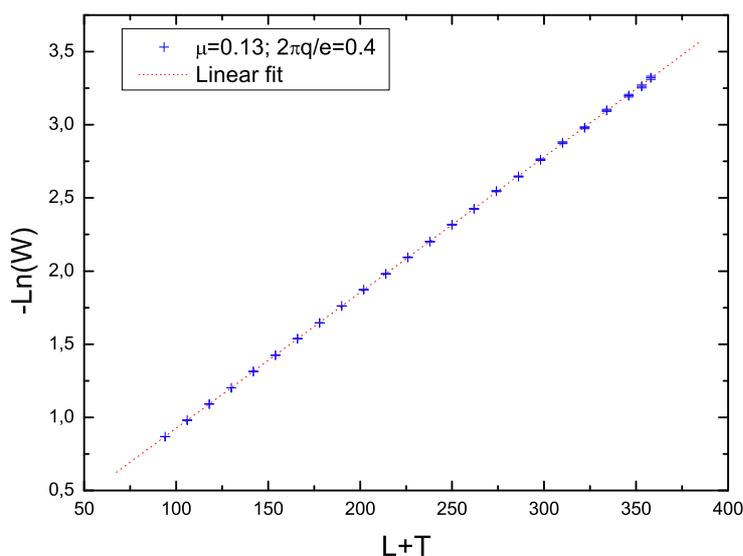


Figure 5.25 – Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction du périmètre $(L + T)$ (en croix bleu) pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Ajustement linéaire (en courbe rouge) : $-\ln(W) = -0,0035(5E - 4) + 0,009280(4E - 6).(L + T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$.

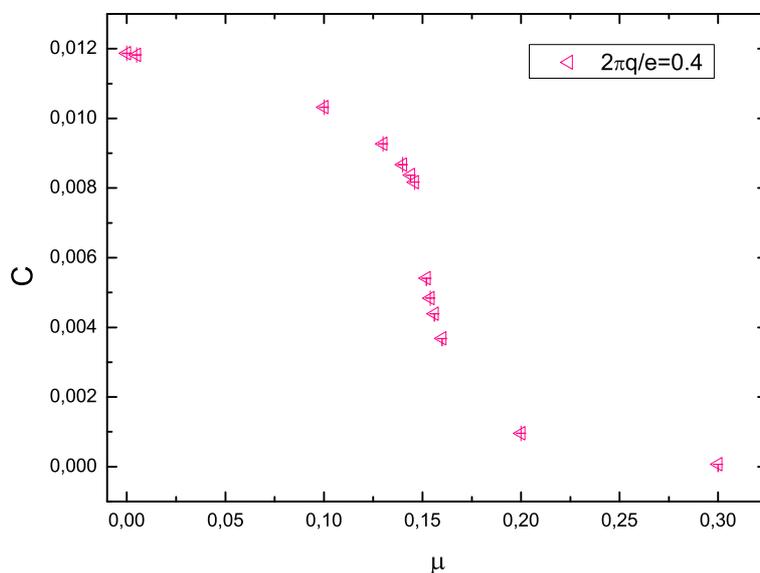


Figure 5.26 – Paramètre C en fonction de la masse des vortex μ pour $2\pi q/e = 0.4$. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$.

D'autre part, en utilisant les données de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction

de sa longueur spatiale L variant de 14 à 60 pour une taille Euclidienne fixe T ($80 \leq T \leq 298$) de la boucle de Wilson et pour une masse de vortex μ , et en utilisant l'équation 5.9, nous pouvons étudier la variation de l'énergie potentielle Δ en fonction de L . Sur les figures 5.27 et 5.28, nous illustrons la dépendance de l'énergie potentielle Δ en fonction de la dimension spatiale de la boucle de Wilson pour une dimension temporelle Euclidienne fixe de la boucle de Wilson ($T = 100$), pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$ (la première figure), et pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$ (la deuxième figure). Nos données en cercles bleu sont bien ajustées par des droites représentées en rouge. Théoriquement, et selon l'équation 5.15, cette dépendance est une droite qui croît linéairement en fonction de L . De l'équation 5.15, la pente de la courbe est égale donc à

$$\frac{d\Delta(L)}{dL} = \frac{C}{T} + K, \quad (5.23)$$

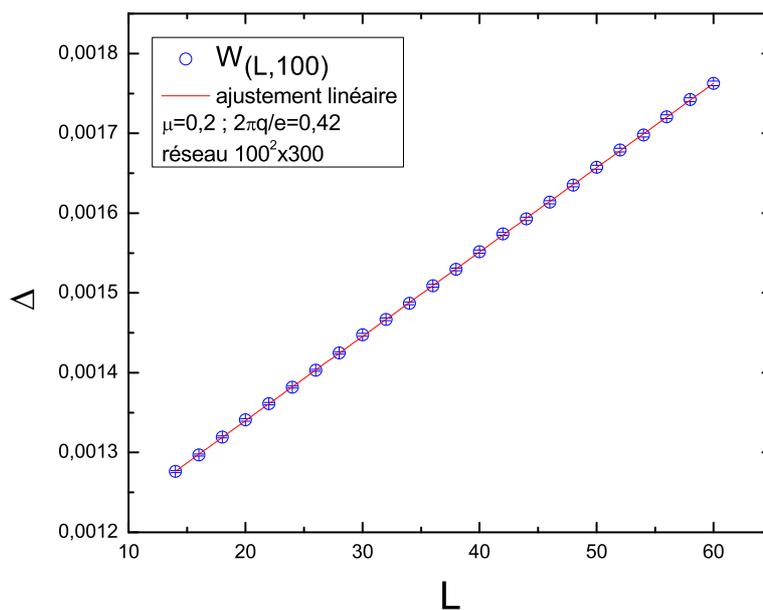


Figure 5.27 – Énergie potentielle en fonction de la taille spatiale de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour $T = 100$, $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$.

où le premier terme (C/T) est dû à la loi périmètre de la boucle de Wilson et le deuxième terme (K) est dû à la loi d'aire. La prochaine étape donc consiste à étudier la variation de l'énergie potentielle par rapport à L ($d\Delta/dL$) en fonction de

T de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour différentes masses de vortex et de déterminer quelle est la contribution appropriée de la boucle de Wilson.

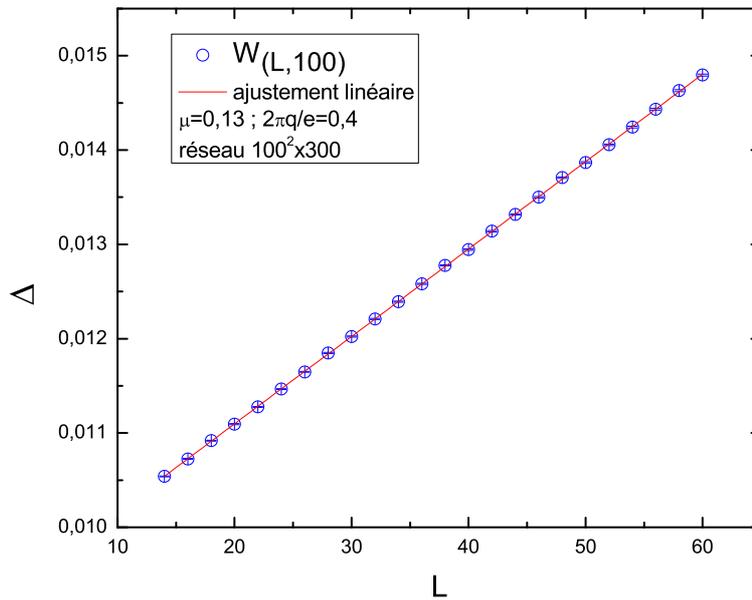


Figure 5.28 – Énergie potentielle en fonction de la taille spatiale de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ pour $T = 100$, $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Le réseau utilisé est de dimensions $100^2 \times 300$.

Sur les figures 5.29 et 5.30, nous représentons la variation de l'énergie potentielle par rapport à L ($d\Delta/dL$) en fonction de la dimension Euclidienne de la boucle de Wilson (T) pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$ (la première figure), et pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$ (la deuxième figure). Ces données sont extraites des ajustements linéaires effectués sur les courbes Δ en fonction de L pour T fixe (tel que illustré sur les figures 5.27 et 5.28). Nous avons varié T de 80 à 298. Nous avons utilisé le réseau de dimension $100^2 \times 300$ et appliqué les conditions périodiques aux frontières. Nous avons ajusté nos données en utilisant la forme 5.23 où C et K sont les paramètres à déterminer par l'ajustement. Les équations obtenues dans les deux cas indiquent que les valeurs du paramètre C sont non nulles pour $\mu = 0.2$ et $\mu = 0.13$ et que les valeurs du paramètre K sont nulles dans ces deux cas, d'après la résolution permise par notre réseau. Voici donc une autre évidence que la boucle de Wilson contribue à la loi périmètre même en présence de boucles infinies et qu'il n'y a pas de signe de confinement.

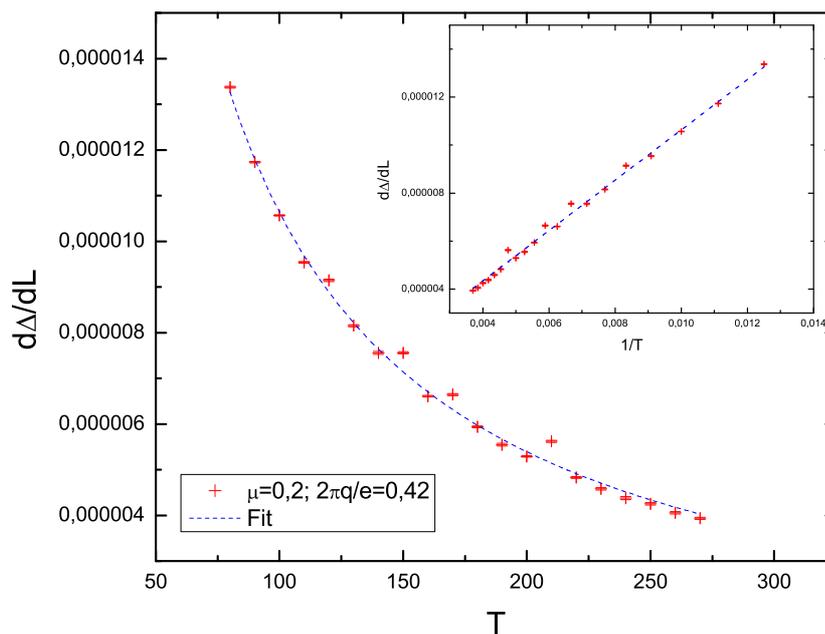


Figure 5.29 – Variation d'énergie $d\Delta/dL$ en fonction de la dimension Euclidienne T de $W_{(L,T)}$ pour $\mu = 0.2$ et $2\pi q/e = 0.42$. Ajustement (en courbe bleu) : $d\Delta/dL = 1.44E - 7(1.21E - 7) + 0.00105(0.00002)/T$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$.

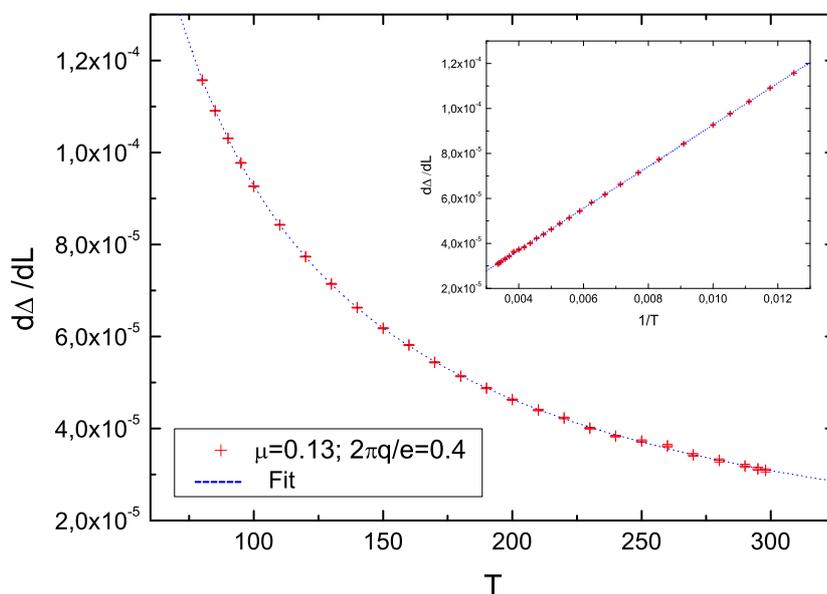


Figure 5.30 – Variation d'énergie $d\Delta/dL$ en fonction de la dimension Euclidienne T de $W_{(L,T)}$ pour $\mu = 0.13$ et $2\pi q/e = 0.4$. Ajustement (en courbe bleu) : $d\Delta/dL = 0.07E - 8(8E - 8) + 0,009270(9E - 6).(1/T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards. Le réseau utilisé est $100^2 \times 300$.

D'autre part, sur la figure 5.31, nous représentons la dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de l'aire (LT) pour la masse de vortex $\mu = 0.13$ et pour la charge externe $2\pi q/e = 0.13\pi$ en utilisant le réseau 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Nous avons varié L de 20 à 50 avec un pas de 2 et pris T égale à $(100 - L)$. L'ajustement linéaire (la courbe en pointillés) effectué sur nos données (en carrés) indiquent que la pente de la droite est nulle c'est à dire que $\ln(W)$ est une constante indépendante de l'aire de la boucle de Wilson LT et donc que le signe du confinement n'apparaît pas en présence de boucles infinies.

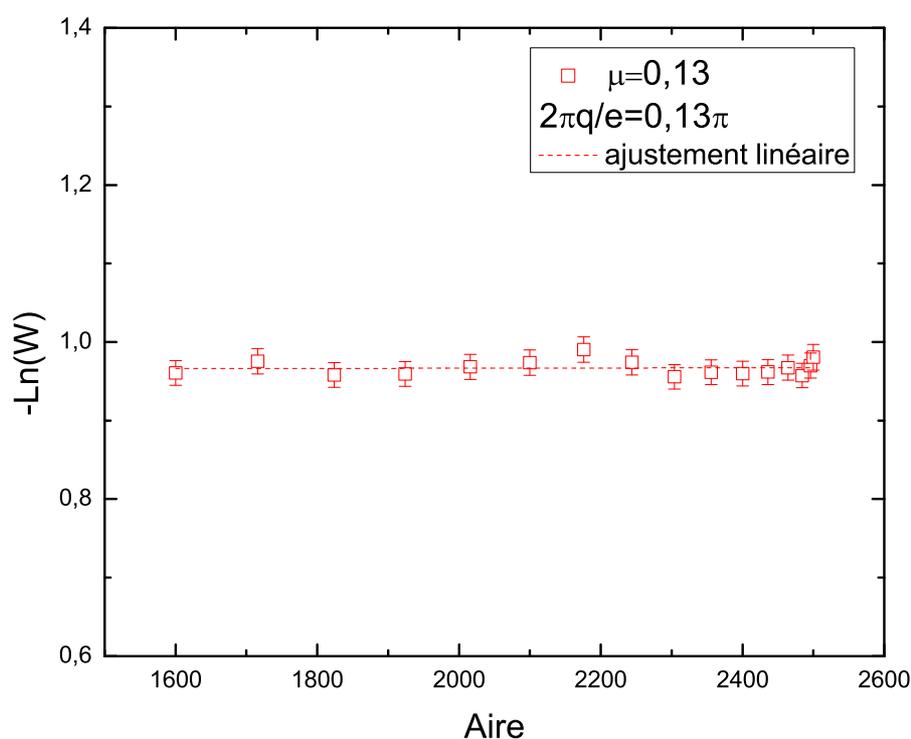


Figure 5.31 – Dépendance logarithmique de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de l'aire (LT). Le réseau utilisé est 100^3 . Le meilleur ajustement linéaire obtenu est : $-\ln(W) = 0.96(0.02) + 1E - 6(8E - 6).(LT)$.

Par ailleurs, en utilisant la variation de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.2$ (figure 5.20), pour un T fixe et pour une charge $2\pi q/e$ fixe, nous ajustons nos données : énergie potentielle Δ en fonction de L , avec L variant de 20 à 60 avec un pas de 2, par des droites (analyse similaire à la figure 5.27). Nous faisons varier $2\pi q/e$ de 0 à 2π avec un pas de 0.2 et répétons

la procédure précédente. Par la suite, nous faisons varier T de 80 à 98 avec un pas de 2 et répétons toute la procédure précédente. La figure 5.32 regroupe nos résultats : variation d'énergie par rapport à L ($d\Delta/dL$) en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour la valeur de la masse des vortex $\mu = 0.2$. Nous avons représenté seulement le cas où $T = 80, 90$ et 98 . Cette analyse a été effectuée sur le réseau 100^3 avec application des conditions périodiques aux frontières. Nous remarquons que $(d\Delta/dL)$ est une fonction périodique en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ de période 2π . Un meilleur ajustement peut être obtenu en utilisant la forme de la première harmonique sphérique $C(T) \sin^2((2\pi q/e)/2)$ où $C(T)$ est le paramètre qu'il faut déterminer par l'ajustement.

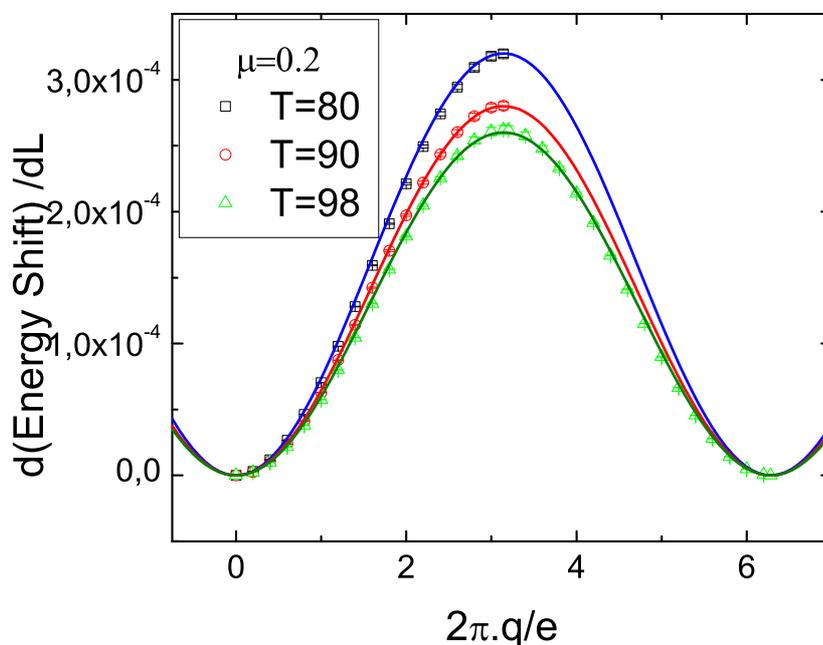


Figure 5.32 – $d\Delta/dL$ en fonction de la charge externe pour différentes valeurs de T taille temporelle de la boucle de Wilson. Les points sont nos données et les courbes solides sont les ajustements de la forme $C(T) \times \sin^2((2\pi q/e)/2)$.

Le paramètre ajusté $C(T)$ en fonction de l'inverse T ($80 \leq T \leq 98$, avec un pas de 2) est représenté sur la figure 5.33. Nous remarquons que nos données sont bien ajustées linéairement en fonction de $1/T$, autrement dit, que $C(T)$ a la forme de $(a + b \cdot (\frac{1}{T}))$, où la constante a est nulle, suivant la résolution permise par notre réseau, alors que la constante b est non nulle. Nous concluons que $(d\Delta/dL)$ se com-

porte suivant la forme $(b \cdot (\frac{1}{T}) \times \sin^2((2\pi q/e)/2))$ et donc que l'énergie potentielle peut être bien décrite avec la forme de l'équation 5.17, c'est-à-dire que la boucle de Wilson contribue à la loi périmètre seulement, en présence de boucles de longueurs finies qui caractérisent la phase de Higgs de notre modèle étudié.

Enfin, notons que cette analyse n'a pu être effectuée que pour les valeurs de la masse des vortex $\mu < 0.152$ où les données de $(d\Delta/dL)$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ reproduisent bien la forme de l'harmonique sphérique et non partiellement.

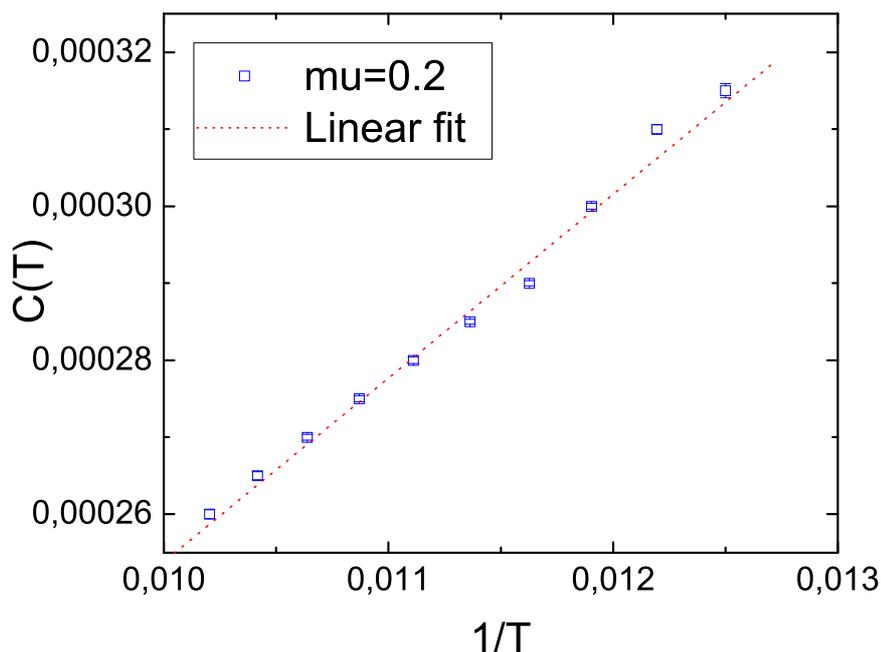


Figure 5.33 – $C(T)$ en fonction de $(1/T)$. La courbe en pointillées est l'ajustement linéaire de nos données en points solides. Équation de l'ajustement : $-C(T) = 2E - 5(1E - 5) + 0.023(0.001) \cdot (1/T)$. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs standards.

5.3.5 Boucle de Polyakov

5.3.5.1 Définition

En s'intéressant à étudier la théorie des champs sur le réseau à température finie [5] [51] [52], et rappelons-le que la température représente l'inverse de la dimension temporelle du réseau, dans ce cas, ce dernier a une extension finie dans la direction du temps Euclidien et les variables liens vérifient les conditions périodiques aux

frontières suivantes :

$$U_\mu(\vec{n}, \hat{\beta}) = U_\mu(\vec{n}, 0), \quad (5.24)$$

où β est l'inverse de la température mesurée dans le système d'unité du réseau et \vec{n} désigne une position spatiale d'un vertex dans le réseau. $U_\mu(\vec{n}, \hat{\beta})$ désigne le lien qui relie les positions (\vec{n}, β) et $(\vec{n}, \beta + \mu)$ dans le réseau.

Contrairement à ce qu'on avait défini en théorie des champs sur le réseau à la température zéro, l'étude de la valeur moyenne de la boucle de Wilson prise sur l'état fondamental du système avec la condition où le temps Euclidien est assez grand (équation 5.8) n'a plus le même sens en théorie des champs à température finie et par conséquent, la boucle de Wilson ne représente plus le paramètre d'ordre du modèle étudié à température finie. Toutefois, et à cause de la structure périodique du réseau, il est possible de construire une autre quantité invariante de jauge en prenant la trace du produit des variables liens le long de boucles topologiques non-triviales fermées dans la direction du temps Euclidien à une position spatiale, \vec{n} , fixe dans le réseau

$$P(\vec{n}) = \text{Tr} \prod_{n_4=1}^{\hat{\beta}} U_4(\vec{n}, n_4). \quad (5.25)$$

Cette quantité ($P(\vec{n})$) est appelée *la boucle de Polyakov* et représentée sur la figure 5.34.

Dans ce qui suit, nous montrons, qualitativement en suivant le raisonnement de la référence [5], que la valeur moyenne de la boucle de Polyakov a une interprétation physique simple en considérant la théorie de jauge $U(1)$ en absence de fermions et en utilisant la formulation dans un espace Euclidien continu.

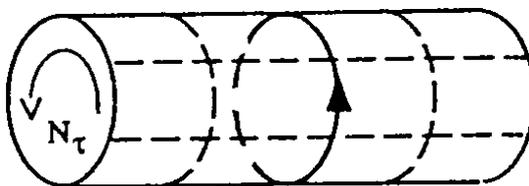


Figure 5.34 – Boucle de Polyakov orientée le long de la direction du temps euclidien. La figure est tirée de la référence [5].

Considérons la fonction de partition d'un système constitué d'un quark infini-

ment lourd couplé à un potentiel de jauge

$$Z = \sum_s \langle s | e^{-\beta H} | s \rangle. \quad (5.26)$$

Dans l'équation 5.26, la somme sur (s) s'étend sur tous les états de la forme $\Psi^\dagger(\vec{x}, 0) | s' \rangle$, où $\Psi^\dagger(\vec{x}, 0)$ crée un quark localisé à la position \vec{x} au temps $x_4 = 0$ en agissant sur les états $| s' \rangle$ qui ne contiennent pas le quark lourd ; H désigne l'hamiltonien du système et β représente l'inverse de la température. Donc l'équation 5.26 s'écrit

$$Z = N \sum_{s'} \langle s' | \Psi(\vec{x}, 0) | e^{-\beta H} | \Psi^\dagger(\vec{x}, 0) | s' \rangle. \quad (5.27)$$

qui est égale à

$$Z = N \sum_{s'} \langle s' | e^{-\beta H} \Psi(\vec{x}, \beta) \Psi^\dagger(\vec{x}, 0) | s' \rangle \quad (5.28)$$

où on a utilisé le fait que $e^{-\beta H}$ génère des translations de β dans la direction du temps Euclidien et N est un facteur de normalisation. Hors, dans la limite statique la dépendance de $\Psi(\vec{x}, \beta)$ sur β est déterminée par l'équation

$$(\partial_\tau - ie A_4(\vec{x}, \tau)) \Psi(\vec{x}, 0) = 0. \quad (5.29)$$

Ainsi

$$\Psi(\vec{x}, \beta) = e^{ie \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau)} \bar{\Psi}(\vec{x}, 0). \quad (5.30)$$

En insérant ce résultat dans l'équation 5.28, on trouve une expression qui contient l'opérateur $\Psi(\vec{x}, 0) \Psi^\dagger(\vec{x}, 0)$. Cet opérateur décrit la création et la destruction d'un quark infiniment lourd au même point de l'espace temps. Ainsi, l'équation 5.28 s'écrit

$$Z = Tr (e^{-\beta H} P(\vec{x})), \quad (5.31)$$

où

$$P(\vec{x}) = e^{ie \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau)} \quad (5.32)$$

est la version continue de la boucle de Polyakov (équation 5.25) dans le modèle abélien $U(1)$. La représentation intégrale de chemins de l'équation 5.31 est donc

égale à

$$Z = \int DA P(\vec{x}) e^{-S_G^{(\beta)}[A]}, \quad (5.33)$$

où $S_G[A]$ est l'action à température finie du champ de jauge, et où l'intégrale est effectuée sur tous les champs $A_\mu(x)$ qui satisfont les conditions périodiques aux frontières. De l'équation 5.33, on déduit que l'énergie libre du système mesurée en présence du quark lourd par rapport à l'énergie libre en absence du quark est égale à

$$e^{-\beta F_q} = \langle P \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{x}} \langle P(\vec{x}) \rangle, \quad (5.34)$$

où

$$\langle P(\vec{x}) \rangle = \frac{\int DA P(\vec{x}) e^{-S_G^{(\beta)}[A]}}{\int DA e^{-S_G^{(\beta)}[A]}}, \quad (5.35)$$

et V étant le volume spatial du réseau.

5.3.5.2 Détail des simulations et résultats

Tout comme la boucle de Wilson, nous nous intéressons, à présent, à calculer numériquement en utilisant les simulations de Monte Carlo la valeur moyenne de la boucle de Polyakov de notre modèle effectif de boucles de vortex fermées. L'action effective est toujours donnée par l'équation 4.1. D'après la définition de la boucle de Polyakov (équation 5.32), celle-ci n'est autre qu'une ligne de Wilson dans la direction temporelle du réseau; donc elle mesure le nombre d'enlacement total (L_k) de la boucle de Polyakov avec toutes les boucles fermées présentes dans une configuration particulière en équilibre thermodynamique multiplié par la charge externe du quark lourd $2\pi q/e$. Une analyse similaire à celle effectuée sur la boucle de Wilson montre que la valeur moyenne de la boucle de Polyakov de taille particulière (N_τ) est égale à

$$\langle P \rangle = \left\langle \cos \left(\frac{2\pi q}{e} \cdot L_k \right) \right\rangle = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \cos \left(\frac{2\pi q}{e} \cdot L_k(i, j) \right), \quad (5.36)$$

où la première sommation dans l'équation 5.36 est sur l'échantillon de $N = 10000$ configurations et la deuxième sommation est sur les M différentes positions occupée par la boucle de Polyakov dans le réseau dans chaque configuration en équilibre

thermodynamique.

Nous avons considéré la dimension spatiale du réseau tridimensionnel de tessellation tétraédrique égale à 100 et varié la dimension temporelle N_τ de 20 à 100 avec un pas de 10. Les conditions périodiques aux frontières ont été appliquées. Nous avons aussi varié la valeur de la masse des vortex μ de 0 à 1.5 et la charge externe du quark lourd $2\pi q/e$ de 0 à π . Ainsi, pour chaque valeur de la paire (N_τ, μ) , nous avons lancé une simulation et calculé la valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge $2\pi q/e$.

Sur la figure 5.35 est représenté la valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge du quark externe $2\pi q/e$ qui varie de 0 à π pour la dimension temporelle du réseau $N_\tau = 20$ et différentes valeurs de la masse des vortex μ mentionnées sur le graphique. À première vue, nous pouvons constater que la boucle de Polyakov a un comportement similaire à celui de la boucle de Wilson (les figures 5.20 à 5.23) : la valeur moyenne de la boucle de Polyakov décroît de la valeur *un* lorsque $2\pi q/e$ croît à partir de la valeur *zéro*. Donc, cette valeur (un) correspond à une charge externe nulle. La décroissance de $\langle P \rangle$ est aussi rapide lorsque μ diminue et tend vers zéro autour de $2\pi q/e = 2.5$ pour des valeurs de $\mu < 0.15$. Pour $\mu > 0.15$, $\langle P \rangle$ décroît mais ne s'annule pas. Donc, nous pouvons conclure que la valeur moyenne de la boucle de Polyakov $\langle P \rangle$ devient nulle dans les domaines $2\pi q/e \geq 2.5$ et $\mu \leq 0.15$. Il y a un changement de comportement de $\langle P \rangle$ non nulle vers $\langle P \rangle$ nulle autour de $\mu = 0.15$.

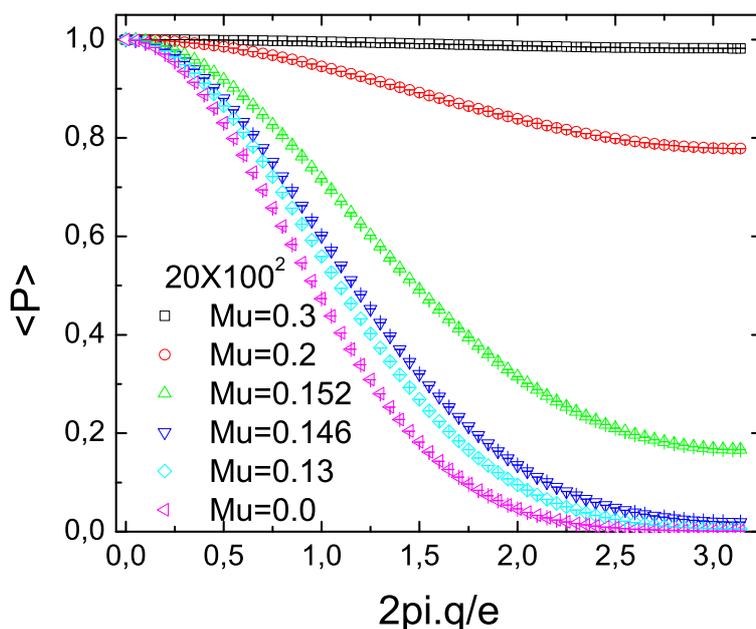


Figure 5.35 – Valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $N_\tau = 20$ et pour différentes valeurs de μ .

Sur la figure 5.36, nous représentons la boucle de Polyakov en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.2$ (en rouge) et $\mu = 0.13$ (en bleu), et $N_\tau = 20$ et 100. Nous remarquons, que pour un μ fixe, lorsque N_τ augmente et donc la taille du réseau tridimensionnel augmente, la valeur moyenne de la boucle de Polyakov décroît plus rapidement en fonction de $2\pi q/e$; pour $\mu = 0.13$, $\langle P \rangle$ s'annule autour de $2\pi q/e = 1.25$ lorsque $N_\tau = 100$ alors qu'elle s'annule autour de $2\pi q/e = 2.5$ lorsque $N_\tau = 20$. Ceci est dû au fait que le nombre d'enlacement de la boucle de Polyakov augmente lorsque N_τ et donc la valeur moyenne $\langle P \rangle$ décroît et s'annule plus rapidement en fonction de la charge externe $2\pi q/e$.

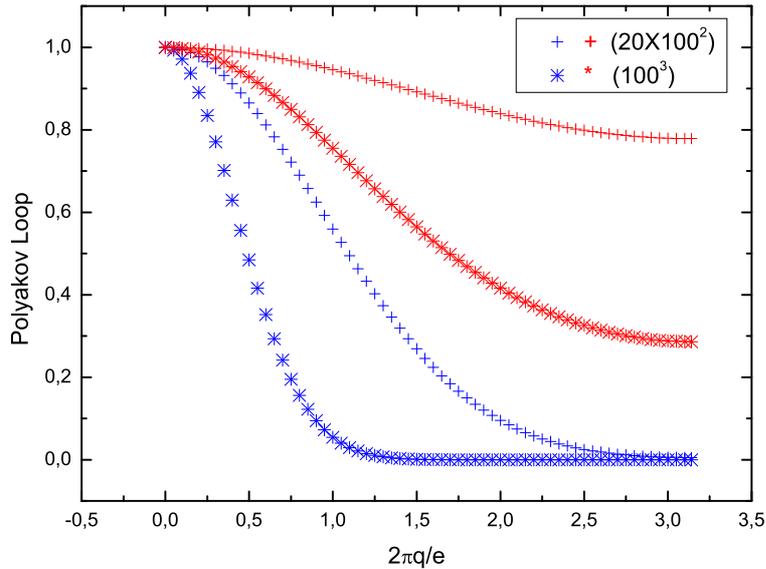


Figure 5.36 – Valeur moyenne de la boucle de Polyakov en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $N_\tau = 20, 100$. En rouge, $\mu = 0.2$ et en bleu, $\mu = 0.13$.

La boucle de Polyakov ayant un comportement similaire à celui de la boucle de Wilson, nous analysons dans ce qui suit l'effet de la taille du réseau sur les paramètres d'ordre que nous avons étudié dans les sections précédentes.

5.3.6 Analyse d'échelle

Dans le but de rechercher des effets du volume fini, nous avons analysé dans cette section les paramètres d'ordre étudiés dans les sections précédentes, à savoir la longueur totale des boucles ($\langle L_T \rangle$), la densité finie des boucles ($\rho - \rho_\infty$) et la boucle de Wilson $W_{(L,T)}$ en fonction de la taille tridimensionnelle du réseau. Nous avons donc fait varier la dimension du réseau de 10^3 jusqu'à 120^3 et même jusqu'à 200^3 en ce qui concerne l'étude de la boucle de Wilson.

La figure 5.37 montre la dépendance de la valeur moyenne de la longueur totale des boucles en fonction de l'inverse μ pour différentes tailles du réseau de 10^3 jusqu'à 120^3 mentionnées dans le graphique. Les conditions périodiques aux frontières sur chaque réseau ont été appliquées. Toutes les courbes obtenues ont la même allure : $\langle L_T \rangle$ augmente lorsque μ diminue avec présence de deux régions distinctes de $\langle L_T \rangle$ en fonction de l'inverse μ et un point d'inflexion dans la région $1/\mu \in [0, 20]$. Aussi,

dans la région $1/\mu > 10$ ce qui correspond à la région $\mu < 0.15$ où $\langle L_T \rangle$ prend les valeurs maximales, il est évident que $\langle L_T \rangle$ augmente lorsque la taille et donc le volume du réseau est agrandi.

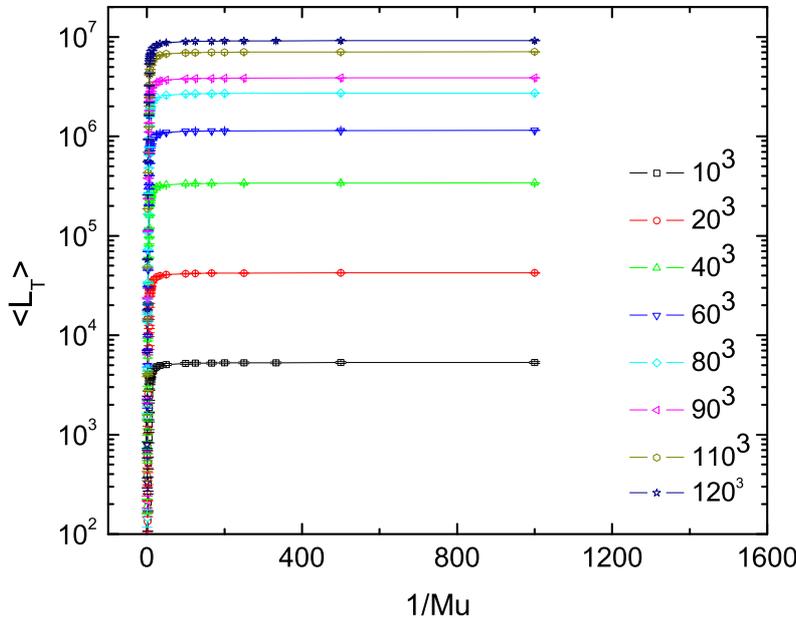
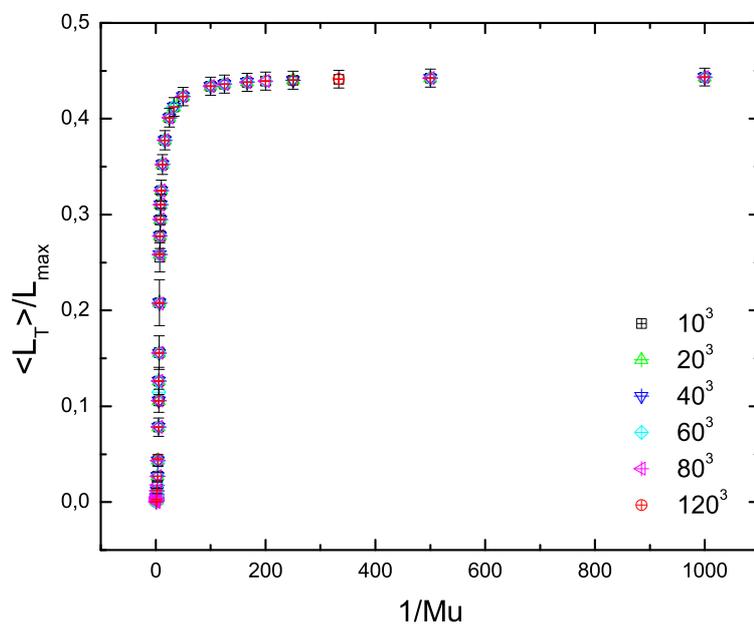


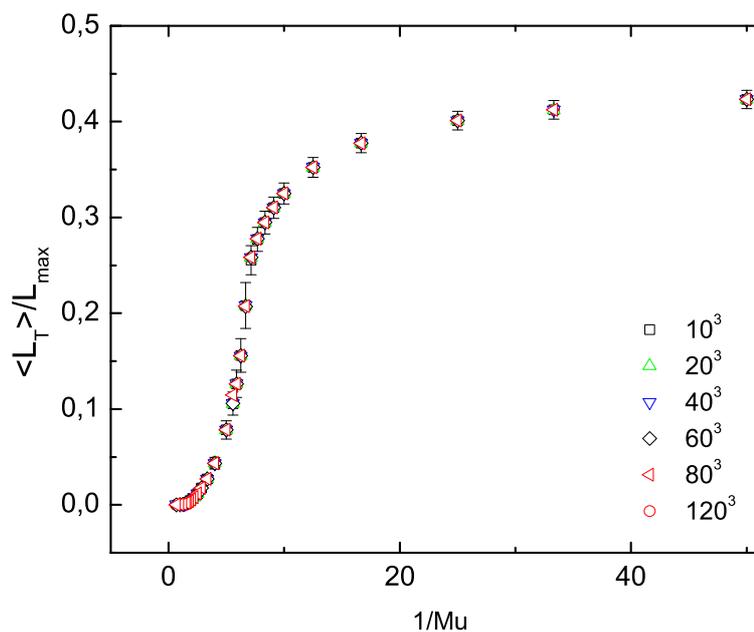
Figure 5.37 – Valeur moyenne de la longueur totale des boucles $\langle L_T \rangle$ en fonction de $1/\mu$ pour différentes tailles du réseau mentionnées dans le graphique.

Par la suite, nous avons normalisé la valeur moyenne de la longueur totale des boucles par rapport à la longueur totale maximale des boucles qui peut exister dans une configuration en équilibre thermodynamique. Cette dernière est égale à $L_{max} = 12N_s^2N_\tau$. Les figures 5.38(a) et 5.39(a) regroupent la dépendance de la valeur moyenne de la longueur totale des boucles, normalisée, en fonction de l'inverse μ pour différentes tailles du réseau de 10^3 jusqu'à 120^3 . Les conditions périodiques aux frontières sur chaque réseau ont été appliquées. Clairement, les données se superposent pour les différentes tailles du réseau (figure 5.38(a)). on distingue deux domaines de variation de $\langle L_T \rangle$ normalisé en fonction de l'inverse μ . La région de transition de phase entre ces deux domaines a été agrandie dans la figure 5.38(b). D'autre part, nous constatons que pour les petits réseaux, essentiellement pour des tailles linéaires ≤ 40 , les erreurs absolues sur les données obtenues sont très importantes indiquant un certain effet du volume fini du réseau. Cet effet peut être clairement observé dans la figure 5.39(a) pour le réseau 10^3 où les barres d'erreurs

sont très importantes par rapport à celles du réseau 120^3 . La région de la transition de phase dans la figure 5.39(a) a été agrandie dans la figure 5.39(b).

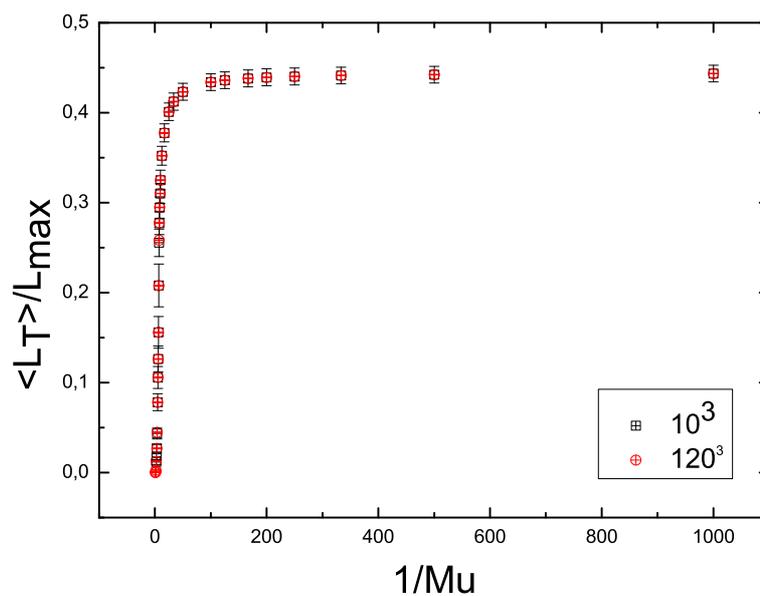


(a)

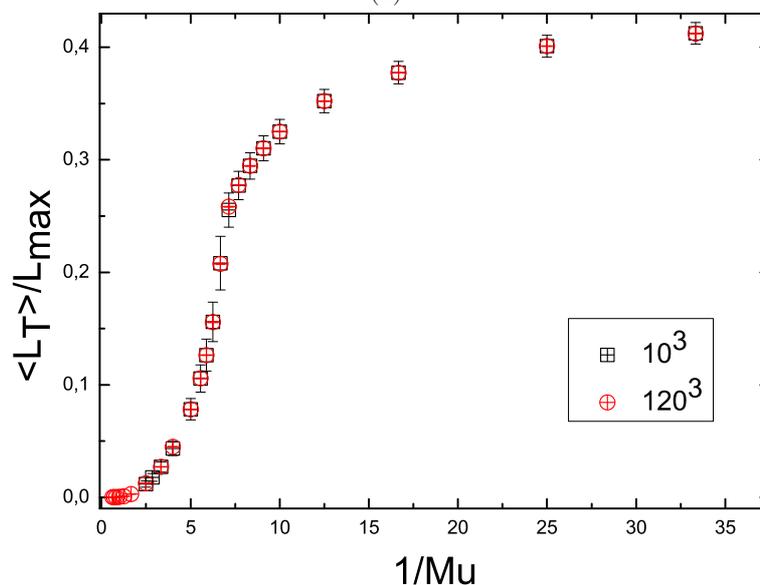


(b)

Figure 5.38 – (a) : Valeur moyenne de la longueur totale Normalisée des boucles $\langle L_T \rangle / L_{max}$ en fonction de l'inverse μ pour différentes tailles du réseau mentionnées dans le graphique. (b) : la région de la transition de phase dans (a) a été agrandie.



(a)



(b)

Figure 5.39 – (a) : Valeur moyenne de la longueur totale Normalisée des boucles $\langle L_T \rangle / L_{max}$ en fonction de l'inverse μ pour deux tailles du réseau : 10^3 et 120^3 . (b) : la région de la transition de phase dans (a) a été agrandie.

Les figures 5.40 et 5.41 montrent le comportement de la densité des boucles de vortex finies en fonction de leur densité totale pour différentes tailles du réseau de 10^3 à 110^3 mentionnées dans les graphiques. Les conditions périodiques aux frontières sur chaque réseau ont été appliquées. Nous avons utilisé le même critère

discuté précédemment dans ce chapitre pour déterminer la densité des boucles finies et infinies. D'après ces figures, dans la région $\rho < 0.207$ ce qui correspond à $\mu > 0.152$, toutes les données des différentes tailles du réseau se superposent ce qui correspond à la présence de boucles finies seulement. Dans la région $\rho > 0.207$ où il y a présence de boucles infinies, les données obtenues pour le réseau 10^3 sont complètement éloignées des autres données ce qui indique probablement l'effet du volume fini. Nous constatons qu'il y a convergence des données à partir de la taille 60^3 . Les données relatives aux réseaux $90^3, 100^3$ et 110^3 sont complètement superposées (figure 5.41) indiquant que la densité finie en fonction de la densité totale est indépendante de la taille du réseau pour des tailles linéaires du réseau ≥ 90 .

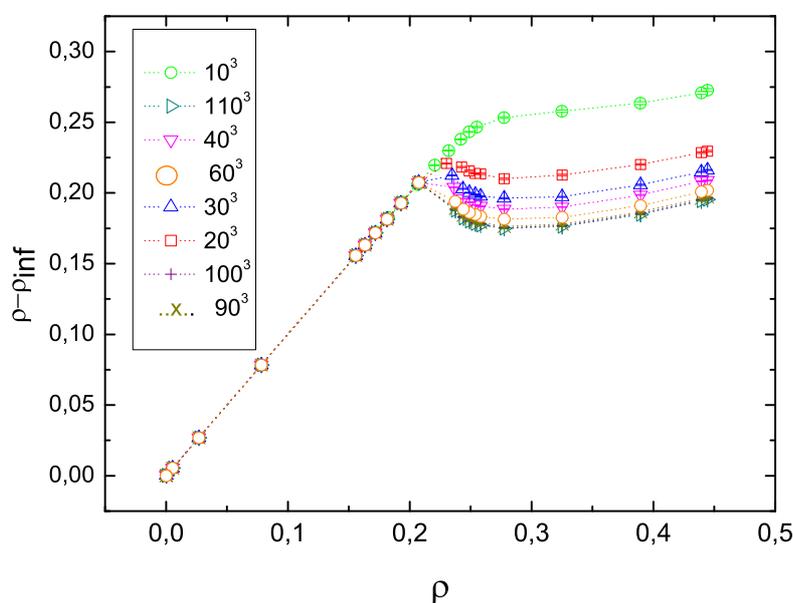


Figure 5.40 – Densité finie des boucles de vortex en fonction de leur densité totale pour différentes tailles du réseau mentionnées sur la figure.

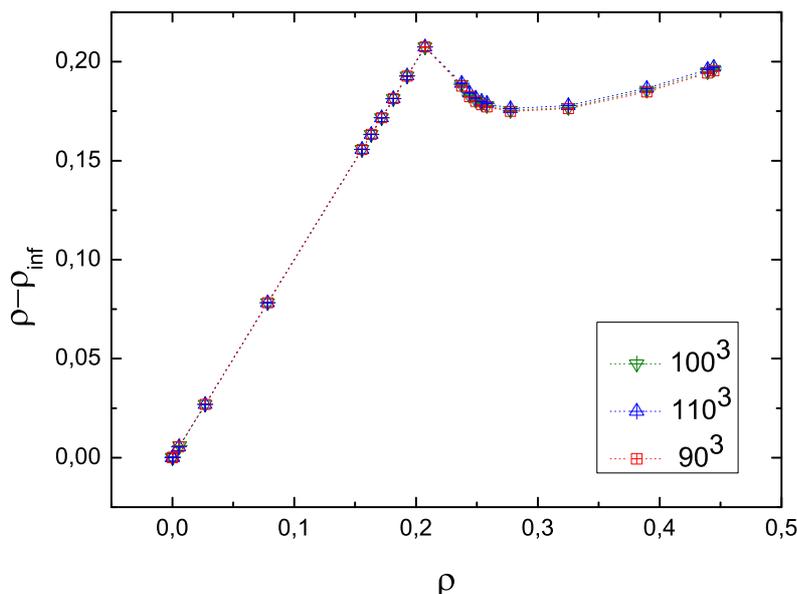
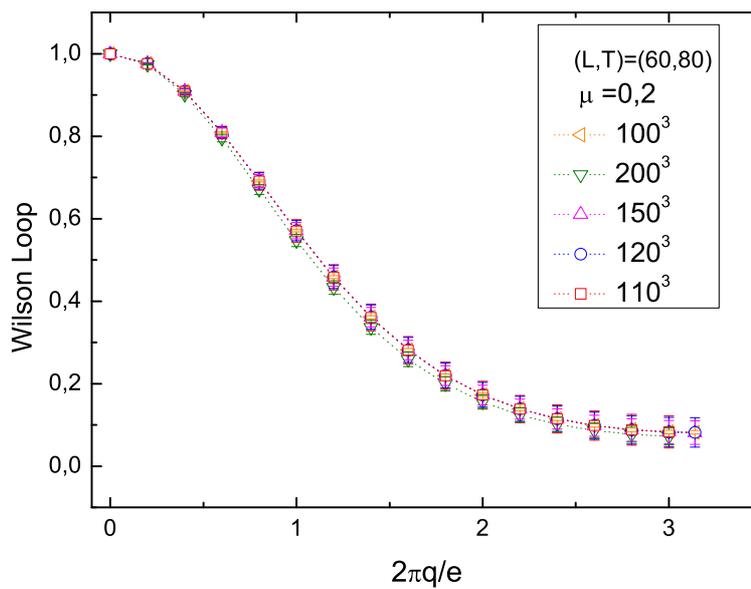


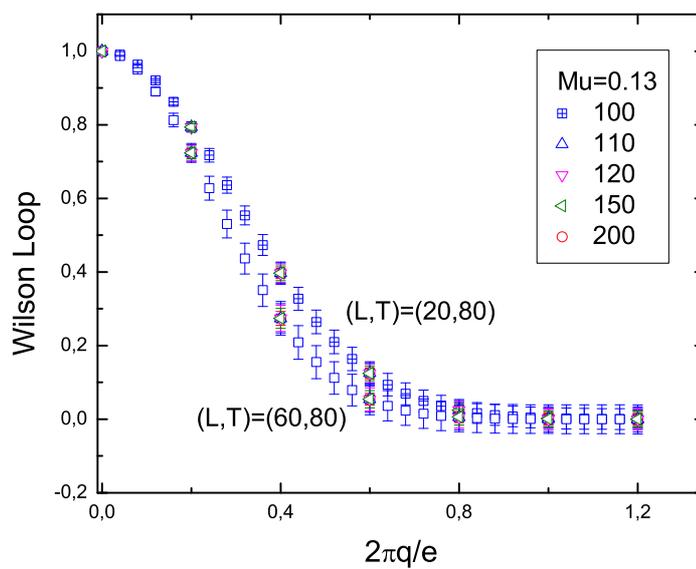
Figure 5.41 – Densité finie des boucles de vortex en fonction de leur densité totale pour différentes tailles du réseau mentionnées sur la figure.

D'autre part, nous avons analysé le comportement de la boucle de Wilson en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour des tailles du réseau allant de 100^3 à 200^3 pour deux valeurs particulières de la masse des vortex et de la boucle de Wilson $W(L, T)$: $\mu = 0.2$ et $(L, T) = (60, 80)$ sur la figure 5.42(a), et $\mu = 0.13$ et $(L, T) = (20, 80); (60, 80)$ sur la figure 5.42(b). Les conditions périodiques aux frontières ont été appliquées sur chaque réseau. Nous pouvons constater que la variation de la boucle de Wilson en fonction de la charge externe est indépendante du choix du réseau puisque toutes les données se superposent. Néanmoins, nous observons un léger décalage pour $\mu = 0.2$ entre les données en utilisant le réseau de dimension 200^3 et les données avec les autres dimensions du réseau. Il sera judicieux de vérifier l'équilibre du système dans ce cas.

En résumé, nous concluons que le choix du réseau 100^3 utilisé dans la plupart de nos simulations est bien justifié afin d'éliminer les effets du volume fini, d'obtenir de meilleurs résultats statistiques et qui sont indépendants de la taille du réseau.



(a)



(b)

Figure 5.42 – Boucle de Wilson (L, T) en fonction de la charge externe pour différentes tailles du réseau pour $\mu = 0.2$ (haut) et $\mu = 0.13$ (bas).

5.3.7 Discussion et conclusion

Nos résultats numériques montrent une évidence pour une nouvelle phase dans le diagramme de phase du modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions dans le secteur de symétrie brisée dans la limite de couplage fort. Dans cette limite, le modèle est décrit en terme de ses excitations topologiques qui sont les boucles de vortex. La phase de Higgs est caractérisée par la présence de boucles finies pour des grandes valeurs de la masse des vortex. Les charges externes sont écrantées et par conséquent ne sont pas confinées. La boucle de Wilson a une loi périmètre. Quand la masse des vortex diminue et à une valeur critique, il y a apparition d'une boucle infinie dans le modèle et donc d'une nouvelle phase caractérisée par une augmentation dramatique de la longueur moyenne des boucles. La boucle de Wilson montre, cependant, qu'il y a toujours présence de la loi périmètre, contrairement à ce qui a été prédit par Samuel [7] et Einhorn et Savit [55]. Nous n'avons donc pas trouvé de confinement dans cette nouvelle phase. Dans [58], il a été démontré qu'il n'y a pas de transition entre la phase de Higgs et la phase de Coulomb. Cependant, ce groupe a étudié la version compacte du modèle. Des simulations numériques ont été effectuées dans [59] mais ces auteurs non pas observés notre transition [46].

5.4 Résultats numériques avec le terme de Chern-Simons

5.4.1 Détails des simulations

En ajoutant le terme de Chern-Simons, de constante de couplage κ petit, dans notre modèle initial de Higgs abélien en (2+1) dimensions, nous avons vu au chapitre 4 que l'action effective de ce modèle sur le réseau (S) est donnée par l'équation 4.3. Celle-ci est la somme de l'action effective du modèle sans terme de Chern-Simons (S_1) plus l'action effective du terme de Chern-Simons, complexe, ($i\kappa L_{kT}$) avec L_{kT} est le nombre d'enlacement total de toutes les boucles de vortex fermées. Il en découle un facteur de Boltzmann (e^{-S}) complexe contenant la phase ($e^{i\kappa L_{kT}}$). Appliquer la méthode de Monte Carlo en utilisant un facteur de Boltzmann complexe est un problème non résolu à date, à notre connaissance. Toutefois, comme nous travaillons dans le cas où κ est petit, nous faisons l'approximation que notre échantillon de configurations de spins indépendantes généré en équilibre thermodynamique en absence du terme de Chern-Simons n'est pas altéré en sa présence. L'action effective du terme de Chern-Simons sera prise en compte dans le calcul des valeurs moyennes des différents observables et paramètres d'ordre du système en insérant dans le numérateur et le dénominateur le facteur de phase du terme de Chern-Simons.

Ainsi, la valeur moyenne d'une observable A sera calculée de la manière suivante

$$\langle A \rangle = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i e^{(i\kappa(L_k T)_i)}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{(i\kappa(L_k T)_i)}}, \quad (5.37)$$

où la somme est réalisée sur l'échantillon de N configurations indépendantes en équilibre thermodynamique généré avec la méthode de Monte Carlo en absence du terme de Chern-Simons. A_i et $(L_k T)_i$ sont les mesures de l'observable A et du nombre d'enlacement total des boucles de vortex, respectivement, dans la configuration i . Le dénominateur dans 5.37 est un facteur de normalisation de la phase de Chern-Simons.

D'autre part, dans la configuration i , L_{kT} est égale à

$$L_{kT} = \sum_{C; C' \neq C} L_k(C, C'), \quad (5.38)$$

où $L_k(C, C')$ est le nombre d'enlacement de la paire de boucles (C, C') et la sommation est réalisée sur toutes les paires de boucle présentes dans cette configuration i .

Nous utilisons notre méthodologie présentée à la section 4.6 pour calculer le nombre d'enlacement des boucles de vortex de notre modèle sur le réseau, et appliquons l'approche de Lacher et Samners (section 4.6.5) pour évaluer $L_k(C, C')$ d'une paire (C, C') quelconque. Notre méthode s'applique à un réseau tridimensionnel avec les conditions aux frontières de Dirichlet c'est-à-dire non périodiques. Toute l'analyse effectuée dans cette partie concerne le réseau de dimension 100^3 . À cause des conditions aux frontières de Dirichlet, nous avons implémenté dans nos simulations le réseau de dimension 102^3 et attribué à tous les vertex aux frontières la même valeur de spin.

5.4.2 Nombre d'enlacement total des boucles fermées

Nous commençons, dans ce qui suit, par analyser la distribution du nombre d'enlacement total obtenu dans $N = 10000$ configurations en fonction de la masse des boucles de vortex μ .

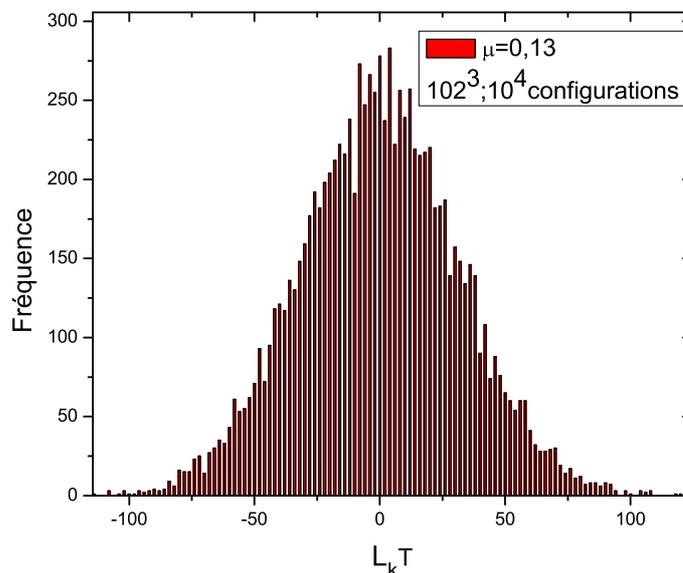


Figure 5.43 – Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.13$.

Les figures 5.43, 5.44, 5.45, 5.46, 5.47 montrent les histogrammes obtenus

numériquement du nombre d'enlacement total L_{kT} pour $\mu = 0.13; 0.14; 0.15; 0.16$ et 0.17 , respectivement. D'abord, nous pouvons constater que L_{kT} prend des valeurs entières et paires. Ceci est en parfait accord avec l'équation 5.38 où une double sommation sur C et C' est effectuée. Pour $\mu = 0.13$ et 0.14 (figures 5.43 et 5.44, respectivement), les distributions ont la forme d'une gaussienne symétrique centrée autour de $L_{kT} = 0$ de largeur (≈ 60). Dans ce cas, il y a présence de boucles de vortex infinies dans les configurations donc le nombre d'enlacement total calculé peut prendre des valeurs importantes. On voit que L_{kT} prend des valeurs allant jusqu'à (± 150) pour $\mu = 0.13$ et jusqu'à (± 100) pour $\mu = 0.14$. Ainsi, nous constatons que lorsque μ augmente, le domaine de variation de L_{kT} diminue et donc la distribution de L_{kT} se rétrécit.

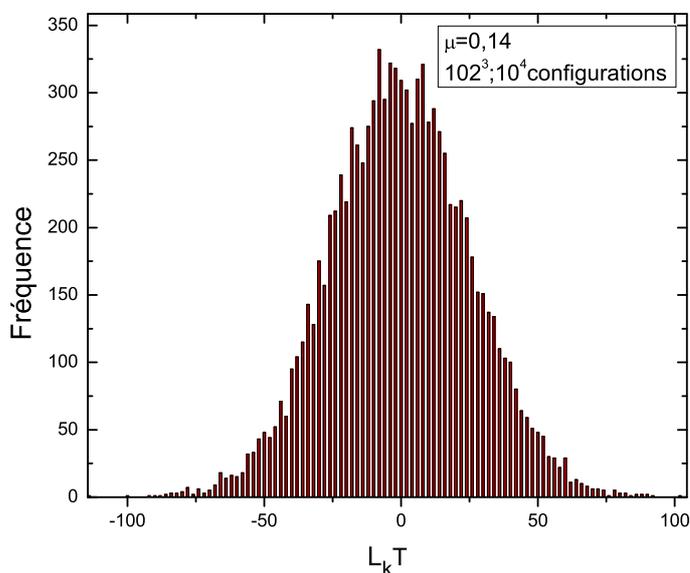


Figure 5.44 – Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.14$.

Sur la figure 5.45 pour $\mu = 0.15$, nous remarquons que la largeur de la distribution de L_{kT} chute à (≈ 16). L_{kT} peut prendre des valeurs allant jusqu'à (± 30) . Pour μ plus petit ($\mu < 0.15$), on est en présence de boucles finies de longueurs de moins en moins importantes. Dans ce cas, nous remarquons pour $\mu = 0.16$ (figure 5.46) que la largeur de la distribution chute dramatiquement à 4. Les valeurs les plus importantes de L_{kT} sont (± 10) . Pour $\mu = 0.17$ (figure 5.47), le nombre d'enlacement total prend essentiellement la valeur (0) avec une probabilité de ≈ 88

pour cent et les valeurs (± 2) avec une probabilité inférieure à 10 pour cent. Enfin, lorsque μ diminue, L_{kT} tend vers zéro.

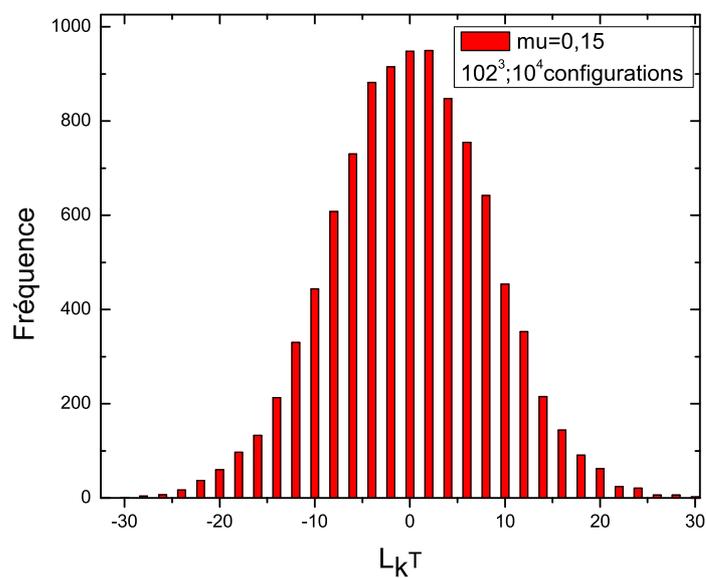


Figure 5.45 – Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.15$.

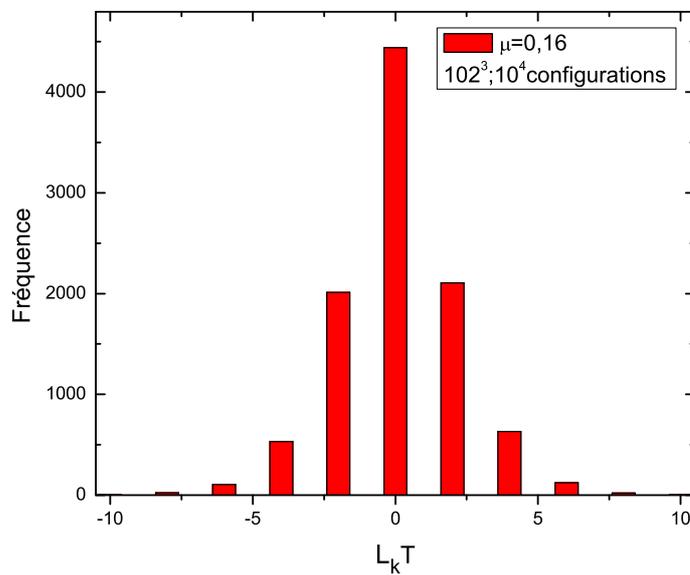


Figure 5.46 – Histogramme du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.16$.

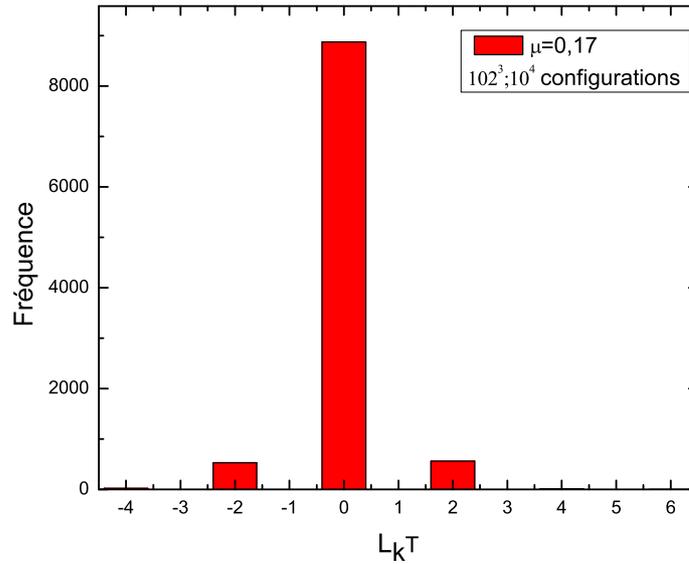


Figure 5.47 – Histogramme du nombre d’enlacement total des boucles de vortex fermées pour $\mu = 0.17$.

Enfin, de cette analyse, nous pouvons conclure aussi que la valeur moyenne du nombre d’enlacement total évaluée à partir des distributions précédentes peut représenter un bon paramètre d’ordre pour identifier la transition de phase en μ observée dans la section précédente 5.3.

5.4.3 La phase de Chern-Simons

Nous nous intéressons, à présent, à analyser la valeur moyenne de la phase due au terme de Chern-Simons, $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$, en fonction de la constante de couplage κ ($\kappa \geq 0$). Cette valeur moyenne apparaît dans le dénominateur de l’équation 5.37. Donc, connaître sa variation en fonction de κ est important pour le calcul des valeurs moyennes de différentes observables (équation 5.37). D’abord, suite à l’analyse précédente de la distribution du nombre d’enlacement total des boucles, ce dernier prend des valeurs entières symétriques autour de $L_{kT} = 0$; par conséquent, seule la partie réelle contribue à la moyenne de la phase de Chern-Simons

$$\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle \rightarrow \langle \cos(\kappa L_{kT}) \rangle. \quad (5.39)$$

Les figures 5.48, 5.49 ; 5.50, 5.51 ; 5.52, 5.53 ; 5.54, 5.55 et 5.56 montrent le comportement de la valeur moyenne de la phase $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ en fonction de κ pour $\mu = 0.13$; 0.14; 0.15; 0.16 et 0.17, respectivement. Ces données sont extraites de $N = 10000$ configurations en équilibre thermodynamique. À première vue, nous pouvons remarquer que $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ est une fonction décroissante de κ à partir de la valeur un (pour $\kappa = 0$).

Pour $\mu = 0.13$ (les figures 5.48 et 5.49), $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ tend assez rapidement vers zéro en fonction de κ . Or, le domaine de variation de κ est limité à des valeurs de $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ non nulles afin qu'on puisse les utiliser dans l'équation 5.37 pour le calcul des paramètres d'ordre. Une analyse des erreurs relatives sur les données obtenues révèle que pour ($\kappa = 0.02\pi \approx 0.06$), l'erreur relative est de l'ordre de 5 pour cent. Pour ($\kappa = 0.025\pi \approx 0.08$), l'erreur relative est de l'ordre de 13 pour cent ; et pour ($\kappa \geq 0.03\pi \approx 0.09$), l'erreur relative est de 30 pour cent et plus et la valeur moyenne $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ tend vers zéro. Par conséquent, pour $\mu = 0.13$, κ doit varier dans la région de fiabilité ($0 \leq \kappa < 0.08$).

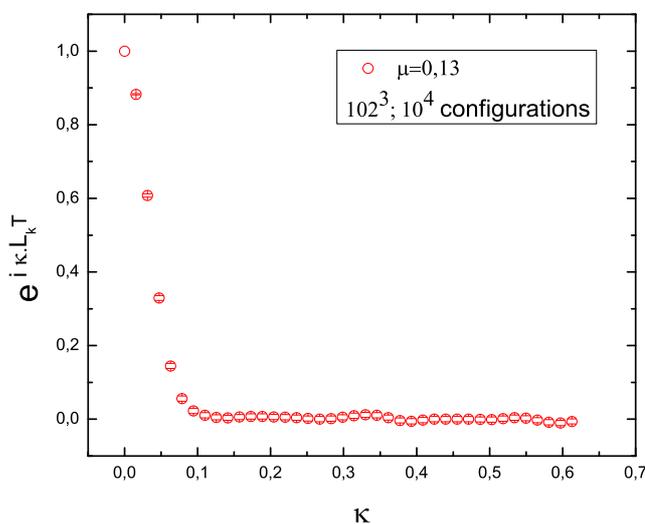


Figure 5.48 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.13$.

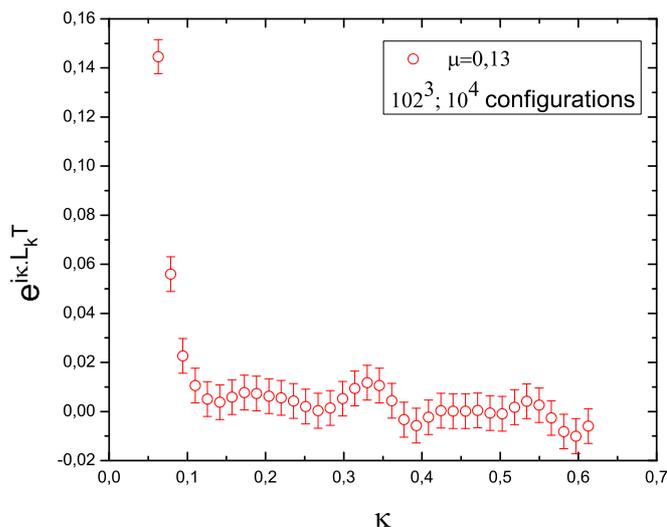


Figure 5.49 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.13$.

L'analyse des graphiques pour $\mu = 0.14$ (les figures 5.50 et 5.51) montre que la valeur moyenne $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ tend aussi assez rapidement vers zéro. Pour ($\kappa = 0.025\pi \approx 0.08$), l'erreur relative est de l'ordre de 5 pour cent. Pour ($\kappa = 0.03\pi \approx 0.09$), l'erreur relative est de l'ordre de 12 pour cent. Pour des valeurs plus grandes de κ , l'erreur relative est beaucoup plus grande. De plus, la valeur moyenne tend vers zéro. Par conséquent la région de fiabilité de κ est quasiment identique à celle pour $\mu = 0.13$ ($0 \leq \kappa \leq 0.08$).

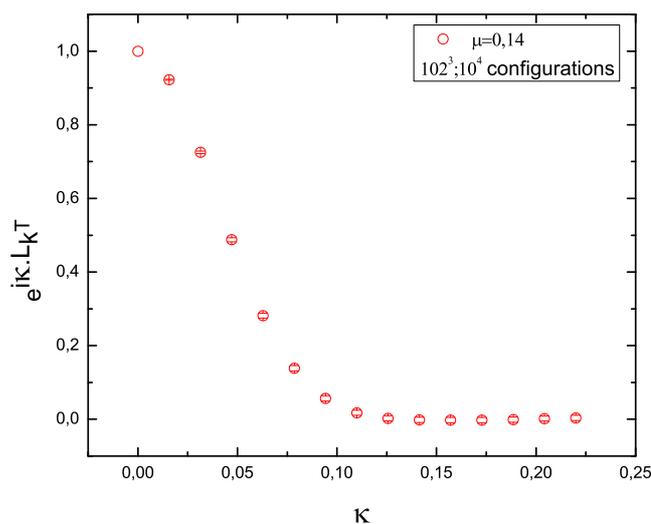


Figure 5.50 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.14$.

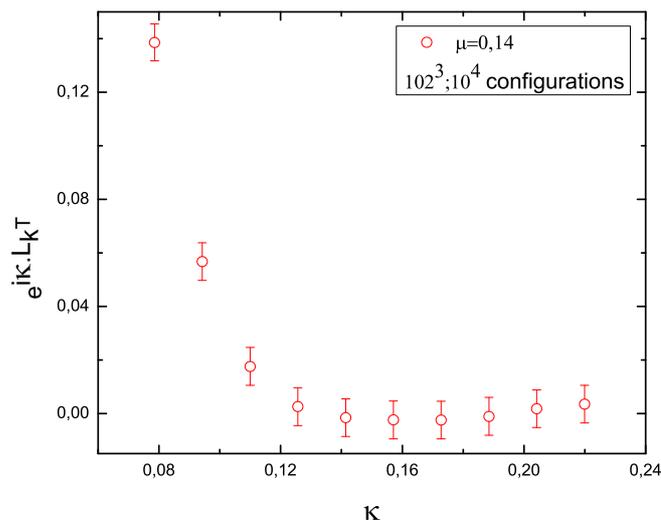


Figure 5.51 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.14$.

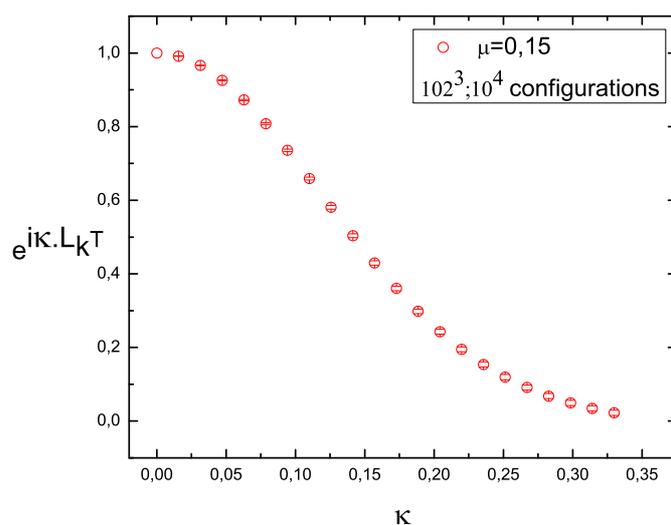


Figure 5.52 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.15$.

Dans le cas $\mu = 0.15$ (les figures 5.52 et 5.53), la valeur moyenne $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ décroît plus lentement en fonction de κ et tend vers zéro à partir de $\kappa \approx 0.3$. Pour ($\kappa = 0.08\pi \approx 0.25$), l'erreur relative est de l'ordre de 5 pour cent. Pour ($\kappa = 0.085\pi \approx 0.27$), l'erreur relative est de l'ordre de 10 pour cent. Et pour ($\kappa = 0.095\pi \approx 0.3$), l'erreur relative est de l'ordre de 14 pour cent. L'erreur relative devient beaucoup plus grande pour des valeurs de κ plus grandes et la valeur

moyenne tend vers zéro dans ce cas. Nous déduisons que le domaine de fiabilité de κ est ($0 \leq \kappa < 0.3$).

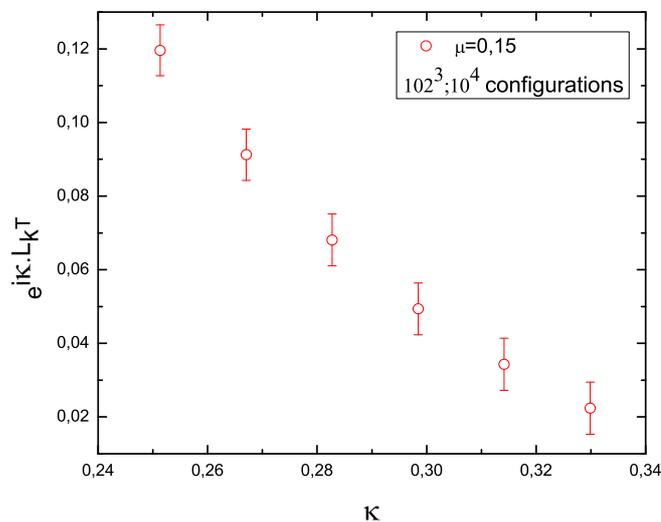


Figure 5.53 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.15$.

Pour des valeurs de μ plus petites ($\mu < 0.15$) en présence de boucles de vortex de longueurs finies, nous remarquons que la valeur moyenne $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ décroît en fonction de κ mais ne s'annule pas (voir les figures 5.54 et 5.55 pour $\mu = 0.16$ et la figure 5.56 pour $\mu = 0.17$). Dans ce cas, le nombre d'enlacement total prend essentiellement les valeurs (0 avec une grande probabilité et ± 2) et par conséquent, la valeur moyenne $\langle \exp(i\kappa L_{kT}) \rangle$ décroît mais ne s'annule pas. Pour $\mu = 0.17$, elle reste proche de un (1). L'erreur relative sur toutes les données est inférieure ou égale à 7 pour cent pour $\mu = 0.16; 0.17$.

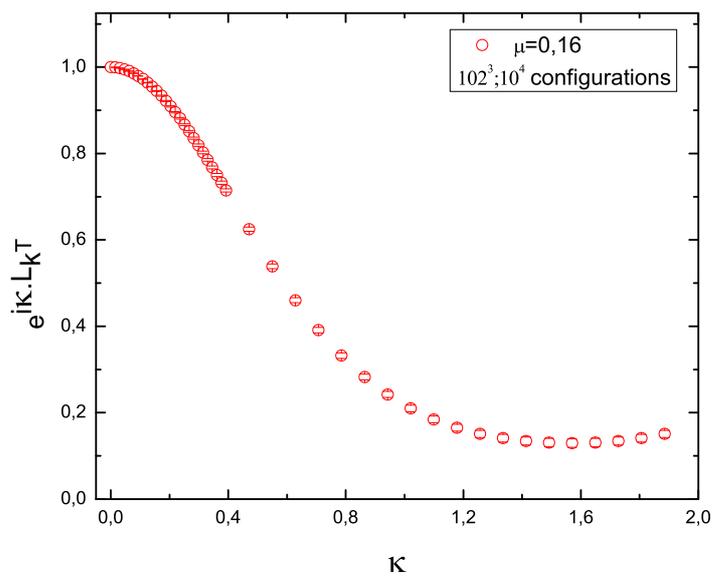


Figure 5.54 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.16$.

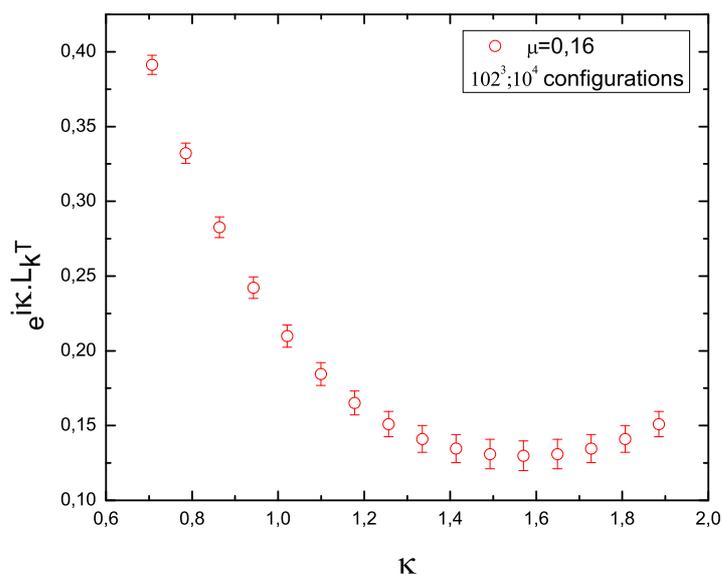


Figure 5.55 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.16$.

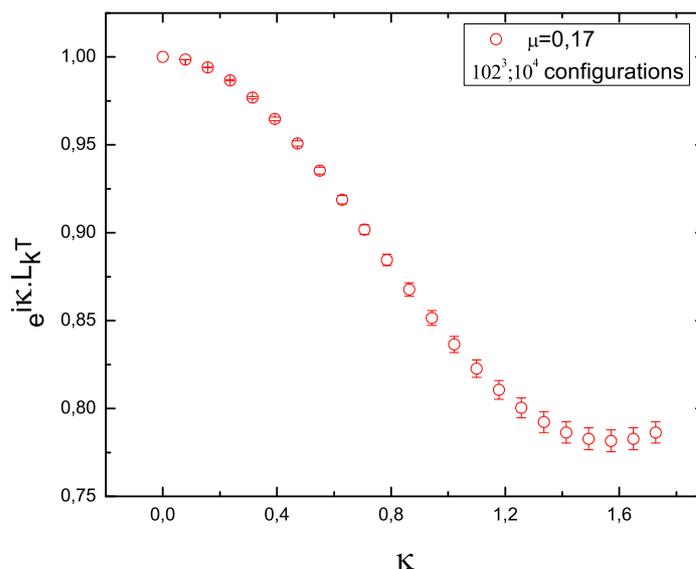


Figure 5.56 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour $\mu = 0.17$.

En conclusion, dans la région $\mu < 0.15$, nous devons analyser des valeurs moyennes de différents paramètres d'ordre dans le domaine de fiabilité de κ , ($0 \leq \kappa < 0.08$).

Sur la figure 5.57, nous résumons le comportement de la valeur moyenne de la phase de Chern-Simons en fonction de sa constante de couplage κ dans le domaine de fiabilité de κ discuté plus haut, pour plusieurs valeurs de la masse des boucles de vortex mentionnées sur le graphique. Nous pouvons conclure que pour ($\mu < 0.15$), la valeur moyenne de la phase de Chern-Simons décroît vers zéro en fonction de κ ; La décroissance est plus rapide lorsque μ diminue. Pour ($\mu \geq 0.15$), la valeur moyenne de la phase de Chern-Simons décroît légèrement et ne s'annule pas. Elle reste même autour de un pour ($\mu \geq 0.156$).

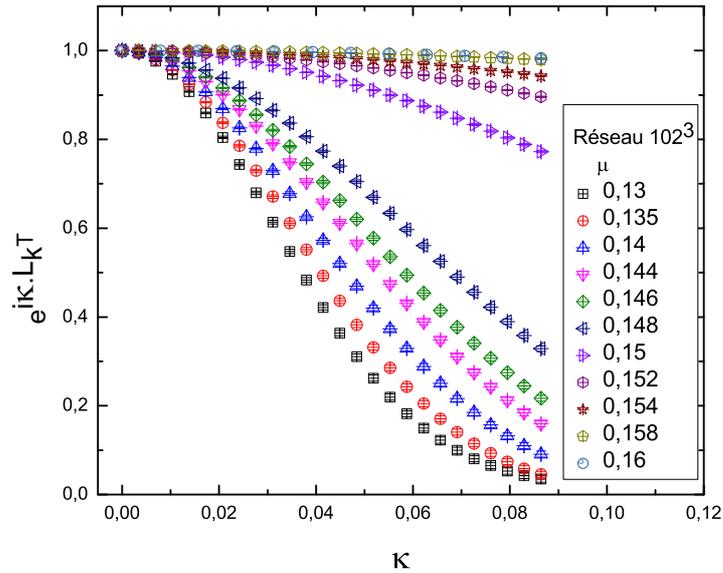


Figure 5.57 – Valeur moyenne de la phase du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour différentes valeurs de μ mentionnées sur le graphique.

5.4.4 Boucle de Wilson

Dans cette section, nous nous intéressons à étudier l'opérateur boucle de Wilson, paramètre d'ordre de notre modèle analysé dans la section 5.3 de ce chapitre. Nous nous intéressons ici à extraire l'effet du terme de Chern-Simons sur les résultats déjà obtenus dans 5.3.4.

En utilisant les équations 5.37, 5.39 ainsi que 5.19, la valeur moyenne de la boucle de Wilson en présence du terme de Chern-Simons, $W_{(L,T)}^{CS}$, se réduit à

$$W_{(L,T)}^{CS} \equiv \langle W_{(L,T)}^{CS} \rangle = \frac{\langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \times \cos(\kappa L_{kT}) \rangle}{\langle \cos(\kappa L_{kT}) \rangle}, \quad (5.40)$$

où q est la charge de la paire des quarks externes de Wilson donnée en unité de la charge élémentaire e . L_K est le nombre d'enlacement de la boucle de Wilson de taille (L, T) . κ et L_{kT} sont la constante de couplage et le nombre d'enlacement total des boucles dus au terme de Chern-Simons.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser l'équation 5.40 pour évaluer la valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ sur un échantillon de $N = 10000$ configurations en équilibre thermodynamique. Nos simulations numériques sont réalisées

sur un réseau de dimensions 102^3 avec application des conditions aux frontières de Dirichlet. Pour la boucle de Wilson de taille (L, T) , nous considérons $T = 80$ et varions L de 20 à 60 avec un pas de 10. Nous varions la charge externe $2\pi q/e$ dans la région $[0 - \pi]$, la constante de couplage κ particulièrement dans la région $[0 - 0.1]$ ainsi que la masse des vortex μ .

Sur les figures 5.58, 5.59; 5.60, 5.61, nous représentons la valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour $\mu = 0.13; 0.16$, respectivement. La taille de la boucle de Wilson est égale à $(L, T) = (20, 80)$ et les valeurs de la constante κ sont indiquées sur chaque graphique. Nous pouvons constater d'abord, que la valeur moyenne $W_{(L,T)}^{CS}$ a la même forme que celle obtenue ($W_{(L,T)}$) en absence du terme de Chern-Simons en fonction de $2\pi q/e$. $W_{(L,T)}^{CS}$ est une fonction décroissante en fonction de $2\pi q/e$ à partir de la valeur (1) (pour $2\pi q/e = 0$) et tend vers zéro quand la masse des vortex $\mu \leq 0.15$. De plus, il est à noter que le cas $\kappa = 0$ correspond à la valeur moyenne de la boucle Wilson $W_{(L,T)}$ en absence du terme de Chern-Simons.

Pour la valeur de la masse $\mu = 0.13$, les données obtenues pour ($\kappa \leq 0.015\pi \approx 0.05$) se superposent sur celles qui correspondent à $\kappa = 0$ en tenant compte des barrers d'erreurs obtenues. Les données obtenues pour ($\kappa = 0.02\pi \approx 0.06$) commencent à s'écarter légèrement de celles pour $\kappa = 0$ (voir figure 5.59). Notons que ces valeurs de κ correspondent au domaine de sa fiabilité où la phase du terme de Chern-Simons est bien définie pour $\mu = 0.13$ (voir la section précédente). Cependant, pour ($\kappa \geq 0.025\pi \approx 0.08$), les données s'écartent avec des erreurs relatives qui deviennent importantes (voir figure 5.58). Nous pouvons conclure donc que le comportement de la boucle de Wilson n'est pas modifié par la présence du terme de Chern-Simons pour les faibles valeurs de la constante de couplage ($0 \leq \kappa < 0.08$), dans la région où $\mu \leq 0.15$.

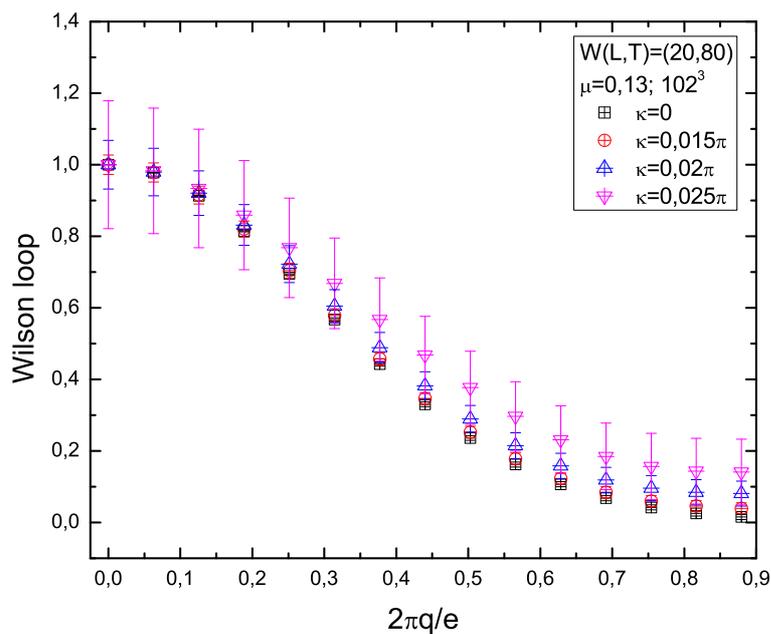


Figure 5.58 – Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour ($\kappa = 0; 0.015\pi; 0.02\pi; 0.025\pi$) et $\mu = 0.13$.

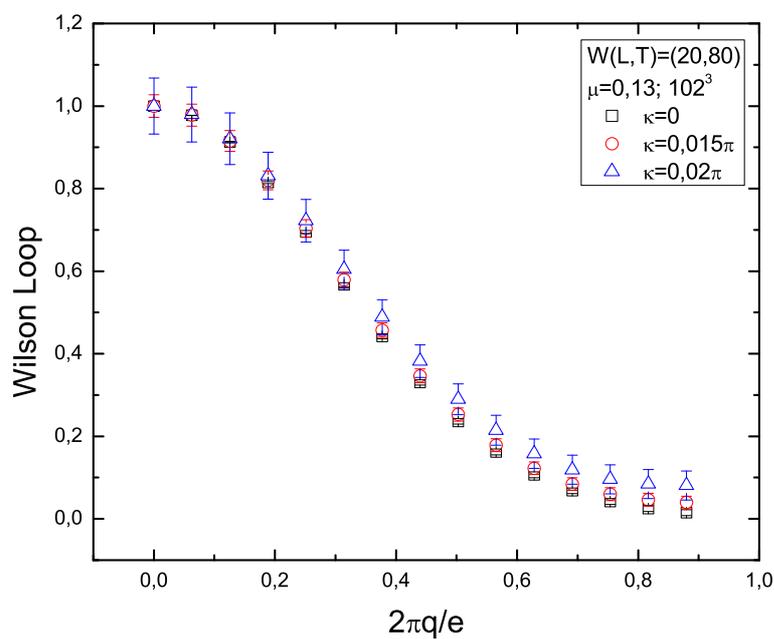


Figure 5.59 – Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour ($\kappa = 0; 0.015\pi; 0.02\pi$) et $\mu = 0.13$.

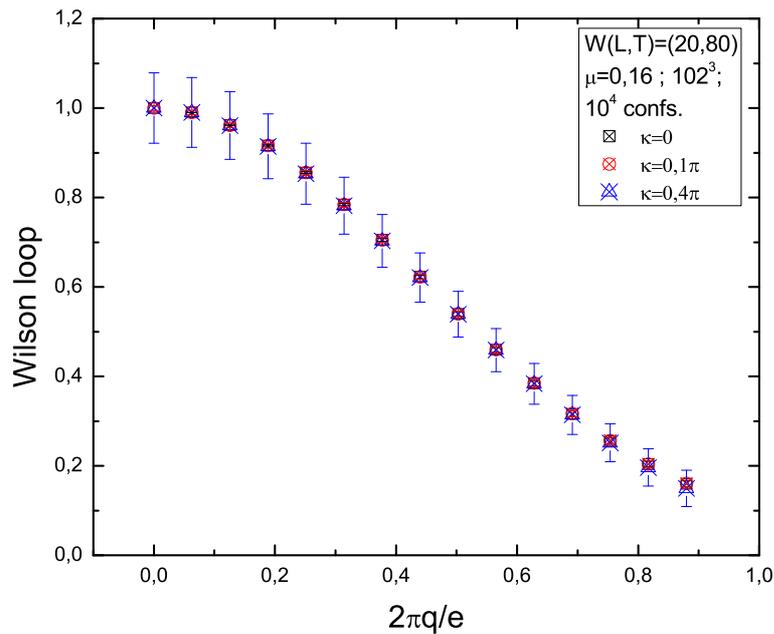


Figure 5.60 – Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour ($\kappa = 0$; 0.1π ; 0.4π) et $\mu = 0.16$.

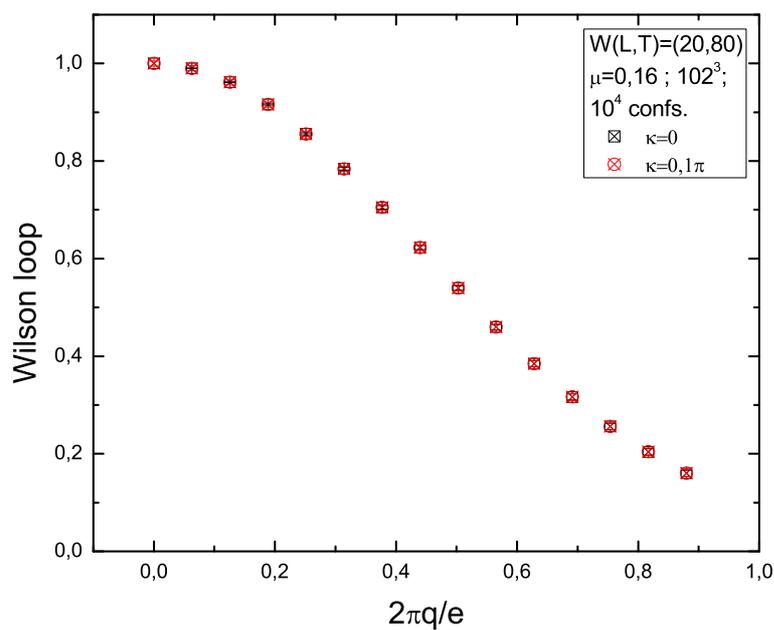


Figure 5.61 – Valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la charge externe $2\pi q/e$ pour ($\kappa = 0$; 0.1π) et $\mu = 0.16$.

Dans le cas $\mu = 0.16$ (voir les figures 5.60 et 5.61), les données de $W_{(L,T)}^{CS}$ pour différentes valeurs de κ ($\kappa > 0$) s'accordent bien avec celles pour $\kappa = 0$, en

fonction de la charge externe $2\pi q/e$. À titre d'illustration, voir les données pour ($\kappa = 0; 0.1\pi; 0.4\pi$). Cette remarque s'applique pour toutes les valeurs de $\mu > 0.15$. Nous concluons que dans la phase de Higgs brisée, le terme de Chern-Simons n'influe pas sur la boucle de Wilson.

Afin d'augmenter la précision sur nos données, spécialement pour $\mu \leq 0.15$, nous avons déplacé la boucle de Wilson dans le réseau et calculé le nombre d'enlacement correspondant à chaque position de celle-ci dans le réseau. La valeur moyenne de la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ (équation 5.40) est calculée en moyennant sur le produit du nombre total de configurations avec le nombre total des positions de la boucle de Wilson dans une configuration donnée. Ainsi pour la taille de la boucle de Wilson $(L, T) = (20, 80)$, par exemple, La taille de nos échantillons pour la mesure de $W_{(L,T)}^{CS}$ devient égale à 6.4×10^6 . Le nombre total de configurations en équilibre utilisé est égale à $N = 10000$, et cela pour chaque valeur de la masse des vortex μ .

Sur la figure 5.62, nous représentons la boucle de Wilson $W_{(L,T)}^{CS}$ en fonction de la constante de couplage κ dans le domaine ($0 \leq \kappa \leq 0.1$) pour la valeur de la charge externe $2\pi q/e = 0.18\pi$. Les valeurs de la masse des vortex μ sont indiquées sur le graphique. La taille de la boucle de Wilson $(L, T) = (20, 80)$. D'après ce graphique, nous constatons que pour μ fixe dans le domaine ($\mu < 0.15$), la valeur moyenne $W_{(L,T)}^{CS}$ reste constante en fonction de κ dans la région ($0 < \kappa < 0.08$). Pour $\mu \geq 0.15$, $W_{(L,T)}^{CS}$ reste constant sur tout le domaine de κ représenté sur le graphique ($0 < \kappa \leq 0.1$).

En fait, en revenant à l'équation 5.40, nous pouvons étudier la dépendance de la valeur moyenne de la boucle de Wilson sur la constante de couplage κ .

En utilisant la sommation sur les valeurs que peut prendre le nombre d'enlacement total, l'équation 5.40 s'écrit

$$W_{(L,T)}^{CS} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M \left[\sum_{i=1}^{N(L_{KT})} (\cos(2\pi q/e \times L_k(i)) \times \cos(\kappa L_{kT})) \right]}{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M \left[\sum_{i=1}^{N(L_{KT})} \cos(\kappa L_{kT}) \right]}, \quad (5.41)$$

où N est le nombre total de configurations, M est la valeur maximale positive

que peut prendre le nombre d'enlacement total L_{KT} , et $N(L_{KT})$ est le nombre de configurations pour un L_{KT} fixe.

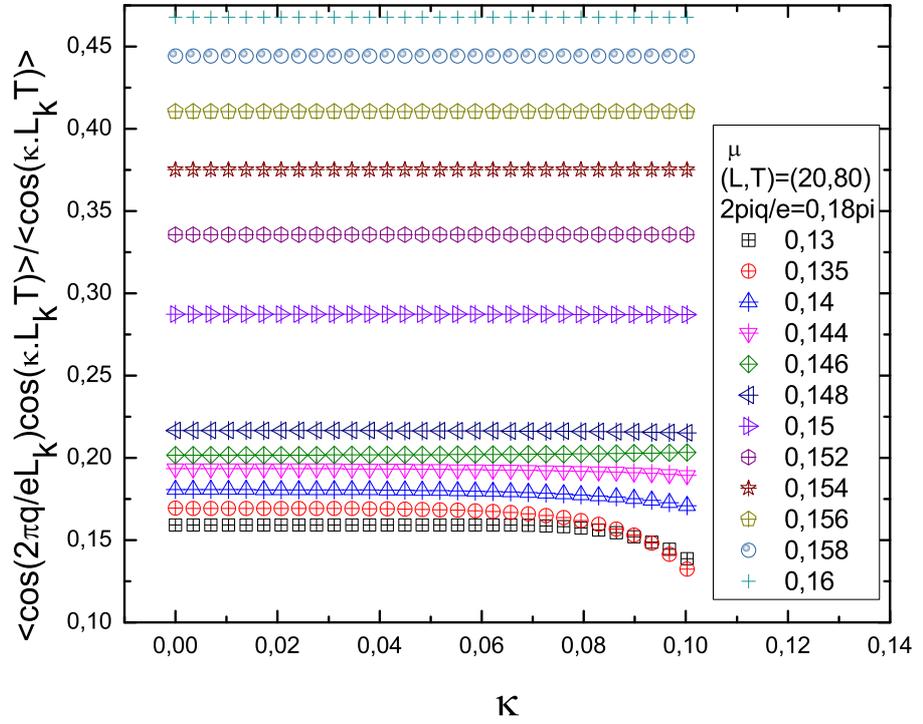


Figure 5.62 – Valeur moyenne de la boucle de Wilson en présence du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour la valeur de la charge externe $2\pi q/e = 0.18\pi$ pour différentes valeurs de la masse de vortex μ .

Dans l'équation 5.41, en multipliant et en divisant par $(N(L_{KT}))$ dans le numérateur, celle-ci s'écrit

$$W_{(L,T)}^{CS} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M \left[\sum_{i=1}^{N(L_{KT})} \left(\frac{\cos(2\pi q/e \times L_k(i))}{N(L_{KT})} \times N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{kT}) \right) \right]}{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M [N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{kT})]}. \quad (5.42)$$

Sachant que $(\cos(\kappa L_{kT}))$ et $N(L_{KT})$ ne dépendent pas sur la somme sur (i) et que $(\sum_{i=1}^{N(L_{KT})} \frac{\cos(2\pi q/e \times L_k(i))}{N(L_{KT})})$ est égale à $\langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \rangle$, l'équation 5.42 devient :

$$W_{(L,T)}^{CS} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M [(\langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \rangle \times N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{kT}))]}{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M [N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{kT})]}. \quad (5.43)$$

La valeur moyenne $\langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \rangle$ ne dépend pas de la somme sur L_{KT} , l'équation 5.43 se réduit à

$$W_{(L,T)}^{CS} = \frac{\frac{1}{N} \left(\langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \rangle \sum_{L_{KT}=-M}^M [N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{KT})] \right)}{\frac{1}{N} \sum_{L_{KT}=-M}^M [N(L_{KT}) \cos(\kappa L_{KT})]}. \quad (5.44)$$

La somme qui apparaît dans le numérateur apparaît aussi dans le dénominateur donc elles se simplifient et on obtient

$$W_{(L,T)}^{CS} = \langle \cos(2\pi q/e \times L_k) \rangle, \quad (5.45)$$

qui est exactement la valeur moyenne de la boucle de Wilson sans terme de Chern-Simons (équation 5.19).

Nous venons de trouver que la constante de couplage κ n'a pas d'influence sur la valeur moyenne de la boucle de Wilson (équation 5.19). D'après nos simulations, nous avons observé une indépendance de $W_{(L,T)}^{CS}$ par rapport à κ lorsque la masse des vortex $\mu > 0.15$. Nous attribuons ceci au fait que lorsque la masse $\mu \leq 0.15$, la phase du terme de Chern-Simons s'annule rapidement. Donc, dans la région petites valeurs de κ ($0 \leq \kappa < 0.08$), la valeur moyenne de la boucle de Wilson est aussi indépendante de κ .

Nous concluons que le terme de Chern-Simons de constante de couplage (κ) ajouté à notre modèle effectif de boucles de vortex fermées ne contribue pas à la valeur moyenne de la boucle de Wilson et donc il n'a pas d'influence sur les phases déjà discutées dans la première partie de ce chapitre ainsi que la phase de confinement prédite par Samuel. Cependant, et d'après la résolution permise par nos simulations numériques, dans la région de la masse ($\mu \leq 0.15$), nous avons trouvé que cette conclusion est valable seulement pour les petites valeurs de κ ($0 \leq \kappa < 0.08$) à cause du fait que la phase de Chern-Simons s'annule.

5.4.5 Boucle de 't Hooft

En étudiant le nombre d'enlacement entre les boucles de vortex fermées. Il est possible d'analyser aussi l'opérateur boucle de 't Hooft [57] [6] qui, comme l'opérateur boucle de Wilson, représente aussi un paramètre d'ordre du système en présence du terme de Chern-Simons. L'opérateur boucle de 't Hooft $B_{(L,T)}$, est un objet dual à l'opérateur boucle de Wilson $W_{(L,T)}$. (L, T) est une courbe fermée dans le réseau qui représente la taille des boucles de 't Hooft et de Wilson. Il est obtenu en définissant une transformation de jauge abélienne $\Omega_{(L,T)}(x)$, avec la condition en parcourant une boucle (L', T') qui a L_k liaisons avec la boucle de 't Hooft, (L, T) , paramétrisée par $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, on doit obtenir

$$\Omega_{(L,T)}(x(2\pi)) = \Omega_{(L,T)}(x(0)) + 2\pi L_k, \quad (5.46)$$

la transformation de jauge crée un tube de flux le long de la boucle (L, T) . Donc la boucle de 't Hooft crée un flux de vortex le long de la boucle (L, T) . La valeur moyenne de l'opérateur boucle de 't Hooft mesure le potentiel ou l'énergie de la boucle de vortex créée dans le système étudié.

En calculant numériquement sur le réseau la valeur moyenne de la boucle de 't Hooft $\langle 'tH \rangle$, nous choisissons une boucle de 't Hooft de taille (L, T) qui passe par les vertex du réseau, ensuite, nous fixons les valeurs des spins de ces vertex et exécutons les simulations par Monte Carlo de façon habituelle tout en gardant les spins de ces vertex fixes tout au long de la simulation. La boucle de 't Hooft mesure le nombre d'enlacement total de cette boucle avec toutes les boucles de vortex. Il est clair que le terme de Chern-Simons tient en compte de cette mesure dans $(\exp(i\kappa)L_{KT})$. La valeur moyenne $\langle 'tH \rangle$ est donc égale à

$$\langle 'tH \rangle = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{(i2\kappa L_k(i))} e^{(i2\kappa(L_k - T)(i))}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{(i2\kappa(L_k - T)(i))}}. \quad (5.47)$$

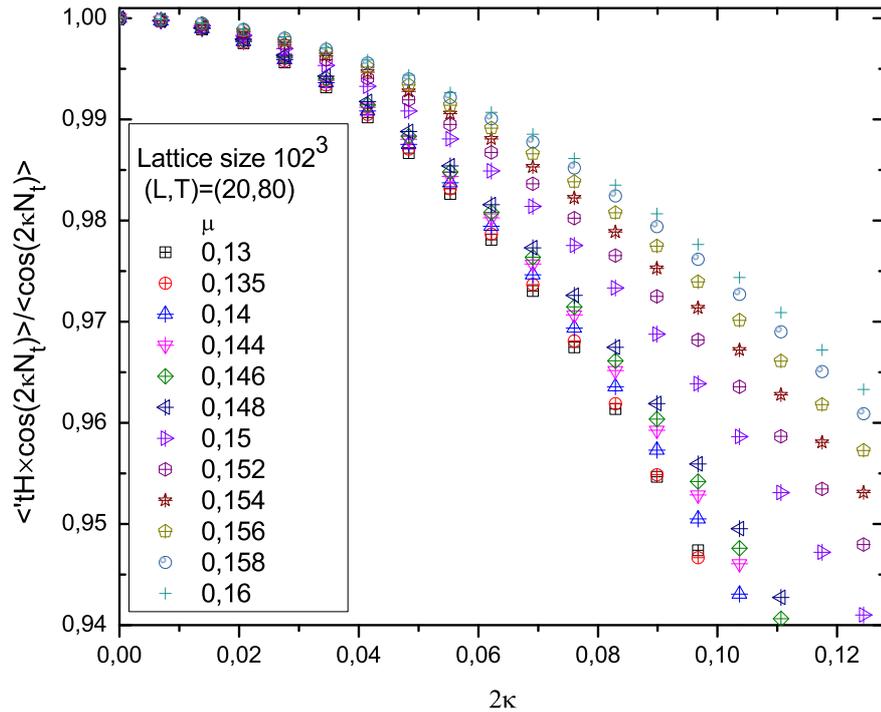


Figure 5.63 – Valeur moyenne de la boucle de 't Hooft en présence du terme de Chern-Simons en fonction de κ pour différentes valeurs de la masse de vortex μ .

La figure 5.63 montre un résultat préliminaire du comportement de la valeur moyenne de la boucle de 't Hooft en fonction de la constante de couplage de Chern-Simons (κ) pour un réseau 102^3 . Nous constatons que celle-ci dépend fortement de la constante (κ); elle décroît lorsque (κ) augmente.

5.4.6 Discussion et conclusion

En ajoutant le terme de Chern-Simons de constante de couplage κ faible au modèle de Higgs abélien en (2+1) dimensions dans la phase de symétrie brisée, nous avons donc fait l'approximation que ce terme est une perturbation au modèle initial tel que les excitations topologiques trouvés initialement persistent toujours en sa présence. Nous avons investigué le nombre d'enlacement total des boucles de vortex dû à ce terme et considéré sa contribution dans l'action effective. La boucle de Wilson montre qu'il n'y a pas de dépendance sur κ et donc sur le terme de Chern-Simons. Cependant, dans la nouvelle phase pour les petites valeurs de la masse des vortex, cette conclusion est valable pour les petites valeurs de κ seule-

ment à cause du fait que la phase de Chern-Simons s'annule. Il serait intéressant d'investiguer dans l'analyse de la boucle de 't Hooft et de comparer nos résultats avec la littérature.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à investiguer la théorie effective du modèle de Higgs abélien en $(2 + 1)$ dimensions sans et avec le terme de Chern-Simons. Nous avons considéré la phase de symétrie brisée du modèle de Higgs abélien, ensuite, nous avons pris la limite où les masses des bosons scalaire et de jauge deviennent très grandes de telles sorte qu'elles se découplent du reste du spectre de la théorie. Cette limite correspond au couplage fort $(\lambda, e \rightarrow \infty)$ tout en gardant la constante (η) et le rapport (λ/e^2) finis. Dans ces limites, les seules particules importantes sont les excitations topologiques, à savoir, les paires de vortex-antivortex dans un espace bidimensionnel. La continuation de ces paires de vortex dans la troisième direction forme des boucles de vortex fermées. Elles sont caractérisées par leur masse μ et leur longueur L dans la troisième direction. L'action effective Euclidienne correspondante est le produit de la masse des vortex et de la longueur totale des boucles de vortex. En ajoutant le terme de Chern-Simons de constante de couplage (κ) , nous considérons que les configurations des boucles de vortex générées dans le modèle initial sans sa présence ne sont pas modifiées en sa présence. Son effet est de rendre compte du nombre d'enlacement entre toutes les paires des boucles de vortex. L'action effective du terme de Chern-Simons est le produit de sa constante de couplage (κ) fois le nombre d'enlacement total de toutes les paires de boucles. Cette action est imaginaire en considérant la théorie Euclidienne.

Nous nous sommes donnés comme objectif d'analyser numériquement cette théorie effective et de rechercher de nouvelles phases topologiques en l'absence et en présence du terme de Chern-Simons, particulièrement, la phase de confinement prédite par Samuel. Nous avons commencé par construire notre réseau tridimensionnel de boucles de vortex fermées sans interaction. Pour cela, nous avons considéré le réseau comme une structure cubique centrée. Ensuite, dans une maille élémentaire, nous avons généré des tétraèdres, douze au total. Cette maille est translattée dans les trois directions du réseau formant ainsi une structure tétraédrique pour le réseau. Nous avons associé aux vertex du réseau des pseudo-spins qui sont

les trois racines cubiques de un. Avec notre méthode, il a été possible d'associer un flux de vortex aux faces triangulaires de la structure tétraédrique et de l'orienter. Le flux traversant des faces triangulaires consécutives se referme sur lui même formant ainsi des boucles fermées orientées. Dans une deuxième étape, nous avons généré des méthodes et algorithmes pour calculer sur le réseau le nombre d'enlacement total des boucles fermées. Nous avons utilisé les méthodes de simulations par Monte Carlo pour calculer sur le réseau toutes les quantités physiques importantes et paramètres d'ordre du modèle. En introduisant le terme de Chern-Simons, l'exponentiel de l'action Euclidienne imaginaire due à ce terme ne peut être utilisé directement dans la méthode de simulation de Monte Carlo comme une densité de probabilité. Les configurations ont été pesées par ce facteur de phase au moment de l'évaluation des paramètres d'ordre.

En absence du terme de Chern-Simons, nos résultats numériques montrent une évidence d'une nouvelle phase du modèle de Higgs abélien 3-d à la frontière qui correspond au cas de couplage fort et à la phase de Higgs brisée spontanément. Pour les grandes valeurs de la masse des vortex, la configuration du vide est remplie de petites boucles correspondant à la phase de Higgs brisée. Quand la masse diminue il y a formation de boucles de plus en plus longues. Au point de la transition correspondant à la valeur de la masse $\mu = 0.15$, il apparaît une boucle infinie qui remplit tout l'espace. L'étude de la longueur moyenne des boucles en fonction de leur masse, comme paramètre d'ordre, a permis de discerner cette transition. Par ailleurs, l'étude de l'opérateur boucle de Wilson ainsi que l'opérateur boucle de Polyakov n'a montré aucun signe de confinement dans la nouvelle phase caractérisée par la présence de la boucle infinie. Cette étude a, toutefois, confirmé la loi périmètre qui caractérise la phase brisée de Higgs.

En examinant de plus près les travaux de Samuel [7], on s'aperçoit qu'il associa aux boucles de vortex un champ auxiliaire Ψ . Il démontra que la valeur moyenne de la boucle de Wilson pour des charges externes placées dans le système de boucles de vortex peut être écrite sous forme d'intégrales fonctionnelles en terme de ce champ auxiliaire Ψ (voir équation (3.3)). À l'aide d'un calcul analytique semi classique, et

en posant l'hypothèse, sans pour autant la justifier, qu'il y a brisure de symétrie topologique ($\langle \Psi \rangle = \Psi_0 \neq 0$), cette valeur moyenne de la boucle de Wilson montre une dépendance logarithmique du potentiel (voir équation (3.4)). Autrement dit, quand la brisure de symétrie topologique a lieu, le vide est rempli de boucles de vortex jusqu'à ce que les forces répulsives se manifestent. Dans ce cas, il y a une restauration de la symétrie (U(1)) originale et donc de la force 2-d Coulombienne entre les charges externes. Notre résultat ne s'accorde pas avec celui de Samuel. Nous n'observons pas cette force Coulombienne. La loi périmètre que nous avons trouvée indique que la force est écrantée. D'abord, notre théorie effective n'est pas décrite en terme de ce champ auxiliaire Ψ . De plus, les hypothèses de Samuel ne sont pas justifiées. Par ailleurs, notre taux de remplissage de boucles dans le réseau n'excède pas 44 pour cent. En conséquence, il est difficile de comparer entre les deux modèles ou même de confirmer que nous avons atteint la limite dont Samuel analysa en admettant que son analyse est correcte.

La transition de phase que nous avons observée a été aussi décrite par Einhorn et Savit [55]. Ce groupe étudia la version discrète sur réseau du modèle de Higgs abélien en terme des champs de jauge et de Higgs et en terme de ses excitations topologiques dans des dimensions Euclidiennes arbitraires. En trois dimensions Euclidiennes, les excitations topologiques sont les boucles de vortex fermées et les boucles de vortex joignant des monopoles dans le cas où les champs de jauge sont compactes. Analytiquement, il calcula l'énergie libre des boucles de vortex fermées et ouverts de longueur L . En utilisant le critère de marches aléatoires, il montra que lorsque la température augmente et pour une valeur critique, il y a une transition de phase de boucles de vortex de longueurs finies vers des boucles de vortex de longueurs infinies. De plus, les structures topologiques de longueurs importantes ont des probabilités d'existence qui décroissent exponentiellement en fonction de L . Ce groupe spécula présence de loi d'aire pour la boucle de Wilson dans ce cas-ci.

Par ailleurs, Fradkin et Shenker [58] ont démontré analytiquement qu'il n'y a pas de transition entre la phase de Higgs et la phase de Coulomb. Cependant, ce groupe a étudié la version compacte du modèle de Higgs abélien en trois dimensions.

Des simulations ont été réalisées dans [59] pour le modèle abélien de Higgs 3-d sur un réseau de taille (16^3) pour extraire le potentiel de confinement entre les charges testées placées dans le modèle. Il semble qu'il y a présence d'un potentiel à longue portée (potentiel Coulombien). Cependant les simulations réalisées ne semblent pas être convaincantes à cause de la dimension du réseau si petite. Dans ce cas, elle engendra des effets importants du volume fini.

En présence du terme de Chern-Simons, nous avons investigué la distribution du nombre d'enlacement total des boucles de vortex fermées en fonction de la masse des vortex ainsi que la phase due au terme de Chern-Simons qui apparaît dans le poids de Boltzmann donné par l'exponentiel de l'action effective. Lorsque la masse des vortex augmente, la largeur de la distribution du nombre d'enlacement total décroît; elle décroît rapidement au delà du point de la transition ($\mu = 0.15$) pour s'annuler quand la masse devient grande. Quant à la phase de Chern-Simons comme fonction de (κ) , elle décroît rapidement vers zéro pour des petites valeurs de la masse des vortex ($\mu \leq 0.15$), alors qu'elle reste autour de un pour les grandes valeurs de la masse. En conséquence, la valeur moyenne de la boucle de Wilson démontre une indépendance par rapport à la constante de couplage de Chern-Simons à l'intérieur de la région où la phase de Chern-Simons est non nulle. L'énergie libre du modèle effectif de Higgs abélien 3-d avec terme de Chern-Simons est indépendante du terme de Chern-Simons. Analytiquement, nous avons donné une explication plausible à cela. Tandis que la valeur moyenne de la boucle de 't Hooft montre une dépendance par rapport à la constante de couplage (κ) .

Ainsi, les résultats que nous avons trouvés en l'absence de Chern-Simons restent valables en sa présence et donc il n'y a pas de signe de confinement même en présence du terme de Chern-Simons. La loi périmètre pour la boucle de Wilson et la boucle de 't Hooft que nous avons trouvée impliquerait la présence de particules sans masses. Cependant, notre théorie effective décrit des particules avec masse. Donc nous avons trouvé une phase exceptionnelle.

Par ailleurs, dans une prochaine étape, notre objectif serait d'ajouter des champs de jauge dans le réseau, particulièrement les champs de jauge Z_3 . Sur le réseau tétraédrique, cela engendrait des configurations avec trois tuyaux de flux sortant d'un tétraèdre et entrant dans le tétraèdre voisin. Ce genre de configurations devrait donner le confinement linéaire, nous spéculons ! Aussi, il serait spectaculaire de trouver l'effet Hall quantique fractionnaire. Dans le moment présent, seuls les anyons sont simulés. Donc il reste beaucoup à faire !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964), *ibid.* Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964), *ibid.* Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [2] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [3] A. Rajantie, Physica **B255**, 108 (1998); M. Chavel, Phys. Rev. Lett. **B378** 227 (1996); M. G. Amaral and M.E. Pol, Z. Phys. **C44**, .
- [4] R. MacKenzie, Path integrale methods and applications, arXiv : quant-ph/0004090v1.
- [5] H. J. Rothe, Lattice gauge theories-An introduction, World Scientific Publishing, (1992).
- [6] P. W. Irwin and M. B. Paranjape, arXiv :hep-th/9906021.
- [7] S. Samuel, Nucl. Phys. **B154**, 62 (1979).
- [8] R. Rajaraman. Solitons and instantons. North-Holland publishing company (1982).
- [9] H.B. Nielsen and P.Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
- [10] C. Lee, K. Lee and H. Min, Self-Dual Maxwell Chern-Simons Solitons, Phys. Lett. **B252** (1990) 79.
- [11] J. Edelstein, C. Nunez and F. Schaposnik, Supersymmetry and Bogomolnyi Equations in the Abelian Higgs Model, Phys. Lett.**B329**,39 (1994).
- [12] M. Bogomolnyi, Soviet J of Nucl. Phys. **24**, 449, (1976).
- [13] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cosmic strings and other topological defects, Cambridge University Press (1994).
- [14] J. Preskill, Vortices and Monopoles, edition (1987).
- [15] V. Poitras, Memoire de maitrise en physique, universite de Montreal (2006).

- [16] C. M. Taubes, Arbitrary N-Vortex solutions to the first order Ginzburg-Landau equations, *Comm. Math. Phys.* **72**, 277 (1980).
- [17] G. V. Dunne, Aspects of Chern-Simons theory, arXiv :hep-th/9902115v1 ; G. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*, Springer (1995).
- [18] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Topologically Massive Gauge Theory, *Ann. Phys. (NY)* **140**, 372 (1982).
- [19] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
- [20] A. M. Polyakov, Fermi-Bose Transmutations induced by gauge fields, *Modern Phys. Lett. A*, Vol.3, No.3 (1988) 325.
- [21] S. Paul and A. Khare, Charged Vortices in an Abelian Higgs Model with Chern-Simons Term, *Phys. Lett. B* **174**, (1986) 420.
- [22] Garnic Alexanian, R. MacKenzie, M. B. Paranjape, and Jonathan Ruel, Path integration and perturbation theory with complex Euclidean action, arXiv :0802.0354v2 [hep-th].
- [23] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2250 (1983).
- [24] H. Flanders, *Differential Forms with applications to the physical sciences*, Academic Press, New York. London (1963).
- [25] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [26] P. J. Hilton, *An introduction to homotopy Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1953).
- [27] voir par exemple dans, [http ://fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org).
- [28] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher and M. E. J. Newman, ‘The theory of critical phenomena- an introduction to the renormalization group’, Clarendon Press, Oxford, (1992).
- [29] M. Creutz, *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge University Press (1999).

- [30] I. Montvay, G. Munster, Quantum fields on a lattice. Cambridge University Press (1994).
- [31] L.E. Reichl. A modern course in statistical physics. A Wiley-Interscience publication (1998).
- [32] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery. Numerical recipes in C. Cambridge University Press (2005).
- [33] D. P. Landau and K. Binder, A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. Cambridge University Press, (2000).
- [34] C. Janicki. Theories de jauge sur reseau et simulations de Monte Carlo. Memoire d'examen predoctoral Physique. Universite de Montreal (1984).
- [35] Metropolis N., A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).
- [36] J. Richer, PhD, analyste at Reseau quebecois de calcul de haute performance-Universite de Montreal.
- [37] [http : //en.wikipedia.org/wiki/Linking_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number).
- [38] M. A. Berger and C. Prior, The writhe of open and closed curves. J. Phys. A : Math. Gen. 39 (2006)8321-8348.
- [39] R. C. Lacher and D. W. Sumners. Data structures and algorithms for computation of topological invariants of entanglements : Link, Twist, and Writhe. Computation Simulation study of the collapse transition...
- [40] [http : //www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/MT/emt.html](http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/MT/emt.html).
- [41] Random number generator of Tezuka and L'Ecuyer : ACM Trans. Modeling and Computer Simulation, 1 (1991) 99-112.
- [42] ACM SIGAda Ada Letters archive, Volume VIII ,Issue 2 (1988) 110-112.
- [43] K. Wilson, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
- [44] L. Jacobs and C. Rebbi, prb, 19,4486,1979.

- [45] D. Mitchell and N. Turok, Phys. Rev. Lett. **58**, 1577 (1987).
- [46] Richard MacKenzie, F. Nebia-Rahal, and M. B. Paranjape, arXiv :0710.3236 [hep-lat]. Submitted for publication to PRD.
- [47] M. Sakellariadou, Nucl. Phys. **B468**, 319 (1996); M. Sakellariadou and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D37**, 885 (1988); A.G. Smith and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D36**, 990 (1987); T.Vachaspati and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D30**, 2036 (1984).
- [48] N. Madras and G. Slade. The self-Avoiding Walk. Birkhuser, Boston (1993).
- [49] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An introduction to quantum field theory. Westview Press 1995.
- [50] S. Coleman, Aspects of symmetry, Cambridge University press. (1999).
- [51] M.-P. Lombardo, Finite temperature field theory and phase transition, ArXiv :hep-ph/0103141v2.
- [52] C. DeTar, Quark gluon plasma in numerical simulation of lattice QCD, hep-ph/9504325.
- [53] A.M.Polyakov, Nucl. Phys. **B120**, 429 (1977).
- [54] P. W. Anderson, Phys. Rev. **130**, 439 (1963).
- [55] M. Einhorn and R. Savit, Phys. Rev. **D19**, 1198 (1979).
- [56] M. Creutz, L. Jacobs, and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **42**, 1390 (1979); Phys. Rev. **D20**, 1915 (1979).
- [57] G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B138**, 1 (1978).
- [58] E. Fradkin and S. Shenker, Phys. Rev. **D 19**, 3682 (1979).
- [59] M. N. Chernodub, F. V. Gubarev and M. I. Polikarpov, Phys. Lett. B **416**, 379 (1998), [arXiv :hep-lat/9704021].

Annexe I

Phase transitions in a 3 dimensional lattice loop gas

Phase transitions in a 3 dimensional lattice loop gas

Richard MacKenzie^a, F. Nebia-Rahal^a, and M. B. Paranjape^{a,b}

^a*Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal,
C.P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7 and*

^b*Center for Quantum Spacetime, Department of Physics,
Sogang University, Shinsu-dong #1, Mapo-gu, Seoul, 121-742, Korea*

We investigate, via Monte Carlo simulations, the phase structure of a system of closed, non-intersecting but otherwise non-interacting, loops in 3 Euclidean dimensions. The loops correspond to closed trajectories of massive particles and we find a phase transition as a function of their mass. We identify the order parameter as the average length of the loops at equilibrium. This order parameter exhibits a sharp increase as the mass is decreased through a critical value, the behaviour seems to be a cross-over transition. We believe that the model represents an effective description of the broken-symmetry sector of the 2+1 dimensional abelian Higgs model, in the extreme strong coupling limit. The massive gauge bosons and the neutral scalars are decoupled, and the relevant low-lying excitations correspond to vortices and anti-vortices. The functional integral can be approximated by a sum over simple, closed vortex loop configurations. We present a novel fashion to generate non-intersecting closed loops, starting from a tetrahedral tessellation of three space. The two phases that we find admit the following interpretation: the usual Higgs phase and a novel phase which is heralded by the appearance of effectively infinitely long loops. We compute the expectation value of the Wilson loop operator and that of the Polyakov loop operator. The Wilson loop exhibits perimeter law behaviour in both phases implying that the transition corresponds neither to the restoration of symmetry nor to confinement. The effective interaction between external charges is screened in both phases, however there is a dramatic increase in the polarization cloud in the novel phase as shown by the energy shift introduced by the Wilson loop.

PACS numbers: 11.15.Ha, 11.15.-q, 11.15.Ex, 04.60.Nc, 05.70.Fh, 02.70.Ss

I. INTRODUCTION

Although it is one of the simplest gauge theories, the abelian Higgs model is of substantial theoretical interest [1, 6]. It corresponds to scalar electrodynamics consisting of a charged scalar field and a neutral vector field which is the gauge boson of a $U(1)$ local gauge symmetry. It can be defined in any number of space-time dimensions.

In 1+1 dimensions, the general absence of spontaneous symmetry breaking [2] poses a puzzle as to the manifestation of the $U(1)$ symmetry for the naively spontaneously broken sector. Indeed, topological vortices play the role of instantons and give rise to tunnelling transitions which end up disordering the vacuum [3]. The symmetry is actually restored; however, a $U(1)$ gauge theory in 1+1 dimensions is classically linearly confining. Consequently, charged states are hidden in neutral bound states.

In 2+1 dimensions, the compact version of the theory behaves quite differently than the non-compact version. A $U(1)$ gauge theory can be thought of as a theory either with gauge group $U(1)$ living on the compact manifold S^1 , or with gauge group R^1 , (the real numbers under addition) living on the non-compact manifold R^1 . The compact theory, in the unbroken phase, shows linear confinement of charges, instead of the classically expected logarithmic potential [7], due to magnetic monopoles which act as instantons. The actual details of the mechanism of this confinement are rather complicated and we will not describe them here. In the non-compact case, magnetic monopoles do not exist; hence the expression of the

symmetry should be along more traditional lines: either the symmetry is manifest with a logarithmic potential between charged particles, or it is spontaneously broken and the interaction is screened. In principle, the theory could even be linearly confining for fractionally charged external sources.

The classically spontaneously broken sector of the non-compact theory in 2+1 dimensions will be of interest in this article. Here, the theory has topological solitons, Nielsen-Olesen [8] vortices, which tend to disorder the vacuum. Vortex lines in a type II superconductor [6] are examples of physical phenomena which are well described by such solitons. Looking at the 3-dimensional Euclidean version of the theory, these vortices extend to tubes of quantized magnetic flux. For these configurations to have relevance to the functional integral, finiteness of the action requires that they form closed loops. The contribution of such closed vortex loops to the expectation value of the Wilson loop [9] was computed, at strong coupling, in a heuristic semi-classical analysis by Samuel [10]. There it was proposed that, if the vortices are light enough, they should effectively condense, giving rise to a novel phase, what was called the “spaghetti vacuum.” What this means is that contributions to the Euclidean functional integral come preponderantly from configurations which are full of vortex loops. It was further deduced that there should be a logarithmic potential induced between external charges. Such a potential is in fact confining: it takes an infinite amount of energy to move two particles infinitely far away from each other, although it is not *linearly* confining. A phase transition go-

ing from the standard symmetry broken phase to a novel phase corresponding to a disgorging of vortex tubes into the vacuum has also been proposed by Einhorn and Savit [11] in their study of the lattice abelian Higgs model.

In this paper we study, by means of Monte Carlo simulations on a lattice [9, 12], a discretized, *effective* version of the abelian Higgs model. This amounts to the study of a gas of loops on a lattice with Boltzmann weight corresponding to the total length of the loops. We find indeed that there is a rather sharp transition from small average loop length to a configuration with an effectively infinite loop, the average loop length showing a remarkable increase. This kind of transition is very reminiscent of percolation type transitions[13]. In the Abelian Higgs model interpretation the transition is from the standard Higgs phase to a novel phase characterized by saturation of the functional integral by configurations that are filled with vortex flux loops. We do not however find the corresponding classical logarithmic potential induced between external charges [10]. External charges are still screened; however, we find that the energy of the screening cloud increases dramatically.

II. EFFECTIVE ABELIAN HIGGS MODEL AT STRONG COUPLING

The abelian Higgs model is described by the Lagrangian density

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi(D^\mu\phi)^* - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (1)$$

where ϕ is a complex scalar field, A_μ is a $U(1)$ gauge field, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$) and λ, e and η are taken to be positive constants. This theory undergoes spontaneous symmetry breaking appended by the Higgs mechanism yielding a perturbative spectrum of a massive vector boson with mass $M = e\eta$ and a neutral scalar boson with mass $m = \sqrt{2\lambda}\eta$.

Additionally, the theory contains vortex solitons of quantized magnetic flux in this sector. Their mass behaves like $\mu = \eta^2 \times f(2\lambda/e^2)$ [14], where $f(2\lambda/e^2)$ is a function that satisfies $f(1) = 1$, but can take any positive value as a function of λ/e^2 . We can take the strong coupling limit $\lambda, e \rightarrow \infty$ while keeping η and λ/e^2 fixed. This decouples the perturbative excitations, $m, M \rightarrow \infty$, leaving only the vortices as the effective excitations. As was shown in [8], in this limit, the size of the vortices vanishes and their world lines resemble perfect, fundamental strings. We will only study the abelian Higgs model in the description afforded by this effective model. The phase structure of the effective model must be the same as that of the original abelian Higgs model sufficiently deep in the strong coupling regime. Thus our results will shed light on the asymptotic region of the strong coupling limit of the abelian Higgs model.

In the lowest approximation, neglecting gradient energies due to curvature, the action is given by $\mu \times L$ for

a closed loop of length L . The Euclidean vacuum-to-vacuum amplitude is obtained by functionally integrating over field configurations that correspond to the following Euclidean time histories: they are the classical vacuum configuration at the initial time, contain a number of virtual vortex anti-vortex pairs at intermediate steps, and revert back to the classical vacuum configuration at the final Euclidean time. Thus, in this limit, the abelian Higgs model is equivalent to a gas of massive particles that carry a conserved flux; these particles are non-interacting except when they are in close proximity. All other excitations and their interactions are negligible. Thus the functional integral is evaluated by integrating over field configurations corresponding to closed vortex loops [10], indeed a 3 dimensional loop gas. We will calculate this integral by a numerical Monte Carlo simulation on a lattice discretized version of this effective theory.

III. LATTICE LOOPS

On the lattice, it is not straightforward how to construct closed loops. We construct closed loops by starting with a tessellation of Euclidean 3-space with (non-regular) tetrahedra. To generate this tessellation, we start with a body-centered cubic (bcc) lattice in a box of size $N = N_s^2 N_\tau$. Joining the central vertex in each cube with its corners fills each cube with 6 identical pyramids with square bases given by the faces of each cube. Splitting each pyramid in half yields two irregular tetrahedra and the desired tessellation. To define the splitting, we start with the cube with one vertex at the origin, extending into the positive octant. We cut each face from the origin to the opposite diagonal corner in the (x, y) (y, z) and the (z, x) plane respectively. Then we translate this scheme throughout the lattice. This converts each pyramid into two (identical) non regular tetrahedra, giving a total of 12 tetrahedra in each cube. All points inside the box fall into one tetrahedron or another, except for the set of measure zero which resides on the surfaces of the tetrahedra. Therefore we have filled space with tetrahedra.

Loops are generated by distributing the three cube roots of unity over the vertices of the tessellation. A given triangular face is associated with an oriented length of vortex tube piercing it and going to the center if the change of phase about the triangle corresponds to $\pm 2\pi$, using the right hand rule. If a triangular face of a given tetrahedron has the cube roots of unity distributed on the vertices so that one unit of flux enters the tetrahedron, with a little reflection it is easy to see that assigning any cube root of unity to the fourth vertex of the tetrahedron necessarily defines one unit of flux exiting the tetrahedron through another of its triangular faces, passing from the center of the original tetrahedron to the center of the neighbouring one. But since space is filled with tetrahedra this exiting flux tube enters the neighbouring tetrahedron, and repeating the argument it

must exit this tetrahedron, entering a third tetrahedron, and so on. It is topologically impossible for the vortex line to end; it must ultimately close on itself, forming a closed loop, since the lattice is made up of only a finite number of tetrahedra. The resulting configuration is a system of closed vortex loops which are by construction non-intersecting, since it is also topologically impossible for two vortices to enter the same tetrahedron. A similar scheme was originally implemented on a cubic lattice [15] for cosmic strings. There, one could have two vortex lines entering a cube and two exiting it, although it was impossible to resolve the path of the vortex lines inside the cube. Our tetrahedral dissection of the cube resolves this ambiguity.

The actual Euclidean geometrical length of the loop will depend on the explicit trajectory that the loop takes since the distances between the centers of neighbouring tetrahedra are not all the same. For a long loop, these geometrical factors average out, simply giving a renormalization of the value of μ , which includes the lattice spacing. The corresponding effective action is $S_{\text{eff}} \propto (\mu \times L_T)$ where the L_T is the number of triangles through which the loop passes, where by abuse of notation we use the same symbol μ to represent the mass times the lattice spacing. We will call L_T the length of the loop. The shortest closed loop has $L_T = 4$ while the maximum is $L_{T,\text{max}} = 12N_s^2N_\tau$.

IV. MONTE CARLO SIMULATIONS

Our simulations are performed on a bcc cubic lattice with $N_s = 100$, $N_\tau = 100$ and μ from 0 to 1.5 using Monte Carlo simulations [17, 18]. We begin with an initial arbitrary configuration of closed loops. Then we use the standard Metropolis algorithm to generate an ensemble of configurations which follow the Boltzmann distribution with weight given by $(e^{-\mu L_T})$.

A. Thermalization

In Fig. 1, on a semi logarithmic scale, we show the convergence of the total length of loops L_T versus Monte Carlo time (updates) for several values of μ and $N_\tau = 100$. Our unit of time corresponds to one complete update of each site of the 100^3 bcc lattice. The equilibrium state does not depend on the initial state, but it is strongly dependent on μ . The average total length and the absolute fluctuations grow as μ is decreased, but the relative fluctuations diminish.

B. Numerical evidence for a change in phase

In Fig. 2, we show the expectation value of the total length of loops $\langle L_T \rangle$ as a function of inverse μ on a logarithmic scale. We see that there is a dramatic change

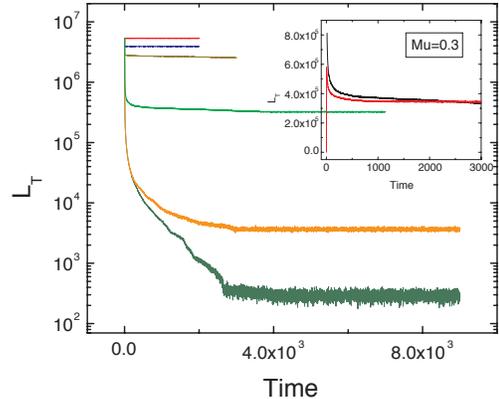


FIG. 1: (color online) Total length of loops as a function of time for 100^3 bcc lattice. From top to bottom, $\mu = 0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.9, 1.5$. Insert displays $\mu = 0.3$, for two different initial configurations.

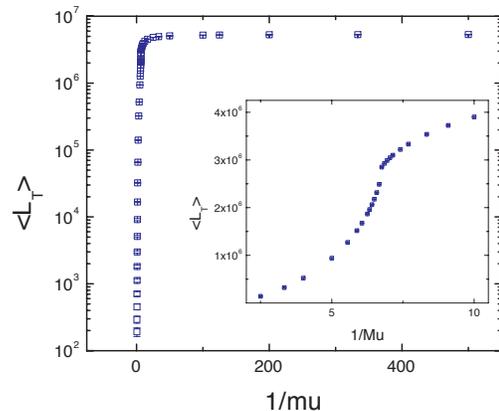


FIG. 2: (color online) Expectation value of the total length of loops as a function of μ , $0 \leq \mu \leq 1.5$, with the insert focussing on the region of the transition.

in the curve around $\mu = 0.15$ indicating a transition in the system. We define the total density of the loops ρ as the ratio of the computed L_T to $L_{T,\text{max}}$. The transition corresponds to the appearance of effectively infinite loops in the simulation. If the simulation could be done in infinite space, at the transition a truly infinite loop would appear. Infinitely long loops [15] in a finite volume are operationally defined as those loops having a length L , much longer than that they would normally have if they corresponded to a closed, self-avoiding random walk. The size of a self-avoiding random walk on a simple cubic lattice behaves as $L \sim 3/5$, closing the loop adds one constraint which should not greatly modify this scaling law. Actually it is found that the exponent should be slightly

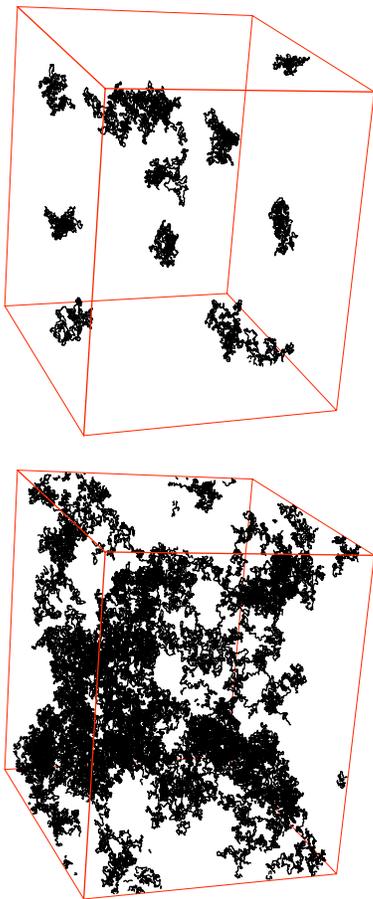


FIG. 3: (color online) Snapshots of the closed loops generated in equilibrium phase for 100^3 bcc lattice. Identification of the axes is arbitrary. (Top): Only the largest closed loops are displayed for $\mu = 0.152$, $1400 \leq L \leq 3000$. (Bottom): Larger loops are formed after the transition (see text) as shown for $\mu = 0.148$; the closed loop shown has $L \simeq 155500$.

less than $3/5$ on a cubic lattice, but the exact value is not analytically known[19]. On our 100^3 bcc lattice, with the tetrahedral trajectories, it is not clear how the size of self avoiding, closed random walks would exactly scale with their length. However, taking the cubic lattice result as a guide, simple calculation yields $200^{5/3} \approx 6840$, where 200 is the number of steps from one side to the other of our lattice, hopping from the corner of a cube to the center, back to the next corner and so on. Therefore we treat any loop of length substantially greater than 10000 as an infinite loop.

Fig. 3 shows snapshots of closed vortex loops, with periodic boundary conditions, generated in the equilibrium phase before the transition, for $\mu = 0.152$ (top) where only finite closed loops are present, and after the transition, for $\mu = 0.148$ (bottom) where larger closed loops are formed. For a better visualization, only some loops are presented, as otherwise the picture looks completely black, filled with vortex loops. There is some theoretical understanding of this phenomenon in thermodynamical

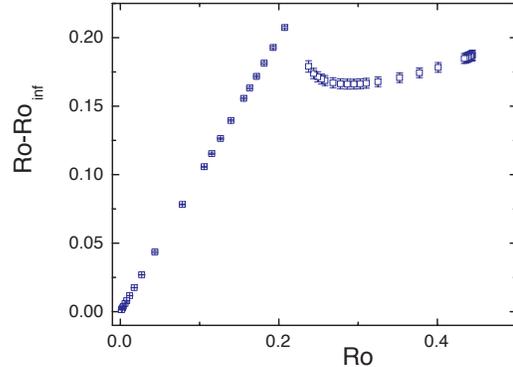


FIG. 4: (color online) Density of finite loops as a function of the total density for $0 \leq \mu \leq 1.5$.

studies of a network of cosmic strings. The authors of [20] have noted that at formation, the density of states of cosmic strings in the early Universe is dominated by a large loop containing most of the energy with a thermal distribution of finite, low mass, strings. This density distribution was also described by the authors in [15]. The number of microstates available to the system is much greater when reorganized as a large number of finite loops augmented by one infinite loop. The density at which this happens corresponds to the Hagedorn temperature and the transition corresponds to the Hagedorn phase transition [16]. In the cosmological situation, as the Universe expands the phase space favours configurations where all the strings are chopped off into the smallest possible loops.

In Fig. 4, we graph the density of finite loops. For small values of the total density, there are no infinite loops; hence the curve is linear with slope 1. We see a dramatic transition around $\rho = 0.207$ which corresponds to $\mu = 0.152$. At the transition there is a sudden reorganization of the vortex loops into one infinitely long loop and a number of finite loops. Remarkably, the increase in the total density/length of loops caused by further decreasing μ occurs only by appending to the infinitely long loop, the density of finite vortex loops remaining essentially constant.

V. ORDER PARAMETERS

We want to analyze the nature of the novel phase and to study the system around the transition point. For that, we turn to the following observables as order parameters: the average length of the loops, the Wilson loop operator [9] and the Polyakov [7] loop operator.

A. Length of the average loop

The average length of the loops, $\langle L \rangle$, that make up the ensemble of equilibrium configurations shows a remarkable transition as a function of μ . Below we plot $\langle L \rangle$ as a function of $\ln \mu$. We observe that the transition occurs at

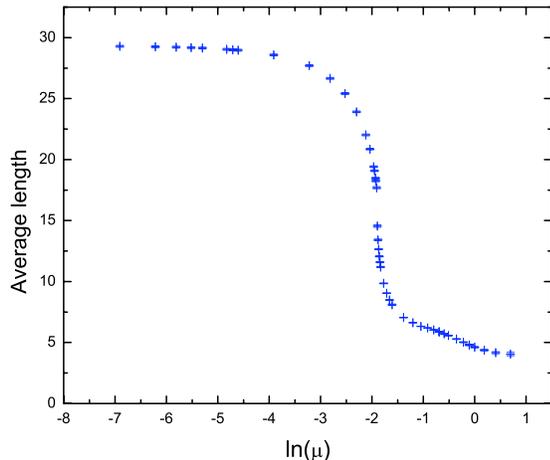


FIG. 5: (color online) Average length of the loops as a function of $\ln(\mu)$.

$\ln(\mu) \approx -1.9 \approx \ln(0.15)$, exactly at the point where the effectively infinite loop appears. Continuing the figure to larger values of $\ln(\mu)$ is not feasible as the equilibrium configuration is not easily obtained. The Monte Carlo process of attaining equilibrium is asymptotically slowed.

B. Wilson loop

The Wilson loop operator corresponds to inserting into the system two static, equal but opposite charges q , separating them by a distance L for a duration T with ($T \gg L$), and then annihilating them. The expectation value of Wilson loop operator is given by

$$W(L, T) = \left\langle e^{-i \oint A_\mu dx_\mu} \right\rangle, \quad (2)$$

where the integration is over the rectangular Wilson loop ($L \times T$) contour. For our effective model a dramatic simplification occurs, $\oint A_\mu dx_\mu$ exactly measures 2π times the linking number ν of the Wilson loop with the closed vortex loops:

$$W(L, T) = \left\langle e^{-i(2\pi q/e)\nu} \right\rangle. \quad (3)$$

For large T , $W(L, T) \sim e^{-\Delta(L) \cdot T}$, where $\Delta(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} -(1/T) \ln(W(L, T))$, the energy shift, is the interaction energy of the static $q\bar{q}$ pair separated by a distance L [9]. In the usual Higgs phase, we expect that

finite closed vortex loops will give a perimeter behaviour for the expectation value of Wilson loop operator, which means that the charges are screened. In the novel phase, however, the infinitely long vortex loops could give a contribution that has no relation to the perimeter.

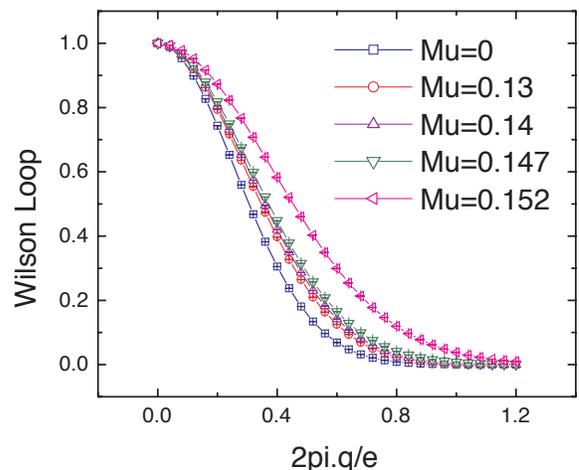
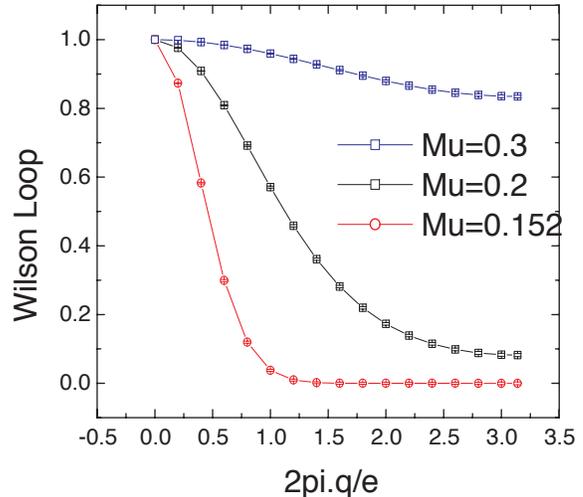


FIG. 6: (color online) Wilson loop $W(L = 20, T = 80)$ as a function of $2\pi q/e$ from 0 to π for $\mu = 0.3, 0.2, 0.152$ (upper) and $\mu = 0, 0.13, 0.14, 0.147, 0.152$. (lower)

Figures 6 - 8 shows our results for the numerical calculation of the potential between $q\bar{q}$. In Fig. 6 we start with the calculation of the Wilson loop operator $W(L, T)$ for $0 \leq 2\pi q/e \leq 2\pi$ for various values of μ in the Higgs phase in the upper graph for $\mu = .3$ to the border of the phase transition at $\mu = .152$ and in the lower graph in the novel phase for $\mu = .152$ to $\mu = 0$. We note that the curve moves rapidly from the borderline value at $\mu = 0.152$ to that deep in the Higgs phase at $\mu = 0.3$, conversely there is very little movement from the transition at $\mu = .152$ to $\mu = 0$.

The energy shift at finite T , $\Delta(L, T)$, is analyzed for

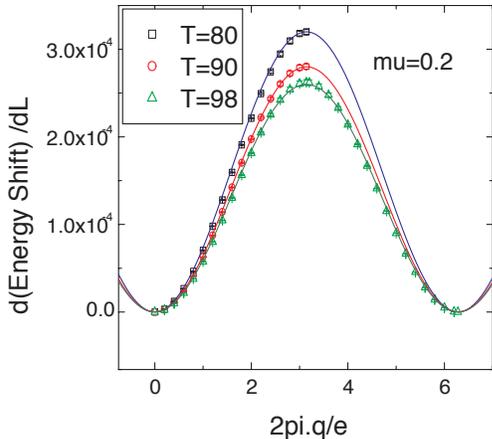


FIG. 7: (color online) $d\Delta/dL$ as a function of $2\pi q/e$ for $T = 80, 90, 98$. The data points are our numerical results for $\mu = 0.2$. The solid lines are the fit of the form $C(T) \sin^2((2\pi q/e)/2)$.

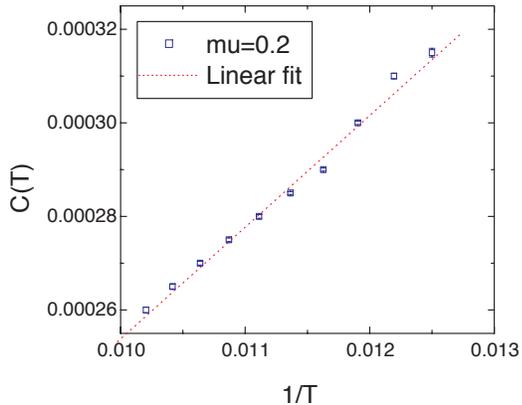


FIG. 8: (color online) $C(T)$ as a function of $1/T$, $\mu = .2$. The dotted line is the linear fit

the value $\mu = .2$ in the Higgs phase, shown in the Fig. 7. The energy shift should be a periodic function of the external charge q ; the expected form is $\sim \sin^2((2\pi q/e)/2)$ [21]. A perimeter law then would imply

$$\Delta(L, T) = A(T) \cdot \sin^2((2\pi q/e)/2)(L + T)/T, \quad (4)$$

while an area law would give

$$\Delta(L, T) = B(T) \cdot \sin^2((2\pi q/e)/2)(L \times T)/T. \quad (5)$$

In general, we allow a sum of the two behaviours and $A(T) \rightarrow A$ and $B(T) \rightarrow B$ independent of T as $T \rightarrow \infty$. Then

$$d\Delta(L, T)/dL \rightarrow (A/T + B) \sin^2((2\pi q/e)/2) \quad (6)$$

$$\equiv C(T) \sin^2((2\pi q/e)/2) \quad (7)$$

should be independent of L . The dots correspond to our numerical simulation; the solid lines correspond to the

fit. In Fig. 8, the T dependence of $C(T)$ is displayed; it is a linear function of $1/T$. The extrapolation of the curve to $T \rightarrow \infty$ yields $C(\infty) = 0$, *i.e.* $B = 0$. This means that there is only the perimeter law behavior for the Wilson loop operator in the Higgs phase.

In the novel phase, for $\mu \leq 0.152$, the Wilson loop, as a function of $2\pi q/e$, does not vary greatly with μ . It decreases as $x \equiv 2\pi q/e$ approaches approximately 0.98 where it vanishes. This implies that the interaction energy of the external charges is so large that our numerical analysis is not able to resolve its value, within the resolution permitted by our lattice approximation. It does not by any means imply confinement. In the novel phase we cannot use the simple function $\sin^2((2\pi q/e)/2)$ to give the dependence on q . However we can easily see that the Wilson loop is independent of the area. In Fig. 9 we plot the Wilson loop as a function of L for a loop of size $(L, 100 - L)$ *ie.* for a fixed value of the perimeter, and for a fixed value $2\pi q/e = .4$. It is evident that the value of the Wilson loop does not vary.

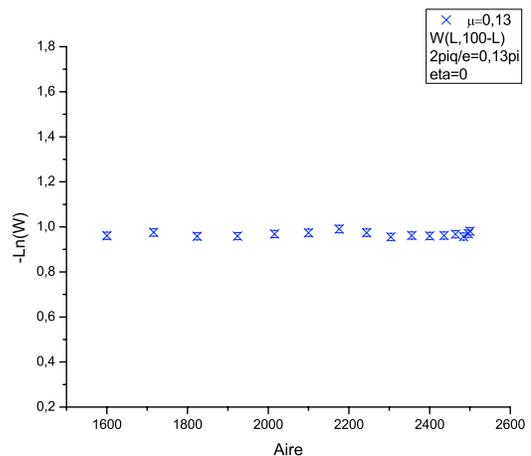


FIG. 9: (color online) Wilson loop $W(L, T = 100 - L)$ as a function of area for $\mu = .13$.

To compare the novel phase with the Higgs phase, we can look at the distribution of the linking number, ν , of the Wilson loop. The histogram for the distribution of the linking number are given in Figures 10 and 11 for $\mu = .13$ and $\mu = .17$ respectively. Such histograms were calculated for different values of μ on either side of the transition and for different sizes of the Wilson loop. In Fig. 12 we plot the variance σ^2 , of the histograms as a function of the perimeter, $L + T$ for $L = 40$ and T varying. Clearly we find a perimeter law for the variance.

The expectation value of Wilson loop is constructed from the histograms of linking number of the Wilson loop. We compute $e^{i(2\pi q/e) \times \nu}$ for each value of the linking number ν , weigh that phase with the number of configurations with that value of ν , and then sum over all linking numbers. This actually corresponds to calculat-

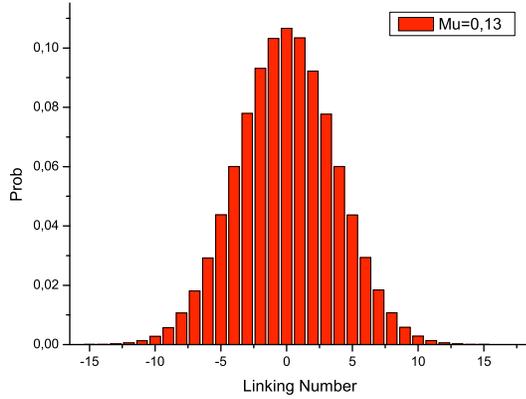


FIG. 10: (color online) Histogram of the Wilson loop linking number ν for $W(L, T = 40, 80)$ for $\mu = .13$ in the novel phase.

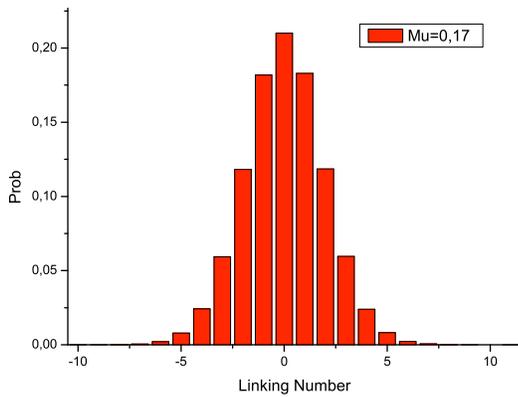


FIG. 11: (color online) Histogram of the Wilson loop linking number for $W(L, T = 40, 80)$ for $\mu = .17$ in the Higgs phase.

ing the characteristic function of the probability distribution function for the linking number [22]. Clearly this gives a sum of phases which are distributed over the unit circle in a manner depending on the exponent. If the $\sigma \times 2\pi q/e$ is of the order of $o(1)$, the phases are essentially randomly distributed over the unit circle, and the characteristic function vanishes. This is seen in Fig. 6 (lower graph) where the expectation value of the Wilson loop crashes to zero for $2\pi q/e \sim .6$ in the novel phase, when the variance suddenly becomes large. This behaviour is to be contrasted with that in the Higgs phase where the expectation value is a smooth sinusoidal function of $2\pi q/e \in [0, 2\pi]$ as seen in Fig. 6 (upper) for $\mu > .152$.

The perimeter law for the variance does translate into a perimeter law for the Wilson loop. In Fig. 13 and 14, for $\mu = .2$ in the Higgs phase and for $\mu = .13$ in the novel phase, we plot the the log of the expectation of the Wilson loop as a function of the perimeter. We see a perimeter law for the Wilson loop and a linear behaviour of the derivative of the energy shift in both phases. We

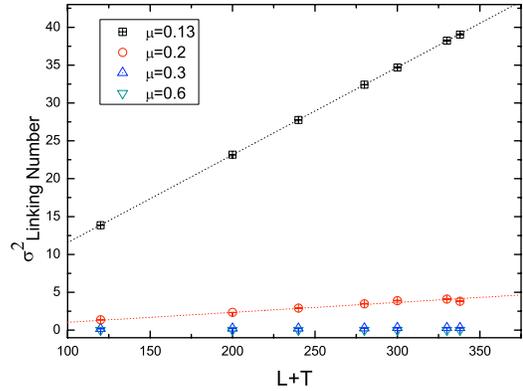


FIG. 12: (color online) Plots of the variance as a function of the perimeter for $\mu = .13, .2, .3$ and $.6$. The dashed lines are a linear fit.

do our analysis for a fixed value of $2\pi q/e = .4$.

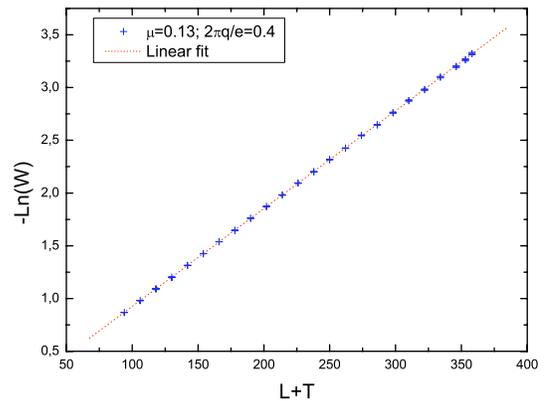


FIG. 13: (color online) Plot of $-\ln(W)$ for $\mu = .13$. The dashed lines are a linear fit, we find $-\ln(W) = .009280(\pm 4 \times 10^{-6}) \cdot (L + T) + .00350(\pm 5 \times 10^{-4})$

The conclusion we can make is that there is a dramatic increase in the polarization cloud surrounding the external charges as one passes from the Higgs phase to the novel phase. From Fig. 13 and 14 we see that the coefficient for the perimeter law for $\mu = .13$ in the novel phase is approximately 9 times larger than that for $\mu = .2$. Indeed, we can construct graphs analogous to Figs. 13, 14 for many values of μ and plot the parameter C , which is the slope of the line in the graph of $-\ln(W)$ versus $L + T$. We find a sharp cross over at the transition as shown in Fig. 15, indicating the almost ten-fold increase of the polarization cloud energy.

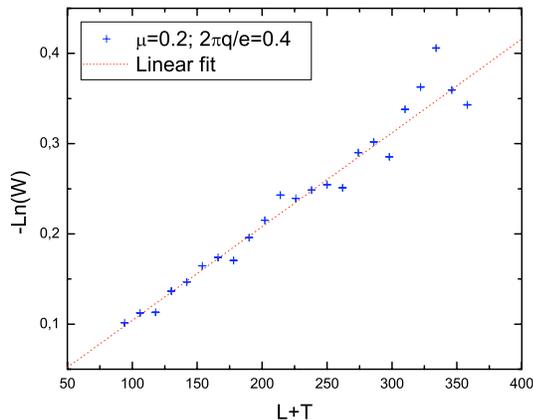


FIG. 14: (color online) Plot of $-\ln(W)$ for $\mu = .2$. The dashed lines are a linear fit, we find $-\ln(W) = 0,001030 \pm (3 \times 10^{-7})(L + T) + 8,7 \times 10^{-4} \pm (5 \times 10^{-5})$

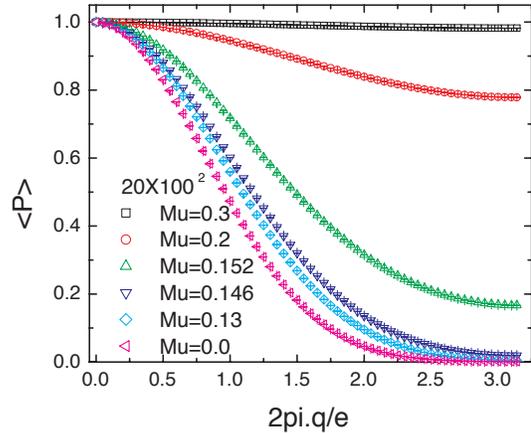


FIG. 16: (color online) Polyakov loop for various values of μ for a lattice 20×100^2 .

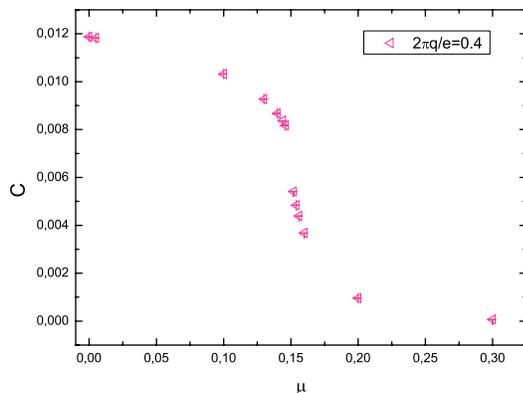


FIG. 15: (color online) Plot of the parameter C as a function of μ at fixed q .

C. Polyakov loop

At finite temperatures, one looks at the behaviour of the Polyakov loop operator, which is defined as the Wilson loop variable taken along the entire (periodic) time direction N_τ for a fixed spatial position \vec{x} . This is related to the free energy of the system, F_q , in the presence of a single heavy quark by [23]: $\langle P(\vec{x}) \rangle = e^{-\beta F_q}$. In Fig. 16, we see the behavior of the expectation value of the Polyakov loop operator $\langle P \rangle$ mirrors almost exactly the behaviour of the Wilson loop as in Fig. 6. The position of the transition has changed to a smaller value of μ , and at a larger value of $2\pi q/eas$ should be expected, because the temperature has been increased, corresponding to a Euclidean time direction of length 20.

VI. SCALING STUDY

In any lattice simulation, it is important to use a lattice which is sufficiently large to eliminate finite size effects. In Fig. 17, the mean total length of loops as a function of μ is displayed for various lattice sizes; normalizing by the maximum possible length of loops Fig. 18, we see that it is independent of the lattice size, as expected. We find that the transition point occurs for $\mu \approx 0.15$ for all lattices larger than 10^3 , so the lattice size used in this study (100^3) is amply sufficient.

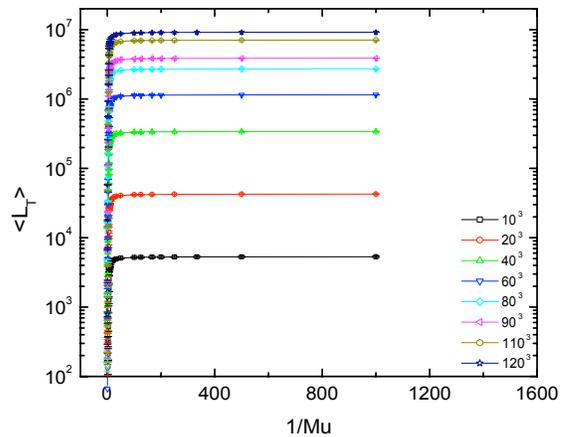


FIG. 17: (color online) Mean total length of loops $\langle L_T \rangle$ for various lattice sizes.

In Fig. 19, the density of finite loops versus the total density is illustrated, for various lattice sizes. The large error bars are only present for the smaller lattices sizes,

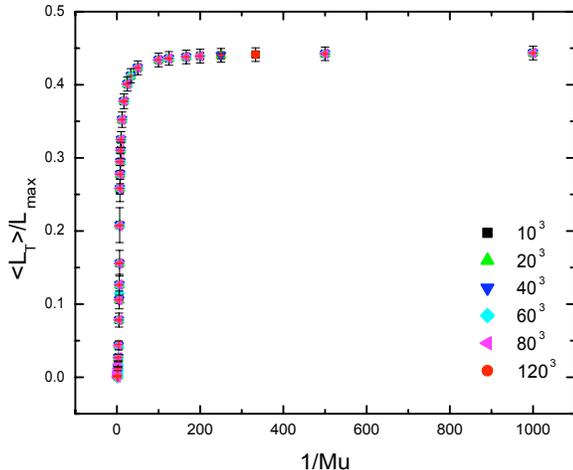


FIG. 18: (color online) Normalized mean total length of loops $\langle L_T \rangle / L_{max}$ for various lattice sizes.

$10^3, 20^3$, already at 40^3 we approach a consistent size independent density as a function of μ . For lattices sizes greater than $\approx 90^3$, the results are essentially independent of the lattice size. Finally in Fig. 20 the expectation value of two sizes of Wilson loop are displayed for various lattices sizes for $\mu = 0.13$ as a function of $2\pi q/e$. Again, the results are clearly independent of the lattice size.

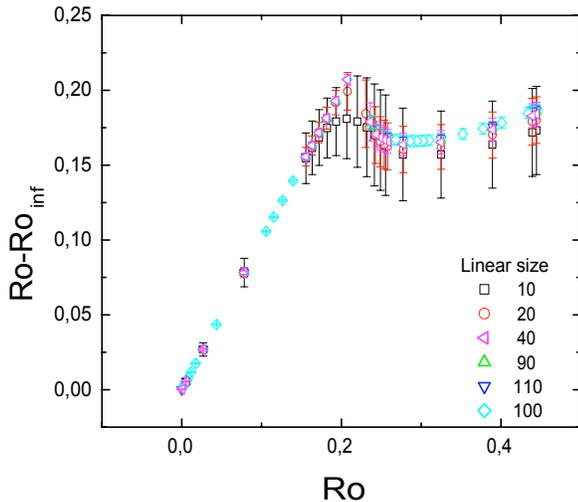


FIG. 19: (color online) Density of finite loops as a function of the total density for various lattice sizes.

Therefore we conclude that using a lattice considerably larger than 40^3 , and especially the size 100^3 that was used for most of the simulations are perfectly adequate to remove all finite size effects.

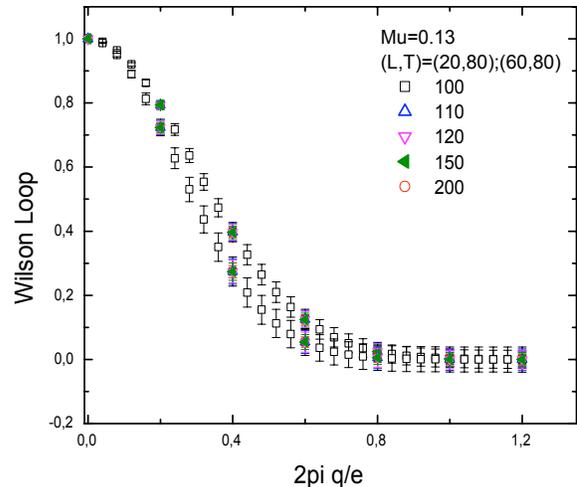


FIG. 20: (color online) $W(L, T)$ for $\mu = 0.13$ for various lattice sizes.

VII. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

Our results show numerical evidence for a novel phase in the phase diagram of the 3-d abelian Higgs model at the asymptotic boundary corresponding to strong (infinite) coupling in the spontaneously broken Higgs phase. At strong coupling the perturbative massive excitations, corresponding to the gauge boson and the neutral scalar, are completely decoupled. The only remaining particle is the vortex, which is an adjustable parameter. For a large mass of the vortex, the vacuum configuration is saturated by short loops of virtual vortex anti-vortex pairs. As this mass is lowered, the vacuum is filled with longer and longer virtual vortex anti-vortex pair loops. Finally at a critical value, there is a transition to a novel phase, in which the vortex loops reorganize into one effectively infinite loop in addition to a bath of smaller finite loops.

In the Higgs phase, external charges are screened due to a polarization cloud which leads to a perimeter law for the Wilson loop, external charges are not confined. Smaller than a critical value for the mass of the vortices, the polarization cloud increases dramatically causing the energy shift as defined by the Wilson loop to increase 9-10 fold. The Wilson loop behaviour however, remains the perimeter law, contrary to the behaviour that was surmised in [10]. Since we have decoupled all perturbative excitations of the scalar field, including specifically charged excitations, it is in principle possible for the Wilson loop to exhibit linear confinement. We explicitly find no dependence on the area for the Wilson loop. We find that the Wilson and Polyakov loop order parameters both vanish after a large enough value of the external charge, however this simply means that our lattice calculation is not able to resolve the details of its behaviour.

The novel phase is characterized by the appearance of an effectively infinite vortex loop. The individual finite

vortex loops suddenly reorganize at the transition into one infinite loop and a gas of remaining finite loops, as a function of μ . The total length of the loops increases as a function of decreasing vortex mass, primarily through appending to the infinite vortex loop. This novel phase was predicted by [10] and also in [11]. In [11] the transition is described as the passage between the phases labelled VII and I.

In [24] it was proven that there is no transition between the Higgs phase and the Coulomb phase, however, they look strictly at the compact version of the model. We are considering the non-compact model here, the analysis for non-existence of confinement does not apply. Unfortunately, we do not find any evidence of confinement, even for fractionally charged external charges. Numerical work similar to ours was also undertaken by [25], however they did not see our phase. There are two differences between our simulation and theirs. First, we simulate only the effective model; hence, our results are valid only on the asymptotic boundary of the full phase diagram of the Abelian Higgs model whereas they [25], simulate directly the gauge fields and scalar fields. Second, the limits taken are slightly different: we take $\lambda, e \rightarrow \infty$ keeping λ/e^2 fixed, whereas they take first $\lambda \rightarrow \infty$ and only afterwards do they take $e \rightarrow \infty$. Hence we go to the corner of the phase diagram (in λ and e space) along a particular fixed line, while they go up to the rectangular edge first (at

$\lambda = \infty$) and then move along the edge (taking $e \rightarrow \infty$) to the corner. It is clearly possible the two limiting procedures do not commute. Furthermore, their numerical work was done on a 16^3 lattice, which, according to our scaling analysis, most probably will exhibit finite size effects. The existence of the novel phase is expected to have important ramifications for the phase structure of the model in the presence of the Chern-Simons term [26].

VIII. ACKNOWLEDGEMENTS

We thank NSERC of Canada and the Center for Quantum Spacetime of Sogang University with grant number R11-2005-021 for financial support. We thank Yvan Saint-Aubin, Jeong-Hyuck Park, and David Ridout for useful discussions and we thank Jacques Richer, of the Réseau québécois de calcul de haute performance (RQCHP), Montréal, for paramount help with the programming and its implementation. We also thank the RQCHP for allocating computer time. Finally we thank the Perimeter Institute for Theoretical Physics and the (Kavli) Institute of Theoretical Physics of the Chinese Academy of Sciences for hospitality while the paper was being revised.

-
- [1] P. W. Anderson, Phys. Rev. **130**, 439 (1963).
 [2] P.C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967); N.D. Mermin, H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 11331136 (1966); Sidney Coleman, Comm Math. Phys. **31**, 259 (1973).
 [3] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4130 - 4138 (1974).
 [4] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964), *ibid.* Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964), *ibid.* Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
 [5] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
 [6] A. Rajantie, Physica **B255**, 108 (1998); M. Chavel, Phys. Rev. Lett. **B378** 227 (1996); M. G. Amaral and M.E. Pol, Z. Phys. **C44**, .
 [7] A.M.Polyakov, Nucl. Phys. **B120**, 429 (1977).
 [8] H.B. Nielsen and P.Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
 [9] K. Wilson, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
 [10] S. Samuel, Nucl. Phys. **B154**, 62 (1979).
 [11] M. Einhorn and R. Savit, Phys. Rev. **D19**, 1198 (1979), see also T. Banks, R. Myerson and J. Kogut, Nucl. Phys. **B129**, 493, (1977).
 [12] M. Creutz, L. Jacobs, and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **42**, 1390 (1979); Phys. Rev. **D20**, 1915 (1979).
 [13] Bollobas, Bela; Riordan, Oliver (2006), Percolation, Cambridge University Press, Grimmett, Geoffrey (1999), Percolation, Springer Verlag,
 [14] L. Jacobs and C. Rebbi, Phys. Rev. B , 19,4486,1979.
 [15] M. Sakellariadou, Nucl. Phys. **B468**, 319 (1996); M. Sakellariadou and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D37**, 885 (1988); A. G. Smith and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D36**, 990 (1987); T. Vachaspati and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D30**, 2036 (1984).
 [16] R. Hagedorn, Nuovo Cim. **A56**, 1027-1057,1968.
 [17] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher and M. E. J. Newman, 'The theory of critical phenomena- an introduction to the renormalization group', Clarendon Press, Oxford, (1992).
 [18] D. P. Landau and K. Binder, 'A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics', Cambridge University Press, (2000).
 [19] Madras, N. and Slade, G. 'The Self-Avoiding Walk', Birkhuser, Boston, (1993).
 [20] D. Mitchell and N. Turok, Phys. Rev. Lett. **58**, 1577 (1987), S. Frautschi, Phys. Rev. D **3**, 2821, (1971), R.D. Carlitz, Phys. Rev. D **5**, 3231, (1972).
 [21] S. Coleman, 'Aspects of symmetry', Cambridge University Press, (1999).
 [22] Bochner, Salomon, 'Harmonic analysis and the theory of probability', University of California Press, (1955).
 [23] H. J. Rothe, 'Lattice gauge theories - An introduction', World Scientific Publishing, (1992).
 [24] E. Fradkin and S. Shenker, Phys. Rev. **D 19**, 3682 (1979).
 [25] M. N. Chernodub, F. V. Gubarev and M. I. Polikarpov, Phys. Lett. B **416**, 379 (1998), [arXiv:hep-lat/9704021], see also E. T. Akhmedov, M. N. Chernodub, M. I. Polikarpov, and M. A. Zubkov, Phys. Rev. **53**, 2087, (1996) and M. I. Polikarpov, U. J. Wiese and M. A. Zubkov, Phys. Lett. **B309**, 133, (1993).
 [26] P. W. Irwin and M. B. Paranjape, [arXiv:hep-th/9906021].