

Université de Montréal

**Sélection de modèle d'imputation à partir de modèles
bayésiens hiérarchiques linéaires multivariés**

par

Djamila Chagra

Département de mathématiques et statistique
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de maîtrise
en statistique

Juin, 2009

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Sélection de modèle d'imputation à partir de modèles
bayésiens hiérarchiques linéaires multivariés

présenté par :

Djamila Chagra

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

David Haziza
président-rapporteur

Murua Alejandro
directeur de recherche

Mylène Bédard
membre du jury

Résumé

La technique connue comme l'imputation multiple semble être la technique la plus appropriée pour résoudre le problème de non-réponse. La littérature mentionne des méthodes qui modélisent la nature et la structure des valeurs manquantes. Une des méthodes les plus populaires est l'algorithme « Pan » de (Schafer & Yucel, 2002). Les imputations rapportées par cette méthode sont basées sur un modèle linéaire multivarié à effets mixtes pour la variable réponse. La méthode « BHLC » de (Murua et al, 2005) est une extension de « Pan » dont le modèle est bayésien hiérarchique avec groupes. Le but principal de ce travail est d'étudier le problème de sélection du modèle pour l'imputation multiple en termes d'efficacité et d'exactitude des prédictions des valeurs manquantes. Nous proposons une mesure de performance liée à la prédiction des valeurs manquantes. La mesure est une erreur quadratique moyenne reflétant la variance associée aux imputations multiples et le biais de prédiction. Nous montrons que cette mesure est plus objective que la mesure de variance de Rubin. Notre mesure est calculée en augmentant par une faible proportion le nombre de valeurs manquantes dans les données. La performance du modèle d'imputation est alors évaluée par l'erreur de prédiction associée aux valeurs manquantes. Pour étudier le problème objectivement, nous avons effectué plusieurs simulations. Les données ont été produites selon des modèles explicites différents avec des hypothèses particulières sur la structure des erreurs et la distribution a priori des valeurs manquantes. Notre étude examine si la vraie structure d'erreur des données a un effet sur la performance du choix des différentes hypothèses formulées pour le modèle d'imputation. Nous avons conclu que la réponse est oui. De plus, le choix de la distribution des valeurs manquantes semble être le facteur le plus important pour l'exactitude des prédictions. En général, les choix les plus efficaces pour de bonnes imputations sont une distribution de student avec inégalité des variances dans les groupes pour la structure des erreurs et une loi a priori choisie pour les valeurs manquantes est la loi normale avec moyenne et variance empirique des données observées, ou celle régularisé avec grande variabilité. Finalement, nous avons appliqué nos idées à un cas réel traitant un problème de santé.

Mots clés : valeurs manquantes, imputations multiples, modèle linéaire bayésien hiérarchique, modèle à effets mixtes.

Abstract

The technique known as multiple imputation seems to be the most suitable technique for solving the problem of non-response. The literature mentions methods that model the nature and structure of missing values. One of the most popular methods is the PAN algorithm of Schafer and Yucel (2002). The imputations yielded by this method are based on a multivariate linear mixed-effects model for the response variable. A Bayesian hierarchical clustered and more flexible extension of PAN is given by the BHLC model of Murua et al. (2005). The main goal of this work is to study the problem of model selection for multiple imputation in terms of efficiency and accuracy of missing-value predictions. We propose a measure of performance linked to the prediction of missing values. The measure is a mean squared error, and hence in addition to the variance associated to the multiple imputations, it includes a measure of bias in the prediction. We show that this measure is more objective than the most common variance measure of Rubin. Our measure is computed by incrementing by a small proportion the number of missing values in the data and supposing that those values are also missing. The performance of the imputation model is then assessed through the prediction error associated to these pseudo missing values. In order to study the problem objectively, we have devised several simulations. Data were generated according to different explicit models that assumed particular error structures. Several missing-value prior distributions as well as error-term distributions are then hypothesized. Our study investigates if the true error structure of the data has an effect on the performance of the different hypothesized choices for the imputation model. We concluded that the answer is yes. Moreover, the choice of missing-value prior distribution seems to be the most important factor for accuracy of predictions. In general, the most effective choices for good imputations are a t-Student distribution with different cluster variances for the error-term, and a missing-value Normal prior with data-driven mean and variance, or a missing-value regularizing Normal prior with large variance (a ridge-regression-like prior). Finally, we have applied our ideas to a real problem dealing with health outcome observations associated to a large number of countries around the world.

Keywords: Missing values, multiple imputation, Bayesian hierarchical linear model, mixed effects model.

Table des matières

Résumé.....	III
Abstract.....	IV
Liste des Figures.....	VIII
Liste des Tableaux.....	X
INTRODUCTION.....	1
Chapitre 1 : Notions théoriques pour l'imputation multiple.....	4
1.1 Introduction.....	5
1.2 Modèles linéaires multivariés.....	5
1.3 Solutions pour des bases de données incomplètes.....	7
1.3.1 Typologie de données manquantes.....	7
1.3.2 Techniques d'estimation en présence de données manquantes.....	8
1.3.2.1 Esperance-Maximisation (EM).....	8
1.3.2.2 Stratégie bayésienne.....	9
1.3.2.3 MCMC (Markov Chain Monte Carlo).....	10
1.3.2.3.1 Échantillonnage de Gibbs.....	10
1.3.2.3.2 Augmentation de données.....	11
1.3.2.3.1 Algorithme MCMC.....	13
1.4 Imputation Multiple (IM).....	14
1.4.1 Règle de combinaison pour les m ensembles complétés par IM.....	14
1.5 Calcul inférentiel suite à l'imputation multiple.....	15
1.5.1 Formule de Rubin.....	15
1.5.2 Calcul de la variance à partir d'une mesure de distance.....	16

Chapitre 2 : Méthodes d'imputations multiples.....	22
2.1 Introduction.....	23
2.2 Algorithme « Pan ».....	23
2.2.1 Modèle d'imputation.....	23
2.2.2 Principe d'imputation... ..	24
2.3 Algorithme « BHLC ».....	26
2.3.1 Modèle proposé... ..	26
2.3.2 Principe.....	27
2.3.4 Loi a priori.....	28
Chapitre 3 : Étude par Simulations et Résultats.....	30
3.1 Introduction.....	31
3.2 Les simulations.....	32
3.2.1 Facteurs à effets significatifs.....	32
3.2.2 Comparaison entre « Pan » et « BHLC ».....	33
3.2.3 Sélection du modèle d'imputation.....	34
3.2.4 Cas particulier.....	36
3.3 Description et analyse des résultats.....	38
3.3.1 Facteurs à effets significatifs.....	38
3.3.2 Comparaison entre « Pan » et « BHLC »	43
3.3.3 Sélection du modèle d'imputation	50
3.3.4 Cas particulier.....	57
Chapitre 4 : Application.....	65
4.1 Introduction.....	66
4.2 Données.....	66
4.3 Modèle d'imputation et loi a priori.....	66
4.4 Analyse des résultats.....	68

Conclusion	72
Bibliographie.....	74
Annexe 1 : Algorithmes	i
Annexe 2 : Résultats	xii

Liste des Figures

Figure 3.1 Diagrammes en boîtes pour les 1024 biais regroupés selon les facteurs : Information sur les groupes, typologie et fraction de valeurs manquantes.....	38
Figure 3.2 Diagrammes en boîtes pour $\log(T_1)$ et $\log(T_2.estimée)$	38
Figure 3.3 : Graphique des effets pour la mesure de variances $\log(T_1)$	41
Figure 3.4 : Graphique des effets pour la mesure de variances $\log(T_2.estimée)$	41
figure 3.5 Graphique des effets les plus significatifs.....	42
Figure 3.6 : Diagrammes en boîtes pour les variances moyennes et biais moyens pour « Pan » et « BHCL ».....	43
Figure 3.7 : Nuages de points pour les valeurs de biais pour « Pan » et « BHLC ».....	44
Figure 3.8 : Graphique des résidus pour T_1	45
Figure 3.9 : Graphique des effets pour T_1	46
Figure 3.10 : Graphique des résidus pour $T_2.estimée$	47
Figure 3.11: Graphique des résidus pour $T_2.vraie$	47
Figure 3.12 : Graphique des résidus pour la différence entre T_1 et $T_2.estimée$	49

Figure 3.13 : Diagrammes en boîtes pour $\log(T_1)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation.....	50
Figure 3.14 : Diagrammes en boîtes pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation.....	50
Figure 3.15: Diagrammes en boîtes pour $\log(T_1)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation.....	51
Figure 3.16: Graphiques des résidus et des effets pour la statistique $\log(T_1)$	52
Figure 3.17 : Graphiques des résidus et des effets pour $T_2.estimée$	54

Liste des Tableaux

Tableau 3.1 : Facteurs principaux pour la génération des données.....	31
Tableau 3.2 : Randomisation de la loi a priori pour les deux carrés latins superposés.....	35
Tableau 3.3 : Résultats de l'analyse de variance pour $\log(T_1)$	40
Tableau 3.4 : Analyse de variance pour les effets sélectionnés	45
Tableau 3.5 : Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.estimée$	47
Tableau 3.6 : Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.vraie$	48
Tableau 3.7 : Résultats de l'analyse de variance de la différence entre T_1 et $T_2.estimée$	49
Tableau 3.8 : Résultats de l'analyse de variance pour $\log(T_1)$	53
Tableau 3.9 : Comparaisons multiples pour $\log(T_1)$ en fixant le facteur « modele ».....	53
Tableau 3.10 : Comparaisons multiples pour $\log(T_1)$ en fixant le facteur « erreur ».....	54
Tableau 3.11: Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.estimée$	55
Tableau 3.12 : Comparaison multiple pour $T_2.estimée$ en fixant le facteur « modele ».....	55
Tableau 3.13 : Comparaisons multiples pour $T_2.estimée$ en fixant le facteur « erreur ».....	55
Tableau 3.14: Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.vraie$	56
Tableau 3.15 : Comparaison multiple pour $T_2.vraie$ en fixant le facteur « modele ».....	57

Tableau 3.16: Comparaisons multiples pour $T_2.vraie$ en fixant le facteur « erreur »	57
Tableau 3.17 : Analyse de variance pour T_1	58
Tableau 3.18 : les valeurs moyennes de $\log(T_1)$ en fixant le facteur « modele »	58
Tableau 3.19 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_1)$ en fixant « modele ».....	59
Tableau 3.20 : les valeurs moyennes de $\log(T_1)$ en fixant le facteur « prior ».....	59
Tableau 3.21 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_1)$ en fixant « prior ».....	60
Tableau 3.22 : Analyse de variance pour $T_2.estimée$	60
Tableau 3.23 : Les valeurs moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « modele ».....	61
Tableau 3.24 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant « modele ».....	61
Tableau 3.25 : les valeurs moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « prior ».....	61
Tableau 3.26 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant « prior »	62
Tableau 3.27 : Analyse de variance pour $T_2.vraie$	62
Tableau 3.28 : Les valeurs moyennes de $\log(T_2.vraie)$ en fixant le facteur « modele ».....	62
Tableau 3.29 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_2.vraie)$ en fixant « modele ».....	63
Tableau 3.30 : Les valeurs moyennes de $\log(T_2.vraie)$ en fixant le facteur « prior ».....	63

Tableau 3.31 : Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_2.vraie)$ en fixant « prior ».....	63
Tableau 3.32 : Les estimateurs moyens de β en fixant le facteur « modele ».....	64
Tableau 4.1 : Analyse de variance pour T_1	69
Tableau 4.2 : Les moyennes de $\log(T_1)$ en fixant le facteur « prior ».....	69
Tableau 4.3 : Comparaisons multiples avec Tukey pour $\log(T_1)$ en fixant le facteur « prior ».....	70
Tableau 4.4 : Analyse de variance pour $\log(T_2.estimée)$	70
Tableau 4.5 : Les moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « prior ».....	70
Tableau 4.6 : Comparaisons multiples avec Tukey pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « prior ».....	71
Tableau A.1 : Résultats de l'analyse de variance de T_1 pour le plan factoriel complet avec répétitions corrélées.....	xiv
Tableau A.2 : Résultats de l'analyse de variance de $T_2.estimée$ pour le plan factoriel complet avec répétitions corrélées.....	xxiii
Tableau A.3 : Comparaisons multiples pour $T_2.estimée$ entre les deux facteurs « modele » et « erreur ».....	xxxii
Tableau A.4 : Comparaisons multiples pour $T_2.estimée$ entre les deux facteurs « modele » et « prior ».....	xxxiv

INTRODUCTION

De façon générale, le problème de bases de données incomplètes est présent depuis plusieurs décennies. À cet effet, il existe une multitude de procédures et stratégies d'estimation en présence des valeurs manquantes (Rubin, 1976; Little et Rubin, 1987; Laird, 1988; Little, 1992 et Schafer, 1997). D'autre part, le traitement des données manquantes par imputation est très utile dans la pratique. Nous reconnaissons que l'imputation multiple (IM) est la stratégie la plus fiable en termes de précision et d'efficacité. Certaines techniques d'IM exigent un modèle explicite pour des variables comportant des valeurs manquantes, liées aux variables observées et à certains paramètres inconnus. Ce modèle explicite donne lieu à une distribution prédictive a posteriori des valeurs manquantes. On mentionne l'existence de deux méthodes d'imputation multiples introduites récemment, la première est celle de (Schafer & Yucel, 2002) qu'on appelle « Pan » qui suppose que le modèle explicite est un modèle linéaire multivarié à effets mixtes, la deuxième est celle de (Murua *et al*, 2005) qu'on appelle « BHLC » dont le modèle explicite adopté est un modèle linéaire bayésien hiérarchique. Cette dernière donne la possibilité d'utiliser plusieurs hypothèses pour la distribution a priori des valeurs manquantes et la distribution de la fonction de vraisemblance pour l'estimation des paramètres du modèle adopté. L'adoption de plusieurs modèles pour la prédiction des valeurs manquantes nous a amené à poser des questions primordiales dans ce mémoire. Ces questions sont : comment et à partir de quel critère nous arrivons à sélectionner le modèle d'imputation le plus adéquat et le plus efficace et quel est l'effet de la structure des données sur ce choix. L'idée principale est d'évaluer différents modèles d'imputations en termes d'incertitude afin de sélectionner celui qui minimise la variabilité due à l'imputation multiple. Autrement dit, il s'agit de choisir le modèle d'imputation optimal en termes d'erreur quadratique moyenne obtenue en faisant les imputations multiples. Pour obtenir une mesure d'optimalité du modèle, on propose de générer de façon aléatoire des valeurs qu'on marquera « manquantes ». Un calcul basé sur une analyse de variance produit une mesure d'optimalité à partir des valeurs observées qui ont été marquées « manquantes » dans la simulation. Une première est

celle donnée par Rubin qui mesure la variance totale des valeurs imputées pour la même valeur manquante. Les deux autres variances sont basées respectivement sur les valeurs observées notée $T_2.estimée$ et sur la vraie moyenne des observations générées notée $T_2.vraie$. Les simulations montrent que la variance totale de Rubin ne mesure pas le biais dans les imputations. Elle est optimiste en prenant la moyenne des valeurs imputées comme estimation de la vraie valeur manquante. Par conséquent, ce mémoire se pose la question si en utilisant la variance $T_2.estimée$ au lieu de T_1 , on peut améliorer les valeurs imputées. D'une autre manière, la question posée est : est-ce que le choix du modèle d'imputation parmi d'autres considérés dans le mémoire peut réduire le biais de prédiction. D'autre part, on s'intéresse à savoir si le choix du modèle d'imputation qui fait une différence dans les valeurs imputées peut aussi faire une différence dans les paramètres du modèle de régression. La réponse à cette question est donnée d'une manière à faire ressortir tous les facteurs intervenant dans la mise en œuvre d'un modèle d'imputation.

À cet effet, un enchaînement de sections théoriques et pratiques vont clarifier le cheminement pour résoudre la problématique posée. Dans un premier temps, une vision théorique générale est donnée sur les modèles linéaires multivariés à effets mixtes, les modèles linéaires hiérarchiques, la typologie de données manquantes et quelques méthodes d'estimation en présence de données incomplètes sont développés dans le Chapitre 1. Par la suite, on définit dans le Chapitre 2 les deux algorithmes d'imputations avec modèle explicite « Pan » et « BHLC », en spécifiant leurs principes d'estimation et leurs modèles d'imputations.

La mise en œuvre d'une étude par simulation et l'analyse des résultats sont développées en détail dans le Chapitre 3. On parlera dans ce chapitre des plans d'expérience adoptés, de la façon dont les données sont générées, des mécanismes des valeurs manquantes et les différentes mesures de variabilité calculées après imputations. Et, à partir des analyses statistiques, on évalue les différents facteurs incorporés dans l'étude et les hypothèses préalablement assumées. Le Chapitre 4 présente une application à un cas réel des données associées à l'état de santé de plusieurs pays dans le monde. Ces

données proviennent d'une étude réalisée par (Murua et al, 2005). Elles correspondent à des combinaisons de variables démographiques, économiques, etc. Pour mesurer la précision des prédictions des valeurs manquantes, on augmente de 2% le nombre de valeurs manquantes réelles. Celles-ci sont utilisées pour calculer l'erreur quadratique moyenne de prédiction associée aux différents modèles fournis par l'algorithme « BHLC » afin de sélectionner les meilleures hypothèses de loi a priori pour les valeurs manquantes et de la structure des erreurs associées aux données.

Finalement, une dernière section est la conclusion qui résume les différents résultats obtenus. Selon le cas étudié, on va faire le point sur les facteurs principaux qui interviennent dans la mise en œuvre d'une méthode d'imputation multiple, le choix du modèle d'imputation et la loi a priori les plus efficaces pour une structure de données préalablement connue.

Chapitre 1

Notions théoriques pour l'imputation multiple

1.1 Introduction

Il existe plusieurs méthodes d'imputation multiple utilisant des modèles explicites pour l'estimation des paramètres inconnus et les valeurs manquantes. On cite deux techniques récentes qui sont la technique « Pan » de (Schafer & Yucel, 2002), et la technique « BHLC » (Murua et al, 2005). La première suppose que le modèle explicite d'imputation est un modèle linéaire multivarié à effets mixtes, alors que la deuxième se base sur un modèle linéaire multivarié hiérarchique (les détails sur ces deux méthodes sont donnés dans le Chapitre 2). Une définition claire et simple de ces deux modèles explicites sera nécessaire pour clarifier les notions utilisées ultérieurement. D'autre part, la mise en œuvre de ces techniques est basée sur des stratégies d'estimation en présence des valeurs manquantes qui sont l'algorithme EM et la méthode MCMC. Dans ce chapitre, on tente de donner toutes les notions théoriques concernant l'imputation multiple, ainsi que les méthodes de calcul de l'erreur quadratique moyenne de prédiction des valeurs manquantes.

1.2 Modèles linéaires multivariés

On considère deux types de modèles explicatifs pour l'estimation des valeurs manquantes qui sont décrits dans les sections 1.2.1 et 1.2.2.

1.2.1 Modèle linéaire mixte

Le modèle linéaire mixte (Laird & Ware, 1982) exprime la réalisation d'une variable réponse y comme suit :

$$\begin{aligned} y_i &= X_i\beta + Z_i b_i + \varepsilon_i; \\ b_i &\sim N_q(0, \Psi); \\ \varepsilon_i &\sim N_{n_i}(0, \Sigma); \end{aligned} \tag{1.1}$$

où

- y_i est un vecteur réponse pour les n_i observations du groupe i ou « cluster i ».
- β est un vecteur $p \times 1$ des coefficients à effets fixes.

- X_i est une matrice $n_i \times p$ des effets fixes pour les n_i observations du groupe i .
- b_i est un vecteur $q \times 1$ des effets aléatoires pour le groupe i .
- Z_i est une matrice $n_i \times q$ des effets aléatoires pour les n_i observations dans le groupe i .
- ε_i est un vecteur $n_i \times 1$ des erreurs pour les n_i observations dans le groupe i .
- Ψ est une matrice $q \times q$ de covariances des effets aléatoires.
- Σ est une matrice $n_i \times n_i$ de covariances entre les observations du groupe i .

1.2.2 Modèle linéaire hiérarchique

Le terme de modèle linéaire hiérarchique a été introduit par (Lindley et Smith, 1972) dans leur contribution sur l'estimation bayésienne pour des modèles linéaires. Il a été repris par (Bryk et Raudenbush, 1992) pour mettre en avant la caractéristique fondamentale de ces approches : la prise en compte de données ayant une structure hiérarchisée.

La méthode de collecte définit les multi-niveaux a considéré dans l'étude de la relation entre les variables réponse et les variables explicatives. Pour ne pas compliquer la définition, on prend comme exemple, un modèle hiérarchique à deux niveaux. On désigne par le niveau 1 la méthode de collecte des groupes, alors que le niveau 2 est relatif aux différents groupes. Cette structure hiérarchique des données permet d'écrire les coefficients de régression β et b_i sous les formes explicites suivantes :

$$b_i = \alpha W_i + \delta_i$$

$$\beta = \beta_0 + v,$$

où :

- W_i sont les covariables mesurées au niveau 2.
- δ_i sont les termes d'erreur pour le groupe i .
- v est le terme d'erreur pour l'effet fixe.

Cette approche permet de gérer l'hétérogénéité des régressions qui existe quand les relations (b_i) entre les variables explicatives et la variable expliquée varient entre les

groupes. Notons que les variables indépendantes W_i sont mesurées au niveau de chaque groupe. Elles expliquent les variations entre les modèles des groupes.

1.3 Solutions pour des bases de données incomplètes

Le problème de bases de données incomplètes a été posé depuis plusieurs décennies. La présence de valeurs manquantes rend l'estimation des paramètres biaisée. La recherche des solutions au problème sert à éviter les biais induit par l'exclusion des individus avec données manquantes. Dans ce qui suit, on exposera quelques notions sur la typologie des valeurs manquantes ainsi que les stratégies d'estimation en la présence de la non-réponse.

1.3.1 Typologie de données manquantes

La typologie de données manquantes a été établie par (Little & Rubin, 1987) en fonction du mécanisme d'observation. On cite trois catégories de la non-réponse :

- MCAR (Missing Completely At Random)

Les données sont dites MCAR si la probabilité de réponse ne dépend pas des autres variables.

- MAR (Missing At Random)

Les données sont dites MAR si la probabilité d'observer Y dépend seulement des variables explicatives complètement observées.

- MNAR (Missing Not At Random)

On dit que les données manquantes sont MNAR si la probabilité de réponse est indépendante de l'erreur du modèle d'imputation.

Nous distinguons deux structures de données manquantes. La première structure est dite monotone si par exemple Y_j est manquante pour un individu cela implique que toutes les variables Y_k pour $k \geq j$ sont manquantes pour cet individu. Contrairement à la première structure, la deuxième est dite non monotone.

1.3.2 Techniques d'estimation en présence de données incomplètes

Il existe plusieurs procédures traitant les données manquantes (Rubin, 1976; Little et Rubin, 2002; Laird, 1988; Little, 1992; Horton et Laird 1999). On donne l'explication en détails de trois procédures d'estimation en présence de non-réponse qui seront utiles pour la compréhension des techniques d'imputation multiple qu'on décrira ultérieurement.

1.3.2.1 Espérance-Maximisation (EM)

Espérance-Maximisation est un algorithme d'optimisation utilisé pour estimer les paramètres en présence de données incomplètes (Dempster, Laird et Rubin, 1977). Cette technique se définit en deux phases complémentaires qui sont les suivantes :

1. Étape-E : Espérance

Soit $Y = \{Y_{obs}, Y_{mis}\}$, l'ensemble des données réalisées où Y_{obs} est la partie complètement observée et Y_{mis} est la partie manquante. Partant de valeurs initiales des paramètres $\theta^{(0)}$, l'étape-E sert à compléter les données manquantes Y_{mis} par une espérance conditionnelle compte tenu des données observées Y_{obs} et les paramètres initiaux $\theta^{(0)}$. Donc pour chaque itération (i), l'étape E donne $Y_{mis}^{(i)}$ l'estimateur de la partie manquante comme suit :

$$Y_{mis}^{(i)} \rightarrow E(Y | Y_{obs}, \theta^{(0)}).$$

2. Étape-M : Maximisation

Dans cette deuxième étape, il s'agit de trouver dans chaque itération (i), les estimateurs optimaux $\theta^{*(i)}$ de θ , en maximisant le logarithme de la fonction de vraisemblance de la base de données complètes obtenue à l'étape-E.

$$\theta^{*(i)} = \text{Max}_{\theta} \ln L(\theta | Y_{obs}, Y_{obs}^{(i)}).$$

On répète ces deux étapes jusqu'à convergence de l'algorithme, c'est-à-dire jusqu'à ce que $\theta^{*(i)} \approx \theta^{*(i+1)}$.

Dans le cas de données multinormales composées de G groupes (G est le nombre de groupes), le logarithme de la fonction de vraisemblance $\ln L$ n'est rien d'autre que la somme des logarithmes des fonctions de vraisemblance $\ln L_g$ propre à chaque groupe qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\ln L(\theta | Y_{obs}) = \sum_{g=1}^G \ln L_g(\theta | Y_{obs}).$$

Notons que pour l'algorithme EM, on considère $E_{Y_{mis}}(\ln L | Y_{mis}, \bar{\theta})$.

1.3.2.2 Stratégie bayésienne

L'approche bayésienne exige un modèle explicite pour des variables contenant des valeurs manquantes avec des paramètres inconnus. Elle considère ces paramètres inconnus comme des variables aléatoires. D'ailleurs, c'est le seul point de différence entre cette approche et l'approche classique : une loi a priori pour les paramètres inconnus et un modèle explicite pour les valeurs manquantes. Le modèle explicite donne lieu à une loi prédictive a posteriori des valeurs manquantes liée aux valeurs observées. Notons que les imputations sont tirées à partir de cette loi prédictive a posteriori. L'idée de base repose essentiellement sur le théorème de Bayes qui écrit la loi conjointe comme le produit de la loi conditionnelle et de la loi marginale. Si on considère deux variables aléatoires θ et Y alors, selon Bayes, on peut écrire :

$$f(\theta, Y) = g(\theta | Y)h(Y) = h(Y | \theta)g(\theta),$$

d'où
$$g(\theta | Y) = \frac{h(Y | \theta)g(\theta)}{h(Y)}$$

avec

- $g(\theta | Y)$ est la loi prédictive a posteriori des paramètres d'intérêt.
- $h(Y | \theta)$ est la fonction de vraisemblance notée aussi $L(Y | \theta)$.
- $g(\theta)$ est la loi a priori des paramètres.
- $h(Y)$ est la distribution marginale des données.

Ainsi, on peut déduire la relation qui suit :

$$g(\theta | Y) \propto L(Y | \theta)g(\theta).$$

Notons que la loi a priori des paramètres ne dépend pas de l'information donnée par la partie observée contrairement à la loi a posteriori. Celle-ci sert à améliorer l'estimation des paramètres inconnus.

1.3.2.3 MCMC (Markov Chain Monte Carlo)

La méthode MCMC est une méthode d'échantillonnage à partir de distributions de probabilité, basée sur le parcours de chaînes de Markov qui ont pour lois stationnaires les distributions à échantillonner. Avant d'exprimer les détails spécifiques à cette méthode, il est nécessaire de définir quelques notions générales sur l'échantillonnage de Gibbs et l'augmentation de données.

1.3.2.3.1 Échantillonnage de Gibbs

Cette technique a été proposée par (Geman & Geman, 1984). C'est un algorithme basé sur la théorie des chaînes markoviennes. Le but principal de l'échantillonnage de Gibbs est de produire des tirages dans la loi conjointe à partir des tirages réalisés dans les distributions conditionnelles.

Le principe de cette méthode est défini comme suit: soit Z le vecteur de q variables aléatoires $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_q)$ et $f(Z)$ la fonction de sa densité conjointe.

L'échantillonnage de Gibbs simule itérativement la valeur présente de Z à partir de la distribution conditionnelle de chaque composante du vecteur Z sachant les valeurs précédentes du reste des composantes.

Supposons que $Z^{(t)} = (Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}, \dots, Z_q^{(t)})$ et $Z^{(t+1)} = (Z_1^{(t+1)}, Z_2^{(t+1)}, \dots, Z_q^{(t+1)})$ sont successivement les valeurs de Z aux étapes t et $t+1$ obtenues à partir des distributions conditionnelles suivantes :

$$Z_1^{(t+1)} \sim f(Z_1 | Z_2^{(t)}, Z_3^{(t)}, \dots, Z_q^{(t)})$$

$$Z_2^{(t+1)} \sim f(Z_2 | Z_1^{(t+1)}, Z_3^{(t)}, \dots, Z_q^{(t)})$$

$$:$$

$$:$$

$$:$$

$$Z_k^{(t+1)} \sim f(Z_k | Z_1^{(t+1)}, Z_2^{(t+1)}, \dots, Z_{k-1}^{(t+1)}, Z_{k+1}^{(t)}, \dots, Z_q^{(t)})$$

$$:$$

$$:$$

$$Z_q^{(t+1)} \sim f(Z_q | Z_1^{(t+1)}, Z_2^{(t+1)}, \dots, Z_{q-1}^{(t+1)})$$

On répète ce processus, jusqu'à qu'il y ait convergence. Les séquences ainsi obtenues $\{Z^{(t)} : t = 0, 1, 2, \dots\}$ proviennent d'une chaîne de Markov stationnaire avec la loi $f(Z)$.

1.3.2.3.2 Augmentation de données

L'augmentation de données proposée par (Tanner et Wong, 1987) est fortement liée à l'échantillonnage de Gibbs. Cette technique augmente les données à fin de faciliter le tirage à partir d'une distribution conjointe.

Supposons que Z est un vecteur aléatoire de dimension deux $Z = (U, V)$ dont la densité conjointe $f(z)$ est difficile à simuler, alors que les distributions conditionnelles $g(u | v)$ et $h(v | u)$ sont plus facile à estimer. Soit $z^{(t)}$ un échantillon de taille m tiré d'une distribution approximative de la distribution $f(z)$ tel que :

$$z^{(t)} = (z_1^{(t)}, z_2^{(t)}, \dots, z_m^{(t)})$$

$$z^{(t)} = ((u_1^{(t)}, v_1^{(t)}), (u_2^{(t)}, v_2^{(t)}), \dots, (u_m^{(t)}, v_m^{(t)})).$$

Le tirage est réalisé en procédant par les étapes suivantes :

Premièrement, on tire le vecteur

$$u^{(t+1)} = (u_1^{(t+1)}, u_2^{(t+1)}, \dots, u_m^{(t+1)})$$

à partir de la distribution conditionnelle

$$u_i^{(t+1)} \sim g(u | v_i^{(t)})$$

de façon indépendante pour $i=1, 2, \dots, m$.

Par la suite, on tire

$$v^{(t+1)} = (v_1^{(t+1)}, v_2^{(t+1)}, \dots, v_m^{(t+1)})$$

à partir de la distribution conditionnelle

$$v_i^{(t+1)} \sim h(v | u_i^{(t+1)})$$

de façon indépendante pour $i=1, 2, \dots, m$.

On obtiendra ainsi l'échantillon

$$z^{(t+1)} = ((u_1^{(t+1)}, v_1^{(t+1)}), (u_2^{(t+1)}, v_2^{(t+1)}), \dots, (u_m^{(t+1)}, v_m^{(t+1)})).$$

Selon (Tanner & Wong, 1987), la distribution de $Z^{(t)}$ ($Z^{(t)} \in R^{2m}$) converge vers $f(z)$ ($Z \in R^2$) quand $t \rightarrow \infty$. Pour plus de détails, voir Schafer (2002, Chapitre 3).

1.3.2.3.3 Algorithme MCMC

L'algorithme MCMC permet d'échantillonner la distribution a posteriori des données manquantes, ce qui facilitera par la suite l'estimation des paramètres inconnus. Notons par Y_{obs} la partie complètement observée des données et par Y_{mis} , la partie des données avec valeurs manquantes. Un problème qui se pose au niveau des ensembles de données incomplètes est qu'il est difficile de simuler la distribution a posteriori de la partie observée $P(\theta | Y_{obs})$. Toutefois, lorsque la partie observée Y_{obs} est augmentée par une estimation ou une simulation de la partie avec valeurs manquantes Y_{mis} notée Y'_{mis} rend plus facile la simulation de la distribution a posteriori $P(\theta | Y_{obs}, Y'_{mis})$. L'augmentation des données peut-être appliquée à l'inférence bayésienne avec données manquantes en répétant les étapes suivantes :

a) Étape-I : Imputation

Compte tenu des paramètres estimés (vecteur des moyennes et matrice de covariances), cette étape simule les valeurs des données manquantes indépendamment pour chaque observation.

Si on suppose que $Y_{i(mis)}$ et $Y_{i(obs)}$ sont respectivement la partie non observée et la partie observée pour l'individu i , l'étape-I simule la valeur de $Y_{i(mis)}$ à partir de la distribution conditionnelle de $Y_{i(mis)}$ sachant $Y_{i(obs)}$ et aussi la valeur actuelle des paramètres $\theta^{(t)}$.

b) Étape-P : Postérieure

Cette étape sert à simuler le vecteur des moyennes et la matrice de covariances a posteriori à partir de la base de données complète obtenue dans l'étape-I. Les paramètres a priori seront utilisés dans l'étape-I pour l'estimation de la valeur de données manquantes. Les deux étapes travaillent de manière itérative. L'étape-I simule $Y_{mis}^{(t+1)}$ à partir de $P(Y_{mis} | Y_{obs}, \theta^{(t)})$ sachant que $\theta^{(t)}$ est l'estimation des paramètres à l'itération t . L'étape-P estime $\theta^{(t+1)}$ à partir de $P(\theta | Y_{obs}, Y_{mis}^{(t)})$. Les estimateurs ainsi construit

$(Y_{mis}^1, \theta^1), (Y_{mis}^2, \theta^2) \dots$, constituent une chaîne de Markov. On répète les deux étapes jusqu'à convergence vers la distribution $P(Y_{mis}, \theta | Y_{obs})$. Pour plus de détails, voir Schafer (1997).

1.4 Imputation Multiple (IM)

Cette approche a été clairement définie et expliquée par (Rubin, 1987; Schafer, 1996). Le principe de l'imputation multiple (IM) consiste à remplacer la valeur de la donnée manquante par $m \geq 2$ valeurs possibles. On aura m bases complètes qui peuvent être analysées en utilisant les techniques statistiques standards. Les résultats des m ensembles complètes seront combinés par des calculs basés sur des règles de combinaison. Les principaux buts de l'IM est de refléter l'incertitude des valeurs manquantes, préserver les caractéristiques des lois de distributions et les relations importantes entre les variables. Les méthodes d'imputation multiples utilisées dans notre travail seront décrites dans le Chapitre suivant.

1.4.1 Règle de combinaison pour les m ensembles complétés par IM

Partant des m ensembles complétés, on peut calculer les m estimateurs possibles du paramètre noté Q et sa variance notée U . Dénotons par

$$\hat{Q}^{(t)} = \hat{Q}(Y_{obs}, Y_{mis}^{(t)})$$

et

$$U^{(t)} = U(Y_{obs}, Y_{mis}^{(t)}),$$

les estimateurs du paramètre Q et la variance U pour l'ensemble des données complétées t tel que $t = 1, 2, \dots, m$.

Selon (Rubin, 1987), l'estimateur final du paramètre Q est donné par la moyenne de ses m estimateurs possibles.

$$\bar{Q} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \hat{Q}^{(t)}.$$

La variance du paramètre Q est la somme de la variance intra-imputation qui est la moyenne des m variances estimées notée par :

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m U^{(t)}$$

et la variance inter-imputation qui est la variance entre les m estimateurs notée par :

$$B = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m (\hat{Q}^{(t)} - \bar{Q})^2.$$

La variance totale est donnée par :

$$T = \bar{U} + (1 + m^{-1})B. \quad (1.2)$$

La distribution de la statistique centrée et réduite $T^{-1/2}(Q - \bar{Q})$ converge approximativement vers une loi de student :

$$T^{-1/2}(Q - \bar{Q}) \sim t_v,$$

où

$$v = (m-1) \left[1 + \frac{\bar{U}}{(1 + m^{-1})B} \right]^2,$$

est le degré de liberté.

1.5 Calcul inférentiel suite à l'imputation multiple

Dans cette partie, on donne l'estimation finale d'une valeur manquante et sa variance. Pour cela, on considère pour chaque imputation k valeurs possibles pour la valeur manquante dont le calcul de la variance est basé sur des formules de variabilités différentes. La première notée T_1 est celle de Rubin qui met en évidence la variabilité entre les imputations, les deux autres prennent en considération la distance entre le point estimé et sa valeur réelle notée T_2 .*estimée* ou la distance entre le point estimé et la moyenne de l'échantillon auquel appartient la valeur manquante qu'on note T_2 .*vraie* .

1.5.1 Formule de Rubin

Notons par $\hat{\eta}_j, \hat{\omega}_j, k= 1 \dots \dots, m$, les m estimateurs possibles de la valeur manquante η et sa variance ω . Ces estimateurs sont calculés à partir de chacun des m ensembles de k valeurs estimées par une procédure d'imputation multiple. C'est-à-dire que la valeur imputée est la moyenne empirique des k valeurs simulées pour la même valeur manquante. Autrement dit, l'estimateur final $\bar{\eta}$ de η s'écrit :

$$\bar{\eta} = m^{-1} \sum_{j=1}^m \hat{\eta}_j$$

avec une variance moyenne intra-estimateurs

$$\bar{\omega} = m^{-1} \sum_{j=1}^m \hat{\omega}_j$$

et une variance inter-estimateurs

$$B = (m - 1)^{-1} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \bar{\eta}_j)^2.$$

La variance totale T_1 de $(\eta - \bar{\eta})$ est donnée par :

$$T_1 = \bar{\omega} + (1 - m^{-1})B. \quad (1.3)$$

1.5.2 Calcul de la variance à partir d'une mesure de distance

Les termes T_2 .*estimée* et T_1 .*vraie* présentés ci-dessous, mesurent la variabilité à partir d'une mesure de distance. La première est la somme de la variance inter-imputation $\bar{\omega}$ et D_1 qu'est la distance entre le point estimé et sa valeur observée η , alors que T_1 .*vraie* est la somme de la variance inter-imputation $\bar{\omega}$ et D_2 qu'est la distance entre le point estimé et la moyenne de la distribution de l'échantillon $\bar{\eta}_{obs}$ à lequel appartenait la valeur manquante. Ces deux mesures de variabilité sont données par les formules suivantes :

$$T_2$$
.*estimée* = $\bar{\omega} + D_1 \quad (1.4)$

avec

$$D_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta)^2$$

et

$$T_2.vraie = \bar{\omega} + D_2 \quad (1.5)$$

avec

$$D_2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \bar{\eta}_{obs})^2.$$

En faisant des calculs purement algébriques, on peut vérifier les formules (1.3), (1.4) et (1.5) citées ci-dessus comme suit :

Soient $\hat{\eta}_{ij}$ et $\bar{\eta}_i$ les estimateurs de η qui sont respectivement la j -ème valeurs imputée appartenant à l'ensemble i et la moyenne des valeurs imputées dans l'ensemble i .

Calcul des variances totales :

On a

$$(\hat{\mu}_{ij} - \eta) = (\bar{\eta}_i - \eta) + (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i) \quad j = 1, \dots, r \text{ et } i = 1, \dots, m.$$

Cela implique que:

$$(\hat{\eta}_{ij} - \eta)^2 = (\bar{\eta}_i - \eta)^2 + (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2 + 2(\bar{\eta}_i - \eta)(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)$$

et donc :

$$\sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \eta)^2 = \sum_{j=1}^r (\bar{\eta}_i - \eta)^2 + \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2 + \underbrace{2 \sum_{j=1}^r (\bar{\eta}_i - \eta)(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)}_0$$

De même,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \eta)^2 = r \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i - \eta)^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2$$

Ce qui nous permet de écrire

$$rmT_2.estimée = rmD_1 + (r-1) \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i^2$$

on considère que $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2$,

alors

$$rmT_2.estimée = rmD_1 + rm\bar{\omega}$$

Ce qui nous permet de écrire la relation suivante :

$$\boxed{T_2.estimée = D_1 + \bar{\omega}}$$

En suivant les mêmes étapes, on peut démontrer la relation (1.5) pour $T_2.vraie$. De même pour T_1 qui mesure la variabilité totale due à l'imputation multiple.

On a

$$(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}) = (\bar{\eta}_i - \bar{\eta}) + (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i) \quad j = 1, \dots, r \text{ et } i = 1, \dots, m$$

Ce qui implique :

$$(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta})^2 = (\bar{\eta}_i - \bar{\eta})^2 + (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2 + 2(\bar{\eta}_i - \bar{\eta})(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)$$

donc

$$\sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta})^2 = \sum_{j=1}^r (\bar{\eta}_i - \bar{\eta})^2 + \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2 + \underbrace{2 \sum_{j=1}^r (\bar{\eta}_i - \bar{\eta})(\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)}_0$$

alors

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta})^2 = r \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i - \bar{\eta})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2$$

ainsi

$$rmT_1 = r(m-1)B + (r-1) \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i^2$$

On considère que $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (\hat{\eta}_{ij} - \bar{\eta}_i)^2$, alors on peut écrire la relation suivante :

$$\boxed{T_1 = \frac{m-1}{m} B + \bar{\omega}}$$

Rappelons que la variance T_1 dépend seulement de la variabilité moyenne des valeurs estimées dans chaque ensemble imputé et la variabilité entre les ensembles estimés, sans faire le lien avec la valeur observée. Les deux mesures $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ prennent en considération respectivement, la moyenne de la distribution marginale et la valeur

observée. Dans ce qui suit, on démontre la différence existante entre ces deux types de mesure.

Développent tout d'abord D_1 :

$$D_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta)^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - E(\hat{\eta}_j) + E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2$$

Ce qui implique :

$$D_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - E(\hat{\eta}_j))^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2 + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - E(\hat{\eta}_j))(E(\hat{\eta}_j) - \eta)$$

En prenant l'espérance des deux cotés, on obtient :

$$E(D_1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - E(\hat{\eta}_j))^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E(E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2 + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m E[(\hat{\eta}_j - E(\hat{\eta}_j))(E(\hat{\eta}_j) - \eta)]$$

donc

$$E(D_1) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega_j + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2$$

Alors;

$$\boxed{E(D_1) = \bar{\omega} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2} \quad (1.6)$$

D'autre part, on peut écrire $E(D_1)$ en fonction de $E(B)$ comme suit :

$$D_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta)^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \bar{\eta} + \bar{\eta} - \eta)^2$$

$$D_1 = \frac{1}{m} \left[\sum_j (\hat{\eta}_j - \bar{\eta})^2 + \sum_{j=1}^m (\bar{\eta} - \eta)^2 + 2 \sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \bar{\eta})(\bar{\eta} - \eta) \right]$$

$$D_1 = \frac{m-1}{m} B + (\bar{\eta} - \eta)^2$$

donc

$$E(D_1) = \frac{m-1}{m} E(B) + E(\bar{\eta} - \eta)^2$$

Développant maintenant la différence $\bar{\eta} - \eta$;

$$\begin{aligned}
(\bar{\eta} - \eta)^2 &= \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\eta}_j - \eta \right)^2 \\
(\bar{\eta} - \eta)^2 &= \frac{1}{m^2} \left[\sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta) \right]^2 \\
&= \frac{1}{m^2} \left[\sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta) \sum_{l=1}^m (\hat{\eta}_l - \eta) \right] \\
&= \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^m (\hat{\eta}_j - \eta)^2 + \sum_{j \neq l} (\hat{\eta}_j - \eta)(\hat{\eta}_l - \eta) \right] \\
E(\bar{\eta} - \eta)^2 &= \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - \eta)^2 + \sum_{j \neq l} E(\hat{\eta}_j - \eta)E(\hat{\eta}_l - \eta) \right]
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - \eta)^2 &= \sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - \bar{\eta} + \bar{\eta} - \eta)^2 \\
&= \sum_{j=1}^m E\left[(\hat{\eta}_j - \bar{\eta})^2 + (\bar{\eta} - \eta)^2 + 2(\hat{\eta}_j - \bar{\eta})(\bar{\eta} - \eta) \right] \\
&= \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_j^2 + m \overline{biais^2}
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de écrire :

$$\begin{aligned}
E(\bar{\eta} - \eta)^2 &= \frac{1}{m^2} \left[\sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_j^2 + \overline{biais^2} \right] + \left[\sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - \eta) \right]^2 - \left[\sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2 \right] \\
&= \frac{1}{m^2} \left(m \overline{\omega} + \overline{m \hat{\sigma}_j^2} + m^2 \overline{biais^2} - m \overline{biais^2} \right)
\end{aligned}$$

tel que $\overline{biais} = E(\hat{\eta}_j) - \eta$, donc :

$$E(\bar{\eta} - \eta)^2 = \frac{1}{m} \overline{\omega} + \overline{biais^2}$$

Remplaçant dans (1.6), on obtient :

$$E(D_1) = \frac{m-1}{m} E(B) + \frac{1}{m} \overline{\omega} + \overline{biais^2} = \overline{\omega} + \overline{biais^2}$$

Donc

$$E(B) = \bar{\omega} + \frac{m}{m-1} (\overline{biais^2} - \overline{biais}^2)$$

Calculons maintenant la quantité $\overline{biais^2} - \overline{biais}^2$:

$$\begin{aligned} \overline{biais^2} - \overline{biais}^2 &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \eta)^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E(\hat{\eta}_j - \eta) \right)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_j (E(\hat{\eta}_j - \eta) - \frac{1}{m} \sum_j E(\hat{\eta}_j - \eta))^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_j (E(\hat{\eta}_j) - \eta - \frac{1}{m} \sum_j E(\hat{\eta}_j) + \eta)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_j (E(\hat{\eta}_j) - E(\frac{1}{m} \sum_j \hat{\eta}_j))^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne en fin :

$$\overline{biais^2} - \overline{biais}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \bar{\eta})^2$$

Et de la,

$$\boxed{E(B) = \bar{\omega} + \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (E(\hat{\eta}_j) - \bar{\eta})^2} \quad (1.7)$$

D'après (1.6) et (1.7), on constate que les deux mesures de variances T_1 et T_2 .*estimée* n'expriment pas la même variabilité.

Chapitre 2

Méthodes d'imputations multiples

2.1 Introduction

L'imputation de valeurs pour des données manquantes ne sera efficace que si la procédure d'imputation prend en charge le contexte et la catégorie des données à laquelle elles appartiennent. Généralement, on a affaire à des données structurées selon des critères préalablement définis. L'exploitation de leurs caractéristiques statistiques réduit l'incertitude résultant de l'imputation multiple. L'algorithme d'imputation multiple « Pan » introduit par (Schafer & Yucel, 2002) est une technique d'estimation des valeurs manquantes pour des données longitudinales multivariées en utilisant la procédure MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Cette dernière est la généralisation de la méthodologie de (Schafer, 1997) appliquée à des groupes d'observations multivariées. Elle conserve la corrélation entre les observations du même groupe et la relation entre les variables. D'autre part, face à des bases de données hiérarchiques ou en groupes, la procédure d'imputation multiple BHLC (*Bayesian Hierarchical Linear Clustered model*) proposée par (Murua, Hegyvary & Berry, 2005) suggère un modèle linéaire hiérarchique bayésien à effets mixtes dans chaque groupe. L'imputation multiple pour ce modèle est obtenue en utilisant la méthode MCMC avec la technique échantillonnage de Gibbs. Le premier algorithme donne une imputation à la fois, alors que le deuxième donne les m imputations en une seule fois.

2.2 Algorithme Pan

2.2.1 Modèle d'imputation :

Le modèle adopté pour l'imputation est un modèle linéaire multivarié à effets mixtes tel que décrit au Chapitre 1. On suppose que y_i est la matrice constituée de $n_i \times r$ réalisations des variables réponses multivariées pour le groupe i , $i = 1, 2, \dots, G$. Chaque ligne de y_i est la réalisation conjointe des variables Y_1, Y_2, \dots, Y_r .

$$y_i = X_i\beta + Z_i b_i + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

2.2.2 Principe d'imputation :

La mise en œuvre de cette méthode se base essentiellement sur la technique MCMC pour la simulation des distributions a posteriori des facteurs à effets aléatoires, les paramètres du modèle et les valeurs manquantes.

Notons par $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ la base de données avec $Y_{obs} = (y_{1(obs)}, y_{2(obs)}, \dots, y_{m(obs)})$ et $Y_{mis} = (y_{1(mis)}, y_{2(mis)}, \dots, y_{m(mis)})$, respectivement la partie de données totalement observées et la partie de données avec valeurs manquantes. D'autre part, soit $\theta = (\beta, \Sigma, \Psi)$, le vecteur des paramètres inconnus pour les effets fixes, covariances des résidus et covariances des effets aléatoires. On assume que $\beta \in R^{pr}$, $\Sigma > 0$ (défini positive) et Ψ est de dimension $q \times q$. Partant de valeurs initiales $\theta^{(0)}$ et $Y_{mis}^{(0)}$, chaque cycle de MCMC appelé échantillonnage de Gibbs est réalisé en trois étapes : Considérons un algorithme itératif dont $\theta^{(t)} = (\beta^{(t)}, \Sigma^{(t)}, \Psi^{(t)})$ est l'estimation du vecteur paramètres θ à l'étape t . Une première étape consiste à estimer les facteurs aléatoires b_i de manière indépendante pour $i = 1, \dots, G$, où G est le nombre de groupes :

$$b_i^{(t+1)} \sim P(b_i | Y_{obs}, Y_{mis}^{(t)}, \theta^{(t)}),$$

l'étape suivante estime les paramètres du modèle :

$$\theta^{(t+1)} \sim P(\theta | Y_{obs}, Y_{mis}^{(t)}, B^{(t+1)}),$$

et finalement, c'est l'estimation des valeurs manquantes;

$$y_{i(mis)}^{(t+1)} \sim P(y_{i(mis)} | Y_{obs}, B^{(t+1)}, \theta^{(t+1)}).$$

Pour simplifier les calculs, on fait appel à la loi inverse de Wishart pour la distribution a priori. Donc, on suppose que $\Sigma^{-1} \sim W(\nu_1, \Lambda_1)$ et $\Psi^{-1} \sim W(\nu_2, \Lambda_2)$ sont les lois a

priori pour Σ et Ψ où $W(\nu, \Lambda)$ dénote une Wishart avec $\nu > 0$ degré de liberté et moyenne $\nu\Lambda > 0$. Ces lois a priori sont appropriées pour des modèle avec Ψ non structurés (Ψ en block-diagonal) en exigeant que $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\nu_1 \geq 0$ et $\nu_2 \geq qr$. Pour générer le facteur des effets fixes β , on utilise une distribution uniforme irrégulière. Les distributions du couple (y_i, b_i) sont données par:

$$\begin{aligned} \text{vec}(y_i) | b_i, \theta &\sim N(\text{vec}(X_i\beta + Z_i b_i), (\Sigma \otimes I_{n_i})); \\ \text{vec}(b_i) | \theta &\sim N(0, \Psi). \end{aligned}$$

La notation $\Sigma \otimes I_{n_i}$ désigne une matrice diagonale composée de n_i élément de Σ et vec est la notation de vectorisation d'une matrice.

Conditionnellement à y_i et θ , on a

$$\text{vec}(b_i) | y_i, \theta \sim N(\text{vec}(\tilde{b}_i), U_i),$$

où

$$\text{vec}(\tilde{b}_i) = U_i (\Sigma^{-1} \otimes Z_i^T) \text{vec}(y_i - X_i \beta)$$

et

$$U_i = (\Psi^{-1} + (\Sigma^{-1} \otimes Z_i^T Z_i))^{-1}.$$

Indépendamment pour $i = 1, \dots, G$, la simulation du paramètre θ est faite en suivant les étapes suivantes:

Tout d'abord, on génère Ψ^{-1} à partir d'une Wishart avec degrés de liberté $\nu_2' = \nu_2 + m$ et la matrice d'échelle $\Lambda_2' = (\Lambda_2^{-1} + B^T B)^{-1}$. Le calcul des coefficients des moindres carrés ordinaires se fait comme suit :

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^m X_i^T X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m X_i^T (y_i - Z_i b_i) \right)$$

et les résidus

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - X_i \hat{\beta} - Z_i b_i$$

Ensuite, on simule Σ^{-1} à partir d'une Wishart avec degrés de liberté $\nu_1' = \nu_1 - p + \sum_{i=1}^m n_i$

et la matrice d'échelle $\Lambda_1' = \left(\Lambda_1^{-1} + \sum_{i=1}^m \hat{\varepsilon}_i^T \hat{\varepsilon}_i \right)^{-1}$. L'estimation de β est faite à partir d'une

loi normale multivarié centré en $\hat{\beta}$ avec la matrice de covariance $\Sigma \otimes V$ avec

$V = \left(\sum_{i=1}^g X_i^T X_i \right)^{-1}$. L'étape finale est d'estimer les résidus ε_i pour les éléments qui ont

des valeurs manquantes, ainsi la simulation de $y_{i(mis)}$ est la sommation des deux termes ε_i et $X_i \beta + Z_i b_i$.

Notons que l'algorithme donne les valeurs imputées pour un échantillon à la fois. Donc, il faut répéter l'algorithme $m \times k$ fois, tel que m est le nombre de chaînes, et k est le nombre de répétitions par chaîne. Une implémentation spécifique pour cet algorithme est appelée « pan », elle se trouve dans le package pan du logiciel R. Pour plus de détails voir <http://www.stat.psu.edu/~jls/misoftwa.html>.

2.3 Algorithme BHLC

2.3.1 Modèle proposé :

Pour une population divisée en G groupes, on suppose que $y_{ij} \in R^d$, $x_{ij} \in R^p$ et $z_{ij} \in R^q$ dénotent respectivement les variables réponse, les variables auxilliaires à effets fixes et les variables auxilliaires à effets aléatoires.

Le modèle des données est le suivant :

$$y_{ij} = X_{ij} \beta + Z_{ij} b_j + \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

$$b_j = W_j \alpha + v_j, \quad \beta = \beta_0 + v,$$

$$\alpha = k \alpha_0 + \omega, \quad k = k_0 + \varepsilon_k,$$

où ε_{ij} , v_j ($i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, G$), v , ω et ε_k sont des vecteurs aléatoires avec une moyenne zéro. Leurs covariances sont aléatoires sauf pour ω et ε_k qui sont

supposées connues. Le paramètre β est le coefficient de régression qui est identique dans tous les groupes. Le terme $k\alpha_0$ est la moyenne des coefficients à effets aléatoires dont α_0 est la direction, et k est un scalaire. La direction prévoit une information préalable sur la force et le signe des relations entre la réponse et les covariables. L'échelle variable s'adapte à l'échelle observée dans les données.

La présence des valeurs manquantes dans les covariables provoque deux approches d'imputation alternatives: la première utilise le modèle de régression (2.2) et traite les données manquantes au niveau de la variable réponse et les covariables à la fois. L'alternative intègre les covariables dans la variable réponse étendue et change le modèle par un modèle hiérarchique écrit comme suit :

$$\tilde{y}_{ij} = \alpha_0 + w + u_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad (2.3)$$

où ε_{ij} , u_{ij} ($i = 1, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, G$) et w sont des vecteurs gaussiens avec moyennes zéro dont les covariances sont variables à l'exception de celles de w qu'on suppose connues.

2.3.2 Principe

Dans cette section, nous décrivons la mise en œuvre du modèle (2.2). On note l'utilisation de l'échantillonnage de Gibbs pour générer des tirages de la distribution a posteriori à la fois pour les paramètres et les observations manquantes. Le modèle (2.3) est considéré comme un cas particulier ou une forme restreinte du modèle (2.2) en limitant les covariables comme une constante. Toutes les formules qui viennent par la suite sont applicables pour les deux modèles. Le premier problème qui se pose pour faire l'échantillonnage est la connaissance préalable de la distribution a priori des covariables avec valeurs manquantes. Cette spécification est nécessaire pour le modèle (2.2), mais pas pour le modèle (2.3) qui ne nécessite pas une définition explicite pour la loi a priori des valeurs manquantes.

2.3.4 Loi a priori

Notons par $x = (x_{obs}, x_{mis})$ les valeurs des covariables au sein d'un groupe g tel que x_{obs} et x_{mis} sont respectivement les parties des covariables complètement observées et la partie avec valeurs manquantes. D'autre part, on suppose que la variable réponse s'écrit comme suit :

$$y = (x_{obs}, x_{mis})\beta + \varepsilon,$$

tel que $\varepsilon \sim N(0, \Sigma_g)$.

Sans perte de généralités, on suppose que y et x_{mis} sont des variables univariées, alors :

$$x_{mis}\beta_{mis} = y - x_{obs}\beta_{obs} - \varepsilon,$$

où $\beta = (\beta_{obs}, \beta_{mis})$ est une décomposition évidente pour β . Si β_{mis} est différente à zéro, on peut tirer les valeurs de x_{mis} à partir de la distribution conditionnelle suivante:

$$X_{mis} | y, x_{obs}, \beta, \Sigma_g \sim Normal(\beta_{mis}^{-1}(y - x_{obs}\beta_{obs}), \beta_{mis}^{-2}\Sigma_g) \quad (2.4)$$

Dans ce cas, on ne peut pas supposer n'importe quelle loi a priori pour x_{mis} . On est obligé d'assumer que l'uniforme impropre est la loi a priori pour x_{mis} . Par conséquent, ce n'est pas une bonne idée, car, les valeurs de β_{mis} peuvent-être très petites. Il est préférable pour l'échantillonnage Gibbs de supposer que la loi a priori pour les valeurs manquantes est $X_{mis} \sim Normal(\mu_{g,mis}, \Sigma_{g,mis})$, tel que $\mu_{g,mis}$ et $\Sigma_{g,mis}$ sont respectivement la moyenne et la variance des covariables manquantes dans le groupe g . Cette hypothèse nous permet de dire que la distribution conditionnelle de $X_{mis} | y, x_{obs}, \beta, \Sigma_g$ est gaussienne avec la moyenne:

$$\mu_{mis} = [\beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} + \Sigma_{g,mis}^{-1}]^{-1} (\beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} (\frac{y - x_{obs} \beta_{obs}}{\beta_{mis}}) + \Sigma_{g,mis}^{-1} \mu_{g,mis})$$

et la variance

$$\Sigma_{mis} = [\beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} + \Sigma_{g,mis}^{-1}]^{-1}.$$

Cette distribution facilite le tirage de $X_{mis} | y, x_{obs}, \beta, \Sigma_g$. La loi a priori définie précédemment en (2.4) peut utiliser les informations préalables suivantes :

- (1) (moyenne et variance) utilisation de la moyenne et variance empiriques définies au-dessus pour chaque valeur manquante.
- (2) (moyenne) utilisation seulement de la moyenne empirique.
- (3) (variance) utilisation seulement de la variance empirique.
- (4) (pas de loi a priori) ne pas utilisé la loi a priori pour les valeurs manquantes.
- (5) (loi a priori avec relaxation) utilisation du paramètre de régularisation R pour la distribution de $X_{mis} | y, x_{obs}, \beta, \Sigma_g$ avec la moyenne et la variance suivantes :

$$\mu_{mis} = \left[\beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} + \frac{1}{R} \right]^{-1} \beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} (\frac{y - x_{obs} \beta_{obs}}{\beta_{mis}})$$

et

$$\Sigma_{mis} = \left[\beta_{mis}^2 \Sigma_g^{-1} + \frac{1}{R} \right]^{-1}.$$

La fonction spécifique pour cet algorithme est programmée sous S-PLUS, dans la librairie S+Bayes (Murua *et al.* 2004), qu'on peut la télécharger à partir du site web :

<http://www.insighful.com/downloads/libraries/>.

Chapitre 3

Étude par Simulations et Résultats

3.1 Introduction :

Dans le but de répondre aux questions posées dans la partie "INTRODUCTION" de ce mémoire, on a effectué des études par simulation. L'idée de base est de générer des bases de données complètes dont lesquelles, on choisira de façon aléatoire des valeurs observées qu'on marquera « valeurs manquantes ». Quatre importantes parties de simulations sont destinées à répondre à la problématique. L'objectif principal de la première partie qu'on appelle « Facteurs à effets significatifs » est d'identifier en termes de variances, les facteurs à effets significatifs sur l'imputation multiple. Dans cette partie, l'algorithme d'imputation multiple utilisé est l'algorithme « Pan » et le plan d'expérience adopté est un plan factoriel complet 2^{10} avec mesures répétées.

L'idée principale de la deuxième partie qu'on nomme « Comparaison entre Pan et BHCL », est de comparer les deux algorithmes d'imputation multiple «Pan » et « BHCL ». Cette comparaison nous permet de vérifier si ces deux méthodes donnent des résultats analogues en termes de variances et de biais. Le plan d'expérience choisi est un plan fractionnaire qui regroupe les facteurs à effets significatifs conformément aux conclusions obtenues dans la première partie. Notant que pour les deux premières parties, les données sont générées selon le modèle (1.1) (modèle linéaire à effets mixtes), avec une distribution identique des erreurs dans l'ensemble des groupes.

Dans la troisième partie appelée « Sélection du modèle d'imputation », le but principal est la sélection du modèle ou des modèles les plus efficaces en termes de variabilité en spécifiant le type de loi a priori choisi pour les valeurs manquantes et la distribution des erreurs pour les données. D'une autre manière, il s'agit de trouver la relation entre le modèle de génération des données et le modèle d'imputation. L'algorithme utilisé pour la prédiction des valeurs manquantes est « BHCL » qui donne lieu à une multitude d'hypothèses sur la loi a priori et la distribution de la vraisemblance.

La quatrième partie nommée « Cas particulier » est consacrée à étudier le cas le plus compliqué : c'est le cas où les erreurs sont gaussiennes avec inégalité des variances dans

les groupes. Le but principal est de vérifier qu'il y a correspondance entre le modèle d'imputation et la structure des erreurs présumés pour la génération des données. Nous essayons pour ce cas particulier de faire ressortir le modèle d'imputation et le type de loi a priori les plus appropriés pour l'estimation des valeurs manquantes.

3.2 Les simulations

La planification des simulations est déterminée suivant l'objectif à aboutir dans chaque partie en spécifiant à chaque fois le plan d'expérience, les hypothèses pour la génération des données et le modèle d'imputation.

3.2.1 Facteurs à effets significatifs

Le plan choisi pour cette première partie est un plan factoriel complet 2^{10} avec mesures répétées. Les principaux facteurs intervenant dans la génération des données sont mentionnés dans le Tableau 3.1 ci-dessous:

Tableau 3.1

Facteurs principaux pour la génération des données

Facteurs	Symbole	Niveaux (bas, haut)
Fraction de valeurs manquantes	P	(5%, 20%)
Nombre d'unités observées	N	(100, 500)
Nombre de groupes	G	(2, 10)
Information sur les groupes	U	(oui, non)
Dimension des variables auxiliaires à effets fixes	X	(3, 10)
Fraction de variables auxiliaires à effets aléatoires	Z	(1/3, 2/3)
Nombre de variables réponse	Y	(1, 3)
Typologie de valeurs manquantes	M	(MAR, MCAR)
Répétition d'échantillon des valeurs manquantes	R	(1,2)
Répétition de l'algorithme	r.pan	(1,2)

Tout à bord, on génère 256 bases de données complètes à partir d'un modèle linéaire multivarié à effets mixtes (modèle (1.1)). Pour chaque base complète, on affectera de manière aléatoire deux échantillons différents de valeurs manquantes. On aura donc 512 bases de données incomplètes. L'imputation des valeurs pour les données manquantes est réalisée en utilisant l'algorithme « Pan » qui suppose que la structure des erreurs est normale avec égalité des variances dans les groupes. Ce dernier sera répété deux fois pour chaque base de données incomplète. Par conséquent, on aura 1024 bases de données complétées par imputation. Notons que, l'affectation des valeurs manquantes pour les unités ou les groupes est obtenue par les mécanismes MAR ou MCAR, et cela seulement pour les variables réponses. Ces valeurs manquantes sont estimées par $m = 20$ valeurs imputées, ou chaque valeur imputée est la moyenne de $k = 20$ valeurs simulées. Le calcul des variances T_1 , $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ spécifiques pour chaque valeur manquante est établi respectivement à partir des formules (1.2), (1.3) et (1.4) du Chapitre 1.

3.2.2 Comparaison entre « Pan » et « BHLC »

Le plan fractionnaire utilisé est 2^{7-1} choisi suivant les résultats obtenus dans la première partie. Les facteurs principaux qui ont été sélectionnés sont : N, G, X, Y, Z, U et M tel que $M = NGXYZU$ (voir Tableau ci-dessus). La fraction des valeurs manquantes est fixée à $P = 5\%$. Pour chacun des deux algorithmes « Pan » et « BHCL », on génère 64 bases de données complètes à partir du modèle (1.1). L'attribution des valeurs manquantes est obtenue selon les mécanismes MAR et MCAR (voir Fonction pour valeurs manquantes avec le mécanisme MAR et Fonction pour valeurs manquantes avec le mécanisme MCAR, Annexe 1). De ce fait, le plan global à étudier est un plan fractionnaire dont les principaux facteurs sont : N, X, Y, Z, U, M et A qui est le facteur algorithme avec ces deux niveaux (Pan, BHCL). Dans cette partie, on s'intéresse spécialement à l'effet principal du facteur A et ses interactions avec les autres facteurs. En d'autres termes, il s'agit de montrer que les deux algorithmes « Pan » et « BHCL » sont équivalents quand la structure des erreurs supposée pour obtenir les imputations est normale avec égalité des variances dans les groupes. Et de la même façon que dans la

section précédente, on calcule, pour chaque valeur manquante les m moyennes des valeurs imputées, leurs variances T_1 , $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ et aussi les biais par rapport aux valeurs observées et par rapport aux moyennes de la distribution marginale des valeurs observées.

3.2.3 Sélection du modèle d'imputation

Il s'agit de générer des bases de données complètes avec différentes hypothèses sur la distribution des erreurs. Les paramètres du modèle sont fixés comme suit : deux variables réponse ($Y= 2$), quatre variables auxiliaires dont deux sont à effets aléatoires ($Z= 1/2$) et deux à effets fixes ($X= 2$). Le nombre total d'observations est ($T= 100$), réparties en cinq groupes ($G= 5$) dont le pourcentage de valeurs manquantes est ($P= 10\%$) et la typologie des valeurs manquantes est ($M= MAR$).

Des valeurs manquantes seront affectées pour l'ensemble des variables réponses, variables auxiliaires à effets fixes et variables auxiliaires à effets aléatoires. Le plan adopté est la superposition de deux carrés latins dont les facteurs sont :

Facteur1 : la structure des erreurs des données générées (La distribution des erreurs). Ces quatre niveaux sont :

- **erreur1** : les erreurs sont gaussiennes avec une variabilité identique dans l'ensemble des groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma)$
- **erreur2** : les erreurs sont gaussiennes avec une variabilité différente dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma_i)$.
- **erreur3** : les erreurs suivent une loi de student avec même variabilité dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma)$.
- **erreur4** : les erreurs suivent une loi de student avec différentes variabilités dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma_i)$.

Facteur 2 : hypothèse sur la structure des erreurs des données (modèle d'imputation).

Ces niveaux sont :

- **modele1** : les erreurs sont gaussiennes avec une variabilité identique dans l'ensemble des groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma)$
- **modele2** : les erreurs sont gaussiennes avec une variabilité différente dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma_i)$.
- **modele3** : les erreurs suivent la loi de student avec même variabilité dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma)$.
- **modele4** : les erreurs suivent la loi de student avec différentes variabilités dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma_i)$.

Facteur 3 : hypothèse sur la loi a Priori des valeurs manquantes. Les niveaux sont :

- **prior1** : loi a priori des valeurs manquantes en utilisant les moyennes empiriques observées dans les groupes $x_{ig} \sim N(\bar{x}_g, \mathbf{I})$.
- **prior2** : loi a Priori avec variance des groupes $x_{ig} \sim N(0, \hat{\Sigma}_g)$.
- **prior3**: loi a priori avec moyenne et variance des groupes $x_{ig} \sim N(\bar{x}_g, \hat{\Sigma}_g)$.
- **prior4** : pas de loi a priori.

L'hypothèse préalable sur la loi a priori a été attribué de façon complètement randomisé, voir Tableau 3.2 ci-dessous.

Le deuxième carré latin est identique au premier plan, sauf pour le troisième facteur qui est la loi a priori avec l'utilisation du paramètre de régularisation R dont les quatre niveaux sont :

- **prior5** : R= 0.01
- **prior6** : R= 0.1
- **prior7** : R= 1
- **prior8** : R= 10

Cette notation est différente à celle du facteur 3 du premier carré latin, pour simple raison de différencier les lois a priori randomisées dans le Tableau 3.2 ci-après :

Tableau 3.2

Randomisation de la loi a priori pour les deux carrés latins superposés

	Structure des erreurs				
		erreur1	erreur2	erreur3	erreur4
Modèles d'imputation	modele1	prior1 (prior7)	Prior2 (prior6)	Prior3 (prior5)	Prior4 (prior8)
	modele2	Prior2 (prior5)	Prior4 (prior8)	Prior1 (prior7)	Prior3 (prior6)
	modele3	Prior3 (prior6)	Prior1 (prior5)	Prior4 (prior8)	Prior2 (prior7)
	modele4	Prior4 (prior8)	Prior3 (prior7)	Prior2 (prior6)	Prior1 (prior5)

Deux répétitions sont requises pour chaque carré latin. Au total, on aura 64 essais indépendants, chacun avec 10% de valeurs manquantes.

Remarque :

Dans cette partie, on ne peut pas utiliser « Pan », car ses suppositions sur la génération des données sont trop limitées.

3.2.4 Cas particulier :

Dans cette partie, on génère quatre bases de données complètes selon le modèle (1.1). On suppose que les erreurs soient gaussiennes avec inégalité des variances dans les

groupes, on a $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma_i)$. Dans ce cas, on prend un échantillon de taille $T= 100$, trois variables réponses ($Y= 3$), un total de quatre variables auxiliaires ($X= 4$) dont trois sont à effets fixes et une variable à effet aléatoire ($Z= 1/4$). Le nombre de groupes est fixé à $G= 5$. Les variables auxiliaires sont normalisées, par conséquent, les valeurs de beta sont très petites, elles ne dépassent pas 1 en valeur absolue. Le plan d'expérience pris en compte est un plan à deux facteurs qui sont les suivants :

Facteur1 : est identique au "Facteur2" de la troisième partie avec les quatre niveaux : modele1, modele2, modele3 et modele4.

Facteur2 : hypothèse sur la loi a priori avec les cinq niveaux :

- Prior1
- Prior2
- Prior3
- Prior4 (R=0.1)
- Prior5 (R= 100)

Notons que La fraction de valeurs manquantes est 15%. De la même manière que précédemment, on calcule les différents types de variances pour permettre, par la suite, de sélectionner le (les) modèle(s) le plus efficace avec le type de loi a priori le plus adéquat.

3.3 Description et analyse des résultats

3.3.1 Facteurs à effets significatifs :

1. Description des résultats :

La Figure 3.1 ci-dessous représente les diagrammes en boîtes des 1024 valeurs du biais calculées à partir de la différence entre la moyenne des valeurs imputées et la valeur observée (valeur enlevée), classées selon le mécanisme et le pourcentage total des valeurs manquantes dont la formule est : $biais = \hat{\mu} - \mu$.

La notation utilisée dans la Figure 3.1 désigne les facteurs fixés pour le calcul des biais. Par exemple MAR5 veut dire qu'on fixe le facteur typologie de valeurs manquantes M au niveau MAR, et le facteur fraction de valeurs manquantes P à 5%. Dans ce cas, le

facteur U information sur les groupes est fixé au niveau "oui", c'est-à-dire que les groupes sont connus. Pour la notation MAR5.1G, c'est les mêmes significations, sauf qu'ici, on ne connaît pas les groupes. Autrement dit, on considère que la base de données est formée d'un seul groupe (1G).

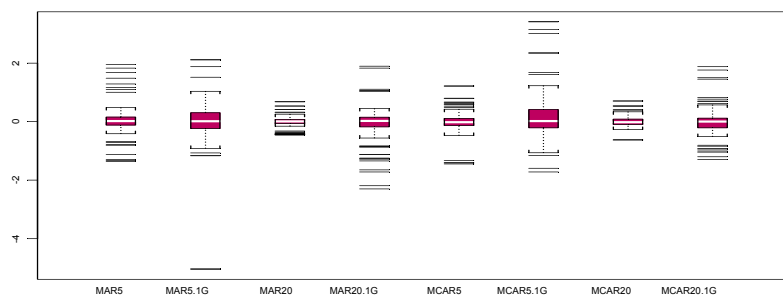


Figure 3.1 : Diagrammes en boîtes pour les 1024 biais regroupés selon les facteurs : information sur les groupes, typologie et fraction de valeurs manquantes

Le graphique ci-dessus montre que pour l'ensemble des cas, le biais est égal à zéro, en moyenne. Par contre, on remarque une très grande variation des biais surtout pour les cas (MCAR5.1G, MAR20.1G, MCAR20.1G). Prenant, par exemple les diagrammes en boîtes pour le cas (MAR 20), et celui pour le cas (MAR20.1G), les valeurs du biais pour le cas (MAR20.1G) sont plus étendues que pour le cas (MAR20). Cette remarque est semblable pour la majorité des cas. Par conséquent, on peut dire que la nécessité de l'information préalable des groupes réduit la variabilité. D'autre part, la Figure 3.2 illustre les caractéristiques statistiques des logarithmes des variances totales $\log(T_1)$ et $\log(T_2.estimée)$. On peut dire que ces deux mesures sont différentes, car, elles ne donnent pas la même information supplémentaire sur l'incertitude propre à l'imputation multiple (voir figure ci-dessous).

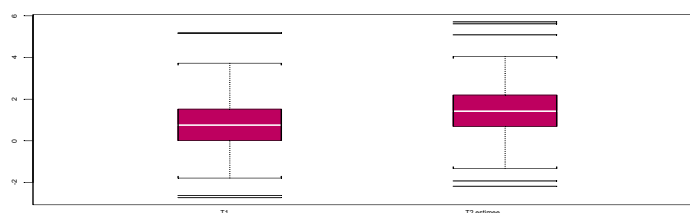


Figure 3.2 : Diagrammes de boîtes pour $\log(T_1)$ et $\log(T_2.estimée)$

2. Analyse de la variance

Le modèle associé au plan adopté est un modèle emboîté qui s'écrit sous la forme suivante :

$$y_i = \beta_0 + \sum \beta_{i1} x_{i1} + \sum \beta_{i1i2} x_{i1} x_{i2} + \dots + \sum \beta_{i1i2\dots k} x_{i1} x_{i2} \dots x_k + e$$

où, y_i est la valeur réponse de l'unité i , β_0 est la moyenne de l'ensemble des réponses, β_{i1} est l'effet principal du facteur $i1$, β_{i1i2} est l'effet d'interaction d'ordre deux entre les facteurs $i1$ et $i2$,, $\beta_{i1i2\dots ik}$ est l'effet d'interaction du k -ième ordre entre les facteurs $i1, i2, \dots$ et ik et e est l'erreur expérimentale.

Comme, on l'a déjà signalé, les facteurs principaux sont : P, N, X, Z, Y, U, G, M et A. L'erreur expérimentale e est due au rééchantillonnage des valeurs manquantes et la répétition de l'algorithme. À partir de ce modèle, il s'agit d'estimer 512 effets dont 9 effets principaux et les autres sont des effets d'interactions. Les résultats de l'analyse de variance pour la mesure $\log(T_1)$ sont présentés dans le Tableau 3.3: on donne seulement les effets principaux et ceux d'interactions d'ordre deux. Les autres effets sont illustrés dans le Tableau A.1 de l'annexe 2.

L'analyse de variance pour le plan factoriel complet 2^{10} avec répétitions corrélées illustrée dans le Tableau 3.3, démontre que les effets principaux des facteurs N, U, X, Z, Y, M, P et la majorité de leurs interactions sont significatifs aux niveaux de signification 1% et 5%. D'autre part, l'effet du facteur r.pan n'est pas significatif. Les interactions les plus significatifs sont G : N : X : Y : Z, G : N : Y : U, G : N : X : Y, et N : Y : U.

Ces conclusions sont identiques pour la mesure de variance $\log(T_2, \text{estimée})$. Pour plus de détails, voir les résultats de l'analyse de variances pour cette statistique dans le Tableau A.2 de l'Annexe 2

Tableau 3.3Résultats de l'analyse de variance pour $\log(T_1)$

<u>Facteurs</u>	<u>Df</u>	<u>MSE</u>	<u>P-value</u>
M	1	2,012	$< 10^{e-7}$
G	1	47,45	$< 10^{e-7}$
N	1	9,88	$< 10^{e-7}$
X	1	212,67	$< 10^{e-7}$
Z	1	23,47	$< 10^{e-7}$
Y	1	7,88	$< 10^{e-7}$
P	1	0,30	0,002
U	1	559,30	$<< 10^{e-7}$
r.pan	1	0,0009	0,86
M : G	1	0,019	0,42
M : N	1	0,46	$< 10^{e-3}$
G : N	1	15,36	$< 10^{e-6}$
M : X	1	0,90	$< 10^{e-7}$
G : X	1	82,03	$<< 10^{e-7}$
N : X	1	2,87	$< 10^{e-6}$
M : Z	1	0,05	0,19
G : Z	1	1,38	$< 10^{e-6}$
N : Z	1	0,08	0,10
X : Z	1	12,47	$<< 10^{e-7}$
M : Y	1	0,07	0,13
G : Y	1	18,20	$<< 10^{e-7}$
N : Y	1	21,97	$<< 10^{e-7}$
X : Y	1	0,32	0,001
Z : Y	1	1,81	$< 10^{e-7}$
M : P	1	0,016	0,47
G : P	1	0,015	0,47
N : P	1	0,27	0,002
Z : P	1	0,05	0,18
X : P	1	0,21	0,008
Y : P	1	0,006	0,65
G : U	1	5,66	$< 10^{e-7}$
N : U	1	101,65	$< 10^{e-7}$
X : U	1	79,37	$< 10^{e-7}$
Z : U	1	7,65	$< 10^{e-7}$
Y : U	1	16,38	$< 10^{e-7}$
P : U	1	0,16	0,022
M: r.pan	1	$< 10^{e-3}$	0,90
M: r.pan	1	0,003	0,87
M: r.pan	1	$< 10^{e-3}$	0,85
G : U	1	5,66	$< 10^{e-7}$
résidus	510	15,56	

3. Sélection des facteurs les plus significatifs

Une sélection des facteurs les plus significatifs a été effectuée en utilisant le FDR (le taux de faux positifs ou fausses découvertes) (Benjamini & Hochberg, 1995). La procédure de sélection est basée sur le principe suivant :

Soit à construire une collection des hypothèses nulles à rejeter $\{H_{0(i)}\}_{i=1,\dots,m}$. Notons par V_0 le nombre de vraies H_0 rejetées, et R_0 le nombre de H_0 rejetées et considérons

la mesure de probabilité Q , tel que $Q = \frac{V_0}{R_0}$.

Pour des valeurs de q fixées ($q \in [0,1]$) et en contrôlant la mesure de probabilité Q de sorte que $E(Q) \leq q$, le FDR est calculé de la manière suivante :

- Ordonner toutes les valeur-p associées aux hypothèses nulles dans l'ordre croissant $P_{(1)} \leq P_{(2)} \leq \dots \leq P_{(m)}$.
- chercher la plus grande valeur k de i satisfaisant $P_{(i)} \leq \frac{i}{m} q$.
- Rejeter toutes les hypothèses nulles $H_{0(i)}$ pour $i = 1, \dots, k$.

Cette stratégie va nous permettre de choisir les facteurs les plus influents avec leurs interactions les plus importantes afin de construire un plan fractionnaire pour la deuxième partie des simulations. Pour un choix de $q = 0.0001$, les facteurs principaux sélectionnés qui ont un effet plus significatif sur l'imputation sont N, G, X, Y, Z, U et leurs interactions. Les effets les plus significatifs sont illustrés par la Figure 3.5 ci-après :

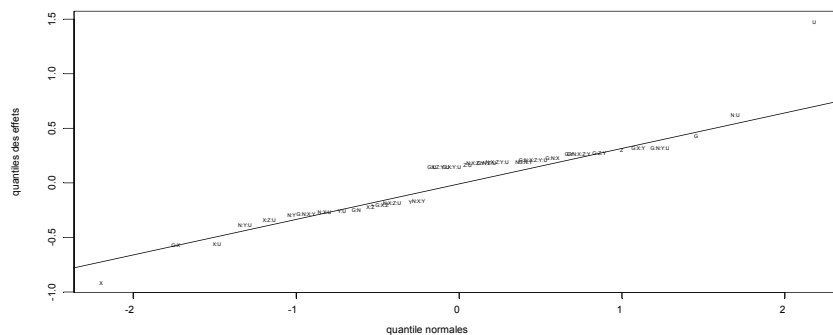


Figure 3.5 Graphique des effets les plus significatifs

3.2.2 Comparaison entre « Pan » et « BHCL »

1. Description des résultats :

Dans cette partie de simulation, on considère deux types de biais pour chaque méthode d'imputation. Le premier type est calculé à partir de la différence entre la moyenne des m valeurs imputées et la valeur observée qu'on note « biais.estimé ». Le deuxième est calculé à partir de la différence entre la moyenne des m valeurs imputées et la moyenne empirique de l'échantillon auquel la valeur manquante appartient qu'on note « biais.vrai ». Pour chacune des méthodes d'imputation « Pan » et « BHCL », on calcule pour chacune des bases de données, les variances moyennes pour l'ensemble des valeurs manquantes et les biais moyens. Par exemple (T1.P) est la valeur de logarithme de la variance moyenne T_1 associée aux imputations réalisées par l'algorithme « Pan », et (T1.B) est la même mesure calculée à partir des imputations obtenues par l'algorithme « BHCL ». Donc au total, on aura 128 valeurs pour chaque cas, représentées sous forme des graphiques en boîtes. Voir Figure 3.6.

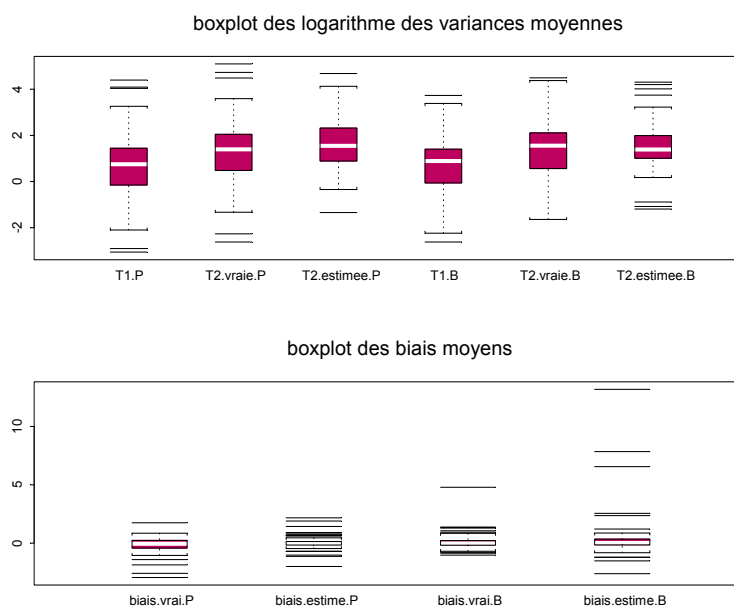


Figure 3.6 : Diagrammes en boîtes pour les variances moyennes et biais moyens pour « Pan » et « BHCL ».

On peut dire que les deux algorithmes sont presque semblables en termes de variances et de biais. On signale toujours que la mesure de variance T_1 est différente des deux autres $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$. Rappelons que T_1 est une mesure de variabilité entre les imputations, voir (formule (1.2) du Chapitre1), alors que $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ sont des mesures de variabilité due à l'imputation plus la variabilité par rapport aux valeurs observées et par rapport aux moyennes des distributions marginales des données. Ces valeurs de biais sont représentées graphiquement par des nuages de points comme illustré par la Figure 3.7.

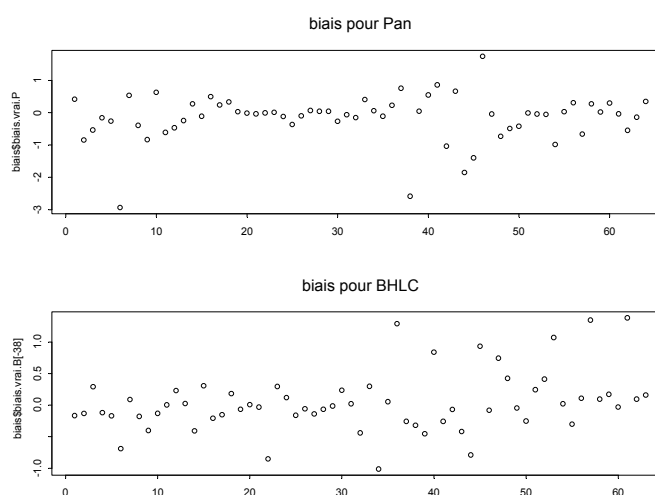


Figure 3.7 : Nuages de points pour les valeurs de biais pour « Pan » et « BHLC »

On constate qu'en moyenne, les biais issus de l'algorithme « BHLC » sont plus réduits que ceux issus de l'algorithme « Pan ». Une analyse de variance va nous permettre de vérifier l'égalité entre ces deux algorithmes en termes d'erreur quadratique moyenne, ce qui veut dire que les deux algorithmes donnent presque les mêmes estimateurs des valeurs manquantes.

2. Analyse de la variance

Il s'agit de démontrer que les deux algorithmes sont équivalents quand la structure des erreurs pour générer les imputations est normale avec égalité des variances dans les groupes. Cette vérification sera faite pour chacune des trois types de variances T_1 , $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$.

Variance totale : T_1

Rappelons que le plan d'expérience est un plan fractionnaire constitué de 128 unités avec 7 facteurs principaux. Une première analyse de variance globale pour tous les effets, nous a permis de choisir à partir du graphique des effets le modèle suivant :

$$\log(T_1) = \mu + (G + N + X + Y + Z + U + A + X : U + N : X + G : U + N : Y + N : Y : U : A + G : N : X : Z + G : N : Z : Y + G : N : Z : A + G : N : X : Z : Y) + \text{erreur}$$

D'après le graphique affiché ci-dessous qui représente l'adéquation des résidus à une distribution normale, on constate que le modèle adopté est adéquat, malgré l'existence des écarts assez légers par rapport à la loi normale.

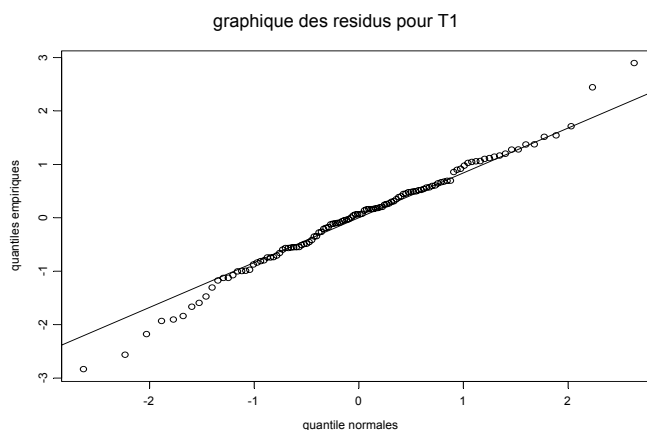


Figure 3.8 : Graphique des résidus pour T_1

Le Tableau 3.4 affiché ci-dessous, donne les résultats de l'analyse de variance pour $\log(T_1)$. Remarquons qu'au seuil 5%, il y a un effet très significatif du nombre de groupe (G), la totalité des variables auxiliaires dans le modèle (X), l'information préalable sur les groupes (U) et aussi un effet significatif du nombre de variables réponses (Y) (p-value < 0.05). D'autre part, nous constatons que l'effet principal n'est pas significatif pour la taille (N), la fraction des variables aléatoires (Z) et pour l'algorithme (A). On mentionne que tous les effets d'interaction sont significatifs.

Tableau 3.4
Analyse de variance pour les effets sélectionnés

Facteurs	Df	MSE	P-value
G	1	11,65	<10 e-3
N	1	1,52	0,16
X	1	2,36	0,09
Z	1	2,05	0,11
Y	1	7,15	0,003
U	1	26,63	<10 e-6
A	1	0,75	0,33
X:U	1	9,13	<10 e-3
N:X	1	6,10	0,006
G :X :Y	1	7,91	0,002
G:N:Z:A	1	5,14	0,012
G :N :X :A	1	4,86	0,014
Z :Y :U :A	1	3,18	0,047
G:N:X:Z:Y	1	6,28	0,005
Résidus	108	0,79	

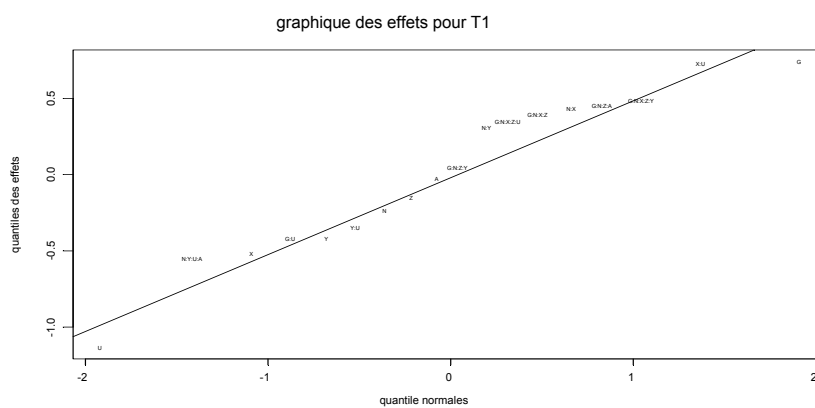


Figure 3.9 : Graphique des effets pour T_1

Suite à ces constatations, on peut dire que les deux algorithmes donnent presque les mêmes estimateurs de valeurs manquantes. Des analyses analogues sont faites pour $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ dont les résultats sont résumés dans ce qui suit :

Variance totale : $T_2 \cdot estimée$ (valeur observée)

Le modèle de l'analyse est :

$$\log(T_2.estimée) = \mu + (G + N + X + Y + Z + U + A + X : U + N : X + G : U + Y : U + N : Y + N : Y : U : A + G : N : X : Z + G : N : Z : Y + G : N : Z : A + G : N : X : Z : Y) + erreur$$

Le graphique des résidus démontre que le modèle choisi est adéquat, malgré l'existence des points étendus comme illustré par la Figure 3.10.

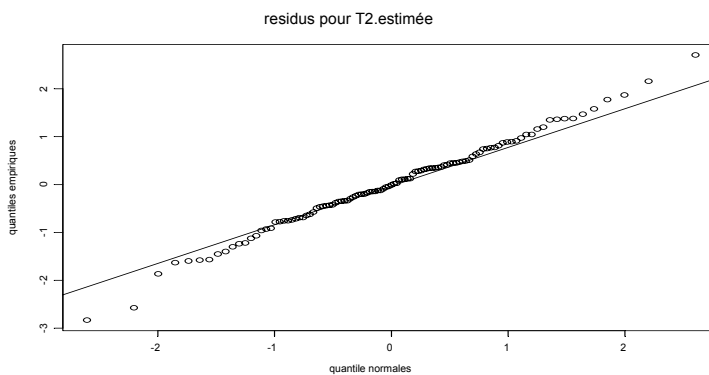


Figure 3.10 : Graphique des résidus pour $T_2.estimée$

Tableau 3.5

Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.estimée$

Facteurs	Df	MSE	P-value
G	1	10,83	<10 e-3
X	1	2,20	0,14
Y	1	4,91	0,032
Z	1	2,67	0,11
N	1	0,03	0,86
U	1	22,99	<10 e-5
A	1	0,41	0,53
X:U	1	12,47	<10 e-3
N:X	1	3,04	0,09
G:X:Y	1	3,13	0,086
G:N:Z:A	1	4,74	0,035
G:N:X:Z	1	4,57	0,039
Z:Y:U:A	1	3,40	0,073
G:N:X:Z:Y	1	6,85	0,01
Résidus	93	1,04	

Variance totale $T_2.vraie$ (moyenne observée)

Le modèle choisi pour $T_2.vraie$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\log(T_2.vraie) = \mu + (G + N + X + Y + Z + U + A + N : X + N : X : Y + G : N : Z : Y + G : N : Z : Y : U + G : N : X : U : A) + erreur$$

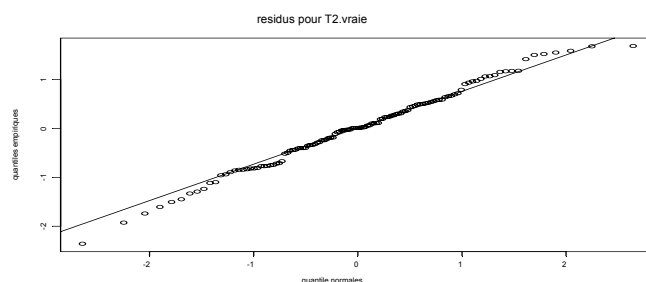


Figure 3.11 : Graphiques des résidus pour $T_2.vraie$

Tableau 3.6

Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.vraie$

Facteurs	Df	MSE	P-value
G	1	2,71	<10 e-3
N	1	1,05	0,23
X	1	13,38	<10 e-4
Z	1	0,11	0,69
Y	1	0,59	0,37
U	1	0,28	0,53
A	1	0,80	0,30
N:X	1	4,16	0,018
N:X:Y	1	3,10	0,04
G:N:Z:Y	1	3,34	0,016
G:N:Z:Y:U	1	3,49	0,03
N:N:X:U:A	1	0,21	0,59
Résidus	109	0,72	

Analyse de la différence entre T_1 et $T_2.estimée$

L'analyse de variance confirme à partir du Tableau 3.7 ci-dessous que les deux termes de mesure de variabilité T_1 et $T_2.estimée$ ne reflètent pas la même variabilité. Notons

que tous les facteurs principaux ont un effet significatif au niveau 5%, sauf pour les deux facteurs principaux A et Z.

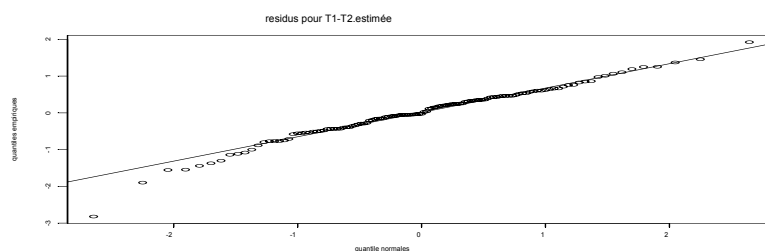


Figure 3.12 : Graphique des résidus pour la différence entre T_1 et T_2 .*estimée*

Tableau 3.7

Résultats de l'analyse de variance de la différence entre T_1 et T_2 .*estimée*

Facteurs	Df	MSE	P-value
X	1	4,54	<10 e-2
Z	1	1,92	0,08
Y	1	15,71	<10 e-5
G	1	6,93	<10 e-2
U	1	24,54	<10 e-7
A	1	1,19	0,17
N	1	5,73	0,003
N:A	1	6,41	0,001
N:Z	1	4,75	0,007
Y:U	1	3,59	0,018
U:A	1	3,35	0,023
X:U	1	2,51	0,048
Y:N:A	1	7,41	10e-3
N:A:U	1	4,74	0,007
G:U:N	1	1,50	0,125
G:Y:A:U	1	1,90	0,08
G:N:Z:Y	1	0,93	0,22
G:N:X:Z	1	2,41	0,05
G:U:N:A	1	0,51	0,36
G:N:X:Z:Y:A	1	0,21	0,56
G:N:X:Z:Y:U	1	1,80	0,09
Résidus	101	0,62	

3.2.3 Sélection du modèle d'imputation

1. Présentation des résultats :

La représentation graphique des résultats obtenus pour les différents types de variances T_1 , $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$ est donnée par des diagrammes en boîtes. Chaque graphique en boîtes illustre les valeurs de logarithme d'un type de variance, en fixant un facteur à la fois. Voir ci-dessous :

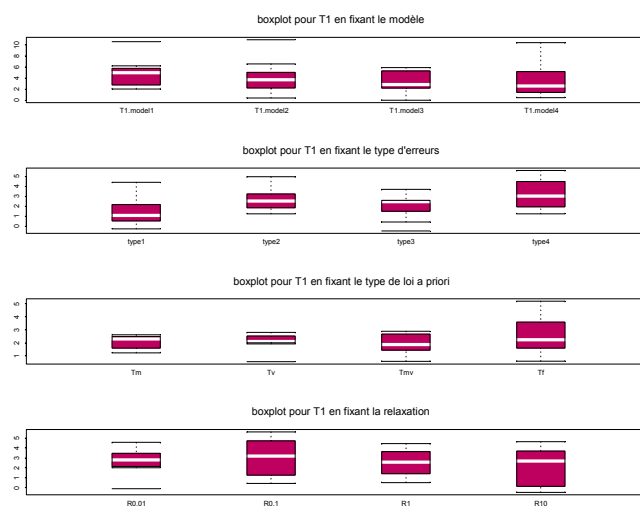


Figure 3.13 : Diagrammes en boîtes pour $\log(T_1)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation

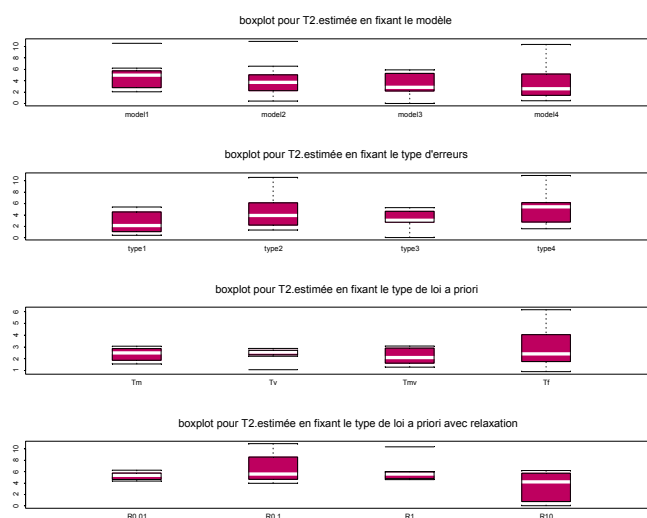


Figure 3.14 : Diagrammes en boîtes pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation

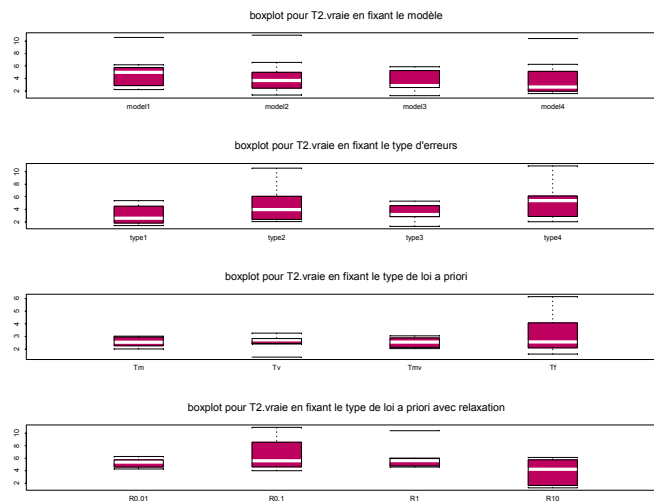


Figure 3.15 : Diagrammes en boîtes pour $\log(T_2.vraie)$ en fixant (1) le modèle, (2) le type d'erreurs, (3) la loi a priori et (4) la relaxation

On constate à partir de ces trois figures 3.13, 3.14 et 3.15 qu'il y a une différence entre les trois mesures de variances T_1 , $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$. Cette différence est mise en évidence surtout par le niveau 4 du facteur « modele » (les erreurs suivent une loi de student avec une variabilité différente dans les groupes). Ce dernier donne la plus petite valeur des variances calculées. On mentionne aussi la même remarque pour le niveau 1 du facteur « erreur » (les erreurs sont gaussiennes avec la même variabilité dans les groupes).

2. Analyse de la variance :

Dans ce qui suit, on donne les résultats de l'analyse de variance pour les trois types de variances calculées. Nous étudions la relation entre le modèle de génération des données et le modèle d'imputation.

Le modèle associé à cette statistique est un modèle à trois facteurs avec interactions, on note qu'on a 4 observations par cellule. Le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$y_{ijk} = \bar{\mu} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{jk} + e_{ijk}$$

tel que

- $\bar{\mu}$ est la moyenne générale.
- y_{ijk} est la valeur de logarithme de la variance pour la k -ème base de données en fixant les facteurs, modèle d'imputation i et le type de loi a priori j .
- α_i est l'effet principal du modèle i .
- β_j est l'effet principal de la loi a priori j .
- γ_k est l'effet principal du type d'erreur généré k .
- $\alpha\beta_{ij}$ est l'effet d'interaction entre modèle i et loi a priori j .
- $\alpha\gamma_{ik}$ est l'effet d'interaction entre modèle i et le type d'erreur k .
- ε_{ijk} est l'erreur.

Nous essayons dans cette partie de visualiser les facteurs intervenant dans l'imputation multiple et qui réduisent la variabilité des valeurs imputées. Pour chaque variance calculée, on s'intéresse plus au modèle d'imputation et a la loi a priori des valeurs manquantes.

Variance T_1

L'adéquation du modèle est vérifiée par le graphique des résidus. Ces dernières suivent une loi normale tel que indiqué par la Figure 3.16 présentée ci-dessous :

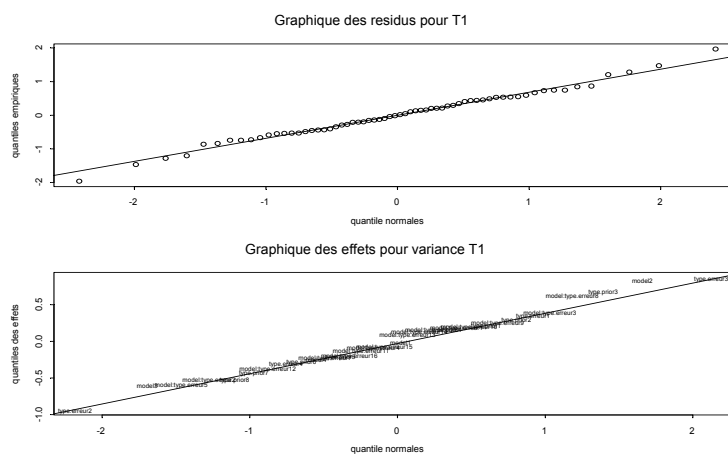


Figure 3.16 : Graphiques des résidus et des effets pour la statistique $\log(T_1)$

Les résultats de l'analyse de variance sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 3.8
Résultats de l'analyse de variance pour $\log(T_1)$

	Df	MSE	P-value
prior	7	0,62	0,73
modele	3	3,65	0,02
erreur	3	7,07	0,001
modele : prior	10	1,50	0,189
modele : erreur	8	1,57	0,175
résidus	29	0,99	

Nous signalons un effet non significatif du facteur « prior » et de l'intersection « modele : prior » ($P\text{-value} > 0.05$). D'autre part, les deux facteurs « modele » et « erreur » ont un effet significatif sur les résultats ($P\text{-value} < 0.05$). Aussi, on peut constater à partir du Tableau 3.9 que « modele1 » (les erreurs suivent une loi normale avec égalité des variances dans les groupes) est le niveau le plus influent sur les résultats ce qui veut dire qu'en moyenne les valeurs imputées sont différentes. Contrairement au « modele1 », le modèle d'imputation « modele4 » (les erreurs suivent une loi de student avec inégalité des variances dans les groupes) prédit des valeurs plus homogènes. Ces résultats sont vérifiés à partir du Tableau 3.9 qui donne les différences des variances entre deux niveaux différents du facteur « modele » et leurs intervalles de confiance en faisant des comparaisons multiples avec la méthode de Tukey.

Tableau 3.9
Comparaisons multiples pour $\log(T_1)$
en fixant le facteur « modele »

modele	Dif.modele	IC.inf	IC.sup
modele2-modele1	-0,81	-1,82	0,20
modele3-modele1	-0,81	-1,81	0,18
modele4-modele1	-1,78	-2,17	-0,18
modele3-modele2	-0,006	-0,98	0,97
modele4-modele2	-0,37	-1,35	0,61
modele4-modele3	-0,36	-1,32	0,60

Cependant, la structure des erreurs prise en compte pour la génération des données donnant plus de variabilité entre les valeurs imputées pour la même valeur manquante est « erreur4 » (la distribution des erreurs est la loi de student avec variances inégales dans les groupes), alors que celle qui donne moins de variabilité est « erreur1 » comme illustré dans le Tableau 3.10 affiché ci-dessous.

Tableau 3.10
Comparaisons multiples pour $\log(T_1)$
en fixant le facteur « erreur »

erreur	Diff.erreur	IC.inf	IC.sup
erreur2-erreur1	1,19	0,21	2,17
erreur3-erreur1	0,64	-0,32	1,60
erreur4-erreur1	1,55	0,55	2,55
erreur3-erreur2	-0,55	-1,53	0,42
erreur4-erreur2	0,35	-0,65	1,37
erreur4-erreur3	0,91	-0,085	1,90

Variance T_2 · estimée :

Le graphique des résidus pour la statistique T_2 · estimée confirme que le modèle attribué est correct, malgré l'existence des points extrêmes. Ce dernier est présenté avec le graphique des effets dans la Figure 3.17

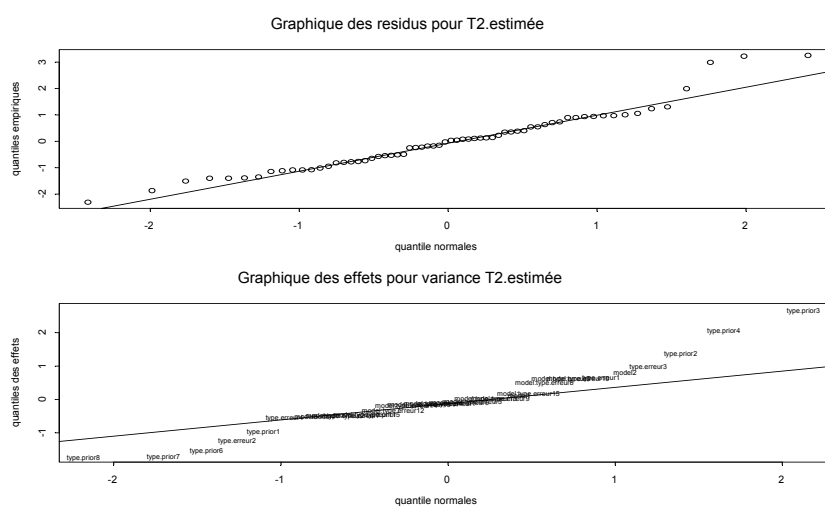


Figure 3.17 : Graphiques des résidus et des effets pour T_2 . estimée

L'analyse de variance pour T_2 .estimée démontre qu'il y a un effet très significatif de tous les facteurs du modèle, ainsi que toutes leurs interactions. Les résultats sont illustrés ci-dessous :

Tableau 3.11
Résultats de l'analyse de variance pour T_2 .estimée

	Df	MSE	P-value
prior	7	15,12	$<10^{e-12}$
modele	3	5,35	$<10^{e-4}$
erreur	3	10,85	$<10^{e-7}$
modele : erreur	8	1,61	0,003
modele : prior	10	1,96	$<10^{e-3}$
résidus	29	0,406	

Tableau 3.12
Comparaison multiple pour T_2 .estimée
en fixant le facteur « modele »

modele	Dif.modele	IC.inf	IC.sup
modele2-modele1	-0,76	-1,40	-0,13
modele3-modele1	-1,042	-1,66	-0,41
modele4-modele1	-1,39	-2,03	-0,76
modele3-modele2	-0,27	-0,90	0,34
modele4-modele2	-0,63	-1,26	0,004
modele4-modele3	-0,35	-0,79	0,27

Tableau 3.13
Comparaisons multiples pour T_2 .estimée
en fixant le facteur « erreur »

erreur	Diff.erreur	IC.inf	IC.sup
erreur2-erreur1	1,30	0,67	1,94
erreur3-erreur1	0,70	0,09	1,31
erreur4-erreur1	1,95	1,33	2,58
erreur3-erreur2	-0,60	-1,23	0,03
erreur4-erreur2	0,64	0,003	1,29
erreur4-erreur3	1,25	0,62	1,87

Comme on l'a déjà constaté pour T_1 , le Tableau 3.12 indique clairement que pour la mesure $T_2.estimée$, le modèle qui réduit la variabilité moyenne des valeurs imputées est « modele4 », alors que celui qui a la plus grande variabilité est « modele1 ». D'autre part, le Tableau 3.13 indique aussi que la structure des erreurs prise en compte pour générer les données qui assure moins de variabilité entre les imputations est « erreur1 », alors que « erreur4 » influe davantage les résultats de l'analyse. L'étude des comparaisons multiples pour l'effet d'interaction « modele : erreur », donne que le modèle le plus adéquat avec les types d'erreurs, « erreur1 », « erreur2 » et « erreur4 » est le « modele4 », alors que pour « erreur3 » c'est le « modele3 ». Le tableau de comparaisons multiples entre « modele » et « erreur » est donné dans le Tableau A.3, « Annexe 2: Résultats ».

Notons que pour l'interaction entre les facteurs « modele » et « prior », on constate à partir du Tableau A.4 donné dans « Annexe 2: Résultats » que les deux facteurs « modele4 » et « modele3 » donnent de meilleurs résultats en terme de variabilité avec « prior3 » (utilisation de la moyenne et variance pour la loi a priori des valeurs manquantes), alors que le « modele2 » est plus efficace avec « prior4 » et le « modele1 » avec « prior1 ».

Variance $T_2 \cdot vraie$

Les constatations pour $T_2.vraie$ sont similaires à celles de $T_2.estimée$. On remarque que tous les facteurs et leurs interactions ont un effet très significatif. Tous les résultats sont illustrés dans les Tableaux 3.14, 3.15 et 3.16 cités ci-dessous :

Tableau 3.14
Résultats de l'analyse de variance pour $T_2.vraie$

	Df	MSE	P-value
prior	7	12,06	$<10^{e-14}$
modele	3	3,40	$<10^{e-5}$
erreur	3	7,53	$<10^{e-9}$
modele : erreur	8	1,30	$<10^{e-3}$
modele : prior	10	1,54	$<10^{e-4}$
Résidus	29	0,216	

Tableau 3.15
 Comparaison multiple pour $T_2.vraie$
 en fixant le facteur « modele »

modele	Dif.modele	IC.inf	IC.sup
modele2-modele1	-0,64	-1,11	-0,18
modele3-modele1	-0,80	-1,25	-0,34
modele4-modele1	-1,12	-1,58	-0,66
modele3-modele2	-0,15	-0,60	0,30
modele4-modele2	-0,47	-0,93	-0,01
modele4-modele3	-0,32	-0,78	0,13

Tableau 3.16
 Comparaisons multiples pour $T_2.vraie$
 en fixant le facteur « erreur »

erreur	Dif.erreur	IC.inf	IC.sup
erreur2-erreur1	1,03	0,57	1,50
erreur3-erreur1	0,44	-0,007	0,88
erreur4-erreur1	1,59	1,40	2,05
erreur3-erreur2	-0,59	-1,05	-0,13
erreur4-erreur2	0,56	0,09	1,03
erreur4-erreur3	1,15	0,70	1,61

3.2.4 Cas particulier

1. Analyse de la variance

Le modèle choisi est un modèle à deux facteurs dont la forme générale est la suivante :

$$y_{ijk} = \bar{\mu} + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

tel que :

- $\bar{\mu}$ est la moyenne générale.
- α_i est l'effet principal du modèle i .

- y_{ijk} est la valeur du logarithme de la variance pour la k -ème base de données en fixant les facteurs, modèle d'imputation i et le type de loi a priori j .
- γ_j est l'effet principal de la loi a priori j .
- $(\alpha\gamma)_{ij}$ est l'effet d'interaction entre modèle i et loi a priori j .
- ε_{ijk} est l'erreur.

Dans ce qui suit, on va étudier l'effet de chaque facteur pour les différents types de variances calculées. Commençons tout d'abord par :

Variance T_1

Les résultats de l'analyse de la variance sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 3.17
Analyse de variance pour T_1

	Df	MSE	P-value
prior	4	52,27	$<10^{e-15}$
modele	3	12,91	$<10^{e-5}$
modele : prior	12	0,10	0,99
Error (base)	3	8,54	
résidus	57	0,19	

Les deux facteurs principaux, modèle d'imputation « modele » et la loi a priori pour les valeurs manquantes « prior » ont des effets significatifs (P-value < 0.05). Afin de spécifier les niveaux de facteur qui contribuent à ces effets significatifs, nous faisons des comparaisons multiples avec la méthode de Tukey.

Voici les résultats obtenus;

Facteur : modèle d'imputation « modele »

Tableau 3.18
les valeurs moyennes de $\log(T_1)$ en fixant
le facteur « modele »

	modele1	modele2	modele3	modele4
moyennes	0,835	1,386	0,739	1,393

Tableau 3.19
Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey
pour $\log(T_1)$ en fixant « modele »

modele	Dif.modele	IC.inf	IC.sup
modele1-modele2	-0,551	-0,920	-0,181
modele1-modele3	0,096	-0,273	0,465
modele1-modele4	-0,558	-0,927	-0,188
modele2-modele3	0,647	0,278	1,016
modele2-modele4	-0,006	-0,376	0,362
modele3-modele4	-0,654	-1,023	-0,284

Soulignons qu'il n'y a pas une différence significative entre les modèles (modele1, et modele3), et les modèles (modele2, et modele4) (l'intervalle de confiance pour la différence contient la valeur zéro). D'autre part, les modèles 2 et 4 contribuent à la signification de l'analyse de variances. Cependant, on conclut que les modèles les plus efficaces sont le **modele1** (loi normale avec égalité des variances dans les groupes) et le **modele3** (loi de student avec égalité des variances dans les groupes).

Facteur : loi a priori « Prior »

Tableau 3.20
Les valeurs moyennes de $\log(T_1)$ en fixant
le facteur « prior »

	prior1	prior2	prior3	prior4	prior5
moyenne	1,895	1,905	1,900	-2,144	1,885

Tableau 3.21

Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey
pour $\log(T_1)$ en fixant « prior »

prior	Dif.prior	IC.inf	IC.sup
prior1-prior2	-0,01	-0,76	0,74
prior1-prior3	-0,004	-0,75	0,75
prior1-prior4	4,040	3,29	4,80
prior1-prior5	0,010	-0,74	0,76
prior2-prior3	0,005	-0,75	0,76
prior2-prior4	4,050	4,00	4,80
prior2-prior5	0,020	-0,73	0,77
prior3-prior4	4,045	3,29	4,80
prior3-prior5	0,015	-0,74	0,77
prior4-prior5	-4,030	-4,80	-3,27

Remarquons qu'il n'y a pas une différence significative entre les niveaux prior1, prior2, prior3, et prior5, deux à deux, mais il y a une différence significative entre tous ces facteurs et le facteur **Prior4** qui a la valeur moyenne minimale de $\log(T_1)$ (**-2,144**).

Alors, pour ce cas, on peut dire que la loi a priori qui donne de meilleurs résultats en terme de variabilité est celle avec le paramètre de régularisation (**R= 0.1**). Ces conclusions sont identiques à celles pour les mesures de variabilité $T_2.estimée$ et $T_2.vraie$. Les résultats sont présentés ci-dessous;

Variance $T_2.estimée$

Tableau 3.22

Analyse de variance pour $T_2.estimée$

	Df	MSE	P-value
prior	4	152,019	$<10^{e-15}$
modele	3	6,35	$<10^{e-5}$
modele : prior	12	0,019	0,99
Error (base)	3	7,60	
résidus	57	0,146	

Facteur : modele**Tableau 3.23**

Les valeurs moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « modele »

	modele1	modele2	modele3	modele4
moyenne	1,39	1,73	1,33	1,73

Tableau 3.24

Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant « modele »

modele	Dif.modele	IC.inf	IC.sup
modele1-modele2	-0,34	-0,663	-0,016
modele1-modele3	0,06	-0,263	0,384
modele1-modele4	-0,34	-0,664	-0,016
modele2-modele3	0,40	0,076	0,724
modele2-modele4	-0,0002	-0,324	0,323
modele3-modele4	-0,40	-0,724	-0,076

Facteur : loi a priori « Prior »**Tableau 3.25**

Les valeurs moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant le facteur « prior »

	prior1	prior2	prior3	prior4	prior5
Moyenne	2,065	2,092	2,072	-0,558	2,054

Tableau 3.26

Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey
pour $\log(T_2.estimée)$ en fixant « prior »

prior	Dif.prior	IC.inf	IC.sup
prior1-prior2	-0,027	-0,41	0,36
prior1-prior3	-0,007	-0,39	0,38
prior1-prior4	2,623	2,24	3,01
prior1-prior5	0,010	-0,37	0,39
prior2-prior3	0,002	-0,36	0,40
prior2-prior4	2,650	2,26	3,03
prior2-prior5	0,037	-0,35	0,42
prior3-prior4	2,631	2,24	3,02
prior3-prior5	0,018	-0,37	0,40
prior4-prior5	-2,613	-3,01	-2,23

Variance $T_2.vraie$

Tableau 3.27

Analyse de variance pour $T_2.vraie$

	Df	MSE	P-value
prior	4	359,043	$<10^{e-15}$
modele	3	4,95	0,004
modele : prior	12	0,010	0,99
Error (base)	3	7,60	
résidus	57	0,146	

Facteur : modele

Tableau 3.28

Les valeurs moyennes de $\log(T_2.vraie)$ en fixant
le facteur « modele »

	modele1	modele2	modele3	modele4
moyennes	1,30	1,59	1,28	1,60

Tableau 3.29
Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey
pour $\log(T_2.vraie)$ en fixant « modele »

model	Dif.model	IC.inf	IC.sup
modele1-modele2	-0,29	-0,586	-0,008
modele1-modele3	0,016	-0,281	0,313
modele1-modele4	-0,30	-0,596	-0,001
modele2-modele3	0,30	0,007	0,602
modele2-modele4	-0,010	-0,307	0,287
modele3-modele4	-0,314	-0,612	-0,017

Facteur : loi a priori « prior »

Tableau 3.30
Les valeurs moyennes de $\log(T_2.vraie)$ en fixant
le facteur « prior »

	prior1	prior2	prior3	prior4	prior5
moyennes	2,181	2,205	2,188	-1,526	2,170

Tableau 3.31
Comparaisons multiples avec la méthode de Tukey
pour $\log(T_2.vraie)$ en fixant « prior »

prior	Dif.prior	IC.inf	IC.sup
prior1-prior2	-0,023	-0,38	0,33
prior1-prior3	-0,006	-0,36	0,35
○ prior1-prior4	3,707	3,35	4,06
○ prior1-prior5	0,011	-0,34	0,36
○ prior2-prior3	0,017	-0,34	0,37
prior2-prior4	3,731	3,37	4,08
prior2-prior5	0,034	-0,32	0,39
prior3-prior4	3,714	3,36	4,07
prior3-prior5	0,017	-0,34	0,37
prior4-prior5	-3,696	-4,05	-3,34

3.2.4.1 Estimation du paramètre β

Dans le Tableau 3.32, on donne les estimateurs moyens de β pour une base de données en spécifiant à chaque fois le modèle d'imputation.

Tableau 3.32

Les estimateurs moyens de β en fixant le facteur « modele »

β	Valeurs réelles de β	β estimée			
		modele1	modele2	modele3	modele4
β_{01}	0	0,048	0,044	0,036	0,038
β_{11}	0,975	0,918	0,924	0,935	0,930
β_{21}	0,775	0,863	0,843	0,863	0,847
β_{31}	1	0,874	0,885	0,902	0,889
β_{02}	0	-0,039	-0,025	-0,029	-0,022
β_{12}	0,80	0,787	0,789	0,797	0,794
β_{22}	0,725	0,761	0,738	0,762	0,742
β_{32}	0,75	0,665	0,642	0,658	0,639
β_{03}	0	-0,005	-0,017	-0,016	-0,021
β_{13}	0,925	1,051	1,037	1,041	1,033
β_{23}	0,625	0,772	0,765	0,781	0,768
β_{33}	0,55	0,576	0,573	0,586	0,575

Remarque:

On constate à partir du tableau 3.32, que les estimateurs de β sont similaires pour les différents types de modèles d'imputations.

Chapitre 4

Application

4.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un cas réel provenant d'une étude réalisée par (Murua et al, 2005). L'objectif principal de cette étude est la sélection du modèle d'imputation et la loi a priori des valeurs manquantes qui réduisent l'erreur quadratique moyenne de prédiction. On mentionne que l'algorithme utilisé est « BHLC » et les valeurs manquantes sont supposées de type « MAR ». Comme on l'a déjà constaté dans la section 3.3, l'estimation des valeurs manquantes à partir d'un modèle linéaire bayésien hiérarchique est reliée directement au modèle d'imputation et à la loi a priori des valeurs manquantes. À présent, on va répondre à l'objectif cité ci-dessus par la planification d'un plan à deux facteurs.

4.2 Données :

Les données considérées sont des données qui ont un rapport avec la santé, sélectionnées selon des facteurs influents sur la situation de la santé. Ce sont des facteurs d'ordre démographique, économique, politique, éducationnel et culturel. Ces données ont été traitées par (Murua, Hegyvary et Berry, 2005). L'échantillon est constitué de 161 pays qui font parti de l'organisation des nations unies et qui représentent des différences dans les conditions économiques et démographiques dans le monde. La banque mondiale (2004) a divisé ces pays en cinq groupes géographiques et économiques différents. Cette division sert à visualiser la structure des données, et à fournir l'information sur le contexte des différences observées. Au total, on a 72 variables dans la base de données originale dont cinq sont des variables réponse. Seulement 36 variables ont été gardées après l'étude de la corrélation. Ces dernières ont été combinées pour donner à la fin 18 variables. Par exemple, les cinq variables réponse sont réduites à deux variables réponse (1) espérance de vie corrigée, et (2) la mortalité infantile. On note que 15% des valeurs de l'échantillon sont manquantes et que toutes les variables explicatives sont des variables à effets aléatoires. Pour plus de détails sur les données voir (Hegyvary, Berry & Murua, 2005, 2007).

4.3 Modèle d'imputation et loi a priori :

Dans cette partie, on essaye de reproduire les mêmes hypothèses sur le modèle d'imputation et la loi a priori des valeurs manquantes qu'on a déjà vu dans la partie 4 du Chapitre 3. Donc, on a deux facteurs principaux qui sont :

Facteur 1: hypothèse sur la structure des erreurs des données (modèle d'imputation).

Ces niveaux sont :

- **modele1** : les erreurs suivent une loi normale avec variabilité identique dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma)$
- **modele2** : les erreurs suivent une loi normale avec variabilité inégale dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \Sigma_i)$.
- **modele3** : les erreurs suivent une loi de student avec variabilité identique dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma)$.
- **modele4** : les erreurs suivent une loi de student avec variabilité inégale dans les groupes $\varepsilon_{ij} \sim t(0, \Sigma_i)$.

Facteur 2: hypothèse sur la loi a Priori des valeurs manquantes

Ces cinq niveaux sont :

- **prior1** : loi a Priori avec variance des groupes $x_{ig} \sim N(0, \hat{\Sigma}_g)$.
- **prior2** : loi a priori avec moyenne et variance des groupes $x_{ig} \sim N(\bar{x}_g, \hat{\Sigma}_g)$.
- **prior3** : pas de loi a priori.
- **prior4** : loi a priori avec paramètre de régularisation (R = 0.1).
- **prior5** : loi a priori avec paramètre de régularisation (R = 100)

L'imputation des valeurs manquantes est réalisée par l'algorithme « BHCL » en prenant en considération les hypothèses sur la structure des données et la loi a priori des valeurs manquantes citées ci-dessus. Pour mesurer la précision des prédictions des valeurs manquantes, on augmente de 2% le nombre des valeurs manquantes réels. Ceux-ci sont

utilisés pour calculer l'erreur quadratique moyenne de prédiction associée aux différents modèles fournis par l'algorithme d'imputation. Le choix du couple (modèle, loi a priori), le plus efficace en termes de précision des prédictions est obtenu en faisant des analyses de variance pour les différentes mesures de variabilité issus de l'imputation.

4.4 Analyse des résultats :

Dans ce qui suit, on donne les résultats de l'analyse de variance pour les deux types de variances calculées qui sont T_1 et T_2 . *estimée*. Le modèle associé à cette statistique est un modèle à deux facteurs avec interactions qui s'écrit sous la forme suivante :

$$y_{ij} = \bar{\mu} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ij}$$

tel que :

- $\bar{\mu}$ est la moyenne générale.
- y_{ij} est la valeur du logarithme de la variance en fixant les facteurs, modèle d'imputation i et le type de loi a priori j .
- α_i est l'effet principal du modèle i .
- β_j est l'effet principal de la loi a priori j .
- $(\alpha\beta)_{ij}$ est l'effet d'interaction entre le modèle i et la loi a priori j .
- ε_{ij} est l'erreur.

Variance T_1

Les résultats de l'analyse de variance pour la mesure $\log(T_1)$ sont résumés dans le Tableau 4.1. Ce dernier indique qu'il y a un effet très significatif du facteur « prior » au niveau de signification 5% (P-value < 0,05). Cependant, l'effet principal du facteur « modele », et l'effet d'interaction des deux facteurs « prior » et « modele » ne sont pas significatives (P-value > 0,05). Voir ci-après :

Tableau 4.1Analyse de variance pour $\log(T_1)$

Facteurs	Degré de liberté	MSE	P-value
prior	4	51,92	< e-15
modele	3	0,010	0,74
prior : modele	12	0,016	0,75
Error: repetition	3	0,118	
Residus	57	0,024	

Dans ce cas, une comparaison multiple avec la méthode de Tukey est nécessaire pour sélectionner la loi a priori qui donne une variance minimale. Les résultats sont résumés dans les tableaux qui suivent :

Facteur : loi a priori « prior »

Tableau 4.2Les moyennes de $\log(T_1)$ en fixant le facteur « prior »

	prior1	prior2	prior3	prior4	prior5
Moyennes	3,957	4,024	3,958	-0,053	3,96

Chaque cellule du Tableau 4.2, représente la valeur moyenne de $\log(T_1)$, en fixant à chaque fois un niveau du facteur « prior ». Remarquons que $\log(T_1)$ prend une valeur minimale par le niveau « prior4 » (loi a priori avec paramètre de régularisation $R=0,1$). On constate, d'après le Tableau 4.3 des comparaisons multiples, qu'il n'y a pas une différence significative entre les types de loi a priori, prior1, prior2, prior3 et prior5. Tous ces facteurs sont différents significativement du niveau « **prior4** » ($R=0,1$). Ce dernier, donne de meilleurs résultats ($\log(T_1) = -0,053$).

Tableau 4.3
Comparaisons multiples avec Tukey pour $\log(T_1)$
en fixant le facteur « prior »

Prior	Dif.prior	IC.inf	IC.sup
prior1-prior2	-0,067	-0,22	0,09
prior1-prior3	-0,001	-0,17	0,15
prior1-prior4	4,009	3,85	4,16
prior1-prior5	-0,003	-0,16	0,15
prior2-prior3	0,066	-0,09	0,22
prior2-prior4	4,077	3,92	4,23
prior2-prior5	0,064	-0,09	0,22
prior3-prior4	4,011	3,85	4,17
prior3-prior5	-0,001	-0,16	0,15
prior4-prior5	-4,013	-4,17	-3,85

De la même façon, on constate des conclusions similaires pour la variance $T_2.estimée$ comme illustré ci après :

Tableau 4.4
Analyse de variance pour $\log(T_2.estimée)$

Facteurs	Degré de liberté	MSE	P-value
prior	4	116,84	< e-15
modele	3	0,02	0,34
prior : modele	12	0,02	0,38
Error (repetition)	3	0,12	
Résidus	57	0,02	

Facteur : loi a priori « Prior »

Tableau 4.5
Les moyennes de $\log(T_2.estimée)$ en fixant
le facteur « prior »

	Prior1	Prior2	Prior3	Prior4	Prior5
Moyenne	3,885	3,950	3,884	-2,141	3,884

Tableau 4.6
Comparaisons multiples avec Tukey pour $\log(T_2.estimée)$
en fixant le facteur « prior »

Prior	Dif.prior	IC.inf	IC.sup
Prior1-Prior2	-0,065	-0,20	0,08
Prior1-Prior3	-0,0007	-0,14	0,14
Prior1-Prior4	6,025	5,88	6,16
Prior1-Prior5	-0,0008	-0,14	0,14
Prior2-Prior3	0,066	-0,08	0,21
Prior2-Prior4	6,091	5,95	6,23
Prior2-Prior5	0,064	-0,08	0,20
Prior3-Prior4	6,025	-6,17	-5,88
Prior3-Prior5	0,001	-0,14	0,14
Prior4-Prior5	-6,026	-6,17	-5,88

Remarque :

Nous estimons avoir de meilleurs résultats pour la sélection du modèle si on augmente plus le nombre de répétitions. Ces simulations prennent beaucoup de temps. Pour plus de détails voir (Hegyvary, Berry & Murua, 2005, 2007).

Conclusion

Tout le travail fournit dans ce mémoire présume et conclut qu'il y a une relation systématique entre la structure des données et le modèle d'imputation. Partant du premier résultat important, et dans le cas de données générées selon un modèle linéaire multivarié à effets mixtes en groupes, on a constaté que tous les facteurs élémentaires dans le modèle, citant le nombre de groupes, le nombre de variables réponse, les covariables, le nombre d'observations et l'information préalable sur les groupes ont un effet très significatif sur les valeurs imputées. L'ignorance des groupes et la typologie des valeurs manquantes « MCAR » augmentent la variabilité de prédiction. Ces conclusions sont similaires pour les deux méthodes d'imputations multiples avec modèle explicite « Pan » et « BHLC ». Un point très important soulevé dans notre mémoire est l'erreur quadratique moyenne des prédictions des valeurs manquantes. Une première mesure est celle dérivée de Rubin qu'on a notée T_1 qui mesure la variation moyenne entre les valeurs imputées et la moyenne des variances intra imputations. Cette dernière ne prend pas en considération les biais que les modèles d'imputation peuvent introduire, contrairement à la deuxième mesure qu'on a introduit $T_{2,estimée}$, qui tient ceci en compte. Cependant, on peut dire que ces deux mesures ne reflètent pas la même variabilité.

La particularité de l'algorithme « BHLC » est que ce dernier adopte plusieurs choix sur la loi a priori des valeurs manquantes et la structure des erreurs pour la génération des données. La sélection d'un modèle d'imputation parmi d'autres utilisés par l'algorithme « BHLC », revient à choisir à la fois la loi prédictive des données et la loi a priori des valeurs manquantes afin de réduire le biais des prédictions. Suivant la troisième partie des simulations, on a constaté que le modèle le plus efficace est le « modele4 » (la distribution des erreurs est la loi de Student avec des variances inégales dans les groupes). Dans ce cas, la loi a priori qui a de meilleurs résultats avec ce modèle est la loi a priori « prior3 » (utilisation de la moyenne et variance empiriques pour les valeurs manquantes). De manière générale, dans un contexte de données connues et contrôlées,

on a toujours tendance à trouver le modèle d'imputation le plus efficace en terme d'incertitude.

En faisant une application sur des données réelles, on est arrivé à dire que la sélection du modèle revient à la sélection d'une loi a priori. La loi a priori qui donne les meilleurs résultats est celle qui utilise le paramètre de régularisation ($R = 0.1$).

Finalement, plusieurs facteurs interviennent dans le choix d'un modèle adéquat pour l'imputation multiple, des facteurs d'ordre structurel et élémentaire et aussi le mécanisme de non-réponse. La prise en charge du contexte global dans lequel sont classées les données aide à obtenir de meilleurs estimateurs des valeurs manquantes et ainsi réduire la variabilité supplémentaire due à l'imputation multiple. Face à cette étude, il faut faire dans le futur une étude de l'influence de la qualité des imputations dans l'estimation des paramètres du modèle.

Bibliographies

- [1] Murua, A., Hegyvary, S. T., and Berry, D. (2005) Analysis of outcomes in the presence of missing data, rapport technique non-publié.
- [2] Murua, A., Hegyvary, S. T., et Berry, D. (2007) Exploratory Analysis and Clustering of health outcomes with missing values, rapport technique non-publié.
- [3] Joseph L. Schafer, et Recai M. Yucel. (2002) Computational Strategies for Multivariate Linear Mixed-Effects Models with Missing Values. *Journal Computational and Graphical Statistics*, Volume 11, Number 2, Pages 437-457.
- [4] Donald B. Rubin. (1987) *Multiple imputation for nonresponse in survey*. New York: J. Wiley & Sons
- [5] Schafer, J. L. (1997) *Analysis of incomplete multivariate data*. Chapman and Hall
- [6] Roderick J. A. Little, Donald B. Rubin. (2002) *Statistical analysis with missing data*. Wiley & Sons
- [7] Dempster, A.P., N.M. Laird et D.B. Rubin (1977), Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm , *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39, p. 1-38.
- [8] Little, R.J.A. et D.B. Rubin (1997), *Statistical analysis with missing data*, New York, J. Wiley & Sons.
- [9] Geman, D. et S. Geman (1984), Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the bayesian reconstruction of images , *IEEE Transactions on Pattern Analysis, and Machine Intelligence*, 6, p. 721-741.
- [10] Gelman, A. et Rubin, D. B. (1992) Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, 457-511.
- [11] Library S+Bayes (Murua et al. 2004) site web:
<http://www.insighful.com/downloads/libraries/>
- [12] Library PAN (Schafer, 2002) site web: <http://www.stat.psu.edu/~jls/misoftwa.html>.
- [13] Robert, O. Kuehl. , *Design of Experiments: Statistical Principles of Research Design and Analysis*. Duxbury Press.

Annexe 1

Algorithmes

```
#####
#
#####Génération des données#####

setwd("c:/homechagra/")

matricecorr= fonction(m,var,p,pexp,sig)
{
  if (p>1)
  {

    v= matrix(0,p,p)
    for(j in seq(1,p))
    {
      v[,j]= rnorm(p,m[j],var[j])

    }

    u= matrix(0,p,p)
    u[,1]= v[,1]/ sqrt( sum( v[,1]^2 ) )

    for(j in seq(2,p) )
    {
      w = rep(0,p)
      for(i in seq(1, j-1) )
      {
        w= w + ( sum(v[,j] * u[,i]) * u[,i] )
      }

      u[,j]= v[,j] - w
      u[,j]= u[,j] / sqrt( sum( u[,j]^2 ) )

    }

    valprop= rexp(p,pexp)
      D= diag(sqrt(sig))
      R= u %*% diag(valprop) %*% t(u)
      sigma= D %*% R %*% D
    }

  else{
    sigma= sig
  }

}#end

#base de données à partir de sigma
data=function(sigma,n,p,moy)
{
  if (p>1)
  {
    values= eigen(sigma)$values
    vectors= eigen(sigma)$vectors
    racsigma= vectors %*% diag(sqrt(values)) %*% t(vectors)
    data= racsigma %*% t(matrix(mvrnorm(n= n, rep(0,p), diag(1,p)),n,p))+ moy
  }
  else
  {
    data= t(matrix(mvrnorm(n= n, moy, sigma),n,p))
  }
}#end

#génération des données
```



```

library(MASS)
generateGroups <- function(mdx, var, nt, p, q, r, beta, m, sigma, g, pexp)
{
  n= NULL
  b= NULL
  y= NULL
  e= NULL
  x= NULL
  z= NULL
  x1= NULL
  facteur.b= NULL
  erreur= NULL
  data.y= NULL
  data.x= NULL
  data.z= NULL
  #datax1= NULL
  Beta= NULL
  mx= sample(mdx,p,F)
  varx= sample(var,p)
  mz= rep(0,q)
  varz= sample(var,q)
  mpsi= sample(m,q)
  varpsi= sample(var,q)
  Dpsi= sample(var,q)
  Dx= sample(var,p)
  Dz= sample(var,q)
  Ds= sample(var,r)
  vars= sample(var,r)
  ms= sample(mdx,r)
  moyz= rep(0,q)
  moyx= matrix(sample(mdx,g*p),g,p)
  Beta= matrix(sample(beta,p*r),p,r)
  sigma= matricecorr(ms, vars, r, pexp= sample(pexp,1),Ds)
  psi= matricecorr(mpsi,varpsi,q,pexp= sample(pexp,1),Dpsi)
  sigmax= matricecorr(mx, varx, p, pexp= sample(pexp,1),Dx)
  sigmaz= matricecorr(mz, varz, q, pexp= sample(pexp,1),Dz)
  n= rmultinom(1,size= nt,prob= rep(1/g,g))

  for(i in seq(1,g))
  {
    b[[i]]= t(matrix(mvrnorm(n=r, rep(0, q), psi),r,q))
    e[[i]]= mvrnorm(n=n[i],rep(0,r),sigma)
    x[[i]]= t(data(sigmax,n[i], p, moyx[i,]))
    data.x= rbind(data.x, x[[i]])
    z[[i]]= t(data(sigmaz,n[i], q, moyz) )
    data.z= rbind(data.z,z[[i]])
    y[[i]]= x[[i]] %*% Beta + z[[i]] %*% b[[i]] + e[[i]]
    data.y= rbind(data.y,y[[i]])
    facteur.b= rbind(facteur.b,b[[i]])
    erreur= rbind(erreur,e[[i]])
  }
  list( erreur= erreur, facteur.b= facteur.b, data.x= data.x, data.z=data.z,
        data.y= data.y, moyx= moyx, varx= varx, n= n, Beta= Beta, psi=psi)
}#end

```

```
#####
#
#####Fonction pour valeurs manquantes avec le mécanisme MAR#####
#
#####

missvalue=function(y, x, r, p, alpha, n, g, nbx, nbvmanq)
{
  nby1= NULL
  nby2= NULL
  q= p /alpha
  quantile= matrix(0,nbx,g)
  nb= 0
  gs= sample(1:g,g)
  datamiss= NULL

for(i in gs)
  {
    for(k in seq(1,nbx))
      {
        quantile[k,i]= quantile(x[[i]][,k],alpha)
        obs= sample(1:n[i],n[i])
        for (l in obs)
          {
            nby1=sample(1:r,1)
            nby2=sample(1:r,nby1)

            for(j in nby2)
              {
                if (quantile[k,i] < x[[i]][,k][l])
                  {
                    c= runif(1,0,1)

                    if (q<=c && nb < nbvmanq)
                      {
                        y[[i]][,j][l]= NA
                        nb= nb+1
                      }
                  }
              }
          }
      }
  }

for(i in 1:g){datamiss=rbind(datamiss,y[[i]])}
list(y= y,nb=nb,quantile=quantile,datamiss=datamiss)
}#end
```

```
#####
#
###Fonction pour valeurs manquantes avec le mécanisme MCAR###
#
#####

missvaluesMCAR= fonction(data,nbvmanq){
  datamissMCAR= data
  position= matrix(0,nrow(datamissMCAR),ncol(datamissMCAR))
  données= NULL
  h= 1
  k= 1
  s= sample( 1:(ncol(datamissMCAR)*nrow(datamissMCAR)),nbvmanq)
  for(j in 1:ncol(datamissMCAR))
    {
      for(i in 1:nrow(datamissMCAR))
        {
          position[i,j]= k
          k= k+1
        }
    }

  for(j in 1:ncol(datamissMCAR))
    {
      for(i in 1:nrow(datamissMCAR))
        {
          données[h]= datamissMCAR[i,j]
          h= h+1
        }
    }

  for(j in 1:ncol(datamissMCAR))
    {
      for(i in 1:nrow(datamissMCAR))
        {
          for(l in 1:length(s))
            {
              if(position[i,j]==s[l])
                {
                  datamissMCAR[i,j]= NA
                }
              else{
                datamissMCAR[i,j]= datamissMCAR[i,j]
              }
            }
        }
    }

  }

  list(datamissMCAR= datamissMCAR)

}#end
```

```
#####
#
#####Algorithme pour imputation multiple avec Pan#####
#
#####

library(pan)
impmultiple <-
function(datax, dataz, datay, datamiss, k, m, n, r, p, q, g, burn.in, ship.freq, seed0)
{
  subj= NULL
  for(i in 1:g){
    subj= c(subj, rep(i, n[i]))
    subj
    datax1= cbind(1, datax)
  }
  pred <- cbind(datax1, dataz)

  #colonne
  p1= ncol(datax1)
  q= ncol(dataz)
  q1=q+1
  xcol <- c(1:p1)
  d= p1+1
  c= p1+q
  zcol <- c(1,d:c)

  #parametres de la distribution a priori
  #a=r, Binv=diag(1, r), c=r*q1, Dinv=diag(1, r*q1)
  #prior=c(a, Binv, c, Dinv)

  prior <- list(a= r, Binv= diag(1, r), c= r*q1, Dinv= diag(1, r*q1))

  #les seeds utilisés pour chaque chaine

  seed1= rep(0, m)
  seed2= matrix(0, k, m)
  seed12=NULL
  reschaine= NULL
  resimp= NULL
  result= NULL
  vraival= NULL
  vm= matrix(0, sum(is.na(datamiss)), 2)
  valimp= NULL
  valchaine= matrix(0, nrow(vm), k)
  moy= matrix(0, nrow(vm), m)
  var= matrix(0, nrow(vm), m)
  h= 1
  for(l1 in 1:nrow(datamiss))
  {
    for(l2 in 1:ncol(datamiss))
    {
      if(is.na(datamiss)[l1, l2]==TRUE)
      {
        vm[h, 1]= l1
        vm[h, 2]= l2

        vraival[h]= datay[l1, l2]
        h= h+1
        vm= vm
        vraival= vraival
      }
    }
  }
}

```

```

}})#end

seed1=sample(seed0,m,F)

for (j in 1:m){

    seed2[,j]=sample(seed0,k,F)

}#end
seed12= rbind(seed1,seed2)

for(j in seq(1,m))
{
    result[[j]] <- pan(datamiss,subj,pred,xcol,zcol,prior,seed=
seed1[j],iter= burn.in)
    for(i in seq(1,k)){

        result[[j]] <- pan(datamiss,subj,pred,xcol,zcol,prior,seed=
seed2[i,j],iter=ship.freq,start= result[[j]]$last)

        reschaine[[i]]= data.matrix(result[[j]]$y)
        resimp[[j]]= reschaine

        for(l in 1:nrow(vm)){valchaine[,i][l]= resimp[[j]][[i]][vm[l,1],vm[l,2]]}
        valimp[[j]]= valchaine
        for(s in 1: nrow(valimp[[j]])){
            moy[s,j]= mean(valimp[[j]][s,])
            var[s,j]= var(valimp[[j]][s,])
            moy= moy
            var= var
        }
    }
}

list( resimp= resimp, vm= vm, valimp= valimp, seed12= seed12, vraival=
vraival, moy= moy, var= var)

}#end

#####Calcul des variances#####
#w est la variance intra groupe
#B variance interimputation
#T variance totale
#D est la distance moyenne entre la valeur imputée et la valeur observée
#####

calculvariance <-function(moy,var,vraival,m)
{
  B= NULL
  W= NULL
  T1=NULL
  T2= NULL
  D= NULL
  variance= NULL
  moyimputed=NULL
  biais= NULL
  values=NULL
  for(h in seq(1,nrow(moy)))

```

```
{
  B[h]= var(moy[h,])
  W[h]= mean(var[h,])
  T1[h]= ((1-1 /m) * B[h]) + W[h]
  D[h]= sum((moy[h,]-vraival[h])^2) / ncol(moy)
  T2[h]= D[h] + W[h]
  moyimputed[h]= mean(moy[h,])
  biais[h]= moyimputed[h]-vraival[h]
}
values=cbind(vraival, moyimputed, biais)
variance= cbind(B, W, D, T1, T2)

list(variance= variance,values= values)

}#end
```

```
#####
#
#####Algorithme pour imputation multiple avec BHLC#####
#
#####

library("bayesX",lib.loc="c:/libraryMurua/bayesX")

resul= fonction(modele,prior){

datamiss= NULL
dataimpmoy= NULL
dataimpvar= NULL
variance= NULL
vraival= NULL
vraivaly= NULL
vraivalx= NULL
vraivalz= NULL
moy.obs= NULL
moy.obs.y= NULL
moy.obs.z= NULL
moy.obs.x= NULL
data= NULL
values= NULL
fit= NULL
psi= NULL
sigma= NULL
coef.b= NULL
psi.c= NULL
sigma.c= NULL
coef.b.c= NULL
psil= NULL
sigma1= NULL
coef.b1= NULL
beta1= NULL
beta.c= NULL

#####
for(j in 1:8){

  datay= data.matrix(read.table(file= file1[j], header = FALSE, sep = ""))
  datax= data.matrix(read.table(file= file2[j], header = FALSE, sep = ""))
  dataz= data.matrix(read.table(file= file3[j], header = FALSE, sep = ""))
  taille= data.matrix(read.table(file= file4[j], header = FALSE, sep = ""))
  Beta= data.matrix(read.table(file= file7[j], header = FALSE, sep = ""))
  moy.x= data.matrix(read.table(file= file10[j], header = FALSE, sep = ""))

  data= cbind(datay,datax,dataz)

  moyx= NULL
  group= NULL

  for(i in 1:nrow(taille))
  {
    group= c(group,rep(i,taille[i,1]))
    moyx= rbind(moyx,
cbind(rep(moy.x[i,1],taille[i,1]),rep(moy.x[i,2],taille[i,1])))
    group
    moyx
  }

  datamiss= data.matrix(read.table(file=file11[j], header = FALSE, sep = ""))

```

```

vm= matrix(0,sum(is.na(datamiss)),2)
dataimputed.moy= matrix(0,sum(is.na(datamiss)),10)
dataimputed.var= matrix(0,sum(is.na(datamiss)),10)

h= 1; h1= 1; h2= 1; h3= 1
for(l1 in 1:nrow(datamiss))
  {
    for(l2 in 1:ncol(datamiss))
      {
        if(is.na(datamiss[l1,l2])==TRUE)
          {
            if(l2<=2)
              {
                vraivaly[h1]= data[l1,l2]
                moy.obs.y[h1]= datax[l1,]*%Beta[,l2]
                h1= h1+1
              }
            else
              {
                if(l2>=5)
                  {
                    vraivalz[h2]= data[l1,l2]
                    moy.obs.z[h2]= 0
                    h2=h2+1
                  }
                else
                  {
                    vraivalx[h3]= data[l1,l2]
                    if(l2==3)
                      {
                        moy.obs.x[h3]= moyx[l1,1]
                      }
                    h3=h3+1
                  }
                else{
                    moy.obs.x[h3]= moyx[l1,2]
                    h3=h3+1
                }
              }
          }
      }

vm[h,1]= l1
vm[h,2]= l2
h= h+1
vm= vm

vraivaly= vraivaly
vraivalx= vraivalx
vraivalz= vraivalz
vraival=c(vraivaly,vraivalz,vraivalx)
moy.obs.y= moy.obs.y
moy.obs.z= moy.obs.z

```



```

                                moy.obs.x= moy.obs.x

                                moy.obs=c(moy.obs.y,moy.obs.z,moy.obs.x)

                                }
}}#end
# data frame avec valeurs manquantes

data[[j]]= data.frame(datamiss, group= group)

# Fonction * fitBayesHMX * pour imputation multiple

fit1= fitBayesHMX ( data[[j]], group = "group", r= ncol(datay), p= ncol(datax),
q=ncol(dataz),burnIn =5000, simSize = 20, freqSize = 50, number.chains= 20,
likelihood=as.name(modele[[j]][1]),common.error.cov=as.numeric(modele[[j]][2]),
use.prior= as.name(prior[[j]][1]),use.group.var=as.name(prior[[j]][2]),
use.group.mean= as.name(prior[[j]][3]), relaxation= 0)

fit[[j]]= fit1
for(h in 1:sum(is.na(datamiss)))
  {
    for(k in 1:10)
      {
        dataimputed.moy[h,k]=
mean(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$imputed$values[,h])
        dataimputed.var[h,k]=
var(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$imputed$values[,h])
      }
    }#end

#calcul des parametres (psi, sigma, coefb, valimp moy, valimpvar)

n1= ncol(fit[[j]]@model[[1]]@hlm.fit$random$scale)
n2= ncol(fit[[j]]@model[[1]]@hlm.fit$scale$scale)
n3= ncol(fit[[j]]@model[[1]]@hlm.fit$random$coef)
n4= ncol(fit[[j]]@model[[1]]@hlm.fit$fixed$coef)

a= rep(0,n1)
b= rep(0,n3)
c= rep(0,n2)
d= rep(0,n4)
psi= matrix(0,10,n1)
sigma= matrix(0,10,n2)
coef.b= matrix(0,10,n3)
beta= matrix(0,10,n4)

for(k in 1:10){
  psi.c[[k]]= round(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$random$scale, 3)
  coef.b.c[[k]]= round(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$random$coef, 3)
  sigma.c[[k]]= round(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$scale$scale, 3)
  beta.c[[k]]= round(fit[[j]]@model[[k]]@hlm.fit$fixed$coef, 3)

  for(l1 in 1: n1)
    {
      a[l1]=mean(psi.c[[k]][,l1])
      a= a
    }
  for(l2 in 1: n3)
    {
      b[l2]=mean(coef.b.c[[k]][,l2])
      b= b
    }
  for(l3 in 1: n2)

```

```

        {
          c[l3]=mean(sigma.c[[k]][,l3])
          c= c
        }
    for(l4 in 1: n4)
        {
          d[l4]=mean(beta.c[[k]][,l4])
          d= d
        }

    psi[k,]= a
    sigma[k,]= c
    coef.b[k,]= b
    beta[k,]= d

  }

  dataimpmoy[[j]]= round(dataimputed.moy ,4)
  dataimpvar[[j]]= round(dataimputed.var,4)
  psi1[[j]]= psi
  coef.b1[[j]]= coef.b
  sigma1[[j]]= sigma
  beta1[[j]]= beta

  calvar= calculvariance(dataimputed.moy,dataimputed.var ,vraival, moy.obs,m= 20)
  variance[[j]]= round(calvar$variance,4)
  values[[j]]= round(calvar$values,4)

}

}#end

```

Annexe 2

Résultats

Tableau A.1
 Résultats de l'analyse de variance de T_1 pour le plan
 factoriel complet avec répétitions corrélées

	Df	Sum of Sq	Mean Sq	F Value	Pr(F)
M	1	2.0119	2.0119	65.96	0.0000000
G	1	47.4455	47.4455	1555.38	0.0000000
N	1	9.8776	9.8776	323.81	0.0000000
X	1	212.6714	212.6714	6971.89	0.0000000
Z	1	23.4671	23.4671	769.31	0.0000000
Y	1	7.8851	7.8851	258.49	0.0000000
P	1	0.2916	0.2916	9.56	0.0020967
U	1	559.2983	559.2983	18335.17	0.0000000
r.pan	1	0.0009	0.0009	0.03	0.8632664
M:G	1	0.0199	0.0199	0.65	0.4199677
M:N	1	0.4600	0.4600	15.08	0.0001166
G:N	1	15.3591	15.3591	503.51	0.0000000
M:X	1	0.9039	0.9039	29.63	0.0000001
G:X	1	82.0330	82.0330	2689.24	0.0000000
N:X	1	2.8765	2.8765	94.30	0.0000000
M:Z	1	0.0505	0.0505	1.66	0.1988004
G:Z	1	1.3841	1.3841	45.37	0.0000000
N:Z	1	0.0840	0.0840	2.76	0.0975592
X:Z	1	12.4783	12.4783	409.07	0.0000000
M:Y	1	0.0678	0.0678	2.22	0.1367444
G:Y	1	18.2017	18.2017	596.70	0.0000000
N:Y	1	21.9680	21.9680	720.17	0.0000000
X:Y	1	0.3223	0.3223	10.57	0.0012275
Z:Y	1	1.8153	1.8153	59.51	0.0000000
M:P	1	0.0159	0.0159	0.52	0.4708026
G:P	1	0.0156	0.0156	0.51	0.4746811
N:P	1	0.2750	0.2750	9.02	0.0028074
X:P	1	0.2149	0.2149	7.05	0.0081900
Z:P	1	0.0547	0.0547	1.79	0.1811198
Y:P	1	0.0062	0.0062	0.20	0.6526466
M:U	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9996005
G:U	1	5.6617	5.6617	185.60	0.0000000
N:U	1	101.6521	101.6521	3332.41	0.0000000
X:U	1	79.3718	79.3718	2602.00	0.0000000
Z:U	1	7.6499	7.6499	250.78	0.0000000
Y:U	1	16.3814	16.3814	537.02	0.0000000
P:U	1	0.1595	0.1595	5.23	0.0226099
M:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9449934
G:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9037474
N:r.pan	1	0.0031	0.0031	0.10	0.7490533
X:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8727796
Z:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8485577
Y:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8576746
P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9783136
U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9227825
M:G:N	1	0.0345	0.0345	1.13	0.2880451
M:G:X	1	0.0221	0.0221	0.73	0.3947702
M:N:X	1	0.4124	0.4124	13.52	0.0002613
G:N:X	1	13.6571	13.6571	447.71	0.0000000
M:G:Z	1	0.1997	0.1997	6.55	0.0107886
M:N:Z	1	0.2790	0.2790	9.15	0.0026174
G:N:Z	1	1.1660	1.1660	38.23	0.0000000
M:X:Z	1	0.0271	0.0271	0.89	0.3466916
G:X:Z	1	10.0360	10.0360	329.01	0.0000000
N:X:Z	1	3.5788	3.5788	117.32	0.0000000

M:G:Y	1	0.6501	0.6501	21.31	0.0000049
M:N:Y	1	0.0731	0.0731	2.40	0.1221166
G:N:Y	1	9.9557	9.9557	326.37	0.0000000
M:X:Y	1	0.0074	0.0074	0.24	0.6218895
G:X:Y	1	27.0713	27.0713	887.47	0.0000000
N:X:Y	1	6.9352	6.9352	227.35	0.0000000
M:Z:Y	1	0.0227	0.0227	0.74	0.3886269
G:Z:Y	1	19.5771	19.5771	641.78	0.0000000
N:Z:Y	1	0.3321	0.3321	10.89	0.0010358
X:Z:Y	1	0.0230	0.0230	0.76	0.3852154
M:G:P	1	0.0625	0.0625	2.05	0.1530718
M:N:P	1	0.0036	0.0036	0.12	0.7295892
G:N:P	1	0.0017	0.0017	0.06	0.8126379
M:X:P	1	0.0662	0.0662	2.17	0.1412958
G:X:P	1	0.0795	0.0795	2.61	0.1070274
N:X:P	1	0.1134	0.1134	3.72	0.0544384
M:Z:P	1	0.2854	0.2854	9.36	0.0023383
G:Z:P	1	0.1575	0.1575	5.16	0.0234723
N:Z:P	1	0.0934	0.0934	3.06	0.0808199
X:Z:P	1	0.0926	0.0926	3.03	0.0821091
M:Y:P	1	0.1119	0.1119	3.67	0.0559833
G:Y:P	1	0.0268	0.0268	0.88	0.3492603
N:Y:P	1	0.0058	0.0058	0.19	0.6643160
X:Y:P	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8686117
Z:Y:P	1	0.0341	0.0341	1.12	0.2909881
M:G:U	1	0.7605	0.7605	24.93	0.0000008
M:N:U	1	0.0906	0.0906	2.97	0.0853374
G:N:U	1	0.9566	0.9566	31.36	0.0000000
M:X:U	1	0.0947	0.0947	3.10	0.0786716
G:X:U	1	1.0686	1.0686	35.03	0.0000000
N:X:U	1	17.1837	17.1837	563.32	0.0000000
M:Z:U	1	0.0086	0.0086	0.28	0.5948232
G:Z:U	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8353817
N:Z:U	1	4.3670	4.3670	143.16	0.0000000
X:Z:U	1	28.4252	28.4252	931.85	0.0000000
M:Y:U	1	0.7636	0.7636	25.03	0.0000008
G:Y:U	1	1.9906	1.9906	65.26	0.0000000
N:Y:U	1	36.4805	36.4805	1195.92	0.0000000
X:Y:U	1	0.2372	0.2372	7.77	0.0054971
Z:Y:U	1	0.9406	0.9406	30.83	0.0000000
M:P:U	1	0.2573	0.2573	8.44	0.0038399
G:P:U	1	0.2595	0.2595	8.51	0.0036965
N:P:U	1	0.1043	0.1043	3.42	0.0650660
X:P:U	1	0.0763	0.0763	2.50	0.1144125
Z:P:U	1	0.2232	0.2232	7.32	0.0070569
Y:P:U	1	0.2141	0.2141	7.02	0.0083160
M:G:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9411790
M:N:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9079132
G:N:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9130176
M:X:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8678236
G:X:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9886136
N:X:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9160820
M:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9931224
G:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9903258
N:Z:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8986784
X:Z:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9157130
M:Y:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8946601
G:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9521985
N:Y:r.pan	1	0.0026	0.0026	0.09	0.7699911
X:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9186366
Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9576691
M:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8997541
G:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9491223

N:P:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8793766
X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9748334
Z:P:r.pan	1	0.0015	0.0015	0.05	0.8234484
Y:P:r.pan	1	0.0020	0.0020	0.07	0.7964207
M:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9194883
G:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9369962
N:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9325307
X:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9884139
Z:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9428014
Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9349765
P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9639114
M:G:N:X	1	0.1187	0.1187	3.89	0.0490714
M:G:N:Z	1	0.0370	0.0370	1.21	0.2712464
M:G:X:Z	1	0.0417	0.0417	1.37	0.2427530
M:N:X:Z	1	0.2062	0.2062	6.76	0.0095928
G:N:X:Z	1	0.1310	0.1310	4.30	0.0387252
M:G:N:Y	1	0.3964	0.3964	13.00	0.0003430
M:G:X:Y	1	0.7835	0.7835	25.69	0.0000006
M:N:X:Y	1	0.0439	0.0439	1.44	0.2306773
G:N:X:Y	1	20.7558	20.7558	680.43	0.0000000
M:G:Z:Y	1	0.0032	0.0032	0.11	0.7442866
M:N:Z:Y	1	0.0075	0.0075	0.25	0.6201980
G:N:Z:Y	1	0.9588	0.9588	31.43	0.0000000
M:X:Z:Y	1	0.0679	0.0679	2.23	0.1363875
G:X:Z:Y	1	0.5079	0.5079	16.65	0.0000522
N:X:Z:Y	1	9.1110	9.1110	298.68	0.0000000
M:G:N:P	1	0.0603	0.0603	1.98	0.1603249
M:G:X:P	1	0.1798	0.1798	5.89	0.0155359
M:N:X:P	1	0.0173	0.0173	0.57	0.4523851
G:N:X:P	1	0.0265	0.0265	0.87	0.3516934
M:G:Z:P	1	0.5196	0.5196	17.03	0.0000429
M:N:Z:P	1	0.1633	0.1633	5.35	0.0210900
G:N:Z:P	1	0.0587	0.0587	1.92	0.1661161
M:X:Z:P	1	0.0869	0.0869	2.85	0.0920269
G:X:Z:P	1	0.0184	0.0184	0.60	0.4377515
N:X:Z:P	1	0.1007	0.1007	3.30	0.0698835
M:G:Y:P	1	0.0012	0.0012	0.04	0.8400483
M:N:Y:P	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9791694
G:N:Y:P	1	0.0034	0.0034	0.11	0.7397458
M:X:Y:P	1	0.2397	0.2397	7.86	0.0052569
G:X:Y:P	1	0.0638	0.0638	2.09	0.1488016
N:X:Y:P	1	0.0020	0.0020	0.07	0.7955652
M:Z:Y:P	1	0.0652	0.0652	2.14	0.1442996
G:Z:Y:P	1	0.0020	0.0020	0.07	0.7956479
N:Z:Y:P	1	0.0740	0.0740	2.42	0.1200727
X:Z:Y:P	1	0.0439	0.0439	1.44	0.2308440
M:G:N:U	1	0.3218	0.3218	10.55	0.0012383
M:G:X:U	1	0.8491	0.8491	27.84	0.0000002
M:N:X:U	1	0.1286	0.1286	4.22	0.0405732
G:N:X:U	1	0.8515	0.8515	27.91	0.0000002
M:G:Z:U	1	0.0035	0.0035	0.12	0.7344057
M:N:Z:U	1	0.0143	0.0143	0.47	0.4932741
G:N:Z:U	1	9.3166	9.3166	305.42	0.0000000
M:X:Z:U	1	0.0804	0.0804	2.64	0.1050408
G:X:Z:U	1	5.5585	5.5585	182.22	0.0000000
N:X:Z:U	1	8.1039	8.1039	265.67	0.0000000
M:G:Y:U	1	0.0469	0.0469	1.54	0.2154717
M:N:Y:U	1	0.1952	0.1952	6.40	0.0117204
G:N:Y:U	1	27.4374	27.4374	899.47	0.0000000
M:X:Y:U	1	0.2922	0.2922	9.58	0.0020772
G:X:Y:U	1	6.0206	6.0206	197.37	0.0000000
N:X:Y:U	1	0.6718	0.6718	22.02	0.0000035
M:Z:Y:U	1	0.0062	0.0062	0.20	0.6522342

G:Z:Y:U	1	0.6436	0.6436	21.10	0.0000055
N:Z:Y:U	1	1.0186	1.0186	33.39	0.0000000
X:Z:Y:U	1	6.0160	6.0160	197.22	0.0000000
M:G:P:U	1	0.0040	0.0040	0.13	0.7173677
M:N:P:U	1	0.1343	0.1343	4.40	0.0363964
G:N:P:U	1	0.1367	0.1367	4.48	0.0347522
M:X:P:U	1	0.4048	0.4048	13.27	0.0002974
G:X:P:U	1	0.1348	0.1348	4.42	0.0360453
N:X:P:U	1	0.1240	0.1240	4.06	0.0443106
M:Z:P:U	1	0.1584	0.1584	5.19	0.0231115
G:Z:P:U	1	0.2944	0.2944	9.65	0.0019989
N:Z:P:U	1	0.2178	0.2178	7.14	0.0077815
X:Z:P:U	1	0.1000	0.1000	3.28	0.0707448
M:Y:P:U	1	0.0049	0.0049	0.16	0.6891626
G:Y:P:U	1	0.0844	0.0844	2.77	0.0968839
N:Y:P:U	1	0.0482	0.0482	1.58	0.2091668
X:Y:P:U	1	0.1206	0.1206	3.95	0.0473143
Z:Y:P:U	1	0.0760	0.0760	2.49	0.1149943
M:G:N:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9476414
M:G:X:r.pan	1	0.0009	0.0009	0.03	0.8608489
M:N:X:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8551479
G:N:X:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9131878
M:G:Z:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9393577
M:N:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9475845
G:N:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9813377
M:X:Z:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.02	0.8841746
G:X:Z:r.pan	1	0.0012	0.0012	0.04	0.8399924
N:X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9529392
M:G:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9468441
M:N:Y:r.pan	1	0.0009	0.0009	0.03	0.8632664
G:N:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9452212
M:X:Y:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8593036
G:X:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9151739
N:X:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9213908
M:Z:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9278400
G:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9441678
N:Z:Y:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9090755
X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9945778
M:G:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9026993
M:N:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8980839
G:N:P:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9250268
M:X:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9627996
G:X:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9414352
N:X:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9663634
M:Z:P:r.pan	1	0.0016	0.0016	0.05	0.8176081
G:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9821365
N:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9459045
X:Z:P:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8363313
M:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9316777
G:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9620299
N:Y:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9040024
X:Y:P:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8367503
Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9467018
M:G:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9957193
M:N:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9173024
G:N:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9332701
M:X:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9148334
G:X:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9131311
N:X:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9226405
M:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9921806
G:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9567002
N:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9764593
X:Z:U:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8682458

M:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9506888
G:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9362850
N:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9964042
X:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9623720
Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9898692
M:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9709259
G:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9539364
N:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9238620
X:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9644246
Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9870727
Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9703841
M:G:N:X:Z	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9094441
M:G:N:X:Y	1	0.3479	0.3479	11.41	0.0007882
M:G:N:Z:Y	1	0.0404	0.0404	1.32	0.2505266
M:G:X:Z:Y	1	0.0593	0.0593	1.94	0.1639775
M:N:X:Z:Y	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9610037
G:N:X:Z:Y	1	18.9934	18.9934	622.65	0.0000000
M:G:N:X:P	1	0.0455	0.0455	1.49	0.2224805
M:G:N:Z:P	1	0.4081	0.4081	13.38	0.0002809
M:G:X:Z:P	1	0.2640	0.2640	8.65	0.0034129
M:N:X:Z:P	1	0.0642	0.0642	2.10	0.1474618
G:N:X:Z:P	1	0.0340	0.0340	1.11	0.2917719
M:G:N:Y:P	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9332985
M:G:X:Y:P	1	0.0044	0.0044	0.15	0.7028823
M:N:X:Y:P	1	0.2155	0.2155	7.06	0.0081082
G:N:X:Y:P	1	0.0064	0.0064	0.21	0.6475758
M:G:Z:Y:P	1	0.0160	0.0160	0.52	0.4691552
M:N:Z:Y:P	1	0.1894	0.1894	6.21	0.0130322
G:N:Z:Y:P	1	0.0047	0.0047	0.15	0.6956532
M:X:Z:Y:P	1	0.0081	0.0081	0.27	0.6061894
G:X:Z:Y:P	1	0.0495	0.0495	1.62	0.2031743
N:X:Z:Y:P	1	0.0213	0.0213	0.70	0.4041854
M:G:N:X:U	1	0.2650	0.2650	8.69	0.0033487
M:G:N:Z:U	1	0.0504	0.0504	1.65	0.1994496
M:G:X:Z:U	1	0.0312	0.0312	1.02	0.3125314
M:N:X:Z:U	1	0.0019	0.0019	0.06	0.8041590
G:N:X:Z:U	1	0.1340	0.1340	4.39	0.0365523
M:G:N:Y:U	1	0.0092	0.0092	0.30	0.5828441
M:G:X:Y:U	1	0.0350	0.0350	1.15	0.2843507
M:N:X:Y:U	1	0.1220	0.1220	4.00	0.0460354
G:N:X:Y:U	1	0.5842	0.5842	19.15	0.0000147
M:G:Z:Y:U	1	0.0035	0.0035	0.12	0.7337863
M:N:Z:Y:U	1	0.0232	0.0232	0.76	0.3836141
G:N:Z:Y:U	1	0.2825	0.2825	9.26	0.0024595
M:X:Z:Y:U	1	0.0228	0.0228	0.75	0.3872327
G:X:Z:Y:U	1	0.5905	0.5905	19.36	0.0000132
N:X:Z:Y:U	1	9.4187	9.4187	308.77	0.0000000
M:G:N:P:U	1	0.0248	0.0248	0.81	0.3673707
M:G:X:P:U	1	0.0586	0.0586	1.92	0.1665092
M:N:X:P:U	1	0.3514	0.3514	11.52	0.0007424
G:N:X:P:U	1	0.0738	0.0738	2.42	0.1204129
M:G:Z:P:U	1	0.0780	0.0780	2.56	0.1103807
M:N:Z:P:U	1	0.1699	0.1699	5.57	0.0186461
G:N:Z:P:U	1	0.4485	0.4485	14.70	0.0001415
M:X:Z:P:U	1	0.1825	0.1825	5.98	0.0147786
G:X:Z:P:U	1	0.2144	0.2144	7.03	0.0082787
N:X:Z:P:U	1	0.1020	0.1020	3.34	0.0679986
M:G:Y:P:U	1	0.0894	0.0894	2.93	0.0875660
M:N:Y:P:U	1	0.0111	0.0111	0.36	0.5472441
G:N:Y:P:U	1	0.0986	0.0986	3.23	0.0728453
M:X:Y:P:U	1	0.0770	0.0770	2.52	0.1128103
G:X:Y:P:U	1	0.0319	0.0319	1.05	0.3066815
N:X:Y:P:U	1	0.0523	0.0523	1.71	0.1911795

M:Z:Y:P:U	1	0.1080	0.1080	3.54	0.0604924
G:Z:Y:P:U	1	0.0328	0.0328	1.07	0.3006046
N:Z:Y:P:U	1	0.0742	0.0742	2.43	0.1194708
X:Z:Y:P:U	1	0.0092	0.0092	0.30	0.5830895
M:G:N:X:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9499768
M:G:N:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9634838
M:G:X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9608327
M:N:X:Z:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.9002638
G:N:X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9566432
M:G:N:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9329857
M:G:X:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9157414
M:N:X:Y:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9142375
G:N:X:Y:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9142375
M:G:Z:Y:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8826783
M:N:Z:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9285505
G:N:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9927799
M:X:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9541928
G:X:Z:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9214760
N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9323601
M:G:N:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8944620
M:G:X:P:r.pan	1	0.0014	0.0014	0.04	0.8334273
M:N:X:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9113441
G:N:X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9857031
M:G:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9940641
M:N:Z:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8991030
G:N:Z:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9098694
M:X:Z:P:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8584609
G:X:Z:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9077431
N:X:Z:P:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8759924
M:G:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9591226
M:N:Y:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9126204
G:N:Y:P:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8818315
M:X:Y:P:r.pan	1	0.0012	0.0012	0.04	0.8454766
G:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9769158
N:X:Y:P:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8373929
M:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9813091
G:Z:Y:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9093023
N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9992009
X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8702446
M:G:N:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9914101
M:G:X:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9811094
M:N:X:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8820291
G:N:X:U:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.02	0.8847393
M:G:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9567002
M:N:Z:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9354885
G:N:Z:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9338957
M:X:Z:U:r.pan	1	0.0009	0.0009	0.03	0.8659945
G:X:Z:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9232370
N:X:Z:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8998391
M:G:Y:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9259928
M:N:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9377359
G:N:Y:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9130176
M:X:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9424883
G:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9932365
N:X:Y:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9247142
M:Z:Y:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8978009
G:Z:Y:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.9000656
N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9917811
X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9584386
M:G:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9450504
M:N:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9848185
G:N:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9657076
M:X:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9154860

G:X:P:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8795459
N:X:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9869871
M:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9826786
G:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9934077
N:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9835060
X:Z:P:U:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8719908
M:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9772866
G:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9990868
N:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9453920
X:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9925231
Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9582961
M:G:N:X:Z:Y	1	0.3554	0.3554	11.65	0.0006927
M:G:N:X:Z:P	1	0.3713	0.3713	12.17	0.0005271
M:G:N:X:Y:P	1	0.0385	0.0385	1.26	0.2615998
M:G:N:Z:Y:P	1	0.0247	0.0247	0.81	0.3690821
M:G:X:Z:Y:P	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8677673
M:N:X:Z:Y:P	1	0.0069	0.0069	0.23	0.6349833
G:N:X:Z:Y:P	1	0.0862	0.0862	2.83	0.0933683
M:G:N:X:Z:U	1	0.2880	0.2880	9.44	0.0022365
M:G:N:X:Y:U	1	0.0213	0.0213	0.70	0.4033806
M:G:N:Z:Y:U	1	0.0027	0.0027	0.09	0.7643377
M:G:X:Z:Y:U	1	0.0300	0.0300	0.98	0.3220889
M:N:X:Z:Y:U	1	0.1359	0.1359	4.46	0.0352560
G:N:X:Z:Y:U	1	11.3194	11.3194	371.08	0.0000000
M:G:N:X:P:U	1	0.1678	0.1678	5.50	0.0194064
M:G:N:Z:P:U	1	0.1014	0.1014	3.32	0.0688841
M:G:X:Z:P:U	1	0.1112	0.1112	3.65	0.0567648
M:N:X:Z:P:U	1	0.1380	0.1380	4.52	0.0339184
G:N:X:Z:P:U	1	0.2982	0.2982	9.78	0.0018684
M:G:N:Y:P:U	1	0.0440	0.0440	1.44	0.2300670
M:G:X:Y:P:U	1	0.2790	0.2790	9.15	0.0026180
M:N:X:Y:P:U	1	0.0751	0.0751	2.46	0.1173199
G:N:X:Y:P:U	1	0.0544	0.0544	1.78	0.1823684
M:G:Z:Y:P:U	1	0.1983	0.1983	6.50	0.0110826
M:N:Z:Y:P:U	1	0.0651	0.0651	2.13	0.1446331
G:N:Z:Y:P:U	1	0.0272	0.0272	0.89	0.3457040
M:X:Z:Y:P:U	1	0.0553	0.0553	1.81	0.1786647
G:X:Z:Y:P:U	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9416060
N:X:Z:Y:P:U	1	0.0227	0.0227	0.75	0.3884107
M:G:N:X:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9796259
M:G:N:X:Y:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.02	0.8895986
M:G:N:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9563298
M:G:X:Z:Y:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8366665
M:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.9011416
G:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9404960
M:G:N:X:P:r.pan	1	0.0014	0.0014	0.05	0.8320040
M:G:N:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9795974
M:G:X:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9617164
M:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8487819
G:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9345783
M:G:N:Y:P:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9264759
M:G:X:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9535375
M:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0012	0.0012	0.04	0.8452246
G:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9785989
M:G:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9709259
M:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9740918
G:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9909821
M:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9799397
G:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9760029
N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.02	0.8918319
M:G:N:X:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9131027
M:G:N:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9637974
M:G:X:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9441678

M:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8789252
G:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.9007451
M:G:N:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9797971
M:G:X:Y:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.9017080
M:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9992009
G:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9507743
M:G:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9896980
M:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9123368
G:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9912104
M:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9867303
G:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9984304
N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9724946
M:G:N:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9244869
M:G:X:P:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8769511
M:N:X:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9320473
G:N:X:P:U:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8509402
M:G:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9624290
M:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9379066
G:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9450219
M:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8465407
G:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9962044
N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9055324
M:G:Y:P:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.02	0.8803076
M:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9669336
G:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9896409
M:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9210217
G:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9760315
N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9453351
M:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8941509
G:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.02	0.8848805
N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9955195
X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0027	0.0027	0.09	0.7653200
M:G:N:X:Z:Y:P	1	0.0235	0.0235	0.77	0.3809673
M:G:N:X:Z:Y:U	1	0.0165	0.0165	0.54	0.4617490
M:G:N:X:Z:P:U	1	0.0402	0.0402	1.32	0.2515732
M:G:N:X:Y:P:U	1	0.0942	0.0942	3.09	0.0794679
M:G:N:Z:Y:P:U	1	0.2642	0.2642	8.66	0.0033963
M:G:X:Z:Y:P:U	1	0.1614	0.1614	5.29	0.0218241
M:N:X:Z:Y:P:U	1	0.0332	0.0332	1.09	0.2969676
G:N:X:Z:Y:P:U	1	0.0015	0.0015	0.05	0.8218066
M:G:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.04	0.8381474
M:G:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9879288
M:G:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9616023
M:G:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9555034
M:G:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0026	0.0026	0.08	0.7716867
M:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.02	0.8945469
G:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9913816
M:G:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9892985
M:G:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9836772
M:G:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9133580
M:G:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0016	0.0016	0.05	0.8185808
M:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9347205
G:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9320473
M:G:N:X:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9960617
M:G:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9686160
M:G:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9664204
M:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.03	0.8676828
G:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9998858
M:G:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.03	0.8528753
M:G:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.01	0.9329004
M:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9688726
G:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9100963
M:G:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9960617

M:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9077147
G:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9114008
M:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8496507
G:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9176146
N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8598936
M:G:N:X:Z:Y:P:U	1	0.3021	0.3021	9.90	0.0017474
M:G:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0011	0.0011	0.04	0.8502674
M:G:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.03	0.8531838
M:G:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9924660
M:G:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9845618
M:G:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9897550
M:G:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9250552
M:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9855319
G:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9489230
M:G:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9974601
Residuals	510	15.5571	0.0305		

Tableau A.2
 Résultats de l'analyse de variance de T_2 .estimée pour le plan
 factoriel complet avec répétitions corrélées

	Df	Sum of Sq	Mean Sq	F Value	Pr (F)
M	1	1.0532	1.0532	20.73	0.0000066
G	1	60.1050	60.1050	1182.88	0.0000000
N	1	7.7897	7.7897	153.30	0.0000000
X	1	237.2733	237.2733	4669.58	0.0000000
Z	1	22.4099	22.4099	441.03	0.0000000
Y	1	7.2609	7.2609	142.89	0.0000000
P	1	1.5201	1.5201	29.92	0.0000001
U	1	589.4639	589.4639	11600.74	0.0000000
r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9630978
M:G	1	0.0117	0.0117	0.23	0.6322311
M:N	1	0.0115	0.0115	0.23	0.6350526
G:N	1	22.6097	22.6097	444.96	0.0000000
M:X	1	1.2836	1.2836	25.26	0.0000007
G:X	1	91.8686	91.8686	1807.99	0.0000000
N:X	1	5.8415	5.8415	114.96	0.0000000
M:Z	1	0.0288	0.0288	0.57	0.4516755
G:Z	1	1.5539	1.5539	30.58	0.0000001
N:Z	1	0.0028	0.0028	0.06	0.8131023
X:Z	1	14.8869	14.8869	292.98	0.0000000
M:Y	1	0.0156	0.0156	0.31	0.5794694
G:Y	1	15.8441	15.8441	311.81	0.0000000
N:Y	1	18.2674	18.2674	359.51	0.0000000
X:Y	1	0.4163	0.4163	8.19	0.0043768
Z:Y	1	6.6683	6.6683	131.23	0.0000000
M:P	1	0.3538	0.3538	6.96	0.0085801
G:P	1	0.0039	0.0039	0.08	0.7825299
N:P	1	0.4117	0.4117	8.10	0.0045976
X:P	1	0.0356	0.0356	0.70	0.4026931
Z:P	1	0.4077	0.4077	8.02	0.0048022
Y:P	1	0.0398	0.0398	0.78	0.3767451
M:U	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9105810
G:U	1	4.3962	4.3962	86.52	0.0000000
N:U	1	96.2562	96.2562	1894.34	0.0000000
X:U	1	80.1792	80.1792	1577.94	0.0000000
Z:U	1	8.8592	8.8592	174.35	0.0000000
Y:U	1	16.8096	16.8096	330.82	0.0000000
P:U	1	0.0555	0.0555	1.09	0.2965198
M:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9376536
G:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9882481
N:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9483061
X:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9912550
Z:r.pan	1	0.0009	0.0009	0.02	0.8917777
Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9854624
P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9685764
U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9281794
M:G:N	1	0.1602	0.1602	3.15	0.0763604
M:G:X	1	0.1317	0.1317	2.59	0.1079669
M:N:X	1	0.3431	0.3431	6.75	0.0096308
G:N:X	1	19.0735	19.0735	375.37	0.0000000
M:G:Z	1	0.2586	0.2586	5.09	0.0245036
M:N:Z	1	0.0916	0.0916	1.80	0.1799949
G:N:Z	1	0.4633	0.4633	9.12	0.0026589
M:X:Z	1	0.3681	0.3681	7.25	0.0073425
G:X:Z	1	4.9168	4.9168	96.76	0.0000000
N:X:Z	1	1.1477	1.1477	22.59	0.0000026

M:G:Y	1	0.9208	0.9208	18.12	0.0000247
M:N:Y	1	0.0604	0.0604	1.19	0.2761563
G:N:Y	1	13.5594	13.5594	266.85	0.0000000
M:X:Y	1	0.0086	0.0086	0.17	0.6813445
G:X:Y	1	32.8496	32.8496	646.49	0.0000000
N:X:Y	1	7.3232	7.3232	144.12	0.0000000
M:Z:Y	1	0.0028	0.0028	0.05	0.8147152
G:Z:Y	1	20.2069	20.2069	397.68	0.0000000
N:Z:Y	1	0.0550	0.0550	1.08	0.2988173
X:Z:Y	1	0.4078	0.4078	8.03	0.0047952
M:G:P	1	0.1808	0.1808	3.56	0.0598486
M:N:P	1	0.8375	0.8375	16.48	0.0000568
G:N:P	1	0.1506	0.1506	2.96	0.0857073
M:X:P	1	0.1468	0.1468	2.89	0.0898439
G:X:P	1	0.0069	0.0069	0.13	0.7135223
N:X:P	1	0.0101	0.0101	0.20	0.6559311
M:Z:P	1	0.2663	0.2663	5.24	0.0224630
G:Z:P	1	1.0254	1.0254	20.18	0.0000087
N:Z:P	1	0.1617	0.1617	3.18	0.0750559
X:Z:P	1	0.2508	0.2508	4.93	0.0267564
M:Y:P	1	0.1661	0.1661	3.27	0.0712127
G:Y:P	1	0.2431	0.2431	4.79	0.0291619
N:Y:P	1	0.0288	0.0288	0.57	0.4517254
X:Y:P	1	0.1443	0.1443	2.84	0.0925457
Z:Y:P	1	0.0617	0.0617	1.21	0.2709566
M:G:U	1	2.1433	2.1433	42.18	0.0000000
M:N:U	1	0.2151	0.2151	4.23	0.0401422
G:N:U	1	1.7628	1.7628	34.69	0.0000000
M:X:U	1	0.0048	0.0048	0.09	0.7597905
G:X:U	1	0.6577	0.6577	12.94	0.0003524
N:X:U	1	19.6283	19.6283	386.29	0.0000000
M:Z:U	1	0.1309	0.1309	2.58	0.1091217
G:Z:U	1	0.0151	0.0151	0.30	0.5856263
N:Z:U	1	4.5562	4.5562	89.67	0.0000000
X:Z:U	1	28.8653	28.8653	568.07	0.0000000
M:Y:U	1	0.6534	0.6534	12.86	0.0003683
G:Y:U	1	3.8703	3.8703	76.17	0.0000000
N:Y:U	1	31.0185	31.0185	610.45	0.0000000
X:Y:U	1	0.2783	0.2783	5.48	0.0196590
Z:Y:U	1	1.7082	1.7082	33.62	0.0000000
M:P:U	1	0.0029	0.0029	0.06	0.8106306
G:P:U	1	0.0054	0.0054	0.11	0.7448353
N:P:U	1	0.3540	0.3540	6.97	0.0085545
X:P:U	1	0.1456	0.1456	2.87	0.0910678
Z:P:U	1	0.0036	0.0036	0.07	0.7911413
Y:P:U	1	0.0044	0.0044	0.09	0.7687948
M:G:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9746754
M:N:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9330254
G:N:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9734820
M:X:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.02	0.8986606
G:X:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9907023
N:X:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9671182
M:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9835169
G:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9717804
N:Z:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9315493
X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9671182
M:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9997015
G:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9568922
N:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9359563
X:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9832074
Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9652183
M:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9569143
G:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9961858

N:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9812621
X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9911666
Z:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9327170
Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9732831
M:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9777917
G:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9873637
N:U:r.pan	1	0.0017	0.0017	0.03	0.8558209
X:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9452615
Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9654834
Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9978441
P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9982200
M:G:N:X	1	0.1126	0.1126	2.22	0.1371473
M:G:N:Z	1	0.4968	0.4968	9.78	0.0018682
M:G:X:Z	1	0.2473	0.2473	4.87	0.0278203
M:N:X:Z	1	0.9447	0.9447	18.59	0.0000194
G:N:X:Z	1	0.2596	0.2596	5.11	0.0242320
M:G:N:Y	1	0.4248	0.4248	8.36	0.0039974
M:G:X:Y	1	0.3404	0.3404	6.70	0.0099161
M:N:X:Y	1	0.1173	0.1173	2.31	0.1293523
G:N:X:Y	1	23.9336	23.9336	471.02	0.0000000
M:G:Z:Y	1	0.0099	0.0099	0.20	0.6589564
M:N:Z:Y	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9111523
G:N:Z:Y	1	0.5653	0.5653	11.12	0.0009140
M:X:Z:Y	1	0.0117	0.0117	0.23	0.6312261
G:X:Z:Y	1	0.0987	0.0987	1.94	0.1640870
N:X:Z:Y	1	13.9253	13.9253	274.05	0.0000000
M:G:N:P	1	0.2830	0.2830	5.57	0.0186448
M:G:X:P	1	0.8005	0.8005	15.75	0.0000825
M:N:X:P	1	0.5982	0.5982	11.77	0.0006501
G:N:X:P	1	0.0891	0.0891	1.75	0.1859373
M:G:Z:P	1	0.0060	0.0060	0.12	0.7307468
M:N:Z:P	1	0.0536	0.0536	1.05	0.3051022
G:N:Z:P	1	1.3654	1.3654	26.87	0.0000003
M:X:Z:P	1	0.0015	0.0015	0.03	0.8651174
G:X:Z:P	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9343475
N:X:Z:P	1	0.7710	0.7710	15.17	0.0001111
M:G:Y:P	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9476000
M:N:Y:P	1	0.1871	0.1871	3.68	0.0555751
G:N:Y:P	1	0.0995	0.0995	1.96	0.1623438
M:X:Y:P	1	0.0447	0.0447	0.88	0.3487597
G:X:Y:P	1	0.0150	0.0150	0.29	0.5876472
N:X:Y:P	1	0.3678	0.3678	7.24	0.0073678
M:Z:Y:P	1	0.2465	0.2465	4.85	0.0280634
G:Z:Y:P	1	0.0777	0.0777	1.53	0.2166660
N:Z:Y:P	1	0.1108	0.1108	2.18	0.1403294
X:Z:Y:P	1	0.1084	0.1084	2.13	0.1446606
M:G:N:U	1	0.1481	0.1481	2.91	0.0884114
M:G:X:U	1	1.1061	1.1061	21.77	0.0000039
M:N:X:U	1	0.5101	0.5101	10.04	0.0016244
G:N:X:U	1	0.3406	0.3406	6.70	0.0099027
M:G:Z:U	1	0.0030	0.0030	0.06	0.8075384
M:N:Z:U	1	0.0079	0.0079	0.16	0.6939248
G:N:Z:U	1	9.7671	9.7671	192.22	0.0000000
M:X:Z:U	1	0.1286	0.1286	2.53	0.1121888
G:X:Z:U	1	3.7292	3.7292	73.39	0.0000000
N:X:Z:U	1	6.8957	6.8957	135.71	0.0000000
M:G:Y:U	1	0.0283	0.0283	0.56	0.4555964
M:N:Y:U	1	0.0930	0.0930	1.83	0.1767406
G:N:Y:U	1	28.0882	28.0882	552.78	0.0000000
M:X:Y:U	1	0.6474	0.6474	12.74	0.0003914
G:X:Y:U	1	6.1939	6.1939	121.90	0.0000000
N:X:Y:U	1	1.2774	1.2774	25.14	0.0000007
M:Z:Y:U	1	0.0358	0.0358	0.70	0.4015269

G:Z:Y:U	1	0.8561	0.8561	16.85	0.0000471
N:Z:Y:U	1	1.1189	1.1189	22.02	0.0000035
X:Z:Y:U	1	4.9903	4.9903	98.21	0.0000000
M:G:P:U	1	0.0402	0.0402	0.79	0.3740165
M:N:P:U	1	0.0134	0.0134	0.26	0.6080898
G:N:P:U	1	0.0114	0.0114	0.22	0.6364357
M:X:P:U	1	0.1351	0.1351	2.66	0.1036317
G:X:P:U	1	0.2653	0.2653	5.22	0.0227172
N:X:P:U	1	0.1293	0.1293	2.55	0.1112312
M:Z:P:U	1	0.1909	0.1909	3.76	0.0531261
G:Z:P:U	1	0.0737	0.0737	1.45	0.2290489
N:Z:P:U	1	0.0138	0.0138	0.27	0.6029446
X:Z:P:U	1	0.2501	0.2501	4.92	0.0269458
M:Y:P:U	1	0.0811	0.0811	1.60	0.2069639
G:Y:P:U	1	0.1183	0.1183	2.33	0.1276725
N:Y:P:U	1	0.2358	0.2358	4.64	0.0316993
X:Y:P:U	1	0.1112	0.1112	2.19	0.1396100
Z:Y:P:U	1	0.0183	0.0183	0.36	0.5489478
M:G:N:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9792505
M:G:X:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9812179
M:N:X:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9261756
G:N:X:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9312409
M:G:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9851971
M:N:Z:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9442247
G:N:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9850644
M:X:Z:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9245025
G:X:Z:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9245025
N:X:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9998342
M:G:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9528082
M:N:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9625898
G:N:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9402110
M:X:Y:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9195732
G:X:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9494094
N:X:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9608450
M:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9979104
G:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9895968
N:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9594316
X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9892209
M:G:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9854403
M:N:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9697696
G:N:P:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9157024
M:X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9805547
G:X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9765540
N:X:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9676264
M:Z:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9203212
G:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9721339
N:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9890219
X:Z:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9329593
M:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9755152
G:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9543975
N:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9875627
X:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9508880
Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9962742
M:G:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9770402
M:N:U:r.pan	1	0.0008	0.0008	0.01	0.9030267
G:N:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9521239
M:X:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9876732
G:X:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.00	0.9437174
N:X:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9230058
M:Z:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9352070
G:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9994362
N:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9964953
X:Z:U:r.pan	1	0.0009	0.0009	0.02	0.8947141

M:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9704103
G:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9896631
N:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9707639
X:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9628769
Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9631199
M:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9734820
G:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9886018
N:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9642022
X:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9901274
Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9853740
Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9756920
M:G:N:X:Z	1	0.0159	0.0159	0.31	0.5757786
M:G:N:X:Y	1	0.1483	0.1483	2.92	0.0881796
M:G:N:Z:Y	1	0.3519	0.3519	6.93	0.0087532
M:G:X:Z:Y	1	0.0486	0.0486	0.96	0.3287116
M:N:X:Z:Y	1	0.0008	0.0008	0.02	0.9002619
G:N:X:Z:Y	1	23.7974	23.7974	468.34	0.0000000
M:G:N:X:P	1	1.7399	1.7399	34.24	0.0000000
M:G:N:Z:P	1	0.0125	0.0125	0.25	0.6205490
M:G:X:Z:P	1	0.2556	0.2556	5.03	0.0253326
M:N:X:Z:P	1	0.0138	0.0138	0.27	0.6024620
G:N:X:Z:P	1	0.1481	0.1481	2.92	0.0883650
M:G:N:Y:P	1	0.0020	0.0020	0.04	0.8435944
M:G:X:Y:P	1	0.1091	0.1091	2.15	0.1433944
M:N:X:Y:P	1	0.0011	0.0011	0.02	0.8841591
G:N:X:Y:P	1	0.0267	0.0267	0.53	0.4687304
M:G:Z:Y:P	1	0.0061	0.0061	0.12	0.7287058
M:N:Z:Y:P	1	0.0071	0.0071	0.14	0.7092901
G:N:Z:Y:P	1	0.1796	0.1796	3.53	0.0606619
M:X:Z:Y:P	1	0.5661	0.5661	11.14	0.0009065
G:X:Z:Y:P	1	0.0466	0.0466	0.92	0.3385354
N:X:Z:Y:P	1	0.0032	0.0032	0.06	0.8023271
M:G:N:X:U	1	0.2270	0.2270	4.47	0.0350295
M:G:N:Z:U	1	0.1098	0.1098	2.16	0.1422494
M:G:X:Z:U	1	0.1226	0.1226	2.41	0.1208977
M:N:X:Z:U	1	0.0010	0.0010	0.02	0.8898283
G:N:X:Z:U	1	0.1666	0.1666	3.28	0.0707342
M:G:N:Y:U	1	0.0081	0.0081	0.16	0.6891231
M:G:X:Y:U	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9678473
M:N:X:Y:U	1	0.3681	0.3681	7.24	0.0073455
G:N:X:Y:U	1	0.4038	0.4038	7.95	0.0050026
M:G:Z:Y:U	1	0.0508	0.0508	1.00	0.3180816
M:N:Z:Y:U	1	0.0456	0.0456	0.90	0.3437713
G:N:Z:Y:U	1	0.3692	0.3692	7.27	0.0072611
M:X:Z:Y:U	1	0.0432	0.0432	0.85	0.3571515
G:X:Z:Y:U	1	0.1146	0.1146	2.26	0.1337274
N:X:Z:Y:U	1	11.7810	11.7810	231.85	0.0000000
M:G:N:P:U	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9831853
M:G:X:P:U	1	0.0314	0.0314	0.62	0.4323279
M:N:X:P:U	1	0.0057	0.0057	0.11	0.7375919
G:N:X:P:U	1	0.2462	0.2462	4.84	0.0281817
M:G:Z:P:U	1	0.2794	0.2794	5.50	0.0194092
M:N:Z:P:U	1	0.2822	0.2822	5.55	0.0188247
G:N:Z:P:U	1	0.0023	0.0023	0.05	0.8320756
M:X:Z:P:U	1	0.2807	0.2807	5.52	0.0191340
G:X:Z:P:U	1	0.7103	0.7103	13.98	0.0002059
N:X:Z:P:U	1	0.0727	0.0727	1.43	0.2321680
M:G:Y:P:U	1	0.2541	0.2541	5.00	0.0257753
M:N:Y:P:U	1	0.0919	0.0919	1.81	0.1791973
G:N:Y:P:U	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9563844
M:X:Y:P:U	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9781896
G:X:Y:P:U	1	0.0300	0.0300	0.59	0.4423109
N:X:Y:P:U	1	0.0120	0.0120	0.24	0.6267808

M:Z:Y:P:U	1	0.0126	0.0126	0.25	0.6185949
G:Z:Y:P:U	1	0.0382	0.0382	0.75	0.3862325
N:Z:Y:P:U	1	0.0245	0.0245	0.48	0.4878548
X:Z:Y:P:U	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9157903
M:G:N:X:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9825000
M:G:N:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9982642
M:G:X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9676043
M:N:X:Z:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9632303
G:N:X:Z:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9233139
M:G:N:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9904369
M:G:X:Y:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9431660
M:N:X:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9958541
G:N:X:Y:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9460115
M:G:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9947706
M:N:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9881375
G:N:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9972250
M:X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9946822
G:X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9987286
N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9172857
M:G:N:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9724654
M:G:X:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9584820
M:N:X:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9924048
G:N:X:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9527419
M:G:Z:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9327170
M:N:Z:P:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.01	0.9097242
G:N:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9749627
M:X:Z:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9206952
G:X:Z:P:r.pan	1	0.0010	0.0010	0.02	0.8911863
N:X:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9580183
M:G:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9855508
M:N:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9491446
G:N:Y:P:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9242384
M:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9995025
G:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9837380
N:X:Y:P:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9159882
M:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9817042
G:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9812621
N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9943947
X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9920731
M:G:N:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9586145
M:G:X:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9984632
M:N:X:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9764656
G:N:X:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.01	0.9047169
M:G:Z:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9388440
M:N:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9838706
G:N:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9594316
M:X:Z:U:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9105151
G:X:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9720897
N:X:Z:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9184734
M:G:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9488577
M:N:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9651079
G:N:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9920731
M:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9771949
G:X:Y:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9404315
N:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9800463
M:Z:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9557221
G:Z:Y:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9390645
N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9972692
X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9622143
M:G:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9395275
M:N:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9319018
G:N:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9551481
M:X:P:U:r.pan	1	0.0005	0.0005	0.01	0.9188253

G:X:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9289722
N:X:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9798253
M:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9568922
G:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9621038
N:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9885576
X:Z:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9549273
M:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.00	0.9438939
G:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9993256
N:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9631420
X:Y:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9337746
Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9500273
M:G:N:X:Z:Y	1	0.0781	0.0781	1.54	0.2156289
M:G:N:X:Z:P	1	0.8280	0.8280	16.30	0.0000625
M:G:N:X:Y:P	1	0.0344	0.0344	0.68	0.4112762
M:G:N:Z:Y:P	1	0.1160	0.1160	2.28	0.1314444
M:G:X:Z:Y:P	1	0.2558	0.2558	5.03	0.0252858
M:N:X:Z:Y:P	1	0.4663	0.4663	9.18	0.0025760
G:N:X:Z:Y:P	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9984854
M:G:N:X:Z:U	1	0.7429	0.7429	14.62	0.0001477
M:G:N:X:Y:U	1	0.0850	0.0850	1.67	0.1965932
M:G:N:Z:Y:U	1	0.0981	0.0981	1.93	0.1652289
M:G:X:Z:Y:U	1	0.1720	0.1720	3.38	0.0663782
M:N:X:Z:Y:U	1	0.3448	0.3448	6.79	0.0094610
G:N:X:Z:Y:U	1	15.4930	15.4930	304.90	0.0000000
M:G:N:X:P:U	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9771286
M:G:N:Z:P:U	1	0.0139	0.0139	0.27	0.6007455
M:G:X:Z:P:U	1	0.0726	0.0726	1.43	0.2324708
M:N:X:Z:P:U	1	0.2602	0.2602	5.12	0.0240593
G:N:X:Z:P:U	1	0.2126	0.2126	4.18	0.0413286
M:G:N:Y:P:U	1	0.3691	0.3691	7.26	0.0072664
M:G:X:Y:P:U	1	0.0237	0.0237	0.47	0.4948997
M:N:X:Y:P:U	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9274967
G:N:X:Y:P:U	1	0.0111	0.0111	0.22	0.6409297
M:G:Z:Y:P:U	1	0.0083	0.0083	0.16	0.6862684
M:N:Z:Y:P:U	1	0.0452	0.0452	0.89	0.3458631
G:N:Z:Y:P:U	1	0.0623	0.0623	1.23	0.2686514
M:X:Z:Y:P:U	1	0.0852	0.0852	1.68	0.1959329
G:X:Z:Y:P:U	1	0.1269	0.1269	2.50	0.1147192
N:X:Z:Y:P:U	1	0.0070	0.0070	0.14	0.7102803
M:G:N:X:Z:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9880491
M:G:N:X:Y:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9300734
M:G:N:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9722444
M:G:X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9829200
M:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9754931
G:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9929354
M:G:N:X:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9481075
M:G:N:Z:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9737692
M:G:X:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9948149
M:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9751616
G:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9886239
M:G:N:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9631861
M:G:X:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9712279
M:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9965838
G:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9986401
M:G:Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9634291
M:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9792727
G:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9313510
M:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9562078
G:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9910781
N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9628106
M:G:N:X:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9434748
M:G:N:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9751837
M:G:X:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9807316

M:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0012	0.0012	0.02	0.8787362
G:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9594537
M:G:N:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9899063
M:G:X:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9552364
M:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9579742
G:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9895525
M:G:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9781454
M:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9741007
G:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9494314
M:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9571572
G:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9594537
N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9425705
M:G:N:P:U:r.pan	1	0.0007	0.0007	0.01	0.9076154
M:G:X:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9693497
M:N:X:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9296109
G:N:X:P:U:r.pan	1	0.0013	0.0013	0.03	0.8715947
M:G:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9813284
M:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9641580
G:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9792948
M:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9712500
G:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9951686
N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9648649
M:G:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9607345
M:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9665880
G:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9566052
M:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9888229
G:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9356478
N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9508438
M:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9311308
G:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9744322
N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9922721
X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9479530
M:G:N:X:Z:Y:P	1	0.4136	0.4136	8.14	0.0045086
M:G:N:X:Z:Y:U	1	0.0162	0.0162	0.32	0.5721366
M:G:N:X:Z:P:U	1	0.0058	0.0058	0.11	0.7362129
M:G:N:X:Y:P:U	1	0.1122	0.1122	2.21	0.1379889
M:G:N:Z:Y:P:U	1	0.2254	0.2254	4.44	0.0356679
M:G:X:Z:Y:P:U	1	0.0407	0.0407	0.80	0.3714928
M:N:X:Z:Y:P:U	1	0.0888	0.0888	1.75	0.1866740
G:N:X:Z:Y:P:U	1	0.2841	0.2841	5.59	0.0184350
M:G:N:X:Z:Y:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9738576
M:G:N:X:Z:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9819695
M:G:N:X:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9955887
M:G:N:Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9624572
M:G:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9497625
M:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9792727
G:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9725538
M:G:N:X:Z:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9826769
M:G:N:X:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9991708
M:G:N:Z:Y:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9632524
M:G:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0028	0.0028	0.06	0.8134248
M:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9847992
G:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9931344
M:G:N:X:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9802452
M:G:N:Z:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9957214
M:G:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9372788
M:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0004	0.0004	0.01	0.9298091
G:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9628327
M:G:N:Y:P:U:r.pan	1	0.0006	0.0006	0.01	0.9127346
M:G:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9671845
M:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9589016
G:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9564507
M:G:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9651963

M:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9637825
G:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9394173
M:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9986622
G:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9930902
N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9650416
M:G:N:X:Z:Y:P:U	1	0.0011	0.0011	0.02	0.8829560
M:G:N:X:Z:Y:P:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9922058
M:G:N:X:Z:Y:U:r.pan	1	0.0015	0.0015	0.03	0.8647905
M:G:N:X:Z:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9409828
M:G:N:X:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9730400
M:G:N:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0001	0.0001	0.00	0.9667427
M:G:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0012	0.0012	0.02	0.8779495
M:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0000	0.0000	0.00	0.9909234
G:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0002	0.0002	0.00	0.9456586
M:G:N:X:Z:Y:P:U:r.pan	1	0.0003	0.0003	0.01	0.9407622
Residuals	510	25.9144	0.0508		

Tableau A.3
Comparaisons multiples pour T2.estimée entre les deux facteurs
« modele » et « erreur »

	Diff	IC.inf	Ic.sup	P-value
modele2:erreur1-modele1:erreur1	-0.982	-2.666	0.702	0.703
modele3:erreur1-modele1:erreur1	-0.357	-2.041	1.328	1.000
modele4:erreur1-modele1:erreur1	-2.044	-3.729	-0.360	0.007
modele1:erreur2-modele1:erreur1	0.663	-1.157	2.482	0.989
modele2:erreur2-modele1:erreur1	0.855	-0.830	2.539	0.857
modele3:erreur2-modele1:erreur1	0.202	-1.482	1.887	1.000
modele4:erreur2-modele1:erreur1	-0.011	-1.831	1.808	1.000
modele1:erreur3-modele1:erreur1	0.299	-1.385	1.984	1.000
modele2:erreur3-modele1:erreur1	0.113	-1.572	1.797	1.000
modele3:erreur3-modele1:erreur1	-1.005	-2.690	0.679	0.671
modele4:erreur3-modele1:erreur1	0.021	-1.664	1.705	1.000
modele1:erreur4-modele1:erreur1	2.640	0.956	4.325	0.000
modele2:erreur4-modele1:erreur1	0.771	-1.049	2.590	0.959
modele3:erreur4-modele1:erreur1	0.659	-1.026	2.343	0.979
modele4:erreur4-modele1:erreur1	0.232	-1.453	1.916	1.000
modele3:erreur1-modele2:erreur1	0.625	-1.059	2.310	0.987
modele4:erreur1-modele2:erreur1	-1.062	-2.747	0.622	0.589
modele1:erreur2-modele2:erreur1	1.645	-0.175	3.464	0.110
modele2:erreur2-modele2:erreur1	1.837	0.152	3.521	0.023
modele3:erreur2-modele2:erreur1	1.184	-0.500	2.869	0.418
modele4:erreur2-modele2:erreur1	0.971	-0.849	2.790	0.810
modele1:erreur3-modele2:erreur1	1.281	-0.403	2.966	0.300
modele2:erreur3-modele2:erreur1	1.095	-0.590	2.779	0.543
modele3:erreur3-modele2:erreur1	-0.023	-1.708	1.661	1.000
modele4:erreur3-modele2:erreur1	1.003	-0.682	2.687	0.675
modele1:erreur4-modele2:erreur1	3.622	1.938	5.307	0.000
modele2:erreur4-modele2:erreur1	1.753	-0.067	3.572	0.068
modele3:erreur4-modele2:erreur1	1.641	-0.044	3.325	0.062
modele4:erreur4-modele2:erreur1	1.214	-0.471	2.898	0.380
modele4:erreur1-modele3:erreur1	-1.687	-3.372	-0.003	0.049
modele1:erreur2-modele3:erreur1	1.019	-0.800	2.839	0.754
modele2:erreur2-modele3:erreur1	1.212	-0.473	2.896	0.383
modele3:erreur2-modele3:erreur1	0.559	-1.126	2.243	0.995
modele4:erreur2-modele3:erreur1	0.345	-1.474	2.165	1.000
modele1:erreur3-modele3:erreur1	0.656	-1.029	2.340	0.980
modele2:erreur3-modele3:erreur1	0.469	-1.215	2.154	0.999
modele3:erreur3-modele3:erreur1	-0.648	-2.333	1.036	0.981
modele4:erreur3-modele3:erreur1	0.377	-1.307	2.062	1.000
modele1:erreur4-modele3:erreur1	2.997	1.312	4.681	0.000
modele2:erreur4-modele3:erreur1	1.128	-0.692	2.947	0.616
modele3:erreur4-modele3:erreur1	1.015	-0.669	2.700	0.657
modele4:erreur4-modele3:erreur1	0.589	-1.096	2.273	0.992
modele1:erreur2-modele4:erreur1	2.707	0.888	4.526	0.000
modele2:erreur2-modele4:erreur1	2.899	1.215	4.583	0.000
modele3:erreur2-modele4:erreur1	2.246	0.562	3.931	0.002
modele4:erreur2-modele4:erreur1	2.033	0.213	3.852	0.018
modele1:erreur3-modele4:erreur1	2.343	0.659	4.028	0.001
modele2:erreur3-modele4:erreur1	2.157	0.472	3.841	0.004
modele3:erreur3-modele4:erreur1	1.039	-0.645	2.723	0.623
modele4:erreur3-modele4:erreur1	2.065	0.380	3.749	0.006
modele1:erreur4-modele4:erreur1	4.684	3.000	6.369	0.000
modele2:erreur4-modele4:erreur1	2.815	0.996	4.634	0.000
modele3:erreur4-modele4:erreur1	2.703	1.018	4.387	0.000
modele4:erreur4-modele4:erreur1	2.276	0.592	3.961	0.002
modele2:erreur2-modele1:erreur2	0.192	-1.627	2.011	1.000
modele3:erreur2-modele1:erreur2	-0.461	-2.280	1.359	1.000
modele4:erreur2-modele1:erreur2	-0.674	-2.619	1.271	0.993

modele1:erreur3-modele1:erreur2	-0.364	-2.183	1.456	1.000
modele2:erreur3-modele1:erreur2	-0.550	-2.369	1.269	0.998
modele3:erreur3-modele1:erreur2	-1.668	-3.487	0.151	0.099
modele4:erreur3-modele1:erreur2	-0.642	-2.462	1.177	0.992
modele1:erreur4-modele1:erreur2	1.977	0.158	3.797	0.023
modele2:erreur4-modele1:erreur2	0.108	-1.837	2.053	1.000
modele3:erreur4-modele1:erreur2	-0.004	-1.823	1.815	1.000
modele4:erreur4-modele1:erreur2	-0.431	-2.250	1.389	1.000
modele3:erreur2-modele2:erreur2	-0.653	-2.337	1.032	0.980
modele4:erreur2-modele2:erreur2	-0.866	-2.685	0.953	0.905
modele1:erreur3-modele2:erreur2	-0.556	-2.240	1.129	0.996
modele2:erreur3-modele2:erreur2	-0.742	-2.426	0.942	0.945
modele3:erreur3-modele2:erreur2	-1.860	-3.544	-0.176	0.020
modele4:erreur3-modele2:erreur2	-0.834	-2.519	0.850	0.877
modele1:erreur4-modele2:erreur2	1.785	0.101	3.470	0.030
modele2:erreur4-modele2:erreur2	-0.084	-1.903	1.735	1.000
modele3:erreur4-modele2:erreur2	-0.196	-1.881	1.488	1.000
modele4:erreur4-modele2:erreur2	-0.623	-2.307	1.062	0.987
modele4:erreur2-modele3:erreur2	-0.213	-2.033	1.606	1.000
modele1:erreur3-modele3:erreur2	0.097	-1.587	1.781	1.000
modele2:erreur3-modele3:erreur2	-0.089	-1.774	1.595	1.000
modele3:erreur3-modele3:erreur2	-1.207	-2.892	0.477	0.388
modele4:erreur3-modele3:erreur2	-0.181	-1.866	1.503	1.000
modele1:erreur4-modele3:erreur2	2.438	0.754	4.122	0.001
modele2:erreur4-modele3:erreur2	0.569	-1.251	2.388	0.997
modele3:erreur4-modele3:erreur2	0.457	-1.228	2.141	0.999
modele4:erreur4-modele3:erreur2	0.030	-1.655	1.714	1.000
modele1:erreur3-modele4:erreur2	0.310	-1.509	2.130	1.000
modele2:erreur3-modele4:erreur2	0.124	-1.695	1.943	1.000
modele3:erreur3-modele4:erreur2	-0.994	-2.813	0.826	0.784
modele4:erreur3-modele4:erreur2	0.032	-1.788	1.851	1.000
modele1:erreur4-modele4:erreur2	2.651	0.832	4.471	0.001
modele2:erreur4-modele4:erreur2	0.782	-1.163	2.727	0.973
modele3:erreur4-modele4:erreur2	0.670	-1.149	2.489	0.988
modele4:erreur4-modele4:erreur2	0.243	-1.576	2.063	1.000
modele2:erreur3-modele1:erreur3	-0.186	-1.871	1.498	1.000
modele3:erreur3-modele1:erreur3	-1.304	-2.989	0.380	0.276
modele4:erreur3-modele1:erreur3	-0.278	-1.963	1.406	1.000
modele1:erreur4-modele1:erreur3	2.341	0.657	4.025	0.001
modele2:erreur4-modele1:erreur3	0.472	-1.348	2.291	1.000
modele3:erreur4-modele1:erreur3	0.360	-1.325	2.044	1.000
modele4:erreur4-modele1:erreur3	-0.067	-1.752	1.617	1.000
modele3:erreur3-modele2:erreur3	-1.118	-2.802	0.566	0.509
modele4:erreur3-modele2:erreur3	-0.092	-1.777	1.592	1.000
modele1:erreur4-modele2:erreur3	2.527	0.843	4.212	0.000
modele2:erreur4-modele2:erreur3	0.658	-1.161	2.477	0.989
modele3:erreur4-modele2:erreur3	0.546	-1.139	2.230	0.996
modele4:erreur4-modele2:erreur3	0.119	-1.565	1.804	1.000
modele4:erreur3-modele3:erreur3	1.026	-0.659	2.710	0.642
modele1:erreur4-modele3:erreur3	3.645	1.961	5.330	0.000
modele2:erreur4-modele3:erreur3	1.776	-0.043	3.595	0.061
modele3:erreur4-modele3:erreur3	1.664	-0.021	3.348	0.055
modele4:erreur4-modele3:erreur3	1.237	-0.447	2.922	0.351
modele1:erreur4-modele4:erreur3	2.619	0.935	4.304	0.000
modele2:erreur4-modele4:erreur3	0.750	-1.069	2.570	0.967
modele3:erreur4-modele4:erreur3	0.638	-1.046	2.322	0.984
modele4:erreur4-modele4:erreur3	0.211	-1.473	1.896	1.000
modele2:erreur4-modele1:erreur4	-1.869	-3.689	-0.050	0.039
modele3:erreur4-modele1:erreur4	-1.981	-3.666	-0.297	0.010
modele4:erreur4-modele1:erreur4	-2.408	-4.093	-0.724	0.001
modele3:erreur4-modele2:erreur4	-0.112	-1.932	1.707	1.000
modele4:erreur4-modele2:erreur4	-0.539	-2.358	1.281	0.999
modele4:erreur4-modele3:erreur4	-0.427	-2.111	1.258	1.000

Tableau A.4
 Comparaisons multiples pour T2.estimée entre les deux facteurs
 « modele » et « prior »

	diff	lwr	upr	p adj
prior2:modele1-prior1:modele1	-0.565	-3.227	2.098	1.000
prior3:modele1-prior1:modele1	0.481	-2.181	3.143	1.000
prior4:modele1-prior1:modele1	0.743	-1.919	3.405	1.000
prior5:modele1-prior1:modele1	2.088	-0.574	4.750	0.303
prior6:modele1-prior1:modele1	3.428	0.167	6.689	0.030
prior7:modele1-prior1:modele1	2.723	0.060	5.385	0.040
prior8:modele1-prior1:modele1	0.745	-1.917	3.408	1.000
prior1:modele2-prior1:modele1	-0.366	-3.029	2.296	1.000
prior2:modele2-prior1:modele1	-1.237	-3.899	1.426	0.975
prior3:modele2-prior1:modele1	-1.364	-4.027	1.298	0.932
prior4:modele2-prior1:modele1	-1.766	-4.428	0.897	0.607
prior5:modele2-prior1:modele1	2.242	-0.420	4.904	0.198
prior6:modele2-prior1:modele1	2.792	-0.469	6.053	0.177
prior7:modele2-prior1:modele1	1.557	-1.106	4.219	0.807
prior8:modele2-prior1:modele1	1.722	-0.941	4.384	0.652
prior1:modele3-prior1:modele1	-1.346	-4.008	1.316	0.940
prior2:modele3-prior1:modele1	-1.441	-4.103	1.221	0.891
prior3:modele3-prior1:modele1	-1.250	-3.913	1.412	0.972
prior4:modele3-prior1:modele1	0.116	-2.546	2.779	1.000
prior5:modele3-prior1:modele1	1.993	-0.670	4.655	0.383
prior6:modele3-prior1:modele1	1.763	-0.899	4.425	0.610
prior7:modele3-prior1:modele1	1.852	-0.810	4.514	0.519
prior8:modele3-prior1:modele1	-0.729	-3.391	1.933	1.000
prior1:modele4-prior1:modele1	-1.810	-4.472	0.852	0.562
prior2:modele4-prior1:modele1	-1.122	-3.784	1.541	0.992
prior3:modele4-prior1:modele1	-2.104	-4.767	0.558	0.290
prior4:modele4-prior1:modele1	-0.402	-3.064	2.260	1.000
prior5:modele4-prior1:modele1	1.735	-0.928	4.397	0.639
prior6:modele4-prior1:modele1	0.881	-1.781	3.543	1.000
prior7:modele4-prior1:modele1	2.265	-0.996	5.526	0.521
prior8:modele4-prior1:modele1	-0.933	-3.595	1.730	0.999
prior3:modele1-prior2:modele1	1.046	-1.617	3.708	0.997
prior4:modele1-prior2:modele1	1.308	-1.355	3.970	0.955
prior5:modele1-prior2:modele1	2.653	-0.010	5.315	0.052
prior6:modele1-prior2:modele1	3.992	0.732	7.253	0.005
prior7:modele1-prior2:modele1	3.287	0.625	5.950	0.005
prior8:modele1-prior2:modele1	1.310	-1.352	3.972	0.954
prior1:modele2-prior2:modele1	0.198	-2.464	2.861	1.000
prior2:modele2-prior2:modele1	-0.672	-3.334	1.990	1.000
prior3:modele2-prior2:modele1	-0.800	-3.462	1.863	1.000
prior4:modele2-prior2:modele1	-1.201	-3.863	1.461	0.982
prior5:modele2-prior2:modele1	2.807	0.144	5.469	0.030
prior6:modele2-prior2:modele1	3.357	0.096	6.617	0.038
prior7:modele2-prior2:modele1	2.121	-0.541	4.784	0.277
prior8:modele2-prior2:modele1	2.286	-0.376	4.949	0.173
prior1:modele3-prior2:modele1	-0.781	-3.444	1.881	1.000
prior2:modele3-prior2:modele1	-0.876	-3.539	1.786	1.000
prior3:modele3-prior2:modele1	-0.686	-3.348	1.977	1.000
prior4:modele3-prior2:modele1	0.681	-1.982	3.343	1.000
prior5:modele3-prior2:modele1	2.557	-0.105	5.220	0.072
prior6:modele3-prior2:modele1	2.328	-0.335	4.990	0.153
prior7:modele3-prior2:modele1	2.417	-0.246	5.079	0.116
prior8:modele3-prior2:modele1	-0.164	-2.827	2.498	1.000
prior1:modele4-prior2:modele1	-1.245	-3.908	1.417	0.973
prior2:modele4-prior2:modele1	-0.557	-3.219	2.105	1.000
prior3:modele4-prior2:modele1	-1.540	-4.202	1.123	0.821
prior4:modele4-prior2:modele1	0.163	-2.500	2.825	1.000

prior5:modele4-prior2:modele1	2.299	-0.363	4.962	0.167
prior6:modele4-prior2:modele1	1.446	-1.217	4.108	0.888
prior7:modele4-prior2:modele1	2.830	-0.431	6.091	0.161
prior8:modele4-prior2:modele1	-0.368	-3.030	2.294	1.000
prior4:modele1-prior3:modele1	0.262	-2.400	2.924	1.000
prior5:modele1-prior3:modele1	1.607	-1.055	4.269	0.763
prior6:modele1-prior3:modele1	2.947	-0.314	6.208	0.119
prior7:modele1-prior3:modele1	2.242	-0.421	4.904	0.198
prior8:modele1-prior3:modele1	0.264	-2.398	2.927	1.000
prior1:modele2-prior3:modele1	-0.847	-3.509	1.815	1.000
prior2:modele2-prior3:modele1	-1.718	-4.380	0.945	0.656
prior3:modele2-prior3:modele1	-1.845	-4.508	0.817	0.525
prior4:modele2-prior3:modele1	-2.246	-4.909	0.416	0.195
prior5:modele2-prior3:modele1	1.761	-0.901	4.423	0.612
prior6:modele2-prior3:modele1	2.311	-0.950	5.572	0.483
prior7:modele2-prior3:modele1	1.076	-1.587	3.738	0.996
prior8:modele2-prior3:modele1	1.241	-1.422	3.903	0.974
prior1:modele3-prior3:modele1	-1.827	-4.489	0.835	0.544
prior2:modele3-prior3:modele1	-1.922	-4.584	0.740	0.449
prior3:modele3-prior3:modele1	-1.731	-4.394	0.931	0.642
prior4:modele3-prior3:modele1	-0.365	-3.027	2.298	1.000
prior5:modele3-prior3:modele1	1.512	-1.151	4.174	0.843
prior6:modele3-prior3:modele1	1.282	-1.380	3.944	0.963
prior7:modele3-prior3:modele1	1.371	-1.291	4.033	0.929
prior8:modele3-prior3:modele1	-1.210	-3.872	1.452	0.980
prior1:modele4-prior3:modele1	-2.291	-4.953	0.372	0.171
prior2:modele4-prior3:modele1	-1.603	-4.265	1.060	0.767
prior3:modele4-prior3:modele1	-2.585	-5.248	0.077	0.066
prior4:modele4-prior3:modele1	-0.883	-3.545	1.779	1.000
prior5:modele4-prior3:modele1	1.254	-1.409	3.916	0.971
prior6:modele4-prior3:modele1	0.400	-2.262	3.062	1.000
prior7:modele4-prior3:modele1	1.784	-1.476	5.045	0.881
prior8:modele4-prior3:modele1	-1.414	-4.076	1.249	0.907
prior5:modele1-prior4:modele1	1.345	-1.317	4.007	0.941
prior6:modele1-prior4:modele1	2.685	-0.576	5.946	0.228
prior7:modele1-prior4:modele1	1.980	-0.683	4.642	0.395
prior8:modele1-prior4:modele1	0.002	-2.660	2.665	1.000
prior1:modele2-prior4:modele1	-1.109	-3.771	1.553	0.993
prior2:modele2-prior4:modele1	-1.979	-4.642	0.683	0.395
prior3:modele2-prior4:modele1	-2.107	-4.770	0.555	0.288
prior4:modele2-prior4:modele1	-2.508	-5.171	0.154	0.085
prior5:modele2-prior4:modele1	1.499	-1.163	4.161	0.852
prior6:modele2-prior4:modele1	2.049	-1.212	5.310	0.701
prior7:modele2-prior4:modele1	0.814	-1.849	3.476	1.000
prior8:modele2-prior4:modele1	0.979	-1.683	3.641	0.999
prior1:modele3-prior4:modele1	-2.089	-4.751	0.573	0.302
prior2:modele3-prior4:modele1	-2.184	-4.846	0.479	0.234
prior3:modele3-prior4:modele1	-1.993	-4.656	0.669	0.382
prior4:modele3-prior4:modele1	-0.627	-3.289	2.036	1.000
prior5:modele3-prior4:modele1	1.250	-1.413	3.912	0.972
prior6:modele3-prior4:modele1	1.020	-1.642	3.682	0.998
prior7:modele3-prior4:modele1	1.109	-1.553	3.771	0.993
prior8:modele3-prior4:modele1	-1.472	-4.134	1.190	0.871
prior1:modele4-prior4:modele1	-2.553	-5.215	0.110	0.073
prior2:modele4-prior4:modele1	-1.865	-4.527	0.798	0.506
prior3:modele4-prior4:modele1	-2.847	-5.510	-0.185	0.025
prior4:modele4-prior4:modele1	-1.145	-3.807	1.517	0.990
prior5:modele4-prior4:modele1	0.992	-1.671	3.654	0.999
prior6:modele4-prior4:modele1	0.138	-2.524	2.801	1.000
prior7:modele4-prior4:modele1	1.522	-1.738	4.783	0.973
prior8:modele4-prior4:modele1	-1.676	-4.338	0.987	0.698
prior6:modele1-prior5:modele1	1.340	-1.921	4.601	0.994
prior7:modele1-prior5:modele1	0.635	-2.028	3.297	1.000

prior8:modele1-prior5:modele1	-1.343	-4.005	1.320	0.942
prior1:modele2-prior5:modele1	-2.454	-5.116	0.208	0.102
prior2:modele2-prior5:modele1	-3.324	-5.987	-0.662	0.004
prior3:modele2-prior5:modele1	-3.452	-6.115	-0.790	0.002
prior4:modele2-prior5:modele1	-3.853	-6.516	-1.191	0.000
prior5:modele2-prior5:modele1	0.154	-2.508	2.816	1.000
prior6:modele2-prior5:modele1	0.704	-2.557	3.965	1.000
prior7:modele2-prior5:modele1	-0.531	-3.194	2.131	1.000
prior8:modele2-prior5:modele1	-0.366	-3.028	2.296	1.000
prior1:modele3-prior5:modele1	-3.434	-6.096	-0.772	0.003
prior2:modele3-prior5:modele1	-3.529	-6.191	-0.866	0.002
prior3:modele3-prior5:modele1	-3.338	-6.001	-0.676	0.004
prior4:modele3-prior5:modele1	-1.972	-4.634	0.691	0.402
prior5:modele3-prior5:modele1	-0.095	-2.758	2.567	1.000
prior6:modele3-prior5:modele1	-0.325	-2.987	2.337	1.000
prior7:modele3-prior5:modele1	-0.236	-2.898	2.426	1.000
prior8:modele3-prior5:modele1	-2.817	-5.479	-0.155	0.028
prior1:modele4-prior5:modele1	-3.898	-6.560	-1.235	0.000
prior2:modele4-prior5:modele1	-3.210	-5.872	-0.547	0.006
prior3:modele4-prior5:modele1	-4.192	-6.855	-1.530	0.000
prior4:modele4-prior5:modele1	-2.490	-5.152	0.172	0.091
prior5:modele4-prior5:modele1	-0.353	-3.016	2.309	1.000
prior6:modele4-prior5:modele1	-1.207	-3.869	1.455	0.981
prior7:modele4-prior5:modele1	0.177	-3.083	3.438	1.000
prior8:modele4-prior5:modele1	-3.021	-5.683	-0.358	0.013
prior7:modele1-prior6:modele1	-0.705	-3.966	2.556	1.000
prior8:modele1-prior6:modele1	-2.682	-5.943	0.578	0.230
prior1:modele2-prior6:modele1	-3.794	-7.055	-0.533	0.010
prior2:modele2-prior6:modele1	-4.664	-7.925	-1.404	0.001
prior3:modele2-prior6:modele1	-4.792	-8.053	-1.531	0.000
prior4:modele2-prior6:modele1	-5.193	-8.454	-1.933	0.000
prior5:modele2-prior6:modele1	-1.186	-4.447	2.075	0.999
prior6:modele2-prior6:modele1	-0.636	-4.401	3.129	1.000
prior7:modele2-prior6:modele1	-1.871	-5.132	1.390	0.831
prior8:modele2-prior6:modele1	-1.706	-4.967	1.555	0.918
prior1:modele3-prior6:modele1	-4.774	-8.034	-1.513	0.000
prior2:modele3-prior6:modele1	-4.869	-8.129	-1.608	0.000
prior3:modele3-prior6:modele1	-4.678	-7.939	-1.417	0.001
prior4:modele3-prior6:modele1	-3.312	-6.572	-0.051	0.043
prior5:modele3-prior6:modele1	-1.435	-4.696	1.826	0.987
prior6:modele3-prior6:modele1	-1.665	-4.926	1.596	0.935
prior7:modele3-prior6:modele1	-1.576	-4.837	1.685	0.962
prior8:modele3-prior6:modele1	-4.157	-7.418	-0.896	0.003
prior1:modele4-prior6:modele1	-5.238	-8.498	-1.977	0.000
prior2:modele4-prior6:modele1	-4.549	-7.810	-1.289	0.001
prior3:modele4-prior6:modele1	-5.532	-8.793	-2.271	0.000
prior4:modele4-prior6:modele1	-3.830	-7.091	-0.569	0.009
prior5:modele4-prior6:modele1	-1.693	-4.954	1.568	0.924
prior6:modele4-prior6:modele1	-2.547	-5.807	0.714	0.309
prior7:modele4-prior6:modele1	-1.163	-4.928	2.603	1.000
prior8:modele4-prior6:modele1	-4.360	-7.621	-1.100	0.002
prior8:modele1-prior7:modele1	-1.977	-4.640	0.685	0.397
prior1:modele2-prior7:modele1	-3.089	-5.751	-0.426	0.010
prior2:modele2-prior7:modele1	-3.959	-6.622	-1.297	0.000
prior3:modele2-prior7:modele1	-4.087	-6.749	-1.425	0.000
prior4:modele2-prior7:modele1	-4.488	-7.150	-1.826	0.000
prior5:modele2-prior7:modele1	-0.481	-3.143	2.182	1.000
prior6:modele2-prior7:modele1	0.069	-3.191	3.330	1.000
prior7:modele2-prior7:modele1	-1.166	-3.828	1.496	0.987
prior8:modele2-prior7:modele1	-1.001	-3.663	1.662	0.998
prior1:modele3-prior7:modele1	-4.069	-6.731	-1.406	0.000
prior2:modele3-prior7:modele1	-4.164	-6.826	-1.501	0.000
prior3:modele3-prior7:modele1	-3.973	-6.635	-1.310	0.000

prior4:modele3-prior7:modele1	-2.606	-5.269	0.056	0.061
prior5:modele3-prior7:modele1	-0.730	-3.392	1.933	1.000
prior6:modele3-prior7:modele1	-0.960	-3.622	1.703	0.999
prior7:modele3-prior7:modele1	-0.871	-3.533	1.792	1.000
prior8:modele3-prior7:modele1	-3.452	-6.114	-0.789	0.002
prior1:modele4-prior7:modele1	-4.532	-7.195	-1.870	0.000
prior2:modele4-prior7:modele1	-3.844	-6.507	-1.182	0.000
prior3:modele4-prior7:modele1	-4.827	-7.489	-2.165	0.000
prior4:modele4-prior7:modele1	-3.125	-5.787	-0.462	0.009
prior5:modele4-prior7:modele1	-0.988	-3.650	1.675	0.999
prior6:modele4-prior7:modele1	-1.842	-4.504	0.821	0.529
prior7:modele4-prior7:modele1	-0.457	-3.718	2.803	1.000
prior8:modele4-prior7:modele1	-3.655	-6.318	-0.993	0.001
prior1:modele2-prior8:modele1	-1.112	-3.774	1.551	0.993
prior2:modele2-prior8:modele1	-1.982	-4.644	0.680	0.393
prior3:modele2-prior8:modele1	-2.110	-4.772	0.553	0.286
prior4:modele2-prior8:modele1	-2.511	-5.173	0.151	0.085
prior5:modele2-prior8:modele1	1.497	-1.166	4.159	0.854
prior6:modele2-prior8:modele1	2.047	-1.214	5.307	0.703
prior7:modele2-prior8:modele1	0.811	-1.851	3.474	1.000
prior8:modele2-prior8:modele1	0.976	-1.686	3.639	0.999
prior1:modele3-prior8:modele1	-2.091	-4.754	0.571	0.300
prior2:modele3-prior8:modele1	-2.186	-4.849	0.476	0.232
prior3:modele3-prior8:modele1	-1.996	-4.658	0.667	0.380
prior4:modele3-prior8:modele1	-0.629	-3.292	2.033	1.000
prior5:modele3-prior8:modele1	1.247	-1.415	3.910	0.972
prior6:modele3-prior8:modele1	1.018	-1.645	3.680	0.998
prior7:modele3-prior8:modele1	1.106	-1.556	3.769	0.993
prior8:modele3-prior8:modele1	-1.474	-4.137	1.188	0.870
prior1:modele4-prior8:modele1	-2.555	-5.218	0.107	0.073
prior2:modele4-prior8:modele1	-1.867	-4.529	0.795	0.503
prior3:modele4-prior8:modele1	-2.850	-5.512	-0.187	0.025
prior4:modele4-prior8:modele1	-1.147	-3.810	1.515	0.990
prior5:modele4-prior8:modele1	0.989	-1.673	3.652	0.999
prior6:modele4-prior8:modele1	0.136	-2.527	2.798	1.000
prior7:modele4-prior8:modele1	1.520	-1.741	4.781	0.974
prior8:modele4-prior8:modele1	-1.678	-4.340	0.984	0.696
prior2:modele2-prior1:modele2	-0.870	-3.533	1.792	1.000
prior3:modele2-prior1:modele2	-0.998	-3.661	1.664	0.998
prior4:modele2-prior1:modele2	-1.399	-4.062	1.263	0.915
prior5:modele2-prior1:modele2	2.608	-0.054	5.270	0.061
prior6:modele2-prior1:modele2	3.158	-0.103	6.419	0.067
prior7:modele2-prior1:modele2	1.923	-0.740	4.585	0.448
prior8:modele2-prior1:modele2	2.088	-0.574	4.750	0.303
prior1:modele3-prior1:modele2	-0.980	-3.642	1.683	0.999
prior2:modele3-prior1:modele2	-1.075	-3.737	1.588	0.996
prior3:modele3-prior1:modele2	-0.884	-3.547	1.778	1.000
prior4:modele3-prior1:modele2	0.482	-2.180	3.145	1.000
prior5:modele3-prior1:modele2	2.359	-0.304	5.021	0.139
prior6:modele3-prior1:modele2	2.129	-0.533	4.792	0.272
prior7:modele3-prior1:modele2	2.218	-0.444	4.880	0.212
prior8:modele3-prior1:modele2	-0.363	-3.025	2.299	1.000
prior1:modele4-prior1:modele2	-1.444	-4.106	1.219	0.890
prior2:modele4-prior1:modele2	-0.756	-3.418	1.907	1.000
prior3:modele4-prior1:modele2	-1.738	-4.401	0.924	0.635
prior4:modele4-prior1:modele2	-0.036	-2.698	2.626	1.000
prior5:modele4-prior1:modele2	2.101	-0.562	4.763	0.293
prior6:modele4-prior1:modele2	1.247	-1.415	3.910	0.972
prior7:modele4-prior1:modele2	2.631	-0.629	5.892	0.258
prior8:modele4-prior1:modele2	-0.567	-3.229	2.096	1.000
prior3:modele2-prior2:modele2	-0.128	-2.790	2.535	1.000
prior4:modele2-prior2:modele2	-0.529	-3.191	2.133	1.000
prior5:modele2-prior2:modele2	3.479	0.816	6.141	0.002

prior6:modele2-prior2:modele2	4.029	0.768	7.289	0.005
prior7:modele2-prior2:modele2	2.793	0.131	5.456	0.031
prior8:modele2-prior2:modele2	2.958	0.296	5.621	0.017
prior1:modele3-prior2:modele2	-0.109	-2.772	2.553	1.000
prior2:modele3-prior2:modele2	-0.204	-2.867	2.458	1.000
prior3:modele3-prior2:modele2	-0.014	-2.676	2.649	1.000
prior4:modele3-prior2:modele2	1.353	-1.310	4.015	0.937
prior5:modele3-prior2:modele2	3.229	0.567	5.892	0.006
prior6:modele3-prior2:modele2	3.000	0.337	5.662	0.014
prior7:modele3-prior2:modele2	3.088	0.426	5.751	0.010
prior8:modele3-prior2:modele2	0.508	-2.155	3.170	1.000
prior1:modele4-prior2:modele2	-0.573	-3.236	2.089	1.000
prior2:modele4-prior2:modele2	0.115	-2.547	2.777	1.000
prior3:modele4-prior2:modele2	-0.868	-3.530	1.795	1.000
prior4:modele4-prior2:modele2	0.834	-1.828	3.497	1.000
prior5:modele4-prior2:modele2	2.971	0.309	5.634	0.016
prior6:modele4-prior2:modele2	2.118	-0.545	4.780	0.280
prior7:modele4-prior2:modele2	3.502	0.241	6.763	0.024
prior8:modele4-prior2:modele2	0.304	-2.359	2.966	1.000
prior4:modele2-prior3:modele2	-0.401	-3.064	2.261	1.000
prior5:modele2-prior3:modele2	3.606	0.944	6.269	0.001
prior6:modele2-prior3:modele2	4.156	0.896	7.417	0.003
prior7:modele2-prior3:modele2	2.921	0.259	5.583	0.019
prior8:modele2-prior3:modele2	3.086	0.424	5.749	0.010
prior1:modele3-prior3:modele2	0.018	-2.644	2.681	1.000
prior2:modele3-prior3:modele2	-0.077	-2.739	2.586	1.000
prior3:modele3-prior3:modele2	0.114	-2.548	2.776	1.000
prior4:modele3-prior3:modele2	1.481	-1.182	4.143	0.865
prior5:modele3-prior3:modele2	3.357	0.695	6.019	0.003
prior6:modele3-prior3:modele2	3.127	0.465	5.790	0.009
prior7:modele3-prior3:modele2	3.216	0.554	5.879	0.006
prior8:modele3-prior3:modele2	0.635	-2.027	3.298	1.000
prior1:modele4-prior3:modele2	-0.446	-3.108	2.217	1.000
prior2:modele4-prior3:modele2	0.243	-2.420	2.905	1.000
prior3:modele4-prior3:modele2	-0.740	-3.402	1.922	1.000
prior4:modele4-prior3:modele2	0.962	-1.700	3.625	0.999
prior5:modele4-prior3:modele2	3.099	0.437	5.761	0.010
prior6:modele4-prior3:modele2	2.245	-0.417	4.908	0.196
prior7:modele4-prior3:modele2	3.630	0.369	6.890	0.016
prior8:modele4-prior3:modele2	0.432	-2.231	3.094	1.000
prior5:modele2-prior4:modele2	4.007	1.345	6.670	0.000
prior6:modele2-prior4:modele2	4.558	1.297	7.818	0.001
prior7:modele2-prior4:modele2	3.322	0.660	5.985	0.004
prior8:modele2-prior4:modele2	3.487	0.825	6.150	0.002
prior1:modele3-prior4:modele2	0.420	-2.243	3.082	1.000
prior2:modele3-prior4:modele2	0.325	-2.338	2.987	1.000
prior3:modele3-prior4:modele2	0.515	-2.147	3.178	1.000
prior4:modele3-prior4:modele2	1.882	-0.781	4.544	0.489
prior5:modele3-prior4:modele2	3.758	1.096	6.421	0.001
prior6:modele3-prior4:modele2	3.529	0.866	6.191	0.002
prior7:modele3-prior4:modele2	3.617	0.955	6.280	0.001
prior8:modele3-prior4:modele2	1.036	-1.626	3.699	0.997
prior1:modele4-prior4:modele2	-0.044	-2.707	2.618	1.000
prior2:modele4-prior4:modele2	0.644	-2.019	3.306	1.000
prior3:modele4-prior4:modele2	-0.339	-3.001	2.324	1.000
prior4:modele4-prior4:modele2	1.363	-1.299	4.026	0.933
prior5:modele4-prior4:modele2	3.500	0.838	6.163	0.002
prior6:modele4-prior4:modele2	2.647	-0.016	5.309	0.053
prior7:modele4-prior4:modele2	4.031	0.770	7.291	0.005
prior8:modele4-prior4:modele2	0.833	-1.830	3.495	1.000
prior6:modele2-prior5:modele2	0.550	-2.711	3.811	1.000
prior7:modele2-prior5:modele2	-0.685	-3.348	1.977	1.000
prior8:modele2-prior5:modele2	-0.520	-3.183	2.142	1.000

prior1:modele3-prior5:modele2	-3.588	-6.250	-0.926	0.001
prior2:modele3-prior5:modele2	-3.683	-6.345	-1.021	0.001
prior3:modele3-prior5:modele2	-3.492	-6.155	-0.830	0.002
prior4:modele3-prior5:modele2	-2.126	-4.788	0.537	0.274
prior5:modele3-prior5:modele2	-0.249	-2.912	2.413	1.000
prior6:modele3-prior5:modele2	-0.479	-3.141	2.183	1.000
prior7:modele3-prior5:modele2	-0.390	-3.052	2.272	1.000
prior8:modele3-prior5:modele2	-2.971	-5.633	-0.309	0.016
prior1:modele4-prior5:modele2	-4.052	-6.714	-1.389	0.000
prior2:modele4-prior5:modele2	-3.364	-6.026	-0.701	0.003
prior3:modele4-prior5:modele2	-4.346	-7.009	-1.684	0.000
prior4:modele4-prior5:modele2	-2.644	-5.306	0.018	0.053
prior5:modele4-prior5:modele2	-0.507	-3.170	2.155	1.000
prior6:modele4-prior5:modele2	-1.361	-4.023	1.301	0.934
prior7:modele4-prior5:modele2	0.023	-3.237	3.284	1.000
prior8:modele4-prior5:modele2	-3.175	-5.837	-0.512	0.007
prior7:modele2-prior6:modele2	-1.235	-4.496	2.025	0.998
prior8:modele2-prior6:modele2	-1.070	-4.331	2.190	1.000
prior1:modele3-prior6:modele2	-4.138	-7.399	-0.877	0.003
prior2:modele3-prior6:modele2	-4.233	-7.494	-0.972	0.002
prior3:modele3-prior6:modele2	-4.042	-7.303	-0.782	0.004
prior4:modele3-prior6:modele2	-2.676	-5.937	0.585	0.233
prior5:modele3-prior6:modele2	-0.799	-4.060	2.461	1.000
prior6:modele3-prior6:modele2	-1.029	-4.290	2.232	1.000
prior7:modele3-prior6:modele2	-0.940	-4.201	2.321	1.000
prior8:modele3-prior6:modele2	-3.521	-6.782	-0.260	0.023
prior1:modele4-prior6:modele2	-4.602	-7.863	-1.341	0.001
prior2:modele4-prior6:modele2	-3.914	-7.174	-0.653	0.007
prior3:modele4-prior6:modele2	-4.896	-8.157	-1.636	0.000
prior4:modele4-prior6:modele2	-3.194	-6.455	0.067	0.061
prior5:modele4-prior6:modele2	-1.057	-4.318	2.203	1.000
prior6:modele4-prior6:modele2	-1.911	-5.172	1.350	0.804
prior7:modele4-prior6:modele2	-0.527	-4.292	3.238	1.000
prior8:modele4-prior6:modele2	-3.725	-6.985	-0.464	0.012
prior8:modele2-prior7:modele2	0.165	-2.497	2.828	1.000
prior1:modele3-prior7:modele2	-2.903	-5.565	-0.240	0.021
prior2:modele3-prior7:modele2	-2.998	-5.660	-0.335	0.014
prior3:modele3-prior7:modele2	-2.807	-5.469	-0.145	0.030
prior4:modele3-prior7:modele2	-1.440	-4.103	1.222	0.892
prior5:modele3-prior7:modele2	0.436	-2.226	3.098	1.000
prior6:modele3-prior7:modele2	0.206	-2.456	2.869	1.000
prior7:modele3-prior7:modele2	0.295	-2.367	2.958	1.000
prior8:modele3-prior7:modele2	-2.286	-4.948	0.377	0.174
prior1:modele4-prior7:modele2	-3.367	-6.029	-0.704	0.003
prior2:modele4-prior7:modele2	-2.678	-5.341	-0.016	0.047
prior3:modele4-prior7:modele2	-3.661	-6.323	-0.999	0.001
prior4:modele4-prior7:modele2	-1.959	-4.621	0.704	0.414
prior5:modele4-prior7:modele2	0.178	-2.484	2.840	1.000
prior6:modele4-prior7:modele2	-0.676	-3.338	1.987	1.000
prior7:modele4-prior7:modele2	0.709	-2.552	3.969	1.000
prior8:modele4-prior7:modele2	-2.489	-5.152	0.173	0.091
prior1:modele3-prior8:modele2	-3.068	-5.730	-0.405	0.011
prior2:modele3-prior8:modele2	-3.163	-5.825	-0.500	0.008
prior3:modele3-prior8:modele2	-2.972	-5.634	-0.310	0.016
prior4:modele3-prior8:modele2	-1.606	-4.268	1.057	0.765
prior5:modele3-prior8:modele2	0.271	-2.391	2.933	1.000
prior6:modele3-prior8:modele2	0.041	-2.621	2.704	1.000
prior7:modele3-prior8:modele2	0.130	-2.532	2.792	1.000
prior8:modele3-prior8:modele2	-2.451	-5.113	0.212	0.103
prior1:modele4-prior8:modele2	-3.532	-6.194	-0.869	0.002
prior2:modele4-prior8:modele2	-2.843	-5.506	-0.181	0.026
prior3:modele4-prior8:modele2	-3.826	-6.489	-1.164	0.001
prior4:modele4-prior8:modele2	-2.124	-4.786	0.538	0.275

prior5:modele4-prior8:modele2	0.013	-2.649	2.675	1.000
prior6:modele4-prior8:modele2	-0.841	-3.503	1.822	1.000
prior7:modele4-prior8:modele2	0.543	-2.717	3.804	1.000
prior8:modele4-prior8:modele2	-2.655	-5.317	0.008	0.051
prior2:modele3-prior1:modele3	-0.095	-2.757	2.567	1.000
prior3:modele3-prior1:modele3	0.096	-2.567	2.758	1.000
prior4:modele3-prior1:modele3	1.462	-1.200	4.125	0.878
prior5:modele3-prior1:modele3	3.339	0.676	6.001	0.004
prior6:modele3-prior1:modele3	3.109	0.447	5.771	0.009
prior7:modele3-prior1:modele3	3.198	0.535	5.860	0.007
prior8:modele3-prior1:modele3	0.617	-2.045	3.279	1.000
prior1:modele4-prior1:modele3	-0.464	-3.126	2.198	1.000
prior2:modele4-prior1:modele3	0.224	-2.438	2.887	1.000
prior3:modele4-prior1:modele3	-0.758	-3.421	1.904	1.000
prior4:modele4-prior1:modele3	0.944	-1.718	3.606	0.999
prior5:modele4-prior1:modele3	3.081	0.418	5.743	0.010
prior6:modele4-prior1:modele3	2.227	-0.435	4.889	0.207
prior7:modele4-prior1:modele3	3.611	0.350	6.872	0.017
prior8:modele4-prior1:modele3	0.413	-2.249	3.076	1.000
prior3:modele3-prior2:modele3	0.191	-2.472	2.853	1.000
prior4:modele3-prior2:modele3	1.557	-1.105	4.220	0.807
prior5:modele3-prior2:modele3	3.434	0.771	6.096	0.003
prior6:modele3-prior2:modele3	3.204	0.542	5.866	0.006
prior7:modele3-prior2:modele3	3.293	0.630	5.955	0.005
prior8:modele3-prior2:modele3	0.712	-1.950	3.374	1.000
prior1:modele4-prior2:modele3	-0.369	-3.031	2.293	1.000
prior2:modele4-prior2:modele3	0.319	-2.343	2.982	1.000
prior3:modele4-prior2:modele3	-0.663	-3.326	1.999	1.000
prior4:modele4-prior2:modele3	1.039	-1.624	3.701	0.997
prior5:modele4-prior2:modele3	3.176	0.513	5.838	0.007
prior6:modele4-prior2:modele3	2.322	-0.340	4.984	0.156
prior7:modele4-prior2:modele3	3.706	0.445	6.967	0.013
prior8:modele4-prior2:modele3	0.508	-2.154	3.171	1.000
prior4:modele3-prior3:modele3	1.366	-1.296	4.029	0.931
prior5:modele3-prior3:modele3	3.243	0.581	5.905	0.005
prior6:modele3-prior3:modele3	3.013	0.351	5.676	0.014
prior7:modele3-prior3:modele3	3.102	0.440	5.765	0.010
prior8:modele3-prior3:modele3	0.521	-2.141	3.184	1.000
prior1:modele4-prior3:modele3	-0.560	-3.222	2.103	1.000
prior2:modele4-prior3:modele3	0.129	-2.534	2.791	1.000
prior3:modele4-prior3:modele3	-0.854	-3.516	1.808	1.000
prior4:modele4-prior3:modele3	0.848	-1.814	3.511	1.000
prior5:modele4-prior3:modele3	2.985	0.323	5.647	0.015
prior6:modele4-prior3:modele3	2.131	-0.531	4.794	0.270
prior7:modele4-prior3:modele3	3.515	0.255	6.776	0.023
prior8:modele4-prior3:modele3	0.318	-2.345	2.980	1.000
prior5:modele3-prior4:modele3	1.876	-0.786	4.539	0.494
prior6:modele3-prior4:modele3	1.647	-1.016	4.309	0.726
prior7:modele3-prior4:modele3	1.736	-0.927	4.398	0.638
prior8:modele3-prior4:modele3	-0.845	-3.508	1.817	1.000
prior1:modele4-prior4:modele3	-1.926	-4.588	0.736	0.445
prior2:modele4-prior4:modele3	-1.238	-3.900	1.424	0.975
prior3:modele4-prior4:modele3	-2.221	-4.883	0.442	0.211
prior4:modele4-prior4:modele3	-0.518	-3.181	2.144	1.000
prior5:modele4-prior4:modele3	1.618	-1.044	4.281	0.753
prior6:modele4-prior4:modele3	0.765	-1.898	3.427	1.000
prior7:modele4-prior4:modele3	2.149	-1.112	5.410	0.618
prior8:modele4-prior4:modele3	-1.049	-3.711	1.613	0.997
prior6:modele3-prior5:modele3	-0.230	-2.892	2.433	1.000
prior7:modele3-prior5:modele3	-0.141	-2.803	2.522	1.000
prior8:modele3-prior5:modele3	-2.722	-5.384	-0.059	0.040
prior1:modele4-prior5:modele3	-3.803	-6.465	-1.140	0.001
prior2:modele4-prior5:modele3	-3.114	-5.777	-0.452	0.009

prior3:modele4-prior5:modele3	-4.097	-6.759	-1.435	0.000
prior4:modele4-prior5:modele3	-2.395	-5.057	0.268	0.124
prior5:modele4-prior5:modele3	-0.258	-2.920	2.404	1.000
prior6:modele4-prior5:modele3	-1.112	-3.774	1.551	0.993
prior7:modele4-prior5:modele3	0.273	-2.988	3.533	1.000
prior8:modele4-prior5:modele3	-2.925	-5.588	-0.263	0.019
prior7:modele3-prior6:modele3	0.089	-2.573	2.751	1.000
prior8:modele3-prior6:modele3	-2.492	-5.154	0.170	0.090
prior1:modele4-prior6:modele3	-3.573	-6.235	-0.911	0.001
prior2:modele4-prior6:modele3	-2.885	-5.547	-0.222	0.022
prior3:modele4-prior6:modele3	-3.867	-6.530	-1.205	0.000
prior4:modele4-prior6:modele3	-2.165	-4.827	0.497	0.246
prior5:modele4-prior6:modele3	-0.028	-2.691	2.634	1.000
prior6:modele4-prior6:modele3	-0.882	-3.544	1.780	1.000
prior7:modele4-prior6:modele3	0.502	-2.759	3.763	1.000
prior8:modele4-prior6:modele3	-2.696	-5.358	-0.033	0.044
prior1:modele3-prior7:modele3	-2.581	-5.243	0.081	0.067
prior1:modele4-prior7:modele3	-3.662	-6.324	-0.999	0.001
prior2:modele4-prior7:modele3	-2.974	-5.636	-0.311	0.016
prior3:modele4-prior7:modele3	-3.956	-6.619	-1.294	0.000
prior4:modele4-prior7:modele3	-2.254	-4.916	0.408	0.191
prior5:modele4-prior7:modele3	-0.117	-2.780	2.545	1.000
prior6:modele4-prior7:modele3	-0.971	-3.633	1.692	0.999
prior7:modele4-prior7:modele3	0.413	-2.847	3.674	1.000
prior8:modele4-prior7:modele3	-2.785	-5.447	-0.122	0.032
prior1:modele4-prior8:modele3	-1.081	-3.743	1.582	0.995
prior2:modele4-prior8:modele3	-0.393	-3.055	2.270	1.000
prior3:modele4-prior8:modele3	-1.375	-4.038	1.287	0.927
prior4:modele4-prior8:modele3	0.327	-2.335	2.989	1.000
prior5:modele4-prior8:modele3	2.464	-0.199	5.126	0.099
prior6:modele4-prior8:modele3	1.610	-1.052	4.272	0.760
prior7:modele4-prior8:modele3	2.994	-0.266	6.255	0.105
prior8:modele4-prior8:modele3	-0.204	-2.866	2.459	1.000
prior2:modele4-prior1:modele4	0.688	-1.974	3.351	1.000
prior3:modele4-prior1:modele4	-0.294	-2.957	2.368	1.000
prior4:modele4-prior1:modele4	1.408	-1.255	4.070	0.911
prior5:modele4-prior1:modele4	3.545	0.882	6.207	0.002
prior6:modele4-prior1:modele4	2.691	0.029	5.353	0.045
prior7:modele4-prior1:modele4	4.075	0.814	7.336	0.004
prior8:modele4-prior1:modele4	0.877	-1.785	3.540	1.000
prior3:modele4-prior2:modele4	-0.983	-3.645	1.680	0.999
prior4:modele4-prior2:modele4	0.720	-1.943	3.382	1.000
prior5:modele4-prior2:modele4	2.856	0.194	5.519	0.025
prior6:modele4-prior2:modele4	2.003	-0.660	4.665	0.374
prior7:modele4-prior2:modele4	3.387	0.126	6.648	0.034
prior8:modele4-prior2:modele4	0.189	-2.473	2.851	1.000
prior4:modele4-prior3:modele4	1.702	-0.960	4.365	0.672
prior5:modele4-prior3:modele4	3.839	1.177	6.501	0.000
prior6:modele4-prior3:modele4	2.985	0.323	5.648	0.015
prior7:modele4-prior3:modele4	4.370	1.109	7.630	0.001
prior8:modele4-prior3:modele4	1.172	-1.491	3.834	0.987
prior5:modele4-prior4:modele4	2.137	-0.526	4.799	0.266
prior6:modele4-prior4:modele4	1.283	-1.379	3.945	0.963
prior7:modele4-prior4:modele4	2.667	-0.593	5.928	0.238
prior8:modele4-prior4:modele4	-0.531	-3.193	2.132	1.000
prior6:modele4-prior5:modele4	-0.854	-3.516	1.809	1.000
prior7:modele4-prior5:modele4	0.531	-2.730	3.791	1.000
prior8:modele4-prior5:modele4	-2.667	-5.330	-0.005	0.049
prior7:modele4-prior6:modele4	1.384	-1.877	4.645	0.991
prior8:modele4-prior6:modele4	-1.814	-4.476	0.849	0.558
prior8:modele4-prior7:modele4	-3.198	-6.459	0.063	0.060