

Université de Montréal

Etude empirique de distributions associées à la
Fonction de Pénalité Escomptée

par

Rabī Ibrahim

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

mars 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Etude empirique de distributions associées à la
Fonction de Pénalité Escomptée**

présenté par

Rabî Ibrahim

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Professeur Richard Duncan

(président-rapporteur)

Professeur Manuel MORALES

(directeur de recherche)

Professeur Louis G. Doray

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

9 Mars 2010

SOMMAIRE

ETUDE EMPIRIQUE DE DISTRIBUTIONS ASSOCIÉES À LA FONCTION DE PÉNALITÉ ESCOMPTÉE

Rabî Ibrahim, M.Sc.

Université De Montréal, 2009.

On présente une nouvelle approche de simulation pour la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine, pour des modèles de risque déterminés par des subordonateurs de Lévy. Cette approche s'inspire de la décomposition "*Ladder height*" pour la probabilité de ruine dans le Modèle Classique. Ce modèle, déterminé par un processus de Poisson composé, est un cas particulier du modèle plus général déterminé par un subordonateur, pour lequel la décomposition "*Ladder height*" de la probabilité de ruine s'applique aussi.

La Fonction de Pénalité Escomptée, encore appelée Fonction Gerber-Shiu (Fonction GS), a apporté une approche unificatrice dans l'étude des quantités liées à l'événement de la ruine été introduite. La probabilité de ruine et la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine sont des cas particuliers de la Fonction GS. On retrouve, dans la littérature, des expressions pour exprimer ces deux quantités, mais elles sont difficilement exploitables de par leurs formes de séries infinies de convolutions sans formes analytiques fermées. Cependant, puisqu'elles sont dérivées de la Fonction GS, les expressions

pour les deux quantités partagent une certaine ressemblance qui nous permet de nous inspirer de la décomposition "*Ladder height*" de la probabilité de ruine pour dériver une approche de simulation pour cette fonction de densité conjointe.

On présente une introduction détaillée des modèles de risque que nous étudions dans ce mémoire et pour lesquels il est possible de réaliser la simulation. Afin de motiver ce travail, on introduit brièvement le vaste domaine des mesures de risque, afin d'en calculer quelques unes pour ces modèles de risque.

Ce travail contribue à une meilleure compréhension du comportement des modèles de risques déterminés par des subordonateurs face à l'éventualité de la ruine, puisqu'il apporte un point de vue numérique absent de la littérature.

Mots clés : Théorie du Risque, Fonction de Pénalité Escomptée, Processus de Lévy, Subordonateurs, Équations de Renouvellement, Simulation, Mesures de Risques.

SUMMARY

EMPIRICAL DISTRIBUTIONS ASSOCIATED WITH THE EXPECTED DISCOUNTED PENALTY FUNCTION

Rabî Ibrahim, M.Sc.

Université De Montréal, 2009.

We discuss a simulation approach for the joint density function of the surplus prior to ruin and deficit at ruin for risk models driven by Lévy subordinators. This approach is inspired by the Ladder Height decomposition for the probability of ruin of such models. The Classical Risk Model driven by a Compound Poisson process is a particular case of this more generalized one.

The Expected Discounted Penalty Function, also referred to as the Gerber-Shiu Function (GS Function), was introduced as a unifying approach to deal with different quantities related to the event of ruin. The probability of ruin and the joint density function of surplus prior to ruin and deficit at ruin are particular cases of this function. Expressions for those two quantities have been derived from the GS Function, but those are not easily evaluated nor handled as they are infinite series of convolutions with no analytical closed form. However they share a similar structure, thus allowing to use the Ladder Height decomposition of the Probability of Ruin as a guiding method to generate simulated values for this joint density function.

We present an introduction to risk models driven by subordinators, and describe

those models for which it is possible to process the simulation. To motivate this work, we also present an application for this distribution, in order to calculate different risk measures for those risk models. An brief introduction to the vast field of Risk Measures is conducted where we present selected measures calculated in this empirical study.

This work contributes to better understanding the behavior of subordinators driven risk models, as it offers a numerical point of view, which is absent in the literature.

Keywords : Risk Theory, Expected Discounted Penalty Function, Lévy Processes, Subordinators, Renewal Equations, Simulation, Risk Measures.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Etude empirique de distributions associées à la Fonction de Pénalité Escomptée	iii
Summary	v
Empirical Distributions associated with the Expected Discounted penalty Function	v
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xii
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Modeles de risque	10
1.1. Résultats préliminaires.....	11
1.1.1. Processus de Lévy	11
1.1.2. Les équations de renouvellement	13
1.1.3. Variable aléatoire géométrique composée	16
1.2. Un modèle de risque général : introduction et définitions	17
1.2.1. La probabilité de ruine.....	18
1.2.2. La fonction de densité conjointe (fdc)	20
1.2.3. La fonction de pénalité escomptée.....	23
1.2.4. La probabilité ultime de ruine revisitée.....	27

1.2.5.	La fonction de densité conjointe revisitée.....	30
1.3.	Le modèle classique.....	33
1.3.1.	La probabilité ultime de ruine dans le modèle classique.....	34
1.3.2.	La fonction de densité conjointe dans le modèle classique.....	35
1.3.3.	Exemple : cas exponentiel.....	36
1.3.3.1.	La probabilité de ruine dans le cas exponentiel.....	37
1.3.3.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas exponentiel....	38
1.3.4.	Exemple : cas Paréto.....	38
1.3.4.1.	La probabilité de ruine dans le cas Paréto.....	39
1.3.4.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas Paréto.....	39
1.4.	Le modèle avec subordonateur Gamma.....	40
1.4.1.	La probabilité ultime de ruine dans le cas du subordonateur Gamma.....	42
1.4.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas du subordonateur Gamma.....	43
1.5.	Le modèle avec subordonateur gaussien inverse généralisé (GIG)...	44
1.5.1.	La probabilité de ruine dans le cas du subordonateur GIG.....	45
1.5.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas du subordonateur GIG.....	46
1.5.3.	Exemple : Le cas GIG pour $\beta = -\frac{1}{2}$, gaussien inverse (IG).....	47
1.5.3.1.	La probabilité de ruine dans le cas gaussien inverse (IG) ...	48
1.5.3.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas IG.....	48
1.5.4.	Exemple : Le cas GIG pour $\beta = \frac{1}{2}$, inverse gaussien réciproque (RIG).....	49
1.5.4.1.	La probabilité de ruine dans le cas RIG.....	49
1.5.4.2.	La fonction de densité conjointe dans le cas RIG.....	49
Chapitre 2.	Mesures de risques.....	51

2.1. Historique	53
L'analyse GAP	54
L'analyse de Duration	54
L'analyse de scénarios	55
Le cadre moyenne-variance	55
2.2. La Valeur à Risque	55
2.2.1. Calcul de la VaR	58
2.3. Les mesures de risque Cohérentes	59
Le déficit espéré (ES)	60
2.4. Les mesures de risque spectrales	62
Chapitre 3. Methode	66
3.1. Approches numériques et simulation pour la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$	69
3.1.1. La simulation directe du processus de surplus $U(t)$	70
3.1.2. Simulation par la méthode des convolutions	74
3.2. La distribution "Ladder Height"	74
3.3. Fonction GS et distribution "Ladder Height"	79
3.3.1. Décomposition LH de $\psi(\mathbf{u})$	79
3.3.2. Décomposition LH de la fdc	81
Chapitre 4. Resultats	85
4.1. Algorithmes	86
4.1.1. Simulation directe du processus pour $\psi(u)$	87
4.1.2. Simulation directe du processus pour la fdc	88
4.1.3. Simulation " <i>Ladder height</i> " pour $\psi(u)$	91
4.1.4. Simulation " <i>Ladder height</i> " pour la fdc	92

4.2.	Résultats	94
4.2.1.	Probabilité de ruine.....	95
4.2.2.	Fonction de densité conjointe	99
4.2.2.1.	Modèle Classique	99
4.2.2.2.	Modèle Gamma.....	102
4.2.2.3.	Modèle Général Gaussien Inverse (GIG).....	104
4.3.	Applications : mesures de risque	108
4.3.1.	VaR	110
4.3.2.	Expected Shortfall	111
4.3.3.	Mesure de risque spectrale Exponentielle (SERM)	112
	Conclusion.....	113
	Annexe A. Code de programmation	A-i
A.1.	Simulation en Java : Simjava2	A-i
A.2.	Exploitation des résultats par Matlab.....	A-xxii
	Bibliographie	A-i

LISTE DES FIGURES

1.1	Une trajectoire de $U(t)$ pour un modèle classique	23
2.1	$VàR$ 95% pour une distribution de pertes $N(0, 1)$	56
2.2	$VàR$ et ES 95% pour une distribution de pertes $N(0, 1)$	61
2.3	Fonction d'aversion au risque pour différentes valeurs de γ	64
3.1	Processus de pertes classique $\mathcal{P}(t)$	76
4.1	Modèle classique Exponentiel - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	100
4.2	Modèle classique Exponentiel - $U(0) = 2.0, \theta = 0.5, E_0 = 2.0$	101
4.3	Modèle classique Pareto - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	102
4.4	Modèle classique Pareto - $U(0) = 2.0, \theta = 0.5, E_0 = 2.0$	103
4.5	Modèle Gamma - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	104
4.6	Modèle Gamma - $U(0) = 5.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	105
4.7	Modèle IG - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	106
4.8	Modèle RIG - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 2.0$	107
4.9	Modèle IG - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 5.0$	108
4.10	Modèle RIG - $U(0) = 2.0, \theta = 0.2, E_0 = 5.0$	109

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Estimateurs de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par la probabilité de ruine à horizon fini $\psi_T(u)$ par simulation directe du processus $U(t)$	95
4.2	Estimateurs $\hat{\psi}(u)$ de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par simulation "Ladder height"	96
4.3	Comparaison des estimateurs de $\psi(u)$ par rapport aux vraies valeurs .	97
4.4	Estimateurs de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par simulation "Ladder height"	98
4.5	Mesures de risque pour différents processus de surplus déterminés par des subordonateurs de Lévy	110

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tout d'abord mon directeur de recherche, Prof. Manuel Morales, pour ses efforts, remarques et suggestions qui ont permis la réalisation de ce travail. Je voudrais également le remercier de son soutien financier, ses recommandations et ses conseils, grâce auxquels j'ai pu partir en stage de recherche pendant 4 mois en Espagne, et l'accompagner au Brésil pour une conférence. Ces expériences nous ont permis de nouer une amitié sincère.

J'aimerais également remercier la Prof. Silvia Mayoral, à la "*Universidad Carlos III*" à Madrid, qui m'a encadré durant mon stage de recherche.

Enfin, J'aimerais souligner le support financier du Département de Mathématiques et de Statistiques de l'université de Montréal, du *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport* du Québec ainsi que de l'*Institut des Sciences Mathématiques* de Montréal, pour leur soutien financier.

INTRODUCTION

En assurance et en finance, il est nécessaire de modéliser le comportement d'un surplus financier afin de quantifier le risque qui lui est associé. Plus précisément, on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier tombe en dessous de zéro, événement qu'on appellera ruine. Traditionnellement, les efforts se sont concentrés sur l'étude de cette probabilité, mais il y a d'autres moyens d'évaluer et de mesurer le risque. En effet, on associe également à l'événement de la ruine deux autres quantités importantes. Il s'agit du surplus avant la ruine, c'est à dire, la valeur du surplus juste avant le moment de la ruine. Et du déficit au moment de la ruine, c'est à dire la valeur absolue du surplus au moment où a lieu la ruine.

L'information que fournissent ces deux dernières quantités est particulièrement importante et intéressante. Si la probabilité ultime de ruine renseigne sur l'éventualité de la ruine, elle ne dit rien du tout sur l'ampleur de celle-ci, si elle se produisait ; elle ne permet pas non plus de se rendre compte de l'état du surplus juste avant la ruine. Or ce niveau de surplus avant la ruine est un indicateur du risque qu'il y a de tomber en ruine, si, par exemple, il atteint un niveau trop bas. Ces deux nouvelles quantités complètent et enrichissent l'information apportée par la probabilité ultime de ruine. Ce sont des variables aléatoires que l'on étudiera à travers leur fonction de densité conjointe.

Pour étudier toutes ces quantités, le choix du modèle à utiliser doit répondre à deux conditions fondamentales. Le modèle doit être adéquat vis-à-vis des données observées ; il doit, autant que possible, rendre compte et tenir compte de la réalité de l'environnement financier et économique du surplus observé. Il doit également permettre qu'on l'étudie pour en déduire des résultats analytiques afin qu'ils

soient utilisables le plus facilement possible. Cette dernière condition n'est pas toujours facile à satisfaire.

En effet, il existe, en Théorie du Risque, des modèles généraux possédant de nombreux paramètres, qui les rendent le plus flexible possible. On retrouve, dans la littérature, des solutions pour les équations permettant d'obtenir les résultats concernant les quantités liées au moment de la ruine pour ces mêmes modèles. Cependant, ces solutions sont bien souvent sous forme ouverte, comme des équations intégro-différentielles, complexes à résoudre. En conséquence, s'il existe effectivement des résultats théoriques, ils sont trop vagues pour être utilisés, et sont peu maniables. Voilà pourquoi ces modèles très généraux sont souvent inutilisables en pratique.

On se propose donc d'aborder l'étude des quantités liées au moment de la ruine d'un point de vue numérique et quantitatif à travers des simulations pour des cas plus précis de certains de ces modèles. Ces études numériques sont absentes de la littérature et une analyse quantitative pour différents modèles permettrait de mieux comprendre d'une part, le comportement de ces modèles, et d'autre part, le risque qui leur est associé.

Au cours de cette étude, nous considérons un modèle de risque de la forme

$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{0.0.1}$$

où $U(t)$ est le processus de risque qui modélise le surplus financier d'une compagnie d'assurance au temps t , u est le surplus initial, c est le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps, et $S(t)$ est le processus de pertes agrégées (que nous appellerons processus de pertes). Le choix de $S(t)$ détermine le processus $U(t)$. Lorsque $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson, on est en présence du modèle classique, exhaustivement étudié dans la littérature. Le lecteur intéressé peut se référer à DeVyllder (1996), Gerber (1979), Kass et al. (2001) ou encore Bowers et al. (1997). Le modèle de surplus prend alors la forme :

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{0.0.2}$$

Plusieurs autres choix ont été proposés pour $S(t)$. Certains sont déterminés par des processus de diffusion qui approximent le modèle classique, approche introduite par Iglehart (1969), et qui permet d'obtenir des résultats analytiques sous formes fermées pour la probabilité ultime de ruine. D'autres modèles permettent de tenir compte de l'intérêt crédité sur les primes reçues (voir par exemple Emmanuel et al. (1975) ou Garrido (1987)). Enfin on retrouve certains modèles qui incluent une composante de perturbation, en plus du processus de pertes. Ce modèle plus général a été introduit par Gerber (1970) et englobe le modèle classique. Le surplus obtenu est de la forme

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W(t) \quad (0.0.3)$$

où $W(t)$ est la composante de perturbation et suit un mouvement Brownien et $\sigma \geq 0$ une constante. Au cours de cette étude, les processus de pertes considérés sont des subordonateurs, une classe particulière de processus de Lévy. Les processus de Lévy ont des avantages dans la simulation de processus financiers et permettent de faire le pont entre les processus de diffusions et les processus avec perturbation. Dans un modèle déterminé par un subordonateur, les pertes agrégées sont modélisées différemment par rapport au modèle classique, où les pertes sont modélisées individuellement, puis agrégées à travers une somme. En effet, dans le cas d'un subordonateur, on modélise les pertes agrégées directement par une seule variable, le subordonateur lui-même. On connaît donc directement la densité des pertes agrégées qui dépend de la mesure de Lévy de celui-ci. Récemment Dufresne et al. (1991), Morales (2003), et Garrido and Morales (2006), étudient des modèles de surplus déterminés par des subordonateurs Gamma, puis Inverse Gaussien et plus généralement Général inverse Gaussien. Le lecteur intéressé peut également se référer à Morales (2003) pour une étude détaillée de modèles de risque déterminés par des processus de Lévy généraux.

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine. Et pour la définir, il faut d'abord définir le moment où survient la ruine : τ . Ainsi on peut définir cette probabilité à travers le moment

de la ruine. Si on observe la ruine pour le processus $U(t)$, alors τ existe et est fini, i.e. $\tau < \infty$. Si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas, ou encore $\tau = \infty$. La probabilité de ruine, dénotée $\psi(u)$, peut être définie de la manière suivante,

$$\psi(u) := P(\tau < \infty | U(0) = u)$$

Notons que cette probabilité est définie pour un horizon de temps infini. On s'intéressera aussi à la probabilité de ruine sur un horizon de temps fini et on la dénotera $\psi_T(u)$, où T est la borne de l'horizon de temps. La probabilité de ruine à horizon fini nous renseigne différemment sur la ruine. Elle indique la probabilité que la ruine survienne à l'intérieur d'un horizon de temps fini $[0, T]$. Cette information a un sens plus précis, et est, en pratique, plus utile que l'information fournie par $\psi(u)$. Elle est définie par :

$$\psi_T(u) := P(\tau < T | U(0) = u) \quad 0 < T < \infty$$

Afin de différencier les deux probabilités, on nommera la première "*probabilité ultime de ruine*" et la seconde "*probabilité de ruine à horizon fini*".

Comme nous l'avons déjà mentionné, le surplus avant la ruine, dénoté $U(\tau^-)$, et le déficit au moment de la ruine, dénoté $|U(\tau)|$, sont deux autres quantités qui permettent de mesurer le risque lié à un modèle de surplus. Plus particulièrement, on s'intéresse à la fonction de densité conjointe de ces deux variables aléatoires, que l'on dénotera "*fdc*". Cette fonction est de première importance dans notre étude car elle permet de connaître la distribution conjointe des deux variables $U(\tau^-)$ et $|U(\tau)|$, utile pour comprendre le comportement du surplus financier dans les scénarios de ruine. On peut en effet se faire une meilleure idée de la gravité de la ruine, i.e. montant du déficit. Cette fonction de répartition est également cruciale, par exemple pour une compagnie qui veut se protéger d'un tel scénario, puisqu'elle permet de dresser tout un éventail de mesures de risque sur le déficit $|U(\tau)|$. Enfin elle peut servir à utiliser le surplus avant la ruine $U(\tau^-)$ comme indicateur du risque de ruine. Cette approche est discutée dans Biffis and Morales (2009).

Toutes ces quantités sont plus formellement définies et détaillées au chapitre 1. Cependant leur étude s'inscrit dans l'étude d'une seule et unique fonction : la

fonction de pénalité escomptée. Introduite par Gerber and Shiu (1998), elle est couramment appelée fonction Gerber-Shiu (fonction GS). Elle permet de capturer l'information pour les quantités que nous venons de mentionner, c'est à dire, la probabilité ultime de ruine et la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine. Tous les résultats obtenus par l'intermédiaire de la fonction GS restent cependant des équations intégral-différentielles, de forme ouverte, dont les solutions analytiques fermées sont difficiles et souvent impossibles à dériver, à l'exception de quelques cas particuliers, sur lesquels nous nous concentrons au cours de ce travail.

Nous commencerons notre étude par le modèle classique; un modèle assez intuitif qui permettra donc au lecteur de se familiariser avec les différentes composantes d'un processus de surplus. Ainsi il sera plus facile de saisir les enjeux de notre étude lorsqu'on présentera les modèles plus avancés avec subordonateurs. Ces derniers sont moins faciles à cerner car moins intuitifs. D'autre part, le modèle classique est le modèle le plus étudié et utilisé historiquement, pour sa flexibilité et également parce qu'il permet de dériver des résultats analytiques intéressants, sous forme fermée et donc facilement utilisables. Dans ce modèle, le processus de pertes est un processus de Poisson composé. Le surplus financier $U(t)$ obtenu est de la forme

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , et les X_i sont des variables aléatoires (v.a.) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), $i = 1, 2, \dots, N(t)$. Ce modèle est étudié en détail dans plusieurs ouvrages de références, comme Cramér (1930), ou encore Grandell (1991) ou plus récemment dans Klugman et al. (2004). Nous le présenterons formellement au chapitre 1. Un des premiers résultats historiques sur la probabilité de ruine concerne le cas où les X_i suivent une loi exponentielle. De plus, dans ce cas, Dufresne and Gerber (1988) ont étudié la fdj et obtenu des résultats également sous forme finie.

Un peu plus tard, Dufresne, Gerber, and Shiu (1991), introduisent dans la littérature le processus Gamma et ont montré que le processus de Poisson composé qui modélise les pertes agrégées, pouvait être remplacé par un processus Gamma. Ils construisent le processus Gamma comme une limite de processus de Poisson composé. Le modèle de risque obtenu est alors représenté par un processus de surplus de la forme

$$U(t) = u + ct - S_G(t) \quad (0.0.4)$$

où $S_G(t)$ est un processus Gamma, c'est à dire un processus dont les accroissements suivent une loi Gamma. Des formules pour la probabilité ultime de ruine, ainsi que pour la fonction de densité conjointe sont dérivées à partir des résultats déjà connus pour le modèle avec processus de Poisson composé.

Par la suite Dickson and Waters (1993) étendent ces résultats et obtiennent des formules pour la probabilité de ruine à temps fini pour ce modèle basé sur la construction de Dufresne et Gerber.

Plus récemment, Dufresne and Gerber (1993), Morales (2004) et Garrido and Morales (2006) ont proposé un modèle de risque plus général englobant les cas où le processus de pertes agrégées est un processus de Lévy, ou plus précisément, une classe particulière de processus de Lévy : un subordonateur. Le modèle de risque a alors un surplus de la forme :

$$U(t) = u + ct - S_{Levy}(t) - \eta Z(t), \quad (0.0.5)$$

où $S(t)$ est un subordonateur, et Z un processus de lévy. Ils se concentrent sur le cas où $\eta = 0$, i.e., $U(t) = u + ct - S_{Levy}(t)$. Cette construction englobe les modèles classiques, avec processus Gamma et permet également de travailler avec des processus Inverse Gaussien (IG), Réciproque Inverse Gaussien (RIG), et, plus généralement, Général Inverse Gaussien (GIG). Ces subordonateurs, par leur nature, sont composés d'une infinité de sauts et de discontinuités. Si cette infinité de petits sauts peuvent, à priori, apparaître comme un inconvénient, ils offrent en

réalité au moins deux avantages par rapport au modèle classique. D'abord, ils permettent de rendre compte de certains risques de l'environnement économique et financier, que nous ne savons pas modéliser, mais qui sont présents et que nous observons. Ensuite et surtout, l'utilisation de subordinateurs pour modéliser le processus de pertes agrégées permet de connaître directement la distribution de ce processus. Contrairement au processus de pertes dans le modèle classique, $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ dont la distribution est assez complexe à étudier, la distribution du subordinateur ne dépend que de sa mesure de Lévy, connue. Garrido and Morales (2006) trouvent, pour des cas particuliers du modèle avec subordinateurs, des expressions pour la fonction de pénalité escomptée. Nous nous concentrerons sur ces cas particuliers au cours de ce travail.

L'objectif de ce mémoire est d'enrichir la littérature sur ces modèles de risque en apportant de l'information quantitative par simulation, à travers l'utilisation de la fonction GS. Après avoir parcouru la littérature, il semble que les études empiriques comme celle que nous présentons ici soient inexistantes. Et pourtant, elles sont un excellent moyen d'apprécier le comportement et l'efficacité de ces modèles, pour s'en servir dans des applications financières, ou en gestion de risque. Le but de notre étude est donc de simuler la probabilité de ruine et la fonction de densité jointe, en se servant des résultats connus sur la fonction GS, pour les cas particuliers où ces résultats sont utilisables. Avec ces résultats de simulation, nous pourrions comparer le comportement de ces modèles à d'autres déjà étudiés et discuter de leur efficacité. De plus, pour montrer l'importance et l'utilité de l'information numérique, on se propose de porter cette étude empirique plus loin en utilisant les résultats de simulation comme données pour des applications de gestion de risque. En effet, cette étude comporte également un volet "Mesures de risque" et nous procéderons à des calculs de ces mesures utilisées par les firmes sur les marchés financiers.

Ce mémoire est divisé en 4 grands chapitres. On commence par un rappel de certaines notions sur les processus de Lévy. On procède ensuite à une introduction

brève, sur les équations de renouvellement et leur solution, car nous en aurons besoin au chapitre 3 pour interpréter et exploiter les résultats du chapitre 1. On présente, par la suite, dans le chapitre 1, toutes les quantités dont nous avons parlé, i.e., probabilité ultime de ruine, $\psi(u)$, et à temps fini, $\psi_T(u)$, le surplus avant la ruine, $U(\tau^-)$, le déficit au moment de la ruine, $|U(\tau)|$, la fonction de densité conjointe de ces deux variables, f_{XY} , la fonction GS ainsi que le lien entre ces quantités; nous présentons également différents modèles de risque, et pour chacun d'entre eux, la forme particulière des quantités que nous voulons simuler. Dans le chapitre 2, on se concentre essentiellement sur une introduction brève aux mesures de risque. Cette introduction vise à présenter les grandes lignes de ce domaine à travers un résumé historique des mesures connues et une présentation d'un type de mesure moderne : les mesures de risque spectrales. Au chapitre 3, nous exposerons la procédure de simulation ainsi que les défis qui restent à relever pour simuler d'autres quantités et d'autres modèles. Enfin nous discuterons des résultats de simulation et analyserons les mesures de risque réalisées sur ces données au Chapitre 4.

Chapitre 1

MODELES DE RISQUE

Un survol de la littérature révèle que le modèle classique en Théorie du Risque peut être vu comme un cas particulier du modèle plus général déterminé par un subordonateur, qui est étudié aujourd'hui. Dans ce chapitre, on se propose de présenter les différents modèles de risque pour ces surplus, à travers la fonction de pénalité escomptée. Cette approche reste fidèle à l'approche historique de la littérature et la manière traditionnelle de présenter le sujet. En effet, historiquement, la littérature en théorie de la ruine s'est d'abord concentrée sur l'étude de la probabilité de ruine, puis sur la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine et plus récemment sur la fonction de pénalité escomptée. Cette fonction permet de capturer les deux quantités précédentes ainsi que des résultats intéressants pour celles-ci.

Nous commencerons ce chapitre par une présentation de résultats préliminaires nécessaires à la lecture de ce mémoire. On procède à un rappel général sur les processus de Lévy. On passe ensuite à une introduction aux équations de renouvellement et leurs solutions. Nous en aurons besoin au chapitre 3 pour interpréter et exploiter les résultats du chapitre 1. Par la suite, nous introduisons la probabilité ultime de ruine, $\psi(u)$, et à temps fini, $\psi_T(u)$, le surplus avant la ruine, $U(\tau^-)$, le déficit au moment de la ruine, $|U(\tau)|$, et leur fonction de densité conjointe, afin de présenter la fonction GS qui les englobe toutes. L'intérêt de cette approche réside dans les propriétés de la fonction de pénalité escomptée qui offre des perspectives de simulations nouvelles et encore inexplorées.

1.1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1.1. Processus de Lévy

Les processus de Lévy sont des processus stochastiques dont les propriétés sont très intéressantes pour la construction des modèles de risque. Pour une étude détaillée sur les processus de Lévy, on pourra consulter les travaux de Bertoin (1996), Sato (1999) ou encore Kyprianou (2008). Nous reprenons ici l'introduction de Garrido and Morales (2006) pour les processus de Lévy et les subordinateurs.

Définition 1.1.1. Processus de Lévy

Soit $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un processus stochastique à temps continu. On dira que $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy si et seulement sa fonction caractéristique $\iota(s)$ est de la forme

$$\iota(s) = E[e^{iuX(t)}] = e^{-t\varphi(u)} \quad (1.1.1)$$

où $\varphi(u)$ est l'exposant caractéristique dans la caractérisation de Lévy-Kitchine et doit être de la forme

$$\varphi(u) = -iau + \frac{b^2}{2}u^2 - \int_{\mathbb{R}_0} [e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{(-1;1)}]dQ(x), \quad (1.1.2)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes et dQ est une mesure positive sur $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$ qui satisfait

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2)dQ(x) < \infty.$$

a, b^2 et dQ sont appelés le Triplet de caractéristiques de Lévy et déterminent entièrement le processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, $X(0) = 0$. La mesure de Lévy du processus est $dQ(x) = q(x)dx$. On propose également une définition alternative d'un processus de Lévy que l'on retrouve dans Morales (2003).

Définition 1.1.2. Processus de Lévy (définition alternative)

Un processus X , càdlàg¹, avec $X_0 = 0$, est appelé processus de Lévy (ou processus à incréments stationnaires et indépendants) si la distribution de $X_t - X_s$ ne dépend

1. continue à droite, limite à gauche

que de $t - s$ et si $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s \in \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. C'est un processus de Markov homogène de saut (voir Kyprianou (2008)).

Ces processus offrent des propriétés intéressantes pour la construction de nos modèles. On retiendra d'abord que les incréments du processus $X(t)$ sont indépendants entre eux. Ils sont aussi stationnaires, c'est la propriété d'homogénéité dans le temps du processus; c'est-à-dire que pour toute paire d'intervalles de temps de même longueur, disons (s, t) et (u, v) , tels que $t - s = v - u$, la distribution des incréments sur ces deux intervalles est égale. La propriété d'homogénéité est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de tenir compte d'une réalité des réclamations d'assurance : elle surviennent de manière homogènes dans le temps.

Lorsque, dans l'équation (1.1.2) la constante $b^2 = 0$ et la mesure de Lévy dQ est définie sur $(0; \infty)$ telle que $\int_0^\infty (1 \wedge x)dQ(x) < \infty$, le processus de Lévy obtenu est appelé un subordonateur et ses incréments sont toujours positifs et donc sa transformée de Laplace $\phi_t(s) = E[e^{-sX(t)}]$ existe et est de la forme $\phi_t(s) = e^{-t\Psi(s)}$ où $\Psi(s)$ est appelé l'exposant de Laplace et peut être écrit,

$$\Psi(s) = as + \int_0^\infty (1 - e^{-sx})dQ(x), \quad s > 0, \quad (1.1.3)$$

où $dQ(x) = q(x)dx$ est la mesure du processus de Lévy. Enfin il est important de mentionner une relation entre l'exposant caractéristique $\varphi(u)$ et l'exposant de Laplace $\Psi(s)$.

$$\Psi(s) = \varphi(is) \quad (1.1.4)$$

Cette relation découle directement des définitions de la fonction caractéristique et de la transformée de Laplace.

En tant que processus de Lévy, les subordonateurs héritent des propriétés que nous avons énoncées. Les processus de Poisson composé, Gamma, gaussien inverse(IG), inverse gaussien réciproque (RIG), et plus généralement, gaussien inverse généralisé (GIG) sont des subordonateurs qui sont utilisés pour définir des modèles de risque. Nous les présentons dans les sections suivantes.

Finalement, étant donné que la notation pour les fonctions de la mesure de Lévy devient rapidement lourde, on regroupe ces fonctions dans la définition suivante, afin de faciliter la lecture des équations au cours de notre étude.

Définition 1.1.3. Fonctions de la mesure de Lévy d'un subordonateur

A partir de la mesure de Lévy d'un subordonateur :

$$dQ(y) = q(y)dy \quad (1.1.5)$$

On définit les fonctions suivantes

$$Q(y) = \int_0^y q(s)ds \quad (1.1.6)$$

$$\bar{Q}(y) = \int_y^\infty q(s)ds \quad (1.1.7)$$

$$E[S(1)] = \int_0^\infty \bar{Q}(s)ds = E_0 \quad (1.1.8)$$

$$m(y) = \frac{\bar{Q}(y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} \quad (1.1.9)$$

$$M(y) = \int_0^y m(s)ds = \frac{\int_0^y \bar{Q}(s)ds}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} \quad (1.1.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}(y) &= \int_y^\infty m(s)ds = \frac{\int_y^\infty \bar{Q}(s)ds}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} \\ &= 1 - M(y) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

On passe à présent au rappel concernant les équations de renouvellement. Ce rappel est très important pour comprendre les résultats que l'on retrouve dans la littérature concernant l'expression de $\phi(u)$, $\psi(u)$ et la *fdc* sous forme de série de convolutions. En effet ces résultats sont à la base de notre approche de simulation.

1.1.2. Les équations de renouvellement

Dans cette section, nous présentons des résultats utiles sur les équations de renouvellement et leurs solutions, en reprenant la notation et les théorèmes de DeVlyder (1996) (partie I, Chapitre 1, sections 4 et 5, pp 20-28.)

Commençons par rappeler la définition de l'opération de convolution.

Définition 1.1.4. Convolution

Soient f et G deux fonctions sur R_+ , de variations bornées. La convolution des fonctions f et G peut se définir par l'opérateur de convolution $*$ tel que :

$$(f * G)(u) = \int_0^u f(u-x)dG(x) = \int_0^u f(x)dG(u-x) = (G * f)(u). \quad (1.1.12)$$

et la kème puissance de convolution correspondante par

$$f^{*0}(x) := 1 \quad , \quad f^{*k+1}(x) = (f^{*k} * f)(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1.13)$$

L'équation (1.1.12) qui définit la convolution indique une propriété de symétrie puisque $(f * G)(u) = (G * f)(u)$. Si f est la fonction de densité d'une v.a. X et G la fonction de répartition d'une autre v.a. Y , alors $(f * G)(x)$ est la fonction de répartition de la somme de ces deux variables aléatoires, i.e.,

$$P(X + Y < a) = (f * G)(u) = \int_0^u f(u-x)dG(x) \quad (1.1.14)$$

On peut aussi définir l'opération de convolution d'une autre manière, équivalente, dont nous nous servons pour introduire la fonction GS en suivant la notation adoptée dans Garrido and Morales (2006).

Définition 1.1.5. Convolution (définition alternative)

Soient f et g deux fonctions sur R_+^2 , bornées sur tout intervalle borné. La convolution des fonctions f et g peut se définir par l'opérateur de convolution \star tel que :

$$(f \star g)(u) = \int_0^u f(x)g(u-x)dx = \int_0^u f(u-x)g(x)dx = (g \star f)(u). \quad (1.1.15)$$

et la kème puissance de convolution correspondante par

$$f^{*0}(x) := 1 \quad , \quad f^{\star k+1}(x) = (f^{\star k} \star f)(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1.16)$$

2. Pour les fonctions utilisées, on se limite à R_+ , mais la définition est plus générale et s'étend à R

Ici aussi, l'équation (1.1.15) qui définit la convolution indique une propriété de symétrie puisque $(f \star g)(u) = (g \star f)(u)$. Si f et g sont les fonctions de densité des v.a. X et Y , respectivement, alors, $(f \star g)(x)$ est la fonction de densité de la somme de ces deux variables aléatoires, i.e.,

$$(f \star g)(a) = \int_0^a f(a-x)g(x)dx \quad (1.1.17)$$

Nous adoptons l'une ou l'autre des définitions (1.1.12), (1.1.13) et (1.1.15), (1.1.16) dans ce mémoire.

Enfin on notera le lien qui unit ces deux définitions lorsque f est la fonction de densité d'une v.a. X , g la fonction de densité d'une autre v.a. Y et G la fonction de répartition correspondante :

$$(f \star g)(a) = \int_0^a f(a-x)g(x)dx = \int_0^a f(a-x)dG(x) = (f * G)(a) \quad (1.1.18)$$

On peut maintenant définir une équation de renouvellement

Définition 1.1.6. Equation de renouvellement

Une équation de renouvellement est une équation de la forme

$$f(x) = p(x) + q(f * G)(x), \quad (1.1.19)$$

où

- (i) G est une fonction de répartition.
- (ii) p est une fonction sur R_+ bornée sur tout intervalle borné.
- (iii) $q \in R$ et $0 < q \leq 1$.
- (iv) La fonction inconnue f est une fonction sur R_+ bornée sur tout intervalle borné.

Théorème 1.1.1. Solution d'une équation de renouvellement DeVylder (1996)

L'équation de renouvellement (1.1.19) admet pour solution la série de puissances de convolution suivante

$$f = p * \sum_{k=0}^{\infty} q^k G^{**k} \quad (1.1.20)$$

et cette solution est unique.

Preuve.

Une preuve détaillée de ce théorème est développée dans DeVyllder (1996), où sont également discutées la convergence de cette série, ainsi que son unicité en tant que solution à l'équation de renouvellement.

1.1.3. Variable aléatoire géométrique composée

La méthode de simulation par convolutions repose sur la simulation d'une variable aléatoire géométrique composée. Voilà pourquoi ce rappel est important pour comprendre l'approche de simulation utilisée.

Définition 1.1.7. Variable aléatoire géométrique composée

Klugman et al. (2004)

Une v.a. Z est une v.a. géométrique composée (GC), si on peut l'écrire

$$Z = \sum_{i=0}^{N_G} X_i$$

où N_G est une v.a. géométrique de paramètre θ tel que

$$P(N_G = k) = P_k = \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

et les X_i sont des v.a. i.i.d. de fonctions de répartition F_X et de densité f_X , pour $i = 1, \dots, N_G$. De plus, la v.a. N_G est indépendante de X_i , $i = 1, \dots, N_G$.

Sa fonction de répartition, $F_Z(x)$ et sa fonction de survie, $S_Z(x) = 1 - F_Z(x)$, s'écrivent toutes deux respectivement sous forme d'une série de puissances de convolutions :

$$F_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i F_X^{**i}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^i F_X^{**i}(x), \quad (1.1.21)$$

$$S_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i F_X^{*k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k (1 - F_X^{*k}(x)), \quad (1.1.22)$$

et sa fonction de densité $f_Z(x)$

$$f_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i f_X^{*k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k f_X^{*k}(x). \quad (1.1.23)$$

Nous pouvons maintenant passer à la présentation des différents modèles que nous étudions : le modèle classique, dont le processus de pertes agrégées est un processus de Poisson composé avec deux exemples particuliers pour la distribution de sévérité ; par la suite le modèle avec processus Gamma, et finalement avec processus gaussien inverse généralisé.

1.2. UN MODÈLE DE RISQUE GÉNÉRAL : INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

On peut considérer le surplus financier d'une compagnie d'assurance comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces clients paient des primes d'assurance qui sont ajoutées au surplus de l'assureur, et qui sont la seule source de revenus que nous considérons dans les modèles de risque. On note c le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps. D'autre part, il faut considérer un surplus initial, noté u , qui représente le capital investi au départ par l'assureur. On note $S(t)$ le processus de réclamations, c'est-à-dire le montant total de réclamations payées par l'assureur, à ses clients, jusqu'au moment t . Ainsi, si on appelle $U(t)$ le surplus financier au moment t , on peut construire un modèle de risque, bien que très général. En regard des informations mentionnées jusqu'à présent on peut écrire :

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (1.2.1)$$

avec $U(0) = u$.

On impose la contrainte $c = (1 + \theta)E(S(1))$, où $\theta > 0$ est appelé "chargement de sécurité". Cette contrainte assure que le processus $U(t)$ ait une tendance positive et ainsi ne dérive pas automatiquement vers 0, sans quoi la ruine surviendrait

avec probabilité 1. On peut interpréter financièrement cette condition : il s'agit de récolter en primes d'assurance plus que ce qu'on s'attend, en moyenne, à payer en réclamations, pour pouvoir survivre financièrement en tant que compagnie d'assurance. Le lecteur intéressé peut se référer à Bowers et al. (1997), ou encore Asmussen (2000) pour des explications détaillées sur le calcul de la constante c .

Différents processus de pertes ont été proposés pour $S(t)$ dans (1.2.1). Ainsi il peut prendre la forme d'un processus de Poisson composé $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ dans le modèle classique, Cramér (1930). Ce modèle est lui-même inclus dans le cas plus général du modèle déterminé par un subordonateur $S_{sub}(t)$, Garrido and Morales (2006). Plus généralement Morales and Shoutens (2003) étudient un modèle déterminé par un mouvement de Lévy. Un modèle avec subordonateur et perturbation est également discuté dans Morales (2007). Dans cette étude, nous retenons le modèle déterminé par un subordonateur discuté par Garrido and Morales (2006) car c'est un cas intéressant puisqu'il englobe le cas du processus de Poisson composé, des subordonateurs Gamma, gaussien inverse (IG), inverse gaussien réciproque (RIG), et plus généralement gaussien inverse généralisé (GIG). Le processus de surplus $U(t)$ obtenu avec un subordonateur s'écrit :

$$U(t) = u + ct - S_{sub}(t) \quad (1.2.2)$$

1.2.1. La probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine. Et pour la définir, il faut d'abord définir le moment où survient la ruine : τ .

Définition 1.2.1. Le moment de la ruine τ

Dénotons par τ la variable aléatoire du moment de la ruine,

$$\tau = \inf\{t|U(t) < 0\} \quad (1.2.3)$$

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers le moment de la ruine. En effet, si on observe la ruine pour le processus $U(t)$, c'est que τ existe et est fini, i.e. $\tau < \infty$. Par contre, si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas, ou

encore $\tau = \infty$. Ainsi la probabilité ultime de ruine, notée $\psi(u)$, peut se définir de la manière suivante.

Définition 1.2.2. La probabilité ultime de ruine

Soit un modèle de risque de la forme (1.2.2), avec $U(0) = u$. Dénotons par $\psi(u)$ la probabilité ultime de ruine pour ce modèle. Alors,

$$\psi(u) := P(\tau < \infty | U(0) = u) \quad (1.2.4)$$

La probabilité ultime de ruine n'est autre que la probabilité que $\tau < \infty$, pour un surplus initial $U(0) = u$. Si $\tau = \infty$, on parlera de survie pour le processus $U(t)$. Le cas échéant, si $\tau < \infty$, on parlera de ruine. En cas de survie, la probabilité d'un tel scénario est donnée par la probabilité de survie $\Phi(u) = 1 - \psi(u)$ ³.

Définition 1.2.3. La probabilité ultime de ruine (définition alternative)

Soit un modèle de risque de la forme (1.2.2), avec $U(0) = u$. Dénotons par $\psi(u)$ la probabilité ultime de ruine pour ce modèle. Alors,

$$\psi(u) := P(\inf_{t \geq 0} U(t) < 0 | U(0) = u) \quad (1.2.5)$$

Notons que cette probabilité de ruine, appelée "*probabilité **ultime** de ruine*" est complexe à calculer puisqu'il n'existe que très rarement des expressions fermées et précises pour obtenir un résultat numérique. Voilà pourquoi on se tourne vers des méthodes numériques comme la simulation. Or, cette probabilité, comme son nom l'indique, est définie sur un horizon de temps infini, et c'est précisément la raison qui la rend difficile à évaluer par des méthodes numériques. En effet, définir un horizon de temps infini s'avère problématique quand on tente de simuler une trajectoire du processus de surplus pour observer la ruine. On risque de ne jamais observer de ruine, et la simulation ne prendrait donc jamais fin. On s'intéressera alors à la probabilité de ruine sur un horizon de temps fini, qu'on notera $\psi_T(u)$, où T est la borne de l'horizon de temps. Afin de différencier ces deux probabilités, on nommera cette dernière "*Probabilité de ruine à **horizon***"

3. En ce qui concerne la notation, il est important de ne pas confondre $\Phi(u)$, la probabilité ultime de survie et $\phi(u)$, la fonction GS.

fini".

Définition 1.2.4. La probabilité de ruine à horizon fini

Soit $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus tel que défini en (1.2.2), dénotons par $\psi_T(u)$ la probabilité de ruine à horizon fini, pour un surplus initial $U(0) = u$, alors

$$\psi_T(u) := Pr(\tau < T | U(0) = u) \quad (1.2.6)$$

De plus, il est clair que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(u) = \psi(u). \quad (1.2.7)$$

$\psi_T(u)$ est beaucoup plus facile à simuler que $\psi(u)$. De plus, grâce à la limite (1.2.7), on peut approcher $\psi(u)$ par $\psi_T(u)$, qui est la probabilité que la ruine survienne à l'intérieur de l'intervalle de temps $[0, T]$ lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique fermée pour exprimer $\psi(u)$. Cette probabilité a donc deux utilités remarquables, la première, sa facilité de calcul, qui nous offre une alternative aux obstacles posés par la simulation de $\psi(u)$, et la seconde, d'un ordre plus pratique. En effet, si $\psi(u)$ est la première quantité à laquelle nous nous sommes intéressés pour mesurer le risque d'un modèle de surplus financier, elle n'indique pas le moment où la ruine est susceptible d'arriver. $\psi(u)$ indique simplement que la ruine surviendra, avec une certaine probabilité ; mais cela peut arriver à n'importe quel moment dans le temps. Or pour une compagnie d'assurance qui veut adopter un modèle pour son surplus, il est plus intéressant de fixer un horizon de temps fini pertinent, comme une année d'exercice fiscal, pour essayer d'évaluer le risque encouru, vis-à-vis d'une éventuelle ruine, au cours de cet exercice financier. Cependant il faut retenir que $\psi_T(u)$ est bien plus complexe à étudier.

1.2.2. La fonction de densité conjointe (*fdc*)

On considère maintenant une nouvelle quantité qui apporte de l'information supplémentaire dans l'étude du risque d'un modèle de surplus, la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine que

l'on notera fdc . En effet, on associe également à l'événement de la ruine deux autres quantités importantes. Il s'agit du surplus avant la ruine, c'est-à-dire, la valeur du surplus juste avant le moment de la ruine. Et du déficit au moment de la ruine, c'est-à-dire la valeur absolue du surplus juste après que la ruine ait eu lieu. Ces deux v.a. peuvent offrir beaucoup d'information concernant le surplus financier $U(t)$. On les étudie à travers leur fonction de densité conjointe, la fdc . Il faut donc pouvoir calculer des valeurs de la fdc pour exploiter cette information. Or, à nouveau, il n'existe pas de forme analytique fermée permettant de calculer des valeurs de cette fonction, pour des modèles de surplus comme ceux que nous voyons dans cette étude. On propose donc d'estimer la fdc par simulation. A titre d'exemple, nous réaliserons, dans le chapitre 4, différents calculs de mesures de risques à partir des données générées par la simulation. Ces calculs sont importants pour satisfaire à des organismes gouvernementaux de régulation financière. De plus la fdc nous renseigne sur l'étendue potentielle du déficit en cas de ruine. Dans un tel scénario, ce renseignement permettrait de se prémunir ou d'amortir la perte. Soit en se protégeant d'avance par l'achat d'une assurance. Soit en constituant une réserve destinée à amortir le choc financier. Pour tarifer ces deux options, il est nécessaires d'avoir à sa disposition l'information numérique de la fdc , i.e. les pertes potentielles, et les probabilités associées à ces pertes.

Nous définissons maintenant formellement ces quantités.

Définition 1.2.5.

Soit τ le moment de la ruine de la Définition 1.2.1. On note τ^- , le dernier instant juste avant la ruine où

$$\tau^- = \lim_{s \uparrow \tau} s. \quad (1.2.8)$$

Définition 1.2.6. Surplus avant la ruine

Soit τ le moment de la ruine de la Définition 1.2.1, la variable aléatoire du surplus juste avant le moment de la ruine, que l'on dénote X pour alléger le texte, est définie par :

$$X = U(\tau^-) \quad (1.2.9)$$

Définition 1.2.7. Déficit au moment de la ruine

Soit τ le moment de la ruine de la Définition 1.2.1, la variable aléatoire du déficit au moment de la ruine, que l'on dénote Y pour alléger le texte, est définie par :

$$Y = |U(\tau)| \tag{1.2.10}$$

À l'aide des Définition 1.2.6 et 1.2.7, on peut maintenant définir formellement la *fdc*.

Définition 1.2.8. fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine

Soit $U(0) = u$ le montant de surplus initial, X et Y les v.a. introduites respectivement dans la Définition 1.2.6 et la Définition 1.2.7, alors la fonction de densité conjointe de X et de Y est notée f_{XY} .

Définition 1.2.9. Fonction de répartition conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine, F_{XY}

Soit f_{XY} la fonction de densité introduite dans la Définition (1.2.9). On note F_{XY} La fonction de répartition associée à f_{XY} .

Pour permettre au lecteur de saisir plus facilement toutes ces définitions, le graphique 1.1 montre une trajectoire d'un processus de surplus $U(t)$ pour le modèle classique. On peut clairement identifier, le surplus initial $U(0) = u$, le moment de la ruine τ , le surplus avant la ruine X , et le déficit au moment de la ruine Y . On voit également les réclamations qui font chuter le processus par des sauts verticaux à des moments aléatoires, et la pente des segments montants est une indication directe de la prime réclamée collectée dans ce surplus.

En regardant bien la figure 1.1, il est clair que l'information apportée par X et par Y , lorsqu'on considère un scénario où survient la ruine, est très importante. En effet, ce n'est pas la même chose de tomber en ruine d'un dollar ($Y = 1$)

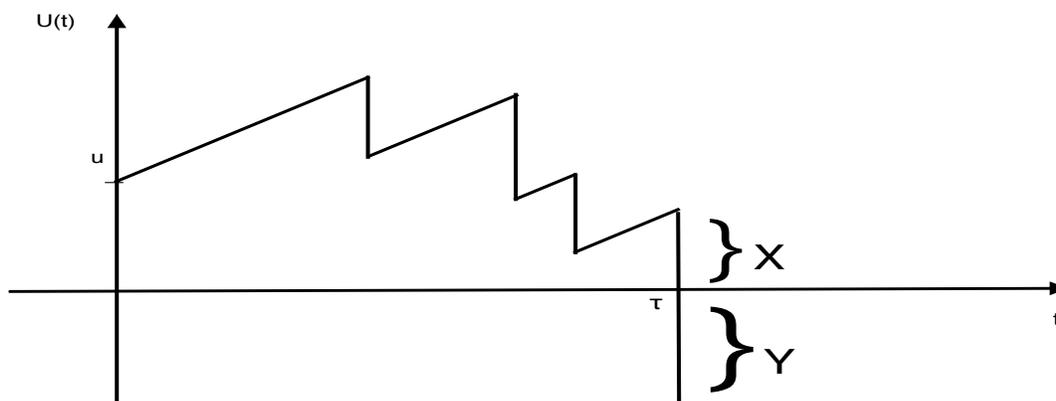


FIGURE 1.1. Une trajectoire de $U(t)$ pour un modèle classique

ou de dix millions de dollars ($Y = 10^7$). Ces deux cas ne transmettent pas la même information. Voilà pourquoi il est important de s'intéresser au déficit au moment de la ruine. Toujours dans ce même scénario, il est différent de tomber en ruine alors que le surplus (X) était déjà très bas, ou proche de 0, que de tomber en ruine alors qu'on avait un surplus bien garni, de dix millions de dollars ($X = 10^7$). Toutes ces informations sont contenues dans les variables X et Y , et sont capturées à travers une seule fonction que nous présentons maintenant : la fonction de pénalité escomptée

1.2.3. La fonction de pénalité escomptée

Nous abordons maintenant la fonction de pénalité escomptée ou fonction Gerber-Shiu (fonction GS). L'introduction de cette fonction par Gerber and Shiu (1998) est une étape importante dans la recherche en théorie du risque. Comme nous l'avons vu, la probabilité ultime de ruine et la *fdc* sont deux quantités permettant de mesurer le risque lié à un modèle de surplus financier. Ces deux quantités, sont difficiles à exprimer sous forme analytique fermée pour être évaluées. De plus, il faut dériver, pour chacune d'elles, spécifiquement, ces formes analytiques dans les rares cas où elles existent. Gerber and Shiu (1998) proposent une approche unificatrice à laquelle ils aboutissent après plusieurs travaux sur la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine et la probabilité ultime de ruine, entre autres Gerber (1992) et Gerber

and Shiu (1997). Cette nouvelle approche consiste à étudier une seule fonction, la fonction GS, qui capture les deux quantités précédentes. L'étude de ces deux dernières quantités est dorénavant incluse dans l'étude de cette seule fonction. Plusieurs travaux décrivant l'étude de la fonction GS sur différents modèles de risque ont été réalisés depuis son apparition dans la littérature. Gerber and Shiu (1998) introduisent et étudient cette fonction pour le modèle classique déterminé, par un processus de Poisson composé. Un peu plus tard Gerber and Landry (1998) étendent le concept au même modèle accompagné d'une perturbation. Willmot and Tsai (2002) étudient la fonction GS pour un modèle avec diffusion. Li and Garrido (2005) discutent la fonction GS pour un modèle Spare-Andersen avec perturbation. Plus récemment, Garrido and Morales (2006) étudient la fonction GS pour un modèle déterminé par un subordonateur et, plus généralement Morales (2007) aborde un modèle déterminé par un processus de Lévy général, englobant le cas du subordonateur. Très récemment Biffis and Morales (2009) et Biffis and Kyprianou (2009) discutent une généralisation de la fonction de pénalité escomptée à des modèles déterminés par des processus de Lévy.

On considère ici la fonction de pénalité escomptée pour le modèle de surplus étudié dans Garrido and Morales (2006) et défini en (1.2.2).

Définition 1.2.10. La fonction de pénalité escomptée

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.2.2), τ le moment de la ruine, τ^- le moment juste avant la ruine et $w(x; y)$ une fonction non négative de $x > 0$ et $y > 0$. La fonction de pénalité escomptée, notée $\phi(u)$, est définie par

$$\phi(u) = E[w(U(\tau^-), |U(\tau)|)e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{\{[0; \infty)\}}(\tau)|U(0) = u] \quad (1.2.11)$$

où δ est un paramètre qui peut être interprété comme une force d'intérêt servant à escompter la pénalité $w(U(\tau^-); |U(\tau)|)$. D'où le nom de fonction de pénalité escomptée. Une raison importante de s'intéresser à une telle fonction est qu'elle permet d'exploiter l'information contenue dans les variables de surplus avant la ruine et de déficit au moment de la ruine.

Faisons une première remarque intéressante.

En fixant $\delta = 0$ et la fonction de pénalité

$$w(x, y) = 1, \forall x, y > 0,$$

la fonction GS définie en (1.2.11) devient en fait la probabilité ultime de ruine :

$$\begin{aligned} \phi(u) &= E[w(U(\tau-); |U(\tau)|)e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{\{[0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u] & (1.2.12) \\ &= E[\mathbb{I}_{\{[0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u] \\ &= P[\tau < \infty|U(0) = u] \\ &:= \psi(u) \end{aligned}$$

Si on fixe maintenant $w(x; y) = \mathbb{I}_{\{[0;x_0)\}}(x)\mathbb{I}_{\{[0;y_0)\}}(y)$, la fonction GS devient alors la fonction de répartition, F_{XY} associée à la *fdc* f_{XY} . Cette dernière est alors obtenue par différentiation :

$$\begin{aligned} \phi(u) &= E[w(U(\tau-); |U(\tau)|)e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{\{[0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u] & (1.2.13) \\ &= E[\mathbb{I}_{\{[0;x_0)\}}(U(\tau-))\mathbb{I}_{\{[0;y_0)\}}(|U(\tau)|)\mathbb{I}_{\{[0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u] \\ &= P[U(\tau^-) < x_0, |U(\tau)| < y_0|U(0) = u] \\ &:= F_{XY}(x_0, y_0|U(0) - u) \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Puisque la probabilité ultime de ruine, $\psi(u)$, et la *fdc*, sont des cas particuliers de la fonction GS, on étudiera les formes analytiques de celle-ci afin de pouvoir s'en servir pour simuler $\psi(u)$ et f_{XY} .

Le théorème suivant, tiré de Garrido and Morales (2006), donne une nouvelle manière d'exprimer la fonction GS pour le modèle en (1.2.2). Il est

Théorème 1.2.1. Equation de renouvellement pour la fonction GS et sa solution, dans un modèle déterminé par un subordonateur
Garrido and Morales (2006)

La fonction $\phi(u)$ définie en (1.2.11) pour un processus de surplus comme (1.2.2), est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement suivante :

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(x)g(u-x)dx \quad z > 0 \quad (1.2.15)$$

où h et g sont données par

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \int_0^\infty e^{-\rho(z-u)} w(z,y) \frac{q(z+y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} dydz, \quad x \geq 0 \quad (1.2.16)$$

et

$$g(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty e^{-\rho(y-u)} \frac{q(y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} dy, \quad x \geq 0 \quad (1.2.17)$$

et dont la solution, unique, est la série de puissances de convolutions suivante,

$$\phi(u) = h \star \sum_{k=0}^{\infty} g^{\star k}(u). \quad (1.2.18)$$

h et g sont deux fonctions qui prennent les formes générales (1.2.16) et (1.2.17), lorsque le processus de pertes est un subordonateur. $dQ(y) = q(y)dy$ est la mesure de Lévy du subordonateur.

Preuve.

On retrouve l'équation (1.2.15) dans Garrido and Morales (2006) où une preuve détaillée ainsi que plus de références sur ce théorème sont disponibles pour le lecteur intéressé. dans les lignes suivantes, on vérifie le théorème.

On applique le Théorème 1.1.1 énoncé en préliminaire.

Considérons (1.2.15), l'équation de renouvellement de la fonction GS. En modifiant légèrement la notation pour éviter toute confusion avec le théorème (1.1.1) on peut écrire :

$$\phi(u) = h_{GS}(u) + \int_0^u \phi(x)g_{GS}(u-x)dx \quad z > 0$$

où les fonctions h_{GS} et g_{GS} sont les fonctions définies par (1.2.16) et (1.2.17). Cette équation est une équation de renouvellement, et il suffit alors d'identifier les éléments du Théorème 1.1.1. Alors en respectant cette notation, on identifie :

$$G = g_{GS} \quad p = h_{GS} \quad q = 1 \quad f = \phi,$$

et la solution générale (1.1.20) devient (1.2.18) :

$$\phi = f = p * \sum_{k=0}^{\infty} q^k G^{*k} = h_{GS} \star \sum_{k=0}^{\infty} g_{GS}^{*k}$$

Dans les deux sections suivantes, nous revisitons la probabilité ultime de ruine et la *fdc* à travers la fonction GS en se servant des résultats de cette section.

1.2.4. La probabilité ultime de ruine revisitée

Le calcul de la probabilité ultime de ruine dépend du modèle choisi. Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué dans la section 1.2.3, la probabilité ultime de ruine est un cas particulier de la fonction GS. Elle satisfait donc à une équation de renouvellement comme celle qui caractérise la fonction GSen (1.2.15). Le corollaire suivant, qui découle directement du Théorème 1.2.1, énonce cette propriété pour la probabilité ultime de ruine dans un modèle déterminé par un subordonateur.

Corollaire 1.2.1. Garrido and Morales (2006)

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.2.2), et $\psi(u)$, la probabilité ultime de ruine correspondante. $\psi(u)$ est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.15). Lorsque $\delta = 0$ et la fonction de pénalité $w(x, y) = 1, \forall x, y > 0$, (1.2.15) se réduit à

$$\psi(u) = \frac{1 - M(u)}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(x) m(u - x) dx \quad u > 0 \quad (1.2.19)$$

et la solution (1.2.18) devient alors

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - M^{*k})(u) \quad (1.2.20)$$

où l'opérateur de convolution \star est défini par (1.1.15), et les fonctions m et M sont respectivement la fonction de densité densité et la fonction de répartition correspondante, définies par (1.1.9) et (1.1.10).

Preuve.

La preuve de ce corollaire est directe. c'est une application du Théorème 1.2.1. La première étape est de passer de l'équation (1.2.15) à l'équation (1.2.19). Il suffit ensuite d'appliquer le Théorème 1.2.1 en fixant $\delta = 0$ et $w(x, y) = 1, \forall x, y > 0$ pour obtenir les fonctions h et g définies respectivement en (1.2.16) et (1.2.17). D'après le Théorème 1.2.1, ϕ satisfait l'équation de renouvellement suivante

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(s)g(u-s)ds,$$

et par symétrie,

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(u-s)g(s)ds.$$

Lorsque $\delta = 0$ et $w(x, y) = 1, \forall x, y > 0$, on a remarqué que $\phi(u) = \psi(u)$. Donc $\psi(u)$ répond à la même équation de renouvellement :

$$\psi(u) = h(u) + \int_0^u \psi(u-s)g(s)ds$$

où h et g sont les fonctions définies en (1.2.16) et (1.2.17). Lorsque $\delta = 0$ et $w(x, y) = 1, \forall x, y > 0$, Garrido and Morales (2006) montrent qu'elles se réduisent à

$$\begin{aligned} h_\psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \int_0^\infty \exp^{-\rho(z-u)} w(z, y) \frac{q(z+y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} dydz \\ &= \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \int_0^\infty \frac{q(z+y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} dydz \\ &= \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \int_z^\infty \frac{q(r)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} drdz \\ &= \frac{1}{1+\theta} \frac{\int_u^\infty \bar{Q}(z)dz}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} \\ &= \frac{\bar{M}(u)}{1+\theta} \\ &= \frac{1-M(u)}{1+\theta} \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

et

$$\begin{aligned}
g_\psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \exp^{-\rho(y-u)} \frac{q(y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t) dt} dy \\
&= \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \frac{q(y)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t) dt} dy \\
&= \frac{1}{1+\theta} \frac{\bar{Q}(u)}{\int_0^\infty \bar{Q}(t) dt} \\
&= \frac{m(u)}{1+\theta}
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

En substituant (1.2.21) et (1.2.22) dans (1.2.15), on obtient (1.2.19) :

$$\psi(u) = \frac{1 - M(u)}{1 + \theta} + \int_0^u \psi(u - s) \frac{m(s)}{1 + \theta} ds \tag{1.2.23}$$

où M est la fonction de répartition correspondant à m , définies toutes deux en (1.1.3).

On applique alors le Théorème 1.2.1 et la solution (1.2.18) se réduit à :

$$\psi(u) = g \star \sum_{k=0}^{\infty} q^k G^{\star k}(u) \tag{1.2.24}$$

où $g(u) = \frac{1-M(u)}{1+\theta}$, $q = \frac{1}{1+\theta}$ et $G(u) = M(u)$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \left(\frac{1 - M(u)}{1 + \theta} \right) \star \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k M^{\star k}(u) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^{k+1} (1 - M) \star M^{\star k}(u)
\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

On adopte la notation $\frac{1}{1+\theta} = q$, pour alléger le texte, et on montre que (1.2.25) est égale à (1.2.20) :

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} (1 - M) \star M^{\star k}(u)$$

$$\begin{aligned}
&= q[1 - M] + q^2 M[1 - M] + q^3 M^{*2}[1 - M] + q^4 M^{*3}[1 - M] + q^5 M^{*4}[1 - M] + \dots \\
&= q - qM + q^2 M - q^2 M^{*2} + q^3 M^{*2} - q^3 M^{*3} + q^4 M^{*3} - q^4 M^{*4} + q^5 M^{*4} - q^5 M^{*5} + \dots \\
&= q - qM - \mathbf{q}^2 + q^2 M + \mathbf{q}^2 - q^2 M^{*2} - \mathbf{q}^3 + q^3 M^{*2} + \mathbf{q}^3 \\
&\quad - q^3 M^{*3} - \mathbf{q}^4 + q^4 M^{*3} + \mathbf{q}^4 - q^4 M^{*4} - \mathbf{q}^5 + q^5 M^{*4} + \mathbf{q}^5 - q^5 M^{*5} + \dots \\
&= (q - q^2)(1 - M) + (q^2 - q^3)(1 - M^{*2}) + (q^3 - q^4)(1 - M^{*3}) + (q^4 - q^5)(1 - M^{*4}) + \dots \\
&= (1 - q)q(1 - M) + (1 - q)q^2(1 - M^{*2}) + (1 - q)q^3(1 - M^{*3}) + (1 - q)q^4(1 - M^{*4}) + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q)q^k (1 - M^{*k}(u)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - M^{*k}) \\
&= \psi(u)
\end{aligned}$$

On procède maintenant au même exercice pour dériver une expression sous forme de série de convolutions pour la *fdc*.

1.2.5. La fonction de densité conjointe revisitée

Comme pour le calcul de la probabilité ultime de ruine, celui de la *fdc*, est également un cas particulier de la fonction GS. On peut se référer à Garrido and Morales (2006) pour voir qu'elle est également caractérisée, par une équation semblable à (1.2.15). Afin de simplifier la notation on notera, $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u) = f_{XY}(u)$, pour (x_0, y_0) fixés.

Corollaire 1.2.2.

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.2.2), $(x, y) = (x_0, y_0)$ fixé, et f_{XY} , la fdc correspondante. f_{XY} est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.15). Lorsque $\delta = 0$ et $w(x, y) = \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(x) \mathbb{I}_{\{[0; y_0]\}}(y)$, (1.2.15) se réduit à

$$f_{XY}(u) = \frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(u - s)m(s)ds \quad u > 0 \quad (1.2.26)$$

et la solution (1.2.18) devient alors

$$f_{XY}(u) = \left(\frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \right) \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) \star \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u) \quad (1.2.27)$$

où l'opérateur de convolution \star est défini par (1.1.15).

Preuve.

La preuve de ce corollaire est directe, comme dans le cas de $\psi(u)$. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.2.1. On passe d'abord de l'équation (1.2.15) à l'équation (1.2.26) et il suffit ensuite d'appliquer le Théorème 1.2.1 en fixant $\delta = 0$ et $w(x, y) = \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(x)\mathbb{I}_{\{[0; y_0]\}}(y)$, pour obtenir les fonctions h et g définies respectivement en (1.2.16) et (1.2.17). D'après le Théorème 1.2.1, ϕ satisfait l'équation de renouvellement suivante :

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(s)g(u - s)ds$$

et par symétrie

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(u - s)g(s)ds$$

Lorsque $\delta = 0$ et $w(x, y) = \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(x)\mathbb{I}_{\{[0; y_0]\}}(y)$, $\phi(u) = f_{XY}(u)$. Donc $f_{XY}(u)$ répond à la même équation de renouvellement :

$$f_{XY}(u) = h(u) + \int_0^u f_{XY}(u - s)g(s)ds$$

où h et g sont les fonctions h et g définies respectivement en (1.2.16) et (1.2.17). Lorsqu'on pose $w(x, y) = \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(x)\mathbb{I}_{\{[0; y_0]\}}(y)$, (1.2.16) et (1.2.17) se réduisent à

$$h(u) = \frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) \quad (1.2.28)$$

$$g(u) = \frac{m(u)}{1 + \theta} \quad (1.2.29)$$

En substituant (1.2.28) et (1.2.29) dans (1.2.15), on obtient (1.2.26) :

$$f_{XY}(u) = \frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \mathbb{I}_{[0; x_0)}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(u - s)m(s)ds$$

où m est la fonction de densité définie en (1.1.3). On applique alors le Théorème 1.2.1, et la solution (1.2.18) se réduit à :

$$f_{XY}(u) = g \star \sum_{k=0}^{\infty} q^k g^{\star k}(u) \quad (1.2.30)$$

où $g(u) = \frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \mathbb{I}_{[0; x_0)}(u)$, $q = \frac{1}{1 + \theta}$, et $g(u) = m(u)$. Il s'en suit (1.2.27) :

$$f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u) = \left(\frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \mathbb{I}_{[0; x_0)}(u) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u)$$

Tout comme (1.2.20), (1.2.27) prend rarement des formes analytiques fermées et est souvent impossible à évaluer. Nous voyons dans ce chapitre les modèles pour lesquels il est possible d'obtenir un résultat intéressant dans l'optique de la simulation.

Il est maintenant possible de présenter les différents modèles que nous simulons dans les sections à venir, en gardant en tête que les résultats pour leur probabilité de ruine et leur *fdc* découlent directement de la définition de la fonction GS et du Théorème 1.2.1. En effet, en fixant les bons paramètres pour la fonction GS, i.e. δ et la fonction $w(x; y)$, et en donnant aux fonctions h et g les formes correspondantes au modèle considéré, on obtient les solutions des équations de renouvellement pour chacun de ces modèles.

1.3. LE MODÈLE CLASSIQUE

Le modèle classique a été exhaustivement étudié dans la littérature, et utilisé historiquement dans l'industrie. On peut se référer à Cramér (1930), ou plus récemment Grandell (1991), Bowers et al. (1997) et Asmussen (2000) pour des lectures détaillées à ce sujet. Dans ce modèle, les pertes agrégées sont modélisées par un processus de Poisson composé d'intensité λ par unité de temps. C'est-à-dire que le nombre de réclamations qui surviennent dans un intervalle de temps de longueur h est une variable aléatoire qui suit une distribution de Poisson de paramètre λh . Ce processus stochastique est aussi caractérisé par ses incréments indépendants, stationnaires et non-négatifs. Le processus de surplus (1.2.2), se réduit alors à :

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (1.3.1)$$

où u représente le montant du surplus initial, c , le taux constant auquel sont reçues les primes, $N(t)$ est le processus de Poisson d'intensité λ par unité de temps.. Les X_i modélisent les pertes individuelles et sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (iid) de moyenne $E[X_i] = \mu$, avec F_{X_i} comme fonction de répartition et f_{X_i} comme fonction de densité. Le processus de Poisson composé est inclus dans la classe des subordinateurs, et son exposant de Laplace est donné par

$$\Psi(s) = \lambda(1 - \hat{f}_{X_i}(s)) \quad (1.3.2)$$

où $\hat{g}(x) = \int_0^\infty e^{-xt}g(t)dt$ désigne la transformée de Laplace de la fonction g .

Dans le modèle classique, la mesure de Lévy s'écrit

$$dQ(y) = q(y)dy = \lambda f_{X_i}(y)dy,$$

et les fonctions de la définition (1.1.3), se réduisent à :

$$q(y) = \lambda f_{X_i}(y) \quad (1.3.3)$$

$$Q(y) = \lambda[F_{X_i}(y)] \quad (1.3.4)$$

$$\bar{Q}(y) = \lambda S_{X_i}(y) = \lambda[1 - F_{X_i}(y)] \quad (1.3.5)$$

$$E[S(1)] = E_0 = \lambda E[X_i] := \lambda\mu \quad (1.3.6)$$

$$m(y) = \frac{[1 - F_{X_i}(y)]}{\mu} \quad (1.3.7)$$

$$M(y) = \frac{\int_0^y [1 - F_{X_i}(s)] ds}{\mu} \quad (1.3.8)$$

$$\bar{M}(y) = 1 - M(y) = \frac{\int_y^\infty [1 - F_{X_i}(s)] ds}{\mu} \quad (1.3.9)$$

Nous présentons maintenant des résultats sur la probabilité ultime de ruine et la *fdc* dans le cas du modèle classique, en utilisant les notations définies ci-dessus et les résultats généraux des sections 1.2.4 et 1.2.5.

1.3.1. La probabilité ultime de ruine dans le modèle classique

Le processus de Poisson composé est inclus dans la classe des subordonateurs. (1.3.1) est donc un cas particulier de (1.2.2). La probabilité ultime de ruine pour le modèle (1.3.1), répond donc également à une équation de renouvellement dérivée de (1.2.19). Le corollaire suivant énonce le célèbre résultat de la formule de convolutions de Beekman. Il découle directement du Corollaire 1.2.1.

Corollaire 1.3.1. *Formule de convolution de Beekman.*

Bowers et al. (1997)

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.3.1) et $\psi(u)$ la probabilité ultime de ruine correspondante. $\psi(u)$ est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.19). En utilisant la mesure (1.3.3), la solution de cette équation se réduit à :

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_u^\infty \frac{[1 - F_{X_i}(u - x)]}{\mu} ds \quad (1.3.10)$$

$$+ \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(x) \frac{[1 - F_{X_i}(u - x)]}{\mu} dx \quad u > 0 \quad (1.3.11)$$

et d'après le Corollaire 1.2.1, en utilisant la mesure (1.3.3), la solution (1.2.20) de cette équation, se réduit à :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k \left(1 - \left(\frac{\int_0^u [1 - F_{X_i}(s)] ds}{\mu} \right)^{\star k} \right) (u) \quad (1.3.12)$$

Preuve.

La preuve de ce corollaire est directe. C'est une conséquence du Corollaire 1.2.1 dans lequel il suffit d'utiliser la mesure (1.3.3) pour que h et g se simplifient en :

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_u^\infty \frac{1 - F_{X_i}(s)}{\mu} ds \quad (1.3.13)$$

$$g(u) = \frac{1}{1+\theta} \frac{1 - F_{X_i}(u)}{\mu} \quad (1.3.14)$$

et qu'ainsi, (1.2.19) se réduise à (1.3.10), et la solution (1.2.20) à (1.3.12).

Un résultat qui est apparu très tôt dans la littérature (Cramér (1930)) pour le modèle classique et qui restera valide pour les modèles plus généraux que nous verrons dans les sections suivantes, concerne la probabilité de ruine pour un surplus initial nul $U(0) = 0$.

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \quad (1.3.15)$$

Ce résultat est important, comme nous le verrons au chapitre 3 lorsque nous discuterons de la "Perte maximum agrégée" ("Maximum Aggregate Loss").

1.3.2. La fonction de densité conjointe dans le modèle classique

Comme pour la probabilité ultime de ruine dans le cas classique, la fdc est obtenue grâce au Corollaire 1.2.1. Puisqu'elle est dérivée de la fonction GS, la fdc satisfait également l'équation de renouvellement (1.2.15). Le corollaire suivant donne une expression sous forme de série de convolutions pour la fdc dans le cas classique.

Corollaire 1.3.2.

Garrido and Morales (2006)

Soit $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.3.1), f_{XY} , la fdc correspondante. f_{XY} est fonction de u , x_0 et y_0 et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.26). En utilisant la mesure (1.3.3), la solution de cette équation se réduit à :

$$f_{XY}(x_0, y_0 | u) = \frac{\lambda f_{X_i}(x_0 + y_0)}{(1+\theta)E_0} + \frac{1}{(1+\theta)\mu} \int_0^u f_{XY}(x_0, y_0 | u - s)(1 - F_{x_i}(s)) ds \quad u > 0 \quad (1.3.16)$$

et d'après le Corollaire 1.2.2, en utilisant la mesure (1.3.3), la solution (1.2.27) de cette équation, se réduit à :

$$f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u) = h \star \sum_{k=0}^{\infty} g^{*k}(u) \quad (1.3.17)$$

où les fonctions h et g sont définies respectivement en (1.2.28) et (1.2.29).

Preuve.

La preuve de ce corollaire est directe. C'est une conséquence du Corollaire 1.2.2 dans lequel il suffit d'utiliser la mesure (1.3.3) pour que h et g définies respectivement en (1.2.28) et (1.2.29) se simplifient en :

$$h(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} 1 - F_{X_i}(s) ds \quad (1.3.18)$$

et

$$g(u) = \frac{\lambda}{c} [1 - F_{X_i}(u)] \quad (1.3.19)$$

et qu'ainsi, (1.2.26) se réduise à (1.3.16), et la solution (1.2.27) à (1.3.18).

Il existe autant de variantes du modèle classique qu'il existe de distributions de pertes. Or dans ce vaste choix de distributions, il n'existe qu'un seul cas où l'on peut extraire une expression analytique fermée et facile à calculer : lorsque les pertes individuelles suivent une distribution Exponentielle, cas que nous voyons dans l'exemple suivant. Par la suite, le prochain exemple sera développé avec la distribution Paréto qui est fréquemment utilisée dans l'industrie.

1.3.3. Exemple : cas exponentiel

Un exemple fréquemment étudié dans la littérature est celui où la distribution des X_i suit une loi exponentielle. Très tôt, Cramér (1930) trouve une formule analytique pour la probabilité ultime de ruine de ce modèle. On retrouve des démonstrations plus récentes et détaillées de ce résultat dans DeVlyder (1996) et Klugman et al. (2004).

Lorsque la distribution des pertes individuelles suit une loi exponentielle, i.e. $F_{X_i}(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$, et $E[X_i] = \mu$, les fonctions de la Définition

1.1.3 prennent les formes suivantes. La mesure de Lévy s'écrit :

$$dQ(y) = q(y)dy = \lambda f_{X_i}(y)dy = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad (1.3.20)$$

et on obtient

$$E_0 = \lambda\mu \quad (1.3.21)$$

$$M(y) = \frac{\int_0^y e^{-\frac{s}{\mu}} ds}{\mu} = 1 - e^{-\frac{y}{\mu}} = F_{X_i}(y) \quad (1.3.22)$$

$$(1.3.23)$$

1.3.3.1. *La probabilité de ruine dans le cas exponentiel*

Théorème 1.3.1. Résultat de Cramér (1930)

Si $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de surplus comme défini en (1.2.1), et que la distribution des pertes individuelles suit une loi exponentielle de moyenne μ , i.e. $F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ alors la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ pour ce processus, étant donné un surplus initial $U(0) = u$, devient

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left[-\frac{\theta u}{\mu(1 + \theta)}\right] \quad (1.3.24)$$

Preuve. *c.f. pp. 237-238, Ch.8 Loss Models.*

Il est clair que, pour le processus de Poisson composé avec la distribution Exponentielle, on peut également dériver une expression pour $\psi(u)$. En effet, puisque ce processus est un subordonateur, il suffit d'utiliser, dans le Corollaire 1.3.1, la mesure (1.3.20) et la fonction (1.3.22), et alors (1.3.12) devient :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{u}{\mu}}\right)^{*k}\right) (u) \quad (1.3.25)$$

1.3.3.2. La fonction de densité conjointe dans le cas exponentiel

On procède à l'application du Corollaire 1.3.2 pour dériver une expression pour la *fdc*. Toutefois, notons que Dickson (1992) donne une formule équivalente à celle que nous dérivons pour la *fdc* dans le cas Exponentiel. Son approche n'est pas du tout basée sur la fonction GS.

Pour obtenir notre résultat il suffit d'utiliser la mesure (1.3.20) dans le Corollaire 1.3.2, et (1.3.17) devient :

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{e^{-(x_0+y_0)/\mu}}{\theta\mu^2} \mathbb{I}_{\{[0;x_0]\}} \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k (1 - e^{-u/\mu})^{\star k} \quad (1.3.26)$$

Il existe une autre distribution fréquemment utilisée dans l'industrie et pour laquelle nous trouvons les équations spécifiques dérivées du modèle classique. Toutefois ces équations ne s'expriment pas sous forme finie. L'exemple suivant développe le cas d'une telle distribution pour les pertes individuelles : la loi de Paréto.

1.3.4. Exemple : cas Paréto

Lorsque la distribution X_i suit une loi Paréto, on peut, dériver des expressions du modèle classique général pour la probabilité ultime de ruine et la *fdc*. Ces expressions nous serviront pour la simulation.

Lorsque la distribution des pertes individuelles suit une loi Paréto, i.e. $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\Theta}{x+\Theta}\right)^\alpha$, $f_{X_i}(x) = \frac{\alpha\Theta^\alpha}{(x+\Theta)^{\alpha+1}}$, $x > 0$, et $\mu = \frac{\Theta}{\alpha-1}$, les fonction de la Définition 1.1.3 prennent les formes suivantes. La mesure de Lévy s'écrit :

$$dQ(y) = q(y)dy = \lambda f_{X_i}(y)dy = \frac{\lambda\alpha\Theta^\alpha}{(y+\Theta)^{\alpha+1}} dy \quad (1.3.27)$$

et on obtient,

$$E_0 = \lambda\mu = \frac{\lambda\Theta}{\alpha-1} \quad (1.3.28)$$

$$M(y) = \lambda \left(1 - \left(\frac{\Theta}{y + \Theta} \right)^{\alpha-1} \right) \quad (1.3.29)$$

1.3.4.1. La probabilité de ruine dans le cas Paréto

On peut dériver une expression pour $\psi(u)$ dans le cas classique Paréto, de la même manière que nous l'avons fait dans le cas exponentiel. En effet, il suffit d'utiliser, dans le Corollaire 1.3.1, la mesure (1.3.27) et la fonction (1.3.29), et alors (1.3.12) devient :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k \left(1 - \left[\lambda \left(1 - \left(\frac{\Theta}{u + \Theta} \right)^{\alpha-1} \right) \right] \right)^{\star k} \quad (1.3.30)$$

Cette série de convolutions ne se réduit pas à une expression simple, comme dans le cas Exponentiel avec le résultat de Cramér (1930). Elle est facilement calculable pour les premiers exposants de la série de convolutions mais devient rapidement très lourde à évaluer lorsque les exposants augmentent. Plutôt que d'évaluer une telle série, nous verrons dans le chapitre 3 qu'elle a une interprétation probabiliste qui nous servira à réaliser des simulations de manière plus rapide et efficace que le calcul direct.

1.3.4.2. La fonction de densité conjointe dans le cas Paréto

Pour la *fdc* aussi, il est possible de dériver une formule en série de convolutions comme nous l'avons fait dans le cas Exponentiel. En utilisant la mesure (1.3.27) dans le Corollaire 1.3.2, la solution de cette équation devient :

$$f_{XY}(x_0, y_0 | u) = \frac{(\alpha - 1)\alpha\Theta^\alpha}{\Theta\theta(x_0 + y_0 + \Theta)^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) \quad (1.3.31)$$

$$\star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k \left(1 - \left(\frac{\Theta}{u + \Theta} \right)^{\alpha-1} \right)^{\star k}$$

Tout comme l'expression de la probabilité ultime de ruine, la série de convolutions pour la *fdc* est facilement calculable pour les premiers exposants de la série de convolutions, et devient rapidement très lourde à évaluer lorsque les exposants augmentent. A nouveau, nous verrons dans le chapitre 3 comment utiliser cette expression pour la simulation plutôt que le calcul direct.

1.4. LE MODÈLE AVEC SUBORDINATEUR GAMMA

Le processus Gamma a été proposé par Dufresne et al. (1991). Il fait partie de la classe des subordonateurs, tout comme le processus de Poisson composé. Dans ce modèle, $S(t)$ est construit comme une limite de Processus de Poisson. Ses incréments sont indépendants, stationnaires et non-négatifs. Il englobe le modèle classique où $S(t)$ est un processus de Poisson composé dont les incréments sont eux-mêmes indépendants, stationnaires et non négatifs, et dont la distribution des pertes individuelles suit une loi Gamma. Ce modèle est caractérisé par l'occurrence d'un nombre infini de réclamations dans chaque intervalle de temps considéré. Cependant, le nombre de réclamations d'un montant supérieur ou égal à $\epsilon > 0, \epsilon \in R_+$, est lui même fini et suit un processus de Poisson. Toutefois, le modèle de surplus déterminé par un processus Gamma modélise les pertes différemment du modèle classique. En effet, dans ce dernier, les pertes sont modélisées individuellement, puis agrégées dans une somme dont le nombre d'éléments est lui même aléatoire (processus de Poisson composé). Le subordonateur Gamma, traite les pertes d'une manière plus globale. En réalité, il possède une infinité de sauts, et donc dépasse la notion de pertes individuelles. Il s'agit d'une seule variable de pertes agrégées qui dépend de la mesure de Lévy du subordonateur. Celle-ci gouverne tant bien la fréquence des sauts que leur intensité (l'équivalent de la sévérité des réclamations individuelles). Le modèle de surplus qui en résulte est donc une extension naturelle du modèle classique, grâce auquel ont été dérivés les résultats sur la probabilité ultime de ruine et la *fdc*. Le processus de surplus

déterminé par un processus Gamma est de la forme :

$$U(t) = u + ct - S_G(t) \quad (1.4.1)$$

où $S_G(t)$ est le processus Gamma qui modélise les pertes. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le processus Gamma est un subordonateur, et son exposant de Laplace est

$$\Psi(s) = a \ln \left(1 + \frac{s}{b}\right) \quad a, b, s > 0 \quad (1.4.2)$$

Dufresne et al. (1991) montrent que, comme dans le modèle classique, lorsque le surplus initial est nul, i.e. $u = 0$, on retrouve le résultat concernant $\psi(0)$:

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} \quad (1.4.3)$$

Les fonctions introduites dans la Définition 1.1.3 prennent, dans le cas du subordonateur Gamma de paramètres (a, b) , les formes suivantes. La mesure de Lévy s'écrit

$$dQ(x) = q(x)dx = ax^{-1}e^{-bx} dx \quad (1.4.4)$$

et on obtient

$$E_0 = \int_0^\infty \bar{Q}(s)ds = \frac{a}{b} \quad (1.4.5)$$

$$\begin{aligned} M(y) &= \frac{\int_0^y \bar{Q}(s)ds}{\int_0^\infty \bar{Q}(t)dt} \\ &= \frac{\int_0^y \int_s^\infty ax^{-1}e^{-bx} dx ds}{\frac{a}{b}} \\ &= 1 - e^{-bx} bx E_1(bx) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

où $E_1(x)$ est la fonction intégrale exponentielle définie par $E_1(x) = \int_x^\infty t^{-1}e^{-t}dt$.

Le nombre de sauts dont la valeur est supérieure à une quantité ϵ , suit un processus de Poisson de moyenne $\int_\epsilon^\infty dQ(x)$

1.4.1. La probabilité ultime de ruine dans le cas du subordonateur Gamma

Dans le cas plus général où le surplus initial n'est pas nul, on peut écrire l'équation de renouvellement pour ce modèle, et dériver sa probabilité ultime de ruine. Le corollaire suivant qui découle directement du corollaire (1.2.1) et des fonctions de la mesure du subordonateur, donne l'équation de renouvellement pour la probabilité ultime de ruine et sa solution dans le cas du subordonateur Gamma.

Corollaire 1.4.1. $\psi(u)$ dans le modèle avec subordonateur Gamma

Garrido and Morales (2006)

Soit $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.4.1), $\psi(u)$, la probabilité ultime de ruine correspondante. $\psi(u)$ est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.19). En utilisant la mesure (1.4.4) dans le Corollaire 1.2.1, (1.2.19) se simplifie ici en :

$$\psi(u) = \frac{e^{-bu} - buE_1(bu)}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u - s) bE_1(bs) ds \quad (1.4.7)$$

et la solution (1.2.20) se réduit alors à :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k \left(1 - (1 - e^{-bx} bx E_1(bx))^{*k} \right) (u) \quad (1.4.8)$$

Preuve.

La preuve de ce résultat est assez directe. Il s'agit d'injecter, dans le Corollaire 1.2.1, les expressions particulières des fonctions de la mesure du subordonateur Gamma.

Pour ce modèle, Dufresne et al. (1991) montrent que la probabilité ultime de ruine évaluée pour un surplus initial nul s'écrit comme dans le cas Classique :

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (1.4.9)$$

1.4.2. La fonction de densité conjointe dans le cas du subordonateur Gamma

La fdc est également obtenue à partir de la fonction GS, elle satisfait, à ce titre, à une équation de renouvellement comme (1.2.15). En utilisant la mesure du processus Gamma (1.4.4) dans le Corollaire 1.2.2, on peut exprimer l'équation de renouvellement et sa solution pour f_{XY} d'une manière plus simple que les formes générales (1.2.26) et (1.2.27). On retrouve dans Garrido and Morales (2006) une forme pour la fdc .

Corollaire 1.4.2.

Garrido and Morales (2006)

Soit $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.4.1), f_{XY} , la fdc correspondante. Pour tout (x_0, y_0) fixé, f_{XY} est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.26). En utilisant la mesure (1.4.4) dans le Corollaire 1.2.2, l'équation de renouvellement (1.2.26) se réduit ici à :

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{ae^{-b(x_0+y_0)}}{(x_0 + y_0)E_0(1 + \theta)} \mathbb{I}_{\{[0;x_0]\}}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(x_0, y_0|u - s) dM(s) \quad (1.4.10)$$

et la solution (1.2.27) devient alors,

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{ae^{-b(x_0+y_0)}}{(x_0 + y_0)E_0\theta} \mathbb{I}_{\{[0;x_0]\}}(u) \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - e^{bu} b u E_1(bu))^{*k} \quad (1.4.11)$$

Preuve.

La preuve de ce résultat est directe. On remplace dans le Corollaire 1.2.2, les expressions particulières des fonctions de la mesure du subordonateur Gamma.

Il est intéressant de remarquer que Dickson and Waters (1993) avaient déjà étendu les résultats de Dufresne et al. (1991) et obtiennent des formules pour la probabilité de ruine à temps fini pour la fdc dans le cas du processus Gamma.

On aborde le dernier processus de cette section, le processus GIG. Il est très attrayants comme processus pour modéliser les pertes en cas de ruine, puisqu'il permet de rendre compte de l'existence de hauts montants de pertes grâce à une distribution dont la queue droite se révèle assez épaisse

1.5. LE MODÈLE AVEC SUBORDINATEUR GAUSSIEN INVERSE GÉNÉRALISÉ (GIG)

Les processus GIG forment une vaste famille de subordonateurs au sein des processus de Lévy. A l'instar des Processus de Poisson composé et Gamma, ses incréments sont indépendants, stationnaires et non-négatifs. Il possède une infinité de petits sauts, ce qui le rend attrayant pour modéliser un surplus financier où on désire rendre compte de plus de risque et d'incertitude, au même titre que le subordonateur Gamma. De plus ses accroissements suivent une distribution GIG. Sa densité, qui dépend de trois paramètres et qui repose sur un support positif, est donnée par

$$f_{GIG}(x) = \frac{(\gamma/\kappa)^\beta}{2K_\beta(\kappa\gamma)} x^{\beta-1} e^{-\frac{1}{2}(\kappa^2 x^{-1} + \gamma^2 x)} \quad x > 0. \quad (1.5.1)$$

Pour plus de détails sur cette famille de distribution, Jorgensen (1982) a exhaustivement étudié les distributions GIG, et pour une brève introduction à cette famille, le lecteur peut se référer à Morales (2004).

Le processus de surplus obtenu est de la forme :

$$U(t) = u + ct - S_{GIG}(t) \quad (1.5.2)$$

où $S_{GIG}(t)$ est le processus de pertes agrégées de type gaussien inverse généralisé (GIG).

Les trois paramètres qui caractérisent ce processus sont β , γ et κ , et son exposant de Laplace est donné par

$$\Psi(s) = -\ln \left[\frac{K_\beta(\kappa\gamma\sqrt{1 + \frac{2s}{\gamma^2}})}{K_\beta(\kappa\gamma)(1 + \frac{2s}{\gamma^2})^{\beta/2}} \right] \quad (1.5.3)$$

Dans le cas du processus GIG, les fonctions de la Définition 1.1.3 prennent les formes suivantes. La mesure du processus GIG de paramètres (β, γ, κ) s'écrit :

$$dQ(x) = q_{GIG}(x)dx = \frac{1}{x}[\kappa^2 \int_0^\infty e^{-xt} g_\beta(2\kappa^2 t) dt] e^{-\gamma^2 x/2} dx \quad (1.5.4)$$

et

$$E_0 = \int_0^\infty \bar{Q}(s) ds = \frac{\kappa K_{1+\beta}(\kappa\gamma)}{\gamma K_\beta(\kappa\gamma)} \quad (1.5.5)$$

où J et N sont des fonctions de Bessel modifiées

$$g_\beta(y) = \left[\frac{\pi^2}{2} y [J_{|\beta|}^2(\sqrt{y}) + N_{|\beta|}^2(\sqrt{y})] \right] \quad (1.5.6)$$

et $E_1(x)$ est la fonction intégrale exponentielle définie par $E_1(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt$. Avec $\beta \in \mathbb{R}$, $\kappa, \gamma > 0$ et K_β la fonction de Bessel du troisième type.

On ne peut pas dériver d'expression analytique finie pour la fonction M équivalente aux autres fonctions pour les exemples précédents, (1.3.8), (1.3.22), (1.3.29) ou encore (1.4.6). On la notera tout de même M_{GIG} . Toutefois, lorsque $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$ le processus GIG se réduit respectivement à un processus gaussien inverse (IG) et un processus inverse gaussien réciproque (RIG) pour lesquels nous dérivons $\psi(u)$ et f_{XY} dans les 2 exemples suivants, puisque dans ces deux cas, la fonction M_{GIG} prend respectivement les formes finies M_{IG} et M_{RIG} .

1.5.1. La probabilité de ruine dans le cas du subordonateur GIG

Comme nous l'avons déjà dit, les formules pour $\psi(u)$ dans le cas GIG ne prennent pas de formes finies. On peut quand même dériver, à partir de l'équation (1.2.19) des formules générales pour ce modèle, qui nous serviront dans les exemples suivant de cette section. Le corollaire suivant donne l'équation de renouvellement pour $\psi(u)$ et sa solution dans le modèle (1.5.2).

Corollaire 1.5.1. $\psi(u)$ dans le cas du subordonateur GIG

Garrido and Morales (2006)

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.5.2), et $\psi(u)$, la probabilité ultime de ruine correspondante. $\psi(u)$ est fonction de u et satisfait

l'équation de renouvellement (1.2.26). En utilisant la mesure (1.5.4), la solution de cette équation se réduit à :

$$\psi(u) = \frac{1 - M_{GIG}(u)}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u - x) dM_{GIG}(x) \quad u > 0 \quad (1.5.7)$$

et la solution (1.2.20) se simplifie ici en :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - M_{GIG}^{*k})(u) \quad (1.5.8)$$

Preuve. La preuve de ce corollaire est directe. C'est une conséquence du Corollaire 1.2.1 dans lequel il suffit d'injecter la mesure (1.5.4) pour que (1.2.19) se réduise à (1.5.7), et la solution (1.2.20) à (1.5.8).

Cette solution est difficile à calculer numériquement puisque M_{GIG} n'a pas de forme fermée. En effet, on voit clairement que la mesure de Lévy du processus GIG donnée par l'équation (1.5.4) est impossible à évaluer sans fixer ses paramètres. $\psi(u)$ devient donc par conséquent impossible à exprimer sous forme analytique fermée.

Notons que, dans le cas GIG, on retrouve le même résultat que dans les cas Classique et Gamma, pour la probabilité ultime de ruine (Morales (2004)) évaluée pour un surplus initial nul comme,

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (1.5.9)$$

1.5.2. La fonction de densité conjointe dans le cas du subordonateur GIG

Tout comme dans le cas de $\psi(u)$ on dérive ici une forme générale pour exprimer f_{XY} dans le modèle (1.5.2). En utilisant la mesure du processus GIG (1.5.4) dans le Corollaire 1.2.2 on peut exprimer l'équation de renouvellement et sa solution pour f_{XY} d'une manière plus simple que les formes générales (1.2.26) et (1.2.27). Le corollaire suivant, qui est une conséquence directe du Corollaire 1.2.2, donne ces résultats.

Corollaire 1.5.2. f_{XY} dans le cas du subordonateur GIG

Garrido and Morales (2006)

Soient $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de surplus comme défini en (1.5.2), et f_{XY} , la probabilité ultime de ruine correspondante. Pour tout (x_0, y_0) fixé, f_{XY} est fonction de u et satisfait l'équation de renouvellement (1.2.26). En utilisant la mesure (1.5.4), la solution de cette équation se réduit à :

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{GIG}(x_0 + y_0)}{E_0(1 + \theta)} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(x_0, y_0|u - s) dM_{GIG}(s) \quad (1.5.10)$$

et la solution (1.2.27) devient alors

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{GIG}(x_0 + y_0)}{E_0\theta} \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k M_{GIG}^{\star k}(u) \quad 0 \leq u < x_0 \quad (1.5.11)$$

Preuve. La preuve de ce corollaire est directe. C'est une conséquence du Corollaire 1.2.2 dans lequel il suffit d'injecter la mesure (1.5.4) pour que (1.2.26) se réduise à (1.5.10), et la solution (1.2.27) à (1.5.8).

1.5.3. Exemple : Le cas GIG pour $\beta = -\frac{1}{2}$, gaussien inverse (IG)

La famille des processus IG est un cas particulier des processus GIG. Au même titre que les distributions GIG, les distributions IG sont infiniment divisibles (c.f. Barndorff-Nielsen et al. (1977)) et permettent donc de définir un processus de Lévy positif. Les accroissements de ce processus sont donc eux aussi stationnaires, indépendants et non-négatifs, et suivent une distribution IG. Enfin il est attrayant pour la modélisation financière puisqu'il possède une infinité de petits sauts. Lorsque, $\beta = -\frac{1}{2}$, le processus GIG se réduit à un processus IG, qui lui-même est une extension naturelle du processus Gamma. Dans ce cas, la fonction $M_{GIG}(u) = \frac{\int_0^u \bar{Q}(s) ds}{\int_0^\infty \bar{Q}(s) ds}$ peut s'exprimer sous forme fermée M_{IG} , lorsqu'on utilise la mesure (1.5.4) avec $\beta = -\frac{1}{2}$, dans la Définition 1.1.3. On obtient alors

le résultat suivant (c.f. Garrido and Morales (2006)),

$$M_{IG}(x) = 1 - \frac{\gamma}{\kappa} \left\{ \frac{2\kappa\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi\gamma} \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{1}{2}\right) - \frac{\kappa\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \left[\frac{2}{\gamma} \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{3}{2}\right) - \gamma x \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{1}{2}\right) \right] \right\} \quad (1.5.12)$$

De plus on peut exprimer E_0 , l'espérance du processus au temps $t = 1$, dénotée ici $E_{0_{IG}}$ en suivant la démarche décrite dans Morales (2003) :

$$E_{0_{IG}} = \frac{\kappa}{\gamma} \quad (1.5.13)$$

1.5.3.1. La probabilité de ruine dans le cas gaussien inverse (IG)

On peut donc dériver une forme finie pour $\psi(u)$ dans le cas IG(Garrido and Morales (2006), Morales (2004)). En utilisant la fonction M_{IG} dans le Corollaire 1.5.1, (1.5.7) devient :

$$\psi(u) = \frac{1 - M_{IG}(u)}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u - x) dM_{IG}(x) \quad u > 0 \quad (1.5.14)$$

et en utilisant la mesure de Lévy (1.5.4) avec $\beta = -\frac{1}{2}$ la solution (1.2.20) se simplifie ici en :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - M_{IG}^{*k})(u) \quad (1.5.15)$$

1.5.3.2. La fonction de densité conjointe dans le cas IG

La fonction de densité conjointe pour le modèle avec subordonateur IG, s'obtient, comme dans les cas précédents, à l'aide du Corollaire 1.5.2 dérivé du Corollaire 1.2.2. On retrouve le résultat suivant dans Garrido and Morales (2006). En utilisant la mesure (1.5.4) avec $\beta = -\frac{1}{2}$, l'équation (1.5.10) se réduit à :

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{IG}(x_0 + y_0)}{E_{0_{IG}}(1 + \theta)} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(x_0, y_0|u - s) dM_{IG}(s) \quad (1.5.16)$$

et la solution (1.5.11) devient alors

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{IG}(x_0 + y_0)}{E_{0_{IG}}\theta} \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k M_{IG}^{*k}(u) \quad (1.5.17)$$

1.5.4. Exemple : Le cas GIG pour $\beta = \frac{1}{2}$, inverse gaussien réciproque (RIG)

Lorsque $\beta = \frac{1}{2}$, on se trouve dans un autre cas intéressant où il est possible d'exprimer M_{GIG} sous la forme fermée M_{IG} , et ainsi dériver la probabilité ultime de ruine pour le processus GIG obtenu, appelé inverse gaussien réciproque. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans Morales (2003) et Garrido and Morales (2006). En effet, lorsqu'on utilise la mesure (1.5.4) du processus GIG avec $\beta = \frac{1}{2}$ dans la Définition 1.1.3, alors la fonction $M_{GIG}(u) = \frac{\int_0^u \bar{Q}(s) ds}{\int_0^\infty \bar{Q}(s) ds}$ se simplifie en

$$M_{RIG}(x) = 1 - \frac{\gamma^2}{\kappa\gamma + 1} \left\{ \frac{2\kappa\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi\gamma} \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{1}{2}\right) - \frac{\kappa\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \left[\frac{2}{\gamma} \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{3}{2}\right) - \gamma x \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; \frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma^2}{2}x} - x \bar{\Gamma}\left(\frac{\gamma^2}{2}x; 0\right) \right] \right\} \quad (1.5.18)$$

En suivant la démarche décrite dans Morales (2003), on peut également exprimer E_{0RIG} :

$$E_{0RIG} = \frac{\kappa\gamma + 1}{\gamma^2} \quad (1.5.19)$$

1.5.4.1. La probabilité de ruine dans le cas RIG

On peut donc également dériver, dans le cas RIG, une série de puissances convolutions pour $\psi(u)$ (Garrido and Morales (2006)). En utilisant la fonction M_{RIG} définie en (1.5.18) dans le Corollaire 1.5.1, (1.5.7) se réduit à :

$$\psi(u) = \frac{1 - M_{RIG}(u)}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \psi(u - x) dM_{IG}(x) \quad u > 0 \quad (1.5.20)$$

et la solution (1.5.8) se réduit alors à :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k (1 - M_{RIG}^{*k})(u) \quad (1.5.21)$$

1.5.4.2. La fonction de densité conjointe dans le cas RIG

La fonction de densité conjointe pour le modèle avec subordonateur RIG, s'obtient, comme précédemment dans le cas IG, à l'aide du Corollaire 1.5.2. Ce résultat figure dans Garrido and Morales (2006). En utilisant la mesure (1.5.4) avec $\beta = \frac{1}{2}$,

l'équation (1.5.10) se réduit à :

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{RIG}(x_0 + y_0)}{E_{0RIG}(1 + \theta)} \mathbb{I}_{\{[0; x_0]\}}(u) + \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u f_{XY}(x_0, y_0|u - s) dM_{RIG}(s) \quad (1.5.22)$$

et la solution (1.5.11) devient alors

$$f_{XY}(x_0, y_0|u) = \frac{q_{RIG}(x_0 + y_0)}{E_{0RIG}\theta} \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k M_{RIG}^{\star k}(u) \quad (1.5.23)$$

Chapitre 2

MESURES DE RISQUES

Nous abordons maintenant un autre volet de ce mémoire : les mesures de risque. Notre étude porte sur l'aspect numérique de modèles de risque déterminés par des subordonateurs, et pour souligner l'importance de telles études, on réalise des calculs de mesures de risque sur les valeurs du déficit au moment de la ruine $Y = U(\tau)$. On montre ainsi un exemple d'application directe auquel peuvent servir les valeurs simulées de $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u)$. On se rappelle que Y est une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par les équations du Chapitre 1, et qu'on obtient par simulation. Cette fonction de densité est tout ce dont on a besoin pour calculer des mesures de risque comme nous le ferons au Chapitre 4. Les mesures de risque, comme le nom l'indique, sont des indicateurs numériques qui permettent de "mesurer" différents aspects d'un risque financier. Dans le cas qui nous intéresse, on regarde la v.a. Y , i.e. le déficit au moment de la ruine d'un processus de surplus, et on en tire le plus d'information possible à partir de différentes mesures de risque, que l'on calculera sur la distribution de Y . La nature de ces informations numériques vise généralement à indiquer, par une borne inférieure, comme la $VàR$, une moyenne *Expected Shortfall* (ES , ou le déficit espéré) ou une moyenne pondérée, comme une mesure de risque spectrale, l'ampleur du déficit en cas de ruine. C'est ce risque que nous tentons de décrire à travers les mesures, dans le but, par exemple, d'exiger un capital initial u , suffisamment important pour diminuer le choc dans un scénario de ruine. Après un rappel historique sur les mesures de risque on présente la Valeur à Risque ($VàR$),

dans ses grandes lignes.

La $VàR$ est une mesure de risque très fréquemment utilisée dans divers domaines financiers. Dowd (2005) dresse un historique de l'avènement de la $VàR$ comme mesure de risque holistique pour une firme. Hull (2006) et McDonald (2006) appliquent cette mesure de risque à des produits dérivés, comme des "Futures", des options, et d'autres produits plus récents. Toutefois, la popularité de la $VàR$ est due à sa facilité de calcul et d'interprétation. Elle possède en contrepartie des désavantages que nous discuterons. Désavantages qui peuvent être corrigés en définissant d'autres mesures que nous présentons également dans ce chapitre : les mesures de risque spectrales. Ces mesures récentes et modernes, basées sur les axiomes de cohérence, d'Artzner et al. (1999), même si elles sont plus difficiles à mettre en place, possèdent des propriétés mathématiques et des interprétations qui font défaut à la $VàR$. On présentera, au total, trois mesures que nous calculerons en application dans le Chapitre 4, pour montrer l'importance et l'utilité de la fdc . Une des applications les plus importantes dans l'industrie est l'estimation du capital minimal requis, "*capital requirement*", d'une compagnie d'assurance par exemple. En effet, celle-ci doit satisfaire aux exigences d'organismes de régulation financière, en montrant que leur surplus financier est "peu risqué". Car pour pouvoir opérer les firmes et institutions financières qui se portent garantes de l'argent déposé par leurs clients dans leurs comptes, ne doivent pas s'exposer à un risque qui ne serait "pas maîtrisable en cas de scénario catastrophe". Pire, un risque qui, à priori semble "quasiment inévitable". Dans notre cas, en considérant les modèles de risque pour un surplus, "pas maîtrisable en cas de scénario catastrophe" se traduit par une distribution de Y dont la moyenne serait très élevée et qui vouerait la compagnie à la faillite, sans aucune chance de se relever. Et "quasiment inévitable" se traduit par une probabilité ultime de ruine de ruine trop élevée. Une des manières de satisfaire à ces exigences, est de pouvoir trouver, dans le cas de nos modèles, un niveau de surplus initial (le "*capital requirement*") qui indique une probabilité ultime de ruine "acceptable" ou encore un déficit au moment de la ruine, Y , tolérable pour les organismes de régulation. Afin de

déterminer le niveau de ce surplus initial, une compagnie possédant un surplus financier modélisé ou modélisable par un des modèles présentés au chapitre 1, doit pouvoir associer une mesure de risque -fiable- au scénario de ruine, pour donner une idée du risque encouru dans le scénario où la ruine se produirait réellement. Les mesures de risque disponibles pour répondre aux exigences des organismes sont diverses et variées, mais souvent le choix de la mesure dépend plus de sa simplicité de calcul que de la précision offerte.

On se propose donc de présenter ces diverses mesures de risque. Nous commençons par un bref rappel historique des mesures utilisées au fil du temps dans l'industrie, jusqu'à l'avènement de la *VàR*. Puis nous présentons le cadre général des mesures de risque cohérentes au sein duquel ont été développées les mesures de risque spectrales.

2.1. HISTORIQUE

Depuis les années 1950, la croissance des marchés financiers, le volume grandissant des transactions et la diversité sans cesse croissante des instruments financiers disponibles, n'ont laissé d'autre alternative aux gestionnaires de firmes que de commencer à gérer le risque de leur firme à l'échelle de toute la firme. Même si cette idée était présente avant les années 1950, elle n'avait que des outils rudimentaires, et aujourd'hui tout à fait désuets, pour permettre, aux gestionnaires qui le souhaitaient, de se doter d'indicateurs du risque encouru par certains actifs de leurs portefeuilles. Petit à petit, des instruments de plus en plus élaborés, chacun avec leurs forces et leurs faiblesses, sont apparus dans la pratique de gestion de risque jusqu'à la *VàR*. On mentionne brièvement (c.f. Dowd (2005)) les principales étapes qui ont précédé l'utilisation de la *VàR* : l'analyse GAP, l'analyse de durée ("Duration"), et finalement, l'analyse de scénarios. Notons que ces outils ne peuvent pas systématiquement être directement appliqués à notre étude, mais nous les citons afin de replacer historiquement l'apparition de la *VàR*. Chacune de ces étapes est caractérisée par le besoin de quantifier le risque associée à une

facette particulière de la firme. L'idée de généraliser l'observation du risque à l'ensemble de la firme donner naissance par la suite à la *VàR*.

L'analyse GAP

Cette approche utilisée fréquemment de nos jours dans différents milieux se base sur le concept d'écart de performance entre deux situations. Cependant dans le cas de l'analyse et la gestion des risques de marchés, l'application reste bien rudimentaire. Elle permet de donner une idée grossière du risque encouru, sur une période à choisir, par un portefeuille d'actifs et/ou de passifs, découlant de l'exposition aux risques des taux d'intérêt. Le GAP en tant que tel se trouve être l'écart entre le taux réalisé sur les actifs sensibles aux taux d'intérêt, r_a , et celui réalisé sur les passifs sensibles à ces mêmes taux, r_b :

$$GAP = r_a - r_b \quad (2.1.1)$$

L'exposition au risque est alors mesurée par la variation dans les revenus d'intérêts nets, ΔNII , comme tel :

$$\Delta NII = \Delta r(GAP) \quad (2.1.2)$$

où Δr représente une variation dans les taux d'intérêt.

Cette mesure, comme on peut le constater, est très simple. Trop simple. Elle ne donne d'indication que sur le revenu net et néglige toute information pertinente liée à la valeur des actifs ou passifs concernés.

L'analyse de Duration

L'analyse de la Duration (Duration Macaulay) est une autre méthode permettant de se faire une idée du risque découlant de l'exposition aux taux d'intérêt. Dans le contexte de paiements liés à un bond, c'est une moyenne de taux d'intérêt pondérés par la valeur présente des paiement générés par ce bond. Cette moyenne est un bon outil pour déterminer la sensibilité du bond, i.e. la variation dans la valeur du bond, qui surviendrait suite à une variation dans le taux de rendement, i.e. un taux d'intérêt. Cet outil est très adapté aux instruments financiers dits à revenu fixe, mais reste d'une efficacité insuffisante à l'échelle de la firme, de ses

différents portefeuilles et de ses différentes activités.

L'analyse de scénarios

L'analyse de scénarios est un premier pas vers notre objectif de gestion de risque harmonisé à l'échelle d'une firme. C'est une approche très subjective à qui l'adopte, et de ce point de vue, peut être fortement critiquée, cependant c'est une très bonne première approche vers notre objectif. Les grandes lignes de l'analyse de scénarios peuvent se résumer comme suit : En sélectionnant un set de scénarios (paramètres à faire varier : taux d'intérêt, valeur des actifs etc...) on peut déterminer, à l'échelle de la firme les pertes éventuelles en cas de 'mauvais scénarios'. Bien entendu, la projection des valeurs dans le futur, repose sur des hypothèses subjectives et dont la pertinence dépend du talent, du bon sens, et souvent de l'intuition du gestionnaire.

Le cadre moyenne-variance

L'approche "moyenne-variance", utilise la moyenne d'une distribution de profit, comme une estimation de rendement, et la variance de cette distribution comme la volatilité, ou le risque, associé à ce rendement. C'est une approche très utilisée dans la pratique actuarielle, et sur laquelle repose plusieurs principes simples d'assurance-vie par exemple (Bowers et al. (1997)). La variance comme indicateur de risque, est alors un indicateur statique et peu utile, surtout comparé à la *VàR*.

Après qu'elles aient été utilisées dans l'industrie, ces méthodes assez rudimentaires ont fait place à la *VàR* (Valeur à Risque), une révolution dans le domaine de la gestion de risque.

2.2. LA VALEUR À RISQUE

La Valeur à Risque, est une approche aujourd'hui très répandue et très appréciée pour sa flexibilité. Pourtant la théorie qui supporte cette application indique

bien, tout comme le démontre les résultats pratiques, que la VaR ne s'inscrit pas dans le cadre théorique développé récemment pour les mesures de risque plus modernes. On sait (Dowd (2005)) qu'elle n'est souvent pas valide, dans la majorité des cas où elle est utilisée. Rappelons que nous cherchons un moyen de se doter d'un indicateur de risque à l'échelle d'une firme. C'est ce que fait la VaR . Elle représente un quantile de la distribution des pertes possibles pour une firme. Si celle-ci a une position financière sur des produits dérivés, ou dans notre cas des engagement envers ses assurés, la valeur de la position est une variable aléatoire dont le risque associé peut être décrit par la VaR . Ainsi en lisant la VaR , on peut estimer, avec un certain degré de confiance, par exemple 95% , que la perte minimum à laquelle la firme est exposée pour sa position, parmi les 5% des pertes les plus élevées est égale à la VaR . On peut voir un exemple de VaR à la figure 2.1, tiré d'une distribution normale $N(0, 1)$.

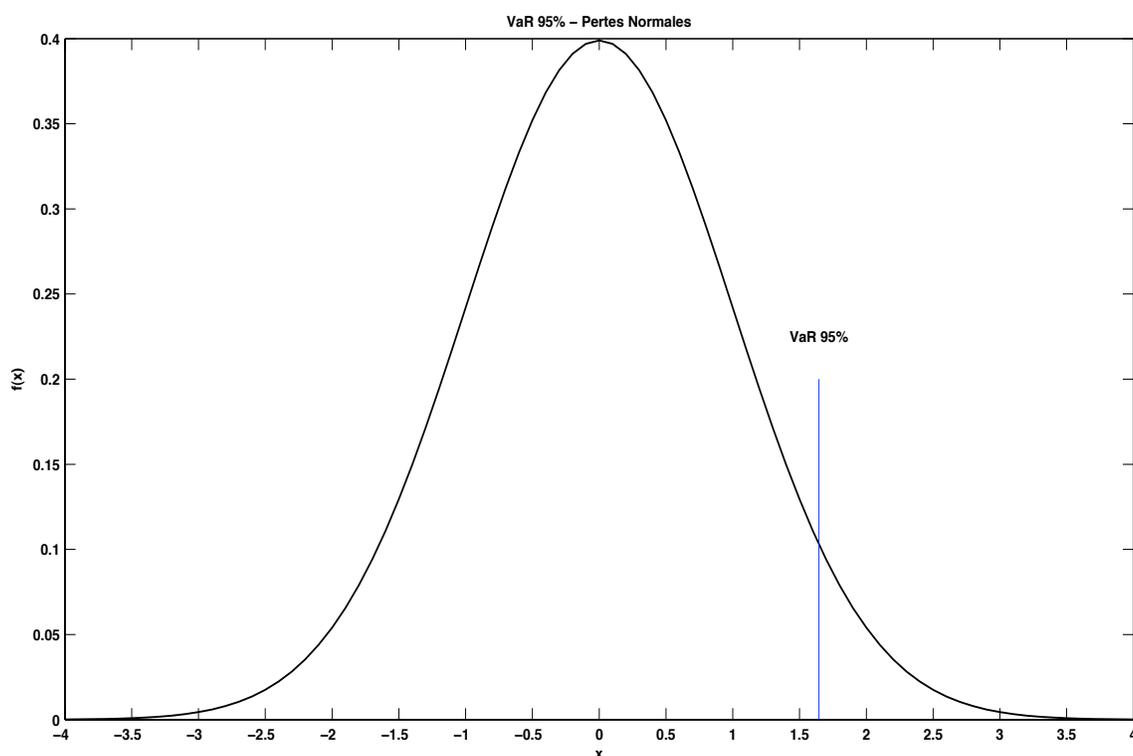


FIGURE 2.1. VaR 95% pour une distribution de pertes $N(0, 1)$

Plus formellement, pour un certain degré de confiance, α , et pour un certain horizon de temps T , on définit $VaR(\alpha, T)$ par

$$VaR(\alpha, T) = -q_p \quad (2.2.1)$$

où p représente le pourcentage des pires pertes possibles, i.e. $p = 1 - \alpha$, et q_p , le p -quantile associé à la distribution des profits. De manière équivalente si on travaille avec une distribution de pertes et non de profits (*pertes* = $-profits$), la VaR devient :

$$VaR(\alpha, T) = q_p \quad (2.2.2)$$

Ainsi on peut calculer la VaR pour toute distribution de pertes à l'échelle d'une firme, et la mesure de risque obtenue est une mesure de risque globale qui parle facilement à qui l'utilise, puisqu'elle est exprimée en dollars de pertes.

Exemple 2.2.1. *Considérons une position financière de 1,000,000.00\$ pour la compagnie d'assurance ABC. L'horizon de temps est d'une journée et la distribution de profits/pertes pour la journée du lendemain est distribuée selon une loi Normale (0,1). L'unité monétaire est le million de dollars. Alors d'après l'équation (2.2.1) la $VaR(0.95, 1)$ est égale à*

$$VaR(0.95, 1) = -q_{0.05}, \quad (2.2.3)$$

où $q_{0.05}$ est le 5^{ème} centile de la distribution Normale de moyenne 0 et de variance 1, tel que

$$\Phi(q_{0.05}) = 0.05 \iff q_{0.05} = -1.645. \quad (2.2.4)$$

$\Phi(x)$ représente la fonction de répartition Normale Standard. En conclusion, la compagnie ABC, est exposée à un risque sur sa position, qu'on peut décrire ainsi : Demain, il y a 95% de chance de finir la journée avec une perte plus grande que 1,645,000\$.

Ainsi cette nouvelle approche offre un indicateur probabiliste, qui se démarque des indicateurs classiques du cadre "moyenne-variance". L'approche "moyenne-variance", pour la résumer, utilise la moyenne d'une distribution de profit, comme une estimation de rendement, et la variance de cette distribution comme la volatilité, ou le risque, associé à ce rendement. La variance comme indicateur de risque,

est alors un indicateur statique et peu utile comparé à la $VàR$. Un élément majeur qui joue en faveur de la $VàR$: sa flexibilité. En effet, nous l'avons mentionné, la $VàR$ peut être calculée pour n'importe quelle distribution de pertes, qu'elle soit empirique, simulée ou issue d'une famille de distribution connues, i.e. loi Normale, loi Paréto, ou toute autre distribution paramétrique.

2.2.1. Calcul de la $VàR$

Afin de calculer un quantile d'une distribution, il nous faut d'abord connaître cette distribution. Or dans bien des cas, la distribution des pertes d'une firme est inconnue ou alors difficile à estimer. Si cette distribution est une distribution paramétrique, le calcul de la $VàR$ ne pose pas de problème. Nous sommes intéressés, dans ce mémoire, par la distribution de la variable du déficit au moment de la ruine Y , dont la distribution est donnée par une série de puissances de convolution, dans le Chapitre 1. Cette distribution n'est pas possible à exprimer sous forme analytique, comme une distribution paramétrique, mais nous pouvons toutefois la simuler, comme nous le démontrons dans le Chapitre 3, et les résultats numériques issus de la simulation nous permettront de calculer la $VàR$ (et d'autres mesures) pour Y . C'est à dire pour décrire le risque associé à un modèle de surplus comme ceux que nous étudions dans ce mémoire.

Notons qu'il y a d'office des imperfections liées à l'utilisation d'une distribution empirique estimée. En effet, la vraie $VàR$ pour une distribution de données réelles observées, ne peut être obtenue que si l'on connaît la vraie distribution, or il faudrait une infinité de données pour connaître cette vraie distribution. Donc la $VàR$ estimée que nous aurons calculée ne sera qu'une approximation de la vraie $VàR$, et la variance de cet estimateur, ne sera réduite que par l'augmentation du nombre de données disponible pour approximer la distribution, c-a-d, par l'augmentation du nombre de simulations. Ceci reste toutefois une considération très théorique qui affecte peu la pratique. Nos estimateurs seront les mêmes que ceux calculés dans l'industrie, et leur interprétation restera tout aussi valide.

Il existe toutefois des opposants à l'utilisation de la $VàR$. Parallèlement un nouveau cadre de mesures de risque a été introduit qui vient pallier aux "défauts" reprochés à la $VàR$ par ces opposants. On se tourne alors vers des mesures nouvelles reposant sur des axiomes qui définissent un cadre plus rigoureux pour mesurer le risque, les axiomes de cohérence, introduits par Artzner et al. (1999). Nous abordons maintenant ce nouveau cadre, au sein duquel se développeront les mesures de risque spectrales.

2.3. LES MESURES DE RISQUE COHÉRENTES

La $VàR$, malgré ses avantages de calcul, n'en est pas moins qu'un simple quantile d'une distribution de pertes et, à ce titre, ne rend pas compte de certaines informations élémentaires et essentielles que l'on s'attendrait à connaître grâce à une mesure de risque, comme par exemple la propriété de sous-additivité d'une mesure qui indique qu'il est effectivement moins risqué de diversifier un portfolio de risque. La $VàR$ est une mesure qui n'indique pas nécessairement cette information. Dowd (2005) explique clairement que, plus généralement, les lacunes dues au manque de rigueur dans la définition du cadre des mesures de risque utilisées jusqu'alors, rendent la pratique de gestion de risque peu, ou du moins, "pas correctement" fiable. Pour pallier à ces lacunes, Artzner et al. (1999) décident de définir clairement, et surtout mathématiquement, des lignes directrices pour définir de nouvelles mesures de risque. Ces lignes directrices sont des axiomes qui, s'ils sont respectés, assurent à la mesure de risque correspondante une cohérence et des propriétés mathématiques dont on avait l'intuition jusqu'à présent, sans réellement les définir et les matérialiser. Ces axiomes, appelés *axiomes de cohérence*, s'énoncent comme suit (Dowd (2005), Artzner et al. (1999)).

Définition 2.3.1. *Axiomes de cohérence*

Artzner et al. (1999)

Soient deux portefeuilles, X et Y , desquels nous pouvons déterminer des pertes et des profits ; considérons également une mesure de risque tirée des données de ces

deux portefeuilles, $\rho(X)$ et $\rho(Y)$. L'indicateur de risque $\rho(\cdot)$ est appelé mesure de risque cohérente, si elle satisfait aux quatre axiomes suivants :

- (1) *Monotonie* : $Y \geq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
- (2) *Sous-additivité* : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- (3) *Homogénéité positive* : $\rho(hX) = h\rho(X) \quad h > 0$
- (4) *Invariance translationnelle* : $\rho(X + n) = \rho(X) + n$

On retiendra que la propriété la plus importante est celle de sous-additivité, qui spécifie que le risque d'un portfolio, devrait, comme on s'y attend, diminuer lorsqu'on le diversifie. Or avec la *VàR* cet axiome n'est pas toujours vérifié. Ce n'est donc pas une mesure de risque "cohérente". Cela n'en fait pas moins un indicateur qui possède une interprétation intéressante, et valide, comme nous l'avons illustré dans l'exemple 2.2.1. Une discussion détaillée de l'implication de ces axiomes est menée dans Dowd (2005). Une des mesures de risque qui satisfait ces axiomes se nomme "*Expected Shortfall*" (ES), ou *déficit espéré*. Elle apporte certaines améliorations par rapport à la *VàR*, car elle renseigne sur "la moyenne des pertes extrêmes, en cas de perte extrême", i.e. c'est une espérance conditionnelle des pertes situées en queue de distribution. Comme cet indicateur nous renseigne plus que la *VàR* on le calculera en application au chapitre 4.

Le déficit espéré (ES)

Le déficit espéré (noté ES), est une mesure de risque différente de la *VàR* à plusieurs égards. L'ES représente l'espérance des pertes en cas de scénarios catastrophes, i.e. si on se retrouve avec une perte dans la queue droite de la distribution des pertes. Rappelons que la *VàR* ne donne que la plus perte possible en cas de scénarios catastrophe. L'ES est donc un "meilleur" estimateur que la *VàR* au sens où il donne une espérance de pertes plutôt qu'un minimum de perte, en cas de scénario catastrophe. On peut comparer les deux indicateurs sur le graphique 2.2 tiré de Dowd (2005).

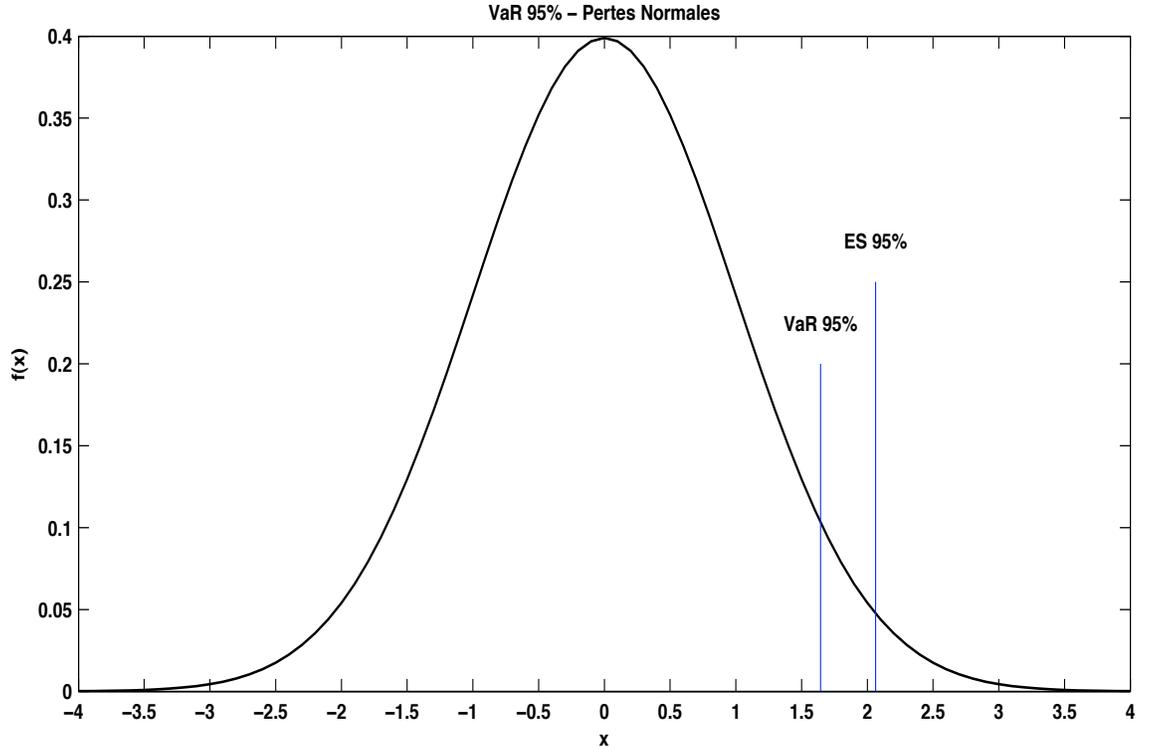


FIGURE 2.2. *VaR* et *ES* 95% pour une distribution de pertes $N(0, 1)$

Le calcul de l'ES est assez simple et direct. Pour un niveau de confiance α , ES_α est donné par :

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_p dp \quad (2.3.1)$$

pour une distribution de pertes/profits continue, et

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{p=0}^\alpha q_p P(q_p) \quad (2.3.2)$$

pour une distribution de pertes/profits discrète. q_p représente un quantile de la distribution supérieur à alpha (dans la queue de la distribution) et $P(q_p)$ la probabilité du quantile q_p .

Naturellement, l'ES est toujours supérieur à la *VaR*, puisque cette dernière est un minimum de pertes, alors que l'ES est la moyenne des pertes supérieures ou égales à la *VaR* du même degré de confiance. De plus l'ES respecte l'axiome de sous-additivité.

Finalement, l'ES s'inscrit comme un cas particulier, peu flexible, d'un cadre plus général de mesures : les mesures de risque spectrales.

2.4. LES MESURES DE RISQUE SPECTRALES

Comme nous l'avons vu, l'ES pondère uniformément, par sa définition, les pertes considérées dans la queue de la distribution de pertes. Ceci s'interprète comme un comportement de neutralité face au risque, puisqu'on accorde, à travers la pondération uniforme $\frac{1}{1-\alpha}$, un poids égal à chaque valeur extrême de la distribution. Or, les agents du marché sont réputés averses au risque et non neutres vis-à-vis de celui-ci. Pour signaler une aversion au risque il faudrait accorder plus de poids aux valeurs au fur et à mesure qu'elles augmentent. Ainsi cette pondération de plus en plus croissante, fera pencher la mesure vers des valeurs extrêmes, qui sont un signal d'alarme pour quiconque est averse au risque. De manière similaire, pour signaler une attraction pour le risque, il faudrait diminuer les pondérations associées à chaque valeur au fur et à mesure qu'elles s'éloignent dans la queue de la distribution, pour faire pencher la mesure vers une valeur la moins extrême possible, parmi les valeurs extrêmes. Ainsi deux mêmes positions initiales peuvent afficher deux comportements différents face au risque, si on choisit d'utiliser des pondérations adéquates pour les valeurs des pertes. En réalité, pour rendre compte de cette aversion au risque, il faudrait, dans le calcul de la moyenne que représente l'ES, associer un poids de plus en plus grand aux pertes, au fur et à mesure qu'elle s'éloignent vers la droite de la queue de la distribution, i.e. qu'elles augmentent. Plus généralement on définit un mesure de risque spectrale M_Θ qui calcule une moyenne pondérée des pertes d'une distribution de pertes,

$$M_\Theta = \int_0^1 \eta(p) q_p dp \quad (2.4.1)$$

où q_p représente un quantile de la distribution de pertes, ou encore la $Var(1-p, T)$ correspondante. $\eta(p)$ représente la fonction de pondération des pertes (à ne pas confondre avec la notation de la fonction GS $\phi(u)$), aussi appelée fonction d'aversion au risque. elle doit répondre à certaines conditions pour que M soit une mesure de risque spectrale :

- (1) Non-négativité : $\eta(p) \geq 0 \quad \forall \quad p \in [0; 1]$
- (2) Normalisation : $\int_0^1 \eta(p) dp = 1$
- (3) Croissance : $p_1 < p_2 \Rightarrow \eta(p_1) \leq \eta(p_2)$

On peut facilement comprendre maintenant pourquoi l'ES est un cas particulier de mesure de spectrale : lorsque la pondération η est uniforme, i.e. $\eta(p) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{I}_{\{\alpha; \infty\}}(p)$, M se réduit alors à l'ES. La *VàR* est aussi un cas particulier, mais dégénéré, de mesure spectrale. Elle associe un poids de 1 au $100(1-\alpha)$ ème quantile de la distribution des pertes, et donne un poids nul à toutes les autres valeurs de pertes possibles. Dowd (2005) met clairement en évidence le manque de cohérence apporté par ce comportement de la *VàR*. En effet, Cette manière de pondérer indique un comportement d'attraction au risque, puisqu'on choisit d'accorder des poids plus petits aux pertes potentiellement plus élevées que la *VàR*. Pire, un comportement d'attraction agressive au risque, puisque les valeurs de pertes potentielles plus élevées que la *VàR* elle-même ne sont même pas prises en compte par la *VàR*, puisqu'elles sont ignorées en étant pondérées par une valeur de 0. Il existe beaucoup de discussion en cours sur l'utilisation de la *VàR*, et le lecteur intéressé peut se référer à nouveau à Dowd (2005)

Comme notre but n'est pas de s'étendre en détails dans le domaine, on se contentera, pour terminer notre présentation des mesures de risque, d'indiquer la dernière mesure que nous calculerons au Chapitre 4 : la mesure de risque spectrale basée sur la fonction d'aversion exponentielle au risque. Cette mesure pondère les pertes de la distribution en s'appuyant sur un seul paramètre γ tel que :

$$\eta_{exp}(p) = \frac{e^{-(1-p)/\gamma}}{\gamma(1 - e^{-1/\gamma})} \quad (2.4.2)$$

avec $\gamma \in (0; \infty)$. Pour comprendre comment influe le paramètre γ sur la pondération, on peut voir des représentations de la fonction d'aversion exponentielle au risque dans la figure 2.3 : η est une fonction croissante de p sur la droite réelle. Et on voit que pour des valeurs décroissantes de γ l'aire sous la courbe se concentre de plus en plus vers l'extrémité droite du segment $[0; 1]$. Comme nous l'avons déjà dit, cette concentration des poids vers les quantiles p de la queue droite de la

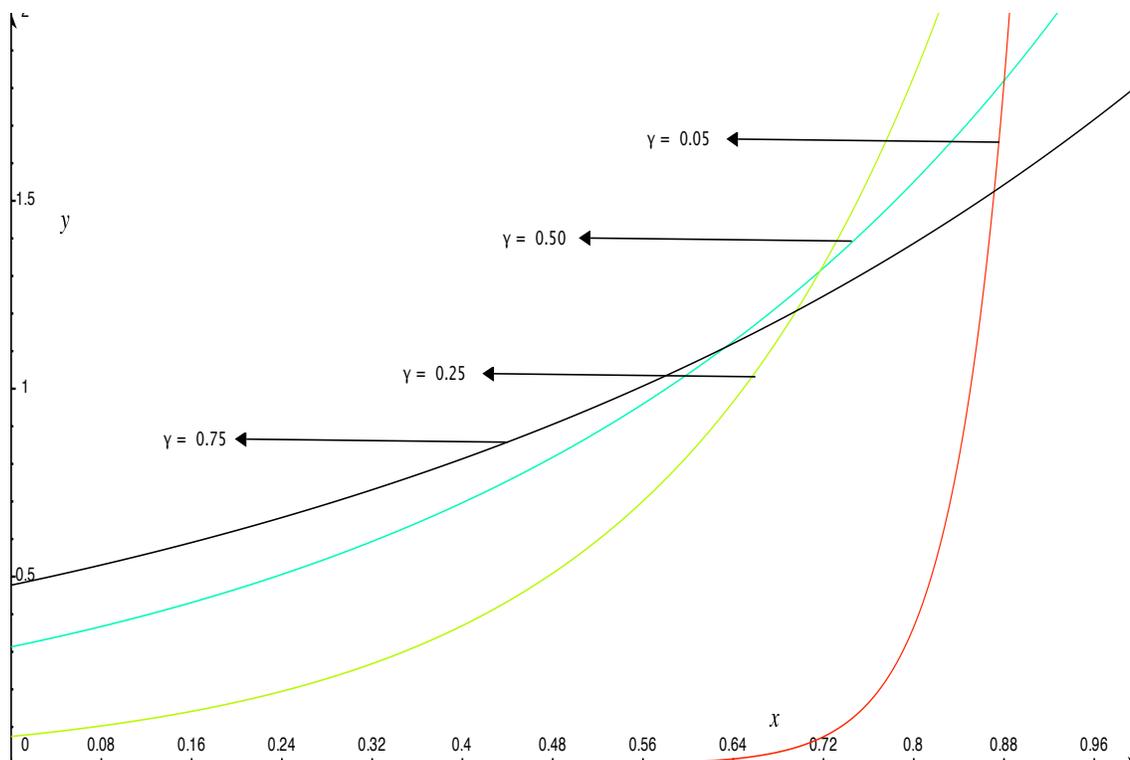


FIGURE 2.3. Fonction d'aversion au risque pour différentes valeurs de γ

distribution provoque une pondération qui fait pencher la mesure vers la droite, i.e. qui l'augmente. Cette information est perçue comme une indication de risque élevé. En résumé, pour une même valeur de p dans la queue de la distribution (i.e. vers la droite de la distribution), lorsque γ diminue, on observe que $\eta(p)$ augmente. Donc plus γ diminue, et plus le degré d'aversion au risque (i.e. "d'intolérance" au risque) augmente, car la pondération η accorde plus de poids aux grandes valeurs de pertes.

On choisit de calculer cette troisième mesure dans notre application au chapitre 4 pour deux raisons : sa simplicité basée sur un seul paramètre, facile à interpréter, et sa popularité qui rend cette mesure compréhensible par des personnes initiées au domaine mais pas nécessairement spécialisées.

Nous calculerons dans le Chapitre 4, les trois mesures de risque discutées dans les sections précédentes : la VaR , l'ES, et la mesure de risque spectrale basée sur la fonction d'aversion exponentielle au risque.

Chapitre 3

METHODE

Cette étude porte sur l'aspect numérique des modèles de risque. Il n'est, en effet, pas toujours facile d'obtenir cette information numérique et pour motiver ce travail on se rappellera de l'importance de l'information contenue dans la *fdc* : Il ne suffit pas seulement, pour un assureur, de connaître la probabilité de tomber en ruine, il faut aussi connaître les conditions dans lesquelles celle-ci survient. C'est à dire avoir certains indicateurs du risque de ruine (surplus avant la ruine, X), et pouvoir anticiper son ampleur (déficit au moment de la ruine, Y). Reprenons l'exemple simple cité au Chapitre 1 : tomber en ruine de 1 dollar ou de dix millions de dollars sont deux cas de ruine très différents. Si $Y = 10e^7$ la compagnie n'a aucune chance de se relever ; si $Y = 1$, alors il est envisageable de continuer à exercer. Si on considère le surplus avant la ruine, il peut être vu comme un indicateur du risque de ruine. Car tomber en ruine à cause d'une petite réclamation, alors que le surplus était déjà bas, ne donne pas la même information que si la ruine survient alors que le surplus est très élevé, par exemple $X = 10e^7$. Dans ce dernier cas, il apparaît évident que la réclamation qui cause la ruine ne peut être qu'une réclamation d'une valeur extrême. Pour pouvoir mieux "lire" le risque associé à un modèle, il faut donc synthétiser toute cette information sur les réclamations causant la ruine ($X + Y$), le type de déficit qui peut arriver ($Y = 1$ ou $Y = 10e^7$), et la cause de la ruine : une réclamation extrême ($X = 10e^7$) ou une petite réclamation ($X = 1$).

Au Chapitre 1, nous avons vu que, pour les modèles de risque déterminés par des subordonateurs, $\psi(u)$ et $f_{XY}(x_0, y_0 | (U(0) = u))$ ¹ répondent à des équations de renouvellement dont les solutions s'expriment sous forme de séries de puissances de convolutions. Dans la littérature, on retrouve différentes méthodes numériques pour évaluer ces équations : l'inversion numérique par transformée de Laplace, le calcul direct des convolutions et la simulation. Morales (2004) et Garrido and Morales (2006) utilisent l'inversion numérique par transformée de Laplace pour estimer $\psi(u)$ et f_{XY} dans le cas des subordonateurs GIG et Gamma. Il est également possible d'évaluer numériquement les convolutions s'il existe une forme fermée pour la fonction de répartition M définie en (1.1.10). Une telle approche est expliquée et illustrée dans Klugman et al. (2004), mais elle devient très vite inefficace par sa lenteur, car la puissance de calcul requise pour évaluer des séries de convolutions devient rapidement exorbitante lorsqu'on tente d'approcher une des séries présentées au Chapitre 1.

La troisième méthode numérique, que l'on privilégie dans cette étude, est la simulation. Traditionnellement, on simule directement le processus de Poisson composé afin d'observer, ou non, la ruine. Cette approche de simulation directe du processus, en plus de demander beaucoup de puissance de calcul, n'assure pas d'obtenir de l'information numérique, puisqu'elle dure longtemps, et parfois, ne se termine jamais. En effet, on pourrait simuler une trajectoire du processus $\{U(t)\}$ pour laquelle on observerait la survie (i.e. pas de ruine). Une première manière de contourner ce problème, est d'utiliser la limite (1.2.7)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(u) = \psi(u),$$

et de simuler le processus sur un horizon de temps fini. En répétant cette simulation un grand nombre de fois, et en faisant de plus en plus grandir T , on obtient un estimateur de $\psi(u)$. L'algorithme que nous utilisons pour implémenter cette méthode de simulation directe du processus est très fréquemment utilisé dans la littérature, depuis longtemps, mais ne permet de simuler que le processus de

1. Pour alléger le texte, on notera, pour (x_0, y_0) fixes, $f_{XY}(x_0, y_0 | (U(0) = u)) = f_{XY}(u)$, car $f_{XY}(x_0, y_0 | (U(0) = u))$ devient alors une fonction de u .

Poisson composé. En effet, les subordinateurs n'ont été proposés que récemment comme modèles de pertes agrégées, et les méthodes de simulation directe de ces processus ne sont pas toujours faciles à mettre en place. Toutefois, comme ces mêmes processus sont très utilisés dans la littérature en finance, il existe des méthodes pour réaliser de telles simulations et le lecteur intéressé pourra se référer à Schoutens (2003). Une autre manière de contourner le problème de simulation interminable est une variante de la simulation directe : la simulation par changement de mesure, basée sur le même algorithme, et qui précipite l'événement de la ruine. La ruine survient alors avec probabilité 1 et la simulation prend donc nécessairement fin. Pour simuler la *fdc*, l'approche proposée dans ce mémoire est différente. En exploitant les expressions en séries de convolutions pour $\psi(u)$, on peut leur donner une interprétation probabiliste dont on se sert pour simuler. Car on se rappelle que dans tous les modèles présentés dans le Chapitre 1, seul le cas classique avec distribution Exponentielle a permis d'obtenir, dans la littérature, une série de puissances de convolutions qui se réduit à une expression finie pour $\psi(u)$. Le reste des expressions était clairement difficile à évaluer, et difficile à évaluer *rapidement*, pour obtenir une précision satisfaisante. Cette approche est clairement présentée dans Fong (2004) pour la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$, et on pousse cette idée un peu plus loin pour interpréter les séries de puissances de convolutions de fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine f_{XY} . Cette approche permet donc d'obtenir de l'information numérique sur f_{XY} , et ce, même sans en connaître une forme analytique finie.

On voit donc dans ce chapitre deux méthodes de simulation. La simulation directe du processus qui nous servira à apprécier les avantages de la méthode de simulation basée sur les convolutions, que nous proposons pour la *fdc*. La première simule directement le processus de surplus et plus particulièrement la probabilité ultime de ruine associée, alors que la seconde permet de générer directement $\psi(u)$. Cette dernière repose sur l'interprétation probabiliste que l'on peut donner aux résultats du Chapitre 1. Pour pouvoir expliquer cette interprétation, on introduit ensuite les concepts de décomposition "Ladder Height" (LH) et de variable

"Maximum Aggregate Loss" (MAL). En effet, on remarquera que la simulation de la fdc , comme celle de la probabilité ultime de ruine, peut être réalisée par la décomposition en échelons ("Ladder Height") de la variable de pertes totales ("Maximum Aggregate Loss").

3.1. APPROCHES NUMÉRIQUES ET SIMULATION POUR LA PROBABILITÉ ULTIME DE RUINE $\psi(u)$

Cette section discute de deux approches de simulation, la simulation directe du processus et la simulation basée sur la méthode des convolutions, pour les modèles de risque étudiés dans ce mémoire.

Avant de passer à ces deux méthodes, il est intéressant de mentionner qu'il existe d'autres méthodes numériques qui offrent chacune leurs avantages et leurs inconvénients. On pourra noter l'existence d'une méthode de calcul utilisée fréquemment dans la littérature pour évaluer $\psi(u)$, par exemple dans Garrido and Morales (2006). Il s'agit de la méthode de calcul par inversion numérique, appelée "Transformée de Laplace". Elle se base, sur les équations de renouvellement de $\psi(u)$ et de f_{XY} énoncées au Chapitre 1, qui peuvent être exprimées en termes de transformée de Laplace, et donc évaluées par inversion numérique. La précision du calcul dépend de la manière dont sont évaluées les intégrales lors de l'inversion, et demande donc une puissance computationnelle très, voire trop, importante. On propose donc, dans cette étude, une approche qui soit computationnellement moins exigeante pour obtenir des valeurs numériques de la fdc dans le cas de modèles de risque déterminés par des subordonateurs.

La simulation directe est facile à implémenter dans le cas classique du processus de Poisson composé. Mais dans ce mémoire, on étudie des modèles de risque où le processus de Poisson composé est remplacé par des subordonateurs qui ont été proposés plus récemment pour modéliser les pertes agrégées, et qui sont une classe particulière de processus de Lévy. Comme ils sont très utilisés en finance,

les processus de Lévy ont été largement étudié du point de vue simulation directe (Schoutens (2003)), et il est donc possible de simuler directement les subordinateurs. Toutefois, l'implémentation d'une telle simulation est bien plus complexe que celle du processus de Poisson composé. Voilà entre autres, pourquoi on propose une autre approche de simulation des quantités qui nous intéressent, $\psi(u)$ et f_{XY} , pour les modèles avec subordinateurs.

La première méthode de simulation (directe), comme nous l'avons mentionné, est très répandue, notamment en finance, pour la simulation de trajectoires des prix d'actifs financiers, et a été utilisée régulièrement dans la littérature. Pour une présentation détaillée de cette méthode, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à Ross (1997), Asmussen (2000) ou encore Glasserman (2003).

On propose une autre approche que la simulation directe du processus pour un surplus déterminé par un subordonateur. La méthode de simulation basée sur les convolutions permet d'exploiter les résultats du Chapitre 1 pour tous les modèles : classique (Poisson composé), Gamma, Inverse Gaussien et Réciproque Inverse Gaussien, qui comme on l'a mentionné au Chapitre 1, sont très attrayants pour modéliser les pertes de manière globale, de par leurs distributions. Elle offre aussi l'avantage de ne pas dépendre, en terme de temps d'exécution et de puissance de calcul de la valeur du surplus initial u . Voilà pourquoi nous l'utiliserons, plutôt que la première, dans le but d'obtenir des données numériques sur la fdc . Dans les deux sections suivantes, on détaille un peu plus ces deux approches.

3.1.1. La simulation directe du processus de surplus $U(t)$

Nous commençons par la simulation de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ puisque historiquement, c'est la première quantité qui a été simulée. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette probabilité est de première importance pour un assureur, et plus généralement pour comprendre le risque lié à un modèle de surplus.

Le modèle classique, déterminé par un processus de Poisson composé, est facile à simuler. Toutefois, il n'est pas toujours facile d'extraire de cette simulation l'information désirée, i.e., $\psi(u)$, X ou encore Y . Ross (1997) décrit le procédé de simulation du processus de Poisson composé, que nous appelons ici "méthode de simulation directe du processus" et dont nous donnons brièvement les grandes lignes.

On se rappelle que le processus de surplus dans le modèle classique est donné par l'équation (1.3.1) :

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où u représente le montant du surplus initial, c , le taux constant auquel sont reçues les primes, N_t est le processus de Poisson d'intensité λ . Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de moyenne $E[X_i] = \mu$, avec F_{X_i} comme fonction de répartition. Enfin, le temps W_i séparant deux réclamations successives, X_{i-1} et X_i suit une distribution exponentielle de fonction de répartition F_{W_i} de moyenne $\mu = 1/\lambda$.

La simulation directe du processus de surplus repose sur cette dernière propriété propre au processus de Poisson composé. On génère indéfiniment des réclamations, séparées par un temps de distribution exponentielle, jusqu'à observer la ruine. Or il est possible que la trajectoire du processus de surplus ainsi simulé n'aboutisse pas à la ruine, et la simulation ne prend donc jamais fin.

Pour contourner ce handicap, on se fixe un horizon de temps fini T , et on simule alors $\tilde{\psi}_T(u)$, qui devient une approximation raisonnable de $\psi(u)$ grâce à la limite (1.2.7) :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(u) = \psi(u)$$

Le procédé de simulation directe du processus est décrit dans l'algorithme 4.1. L'idée générale de cet algorithme est d'exploiter la propriété du processus de Poisson composé selon laquelle le temps entre deux réclamations successives, suit une distribution exponentielle. Soit $\{t_i\}_{0 \leq i \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des instants où surviennent les réclamations $\{X_{t_i}\}_{0 \leq i \in \mathbb{N}}$, on définit le temps entre deux réclamations successives $W_i = t_{i+1} - t_i$, pour $0 \leq i \in \mathbb{N}$. W_i suit une distribution exponentielle de

moyenne λ , l'intensité du processus de Poisson composé. Les grandes lignes de l'algorithme sont énoncées ici.

- (1) On fixe la limite de temps T
- (2) On génère des temps W_i jusqu'à cumuler une durée totale de T
- (3) On initialise le surplus au temps 0, i.e. $U(0) = u$, et le compteur de temps $t = 0$
- (4) Pour chaque intervalle de temps W_i , on ajuste le compteur du temps $t = t + W_i$, et on ajuste le surplus U dans l'ordre suivant :
 - (a) On rajoute la prime accumulée $U = U + c * W_i$
 - (b) On soustrait la réclamation $U = U - X_{t_{i+1}}$
 - (c) Si $U < 0$, alors on indique la ruine, sinon on recommence jusqu'à atteindre le temps T
- (5) On répète ces étapes un grand nombre de fois pour estimer $\psi_T(u)$ en faisant la moyenne du nombre d'indicateurs de ruine.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, Il est clair que cet algorithme ne permet de simuler que le processus de Poisson composé car les autres subordinateurs possèdent une infinité de petits sauts que cet algorithme ne peut prendre en compte. Toutefois il existe des méthodes d'approximation par simulation de ces processus, et plus généralement de processus de Lévy, décrites dans Schoutens (2003).

Avec cette méthode de simulation, il n'est pas certain d'obtenir une trajectoire de $U(t)$ au cours de laquelle survient la ruine, et la simulation peut, théoriquement, ne jamais finir. De plus elle permet de calculer $\psi_T(u)$, et non $\psi(u)$, qu'il faut ensuite recalculer pour de grandes valeurs de T , i.e. lorsque $T \rightarrow \infty$. C'est donc une approximation d'un estimateur de $\psi(u)$ que nous obtenons. Ce sont plusieurs inconvénients et désavantages de la simulation directe du processus de surplus. Cependant, il existe un moyen de contourner l'obstacle du scénario où la ruine ne survient jamais et la simulation ne prend jamais fin : la simulation par changement de mesure, "*Importance Sampling*" (IS).

Il existe une variante de la simulation directe, qui sert à contourner le problème de temps de la simulation directe du processus, basée à peu près sur le même algorithme : le changement de mesure (IS). Dans une simulation basée sur un changement de mesure, on précipite l'événement qu'on cherche à observer, dans notre cas, la ruine, et ainsi la simulation prend nécessairement fin, sans toutefois modifier la probabilité initiale recherchée. Les simulations sont donc accélérées. Pour simuler le processus, on procède à un changement de la mesure initiale de la probabilité P , afin de simuler sous une nouvelle mesure Q , sous laquelle la ruine est certaine. En se rappelant Définition 1.2.2 de la probabilité ultime de ruine, il est clair qu'on peut la réécrire

$$\psi(u) = \mathbb{E}^P[\mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}]. \quad (3.1.1)$$

Le théorème de Radon-Nikodym affirme qu'il existe une v.a. Z telle que

$$\mathbb{E}^P[\mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}] = \mathbb{E}^Q[Z\mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}] \quad (3.1.2)$$

Où Q est la nouvelle mesure de probabilité, par rapport à l'ancienne mesure P . L'équation (3.1.2) signifie qu'il est possible d'exprimer $\psi(u)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire, mais sous une nouvelle mesure où la ruine survient tout le temps, i.e. $\mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}} = 1$ tout le temps. La démarche pour réaliser le changement de mesure dans le cas du processus de Poisson composé est bien documentée dans Fong (2004) et le lecteur intéressé peut se référer à Ross (1997) et Glasserman (2003) pour plus de détails.

Concrètement, simuler sous la nouvelle mesure revient à appliquer l'algorithme précédent en remplaçant F_{X_i} et F_{W_i} , respectivement, par $F_{X_i}^2$ et $F_{W_i}^2$, de nouvelles fonctions de répartition du temps exponentiel entre chaque réclamation, et de sévérité des réclamations, sous la nouvelle mesure Q . Ces dernières fonctions sont semblables aux premières, mais elles ont des paramètres différents, qui permettent de précipiter la ruine, sans en modifier la probabilité grâce à (3.1.2). Ainsi le problème de la simulation qui ne prend jamais fin est résolu. Nous nous contentons de mentionner l'existence de la méthode IS, sans l'implémenter, car c'est une approche très largement utilisée dans différents types de simulation, et qui fait

figure d'incontournable dans une discussion sur la simulation.

3.1.2. Simulation par la méthode des convolutions

Cette méthode, que nous décrirons formellement dans les deux sections suivantes, est basée sur les résultats du Chapitre 1. On verra dans la section suivante que ces résultats sont en fait des expressions semblables aux fonctions de densité et de répartition d'une v.a. géométrique composée, définie en 1.1.7. L'idée générale est donc de simuler une variable aléatoire géométrique composée dont les fonctions de répartition et de densité, données respectivement par (1.1.21) et (1.1.23), sont exprimées sous forme de séries de puissances de convolutions. L'avantage par rapport aux deux méthodes mentionnées précédemment est qu'on ne simule pas le processus de surplus, mais simplement une v.a géométrique composée. Cette simplicité la rend très efficace, puisque très rapide, et très peu demandante en puissance de calcul. Nous verrons que les résultats sur la probabilité ultime de ruine et la *fdc*, énoncés au Chapitre 1, ont une interprétation probabiliste qui nous permettra d'implémenter cette méthode. De plus la simulation par la méthode des convolutions nous donne la valeur simulée de $\psi(u)$ et non une approximation de $\psi_T(u)$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Il en va de même pour les valeurs de f_{XY} .

Cette méthode de simulation basée sur les convolutions s'avère effectivement très efficace, et elle ne dépend pas du surplus initial u . Pour pouvoir s'en rendre compte, et discuter de l'interprétation probabiliste des résultats du Chapitre 1, on introduit le concept de décomposition "Ladder Height". C'est en se basant sur cette idée qu'on simule $\psi(u)$ et f_{XY} .

3.2. LA DISTRIBUTION "LADDER HEIGHT"

La méthode de simulation que nous proposons dans cette étude repose sur le concept de distribution de la "Ladder Height" (LH). On en donne ici un aperçu afin d'exposer notre approche de simulation, en reprenant l'introduction de Morales (2003). Pour une étude détaillée sur la probabilité ultime de ruine et sa

décomposition LH, on pourra se référer à Asmussen (2000).

La distribution LH permet d'utiliser les expressions dérivées dans le Chapitre 1, en leur donnant une interprétation qui permet de les simuler. En effet on montre dans cette section que les expressions en séries de puissances de convolutions de $\psi(u)$ et, par analogie, de f_{XY} , se trouvent être en fait des distributions de variables qu'on sait générer, plutôt que de simuler tout le processus comme discuté dans la section précédente.

Pour comprendre l'idée derrière la décomposition LH, on considère le modèle classique défini en (1.3.1) car il est plus facile à représenter. La logique reste valide lorsqu'on passe aux subordinateurs avec une infinité de sauts (Gamma, GIG). A partir de (1.3.1), on définit le processus

$$\mathcal{P}(t) = u - U(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct$$

où $P(t)$ représente la perte totale à l'instant t . On peut réécrire le moment de la ruine τ défini en (1.2.3) en fonction de $\mathcal{P}(t)$:

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t | U(t) < 0\} \\ &= \inf\{t | u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i < 0\} \\ &= \inf\{t | \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct > u\} \\ &= \inf\{t | \mathcal{P}(t) > u\} \end{aligned}$$

(3.2.1)

On s'intéresse alors aux maxima relatifs de $\mathcal{P}(t)$ en regardant les moments $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ où le processus atteint un nouveau pic record dans le temps. On note le premier de ces moments ω_0 et on définit $\omega_{i+1} = \inf\{t > \omega_i | \mathcal{P}(t) > P(\omega_i)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. On peut montrer (Klugman et al. (2004)) que le nombre de ces records est une v.a., est fini et suit une distribution géométrique. On notera cette v.a. N_G . Le premier maximum relatif est atteint au moment ω_0 où le processus $\mathcal{P}(t)$ dépasse

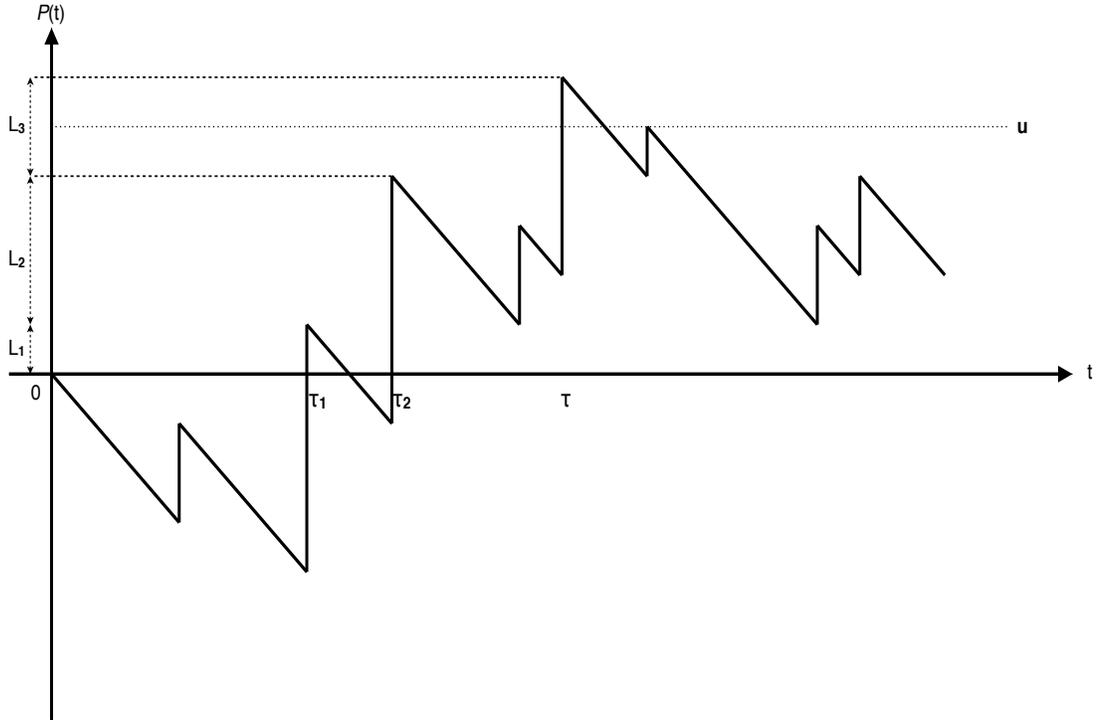


FIGURE 3.1. Processus de pertes classique $\mathcal{P}(t)$

le niveau initial du processus de pertes $\mathcal{P}(0) = 0$. A cet instant, le processus de pertes vaut alors $\mathcal{P}(\omega_0)$, et on appelle v.a. "Ladder Height" la hauteur de l'échelon. Comme le fait remarquer Morales (2003) le terme "Ladder Height" (hauteur d'échelle) est dû à la structure en échelons du processus des maxima relatifs $\{\mathcal{P}(\omega_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. On peut observer cette structure dans le graphique 3.1. Le premier échelon a donc une hauteur $\mathcal{P}(\omega_0)$, et le second échelon délimité vers le haut par $\mathcal{P}(\omega_1)$ a donc une hauteur $\mathcal{P}(\omega_1) - \mathcal{P}(\omega_0)$, et ainsi de suite. La hauteur cumulée de tous les échelons, i.e. la hauteur de l'échelle L est donc donnée par

$$\begin{aligned} L &= \mathcal{P}(\omega_0) + (\mathcal{P}(\omega_1) - \mathcal{P}(\omega_0)) + \dots + (\mathcal{P}(\omega_{N_G}) - \mathcal{P}(\omega_{N_G-1})) \\ &= \mathcal{P}(\omega_0) + \sum_{i=1}^{N_G} \mathcal{P}(\omega_i) - \mathcal{P}(\omega_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

De plus L est construite comme une somme dont les termes s'annulent entre eux lorsque l'indice de la somme augmente, i.e. une somme télescopique qui peut donc

être réduite à

$$L = \sup_{i \geq 0} \{P(\omega_i)\}$$

L représente la **perte maximum agrégée** ("Maximum Aggregate Loss"). En effet, si $\mathcal{P}(t)$ représente le processus de perte au temps t , et que L prend en compte les maxima de ce processus, L enregistre le dernier record relatif *de perte*. En terme du processus de surplus, $U(t)$, si le montant initial investi par l'assureur est $U(0) = u$, alors chaque fois que le surplus plonge en bas de u , et plus profondément que la fois précédente, on observe un record du processus $\mathcal{P}(t)$. Ce qui se traduit financièrement, par un niveau de capital *au plus bas qu'il ait jamais été* pour l'assureur. Voilà pourquoi on appelle L la *perte maximale* agrégée. On sait (Bowers et al. (1997), Asmussen (2000)) que L est une variable aléatoire géométrique composée et on montre dans la littérature (Rolski et al. (1999), Asmussen (2000)) que la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ satisfait l'équation suivante :

$$\psi(u) = P(L > u), \quad (3.2.3)$$

et on peut le montrer facilement. En se rappelant de la Définition 1.2.3

$$\psi(u) := P(\inf_{t \geq 0} U(t) < 0)$$

On remarque que $U(t) = u + ct + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ et que les réclamations X_i arrivent aux instants $\{T_i\}$ définis par

$$T_i = w_0 + w_1 + \dots + w_{i-1} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.4)$$

où w_i représente le temps séparant les réclamations X_i et X_{i+1} , et qui suit une distribution exponentielle de moyenne λ , égale à l'intensité du processus de Poisson composé, comme nous l'avons mentionné en décrivant la simulation directe de ce processus.

La ruine ne peut donc survenir qu'à un de ces moments T_i où une réclamation

est enregistrée. On peut donc réécrire $\psi(u)$ comme :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(\inf_{i \geq 0} U(T_i) < 0) \\ &= P(\inf_{i \geq 0} (cT_i - \sum_{j=1}^i X_j) < -u) \\ &= P(\inf_{i \geq 0} -\mathcal{P}(T_i) < -u)\end{aligned}$$

et par définition des fonctions inf et sup, on se rappelle que si E est un ensemble de \mathbb{R} , borné, alors $\inf(-E) = -\sup(E)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(-\sup_{i \geq 0} \mathcal{P}(T_i) < -u) \\ &= P(\sup_{i \geq 0} \mathcal{P}(T_i) > u)\end{aligned}$$

Or on sait que $L = \sup_{i \geq 0} \{P(\omega_i)\} = \sup_{i \geq 0} \mathcal{P}(T_i)$ puisque dans notre cas, par construction, $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\max_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\omega_i) \geq \max_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(T_i)$.

Ceci signifie que $\psi(u)$ est en fait la fonction de survie d'une v.a. Géométrique composée (Klugman et al. (2004)), donnée par la formule de convolutions de Beekman (1.3.12) :

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k \left(1 - \left(\frac{\int_0^u [1 - F_{X_i}(s)] ds}{\mu} \right)^{*k} \right) (u)$$

où θ est le chargement de sécurité et $\frac{\int_0^u [1 - F_{X_i}(s)] ds}{\mu}$ la fameuse distribution "Ladder Height", aussi connue sous le nom de distribution d'équilibre en théorie du risque.

Lorsqu'il existe une forme fermée de la distribution LH, comme dans le modèle Classique avec les formules (1.3.22) (Exponentiel) et (1.3.29) (Pareto), cette méthode est d'autant plus intéressante que le temps requis pour obtenir une simulation ne dépend pas de u et est plus rapide que la simulation directe du processus. Il suffit alors de simuler des réalisations d'une v.a. géométrique composée pour obtenir $\psi(u)$.

Plus généralement, Morales (2004) discute un résultat de la même forme, mais pour le modèle de risque déterminé par un subordonateur, englobant le modèle classique. La décomposition LH est alors un peu plus complexe, mais suit la

même idée, et le résultat nous permet donc de simuler $\psi(u)$ pour ces modèles plus récents, et plus généraux, car les distributions LH dans les cas IG avec la formule (1.5.12) et RIG avec la formule (1.5.12) sont exprimées sous forme finie, et sont donc calculables numériquement. Comme notre objectif est de simuler la *fdc* pour ces modèles, nous n'exposons pas cette décomposition, et le lecteur intéressé pourra consulter Morales (2003) et Morales (2004) pour des lectures plus détaillées à ce sujet.

3.3. FONCTION GS ET DISTRIBUTION "LADDER HEIGHT"

La méthode de simulation par convolutions repose sur la simulation d'une variable aléatoire Géométrique composée, la "*Maximum Aggregate Loss*", dont la valeur des incréments admet une distribution LH. Pour pouvoir simuler une certaine quantité avec cette méthode, il faut donc que celle-ci admette une décomposition LH grâce à laquelle on peut simuler la v.a. "*Maximum Aggregate Loss*" correspondante.

Comme nous l'avons vu, la fonction GS, $\phi(u)$, satisfait à une équation de renouvellement, et sa solution s'exprime comme une série de convolutions. De plus, nous avons vu au Chapitre 1 que $\psi(u)$ et f_{XY} sont des formes particulières de $\phi(u)$, et à ce titre, s'expriment également à travers des séries de convolutions, puisqu'elles satisfont également à des équation de renouvellement semblables à celle de $\phi(u)$. La probabilité $\psi(u)$ admet une décomposition LH, que nous voyons dans la section suivante, et par analogie, on montre qu'il est possible d'identifier une décomposition inspirée de la LH pour simuler la *fdc* f_{XY} .

3.3.1. Décomposition LH de $\psi(u)$

Pour simuler $\psi(u)$ par la méthode des convolutions, il faut identifier une décomposition LH. On retrouve ce résultat dans différents travaux de la littérature, et une démarche détaillée de cette approche dans Bowers et al. (1997) ou encore Klugman et al. (2004). On expose les principales idées cette démarche en gardant

à l'esprit l'objectif de simuler la *fdc*.

On se rappelle que la fonction GS définie en (1.2.11) pour un modèle du type (1.2.2) déterminé par un subordonateur,

$$\phi(u) = E[w(U(\tau-), |U(\tau)|)e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{\{(0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u],$$

satisfait l'équation de renouvellement (1.2.15), en vertu du Théorème 1.2.1 (c.f. Gerber and Shiu (1998))

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(x)g(u-x)dx$$

dont la solution, en vertu de ce même théorème est (1.2.18)

$$\phi(u) = h \star \sum_{k=0}^{\infty} g^{\star k}(u)$$

une série de puissances de convolutions, où h et g sont données respectivement par (1.2.16) et (1.2.17).

On se rappelle également qu'en fixant $\delta = 0$ et

$$w(x, y) = 1 \quad \forall x, y > 0$$

dans l'équation (1.2.11), la fonction GS $\phi(u)$ devient la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$, satisfait donc aussi à une équation de renouvellement comme (1.2.15) et admet la série de puissances de convolutions (1.2.18) pour solution. On a montré à travers le Corollaire 1.2.1 que l'équation de renouvellement (1.2.15) pour la fonction GS et sa solution (1.2.18) se réduisent respectivement à l'équation (1.2.19) et sa solution (1.2.20)

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^k (1 - M^{\star k})(u) \quad (3.3.1)$$

où M est la fonction de répartition (1.1.10), et E_0 l'espérance du processus au temps 1, $\mathbb{E}(S(1))$.

Cette expression de $\psi(u)$ en série de puissances de convolutions a la même forme que (1.1.22). Ceci implique, comme on l'a mentionné dans la section 3.2, que $\psi(u)$ est la queue de la distribution d'une variable aléatoire Géométrique composée, et admet donc une décomposition LH du type "*Maximum Aggregate*

Loss". Et $M(x)$ est en réalité la fonction de répartition "Ladder Height" pour $\psi(u)$.

En effet, en exprimant ainsi $\psi(u)$ comme la queue d'une distribution Géométrique composée, on peut la simuler à travers une telle v.a. $K = \sum_{i=0}^{N_G(t)} L_i$. Générer K est assez simple : il suffit de générer le nombre d'incrémentes de la somme, $N_G(t)$, une variable géométrique de paramètre $1/(1 + \theta)$; et de générer par la suite autant de variables L_i à partir de la distribution LH $M(x)$. En générant plusieurs réalisations de K , on peut estimer la probabilité $P(K > u) = \psi(u)$. Le détail de la simulation est indiqué dans l'algorithme 4.3 et le code figure à la fin du Chapitre 4. Les grandes lignes de l'algorithme sont énoncées ici.

- (1) On génère N_G à partir d'une distribution géométrique
- (2) On génère N_G variables L_1, L_2, \dots, L_{N_G} à partir de la distribution LH $M(x)$
- (3) On Calcule $L = \sum_{i=1}^{N_G} L_i$
- (4) Si $L > u$ alors on enregistre la ruine, sinon la survie
- (5) On répète ces étapes un grand nombre de fois pour estimer $\psi(u)$ en faisant la moyenne du nombre d'indicateurs de ruine enregistrés par rapport au nombre total de simulations.

Ce résultat est la première étape dans la simulation de f_{XY} . On s'inspire de cette idée dans la section suivante pour simuler et approcher f_{XY} .

3.3.2. Décomposition LH de la *fdc*

Dans cette section, on donne à nouveau une interprétation aux résultats du Chapitre 1, sur la *fdc*, en termes de décomposition LH, pour ensuite exploiter cette interprétation et simuler des variables aléatoires qui nous permettront d'obtenir une approximation numérique de la *fdc*.

On s'inspire d'abord de la section précédente sur la décomposition LH de $\psi(u)$. A nouveau, on considère la fonction GS définie en (1.2.11) pour un modèle

du type (1.2.2) déterminé par un subordonateur,

$$\phi(u) = E[w(U(\tau-), |U(\tau)|)e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{\{(0;\infty)\}}(\tau)|U(0) = u],$$

qui satisfait l'équation de renouvellement (1.2.15), en vertu du Théorème 1.2.1 (c.f. Gerber and Shiu (1998))

$$\phi(u) = h(u) + \int_0^u \phi(x)g(u-x)dx$$

dont la solution, en vertu de ce même théorème est (1.2.18)

$$\phi(u) = h \star \sum_{k=0}^{\infty} g^{\star k}(u),$$

une série de puissances de convolutions où h et g sont données respectivement par (1.2.16) et (1.2.17).

En fixant, $\delta = 0$ et la fonction de pénalité

$$w(x, y) = \mathbb{I}_{\{[0;x_0)\}}(x)\mathbb{I}_{\{[0;y_0)\}}(y) \quad \forall x, y > 0,$$

pour un point de l'espace $(x, y) = (x_0, y_0)$, dans l'équation qui définit la fonction GS (1.2.11), $\phi(u)$ devient la *fdc* $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$, et satisfait donc aussi à l'équation de renouvellement (1.2.15) pour la fonction GS; elle admet donc la série de puissances de convolutions (1.2.18) pour solution. On a montré à travers le Corollaire 1.2.2 que l'équation de renouvellement(1.2.15) et sa solution (1.2.18) se réduisent respectivement toutes deux à l'équation de renouvellement (1.2.26) et sa solution (1.2.27)

$$f_{XY}(u) = \left(\frac{q(x_0 + y_0)}{(1 + \theta)E_0} \right) \mathbb{I}_{\{[0;x_0)\}}(u) \star \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u) \quad (3.3.2)$$

où θ représente le chargement de sécurité, q est la mesure de Lévy du subordonateur, comme définie en (1.1.5), m est la fonction de densité (1.1.9), et E_0 l'espérance du processus au temps 1, $\mathbb{E}(S(1))$.

On reconnaît dans l'expression (3.3.2) une partie de la série de puissances de convolutions (1.1.23) qui caractérise la fonction de densité d'une v.a. Géométrique composée dans la Définition 1.1.7.

A partir de ce point on transforme (3.3.2) par quelques manipulations algébriques pour obtenir une série de puissances de convolutions qui représente la fonction de densité d'une somme de deux variables : une v.a. Uniforme et une v.a. Géométrique composée. On conserve la notation $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u) = f_{XY}(u)$ afin d'alléger le texte.

On réarrange d'abord (3.3.2),

$$f_{XY}(u) = \left(\frac{q(x_0 + y_0)}{E_0} I_{[0; x_0)}(u) \right) \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \theta)^k} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u) \quad (3.3.3)$$

La première parenthèse est, à une constante près, la fonction de densité d'une variable aléatoire uniforme sur $[0; x_0)$. On multiplie et on divise la première parenthèse par $b = \frac{E_0}{x_0 q(x_0 + y_0)}$ afin d'obtenir une fonction de densité. L'équation (3.3.3) devient alors

$$b f_{XY}(u) = \left(\frac{1}{x_0} I_{[0; x_0)}(u) \right) \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \theta)^k} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u) \quad (3.3.4)$$

Il suffit maintenant de faire apparaître la fonction de densité d'une v.a. Géométrique composée en multipliant chaque membre de l'équation par θ . L'équation (3.3.4) devient alors,

$$b\theta f_{XY}(u) = \left(\frac{1}{x_0} I_{[0; x_0)}(u) \right) \star \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{(1 + \theta)^k} \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^k m^{\star k}(u)$$

que l'on dénotera

$$b\theta f_{XY}(u) = f_Z(x_0, u) \quad (3.3.5)$$

où $f_Z(x_0, u)$ est donc la convolution de deux fonctions de densité, et est donc une fonction de densité elle-même. Elle représente la densité de la somme Z ,

$$Z = J + K, \quad (3.3.6)$$

de deux variables aléatoires J , uniforme sur $[0; x_0)$, et K Géométrique composée. On identifie tout de suite une manière de simuler la *fdc* d'une façon semblable à $\psi(u)$. Cette densité dépend de x_0 , θ et u . Pour simuler une valeur de la *fdc* pour un niveau de surplus initial u en particulier, i.e. simuler $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u)$, il faut donc simuler, pour le point x_0 , en particulier, des réalisations de Z pour estimer sa fonction de densité évaluée en u : $f_Z(x_0, u)$. A l'aide de l'équation

(3.3.5) on obtient la valeur $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$ en multipliant $f_Z(x_0, u)$ par la constante unique $\frac{1}{b\theta}$, qui dépend de x_0 et de y_0 .

Pour obtenir toute la surface de densité, il suffit de recommencer cette opération pour chaque couple (x_0, y_0) . En réalité, la valeur $f_Z(x_0, u)$ peut être générée une seule fois pour tous les points y_0 associés à un point x_0 en particulier, et on projette les valeurs $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$ en multipliant par $\frac{1}{b\theta}$. C'est un détail important de l'implémentation que nous discutons au chapitre suivant. On obtient, au final, la surface de densité $(x_0, y_0, f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u))$. Les grandes lignes de tout ce processus sont décrites dans l'algorithme 4.4 et on peut lire le code correspondant à la fin du Chapitre 4. Les grandes lignes de l'algorithme sont énoncées ici.

- (1) On fixe la valeur u
- (2) On génère pour chaque valeur x_0 , 1000 réalisations de $Z = J + K$ en suivant les étapes suivantes :
 - (a) Générer une v.a. uniforme J sur $[0; x_0)$
 - (b) Générer une v.a. géométrique N_G à partir d'une distribution géométrique
 - (c) Générer N_G v.a. L_i à partir de la distribution LH $M(x)$
 - (d) Calculer $K = \sum_{i=1}^{N_G} L_i$
 - (e) Calculer $Z = J + K$
- (3) On ordonne toutes les valeurs Z pour en dresser la distribution et retourner la valeur $f_Z(x_0, u)$
- (4) On calcule $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$ en multipliant, pour chaque valeur y_0 , $f_Z(x_0, u)$ par $\frac{1}{b\theta}$, en vertu de l'équation (3.3.5)

Voilà finalement une manière de simuler des valeurs de la *fdc* en contournant l'obstacle du manque d'expression analytique finie et fermée. Comme on la montré, elle est grandement inspirée de l'approche décrite dans Fong (2004). Le chapitre suivant présente de manière plus détaillée les algorithmes, expose les résultats des simulations, et discute des points liés à l'implémentation et aux informations qu'elle nous apporte par rapport à la *fdc*.

Chapitre 4

RESULTATS

Dans ce dernier chapitre, on simule la probabilité ultime de ruine et la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine grâce à l'approche "*Ladder height*" présentée au chapitre 3. Les premières sections décrivent et discutent les algorithmes utilisés pour chacune des simulations. L'implémentation de ces algorithmes, codés en langage *Java*, est basée sur la librairie de simulation stochastique développée à au Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle (DIRO) de l'Université de Montréal par le professeur P. L'Ecuyer et ses collègues. Plutôt que d'utiliser des environnements déjà très célèbres pour leur flexibilité et leur performance, j'ai choisi de coder entièrement toutes les simulations, pour réinvestir les connaissances acquises à travers les cours choisis dans mon parcours de maîtrise. Ce travail s'est avéré beaucoup plus long et fastidieux que l'utilisation d'un logiciel comme MatLab ou Mathematica, cependant le résultat en a valu la peine. En effet, le programme obtenu, appelé "*Simjava2*" permet de simuler la probabilité ultime de ruine par la méthode de simulation directe (Modèle classique, distributions Exponentielles et Pareto), et par la méthode "*Ladder height*" pour tous les modèles présentés dans ce mémoire. Il permet également de simuler la *fdc* par la méthode "*Ladder height*" pour tous les modèles présentés dans ce mémoire. Il est important de noter que les résultats numériques ne sont pas évidents à représenter visuellement à travers des graphiques et que cette partie du travail a représenté un grand investissement en temps. C'est certainement une étape du processus qui mériterait d'être travaillée plus longuement, car elle permettrait de visualiser des surfaces

de densité qui n'ont encore jamais été étudiées ni représentées.

La première section présente et discute les algorithmes utilisés. Ces algorithmes et leur implémentation, en particulier ceux basés sur la distribution "*Ladder height*", représentent la plus grosse partie de l'effort investi dans ce travail. Les codes sont présentés en appendice. La seconde partie de ce chapitre présente les résultats des simulations, et on compare les probabilités ultimes de ruine pour différents modèles, et avec différentes valeurs de surplus initial et de chargement de sécurité, pour la simulation directe et la simulation par "*Ladder height*". On regarde ensuite des les résultats principaux de cette étude. On présente les surfaces de densité de la *fdc* pour tous les modèles discutés dans ce mémoire. La dernière section décrit une application que l'on peut faire grâce aux données numériques de simulation. On calcule différentes mesures de risque sur la variable du déficit au moment de la ruine Y afin de proposer des valeurs de surplus initial qui satisfassent aux exigences des organismes de régulation financière, comme nous en avons discuté brièvement au Chapitre 2.

4.1. ALGORITHMES

On présente ici les algorithmes de simulation pour $\psi(u)$ et la f_{XY} . Le code en langage *Java* correspondant à ces algorithmes est listé en appendice. Leur implémentation repose sur la librairie *SSJ* (Simulation Stochastique en Java) développée à au Département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal par le professeur P. L'écuyer et ses collègues. Plutôt que d'utiliser des environnements déjà très célèbres pour leur flexibilité et leur performance, j'ai choisi de coder entièrement toutes les simulations, pour réinvestir les connaissances acquises à travers les cours choisis dans mon parcours de maîtrise. Les concepts de simulation stochastiques relatifs à la qualité des nombres pseudo-aléatoires générés, sont également entrés en compte dans mon choix d'utiliser *SSJ* pour simuler. En effet, beaucoup de grands logiciels équipés de générateurs de nombres pseudo-aléatoires, comme MS. Excel par exemple, ne passent pas les tests qui visent à déterminer si la séquence pseudo-aléatoire

générée est "suffisamment aléatoire". Ces tests statistiques sont discutés dans L'Ecuyer (2006), que lecteur intéressé pourra consulter pour plus de précision. Au final, ce travail a pris beaucoup de temps de programmation. Peut-être plus que ce qu'il en aurait pris si j'avais opté pour l'utilisation d'un logiciel comme MatLab ou Mathematica. Cependant le programme créé est une très bonne base de simulation pour des applications en actuariat pour les processus de surplus. En effet, ce programme appelé "*Simjava2*" permet de simuler $\psi(u)$ par la méthode de simulation directe (Modèle classique, distributions Exponentielles et Pareto), et par la méthode "*Ladder height*" pour tous les modèles présentés dans ce mémoire. Il permet également de simuler la *fdc* par la méthode "*Ladder height*" pour tous les modèles présentés dans ce mémoire. Le premier algorithme présenté décrit la simulation directe du processus de risque pour un modèle classique.

4.1.1. Simulation directe du processus pour $\psi(u)$

Le premier algorithme que nous utilisons pour simuler $\psi(u)$ prend son sens à travers la limite (1.2.7),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(u) = \psi(u),$$

puisqu'il permet de simuler directement le processus de surplus, et de contourner, d'une certaine manière le problème de simulation qui risque de ne jamais prendre fin. Cette limite nous indique qu'en simulant une trajectoire $U(t)$ sur un horizon fini d'une durée T , on peut approcher la probabilité ultime de ruine par la probabilité de ruine à horizon fini. Il est basé sur la propriété du processus de Poisson composé, d'intensité λ , dont le temps séparant l'apparition des réclamation suit une distribution exponentielle de moyenne λ . Cet algorithme permet donc de générer des valeurs de $\psi_T(u)$. En faisant progressivement grandir T , la limite (1.2.7) nous permet d'affirmer qu'on s'approche de la valeur de $\psi(u)$.

Il est important de remarquer que nous n'utilisons cet algorithme que pour simuler des processus de surplus déterminés par un processus de Poisson composé. Comme nous l'avons dit au Chapitre 3, la simulation directe de processus plus modernes, comme les subordinateurs, qui déterminent les modèles de risque que nous étudions dans ce mémoire, est possible, mais est plus complexe à implémenter. De plus cette méthode n'est pas celle que nous voulons adopter pour générer la *fdc*. Enfin, on notera que cet algorithme est largement répandu dans la simulation de processus de Poisson composé (Klugman et al. (2004)). Il nous servira de référence pour comparer les résultats de la méthode "*Ladder height*".

En répétant cet algorithme un grand nombre de fois, N , on obtiendra l'estimateur de $\psi_T(u)$:

$$\tilde{\psi}_T(u) = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbb{I}_j}{N} \quad (4.1.1)$$

Où \mathbb{I}_j est la fonction indicatrice de l'événement de la ruine. Cet algorithme peut être utilisé également pour générer des observations des variables de la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine. On décrit donc la procédure, pour la documenter, sans toutefois la réaliser, ni l'avoir codée.

4.1.2. Simulation directe du processus pour la *fdc*

La simulation de la fonction de densité peut être réalisée en modifiant légèrement l'algorithme (4.1) vu dans la section précédente. Il s'agira simplement lors de l'occurrence de la ruine, de récupérer les valeurs X et Y , qui représentent le surplus avant la ruine et le déficit au moment de la ruine, puis d'en dresser un histogramme et d'en dériver des valeurs pour f_{XY} . On quadrille le plan $(x_0, y_0, 0)$ à l'aide d'un tableau à deux dimensions, V_{xy} .

X et Y , sont respectivement le surplus avant la ruine et le déficit au moment de la ruine, et V_{xy} représente le quadrillage du plan, un tableau à deux dimensions .

Algorithm 4.1

```

1: pour j=1 à n faire
2:    $\mathbb{I}_j = 0$ 
3:    $t \leftarrow 0$ 
4:    $U \leftarrow u$ 
5:    $X \leftarrow 0$ 
6:    $Y \leftarrow 0$ 
7:   tant que  $t \leq T$  faire
8:     Générer  $T_i$  à partir de  $F_{W_i}$ 
9:     si  $t + T_i \leq T$  alors
10:       $U \leftarrow U + cT_i$ 
11:      Générer  $X_i$  à partir de  $F_{X_i}$ 
12:      si  $U - X_i \leq 0$  alors
13:         $\mathbb{I}_j = 1$ 
14:         $X \leftarrow U$ 
15:         $Y \leftarrow U - X_i$ 
16:      sinon
17:         $U \leftarrow U - X_i$ 
18:         $t \leftarrow t + T_i$ 
19:      finsi
20:    finsi
21:  fin tant que
22: fin pour

```

On récupère donc V_{xy} qui représente, pour chaque carreau du plan ainsi quadrillé, le nombre de fois qu'a été observé le couple $(X; Y)$. Finalement on obtient la surface de densité en associant à chaque couple $(X; Y)$ sa fréquence relative observée. Il est évident que cette méthode est loin d'être efficace et requiert un nombre de simulations très élevé pour pouvoir remplir le plan, et générer ainsi une surface de densité assez lisse, et des résultats numériques acceptables. D'autre part, cette méthode ne pourra pas être utilisée pour comparer les valeurs numériques de la méthode "*Ladder height*", puisque cette dernière ne donne des valeurs

Algorithm 4.2

```

1: N
2:  $t \leftarrow 0$ 
3:  $U \leftarrow u$ 
4:  $X \leftarrow 0$ 
5:  $Y \leftarrow 0$ 
6:  $V_{xy}$ 
7: on quadrille le plan avec une précision  $p$ 
8: pour  $i = 1N$  faire
9:    $\mathbb{I}_j \leftarrow 0$ 
10:  tant que  $t \leq T$  faire
11:    Générer  $T_i$  à partir de  $F_{W_i}$ 
12:    si  $t + T_i \leq T$  alors
13:       $U \leftarrow U + cT_i$ 
14:      Générer  $X_i$  à partir de  $F_{X_i}$ 
15:      si  $U - X_i \leq 0$  alors
16:         $\mathbb{I}_i = 1$ 
17:         $X \leftarrow U$ 
18:         $Y \leftarrow U - X_i$ 
19:        pour  $i = 1$  jusqu'à la fin de  $V_{xy}$  faire
20:          pour  $J = 1$  jusqu'à la fin de  $V_{xy}$  faire
21:            si  $(X; Y) \in V_{xy}[i][j]$  alors
22:               $V_{xy}[i][j]_+ = 1$ 
23:            finsi
24:          fin pour
25:        fin pour
26:      sinon
27:         $U \leftarrow U - X_i$ 
28:         $t \leftarrow t + T_i$ 
29:      finsi
30:    finsi
31:  fin tant que
32: fin pour

```

de f_{XY} , que pour $0 < u \leq x_0$. Or, comme on le voit, l'algorithme précédent n'impose pas cette restriction. Les surfaces de densité ne seront donc pas comparables.

On a exposé la simulation directe du processus pour estimer $\psi(u)$ et $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u)$. On procède maintenant à la description des algorithmes équivalents, en version "*Ladder height*", et qui sont le coeur du travail de ce mémoire.

4.1.3. Simulation "*Ladder height*" pour $\psi(u)$

L'algorithme que nous voyons ici exploite l'expression de la probabilité ultime de ruine sous forme de série de convolutions. C'est donc la méthode "*Ladder height*" que nous implémentons. Elle permet de simuler $\psi(u)$ pour tous les modèles avec subordonateurs vus jusqu'à présent : classique Exponentiel, classique Pareto, Gamma, Gaussien Inverse, Réciproque Gaussien Inverse. Toute la logique présentée dans cette section fera partie intégrante de la simulation de la *fdc*, d'où son importance.

Algorithm 4.3

```

1: pour  $j = 1$  to  $N$  faire
2:    $\mathbb{I}_j \leftarrow 0$ 
3:    $L \leftarrow 0$ 
4:   Générer  $N_g$  à partir d'une distribution géométrique( $\theta$ )
5:   pour  $i = 1$  to  $N_g$  faire
6:     Générer  $L_i$  à partir de  $M(x)$ 
7:      $L \leftarrow L + L_i$ 
8:   fin pour
9:   si  $L > U$  alors
10:     $\mathbb{I}_j = 1$ 
11:   finsi
12: fin pour

```

On répète cette simulation un grand nombre de fois, N , pour obtenir une bonne approximation $\psi(u)$; l'estimateur de $\psi(u)$ est donné par

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbb{I}_j}{N} \quad (4.1.2)$$

Comme on le voit, cet algorithme permet de calculer un estimateur direct de la probabilité ultime de ruine, par opposition à l'algorithme (4.1), qui calcule un estimateur de la probabilité de ruine à horizon fini, qui elle même approche $\psi(u)$ en faisant tendre T vers de grandes valeurs. D'autre part cette méthode ne dépend pas du surplus initial, et nécessite peu de puissance de calcul, à condition que le calcul des valeur de la distribution $M(x)$ ne soit pas trop complexe.

On remarquera dans le Chapitre 4 la rapidité d'exécution de cet algorithme qui ne dépend pas du surplus initial, u , et qui est nettement moins long que l'algorithme de simulation directe du processus ou avec changement de mesure.

4.1.4. Simulation "*Ladder height*" pour la *fdc*

La simulation de la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine est une tâche un peu plus ardue que les trois précédentes. En effet, il s'agit d'approximer une fonction de densité déficiente bi-variée. Cette fonction sera représentée par une surface de densité dans l'espace en trois dimensions. L'approche suivante permet de générer la *fdc* pour tous les modèles avec subordinateurs vus jusqu'à présent, comme dans la section précédente pour la probabilité ultime de ruine.

L'idée est de quadriller le plan $(x, y, 0)$, et d'associer comme dans l'algorithme (4.2), à chaque point $(x_0, y_0, 0)$, une v.a. $Z = z_0$, qui est la somme d'une variable aléatoire uniforme, U , sur $[0; x_0)$, et d'une v.a. Géométrique composée, K , dont la distribution des incréments suit une distribution "*Ladder height*", basée sur la mesure du subordinateur qui modélise les pertes. La surface de densité sera ainsi composée des points (x_0, y_0, z_0) de l'espace. On notera respectivement f_U , g_{geom} et M_{L_i} les densités de U , la loi de probabilité géométrique de K , et la distribution

"Ladder height" des incréments de K .

Si l'idée directrice semble assez simple, l'implémentation de l'algorithme est très délicate, et l'exploitation des données qui en ressort demande pas mal d'attention. En somme, la méthode développée ici, a du potentiel et mérite d'être exploitée et optimisée. Toute l'implémentation requiert beaucoup d'attention comme nous allons le voir. Au chapitre 3, nous avons montré que f_{XY} était en réalité, pour des valeurs fixes de x_0 , et de u , un multiple de $f_Z(x_0, u)$, la fonction de densité de la variable Z , qui dépend de la valeur de x_0 et du surplus initial u . Pour obtenir les valeurs de f_{XY} , il s'agit de multiplier par une constante qui dépend de la somme $x_0 + y_0$. Ce qui revient à projeter dans le plan (x_0, y, z) toutes les valeurs de la *fdc*. La surface est donc générée par remplissage de plans successifs, et la qualité du résultat final, i.e. le lissage de la surface, dépend de la précision avec laquelle on découpe et quadrille l'espace.

Finalement l'algorithme que nous présentons, peut être séparé en trois étapes. Tout d'abord il s'agit de découper le plan (x, y_0) avec une précision satisfaisante pour pouvoir observer les résultats. Puis, on génère les valeurs de la fonction de densité de Z , $f_Z(x_0, u)$. Pour cette étape, on travaille dans le plan $(x, 0, z)$ et on associe à chaque point de la droite des abscisses x_0 , une valeur $z_0 = f_Z(x_0, u)$. Finalement on génère la valeur f_{XY} en projetant successivement dans chaque plan (x_0, y, z) , pour chaque valeur de y , la valeur de la fonction de densité de Z , multipliée par la constante, $\frac{q(x_0+y_0)}{\theta E_0}$, unique pour le couple (x_0, y_0) . On obtient ainsi la surface de densité $(x_0, y_0, f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u))$.

L'algorithme (4.4) est extrêmement simplifié, puisque comme nous l'avons mentionné, l'idée derrière cette simulation n'est pas complexe, toutefois il est important de garder à l'esprit que le code lui-même est beaucoup plus long et complexe. Après avoir décrit tous ces algorithmes, on passe maintenant à la présentation des résultats.

Algorithm 4.4

- 1: **pour** chaque x_0 **faire**
 - 2: Générer 1000 valeurs de Z à partir de f_U , g_{geom} et M_{L_i}
 - 3: Estimer la fonction de densité Z
 - 4: Calculer $f_Z(x_0, u)$;
 - 5: **pour** chaque y_0 **faire**
 - 6: $f_{XY}(x_0, y_0 | U(0) = u) \leftarrow \frac{f_Z(x_0, u) x_0 q(x_0 + y_0)}{\theta E_0}$
 - 7: **fin pour**
 - 8: **fin pour**
-

4.2. RÉSULTATS

Finalelement, on présente, dans cette dernière partie, les résultats numériques des simulations. On commence d'abord par comparer les estimateurs de probabilités de ruine obtenus par les deux méthodes de simulation, directe et "*Ladder height*", pour les modèles classiques avec distributions de réclamations individuelles exponentielles et Pareto. On expose après les probabilités de ruine des modèles avec subordonateurs Gamma(a, b), Gaussien Inverse(κ, γ) et Réciproque Gaussien Inverse(κ, γ).

Après la probabilité ultime de ruine, on montre les résultats concernant l'objectif de cette étude numérique sur la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine. Plusieurs graphiques seront exposés, pour les modèles de risque étudiés dans ce mémoire, où les surfaces de densité décrivant la *fdc* seront discutées. On utilisera ces résultats numériques pour dériver la fonction de densité marginale du déficit au moment de la ruine. Ces résultats numériques nous permettront ensuite de passer à l'application dont nous avons parlé au Chapitre 2. Il s'agit du calcul de mesures de risque sur la variable du déficit au moment de la ruine Y , afin de répondre aux exigences de solvabilité ("Capital requirement") des organismes de régulation gouvernementaux.

TABLE 4.1. Estimateurs de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par la probabilité de ruine à horizon fini $\psi_T(u)$ par simulation directe du processus $U(t)$

U	$\psi_T(u)$			
	$\theta = 0.2$		$\theta = 0.2$	
	Exp	Par	Exp	Par
1	0.763	0.731	0.558	0.568
2	0.696	0.696	0.478	0.524
3	0.650	0.671	0.407	0.489
4	0.588	0.644	0.343	0.463
5	0.552	0.625	0.286	0.447
6	0.510	0.606	0.237	0.424
7	0.466	0.590	0.204	0.406
8	0.425	0.577	0.173	0.393
9	0.394	0.564	0.149	0.380
10	0.357	0.553	0.129	0.369

On commence la présentation des résultats avec la probabilité ultime de ruine.

4.2.1. Probabilité de ruine

Dans cette première section de résultats, on expose les valeurs simulées, par simulation directe et par simulation "*Ladder height*", de la probabilité ultime de ruine du modèle de risque classique (1.3.1)

$$U(t) = u = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Le tableau 4.1 montre les estimateurs $\psi_T(u)$ de $\psi(u)$, obtenus par simulation directe du processus de surplus $U(t)$, pour le modèle classique lorsque les pertes individuelles suivent une distribution exponentielle et une distribution Pareto, pour différentes valeurs du surplus initial u , allant de 1 à 10, et du chargement de sécurité θ , qui prend les valeurs $\theta = 0.2$ et $\theta = 0.5$. La limite de temps a été

TABLE 4.2. Estimateurs $\hat{\psi}(u)$ de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par simulation "*Ladder height*"

U	$\hat{\psi}(u)$			
	$\theta = 0.2$		$\theta = 0.2$	
	Exp	Par	Exp	Par
1	0.765	0.786	0.565	0.592
2	0.699	0.749	0.484	0.551
3	0.650	0.729	0.408	0.519
4	0.602	0.708	0.339	0.489
5	0.545	0.699	0.289	0.476
6	0.511	0.683	0.247	0.456
7	0.470	0.672	0.201	0.445
8	0.430	0.652	0.179	0.428
9	0.403	0.655	0.148	0.426
10	0.369	0.644	0.132	0.413

fixée à $T = 1000$, et le nombre de simulation effectuées est $N = 10000$.

On observe, sans surprise, que le surplus initial influe directement sur la probabilité de ruine, puisque plus il est élevé, moins il y a de chances de se ruiner. De même, le chargement de sécurité, lui aussi, influe sur la probabilité de ruine ; celle-ci diminue lorsque le chargement de sécurité augmente. Ces deux dernières observations sont des remarques classiques (Bowers et al. (1997)) qui nous indiquent qu'il n'y a pas d'erreur majeure dans les algorithmes de simulation. On s'attend surtout à observer le même comportement dans la simulation basée sur la "*Ladder height*". Les valeurs du tableau 4.1 nous serviront de point de comparaison par rapport à celles obtenues par la méthode de simulation "*Ladder height*".

Le tableau 4.2 montre les estimateurs de $\psi(u)$ pour les mêmes modèles que le tableau 4.1, mais obtenus par simulation "*Ladder height*". Les paramètres de la simulation restent les mêmes, i.e. le surplus initial u , qui va de 1 à 10, et

le chargement de sécurité θ , prend les valeurs $\theta = 0.2$ et $\theta = 0.5$. La limite de temps a été fixée à $T = 1000$, et le nombre de simulation effectuées est $N = 10000$.

Il est très important de remarquer que les valeurs dans les tableaux 4.1 et 4.2 ne sont pas sensées être les mêmes. En effet, on se rappelle que le premier tableau décrit les estimateurs de $\psi_T(u)$, alors que le second donne les valeurs d'estimateurs de $\psi(u)$. Toutefois, avec la limite (1.2.7), il est normal d'observer que les valeurs estimées de $\psi_T(u)$ soient plus petites que celles de $\psi(u)$.

Pour valider ces résultats, il est possible de comparer les valeurs simulées pour le modèle classique exponentiel, aux vraies valeurs asymptotiques de la probabilité ultime de ruine pour ce même modèle (Klugman, Panjer, and Willmot (2004)).

TABLE 4.3. Comparaison des estimateurs de $\psi(u)$ par rapport aux vraies valeurs

$\psi(u)$ - Modèle Classique Exponentiel $U(0) = 2, \theta = 0.2$

	Simulation Directe	Simulation LH	Vraies valeurs
U			
1	0.763	0.765	0.767
2	0.696	0.699	0.705
3	0.650	0.650	0.649
4	0.588	0.602	0.597
5	0.552	0.545	0.549
6	0.510	0.511	0.505
7	0.466	0.470	0.465
8	0.425	0.430	0.428
9	0.394	0.403	0.394
10	0.357	0.369	0.362

Il est rassurant de constater que les 2 méthodes de simulation donnent des estimateurs raisonnablement proches des vraies valeurs de $\psi(u)$. Les valeurs obtenues par simulation LH sont, comme on s'y attendait, plus proches des vraies valeurs. En effet, on l'a déjà mentionné, la simulation LH simule les vraies valeurs de $\psi(u)$, alors que la simulation directe du processus, simules les valeurs de $\psi_T(u)$, qui à leur tour sont utilisées comme estimateurs de $\psi(u)$.

On présente maintenant les valeurs simulées de $\psi(u)$ pour les modèles avec subordonateurs Gamma, Gaussien Inverse et Réciproque Gaussien Inverse. Le tableau 4.4 donne les résultats des simulations pour le modèle de risque déterminé un subordonateur Gamma (1.4.1) de paramètres ($a = 2.2, b = 1.1$), le modèle déterminé par un subordonateur Gaussien Inverse (1.5.2) de paramètres ($\beta = -1/2, \kappa = 1.8, \gamma = 0.9$) et finalement le modèle de risque déterminé par un subordonateur Réciproque Gaussien Inverse (1.5.2) de paramètres

TABLE 4.4. Estimateurs de la probabilité ultime de ruine $\psi(u)$ par simulation "*Ladder height*"

U	$\psi(u)$					
	$\theta = 0.2$			$\theta = 0.2$		
	Gamma	IG	RIG	Gamma	IG	RIG
1	0.770	0.584	0.623	0.556	0.332	0.384
2	0.676	0.458	0.510	0.428	0.219	0.262
3	0.594	0.371	0.421	0.324	0.154	0.182
4	0.521	0.304	0.352	0.250	0.110	0.133
5	0.561	0.256	0.293	0.187	0.085	0.098
6	0.404	0.216	0.246	0.142	0.067	0.073
7	0.353	0.185	0.207	0.108	0.055	0.057
8	0.308	0.16	0.174	0.080	0.045	0.045
9	0.270	0.142	0.149	0.061	0.039	0.036
10	0.237	0.126	0.129	0.046	0.035	0.030

$(\beta = 1/2, \kappa = 1.0, \gamma = 1.0)$.

4.2.2. Fonction de densité conjointe

On passe finalement aux résultats sur la *fdc*. Comme nous l'avons mentionné en décrivant l'algorithme de simulation pour générer les valeurs $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$, la *fdc* est décrite par une surface de densité. On représente cette surface grâce aux valeurs estimées de $f_{XY}(x_0, y_0|U(0) = u)$. Il s'agit donc d'une approximation de la surface de densité.

4.2.2.1. Modèle Classique

La figure 4.1 donne la surface de densité obtenue par simulation "*Ladder Height*" pour le modèle classique (1.3.1)

$$U(t) = u = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \quad (4.2.1)$$

Lorsque les pertes individuelles suivent une distribution exponentielle de moyenne $\mu = 2.0$ et que l'intensité du processus de Poisson composé est fixée à $\lambda = 2.0$, l'espérance du processus au temps 1, E_0 , définie en (1.1.8),

$$E_0 = \int_0^{\infty} \bar{Q}(s) d(s) \quad (4.2.2)$$

se réduit à $E_0 = \lambda\mu = 2.0$ en utilisant la mesure de Lévy (1.3.20) pour le processus de Poisson composé avec réclamations exponentielles. En plus de l'espérance, il nous sera utile de connaître la variance du processus au temps 1, $V(S(1))$, pour pouvoir comparer les différentes surfaces de densité. Dans le cas présent, la variance du processus de Poisson composé avec distribution exponentielle vaut $V(S(1)) = 8$ (Klugman et al. (2004)). On fixe également le surplus initial à $U(0) = 2.0$ et le chargement de sécurité à $\theta = 0.2$. Pour se faire une idée de l'influence du chargement de sécurité θ sur la surface de densité, on peut comparer la figure 4.1 à la figure 4.2. Cette dernière a été générée avec les mêmes paramètres que la précédente à l'exception du chargement de sécurité fixé à $\theta = 0.5$. Si on constate que la forme des surfaces est sensiblement la même, il existe pourtant une différence dans le volume sous celles-ci. Cette observation ne devrait pas choquer

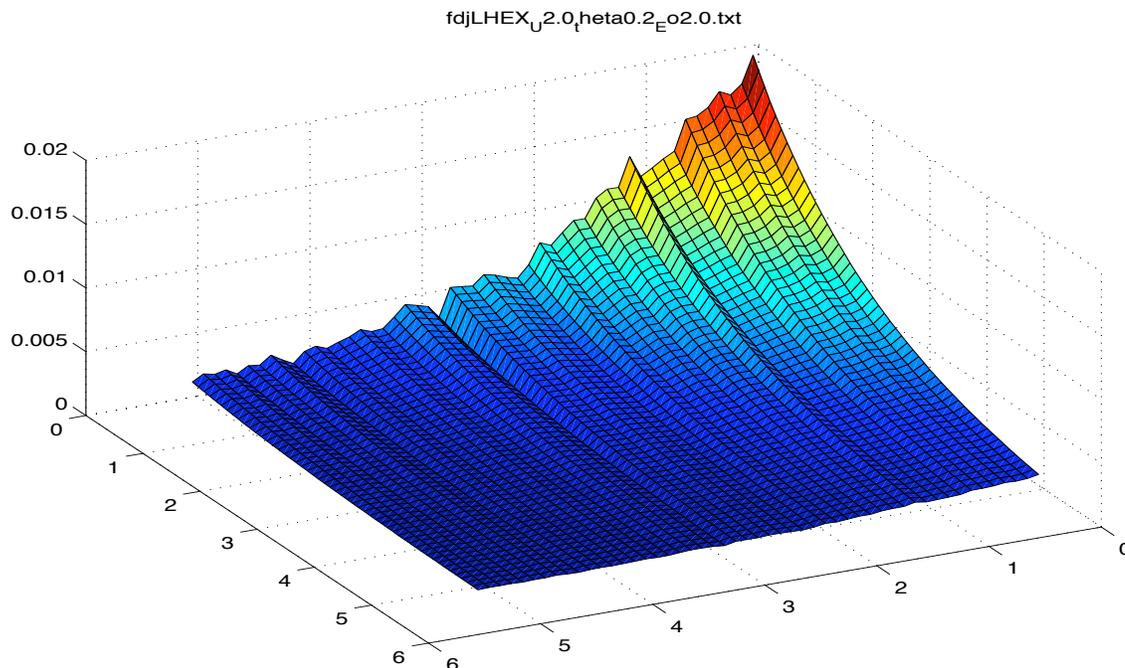


FIGURE 4.1. Modèle classique Exponentiel - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$,
 $E_0 = 2.0$

le lecteur. En effet, l'augmentation du chargement de sécurité θ représente une augmentation du taux de primes $c = (1 + \theta)E_0$. Si le surplus évolue avec un plus haut taux de primes, il est donc naturel que plus d'argent soit accumulé au total. En conséquence, les valeurs possibles de déficit en cas de ruine sont amoindries.

Les deux figures suivantes donnent les surfaces de densité pour le modèle classique lorsque les réclamations individuelles suivent une distribution Pareto (α, θ) de moyenne $\mu = 2.0$. Le processus de Poisson composé a la même intensité que précédemment, $\lambda = 1.0$, et l'espérance au temps 1 est donc $E_0 = \lambda\mu = 2.0$. On choisit les paramètres α et θ tels que la variance du processus de pertes agrégées soit également proche de 8, comme dans le cas Exponentiel précédent. Avec $\alpha = 81.5$ et $\theta = 161$, on obtient $V(S(1)) = 8.1$. Pour les modèles suivants, on fixera l'espérance à la variance du processus à ces mêmes valeurs. L'espérance et la variance sont des indicateurs assez révélateurs de l'intensité moyenne des réclamations *agrégées* et de l'étendue des valeurs possibles. On fait varier le chargement de sécurité de $\theta = 0.2$ dans la figure 4.3 à $\theta = 0.5$ dans la figure 4.4.

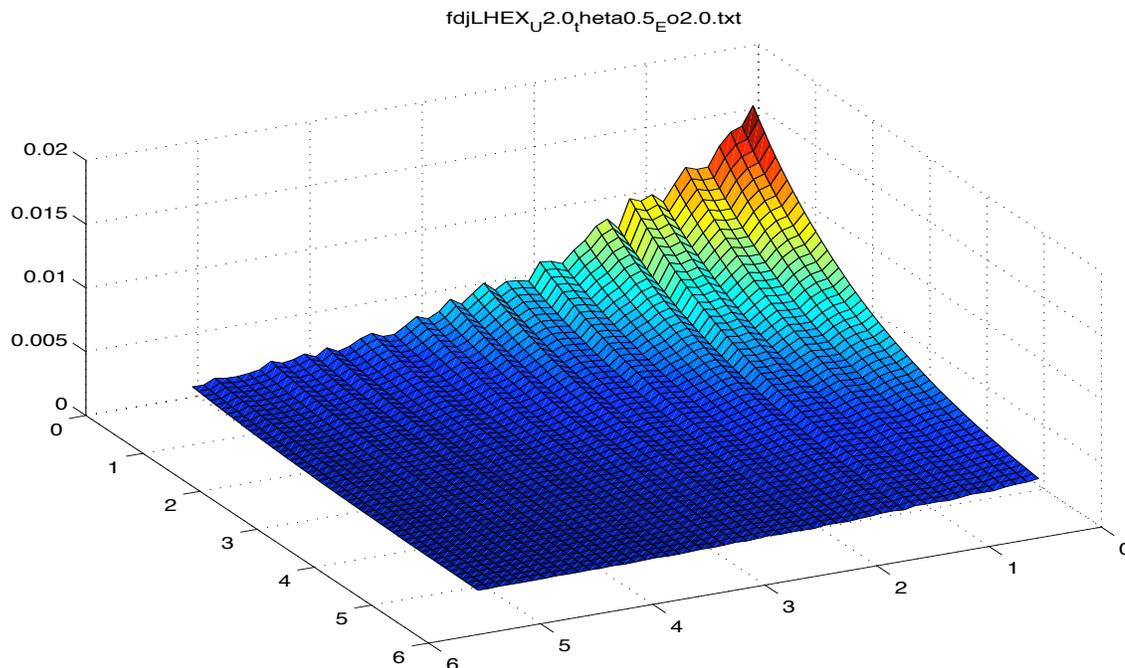


FIGURE 4.2. Modèle classique Exponentiel - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.5$,
 $E_0 = 2.0$

Le surplus initial reste tout le temps fixé à $U(0) = 2.0$. On observe à nouveau le même comportement de la surface de densité que dans le cas Exponentiel.

En ayant sélectionné des paramètres semblables pour les modèles classiques exponentiel et Pareto, on peut comparer l'effet du changement de la distribution des réclamations individuelles sur la surface de densité. On remarque tout d'abord que dans le cas classique Exponentiel, les scénarios de ruine sont caractérisés par une surface de densité à queue¹ plus épaisse que dans le cas classique Pareto. Cette observation est contre-intuitive et peut paraître surprenante. En effet, à espérances égales, la distribution Pareto présente une queue plus épaisse que la distribution exponentielle.

1. On parle généralement de queue pour une distribution univariée. On se permet donc ici cet abus de langage pour faciliter la discussion

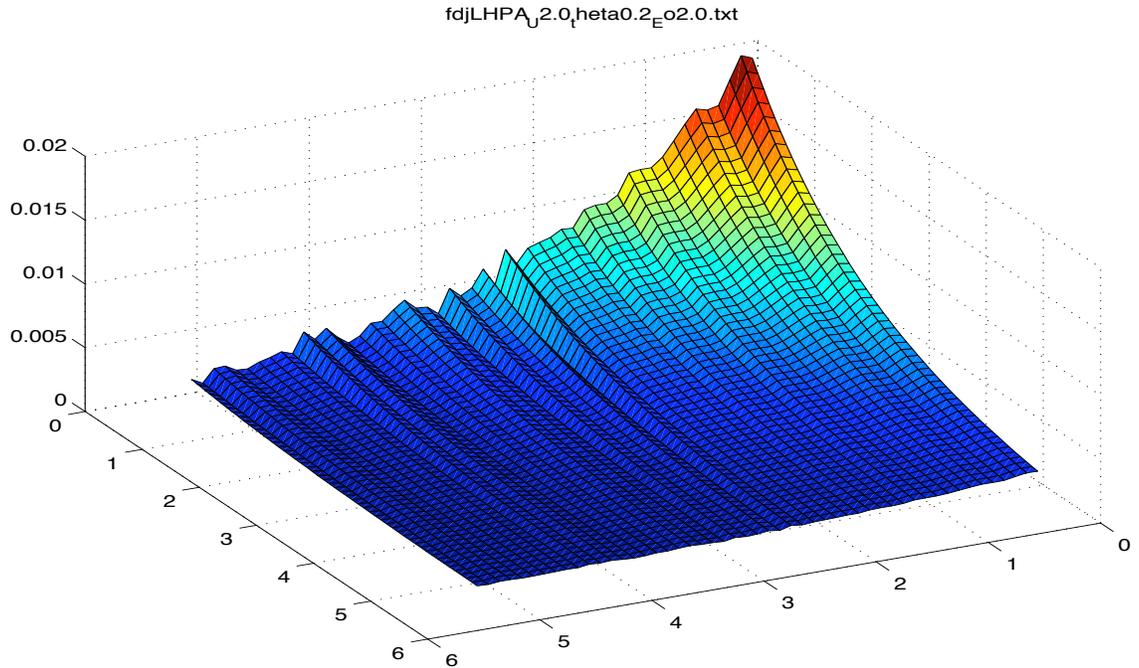


FIGURE 4.3. Modèle classique Pareto - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 2.0$

On passe maintenant à une généralisation du modèle classique, le modèle avec subordonateur Gamma proposé par Dufresne et al. (1991).

4.2.2.2. *Modèle Gamma*

La surface de densité pour le modèle avec subordonateur Gamma de paramètres (a, b) , défini par (1.4.1) :

$$U(t) = u + ct - S_G(t), \quad (4.2.3)$$

est nettement différente de celles observées pour les modèles classiques Exponentiel et Pareto. Pour ce processus, l'espérance au temps 1 est donnée par $E_0 = a/b$, et en choisissant $a = 0.5$ et $b = 0.25$, on fixe $E_0 = 2.0$, et la variance $V(S(1)) = 8$ aux mêmes niveaux que les deux précédents modèles, afin de faciliter la comparaison de leurs surfaces. Celle de la figure 4.5 a été générée avec $U(0) = 2.0$ et $\theta = 0.2$. On remarque immédiatement des différences majeures entre la surface de la figure (4.5) et celles des modèles classiques Exponentiel et Pareto. La pointe de la surface s'affine, et, en contrepartie, les valeurs maximum atteintes sur la

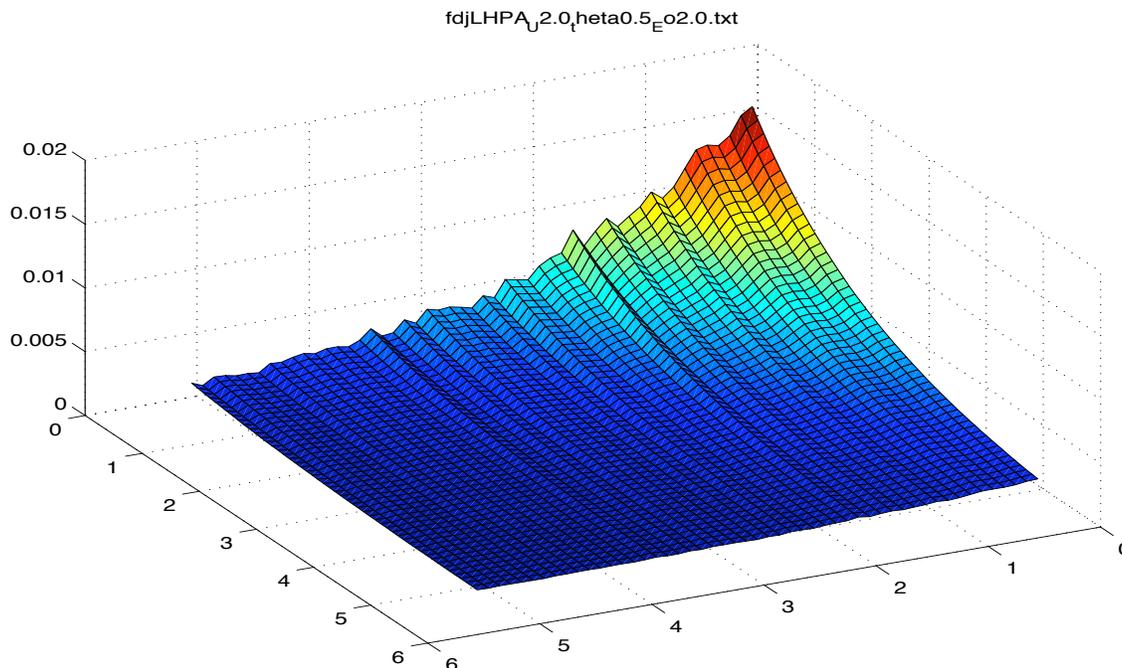


FIGURE 4.4. Modèle classique Pareto - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.5$, $E_0 = 2.0$

surface sont quasiment deux fois plus élevées, autour de $f_{XY}(0.1, 0.1|0.2) = 0.40$. On remarque aussi des queues de surface beaucoup moins épaisses que dans le cas Exponentiel.

Pour apprécier l'impact d'un changement de surplus initial, on a généré la surface de la figure 4.6 en augmentant le surplus initial à $U(0) = 5$.

Le résultat est très surprenant, puisqu'au premier abord, on ne distingue pas de différence entre cette courbe et la précédente. Toutefois, en regardant de plus près cette nouvelle surface et en la comparant à la précédente, du même modèle, on s'aperçoit que la queue de la surface s'épaissit légèrement lorsqu'on passe de $U(0) = 2.0$ à $U(0) = 5.0$. De plus, la lecture des chiffres issus de la simulation permet de confirmer cette observation. Ceci suggère que, dans l'éventualité de la ruine, la réclamation qui cause la ruine pour le processus de surplus, qui a évolué avec les mêmes paramètres que dans la figure 4.5, à l'exception de son surplus initial plus élevé, serait, en moyenne, une réclamation beaucoup plus importante. Cette réclamation serait d'une valeur assez grande pour gruger tout le surplus avant la ruine X , et en plus, provoquer un déficit, en moyenne plus élevé que

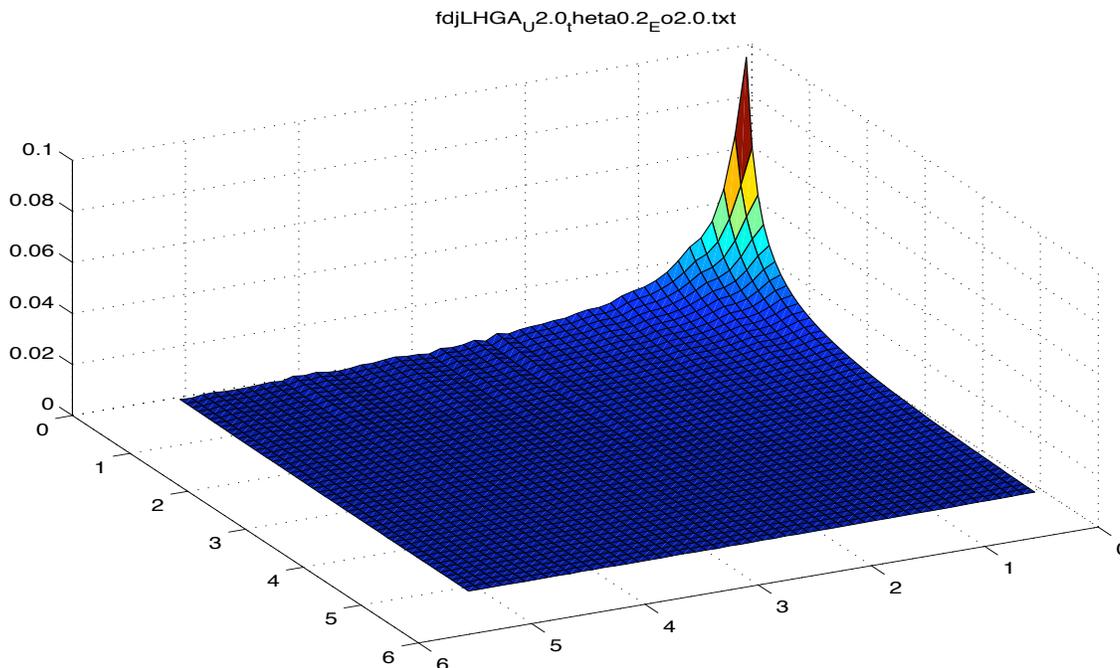


FIGURE 4.5. Modèle Gamma - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 2.0$

dans le cas de la figure 4.5. Ce comportement prend tout son sens quand on se rappelle que la fdc est une fonction de densité "défective"², conditionnelle à l'événement de la ruine. Enfin on présente les résultats pour le modèle de risque déterminé par un subordonateur Général Gaussien Inverse, discuté par Morales (2003).

4.2.2.3. *Modèle Général Gaussien Inverse (GIG)*

Le subordonateur GIG englobe les subordonateurs IG, et RIG, à travers lesquels nous présentons les surfaces de densité pour le modèle de risque déterminé par un subordonateur GIG de paramètres (β, κ, γ) . Ce modèle est défini en (1.5.2) par

$$U(t) = u + ct - S_{GIG}(t), \quad (4.2.4)$$

2. La fdc est une fonction de densité conditionnelle à l'événement de la ruine, et ceci pourrait expliquer certaines des observations contre-intuitive que l'on fait dans cette étude. Une étude statistique plus poussée pour ces résultats serait un excellent moyen d'approfondir ces observations et de mieux les interpréter.

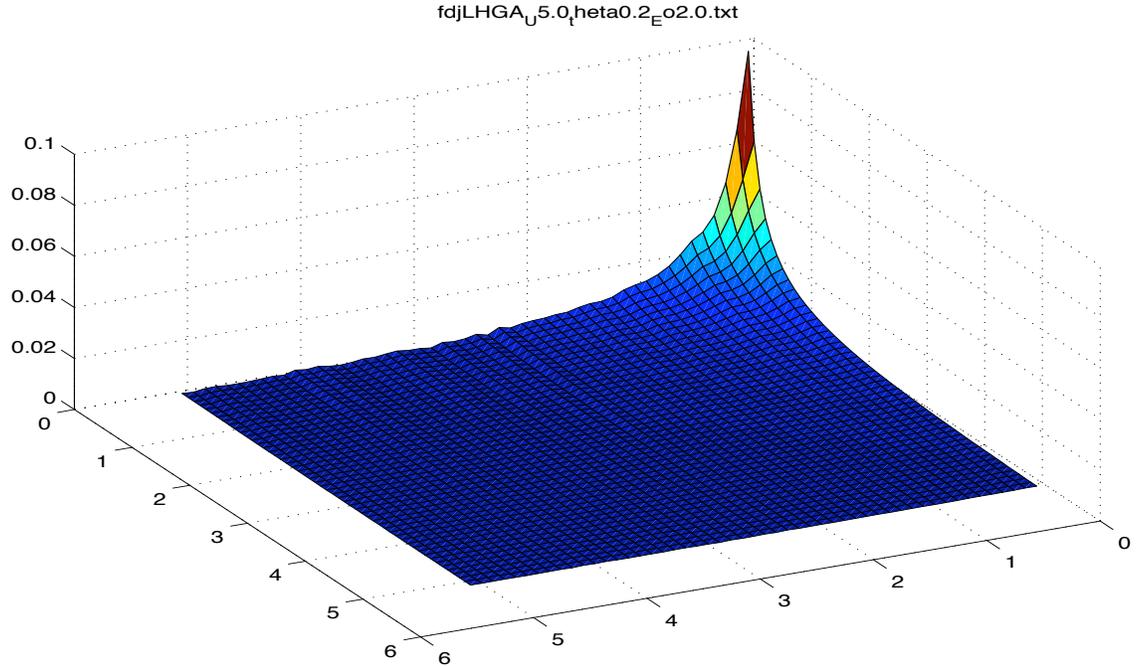


FIGURE 4.6. Modèle Gamma - $U(0) = 5.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 2.0$

et on se rappelle, comme indiqué au Chapitre 1, que, lorsqu'on fixe $\beta = -1/2$, le subordonateur GIG se réduit à un subordonateur IG de paramètres (κ, γ) dont l'espérance au temps 1, est donnée par (1.5.13) $E = \kappa/\gamma$; et lorsqu'on fixe $\beta = 1/2$, le subordonateur GIG se réduit à un subordonateur RIG de paramètres (κ, γ) dont l'espérance au temps 1, est donnée par (1.5.19) $E_0 = (\kappa\gamma + 1)/\gamma^2$ (Morales (2004)). On fixe d'abord les espérances au temps 1 des deux processus à 2.0, pour faciliter la comparaison avec les surfaces des modèles précédents, en choisissant les subordonateurs $IG(\kappa = 1, \gamma = 0.5)$ et $RIG(\kappa = 0.0036, \gamma = 0.708)$. Cette paramétrisation permet également de fixer les variances respectives des processus à $V(S(1)) = 8$. Les surfaces des figures 4.7 et 4.8 sont générées pour $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$.

On observe dans ces deux figures que les pointes des surfaces s'affinent encore plus que dans le cas Gamma et que les queues sont également moins épaisses (i.e. décroissance plus rapide de la surface, dans toutes les directions). Ces caractéristiques ont une interprétation intéressante pour les modèles $IG(\kappa = 1.8, \gamma = 0.9)$ et $RIG(\kappa = 1.0, \gamma = 1.0)$. En effet, ce type de surface, où la majeure partie de la

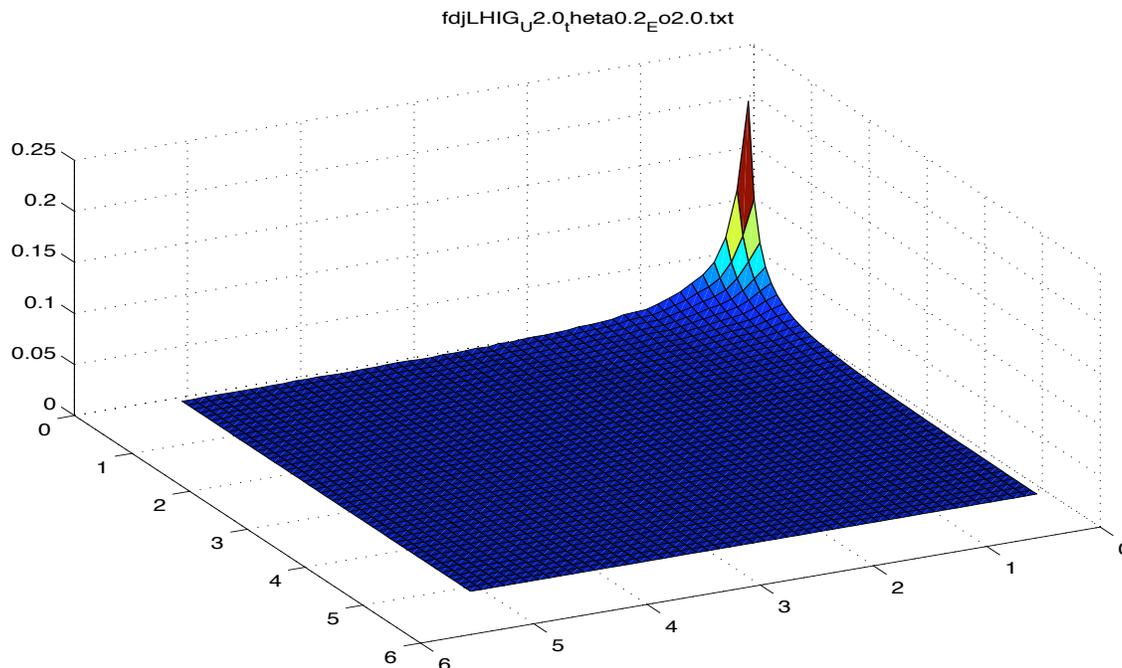


FIGURE 4.7. Modèle IG - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 2.0$

densité est répartie très proche de l'origine (ce qui est propre à cette paramétrisation des processus) indique que la ruine survient dans la majorité des cas pour des "petites" valeurs du surplus avant la ruine X et s'accompagne de "faibles" déficits Y au moment de la ruine, puisque ce sont pour ces petites valeurs de X et Y que la surface indique la plus "lourde" densité.

On génère ensuite deux nouvelles surfaces, pour y observer l'impact d'un changement de l'espérance au temps 1, qui passe de $E_0 = 2.0$ dans les deux figures précédentes, à $E_0 = 5.0$ dans les figures 4.9 et 4.10, générées respectivement avec les subordinateurs $IG(\kappa = 3.95, \gamma = 0.79)$ et $RIG(\kappa = 3.2951, \gamma = 0.885)$ pour garder, autant que possible les mêmes variances au temps 1 proches de $V(S(1)) = 8$. On s'attendra dans ce nouveau scénario de paramètres, à observer des plus grandes valeurs pour la surface de densité (pointes) dues aux réclamations agrégées plus sévères.

Les figures observées sont de même forme que les deux précédentes. Si les résultats semblent se conformer à nos attentes dans le cas IG, il n'en est pas ainsi pour le modèle RIG. En effet, la pointe de la surface pour le modèle IG

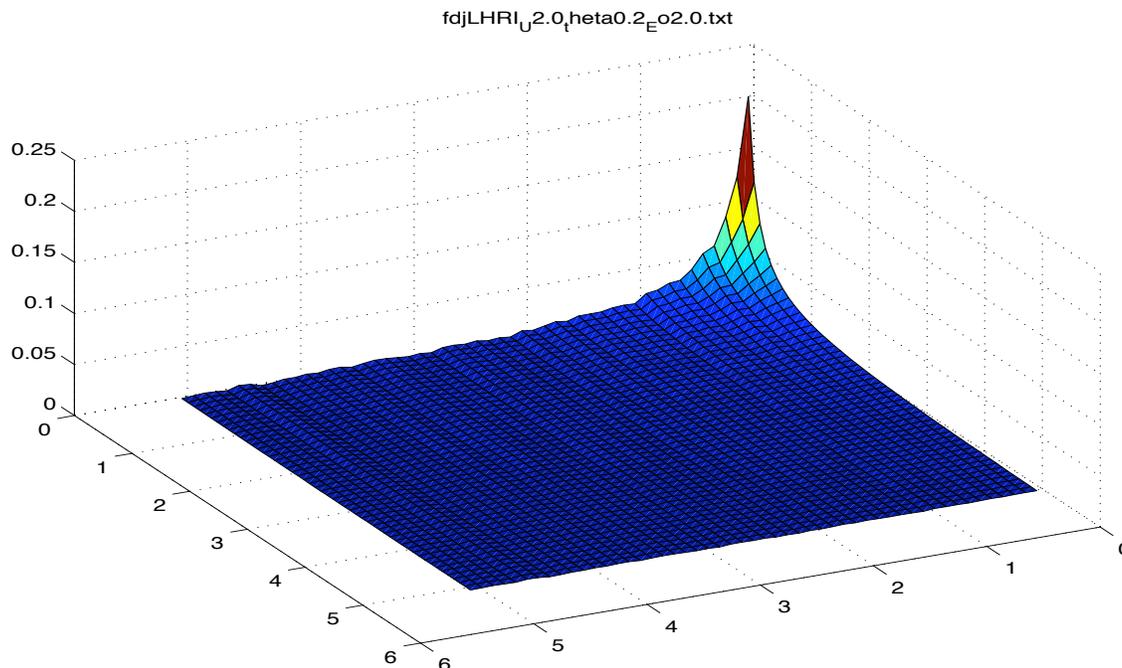


FIGURE 4.8. Modèle RIG - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 2.0$

passe de $f_{XY}(0.1, 0.1|2) = 0.2002$, dans la figure 4.7, à $f_{XY}(0.1, 0.1|2) = 0.3286$ dans la figure 4.9. De plus on observe un épaississement de la queue de la surface dans cette dernière figure. Ces observations numériques sont pleines de sens, puisqu'elles suggèrent que lorsque les réclamations agrégées s'intensifient, passant en moyenne de 2.0 à 5.0, les valeurs possibles de déficit Y sont plus probables (épaississement de la queue). Par contre, pour le modèle RIG, les résultats vont à l'opposé de nos attentes : il aurait été normal d'observer le même comportement que pour le modèle IG. Or, la pointe de la surface pour ce modèle passe de $f_{XY}(0.1, 0.1|2) = 0.2047$, dans la figure 4.8, à $f_{XY}(0.1, 0.1|2) = 0.0939$ dans la figure 4.10. La surface garde la même forme, et proportionnellement à vue d'oeil, la même épaisseur de queue. Ce résultat confirme l'idée qu'un travail ultérieur devrait être entrepris d'un point de vue statistique pour sonder ces échantillons numériques issus de la simulation.

Enfin on peut faire une dernière remarque supplémentaire pour tenter de comprendre la différence de forme entre les surfaces des modèles classiques (Exponentiel et Pareto) et celles des modèles déterminés par les subordinateurs Gamma, IG et RIG. Ces derniers sont composés d'une infinité de petits sauts, ainsi on

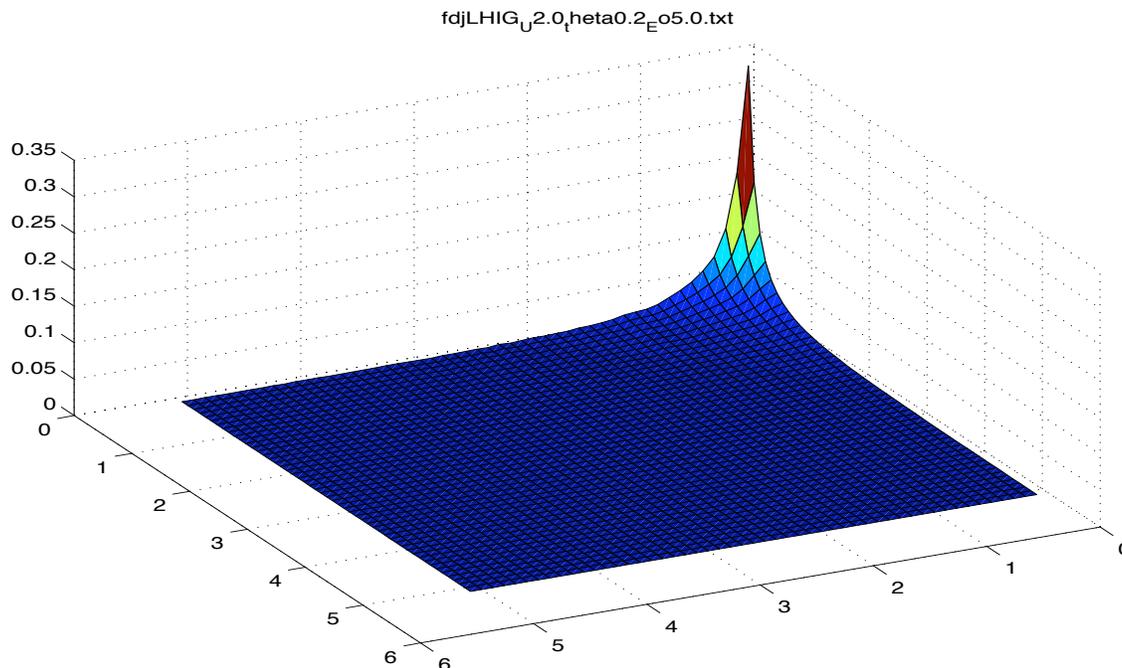


FIGURE 4.9. Modèle IG - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 5.0$

pourrait se trouver en présence de processus de surplus qui s'approchent de 0 lorsqu'ils sont proches de la ruine, et qui tombe en dessous 0 à cause d'une de ces petites réclamations. Ceci expliquerait que la densité soit concentrée près de l'origine.

Les résultats de ces simulations, qui sont, comme on l'a vu, intéressants à interpréter et parfois contre-intuitifs, s'avèrent utiles pour le calcul de mesures de risque, comme nous en avons discuté au Chapitre 2. La section suivante expose ces résultats.

4.3. APPLICATIONS : MESURES DE RISQUE

Pour les modèles étudiés, on a dérivé la fonction de densité marginale du déficit au moment de la ruine, que l'on a normalisée, afin de pouvoir s'en servir pour les calculs des différentes mesures de risque abordées au Chapitre 2, la $VàR$, l'ES, et la mesure de risque spectrale exponentielle. Puisque Y représente le déficit, sa distribution est donc une distribution de pertes. Il est important de s'en souvenir

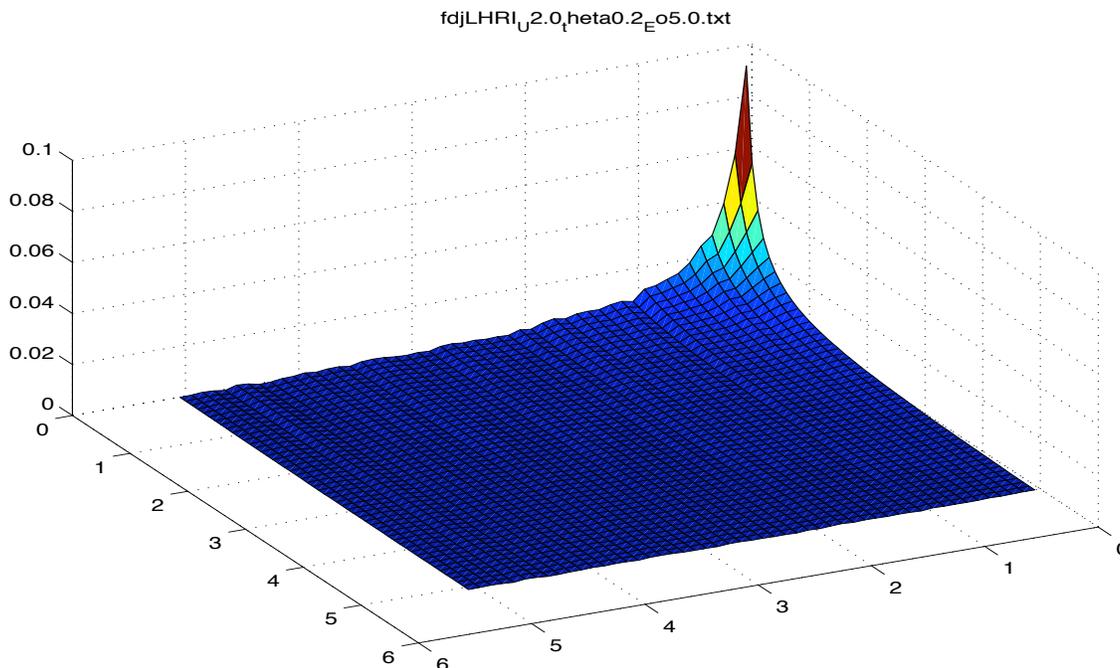


FIGURE 4.10. Modèle RIG - $U(0) = 2.0$, $\theta = 0.2$, $E_0 = 5.0$

pour comprendre le sens des mesures calculées et les interpréter adéquatement. On parlera donc indistinctement de perte ou de déficit.

Le tableau 4.5 donne les valeurs de la $VàR$ à 95%, l'ES à 95% et la mesure de risque spectrale exponentielle calculée pour $\gamma = 0.75$, pour les distributions de pertes (déficit, Y) des modèles de risque dont les surplus sont déterminés respectivement par des processus de pertes agrégées classiques exponentiel ($\lambda = 1, \theta = 1/2$), et Pareto ($\lambda = 1, \theta = 161, \alpha = 81.5$), Gamma($a = 0.5, b = 0.25$), IG($\kappa = 1, \gamma = 1/2$) et RIG($\kappa = 0.0036, \gamma = 0.708$). Les paramètres de ces processus sont restés les mêmes qu'à la section précédente pour que le "comportement" des pertes soit le plus comparable possible, i.e. espérance et variance égales.

Les processus de surplus ont gardé les mêmes paramètres de référence que dans la section précédente, c'est à dire $U(0) = 2.0$ et $\theta = 0.2$.

Une remarque concernant les valeurs de mesures de risque. Les valeurs figurant dans le tableau 4.5 ont été calculées avec la même précision que celle utilisée pour générer les graphiques. Or cette précision a été réduite pour pouvoir offrir au

TABLE 4.5. Mesures de risque pour différents processus de surplus déterminés par des subordonateurs de Lévy

Mesure	Exp	Par	Gamma	IG	RIG
VaR 95%	4.1726	4.1757	4.0694	3.9560	4.5383
ES 95%	5.0646	5.0856	4.9393	4.7779	5.1923
SERM ($\gamma = 0.1$)	3.9748	3.9762	3.8030	3.6420	4.3819

lecteur des surfaces lisibles. En effet, si la précision est augmentée, il devient très difficile de visualiser les surfaces puisque le nombre de points servant à créer celle-ci, croît de manière exponentielle : pour chaque décimale de précision apportée au quadrillage du plan $(x, y, 0)$, le nombre de points est multiplié par 100.

4.3.1. VaR

La première ligne du tableau affiche les valeurs de la VaR à 95%. Ces valeurs ont été calculées avec une interpolation linéaire pour diminuer l'effet d'avoir des données discrètes. Cependant, même des données continues ne donneraient pas de valeurs *très* différentes. On peut donc considérer cette valeurs et leur précisions, pour l'interprétation qu'on en donne.

Considérons un exemple simplifié : Si un analyste, travaillant pour une compagnie d'assurance, avait la charge de calculer la VaR pour une ligne d'affaire dont les pertes agrégées sont modélisés par un processus Gamma par exemple, il pourrait annoncer à son patron ses résultats de la manière suivante :

Dans l'éventualité d'un scénario de ruine, il y a 95% de probabilité que les pertes soient inférieures à 4.0694.

A partir de cette information un organisme de régulation gouvernemental, comme le BSIF au Canada, pourrait exiger de la compagnie de se doter d'un niveau de capital initial $U(0)$ plus élevé, afin de continuer à exercer ses affaires.

Toujours est-il que cet indicateur est une borne inférieure des 5% pires pertes possibles (ou borne supérieure des 95% moins grandes pertes), et que l'ES peut

nous renseigner différemment sur l'impact et la sévérité du déficit dans un scénario de ruine.

4.3.2. Expected Shortfall

La seconde ligne du tableau 4.5 indique les valeurs de l'ES à 95% pour les 5 modèles de risque de cette étude. Les valeurs de l'ES sont cohérentes par rapport à celles de la VaR , puisqu'elles sont toutes supérieures à cette dernière. On se rappellera, en effet, que l'ES à 95% est une moyenne des 5% pires pertes possibles, alors que la VaR est la plus petite des pertes parmi ces 5%. La moyenne sera donc supérieure (ou égale, dans des cas dégénérés avec une seule donnée) à la plus petite valeur.

On peut donner un sens en mots, explicitement, à cette mesure. Si on considère, par exemple, le modèle RIG, la valeur de l'ES correspondante pourrait signifier que

Dans un scénario de ruine, si la perte encaissée est supérieure à 4.583³, alors on s'attend à ce qu'elle soit, en moyenne, de 4.7779.

Clairement, l'ES donne une idée plus générale de la sévérité d'une perte extrême. Par contre, en tant que moyenne, cet indicateur de tendance générale ne donne pas d'information sur la dispersion des pertes, comme le ferait par exemple l'écart-type. En prenant l'approche actuarielle, il serait judicieux d'enrichir cette moyenne par la variance correspondante⁴.

La dernière mesure que nous présentons est la mesure de risque spectrale, basée sur la fonction d'aversion au risque exponentielle. Son interprétation est moins simple à faire que les deux précédentes, mais l'information communiquée par cette mesure apporte plus de détails sur le comportement du déficit.

3. 4.583 représente la valeur de la VaR à 95%

4. On ne fera pas ici ce calcul simple car notre objectif n'est pas de creuser ces exemples simplifiés en profondeur, mais plutôt de donner une idée des différentes applications auxquelles peut servir la *fdc*.

4.3.3. Mesure de risque spectrale Exponentielle (SERM)

La dernière ligne du tableau 4.5 nous renseigne sur les valeurs de la mesure de risque spectrale exponentielle. Elle a été calculée pour un paramètre $\gamma = 0.1$, qui est une valeur indiquant une aversion au risque assez marquée, i.e. qui caractérise le comportement d'un agent du marché qui prend peu de risque. On remarque que, pour tous les modèles, les valeurs de SERM sont inférieures à la *VàR* et l'ES correspondante. Ceci indique que la SERM, avec un paramètre $\gamma = 0.1$, indique une plus grande aversion au risque que les deux autres mesures.

CONCLUSION

On considère, dans ce mémoire, un modèle de risque déterminé par un subordonateur de Lévy. Notre objectif est de simuler la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine pour chacun de ces modèles, en exploitant les propriétés des fonctions de pénalité escomptée (fonction GS) correspondantes. Cette fonction englobe la probabilité ultime de ruine ainsi que la fdc , et en s'inspirant de l'approche de simulation pour la probabilité ultime de ruine, on propose une méthode permettant de simuler la fdc . L'application directe qui est faite de ses résultats, dans le cadre des mesures de risques, motivent ce travail.

La fonction GS satisfait à une équation de renouvellement. Généralement les solutions de ce type d'équations pour la fonction GS sont de forme ouverte et sont donc inexploitable d'un point de vue numérique. Or pour les modèles présentés dans cette étude, ces solutions offrent une interprétation probabiliste qui permet de réaliser les simulations et ainsi d'obtenir de l'information numérique sans passer par le calcul analytique direct. Cette interprétation repose sur la décomposition "*Ladder Height*" de la probabilité ultime de ruine pour le modèle classique, qui se généralise aux modèles avec subordonateurs Gamma, Inverse Gaussien et Réciproque Inverse Gaussien.

Les Chapitres 1 et 2 dressent l'ensemble des résultats dont on se sert pour faire les simulations et les applications numériques. Le coeur de ce travail repose dans le Chapitre 3, où on expose, en détails, la méthode développée. L'introduction du concept de "*Ladder Height*" et son application pour la simulation de la probabilité ultime de ruine sont utilisées pour simuler la fdc . Cette simulation repose sur une programmation rigoureusement développée, entièrement codée en Java, à l'aide

de la librairie SSJ du Professeur P.L'Ecuyer . De plus, développer ces algorithmes par moi-même m'a permis de développer des compétences de programmation et notamment des notions de simulation stochastique. Finalement, les mesures de risques et les graphiques présentés au Chapitre 4 ont été produits à l'aide de Matlab. L'ensemble des outils développés pour réaliser ce travail, est assez avancé, et a fait l'objet de beaucoup d'automatisation. Le côté technique de ce mémoire (outils de simulation et exploitation des données) a été un aussi gros défi que le côté théorique (Revue de littérature, découverte de notions probabilités nouvelles et avancées).

Cette étude numérique sur de tels modèles de risque, nouvelle en son genre, mérite d'être complétée, en l'enrichissant d'une analyse statistique approfondie, en travaillant plus longuement la calibration des modèles et en améliorant encore plus les performances de simulation. Ces additions seraient de très bons objectifs pour un travail futur. Enfin un travail visant à généraliser la simulation de la *fdc* à des modèles déterminés par des processus de Lévy serait à mon sens un apport intéressant d'un point vue appliquée dans la littérature de Théorie du risque.

Annexe A

CODE DE PROGRAMMATION

A.1. SIMULATION EN JAVA : SIMJAVA2

```

// SIMJAVA2
//
// Version : 2.2
// IDE : Xcode 3.1
// OS : Mac OS X 10.5.7
// =====
// Créé par Rabi Ibrahim.
// Departement de Mathematiques et Statistiques
// Universite De Montreal
// Copyright (c) 2009 Rabi Ibrahim tous droits reserves.
// =====
//
// Utilisation en ligne de commande:
// args[0] : Nombre de simulations
// args[1] : Surplus initial  $U(0) = u$ 
// args[2] : Chargement de sécurité
// args[3] : -----
// args[4] : taux d'arrivee des reclamations du processus de Poisson
// args[5] : -----
// args[6] : Horizon de temps pour la simulation
// args[7] : -----
// args[8] : Parametre pour les reclamations exponentielles
// args[9] : -----
// args[10]: Parametre 1 pour les reclamations Pareto
// args[11]: -----
// args[12]: Parametre 2 pour les reclamations pareto
// args[13]: -----
// args[14]: Parametre 1 pour le Processus Gamma
// args[15]: -----
// args[16]: Parametre 2 pour le Processus Gamma
// args[17]: -----
// args[18]: Parametre 1 pour le Processus Reciproque Inverse Gaussien Gig 1
// args[19]: -----
// args[20]: Parametre 2 pour le Processus Reciproque Inverse Gaussien Gig 1
// args[21]: -----
// args[22]: Parametre 1 pour le Processus Inverse Gaussien Gig 2
// args[23]: -----
// args[24]: Parametre 2 pour le Processus Inverse Gaussien Gig 2
// args[25]: -----
// args[26]: Nombre de realisation de Z pour generer fddz
// args[27]: -----
// args[28]: nombre de points  $x_0$  et  $y_0$  qui quadrillent le plan a prtir de  $U(o)=u$  car
= 0 avant
// args[29]: -----
// args[30]: spanfddZ largeur des intervalles du support de fddz
// args[31]: -----
// args[32]: spanfdj largeur des intervalles du support de  $fx_0y_0$  (precision)
// args[33]: -----
// args[34]:
// args[35]:
// args[36]:
// args[37]:
// =====
//

```

```

// Notes:
// Ce programme génère:
//   - des simulations de probabilité de ruine pour un processus de surplus.
//   - des réalisations de variables aléatoires permettant de dresser des
//     histogrammes de la fonction de densité conjointe du "overshoot" et
//     du "undershoot" pour le même processus.
//
// Ce programme utilise certaines méthodes et instances de la librairie SSJ
// développé au DIRO de l'UDM ainsi que sur la librairie du Pfr Flanagan,
// qui permet de générer nativement en Java des valeurs de fonctions Gamma (inférieures
// ,
// supérieures, standard etc..).
// =====
//
// Remerciements:
// Richard Simard, du DIRO, pour m'avoir expliqué le fonctionnement de la
// fonction de findroot ainsi que pour m'avoir fourni les 20 premières
// constantes permettant de calculer les séries de Tchebychev pour générer la
// fonction intégrale.
// =====

import java.util.*;
import java.text.NumberFormat;
import java.text.DecimalFormat;
import java.io.BufferedWriter;
import java.io.File;
import java.io.FileWriter;
import java.io.IOException;
import java.util.Calendar;
//import java.io.BufferedReader;
//import java.io.FileReader;

import umontreal.iro.lecuyer.rng.*;
import umontreal.iro.lecuyer.probdist.*;
import umontreal.iro.lecuyer.randvar.*;
import umontreal.iro.lecuyer.randvar.GeometricGen;
import umontreal.iro.lecuyer.stat.*;
import umontreal.iro.lecuyer.util.*;
import umontreal.iro.lecuyer.fonctions.MathFunction;

import flanagan.analysis.Stat;

public class Simjava2 {

    static RandomStream streamMRG = new MRG32k3a();
    static RandomStream streamLFS = new LFSR113();
    static RandomStream streamMRG2 = new MRG32k3a();
    static RandomStream streamMRG2Zx0 = new MRG32k3a();

```

```

static ExponentialGen genCPTi ;
static ExponentialGen genCPEpXi;
static ParetoLomaxGen genCPParXi;
static GeometricGen genLHGeometric;
static UniformGen genUniformLH = new UniformGen(streamMRG) ;
static UniformGen genUnifFdjLH ;

public static void main (String args[]) {

    // Declaration des variables

    // Parametres du Processus de Surplus

    int nbSimul = Integer.parseInt(args[0]);
    double surplusInitial = Double.parseDouble(args[1]);
    double thetaSL = Double.parseDouble(args[2]); // Chargement de securite

    // Parametres Processus Poisson compose (CP)
    double lambdaCP = Double.parseDouble(args[4]); //taux d'arrivée du Proc de
Poisson
    double thetaCPEpTi = 1/lambdaCP ; // temps d'attente exponentiel entre les
arrivees. moyenne = lambdaCP
    ExponentialGen genCPTi = new ExponentialGen(streamMRG, lambdaCP); // generateur
des variables de temps d'attente Ti
    double timeLimit = Double.parseDouble(args[6]);

    // Parametres CPEpXi
    double thetaCPEpXi = Double.parseDouble(args[8]); // reclamations
exponentielles. moyenne = 1/thtaCPEpXi
    genCPEpXi = new ExponentialGen(streamMRG, thetaCPEpXi); // generateur de ces
variables
    FonctionCPEp fCPEp = new FonctionCPEp(thetaCPEpXi);
    FonctionqCPEp qCPEp = new FonctionqCPEp(thetaCPEpXi, lambdaCP);

    // Parametres CPParXi . Pareto Lomax. Comme dans loss models
    double thetaCPParXi = Double.parseDouble(args[10]); // Param pour reclamations
Pareto
    double alphaCPParXi = Double.parseDouble(args[12]); // Moyenne = thetaCPParXi/
(alphaCPParXi - 1)
    genCPParXi = new ParetoLomaxGen(streamMRG, alphaCPParXi, thetaCPParXi);
    FonctionCPPar fCPPar = new FonctionCPPar(alphaCPParXi, thetaCPParXi);
    FonctionqCPPar qCPPar = new FonctionqCPPar(alphaCPParXi, thetaCPParXi, lambdaCP)
;

    // Parametres pour le processus Gamma
    double aGamma = Double.parseDouble(args[14]);
    double bGamma = Double.parseDouble(args[16]);
    genLHGeometric = new GeometricGen(streamMRG, thetaSL/(1.0 + thetaSL));
    FonctionGamma fGamma = new FonctionGamma(bGamma);
    FonctionqGamma qGamma = new FonctionqGamma(aGamma, bGamma);

```

```

// Parametres pour le processus Reciproque Inverse Gaussien
double gammaGig1 = Double.parseDouble(args[18]);
double kappaGig1 = Double.parseDouble(args[20]);
FunctionRIG fRIG = new FunctionRIG(gammaGig1, kappaGig1);
FunctionqRIG qRIG = new FunctionqRIG(aGamma, bGamma);

// Parametres pour le process Inverse Gaussien
double gammaGig2 = Double.parseDouble(args[22]);
double kappaGig2 = Double.parseDouble(args[24]);
FunctionIG fIG = new FunctionIG(gammaGig2, kappaGig2);
FunctionqIG qIG = new FunctionqIG(kappaGig2, gammaGig2);

//Parametre pour les simulation de fdj
int nbSimulZ = Integer.parseInt(args[26]); // nombre de realisation de Z pour gé
nérer la densité fZ
int Nx0 = Integer.parseInt(args[28]); //nombre de points x0 et y0 qui
quadrillent le plan
double spanfddZ = Double.parseDouble(args[30]); //précision des intervalles de
fZ
double spanfdj = Double.parseDouble(args[32]);

System.out.println("Starting all simluations");
System.out.println("Debut: "+Calendar.getInstance().getTime());
System.out.println();
System.out.println();
System.out.println();

//affichage des variables
System.out.println("args[0] - Nombre de simulations : " + nbSimul);
System.out.println("args[1] - Surplus Initial : " + surplusInitial);
System.out.println("args[2] - Chargement de sécurité : " + thetaSL);
System.out.println("\n");
System.out.println("===Processus de Poisson===");
System.out.println("args[4] - lambda = " + lambdaCP);
System.out.println("args[6] - T = " + timeLimit);
System.out.println("\n");
System.out.println("===Reclamations Exponentielles===");
System.out.println("args[8] - theta = " + thetaCPExpXi + " Moyenne : " + 1/
thetaCPExpXi);
System.out.println("\n");
System.out.println("===Reclamations Pareto===");
System.out.println("args[10] - theta = " + thetaCPParXi);
System.out.println("args[12] - alpha = " + alphaCPParXi + " Moyenne : " +
thetaCPParXi/(alphaCPParXi - 1));
System.out.println("\n");
System.out.println("===Processus Gamma===");
System.out.println("args[14] - a = " + aGamma);
System.out.println("args[16] - b = " + bGamma);
System.out.println("\n");
System.out.println("===Processus Reciproque Inverse Gaussien (RIG - GiG1) ===");
;

System.out.println("args[18] - gamma = " + gammaGig1);
System.out.println("args[20] - kappa = " + kappaGig1);
System.out.println("E0 = " + (kappaGig1*gammaGig1 + 1)/(gammaGig1*gammaGig1));

```

```

System.out.println("\n");
System.out.println("===Processus Inverse Gaussien (IG - GiG2) ===");
System.out.println("args[22] - gamma = " + gammaGig2);
System.out.println("args[24] - kappa = " + kappaGig2);
System.out.println("E0 = " + kappaGig2/gammaGig2);
System.out.println("\n");
System.out.println("===Simulation de la fdj===");
System.out.println("args[26] - Nombre de realisations de Z pour : " + nbSimulZ);
System.out.println("args[28] - Nombre de points qui quadrillent les axes x0 et
y0 de l'espace : " + Nx0);
System.out.println("args[30] - Largeur des intervalles du support de la fddz : "
+ spanfddZ);
System.out.println("args[32] - Largeur des intervalles du support de la fdj : " +
spanfdj);

//Debut des simulations

// SECTION DES PSI(u) CLASSIQUE par COMPOUND POSSION

// Modele classique, reclamations exponentielles
compoundPoissonProcess("EX", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, (1+thetaSL)*
lambdaCP*(1/thetaCPEXPxi), timeLimit, genCPEXPxi, genCPTi);

// Modele classique, reclamations Pareto
compoundPoissonProcess("PA", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, (1+thetaSL)*
lambdaCP*thetaCPParXi/(alphaCPParXi - 1), timeLimit, genCPParXi, genCPTi);

// SECTION DES LH PSI(u)

// Modele classique, reclamations exponentielles
psiLH("EX", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, genLHGeometric, fCPEXP);

// Modele classique, reclamations Pareto
psiLH("PA", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, genLHGeometric, fCPPar);

// Modele avec subordonateur Gamma
psiLH("GA", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, genLHGeometric, fGamma);

// Modele avec subordonateur RIG (Reciproque Inverse Gaussien)
psiLH("IG", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, genLHGeometric, fIG);

// Modele avec subordonateur IG (Inverse Gaussien)
psiLH("RI", nbSimul, surplusInitial, thetaSL, genLHGeometric, fRIG);

// SECTION DES LH fdj

// Modele classique, reclamations exponentielles
fdjLH("EX", nbSimulZ, Nx0, surplusInitial, lambdaCP/thetaCPEXPxi, thetaSL,
spanfddZ, spanfdj, genUnifFdjLH, genLHGeometric, fCPEXP, qCPEXP);

// Modele classique, reclamations Pareto
fdjLH("PA", nbSimulZ, Nx0, surplusInitial, lambdaCP*thetaCPParXi/(alphaCPParXi -
1), thetaSL, spanfddZ, spanfdj, genUnifFdjLH, genLHGeometric, fCPPar, qCPPar);

```

```

// Modele avec subordonateur Gamma
fdjLH("GA", nbSimulZ, Nx0, surplusInitial, aGamma/bGamma, thetaSL, spanfddZ,
spanfdj, genUnifFdjLH, genLHGeometric, fGamma, qGamma);

// Modele avec subordonateur IG (Inverse Gaussien)
fdjLH("IG", nbSimulZ, Nx0, surplusInitial, kappaGig2/gammaGig2, thetaSL,
spanfddZ, spanfdj, genUnifFdjLH, genLHGeometric, fIG, qIG);

// Modele avec subordonateur RIG (Reciproque Inverse Gaussien)
fdjLH("RI", nbSimulZ, Nx0, surplusInitial, (kappaGig1*gammaGig1 + 1)/(gammaGig1*
gammaGig1), thetaSL, spanfddZ, spanfdj, genUnifFdjLH, genLHGeometric, fRIG, qRIG);

System.out.println();
System.out.println();
System.out.println();
System.out.println("Finished running all simulation(s)");
System.out.println("fin: " + Calendar.getInstance().getTime());

}

//
// DIRECT SURPLUS PROCESS SIMULATION
//
//
//

static void compoundPoissonProcess(String severityType, int nbSimul, double
surplusInitial, double theta, double cPremium, double timeLimit, RandomVariateGen
randVarGen, ExponentialGen genCPTi){

System.out.println();
System.out.println("=====Starting=====
==");
System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
System.out.println();
System.out.println("Starting Compound Poisson Simulation with " + severityType
+ " severity" + " U=" + surplusInitial+ " theta=" + theta);
System.out.println("taux de primes c :" + cPremium);

//variables pour ecriture dans fichier
String outfile = "psiCP"+ severityType + "_U" + surplusInitial+ "_theta" + theta
+".txt" ;
BufferedWriter bw ;

try{
bw = new BufferedWriter(new FileWriter(outfile));
simulateCPRuns(bw, nbSimul, surplusInitial, cPremium, timeLimit, randVarGen,

```

```

genCPTi);
    bw.close();
}catch(Exception e){
    System.out.print("Erreur : ");
    e.printStackTrace();
    System.exit(1);
}

    System.out.println("Finished Compound Poisson Simulation with " + severityType
+ " severity");
    System.out.println();
    System.out.println("=====Ended=====
==");
    System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
    System.out.println();
}

    static void simulateCPRuns(BufferedWriter bw, int nbSimul, double surplusInitial,
double cPremium, double timeLimit, RandomVariateGen randVarGen, ExponentialGen genCPTi){

    TallyStore statT = new TallyStore (nbSimul);
    TallyStore statU1 = new TallyStore (nbSimul);
    TallyStore statU2 = new TallyStore (nbSimul);
    TallyStore statU3 = new TallyStore (nbSimul);
    TallyStore statRuin = new TallyStore (nbSimul);

    double[] buffer = new double[4];
    try{
        bw.write("n"+" "+"ruine"+" "+"X"+" "+"Y"+" "+"T+"\n");
    }catch(Exception e){
        System.out.print("Erreur : ");
        e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
        System.exit(1);
    }
    for (int i=1; i<=nbSimul; i++){
        buffer[0] = 0.0;//temps
        buffer[1] = 0.0;//surplus final si survie ou dsuplus avant la ruine (i.e. X)
        si ruine
        buffer[2] = 0.0;// deficit
        buffer[3] = 0.0;//indicateur ruine=1 survie=0
        buffer = simulateOneCPRun(randVarGen, genCPTi, surplusInitial, cPremium,
timeLimit);
        statT.add (buffer[1]);
            statU1.add (buffer[2]);
        statU2.add (buffer[2]);
        statU3.add (buffer[1] - buffer[2]);
        statRuin.add (buffer[3]);

        try{
            bw.write(i+" "+buffer[3]+" "+buffer[1]+" "+buffer[2]+" "+buffer[0)+"\n");
        ;
        }catch(Exception e){

```

```

        System.out.print("Erreur : ");
        e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
        System.exit(1);
    }
}
try{
    bw.write("INFOS SUR LA RUINE"+"\\n");
    bw.write(statRuine.report() + "\\n");
}catch(Exception e){
    System.out.print("Erreur : ");
    e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
    System.exit(1);
}
System.out.println("INFOS SUR LA RUINE");
System.out.println(statRuine.report ());
System.out.println();
}

```

```

static double[] simulateOneCPRun(RandomVariateGen randVarGen, ExponentialGen genCPTi
, double surplusInitial, double cPremium, double timeLimit){

```

```

    double[] result = new double[4]; // result: 0- Temps. 1-U1. 2-U2. 3-ruine

```

```

    double Ti = 0.0;

```

```

    double Xi = 0.0;

```

```

    double S = 0.0; //la somme (i.e. proc de pertes agregées)

```

```

    double c = cPremium;

```

```

    double U = surplusInitial ;

```

```

    result[0] = 0.0; // Temps

```

```

    result[1] = 0.0; //Surplus avant la ruine, ou Suplus final si survie

```

```

    result[2] = 0.0; //deficit au moment de la ruine ou 0 si survie

```

```

    result[3] = 0.0; // indcateur de la ruine: ruine=1 survie=0

```

```

do{

```

```

    Ti = genCPTi.nextDouble();

```

```

    result[0] += Ti;

```

```

    U+= c*Ti;

```

```

    Xi = randVarGen.nextDouble();

```

```

    if((U-Xi)< 0.0){ // Si ruine

```

```

        result[1] = U; //on récupère le surplus avant la ruine, X

```

```

        result[2] = U - Xi; // on recupere le deficit, Y

```

```

        result[3] = 1.0; // on recupere l'indicateur de la ruine

```

```

        break;

```

```

    }

```

```

    U -= Xi;

```

```

}while(result[0]< timeLimit);

```

```

    if(result[3] == 1){ // si ruine
        return result; // on sort de la fonction
    }
    else{ // si survie
        result[1] = U - Xi; // on récupère le surplus final
        return result; // et on sort de la fonction
    }
}

//
//
//     LH PSI
//
//

    static void psiLH(String procesType, int nbSimul, double surplusInitial, double
theta, GeometricGen genLHGeometric, MyMathFunction LHDist){

        System.out.println();
        System.out.println("=====Starting=====
=====");
        System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
        System.out.println();
        System.out.println("Starting Ladder Height Simulation with " + procesType + "
driven Risk process" + " U=" + surplusInitial + " theta=" + theta);

        //variables pour ecriture dans fichier
        String outfile = "psiLH_"+ procesType + "_U"+ surplusInitial + "_theta" + theta
+".txt" ;
        BufferedWriter bw ;

        System.out.println("Running simulation");
        try{
            bw = new BufferedWriter(new FileWriter(outfile));
            simulatePsiLH(bw, nbSimul, surplusInitial, genLHGeometric, LHDist);
            bw.close();
        }catch(Exception e){
            System.out.print("Erreur : ");
            e.printStackTrace();
            System.exit(1);
        }

        System.out.println("Finished LH Simulation with " + procesType + " driven Risk
process");
        System.out.println();
        System.out.println("=====Ended=====
==");
        System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
        System.out.println();

```

```

}

static void simulatePsiLH(BufferedWriter bw, int nbSimul, double surplusInitial,
GeometricGen genLHGeometric, MyMathFunction LHDist){
    TallyStore statPsiu = new TallyStore(nbSimul);

    double[] buffer = new double[2];
    buffer[0] = 0.0;
    buffer[1] = 0.0;
    try{
        bw.write("n"+" "+"ruine"+" "+"vaGC+"\n");
    }catch(Exception e){
        System.out.print("Erreur : ");
        e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
        System.exit(1);
    }

    for (int i=1; i<=nbSimul; i++){
        //System.out.println("===== Simulation PSI LH No " + i + "
=====");
        buffer[0] = 0.0;
        buffer[1] = 0.0;
        buffer = simulateOneLHRun(surplusInitial, genLHGeometric, LHDist);
        statPsiu.add (buffer[0]);
        try{
            bw.write(i+" "+buffer[0]+" "+buffer[1)+"\n");
        }catch(Exception e){
            System.out.print("Erreur : ");
            e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
            System.exit(1);
        }
        //System.out.println("===== Fin Simulation " + i + " ==
=====");
    }

    System.out.println("INFOS SUR LA RUINE");
    System.out.println(statPsiu.report ());

}

```

```

static double[] simulateOneLHRun(double surplusInitial, GeometricGen genLHGeometric,
MyMathFunction LHDist){

    double[] result = new double[2];
    result[0] = 0.0; // indicateur de ruine
    result[1] = 0.0; // v.a. Geometrique composee

    int ruine ;

    int M = genLHGeometric.nextInt();

    for(int i = 1; i<= M; i++){

```

```

        result[1] += LHDistNextDouble(LHDist) ;
    }

    if(result[1] > surplusInitial){
        result[0]= 1 ;
    }
    else{
        result[0] = 0 ;
    }
    return result;
}

//
//
//    LH fdj
//

//fonction qui organise la simulation de la fdj
static void fdjLH(String processType, int Nbz, int Nx0, double u, double E0, double
theta, double spanfddZ, double spanfdj, UniformGen genUnifFdjLH, GeometricGen
genLHGeometric, MyMathFunction LHDist, MathFunction qLH){

    System.out.println();
    System.out.println("=====Starting=====
=====");
    System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
    System.out.println();
    System.out.println("Starting fdj Ladder Height Simulation with " + processType
+ " driven Risk process"+ " severity" + " U=" + u + " theta=" + theta + " E0 = " + E0 )
;

    //variables pour ecriture dans fichier
    String outfile = "fdjLH"+ processType + "_U" + u + "_theta" + theta + "_Eo" + E0
+".txt" ;
    BufferedWriter bw ;

    System.out.println("Running simulation fdj LH for " + processType );
    try{
        bw = new BufferedWriter(new FileWriter(outfile));
        simulateFdjLHRuns(bw, Nbz, Nx0, u, E0, theta, spanfddZ, spanfdj,
genUnifFdjLH, genLHGeometric, LHDist, qLH);
        bw.close();
    }catch(Exception e){
        System.out.print("Erreur : ");
        e.printStackTrace();
        System.exit(1);
    }

    System.out.println("Finished fdj Ladder Height Simulation with " + processType
+ " driven Risk process");
    System.out.println();
}

```

```

System.out.println("=====Ended=====
==");
System.out.println("===== "+Calendar.getInstance().getTime()+"=====
==");
System.out.println();
}

```

```

//fonction qui retourne les chiffres composant la surface de densité de la fdj (x0;
y0; fx0y0) pour un U fixe
static void simulateFdjLHRuns(BufferedWriter bw, int Nbz, int Nx0, double u, double
E0, double theta, double spanfddZ, double spanfdj, UniformGen genUnifFdjLH, GeometricGen
genLHGeometric, MyMathFunction LHDist, MathFunction qLH){

```

```

double[] x0 = new double[Nx0]; //valeurs de x0 et y0 qui servent a quadriller le
plan
double[] y0 = new double[Nx0];
double[][] fx0y0 = new double[Nx0][Nx0];

// compteurs
int i = 0;
int j = 0;

for( i = 0 ; i < Nx0 ; i++){
    x0[i] = (i+1)*spanfdj;
    y0[i] = (i+1)*spanfdj;
}
double fproj = 0;

DecimalFormat myFormatter = new DecimalFormat("#.#####");

for( i = 0 ; i < Nx0 ; i++){
    fproj = 0;
    //on cree les valeurs qui servent a la projection
    fproj = fZ(Nbz , x0[i], spanfddZ, genUnifFdjLH, genLHGeometric, LHDist);

    for( j = 0 ; j < Nx0 ; j++){
        fx0y0[i][j] = fproj/(theta * (E0/(x0[i]*qLH.evaluate(x0[i]+y0[j]))));
    }
}
try{
    bw.write( "x0" + "," + "y0" + "," + "fx0y0" + "\n");
    for(i=0;i<Nx0;i++){
        for(j=0;j<Nx0;j++){
            bw.write( x0[i] + "," + y0[j] + "," + myFormatter.format(fx0y0[i][j
]) + "\n" );
        }
    }
}
catch(Exception e){
    System.out.print("Erreur : ");
}

```

```

        e.printStackTrace(); // pour imprimer l'erreur dans le terminal.
        System.exit(1);
    }
}

//fonction qui retourne la valeur de fx0y0 pour un U fixe
static double fZ(int Nbz, double x0, double spanfddZ, UniformGen genUnifFdjLH,
GeometricGen genLHGeometric, MyMathFunction LHDist){

    int nbOfInt ;
    double[] intfddZ; // intervalles sur lesquels sont obeservées les valeurs de fZ
    double[] fddZ; // valeurs fZ prises sur les intervalles intfZ
    double[] Zx0 = new double [Nbz];
    int i = 0;
    int j = 0;

    //generer Nxo realistions de Z pour un X0 en particulier.
    for(i=0;i<Nbz;i++){
        Zx0[i] = simulateOneZx0(x0, genUnifFdjLH, genLHGeometric, LHDist);
    }

    //choisir le maximum pour creer les intervalles de comptage
    nbOfInt = (int)((Math.floor(max(Zx0)) +1)*(Math.floor(1/spanfddZ)));
    intfddZ = new double[nbOfInt]; //intervalles sur lesquels sont obeservées les
valeurs de fZ
    fddZ = new double[nbOfInt]; // valeurs fZ prises sur les intervalles intfZ

    //initialiser les vecteurs
    for(i=0;i<nbOfInt;i++){
        intfddZ[i]= i*spanfddZ;
        fddZ[i]=0;
    }

    //on compte en remplissant les intervalles
    for(i=0;i<nbOfInt-1;i++){
        for(j=0; j<Nbz;j++){
            if( (intfddZ[i] < Zx0[j]) && (Zx0[j]<=intfddZ[i+1]) )
                fddZ[i+1] +=1;
        }
    }

    int sumBins = 0; //masse totale
    for(i=0;i<nbOfInt;i++){
        sumBins+=fddZ[i];
    }

    double buffer = 0;

    search:
    for(i=0;i<nbOfInt-1;i++){
        for(j=0; j<Nbz;j++){
            if( (intfddZ[i] < Zx0[j]) && (Zx0[j]<=intfddZ[i+1]) ){
                buffer = fddZ[i+1]/sumBins;
            }
        }
    }
}

```

```

        break search;
    }
}
return buffer;
}

//pour generer des realisation de Z pour un x0 et un U fixe
static double simulateOneZx0(double x0, UniformGen genUnifFdjLH, GeometricGen
genLHGeometric, MyMathFunction LHDist){

    genUnifFdjLH = new UniformGen(streamMRG2Zx0, 0, x0);
    double U = genUnifFdjLH.nextDouble();
    int Mgeom = genLHGeometric.nextInt();
    double G = 0;
    for(int i=1; i<=Mgeom;i++){
        G+= LHDistNextDouble(LHDist);
    }
    return U +G ;
}

//
//
// OTHER FUNCTIONS
//
//

public static double max(double[] t) {
    double maximum = t[0]; // start with the first value
    for (int i=1; i<t.length; i++) {
        if (t[i] > maximum) {
            maximum = t[i]; // new maximum
        }
    }
    return maximum;
} //end method max

public static double min(double[] t) {
    double minimum = t[0]; // start with the first value
    for (int i=1; i<t.length; i++) {
        if (t[i] < minimum) {
            minimum = t[i]; // new maximum
        }
    }
    return minimum;
} //end method min

// methode servant a generer une realisation de la v.a. qui a M(x) pour CDF
// f doit être la fonction de distribution M(x)

```

```

static double LHDistNextDouble(MyMathFunction f){

    double unif = genUniformLH.nextDouble();
    f.setUniform(unif);
    double xTest = RootFinder.brentDekker(0.0001, 1000.0, f, 1e-10);
    return xTest;
}

// Interface modifiée pour etre compatible avec le langage SSJ et JAVA
private interface MyMathFunction extends MathFunction{

    void setUniform (double unif);
}

// Distribution LH pour subordonateur CP Exponentiel
private static class FunctionCPExp implements MyMathFunction{
    double uniform;
    double lambdaXi;

    public FunctionCPExp (double lambdaXi){
        this.lambdaXi = lambdaXi ;
    }

    public void setUniform(double unif){
        this.uniform = unif ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return (1 - Math.exp(-lambdaXi*x))- uniform;
    }
}

// Distribution LH pour subordonateur CP Pareto
private static class FunctionCPPar implements MyMathFunction{
    double uniform;
    double alphaXi;
    double thetaXi;

    public FunctionCPPar(double alphaXi, double thetaXi){
        this.alphaXi = alphaXi;
        this.thetaXi = thetaXi;
    }

    public void setUniform(double unif){
        this.uniform = unif ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return (1 - Math.pow((thetaXi/(x + thetaXi)),alphaXi-1))- uniform;
    }
}

// Distribution LH pour subordonateur GAMMA
private static class FunctionGamma implements MyMathFunction{

```

```

double uniform;
double bGamma;
public FunctionGamma (double bGamma){
    this.bGamma = bGamma ;
}

public void setUniform(double unif){
    this.uniform = unif ;
}

public double evaluate (double x){
    return (1 - Math.exp(-bGamma*x) - bGamma*x*E1(bGamma*x)- uniform);
}
}

// Distribution LH pour subordonateur reciproque inverse gaussien
private static class FunctionRIG implements MyMathFunction{
    double uniform;
    double gammaGig;
    double kappaGig;

    public FunctionRIG (double gammaGig, double kappaGig){
        this.gammaGig = gammaGig ;
        this.kappaGig = kappaGig;
    }

    public void setUniform(double unif){
        this.uniform = unif ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return (1 - (gammaGig*gammaGig/(kappaGig*gammaGig +1))*(
            (2*kappaGig/(Math.PI
*gammaGig))*Stat.gammaFunction(0.5)*gammaBar(0.5, 0.5*gammaGig*gammaGig*x)
            -(kappaGig*Stat.
gammaFunction(0.5)/Math.PI)*(
                (2/gammaGig) *gammaBar(1.5, 0.5*gammaGig*gammaGig*x)
                -gammaGig*x*gammaBar(0.5, 0.5*gammaGig*gammaGig*x)
            )
            +0.5*(
                2/(gammaGig*
gammaGig)*Math.exp(-gammaGig*gammaGig*0.5*x)
                -x*E1(0.5*
gammaGig*gammaGig*x)
            )
        )-uniform);
    }
}

// Distribution LH pour subordonateur Inverse gaussien
private static class FunctionIG implements MyMathFunction{

```

```

double uniform;
double gammaGig;
double kappaGig;

public FunctionIG (double gammaGig, double kappaGig){
    this.gammaGig = gammaGig ;
    this.kappaGig = kappaGig;
}

public void setUniform(double unif){
    this.uniform = unif ;
}

public double evaluate (double x){
    return (1 - (gammaGig/kappaGig)*
            (2*kappaGig*Stat.gammaFunction(0.5))/(Math.
PI*gammaGig)*gammaBar(0.5,0.5*gammaGig*gammaGig*x)
            -(kappaGig*Stat.gammaFunction(0.5))/(Math.PI
) *
            (2/gammaGig*gammaBar(1.5,0.5*gammaGig*gammaGig*x)
            -gammaGig*x*gammaBar(0.5,0.5*gammaGig*gammaGig*x)
            )
            ) - uniform);
}

}

//mesure de levy pour processus classique / Exponentielle
private static class FonctionqCPExp implements MathFunction{
    double lambdaXi;
    double lambdaCP;

    public FonctionqCPExp (double lambdaXi, double lambdaCP){
        this.lambdaXi = lambdaXi ;
        this.lambdaCP = lambdaCP ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return lambdaCP*lambdaXi*Math.exp(-x*lambdaXi);
    }
}

//mesure de levy pour processus classique / Pareto
private static class FonctionqPPar implements MathFunction{
    double alpha;
    double theta;
    double lambdaCP;

    public FonctionqPPar (double alpha, double theta, double lambdaCP){
        this.alpha = alpha ;
        this.theta = theta ;
    }
}

```

```
        this.lambdaCP = lambdaCP ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return lambdaCP*alpha*Math.pow(theta, alpha)/Math.pow((x+ theta),alpha+1);
    }
}

//mesure de levy pour processus Gamma
private static class FonctionGamma implements MathFunction{
    double a;
    double b;

    public FonctionGamma (double a, double b){
        this.a = a ;
        this.b = b ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return a*(1/x)*Math.exp(-b*x);
    }
}

//mesure de levy pour processus Inverse Gaussien GIG2
private static class FonctionIG implements MathFunction{
    double kappa;
    double gamma;

    public FonctionIG (double kappa, double gamma){
        this.kappa = kappa ;
        this.gamma = gamma ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return kappa*Math.exp(-gamma*gamma*0.5*x)/Math.sqrt(Math.PI*2*x*x*x);
    }
}

//mesure de levy pour processus Reciproque Inverse Gaussien GIG1
private static class FonctionRIG implements MathFunction{
    double kappa;
    double gamma;

    public FonctionRIG (double kappa, double gamma){
        this.kappa = kappa ;
        this.gamma = gamma ;
    }

    public double evaluate (double x){
        return (kappa+Math.sqrt(Math.PI*0.5*x))*Math.exp(-gamma*gamma*0.5*x)/Math.
```

```
sqrt(Math.PI*2*x*x*x);  
    }  
}
```

```
// Fonction exponentielle integrale
```

```
static double E1(double x){  
    double[] an = new double[21];  
    double[] cn = new double[21];  
  
    an[0] = 2*1.67391435474272057853 ;  
    an[1] = 1.22849447854715595018 ;  
    an[2] = - 0.31786989829837361639 ;  
    an[3] = 0.09274603919729219112 ;  
    an[4] = - 0.02602736316900119930 ;  
    an[5] = 0.00674815309464228057 ;  
    an[6] = - 0.00159897068934225285 ;  
    an[7] = 0.00034594453880095403 ;  
    an[8] = - 0.00006853652682011094 ;  
    an[9] = 0.00001248593239173701 ;  
    an[10] = - 0.00000210134463871704 ;  
    an[11] = 0.00000032818447981081 ;  
    an[12] = - 0.00000004776878645154 ;  
    an[13] = 0.00000000650581688192 ;  
    an[14] = - 0.00000000083210193692 ;  
    an[15] = 0.00000000010028101125 ;  
    an[16] = - 0.00000000001142229304 ;  
    an[17] = 0.00000000000123307945 ;  
    an[18] = - 0.00000000000012648523 ;  
    an[19] = 0.00000000000001235706 ;  
    an[20] = - 0.00000000000000115226 ;  
  
    cn[0] = 2* 0.9207851445389391645 ;  
    cn[1] = - 0.07343411783162128775 ;  
    cn[2] = 0.00520981196727232977 ;  
    cn[3] = - 0.00050214071989599012 ;  
    cn[4] = 0.00005920796937926337 ;  
    cn[5] = - 0.00000808564513097880 ;  
    cn[6] = 0.00000123720385647926 ;  
    cn[7] = - 0.00000020750176860703 ;  
    cn[8] = 0.00000003756005474022 ;  
    cn[9] = - 0.00000000725410976004 ;  
    cn[10] = 0.00000000148181601182 ;  
    cn[11] = - 0.00000000031795682863 ;  
    cn[12] = 0.00000000007126935828 ;  
    cn[13] = - 0.00000000001661231319 ;  
    cn[14] = 0.00000000000401155069 ;  
    cn[15] = - 0.00000000000100038792 ;  
    cn[16] = 0.00000000000025693341 ;  
    cn[17] = - 0.00000000000006780374 ;  
    cn[18] = 0.00000000000001834785 ;  
    cn[19] = - 0.00000000000000508209 ;  
    cn[20] = 0.00000000000000143861 ;  
  
    if(x >= 5.0){
```

```

        return (1/x)*Math.exp(-x)*Num.evalChebyStar(cn, 20, 5/x);
    }
    else if ((0<=x)&&(x<=5)){
        return Num.evalChebyStar(an, 20, x/8) - Num.EULER - Math.log(x);
    }
    else{
        System.out.println("Problème de calcul de E1(x) --> x = " + x);
        return 0.00;
    }
}

// Fonction gamma incomplete
static double gammaBar(double a, double x){
    return Stat.gammaFunction(a)*Stat.complementaryRegularizedGammaFunction(a, x);
}

// generateur de v.a. Pareto de type II lomax (comme loss models)
private static class ParetoLomaxGen extends RandomVariateGen {
    protected double alpha;
    protected double theta;
    RandomStream s;

    public ParetoLomaxGen(RandomStream s, double alpha, double theta) {
        setParams(alpha, theta);
        this.s = s;
    }

    public double nextDouble() {
        return theta*(Math.pow(1-s.nextDouble(), -1/alpha)-1);
    }

    public double getAlpha() {
        return alpha;
    }

    public double getTheta(){
        return theta;
    }

    protected void setParams(double alpha, double theta) {
        if(alpha <= 0.00)
            throw new IllegalArgumentException("alpha <= 0");
        if(theta <= 0.00) {
            throw new IllegalArgumentException("theta <= 0");
        } else {
            this.alpha = alpha;
            this.theta = theta;
            return;
        }
    }
}
}
}

```

A.2. EXPLOITATION DES RÉSULTATS PAR MATLAB

```
%%
%
%
%LISTE DES FONCTIONS ET ROUTINES
%UTILISEES POUR GENERER LES
%SURFACES ET LES MESURES DE RISQUE
%
%
%%

%Routine pour generer toutes les surfaces de densite
%a partir des donnees numeriques de simulation

filelist = [
'fdjLHEX_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHEX_U2.0_theta0.5_Eo2.0.txt';
'fdjLHPA_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHPA_U2.0_theta0.5_Eo2.0.txt';
'fdjLHGA_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHGA_U5.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHIG_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHIG_U2.0_theta0.2_Eo5.0.txt';
'fdjLHRI_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHRI_U2.0_theta0.2_Eo5.0.txt'
];

fignamelist = [
'fig_chap4_fdjlh_exp    ';
'fig_chap4_fdjlh_exp2  ';
'fig_chap4_fdjlh_par   ';
'fig_chap4_fdjlh_par2  ';
'fig_chap4_fdjlh_gamma ';
'fig_chap4_fdjlh_gamma2';
'fig_chap4_fdjlh_ig    ';
'fig_chap4_fdjlh_ig2   ';
'fig_chap4_fdjlh_rig   ';
'fig_chap4_fdjlh_rig2  '
];

filelist = cellstr(filelist);
fignamelist = cellstr(fignamelist);
if (iscellstr(filelist) == 1 && iscellstr(fignamelist) == 1 )
    for i=1:1:numel(filelist)
        processmodel(char(filelist(i)),char(fignamelist(i)));
    end
    for i=1:1:numel(filelist)
        system(['cp ' char(fignamelist(i)) '.jpg'
/Users/rabi/travail/memoire/memoirev10.0/graph']);
    end
end

%-----

%Pour generer une surface de densite
function processmodel(filename,figname)
```

```
filename
A = mfcsvread(filename);
x0 = A.x0;
y0 = A.y0;
fx0y0 = A.fx0y0;

nbpts = sqrt(numel(x0));
for i = 1:nbpts
    X(i) = x0(nbpts*(i-1)+1);
    Y(i) = x0(nbpts*(i-1)+1);
end

for i=1:nbpts
    for j=1:nbpts
        Z(j,i)= fx0y0(nbpts*(i-1)+j);
    end
end
X = reshape(X,nbpts,1);

fig = figure;
h=surf(X,Y,Z);
view([153 45])
title([filename]);
print (fig, '-djpeg', '-r600', [figname '.jpg']);
```

```
%-----
```

```
%Routine pour generer toutes les mesures
%de risque pour chaque modele
```

```
filelist = [
'fdjLHEX_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHEX_U2.0_theta0.5_Eo2.0.txt';
'fdjLHPA_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHPA_U2.0_theta0.5_Eo2.0.txt';
'fdjLHGA_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHGA_U5.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHIG_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHIG_U2.0_theta0.2_Eo5.0.txt';
'fdjLHRI_U2.0_theta0.2_Eo2.0.txt';
'fdjLHRI_U2.0_theta0.2_Eo5.0.txt'
];
```

```
filelist = cellstr(filelist);
if (iscellstr(filelist) == 1)
    for i=1:1:numel(filelist)
        processmdr(char(filelist(i)));
    end
end
```

```
end
```

```
%-----
```

```
%Routine pour generer les trois mesures de risque pour  
%un processus de risque a partir des donnees de simulation
```

```
function processmdr(filename)
```

```
A = mfcsvread(filename);  
y0 = A.y0;  
fx0y0 = A.fx0y0;  
filename  
[varr, expshfl, serm] = mdr(fx0y0,y0)
```

```
%-----
```

```
%Fonction qui retourne les trois valeurs des  
% trois mesures de risques  
%pour une distribution de pertes
```

```
function [v, es, erm] = mdr(fx0y0,y0)
```

```
fxyl = reshape(fx0y0,51,51);  
fxyl = fxy1';  
y = y0(1:51);  
for j=1:51  
    fy(j) = 0.1*sum(fxyl(1:51,j));  
end
```

```
masse = sum(fy(1:51));  
for j=1:51  
    fy(j) = fy(j)/masse;  
end
```

```
for j=1:51  
    Fy(j)= sum(fy(1:j));  
end
```

```
v = myvarrr(y, Fy, 0.95);  
es = expsf(y,fy,0.95);  
erm = earm(y,fy,Fy,0.1);
```

```
%-----
```

```
%Fonction qui retourne la valeur de la  
%Var pour une distribution de pertes
```

```
function [v] = myvarrr(y, Fy, a)
```

```
for j=1:50  
    fprintf('%7.6f - %7.6f\n', Fy(j),Fy(j+1))  
    if(Fy(j)<a && a <Fy(j+1))  
        fprintf('%7.6f < %7.6f < %7.6f\n', Fy(j), a, Fy(j+1))  
        v = ((y(j+1)-y(j))/(Fy(j+1)-Fy(j)))*(a - Fy(j)) + y(j);  
        break
```

```

    end
end

%-----
%Fonction qui retourne l'ES pour une distribution de pertes

function [es] = expsf (y, fy, a)
i=1;
while sum(fy(1:i))<a
    i =i+1;
end
sum(fy(1:i));
es = (1/(1-a))*sum(fy(i:51)*y(i:51));

%-----
%Fonction qui retourne la mesure de risques spectrale exponentielle
%pour une distribution de pertes

function [erm] = earm (y,fy,Fy,gamma)
erm = 0;
for i=1:51
    erm = erm + pexp(Fy(i),gamma)*fy(i)*y(i);
end

%-----
%Fonction qui retourne la valeur de la fonction d'aversion
%au risque exponentielle pour le quantile p d'une dsitribution
%de pertes.

function [pexp] = pexp(p, gamma)

pexp = exp(-(1-p)/gamma)/(gamma*(1-exp(-1/gamma)));

end

%-----
%Fonction qui retourne l'espérance et la variance d'une distribution GIG
% (equivalent au processus GIG au temps t = 1)
%cette fonction a servi pour d'eterminer par essais/erreur les bons
%paramètres a utiliser pour calibrer les modèles simulés.

function [esgig,vargig] = gig(delta, gamma, lambda)
esgig = (delta/gamma)*
        besselk(lambda+1,delta*gamma)/besselk(lambda,delta*gamma);
vargig=(delta*delta/(gamma*gamma))*
        (besselk(lambda+2,delta*gamma)/besselk(lambda,delta*gamma)
        -
        (besselk(lambda+1,delta*gamma)/besselk(lambda,delta*gamma))^2);

```

Bibliographie

- Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, Vol. 9(No. 3) :203–228, 1999.
- S. Asmussen. *Ruin Probabilities*. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. World Scientific, 2000.
- Barndorff-Nielsen, O.E., and O Halgreen. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distribution. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 38 :309–312, 1977.
- J. Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.
- E. Biffis and A.E. Kyprianou. A note on scale functions and the time value of ruin for lévy risk processes. *To appear in Insurance : Mathematics and Economics*, 2009.
- E. Biffis and Manuel Morales. On a generalization of the g-s fuction to path dependant penalties. *To appear in Insurance : Mathematics and Economics*, 2009.
- Newton L. Bowers, James C. Hickman, Cecil J. Nesbitt, Donald A. Jones, and Hans U Gerber. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Schaumburg, IL, 2nd edition, 1997.
- Harald Cramér. *On the mathematical theory of risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
- F. Etienne DeVyllder. *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Editions de l'Université de Bruxelles, 1996.
- David C. M. Dickson and Howard R. Waters. Gamma processes and finite time survival probabilities. *Astin Bulletin*, 23(2) :259–272, 1993.

- David C.M. Dickson. On the distribution of the surplus prior to ruin prior to ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 11 :191–207, 1992.
- Kevin Dowd. *Measuring Market Risk*. John Wiley & Sons, 2005.
- François Dufresne and Hans U. Gerber. The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 7 :193–199, 1988.
- François Dufresne and Hans U. Gerber. The probability of ruin for the inverse gaussian and related processes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 12 : 9–22, 1993.
- François Dufresne, Hans U. Gerber, and Elias S. W. Shiu. Risk theory with the gamma process. *Astin Bulletin*, 21(2) :177–192, 1991.
- D. C. Emmanuel, J. M. Harrison, and A. J. Taylor. A diffusion approximation to for the ruin function of a risk process with compound assets. *Scandinavian Actuarial Journal*, 58 :240–247, 1975.
- Fong. inconnu. *inconnu*, 2004.
- José Garrido. *Diffusion Models for Risk Processes with Interest and Inflation*. PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1987.
- José Garrido and Manuel Morales. On the expected discounted penalty function for lévy risk processes. *North american Actuarial Journal*, 10(3) :196–217, 2006.
- Hans U. Gerber. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, 53 :205–210, 1970.
- Hans U. Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Monograph, University of Philadelphia, 1979.
- Hans U. Gerber. On the probability of ruin for infinitely divisible claim amount distributions. *Insurance : Mathematics and Economics*, 11 :163–166, 1992.
- Hans U. Gerber and B Landry. On a discounted penalty at ruin in a jump–diffusion and the perpetual put option. *Insurance : Mathematics and Economics*, 22 :263–276, 1998.
- Hans U. Gerber and Elias S. W. Shiu. On the time value of ruin. *North american Actuarial Journal*, 2(1) :48–78, 1998.

- Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 21 :129–137, 1997.
- Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- J. Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1991.
- John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives, sixth edition*. Prentice Hall of India, 2006.
- D. L. Iglehart. Diffusion approximations in collective risk theory. *Journal of Applied Probability*, 6 :285–292, 1969.
- B Jorgensen. Statistical properties of the generalized inverse gaussian distribution. *Lecture Notes in Statistics*, 1982.
- Rob Kass, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, and Michel Denuit. *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publisher, 2001.
- Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, and Gordon E. Willmot. *Loss Models*. Wiley series in probability and statistics. Wiley-Interscience, 2nd edition, 2004.
- A.E. Kyprianou. *Introductory Lectures On Fluctuations Of Levy Processes With Applications*. Springer, 2008.
- P. L'Ecuyer. *Stochastic Discrete-Event Simulation*. <http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/ift6561/>, 2006.
- S. Li and J. Garrido. On the gerber-shiu functions in a sparre-andersen risk model perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 161–186, 2005.
- Robert L. McDonald. *Derivatives Market, second edition*. Addison wesley, 2006.
- Manuel Morales. *Generalized Risk Processes and Lévy Modeling in Risk Theory*. PhD thesis, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, April 2003.
- Manuel Morales. Risk theory with the generalized inverse gaussian lévy process. *Astin Bulletin*, 34(2) :361, November 2004.
- Manuel Morales. On the expected discounted penalty function for a perturbed risk process driven by a subordinator. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40(2) :293–301, 2007.

- Manuel Morales and W. Shoutens. A risk model driven by lévy processes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 19 :147–167, 2003.
- Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, and Jozef Teugels. *Stochastic processus for insurance and finance*. John Wiley & Sons, 1999.
- Sheldon M. Ross. *Simulation*. Academic Press, 3rd edition, 1997.
- K.I. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- W. Schoutens. *Lévy Processes in Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- Gordon E. Willmot and C.C.L. Tsai. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 30 :51–66, 2002.