Université de Montréal

Surfaces de Riemann compactes et formule de trace d'Eichler

par

Sonia De Benedictis

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

janvier 2010

© Sonia De Benedictis, 2010

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Surfaces de Riemann compactes et formule de trace d'Eichler

présenté par

Sonia De Benedictis

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon
(président-rapporteur)

Abraham Broer
(directeur de recherche)

Iosif Polterovich
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
14 janvier 2010

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous étudierons quelques propriétés algébriques, géométriques et topologiques des surfaces de Riemann compactes.

Deux grand sujets seront traités.

Tout d'abord, en utilisant le fait que toute surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini de points de Weierstrass, nous allons pouvoir conclure que ces surfaces possèdent un nombre fini d'automorphismes.

Ensuite, nous allons étudier de plus près la formule de trace d'Eichler. Ce théorème nous permet de trouver le caractère d'un automorphisme agissant sur l'espace des q-différentielles holomorphes.

Nous commencerons notre étude en utilisant la quartique de Klein. Nous effectuerons un exemple de calcul utilisant le théorème d'Eichler, ce qui nous permettra de nous familiariser avec l'énoncé du théorème.

Finalement, nous allons démontrer la formule de trace d'Eichler, en prenant soin de traiter le cas où l'automorphisme agit sans point fixe séparément du cas où l'automorphisme possède des points fixes.

SUMMARY

In this thesis, we will study several algebraic, geometrical and topological properties of compact Riemann surfaces.

Two principal subjects will be treated.

First, using the fact that every compact Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ has a finite number of Weierstrass points, we will be able to prove that those surfaces have a finite number of automorphism.

Afterward, we will study the Eichler's trace formula. This formula allow us to find the character of an automorphism acting on the space of holomorphic q-differentials.

We will start our study using Klein's quartic curve. We will apply Eichler's formula in this case, which will allow us to familiarize ourselves with the statement of the theorem.

Finally, we will demonstrate the Eichler's trace formula, treating the case where the automorphism acts fixed point freely separately from the case where the automorphism has fixed points.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur de recherche, Abraham Broer, pour avoir cru en moi. J'aimerais vous remercier pour votre patience, pour votre disponibilité et pour le temps que vous avez passé à m'aider tout au long des ces années de recherche. De plus, j'aimerais vous remercier pour avoir respecté mon rythme d'apprentissage. Monsieur Broer, merci de m'avoir accordé votre confiance.

Ensuite, je veux prendre le temps dire merci à mon amoureux Jean-Luc pour son immense support. Tes encouragements m'ont permis de ne pas lâcher et de persévérer tout au long de ce travail très exigeant. J'aimerais te remercier d'avoir été à mes côtés tout ce temps, malgré les diverses émotions que je vivais.

Les remerciements vont maintenant aux membres de ma famille pour leur support. Un merci particulier à mes parents qui ont toujours donné à l'école une grande importance. De plus, merci de m'avoir transmis deux magnifiques valeurs, soit la persévérance et la détermination.

Je veux remercier mes amis et mes collègues de travail qui m'ont toujours encouragé durant mes études. Un merci spécial à Daniel, Raphaël et Isabelle qui m'ont beaucoup aidé lors de ma scolarité.

Pour conclure, j'aimerais dédier ce mémoire à mon père qui est probablement très fier du travail que j'ai accompli, qui a toujours cru en moi et qui a su être un exemple de courage. Merci pour tout papa, tu me manques beaucoup.

INTRODUCTION

Ce mémoire fait l'étude de certaines propriétés algébriques, topologiques et géométriques des surfaces de Riemann compactes. Notre motivation première est de faire un lien entre les surfaces de Riemann compactes et la théorie de la représentation, plus précisément la théorie liée aux caractères d'une représentation.

Tout d'abord, nous commencerons par étudier de plus près la notion de surface de Riemann. Nous verrons que ces surfaces possèdent une caractéristique très importante : elles ressemblent localement à un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. De plus, nous allons démontrer une autre propriété étonnante des surfaces de Riemann compactes, soit que toute application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes peut s'écrire localement comme $z \mapsto z^m$. Dans ce même chapitre, nous énoncerons toutes les définitions préalables à notre étude. Nous parlerons des fonctions holomorphes, méromorphes, des 1-formes ainsi que des q-différentielles. La notion de diviseur, qui sera présente tout au long de ce mémoire, sera aussi définie. Nous terminerons le premier chapitre en énonçant deux théorèmes importants, soit le théorème de Riemann-Roch et le théorème de dualité de Serre.

En second lieu, nous allons démontrer qu'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini d'automorphismes. Pour ce faire, nous utiliserons la notion de points de Weierstrass, qui sont des points très spéciaux sur une surface de Riemann compacte. À la fin du deuxième chapitre, nous allons démontrer qu'il en existe seulement un nombre fini sur une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. De plus, si un automorphisme agit sur la surface en question, alors il agit aussi sur les points de Weierstrass. Par contre, son action devra permuter ces points afin qu'ils demeurent des points de Weierstrass. Étant donné que le nombre de points de Weierstrass est fini, nous arriverons à la conclusion que toute surface de Riemann de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini d'automorphismes.

Les deux derniers chapitres portent sur le même théorème, soit la formule de trace d'Eichler. Ce théorème nous permet de calculer le caractère d'un automorphisme via son action sur l'espace des q-différentielles holomorphes. La formule d'Eichler généralise la formule de points fixes de Lefschetz.

Dans le troisième chapitre, nous énoncerons le théorème et nous l'utiliserons pour effectuer des calculs de caractères sur une surface de Riemann bien particulière : la quartique de Klein. C'est d'ailleurs la séquence d'apprentissage que nous avons privilégiée lors de notre étude ; nous avons commencé par utiliser uniquement l'énoncé du théorème afin de l'appliquer à l'exemple de la courbe de Klein. Ceci nous a permis de nous assurer de bien maîtriser le contenu et la finalité du théorème. En fait, dans ses nombreux travaux, Felix Klein a trouvé le nombre d'automorphismes de sa courbe ainsi que l'ordre de ceux-ci. Il a même trouvé quelques matrices représentant ces automorphismes. En utilisant toutes ces informations, nous allons être en mesure de trouver explicitement quelques points fixes sur la surface de Klein et, en conclusion, de trouver le caractère des automorphismes de la courbe de Klein agissant sur l'espace des 2-différentielles.

Pour conclure ce mémoire, nous allons démontrer le théorème de trace d'Eichler. Nous allons séparer la preuve en deux parties. Tout d'abord, nous traiterons du cas où un automorphisme T d'ordre $n > 1$ agit sur une surface de Riemann compacte sans point fixe. Ensuite, nous étudierons le cas où T agit sur une surface de Riemann compacte avec points fixes. Ce second cas sera beaucoup plus complexe à étudier que le premier. Bref, le tout mènera à la formule de trace d'Eichler.

Chapitre 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Tout au long de ce mémoire, nous étudierons les surfaces de Riemann compactes. Ce premier chapitre nous permettra d'énoncer les différentes notions de base ainsi que les définitions nécessaires à notre étude. La plupart des définitions et des théorèmes présents dans ce premier chapitre ont été tirés du livre [**M**].

1.1. Rappels sur les surfaces de Riemann

Dans cette première section, nous allons faire un rappel explicite de certaines notions importantes qui concernent les surfaces de Riemann.

Une surface de Riemann est un espace qui, localement, ressemble à un ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Afin d'être plus précis, considérons X comme un espace topologique. Afin que X ressemble localement à un ouvert du plan complexe, nous allons associer à chaque point de X une coordonnée locale. Une coordonnée locale sur un espace est un homéomorphisme de l'espace vers $\mathbb{C}$. Cette coordonnée locale sera utilisée pour définir toutes les fonctions complexes d'une variable.

Passons maintenant à la définition de cartes sur un espace topologique X.

Définition 1.1.1. *Une carte sur X est un homéomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$, où $U \subset X$ est un ouvert de X et $V \subset \mathbb{C}$ est un ouvert du plan complexe. La carte ϕ est dite centrée en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$.*

Bien sûr, quand nous parlons d'une carte ϕ sur X, nous parlons aussi d'une coordonnée locale, soit $z = \phi(x)$ pour tout $x \in U$.

Définition 1.1.2. *Soit* $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ *et* $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ *deux cartes sur* X. *Nous dirons que* ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont compatibles si* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ *ou si*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est holomorphe.

Afin que tout l'espace X ressemble localement au plan complexe, nous devons définir des cartes en tout point de X. De plus, nous voulons que ces cartes soient toutes deux-à-deux compatibles. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 1.1.3. *Un atlas* $\mathscr{A}$ *de* X *est une collection* $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \longrightarrow V_i\}$ *de cartes deux-à-deux compatibles et telles que* $X = \bigcup_i U_i$.

À l'aide des précédentes définitions, nous pouvons maintenant définir ce qu'est une surface de Riemann.

Définition 1.1.4. *Une surface de Riemann est un espace topologique Hausdorff possèdant un atlas maximal et qui contient une base dénombrable.*

Pour plus de détails sur les précédentes définitions, voir les pages 1 à 5 de [**M**].

Soit Σ une surface de Riemann compacte. Plusieurs types de fonctions et de formes différentielles existent sur les surfaces de Riemann compactes. Nous traiterons des fonctions holomorphes, méromorphes ainsi que des q-différentielles.

Définition 1.1.5. *Une fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte* Σ *est une fonction continue qui est holomorphe sur chaque carte* $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$, *où* $U \subset \Sigma$ *est un ouvert de* Σ.

La même définition s'applique pour les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte, à l'exception que la fonction sera méromorphe sur chaque carte.

Maintenant, définissons les q-différentielles sur une surface de Riemann compacte.

Définition 1.1.6. *Soit* Σ *une surface de Riemann compacte et* $U \subset \Sigma$ *un ouvert de* Σ. *Soit* z *une coordonnée locale en un point* $p \in \Sigma$. *Une* q*-différentielle* *holomorphe ρ est une expression de la forme $\rho = f(z)(dz)^q$ sur chaque carte $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Soit $w : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une autre carte telle que $\rho = \widetilde{f}(w)(dw)^q$. Soit $z = \phi(w)$ l'application changement de carte. Alors, nous imposons que l'égalité suivante soit respectée

$$f(\phi(w)) \left(\frac{d\phi(w)}{dw} \right)^q (dw)^q = \widetilde{f}(w)(dw)^q,$$

c'est-à-dire que

$$f(\phi(w)) \left(\frac{d\phi(w)}{dw} \right)^q = \widetilde{f}(w),$$

ce qui définit la règle de changement de carte pour les q-différentielles.

Dans ce mémoire, lorsque nous parlons de q-différentielles, nous considérons que q est un entier positif. En fait, si $q = 0$, nous retrouvons la définition d'une fonction holomorphe sur Σ. Le cas $q = 1$ correspond aux 1-formes sur Σ.

Définition 1.1.7. *Le genre g d'une surface de Riemann compacte Σ est la dimension de l'espace des 1-formes sur Σ.*

Maintenant que nous avons traité des fonctions et des formes que nous utiliserons, parlons des diviseurs sur une surface de Riemann compacte. Les définitions suivantes se trouvent à la page 129 de [**M**].

De façon simple, nous pouvons dire que les diviseurs sur une surface de Riemann nous donnent une façon d'organiser les zéros ainsi que les pôles d'une fonction holomorphe, méromorphe ou d'une q-différentielle.

Définition 1.1.8. *Soit M une surface de Riemann. Un diviseur sur M est une fonction $D : M \to \mathbb{Z}$ dont le support est un sous-ensemble discret de M.*

Étant donné que notre étude porte sur les surfaces de Riemann compactes, il est clair qu'un diviseur D aura un support fini.

Nous décrirons les diviseurs en utilisant le symbole de sommation de la façon suivante :

$$D = \sum_{p \,\in\, \Sigma} D(p) \cdot p \ .$$

De la notion de diviseur découle la définition suivante :

Définition 1.1.9. *Le degré d'un diviseur D sur M est*

$$deg(D) = \sum_{p \in M} D(p) \ .$$

Notons que la précédente définition s'applique aux fonctions holomorphes, méromorphes ainsi qu'aux q-différentielles.

Soient f et h deux fonctions méromorphes sur Σ. Par les propriétés des fonctions méromorphes, nous avons directement

- $div(fh) = div(f) + div(h)$,
- $div(f/h) = div(f) - div(h)$,
- $div(1/f) = -div(f)$.

Une grande partie de ce mémoire traite des automorphismes sur une surface de Riemann compacte. Soit $g \in Aut(\Sigma)$. Le groupe engendré par g, noté $< g >$, agit sur un surface de Riemann, car c'est un sous-groupe du groupe d'automorphismes de Σ. Nous considérons qu'un automorphisme de Σ est une action biholomorphe sur cette surface de Riemann compacte.

1.2. Multiplicité et degré

La matière que nous traiterons maintenant est d'une grande importance lorsque nous parlons d'applications entre deux surfaces de Riemann. Nous verrons que toute application holomorphe restreinte à un petit voisinage peut s'exprimer comme une puissance de la coordonnée locale utilisée.

Théorème 1.2.1. *Soit X et Y deux surfaces de Riemann compactes. Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe non constante et $p \in X$. Alors, il existe un unique entier $m \geq 1$ satisfaisant ce qui suit : pour toute carte $H : U_2 \longrightarrow V_2$ sur Y centrée en $F(p)$, il existe une carte $G : U_1 \longrightarrow V_1$ sur X centrée en p telle que $H(F(G^{-1}(z))) = z^m$.*

Démonstration.

Soit H une carte d'un ouvert $W \subset Y$ vers $\mathbb{C}$ centrée en $F(p)$, c'est-à-dire $H(F(p)) = 0$. Soit G une carte d'un ouvert $U \subset X$ vers $\mathbb{C}$ centrée en p, où $G : U \longrightarrow V$, V étant un ouvert du plan complexe.

Considérons $T(w) = H(F(G^{-1}(w)))$ une fonction holomorphe. En prenant un voisinage V assez petit (à l'intérieur du rayon de convergence de la série de Taylor), nous pouvons exprimer $T(w)$ sous forme de série de Taylor comme suit :

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i,$$

où $c_m \neq 0$ et $m > 1$ étant donné que $T(0) = 0$, ce qui fait en sorte que cette série de Taylor ne possède pas de terme constant.

Donc, en mettant en évidence le terme w^m dans la série de Taylor précédente, nous obtenons $T(w) = w^m S(w)$, où $S(w)$ est holomorphe en $w = 0$ et $S(0) \neq 0$ étant donné que $S(0) = c_m$.

Soit le point $S(0)$. Ce point peut s'écrire comme $c_m = S(0) = re^{i\varphi}$ et il a m préimages qui sont de la forme $\sqrt[m]{r}e^{i\left(\frac{\varphi - 2k\Pi}{m}\right)}$, où $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ m$.

Il existe donc une fonction holomorphe $R(w)$ près de 0 telle que $R(w)^m = S(w)$ et donc $T(w) = (wR(w))^m$.

Posons $\eta(w) = wR(w)$.

En appliquant la règle de la dérivée d'un produit de fonction, nous avons

$$\begin{aligned} \eta^{'}(w) &= w^{'}R(w) + wR^{'}(w) \\ &= R(w) + wR^{'}(w). \end{aligned}$$

De plus, $\eta^{'}(0) = R(0) + 0R^{'}(0) \neq 0$, étant donné que $R(0) \neq 0$. Donc, par le théorème des fonctions implicites (page 10 de [**M**]), $\eta(w)$ est holomorphe et inversible près de 0.

Posons $\phi = \eta \circ G$ une nouvelle carte sur X centrée en p.

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} H(F(\phi^{-1}(z))) &= H(F(G^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= (\eta^{-1}(z)R(\eta^{-1}(z)))^m \\ &= (\eta(\eta^{-1}(z)))^m \\ &= z^m. \end{aligned}$$

L'unicité de la puissance m vient du fait que s'il existe des coordonnées locales en p et en $F(p)$ telles que la fonction F est de la forme $z \mapsto z^m$, c'est donc que près du point p, il y a exactement m préimages des points qui sont près de $F(p)$. $\square$

Le précédent théorème se trouve à la page 44 de [**M**].

Pour la suite des choses, nous aurons besoin de la proposition suivante, dont la preuve se trouve à la page 47 de [**M**].

Proposition 1.2.1. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes. Pour chaque $y \in Y$, nous définissons $d_y(f)$ qui est la somme des multiplicités de f au points $p \in X$ tels que $f(p) = y$, c'est-à-dire*

$$d_y(f) = \sum_{p\ \in f^{-1}(y)} mult_p(f).$$

Alors $d_y(f)$ est constant et est indépendant du choix de y.

Nous entendons par $mult_p(f)$ l'exposant m présent dans la forme normale locale (théorème 1.2.1) liée à l'application f.

Définition 1.2.1. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes. Le degré de f est l'entier $d_y(f)$, défini dans la précédente proposition, pour tout $y \in Y$.*

Lemme 1.2.1. *Si f est une fonction méromorphe non-nulle sur Σ, alors*

$$deg(div(f)) = 0.$$

Démonstration.

Considérons $F : \Sigma \to \mathbb{C}_\infty$ une application holomorphe vers la sphère de Riemann. En effet, cette application est holomorphe, car elle ne possède pas de singularité essentielle. C'est donc dire que la limite existe en tout point et donc que cette application est continue.

Soient $\{z_i\}$ l'ensemble des points de Σ envoyés par F vers $0 \in \mathbb{C}_\infty$ et $\{p_i\}$ l'ensemble des points de Σ envoyés par F vers $\infty \in \mathbb{C}_\infty$. En fait, les z_i sont exactement les zéros de f et les p_i ses pôles.

Définissons

$$d_q(F) = \sum_{p \,\in\, F^{-1}(q)} mult_p(F),$$

où $q \in \mathbb{C}_\infty$ et $p \in \Sigma$. Soit d de degré de la fonction F défini par $d_q(F)$, pour tous $q \in \mathbb{C}_\infty$.

Donc, par définition du degré ainsi que la proposition 1.2.1, nous avons

$$d = \sum_i mult_{p_i}(F) \text{ et } d = \sum_i mult_{z_i}(F).$$

Par les propriétés des fonctions méromorphes, nous avons

$$mult_{z_i}(F) = ord_{z_i}(f) \text{ et } mult_{p_i}(F) = -ord_{p_i}(f).$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_p ord_p(f) &= \sum_i ord_{z_i}(f) + \sum_i ord_{p_i}(f) && (1.2.1) \\ &= \sum_i mult_{z_i}(F) - \sum_i mult_{p_i}(F) && (1.2.2) \\ &= 0. && (1.2.3) \end{aligned}$$

D'où $deg(div(F)) = 0$. □

Définition 1.2.2. *Soit f une fonction méromorphe sur Σ. Soit z_i les zéros de f et p_i ses pôles. Le diviseur des zéros de f est le diviseur*

$$div_0(f) = \sum_{z_i} ord_{z_i}(f) \cdot z_i.$$

De plus, le diviseur des pôles de f défini comme suit :

$$div_\infty(f) = \sum_{p_i} -ord_{p_i}(f) \cdot p_i.$$

Soit $\mathscr{M}_\Sigma$ le faisceau des fonctions méromorphes sur Σ, $\mathscr{O}_\Sigma$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Σ et $\mathscr{A}^q_\Sigma$ le faisceau des q-différentielles sur Σ.

Nous dénoterons par $\mathscr{L}(D)$ le faisceau tel que pour U un ouvert de Σ, $\mathscr{L}(D)(U) = \{f \in \mathscr{M}(U) \mid div(f) + D \geq 0\}$ est la collection des fonctions méromorphes sur l'ouvert U ayant des pôles bornés par le diviseur D. De ce faisceau découle la collection des sections globales suivante :

$$L(D) = \mathscr{L}(D)(\Sigma) = \{f \in \mathscr{M}(\Sigma) \mid div(f) + D \geq 0\}.$$

En fait, cette section globale est par définition isomorphe au groupe de cohomologie $H^0(\Sigma, D)$. De plus, nous avons $dim\ L(0) = 1$, puisque $L(0)$ l'ensemble des fonctions holomorphes globales, qui sont toutes constantes par le théorème de Liouville.

Un rappel concernant la notion de faisceau est disponible à la section 6 du chapitre 1 de [**F**].

Considérons $f \in \mathscr{M}_\Sigma$ non identiquement nulle. La théorie qui suit se trouve aux pages 130 et 131 de [**M**].

Définition 1.2.3. *Le diviseur de f, aussi nommé diviseur principal, est le diviseur défini par l'ordre de la fonction f :*

$$div(f) = \sum_{p\,\in\,\Sigma} ord_p f \cdot p\ .$$

Nous avons donc $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$.

Passons maintenant aux 1-formes. Soit ω une 1-forme sur Σ.

Définition 1.2.4. *Le diviseur de ω, appelé diviseur canonique, est déterminé par l'ordre de la 1-forme de la façon suivante :*

$$div(\omega) = \sum_{p\,\in\,\Sigma} ord_p\ \omega \cdot p\ .$$

De plus, nous pouvons utiliser la propriété suivante :

$$div(f\omega) = div(f) + div(\omega), \tag{1.2.4}$$

où f est une fonction méromorphe sur Σ.

Lemme 1.2.2. *Soit Σ une surface de Riemann compacte. Si D est un diviseur sur Σ tel que $deg(D) < 0$, alors $L(D) = \emptyset$.*

Démonstration.

Supposons qu'il existe une fonction $f \in L(D)$ non identiquement nulle. Considérons le diviseur suivant : $\widetilde{D} = div(f) + D$.

Étant donné que $f \in L(D)$, nous obtenons $deg(\widetilde{D}) \geq 0$. Par contre, puisque f est méromorphe, nous savons par le théorème 1.2.1 que $deg(div(f)) = 0$. Donc, $deg(\widetilde{D}) = deg(D) < 0$ par hypothèse. Cette contradiction prouve le lemme. □

Proposition 1.2.2. *Soit Σ une surface de Riemann compacte et D un diviseur sur Σ. Alors l'espace $L(D)$ est de dimension finie.*

La preuve de la précédente proposition se trouve à la page 151 de [**M**].

1.3. Théorème de Riemann-Roch

Maintenant, considérons Σ comme une surface de Riemann compacte de genre g. Tout au long de ce mémoire, nous utiliserons la notation suivante :

$$h^i(\Sigma, D) = dim\ H^i(\Sigma, D).$$

Les deux théorèmes suivants seront utilisés tout au long de ce mémoire.

Théorème 1.3.1 (Riemann-Roch)**.** *Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre g. Alors, pour tout diviseur D et tout diviseur canonique K, nous avons*

$$dim\ L(D) - dim\ L(K - D) = deg(D) - g + 1,$$

ou encore

$$h^0(\Sigma, D) - h^1(\Sigma, D) = deg(D) - g + 1.$$

Théorème 1.3.2 (Dualité de Serre)**.** *Soit D un diviseur et K un diviseur canonique sur une surface de Riemann compacte Σ. Alors*

$$h^1(\Sigma, D) = dim\ L(K - D) = h^0(\Sigma, K - D).$$

Les preuves des deux précédents théorèmes se trouvent respectivement aux pages 192 et 188 de [**M**].

Si nous revenons à la proposition 1.2.2, celle-ci démontrait que $h^0(\Sigma, D)$ est fini et, en utilisant la dualité de Serre, nous savons maintenant que $h^1(\Sigma, D)$ est aussi fini.

Nous utiliserons le théorème de Riemann-Roch pour prouver la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *Le degré d'un diviseur canonique est égal à $2g - 2$.*

Démonstration.

En utilisant le théorème 1.3.1, nous avons

$$h^0(\Sigma, K) - h^1(\Sigma, K) = deg(K) - g + 1.$$

À l'aide du théorème 1.3.2, la dernière égalité devient

$$\begin{aligned} h^0(\Sigma, K) - h^0(\Sigma, K - K) &= deg(K) - g + 1 \\ h^0(\Sigma, K) - h^0(\Sigma, 0) &= deg(K) - g + 1 \\ h^0(\Sigma, K) - 1 &= deg(K) - g + 1 \\ deg(K) &= 2g - 2. \end{aligned}$$

□

Une autre preuve n'utilisant pas le théorème de Riemann-Roch est disponible à la page 133 de [**M**].

Voici un lemme découlant des deux précédents théorèmes.

Lemme 1.3.1. *Soit D un diviseur sur Σ qui n'est pas le diviseur canonique, mais qui est tel que $deg(D) = 2g - 2$. Alors $h^1(\Sigma, D) = 0$.*

Démonstration.

Démontrons la contraposée.

Supposons que $h^1(\Sigma, D) \neq 0$. Par dualité de Serre, nous avons $h^1(\Sigma, D) = h^0(\Sigma, K - D) \neq 0$. Nous avons $deg(D) = 2g - 2 = deg(K)$, d'où $deg(K - D) = 0$. Le fait que $h^0(\Sigma, K - D)) \neq 0$ nous oblige à admettre qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{M}_\Sigma$ telle que $div(f) + (K - D) \geq 0$. En utilisant le lemme 1.2.1 ainsi que le fait que $deg(K-D) = 0$, nous avons $deg(div(f)) + deg(K-D) = 0$. Tous les zéros et les pôles de f contribuent au calcul de son diviseur de même qu'à son degré. Afin que $deg(div(f)) + deg(K - D) = 0$, les zéros et les pôles de f doivent être annulés dans le calcul du diviseur $K - D$. Donc, $div(f) = -(K - D) = D - K$. D'où $div(f) + K = D$. Soit ω une 1-forme méromorphe telle que $div(\omega) = K$. Par la dernière égalité et 1.2.4, nous avons donc $div(f\omega) = D$, donc D est canonique. □

Voici maintenant le théorème d'Hurwitz qui borne supérieurement l'ordre d'un groupe agissant holomorphiquement et effectivement, c'est-à-dire sans noyau, sur une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$.

Théorème 1.3.3. *Soit G un groupe fini qui agit holomorphiquement et effectivement sur une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Alors*

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

La preuve du précédent théorème se trouve à la page 42 de [**M**].

Étant donné que le groupe d'automorphisme de Σ agit holomorphiquement et effectivement sur cette surface de Riemann compacte, nous concluons que

$$|Aut(\Sigma)| \leq 84(g - 1).$$

1.4. Application quotient

Dans cette section, nous traiterons d'une application fondamentale sur laquelle repose une grande partie de la théorie de ce mémoire.

Soit Σ une surface de Riemann compacte. Soit G un groupe fini agissant sur Σ. Considérons l'application

$$\pi : \Sigma \longrightarrow \Sigma/G = \widetilde{\Sigma},$$

où chaque point $x \in \Sigma$ est envoyé vers son orbite $G{\cdot}x$.

L'espace $\widetilde{\Sigma} = \{Gx \mid x \in \Sigma\}$ est muni de la topologie quotient, c'est-à-dire que $\mathscr{O}$ est un ouvert de $\widetilde{\Sigma}$ si $\pi^{-1}(\mathscr{O})$ est un ouvert de Σ.

Nous voulons maintenant mettre une structure complexe sur l'espace topologique $\widetilde{\Sigma}$. Pour ce faire, il nous faut d'abord des cartes. La proposition suivante nous dicte comment définir ces cartes.

Proposition 1.4.1. *Soit G un groupe fini qui agit sur un espace topologique Hausdorff X. Soit $p \in X$. Alors, il y a un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de p tel que*

(1) $\mathscr{U}$ est invariant par rapport au stabilisateur G_p, c'est-à-dire que $g{\cdot}\mathscr{U} \in \mathscr{U}$ pour tout $g \in G_p$ et $u \in \mathscr{U}$;

(2) $\mathscr{U} \cap (g{\cdot}\mathscr{U}) = \emptyset$ pour tout $g \notin G_p$;

(3) l'application $\sigma : \mathscr{U}/G_p \longrightarrow X/G$, qui envoie un point dans $\mathscr{U}$ vers son orbite, est un homéomorphisme vers un sous-ensemble ouvert de X/G ;

(4) aucun point de $\mathscr{U}$ excepté p est fixé par un élément de G_p.

Démonstration.

Soit O un ouvert de X et soit $p \in O$. Considérons les ouverts $g \cdot O$ où $g \in G_p$. Tous ces ouverts contiennent p, puisque p est stabilisé par tous les $g \in G_p$.

Considérons

$$U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot O.$$

Alors U est un ouvert, puisqu'il résulte en l'intersection finie d'ouverts. De plus, U est G_p-stable par définition, ce qui prouve le premier point de la proposition.

Dans le but de prouver le second point de la proposition, considérons $g \notin G_p$ et $p \in U$. Portons notre attention sur les ouverts $g \cdot U$. Étant donné que X est Hausdorff, nous pouvons choisir, pour tous les points $q \in g \cdot U$, U_q tel que $U \cap U_q = \emptyset$ si $p \neq q$.

Fixons q. Considérons tous les éléments $g \in G$ tels que $g \cdot p = q$. Considérons maintenant

$$W = \bigcap_{q} \bigcap_{\substack{g_i \in G \\ g_i \cdot p = q}} g_i^{-1} U_q.$$

Bien sûr,

$$g_i W \subset g_i \cdot U_{q_i},$$

pour tout i. Étant donné que si $i \neq j$, nous avons

$$U_{q_i} \cap U_{q_j} = \emptyset$$

et donc,

$$g_i W \cap g_j W = \emptyset.$$

Si nous prenons g_i comme l'identité, nous obtenons

$$W \cap g_j \cdot W = \emptyset,$$

pour tout $g_j \notin G_p$, ce qui démontre le deuxième point de la proposition en considérant que W est l'ouvert cherché.

Maintenant, considérons l'application $\pi : \mathscr{U}/G_p \longrightarrow X/G$ et montrons d'abord qu'elle est injective.

Soit x et y deux points de $\mathscr{U}/G_p$ tels que $G_p x \neq G_p y$. Supposons que l'orbite de x par rapport au groupe G soit identique à l'orbite de y par rapport à G, c'est-à-dire $Gx = Gy$. Alors, il existe $\alpha \in G \backslash G_p$ tel que $\alpha x = y$. Donc, $y \in \mathscr{U}$ et $\alpha x \in \alpha \mathscr{U}$, ce qui nous mène à une contradiction puisque nous venons de montrer en (2) que $\mathscr{U} \cap g\mathscr{U} = \emptyset$ pour tout $g \notin G_p$. D'où nous obtenons que si $G_p x \neq G_p y$, forcément $Gx \neq Gy$.

De plus, cette application est continue. En effet, si nous considérons la composition $\sigma \circ \pi$, où $\pi : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{U}/G_p$ est l'application naturelle, ceci nous donne la restriction $\pi|_{\mathscr{U}}$ qui est continue puisque la topologie utilisée est la topologie quotient. De plus, $\pi|_{\mathscr{U}}$ est aussi une application ouverte, car l'image, donc l'orbite, d'un ouvert de $\mathscr{U}$ est aussi un ouvert dans $\mathscr{U}/G_p \subset X/G$. Donc, α est un homéomorphisme.

Le dernier point vient du fait qu'il y a un nombre fini de points fixes. Étant donné que X est Hausdorff, nous pouvons choisir $\mathscr{U}$ assez petit tel que p soit le seul point fixé par G_p. $\square$

La précédente preuve peut aussi s'appliquer à une surface de Riemann compacte, puisque, par définition, une surface de Riemann est de Hausdorff.

Cette proposition se trouve à la page 77 de [**M**]. Dans la preuve que nous venons tout juste de faire, nous avons trouvé comment définir les cartes sur l'espace quotient X/G : nous définissons des cartes sur $\mathscr{U}/G_p$ et nous les transportons vers X/G en utilisant l'application α. De plus amples informations concernant le détails des cartes sur X/G sont disponibles aux pages 77 et 78 de [**M**].

Soit $p \in \Sigma$ et $g \in G_p$ un élément dans le stabilisateur du point p. Soit z une coordonnée locale centrée en p. Comme nous l'avons démontré à la proposition 1.4.1, nous pouvons prendre un voisinage U de p qui est G_p-stable et qui est tel que p soit l'unique point de U fixé par G_p. Étant donné que U est G_p-stable, l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par la carte $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est homéomorphe à l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par la carte $z : V \longrightarrow \mathbb{C}$, où $V = g \cdot U$ est un ouvert de Σ.

Étant donné que G est un groupe fini, nous savons que chaque fonction holomorphe sur une carte peut s'écrire comme une série convergente sur un ouvert se trouvant à l'intérieur du rayon de convergence de cette série. En fait, étant donné qu'aucun pôle n'est permis puisque la série découle d'une fonction holomorphe, cette série est en fait la série de Taylor. Considérons l'application $z \mapsto T_g(z)$, de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, où $T_g(z) = \alpha_1(g)z + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(g)z^i$, associant à la coordonnée locale z la série de Taylor $T_g(z)$. Cette série ne possède pas de terme constant étant donné que p est fixé par tous les $g \in G_p$ et que z est une coordonnée locale centrée en p. De plus, $\alpha_1(g) \neq 0$ puisque cette application se doit d'être injective étant donné que les deux ouverts de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes.

Soit l'application $\alpha : G_p \longrightarrow \mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^*$ est le plan complexe auquel nous avons enlever l'origine. Cette fonction associe à un élément $g \in G_p$ le coefficient du terme de degré 1 de la série de Taylor, soit $\alpha_1(g)$. Tout d'abord, démontrons que l'application α est un homomorphisme de groupe. Nous voulons montrer que $\alpha(g \circ h)(z) = \alpha(g)(z) \cdot \alpha(h)(z)$. Afin de calculer $\alpha(g \circ h)(z)$, calculons $T_g(T_h(z))$.

$$\begin{aligned} T_g(T_h(z)) &= T_g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(h) z^i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(g) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(h) z^i\right)^j \\ &= \alpha_1(g) \cdot \alpha_1(h) z + ... \end{aligned}$$

De plus, $T_g(T_h(z)) = T_{g \circ h}(z)$ et $T_{g \circ h}(z) = \alpha_1(g \circ h)z + ...$ Donc, α est un homomorphisme de groupe étant donné que

$$\alpha(g \circ h)(z) = \alpha_1(g \circ h) = \alpha_1(g) \cdot \alpha_1(h) = \alpha(g)(z) \cdot \alpha(h)(z).$$

Pour la suite des choses, nous voulons démontrer que le noyau de l'homomorphisme α est trivial. Soit $g \in Ker(\alpha)$, c'est-à-dire $\alpha_1(g) = 1$. Rappelons-nous que $T_g(z) = \alpha_1(z) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(g) z^i$. Afin de démontrer que le noyau de α est trivial, nous devons montrer que $\sum_{i=2}^{\infty} a_i(g) z^i = 0$, donc que $T_g(z) = z$.

Supposons que le noyau ne soit pas trivial. Soit $m \geq 2$ l'exposant du premier terme de plus haut degré non nul. Procédons par induction.

Nous avons

$$T_g(z) = z + \alpha_m(g) z^m + ...$$

De plus,

$$\begin{aligned} T_{g^2}(z) &= (z + \alpha_m(g) z^m + ...) + \alpha_m(z + \alpha_m(g) z^m + ...)^m + ... \\ &= z + 2\alpha_m(g) z + ... \end{aligned}$$

D'où

$$T_{g^r}(z) = z + r\alpha_m(g) z^m + ...$$

Étant donné que le groupe G est fini, le sous-groupe G_p l'est aussi. Donc, il existe un $n \geq 1$ tel que $g^n = 1$. Ceci étant dit, nous avons

$$z = T_1(z) = T_{g^n}(z) = z + n\alpha_m(g)z^m + ...$$

et en comparant les deux expressions de la dernière égalité, nous avons

$$0 = n\alpha_m(g)z^m + ...$$

Donc, $n\alpha_m(g) = 0$, mais $n \neq 0$, d'où nous sommes forcés d'admettre que $\alpha_m(g) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Nous concluons que $T_g(z) = z$ et donc que g est l'identité du groupe, ce qui prouve que le noyau est trivial.

Le développement que nous venons de faire démontre un fait très important. Nous savons que l'image de l'application α est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, donc l'image est un groupe cyclique. La preuve de ce dernier fait est une conséquence de la proposition 5 à la page 192 de [**DF**]. Étant donné que le noyau est trivial, alors, par le premier théorème d'isomorphisme, le groupe G_p est isomorphe à son image, et donc, G_p est un groupe cyclique. Résumons le tout dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.2. *Soit G un groupe agissant holomorphiquement et effectivement sur une surface de Riemann X. Soit $p \in X$. Supposons que le stabilisateur G_p soit fini. Alors, G_p est un groupe cyclique.*

Revenons maintenant à la fonction $T_g(z) = \alpha_1(g)z + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(g)z^i$. Soit n l'ordre de G_p. Définissons la fonction holomorphe

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{g \in G_p} T_g(z) \\ &= \prod_{g \in G_p} (\alpha_1(g)z) + ... \\ &= \gamma z^n + ... \end{aligned}$$

Pour tout g, nous avons montré plus tôt que $\alpha_1(g) \neq 1$, d'où $\gamma \neq 1$. Le degré de la fonction $F(z)$ est n, ce qui veut dire que chaque point sauf l'origine possède n préimages.

Soit $\widetilde{g} \in G_p$. Alors, $\widetilde{g} \cdot z = T_{\widetilde{g}}(z)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} F(\widetilde{g} \cdot z) &= \prod_{g \in G_p} T_g(\widetilde{g} \cdot z) \\ &= \prod_{g \in G_p} T_g(T_{\widetilde{g}}(z)) \\ &= \prod_{g \in G_p} T_{g \cdot \widetilde{g}}(z) \\ &= \prod_{g \in G_p} T_g(z), \end{aligned}$$

car $g \cdot \widetilde{g} \in G_p$. Nous venons de démontrer que $F(\widetilde{g} \cdot z) = F(z)$, donc que la fonction F prend la même valeur sur chaque G_p-orbite.

Posons $f = F \circ z$, une fonction holomorphe de U vers $\mathbb{C}$. Par construction, cette fonction est constante sur les orbites de G_p, c'est-à-dire $f(\widetilde{g} \cdot q) = f(q)$ pour tout $q \in U$. De plus, f est de degré n et $f(p) = 0$. Rappelons-nous que p est l'unique point de U fixé par G_p.

Il se trouve que les préimages de la fonction f sont exctement les orbites de G_p sur U. Donc, $Im(f) = Im(F) \subset \mathbb{C}$. Nous avons donc que $U/G_p = Im(f)$.

L'application quotient est donc cette fonction $f : U \longrightarrow U/G_p$.

Ceci nous mène au théorème suivant, dont la preuve complète se trouve à la page 78 de [**M**].

Théorème 1.4.1. *Soit G un groupe fini agissant holomorphiquement et effectivement sur une surface de Riemann Σ. La construction de cartes que nous venons de faire donne à Σ/G une structure complexe qui en fait une surface de Riemann. De plus, l'application quotient $\pi : \Sigma \longrightarrow \Sigma/G$ est holomorphe de degré $|G|$ et $mult_p(\pi) = |G_p|$ pour tout $p \in \Sigma$.*

Notons que la multiplicité en un point p est cet exposant n présent dans la forme normale locale d'une fonction entre deux surfaces de Riemann, soit le théorème 1.2.1.

Maitenant, considérons U un ouvert contenant le point p, où p est l'unique point fixe dans U. Soit $f : U \longrightarrow U/G_p$ une fonction holomorphe. Soit $\Phi : U \longrightarrow$

$\mathbb{C}$ une carte ayant z comme coordonnée locale sur U et $\eta : U/G_p \longrightarrow \mathbb{C}$ une carte ayant comme coordonnée locale w sur U/G_p. Par le théorème 1.2.1, nous savons que f peut s'écrire localement comme $z \mapsto z^n$, où $n = ord(G_p)$.

Soit $p_0 \in U$ tel que $p_0 \neq p$. Étant donné que p est le seul point fixe de U, nous savons que l'orbite de p_0 contient n points qui sont tous envoyés par f vers un point $f(p_0) \in U/G_p$. Le point $f(p_0)$ est envoyé par la carte η vers un point $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$. En utilisant la forme normale locale de la fonction holomorphe f, les préimages de w sont exactement l'ensemble des n racines d'unités $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, où k est un entier tel que $0 \leq k < n$

Maintenant, considérons σ un générateur de G_p. Soit $p_1 \in U$ un point tel que $\sigma p_0 = p_1$. Étant donné que, sur la carte Φ, les points p_0 et p_1 correspondent à une n^e racine d'unité, alors le quotient $\dfrac{p_1}{p_0} = \alpha$ est une n^e racine d'unité primitive, étant donné que l'orbite de p_0 est de taille maximale. Donc, $\sigma p_0 = \alpha p_0 = p_1$. Ceci implique que l'automorphisme σ est en fait une multiplication par une n^e racine d'unité primitive α.

D'autre part, l'automorphisme σ étant holomorphe, nous pouvons l'écrire comme une série convergente sur un petit disque contenant l'origine. Si nous appliquons σ à un z quelconque, nous obtenons

$$\sigma z = a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sigma z &= a_1 z + a_2 z^2 + ... \\ &= z(a_2 + a_3 z + ...) \\ &= \alpha z. \end{aligned}$$

C'est donc dire que $\alpha = a_2 + a_3 z + ...$ pour tout z. Nous venons de trouver une représentation de α qui est en fait une fonction continue.

Au départ, nous avions n choix de racines d'unité primitives distinctes pour α et nous savons maintenant que α peut aussi être représenté par une fonction continue. Donc, nous avons maintenant une fonction associant à un point z appartenant au disque contenant l'origine une n^e racine d'unité primitive. Cette application continue part d'un espace connexe et va vers un ensemble fini. Donc, son image est une seule des composantes connexes de l'ensemble fini, ce qui implique que l'image est en fait une unique n^e racine d'unité primitive.

Concluons cette section par la proposition suivante, soit la linéarisation de l'action, qui résume ce que nous venons de démontrer.

Proposition 1.4.3. *Soit G un groupe agissant holomorphiquement et effectivement sur une surface de Riemann compacte Σ. Soit $p \in \Sigma$ un point dont le stabilisateur n'est pas trivial. Soit z une coordonnée locale centrée en p. Considérons g un générateur de G_p et $n = |G_p|$. Alors, $g \cdot z = \alpha z$, où α est une n^e racine d'unité primitive.*

Chapitre 2

FINITUDE DU NOMBRE D'AUTOMORPHISMES D'UNE SURFACE DE RIEMANN COMPACTE DE GENRE $G \geq 2$

Le titre de ce chapitre en dit long sur sa finalité. Pour y arriver, nous allons devoir étudier plus profondément la notion de points de Weierstrass sur une surface de Riemann compacte.

Les points de Weierstrass sont des points spéciaux. Ces points seront très utiles dans le mesure où ils nous permettront de borner le nombre d'automorphismes que peut posséder une surface de Riemann compacte. Si un automorphisme agit sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, alors cet automorphisme n'aura aucun effet sur les points de Weierstrass s'il est l'identité, sinon, il devra les permuter afin que tous ces points demeurent des points de Weierstrass.

À la fin de ce chapitre, nous verrons que le nombre de points de Weierstrass sera borné inférieurement par $2g+2$ et supérieurement par $g^3 - g$. Nous parviendrons donc à la conclusion qu'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini d'automorphismes.

2.1. Conséquences de Riemann-Roch

Fixons p un point sur la surface de Riemann compacte Σ. Dans ce chapitre, $h^0(\Sigma, n_j p)$ sera le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant un pôle d'ordre au maximum n_j en p, c'est-à-dire $h^0(\Sigma, n_j p) =$

dim $H^0(\Sigma, n_j p)$ comme défini dans le précédent chapitre. Bien sûr, $h^0(\Sigma, 0) = 1$, puisque $H^0(\Sigma, 0)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes globales, qui sont toutes constantes par le théorème de Liouville. De plus, les dimensions de ces groupes de cohomologie sont ordonnées de la façon suivante :

$$1 = h^0(\Sigma, 0) \leq h^0(\Sigma, 1p) \leq h^0(\Sigma, 2p) \leq h^0(\Sigma, 3p) \leq ...$$

Proposition 2.1.1. *Dans la précédente chaîne d'inégalités,* $h^0(\Sigma, (n_j)p) - h^0(\Sigma, (n_j - 1)p)$ *est au maximum 1.*

Démonstration.

Soit $U \subset \Sigma$ un ouvert. Soit $\mathscr{O}_\Sigma(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U. En effet, cet ensemble est un anneau puisque la somme et le produit de deux fonctions holomophes sur U se trouvent aussi dans cet ensemble.

Considérons $I_p(U)$ l'idéal des fonctions holomorphes sur U telles que $f(p) = 0$ si $p \in U$, sinon, nous n'imposons aucune restriction.

Notons que si $p \notin U$, alors $\mathscr{F}(U) = 0$ puisque $\mathscr{O}_\Sigma(U)$ et $I_p(U)$ sont identiques. En fait, $\mathscr{F}(\Sigma - \{p\}) = 0$. Un tel faisceau, qui est non nul uniquement en un point, s'appelle un faisceau gratte-ciel.

L'ensemble des $I_p(U)$ forment un sous-faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_\Sigma$ que nous noterons I_p. Donc, nous avons $I_p = \mathscr{L}(-p)$. Nous noterons le quotient de ces deux faisceaux par $\mathscr{F} = \mathscr{O}_\Sigma / I_p$.

Nous pouvons donc former la suite courte exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I_p \longrightarrow \mathscr{O}_\Sigma \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Soit z une coordonnée locale centrée en p d'une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$. L'anneau $\mathscr{O}_\Sigma(U)$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'origine. De plus, l'idéal $I_p(U)$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ telles que $f(0) = 0$, puisque z est centrée en p.

Étant donné que toute fonction holomorphe peut s'écrire comme une série convergente en un voisinage de l'origine, nous avons $\mathscr{F} \simeq \mathbb{C}$, puisque les séries correspondant aux fonctions holomorphes dans $I_p(U)$ n'ont pas de terme constant.

La précédente suite courte exacte peut aussi s'écrire comme

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}(-p) \longrightarrow \mathscr{L}(0p) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

De plus, nous pouvons effectuer le produit tensoriel avec le faisceau inversible $\mathscr{L}(D)$. Nous obtenons la suite courte exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}(D-p) \longrightarrow \mathscr{L}(D) \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D) \longrightarrow 0,$$

et, en considérant que le diviseur D peut s'écrire comme $D = np$, nous avons

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}((n-1)p) \longrightarrow \mathscr{L}(np) \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D) \longrightarrow 0.$$

De cette suite courte exacte découle la suite longue exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(\Sigma, (n-1)p) \longrightarrow H^0(\Sigma, np) \longrightarrow H^0(\Sigma, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)) \longrightarrow$$

$$H^1(\Sigma, (n-1)p) \longrightarrow H^1(\Sigma, np) \longrightarrow H^1(\Sigma, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)) \longrightarrow 0.$$

Étant donné que $\mathscr{F}$ est un faisceau gratte-ciel dont la fibre est $\mathbb{C}$ en p et que $\mathscr{L}(D)$ est de rang 1, nous avons $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ est aussi un faisceau gratte-ciel ayant comme fibre $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$ en p. Donc, $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$. De plus, $H^1(\Sigma, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)) = 0$, puisque son support est $\{p\}$ qui est de dimension 0. Ces résultats nous mènent à la suite longue exacte suivante :

$$0 \to H^0(\Sigma, (n-1)p) \to H^0(\Sigma, np) \to \mathbb{C} \to H^1(\Sigma, (n-1)p) \to H^1(\Sigma, np) \to 0.$$

Pour faciliter notre compréhension, notons les applications comme suit :

$$f := 0 \to H^0(\Sigma, (n-1)p)$$

$$g := H^0(\Sigma, (n-1)p) \to H^0(\Sigma, np)$$

$$j := H^0(\Sigma, np) \to \mathbb{C}.$$

Utilisons maintenant la propriété d'exactitude de cette suite.

La suite étant exacte en $H^0(\Sigma, (n-1)p)$, ceci implique que l'image de l'application f est égal au noyau de l'application g. L'image de l'application f étant 0, ceci implique que le noyau de l'application g est trivial, donc que g est injective.

Utilisons maintenant le fait que la suite est exacte en $H^0(\Sigma, np)$. L'application g étant injective, son image est donc égale à $H^0(\Sigma,(n-1)p)$, qui est aussi le noyau de l'application j. Par le premier théorème d'isomorphisme, nous avons

$$Im\,(j) \simeq H^0(\Sigma, np)/H^0(\Sigma,(n-1)p).$$

Ceci implique que $dim\,(Im\,(j)) = h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma,(n-1)p)$. De plus, nous savons que l'image de j est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, alors sa dimension est soit 0 ou 1, puisque $\mathbb{C}$ est de dimension 1.

Nous concluons que $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma,(n-1)p)$ est au maximum 1.

$\square$

Nous nous posons maintenant la question suivante : étant donné que $h^0(\Sigma, 0) = 1$, où apparaîtra le nombre 2 dans la précédente chaîne d'inégalités, c'est-à-dire pour quel n_j est ce que le groupe de cohomologie contiendra une nouvelle fonction méromorphe ayant un pôle d'ordre exactement n_j en p ?

Théorème 2.1.1 (Theorème de trous de Weierstrass)**.** *Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre g et soit $p \in \Sigma$. Alors il y a précisément g entiers n_j*

$$1 = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_g < 2g$$

tels qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{M}_\Sigma$ qui soit holomorphe sur $\Sigma \backslash \{p\}$, mais qui possède un pôle d'ordre exactement n_j en p.

Démonstration.

Par le théorème de Riemann-Roch, nous avons

$$h^0(\Sigma, n_j p) - h^1(\Sigma, n_j p) = n_j - g + 1.$$

De plus, en utilisant la dualité de Serre, la dernière égalité devient

$$h^0(\Sigma, n_j p) - h^0(\Sigma, K - n_j p) = n_j - g + 1.$$

De plus,

$$deg(K - n_j p) < 0 \Leftrightarrow deg(K) - n_j < 0 \Leftrightarrow 2g-2-n_j < 0 \Leftrightarrow 2g-2 < n_j \Leftrightarrow 2g-1 \leq n_j.$$

Donc, si $n_j \geq 2g-1$, nous avons $deg(K - n_jp) < 0$ et donc $h^0(\Sigma, K - n_jp) = 0$ par le lemme 1.2.2.

Considérant cette dernière éventualité, nous avons

$$h^0(\Sigma, n_jp) = n_j - g + 1. \tag{2.1.1}$$

Portons maintenant notre attention sur l'égalité suivante :

$$h^0(\Sigma, (n_j+1)p) - h^0(\Sigma, n_jp) = ((n_j+1) - g + 1) - (n_j - g + 1) = 1.$$

Nous venons donc de démontrer que si $n_j \geq 2g-1$, alors il n'y a plus de trous dans notre suite.

Montrons maintenant qu'il y a précisément g entiers n_j.

La proposition 2.1.1 nous dit que $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma, (n-1)p)$ est soit 1 ou 0. De plus, si $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma, (n-1)p) = 1$, alors l'entier n ne fait pas partie de la liste des n_j présente dans l'énoncé du théorème. Par le théorème de Riemann-Roch, nous avons $h^0(\Sigma, np) - h^1(\Sigma, np) = n - g + 1$. Si $n \geq 2g-2$, soit le degré du diviseur canonique, alors $h^1(\Sigma, np) = 0$. De plus, nous savons que $h^0(\Sigma, 0p) = 1$. Donc, $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma, 0p) = n - g$. Par contre, nous savons que $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma, 0p)$ est au maximum n étant donné la proposition 2.1.1 et, dans ce cas, $h^0(\Sigma, jp) - h^0(\Sigma, (j-1)p) = 1$ pour tous les entiers j tel que $1 \leq j \leq n$. Ceci implique qu'aucun de ces entiers j ne fait partie de la liste des n_j. Mais, nous savons que $h^0(\Sigma, np) - h^0(\Sigma, 0p) = n - g$, ce qui implique qu'il y a précisément g entier n_j faisant partie de la liste ci-haut. $\square$

Les entiers n_j présents dans la suite des $h^0(\Sigma, n_jp)$ de l'énoncé du précédent théorème sont appelés les trous en p. Alors, si n_j est un trou, nous avons

$$h^0(\Sigma, (n_j-1)p) = h^0(\Sigma, n_jp).$$

Un entier où il n'y a pas de trou sera désormait appelé un non trou. Dans le cas où n_j est un non trou, nous avons

$$h^0(\Sigma, (n_j-1)p) + 1 = h^0(\Sigma, n_jp).$$

Maintenant, voici un exemple qui découle de ce théorème.

Exemple 2.1.1. *Soit Σ une surface de Riemann compacte. Supposons que 1 soit un non trou en p, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{M}_\Sigma$ ayant un pôle d'ordre exactement 1 en p. Alors, f^i possède un pôle d'ordre eactement i en p et ce, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci implique que tous les entiers $i \geq 1$ sont des non trous, ce qui contredit le fait qu'une surface de Riemann compacte possède au maximum g non trous. La seule possibilité nous permettant de ne pas contredire le théorème est que le genre de Σ soit nul.*

Il est facile de trouver une telle fonction dans $\mathbb{CP}^1$. Soit $f = \dfrac{1}{z-p}$. Considérons maintenant $f^i = \dfrac{1}{(z-p)^i}$. Cette dernière fonction possède un pôle d'ordre i en p pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci implique que tous les $i \in \mathbb{N}$ ne sont pas des trous.

Le dernier exemple nous mène donc au corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1. *Soit Σ une surface de Riemann compacte. Si $g \neq 0$, alors 1 est un trou. Si $g = 0$, nous avons automatiquement que 1 est un non trou.*

Donc, pour une surface de Riemann Σ de genre $g \geq 2$, il y a précisement g non trous dans l'ensemble $\{2, ..., 2g\}$.

Voici un autre corollaire du théorème 2.1.1.

Corollaire 2.1.2. *Si m et r sont des non trous en p, alors $(m + r)$ est un non trou en p.*

Démonstration.

Si m est un non trou, alors il existe une fonction f ayant un pôle d'ordre exactement m en p. De plus, il existe aussi un fonction h ayant un pôle d'ordre exactement r en p, puique p est aussi un non trou.

Considérons $f \cdot h$. Cette dernière fonction possède un pôle d'ordre exactement $(m + r)$ en p. Donc $(m + r)$ est un non trou en p. $\square$

Plaçons-nous dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^1$. Soit $f = \dfrac{1}{(z-p)^m}$ une fonction ayant un pôle d'ordre exactement m en p et soit $h = \dfrac{1}{(z-p)^r}$ une fonction ayant un pôle d'ordre exactement r en p. Alors, la fonction

$$f \cdot h = \frac{1}{(z-p)^m} \cdot \frac{1}{(z-p)^r} = \frac{1}{(z-p)^{m+r}}$$

possède un pôle d'ordre exactement $m+r$ en p.

Considérons maintenant $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_g = 2g$ les premiers g non trous en un point $p \in \Sigma$.

Proposition 2.1.2. *Pour chaque entier j, $0 < j < g$, nous avons*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g.$$

Démonstration.

Supposons que $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g$.

Alors, pour chaque $k \leq j$, nous aurions aussi que $\alpha_k + \alpha_{g-j} < 2g$.

Nous voulons maintenant compter le nombre de non trous précédant $2g = \alpha_g$. Étudions la suite de non trous suivante :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{g-j} < \alpha_1 + \alpha_{g-j} < \alpha_2 + \alpha_{g-j} < ... < \alpha_j - \alpha_{g-j} < 2g = \alpha_g.$$

Par le corollaire 2.1.2, nous savons qu'il existe au moins j non trous situés strictement entre α_{g-j} et α_g, comme nous l'avons écrit dans la précédente suite de non trous.

Nous remarquons qu'il y a $g-j$ non trous précédant $\alpha_1 + \alpha_{g-j}$. De plus, il y a $j+1$ non trous suivant α_{g-j}, car il ne faut pas oublier que $2g = \alpha_g$ est toujours un non trou.

Donc, au total, nous avons au moins $(g-j)+j+1 = g+1$ non trous $\leq 2g$, ce qui contredit le fait qu'il y a seulement g dans l'ensemble $\{2, ..., g\}$.

Nous concluons que $\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g$. □

Afin de mieux comprendre la précédente proposition, faisons un exemple avec un courbe de genre 3.

Exemple 2.1.2. *Soit une surface de Riemann de genre $g = 3$.*

Considérons la suite de non trous suivante, où α_1, α_2 et α_3 sont les non trous.

$$1 < 2 < 3 = \alpha_1 < 4 < 5 = \alpha_2 < 6 = 2g = \alpha_3.$$

Il est à noter que cette suite de non trous n'est pas unique, mais c'est une suite possible pour une courbe de genre 3 puisqu'elle respecte les corollaires 2.1.1 et 2.1.2.

Dans cet exemple, $0 < j < g = 3$. Prenons $j = 2$. Donc, $\alpha_j = \alpha_2$ et $\alpha_{g-j} = \alpha_{3-2} = \alpha_1$.

Supposons que $\alpha_2 - \alpha_1 < 2g = 6$. Donc, nous aurions aussi $\alpha_1 + \alpha_1 < 2g = 6$, car $\alpha_1 < \alpha_2$.

Par le corollaire 2.1.2, nous aurions au moins 2 non trous entre α_2 et α_3.

Ce qui nous mène à $j + 1 = 3$ non trous entre α_1 et α_3 ainsi que $g - j = 3 - 2 = 1$ non trou précédant α_2. Ceci nous donne 4 non trous au total, ce qui contredit le fait qu'une courbe de genre 3 possède au maximum 3 non trous.

Proposition 2.1.3. *Si $\alpha_1 > 2$, alors pour certains j, $0 < j < g$, nous avons*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} > 2g.$$

DÉMONSTRATION.

Étant donné la proposition 2.1.2, supposons que

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g,$$

pour tout $0 < j < g$.

Soit $\alpha_1 < 2\alpha_1 < ... \leq 2g$ une suite de non trous qui est construite à partir de α_1.

Soit α le premier non trou n'étant pas dans la liste construite à partir de α_1. Donc, pour un certain entier r, $1 \leq r \leq g$, nous avons $r\alpha_1 < \alpha < (r+1)\alpha_1$.

Nous avons donc les non trous suivants :

$$\alpha_1, \quad 2\alpha_1, \quad ..., \quad r\alpha_1, \quad \alpha.$$

De plus, étant donné que nous supposons que $\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$, nous obtenons aussi les non trous suivants :

$$2g - \alpha_1, \quad 2g - 2\alpha_1, \quad ..., \quad 2g - r\alpha_1, \quad 2g - \alpha, \tag{2.1.2}$$

ces derniers étant tous les non trous supérieurs ou égaux à $2g - \alpha$ et inférieurs ou égaux à $2g$, car α est le premier non trou ne faisant pas partie de la liste construite à partir de α_1.

Nous avons

$$\alpha_1 + (2g - \alpha) = 2g - (\alpha - \alpha_1) > 2g - r\alpha_1$$

qui se doit d'être un non trou par le corollaire 2.1.2.

Ceci veut dire qu'il y a un non trou précédant $2g$, mais suivant $2g - r\alpha_1$, qui n'est pas dans la liste 2.1.2, ce qui mène à une contradiction.

Nous concluons que $\alpha_j + \alpha_{g-j} > 2g$. □

Nous concluons cette section par le fait suivant.

Corollaire 2.1.3. *Soit $p \in \Sigma$ un point d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Alors, il existe une 1-forme ω qui n'est pas nulle au point p.*

Démonstration.

Puisque le diviseur d'une 1-forme est le diviseur canonique K, nous voulons que $\omega \in \mathscr{L}(K)$. Donc,

$$deg(div(\omega)) + deg(K) \geq 0,$$

$$\iff deg(div(\omega)) + 2g - 2 \geq 0,$$

$$\iff deg(div(\omega)) \geq 2 - 2g.$$

Nous avons $g \geq 2$, donc $2 - 2g < 0$. Il faut donc que $deg(div(\omega)) > 0$. □

2.2. Le Wronskien

Dans cette section, nous allons définir une fonction holomorphe, nommée le Wronskien. Nous verrons à la fin du présent chapitre que l'ordre du Wronskien bornera supérieurement le nombre de points de Weierstrass.

Considérons $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_g$ une base de 1-formes homomorphes sur Σ. Si nous prenons comme coordonnée locale z, ces 1-formes peuvent être exprimées comme $f_1(z)dz,\ f_2(z)dz,\ ...,\ f_g(z)dz$. Soit w une autre coordonnée locale, alors ces 1-formes seront exprimées comme $w_i = \varphi_i(w)dw$.

Si nous désirons effectuer un changement de carte, où $w = g(z)$ est l'application changement de carte, alors la propriété suivante se doit d'être satisfaite :

$$f_i(z) = \varphi_i(g(z)) \cdot g^{'}(z).$$

Considérons le déterminant suivant, appelé le Wronskien, sur une carte ayant comme coordonnée locale z :

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ f_1^{'}(z) & \cdots & f_g^{'}(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(g-1)}(z) & \cdots & f_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}.$$

Lemme 2.2.1. *Le Wronskien ne dépend pas de la base de 1-formes choisie.*

Démonstration.

En effet, considérons $C \in GL(g, \mathbb{C})$ une matrice changement de base. Si nous appliquons le changement de base, nous avons

$$\mathscr{W} \cdot C = \mathscr{W} \cdot det(C),$$

étant donné que le Wronskien est aussi un déterminant. La matrice C étant constituée de scalaires complexes, $det(C) \in \mathbb{C}$. Donc, le Wronskien est indépendant de la base, puisque le changement de base a pour simple effet de multiplier $\mathscr{W}$ par un scalaire complexe. $\square$

Lemme 2.2.2. *Le Wronskien décrit ci-dessus est une* $\frac{g(g+1)}{2}$ *-différentielle.*

Démonstration.

Voici une esquisse de la preuve en utilisant une base contenant trois 1-formes, donc $q = 1$. La preuve complète est laissée au lecteur.

Nous voulons démontrer que le Wronskien demeure une $\frac{g(g+1)}{2}$-différentielle même si nous changeons de coordonnée locale, donc de carte.

Comme nous l'avons vu précédemment, le changement de coordonnée locale nous donne

$$f_i(z) = \varphi_i(g(z)) \cdot g^{'}(z),$$

que nous écrirons comme suit afin d'allèger la notation : $(\varphi_i \circ g) \cdot g^{'}$.

Calculons la dérivée première, qui sera utile dans le calcul du Wronskien.

$$f_i^{'}(z) = (\varphi_i \circ g)^{'} \cdot g^{'} + (\varphi_i \circ g) \cdot g^{''}.$$

Nous remarquons que le dernier terme de la précédente égalité est le produit de $f_i(z)$ par $g^{'}$. Donc, en appliquant la propriété de linéarité du déterminant, ce terme s'annulera. D'où $f_i^{'}(z) = (\varphi_i \circ g)^{'} \cdot g^{'}$ dans le calcul du Wronskien.

Puis, en calculant la dérivée seconde, nous obtenons :

$$f_i^{''}(z) = (\varphi_i \circ g)^{''} \cdot g^{'} + 2(\varphi_i \circ g)^{'} \cdot g^{''} + (\varphi_i \circ g) \cdot g^{'''}.$$

Encore une fois nous avons des termes qui sont linéairement dépendants de d'autres. Nous remarquons que le deuxième terme de la précédente égalité est un multiple du terme non-nul de la dérivée première, soit le produit de $f_i^{'}(z)$ par $2g^{'}$. De plus, le troisième terme est aussi le produit de $f_i(z)$ par $g^{''}$. Ces deux termes s'annuleront lors du calcul du déterminant.

En mettant en évidence le terme $g^{'}$ qui est commun à tous les termes de chaque ligne, nous obtenons le Wronskien suivant :

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} (\varphi_1 \circ g)(z) & (\varphi_2 \circ g)(z) & (\varphi_3 \circ g)(z) \\ (\varphi_1 \circ g)^{'}(z) & (\varphi_2 \circ g)^{'}(z) & (\varphi_3 \circ g)^{'}(z) \\ (\varphi_1 \circ g)^{''}(z) & (\varphi_2 \circ g)^{''}(z) & (\varphi_3 \circ g)^{''}(z) \end{vmatrix} \cdot (g'(z))^3$$

Appliquons la règle de la chaîne afin de continuer nos calculs. Nous avons

$$(\varphi_i \circ g)^{'}(z) = (\varphi_i^{'} \circ g)(z) \cdot g^{'}(z).$$

En dérivant ce dernier terme, nous obtenons

$$(\varphi_i \circ g)^{''}(z) = (\varphi_i^{'} \circ g)^{'}(z) \cdot g^{'}(z) + (\varphi_i^{'} \circ g)(z) \cdot g^{''}(z).$$

Encore une fois, le terme $(\varphi_i^{'} \circ g)(z) \cdot g^{''}(z)$ sera nul lors du calcul du déterminant puisqu'il est multiple du terme $(\varphi_i^{'} \circ g)(z) \cdot g^{'}(z)$ présent dans la deuxième ligne du Wronskien.

En mettant en évidence $g^{'}(z)$ qui est présent dans tous les termes de la deuxième et troisième ligne du Wronskien, nous obtenons :

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} (\varphi_1 \circ g)(z) & (\varphi_2 \circ g)(z) & (\varphi_3 \circ g)(z) \\ (\varphi_1^{'} \circ g)(z) & (\varphi_2^{'} \circ g)(z) & (\varphi_3^{'} \circ g)(z) \\ (\varphi_1^{'} \circ g)^{'}(z) & (\varphi_2^{'} \circ g)^{'}(z) & (\varphi_3^{'} \circ g)^{'}(z) \end{vmatrix} \cdot (g'(z))^5$$

En appliquant la règle de la chaîne et en supprimant les termes qui sont multiples des lignes précédentes du Wronskien, la dernière ligne du déterminant devient

$$(\varphi_i^{'} \circ g)^{'}(z) = (\varphi_i^{''} \circ g)(z) \cdot g^{'}(z).$$

Donc,

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} (\varphi_1 \circ g)(z) & (\varphi_2 \circ g)(z) & (\varphi_3 \circ g)(z) \\ (\varphi_1^{'} \circ g)(z) & (\varphi_2^{'} \circ g)(z) & (\varphi_3^{'} \circ g)(z) \\ (\varphi_1^{'} \circ g)(z) & (\varphi_2^{'} \circ g)(z) & (\varphi_3^{'} \circ g)(z) \end{vmatrix} \cdot (g'(z))^6$$

Comme nous avions $w = g(z)$, alors le précédent Wronskien devient

$$\mathscr{W} = \begin{vmatrix} \varphi_1(w) & \varphi_2(w) & \varphi_3(w) \\ \varphi_1'(w) & \varphi_2'(w) & \varphi_3'(w) \\ \varphi_1'(w) & \varphi_2'(w) & \varphi_3'(w) \end{vmatrix} \cdot (dw)^6$$

Donc, nous concluons que, même après un changement de carte, le Wronskien demeure une 6-différentielle. □

2.3. Choix d'une base de 1-formes

Dans cette section, nous travaillerons sur une seule carte. Soit $p \in \Sigma$ un point ayant comme coordonnée locale z centrée en p.

Choisissons d'abord une base de 1-formes holomorphes.

Soit A l'espace de 1-formes holomorphes de dimension fini engendré par

$$f_1(z)(dz), ..., \ f_g(z)(dz)$$

tel que $dim(A) = g \geq 1$.

Choisissons maintenant une base que nous nommerons la base de A adaptée à z, c'est-à-dire une base ayant la propriété suivante :

$$ord_p \ f_1(z) < ord_p \ f_2(z) < ... < ord_p \ f_g(z), \tag{2.3.1}$$

l'ordre étant uniquement déterminé par l'ordre des fonctions holomorphes $f_i(z)$.

Pour nous permettre de construire cette base, définissons

$$\mu_1 = \min_{f_i(z) \in A} \ \{ord_p \ f_i(z)\},$$

et choisissons $f_1(z) \in A$ telle que $ord_p \ f_1(z) = \mu_1$.

Alors, $A_1 = \{f_i(z) \mid ord_p \ f_i(z) > \mu_1\}$ est un sous-espace de A de dimension $g - 1$.

Posons

$$\mu_2 = \min_{f_i(z) \in A_1} \ \{ord_p \ f_i(z)\}.$$

Donc, $A_2 = \{f_i(z) \mid ord_p \ f_i(z) > \mu_2\}$ est un sous-espace de A de dimension $g - 2$.

En continuant le même processus, nous avons construit par induction une base satisfaisant 2.3.1. Par contre, la base ainsi construite n'est pas unique. Afin qu'elle le devienne, posons $\mu_i = ord_p\ f_i(z)$.

Considérons l'expansion de $f_j(z)$ en série de Taylor centrée en p

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{kj}(z)^k.$$

Bien sûr, le premier terme non nul de f_j est z^{μ_j}.

Par la suite, effectuons un processus d'échelonnage de cette base, c'est-à-dire

$$c_{\mu_k j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j, \end{cases}$$

où $j,\ k = 1,\ ...,\ g$.

Une base satisfaisant toutes ces conditions sera unique et nous la nommerons la base de A adaptée à z.

2.4. Points de Weierstrass

Maintenant, nous utiliserons les sections précédentes afin d'arriver à démontrer qu'une surface de Riemann compacte possède un nombre fini d'automorphismes.

Tout d'abord, définissons le poids de z par rapport à A.

Définition 2.4.1. *Soit $p \in \Sigma$ ayant comme coordonnée locale z centrée en p. Définissons le poids de z par*

$$\tau(z) = \sum_{i=1}^{g} (\mu_i - i + 1).$$

Proposition 2.4.1. *Soit $\{\varphi_1(z)(dz),\ ...,\ \varphi_g(z)(dz)\}$ une base quelconque pour A. Considérons la fonction holomorphe*

$$\mathscr{W}(z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \cdots & \varphi_g(z) \\ \varphi_1'(z) & \cdots & \varphi_g'(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(g-1)}(z) & \cdots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}},$$

soit le Wronskien défini à la section 2.2.

Alors,

$$ord_z\mathscr{W} = \tau(z).$$

Démonstration.

Comme nous l'avons vu à la section 2.2, effectuer un changement de base revient à multiplier $\mathscr{W}$ par un scalaire complexe. Alors, nous utiliserons une base qui respecte 2.3.1, c'eat-à-dire la base de A adaptée à z.

De plus, le Wronskien est une fonction holomorphe, puisqu'il est constitué de 1-formes holomorphes.

Afin d'alléger la notation, nous noterons le Wronskien comme $|f_1(z), f_2(z), ..., f_g(z)|$.

Dans le but de prouver cette proposition, commençons d'abord par démontrer une propriété du Wronskien, celle-ci découlant directement des propriétés des déterminants.

Nous voulons démontrer que

$$|hf_1(z), hf_2(z), ..., hf_g(z)| = h^g|f(z), f_2(z), ..., \varphi_g(z)|. \tag{2.4.1}$$

En effet, si nous utilisons la règle de la dérivée d'un produit de fonctions, nous avons

$|hf_1(z), hf_2(z), ..., hf_g(z)|$

$$= \begin{vmatrix} hf_1(z) & \cdots & hf_g(z) \\ hf_1'(z) + h'f_1(z) & \cdots & hf_g'(z) + h'f_g(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ hf_1^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)}f_1(z) & \cdots & hf_g^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)}f_g(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}$$

$$= h \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ hf_1'(z) + h'f_1(z) & \cdots & hf_g'(z) + h'f_g(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ hf_1^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)}f_1(z) & \cdots & hf_g^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)}f_g(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}$$

$$= h \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ hf_1'(z) & \cdots & hf_g'(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ hf_1^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)} f_1(z) & \cdots & hf_g^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)} f_g(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}},$$

la dernière égalité étant obtenue en multipliant la première ligne du déterminant par $-h$ et en additionnant ce résultat à la deuxième ligne.

De façon similaire, nous pouvons soustraire de chaque ligne le multiple approprié de la première ligne, qui nous mène à

$$h \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ hf_1'(z) & \cdots & hf_g'(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ hf_1^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-2)} f_1'(z) & \cdots & hf_g^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-2)} f_g'(z) \end{vmatrix} (dz)^q$$

qui, par linéarité du déterminant, est égal à

$$h^2 \begin{vmatrix} f_1(z) & \cdots & f_g(z) \\ f_1'(z) & \cdots & f_g'(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ hf_1^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)} f_1(z) & \cdots & hf_g^{(g-1)}(z) + ... + h^{(g-1)} f_g(z) \end{vmatrix} (dz)^q.$$

Nous répétons le même processus, soit calculer la dérivée d'une produit de fonction, pour toutes les lignes du déterminant, ce qui nous mène à

$$|hf_1(z), hf_2(z), ..., hf_g(z)| = h^g \; |f_1(z), f_2(z), ..., f_g(z)| = h^g \cdot \mathscr{W}.$$

Pour la suite de la preuve, procédons par induction sur g.

Si $g = 1$, nous avons $\mathscr{W} = |f_1(z)| = f_1(z)$ et

$$ord_z f_1(z) = \mu_1 = \sum_{i=1}^{1} \mu_i - i + 1.$$

Supposons que le résultat soit vrai pour $g = k$, c'est-à-dire

$$ord_z \, |f_1(z), f_2(z), ..., f_k(z)| = \sum_{i=1}^{k} \mu_i - i + 1.$$

Nous voulons montrer que

$$ord_z |f_1(z), f_2(z), ..., f_{k+1}(z)| = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_i - i + 1).$$

Considérons le Wronskien $|f_1(z), f_2(z), ..., f_{k+1}(z)|$. Par 2.4.1, nous avons

$$|f_1(z), f_2(z), ..., f_{k+1}(z)| = f_1{}^{k+1}(z) \, \left| 1, \frac{f_2(z)}{f_1(z)}, ..., \frac{f_{k+1}(z)}{f_1(z)} \right|$$

$$= f_1{}^{k+1}(z) \begin{vmatrix} 1 & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)(z) & \cdots & \left(\dfrac{f_{k+1}}{f_1}\right)(z) \\ (1)' & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)'(z) & \cdots & \left(\dfrac{\varphi_{k+1}}{\varphi_1}\right)'(z) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (1)^{(k+1)} & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) & \cdots & \left(\dfrac{f_{k+1}}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}$$

$$= f_1{}^{k+1}(z) \begin{vmatrix} 1 & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)(z) & \cdots & \left(\dfrac{f_{k+1}}{f_1}\right)(z) \\ 0 & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)'(z) & \cdots & \left(\dfrac{f_{k+1}}{f_1}\right)'(z) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) & \cdots & \left(\dfrac{f_{k+1}}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}.$$

En développant le déterminant selon la première ligne et la première colonne, nous obtenons

$$= f_1^{\ k+1}(z) \begin{vmatrix} \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'(z) & \cdots & \left(\frac{f_{k+1}}{f_1}\right)'(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) & \cdots & \left(\frac{f_{k+1}}{f_1}\right)^{(k+1)}(z) \end{vmatrix} (dz)^{\frac{g(g+1)}{2}}$$

$$= f_1^{\ k+1} \left| \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'(z), ..., \left(\frac{f_{k+1}}{f_1}\right)'(z) \right|.$$

Appliquons l'hypothèse d'induction, puisque le Wronskien est maintenant de dimension k.

$$ord_z \left(f_1^{\ k+1}(z) \left| \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'(z), ..., \left(\frac{f_{k+1}}{f_1}\right)'(z) \right| \right)$$
$$= (k+1)\mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} \left\{ (\mu_j - \mu_1 - 1) - (j - 1 - 1) \right\},$$

le premier terme étant obtenu en multipliant l'ordre de f_1 par son degré. Le premier terme de la sommation vient du fait que nous devons trouver l'ordre de la dérivée d'un quotient de deux fonctions holomorphes.

Reprenons la dernière égalité afin d'obtenir le résultat final.

$$(k+1)\mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} \{(\mu_j - \mu_1 - 1) - (j-2)\} = k\mu_1 + \mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} (\mu_j - \mu_1 - 1 - j + 2)$$

$$= k\mu_1 + \mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} (\mu_j - \mu_1 - j + 1) = k\mu_1 + \mu_1 - k\mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} (\mu_j - j + 1)$$
$$= \mu_1 + \sum_{i=2}^{k+1} (\mu_j - j + 1) = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_j - j + 1).$$

$\square$

Corollaire 2.4.1. *L'ensemble des points $z \in D$ ayant un poids positif est fini.*

Démonstration.

En effet, chaque fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte possède un nombre fini de zéros. □

Définition 2.4.2. *Un point $p \in \Sigma$ sera appelé un point de Weierstrass si son poids est positif.*

Reprenons maintenant $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_g$ notre base de 1-formes sur Σ telle que les ω_i peuvent localement être exprimés comme $\omega_i = f_i(z)(dz)$.

Comme nous l'avons déjà démontré au lemme 2.2.2, le Wronskien est une $\frac{g(g+1)}{2}$ - différentielle holomorphe. Nous pouvons donc lui associer un diviseur, que nous noterons $div(\mathscr{W})$.

De plus, $deg(div(\mathscr{W})) = \frac{g(g+1)}{2} \cdot deg(K)$, puisque le Wronskien est formé de 1-formes. Sachant que $deg(K) = 2g - 2$, nous avons

$$\begin{aligned} deg(div(\mathscr{W})) &= \frac{g(g+1)(2g-2)}{2} && (2.4.2) \\ &= \frac{g(g+1)2(g-1)}{2} && (2.4.3) \\ &= (g-1)g(g+1). && (2.4.4) \end{aligned}$$

Avant de passer à la prochaine proposition, rappelons-nous que

$$\tau(z) = \sum_{i=1}^{g} (\mu_i - i + 1).$$

Proposition 2.4.2. *Pour $g \geq 2$, considérons $\mathscr{W}$ le Wronskien d'une base de 1-formes donnée. Soit g la dimension de l'espace des 1-formes. Alors,*

$$\sum_{p \in \Sigma} \tau(p) = (g-1)g(g+1).$$

Démonstration.

La preuve de cette proposition utilise la proposition 2.4.1 ainsi que la définition même du degré d'un diviseur. □

Proposition 2.4.3. *Pour $g \geq 2$, $\tau(p) \leq \dfrac{g(g-1)}{2}$.*

Démonstration.

En utilisant la proposition 2.4.2, nous avons

$$\sum_{p \,\in\, \Sigma} \tau(p) \; = (g-1)g(g+1). \tag{2.4.5}$$

Soit $2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_g = 2g$ les g premiers non trous au point p. Soit $1 = n_1 < n_2 < ... < n_g < 2g$ les g trous en p. Il est clair que les n_j sont les compléments des α_j dans l'ensemble $\{1, 2, ..., 2g\}$.

Soit z une coordonnée locale centrée en p. Rapellons-nous que, comme défini à la section 2.3, $\mu_j = ord_p f_i(z)$, où $f_i(z)$ est une fonction holomorphe. Alors, si n_j est un trou en p, ceci implique que $h^0(\Sigma, (n_j - 1)p) = h^0(\Sigma, n_j p)$. Donc, $h^1(\Sigma, (n_j - 1)p) - h^1(\Sigma, n_j p) = 1$. Par dualité de Serre, nous obtenons

$$h^0(\Sigma, K-(n_j-1)p)-h^0(\Sigma, K-n_j p) = 1 \Longrightarrow h^0(\Sigma, K-(n_j-1)p) = 1+h^0(\Sigma, K-n_j p).$$

Donc, si n_j est un trou en p, ceci implique qu'il existe une 1-forme ω, pouvant s'écrire comme $f_i(z)(dz)$ sur la carte, ayant un zéro d'ordre exactement $n_j - 1$ en p. Donc, $\mu_j = n_j - 1$.

Par définition de $\tau(p)$ et en appliquant la proposition 2.1.1, nous avons

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \sum_{j\,=\,1}^{g} (\mu_j - j + 1) = \sum_{j\,=\,1}^{g} (n_j - j) = \sum_{j\,=\,1}^{2g} j - \sum_{j\,=\,1}^{g} \alpha_j - \sum_{j\,=\,1}^{g} j \\ &= \sum_{j\,=\,g+1}^{2g-1} j - \sum_{j\,=\,1}^{g-1} \leq \frac{3g}{2}(g-1) - g(g-1) = \frac{g(g-1)}{2}. \end{aligned}$$

□

Passons maintenant au théorème suivant, qui borne inférieurement et supérieurement le nombre de points de Weierstrass d'une surface de Riemann compacte.

Théorème 2.4.1. *Soit W le nombre de points de Weierstrass sur une surface de genre $g \geq 2$. Alors*

$$2g + 2 \leq W \leq g^3 - g.$$

Démonstration.

Commençons d'abord par démontrer que $W \leq g^3 - g$.

Nous savons par 2.4.5 que

$$\sum_{p \,\in\, \Sigma} \tau(p) = g^3 - g.$$

De plus, le poids minimal de chaque point sur la surface de Riemann est 1, d'où l'inégalité $W \leq g^3 - g$.

Afin de démontrer que $2g + 2 \leq W$, utilisons d'abord la proposition 2.4.3, où nous avons démontré que $\tau(p) \leq \dfrac{g(g-1)}{2}$ qui est le poids maximal d'un point.

Maintenant, divisons la somme des poids par le poids maximal d'un point.

$$\frac{2(g^3 - g)}{g^2 - g} = \frac{2g(g-1)(g+1)}{g(g-1)} = 2g + 2,$$

ce qui conclut cette preuve. □

Il est à noter que $W = 2g+2$ si et seulement si en tout point de Weierstrass la séquence de trou est $1, 3, ..., 2g - 1$, c'est-à-dire si Σ est hyperelliptique. De plus amples détails sur les surfaces hyperelliptiques sont disponibles au chapitre III.7 du livre [**FK**].

De plus, $W = g^3 - g$ si et seulement si la séquence de trous est $1, 2, ..., g, g+1$ en tout point de Weierstrass.

La proposition suivante borne inférieurement le nombre de points fixes d'un automorphisme.

Proposition 2.4.4. *Soit $T \neq 1$ un automorphisme d'une surface de Riemann compacte Σ. Alors, T possède au plus $2g + 2$ points fixes.*

Démonstration. Étant donné que Σ est une surface de Riemann compacte et que l'ensemble des points fixés par T est discret, alors cet ensemble est aussi fini.

Soit $p \in \Sigma$ un point qui n'est pas fixé par l'automorphisme T. Alors, il existe une fonction $f \in \mathscr{M}_\Sigma$ dont le diviseur des pôles est mp.

De plus, $m \leq g+1$. En effet, nous avons la suite d'inclusion suivante :

$$1 = L(\Sigma, 0) \leq L(\Sigma, 1p) \leq L(\Sigma, 2p) ... \leq L(\Sigma, (g+1)p) \leq ...$$

Nous cherchons la valeur de m pour laquelle $L(\Sigma, mp) \geq 2$. Par Riemann-Roch, si $m = g+1$, nous avons

$$L(\Sigma, mp) - L(\Sigma, K - mp) = (g+1) - g + 1.$$

Nous obtenons que $L(\Sigma, mp) = 2 + L(\Sigma, K - mp)$, mais $L(\Sigma, K - mp) \geq 0$. D'où $r \leq g+1$.

Soit la fonction $l = f - f \circ T$. Il est à noter que, f ayant un pôle de degré m, alors $f \circ T$ aussi. Le diviseur des pôles de l est donc $mp + m(T^{-1}p)$, dont le degré est $2m$.

Comme nous l'avons vu au lemme 1.2.1, $deg(div(l)) = 0$ puisque l est une fonction méromorphe. Donc, la différence entre le degré du diviseur des zéros de l et le degré du diviseur des pôles de l est nulle. De plus, nous savons que le degré du diviseur des pôles de l est égal à $2m$. Donc, le degré du diviseur des zéros de l est $2m$, et, étant donné que $m \leq 2g+1$, alors l possède $2m \leq 2g+2$ zéros.

De plus, chaque point fixe de T est un zéro de l. En effet, soit $\widetilde{p}$ un point fixe de T. Alors,

$$\begin{aligned} l(\widetilde{p}) &= (f - f \circ T)(\widetilde{p}) \\ &= f(\widetilde{p}) - f(T(\widetilde{p})) \\ &= f(\widetilde{p}) - f(\widetilde{p}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, étant donné que l possède au plus $2g+2$ zéros, alors T possède au plus $2g+2$ points fixes. □

Nous sommes maintenant en mesure de conclure le présent chapitre par le théorème suivant.

Théorème 2.4.2. *Une surface de Riemann compacte Σ de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini d'automorphismes.*

Démonstration.

Commençons par le cas où Σ n'est pas hyperelliptique. Soit $G = Aut(\Sigma)$. Alors G permute les points de Weierstrass entre eux. Donc, il existe un homomorphisme

$$h : G \longrightarrow S_W,$$

où S_W est le groupe de permutation des points de Weierstrass.

Soit $ker(h)$ le noyau de l'homomorphisme h. Soit $\sigma \in ker(h)$, c'est-à-dire que σ fixe tous les points de Weierstrass. Nous avons au plus $2g+2$ points fixes sur Σ et nous avons un minimum de $2g+2$ points de Weierstrass. Donc, σ est l'identité ce qui fait en sorte que l'homomorphisme h est injectif.

Le premier théorème d'isomorphime nous dit que $G/ker(h) \simeq Im(h)$. De plus, l'image de h est un sous-groupe du groupe fini S_W. En sachant que $ker(h)$ est trivial, nous concluons que $|G|$ est fini.

Si Σ est hyperelliptique, alors, par définition, nous pouvons décrire cette surface comme un recouvrement de la sphère $\mathbb{P}^1$ ayant $2g+2$ points de branche (voir la page 94 de [**FK**]). Un automorphisme de Σ doit donc permuter ces $2g+2$ points de branche.

Nous obtenons donc un homomorphisme $\rho : G \longrightarrow S_B$, où S_B est le groupe de permutation des points de branche. La proposition à la page 101 de [**FK**] nous dit qu'une surface est hyperelliptique si et seulement si il existe une involution J, $J \in Aut(\Sigma)$ telle que $J^2 = 1$, qui fixe les $2g+2$ points de branche. Donc, le noyau de ρ est le groupe engendré par l'involution J. Donc, $|ker(h)| = 2$. D'où $\dfrac{|G|}{2} = S_B$ et étant donné que S_B est fini, nous concluons que $|G|$ est fini. $\square$

Chapitre 3

CALCUL UTILISANT LA FORMULE DE TRACE D'EICHLER

Nous commençons ce chapitre en démontrant un théorème qui nous servira dans la plupart des développements des deux prochains chapitres.

Tout d'abord, soit $p \in \Sigma$. Considérons G_p le stabilisateur du point p. Comme nous l'avons démontré à la section 1.4, ce stabilisateur est cyclique.

Soit maintenant $F : \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$ une application holomorphe non constante définie en un point $p \in \Sigma$. Alors, il y a des coordonnées locales près de p et $F(p)$ telles que F peut s'écrire comme $z \rightarrow z^n$, comme nous le mentionne le théorème 1.2.1. La multiplicité ou le nombre de ramification est cet unique entier n et nous avons démontré au théorème 1.4.3 que $n = \nu(p)$, où $\nu(p)$ est l'ordre du stabilisateur du point p. Définissons maintenant le nombre de branche comme étant $n - 1$. Nous noterons par $b_p(F)$ le nombre de branche de F au point p.

Théorème 3.0.3 (Relation de Riemann-Hurwitz)**.** *Soit $F : \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$ une application holomorphe non constante. Soit g le genre de Σ et $\tilde{g}$ le genre de $\widetilde{\Sigma}$. Alors*

$$2g - 2 = n(2\tilde{g} - 2) + B,$$

où

$$B = \sum_{p \,\in\, \Sigma} b_p(F).$$

Démonstration.

Soit l'application suivante :

$$F := \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}.$$

Soit ω une 1-forme sur $\widetilde{\Sigma}$.

Tout d'abord, considérons le pullback de ω, noté $F^*(\omega)$, qui est aussi une 1-forme sur Σ. Bien sûr, de ce pullback découle un diviseur que nous noterons $div(F^*(\omega))$. Nous voulons trouver le degré de ce diviseur. Étant donné que $F^*(\omega)$ est une 1-forme, $deg(div(F^*(\omega))) = K = 2g-2$, où g est le genre de la surface Σ.

Considérons maintenant $div(\omega)$. Nous savons que $deg(div(\omega)) = \widetilde{K} = 2\widetilde{g} - 2$, où $\widetilde{g}$ est le genre de $\widetilde{\Sigma}$. À présent, nous voulons calculer $deg(F^*(div(\omega)))$. Par définition, le pullback d'un diviseur $D = \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} n_p p$ est $F^*(D) = \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} n_p F^*(p)$.

Considérons $\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$ et $p \in \Sigma$ tel que $p = F^*(\widetilde{p})$. Notons qu'en général, le nombre de préimages d'un point $\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$ est n, où n est le degré de F. Par contre, les points de ramification de $\widetilde{\Sigma}$ sont les points ayant $n-1 = B$ préimages.

Donc, afin que $deg(div(F^*(\omega))) = deg(F^*(div(\omega)))$, nous avons

$$2\widetilde{g} - 2 = n(2\widetilde{g} - 2) + \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} b_p(F).$$

□

Nous pouvons prouver le théorème précédent en utilisant une approche plus topologique qui utilise les simplexes. Voici une esquisse de cette preuve, où nous supposons qu'il existe une triangulation $\mathscr{T}$ sur la surface Σ.

Soit $L = \{F(p) \mid p \in \Sigma \text{ et } b_p(F) > 0\}$. Cet ensemble étant discret, nous pouvons effectuer une triangulation $\mathscr{T}$ telle que chaque point de L est un sommet de cette triangulation. Posons f comme le nombre de faces dans $\mathscr{T}$, a le nombre d'arêtes de $\mathscr{T}$ et s le nombre de sommets de $\mathscr{T}$. Maintenant, utilisons F pour projeter cette triangulation. Nous avons maintenant nf faces, na arêtes et $ns-B$ sommets sur $\widetilde{\Sigma}$, étant donné la triangulation induite. Calculons maintenant la caractéristique d'Euler de chacune des surfaces de deux façons :

$$f + a + s = 2g - 2$$

$$nf + na + ns - B = 2\tilde{g} - 2.$$

Nous obtenons donc

$$1 - g = n(1 - \tilde{g}) + B/2.$$

Revenons quelques instants à l'application quotient $\pi : \Sigma \longrightarrow \Sigma/G$, où G est le groupe d'automorphismes de Σ. Nous avons vu que le degré de π est égal à l'ordre de G. De plus, nous savons que les points de branche de π sont les points fixes de G et $b_\pi(p) = ord\ G_p - 1$, où G_p le stabilisateur d'un point $p \in \Sigma$. Soient $p_1, ..., p_m$ l'ensemble des points fixes non équivalent de $G/\{1\}$, c'est-à-dire tous les p_i font partie d'une orbite différente. Soit $\nu_j(p) = ord\ G_{p_j}$. Donc, l'orbite du point p_j possède $\dfrac{N}{\nu_j}$ points dans Σ. Nous pouvons calculer le nombre de branche total comme suit :

$$B = \sum_{i=1}^{m} \frac{N}{\nu_j}(\nu_j - 1) = N \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right).$$

Ceci nous permet d'écrire la formule de Riemann-Hurwitz de la façon suivante :

$$2g - 2 = N(2\widetilde{g} - 2) + N \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right). \tag{3.0.6}$$

Maintenant que le théorème de Riemann-Hurwitz est démontrer, revenons au théorème d'Eichler. Avant même de penser démontrer ce théorème et afin de bien en comprendre l'énoncé, nous allons d'abord utiliser uniquement l'énoncé du théorème en effectuant quelques calculs sur une surface de Riemann bien particulière : la quartique de Klein.

Voici d'abord l'énoncé du théorème d'Eichler.

Théorème 3.0.4 (Formule de la trace d'Eichler)**.** *Soit T un automorphisme d'ordre $n > 1$ d'une surface de Riemann compacte Σ de genre $g \geq 2$. Représentons T par une matrice via son action sur l'espace vectoriel des q-différentielles $\mathscr{A}^q_\Sigma$. Nous voulons calculer la trace de cette matrice, qui ne dépend pas de la base de q-différentielles choisie. Soit t le nombre de points fixes de T. Soit $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ une n-ième racine d'unité. Soit $P_1, P_2, ..., P_t$ les points fixes de T sur Σ. Pour chaque $m = 1, 2, ..., t$, choisissons une coordonnée locale z en P_m et un entier ν_m*

relativement premier avec n tel que $1 \leq \nu_m < n-1$ *et tel que* T^{-1} *est donné par* $T^{-1} : z \longrightarrow \varepsilon^{\nu_m} z$ *dans un voisinage de* P_m. *Alors*

$$tr\ T = \begin{cases} 1 + \sum_{m=1}^{t} \dfrac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}}, & si \quad q = 1, \\ \\ \sum_{m=1}^{t} \dfrac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1-\varepsilon^{\nu_m}}, & si \quad q > 1, \end{cases}$$

où $0 < \nu < n$ *est choisit comme l'unique entier tel que* $q = \mu n + \nu$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

3.1. Courbe de Klein

Utilisons maintenant la courbe de Klein, dont on connaît beaucoup d'informations, afin de bien saisir toutes les subtilités de l'énoncé du théorème.

Soit la courbe dans $\mathbb{CP}^2$ décrite par l'équation suivante :

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Cette courbe s'appelle la quartique de Klein en l'honneur du mathématicien Felix Klein qui, en 1878, fût le premier à découvrir cette surface remarquable. Dans le présent chapitre, nous noterons la courbe de Klein par $\mathscr{K}$.

Plaçons-nous dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$ qui est l'ensemble des droites dans $\mathbb{C}^3$. Un point p de $\mathbb{P}^2$ est toujours représenté selon ses coordonnées homogènes, c'est-à-dire les coordonnées de n'importe quel vecteur non nul de $\mathbb{C}^3$ porté par la droite contenant p. L'équation $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ définie la quartique de Klein en coordonnées homogènes $[x, y, z]$ dans $\mathbb{P}^2$.

Cette courbe de genre $g = 3$ est de degré 4 et elle possède plusieurs particularités.

Du point de vue de la géométrie algébrique, elle possède plusieurs points spéciaux. Plus précisément, la courbe de Klein possède 24 points d'inflexions, c'est-à-dire des points où la tangente est définie et où celle-ci a une intersection triple avec la courbe. Cette quartique possède aussi 28 bitangentes, définissant chacune 2 points de contact avec la courbe. La courbe possède aussi 84 points sextactiques qui ne sont pas des points d'inflexions, mais qui coupent la courbe avec multiplicité au moins six. De plus amples informations sur les points spéciaux de la courbe de Klein sont disponibles dans [**Ba**].

La compréhension de la configuration de ces points spéciaux est rendue possible grâce aux nombreuses transformations linéaires qui fixent la courbe. Soit K le groupe de Klein qui est engendré par ces transformations. En fait, ces transformations engendrent l'unique groupe simple de 168 éléments, qui est isomorphe au groupe des matrices inversibles trois par trois à coefficients dans le corps à deux éléments, soit $GL(3, \mathbb{F}_2)$. Le groupe de Klein possède 168 éléments, soit le maximum possible pour une courbe de genre 3 comme nous le démontre le théorème 1.3.3. Par exemple, la transformation qui envoie $x \to y \to z$ est un automorphisme d'ordre 3 de $\mathscr{K}$. La matrice représentant cet automorphisme est la matrice de permutation suivante :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un autre atomorphisme, celui-ci d'ordre 7, est représenté par la matrice suivante :

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} \eta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix},$$

où $\eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Nous utiliserons la notation σ_2 et σ_4 pour les automorphismes d'ordre 2 et 4 respectivement.

Revenons au groupe de Klein. Ce groupe possède 6 classes de conjugaisons, soit une d'ordre 1, 2, 3, 4 et deux d'ordre 7. Voici un représentant de chacune de ces classes de conjugaison :

$$\text{élément d'ordre 1 : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{élément d'ordre 2 : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{élément d'ordre 3 : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{élément d'ordre 4 : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{élément d'ordre 7 : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{élément d'ordre 7 : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit G_i un sous-groupe du groupe de Klein qui est engendré par σ_i. Nous utiliserons la notation $|\mathscr{K}^{G_i}|$ pour désigner le nombre de points de la courbe qui sont fixés par le sous-groupe G_i.

Avant de commencer les calculs pour chacun des sous-groupe du groupe de Klein, il est important de traiter de la notion d'espace tangent à une surface de Riemann compacte.

Soit $f = x^3y + y^3z + z^3x$ et soit $p \in f$. Nous pouvons définir la droite tangente projective au point p comme l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p (y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_p (z-0) = \ 0.$$

Afin d'obtenir l'espace tangent à f en p, nous devrons retirer le point à l'infini de la droite tangente projective.

Nous voulons maintenant calculer les ν_m présents dans la formule de trace d'Eichler, et ce, pour chaque sous-groupe du groupe de Klein. Étant donné que le stabilisateur de chaque point est cyclique, il y a dans chaque orbite un point ayant comme stabilisateur $G_i =< \sigma_i >$. Nous voulons trouver les points fixes pour chaque G_i et ainsi trouver leurs contributions dans la formule de trace d'Eichler.

Dans les développements qui suivent, nous considérons que $\widetilde{g}$ est le genre de la surface quotient $\mathscr{K} / < \sigma_i >$.

3.1.1. Le sous-groupe d'ordre 7

Le premier sous-groupe que nous allons considérer est le sous-groupe engendré par σ_7.

Par la formule de Riemann-Hurwitz, nous avons

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= |G_7|(2\widetilde{g} - 2) + (|G_7| - 1)|\mathscr{K}^{G_7}| \\ 4 &= 7(2\widetilde{g} - 2) + 6|\mathscr{K}^{G_7}|. \end{aligned}$$

Voici les différents cas possibles.

Si $\widetilde{g} = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 7(0) + 6|\mathscr{K}^{G_7}| \\ 4 &= 6|\mathscr{K}^{G_7}|, \end{aligned}$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Si $\widetilde{g} > 1$, nous avons

$$4 = 7(2\widetilde{g} - 2) + 6|\mathscr{K}^{G_7}|,$$

où $7(2\widetilde{g} - 2) \geq 7$ et $6|\mathscr{K}^{G_7}| \geq 0$. Ce dernier cas mène aussi à une contradiction.

Le dernier cas possible est lorsque $\widetilde{g} = 0$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} 4 &= 7(-2) + 6|\mathscr{K}^{G_7}| \\ 18 &= 6|\mathscr{K}^{G_7}| \\ 3 &= |\mathscr{K}^{G_7}|. \end{aligned}$$

Nous concluons que le nombre de points de la courbe de Klein fixés par un sous-groupe d'ordre 7 est 3.

Soit σ_7 l'élément du groupe de Klein suivant :

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} \eta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix},$$

où $\eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Nous savons qu'il y a deux classes de conjugaison pour les éléments d'ordre 7, l'inverse de σ_7 se trouvant dans l'autre classe de conjugaison.

Pour qu'un point $p \in \mathscr{K}$ soit un point fixe pour σ_7, il doit respecter les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x^3y + y^3z + z^3x &= 0, \\ [x, y, z] &= [\eta^4 x, \eta^2 y, \eta z]. \end{cases}$$

Soit les trois points fixes suivants :

$$[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1].$$

Trouvons la droite tangente projective au point $p = [1, 0, 0]$ appartenant à la courbe définie par $f = x^3y + y^3z + z^3x$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_p (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_p (y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_p (z-0) &= 0 \\ (3x^2y + z^3)|_p\ (x-1) + (x^3 + 3y^2z)|_p\ y + (y^3 + 3z^2x)|_p\ z &= 0 \\ y &= 0, \end{aligned}$$

et nous concluons que l'équation de la droite tangente projective est $y = 0$. Nous voyons que σ_7 fixe deux points de cette droite tangente projective, soit le point

$[1,0,0]$ et le point $[0,0,1]$. Nous savons qu'une droite dans $\mathbb{CP}^1$ à un point à l'infini, ce qui en fait une droite projective. Afin d'obtenir l'espace tangent, qui est une droite complexe, nous allons enlever le point à l'infini, qui dans notre cas, est le point où $x = 0$. De cela, nous obtenons

$$\begin{aligned} T_{[1,0,0]}\mathscr{K} &\simeq \{[x,y,z] \mid y = 0,\ x \neq 0\} \\ &= \{[x,0,z] \mid x \neq 0\} \\ &= \{[1,0,z]\}, \end{aligned}$$

où $T_{[1,0,0]}\mathscr{K}$ est le plan tangent à la courbe de Klein au point $p = [1,0,0]$.

Si nous faisons agir σ_7 sur la droite $[1,0,z]$, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_7[1,0,z] &= [\eta^4, 0, \eta z] \\ &= \left[1, 0, \frac{\eta}{\eta^4} z\right] \\ &= [1, 0, \eta^{-3} z], \end{aligned}$$

qui nous donne la façon dont est représenté l'automorphisme σ_7 près de p. Étant donné que $\eta^{-3} = \eta^4$, le ν_m correspondant au point fixe $[1,0,0]$ est 4.

Faisons de même pour le point fixe $[0,1,0]$, c'est-à-dire trouvons l'équation de la droite tangente à $f = x^3y + y^3z + z^3x$ au point $[0,1,0]$.

Voici l'équation linéaire en x, y, z dont nous prenons les zéros afin de trouver l'équation de la droite tangente projective au point $[0,1,0]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_p (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_p (y-1) + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_p (z-0) &= 0 \\ (3x^2y + z^3)|_p x + (x^3 + 3y^2z)|_p (y-1) + (y^3 + 3z^2x)|_p z &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

En prenant soin d'enlever le point à l'infini, c'est-à-dire le point où $y = 0$, nous obtenons l'espace tangent au point $[0,1,0]$. Ce qui nous mène à l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} T_{[0,1,0]}\mathscr{K} &\simeq \{[x,y,z] \mid z=0,\ y\neq 0\} \\ &= \{[x,y,0] \mid y \neq 0\} \\ &= \{[x,1,0]\}\,. \end{aligned}$$

Faisons agir σ_7 sur le point $[x,1,0]$.

$$\begin{aligned} \sigma_7[x,1,0] &= [\eta^4 x, \eta^2, 0] \\ &= \left[\frac{\eta^4}{\eta^2}x, 1, 0\right] \\ &= [\eta^2, 1, 0], \end{aligned}$$

qui nous donne la façon de représenter l'automorphisme σ_7 près de p. Donc, pour le point fixe $[0,1,0]$, nous venons de trouver que le ν_m correspondant est 2.

Faisons de même pour le dernier point fixé par un automorphisme d'ordre 7.

La tangente au point $[0,0,1]$ de la courbe décrite par $f = x^3y + y^3z + z^3x$ doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_p (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_p (y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_p (z-1) &= 0 \\ (3x^2y+z^3)|_p x + (x^3+3y^2z)|_p (y) + (y^3+3z^2x)|_p (z-1) &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

En enlevant le point à l'infini, dans ce cas le point où $z=0$, nous obtenons l'isomorphisme ci-dessous :

$$\begin{aligned} T_{[0,0,1]}\mathscr{K} &\simeq \{[x,y,z] \mid x=0,\ z\neq 0\} \\ &= \{[0,y,z \mid z \neq 0\} \\ &= \{[0,y,1]\}\,. \end{aligned}$$

Faisons agir σ_7 sur le point $[0, y, 1]$.

$$\begin{aligned} \sigma_7[0, y, 1] &= [0, \eta^2 y, \eta] \\ &= \left[0, \frac{\eta^2}{\eta} y, 1\right] \\ &= [0, \eta y, 1]. \end{aligned}$$

Le dernier développement nous donne comment représenter l'automorphisme σ_7 près du point $[0, 0, 1]$, donc, pour le point fixe $[0, 1, 0]$, le ν_m correspondant est 1.

Donc, pour la première classe de conjugaison, les ν_m correspondants sont $1,\ 2,\ 4$. Pour l'autre classe de conjugaison, nous savons qu'elle contient l'inverse de σ_7, soit la matrice

$$\begin{pmatrix} \eta^3 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^5 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^6 \end{pmatrix},$$

où $\eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

Si nous répétons exactement le même calcul avec cette dernière matrice, nous trouverons que les ν_m correspondants sont $3,\ 5,\ 6$.

Comme nous l'avons vu dans les trois cas que nous venons de traiter, il y a toujours deux points de la courbe de Klein qui sont fixés par σ_7 et qui sont tous deux sur la même droite tangente projective.

Dans le premier cas, un point fixe devait satisfaire les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} x^3 y + y^3 z + z^3 x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ceci revient à :

$$z^3 x = 0 \text{ et } y = 0.$$

Deux points possèdent ces propriétés. Tout d'abord, le point où $x = y = 0$, qui est le point $[0, 0, 1]$ avec multiplicité 1. Le deuxième point est le point où $z^3 = y = 0$, qui est le point $[1, 0, 0]$ avec multiplicité 3. Dans notre précédant calcul, nous avions enlevé le point $[0, 0, 1]$ qui se trouvait à être le point à l'infini sur notre droite tangente projective.

Faisons de même pour les deux autres droites tangentes projectives.

Le second cas nous a mené aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x^3y + y^3z + z^3x & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Ce système revient aux deux conditions suivantes :

$$x^3y = 0 \text{ et } z = 0.$$

Un des points possédant ces caractéristiques est le point où $y = z = 0$, soit le point $[1, 0, 0]$ avec multiplicité 1, qui était le point à l'infini sur la droite tangente projective $z = 0$. L'autre point est celui où $x^3 = z = 0$, soit le point $[0, 1, 0]$ avec multiplicité 3.

Dans le dernier cas, les deux équations obtenues étaient

$$\begin{cases} x^3y + y^3z + z^3x & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent aux deux conditions suivantes :

$$y^3z = 0 \text{ et } x = 0.$$

Un des points possédant ces caractéristiques est le point où $z = x = 0$, soit le point $[0, 1, 0]$ avec multiplicité 1, soit le point à l'infini sur la droite tangente projective $x = 0$. L'autre point est celui où $y^3 = x = 0$, soit le point $[0, 0, 1]$ avec multiplicité 3.

Dans le groupe de Klein, il y a 8 sous-groupes d'ordre 7 fixant chacun trois points sur la courbe de Klein. Nous avons pu remarquer lors de nos précédents calculs que toute droite tangente projective recoupe la courbe en un autre point. À partir d'un point fixe p_1, nous pouvons donc trouver une suite de points fixes

$p_1, p_2, p_3, p_4 = p_1$. Ces trois points forment ce que Klein appelle un triangle d'inflexion. Comme nous l'avons trouvé précédemment, les points $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ et $[0,0,1]$ sont fixés par l'élément σ_7. De plus, nous avons vu que chaque droite tangente projective touche à deux de ces trois points. Ces points forment le triangle d'inflexion correspondant à l'équation $xyz = 0$.

3.1.2. Le sous-groupe d'ordre 3

Passons maintenant à un autre sous-groupe du groupe de Klein, soit le sous-groupe engendré par σ_3.

Tout d'abord, si nous utilisons la formule Riemann-Hurwitz, nous avons :

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= |G_3|(2\widetilde{g} - 2) + (|G_3| - 1)|\mathscr{K}^{G_3}| \\ 4 &= 3(2\widetilde{g} - 2) + 2|\mathscr{K}^{G_3}|, \end{aligned}$$

étant donné que le genre de la courbe de Klein est 3.

Voici les différents cas possibles.

Si $\widetilde{g} = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 3(0) + 2|\mathscr{K}^{G_3}| \\ 4 &= 2|\mathscr{K}^{G_3}| \\ 2 &= |\mathscr{K}^{G_3}|. \end{aligned}$$

Si $\widetilde{g} > 1$, nous avons

$$4 = 3(2\widetilde{g} - 2) + 2|\mathscr{K}^{G_3}|,$$

où $3(2\widetilde{g} - 2) \geq 6$ et $2|\mathscr{K}^{G_3}| \geq 0$, ce qui mène à une contradiction.

Le dernier cas est celui où $\widetilde{g} = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 3(-2) + 2|\mathscr{K}^{G_3}| \\ 4 &= -6 + 2|\mathscr{K}^{G_3}| \\ 5 &= |\mathscr{K}^{G_3}|. \end{aligned}$$

Nous concluons qu'il y a soit 2 ou 5 points fixes.

Soit

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tel que $G_3 =< \sigma_3 >$.

Le point p est un point fixe pour l'élément σ_3 si

$$\sigma_3[x, y, z] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z],$$

étant donné que nous travaillons avec des coordonnées homogènes.

De plus,

$$\sigma_3[x, y, z] = [y, z, x].$$

Ces deux conditions nous mènent au système suivant :

$$y = \lambda x,$$

$$z = \lambda y,$$

$$x = \lambda z.$$

Nous fixons $x \neq 0$, car sinon

$$x = \lambda z = \lambda^2 y = \lambda^3 x \tag{3.1.1}$$

et si x est nul, les trois coordonnées sont nulles, ce qui n'est pas possible lorsque nous travaillons avec des coordonnées homogènes.

Fixons $x = 1$. Alors

$$y = \lambda x = \lambda \;\Rightarrow\; y = \lambda,$$

$$z = \lambda y = \lambda^2 \;\Rightarrow\; z = \lambda^2,$$

$$x = \lambda z = \lambda^3 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

Nous obtenons donc le point $[1, \lambda, \lambda^2]$ et, en utilisant 3.2.1, nous avons $1 = \lambda^3$, d'où $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. De plus, nous pouvons obtenir un autre point en posant $\lambda = e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)^2}$ qui est aussi une 3^e racine d'unité. Dans ce cas, nous obtenons le point $[1, \lambda^2, \lambda]$.

Vérifions maintenant que ces deux points sont bel et bien sur la courbe de Klein. Pour le point $[1, \lambda, \lambda^2]$, nous avons

$$1^3\lambda^3 + \lambda^3\lambda^2 + \lambda^3 1 = \lambda + \lambda^5 + \lambda^3 = \lambda + \lambda^2 + 1 = 0.$$

Pour le point $[1, \lambda^2, \lambda]$, nous avons

$$1^3\lambda^2 + \lambda^6\lambda + \lambda^3 1 = \lambda^2 + \lambda^7 + \lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Les deux points trouvés sont donc sur la courbe, ce qui signifie que nous avons seulement 2 points fixes pour l'élément σ_3, d'où $\widetilde{g} = 1$ dans la formule de Riemann-Hurwiz.

Posons $P_0 = [1, \lambda, \lambda^2]$ et $P_1 = [1, \lambda^2, \lambda]$.

Nous voulons trouver la droite projective tangente au point P_0 appartenant à la courbe décrite par $f = x^3y + y^3z + z^3x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_p (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_p (y-\lambda) + \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_p (z-\lambda^2) \ &= 0 \\
(3x^2y + z^3)|_p(x-1) + (x^3 + 3y^2z)|_p(y-\lambda) + (y^3 + 3z^2x)|_p(z-\lambda^2) &= 0 \\
(3\lambda+1)(x-1) + (1+3\lambda^4)(y-\lambda) + (1+3\lambda^4)(z-\lambda^2) &= 0 \\
(3\lambda+1)((x-1) + (y-\lambda) + (z-\lambda^2)) &= 0 \\
(3\lambda+1)(x+y+z-(1+\lambda+\lambda^2)) &= 0 \\
(3\lambda+1)(x+y+z) &= 0,
\end{aligned}$$

mais, étant donné que $3\lambda \neq -1$, nous avons $x + y + z = 0$.

Considérons l'application suivante, où $T_p\mathscr{K}$ est le plan tangent au point p à la courbe de Klein.

$$\begin{aligned}
f_0 := \mathbb{C} &\longrightarrow T_p\mathscr{K} \\
t &\longrightarrow [t + t^{-1}, t\lambda^2 + t^{-1}\lambda, t\lambda + t^{-1}\lambda^2],
\end{aligned}$$

où $[t + t^{-1}, t\lambda^2 + t^{-1}\lambda, t\lambda + t^{-1}\lambda^2]$ est élément de $T_{p_0}\mathscr{K}$ et de $T_{p_1}\mathscr{K}$. Cette application effectue l'opération suivante : $t^{-1}P_0 + tP_1$. Remarquons que cette application respecte la condition $x + y + z = 0$.

Si nous divisons par t^{-1}, nous obtenons le point $[t^2+1, t^2\lambda^2+\lambda, t^2\lambda+\lambda^2]$ et si nous prenons la limite quand t tend vers 0, nous obtenons

$$\lim_{t\to 0}\ [t^2+1, t^2\lambda^2+\lambda, t^2\lambda+\lambda^2] = [1, \lambda, \lambda^2] = P_0.$$

Maintenant, si nous divisons par t, nous obtenons le point $[1+t^{-2}, \lambda^2+t^{-2}\lambda, \lambda+t^{-2}\lambda^2]$. Prenons la limite quand t tend vers l'infini :

$$\lim_{t\to\infty}\ [1+t^{-2}, \lambda^2+t^{-2}\lambda, \lambda+t^{-2}\lambda^2] = [1, \lambda^2, \lambda] = P_1.$$

Donc, l'application f_0 envoie l'origine de $\mathbb{C}$ vers P_0 et le point à l'infini vers P_1.

Maintenant, appliquons σ_3.

$$\sigma_3 \cdot f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} t+t^{-1} \\ t\lambda^2+t^{-1}\lambda \\ t\lambda+t^{-1}\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\lambda^2+t^{-1}\lambda \\ t\lambda+t^{-1}\lambda^2 \\ t+t^{-1} \end{bmatrix}.$$

Si nous divisons la dernière réponse obtenue par $t\lambda^2+t^{-1}\lambda$, nous obtenons

$$\sigma_3 \cdot f_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{t\lambda+t^{-1}\lambda^2}{t\lambda^2+t^{-1}\lambda} \\ \dfrac{t+t^{-1}}{t\lambda^2+t^{-1}\lambda} \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons β tel que

$$f_0 := \mathbb{C} \longrightarrow T_{p_0}\mathscr{K}$$
$$t \longrightarrow \beta t,$$

car nous voulons que $\sigma_3(f_0(t)) = f_0(\beta t)$.

Nous avons que βt est égal à

$$\begin{bmatrix} \beta t+(\beta t)^{-1} \\ (\beta t)\lambda^2+(\beta t)^{-1}\lambda \\ (\beta t)\lambda+(\beta t)^{-1}\lambda^2 \end{bmatrix},$$

et si nous divisons le tout par $\beta t + (\beta t)^{-1}$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(\beta t)\lambda^2 + (\beta t)^{-1}\lambda}{\beta t + (\beta t)^{-1}} \\ \dfrac{(\beta t)\lambda + (\beta t)^{-1}\lambda^2}{\beta t + (\beta t)^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Trouvons β afin que l'égalité $\sigma_3(f_0(t)) = f_0(\beta t)$ soit satisfaite. Ceci nous mène à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{t\lambda + t^{-1}\lambda^2}{t\lambda^2 + t^{-1}\lambda} \\ \dfrac{t + t^{-1}}{t\lambda^2 + t^{-1}\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(\beta t)\lambda^2 + (\beta t)^{-1}\lambda}{\beta t + (\beta t)^{-1}} \\ \dfrac{(\beta t)\lambda + (\beta t)^{-1}\lambda^2}{\beta t + (\beta t)^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Nous concluons que $\beta = \lambda^{-1}$, étant donné que $\lambda^{-1} = \lambda^2$. Alors, nous venons de trouver que le ν_m correspondant est 2.

Reprenons maintenant le même type de calcul, mais en changeant l'application.

Considérons maintenant l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_1 := \ & \mathbb{C} \longrightarrow T_p\mathscr{K} \\ & t \longrightarrow [t^{-1} + t, t\lambda + t^{-1}\lambda^2, t\lambda^2 + t^{-1}\lambda], \end{aligned}$$

où $[t + t^{-1}, t\lambda^2 + t^{-1}\lambda, t\lambda + t^{-1}\lambda^2]$ est élément de $T_{p_0}\mathscr{K}$ et de $T_{p_1}\mathscr{K}$. En fait, cette application est tout simplement $tP_0 + t^{-1}P_1$.

Si nous divisons par t^{-1}, nous obtenons le point $[t^2 + 1, t^2\lambda + \lambda^2, t^2\lambda^2 + \lambda]$ et la limite quand t tend vers 0 nous donne

$$\lim_{t \to 0}\ [t^2 + 1, t^2\lambda^2 + \lambda, t^2\lambda + \lambda^2] = [1, \lambda^2, \lambda] = P_1.$$

Si nous divisons par t, nous obtenons le point $[t^{-2} + 1, \lambda + t^{-2}\lambda^2, \lambda^2 + t^{-2}\lambda]$. Prenons la limite quand t tend vers l'infini :

$$\lim_{t \to \infty}\ [t^{-2} + 1, \lambda + t^{-2}\lambda^2, \lambda^2 + t^{-2}\lambda] = [1, \lambda, \lambda^2] = P_0.$$

Donc, l'application f_0 envoie l'origine de $\mathbb{C}$ vers P_1 et l'infini vers P_0.

Maintenant, faisons agir l'élément σ_3.

$$\sigma_3 \cdot f_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} t^{-1}+t \\ t\lambda + t^{-1}\lambda^2 \\ t\lambda^2 + t^{-1}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\lambda + t^{-1}\lambda^2 \\ t\lambda^2 + t^{-1}\lambda \\ t^{-1}+t \end{bmatrix}.$$

Si nous divisons la dernière réponse obtenue par $t\lambda + t^{-1}\lambda^2$, nous obtenons

$$\sigma_3 \cdot f_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{t\lambda^2 + t^{-1}\lambda}{t\lambda + t^{-1}\lambda^2} \\ \dfrac{t^{-1}+t}{t\lambda + t^{-1}\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Comme auparavant, nous sommes à la recherche d'un β tel que

$$\begin{aligned} f_1 := \mathbb{C} &\longrightarrow T_{p_1}\mathscr{K} \\ t &\longrightarrow \beta t, \end{aligned}$$

car nous voulons que $\sigma_3(f_1(t)) = f_1(\beta t)$.

D'où

$$\begin{bmatrix} (\beta t)^{-1} + \beta t \\ (\beta t)\lambda + (\beta t)^{-1}\lambda^2 \\ (\beta t)\lambda^2 + (\beta t)^{-1}\lambda \end{bmatrix},$$

et si nous divisons le tout par $(\beta t)^{-1} + \beta t$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(\beta t)\lambda + (\beta t)^{-1}\lambda^2}{(\beta t)^{-1} + \beta t} \\ \dfrac{(\beta t)\lambda^2 + (\beta t)^{-1}\lambda}{(\beta t)^{-1} + \beta t} \end{bmatrix}.$$

Alors, β doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{t\lambda^2 + t^{-1}\lambda}{t\lambda + t^{-1}\lambda^2} \\ \dfrac{t^{-1} + t}{t\lambda + t^{-1}\lambda^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(\beta t)\lambda + (\beta t)^{-1}\lambda^2}{(\beta t)^{-1} + \beta t} \\ \dfrac{(\beta t)\lambda^2 + (\beta t)^{-1}\lambda}{(\beta t)^{-1} + \beta t} \end{bmatrix}.$$

Nous concluons que $\beta = \lambda$. Alors, nous venons de trouver que le ν_m correspondant est 1.

Comme nous l'avons trouvé plus tôt, la droite tangente projective passant par le point $P_0 \in \mathscr{K}$ passe aussi par le point $P_1 \in \mathscr{K}$. Dans un des cas, P_0 était le point à l'infini de la droite tangente projective et dans l'autre cas, P_1 était le point à l'infini. Ces deux points devaient satisfaire les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x^3y + y^3z + z^3x &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$$

En utilisant ces deux équations, nous obtenons l'équation $(-y-z)^3y + y^3z + z^3(-y-z) = 0 \Leftrightarrow -(y^2 + yz + z^2)^2 = 0$. Les points P_0 et P_1 satisfont cette dernière équation avec multiplicité 2. Ces droites tangentes projectives sont en fait des bitangentes de la courbe.

Il y a 28 bitangentes sur la courbe de Klein qui sont associées aux 28 sous-groupes d'ordre 3 du groupe Klein. Chacun de ces sous-groupes fixent deux points de la courbe qui sont situés sur une même bitangente. Ainsi, la transformation d'ordre 3 que nous avons considérée plutôt fixe $[1, \lambda, \lambda^2]$ et $[1, \lambda^2, \lambda]$ et ces deux points se situent sur la bitangente d'équation $x + y + z = 0$.

3.1.3. Le sous-groupe d'ordre 2

Considérons maintenant G_2 le sous-groupe du groupe de Klein engendré par σ_2.

En utilisant la formule Riemann-Hurwitz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2g-2 &= |G_2|(2\widetilde{g}-2)+(|G_2|-1)|\mathscr{K}^{G_2}| \\ 4 &= 2(2\widetilde{g}-2)+|\mathscr{K}^{G_2}|. \end{aligned}$$

Voici les différents cas possibles.

Si $\widetilde{g}>1$, nous avons

$$4 = 2(2\widetilde{g}-2)+|\mathscr{K}^{G_2}|,$$

où $2(2\widetilde{g}-2)\geq 4$ et $|\mathscr{K}^{G_2}|\geq 0$, qui mène à une contradiction.

Si $\widetilde{g}=1$, nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 2(0)+|\mathscr{K}^{G_2}| \\ 4 &= |\mathscr{K}^{G_2}|. \end{aligned}$$

Si $\widetilde{g}=0$. Nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 2(-2)+|\mathscr{K}^{G_2}| \\ 4 &= -4+|\mathscr{K}^{G_2}| \\ 8 &= |\mathscr{K}^{G_2}|, \end{aligned}$$

mais $|\mathscr{K}^{G_2}|\leq 5$ par le théorème de Bézout qui mentionne qu'une droite dans $\mathbb{CP}^2$ croise au plus 4 points de la courbe $\mathscr{K}$.

Le sous-groupe d'ordre 2 possède donc 4 points fixes.

Trouver explicitement les points fixes pour le sous-groupe d'ordre 2 n'est pas aussi simple que pour les deux prédédents cas. Ceci est compréhensible étant donné qu'un des éléments d'ordre 2 est la matrice suivante :

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \gamma^5-\gamma^2 & \gamma^3-\gamma^4 & \gamma^6-\gamma \\ \gamma^3-\gamma^4 & \gamma^6-\gamma & \gamma^5-\gamma^2 \\ \gamma^6-\gamma & \gamma^5-\gamma^2 & \gamma^3-\gamma^4 \end{pmatrix},$$

où $\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

Par contre, comme dans deux premiers cas, les points fixés par le sous-groupe d'ordre 2 sont des points spéciaux, appelés les points sextactiques. La courbe de

Klein possède 84 points sextactiques qui sont répartis en 21 quadruplets, ceux-ci correspondants aux involutions du groupe de Klein. Une involution fixe un point qui n'est pas situé sur la courbe de Klein, que nous appelons centre, ainsi qu'une droite, que nous appelons axe, dont l'intersection avec la courbe est précisément un quadruplet de points sextactiques. Les centres et les axes forment une configuration remarquable : chaque axe contient 4 centres et en chaque centre passe 4 axes.

Revenons à notre but premier, soit trouvé la valeur des ν_m. Étant donné que ν_m est tel que $0 < \nu_m < n-1$ et que, dans notre cas, $n = 2$, alors nous concluons que $\nu_m = 1$.

3.1.4. Le sous-groupe d'ordre 4

Nous cherchons maintenant le nombre de points fixes pour le sous-groupe engendré par σ_4.

Revenons au groupe de Klein que nous nommerons G. Ce groupe possède 168 éléments. Considérons l'application où nous effectuons le quotient de la courbe de Klein par le groupe G. Nous voulons savoir quel est le genre de cette surface quotient.

Sachant que le genre de la courbe de Klein est 3, la formule de Riemann-Hurwitz nous donne

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= |G|(2\widetilde{g} - 2) + (|G| - 1)|\mathscr{K}^G| \\ 4 &= 168(2\widetilde{g} - 2) + |\mathscr{K}^G|. \end{aligned}$$

Regardons les différents choix possibles sachant que $|\mathscr{K}^G| \geq 0$. Rappelons-nous que $|\mathscr{K}^G|$ peut aussi être vu comme l'ensemble des points de ramification, que nous noterons $|R|$, de l'application quotient .

Si $\widetilde{g} = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 168(2\widetilde{g} - 2) + |R| \\ 4 &= 168(0) + |R| \\ 4 &= |R|. \end{aligned}$$

Nous avons que $|R| = \sum_i \frac{168}{n_i}(n_i - 1)$ où n_i est l'ordre du stabilisateur d'ordre i et $(n_i - 1)$ est le nombre de branche. De plus, n_i peut seulement être égal à 2, 3, 4 ou 7 puisque le stabilisateur doit être cyclique.

Donc,

$$4 = |R| = \sum_i \frac{168}{n_i}(n_i - 1).$$

Si $n_i = 2$, nous avons $4 = \sum_i 84$, ce qui mène à une contradiction. Si $n_i = 3$, nous avons $4 = \sum_i 56(2) = 112$, qui mène aussi à une contradiction et il en est de même si $n_i = 4$ ou $n_i = 7$, puisque nous obtiendrons des nombres encore plus élevés.

Donc, le cas $\widetilde{g} = 1$ est impossible.

Si $\widetilde{g} > 1$, nous avons

$$4 = 168(2\widetilde{g} - 2) + |R|,$$

où $|R| \geq 0$ et $168(2\widetilde{g} - 2) > 168$, ce qui mène à une contradiction.

Le dernier cas possible est celui où $\widetilde{g} = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} 4 &= 168(2\widetilde{g} - 2) + |R| \\ 4 &= 168(-2) + |R| \\ 4 &= -336 + |R| \\ 340 &= |R|. \end{aligned}$$

Nous concluons que la surface quotient est de genre 0, c'est-à-dire $\mathbb{CP}^1$.

Ceci étant fait, passons maintenant au calcul du nombre de points fixés par le sous-groupe d'ordre 4. Calculons d'abord la contribution des différents stabilisateurs.

Si $n_i = 2$, la contribution dans le calcul des points de ramification sera de $\dfrac{168}{2}(2 - 1) = 84$.

Pour $n_i = 3$, nous aurons une contribution de $\dfrac{168}{3}(3 - 1) = 112$.

Si $n_i = 4$, la contribution sera de $\dfrac{168}{4}(4 - 1) = 126$.

Finalement, si $n_i = 7$, la contribution dans le calcul des points de ramification sera de $\frac{168}{7}(7-1) = 144$.

Nous devons maintenant trouver une combinaison telle que :

$$|R| = 340 = \sum_i \frac{168}{n_i}(n_i - 1).$$

Si nous utilisons les stabilisateurs d'ordre 2, 3 et 4 nous obtenons 84+112+144 qui est bien égal à 340.

Étant donné que le stabilisateur d'ordre 4 n'a pas été utile dans le précédent calcul, nous concluons donc qu'il n'y a pas de points fixes sur la courbe de Klein pour le sous-groupe d'ordre 4.

3.2. Calcul à l'aide de la formule de trace d'Eichler

Dans cet exemple, nous ferons le calcul pour les 2-différentielles, donc $q = 2$ tout au long de cet exemple.

Tout d'abord, rappelons-nous de la formule d'Eichler pour $q > 1$:

$$tr\ T = \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1 - \varepsilon^{\nu_m}},$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2i\Pi}{n}}$, $0 < \nu_m \leq n-1$ et ν est tel que $q = \mu n + \nu$ et $0 < \nu \leq n$. De plus, n est l'ordre de l'automorphisme.

Pour un élément d'ordre 2, noté σ_2, nous avons vu qu'il y a 4 points fixes sur la courbe de Klein.

Dans ce cas, $\varepsilon = e^{\frac{2i\Pi}{2}} = -1$.

De plus, nous devons trouver un ν_m tel que $0 < \nu_m \leq n-1$, qui, dans notre cas, donne $0 < \nu_m \leq 1$. Donc, $\nu_m = 1$.

Aussi, nous avons que $0 < \nu \leq n$ où, dans notre cas $n = 2$. De plus, ν doit être tel que $q = \mu n + \nu$, c'est-à-dire $2 = 2\mu + \nu$. Nous en venons à la conclusion que $\nu = 2$.

Si nous plaçons le tout dans la formule d'Eichler, nous obtenons :

$$tr\ T = \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} = \sum_{m=1}^{4} \frac{(-1)^2}{1-(-1)^1} = \sum_{m=1}^{4} \frac{(-1)^2}{2} = 2.$$

Pour un élément d'ordre 3 noté σ_3, il y a 2 points de la courbe de Klein qui sont fixés.

De plus, $\varepsilon = e^{\frac{2i\Pi}{3}}$.

Nous devons trouver un ν_m tel que $0 < \nu_m \leq n-1$, c'est-à-dire $0 < \nu_m \leq 2$. Donc, $\nu_m = 1$ ou 2.

Aussi, nous avons que $0 < \nu \leq n$ où, dans notre cas $n = 3$. De plus, ν doit être tel que $q = \mu n + \nu$, c'est-à-dire $2 = 3\mu + \nu$. Nous en venons à la conclusion que $\nu = 2$.

D'où

$$\begin{aligned} tr\ T &= \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \\ &= \frac{\left((\varepsilon)^2\right)^1}{1-(\varepsilon)^1} + \frac{\left((\varepsilon)^2\right)^2}{1-(\varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} \\ &= \frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^4(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)} = \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^5}{2-\varepsilon^2-\varepsilon} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour un élément d'ordre 4, nous avons calculé précédemment qu'aucun point sur la courbe de Klein était fixé. Donc,

$$tr\ T = 0.$$

Considérons maintenant un élément d'ordre 7, noté σ_7. Nous avons calculé, dans la sous-section précédente, que le nombre de points, appartenant à la courbe de Klein fixés par σ_7 est 3.

Commençons par la première classe de conjugaison.

Tout d'abord, nous avons que $\varepsilon = e^{\frac{2i\Pi}{7}}$.

De plus, nous avons déterminé précédemment que les ν_m correspondants sont $1,\ 2,$ et 4.

Pour trouver le ν correspondant, nous avons que $0 < \nu \leq n$, qui dans notre cas donne $0 < \nu \leq 7$. De plus, ν doit être tel que $q = \mu 7 + \nu$, d'où $\nu = 2$.

Si nous plaçons le tout dans la formule de trace d'Eichler, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
tr\ T &= \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \\
&= \frac{\left((\varepsilon)^1\right)^2}{1-\varepsilon^1} + \frac{\left((\varepsilon)^2\right)^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{\left((\varepsilon)^4\right)^2}{1-\varepsilon^4} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^8}{1-\varepsilon^4} \\
&= \frac{\varepsilon^6(1-\varepsilon^5)(1-\varepsilon^6) + \varepsilon^{10}(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^6) + \varepsilon^{12}(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^5)}{(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^5)(1-\varepsilon^6)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons effectuer le même calcul, mais pour l'autre classe de conjugaison.

Encore une fois, $\varepsilon = e^{\frac{2i\Pi}{7}}$.

Par contre, les ν_m correspondants seront les conjugués des ν_m utilisés pour la première classe de conjugaison, soit $3,\ 5,$ et 6.

Comme pour l'autre classe de conjugaison, nous avons $0 < \nu \leq 7$ et ν doit être tel que $q = \mu 7 + \nu$,. Donc $\nu = 2$.

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
tr\ T &= \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \\
&= \frac{\left((\varepsilon)^3\right)^2}{1-\varepsilon^3} + \frac{\left((\varepsilon)^5\right)^2}{1-\varepsilon^5} + \frac{\left((\varepsilon)^6\right)^2}{1-\varepsilon^6} \\
&= \frac{\varepsilon^6}{1-\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^{10}}{1-\varepsilon^5} + \frac{\varepsilon^{12}}{1-\varepsilon^6} \\
&= \frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4) + \varepsilon^4(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^8(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Bien entendu, nous venons de trouver les différents caractères pour la représentation du groupe de Klein sur l'espace des 2-différentielles.

Pour trouver le caractère associé à un élément d'ordre 1, il suffit de trouver la dimension de l'espace des 2-différentielles en utilisant le théorème de Riemann-Roch comme suit :

$$\begin{aligned}
h^0(2K) - h^1(2K) &= deg(2K) - g + 1 \\
h^0(2K) - h^0(K-2K) &= deg(2K) - 3 + 1 \\
h^0(2K) - h^0(-K) &= 2(2g-2) - 3 + 1 \\
h^0(2K) - 0 &= 8 - 3 + 1 \\
h^0(2K) &= 6.
\end{aligned}$$

Résumons le tout dans le tableau de caractères suivant :

	1	2	3	4	7	7
χ	6	2	0	0	-1	-1

Chapitre 4

FORMULE DE TRACE D'EICHLER

Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ et $Aut(\Sigma)$ le groupe d'automorphismes de Σ.

La formule de trace d'Eichler est un théorème qui nous permet de calculer la trace d'un automorphisme agissant sur l'espace des q-différentielles sur Σ, noté $\mathscr{A}_{\Sigma}^{q}$.

Soit $T \in Aut(\Sigma)$. Dans ce chapitre, nous utiliserons le symbole $\widetilde{\Sigma}$ pour désigner la surface quotient $\Sigma / < T >$, où $< T >$ est le groupe engendré par l'élément T. Considérons l'application quotient $\pi : \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$. L'espace $\widetilde{\Sigma}$ possède une structure de surface de Riemann qui est aussi compacte puisqu'elle provient du quotient d'une surface de Riemann compacte par un groupe fini. Soit ω une 1-forme sur $\widetilde{\Sigma}$. Nous pouvons maintenant définir le pullback d'une 1-forme comme $\pi^* : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$. La plupart de la théorie proposée dans ce chapitre repose sur ces deux applications, π et π^*, et sur le fait que la surface quotient possède une structure complexe, comme nous l'avons vu à la section 1.4.

Dans la preuve du théorème d'Eichler, nous utiliserons d'abord le fait que l'ensemble des q-différentielles sur Σ est égal à la somme des espaces propres de T. Dans le développement de la preuve, nous verrons que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est égal aux q-différentielles T-invariantes sur Σ. Pour les espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda \neq 1$, nous utiliserons le fait que $T^n = 1$, donc $\lambda^n = 1$. Soit E_λ l'espace propre associé à la valeur propre λ. S'il existe une q-différentielle, disons $\varphi_0 \in E_\lambda$, et soit φ une autre q-différentielle étant dans le même espace propre, nous aurons que $\dfrac{\varphi}{\varphi_0}$ sera une fonction méromorphe

T-invariante ayant des pôles aux zéros de φ_0. Cette fonction méromorphe est donc le pullback d'une q-différentielle sur $\widetilde{\Sigma}$, disons ϕ. De cette fonction découle un diviseur D_j et si nous prenons le pullback de ce diviseur, nous obtenons aussi un diviseur sur Σ. Finalement, nous verrons que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ, est égale à la dimension de $H^0(\widetilde{\Sigma}, D_j)$.

4.1. Préalables à la preuve du théorème d'Eichler

Nous utiliserons cette section pour énoncer certains lemmes qui nous serons utiles lors de la preuve de la formule de trace d'Eichler.

Lemme 4.1.1. *Soit ε une n^e racine d'unité. Alors,*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j = 0.$$

Démonstration.

Nous avons que

$$\frac{1-t^n}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-1}.$$

Si nous remplaçons t par notre racine d'unité ε, nous obtenons

$$\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{n-1}.$$

Étant donné que ε est une n^e racine d'unité, $\varepsilon^n = 0$. Donc, forcément $1 + t + t^2 + ... + t^{n-1} = 0$. $\square$

Pour s'en convaincre davantage, rappelons-nous que chaque racine d'unité peut être représentée par un vecteur de norme 1 dans le plan complexe. Prenons, par exemple, les 2^e racines d'unité i et $-i$. Si nous effectuons la somme géométrique de ces deux vecteurs, nous nous retrouvons bien à l'origine. Il va de même pour les 4^e racines d'unité, qui, lorsqu'on les somment, forment un carré qui se termine à l'origine.

Introduisons maintenant deux notations. Définissons $\lfloor x \rfloor$ comme le plus petit entier plus grand ou égal à x et $[x]$ comme le plus grand entier plus petit ou égal à x. Voici maintenant deux lemmes que nous utiliserons plus tard.

Lemme 4.1.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors*

$$-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil.$$

Prenons 1/2 en exemple. Nous avons que $-\lfloor 1/2 \rfloor = -1 = \lceil -1/2 \rceil$ et $-\lfloor -1/2 \rfloor = 0 = \lceil 1/2 \rceil$.

Lemme 4.1.3. *Soit $m > 0$. Alors,*

$$\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \geq -1 + \frac{1}{m}.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $n = qm + r$, où $0 \leq r < m$. Nous avons donc $\dfrac{n}{m} = q + \dfrac{r}{m}$, où $0 \leq \dfrac{r}{m} < 1$. Alors,

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \begin{cases} q & \text{si} \quad r = 0, \text{ d'où } \dfrac{r}{m} = 0, \\ \\ q+1 & \text{si} \quad r \neq 0, \text{ d'où } \dfrac{r}{m} \neq 0. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \begin{cases} q + \dfrac{r}{m} - q = 0, & \text{si} \quad r = 0, \\ \\ q + \dfrac{r}{m} - (q+1) = -1 + \dfrac{r}{m} \geq -1 + \dfrac{1}{m}, & \text{si} \quad r \neq 0. \end{cases}$$

□

4.2. Formule de trace d'Eichler

Soit G un sous-groupe de $Aut(\Sigma)$. Soit $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\Sigma}$ une q-différentielle et soit $\pi : \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$, où $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/G$, l'application quotient entre les deux surfaces de Riemann compactes.

Nous voulons définir le pullback de cette q-différentielle, que nous noterons $\pi^*(\widetilde{\varphi})$. Pour ce faire, nous devons travailler localement, c'est-à-dire dans un voisinage d'un point $\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$.

Soit U un voisinage de p stabilisé par le sous-groupe stabilisateur de p que nous noterons G_p. La proposition 1.4.1 nous assure qu'un tel voisinage existe. Soit $\nu(p) = |G_p|$. Soit $\widetilde{p} = \pi(p)$ et soit $\widetilde{U}$ un voisinage du point $\widetilde{p}$.

Soit z une coordonnée locale en $\widetilde{p}$. Nous savons que, sur la carte $z : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\widetilde{\varphi}$ peut s'écrire comme $\widetilde{\varphi} = \mu(z)(dz)^q$, où $\mu(z)$ est une fonction holomorphe. Par le théorème 1.2.1, nous savons que sur les cartes, la coordonnée locale z est envoyée vers z^n, où $n = \nu(p)$. Donc, nous pouvons décrire $\pi^*(\widetilde{\varphi})$ comme

$$\varphi = \pi^*(\widetilde{\varphi}) = \mu(z^n)(dz^n)^q = \mu(z^n)(nz^{n-1})^q(dz)^q. \tag{4.2.1}$$

Ce pullback est bien une q-différentielle sur Σ. Cette preuve se trouve aux pages 75 et 76 de [**FK**].

Calculons maintenant l'ordre de φ au point p :

$$ord_p(\varphi) = \nu(p)\ ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi}) + q(\nu(p) - 1) = (b_\pi(p) + 1)ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi}) + qb_\pi(p),$$

où $b_\pi(p)$ est le nombre de branche de l'application π en p.

Nous nous intéressons maintenant au diviseur de la q-différentielle φ.

$$\begin{aligned} div(\varphi) &= \sum_{p\in\Sigma} ord_p(\varphi)\cdot p \\ &= \sum_{p\in\Sigma} \nu(p) ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi})\cdot p + q\sum_{p\in\Sigma}(\nu(p)-1)\cdot p \\ &= \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\ \sum_{\substack{p\in\Sigma \\ \pi(p)=\widetilde{p}}} (b_\pi(p)+1) ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi})\cdot p + q\sum_{p\in\Sigma} b_\pi(p)\cdot p \\ &= \pi^*\left(\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi})\cdot\widetilde{p}\right) + q\sum_{p\in\Sigma} b_\pi(p)\cdot p, \end{aligned}$$

Donc,

$$div(\varphi) = div(\pi^*(\widetilde{\varphi})) = \pi^*(div(\widetilde{\varphi})) + q\sum_{p\in\Sigma} b_\pi(p)\cdot p.$$

Étant donné que φ est une q-différentielle holomorphe, nous voulons que le degré de son diviseur soit positif, c'est-à-dire

$$ord_p(\varphi) = \nu(p) ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi}) + q(\nu(p)-1) \geq 0.$$

Étant donné que $ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi})$ est un entier, utilisons la notation définie dans la précédente section. Donc, la précédente inégalité devient

$$ord_p(\varphi) \geq 0 \Longleftrightarrow ord_{\widetilde{p}}(\widetilde{\varphi}) \geq -\left\lfloor \frac{q(\nu(p)-1)}{\nu(p)} \right\rfloor \geq -\frac{q(\nu(p)-1)}{\nu(p)}.$$

Donc, le pullback φ sera holomorphe si cette dernière condition est satisfaite.

Nous obtenons l'égalité suivante :

$$\left\{ \widetilde{\varphi} \text{ est une } q\text{-différentielle holomorphe} \mid div(\widetilde{\varphi}) + \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \widetilde{p} \geq 0 \right\}$$

$$= \mathscr{H}^0\left(\widetilde{\Sigma}\ ,\ q\widetilde{K} + \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \right).$$

Soit G un sous-groupe de $Aut(\Sigma)$.

Définition 4.2.1. *Nous dirons que φ est une q-différentielle G-invariante si $g\varphi = \varphi$ pour tout $g \in G$.*

Soit $\widetilde{\varphi}$ une q-différentielle sur $\widetilde{\Sigma}$. Étant donné que $\widetilde{\Sigma}$ est le quotient de Σ par G, toutes les q-différentielles sur cette surface de Riemann sont G-invariantes.

Nous avons démontré en 4.2.1 comment définir le pullback d'une q-différentielle $\widetilde{\varphi}$ sur $\widetilde{\Sigma}$. Ce pullback est en fait une q-différentielle sur Σ que nous noterons φ. Bien sûr, ce pullback est défini sur plusieurs ouverts de Σ. Donc, afin que ce pullback soit bien défini, φ se doit d'être une q-différentielle G-invariante sur Σ. Ceci nous mène à la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *Pour $q \geq 1$,*

$$H^0\left(\widetilde{\Sigma}\ ,\ q\widetilde{K} + \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \right) \simeq H^0(\Sigma, \mathscr{O}(qK)^G),$$

où $\mathscr{O}(qK)^G$ est l'ensemble des q-différentielles holomorphes G-invariantes.

Corollaire 4.2.1. *Soit $\widetilde{g}$ le genre de $\widetilde{\Sigma}$. Alors,*

(1) $h^0\left(\Sigma, \mathscr{O}(K)^G\right) = \widetilde{g}$, si $q = 1$, et

(2) $h^0\left(\Sigma, \mathscr{O}(qK)^G\right) = (2q-1)(\widetilde{g}-1) + \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{\nu(\widetilde{p})-1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor$, si $q > 1$.

Démonstration.

Commençons la preuve par le cas où $q = 1$.

Nous avons que $\left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor$. De plus, $1 - \frac{1}{\nu(\widetilde{p})} \in [0, 1[$, d'où $\left\lfloor 1 - \frac{1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor = 0$.

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} h^0\left(\Sigma, \mathscr{O}(K)^G\right) &= h^0\left(\widetilde{\Sigma}\ ,\ \widetilde{K} + \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{\nu(\widetilde{p}) - 1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \right) \\ &= h^0\left(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{K}\right) = \widetilde{g}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $q > 1$, utilisons l'isomorphisme de la proposition 4.2.1. Soit D le diviseur suivant :

$$D = q\widetilde{K} + \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \widetilde{p}.$$

Si nous utilisons Riemann-Roch, nous obtenons

$$h^0\left(\widetilde{\Sigma}, D\right) - h^1\left(\widetilde{\Sigma}, D\right) = (\widetilde{g} - 1)(2q - 1) + \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor.$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $h^1\left(\widetilde{\Sigma}, D\right) = 0$.

Par la dualité de Serre, nous avons que

$$h^1\left(\widetilde{\Sigma}, D\right) = h^0\left(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{K} - D\right).$$

Calculons $\widetilde{K} - D$.

$$\widetilde{K} - D = \widetilde{K} - q\widetilde{K} - \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \widetilde{p}.$$

Attardons-nous maintenant au degré de $\widetilde{K} - D$.

$$\begin{aligned} deg(\widetilde{K} - D) &= (2\widetilde{g} - 2) - q(2\widetilde{g} - 2) - \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \\ &= (1 - q)(2\widetilde{g} - 2) - \sum_{\widetilde{p} \in \widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p}) - 1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \end{aligned}$$

Procédons à l'étude de différents cas.

Tout d'abord, si $\widetilde{g}=1$, alors $(1-q)(2\widetilde{g}-2)=0$. De plus, nous savons que les points où le stabilisateur n'est pas trivial sont les points fixés par G. Si la surface ne possède pas de point fixe, alors $\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \dfrac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor = 0$. Par la formule de Riemann-Hurwitz, nous obtenons que $2g-2=2\widetilde{g}-2$, donc $g=1$, ce qui contredit l'hypothèse que $g\geq 2$. Nous concluons que la surface possède au moins un point fixe. Dans ce cas, nous savons qu'il existe un $\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}$ tel que $\nu(\widetilde{p})\geq 2$. Donc, $-\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \dfrac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor < 0$, et, en utilisant le lemme 1.2.2, $h^0\left(\widetilde{\Sigma},\widetilde{K}-D\right)=0$.

Si $\widetilde{g}\geq 2$, nous avons que

$$(1-q)(2\widetilde{g}-2)<0 \text{ et } \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor \leq 0.$$

Donc, par le lemme 1.2.2, $h^0\left(\widetilde{\Sigma},\widetilde{K}-D\right)=0$ puisque $deg(\widetilde{K}-D)<0$.

Si $\widetilde{g}=0$, nous devons montrer que

$$deg(\widetilde{K}-D)=(1-q)(2\widetilde{g}-2)-\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor <0.$$

Étant donné que $\widetilde{g}=0$, ceci revient à

$$(1-q)(2(0)-2)-\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor <0 \tag{4.2.2}$$

$$2(q-1)<\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}}\left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})}\right\rfloor . \tag{4.2.3}$$

Si G agit sans point fixe, alors la formule de Riemann-Hurwitz nous donne

$$2(g-2)=2(\widetilde{g}-2).$$

Ceci implique que $2g=0$, ce qui contredit le fait que $g\geq 2$.

Si la surface possède au moins un point qui est fixé par G, alors en ce point, $\nu(\widetilde{p})\geq 2$. Donc, $\dfrac{\nu(\widetilde{p})-1}{\nu(\widetilde{p}}\geq 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \frac{q(\nu(\widetilde{p})-1)}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor &= \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor q\left(1-\frac{1}{\nu(\widetilde{p})}\right) \right\rfloor \\
&= \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor q - \frac{q}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor \\
&\geq \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\{ q - \frac{q}{\nu(\widetilde{p})} - \frac{\nu(\widetilde{p})-1}{\nu(\widetilde{p})} \right\} \\
&= \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\{ q - \frac{q}{\nu(\widetilde{p})} - 1 + \frac{1}{\nu(\widetilde{p})} \right\} \\
&= \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\{ \frac{-1}{\nu(\widetilde{p})}(q-1) + (q-1) \right\} \\
&= (q-1)\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\{ 1 - \frac{1}{\nu(\widetilde{p})} \right\}.
\end{aligned}$$

Utilisons la formule de Riemann-Hurwitz. Si $\widetilde{g} = 0$, nous avons

$$2g-2 = |G|(-2) + |G|\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left(1 - \frac{1}{\nu_{\widetilde{p}}}\right).$$

Donc,

$$2 + \frac{2g-2}{|G|} = \sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left(1 - \frac{1}{\nu_{\widetilde{p}}}\right).$$

Étant donné que G est un groupe fini et que $g \geq 2$, nous obtenons que $\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left(1 - \frac{1}{\nu_{\widetilde{p}}}\right) > 2$, d'où l'inégalité 4.2.3 est satisfaite.

En conclusion, dans tous les cas, $h^1\left(\widetilde{\Sigma}, D\right) = 0$ ce qui termine la preuve du corollaire. $\square$

Maintenant que nous avons vu que le pullback d'une q-différentielle sur $\widetilde{\Sigma}$ est une q-différentielle G-invariante sur Σ, il sera important pour la preuve du théorème d'Eichler de mieux comprendre l'action du groupe d'automorphismes de Σ sur l'espace des q-différentielles. Le théorème suivant nous démontre que cette action peut toujours être représentée par une matrice diagonale.

Proposition 4.2.2. *Soit $\mathscr{A}_\Sigma^q$ l'espace des q-différentielles sur la surface de Riemann Σ et $T \in Aut(\Sigma)$. Il existe une base de q-différentielles telle que l'action de T sur $\mathscr{A}_\Sigma^q$ est représentée par une matrice diagonale.*

Démonstration.

Comme nous l'avons démontré au précédent chapitre, $Aut(\Sigma)$ est un groupe fini d'ordre n, d'où $T^n = 1$.

De plus, l'algèbre linéaire démontre que T peut être représentée par une matrice diagonale par bloc. Regardons de plus près un de ces blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Étant donné que $T^n = 1$, cette propriété doit aussi être valide pour chacun des blocs de T. Calculons la n^e puissance d'un de ces blocs.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n\lambda^{n-2} & \cdots & n\lambda \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & n\lambda^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Si nous voulons que $T^n = 1$, il faut que chacun des blocs soit égal à l'identité. Si nous regardons le dernier bloc obtenu, il faut donc que tous les éléments non diagonaux du bloc soient nuls. Nous voulons donc que $n\lambda^{n-i} = 0$, $i = 1, ..., n-1$. Par contre, nous savons que $n \neq 0$. De plus, $\lambda^{n-1} \neq 0$ puisque λ est une n^e racine d'unité.

Nous concluons que le seul choix possible est que chacun des blocs soit de taille 1 par 1, donc que la matrice de départ soit diagonale. $\square$

Nous avons maintenant tous les préalables nécessaires afin de démontrer le théorème clé de ce chapitre.

Voici d'abord l'énoncé du théorème que nous prouverons en deux parties.

Théorème 4.2.1 (Formule de la trace d'Eichler)**.** *Soit T un automorphisme d'ordre $n > 1$ d'une surface de Riemann compacte Σ de genre $g \geq 2$. Représentons T par une matrice via son action sur l'espace vectoriel des q-différentielles $\mathscr{A}_{\Sigma}^{q}$. Nous voulons calculer la trace de cette matrice, qui ne dépend pas de la base de q-différentielles choisie. Soit t le nombre de points fixes de T. Soit $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ une n-ième racine d'unité. Soit $P_1, P_2, ..., P_t$ les points fixes de T sur Σ. Pour chaque $m = 1, 2, ..., t$, choisissons une coordonnée locale z en P_m et un entier ν_m relativement premier avec n tel que $1 \leq \nu_m < n - 1$ et tel que T^{-1} est donné par $T^{-1} : z \longrightarrow \varepsilon^{\nu_m} z$ dans un voisinage de P_m. Alors*

$$tr\ T = \begin{cases} 1 + \sum_{m=1}^{t} \dfrac{\varepsilon^{\nu_m}}{1 - \varepsilon^{\nu_m}}, & si \quad q = 1, \\ \\ \sum_{m=1}^{t} \dfrac{\varepsilon^{\nu_m \nu}}{1 - \varepsilon^{\nu_m}}, & si \quad q > 1, \end{cases}$$

où $0 < \nu < n$ est choisit comme l'unique entier tel que $q = \mu n + \nu$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

Nous effectuerons cette preuve en deux parties. Dans les deux cas, le but est de déterminer les valeurs propres de T ainsi que leurs multiplicités.

Pour cette première partie, considérons $T \in Aut(\Sigma)$, $ord(T) = n > 1$ et que $< T >$ opère sans point fixe sur Σ. Nous savons déjà que les valeurs propres doivent être de la forme ε^j, où $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ avec $j = 1, 2, ..., n-1$. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est égal à l'espace des q-différentielles $< T >$-invariantes sur Σ. Notons cet ensemble $(\mathscr{A}_{\Sigma}^{q})^{<T>}$. Sa dimension est égale au genre de $\widetilde{\Sigma}$, soit $\widetilde{g}$, comme nous l'avons démontré au corollaire 4.2.1. Si $q \geq 1$, le corollaire 4.2.1 mentionne que la dimension de l'espace $(\mathscr{A}_{\Sigma}^{q})^{<T>}$ est égale à $(2q-1)(\tilde{g}-1) +$

$\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \dfrac{\nu(\widetilde{p})-1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor$. Par contre, dans notre cas, T agit sans point fixe. Alors G_p est trivial et donc $\sum_{\widetilde{p}\in\widetilde{\Sigma}} \left\lfloor \dfrac{\nu(\widetilde{p})-1}{\nu(\widetilde{p})} \right\rfloor = 0$.

Soit λ une valeur propre quelconque. Alors, nous avons que $T\varphi = \lambda\varphi$ pour $\varphi \in \mathscr{A}^q_\Sigma$. Donc, $Div(\varphi)$ est invariant sous T, donc aussi sous $< T >$. Soit E_λ l'espace propre associé à λ. Choisissons $\varphi_0 \in E_\lambda$ une q-différentielle non-nulle sur Σ. Alors, pour une q-différentielle $\varphi \in E_\lambda$ quelconque, nous avons donc

$$T\varphi = \lambda^j\varphi,$$

$$T\varphi_0 = \lambda^j\varphi_0,$$

étant donné que T peut s'écrire sous une forme diagonale comme nous l'avons montré à la proposition 4.2.2. Étant donné que φ et φ_0 sont des q-différentielles, si nous prenons comme coordonnée locale z, nous avons $\varphi = f_1(z)(dz)^q$ et $\varphi_0 = f_2(z)(dz)^q$. Considérons le quotient suivant :

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{f_1(z)(dz)^q}{f_2(z)(dz)^q} = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Ce dernier correspond à une fonction méromorphe ayant des pôles aux zéros de $f_2(z)$. De plus, nous avons que

$$T\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) = \frac{T(f_1(z)(dz)^q)}{T(f_2(z)(dz)^q)} = \frac{\lambda^j f_1(z)(dz)^q}{\lambda^j f_2(z)(dz)^q} = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Donc, $\dfrac{\varphi}{\varphi_0}$ est une fonction méromorphe <T>-invariante. Le diviseur $Div(\varphi_0)$ se projette vers un diviseur D sur $\widetilde{\Sigma}$, car il est <T>-invariant. De plus, $deg(D) = 2q(g-1)/n$, car D provient d'une q-différentielle et que la forme normale locale nous donne que l'application π est de la forme $z \mapsto z^n$. En utilisant Riemann-Hurwitz, nous avons que $2g-2 = n(2\tilde{g}-2)+0$, car <T> agit sans point fixe. En utilisant les deux dernières égalités, nous obtenons

$$deg(D) = 2q(\tilde{g}-1).$$

Si $q = 1$, alors $deg(D) = 2(\tilde{g}-1)$ et par Riemann-Roch nous obtenons

$$h^0(\widetilde{\Sigma}, D) - h^1(\widetilde{\Sigma}, D) = deg(D) - \tilde{g} + 1,$$

$$h^0(\widetilde{\Sigma}, D) = 2(\tilde{g} - 1) - \tilde{g} + 1 + h^1(\widetilde{\Sigma}, D) = \tilde{g} - 1 + h^1(\widetilde{\Sigma}, D).$$

Considérons les deux cas suivants.

Tout d'abord, si D est canonique, en utilisant la dualité de Serre, nous obtenons $h^1(\widetilde{\Sigma}, D) = h^0(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{K} - D) = h^0(\widetilde{\Sigma}, 0) = 1$. Donc, dans ce cas, la précédente équation devient $h^0(\widetilde{\Sigma}, D) = \tilde{g}$. Notons que le diviseur D est canonique si et seulement si φ_0 projette vers une 1-forme holomorphe sur $\widetilde{\Sigma}$, c'est-à-dire, si et seulement si φ_0 est $<$T$>$-invariante, donc si $\lambda = 1$.

Si D n'est pas canonique, alors le lemme 1.3.1 nous démontre que $h^1(\widetilde{\Sigma}, D) = 0$.

Maintenant, considérons le cas où $q > 1$, donc, dans ce cas, D n'est pas canonique. Alors, par le corollaire 4.2.1, nous avons $h^0(\Sigma, qD) = (2q-1)(\tilde{g}-1)$, étant donné que $< T >$ agit sans point fixe.

Nous concluons donc que

$$dim(E_\lambda) = \begin{cases} (2q-1)(\tilde{g}-1), & \text{si} \quad q > 1, \lambda^n = 1, \\ \tilde{g}, & \text{si} \quad q = 1, \lambda = 1, \\ \tilde{g}\text{-}1, & \text{si} \quad q = 1, \lambda \neq 1, \lambda^n = 1. \end{cases}$$

Étant donné que $\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} dim(E_\lambda) = dim\ \mathscr{A}^q_\Sigma$ et qu'en utilisant Riemann-Hurwitz nous obtenons $(g-1) = n(\tilde{g}-1)$, nous pouvons constater que toutes les n^e racines d'unités doivent être des valeurs propres et que leur multiplicité est donnée ci-haut.

Dans l'énoncé du théorème d'Eichler, nous remarquons que le calcul de la trace de T s'effectue seulement sur les points fixes de Σ. Étant donné que dans cette première partie $< T >$ opère sans point fixe, voyons voir si la formule de la trace d'Eichler s'applique bien à ce cas spécifique.

Nous avons, pour $q = 1$,

$$tr\ T = \sum_{j=0}^{n-1} n_j \varepsilon^j,$$

où $n_j = dim\ E_{\varepsilon^j}$ et $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Effectuons le calcul en utilisant les multiplicités que nous avons trouvées auparavant.

$$\begin{aligned} tr\ T &= \tilde{\text{g}}\ \varepsilon^0 + (\tilde{\text{g}}\text{-1})\ \varepsilon^1 + ... + (\tilde{\text{g}}\text{-1})\ \varepsilon^{n-1} \\ &= \tilde{\text{g}}\ (\varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 ... + \varepsilon^{n-1}) - (\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{n-1}) \\ &= \tilde{\text{g}}\ (0) - (-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ce dernier calcul correspond bien au résultat obtenu en calculant le tout avec le théorème d'Eichler pour le cas $q = 1$.

Maintenant, si $q > 1$, alors

$$\begin{aligned} tr\ T &= (2q-1)(\tilde{\text{g}}\text{-1})\ \varepsilon^0 + (2q-1)(\tilde{\text{g}}\text{-1})\ \varepsilon^1 + ... + (2q-1)(\tilde{\text{g}}\text{-1})\ \varepsilon^{n-1} \\ &= (2q-1)(\tilde{\text{g}}\text{-1})\ (\varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 ... + \varepsilon^{n-1}) \\ &= (2q-1)(\tilde{\text{g}}\text{-1})\ (0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui correspond au résultat que nous aurions obtenu en calculant à l'aide du théorème d'Eichler.

Commençons maintenant la deuxième partie de la preuve en considérant que $< T >$ possède des points fixes. Nous utiliserons comme notation $n_j = dim\ E_{\varepsilon^j}$. Rappelons-nous que le corollaire 4.2.1 nous a permis de calculer n_0.

Pour calculer n_j, $j = 1, 2, ..., n-1$, faisons une partition de l'ensemble des points de branche B de l'application $\pi : \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$ en une union disjointe, c'est-à-dire

$$B = \sum_{l=1}^{n-1} B_l,$$

où $B_l = \{P \in \Sigma \mid T^l P = P,\ T^k P \neq P,\ \forall\ 0 \leq k \leq l-1\}$.

Supposons que $P \in B_l$ et $2 \leq l \leq n-1$. Soit $n = \mu l + k$, où $0 \leq k \leq l-1$. Nous avons donc $T^k P = P$ et donc $k = 0$. Donc, si $B_l \neq \emptyset$, alors l divise n. En particulier, l'orbite de chaque point $P \in B_l$ consiste en l points P, TP, $T^2P, ...,$ $T^{l-1}P$, ces derniers étant aussi dans B_l.

Si $B_l \neq \emptyset$, alors définissons

$$\pi(B_l) = \{Q_{ml} \mid 1 \leq m \leq b_l\}.$$

Alors $\pi(B_l)$ possède b_l points distincts tandis que B_l en possède lb_l. Si $B_l = \emptyset$, alors $b_l = 0$.

Voici un court exemple afin de mieux saisir les dernières définitions. Soit la courbe de Klein $\mathscr{K}$. Soit $\sigma \in Aut(\mathscr{K})$ tel que $\mid \sigma \mid = 4$, donc $\mid \sigma^2 \mid = 2$. Comme nous l'avons vu au précédent chapitre, nous savons que le nombre de points fixés par σ^2 est égal à 4, mais σ^2 est d'ordre 2, donc il permute les deux paires de points fixes. Donc $B_2 \neq \emptyset$ et en effet 2 divise 4. En utilisant la précédente notation, il y a deux points dans $\pi(B_2)$ et $2 \cdot 2$ points dans B_2. En effet, nous avons 4 points dans $\mathscr{K}$ fixés par σ qui sont projettés vers deux points dans $\mathscr{K}/Aut(\mathscr{K})$, soient Q_{12} et Q_{22}, où le deuxième indice correspond au nombre de préimages de chaque point.

Choisissons z comme coordonnée locale pour chaque point dans $\pi^*(Q_{ml})$ tel que T^{-l} est donnée par

$$T^{-l} : z \longrightarrow \eta_{ml} z, \tag{4.2.4}$$

où η_{ml} est une $(n/l)^e$ racine d'unité primitive.

Maintenant, supposons que $0 \neq \varphi_0 \in E_{\varepsilon^j}$, $1 \leq j \leq n-1$. Nous avons $dim\ E_{\varepsilon^j} = n_j = h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j)$, où D_j est un diviseur sur $\widetilde{\Sigma}$.

Pour trouver D_j, considérons l'équation suivante, pour $0 \neq \varphi \in E_{\varepsilon^j}$:

$$T\varphi = \varepsilon^j \varphi.$$

De plus, nous avons

$$T^l \varphi = \varepsilon^{jl} \varphi. \tag{4.2.5}$$

Donc T^l à comme valeur propre ε^{jl}.

Nous savons que φ peut s'écrire comme une série convergente de la forme

$$\varphi = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \right) (dz)^q,$$

en un voisinage de $\pi^{-1}(Q_{ml})$. En utilisant aussi 4.2.4, l'équation 4.2.5 devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \eta_{ml}^{k+q} \, z^k \; = \; \varepsilon^{jl} \; \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \right).$$

Pour obtenir l'égalité entre les deux précédents termes pour tout k, nous devons avoir l'égalité suivante :

$$A_k(\eta_{ml}^{k+q} - \varepsilon^{jl}) = 0.$$

Étant donné que η_{ml} est une racine d'unité primitive et donc que $\varepsilon^{jl} \in < \eta_{ml} >$, il existe un unique λ_{mlj} tel que $0 < \lambda_{mlj} \leq n/l$ et $\eta_{ml}^{\lambda_{mlj}} = \varepsilon^{jl}$. Donc, deux choix s'offrent à nous :

$$A_k = 0, \quad \text{sauf si} \quad k + q = \lambda_{mlj} \; mod \; (n/l).$$

Posons $\lambda_{ml(n/l)} = n/l$ et $\lambda_{ml0} = 0$.

Soit α_{ml} l'ordre de φ_0 au point $\pi^*(Q_{ml})$. Bien sûr, $\alpha_{ml} \geq 0$, puisque φ_0 est une q-différentielle holomorphe. Soit $\beta_{mlj} \geq 0$ un entier tel que

$$\alpha_{ml} = \beta_{mlj}(n/l) + \lambda_{mlj} - q \geq 0.$$

Soit $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ les projections vers $\widetilde{\Sigma}$ des zéros de φ_0 qui ne sont pas dans B, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas fixés par une puissance de T. Posons $\alpha_k = ord_{\pi^*(Q_k)}(\varphi_0)$, qui correspond à la première puissance non nulle dans la série convergente représentant φ_0 dans un voisinage de $\pi^*(Q_k)$.

Soit $\widetilde{f} \in \mathscr{M}_{\widetilde{\Sigma}}$. Cette fonction est telle que $f\varphi_0$ est une q-différentielle holomorphe, où $f = \widetilde{f} \circ \pi$. si et seulement si les trois conditions suivantes doivent être respectées :

(1) $\widetilde{f}$ est holomorphe sauf en Q_k et en Q_{ml}, car $\widetilde{f}$ peut être méromorphe à ces endroits, mais ses pôles doivent être bornés par les zéros de φ_0,

(2) $ord_{Q_k}(\widetilde{f}) \geq -\alpha_k$, les Q_k étant les zéros de $\varphi_0 \notin B$, et

(3) $ord_{Q_{ml}}(\widetilde{f}) \geq -\beta_{mlj} + \dfrac{q - \lambda_{mlj}}{(n/l)}$, les Q_{ml} étant les points de $\widetilde{\Sigma}$ tels que les points $\pi^*(Q_{ml})$ ont un stabiliateur non trivial.

En utilisant les notations définies en début de chapitre, étudions de plus près la troisième condition. Étant donné que $ord_{Q_{ml}}(\widetilde{f})$ est un entier, nous avons

$$ord_{Q_{ml}}(\widetilde{f}) \geq \left\lfloor -\beta_{mlj} + \frac{q-\lambda_{mlj}}{(n/l)} \right\rfloor = -\beta_{mlj} + \left\lfloor \frac{q-\lambda_{mlj}}{(n/l)} \right\rfloor,$$

$$ord_{Q_{ml}}(f) + \beta_{mlj} - \left\lfloor \frac{q-\lambda_{mlj}}{(n/l)} \right\rfloor \geq 0.$$

Pour conclure, utilisons le lemme 4.1.2

$$ord_{Q_{ml}}(f) + \beta_{mlj} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj}-q}{(n/l)} \right\rceil.$$

À l'aide de ces conditions, nous sommes maintenant aptes à définir le diviseur D_j comme suit :

$$D_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k Q_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\beta_{mlj} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj}-q}{n/l} \right\rceil \right) Q_{ml}.$$

Étant donné le précédent diviseur dépend seulement de φ_0 qui est une q-différentielle, $deg(\varphi_0) = 2q(g-1)$ et donc

$$deg(\varphi_0) = n \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\alpha_{ml} = 2q(g-1), \tag{4.2.6}$$

car les Q_k ont n préimages et les Q_{ml} ont l préimages étant donné que leur stabilisateur est d'ordre n/l.

Maintenant, en utilisant la définition de D_j,

$$deg(D_j) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \beta_{mlj} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj}-q}{n/l} \right\rceil. \tag{4.2.7}$$

Pour la suite, utilisons Riemann-Hurwitz. Nous avons

$$2g-2 = n(2\tilde{g}-2) + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\left(\frac{n}{l} - 1\right),$$

Étant donné que les points de branche sont les Q_{ml} et que l'ordre du stabilisateur est n/l , alors le nombre de branche est égal à $\left(\frac{n}{l} - 1\right)$. L'indice m étant absent dans le dernier terme, nous obtenons

$$2g-2 = n(2\tilde{g}-2) + \sum_{l/n} lb_l\left(\frac{n}{l} - 1\right) = n(2\tilde{g}-2) + \sum_{l/n} b_l(n-l). \tag{4.2.8}$$

Revenons maintenant à 4.2.7. En utilisant la définition de β_{mlj}, nous avons

$$deg(D_j) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \beta_{mlj} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right\rceil \tag{4.2.9}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\alpha_{ml} - \lambda_{mlj} + q}{n/l} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right\rceil \right) \tag{4.2.10}$$

$$= \frac{1}{n} \left(n \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\alpha_{ml} \right) + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left\lceil \frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right\rceil \right) \tag{4.2.11}$$

$$= \frac{1}{n} \left(n \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\alpha_{ml} \right) + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} - \left\lfloor \frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} \right\rfloor \right), \tag{4.2.12}$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant le lemme 4.1.2. Si nous utilisons le lemme 4.1.3, nous obtenons

$$deg(D_j) \geq \frac{1}{n} \left(n \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\alpha_{ml} \right) - \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{n/l - 1}{n/l} \right) \tag{4.2.13}$$

$$= \frac{1}{n} 2q(g-1) - \frac{1}{n} \sum_{l/n} b_l(n-l) \tag{4.2.14}$$

$$= \frac{1}{n} 2q(g-1) + \frac{1}{n}(2g-2)(q-1) - \frac{1}{n} \sum_{l/n} b_l(n-l) \tag{4.2.15}$$

$$= (2\tilde{g} - 2) + \frac{1}{n}(2g-2)(q-1) \tag{4.2.16}$$

$$\geq 2\tilde{g} - 2, \tag{4.2.17}$$

cette dernière série de calculs étant obtenue en utilisant 4.2.6, 4.2.8 ainsi que Riemann-Hurwitz.

Donc, nous venons de démontrer que si $q > 1$, $deg(D_j) > 2\tilde{g} - 2$. Le lemme 1.2.2 nous permet d'affirmer que

$$H^1(\widetilde{\Sigma}, D_j) = H^0(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{K} - D_j) = 0.$$

Si $q = 1$, que D_j n'est pas le diviseur canonique, mais que $deg(D_j) = 2\tilde{g} - 2$, alors le lemme 1.3.1 nous démontre que $H^1(\widetilde{\Sigma}, D_j) = 0$.

Sinon, D_j est canonique. Dans ce cas, il existe une 1-forme $\omega \in \widetilde{\Sigma}$ telle que $div(\omega) = D_j$. En particulier, en utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 4.1.3 avec $r = 1$, nous obtenons

$$q - \lambda_{mlj} = a\frac{n}{l} + 1,$$

$$1 - \lambda_{mlj} = a\frac{n}{l} + 1,$$

$$-\lambda_{mlj} = a\frac{n}{l},$$

mais $1 \leq \lambda_{mlj} \leq n/l$, donc

$$\lambda_{mlj} = n/l.$$

Ceci nous mène à

$$D_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k Q_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\beta_{mlj} + \left[\frac{n/l - 1}{n/l} \right] \right) Q_{ml} \tag{4.2.18}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k Q_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\beta_{mlj} + 1 + \left[\frac{-1}{n/l} \right] \right) Q_{ml} \tag{4.2.19}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k Q_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\beta_{mlj} + 1 - 1 \right) Q_{ml} \tag{4.2.20}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k Q_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \beta_{mlj} Q_{ml}. \tag{4.2.21}$$

Le pullback ω^* de ω possède des zéros d'ordre α_k en chaque point $\pi^* Q_k$ et des zéros d'ordre $\alpha_{ml} = \beta_{mlj} n/l + n/l - 1$, car dans notre cas $q = 1$ et $\lambda_{mlj} = n/l$, en chaque point $\pi^* Q_{ml}$. Donc, ω^* aura le même diviseur que φ_0. Donc, ω^* est multiple de φ_0 par une constante. On peut donc affirmer que $\omega^* \in E_{\varepsilon^0}$, car elle est $<\mathrm{T}>$-invariante. Ceci vient contredire le fait que $1 \leq j < n - 1$.

Nous avons donc conclut que si $q \neq 1$ et $j \neq 0$, alors $h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = deg(D_j) - \tilde{g} + 1$.

Jusqu'à maintenant, nous avons démontré que

$$dim(E_{\varepsilon^j}) \neq 0 \Rightarrow deg(D_j) - \tilde{g} + 1 \neq 0.$$

Nous voudrions maintenant démontrer que si

$$deg(D_j) - \tilde{\mathrm{g}} + 1 \neq 0 \Rightarrow dim(E_{\varepsilon^j}) \neq 0.$$

Pour l'instant, nous pouvons seulement utiliser le fait que

$$\sum_{j=1}^{n-1} dim(E_{\varepsilon^j}) \leq \sum_{j=1}^{n-1} deg(D_j) - \tilde{\mathrm{g}} + 1 = \sum_{j=1}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j).$$

Maintenant, retournons au cas $q = 1$.
Notons que, pour $j > 0$, $\left[\dfrac{\lambda_{mlj} - 1}{n/l}\right] = 0$, car $1 \leq \lambda_{mlj} \leq n/l$. D'où

$$deg(D_j) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\alpha_{ml} + 1 - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - 1}{n/l}\right] \right) \tag{4.2.22}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\alpha_{ml} + 1 - \lambda_{mlj}}{n/l} + 0 \right). \tag{4.2.23}$$

En isolant $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k$ dans 4.2.6, nous obtenons

$$deg(D_j) = \frac{2(g-1)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\alpha_{ml} + \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} (\alpha_{ml} + 1 - \lambda_{mlj}) l \tag{4.2.24}$$

$$= \frac{2(g-1)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l(\lambda_{mlj} - 1). \tag{4.2.25}$$

En utilisant Riemann-Hurwitz et la dernière égalité obtenue, nous concluons que

$$
\begin{aligned}
h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) &= deg(D_j) - \tilde{\mathrm{g}} + 1 && (4.2.26)\\
&= \frac{2(g-1)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l} l(\lambda_{mlj}-1) - \tilde{\mathrm{g}} + 1 && (4.2.27)\\
&= 2\tilde{\mathrm{g}} - 2 - \tilde{\mathrm{g}} + 1 - \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l} l(\lambda_{mlj}-1) + \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l}(n-l) && (4.2.28)\\
&= \tilde{\mathrm{g}} - 1 + \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l}(l(1-\lambda_{mlj}) + n - l) && (4.2.29)\\
&= \tilde{\mathrm{g}} - 1 + \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l}(n - l\lambda_{mlj}) && (4.2.30)\\
&= \tilde{\mathrm{g}} - 1 + \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} && (4.2.31)
\end{aligned}
$$

Nous voulons maintenant calculer $\sum_{j=1}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j)$. Tout d'abord, calculons $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{mlj}$.

Retournons à l'équation $\eta_{ml}^{\lambda_{mlj}} = \varepsilon^{jl}$, où η_{ml} est une $(n/l)^e$ racine d'unité primitive. Pour $j = 1, 2, ..., n/l$, notons par $\{\varepsilon^{jl}\}$ l'ensemble des $(n/l)^e$ racines d'unité. Nous concluons donc que

$$\sigma : j \longrightarrow \lambda_{mlj}$$

est une permutation de $\{j = 1, 2, ..., n/l\}$ telle que $\sigma(n/l) = n/l$, car $\varepsilon^{(n/l)l} = 1 = \eta_{ml}^{(n/l)}$. De plus, si $j = k(n/l) + r$, où $1 \leq r \leq n/l$, nous avons $\lambda_{mlj} = \lambda_{mlr}$. Donc, en calculant la somme des n/l premiers termes et en considérant que nous avons l cycles,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{mlj} = l(1 + 2 + ... + n/l) = l\frac{n}{2l}\left(\frac{n}{l}+1\right) = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{n}{l}\right).$$

Notons que la précédente somme se termine à $j = n$.

D'où, pour $q = 1$,

$$g = \sum_{j=0}^{n-1} dim(E_{\varepsilon^j}) \tag{4.2.32}$$

$$\leq dim(E_{\varepsilon^0}) + \sum_{j=1}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) \tag{4.2.33}$$

$$= \tilde{g} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\tilde{g} - 1 + \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} \right) \tag{4.2.34}$$

$$= \tilde{g} + (n-1)(\tilde{g} - 1) + (n-1) \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} \tag{4.2.35}$$

En utilisant le fait que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{mlj} = \dfrac{n}{2}\left(1 + \dfrac{n}{l}\right)$, nous avons

$$g = n(\tilde{g} - 1) + 1 + (n-1) \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l \left(\frac{n}{2} \left(1 + \frac{n}{l} \right) - n \right) \tag{4.2.36}$$

$$= n(\tilde{g} - 1) + 1 + (n-1) \sum_{l/n} b_l - \sum_{l/n} b_l \left(\frac{l}{2} + \frac{n}{2} - 1 \right) \tag{4.2.37}$$

$$= n(\tilde{g} - 1) + 1 + \sum_{l/n} b_l \left(\frac{n}{2} - \frac{l}{2} \right) \tag{4.2.38}$$

$$= n(\tilde{g} - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{l/n} b_l (n - l) \tag{4.2.39}$$

$$= g, \tag{4.2.40}$$

la dernière égalité étant obenue à partir de 4.2.8. Nous venons donc de conclure que, si $q = 1$, $\sum_{j=0}^{n-1} dim(E_{\varepsilon^j}) = h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = g$.

Considérons maintenant le cas $q > 1$. Pour $j = 0, 1, ..., n-1$, nous voulons calculer $h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j)$. Servons-nous de 4.2.8 et de 4.2.10. Nous avons

$$h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = deg(D_j) - \tilde{g} + 1 \tag{4.2.41}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \alpha_k + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\alpha_{ml} + q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) - \tilde{g} + 1 \text{ (par 3.3.11)} \tag{4.2.42}$$

$$= \frac{2q(g-1)}{n} + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) - \tilde{g} + 1 \tag{4.2.43}$$

$$= q \left(2\tilde{g} - 2 + \frac{1}{n} \sum_{l/n} b_l(n-l) \right) + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) - \tilde{g} + 1, \tag{4.2.44}$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant Riemann-Hurwitz.

Calculons maintenant

$$\sum_{j=0}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j).$$

D'abord, écrivons $q = \mu_l \dfrac{n}{l} + \nu_l$, où $\mu_l \in \mathbb{Z}$, $\nu_l \in \mathbb{Z}$, $\mu_l \geq 0$ et $1 \leq \nu_l \leq n/l$. Donc,

$$\sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right)$$

devient

$$\sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\mu_l + \frac{\nu_l - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj}}{n/l} - \mu_l - \frac{\nu_l}{n/l} \right] \right)$$

$$= \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\mu_l + \frac{\nu_l - \lambda_{mlj}}{n/l} - \mu_l + \left[\frac{\lambda_{mlj} - \nu_l}{n/l} \right] \right)$$

$$= \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\nu_l - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - \nu_l}{n/l} \right] \right)$$

Si nous calculons la précédente somme pour un cycle, c'est-à-dire pour $j = 1, 2, ..., n/l$ en se rappelant que λ_{mlj} est une permutation des j, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n/l} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{\nu_l - j}{n/l} + \left[\frac{j - \nu_l}{n/l} \right] \right).$$

Notons que si $j \geq \nu_l$, alors $\left[\dfrac{j-\nu_l}{n/l}\right] = 0$ et si $j < \nu_l$, alors $\left[\dfrac{j-\nu_l}{n/l}\right] = -1$. Séparons la précédente somme comme suit

$$\sum_{j=1}^{\nu_l-1}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l}\left(\frac{\nu_l}{n/l}+\frac{j}{n/l}-1\right)+\sum_{j=\nu_l}^{n/l}\sum_{l/n}\sum_{m=1}^{b_l}\left(\frac{\nu_l}{n/l}+\frac{j}{n/l}+0\right)$$

$$=\sum_{l/n}\left(\nu_l-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{l}+1\right)-(\nu_l-1)\right)b_l=\sum_{l/n}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{l}\right)\right)b_l,$$

la dernière égalité étant obtenue en sommant les n/l premiers termes.

Étant donné que nous venons d'effectuer la somme pour $j = 1, 2, ..., n/l$, effectuer la somme de $j = 0, 2, ..., n-1$ revient à calculer l fois la précédente somme. En utilisant 4.2.44 ainsi que la précédente égalité, nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = n(\tilde{g}-1)(2q-1) + q\sum_{l/n} b_l(n-l) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l/n}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{l}\right)\right)b_l \tag{4.2.45}$$

$$= n(\tilde{g}-1)(2q-1) + q\sum_{l/n} b_l(n-l) + \sum_{l/n} l\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{l}\right)\right)b_l \tag{4.2.46}$$

$$= n(\tilde{g}-1)(2q-1) + q\sum_{l/n} b_l(n-l) + \sum_{l/n} l\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2l}\right)b_l \tag{4.2.47}$$

$$= n(\tilde{g}-1)(2q-1) + q\sum_{l/n} b_l(n-l) - \frac{1}{2}\sum_{l/n}(n-l)b_l. \tag{4.2.48}$$

Pour conlure, en utilisant 4.2.8,

$$\sum_{j=0}^{n-1} h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = n(\tilde{g}-1)(2q-1) + (q-\frac{1}{2})\sum_{l/n} b_l(n-l) \tag{4.2.49}$$

$$= n(\tilde{g}-1)(2q-1) + (q-\frac{1}{2})\{(2g-2) - n(2\tilde{g}-2)\} \tag{4.2.50}$$

$$= (2q-1)(g-1). \tag{4.2.51}$$

Nous pouvons maintenant conclure que pour tout q,

$$h^0(\widetilde{\Sigma}, D_j) = dim(E_{\varepsilon^j}).$$

Pour la dernière partie de la preuve, nous voulons maintenant calculer la trace de T.

Tout d'abord, pour $q = 1$,

$$tr \ = \sum_{j=0}^{n-1} n_j \varepsilon^j = \tilde{\mathrm{g}} + \sum_{j=1}^{n-1} n_j \varepsilon^j.$$

En utilisant le lemme 4.1.1 ainsi que 4.2.31,

$$tr\ T = \tilde{\mathrm{g}} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\tilde{\mathrm{g}} - 1 + \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l \lambda_{mlj} \right) \varepsilon^j \tag{4.2.52}$$

$$= \tilde{\mathrm{g}} + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\mathrm{g}} \varepsilon^j - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon^j + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l/n} b_l \varepsilon^j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l \lambda_{mlj} \varepsilon^j \tag{4.2.53}$$

$$= 1 - \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l \lambda_{mlj} \varepsilon^j \tag{4.2.54}$$

Fixons m et l et calculons $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{mlj} \varepsilon^j$.

Pour $l > 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{mlj} \varepsilon^j = \lambda_{ml1} \varepsilon^1 + \lambda_{ml2} \varepsilon^2 + \ldots + \lambda_{ml(n/l)} \varepsilon^{(n/l)} \tag{4.2.55}$$

$$+ \lambda_{ml1} \varepsilon^{(n/l)+1} + \ldots + \lambda_{ml(n/l)} \varepsilon^{2(n/l)} \tag{4.2.56}$$

$$\vdots \tag{4.2.57}$$

$$+ \lambda_{ml1} \varepsilon^{(l-1)(n/l)+1} + \ldots + \lambda_{ml(n/l)} \varepsilon^{n} \tag{4.2.58}$$

$$= \sum_{j=1}^{n/l} \lambda_{mlj} \sum_{k=0}^{l-1} \varepsilon^{k(n/l)+j} \tag{4.2.59}$$

$$= \sum_{j=1}^{n/l} \lambda_{mlj} \varepsilon^j \sum_{k=0}^{l-1} \varepsilon^{k(n/l)} \tag{4.2.60}$$

$$= 0. \tag{4.2.61}$$

Notons que la précédente somme se termine à $j = n$. Donc, pour $l > 1$, si nous sommons jusqu'à $j = n - 1$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{mlj} \varepsilon^j = -\lambda_{ml(n/l)} \varepsilon^n = -\lambda_{ml(n/l)} = \frac{n}{l},$$

car $\sigma(n/l) = n/l$.

Maintenant, pour $l = 1$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{m1j} \varepsilon^{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{m1j} \eta_{m1}^{\lambda_{m1j}}.$$

Dans ce cas, nous sommons seulement un cycle, car $l = 1$. Donc, λ_{m1j}, pour $j = 1, 2, ..., n-1$, est une permutation de $\{1, 2, ..., n-1\}$. D'où

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{m1j} \eta_{m1}^{\lambda_{m1j}} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{m1j} \eta_{m1}^{j} = \frac{-n}{1-\eta_{m1}}.$$

Revenons maintenant à 4.2.54 en utilisant les notations suivantes : $b_1 = t =$ nombre de points fixes et $\eta_{m1} = \varepsilon^{\nu_m}$. Dans notre cas, $l = 1$, donc nous considérons les points qui sont fixés par T.

$$tr\ T = 1 - \sum_{l/n} b_l - \frac{1}{n} \sum_{\substack{l/n \\ l \neq 1}} \sum_{m=1}^{b_l} l \left(\frac{-n}{l} \right) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{b_1} \frac{-n}{1-\eta_{m1}} \tag{4.2.62}$$

$$= 1 - \sum_{l/n} b_l + \sum_{\substack{l/n \\ l \neq 1}} b_l + \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \tag{4.2.63}$$

$$= 1 - b_1 + \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \tag{4.2.64}$$

$$= 1 - t + \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \tag{4.2.65}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{t} \left(\frac{1}{1-\varepsilon^{\nu_m}} - 1 \right) \tag{4.2.66}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} \tag{4.2.67}$$

Pour conclure, si $q > 1$, en utilisant 4.2.44 ainsi que le lemme 4.1.1, nous obtenons

$$tr\ T = \sum_{j=0}^{n-1} n_j \varepsilon^j \tag{4.2.68}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left(q(2\tilde{g} - 2) + \frac{q}{n} \sum_{l/n} b_l(n-l) + \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) - \tilde{g} + 1 \right) \varepsilon^j \tag{4.2.69}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j \left((2q-1)(\tilde{g} - 1) + \frac{q}{n} \sum_{l/n} b_l(n-l) \right) \tag{4.2.70}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) \varepsilon^j \tag{4.2.71}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) \varepsilon^j . \tag{4.2.72}$$

Comme nous l'avons fait précédemment, si $q = \mu_l \dfrac{n}{l} + \nu_l$, où $\mu_l \in \mathbb{Z}$, $\nu_l \in \mathbb{Z}$, $\mu_l \geq 0$ et $1 \leq \nu_l \leq n/l$, la précédente somme devient :

$$tr\ T = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{q - \lambda_{mlj}}{n/l} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) \varepsilon^j \tag{4.2.73}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} \varepsilon^j + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\mu_l + \frac{l\nu_l}{n} \right) \varepsilon^j \tag{4.2.74}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(-\mu_l + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) \varepsilon^j \tag{4.2.75}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} \varepsilon^j + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left(\frac{l\nu_l}{n} + \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \right) \varepsilon^j \tag{4.2.76}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} l\lambda_{mlj} \varepsilon^j + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \varepsilon^j \tag{4.2.77}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{\substack{l/n \\ l \neq 1}} l b_l \frac{-n}{l} - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{b_1} \frac{-n}{1 - \eta_{m1}} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \left[\frac{\lambda_{mlj} - q}{n/l} \right] \varepsilon^j . \tag{4.2.78}$$

Le terme $\gamma_{mlj} = \left[\dfrac{\lambda_{mlj} - q}{n/l}\right]$ est égal à 0 si $\eta_l \leq \lambda_{mlj} \leq n/l$ et est égal à -1 si $0 \leq \lambda_{mlj} < \nu_l$.

Donc, pour $l > 1$, posons $\gamma = \lambda_{ml1}\varepsilon^1 + \lambda_{ml2}\varepsilon^2 + ... + \lambda_{ml(n/l)}\varepsilon^{(n/l)}$. Nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{mlj}\varepsilon^j = \lambda_{ml1}\varepsilon^1 + \lambda_{ml2}\varepsilon^2 + ... + \lambda_{ml(n/l)}\varepsilon^{(n/l)} \tag{4.2.79}$$

$$+ \lambda_{ml1}\varepsilon^{(n/l)+1} + ... + \lambda_{ml(n/l)}\varepsilon^{2(n/l)} \tag{4.2.80}$$

$$\vdots \tag{4.2.81}$$

$$+ \lambda_{ml1}\varepsilon^{(l-1)(n/l)+1} + ... + \lambda_{ml(n/l)}\varepsilon^{n} \tag{4.2.82}$$

$$= \gamma\big(\varepsilon^{(n/l)} + \varepsilon^{2(n/l)} + ... + \varepsilon^{(l-1)(n/l)} + \varepsilon^{n}\big) \tag{4.2.83}$$

$$= 0. \tag{4.2.84}$$

Donc,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{mlj}\varepsilon^j = \gamma_{ml0}\varepsilon^0 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{mlj}\varepsilon^j - \gamma_{mln}\varepsilon^n = \gamma_{ml0} - \gamma_{mln} = -1,$$

car $\gamma_{ml0} = -1$, étant donné que $\lambda_{ml0} = 0$ et $\gamma_{mln} = 0$, étant donné que $\lambda_{ml(n/l)} = n/l$.

Maintenant, pour $l = 1$, en utilisant le fait que λ_{m1j} est une permutation de $\{1, 2, ..., n-1\}$, nous avons

$$\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{m1j}\varepsilon^j = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{m1j}\eta_{m1}^{\lambda_{m1j}} \tag{4.2.85}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\lambda_{m1j} - \nu_1}{n}\right] \eta_{m1}^{\lambda_{m1j}} \tag{4.2.86}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{j - \nu_1}{n}\right] \eta_{m1}^{j} \tag{4.2.87}$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu_1-1} \left[\frac{j - \nu_1}{n}\right] \eta_{m1}^{j} + \sum_{j=\nu_1}^{n-1} \left[\frac{j - \nu_1}{n}\right] \eta_{m1}^{j} \tag{4.2.88}$$

$$= -1 \sum_{j=1}^{\nu_1-1} \eta_{m1}^{j} + 0 \tag{4.2.89}$$

$$= -\frac{\eta_{m1} - \eta_{m1}^{\nu_1}}{1 - \eta_{m1}}. \tag{4.2.90}$$

Finalement, revenons à 4.2.78.

$$\begin{aligned}
tr\ T &= \sum_{\substack{l/n \\ l\neq 1}} b_l + \sum_{m=1}^{b_1} \frac{1}{1-\eta_{m1}} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l/n} \sum_{m=1}^{b_l} \gamma_{mlj}\varepsilon_j \\
&= \sum_{\substack{l/n \\ l\neq 1}} b_l + \sum_{m=1}^{b_1} \frac{1}{1-\eta_{m1}} - \sum_{\substack{l/n \\ l\neq 1}} b_l + \sum_{m=1}^{b_1} \left(-\frac{\eta_{m1} - \eta_{m1}^{\nu_1}}{1-\eta_{m1}} + \gamma_{m10}\varepsilon^0 \right) \\
&= \sum_{m=1}^{b_1} \frac{1}{1-\eta_{m1}} + \sum_{m=1}^{b_1} \frac{-1 + \eta_{m1}^{\nu_1}}{1-\eta_{m1}} \\
&= \sum_{m=1}^{b_1} \frac{\eta_{m1}^{\nu_1}}{1-\eta_{m1}} \\
&= \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m \nu_1}}{1-\varepsilon^{\nu_m}}.
\end{aligned}$$

En posant $\nu_1 = \nu$, nous avons maintenant démontrer le théorème. □

Voici maintenant un des corollaire souvent utilisé qui découle directement de la formule de la trace d'Eichler.

Corollaire 4.2.2 (Formule des points fixes de Lefschetz)**.** *Si $q = 1$, alors*

$$tr\ T + \overline{tr\ T} = 2 - t,$$

où t est le nombre de points fixes.

Démonstration. Par Eichler,

$$tr\ T = 1 + \sum_{m=1}^{t} \frac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}},$$

et

$$\overline{tr\ T} = 1 + \sum_{m=1}^{t} \overline{\left(\frac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}}\right)}.$$

Afin d'obtenir l'égalité présente dans l'énoncé du corollaire, nous devons sommer les parties de droite des deux dernières équations.

Dans notre calcul, nous effectuons la somme sur tous les points fixes. Afin d'obtenir $2 - t$ comme somme, il faut donc que

$$\frac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}} + \overline{\left(\frac{\varepsilon^{\nu_m}}{1-\varepsilon^{\nu_m}}\right)} = -1.$$

Posons $\varepsilon^{\nu_m} = \theta$. Alors, en considérant que $|\theta| = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{1-\theta} + \overline{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)} = \frac{\theta}{1-\theta} + \frac{\overline{\theta}}{1-\overline{\theta}} &= \frac{\theta(1-\overline{\theta}) + \overline{\theta}(1-\theta)}{(1-\overline{\theta})(1-\theta)} \\
= \frac{\theta(1-\overline{\theta}) + \overline{\theta} - 1}{(1-\overline{\theta})(1-\theta)} &= \frac{-\theta(\overline{\theta}-1) + \overline{\theta} - 1}{(1-\overline{\theta})(1-\theta)} \\
= \frac{(\overline{\theta}-1)(1-\theta)}{(1-\overline{\theta})(1-\theta)} &= \frac{-1(1-\overline{\theta})}{1-\overline{\theta}} = -1
\end{aligned}$$

$\square$

CONCLUSION

En conclusion, ce mémoire nous a permis d'en connaître davantage à propos des surfaces de Riemann compactes. En utilisant le fait que chaque surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ possède un nombre fini de points de Weierstrass et que chaque automorphisme permute ces points, nous avons pu démontrer que les surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$ possèdent un nombre fini d'automorphismes.

Ensuite, nous avons pu étudier de plus près la courbe de Klein. Nous avons calculé le nombre de points fixes pour chaque sous-groupe du groupe d'automorphismes de cette courbe. Nous avons aussi constaté que ces points fixes sont des points très spéciaux de la courbe de Klein : certains font partie d'un triangle d'inflexion, d'autres sont situés sur une double tangente à la courbe et les autres sont des points sextactiques. De plus, cette courbe est l'unique courbe de genre 3 ayant un groupe d'automorphismes contenant 168 éléments, soit le maximum possible pour un courbe de genre 3. Une sculpture, nommée The Eightfold Way, représentant la quartique de Klein est située en permanence au Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley depuis le 14 novembre 1993. Le livre de [**Le**] est un recueil d'articles traitant uniquement de cette courbe fascinante.

Nous avons aussi démontré la formule de trace d'Eichler, qui nous donne le caractère d'un automorphisme agissant sur l'espace des q-différentielles holomorphes sur une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. La formule de trace d'Eichler a pour corollaire la formule de points fixes de Lefschetz, qui est bien connue. D'ailleurs, la formule de Lefschetz est aussi présente dans l'article [**PU**].

Notre preuve du théorème d'Eichler fût très technique. Nous pouvons voir, dans l'annexe A.1. de l'article [**PU**], une preuve de la formule de points fixes de Lefschetz. Cette preuve utilise la cohomologie des faisceaux ainsi que le théorème de Riemann-Roch. Il serait intéressant de réussir à démontrer la formule de trace d'Eichler de la même façon.

Dans ce chapitre, nous avons étudié les représentations du groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ sur l'espace des q-différentielles holomorphes. Un autre sujet de recherche pourrait être d'étudier les représentations du groupe d'automorphismes sur le premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{Z})$, où M est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$. La section V.3. de [**FK**] traite de ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

[G] L. C. Grove, *Classical groups and geometric algebra*, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[Hu] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[FK] H. M. Farkas et I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Br] T. Breuer, *Characters and automorphism groups of compact Riemann surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[W] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[Li] S. Lipschutz, *Algèbre linéaire*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[M] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[Ki] R. B. King, *Beyond the quartic equation*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1996.

[DF] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra, third edition*, John Wiley and sons inc, Hoboken, 2004.

[Le] S. Levy, *The eightfold way : the beauty of Klein's quartic curve*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Kl] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1973.

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra, volume 1*, W. H. Freeman and Company, New York, 1974.

[JL] G. James and M. Liebeck, *Representations and characters of groups, second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[F] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Ha] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Ba] C. Bavard, *La surface de Klein*, Journal de math des élèves, volume 1, numéro 1, UMPA ENS-Lyon, Lyon, 1993 (http ://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artCBavard/artCBavard.pdf).

[PU] M. V. D. Put and F. Ulmer, *Differential equations and finite groups*, Journal of Algebra, volume 226, numéro 2, pages 920-966, 2000.