

Relation entre la Volatilité Implicite et la Volatilité Réalisée.

Le cas des séries avec la cointégration fractionnaire.

Rapport de Recherche

Présenté par :
Mario Vázquez Velasco

Directeur de Recherche :
Benoît Perron

Le 9 mars 2006

Table de Matières

SOMMAIRE	1
Liste des Tableaux et Figures	2
1 INTRODUCTION	3
2 INFORMATIONS PERTINENTES	8
2.1 Volatilité et Options financières	8
2.2 Cointégration Fractionnaire	9
3 REVUE D'ÉTUDES PRÉCEDENTES	11
3.1 Stephen Figlewsky	11
3.2 Bandi-Perron	13
3.3 Christensen-Nielsen	15
3.4 Quelques Faiblesses des études antérieures	16
4 ANALYSE THÉORIQUE	18
4.1 Le Modèle	18
5 ANALYSE EMPIRIQUE	22
5.1 Spécification du Modèle	22
5.2 Les Données	22
5.3 Résultats Empiriques	24
6 CONCLUSION	29
ANNEXE	31
FIGURE 1	33
RÉFÉRENCES	35

SOMMAIRE

Dans cette étude, on s'intéresse à déterminer si la volatilité implicite dans les options sur indices boursiers est une prévision non biaisée de la volatilité réalisée des rendements de ces derniers. On étudie ceci par le biais d'un modèle de régression linéaire simple entre les deux variables. L'estimation des paramètres pour ce modèle, est faite en utilisant la méthode de « Narrow Band Frequency Domain Least Squares (FDLS) » qui est un procédé dans le domaine des fréquences. L'utilisation de cette méthodologie est justifiée par la littérature antérieure, qui montre que les séries de volatilité de ce type d'actifs financiers sont des processus stationnaires de mémoire longue, et qu'on peut les modéliser à partir d'une relation de cointégration fractionnaire. Ce rapport est inspiré des travaux de Bandi et Perron (BP) (2004) et de Christensen et Nielsen (CN) (2004). En effet, on effectue une réestimation du travail de BP et on utilise les résultats théoriques de CN pour calculer les écarts-types, valides asymptotiquement, des estimateurs FDLS des paramètres. Pour l'application empirique, on utilise des séries de volatilité des rendements pour un indice du marché boursier américain. D'après nos résultats, on conclue, de façon cohérente avec la littérature précédente, que la volatilité implicite est une estimation convergente de la volatilité réalisée dans le long terme.

Mots Clés : Volatilité Implicite et Réalisée; Stationnarité; Cointégration fractionnaire; Processus de Mémoire longue.

Liste des Tableaux et de Figures

TABLEAUX

En ANNEXE

Tableau 1 : Statistiques Descriptives pour les séries utilisées.

Tableau 2 : Résultats des estimations de paramètres de d .

Tableau 3 : Estimations de paramètres de α et β par MCO et NBLs (résultat asymptotique)

Tableau 4 : Estimations de paramètres de α et β par NBLs (simulation)

FIGURES

Figure 1 : Graphiques des estimations des paramètres d pour les séries de volatilité.

1. INTRODUCTION

L'étude de la volatilité de certains actifs financiers est devenue un sujet très important dans le domaine de la finance. Cette importance vient en grande partie du fait qu'elle permet de mesurer l'incertitude concernant l'évolution du rendement d'un actif donné (une action ou un indice boursier, par exemple). De même, le fait que les prix de ces actifs soient très variables ne peut être négligé, surtout lorsqu'on y investit notre argent. De nos jours, n'importe quel investisseur est conscient de ces fluctuations qui introduisent un élément de risque dans son portefeuille. C'est pour cela que les investisseurs désirent choisir le degré « d'exposition » au risque compatible à leur niveau de tolérance à ce dernier. C'est pour cette raison qu'ils cherchent à se couvrir contre les faits adverses qui puissent affecter les marchés financiers. Ce souci se fait valoir (au moins partiellement) à travers l'inclusion de divers produits dérivés, comme les options financières (dont une définition est présentée postérieurement dans le texte) dans les portefeuilles d'investissement. Ainsi, la connaissance de la volatilité de ce type d'actifs contingents joue un rôle essentiel dans l'évaluation et dans la couverture d'un investissement quelconque, surtout lorsque celui-ci est risqué. Par conséquent, la prévision de cette volatilité est indispensable afin de contrôler le risque (et lorsque possible, le diminuer). De fait, l'anticipation d'éventuelles variations du comportement des prix dans les marchés, nous permet de nous prévenir contre de possibles pertes.

Du point de vue théorique, l'importance de la volatilité est due aussi au fait que dans la plus part des modèles de valorisation d'actifs contingents, disposer d'une mesure du risque de chaque actif, ainsi que des marchés où ils transigent, est vital. En même temps, il y a d'autres modèles dans lesquels on a besoin de connaître la volatilité d'un actif dans une période dans le futur. Les modèles de choix de portefeuille, dans l'approche moyenne-variance, qui demandent la variance des actifs pour obtenir les poids optimaux sont un bon exemple.

D'autre part, étant donné que la volatilité est reliée aux variations du rendement d'un actif, on l'estime souvent en utilisant l'écart type d'échantillonnage des rendements antérieurs de

l'actif en question sur une période donnée. Cette procédure, nous fournit d'une estimation de sa volatilité *historique*. Or, avoir une bonne estimation de la volatilité *future* de certains actifs n'est souvent pas facile, parce que, entre autres subtilités, la volatilité n'est pas observable et on doit utiliser des "proxys" pour l'étudier. De plus, elle n'est presque jamais constante, mais pour beaucoup d'actifs, elle change stochastiquement à travers le temps. Une bonne intuition de ceci est donnée par Gatfaoui (2004, page 7) qui affirme que : « la volatilité est sensible aux événements politiques, économiques et financiers ce qui explique en partie qu'elle varie au cours du temps en s'accompagnant souvent d'un phénomène de non- stationnarité ». Par conséquent, il est souvent difficile d'appliquer les modèles communs de prévision.

Un exemple classique d'un modèle de valorisations d'actifs contingents, où on a besoin d'une mesure de volatilité, est celui proposé par Black-Scholes [1973]. Ce modèle sert à calculer le prix théorique d'une option d'achat (Call) européenne à partir des plusieurs valeurs dont la seule variable qui n'est pas directement observable au temps t , quand on veut évaluer l'option, est précisément σ , la volatilité future du sous-jacent. Dans ce cas, la volatilité qu'on doit estimer est celle que le rendement du sous-jacent expérimentera entre la date t (aujourd'hui, par exemple), et la date d'expiration de l'option, T . Dans la pratique, on effectue (même si on sait que la volatilité change à travers le temps), une estimation ponctuelle en utilisant les données historiques et on considère cette dernière comme étant la volatilité attendue sur toute la vie de l'option.

Pour les contrats d'options qui sont déjà sur le marché, on observe : le prix du Call, la date d'échéance, le taux d'intérêt, le prix d'exercice et du sous-jacent. On peut inverser¹ la formule de Black-Scholes (BS) de façon à obtenir la valeur de σ que vérifie l'égalité entre le prix de marché de l'option et sa valeur théorique. Cette valeur de σ , ainsi obtenue, est la volatilité implicite, qui est souvent interprétée comme étant la « prévision du marché » de la volatilité du sous-jacent, sous l'hypothèse d'efficacité des marchés. De même, on peut calculer les variations du rendement du sous-jacent pendant une période donnée et obtenir une estimation de sa volatilité réalisée (*ex post*). On peut répéter cette procédure plusieurs fois pendant une longue période de temps, et générer des séries temporelles pour chacune des volatilités.

¹ Même s'il n'existe pas une forme explicite pour inverser la formule mettant en évidence σ , on peut obtenir sa valeur par des méthodes numériques courantes, à l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur.

L'idée d'utiliser la volatilité *implicite* (dans d'autres contrats déjà transigés sur le marché sur un sous-jacent donné) comme estimateur de la volatilité qui sera *réalisée*, s'appuie sur l'hypothèse théorique que les marchés financiers sont « informationnellement efficaces ». Donc, les prix de marché (des options) devraient parfaitement refléter toute l'information importante disponible. Ainsi, selon Christensen (2003, page 3) « si les participants dans le marché d'options sont rationnels, la volatilité implicite devrait être la meilleure prévision du marché de la vraie volatilité future du sous-jacent au cours de toute la vie de l'option ». Cette volatilité est assumée constante durant cette période.

En conséquence, il est assez intuitif d'établir la relation linéaire suivante :

$$\sigma_t^R = \alpha + \beta \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t \quad (1.1)$$

où σ_t^R est la volatilité réalisée à la période t , σ_t^{BS} la volatilité implicite par la formule de BS à la date t (qu'on suppose est la volatilité future entre les dates t , aujourd'hui, et T , l'échéance de l'option), donnée par la formule de (BS) et ε_t est l'erreur tel que $E[\varepsilon_t | \sigma_t^{BS}] = 0$.

Pourtant, le premier problème qui se pose pour étudier notre équation de régression est d'abord de choisir la méthode d'estimation adéquate pour l'équation (1.1). Dans la littérature antérieure, on montre que les méthodes communes pour faire ce type de régression avec des séries de volatilités ne sont pas appropriées en général. Ceci est dû au fait que dans ce type de séries temporelles, on trouve fréquemment des violations aux hypothèses des méthodes d'estimation comme ceux des Moindres Carrées. Par exemple, on trouve souvent que les erreurs dans l'équation de régression sont corrélées avec le régresseur en opposition avec l'hypothèse que $E[\varepsilon_t \cdot \sigma_t^{BS}] = 0$. De plus, des travaux récents affirment que la volatilité suit un processus de mémoire longue et qu'il existe de la cointégration de type fractionnaire entre les deux volatilités. Ceci pourrait rendre invalides certaines des méthodes les plus souvent utilisés pour estimer l'équation.

Par ailleurs, dans la présente étude, inspirée par le travail de Bandi-Perron (BP), on s'intéresse aussi à trouver si ces conditions de mémoire longue et cointégration fractionnaire se

vérifient. Le travail de BP (2004) montre que sous l'hypothèse traditionnelle de semi-martingale pour le prix des options, on aurait en effet une équation du type :

$$E[\sigma_t^R] = \alpha + \beta_1 \sigma_t^{BS} + \beta_2 \cdot PRV_t$$

où PRV est la prime de risque de la volatilité (si le risque a un prix), et $E[\cdot]$ l'espérance inconditionnel. Or, comme la prime de risque est en général corrélée avec la volatilité implicite², ne pas la prendre en compte impliquerait que les estimateurs MCO ne soient pas convergents (biais causé par le manque de variables). Ceci est aussi vrai si les séries sont cointégrées de façon fractionnaire. Donc, en suivant la démarche de leur travail, on estime les paramètres de notre équation par la méthode de FDLS. Cette approche économétrique produit des estimateurs convergents, et ce même en présence d'une (très possible) relation de cointégration fractionnaire et de l'existence d'une prime de risque de volatilité (inobservable et supposée corrélée avec le régresseur) tel que montré dans leur travail. Cette méthode consiste à estimer le paramètre $\hat{\beta}$ dans une équation comme (1.1) avec des techniques du domaine des fréquences. Plus spécifiquement, pour calculer ce paramètre, on utilise seulement une partie des fréquences autour de 0. La méthode sera appliquée sur des données de volatilités pour l'indice S&P100.

D'autre part, souvent dans des études antérieures on s'intéressait à savoir si la volatilité implicite, était un estimateur non biaisé de la volatilité réalisée³. Toutefois, dans cette étude, et de façon plus cohérente avec le modèle et les techniques d'estimation utilisées, on suit une interprétation légèrement différente des paramètres. Autrement dit, toujours d'après le modèle fourni dans le travail de BP (2004), on utilise aussi le fait que dans (1.1) α soit égale à l'espérance inconditionnelle de la prime de risque. Sous cette hypothèse, on va plutôt définir l'absence de biais comme le fait que les deux séries de volatilités bougent une par une, c'est-à-dire, que si une subi un choc, l'autre devra le subir également tôt ou tard (et donc α peut être différent de 0). De ce fait, on veut tester $H_0: \beta=1$ contre $H_1: \beta \neq 1$, mais on interprète ce test plutôt comme étant une

² Ceci est dû au fait que dans beaucoup de modèles, la prime de risque est une fonction linéaire de la volatilité sous-jacente, or la volatilité implicite est aussi une fonction de la volatilité sous-jacente. Il est donc assez intuitif que les deux variables soient corrélées. Voir l'article de BP (2004) pour plus de détails sur le sujet.

³ Surtout un grand nombre de travaux antérieurs utilisent la relation (1.1) pour tester le non-biais à court terme, ou bien comme un test sur l'efficacité des marchés d'options. On s'attendrait alors à ce que les coefficients soient $\beta=1$ et $\alpha=0$.

preuve de l'existence d'une relation de co-mouvement à long terme entre les deux séries⁴ et non comme un test formel de non-biais ni d'efficacité de marchés. L'importance de vouloir tester cette hypothèse vient de l'utilité potentielle qu'on pourrait tirer. De ce fait, on pourrait se servir de la volatilité implicite, qui est simple à calculer, pour l'utiliser comme prévision de la volatilité future à long terme, et donc épargner beaucoup de temps et d'effort qu'on utilise à faire des estimations indépendantes pour prévoir cette dernière. Ainsi, d'après BP (2004), le fait d'utiliser ces techniques, nous permet d'étudier la relation de long terme entre la volatilité implicite et la réalisée.

Ensuite, une fois que l'on a obtenu les estimés des paramètres, on se sert du résultat théorique proposé par Christensen et Nielsen (2004), (CN dorénavant) sur la distribution de $\hat{\beta}$ pour trouver (lorsque possible) ses écarts-types, valides asymptotiquement. Finalement, on fait des simulations pour trouver des intervalles de confiance pour l'estimateur de α (ainsi que de β dans un deuxième temps) et tester les hypothèses qui nous intéressent pour pouvoir en tirer des conclusions.

Ce travail est organisé de la façon suivante : la section 2 introduit au lecteur quelques définitions et notions de base sur les concepts des volatilités implicite, volatilité réalisée et les processus de mémoire longue. La section 3 contient une petite révision sélectionnée des études précédentes. Dans la section 4 on présente quelques concepts sur l'analyse des séries stationnaires fractionnellement cointégrés. Quant à la section 5, elle comporte l'analyse empirique avec une brève description des données. On présente aussi le calcul des paramètres de l'équation (1.1) à l'aide des FDLS et ses écart-types⁵ (ainsi que des intervalles de confiance calculées par simulation pour α et β) afin de tester les hypothèses. Finalement, la section 6 présente la conclusion.

⁴ Ceci implique que même si les séries s'écartent temporairement l'une de l'autre, elles devront toujours revenir l'une vers l'autre.

⁵ Seulement pour l'estimateur de β dans le cas du résultat asymptotique de CN.

2 INFORMATIONS PÉRTINENTES

On commence dans cette section par un bref survol de quelques concepts nécessaires afin de mieux comprendre les techniques utilisées dans l'étude. On présente d'abord quelques propriétés de la volatilité du point de vue financier, ensuite on rappelle la définition d'une option financière et finalement on introduit certaines notions sur les processus de mémoire longue.

2.1 VOLATILITÉ ET OPTIONS FINANCIÈRES.

Par souci de simplicité, on définit le rendement d'un actif financier quelconque, qui ne paie pas des dividendes, entre les dates $t-1$ et t comme étant $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$, où S_t est le prix de l'actif au moment t . On supposera aussi que le rendement est une variable aléatoire qui suit le processus:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

Où μ est une constante et ε_t un bruit blanc, indépendant de toute autre valeur antérieure ou postérieure. À la limite, ce processus dévient :

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma dB \quad (2.1)$$

où σ est la volatilité de l'actif, et B le Mouvement Brownien. (voir, par exemple, Figlewski, 2004). La volatilité réalisée pourrait aussi être calculée simplement comme les déviations des rendements par rapport à leur moyenne, comme :

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2} \quad \text{où} \quad \bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i$$

De plus, il faut rappeler deux caractéristiques importantes de la volatilité :

- En général, elle n'est pas constante, mais change avec le temps.
- Elle est hautement persistante (voir BP, 2004)

D'autre part, rappelons qu'une option est un instrument financier donnant à son détenteur le droit, mais pas l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un certain bien sous-jacent, à un prix

spécifié, à une date dans le futur. Il existe basiquement deux types d'options : Européennes et Américaines. La principale différence entre les deux est que les options Européennes ne peuvent pas être exercées qu'à échéance (c'est-à-dire à date T), tandis que les Américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment entre t et T . Par souci de simplicité dans cette étude on ne traite que le cas des options Européennes.

2.2 COINTÉGRATION FRACTIONNAIRE.

On définit X_t (une série temporelle), comme étant un processus covariance stationnaire, si $E[X_t] = \mu$ et la covariance entre X_t et X_{t+j} existe et est telle que $Cov(X_t, X_{t+j}) = \gamma(j)$ ne dépend pas de t (voir Robinson, 2003). On appelle une série intégrée d'ordre zéro, $I(0)$, si elle est covariance stationnaire (et a une densité spectrale finie à l'origine), et intégrée d'ordre un, $I(1)$, si lorsqu'elle est différenciée une fois (c'est à dire $x_t - x_{t-1}$), la série dévient $I(0)$ (CN, 2004). Dans le domaine de l'économétrie, on étudie souvent la relation de cointégration entre des processus stationnaires, où une combinaison linéaire des séries $I(1)$ est $I(0)$. Dans le cas bivarié par exemple, si x_t et y_t sont $I(1)$, mais qu'il existe e_t qui est $I(0)$ et un β fixe tel que $y_t = \beta'x_t + e_t$ alors on dit que y_t et x_t sont cointégrés (CN, 2004).

Si maintenant on prend un processus x_t tel que $(1-L)^d x_t = e_t$ (où L est l'opérateur de retard : $L^i x_t = x_{t-i}$), avec $e_t \in I(0)$ et $(1-L)^d$ définie par son expansion binomiale, on dit que le processus x_t est « intégré fractionnaire d'ordre d ». On dénote un tel processus $x_t \in I(d)$, avec d étant n'importe quel réel (dont 0 et 1 sont des cas particuliers), (CN, 2004). Dans ce cas, on appelle d le paramètre de mémoire longue. Plus spécifiquement, dans le cas où $0 \leq d < \frac{1}{2}$ on assisterait à un processus fractionnairement intégré qui est covariance stationnaire, mais si $\frac{1}{2} \leq d < 1$, alors le processus serait non-stationnaire.

En généralisant l'idée de cointégration, si x_t et y_t sont $I(d)$, et il existe $e_t \in I(d_e)$ avec $d > d_e$ dans l'intervalle $(0,1)$ et si on a un β fixe tel que $y_t = \beta'x_t + e_t$, alors on dit que y_t et x_t sont fractionnairement cointégrés (CN, 2004).

Si un processus covariance stationnaire x_t a une fonction de distribution spectrale continue, alors il possède aussi une fonction de densité spectrale définie par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \cdot e^{-ij\lambda} \quad (2.2)$$

pour des fréquences $-\pi \leq \lambda \leq \pi$. $f(\lambda)$ est une fonction paire non négative, périodique de période 2π au-delà de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.(Robinson, 2003).

Aussi, sous certaines conditions additionnelles, un processus intégré fractionnaire d'ordre d vérifie:

$$f(\lambda) \sim c\lambda^{-2d} \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

où c est une constante et le symbole « \sim » veut dire que le ratio des côtés gauche et droit tendent vers 1 à la limite (voir Robinson, 2003 pour plus de détails). Un tel processus est dit qu'il possède une mémoire longue parce que les autocorrélations diminuent très lentement ; en fait, à un taux hyperbolique (CN, 2004). Dans le cadre de ce travail, on va considérer des processus stationnaires de mémoire longue, dont leur paramètre d se trouve dans la zone stationnaire, c'est-à-dire, $0 \leq d < \frac{1}{2}$, parce que c'est pour ce type de séries qu'on peut appliquer le résultat de CN.

Maintenant que l'on a donné quelques notions et définitions, on peut procéder, dans la section suivante, à l'analyse de quelques résultats d'une petite sélection de travaux antérieurs faits sur le sujet.

3 REVUE DE LITTÉRATURE

Parmi la littérature élaborée au sujet de la relation entre la volatilité implicite et la volatilité réalisée, on choisit de parcourir brièvement les 3 principaux travaux sur lesquels cette étude s'est inspirée.

3.1 « FORECASTING VOLATILITY »

La première étude prise en compte dans le présent travail est celle du Stephen Figlewski, (2004), intitulée « Forecasting Volatility ». Cet article est divisé principalement en deux grandes parties : La première, où il propose différents modèles pour faire des prévisions sur la volatilité future d'un actif financier, et la deuxième où il se met à étudier, proprement dit, une relation linéaire entre les deux types de volatilité similaire à celle de (1.1) qui nous intéresse.

Dans la première partie, il utilise en fait des modèles qui essayent de prévoir la volatilité future en se basant seulement sur des données historiques, et en supposant que la volatilité est, d'un certain point de vue, constante. Dans le cas de cette dernière, il estime la volatilité historique sur une période de $t=1,2,\dots,T$ en appliquant la formule : $v^2 = \frac{\sum (r_t - \bar{r})^2}{(T-1)}$, où r_t est le rendement de la période t , \bar{r} est la moyenne arithmétique du rendement et T est la taille de l'échantillon. Ensuite il l'annualise par : $\sigma_{Hist} = \sqrt{T \cdot v^2}$. Quand il compare la volatilité prédite avec celle réalisée, il trouve de « bonnes » estimations pour des courtes périodes. Le problème ici, est que l'évidence empirique montre que l'hypothèse de la volatilité constante n'est pas vérifiée, sauf parfois, pour des courtes périodes (ce qui est consistant avec ses résultats).

Deuxièmement, Figlewski analyse les modèles de la famille ARCH pour faire les prévisions de volatilité. Dans sa discussion sur cette méthodologie, il trouve que ces modèles ont des désavantages pour prédire la volatilité, entre autres : qu'ils sont difficiles à ajuster, et qu'en général les prévisions se focalisent seulement sur une période dans le futur. De plus, les modèles

de la famille ARCH nécessitent souvent un grand nombre d'observations avant d'avoir « un bon comportement » (Figlewski, 2004).

Dans la deuxième partie de son travail, Figlewski extrait la volatilité implicite à partir des données d'options avec maturités entre 7 et 182 jours. Avec ces données, il a étudié le modèle $\sigma_R = \sigma_{IV} + \varepsilon$ avec $E(\varepsilon)=0$ et $E(\sigma_{IV}\varepsilon)=0$, où σ_R et σ_{IV} , sont les séries de volatilité réalisée et implicite, respectivement⁶. Cette équation équivaut à (1.1) et il l'utilise pour tester les hypothèses que les marchés sont efficients et que la volatilité implicite (IV) est un estimateur non biaisé de la volatilité réalisée (RV). Pour ce faire, il utilise l'équation de régression simple:

$$\sigma_R = \alpha + \beta_1 \sigma_{IV} + \varepsilon \quad (3.1)$$

pour tester l'hypothèse nulle $H_0 : \beta=1$ et $\alpha=0$. Avec plus de 17,000 données journalières sur le SP100, il calcule les volatilités avec des échéances $T=1$ mois et $T=6$ mois pour des options « at-the-money »⁷. Pour les deux séries des volatilités, il estime (3.1) par MCO; il obtient des estimés de paramètres $\alpha=0.136$ (0.012) et $\beta=0.022$ (0.05), où les chiffres entre parenthèses sont des écart-types traditionnelles de MCO. À la lumière de ses résultats, il rejette H_0 .

Après il ajuste en plus de (3.1) les modèles :

$$\sigma_R = \alpha + \beta_2 \sigma_{Hist} + \varepsilon \quad (3.2)$$

$$\sigma_R = \alpha + \beta_1 \sigma_{IV} + \beta_2 \sigma_{Hist} + \varepsilon \quad (3.3)$$

où σ_{HIST} est la volatilité historique (calculée comme montrée ci haut), mais en utilisant un sous-échantillon qui prend en compte seulement les options avec échéance à court terme ($n=852$). Il trouve les résultats ci-dessous:

⁶ Il faut noter que dans cette sous-section on a gardé la même notation originale que celle que Figlewski a dans son travail.

⁷ On dit qu'une option est « at-the-money » quand son prix d'exercice est égal au prix du sous-jacent sur lequel est émise l'option ($K=S$)

α	β_1	β_2	$R^2 \text{ adj}$
0.113 (0.017)	0.163 (0.101)	--	0.053
0.074 (0.024)	--	0.464 (0.165)	0.151
0.074 (0.024)	-0.008 (0.097)	0.473 (0.203)	0.149

SOURCE : Table III.3 (Figlewski, 2004, p111)

En se basant sur ses résultats, il conclut que, apparemment, σ_{IV} n'apporte aucune information sur σ_R , surtout si on a déjà pris en compte l'information que donne σ_{Hist} . (Figlewski, 2004). Cependant, dans une revue d'autres articles que Figlewski mentionne plus loin dans son travail, ceux-ci montrent que la σ_{IV} apporte de l'information sur la volatilité future, mais que σ_{IV} est un estimateur biaisé de cette volatilité (voir Figlewski, 2004, page 98), laissant ainsi la porte ouverte à de nouvelles études.

3.2 « LONG MEMORY AND THE RELATION BETWEEN IMPLIED AND REALIZED VOLATILITY »

Le second article est celui de Federico Bandi et Benoit Perron (2004). Dans cet article, les auteurs mentionnent qu'il existe de l'évidence empirique dans des travaux récents qui soutiennent que σ^{BS} est un estimateur non-biaisé et efficient de σ^R , lorsqu'on contrôle les trois éléments qui sont supposés « contaminer » les résultats de la régression (1.1), à savoir (voir BP, 2004) :

- Des erreurs dans les variables
- « Overlapping Data »
- Le manque de variables.

De plus, ils soulignent le fait que la volatilité soit hautement persistante. En effet, ils considèrent qu'il existe une sorte de co-mouvement de long terme entre les séries de la σ^{BS} et de σ^R , et que la relation entre elles soit du type de cointégration fractionnaire.

Bandi et Perron (2004), utilisent un modèle de valorisation d'options qui implique que les séries de volatilité possèdent de la mémoire longue⁸. Pour estimer les paramètres de l'équation (1.1) de façon cohérente avec cette hypothèse (et avec celle de la cointégration fractionnaire), ils utilisent la méthode de NBS (qui est un cas particulier de FDLs pour des fréquences autour de 0). Cette méthodologie est consistante même dans le cas de erreurs stationnaires corrélés avec une variable indépendante (BP, 2004). Dans leur travail, Bandi et Perron font l'étude des volatilités en se servant des données journalières entre Janvier 1988 et Octobre 2003, de l'indice SP100 (OEX) et d'une série de volatilités implicites calculées par le « Chicago Board Options Exchange » (CBOE), pour des options (synthétiques) « at-the-money » sur l'indice SP100 avec échéance d'un mois (la série VXO)⁹. Ils présentent une équation de régression semblable à (1.1) et font l'estimation du $\hat{\beta}$ par MCO et NBS avec différentes valeurs du paramètre de fenêtre (bandwidth) « m ». Ils font appel ensuite aux simulations (par sous-échantillonnage) pour calculer les erreurs standard des paramètres, et pour ainsi être capables de tester leurs hypothèses.

En bref, ils argumentent, appuyés sur les estimations de paramètres d qu'ils effectuent, que les processus de volatilité sont fractionnairement cointégrés, et ceci est associé aux mouvements de long terme. Autrement dit, les séries de volatilité possèdent de la mémoire longue. De même, ils trouvent des estimés de α entre -0.014 et 0.045 et de β entre 0.642 et 1.107 et des intervalles de confiance qui ne permettent pas de rejeter l'hypothèse nulle¹⁰. En conséquence, ils trouvent également que la volatilité implicite est un estimateur *approximativement* non biaisé de la volatilité réalisée (BP, 2004, page 27). Ils interprètent ce résultat plutôt comme étant une évidence de l'existence d'une relation de co-mouvement à long terme entre les volatilités, et non comme étant un test formel de non-biais à court terme, ni d'efficacité des marchés, ni de validité d'un certain modèle de valorisation d'options (BP, 2004, page 27). Finalement ils argumentent que ces résultats n'impliquent que l'existence de une relation de co-mouvements de long terme entre les deux variables.

⁸ Ce modèle est une extension d'un modèle cité dans l'article de Comte, F., L. Coutin, and E. Renault « *Affine Fractional Stochastic Volatility Models* » Mimeo, 2003, selon documenté par les auteurs.

⁹ Pour une explication bien détaillée sur la série VXO, le lecteur est dirigé vers le site web du Chicago Board Options Exchange (CBOE) au lien : <http://www.cboe.com/micro/vxo/>

¹⁰ Ils se soucient seulement de tester $H_0 : \beta=1$ VS $H_1 : \beta \neq 1$.

3.3 « ASYMPTOTIC NORMALITY OF NARROW-BAND LEAST SQUARES IN THE STATIONARY FRACTIONAL COINTEGRATION MODEL AND VOLATILITY FORECAST. »

Finalement, l'article de Bent Jasper Christensen et Morten Orregard Nielsen (2004) est très important à mentionner dans le cadre de cette étude. L'apport principal de ce texte est la distribution asymptotique des estimateurs du paramètre β dans la régression (1.1) lorsqu'on utilise la méthode de « Narrow Band Frequency Domain Least Squares (NBLS) », dans le cas des processus stationnaires de mémoire longue. Dans leur article, CN (2004) procèdent à l'analyse des processus cointégrés de mémoire longue et en font l'application empirique avec des données de volatilité financière. En général, ce type de séries ont la particularité de montrer une grande dépendance sérielle mais sans être nécessairement des processus avec racine unitaire (CN, 2004).

Pour l'application de leur théorie, les auteurs étudient un modèle où ils considèrent aussi la possibilité que les séries des données pour σ^{BS} et σ^R soient fractionnairement cointégrées. D'un côté, ils se servent des données de haute fréquence (avec des cotisations toutes les 5 minutes) pour les rendements de l'indice SP500, entre le 1 janvier 1988 et le 31 décembre 1995, pour calculer la série de volatilité réalisée. D'un autre côté, parmi les options existantes sur le SP500, ils prennent la cotisation des lundis pour le Call de plus courte maturité et qui est plus proche d'être « at-the-money », et inversent aussi la formule de (BS) pour estimer la série de volatilité implicite (voir CN, 2004, page 13 pour plus de détails).

À la différence des autres travaux, les données qu'ils utilisent pour estimer la relation (1.1) ne sont pas les séries de volatilités qu'ils ont calculé à l'origine, mais des « *log-volatilités* ». De même, ils estiment le paramètre d pour leurs données et trouvent des valeurs autour de 0.44. De ce fait, ils estiment les paramètres de (1.1) par FDLS et calculent les écarts-types de $\hat{\beta}$ en utilisant leur distribution asymptotique pour tester l'hypothèse de non-biais $H_0 : \beta=1$. Ils spécifient que, si les séries sont cointégrées de façon fractionnaire, alors cette hypothèse exprime une relation de non-biais à long terme.

D'après leurs résultats, ils ne peuvent pas rejeter l'hypothèse que les deux séries de volatilité sont fractionnairement cointégrées, ni que l'erreur de cointégration a seulement une mémoire courte. Ainsi, toutes les propriétés de mémoire longue sont communes pour la volatilité implicite et réalisée (CN, 2004 page 19). À la lumière des intervalles de confiance qu'ils trouvent, ils ne peuvent pas rejeter l'hypothèse que $\beta=1$, ce qui est cohérent avec la littérature antérieure, qui soutient que la VI est un estimateur non-biaisé dans le long terme.

Finalement, Christensen et Nielsen soutiennent leur théorie et méthodologie en affirmant que celle-ci est très utile parce qu'elle produit des « estimateurs consistants et asymptotiquement normaux, même lorsque les MCO ne sont pas convergents » (CN, 2004, 20).

3.4 QUELQUES FAIBLESES DES ÉTUDES ANTERIEURES:

En général, on peut remarquer qu'il n'y a pas de consensus sur les méthodes à utiliser pour faire de bonnes prévisions sur la volatilité.

On remarque aussi (par exemple dans le cas de Figlewski (2004)), qu'on peut trouver des fois que l'estimation $\hat{\beta}$ est statistiquement < 1 (ce qui pourrait suggérer l'existence d'une prime de risque par exemple). Dans le cas des MCO, ceci peut être dû à la manque des variables (corrélées avec σ^{BS}), ou bien qu'il existe des erreurs de mesure dans celles-ci. Ces deux phénomènes rendraient les estimations par MCO non convergents (et probablement biaisés vers 0). Sinon, l'autre problème qui peut arriver, est qu'il y ait de l'autocorrélation des erreurs, ce qui entraînerait le fait que les écart-types traditionnels de MCO soient faux.

En ce qui concerne l'étude de la relation (1.1) dans le cas spécifique de Figlewski, il a utilisé l'estimation par MCO et a rejeté H_0 , ce qui est en désaccord avec une bonne partie de la littérature existante, surtout pour la fort probable existence de cointégration fractionnaire (qui rend invalides les écart-types habituels de MCO). Une explication possible de son rejet, pourrait être le fait que les erreurs dans sa régression soient autocorrélés ou même que les séries qu'il a en

fait utilisé suivent des processus cointégrés. De ce fait, les estimations des écart-types de MCO ne sont plus valides et nous entraînent à effectuer de mauvaises conclusions.

Maintenant, après avoir parcouru une petite partie de la littérature antérieure sur le sujet, nous sommes prêts à nous consacrer davantage sur la relation qui nous intéresse, le cadre théorique qui la soutient, le modèle que l'on pose ainsi que la méthode d'estimation. Nous allons voir ceci de façon plus approfondi dans les sections suivantes.

4 ANALYSE THÉORIQUE

Après avoir vu quelques résultats sur des travaux antérieurs, on va procéder à la présentation du cadre théorique sur lequel se base cette étude. Il est important de souligner que la grande majorité des concepts, explications et idées qui suivent sont prises surtout des travaux de Bandi-Perron (2004) et de Christensen-Nielsen (2004). Tel que mentionné au sommaire, ce travail est simplement une ré-estimation du modèle de BP avec des données mises à jour, mais en ajoutant le résultat théorique de CN.

4.1 LE MODÈLE

Tel que proposé par BP, on suppose un modèle de volatilité stochastique pour le rendement des actifs, tel que celui de l'équation (2.1). Rappelons nous que le prix théorique d'une option d'achat (Call) européenne C , avec un prix d'exercice K et de maturité au temps T (mesuré en années) sur un sous-jacent ayant un prix de S_t à la date t , est donné selon la formule de Black-Scholes par¹¹ :

$$C(S, K, T, r, \sigma) = S \cdot \Phi(\delta_1) - e^{-rT} K \Phi(\delta_2) \quad (4.1)$$

$$\text{avec } \delta_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \delta_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où Φ est la f.d.p. d'une Loi Normale Centrée Réduite, r le taux d'intérêt sans risque et σ la volatilité du rendement du sous-jacent entre les dates t et T , la « vie » de l'option. De ce fait, si on peut observer le prix d'un Call sur le marché, C^{Mkt} , on peut inverser (4.1) de façon numérique pour trouver la valeur de σ qui égalise le prix théorique avec le prix sur le marché. Autrement dit, c'est la valeur σ^{BS} tel que $C(S, K, T, r, \sigma^{BS}) = C^{Mkt}$. Cette valeur sera donc la volatilité implicite de l'option. On peut répéter ceci plusieurs fois pendant une période donnée et construire une série temporelle de volatilités implicites σ_t^{BS} pour chaque date t . De même, on peut construire une

¹¹ Voir Hull, 2003 pour plus de détails sur la formule de BS et pour un excellent livre de textes sur les options.

autre série pour la volatilité réalisée σ_t^R pour chaque date t simplement en calculant l'écart-type des S_t pendant la période écoulée entre t et $t+T$. À partir de ces deux séries il est possible de tester la relation linéaire (1.1) qu'on reproduit ci-dessous:

$$\sigma_t^R = \alpha + \beta \sigma_t^{BS} + e_t$$

D'après les articles de BP (2004), de CN (2004) et de la littérature empirique sur laquelle eux même se sont basés¹², on soupçonne que la volatilité soit persistante, et qu'il est fort probable que la relation entre les deux séries temporelles soit de cointégration fractionnaire¹³. Si c'est le cas, l'estimateur MCO pour β peut ne pas être convergent et donc la méthode de « Narrow band Least-Squares » est celle qu'on doit choisir pour estimer les paramètres, parce qu'elle produit des estimateurs convergents (CN, 2004). C'est cette dernière qu'on décrit brièvement par la suite (d'après CN).

Considérons d'abord l'équation de régression de la volatilité réalisée ($y_{t,T}$) sur la volatilité implicite (x_t):

$$y_{t,T} = \alpha + \beta \cdot x_t + e_{t,T} \quad (4.2)$$

Ensuite, en suivant l'idée et les hypothèses de CN omises ici pour des questions de simplicité et de brièveté (voir les suppositions A, B, A', B', C et D de CN, 2004, pages 6-9 pour tous les détails), on définit la Transformée de Fourier Discrète d'une série temporelle observée $\{x_t, t = 1, \dots, n\}$ aux fréquences harmoniques $\lambda_t = (2\pi t)/n$ comme:

$$w_x(\lambda_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n x_t e^{it\lambda} \quad (4.3)$$

Ainsi, si y_t est une autre série temporelle observée, la matrice du périodogramme croisé entre x_t et y_t est donnée par :

$$P_{xy}(\lambda_t) = w_x(\lambda_t) \cdot \overline{w_y(\lambda_t)} \quad (4.4)$$

¹² On peut mentionner entre autres: Andersen T.G. et al. 2001 « The distribution of realized stock return volatility » Journal of Financial Economics 61, 43-76 (cité dans CN).

¹³ Pour tester ceci, on fait une estimation du paramètre de mémoire longue d .

où $\overline{w_y(\lambda_t)}$ est le conjugué complexe de $w_y(\lambda_t)$. (Voir CN, 2004, page 7). Subséquemment, le co-périodogramme discrète est donné par :

$$\hat{F}_{xy}(l, m) = \frac{2\pi}{n} \sum_{t=l}^m P_{yx}(\lambda_t) \quad (4.5)$$

où m est le choix de longueur de fenêtre utilisée pour les séries.

Finalement, l'estimateur FDLS de β dans la régression (4.2) est défini par :

$$\hat{\beta}_m = \hat{F}_{xx}^{-1}(1, m) \cdot \text{Re} \langle \hat{F}_{xy}(1, m) \rangle \quad (4.6)$$

où $\text{Re}(x)$ représente la partie réel de x , avec $m < n/2$. Si $\frac{1}{m} + \frac{m}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ alors $\hat{\beta}_m$ est l'estimateur « Narrow-Band Frequency Domain Least-Squares (NBLS) » (CN, 2004). Ainsi, on peut s'en servir pour calculer par la suite la valeur de l'estimateur de α grâce à la relation familière de MCO (voir BP, 2004):

$$\hat{\alpha}_m = \bar{y} - \hat{\beta}_m \bar{x} \quad (4.7)$$

Dans leur article, CN (2004) dérivent la distribution asymptotique de $\hat{\beta}_m$ dans le cas de séries stationnaires avec cointégration fractionnaire. Leur résultat théorique (dans le cas de deux variables) est le suivant :

Théorème : Sous certaines hypothèses (voir la théorème 2 dans CN, 2004 pour plus de détails), dans le cas simple de deux variables $x_t \in I(d_x)$ et $e_t \in I(d_e)$, (avec $d_x > d_e$) la distribution asymptotique pour $\hat{\beta}_m$ défini en (4.6) est donnée par :

$$\sqrt{m} \lambda_m^{d_e - d_x} (\hat{\beta}_m - \beta) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{g_e (1 - 2d_x)^2}{2g_x (1 - 2d_x - 2d_e)} \right) \quad (4.8)$$

où g_x et g_e sont les variances de long terme de x_t et e_t respectivement (voir CN, 2004, page 10, pour les détails sur ces variables).

Preuve : Voir l'Annexe de l'article de Christensen-Nielsen.

Avec ces outils, on essaye de tester l'hypothèse que la volatilité implicite dans les prix d'options est une prévision non-biaisée à long terme de la volatilité future réalisée. Ainsi, après l'estimation de (1.1), et tel que commenté dans l'introduction, on devrait trouver que la valeur de β n'est pas statistiquement différente de 1. Par conséquent, l'hypothèse qui nous intéresse à tester est $H_0 : \beta = 1$ contre $H_1 : \beta \neq 1$.

Une fois que l'on a établi le cadre théorique du modèle qui a été effectuée, on va procéder à l'élaboration de l'analyse empirique dans la section suivante.

5 ANALYSE EMPIRIQUE

En s'appuyant sur la théorie précédente, on teste l'existence d'une relation de cointégration fractionnaire entre la volatilité implicite et réalisée dans le cas particulier de nos données. Ceci se fera, en suivant l'analyse faite par Bandi-Perron (2004), tout en mettant à jour leurs données. Ce travail suit basiquement les mêmes étapes que celui élaboré par BP, et celles-ci sont décrites par la suite.

5.1 SPÉCIFICATION DU MODELE :

Premièrement, dans la présente étude on s'intéresse à savoir si les volatilités sont intégrées de type fractionnaire (ainsi que son ordre d'intégration) et plus spécifiquement si elles sont cointégrées. Dans ce cas, on doit utiliser une technique qui nous donne des estimateurs convergents pour l'équation de régression (1.1) pour des séries de volatilité. Encore une fois, la relation qui nous intéresse est :

$$\sigma_t^R = \alpha + \beta \sigma_t^{BS} + \varepsilon_t$$

Deuxièmement, on calculera des écart-types appropriés pour les estimateurs du paramètre β afin de former les intervalles de confiance et de pouvoir tester l'hypothèse qui nous intéresse, mentionné à la fin de la section 4.1. À cette fin, on utilisera le résultat asymptotique de CN pour les écart-types de β (lorsque possible) et par simulation pour α .

5.2 LES DONNÉES:

D'abord, on commence par décrire brièvement nos données et par vérifier les propriétés de mémoire longue et de cointégration qu'elles présentent.

On utilise des données journalières de l'indice boursier S&P100 (série OEX) et de la volatilité implicite dans un type d'options sur celui-ci (série VXO). Cette dernière, est la volatilité

implicite pour des options synthétiques¹⁴ « at-the-money » sur le OEX (calculée par le CBOE), avec échéance d'un mois. Bandi et Perron utilisent aussi cette dernière série parce qu'on suppose que « cette série est moins affectée par des problèmes qui contaminent la mesure de la volatilité implicite standard extraite des contrats de OEX »¹⁵. La période couverte est de Janvier 1988 à Juin 2005.

On prend en compte une période qui ne contient pas des données précédentes à 1988 car, même s'il y a des données disponibles depuis 1986, les données du mois d'octobre 1987 et des celles postérieures sont trop affectées par les effets du Crash boursier de ce mois. D'ailleurs, Christensen et Prabhala (CP) ont trouvé qu'il y a eu une hausse importante et inhabituelle de la volatilité à ces dates et ce, même pendant quelques mois subséquents, surtout pour la volatilité implicite (CP, 1998, page 19)¹⁶

Pour les séries de volatilité avec lesquelles on teste (1.1), on utilise des observations *mensuelles*. Pour ce faire, les données journalières du VXO (qu'on utilise comme proxy pour la volatilité implicite) sont multipliées par le facteur constant $\left(\frac{252}{365}\right)^{1/2}$ comme dans BP (2004) pour prendre en compte la différence entre les jours quand les marchés sont ouverts et ceux du calendrier. Ensuite, pour construire notre série de volatilité implicite, σ^{BS} , on a pris les données du dernier jour du mois pour chaque mois.

De surcroît, on utilise la même formule qu'eux pour les calculs de la volatilité réalisée pour le OEX sur les 30 jours restants du calendrier:

$$\sigma_{t,30}^R = \sqrt{\frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} 252 \cdot r_{t+j}^2} \quad (5.1)$$

avec $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$, où S_t est l'indice OEX journalier à la date t . Pour la série de volatilité réalisée, σ^R , les données calculées par (5.1) sont les estimations de la volatilité réalisée (future) de l'indice SP100 sur les 30 jours restants de la vie de l'option.

¹⁴ C'est-à-dire, qu'elles ne sont pas en réalité transigées dans les marchés. Le lecteur est référé au site internet du CBOE (<http://www.cboe.com/micro/vxo>) pour plus de renseignements sur ce type de mesures.

¹⁵ Bandi et Perron (2004, page 9)

¹⁶ Voir aussi note de bas de page dans Bandi-Perron (2004, page 12).

Ainsi, on construit deux séries avec les données mensuelles qui comptent un total de 211 observations, non superposées chacune. Le Tableau 1 montre un résumé des statistiques descriptives pour σ^R , σ^{BS} ainsi que pour deux séries « extras » (en suivant l'exemple de Bandi et Perron (2004)), une qui est la série de différences $\sigma^R - \sigma^{BS}$, et l'autre, qui donne les résidus de la régression de σ^R sur σ^{BS} calculée par MCO.¹⁷

D'après le Tableau 1, on peut noter que les séries σ^{BS} et σ^R sont asymétriques vers la droite et sont très aplaties, ce qui est consistant avec des études antérieures sur la volatilité (BP, 2004).

5.3 LES RESULTATS EMPIRIQUES:

Tout d'abord, on analyse la persistance des données ainsi que la possibilité que les séries soient intégrées fractionnairement (et même, qu'il y ait une relation de cointégration fractionnaire). Pour ce faire, on calcule d'abord les estimations du paramètre d'intégration fractionnaire (de mémoire longue) d , pour chaque série, en utilisant les estimations de Geweke et Porter-Hudak (GPH) et de Andrews et Guggenberger (AG)¹⁸. Afin de calculer les estimations de d on a besoin de spécifier des choix de longueur de fenêtre, m , qui détermine la localisation de l'estimateur. Dans cette étude on fait varier m entre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et $\lfloor n^{0.8} \rfloor$, comme c'est fait par (BP) (où « $\lfloor a \rfloor$ » veut dire la part entière de a), autrement dit, $14 \leq m \leq 72$. Les résultats sont présentés de façon graphique dans la Figure 1.

Avant de continuer, il est pertinent de mentionner que les estimateurs de GPH et de AG, ont l'inconvénient d'être instables pour des petites tailles d'échantillon¹⁹. Néanmoins, il est connu que l'estimation par GPH est convergente dans le cas non-stationnaire : $1/2 < d < 1$ tel que mentionné par BP dans son travail.

¹⁷ Les estimateurs des coefficients dans cette régression doivent être vus avec prudence, car il se peut que pour nos données, ils ne soient pas convergents.

¹⁸ Ceci se fait en suivant la méthode utilisée par Bandi et Perron (2004). Voir pages 10-12 de leur travail pour plus des détails sur ces estimateurs.

¹⁹ Dernièrement, (BP) ont ajouté dans leur étude un autre estimateur pour d : l'estimateur de Whittle, qui possède la caractéristique d'être plus efficient asymptotiquement que celui de GPH, mais il n'est pas inclus dans cette étude.

Si jamais il existe une relation de cointégration fractionnaire, rappelons-nous (de la section 2.2) que dans ce cas, les paramètres de mémoire longue de la volatilité implicite et réalisée devraient être égaux l'un à l'autre, et celui des erreurs devrait être plus petit. Autrement dit, $d > d_e$, où d est le paramètre pour la série de volatilité implicite (et réalisée) et d_e celui pour les erreurs dans la régression. D'après la Figure 1, et malgré l'instabilité des estimateurs, ceci semble être le cas, avec estimations autour de 0.6 et autour de 0.15 pour les valeurs de d et de d_e respectivement.

Ainsi, on va estimer notre modèle économétrique (1.1) sous l'hypothèse de l'existence de cointégration fractionnaire entre les deux séries de volatilité. De ce fait, on suppose (basés sur les résultats empiriques de la Figure 1) que les paramètres de mémoire longue d et d_e sont tels que $d > d_e$ avec $0 < d_e < 1/2$. Le Tableau 2 présente quelques estimés de d pour des choix sélectionnés de m pour les séries de volatilité réalisée et implicite. Ces valeurs pour d semblent soutenir l'idée que les séries de volatilité suivent des processus d'intégration fractionnaire.

En conséquence, après avoir trouvé une évidence de cointégration fractionnaire, il faut utiliser un modèle d'estimation économétrique qui la prenne en compte. Donc, selon ce qui s'est présenté dans la section 4.1, on doit utiliser la méthode de NBLs en se servant de (4.6) et (4.7) pour l'estimation des paramètres dans (1.1). On utilise cette méthode parce que, tel que mentionné précédemment, l'estimateur NBLs pour β est robuste en présence de cointégration fractionnaire. De plus, ces estimateurs peuvent avoir des taux de convergence (vers leurs vrais valeurs) plus rapides que d'autres méthodes de Moindres Carrés selon Bandi et Perron (2004, page 19).

Comme on peut le remarquer d'après (4.6), pour réaliser l'estimation des coefficients, on doit faire aussi des choix du paramètre de fenêtre, m pour obtenir des différentes valeurs de $\hat{\beta}_m$. Dans le cas de notre estimation des bêta, on a utilisé des valeurs de m entre $\lfloor n^{0.25} \rfloor = 3$ et $\lfloor n/2 \rfloor = 105$ d'après les estimations faites par BP (2004) qui utilisent ces mêmes bornes dans leur travail. On reporte ici, par souci de simplicité, seulement des résultats sélectionnés pour certaines valeurs de m .

Ensuite, ayant estimé les $\hat{\beta}_m$, on procède à calculer leurs écart-types en s'appuyant sur le résultat asymptotique (4.8) lorsque l'estimation du paramètre d_x (qui dénote ici la valeur de d pour la série de volatilité implicite) nous le permet. Ceci n'est possible que lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées : $d_x < 0.5$ et aussi $d_x + d_e < 0.5$. Ainsi, avec des séries stationnaires, lorsque ces deux conditions nécessaires pour le résultat asymptotique de CN (2004) sont vérifiées, la loi asymptotique pour les estimateurs NBLs de $\hat{\beta}_m$ s'applique directement. Pourtant, parfois on fait face au problème que l'estimation de $d_x > 0.5$ (et donc, la somme $d_x + d_e$ est aussi plus grande en général que 0.5). Dans ces cas, lorsqu'on utilise la formule de (4.8) pour calculer la variance, celle-ci pourrait devenir négative. Alors, pour contourner ce problème, dans cette étude, on a inclut la condition que, lorsque l'estimé de $d_x > 0.5$, on borne sa valeur à être 0.47. De même, si la somme $d_x + d_e > 0.5$, on limite la valeur d_e à être égale à $0.48 - d_x$. Ainsi, les conditions sont vérifiées et on procède à calculer les écart-types. Celles-ci doivent être faites pour des différents choix de fenêtre « m_e » pour chaque fenêtre m dans l'intervalle [3, 105]. Le Tableau 3 reporte quelques résultats sélectionnés pour les $\hat{\beta}_m$ ainsi que les écart-types calculés en se servant de résultat asymptotique seulement, pour $m_e = n^{0.7}$ en suivant l'exemple de CN.

À partir des résultats présentés dans ce Tableau, on peut voir qu'en ce qui concerne les estimations par MCO²⁰ (qui sont un cas spécial de NBLs lorsque $m=n-1$), les données semblent nous inciter (à peine) à *rejeter* l'hypothèse nulle sur β . Autrement dit, avec les données utilisées ici, il semblerait que la volatilité implicite ne soit pas un estimateur non-biaisé de la volatilité réalisée, parce que la valeur de bêta serait plus petite que 1 selon l'intervalle de confiance, calculées de façon usuelle, à 95% (même si alpha semble être bien 0).

Cependant, les estimateurs de MCO risquent de ne pas être convergents, surtout dans les cas où $d < 1/2$, et si les erreurs sont corrélées avec la variable indépendante²¹. En conséquence, il faut prendre plutôt en compte les estimations faites par NBLs. En observant ces estimations de

²⁰ Il est important de souligner que dans le Tableau 5 on ne présente pas les erreurs standard pour les estimateurs du alpha dans le cas de estimation par NBLs. Ceci est dû au fait que CN (2004) ne nous donnent pas la distribution pour ce paramètre, et d'ailleurs dans leurs résultats empiriques, ils ne le reportent non plus.

²¹ Même si ici les séries semblent être dans la zone non-stationnaire parce que $d > 0.5$ et MCO pourrait être convergent, il faut être prudent avec ces résultats.

$\hat{\beta}_m$ (dans le Tableau 3) pour des différentes valeurs de m , il semble bien que sa vraie valeur puisse être égale à 1. Même si les estimations varient entre 0.91 et 1.09, on peut observer, avec leur erreur standard, que la plupart des intervalles de confiance à 95% incluent la valeur $\beta=1$. Par conséquent, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle $H_0: \beta = 1$ avec un niveau de confiance de 95%.

Il est important de souligner une différence sur l'interprétation de la valeur de β dans notre modèle. Tel que considéré dans les travaux de Figlewski (2004), Christensen et Nielsen (2004), et d'autres travaux non cités ici, on veut tester en général si la valeur de β est égale à 1, et donc de tester si la volatilité implicite est un estimateur non-biaisé de la réalisée. Pourtant, une approche un peu différente est offerte par Bandi et Perron. Dans leur étude, ils interprètent le teste de $\beta = 1$ plutôt comme étant une preuve de l'existence de co-mouvements de long terme entre les deux séries, et non pas comme un test formel d'absence de biais à court terme (BP, 2004). Ceci est dû surtout à la présence de la mémoire longue dans nos séries ainsi que de la cointégration fractionnaire.

De retour à l'analyse des résultats, on remarque que jusqu'ici on n'a pas calculé les erreurs standard pour $\hat{\alpha}_m$, puisque nous n'avons pas sa loi asymptotique. Même s'il est vraisemblable d'après les données que la vraie valeur de α puisse être 0 (pour l'estimateur MCO c'est une claire possibilité), il serait très audacieux d'affirmer que c'est vraiment le cas.

D'un autre côté, étant donné qu'on est incertain au sujet de la vraie valeur de d_x et qu'il est possible que les séries se trouvent dans la zone non-stationnaire, le résultat asymptotique ne s'appliquerait pas. C'est d'après cette motivation que, en reprenant les techniques utilisées par BP, on calcule aussi les intervalles de confiance pour les estimateurs de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ par le biais du sous-échantillonnage (c'est-à-dire, on calcule les estimateurs pour tous les sous-échantillons d'une taille donnée²²), qui possède quelques avantages par rapport au « bootstrap » traditionnel²³.

²² À titre d'exemple, si la taille du sous échantillon est de 50 observations, on calcule NBLs avec les observations 1 à 50, ensuite de 2 à 51, 3 à 52 et ainsi de suite jusqu'à la fin. Si on suppose que les observations étaient indépendantes et identiquement distribuées, on pourrait avoir recours à la simulation pour tirer les sous échantillons et faire de l'inférence.

Les résultats, avec des intervalles de confiance à 95% sont présentés pour des choix sélectionnés de m dans le Tableau 4. À partir de ces résultats, on constate que pour n'importe quel choix de m , tous les intervalles de confiance pour $\hat{\beta}$ contiennent la valeur 1, ce qui nous empêche de rejeter H_0 . En ce qui concerne $\hat{\alpha}$, le rejet ou non d'une hypothèse nulle telle que $H_0: \alpha=0$ sur ce paramètre, dépend du choix de la fenêtre. Toutefois, même si on le rejetait, on obtiendrait très possiblement des valeurs pour alpha proches de 0. Dans ce cas, même si $\alpha \neq 0$, ceci impliquerait l'existence d'une prime de risque de volatilité tel que mentionné dans l'introduction.

Par ailleurs, en analysant les résultats des Tableaux 3 et 4, on peut observer quelques caractéristiques de ces résultats (surtout pour $\hat{\beta}_m$). Premièrement, dans le cas de la simulation, les intervalles de confiance sont asymétriques, dans le sens que l'estimation ponctuelle de β se trouve plus proche de l'extrême gauche de l'intervalle, tandis que les intervalles faits par le résultat de CN doivent être symétriques (l'estimation de β se trouve centrée dans l'intervalle). Deuxièmement, on peut voir que les intervalles faits par simulation sont plus larges que ceux calculés par la loi asymptotique. De plus, on peut remarquer une tendance à la baisse de $\hat{\beta}_m$ avec m . De même, les intervalles par simulation tendent à se déplacer vers la gauche au fur et à mesure que le choix de fenêtre augmente.

Ainsi, même s'il est évident qu'il existe une relation linéaire étroite entre la volatilité implicite et la volatilité réalisée, au moins avec les données utilisées dans cette étude, on ne peut pas donner une réponse définitive à la question, à savoir, si σ^{BS} peut être invariablement utilisée pour faire des pronostiques sur σ^R et que cette prévision soit en fait non-biaisée. Le fait d'arriver à des conclusions différentes sur la vraie valeur de β dépend en partie de la méthode utilisée pour l'estimation (MCO ou NBLs). De plus, même avec les estimateurs de NBLs, le choix des différentes valeurs de m pourraient nous induire à changer nos conclusions.

²³ Ils mentionnent entre autres avantages du sous échantillonnage, qu'on n'a pas besoin de connaître le taux de convergence de la loi asymptotique, mais qu'on peut l'estimer, ce qui est particulièrement intéressant car on a de l'incertitude à propos du fait, si on se trouve dans la zone stationnaire ou non- stationnaire.

6 CONCLUSION

Tel que proposé dans l'introduction de cette étude, notre objectif était d'essayer de répondre à la question largement posée afin de déterminer si la volatilité implicite (*ex-ante* σ^{BS}) des options sur les actifs financiers, peut être utilisée comme prévision consistante de la volatilité réalisée (σ^R) future (*ex-post*) du sous-jacent en question, et si celle-ci est non-biaisé lorsqu'on fait des prévisions à long terme. De fait, l'hypothèse qu'on a testé est que, effectivement σ^{BS} et σ^R ont une relation de co-mouvement dans le long terme dans le sens de l'évolution un par un des deux processus, et même si elles s'écartent pendant un peu de temps, elles reviennent l'une envers l'autre. La question est intéressante parce que, si effectivement la volatilité implicite est consistante comme estimateur dans le long terme, on peut s'en servir afin de calculer des prévisions pour la volatilité future et épargner beaucoup de temps et d'effort consacré à l'analyse et à la prévision des volatilités. L'autre question à laquelle on a tenté de répondre est de savoir si les séries de volatilité suivent des processus fractionnairement intégrés et si la relation linéaire entre elles est du type de cointégration fractionnaire, question pour laquelle les données semblent nous donner une réponse affirmative.

En ce qui concerne l'intégration fractionnaire, au moins pour les données et la période considérée, il semble bien que les deux séries suivent des processus de mémoire longue et on estime que leur paramètre d'intégration fractionnaire est de l'ordre de 0.65. De plus, on a trouvé qu'il est bel et bien possible que les deux séries soient fractionnairement cointégrées. Ceci est cohérent avec des études récentes, et le fait empirique stipulant que la volatilité est hautement persistante.

D'un autre côté, d'après l'absence de biais de σ^{BS} , et selon les résultats empiriques obtenus, mentionnés dans la section précédente, on voit qu'il nous est impossible de donner une réponse définitive à cette question, du moins pour la relation à court terme.

Il faut aussi prendre en compte que l'incertitude qu'on a par rapport à la vraie valeur de d , peut rendre invalide une méthode d'estimation ou une autre, ceci est dû au fait que les méthodes de GPH et AG pour estimer d sont très sensibles à la taille de l'échantillon. Nos estimations se

trouvent autour de 0.6, et la limite entre la zone stationnaire et non-stationnaire est 0.5, donc il faut faire attention aux possibles déviations des ces estimés par rapport à leur vraie valeur.

Néanmoins on a trouvé une certaine évidence (pour plusieurs cas) que, en utilisant une méthode robuste à la cointégration fractionnaire, la volatilité implicite est effectivement un estimateur non-biaisé à long terme pour la volatilité réalisée, et on ne rejette même pas $H_0: \beta = 1$ avec un niveau de confiance de 95%.

Finalement, parmi les suggestions que l'on pourrait faire pour des recherches subséquentes, est qu'il est important prendre en considération des méthodes pour estimer d qui soient plus précises (et robustes aux petites tailles d'échantillon) pour avoir plus de certitude quant à déterminer si les processus de volatilité de mémoire longue se trouvent dans la zone stationnaire ou non stationnaire.

Dans le cas de l'estimation par NBLS, il serait important de pouvoir estimer (sans les simuler) les erreurs standard de α avec une distribution asymptotique. Ceci nous permettrait de tester statistiquement les hypothèses sur ce paramètre et pouvoir donner des conclusions plus fermes sur le biais (ou non) de σ^{BS} comme prédicteur de σ^R à court terme. De plus, lorsqu'on utilise cette méthode, il serait aussi important de calculer les intervalles de confiance proposées par Robinson et Marinucci (2003), pour le cas des séries fractionnairement cointégrées dans la zone non-stationnaire, tel que proposé par CN (2004) et BP (2004).

ANNEXE

TABLEAU 1

Statistiques descriptives pour les séries de σ^{BS} , σ^R , la série différence et la de résidus de MCO

	Moyenne	Ecart type	Asymétrie	Kurtosis
Implicite σ^{BS}	0.1727	0.0583	0.9198	3.9630
Réalisée σ^R	0.1557	0.0684	1.2470	4.5786
Différence $\sigma^{BS} - \sigma^R$	-0.0171	0.0457	1.1540	6.3528
Résidus OLS	0.0000	0.0451	1.4882	6.9193

TABLEAU 2

Estimations sélectionnées pour le paramètre de mémoire longue d .

	Realized		Implied	
	GPH	AG	GPH	AG
m=14	0.575 (0.230)	0.969 (0.430)	0.887 (0.230)	0.520 (0.430)
m=24	0.630 (0.162)	0.878 (0.282)	0.676 (0.162)	0.906 (0.282)
m=42	0.552 (0.116)	0.741 (0.191)	0.629 (0.116)	0.786 (0.191)
m=72	0.573 (0.088)	0.629 (0.135)	0.695 (0.088)	0.615 (0.135)

Les chiffres entre parenthèses indiquent les erreurs standard

TABLEAU 3

Estimations sélectionnées des paramètres de la régression $\sigma_t^R = \alpha + \beta\sigma_t^{BS} + e_t$

		alpha	beta	R2
OLS		0,003 (0,009)	0,881 (0,053)	0,564
	m=5	-0,034	1,097 (0,016)	
	m=8	-0,024	1,039 (0,023)	
NBLS	m=14	-0,023	1,032 (0,024)	
	m=24	-0,021	1,024 (0,026)	
	m=42	-0,008	0,947 (0,033)	
	m=72	-0,002	0,911 (0,038)	

Les chiffres entre parenthèses indiquent les erreurs standard calculées avec le résultat asymptotique, en utilisant la valeur de $n^{0.7}$ pour les fréquences λ tel que fait par Christensen and Nielsen dans son article.

TABLEAU 4

Estimations sélectionnées des paramètres de la régression $\sigma_t^R = \alpha + \beta\sigma_t^{BS} + e_t$

		alpha	beta
OLS		0.003 (0.009)	0.881 (0.053)
	m=5	-0.034 (-0,057,-0,007)	1.097 (0,9919,1,2434)
	m=8	-0.024 (-0,045,0,0073)	1.039 (0,9088,1,1737)
NBLS	m=14	-0.023 (-0,055,-0,009)	1.032 (0,9666,1,1759)
	m=24	-0.021 (-0,033,-0,000)	1.024 (0,9217,1,0932)
	m=42	-0.008 (-0,024,0,0042)	0.947 (0,8841,1,0314)
	m=72	-0.002 (-0,028,0,0012)	0.911 (0,8863,1,0346)

Les chiffres entre parenthèses indiquent les intervalles de confiance à 95% calculées par simulation en utilisant la méthode suivie par Bandi et Perron

FIGURE 1

Estimations du paramètre de mémoire longue (d)

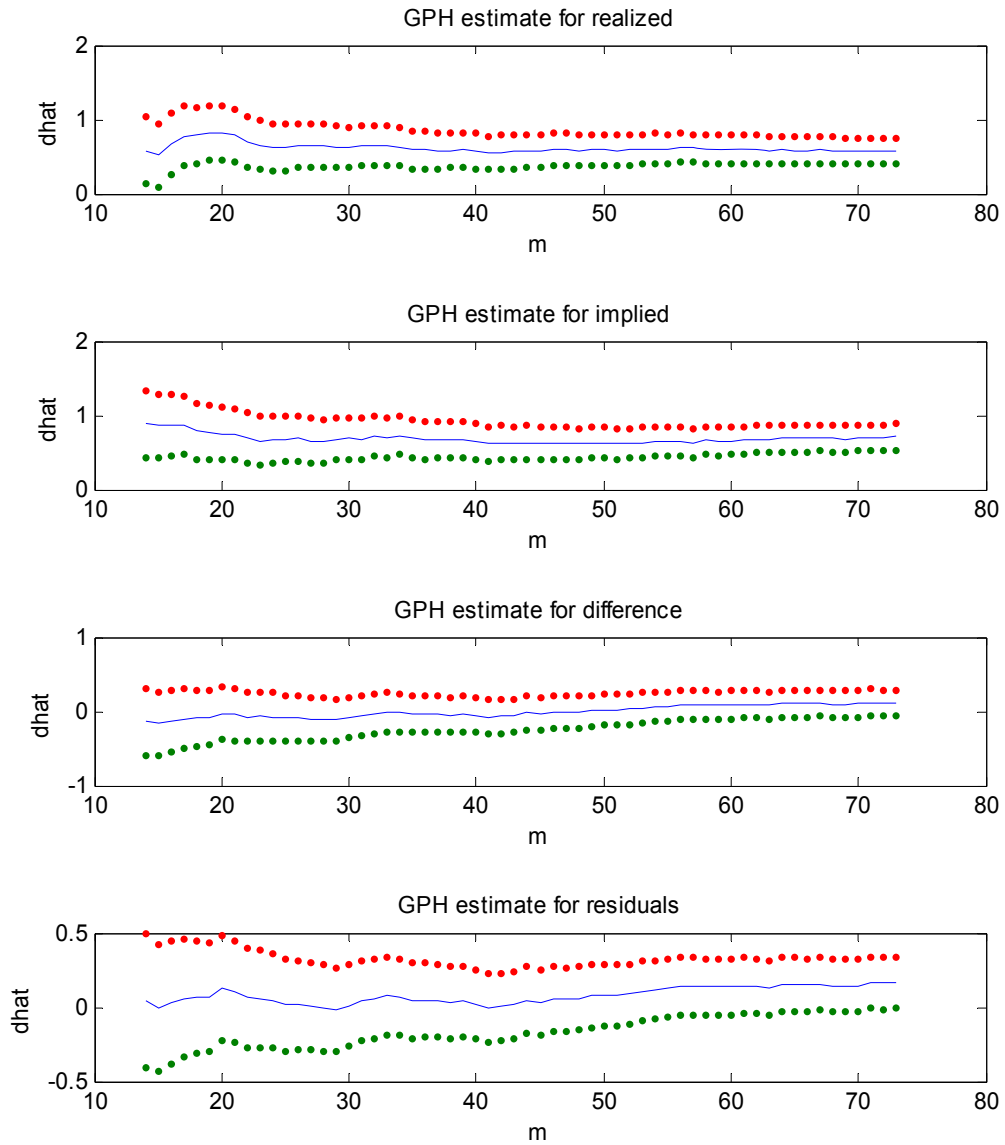
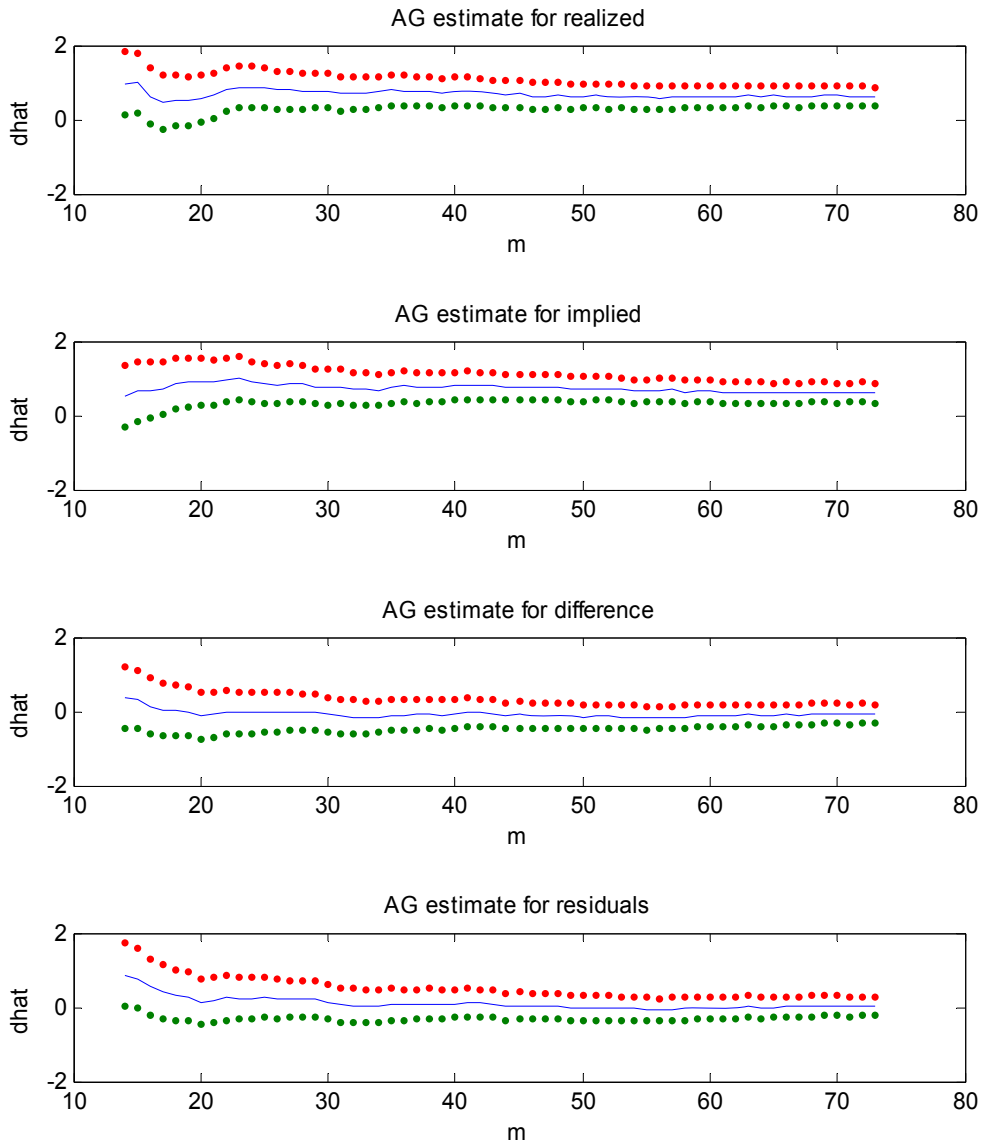


FIGURE 1 (continuation)

Estimations du paramètre de mémoire longue (d)



RÉFÉRENCES.

- Bandi F.M. et B. Perron, (2004). “Long memory and the relation between implied and realized volatility”, Miméo. University of Chicago et Université de Montréal.
- Christensen B. J. et M. O. Nielsen, (2004) “Asymptotic Normality of narrow-band least squares in the stationary fractional cointegration model and volatility forecasting” *Journal of Econometrics*, article in press.
- Christensen, Bent Jesper, (2003) “Financial Risk, Volatility Modelling and Econometric Inference”, Papier de Travail. Université de Aarhus.
- Christensen B. J. et N.R. Prabhala, (1998) “The relation between implied and realized volatility”, *Journal of Financial Economics*, vol 50, 125-150.
- Figlewski, Stephen, (2004) “Forecasting Volatility”, Miméo. NYU Stern School of Business.
- Gatfaoui, Hayette, *Rôle et Impact de la Volatilité dans le Pricing d'Options et de Produits Dérivés*, Editions Publibook Universités, 2004.
- Hull, John. *Options, Futures & other Derivatives*, 5-ième édition, Prentice-Hall, N.J., 2003.
- Robinson, Peter M., éditeur. “Long-memory Time Series”, dans *Time Series with Long Memory*, sous l’édition de P.M. Robinson, Oxford University Press, London, 2003.

Explication sur l’indice VXO, en ligne: <http://www.cboe.com/micro/vxo/>

Source des données: <http://www.cboe.com/micro/vix/historical.aspx>