Université de Montréal

LES ESPACES H^p ET LEURS DUAUX

par

Pierre-Olivier Rathé

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

août 2001

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

LES ESPACES H^p ET LEURS DUAUX

présenté par

Pierre-Olivier Rathé

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Véronique Hussin

(président-rapporteur)

Paul M. Gauthier

(directeur de recherche)

Richard Fournier

(co-directeur)

André Giroux

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

27 septembre 2001

« Le mathématicien n'étudie pas les mathématiques pures parce qu'elles sont utiles; il les étudie parce qu'il y prend plaisir, parce qu'elles sont belles. »

Henri Poincarré

SOMMAIRE

Ce mémoire se veut une introduction à la théorie des espaces de Hardy ou espaces H^p sur le disque unité du plan complexe et à la dualité de ces espaces. Cette théorie est un mélange harmonieux d'analyse complexe, d'analyse fonctionnelle ainsi que de théorie de la mesure.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, monsieur Paul M. Gauthier, d'abord pour m'avoir transmis sa passion pour l'analyse complexe lors de mon cours de premier cycle, ensuite pour son apport incessant et précieux en conseils, documentations et explications depuis l'instant où il m'a fait l'honneur de m'accepter comme étudiant.

Je remercie aussi mon co-directeur, monsieur Richard Fournier de m'avoir guidé durant mes travaux et surtout durant la rédaction de ce mémoire. Ma tâche en a été grandement facilitée.

Je voudrais aussi remercier les co-administrateurs du laboratoire informatique, Alexandre Girouard et Nicolas Beauchemin pour leur aide avec Unix, $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$, emacs, etc.

Finalement, je tiens à remercier spécialement mes parents qui m'ont toujours apporté leur soutien et leur encouragement dans mon cheminement scolaire comme dans la vie en général.

Table des matières

Table des figures

INTRODUCTION

L'étude des espaces H^p remonte au début du XIX^{e} siècle. Les bases de cette théorie ont été jetées par des mathématiciens tels que Hardy, Littlewood, Privalov, F. et M. Riesz, Smirnov et Szegö.

À l'origine, les travaux consistaient surtout à trouver les propriétés des fonctions des ensembles H^p.

Le développement de l'analyse fonctionnelle au cours du dernier siècle a suscité un intérêt pour l'étude des espaces H^p comme espaces linéaires. Cette nouvelle approche a soulevé toute une gamme de questions et de problèmes tels la dualité, les problèmes extrémaux et d'interpolation, etc.

Ce mémoire abordera le problème de la dualité. Le premier chapitre sera consacré à la notation utilisée dans ce document, aux définitions et notions de base et à quelques exemples et résultats majeurs comme les théorèmes de Riesz et de Hahn-Banach.

Dans le second chapitre, il sera question d'analyse de fonctions sur des disques centrés à l'origine. Nous aborderons des problèmes de caractérisation, d'extension et de comportement au bord. Nous y introduirons quelques outils, dont le noyau de Poisson, qui nous mèneront à l'étude des espaces H^p.

Viendra ensuite le cœur du sujet. Le troisième chapitre traitera des espaces de Hardy. Nous y verrons leurs caractéristiques comme espaces de fonctions et chercherons à caractériser leurs éléments.

Finalement, la dualité constituera le quatrième et dernier chapitre. Nous chercherons alors à trouver les espaces duaux d'espaces de fonctions sur le disque ; les espaces H^p bien sûr, mais aussi l'algèbre du disque de même que l'espace de fonctions holomorphes.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

Dans ce chapitre, nous ferons un bref rappel de certaines notions qui permettront une meilleure compréhension du sujet principal. Nous ne ferons qu'énoncer des résultats classiques sans les prouver. Pour plus de détails, il est possible de consulter les références inscrites au début de certaines sections.

1.1. Notations

Tout au long de ce document, les notations suivantes seront utilisées:

- $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ (cercle unité du plan complexe)
- $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ (disque unité ouvert du plan complexe)
- $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ (disque unité fermé du plan complexe)
- $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \rho\}$
- $C(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$
- $D(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$
- Ω = domaine de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe
- $\Re z$ = partie réelle de z
- $\Im z$ = partie imaginaire de z
- $\mathrm{Hol}(\Omega) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ est analytique sur } \Omega\}$
- $\mathrm{Har}(\Omega) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ est harmonique sur } \Omega\}$

Lorsque nous parlons d'une fonction harmonique à valeurs complexes, il s'agit d'une fonction complexe dont les parties réelle et imaginaire sont harmoniques.

À l'avenir, nous supposerons toujours que f est une fonction *complexe* de la forme $f = u + iv$ où u et v sont des fonctions *réelles*.

Théorème 1.1.1. *Soient μ une mesure complexe sur un espace mesurable X, φ une fonction complexe mesurable sur X et Ω un domaine de $\mathbb{C}$ tels que $\varphi(X) \cap \Omega = \emptyset$. Posons*

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z} \qquad \forall\, z \in \Omega$$

Alors, $f \in Hol(\Omega)$.

1.2. Les espaces $\mathscr{L}^p$

Les résultats dans cette section peuvent être retrouvés dans [**Ash**], [**Jea**] et [**Rud**].

Définition 1.2.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle *norme sur X* une application $\|\cdot\| \colon X \to [0, +\infty[$ telle que

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall\, x \in X, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in X$.

La dernière propriété est appelée l'inégalité du triangle. Un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|_X$ est appelé un *espace linéaire normé*. On le note $(X, \|\cdot\|_X)$ ou simplement X, lorsque le contexte est clair.

Soient X un espace linéaire normé et $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite d'éléments de X. On dit que x_n *converge vers x dans X* (noté $x_n \to x$) si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \text{ tel que, } n > N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x\|_X < \varepsilon.$$

Un espace linéaire normé X est dit *complet* si toutes les suites $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de Cauchy dans X convergent vers un élément de X, c'est-à-dire

$$\big(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \text{ tel que } m,n > N_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon\big) \iff \exists\, x \in X \text{ tel que } x_n \to x.$$

Un espace linéaire normé complet est appelé un *espace de Banach.*

Remarque 1.2.1. Soit $f\colon C \to \mathbb{C}$. Par simple but de simplification de notation nous posons que $z = e^{i\theta} \in C$ est équivalent à dire que θ est un élément de C. Nous aurons donc les équivalences suivantes:

1. $f\colon C \to \mathbb{C}$ et $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ où $f(-\pi) = f(\pi)$.
2. $f(e^{i\theta}) = f(\theta)$.

De plus, à chaque fonction $f\colon D \to \mathbb{C}$ nous associons la famille de fonctions $\{f_r\}_{0\leq r<1}$ où $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$.

Nous voulons considérer C comme un espace mesurable. La mesure de Lebesgue induit une mesure sur C. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [-\pi,\pi[& \to & C \\ & \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

On dira que l'ensemble $E \subset C$ est mesurable si et seulement si l'ensemble $\varphi^{-1}(E)$ est mesurable avec la mesure de Lebesgue et la mesure de E est la mesure de Lebesgue de $\varphi^{-1}(E)$.

Définition 1.2.2. Soient $0 < p < +\infty$ et μ une mesure complexe. On définit l'espace $\mathscr{L}^p$ sur C

$$\mathscr{L}^p(C) = \left\{ f\colon C \to \mathbb{C} \mid \int_C |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Deux fonctions seront considérées *équivalentes* si elles sont μ-égales presque partout, c'est à dire que l'ensemble des points où les deux fonctions sont différentes est un ensemble de μ-mesure nulle. *La classe d'équivalence de la fonction f* est l'ensemble de toute les fonctions qui lui sont équivalentes. Elle est notée par $[f]$.

On munit $\mathscr{L}^p(C)$ de la «norme» suivante:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_C |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce n'est pas tout à fait une norme car nous pourrions avoir $\|f\|_p = 0$ sans que $f \equiv 0$. La fonction

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sur C avec la mesure de Lebesgue est un exemple. Pour éviter ce problème, nous prendrons des classes d'équivalences comme éléments de $\mathscr{L}^p$.

Par souci de simplification, nous garderons la même notation, lorsque nous parlerons de la fonction f de $\mathscr{L}^p$, nous considérerons en fait $[f]$.

Avec cette convention, si $p \geq 1$, alors $\left(\mathscr{L}^p(C), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach.

Considérons maintenant le cas $p = +\infty$. L'espace $\mathscr{L}^\infty(C)$ est l'espace des fonctions *essentiellement bornées sur* C. On munit $\mathscr{L}^\infty(C)$ de la norme suivante:

$$\|f\|_\infty = \inf_{g \in [f]} \sup_{e^{i\theta} \in C} |g(\theta)|$$

appelée *norme sup essentielle* ou *norme infinie*. Encore une fois, nous considérons les classes d'équivalence de $\mathscr{L}^\infty(C)$ plutôt que ses éléments.

Muni de cette norme, $\mathscr{L}^\infty(C)$ est un espace de Banach. Il est possible de montrer que si $f \in \mathscr{L}^\infty$, alors $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. L'espace $\mathscr{L}^\infty$ est donc un cas limite de $\mathscr{L}^p$.

Exemple

L'ensemble $\mathrm{C}(C)$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in C} |f(t)|$, appelée *norme uniforme* ou *norme infinie*, forme un espace de Banach.

Pour illustrer le tout, nous avons

$$\mathrm{C}(C) \subset \mathscr{L}^\infty(C) \subset \cdots \subset \mathscr{L}^2(C) \subset \mathscr{L}^1(C).$$

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder). *Soient* $f \in \mathscr{L}^p(C)$ *et* $g \in \mathscr{L}^q(C)$ *telles que* $1 \leq p$, $q \leq +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit alors que* p *et* q *sont* conjugués*). Alors*

$$fg \in \mathscr{L}^1(C) \quad et \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Théorème 1.2.2 (Lemme de Fatou). *Soit* $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$ *une famille de fonctions mesurables* positives *sur* C*. Alors*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \liminf_{r \to 1} f_r(\theta)\, d\theta \leq \liminf_{r \to 1} \int_{-\pi}^{+\pi} f_r(\theta)\, d\theta.$$

Théorème 1.2.3 (Fubini). *Soient* $f\colon C \times C \to \mathbb{C}$ *et* μ, λ *des mesures complexes sur* C *telle que* $f \in \mathscr{L}^1_{\mu \times \lambda}(C \times C)$*. Alors,*

$$\iint f\, d\mu(x) d\lambda(y) = \iint f\, d\lambda(y) d\mu(x) = \int d\mu(x) \int f d\lambda(y) = \int d\lambda(y) \int f\, d\mu(x)$$

Théorème 1.2.4. *Soient* $f \in \mathscr{L}^p(C)$ *et* $\tau \in C$*. Si nous posons* $f_\tau(t) \equiv f(t - \tau)$ *nous aurons alors,*

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f_\tau(t) dt = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt \qquad \forall\, \tau \in C.$

   Nous disons que dt est invariante sous translation.

2. $f_\tau(t) \in \mathscr{L}^p(C)$ *et* $\|f_\tau\|_p = \|f\|_p$.

   C'est ce qu'on appelle l'invariance sous translation de $\mathscr{L}^p(C)$.

3. *La fonction* $\tau \mapsto f_\tau$*, à valeurs dans* $\mathscr{L}^p(C)$*, est continue, c'est-à-dire*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |\tau - \tau_0| < \delta \Rightarrow \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_p < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.5. *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *une suite de fonctions mesurables sur* C *et* $f \in \mathscr{L}^p(C)$ *telle que* $f_n(\theta) \to f(\theta)$ *presque partout et* $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$*. Alors* $\|f_n - f\|_p \to 0$.

1.3. Les espaces duaux

Les preuves des résultats de cette section sont dans **[Ash]**, **[Jea]** et **[Rud]**. Le concept de dualité étant au cœur de ce travail, il est essentiel de prendre bien soin de définir toutes les notions pertinentes et de donner quelques exemples et résultats majeurs de cette théorie.

Définition 1.3.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'application $F\colon X \to \mathbb{C}$ est appelée une *fonctionnelle*. De plus, F est dite *linéaire* si

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \qquad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \forall\, x,\, y \in X.$$

Soit X un espace de Banach. On appelle X' l'*espace dual (ou conjugé) de X* l'ensemble

$$X' = \{F\colon X \to \mathbb{C} \;\big|\; F \text{ est une fonctionnelle linéaire continue}\}.$$

On munit X' de la norme

$$\|F\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)|.$$

Ainsi défini, $\left(X', \|\cdot\|_{X'}\right)$ est un espace de Banach.

Définition 1.3.2. Soit X un espace de Banach. On considère chaque $x \in X$ comme une fonctionnelle linéaire $x\colon X' \to \mathbb{C}$ où $x(F) = F(x)$. La *topologie faible étoile*, est la topologie la moins fine sur X' rendant continues toutes les fonctionnelles linéaires x. On peut montrer que U est ouvert dans cette topologie si et seulement si $\forall\, F_0 \in U$, $\exists\, \varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{F \in X' \;\big|\; |F(x_k) - F_0(x_k)| < \varepsilon\} \subset U.$$

Soit $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ une suite d'éléments de X'. Il en suit que F_n converge vers F dans X' au sens faible étoile (noté $F_n \xrightarrow{*} F$) si et seulement si $F_n(x) \to F(x)$ $\forall\, x \in X$.

Théorème 1.3.1. *Soient X un espace de Banach, $B = \{F \in X' \mid \|F\|_{X'} \leq 1\}$, et $\{F_\alpha\}$ une suite généralisée dans B. Alors il existe une sous-suite de $\{F_\alpha\}$ et un élément $F \in B$ tels que cette sous-suite converge vers F au sens faible étoile.*

Exemples

Voyons maintenant quelques exemples classiques d'espaces de Banach et de leurs duaux.

Soit $g \in \mathscr{L}^q(C)$ où $1 \leq q < +\infty$ et μ une mesure complexe sur C. L'application $F\colon \mathscr{L}^p(C) \to \mathbb{C}$ où p et q sont conjugués donnée par

$$F_g(f) = \frac{1}{2\pi} \int_C f\, g\, d\mu$$

est une fonctionnelle linéaire continue, c'est-à-dire $F_g \in \big(\mathscr{L}^p(C)\big)'$. De plus, nous pouvons montrer que $\|F_g\| = \|g\|_q$. Réciproquement, si F est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathscr{L}^p(C)$ où $1 < p \leq +\infty$, alors il existe une unique fonction $g \in \mathscr{L}^q(C)$ où p et q sont conjugués telle que

$$F(f) = \int_C f\, g\, d\mu \qquad \forall\, f \in \mathscr{L}^p(C) \text{ et } \|F\| = \|g\|_q \,.$$

L'application $g \mapsto F_g$ est un isomorphisme isométrique de $\mathscr{L}^q(C)$ à $\big(\mathscr{L}^p(C)\big)'$. Nous dirons alors que le dual de $\mathscr{L}^p(C)$ est $\mathscr{L}^q(C)$.

Le cas $p = +\infty$ est un peu différent. Si $p = 1$, alors le dual de $\mathscr{L}^1(C)$ est $\mathscr{L}^\infty(C)$. Mais, si $p = +\infty$, alors le dual de $\mathscr{L}^\infty(C)$ contient $\mathscr{L}^1(C)$ mais n'y est pas égal.

Soit $\mathscr{M} = \{\, \mu \mid \mu$ est une mesure complexe régulière borélienne sur $C\,\}$. Muni de la norme $\|\mu\| = |\mu|(C)$ où

$$|\mu|(C) = \sup \left\{ \sum_n |\mu(E_n)| \;\middle|\; \{E_n\} \text{ est une partition de } C \right\},$$

c'est un espace de Banach. Soit $\mu \in \mathscr{M}$. L'application $F\colon \mathrm{C}(C) \to \mathbb{C}$ donnée par

$$F_\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C f \, d\mu$$

est une fonctionnelle linéaire continue, c'est-à-dire $F \in \big(\mathrm{C}(C)\big)'$. De plus, $\|F\| = \|\mu\|$. La norme de F est appelée la *variation totale de μ sur C.*

Réciproquement, si F est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathrm{C}(C)$, alors il existe une unique mesure complexe régulière borélienne μ sur C telle que

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C f \, d\mu$$

et $\|F\| = \|\mu\|$. L'application $\mu \mapsto F_\mu$ est un isomorphisme isométrique de $\mathscr{M}$ à $\big(\mathrm{C}(C)\big)'$. Nous dirons alors que le dual de $\mathrm{C}(C)$ est $\mathscr{M}$.

Théorème 1.3.2 (Hahn-Banach). *Soient X un espace de Banach, Y un sous-espace vectoriel de X et $F \in Y'$. Alors*

$$\exists\, G \in X' \textit{ tel que } \|G\|_{X'} = \|F\|_{Y'} \text{ et } \mathrm{G}\Big|_{\mathrm{Y}} = \mathrm{F}.$$

Corollaire 1.3.2.1. $\forall\, x \in X \;\exists\, F \in X'$ tel que $F(x) = \|x\|_X$ et $\|F\|_{X'} = 1$.

Chapitre 2

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES ET HARMONIQUES SUR LE DISQUE UNITÉ

La lecture de ce chapitre n'est pas essentielle à la compréhension des espaces de Hardy. Cependant, il constitue une bonne entrée en matière et soulève les questions qui nous mèneront naturellement vers le cœur du sujet.

2.1. Les fonctions analytiques

Soit $f\colon \bar{D} \to \mathbb{C}$. À partir des valeurs de f sur C, nous voulons trouver les valeurs de f dans D. Nous posons la question suivante: une fonction possédant certaines caractéristiques est-elle entièrement caractérisée par ses valeurs sur le cercle unité et si oui, comment récupérer ces valeurs?

Nous commencons avec le cas où nous avons une fonction analytique dans un disque ouvert contenant $\bar{D}$. C'est le cas le plus restrictif. Cependant, il est le plus simple. Le problème est complètement résolu grâce à un résultat très connu de l'analyse complexe.

Théorème 2.1.1 (Formule de Cauchy). *Soient $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple fermée et rectifiable telle que l'intérieur de la courbe est inclus dans Ω. On a alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad \forall\, z_0 \text{ à l'intérieur de la courbe } \Gamma.$$

Ici, $\Omega = D_R$ où $R > 1$ et $\Gamma = C$. Posons $z_0 = re^{i\theta}$ où $0 \leq r < 1$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$. À l'avenir les variables r et θ seront toujours considérées à l'intérieur de ces intervalles.

Nous avons donc

$$\boxed{\forall\, f \in \mathrm{Hol}(D_R), \qquad f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(t)}{1 - re^{i(\theta - t)}}\, dt.}$$

2.2. Les fonctions harmoniques

2.2.1. Le noyau de Poisson

Supposons maintenant que f ne soit plus holomorphe dans le disque D_R mais seulement harmonique. Nous agrandissons un peu la famille de fonctions pour lesquelles nous voulons arriver à un résultat.

Nous avons $f = u + iv$ où u et v sont harmoniques dans D_R. Puisque D_R est simplement connexe, il existe donc une fonction g analytique dans D_R telle que $u = \Re g$. Soit $z_0 \in D$. Il existe un rayon $R' > 1$ tel que $\dfrac{\bar{z}_0\, g(z)}{1 - z\bar{z}_0} \in \mathrm{Hol}(D_{R'})$. Par la formule et le théorème de Cauchy, nous avons alors

$$\begin{aligned}
g(z_0) + 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{g(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\bar{z}_0\, g(z)}{1 - z\bar{z}_0}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g(z) \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{1 - z\bar{z}_0} \right] dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g(z) \left[\frac{1 - z\bar{z}_0 + z\bar{z}_0 - |z_0|^2}{(z - z_0)\,(z\bar{z} - z\bar{z}_0)} \right] dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g(z) \left[\frac{1 - |z_0|^2}{(z - z_0)\,(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right] \frac{dz}{z}.
\end{aligned}$$

Si nous posons $z = e^{it}$ et $z_0 = re^{i\theta}$, nous avons maintenant

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt.$$

Posons $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$. Nous avons alors

$$u(re^{i\theta}) = \Re\left[g(re^{i\theta})\right] = \Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)P_r(\theta-t)\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta-t)\,dt.$$

Donc,

$$\boxed{\forall\, u \in \mathrm{Har}(D_R), \qquad u_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta-t)\,dt.}$$

Si $f \in \mathrm{Har}(D_R)$ alors $f = u + iv$ où $u,\, v \in \mathrm{Har}(D_R)$. Donc,

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta-t)\,dt + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v(t)P_r(\theta-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{[u(t)+iv(t)]}_{f(t)} P_r(\theta-t)\,dt \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall\, f \in \mathrm{Har}(D_R), \qquad f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta-t)\,dt.}$$

Ainsi, il est possible de récupérer les valeurs d'une fonction harmonique dans un disque contenant le disque unité grâce à ses valeurs sur le cercle unité.

La fonction

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{2.2.1}$$

est appelée le *noyau de Poisson.*

2.2.2. Propriétés du noyau de Poisson

On remarque tout d'abord que

$$P_r(\theta) = \Re\left[\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] = \Re\left[\frac{1+z}{1-z}\right].$$

C'est la partie réelle d'une fonction analytique dans D; elle est donc harmonique.

Le noyau de Poisson peut être écrit sous une autre forme:

$$\begin{aligned}
P_r(\theta) &= \Re\left[\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] \\
&= \Re\left[(1+re^{i\theta})\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(re^{i\theta})^n\right)\right] \\
&= \Re\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta}\right] \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n\theta \\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} r^{-n} e^{in\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.
\end{aligned}$$

Le noyau de Poisson a les propriétés suivantes:

1. $P_r(\theta)$ est continue sur les cercles de rayon $r < 1$.
2. $P_r(\theta) > 0 \quad \forall\, r < 1$.
3. $P_r(\theta + 2\pi) = P_r(\theta)$.
4. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1 \quad \forall\, r < 1$.
5. $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$.
6. Soit $0 < \delta < \pi$. Alors, $\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ uniformément pour $\delta \leq |\theta| \leq \pi$.

Preuve

Les points 1, 3 et 5 découlent de la formule (2.2.1).

2. Il suffit de remarquer que $1-2r\cos\theta+r^2 \leq 0$ est impossible pour $0<r<1$.

4. Fixons r. On a

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}^n + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - 1 \qquad \text{où } z = re^{i\theta}.$$

Ces deux séries convergent *uniformément* pour $|z| \leq r < 1$. Donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta}\,d\theta = 1.$$

6. Soit $0<\delta\leq|\theta|\leq\pi$. Alors

$$\begin{aligned}\cos\delta \geq \cos|\theta| = \cos\theta \quad &\Rightarrow \quad \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\\ &\Rightarrow \quad \lim_{r\to1}\sup_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}|P_r(\theta)| = 0.\end{aligned}$$

◪

Nous considérons maintenant la classe des fonctions *C-harmoniques*. Une fonction est dite *C-harmonique* si elle est continue sur le disque unité et harmonique à l'intérieur. La classe de fonctions est une fois de plus élargie. Nous tentons d'obtenir un résultat le plus général possible.

Considérons d'abord le cas réel. Soit u C-harmonique. Considérons la famille de fonctions $\{u_\ell\}_{0<\ell<1}$ où $u_\ell(z) \equiv u(\ell z)$. Posons $R_\ell = \frac{1}{\ell} > 1$. Nous remarquons que $u_\ell \in \mathrm{Har}(D_{R_\ell})$ pour $0<\ell<1$ et $u_\ell \to u$ uniformément sur D lorsque $\ell \to 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \lim_{\ell\to1} u_\ell(re^{i\theta})\\ &= \lim_{\ell\to1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_\ell(t)P_r(\theta-t)\,dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \lim_{\ell\to 1} u_\ell(t)P_r(\theta - t)\,dt \qquad \text{(car la convergence est uniforme)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta - t)\,dt.$$

Donc,

$$\boxed{\forall\, u \ C\text{-harmonique}, \qquad u_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta - t)\,dt.}$$

Le prolongement au cas complexe est immédiat. Si f est C-harmonique et $f = u + iv$, alors u et v sont C-harmoniques. Donc,

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta - t)\,dt + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v(t)P_r(\theta - t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{\left[u(t) + iv(t)\right]}_{f(t)} P_r(\theta - t)\,dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall\, f \ C\text{-harmonique}, \qquad f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta - t)\,dt.}$$

Nous avons vu qu'il est possible, grâce au noyau de Poisson, de récupérer les valeurs de certains types de fonctions harmoniques dans le disque unité en ne connaissant que leurs valeurs sur la frontière. Mais que se passerait-il si notre fonction n'était pas définie à l'intérieur du disque?

2.3. Le problème de Dirichlet

Nous considérons la fonction $f\colon C \to \mathbb{C}$. Selon les propriétés de f sur le cercle nous voulons savoir s'il est possible de trouver une extension de f à $\bar{D}$ telle que

f soit harmonique dans D. Le premier cas que nous regarderons est un problème classique.

Le problème de Dirichlet.
Soit $f\colon C \to \mathbb{C}$, telle que f est continue sur C. Trouver une fonction C-harmonique telle que ses valeurs sur le cercle soient $f(e^{i\theta})$.

Contrairement au problème précédent où f était C-harmonique, nous avons seulement que f est continue sur le cercle. Elle n'est même pas définie à l'intérieur du disque. Il s'agit maintenant de voir si pour *toutes* les fonctions continues sur le cercle, il existe une extension sur le disque qui soit C-harmonique. C'est effectivement le cas.

Théorème 2.3.1. *Soit $f\colon C \to \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathrm{C}(C)$. Alors, il existe une fonction $F\colon \bar{D} \to \mathbb{R}$ telle que*

1. $F\big|_C = f$
2. $F \in \mathrm{Har}(D)$
3. $F \in \mathrm{C}(\bar{D})$
4. *F est unique.*

Preuve
Nous considérons d'abord le problème pour le cas réel. Soit $u\colon C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons

$$U(re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} u(t) P_r(\theta - t)\, dt & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ u(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

1. Par définition, nous avons bien $U\big|_C = u$.

2. Il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta-t)\,dt = \Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\varphi(t)-z}\,d\mu_1(t) + z\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\varphi(t)-z}\,d\mu_2(t)\right]$$

où $z = re^{i\theta}$, $\varphi(t) = e^{it}$, $d\mu_1(t) = e^{it}u(t)dt$ et $d\mu_2(t) = u(t)dt$. Par le théorème 1.1.1, c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans D ; elle est donc harmonique.

3. Il suffit de montrer $\lim\limits_{re^{i\varphi}\to e^{i\theta}} U(re^{i\varphi}) = u(e^{i\theta})$. Nous allons même montrer que la limite est uniforme. Posons $M = \|u\|_\infty$. Par la continuité uniforme de u sur C, nous avons

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \text{ tel que } \forall\,\theta,\ \varphi \in C, \text{ si } |\theta-\varphi| < \delta \text{ alors } |u(\theta)-u(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $\varepsilon > 0$, θ et φ tels que $|\theta-\varphi| < \frac{\delta}{2}$ et r suffisamment près de 1 pour que $P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{4M}$ pour $\frac{\delta}{2} \le |\theta| \le \pi$. Ceci est possible par la propriété 6 du noyau de Poisson.

$$\begin{aligned}
&|U(re^{i\varphi}) - u(\theta)| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\varphi-t)\,dt - u(\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(t)\,dt\right| \quad \text{(propriété 4 de } P_r\text{)} \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\varphi-t)P_r(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\theta)P_r(t)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big[u(\varphi-t)-u(\theta)\big]P_r(t)\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |u(\varphi-t)-u(\theta)|P_r(t)\,dt \quad \text{(propriété 2 de } P_r\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\frac{\delta}{2}} |u(\varphi-t)-u(\theta)|P_r(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\delta}{2}\le|t|\le\pi} |u(\varphi-t)-u(\theta)|P_r(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\frac{\delta}{2}} \frac{\varepsilon}{2} P_r(t)\,dt + \frac{2M}{2\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}\le|t|\le\pi} P_r(t)\,dt \qquad (*)\\
&< \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\frac{\delta}{2}} \frac{\varepsilon}{2} P_r(t)dt + \frac{2M}{2\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}\le|t|\le\pi} \frac{\varepsilon}{4M}dt\\
&< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} P_r(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

L'inégalité $(*)$ est justifiée par le fait que si $|\varphi-\theta| < \frac{\delta}{2}$, alors $|\varphi - t - \theta| \le |\varphi-\theta| + |t| < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$, et donc $|u(\varphi-t) - u(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $\lim\limits_{re^{i\varphi}\to e^{i\theta}} U(re^{i\varphi}) = u(e^{i\theta})$ uniformément et $U \in C(\bar{D})$.

4. Supposons qu'il existe u_1, u_2 deux solutions au problème de Dirichlet. Posons $u \equiv u_1 - u_2$. Alors, u est harmonique et identiquement nulle sur C. Par les principes du maximum et du minimum pour les fonctions harmoniques, nous avons, $\min\limits_{z\in\bar{D}} u = \max\limits_{z\in\bar{D}} u = 0$. La fonction u est donc nulle partout sur $\bar{D}$. Donc, $u_1 = u_2$ partout sur $\bar{D}$.

L'extension du problème de Dirichlet au cas complexe se fait de façon tout à fait naturelle. Soit $f\colon C \to \mathbb{C}$ telle que $f \in \mathrm{C}(C)$ et $f = u + iv$. Si U et V sont les solutions du problème pour u et v respectivement, on pose l'extension de f à $\bar{D}$ de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
F(re^{i\theta}) &= U(re^{i\theta}) + iV(re^{i\theta})\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(t)P_r(\theta-t)\,dt + i\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} v(t)P_r(\theta-t)\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{[u(t)+iv(t)]}_{f(t)} P_r(\theta-t)\,dt.
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$

Donc,

$\forall f \in \mathrm{C}(C)$, l'extension de f à $\bar{D}$ donnée par

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet.

2.4. Extension harmonique des fonctions dans $\mathscr{L}^p$

Supposons maintenant que la fonction f ne soit plus nécessairement continue mais seulement un élément de $\mathscr{L}^p(C)$ où $1 \leq p < +\infty$. Le noyau de Poisson nous permettra-t-il encore de trouver une extension harmonique de cette fonction?

Théorème 2.4.1. *Soient $f \in \mathscr{L}^p(C)$ et $1 \leq p < +\infty$. Posons l'extension de f à $\bar{D}$*

$$f(re^{i\theta}) = f_r(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt & si\ 0 \leq r < 1 \\ f(e^{i\theta}) = f(\theta) & si\ r = 1. \end{cases}$$

Nous aurons alors les propriétés suivants:

1. *$f \in Har(D)$.*
2. *$\|f_r\|_p \leq \|f\|_p \ \forall r$.*
3. *$\|f_r - f\|_p \to 0$ lorsque $r \to 1$.*
4. *Si f est continue en $e^{i\theta_0}$, alors $f(re^{i\theta}) \to f(e^{i\theta_0})$ lorsque $re^{i\theta} \to e^{i\theta_0}$.*

Preuve

1. Identique à la partie 2 du théorème 2.3.1.

2. Soient r fixé, $f \in \mathscr{L}^p(C)$ et q le conjugué de p. Par le corollaire 1.3.2.1, il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^q(C)$ telle que $\|g\|_q = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_r(\theta)g(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta-t)\,dt\right) g(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta-t)P_r(t)\,dt\right) g(\theta)\,d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \big|f(\theta-t)g(\theta)\big|\,d\theta\right)}_{\|f_t g\|_1} P_r(t)\,dt \qquad \text{(théorème de Fubini)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \|f_t\|_p\,\|g\|_q\,P_r(t)\,dt \qquad \text{(inégalité de Hölder)} \\
&= \|f_t\|_p = \|f\|_p . \qquad \text{(propriété 4 de } P_r\text{)}
\end{aligned}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 1.2.4, $\exists\,\delta > 0$ tel que $|t| < \delta \Rightarrow \|f_t - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit r suffisamment près de 1 pour que $P_r(t) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}$ pour $\delta \leq |t| \leq \pi$. Soit $f \in \mathscr{L}^p$ et q le conjugué de p. Nous avons $f_r - f \in \mathscr{L}^p$. Encore une fois, par le corollaire 1.3.2.1, il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^q$ telle que $\|g\|_q = 1$ et

$$\|f_r - f\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\big[f_r(\theta) - f(\theta)\big]g(\theta)\,d\theta.$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
f_r(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta-t)\,dt - f(\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\big[f(\theta-t) - f(\theta)\big]P_r(t)\,dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \|f_r - f\|_p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f_r(\theta) - f(\theta)]g(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\theta-t) - f(\theta)]P_r(t)\,dt\right)g(\theta)\,d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big|[f(\theta-t) - f(\theta)]g(\theta)\Big|\,d\theta\right)}_{\|(f_t - f)g\|_1}P_r(t)\,dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\|g\|_q\,\|f_t - f\|_p\,P_r(t)\,dt \qquad \text{(inégalité de Hölder)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta}\|f_t - f\|_p\,P_r(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\|f_t - f\|_p\,P_r(t)\,dt \\
&\leq \sup_{|t|\leq\delta}\|f_t - f\|_p + 2\,\|f\|_p\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi}P_r(t) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

◪

4. Identique à la partie 3 du théorème 2.3.1.

Passons au cas où nous avons $f \in \mathscr{L}^\infty(C)$. Nous considérons ce cas séparément. Bien qu'il soit toujours possible de trouver une extension harmonique à notre fonction, certains résultats que nous obtenons diffèrent du cas où p était fini.

Théorème 2.4.2. *Soit $f \in \mathscr{L}^\infty(C)$. Posons l'extension de f à $\bar{D}$*

$$f(re^{i\theta}) = f_r(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta - t)\,dt & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ f(e^{i\theta}) = f(\theta) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Nous aurons alors les propriétés suivantes :

1. $f \in Har(D)$.

2. $\|f_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ *pour* $0 \leq r < 1$.

3. $f_r \xrightarrow{*} f$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_r(\theta)g(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta \qquad \forall\, g \in \mathscr{L}^1(C).$$

Preuve

1. Identique au théorème 2.3.1

2. Soit r fixé.

$$\begin{aligned}
|f_r(\theta)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta-t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)P_r(\theta-t)|\,dt \\
&= \|fP_{r_\theta}\|_1 \leq \|f\|_\infty \|P_{r_\theta}\|_1 = \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Et donc $\sup_{\theta\in C} |f_r(\theta)| = \|f_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

3. Soient $g \in \mathscr{L}^1(C)$ et r suffisamment près de 1 pour que $\|g_r - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}$. Ceci est possible par la partie 2 du théorème précédent. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_r(\theta)g(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)P_r(\theta-t)\,dt\right) g(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)P_r(t-\theta)\,d\theta\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)g_r(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\left[g_r(\theta) - g(\theta)\right] d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| f(\theta)\left[g_r(\theta) - g(\theta)\right] \right| d\theta \\
&= \|f(g_r - g)\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g_r - g\|_1 < \varepsilon. \qquad \text{(inégalité de Hölder)}
\end{aligned}
$$

$\boxslash$

2.5. Intégrale de Poisson d'une mesure sur C

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'extension harmonique d'une fonction du cercle unité au disque unité consistait toujours à évaluer l'intégrale de Poisson de cette fonction. Que pouvons nous dire de l'intégrale de Poisson d'une mesure?

Théorème 2.5.1. *Soit μ une mesure complexe borélienne sur C. Posons*

$$f(re^{i\theta}) = f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t).$$

Nous aurons alors les propriétés suivantes :

1. $f \in Har(D)$.

2. Il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|f_r\|_1 \leq M$ pour $0 \leq r < 1$.

3. $d\mu_r(\theta) \xrightarrow{*} d\mu(\theta)$ où $d\mu_r = f_r(\theta)d\theta$ c'est-à-dire

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) f_r(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\mu(t) \qquad \forall\, g \in \mathrm{C}(C).$$

Preuve

1. Identique au théorème 2.3.1.

2. On considère d'abord le cas réel. Soient λ une mesure réelle sur C et u_r l'intégrale de Poisson de cette mesure. Soit $r < 1$ fixé. Par le corollaire 1.3.2.1, il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^\infty$ telle que $\|g\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|u_r\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_r(\theta) g(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\lambda(t)\right) g(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) P_r(\theta - t)\, d\theta\right) d\lambda(t) \qquad \text{(théorème de Fubini)} \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |g(\theta) P_r(\theta - t)|\, d\theta\right)}_{\|P_{r_t} g\|_1 \leq \|P_r\|_1 \|g\|_\infty = 1} d|\lambda|(t) \\
&= \frac{|\lambda|(C)}{2\pi} = \frac{\|\lambda\|}{2\pi} < +\infty.
\end{aligned}$$

Passons au cas complexe. Soit $\mu = \lambda + i\nu$ la décomposition de μ. On a alors

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\lambda + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\nu \\
&= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}).
\end{aligned}$$

Donc, $\|f_r\|_1 \leq \|u_r\|_1 + \|v_r\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}(\|\lambda\| + \|\nu\|) \qquad \forall r < 1.$

3. On considère d'abord le cas réel. Soient $g \in$C(C), λ une mesure réelle sur C et u_r l'intégrale de Poisson de cette mesure. Posons $d\lambda_r = u_r(\theta) d\theta$.

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta) u_r(\theta)\, d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\lambda(t)\right) g(\theta)\, d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)P_r(\theta-t)\,d\theta\right)\,d\lambda(t) \qquad \text{(théorème de Fubini)}$$

$$= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g_r(t)\,d\lambda(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\lim_{r\to 1} g_r(\theta)\,d\lambda(\theta) \qquad \text{(car la convergence est uniforme)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\,d\lambda(\theta).$$

Passons maintenant au cas complexe. Soient $\mu = \lambda + i\nu$ la décomposition de μ et $g \in \mathrm{C}(C)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)f_r(\theta)\,d\theta &= \lim_{r\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)u_r(\theta)\,d\theta + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)v_r(\theta)\,d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\,d\lambda(\theta) + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\,d\nu(\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\,d\mu(\theta).
\end{aligned}$$

⊠

2.6. Les fonctions harmoniques quelconques

Dans la section précédente, nous avons vu que l'intégrale de Poisson d'une fonction ou d'une mesure sur C était harmonique. Étant donnée une fonction harmonique quelconque dans le disque, nous voulons savoir quelles sont les conditions nécessaires pour qu'elle soit l'intégrale de Poisson d'une certaine fonction ou mesure.

Théorème 2.6.1. *Soit $f \in Har(D)$.*

1. *Soit $1 < p \leq +\infty$. S'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|f_r\|_p \leq M \; \forall \, r$, alors il existe une unique fonction $F \in \mathscr{L}^p(C)$ telle que*

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(t) P_r(\theta - t) \, dt.$$

2. *S'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|f_r\|_1 \leq M \; \forall \, r$, alors il existe une unique mesure complexe μ sur C telle que*

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t) \, d\mu(t)$$

Preuve

1. Nous regardons d'abord le cas réel. Soit u une fonction réelle et harmonique dans le disque unité. Soit $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite telle que $r_n < 1$ pour tout $n \geq 1$ et $r_n \to 1$. On pose $u_n(z) = u(r_n z)$. On peut supposer que $\|u_n\|_p \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ c'est-à-dire la suite $\{u_n\}$ est dans la boule unité de $\mathscr{L}^p$ qui est le dual de $\mathscr{L}^q$ où p et q sont conjugués. Par le théorème 1.3.1, il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ telle que $u_{n_k} \xrightarrow{*} U$ où U est aussi dans la boule unité de $\mathscr{L}^p$, c'est-à-dire

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_{n_k}(\theta) g(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(\theta) g(\theta) \, d\theta \qquad \forall \, g \in \mathscr{L}^q.$$

Posons $R_k = \frac{1}{r_{n_k}} > 1$. On a $u_{n_k} \in \mathrm{Har}(D_{R_k}) \; \forall \, k$.

On a alors

$$\begin{aligned} u_r(\theta) &= \lim_{k \to +\infty} u(r_{n_k} r e^{i\theta}) \\ &= \lim_{k \to +\infty} u_{n_k}(r e^{i\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_{n_k}(t) P_r(\theta - t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(t) P_r(\theta - t)\, dt \qquad (\text{car } P_r \in \mathscr{L}^q).
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas complexe. Si $\|f_r\|_1 \leq M$, alors $\|u_r\|_1$ et $\|v_r\|_1 \leq M$ et donc il existe des fonctions U et $V \in \mathscr{L}^p$ telles que u et v soient les intégrales de Poisson de U et V respectivement. On a alors

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(t) P_r(\theta - t)\, d\theta + i\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V(t) P_r(\theta - t)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{[U(t) + iV(t)]}_{F(t)} P_r(\theta - t)\, d\theta.
\end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant que la fonction est unique. Supposons le contraire. Il existe F et $\tilde{F}$ telles que f soit l'intégrale de Poisson de F et $\tilde{F}$. Alors

$$\|F - \tilde{F}\|_p \leq \|f_r - F\|_p + \|f_r - \tilde{F}\|_p \to 0 \text{ et donc } F = \tilde{F}$$

2. Soit $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite telle que $r_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et $r_n \to 1$. On pose $d\mu_r(\theta) = f_r(\theta) d\theta$. On suppose que $\|f_r\|_1 \leq 1$ pour tout $r < 1$ et donc $|\mu_r|(C) = \|\mu_r\| \leq 1$ c'est-à-dire la suite $\{\mu_r\}$ est dans la boule unité de $\mathscr{M}$ qui est le dual de $\mathrm{C}(C)$. Par le théorème 1.3.1, il existe une sous-suite $\{\mu_{r_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ telle que $\mu_{r_k} \xrightarrow{*} \mu$ où μ est aussi dans la boule unité de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\mu_{r_k}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\mu(\theta) \qquad \forall\, g \in \mathrm{C}(C).$$

Posons $R_k = \frac{1}{r_{n_k}} > 1$ et $f_{r_k}(z) = u(r_k z)$. On a $f_{r_k} \in \mathrm{Har}(D_{R_k})$ pour tout k. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
u_r(\theta) &= \lim_{k\to+\infty} f(r_{n_k} r e^{i\theta}) \\
&= \lim_{k\to+\infty} f_{r_k}(re^{i\theta}) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_{r_k}(t) P_r(\theta - t)\, dt \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu_{r_k}(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \qquad (\text{car } P_r \in \mathrm{C}(C)).
\end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant que cette mesure est unique. Supposons le contraire. Il existe λ et ν telles que u soit l'intégrale de Poisson de λ et de ν. On a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d(\lambda - \nu) = 0$$

Posons $\mu = \lambda - \nu$. Il nous faut montrer que $\mu \equiv 0$. Soit $g \in \mathrm{C}(C)$. Posons

$$\begin{aligned}
F(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\mu(\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lim_{r\to1} g_r(\theta)\, d\mu(\theta) \\
&= \lim_{r\to1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g_r(\theta)\, d\mu(\theta) \qquad (\text{car la convergence est uniforme})
\end{aligned}$$

$$= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) P_r(\theta - t)\, dt \right) d\mu(\theta)$$

$$= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(\theta) \right)}_{0} g(t)\, dt \qquad \text{(théorème de Fubini)}$$

Donc, $F(g) = 0$ pour $g \in \mathrm{C}(C)$. Or, nous savons que F est un élément du dual de $\mathrm{C}(C)$ et $\|F\| = \|\mu\| = 0$. Donc, $\mu = 0$. ☒

Remarque 2.6.1. Soit $f \in \mathscr{L}^p(C)$. Posons $d\mu(\theta) = f(\theta)d\theta$. Alors μ est une mesure complexe. Donc, on peut écrire

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \qquad \forall\, f \in \mathscr{L}^p(C).$$

C'est-à-dire que toutes les fonctions $f \in \mathscr{L}^p$ peuvent être écrites comme l'intégrale de Poisson d'une mesure complexe.

2.7. Comportement au bord des intégrales de Poisson

Nous avons vu que les intégrales de Poisson de certaines fonctions sur le cercle définissaient des fonctions harmoniques dans le disque. Nous voulons maintenant savoir comment ces fonctions se comportent sur le bord de D et s'il existe un lien entre ce comportement et leur fonction associée. Nous allons voir qu'effectivement, il existe un lien très fort.

Définition 2.7.1. Soit $\mu\colon C \to \mathbb{C}$ une mesure borélienne complexe. Soient $e^{i\theta_0} \in C$ et I un intervalle ouvert de C contenant $e^{i\theta_0}$. On dit que μ est *différentiable en $e^{i\theta_0}$* et que $\mu'(e^{i\theta_0}) = A$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } m(I) < \delta \Rightarrow \left| \frac{\mu(I)}{m(I)} - A \right| < \varepsilon$$

où $m(I)$ est la mesure de Lebesgue de l'intervalle I. Toute les mesures boréliennes complexes sur C induisent une fonction à variation bornée par la relation

$$f(\theta) = \mu(]-\pi,\theta]).$$

Si f est la fonction à variation bornée induite par μ, on aura alors

$$\mu'(e^{i\theta_0}) = A \iff f'(e^{i\theta_0}) = A.$$

Théorème 2.7.1 (Fatou). *Soient μ une mesure borélienne complexe sur C, f l'intégrale de Poisson de μ et θ_0 tels que $\mu'(\theta_0)$ existe et est finie. Alors,*

$$\lim_{r\to 1} f_r(\theta_0) = \mu'(\theta_0).$$

Preuve

La mesure μ est induite par une fonction à variation bornée sur $[-\pi,\pi]$ que nous noterons aussi μ. Sans perte de généralité, on supppose que la dérivée de la mesure μ existe et est finie en $\theta_0 = 0$. De plus, la *dérivée symétrique* de la fonction à variation bornée μ existe en 0 c'est-à-dire

$$\mu'(0) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\mu(\theta) - \mu(-\theta)}{2\theta}$$

On remarque aussi que

$$|P_r'(\theta)| = \left| \frac{2r\sin\theta(1-r^2)}{(1-2r\cos\theta + r^2)^2} \right| \leq \frac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta + r^2)^2} \to 0 \text{ pour } 0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < t < \delta \Rightarrow \left| \frac{\mu(\theta) - \mu(-\theta)}{2\theta} - \mu'(0) \right| < \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{3}$.

La fonction μ étant à variation bornée, elle est forcément bornée. Donc, il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $|\mu(\theta)| \leq M$ pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$.

Soit r suffisamment près de 1 pour que

$$P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3|\mu(\pi) - \mu(-\pi) - 2\mu'(0)\pi|}$$

et

$$|P_r'(\theta)| < \min\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2}, \frac{\varepsilon}{3(M + |\mu'(0)|\pi)}\right\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&|f_r(0) - \mu'(0)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta)\, d\mu(\theta) - \mu'(0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta)\, d\theta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta) \big[\, d\mu(\theta) - \mu'(0) d\theta \,\big] \right| \\
&= \left| P_r(\theta) \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big] P_r'(\theta)\, d\theta \right| \\
&\leq P_r(\theta) \big|\mu(\pi) - \mu(-\pi) - 2\mu'(0)\pi\big| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big] P_r'(\theta)\, d\theta \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| \leq \delta} \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big] P_r'(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big] P_r'(\theta)\, d\theta \right| \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left[\frac{\mu(\theta) - \mu(-\theta)}{2\theta} - \mu'(0) \right] \theta \big(-P_r'(\theta)\big)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \big[\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big] P_r'(\theta)\, d\theta \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{\mu(\theta) - \mu(-\theta)}{2\theta} - \mu'(0) \right| |\theta| |P_r'(\theta)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \big|\mu(\theta) - \mu'(0)\theta\big| |P_r'(\theta)|\, d\theta \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{3} \cdot \delta \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta^2} \cdot \delta + (M + |\mu'(0)|\pi) \cdot \frac{\varepsilon}{3(M + |\mu'(0)|\pi)} = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corollaire 2.7.1.1. Soit $f \in \mathscr{L}^p(C)$. La limite de l'intégrale de Poisson de la fonction f existe presque partout sur C et presque partout, on a

$$\lim_{r \to 1} f_r(\theta) = f(\theta).$$

De façon plus générale, la limite de l'intégrale de Poisson d'une mesure complexe μ existe presque partout sur C et là où elle existe, on a

$$\lim_{r \to 1} f_r(\theta) = \mu'(\theta).$$

Preuve

Soit $d\mu = f d\theta + d\mu_s$ la décomposition de Lebesgue pour μ. Puisque μ est induite par une fonction à variation bornée et que ces dernières sont différentiables presque partout, alors μ est différentiable presque partout et $\frac{d\mu}{d\theta} = f$ presque partout. Par le théorème de Fatou, on a le résultat voulu. ☒

Corollaire 2.7.1.2. Soit $f \in \mathrm{Har}(D)$ et $1 \leq p \leq +\infty$. S'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|f_r\|_p \leq M$ pour $r < 1$, alors la limite radiale

$$\lim_{r \to 1} f_r(\theta) = F(\theta)$$

existe presque partout et $F \in \mathscr{L}^p(C)$.

A) Si $1 < p \leq +\infty$, alors f est l'intégrale de Poisson de la fonction F.

B) Si $p = 1$, alors f est l'intégrale de Poisson d'une mesure complexe μ dont la partie absolument continue est $F(\theta)d\theta$.

Remarque 2.7.1. Dans le cas A) du corollaire précédent, on peut récupérer la fonction f grâce à ses valeurs sur la frontière. Si f est l'intégrale de Poisson d'une mesure complexe quelconque, ce n'est pas toujours le cas. Le cas le plus simple de représentation où la partie singulière de μ est non-nulle est lorsque $f_r(\theta) = P_r(\theta)$. En effet, $\lim_{r \to 1} P_r(\theta) = 0 = \mu'(\theta)$ partout sauf en $\theta = 0$. On a donc

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\mu'(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t) 2\pi \, d\delta(t)$$

où δ est la mesure de Dirac.

Définition 2.7.2. Soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On trace le secteur ayant pour sommet le point $e^{i\theta}$ symétrique par rapport au rayon passant par l'origine et $e^{i\theta}$. On trace ensuite les deux droites perpendiculaires à la frontière de ce secteur et passant par l'origine. On note $S_\alpha(\theta)$ la région ainsi délimitée. (voir Fig. 1) On dit que *z tend vers $e^{i\theta}$ non-tangentiellement si* $z \in S_\alpha(\theta)$ et $z \to e^{i\theta}$.

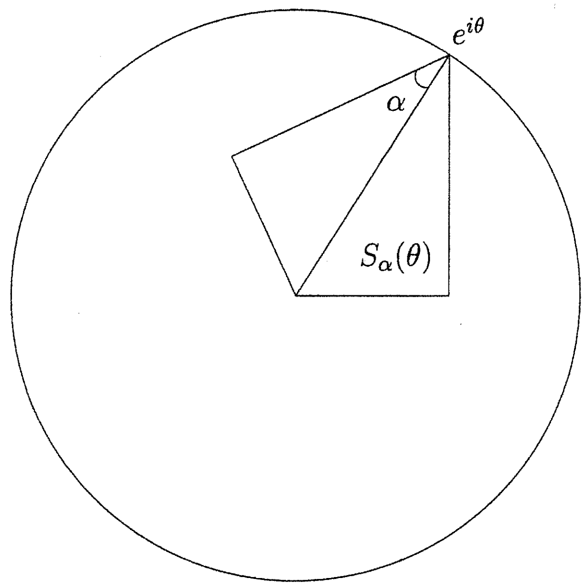

FIG. 1 –. *convergence non-tangentielle*

Remarque 2.7.2. Dans l'énoncé du théorème de Fatou ainsi que dans ses corollaires, on peut remplaçer les limites radiales par des limites non-tangentielles. La preuve est dans **[Koo]**

Dans ce chapitre, il a été question de la caractérisation des fonctions harmoniques sur le disque unité dont les normes $\|\cdot\|_p$ où $1 \leq p \leq +\infty$ restaient bornées, ainsi que d'extension harmonique de fonctions du cercle au disque. Nous avons vu que ces fonctions possédaient toutes une fonction limite définie presque partout sur le cercle et, dans les cas où $p > 1$, nous pouvions récupérer les valeurs de nos fonctions par l'intégrale de Poisson de ces fonctions limites. Cependant, comme nous venons de le voir, ce n'est pas le cas pour $p = 1$.

Nous n'avons travaillé qu'avec des fonctions harmoniques. Nous pouvons nous poser la question : quels seraient alors les résultats si nous n'avions que des fonctions holomorphes? Ceci nous mène directement à la définition des espaces H^p que nous abordons dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

LES ESPACES H^p

Dans ce chapitre, nous ferons une introduction aux espaces de Hardy. Nous présenterons d'abord quelques caractéristiques de base de ces ensembles. Ensuite, nous porterons notre attention aux éléments mêmes de ces ensembles. Les caractéristiques et propriétés démontrées nous mèneront au chapitre suivant portant sur la dualité.

3.1. Un premier contact

Commencons d'abord par définir les espaces H^p et leurs analogues réels, les espaces h^p.

Définition 3.1.1. Soit $0 < p < +\infty$.

$$\begin{aligned}
H^p &= \left\{ f\colon D \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \in \mathrm{Hol}(D),\ \sup_{r<1} \|f_r\|_p < +\infty \right\};\\
H^\infty &= \left\{ f\colon D \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \in \mathrm{Hol}(D),\ \sup_{z\in D} |f(z)| < +\infty \right\};\\
h^p &= \left\{ u\colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \in \mathrm{Har}(D),\ \sup_{r<1} \|u_r\|_p < +\infty \right\};\\
h^\infty &= \left\{ u\colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \in \mathrm{Har}(D),\ \sup_{z\in D} |u(z)| < +\infty \right\}.
\end{aligned}$$

La définition de H^∞ n'est pas différente de celle de H^p. En effet, si nous posons $z = re^{i\theta}$, nous avons $\sup\limits_{r<1} \|f_r\|_\infty = \sup\limits_{r<1} \sup\limits_{-\pi\leq\theta\leq\pi} |f_r(\theta)| = \sup\limits_{z\in D} |f(z)|$.

Définition 3.1.2. Soit $u\colon \Omega \to [-\infty, +\infty[$ où Ω est un domaine borné et $u \in C(\Omega)$. On dit que u est *sous-harmonique* si pour tout domaine E tel que $\bar{E} \subset \Omega$, pour toute fonction U harmonique dans E et continue dans $\bar{E}$ telle que $u \leq U$ sur la frontière de E, alors $u \leq U$ *partout* dans E.

Nous avons la caractérisation suivante : u est sous-harmonique si et seulement si pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un rayon ρ_0 tel que $D(z_0,\rho_0) \subset \Omega$ et

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \qquad \forall\, \rho < \rho_0.$$

Voici quelques exemples de fonctions sous-harmoniques :

1. Soient $f \in \mathrm{Hol}(D)$ et $0 < p < +\infty$. Alors, $|f(z)|^p$ est sous-harmonique dans D.
2. Soient $u \in \mathrm{Har}(D)$ et $1 \leq p < +\infty$. Alors, $|u(z)|^p$ est sous-harmonique dans D.

Voici maintenant quelques caractéristiques de ces ensembles de fonctions.

Théorème 3.1.1.

A) Les ensembles H^p et h^p munis des opérations usuelles d'espaces de fonctions sont des espaces vectoriels.

B) Si f est holomorphe dans D alors $f \in H^p \iff \Re f$ et $\Im f \in h^p$.

C) $H^q \subsetneq H^p$ pour $0 < p < q \leq +\infty$.

D) Soit $f \in H^p$ où $0 < p \leq +\infty$. Si $r_1 \leq r_2 < 1$, alors $\|f_{r_1}\|_p \leq \|f_{r_2}\|_p$.

Preuve

Les points *A)* et *B)* étant facilement vérifiables, nous ne prouverons que les points *C)* et *D)*.

C) Commençons par les cas où $q = \infty$. Soit $f \in H^\infty$. Alors,

$$\|f_r\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \|f_r\|_\infty^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_r\|_\infty .$$

Et donc, $\sup\limits_{r<1} \|f_r\|_p \leq \sup\limits_{z\in D} |f(z)| < +\infty$. Considérons maintenant le cas où $q < +\infty$. Soit $f \in H^q$. On remarque que $\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$, $|f_r|^p \in \mathscr{L}^{\frac{q}{p}}$ et $1 \in \mathscr{L}^{\frac{q}{q-p}}$. On a donc

$$\|f_r\|_p^p = \|\,|f_r|^p \cdot 1\,\|_1 \leq \||f_r|^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (|f_r|^p)^{\frac{q}{p}}\, d\theta\right)^{\frac{p}{q}} = \|f_r\|_q^p$$

Par conséquent, $\sup\limits_{r<1} \|f_r\|_p \leq \sup\limits_{r<1} \|f_r\|_q < +\infty$ et $f \in H^p$. On montre maintenant que l'inclusion est stricte.

Soit p' tel que $0 < p < p' < q \leq +\infty$. On pose

$$f_{p'}(z) = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{p'}}}.$$

Alors, $f_{p'} \in H^p$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|f_{p'_r}\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{|r-re^{i\theta}|^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r^{\frac{p}{p'}}}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{|2\sin\frac{\theta}{2}|^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta = \frac{1}{(2r)^{\frac{p}{p'}}\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta \\
&= \frac{2}{(2r)^{\frac{p}{p'}}\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin\theta)^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta \leq \frac{2}{r^{\frac{p}{p'}}\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\theta^{\frac{p}{p'}}}\, d\theta.
\end{aligned}$$

Cette intégrale impropre converge car $\frac{p}{p'} < 1$. La dernière inégalité est justifiée par le fait que $\sin\theta \geq \frac{\theta}{2}$ pour $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Si $q < +\infty$, puisque $\frac{q}{p'} > 1$, on a $f_{p'} \notin H^q$. Si $q = +\infty$, la fonction $f_{p'}$ n'est pas bornée, et donc $f_{p'} \notin H^\infty$.

D) Si $p = +\infty$. Par le principe du module maximum, on a

$$\|f_{r_1}\|_\infty = \sup_{z\in D(0,r_1)} |f(z)| \leq \sup_{z\in D(0,r_2)} |f(z)| = \|f_{r_2}\|_\infty .$$

Si $0 < p < +\infty$. Soit g la solution au problème de Dirichlet avec valeurs au bord $|f|^p|_{C(0,r_2)}$. Or, $|f|^p$ est une fonction sous-harmonique dans D, donc $|f|^p \leq g$ dans D_{r_2}. Donc,

$$\begin{aligned} \|f_{r_1}\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_{r_1}(\theta)|^p \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g_{r_1}(\theta)\, d\theta = g(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g_{r_2}(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_{r_2}(\theta)|^p \, d\theta = \|f_{r_2}\|_p^p . \end{aligned}$$ ⊠

Théorème 3.1.2. *On munit H^p de la norme suivante:*

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p} &= \sup_{r<1} \|f_r\|_p = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p \quad (\textit{pour } 1 \leq p < +\infty) \\ \|f\|_{H^\infty} &= \sup_{z\in D} |f(z)|. \end{aligned}$$

Muni de cette norme, c'est un espace de Banach.

Preuve

Soient $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de Cauchy dans H^p, z, r et R tels que $|z| \leq r < R < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe N tel que $m,n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{H^p} < \varepsilon \frac{R-r}{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_n(z) - f_m(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{f_n(\zeta) - f_m(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{(formule de Cauchy)} \\ |f_n(z) - f_m(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|}{R-r} R\, d\theta \qquad (\text{on pose } \zeta = Re^{i\theta}) \\ |f_n(z) - f_m(z)| &\leq \frac{R}{R-r}\, \|f_{n_R} - f_{m_R}\|_1 \\ &\leq \frac{R}{R-r}\, \|f_{n_R} - f_{m_R}\|_p \qquad (\text{inégalité de Hölder avec } g \equiv 1) \\ &\leq \frac{R}{R-r}\, \|f_{n_R} - f_{m_R}\|_{H^p} < \varepsilon \end{aligned}$$

La suite $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est *uniformément* Cauchy sur $\bar{D}_r$. Elle converge donc uniformément vers une fonction $f \in \mathrm{Hol}(D_r)$. Or, r est quelconque, la suite converge donc *ponctuellement* sur D vers une fonction $f \in \mathrm{Hol}(D)$. Aussi,

$$\|f_{n_r} - f_r\|_p = \lim_{m\to+\infty} \|f_{n_r} - f_{m_r}\|_p \leq \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_{H^p} < \varepsilon \quad \text{pour } r < 1.$$

Donc, $\lim\limits_{r\to 1} \|f_{n_r} - f_r\|_p = \|f_n - f\|_{H^p} \leq \varepsilon$. Il ne reste qu'à montrer que $f \in H^p$. Soit n assez grand pour que $\|f_{n_r} - f_r\|_p < \varepsilon$. Alors, $\|f_r\|_p \leq \|f_{n_r} - f_r\|_p + \|f_{n_r}\|_p$ et donc $\|f\|_{H^p} \leq \varepsilon + \|f_n\|_{H^p} < +\infty$. ☒

À partir de maintenant, on considérera toujours que $p \geq 1$.

3.2. Les fonctions limites

Certains résultats de cette section seront utilisés sans être prouvés. Pour plus de détails, voir **[G&K]**.

Les éléments de H^p sont des fonctions définies sur D. Nous pouvons nous demander comment se comportent ces fonctions au bord de D. Comme dans le chapitre précédent, nous regarderons la limite radiale.

Théorème 3.2.1. *La limite radiale de $f \in H^p$ existe presque partout sur C.*

Preuve

Soit μ une mesure borélienne complexe sur C. Nous savons déjà par le chapitre 2 que

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \iff f \in \mathrm{Har}(D) \text{ et } \sup_{r<1} \|f_r\|_p < +\infty$$

Il est possible de montrer que toutes les mesures complexes boréliennes sont induites par une fonction à variation bornée et qu'inversement, une fonction à variation bornée induit une mesure borélienne complexe. Par le théorème de Fatou, la limite radiale d'une fonction $u \in h^1$ existera presque partout car une fonction à variation bornée est différentiable presque partout. Nous savons que si $f \in H^p$, alors $\Re f$ et $\Im f \in h^p$. Finalement, puisque $h^p \subset h^1$, nous concluons que la limite radiale d'un fonction $f \in H^p$ existe et est finie presque partout. ☒

Définissons $\tilde{f}$ la fonction limite de f de la façon suivante :

$$\tilde{f}(\theta) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 1} f_r(\theta) & \text{si la limite existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que pouvons nous dire sur cette fonction? D'abord, nous remarquons que c'est une fonction mesurable. En effet, la dérivée d'une fonction à variation bornée est mesurable et presque partout, on a $\lim\limits_{r\to 1} f_r(\theta) = \mu'(\theta)$.

Théorème 3.2.2. *Les limites radiales d'une fonction de H^p définissent une fonction de $\mathscr{L}^p$.*

Preuve

On ne fait que le cas $1 \le p < +\infty$, le cas $p = +\infty$ étant trivial. Soit $\tilde{f}$ la fonction limite de $f \in H^p$. On a

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\tilde{f}(\theta)|^p \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \liminf_{r\to 1} |f_r(\theta)|^p \, d\theta \\ &\le \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|^p \, d\theta = \liminf_{r\to 1} \|f_r\|_p^p = \|f\|_{H^p}^p . \end{aligned}$$

L'inégalité est justifiée par le lemme de Fatou. ☒

Définition 3.2.1. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si

1. Il y a un nombre *fini* de termes nuls.
2. $\forall N_0$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n > N_0$, alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=N_0+1}^{N} a_n$ existe et est non nulle.

Si $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, on pose $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \left(\prod\limits_{n=1}^{N_0} a_n\right)\left(\lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=N_0+1}^{N} a_n\right)$.

Il est important de remarquer que la limite ne dépend pas du choix de N_0.

De plus, nous avons les résultats suivants:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge } \iff \prod_{n=1}^{+\infty} (1+|a_n|) \text{ converge } \Rightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} (1+a_n) \text{ converge }.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |1-a_n| \text{ converge } \Rightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge }. \tag{3.2.1}$$

Théorème 3.2.3. *Soit la suite $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ telle que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots < 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|) < +\infty$. Posons*

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z} \qquad k \geq 0.$$

On a

1. *$B(z)$ converge uniformément sur $\bar{D}_r$ pour $r < 1$ et $B \in Hol(D)$.*
2. *$B(z)$ n'a pas d'autres zéros que $z = 0$ de multiplicité k et $z = a_n$ de multiplicité égale au nombre de fois que le terme a_n apparaît dans la suite.*
3. *$|B(z)| < 1$ pour $|z| < 1$.*
4. *$|B(e^{i\theta})| = 1$ presque partout.*

La fonction $B(z)$ est appelée un *produit de Blaschke* dans le disque. La suite $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ peut être finie et même vide. Dans ce cas, $B(z) = z^k$, et si $k = 0$, alors $B(z) \equiv 1$.

Preuve

1. Nous montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|1 - \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right|$ converge uniformément sur $\bar{D}_R$. Soit $|z| \leq R < 1$. On a alors

$$\left|1 - \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right| = \left|\frac{a_n + |a_n| z}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right| (1-|a_n|) \leq \frac{1+R}{1-R}(1-|a_n|)$$

Par hypothèse, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+R}{1-R}(1-|a_n|)$ converge et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|1 - \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right|$ converge uniformément par comparaison.

Pour montrer que $B(z)$ est une fonction holomorphe, il suffit d'utiliser le résultat suivant:

Lemme 3.2.1. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ telle que $f_n \in \mathrm{Hol}(D)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |1-f_n(z)|$ converge uniformément sur les compacts de D. Posons

$$F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z).$$

Alors ce produit converge uniformément sur les compacts de D et donc $F \in \mathrm{Hol}(D)$. Finalement,

$$F(z_0) = 0 \iff \exists\, n_0 \text{ tel que } f_{n_0}(z_0) = 0.$$

Dans notre cas, nous avons $f_n(z) = \dfrac{|a_n|}{a_n}\dfrac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}$.

2. Par la dernière partie du lemme précédent, nous avons le résultat voulu.

3. On a

$$\left|\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z}\right| < 1 \qquad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } z \in D.$$

Donc, $B(z) < 1$ pour tout $z \in D$.

4. Par définition, nous avons $B \in H^\infty$. La limite radiale de B existe donc presque partout. Posons $B(e^{i\theta})$ comme étant la fonction limite de $B(z)$. Puisque $|B(z)| < 1$, alors $|B(e^{i\theta})| \leq 1$. On veut montrer que $|B(e^{i\theta})| = 1$ presque partout. Posons

$$f_n(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)} \text{ où } B_n(z) = z^k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1-\bar{a}_k z}.$$

On remarque que $f \in H^\infty$ et que $B_n \to B$ uniformément sur les compacts de D. Si $|z| = 1$, alors $\left|\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\right| = 1$. Donc, $B_n(e^{i\theta}) \equiv 1$. Nous savons que si $f \in H^\infty \subset H^1$, alors $\|f_r\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_1$ où $\tilde{f}$ est la fonction limite de f. On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})}\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{B(e^{i\theta})}{1}\right| d\theta$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})}\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|B(e^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})}\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|B(e^{i\theta})|\, d\theta$$

Ainsi, $1 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|B(e^{i\theta})|\, d\theta \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|B(e^{i\theta})|\, d\theta = 1$. Puisque $|B(e^{i\theta})| \leq 1$, nous pouvons conclure que $B(e^{i\theta}) = 1$ presque partout. ☒

Théorème 3.2.4. *Soient $f \in H^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ et $\{a_n\}$ les zéros non nuls de f. Alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-|a_n|\right) < +\infty.$$

Preuve

Puisque $H^p \subset H^1$, il suffit de démontrer le résultat pour H^1. De plus, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f(0) \neq 0$. En effet, si f a un zéro d'ordre m à l'origine, nous posons $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$. Nous aurons alors $g(0) \neq 0$ et les zéros de g seront exactement les zéros non nuls de f. Aussi,

$$\|g\|_{H^1} = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|g_r(\theta)|\, d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{f_r(\theta)}{r^m e^{im\theta}}\right| d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{r^m}\|f_r\|_1 = \|f\|_{H^1}\,.$$

Pour prouver le théorème, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.2 (Formule de Jensen). Soient $f \in \mathrm{Hol}(\bar{D}_r)$ telle que $f(0) \neq 0$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de f dans $D(0,r)$ dénombrés avec leur multiplicités. On suppose que $|a_k| < r$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Alors

$$\ln|f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{r}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln|f_r(\theta)|\, d\theta.$$

Pour $0 < x < 1$, nous avons l'inégalité $1 - x \leq \ln \frac{1}{x}$. En effet, par le théorème de la moyenne, il existe un nombre θ_x tel que $x < \theta_x < 1$ et

$$1 < \frac{1}{\theta_x} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{\ln \frac{1}{x}}{1 - x} \text{ et donc } 1 - x \leq \ln \frac{1}{x}$$

Soit $0 < r < 1$ tel que $|a_k| \neq r$ pour tout k. Soit $n(r)$ le nombre de zéros de f dans $\bar{D}_r$. Soient r et N tels que $n(r) > N$. Par la formule de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \ln \frac{r}{|a_k|} &\leq \sum_{k=1}^{n(r)} \ln \frac{r}{|a_k|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln|f_r(\theta)|\, d\theta - \ln|f(0)| \\
&\leq \|f_r\|_1 - \ln|f(0)| \qquad (\text{ car } \ln x \leq x \text{ pour } x > 0\ ) \\
&\leq \|f\|_{H^1} - \ln|f(0)| \\
\lim_{r\to 1} \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{r}{|a_k|} = \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{1}{|a_k|} &\leq \|f\|_{H^1} - \ln|f(0)| < +\infty.
\end{aligned}$$

Or, N est quelconque, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{|a_k|}$ converge. Par l'inégalité démontrée plus haut, nous pouvons conclure que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - |a_k|\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{|a_k|} < +\infty. \qquad \boxtimes$$

Corollaire 3.2.4.1. Le produit de Blaschke des zéros d'une fonction de H^p converge.

Théorème 3.2.5. *Soient $f \in H^p$ où $1 \leq p \leq +\infty$ telle que $f \not\equiv 0$, $z = 0$ est un zéro d'ordre $k \geq 0$ de f, $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ les zéros non-nuls de f comptés avec leur* *multiplicité et $B(z)$ le produit de Blaschke des zéros de f. Alors*

$$f(z) = F(z)B(z)$$

où $F(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. Aussi, $F \in H^p$ et $\|F\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Preuve

Le résultat est simple à démontrer si f a un nombre fini de zéros. Nous supposons donc que f a une infinité de zéros. On pose

$$F(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$$

La fonction F est analytique et bornée dans un voisinage *pointé* de a_n. Par le théorème de Riemann sur les singularités artificielles, F peut être prolongée analytiquement en a_n en posant $F(a_n) = \lim_{z \to a_n} \dfrac{f(z)}{B(z)}$. Nous avons alors que $F \in \mathrm{Hol}(D)$.

Il reste à montrer l'égalité des normes. Posons

$$F_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)} \text{ où } B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et n fixés et R choisi de telle sorte que si $R < |z| < 1$, alors $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$.

Nous considérons d'abord le cas $p = +\infty$. On a $|F(z)| = \left|\dfrac{f(z)}{B(z)}\right| > |f(z)|$ pour tout $z \in D$. Et donc, $\|F\|_{H^\infty} \geq \|f\|_{H^\infty}$ par définition.

Pour l'autre inégalité, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{R<|z|<1} |F_n(z)| &\leq \sup_{R<|z|<1} \frac{|f(z)|}{1-\varepsilon} \\
\sup_{z \in D} |F_n(z)| &\leq \sup_{z \in D} \frac{|f(z)|}{1-\varepsilon} \qquad \text{(principe du module maximum)} \\
\|F\|_{H^\infty} &\leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

Or, ε est quelconque et donc $\|F\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty}$.

Considérons maintenant le cas $p < +\infty$. On a

$$\begin{aligned}
\|F_{n_r}\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |F_{n_r}(\theta)|^p \, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{f_r(\theta)}{B_n(re^{i\theta})}\right|^p \, d\theta \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^p \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|^p \, d\theta \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^p \|f\|_{H^p}^p \qquad \forall \varepsilon > 0 \\
\|F_{n_r}\|_p^p &\leq \|f\|_{H^p}^p \qquad \forall n \\
\|F_r\|_p^p &\leq \|f\|_{H^p}^p \qquad \text{(car } F_n \to F \text{ uniformément sur les compacts).}
\end{aligned}$$

Et donc, $\|F\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$ par définition.

Pour l'autre inégalité, nous avons

$$\begin{aligned}
\|F_r\|_p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{f_r(\theta)}{B(re^{i\theta})}\right|^p \, d\theta \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|^p \, d\theta = \|f_r\|_p .
\end{aligned}$$

Et donc, $\|F\|_{H^p} \geq \|f\|_{H^p}$ par définition. $\boxtimes$

Théorème 3.2.6. *Soient $f \in H^p$ où $1 \leq p \leq +\infty$ et $\tilde{f}$ sa fonction limite. Alors,*

1. $\|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p = \|\tilde{f}\|_p$;
2. $\lim_{r\to 1} \|f_r - \tilde{f}\|_p = 0$.

Preuve

Nous regardons le cas $p = 2$. On remarque d'abord que

$$f \in H^2 \iff f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \text{ converge .}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|f_r - \tilde{f}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)|^2 \, d\theta \\
&\leq \liminf_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta) - f_\rho(\theta)|^2 \, d\theta \qquad \text{(lemme de Fatou)} \\
&= \liminf_{\rho \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 (r^n - \rho^n)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 (r^n - 1)^2 \to 0 \text{ lorsque } r \to 1.
\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\big| \|f_r\|_2 - \|\tilde{f}\|_2 \big| \leq \|f_r - \tilde{f}\|_2 \to 0$, alors $\|f_r\|_2 \to \|\tilde{f}\|_2$, et donc $\|f\|_{H^2} = \|\tilde{f}\|_2$.

Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$. Soit $f \in H^p$. Alors, il existe $g \in H^2$ telle que $f(z) = B(z) g(z)^{\frac{2}{p}}$ et $\|g\|_{H^2} = \|f\|_{H^p}$. En effet, par le théorème 3.2.5, nous savons qu'il existe une fonction $F \in H^p$ telle que $f(z) = B(z)F(z)$. Aussi, $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$ et F ne s'annule pas sur D. Il suffit de poser $g(z) = F(z)^{\frac{p}{2}}$. On a donc

$$\|f_r\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |B(re^{i\theta}) g_r(\theta)^{\frac{2}{p}}|^p \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |g_r(\theta)|^2 \, d\theta = \|g_r\|_2^2 .$$

En calculant la limite pour les termes de gauche et de droite, nous avons

$$\|f\|_{H^p}^p \leq \|g\|_{H^2}^2 = \|\tilde{g}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\tilde{g}(\theta)|^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |B(e^{i\theta}) \tilde{g}(\theta)^{\frac{2}{p}}|^p \, d\theta = \|\tilde{f}\|_p^p.$$

Pour l'inégalité inverse, nous avons

$$\|\tilde{f}\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|\tilde{f}(\theta)|^p\,d\theta \le \liminf_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f_r(\theta)|^p\,d\theta = \liminf_{r\to 1}\|f_r\|_p^p \le \|f\|_{H^p}^p\,.$$

L'inégalité est justifiée par le lemme de Fatou. Par le théorème 1.2.5, on a $\|f_r - \tilde{f}\| \to 0$. ☒

Remarque 3.2.1. Si $p = +\infty$, $\|f_r - \tilde{f}\|_\infty \to 0$ est faux en général, mais $\|f\|_{H^\infty} = \|\tilde{f}\|_\infty$. En effet, puisque les f_r sont continues et bornées sur C, alors $\|f_r - \tilde{f}\|_\infty \to 0$ impliquerait que $f_r \to \tilde{f}$ uniformément et donc $\tilde{f}$ serait continue.

3.3. Représentation des éléments de H^p et des fonctions limites

Dans la section précédente, nous avons vu que la fonction limite d'une fonction $f \in H^p$ quelconque est définie à partir des limites radiales. Donc, connaissant f, nous pouvons trouver $\tilde{f}$. La réciproque est-elle vraie? Peut-on retrouver les valeurs de f à partir de sa fonction limite? Oui, c'est possible. Pour $1 < p \le +\infty$, le théorème suivant est en fait un cas particulier des résultats vus au chapitre 2, mais il est maintenant aussi vrai pour $p = 1$.

Théorème 3.3.1. *Soit $f \in H^p$. Alors, f peut être représentée par l'intégrale de Poisson de sa fonction limite*

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\tilde{f}(t)P_r(\theta - t)\,dt.$$

Inversement, soit $f \in Hol(D)$. S'il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^p$ telle que

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}g(t)P_r(\theta - t)\,dt$$

alors, $f \in H^p$ et $g = \tilde{f}$ presque partout.

Définition 3.3.1. On considère $H^p(\mathrm{C})$ l'ensemble des fonctions limites des éléments de H^p. On remarque que $H^p(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p(C)$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & H^p & \to & H^p(C) \\ & f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est la fonction limite de f est une isométrie (voir théorème 3.2.6) linéaire et bijective . Les espaces H^p et $H^p(C)$ étant isométriquement isomorphes, ils sont donc identifiés. De plus, H^p étant un espace de Banach, $H^p(C)$ en est aussi un. Nous considérerons donc $H^p(C)$ comme un sous-espace *fermé* de $\mathscr{L}^p(C)$.

Théorème 3.3.2. *Nous avons la caractérisation suivante :*

$$H^p(C) = \left\{ f \in \mathscr{L}^p \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)e^{in\theta}\,d\theta = 0 \text{ pour } n \geq 1 \right\}.$$

Preuve

Soit $f \in \mathscr{L}^p$ telle que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)e^{in\theta}\,d\theta = 0$ pour $n \geq 1$. Nous voulons montrer que $f \in H^p(C)$. Posons $f(z)$ comme étant l'intégrale de Poissons de $f(\theta)$. Nous savons déjà que $\sup\limits_{r<1} \|f_r\|_p < +\infty$. Il suffit donc de prouver que f est une fonction analytique. Fixons $z = re^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} f_r(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(\theta - t)} f(t)\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,dt \qquad \left(\text{posons } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Donc, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. C'est une fonction analytique.

Supposons maintenant que $f \in H^p$. Soit $c_n(\tilde{f})$ les coefficients de Fourier de sa fonction limite $\tilde{f}(\theta)$ dans $H^p(C)$. Puisque $f(z)$ est holomorphe, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme

$$f_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_r) e^{in\theta} \qquad \text{où } c_n(f_r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Nous avons alors

$$|c_n(f_r) - c_n(\tilde{f})| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_r(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{f}(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta \right| \leq \|f_r - \tilde{f}\|_1 \to 0$$

Et donc,

$$c_n(\tilde{f}) = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

$\boxtimes$

3.4. Propriétés supplémentaires de H^p

Nous savons que pour appliquer la formule usuelle de Cauchy à une fonction, celle-ci doit être holomorphe dans un ouvert simplement connexe qui contient la courbe sur laquelle nous intégrons. Il est agréable de voir que la formule de Cauchy demeure vraie pour les fonctions de H^p, même si celles-ci ne sont pas définies à l'extérieur du disque unité et que leurs fonctions limites ne sont pas continues (et encore moins analytique) sur le cercle unité.

Théorème 3.4.1 (Formule de Cauchy). *Soit $f \in H^p$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

où $\tilde{f}$ est la fonction limite de f.

Preuve

Soit $f \in H^1$. Posons $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Alors $f_\rho \in \mathrm{Hol}(\bar{D})$ pour $0 \le \rho < 1$. Par la formule de Cauchy «classique», $f_\rho(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f_\rho(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. Soit $z \in D$ fixé.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f_\rho(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(f_\rho(\theta) - \tilde{f}(\theta)\right)\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}\,d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f_\rho(\theta) - \tilde{f}(\theta)|\frac{1}{|e^{i\theta} - z|}\,d\theta \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f_\rho(\theta) - \tilde{f}(\theta)|\,d\theta \cdot \frac{1}{1 - |z|} \\
&= \|f_\rho - \tilde{f}\|_1 \cdot \frac{1}{1 - |z|} \to 0
\end{aligned}$$

Donc, $f(z) = \lim\limits_{\rho \to 1} f_\rho(z) = \lim\limits_{\rho \to 1}\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f_\rho(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. Nous avons le résultat voulu. ☒

Dans le cas particulier où $z = 0$, alors $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\tilde{f}(\theta)\,d\theta$.

Le prochain résultat en est un de la théorie de la mesure mais nous utiliserons la théorie des espaces H^p pour le démontrer. De plus, nous joignons l'utile à l'agréable puisque nous aurons besoin de ce résultat ultérieurement.

Théorème 3.4.2 (F. et M. Riesz). *Soit μ une mesure complexe sur C telle que*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta}\,d\mu(\theta) = 0 \text{ pour } n \ge 1.$$

Alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Preuve

Soit $z \in D$. Nous posons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}}\, d\mu(t).$$

Par le théorème 1.1.1, la fonction f est analytique. Si nous écrivons $z = re^{i\theta}$, nous avons alors $\dfrac{1}{1-ze^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in(\theta - t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in(\theta-t)}\, d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} e^{int}\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int}\, d\mu(t)}_{=0} = f(z)
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, d\theta \right)}_{=1} d|\mu|(t) = \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sup_{r<1} \|f_r\|_1 < +\infty$, et donc $f \in H^1$. Nous savons que la fonction limite de f est une fonction de $\mathscr{L}^1$. De plus, nous voyons que f est représentée par l'intégrale de Poisson de sa fonction limite $\tilde{f}$ *et* par l'intégrale de Poisson de la mesure μ. Comme cette représentation est unique, nous devons avoir $d\mu(t) = \tilde{f}(t)dt$. La mesure μ est donc abolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. ☒

3.5. Les espaces H^p où $0 < p < 1$

Dans le présent chapitre, nous n'avons considéré que les cas où $p \geq 1$. Il s'agissait alors d'espaces de Banach. Dans le cas où $p < 1$, ce n'est plus vrai. En fait, ce ne sont même pas des espaces normés.

Nous gardons la notation

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{r<1} \|f_r\|_p \quad \text{où} \quad \|f_r\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f_r(\theta)|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

mais ce n'est pas une norme. En effet, $\|\cdot\|_p$ pour $0 < p < 1$, n'est pas une norme, l'inégalité du triangle n'étant pas respectée. Donc, H^p n'est pas un espace normé. Par contre, nous pouvons le munir d'une métrique

$$d(f,g) = \lim_{r \to 1} \|f_r - g_r\|_p^p .$$

Muni de cette métrique, H^p est un espace métrique complet. La preuve est faite dans [**Dur**].

Plusieurs résultats énoncés précédemment sont toujours vrai pour $0 < p < 1$. Ainsi, la limite radiale d'une fonction dans H^p existe presque partout et définit une fonction $\tilde{f}$ de $\mathscr{L}^p$ où $\|f\|_{H^p} = \|\tilde{f}\|_p$ et $\|f_r - \tilde{f}\|_p \to 0$ tout en gardant à l'esprit que ce n'est qu'une notation et non une norme. Aussi, le produit de Blaschke formé des zéros de f converge et nous pouvons factoriser notre fonction $f(z) = F(z)B(z)$ où F est une fonction de H^p ne s'annulant pas sur D et telle que $\|f\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$. Encore une fois, nous pouvons identifer H^p à $H^p(C)$ où ce dernier est une sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}^p$.

Chapitre 4

LA DUALITÉ

Dans ce chapitre nous aborderons la dualité des espaces de fonctions. Nous étudierons d'abord les espaces duaux des espaces H^p. Ensuite, nous regarderons si ces mêmes espaces H^p sont les duaux d'espaces de fonctions et si oui, quels sont-ils? Finalement, nous regarderons des cas particuliers d'espaces de fonction, comme l'algèbre du disque et $\mathrm{Hol}(D)$.

4.1. DUAL DE H^p OÙ $1 \leq p < +\infty$.

Définition 4.1.1. Soient X un espace de Banach et E un sous-espace fermé de X. Un *translaté* de x modulo E est un ensemble

$$x + E = \{x + e \mid e \in E\}.$$

Si nous adoptons comme convention que y est équivalent à x s'il est dans le translaté de x, alors, le translaté de x est une classe d'équivalence. Il est facile de montrer que deux translatés sont soit disjoints, soit confondus. On appelle l'*espace quotient* X/E, l'ensemble des classes d'équivalence de x. Si on le munit des opérations suivantes :

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \\ \lambda[x] &= [\lambda x] \end{aligned}$$

alors X/E forme un espace vectoriel dont le neutre est $[0] = E$ où 0 est le neutre de X et dont l'inverse est $-[x] = [-x]$ où $-x$ est l'inverse de x dans X.

Théorème 4.1.1. *On munit X/E de la norme suivante :*

$$\|[x]\| = \inf_{y \in E} \|x + y\|$$

On remarque que c'est la distance de x à E. Muni de cette norme, l'espace X/E est un espace de Banach.

Preuve

Soient $\{[x_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de Cauchy dans X/E et $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ telle que $\left\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\right\| \leq \dfrac{1}{2^k}$ pour $k \geq 1$. On choisit $y_k \in [x_{n_k}]$ tel que $\|y_k - y_{k+1}\| < 2\left\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\right\|$. Alors, la suite $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de Cauchy dans X. Puisque X est un espace de Banach, il existe $x \in X$ tel que $y_k \to x$. On a alors

$$\|[x_{n_k}] - [x]\| = \|[y_k] - [x]\| = \inf_{w \in E} \|y_k - x + w\| \leq \|y_k - x\| \to 0.$$

Donc, $[x_{n_k}] \to [x]$. Puisque la suite de Cauchy $\{[x_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ possède une sous-suite convergeant vers $[x]$, elle converge elle aussi vers $[x]$. $\boxtimes$

Théorème 4.1.2. *On appelle* annihilateur *du sous-espace E l'ensemble*

$$E^{\perp} = \{\varphi \in X' \mid \varphi(x) = 0 \ \forall x \in E\}.$$

C'est un sous-espace fermé de X'. L'espace E' est isométriquement isomorphe à $X'/E^{\perp}$.

Preuve

Soit $\psi \in E'$ fixé. On considère la famille des extensions de ψ

$$A_{\psi} = \{\varphi \in X' \mid \varphi\big|_E = \psi\}$$

Par le théorème de Hahn-Banach, cet ensemble est non vide. De plus, A_{ψ} est un élément de $X'/E^{\perp}$. En effet, soit φ_{ψ} une extension de ψ. Considérons

$$[\varphi_{\psi}] = \varphi_{\psi} + E^{\perp} = \{\varphi_{\psi} + \eta \mid \eta \in E^{\perp}\}.$$

Nous voyons que $[\varphi_\psi]$ est un élément de $X'/E^\perp$. Nous montrons que $A_\psi = [\varphi_\psi]$. On a $\varphi_\psi \in A_\psi$ et $\varphi_\psi = \varphi_\psi + 0$. Puisque $0 \in E^\perp$, alors $\varphi_\psi \in [\varphi_\psi]$.

Soit $\Psi \in [\varphi_\psi]$. Alors, $\Psi = \varphi_\psi + \eta$ et $\Psi\Big|_E = \varphi_\psi\Big|_E + \eta\Big|_E = \psi + 0 = \psi$ et donc $\Psi \in A_\psi$.

Posons
$$\begin{array}{rccc} L\colon & E' & \to & X'/E^\perp \\ & \psi & \mapsto & [\varphi_\psi] \end{array}$$

L'opérateur L est linéaire et bijectif. C'est aussi une isométrie. En effet, soit $\psi \in E'$ et φ une extension de ψ. On a

$$\|\psi\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} |\psi(x)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} |\varphi(x)| \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in X}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|\,.$$

Or, par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\tilde{\varphi}$ une extension de ψ telle que $\|\tilde{\varphi}\| = \|\psi\|$. Donc,

$$\|L(\psi)\| = \|[\varphi_\psi]\| = \inf_{\eta\in E^\perp} \|\varphi_\psi + \eta\| = \inf_{\Phi\big|_E = \psi} \|\Phi\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\psi\|\,. \qquad \boxtimes$$

Théorème 4.1.3. *L'annihilateur de H^p où $1 \leq p < +\infty$ est l'ensemble*

$$H_0^q = \left\{ g \in H^q \;\Big|\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{g}(\theta)\, d\theta = 0 = g(0) \right\}$$

où q et p sont conjugués.

Preuve

Soit $\varphi \in (H^p)^\perp$. C'est un élément du dual de $\mathscr{L}^p$. Par le théorème de Riesz, nous savons qu'il existe une unique fonction $g \in \mathscr{L}^q$ telle que

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) g(\theta)\, d\theta \qquad \forall\, f \in \mathscr{L}^p.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) g(\theta)\, d\theta = 0 \qquad \forall\, f \in H^p.$$

Puisque les fonctions $e^{in\theta}$ sont des fonctions de H^p pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta} g(\theta)\, d\theta = 0 \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\theta = 0.$$

Par définition, nous avons $g \in H_0^q$.

Supposons maintenant que $g \in H_0^q$. Soit $f \in H^p$. Puisque $fg \in H^1$, par la formule de Cauchy nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{f}(\theta)\tilde{g}(\theta)\, d\theta = f(0)g(0) = 0.$$

La fonctionnelle induite par la fonction g est alors un élément de $(H^p)^{\perp}$. $\boxtimes$

Corollaire 4.1.3.1. Le dual de H^p est $\mathscr{L}^q/H_0^q$ où $1 \leq p < +\infty$ et q et p sont conjugués.

Théorème 4.1.4. *L'espace* $\left(X/E\right)'$ *est isométriquement isomorphe à* $E^{\perp}$.

Preuve

Posons
$$\begin{aligned} L\colon\ (X/E)' &\to E^{\perp} \\ \Psi &\mapsto \varphi \text{ où } \varphi(x) = \Psi([x]). \end{aligned}$$

C'est bien défini. En effet, si $x \in E$, alors $\varphi(x) = \Psi([x]) = \Psi([0]) = 0$. L'opérateur L est linéaire et bijectif par construction. C'est aussi une isométrie. Nous avons

$$|\varphi(x)| = |\Psi([x])| \leq ||\Psi||\ ||[x]|| = ||\Psi|| \inf_{y\in E} ||x+y|| \leq ||\Psi||\ ||x||.$$

Ceci implique que $||L(\Psi)|| = ||\varphi|| = \sup_{\substack{||x||\leq 1 \\ x\in X}} |\varphi(x)| \leq ||\Psi||$.

Pour l'autre inégalité, nous remarquons que

$$|\Psi([x])| = |\varphi(x)| = |\varphi(x+y)| \leq ||\varphi||\ ||x+y|| \quad \forall y \in E.$$

Donc, $|\Psi([x])| \leq ||\varphi|| \inf_{y\in E} ||x+y|| = ||\varphi||\ ||[x]||$.

Nous en concluons que $||\Psi|| = \sup_{\substack{||[x]||\leq 1 \\ [x]\in X/E}} |\Psi([x])| \leq ||\varphi|| = ||L(\Psi)||$. $\boxtimes$

Corollaire 4.1.4.1. L'espace H^q est le dual de $\mathscr{L}^p/H_0^p$ où $1 \leq p < +\infty$ et q et p sont conjugués.

4.2. Le dual de $A(D)$.

Soit

$$\begin{aligned} A(D) &= \mathrm{C}(\bar{D}) \cap H^\infty \\ A(C) &= \{f\colon C \to \mathbb{C} \mid f = g|_C \text{ où } g \in A(D)\} \end{aligned}$$

On remarque que $A(C)$ est un sous-espace *propre* de $\mathrm{C}(C)$ et qu'il est isomorphe à $A(D)$.

Théorème 4.2.1. *Le dual de $A(D)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}/H_0^1$.*

Preuve

Nous savons déjà que $\mathcal{M}$ est le dual de $\mathrm{C}(C)$. Par le théorème 4.1.2, et le fait que $A(D) = A(C)$, nous avons $\big(A(D)\big)' = \mathcal{M}/A(C)^\perp$. Il suffit donc de montrer que $A(C)^\perp = H_0^1$. Par le théorème de Riesz, à chaque fonctionnelle F du dual de $\mathrm{C}(C)$, nous associons une unique mesure μ telle que

$$F(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\mu(\theta) \qquad \forall\, f \in C(C)$$

Donc,

$$\begin{aligned} A(C)^\perp &= \{F \in \big(C(C)\big)' \mid F(f) = 0\ \forall\, f \in A(C)\} \\ &= \{\mu \in \mathcal{M} \mid \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\mu(\theta) = 0\ \forall\, f \in A(C)\} \end{aligned}$$

Soit $\mu \in A(C)^\perp$. Puisque les fonctions $e^{in\theta}$ sont des éléments de $A(C)$ pour $n \geq 1$, nous avons alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0$. Par le théorème de F. et M. Riesz, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe donc une fonction $g \in \mathscr{L}^1$ telle que $d\mu(\theta) = g(\theta)d\theta$. Nous avons maintenant

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta} g(\theta)\, d\theta = 0$, c'est-à-dire $g \in H^1$. De plus, puisque $1 \in A(C)$, nous avons

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\, d\theta = g(0).$$

Ceci montre que $g \in H_0^1$.

Supposons maintenant que $g \in H_0^1$. Soit $f \in A(C)$. Posons $d\mu(\theta) = g(\theta)d\theta$. Puisque $gf \in H^1$, nous avons

$$0 = g(0)f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\mu(\theta).$$

Ceci montre que $\mu \in A(C)^{\perp}$. ▨

Corollaire 4.2.1.1. L'espace $\big(C(C)/A(C)\big)'$ est isométriquement isomorphe à H_0^1.

4.3. Le dual de $Hol(D)$.

Définition 4.3.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une *semi-norme* sur E est une application $p\colon E \to [0, +\infty[$ telle que

- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in E$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall\, x,\ y \in E$.

On dit qu'un espace vectoriel topologique E est *localement convexe* s'il existe une base de la topologie formée d'ensembles convexes. On peut montrer que c'est équivalent à dire qu'il existe une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes telle que les ensembles $\{x \in E \mid p(x - y) < \varepsilon,\, p \in \mathcal{P},\, y \in E,\, \varepsilon > 0\}$ engendrent la topologie de E.

Exemple

L'espace $\mathrm{Hol}(D)$, avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, générée par la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_K\}$ où K est un ensemble compact de D et $\|f\|_K = \sup\limits_{z \in K} |f(z)|$.

Une fonctionnelle linéaire L sur un espace vectoriel topologique localement convexe est continue si et seulement si il existe une semi-norme $\|\cdot\|_0 \in \mathcal{P}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que $|L(f)| \leq M \|f\|_0 \ \forall f \in E$. La preuve de cet énoncé peut être trouvée dans **[L&R]**.

Théorème 4.3.1. *Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites de nombre complexes. Posons $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$, $ab = \{a_n b_n\}$ et $\sigma(a) = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Alors,*

$$\sigma(b) < 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \text{ converge } \forall\, a \text{ tel que } \sigma(a) \leq 1$$

Preuve

Soient a et b tels que $\sigma(b) < 1$ et $\sigma(a) \leq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \sigma(ab) &= \limsup |a_n b_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} |b_n|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \limsup |b_n|^{\frac{1}{n}} = \sigma(a)\sigma(b) < 1 \end{aligned}$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge par le test de la racine.

Soit b tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge pour tout a tel que $\sigma(a) \leq 1$. On veut montrer que $\sigma(b) < 1$. On suppose le contraire c'est-à-dire $\sigma(b) \geq 1$. Puisque $\sigma(b) \geq 1$, il existe deux sous-suites $\{n_k\}$ et $\{\varepsilon_k\}$ telles que $n_k \to +\infty$, $\varepsilon_k \to 0$ et $|b_{n_k}| \geq (1-\varepsilon_k)^{n_k}$. Posons

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_k \\ e^{-i \arg(b_{n_k})} \frac{1}{(1-\varepsilon_k)^{n_k}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\sigma(a) = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| \geq \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ qui est une contradiction. Donc, nous devons avoir $\sigma(b) < 1$. ☒

Soit l'espace vectoriel $\mathcal{A} = \{a = \{a_n\} \mid \sigma(a) \leq 1\}$. avec la topologie générée par la famille de semi-normes $\mathcal{P}' = \{\|\cdot\|_{0<r<1}\}$ où $\|a\|_r = \sup_n |a_n| r^n$. On veut identifier $\mathcal{A}$ et $\mathrm{Hol}(D)$.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{A} &\to \operatorname{Hol}(D) \\ a &\mapsto f\big|_D \text{ où } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

C'est bien défini car le rayon de convergence d'une série de puissance $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\sigma(a)}$. L'opérateur φ est bien linéaire et bijectif. Son inverse est donné par $\varphi^{-1}(f) = a = \left\{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right\}$. Cet opérateur induit une topologie sur $\mathcal{A}$. En fait, la topologie induite est la même que celle générée par la famille de semi-normes $\mathcal{P}'$.

Preuve

Nous montrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $0 < r < 1$, il existe un sous-ensemble compact K de D et un $\delta > 0$ tel que si $\|f\|_K < \delta$ alors $\|a\|_r = \|\varphi^{-1}(f)\|_r < \varepsilon$. Nous aurons besoin de l'inégalité de Cauchy dont la preuve se trouve dans **[L&R]**.

Lemme 4.3.1 (Cauchy). Soit $f \in \operatorname{Hol}(D)$. Alors

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|\leq r} |f(z)| \qquad \text{pour } r < 1.$$

Soient $\varepsilon > 0$, et $0 < r < 1$. Posons $K = \bar{D}(0,r)$. Alors

$$\|f\|_K < \delta \Rightarrow \|a\|_r = \sup_n |a_n| r^n = \sup_n \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n \leq \sup_n \frac{1}{r^n} \max_{|z|\leq r} |f(z)| r^n < \delta.$$

Si nous posons $\delta = \varepsilon$, nous avons le résultat voulu.

Nous montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout sous-ensemble compact K de D, il existe r tel que $0 < r < 1$, et un $\delta > 0$ tels que si $\|a\|_r < \delta$ alors $\|f\|_K = \|\varphi(a)\|_K < \varepsilon$.

Soient $\varepsilon > 0$, et K un compact de D. Soit $\rho < 1$ tel que $K \subset \bar{D}(0,\rho)$. Soit r tel que $\rho < r < 1$. On pose $\delta = \varepsilon(1 - \frac{\rho}{r})$. Si $\|a\|_r < \delta$, alors

$$\|f\|_K = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right\|_K \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \rho^n \leq \|a\|_r \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < \varepsilon.$$

$\boxslash$

Théorème 4.3.2. *Soit* $\mathcal{A}_0 = \{a = \{a_n\} \mid \sigma(a) < 1\}$ *muni de la même topologie que* $\mathcal{A}$*. Alors le dual de Hol*(D) *est* $\mathcal{A}_0$*.*

Preuve

Soit L un élément du dual de Hol(D). On pose $\lambda = \{\lambda_n\}$ où $\lambda_n = L(z^n)$ pour $n \geq 0$. Si $a = \{a_k\}$ est la suite des coefficients de Taylor de la fonction f, nous savons que $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ converge vers f dans la topologie de Hol(D). Puisque L est continue, $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k = L\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)$ converge vers $L(f)$. Aussi, puisque $\sigma(a) \leq 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n$ converge, nous avons $\sigma(\lambda) < 1$ par le théorème 4.3.1. Donc,

$$\forall\, L \in \big(\mathrm{Hol}(D)\big)' \text{ il existe } \lambda \in \mathcal{A}_0 \text{ tel que } L(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n \text{ pour tout } f \in \mathrm{Hol}(D).$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathcal{A}_0$. On pose

$$L(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n.$$

Cette série converge pour $f \in$ Hol(D) par le théorème 4.3.1. Nous voyons que L est une fonctionnelle linéaire. Il suffit de montrer qu'elle est continue.

Nous montrons qu'il existe $0 < r < 1$ et une constante M tels que $|L(f)| \leq M \left\|a\right\|_r$. Soient ρ et r tels que $\sigma(\lambda) < \rho < r < 1$. Il existe donc n_0 tel que $|\lambda_n| \leq \rho^n$ pour $n \geq n_0$. Donc,

$$|L(f)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n\right| \leq \sum_{n<n_0} |a_n||\lambda_n| + \sum_{n\geq n_0} |a_n|\rho^n \leq \underbrace{\left(\sum_{n<n_0} \left|\frac{\lambda_n}{r^n}\right| + \frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n_0}}{1-\frac{\rho}{r}}\right)}_{=M} \left\|a\right\|_r .$$

Donc, $\forall\, \lambda \in \mathcal{A}_0$, la fonctionelle définie par $L(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n$ est un élément du dual de Hol(D). $\boxslash$

Il y a une autre façon de représenter les éléments du dual de $\mathrm{Hol}(D)$. On dit qu'une fonction f est analytique dans un fermé F s'il existe un ouvert U contenant F et une extension de f à U qui soit analytique.

Soit $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,r))$ où $0 < r < 1$. Soit ρ tel que $r < \rho < 1$. On pose

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f(z)g(z)\, dz \qquad \forall\, f \in \mathrm{Hol}(D)$$

Alors φ est une fonctionnelle linéaire continue. En effet, si $f_n \to f$ dans $\mathrm{Hol}(D)$, alors $f_n \to f$ uniformément sur $C(0,\rho)$. Aussi, puisque g est bornée sur $C(0,\rho)$, on a $f_n g \to fg$ uniformément sur $C(0,\rho)$. Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f_n(z)g(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f(z)g(z)\, dz = \varphi(f).$$

La réciproque est aussi vraie.

Théorème 4.3.3 (Caccioppoli). *Soit $\varphi \in \big(Hol(D)\big)'$. Alors il existe une fonction $g \in Hol(\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,r))$ où $0 < r < 1$, s'annulant à l'infini et $r < \rho < 1$ tels que*

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f(z)g(z)\, dz \qquad \forall\, f \in Hol(D).$$

Preuve

Posons $\|f\|_r = \|f\|_{\bar{D}(0,r)} = \sup\limits_{z\in\bar{D}(0,r)} |f(z)|$. Soit φ un élément du dual de $\mathrm{Hol}(D)$. Puisque φ est continue, il existe une semi-norme $\|\cdot\|_K$ telle que $|\varphi(f)| \leq M\,\|f\|_K$ pour toute fonction $f \in \mathrm{Hol}(D)$. Aussi, il existe un rayon $r < 1$ tel que $K \subset \bar{D}(0,r)$. Si $f \in \mathrm{Hol}(D)$ et $\|f\|_{\bar{D}(0,r)} = 1$. Alors

$$|\varphi(f)| \leq M\,\|f\|_K \leq M\,\|f\|_{\bar{D}(0,r)} = M.$$

La deuxième inégalité est justifiée puisque $K \subset \bar{D}(0,r)$.

On considère l'espace $A_r = C(\bar{D}(0,r)) \cap \mathrm{Hol}(\bar{D}(0,r))$. Muni de la norme $\|\cdot\|_r$, c'est un espace de Banach. Nous considérons $\mathrm{Hol}(D)$ comme un sous-espace fermé de A_r.

Nous avons montré que φ est une fonctionnelle linéaire continue du sous-espace $\mathrm{Hol}(D)$. Par le théorème de Hahn-Banach, φ peut être étendue à une fonctionnelle linéaire continue $\tilde{\varphi}$ sur tout A_r.

Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta| > r$. La fonction $\dfrac{1}{\zeta - z}$ est alors un élément de A_r. Posons $g(\zeta) = \tilde{\varphi}\left(\dfrac{1}{\zeta - z}\right)$. Si $|\zeta_0| > r$, alors

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{g(\zeta) - g(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} = \lim_{\zeta \to \zeta_0} \tilde{\varphi}\left(\frac{-1}{(\zeta - z)(\zeta_0 - z)}\right) = \tilde{\varphi}\left(\frac{-1}{(\zeta_0 - z)^2}\right).$$

Ceci montre que g est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\bar{D}(0,r) \supset \mathbb{C}\backslash D$. Puisque $\bar{D}(0,r)$ est compact, g est analytique dans un voisinage pointé de l'infini et

$$\lim_{|\zeta| \to +\infty} g(\zeta) = \lim_{|\zeta| \to +\infty} \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \tilde{\varphi}(0) = 0.$$

Soient $f \in \mathrm{Hol}(D)$ et ρ tel que $r < \rho < 1$. Par la formule de Cauchy, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall\, z \in D(0,\rho) \supset \bar{D}(0,r).$$

De plus, puisque cette intégrale est la limite uniforme des sommes partielles de Riemann et que $\tilde{\varphi}$ est continue sur A_r, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = \tilde{\varphi}(f) &= \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f(\zeta)\tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,\rho)} f(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

4.4. Le dual de H^p où $0 < p < 1$.

Les preuves des énoncés de cette section peuvent être trouvées dans [**Dur**].

Une fonctionnelle linéaire sur H^p est dite bornée si

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\varphi(f)| < +\infty.$$

On peut montrer qu'une fonctionnelle linéaire sur H^p sera bornée si et seulement si elle est continue. Muni de la norme ci-haut, l'espace $\left(H^p\right)'$ où $0 < p < 1$ est un espace de Banach.

Soit $0 < \alpha \leq 1$. On pose

$$\Lambda_\alpha(C) = \{f\colon C \to \mathbb{C} \mid \text{il existe une constante } L \text{ telle que } |f(\varphi) - f(\theta)| \leq L|\varphi - \theta|^\alpha\}.$$

On dira que $f \in \Lambda_\alpha$ si $f \in A(D)$ et sa fonction limite $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(C)$. On a que $\Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha$ si $\alpha < \beta$. Soit

$$\Lambda_*(C) = \{f\colon C \to \mathbb{C} \mid |f(\theta + h) - 2f(\theta) - f(\theta - h)| \leq Mh\}$$

où M est une constante. On dira que $f \in \Lambda_*$ si $f \in A(D)$ et sa fonction limite $\tilde{f} \in \Lambda_*(C)$. On a que $\Lambda_1 \subset \Lambda_* \subset \Lambda_\alpha$ si $\alpha < 1$.

Théorème 4.4.1. *Soit* $0 < p < 1$.

1. *Si* $\dfrac{1}{n+1} < p < \dfrac{1}{n}$ *où* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $\alpha = \dfrac{1}{p} - n$. *Soit* φ *un élément du dual de* H^p. *Alors, il existe une fonction* $g \in A(D)$ *telle que* $g^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$ *et*

$$\varphi(f) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_r(e^{i\theta}) g(e^{-i\theta})\, d\theta \qquad \forall\, f \in H^p. \tag{4.4.1}$$

Réciproquement, pour toute fonction g *telle que* $g^{(n-1)} \in \Lambda_\alpha$, *le terme de droite de l'équation (4.4.1) définit une fonctionnelle linéaire continue sur* H^p.

2. *Si* $p = \dfrac{1}{n+1}$, *alors la fonction* $g^{(n-1)} \in \Lambda_*$, *et réciproquement, pour toute fonction* g *telle que* $g^{(n-1)} \in \Lambda_*$, *le terme de droite de l'équation (4.4.1) définit une fonctionnelle linéaire continue sur* H^p.

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de trouver les espaces duaux des espaces de Hardy ainsi que d'autres espaces de fonctions. Nous l'avons fait pour le cas de l'algèbre du disque et de l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité muni de la topologie de la convergence uniforme.

Cependant, il reste des cas que nous n'avons pas couverts. L'espace dual de H^∞ n'est pas encore connu. De même on pourrait se poser des questions similaires quant au dual de l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité muni de la topologie de la convergence uniforme sur le disque.

Ce sont deux problèmes ouverts auxquels j'aimerais peut-être réfléchir un jour...

BIBLIOGRAPHIE

[Ahl] Lars V. AHLFORS, *Complex Analysis (An Introduction to the Theory of Analytic Functions of one Complex Variable)*, McGraw-Hill Publishing Company, États-Unis, 1953 (1979).

[Ash] Robert B. ASH, *Measure, Integration and Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.

[B&N] Joseph BAK & Donald J. NEWMAN, *Complex Analysis (second edition)*, Springer-Verlag, New-York, 1997.

[Car] Henri CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Herman, Paris, 1961 (1978).

[Dur] Peter L. DUREN, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[Gar] John B. GARNETT, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New-York, 1981.

[G&K] Robert E. GREENE et Steven G. KRANTZ, *Function Theory of One Complex Variable*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1997.

[Hof] Kenneth HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, N.J., 1962.

[Jea] Roger JEAN, *Mesure et intégration*, Les presses de l'Université du Québec à Montréal, 1975.

[Kat] Yitzhak KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis (second corrected edition)*, Dover Publicatios Inc., New-York, 1968 (1976).

[Koo] Paul KOOSIS, *Introduction to H^p Spaces*, Cambridge Unversity Press, cambridge, 1980.

[L&R] D.H. LUECKING & L.A. RUBEL, *Complex Analysis, A functional Analysis Approach*, Springer – Verlag, New-York, 1984.

[Rud] Walter RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1966 (1978).

[Sar] Donald SARASON, *Function Theory on the Unit Circle*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1978.

[Sch] Glenn SCHOBER, *Univalent Functions – Selected Topics*, Springer–Verlag, New-York, 1975.