Université de Montréal

Une étude des graphes jumeaux via l'auto-abritement

par

Alizée Gagnon

Département d'informatique et de recherche opérationelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Informatique

7 mars 2022

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Une étude des graphes jumeaux via l'auto-abritement

présenté par

Alizée Gagnon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Nadia El-Mabrouk
(président-rapporteur)

Geňa Hahn
(directeur de recherche)

Ben Seamone
(codirecteur)

Pierre McKenzie
(membre du jury)

Résumé

On étudie la conjecture des graphes jumeaux dénombrables, cas spécifique d'une conjecture de Thomassé, qui dit que le nombre de jumeaux d'un graphe dénombrable (ses sous-graphes propres desquels il est aussi un sous-graphe propre) est soit nul, soit infini. On commence par étudier les graphes auto-abrités, que nous définissons, et en utilisant notre classification de ces graphes nous prouvons la conjecture dans certains cas, en précisant la cardinalité exacte du nombre de jumeaux. Nous donnons également des contre-exemples à l'article de l'`arXiv` «Self-contained graphs» [**12**].
Mots-clés : Graphe infini, Abritement, Conjecture Alternative des Graphes, Conjecture de Thomassé, Jumeau, Auto-Abritement, Graphe Auto-Abrité

Abstract

We make progress on the Graph Alternative Conjecture, a special case of a conjecture of Thomassé which says that the number of twins of a countable graph (i.e. its proper subgraphs of which that graph is also a proper subgraph) is either null or infinite. We begin by studying self-embedded graphs, which we define, and using our classification of these graphs, we prove the conjecture in some cases while specifying the exact number of twins. We also give counter-examples to a paper on `arXiv` called "Self-contained graphs".
Keywords: Graph Alternative Conjecture, Self-Contained Graphs, Twins, Embeddings, Infinite Graph, Self-Embedding

Table des matières

Liste des sigles et des abréviations

GAC	La conjecture des graphes jumeaux, de l'anglais *Graph Alternative Conjecture*
TAC	La conjecture des arbres jumeaux, de l'anglais *Tree Alternative Conjecture*
P^n	La chaîne de longueur n, de l'anglais *Path of length* n
ω	Le plus petit ordinal infini
$\aleph_0$	Le plus petit cardinal infini, $\lvert\omega\rvert$
$[n]$	L'ordinal de cardinalité $n \in \mathbb{N}$
P^ω	Le rayon, ou la chaîne de longueur ω
R	Le graphe de Rado, ou le graphe aléatoire
$T_{i,j}$	L'arbre (i,j)

Remerciements

Merci à mon directeur de recherche Geňa Hahn et mon codirecteur Ben Seamone, à mes collègues Jérémie Turcotte et Nicolas Hurtubise, à mes parents Christine et Louis, à mon chat Bibi et surtout à mon copain François.

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce mémoire est d'explorer la conjecture des graphes jumeaux et de commenter l'article «Self-Contained Graphs», publié sur `arXiv`, qui prétend en résoudre une partie. L'objet qui provoque l'intérêt est le *jumeau* d'un graphe, qui est un graphe différent du premier qui comprend le premier graphe et en même temps est compris dans celui-ci. Nous considérerons plusieurs conjectures à leur sujet, dont principalement la conjecture stipulant que si un graphe dénombrable possède un jumeau, alors il en possède une infinité. Elle est nommée «Graph Alternative Conjecture», que l'on va abréger comme GAC. Cette conjecture a été énoncée pour la première fois par Thomassé en 2000 [**14**] pour des structures relationnelles dénombrables. Il n'en a pas fait de publication, mais l'idée a commencé à circuler.

Inspirés par un article précédent [**3**] où ils montrent que certains graphes ont un nombre maximum possible de jumeaux, Bonato et Tardif identifient un cas intéressant de la conjecture dans un article de 2006 [**4**]. Ils énoncent la «Tree Alternative Conjecture», que l'on abrège en TAC, qui traite du nombre de jumeaux des arbres. Ils prouvent la TAC pour les arbres sans rayons dans le même article.

En 2009 [**15**], Tyomkin prouve que la TAC est vraie lorsque restreinte aux arborescences, avec ou sans rayons. Il entame aussi le travail sur les graphes localement finis. En 2011 [**1**], Bonato et coll. prouvent que la GAC est vraie pour les graphes sans rayons. C'est donc un premier résultat par rapport aux graphes qui ne sont pas des arbres.

En 2017 [**11**], Laflamme, Pouzet et Sauer prouvent la TAC pour les arbres dispersés. En 2019, la communauté se rend compte qu'un inconnu, Atsushi Tateno, avait annoncé un contre-exemple à la TAC en 2008 dans sa thèse de doctorat [**13**]. La preuve est toutefois si complexe que le résultat n'est pas encore indépendamment vérifié. La GAC est donc ouverte au moment de la remise de ce travail.

Notre attention se penchera plutôt sur un article de l'`arXiv` de 2016-2018 [**12**]. Ses auteurs, Shekarriz et Mirzavaziri, étudient les graphes jumeaux qui ne sont pas connexes. Ils introduisent aussi un nouvel angle d'approche pour parler des graphes jumeaux. L'objectif de leur travail était de montrer l'équivalence de la GAC à sa version restreinte aux graphes connexes.

La première version de l'article contenait une erreur dans la preuve du lemme principal, et le grand théorème de la deuxième version était faux. Inspirés de leur idée de regarder les graphes auto-abrités, nous corrigeons leur caractérisation de ces graphes non connexes et nous utilisons cette caractérisation pour décrire plusieurs classes de graphes qui vérifient la GAC. Nous montrons non seulement que ces graphes ont un nombre infini de jumeaux, mais aussi que le nombre de jumeaux de plusieurs d'entre eux est le maximum théorique pour des graphes dénombrables, soit $2^{\aleph_0}$.

Nous commencerons par préciser certaines définitions qui nous permettront de présenter des exemples de graphes qui possèdent des propriétés intéressantes dans le contexte des graphes jumeaux. Après une revue de littérature, nous présenterons le théorème réparé puis les corollaires qu'on en tire. Nous terminerons par des problèmes ouverts.

Chapitre 2

Définitions et observations

Premièrement, quelques définitions et conventions sur les graphes en général. Les définitions sont inspirées de celles de [**6**] sauf indication contraire.

2.0.1. Définitions

Puisque la toute première interrogation au sujet des «jumeaux» d'un objet portait sur ceux des structures relationnelles, en voici une définition :

Définition 2.0.1 (Structure relationnelle)**.** *Une* structure relationnelle *est un ensemble muni d'une ou plusieurs relations.*

Autrement dit, une structure relationnelle est un tuple à deux ou plus composantes où la première composante est un ensemble et les autres sont des relations sur l'ensemble. Dans notre cas, la structure relationnelle qu'on étudie est le graphe :

Définition 2.0.2 (Graphe)**.** *Un* graphe *est une paire $G = (V, E)$ où V est un ensemble de* sommets *et E un ensemble d'*arêtes*, $E \subseteq \{\{u,v\} | u, v \in V, u \neq v\} = \binom{V}{2}$. On écrit aussi $V = V(G)$ et $E = E(G)$.*

On peut voir un graphe comme une structure relationnelle (V,E) où E est une relation binaire symétrique non réflexive sur l'ensemble de sommets V. L'arête $\{u,v\}$ d'un graphe *joint* le sommet u au sommet v et est également notée $[u,v]$ ou uv. On dira que u et v sont *voisins* ou *adjacents*. Le nombre de voisins d'un sommet est appelé son *degré*.

Dans ce mémoire, on travaille avec des ordinaux. Ce sont les propriétés des ordinaux [**10**] qui nous permettent de confondre l'ensemble des naturels $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ avec le premier ordinal infini ω, puisque $\mathbb{N}$ et ω sont isomorphes. On dira donc $n < \omega$ ou $n \in \mathbb{N}$ indifféremment. De plus, on utilisera l'isomorphisme entre ces ensembles pour exprimer le énième ordinal par $[n] = \{i \in \mathbb{N} : i < n\} = \{0,1,...,n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.0.3 (Ordre)**.** *L'*ordre *d'un graphe est la cardinalité de son nombre de sommets, c'est-à-dire $|V|$.*

Dans ce travail, on parlera majoritairement de graphes d'ordre infini, et en particulier de ceux qui sont dénombrables, c'est-à-dire ceux dont l'ordre est $\aleph_0$.

La conceptualisation d'un graphe en tant que structure relationnelle nous permet de poser la définition suivante d'un sous-graphe :

Définition 2.0.4 (Sous-graphe)**.** *Un* sous-graphe $H = (U,F)$ *du graphe* $G = (V,E)$ *est une sous-structure de* G *qui hérite de la relation globale de* G*, soit* $U \subseteq V$ *et* $F = E \cap \binom{U}{2}$

En théorie des graphes, par exemple dans [**6**], on dirait qu'un tel sous-graphe est *induit*, mais dans le cadre de ce mémoire, nous utilisons la notion algébrique et logique de *sous-structure*, donc tous nos sous-graphes sont induits. Un sous-graphe H du graphe G est dit *propre* si $V(H) \subsetneq V(G)$. Si $H = (U,F)$ est un sous-graphe de G, on écrira $H \leq G$; si $U \neq V$, on écrira $H < G$.

Tout ensemble de sommets d'un graphe G *induit* un sous-graphe. Le sous-graphe de G contenant les sommets $U \subseteq V$ et les arêtes $F = E \cap \binom{U}{2}$ est noté $G[U]$. Si $H = (U,F)$ est un sous-graphe de G, on peut définir $G - H = G \setminus H = G[V \setminus U]$. On abusera aussi de la notation pour dire que $G[H] = G[V(H)]$, et que si $V(H) \not\subseteq V(G)$, on aura que $G[H] = G[V(H) \cap V(G)]$.

En théorie des graphes, tout comme dans beaucoup d'autres théories mathématiques, on parle souvent d'*homomorphismes* : dans le cas des graphes, ce sont des fonctions qui envoient un graphe dans un autre en préservant certaines propriétés structurelles.

Définition 2.0.5 (Homomorphisme)**.** *Un* homomorphisme *du graphe* G *dans le graphe* H *est une fonction* $h : V(G) \longrightarrow V(H)$ *telle que* $[u,v] \in E(G)$ *implique* $[h(u), h(v)] \in E(H)$*.*

On remarque que deux graphes *homomorphes* n'ont pas besoin de posséder le même nombre de sommets. Leur structure n'est aussi pas nécessairement identique ; l'homomorphisme peut mettre en évidence le fait qu'il est possible de replier la structure sur elle-même.

Un cas particulier de l'homomorphisme qui est mentionné dans la revue de littérature est le suivant :

Définition 2.0.6 (Endomorphisme)**.** *Un* endomorphisme *est un homomorphisme de* G *vers lui-même.*

Dans ce travail, on utilisera un type d'homomorphisme en particulier, l'isomorphisme, qui n'existe entre deux graphes que si ils ont une structure identique :

Définition 2.0.7 (Isomorphisme)**.** *Un* isomorphisme *entre le graphe* G *et le graphe* H *est une bijection* $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ *telle que* $[u,v] \in E(G)$ *si, et seulement si,* $[f(u),f(v)] \in E(H)$*.*

On notera deux graphes *isomorphes* par $G \cong H$. Puisque l'isomorphisme est d'abord une bijection entre les sommets d'un graphe et de l'autre, ces deux graphes ont toujours le même nombre de sommets. Ils ont aussi exactement le même agencement d'arêtes. La différence entre deux graphes *isomorphes* revient donc au nom qu'on leur donne, aux étiquettes qu'on aurait données à leurs sommets, ou bien, dans le cas de graphes qu'on a dessinés, à la perspective avec laquelle on les a dessinés.

Si l'isomorphisme est de G vers G, on l'appelle un *automorphisme* ; tout graphe possède au moins un automorphisme trivial, l'identité, qui envoie chaque sommet sur lui-même. On peut voir l'automorphisme comme un endomorphisme bijectif.
Nous visiterons sous peu plusieurs classes de graphes populaires, en plus d'exemples de graphes qui sont particulièrement intéressants dans le cadre de ce mémoire. Nous parlerons ici de classes de graphes puisque pour chaque structure identifiée, il existe une infinité de graphes qui y sont isomorphes et qui méritent donc le même nom. On s'entendra donc pour dire que chaque graphe défini est simplement le représentant de sa classe d'équivalence.

On peut parler de classe d'équivalence ici puisque l'isomorphisme est une relation d'équivalence. En effet, elle est réflexive : un graphe est toujours isomorphe à lui-même par la fonction identité sur ses sommets.

De plus, elle est symétrique : si G est isomorphe à H, alors H est isomorphe à G, car l'isomorphisme est une bijection et préserve la structure des sommets et arêtes exactement.

Enfin, elle est transitive : si $G \cong H$ et $H \cong I$, alors on peut composer les deux isomorphismes en un seul pour obtenir que $G \cong I$.

Cette relation induit donc des classes d'équivalences. On définit la classe d'équivalence par isomorphisme représentée par le graphe G par $[G]_{\cong}$.

Définition 2.0.8 (Chaîne)**.** *Une* chaîne *de longueur n, $n < \omega$, est un graphe $P^n = (V,E)$ de la forme $V = [n+1]$, $E = \{[i,i+1] : i \in [n]\}$.*

On appelle P^0 le graphe vide et P^1 le graphe trivial. Remarquons que dans la plupart des ouvrages de théorie des graphes, la chaîne notée P_n est de longueur $n-1$ et contient n sommets. Nous utilisons ici la définition de Diestel [**6**]. On peut noter la chaîne de la définition 2.0.8 $v_0v_1v_2...v_n$. On dira qu'il y a une chaîne de longueur n du sommet u au sommet v dans un graphe G si $v_1, v_2, ...v_{n-1} \in V(G)$ et $uv_1v_2...v_{n-1}v$ est une chaîne.
Définition 2.0.9 (Distance)**.** *La* distance *entre u et $v \in V(G)$ est $d(u,v) = n$ si n est la longueur minimum d'une chaîne de u à v dans G.*

Les chaînes nous intéressent parce que deux sommets d'un graphe reliés par une chaîne sont considérés *connectés*. Ceci nous amène à la définition d'un graphe connexe.
Définition 2.0.10 (Première définition de connexité)**.** *Un graphe G est* connexe *si pour tous sommets $u,v \in V(G)$ il existe une chaîne allant du sommet u au sommet v.*

On peut aussi définir un graphe connexe sans parler de chaînes.

Définition 2.0.11 (Deuxième définition de connexité)**.** *Un graphe G est* connexe *si pour toute partition non triviale de $V(G)$ en deux ensembles $V = V_0 \sqcup V_1$, il existe $u \in V_0$ et $v \in V_1$ tels que $uv \in E(G)$.*

Les deux définitions sont équivalentes. Puisque la connexité est une notion importante dans ce mémoire, prouvons cette équivalence.

Lemme 2.0.12. *Les deux définitions de connexité sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $G = (V,E)$ un graphe. Supposons que G est connexe par la définition 2.0.10. Soit $V = V_0 \sqcup V_1$ une partition non triviale de ses sommets. Par hypothèse, pour tous $u,v \in V$, il existe une chaîne $u_0u_1u_2...u_{n-1}u_n$ entre $u = u_0$ et $v = u_n$; en particulier, soient $u_0 \in V_0$ et $u_n \in V_1$. De tels sommets existent, car la partition n'est pas triviale. Puisque u_0 et u_n ne sont pas dans la même classe de la partition, il doit exister $m < n$ tel que les sommets u_m et u_{m+1} de la chaîne entre u_0 et u_n ne sont pas dans la même partition : $u_m \in V_0$ et $u_{m+1} \in V_1$. Alors l'arête $[u_m, u_{m+1}] \in E$ nous permet de dire que G respecte aussi la définition 2.0.11.

Supposons maintenant que G n'est pas connexe selon la définition 2.0.10, et montrons que G ne peut pas respecter la définition 2.0.11 non plus.

Définissons une relation d'équivalence R telle que uRv si et seulement si il existe une chaîne entre u et v. C'est une relation d'équivalence puisqu' il existe toujours une chaîne entre un sommet et lui-même ; la chaîne fonctionne toujours dans les deux sens ; et si il existe une chaîne entre u et v et une autre entre v et w, alors il en existe une entre u et w. Il découle de la définition qu'il n'existe aucune arête entre deux classes différentes de la relation R.

Puisque G n'est pas connexe selon la définition 2.0.10, il existe $u, v \in V$ tels qu'aucune chaîne n'existe entre u et v. La relation R induit donc une partition non triviale de V en au moins deux classes, $[u]_R$ et $[v]_R$, contenant les sommets u et v respectivement. Par notre observation, il n'y a aucune arête entre deux classes de R, et donc aucune entre les deux classes non vides de la partition de V en $[u]_R$ et $V \setminus [u]_R$. Le graphe n'est donc pas connexe selon la définition 2.0.11. □

Pour les graphes dénombrables, ces définitions permettent de développer une intuition des graphes qui sont connexes. Ce n'est pas toujours possible d'avoir la même intuition pour des graphes indénombrables.

Prenons par exemple le graphe dont les sommets sont l'ensemble $V = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$, et dont les arêtes sont $E = \{[f,g] \in V : \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|f(n) - g(n)| = 1$ et $f(m) = g(m)$ $\forall m \neq n\}$. Ainsi dans ce graphe la distance entre le sommet f_0, où $f_0(n) = 0$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$, et le sommet f_1, où $f_1(n) = 1$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$, est infinie, même si intuitivement les deux sommets semblent reliés. Puisque il n'existe pas de chaîne infinie dans notre définition, ce graphe n'est pas connexe. L'intuition échoue à visualiser quelles seraient les composantes connexes de ce graphe.

Définition 2.0.13 (Diamètre)**.** *Le* diamètre *d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets du graphe.*

Notons que le diamètre peut être non défini, soit parce que la distance entre deux sommets est non bornée (voir le rayon, définition 2.0.31), soit parce que le graphe n'est pas connexe. Puisqu'une distance est finie, on dira que dans ce dernier cas le diamètre est infini.

On dira d'un graphe qui n'est pas connexe qu'il est *déconnecté*. Dans ce cas, le graphe sera composé d'au moins deux sous-graphes connexes qui ne sont pas reliés entre eux :

Définition 2.0.14 (Composante connexe)**.** *Une* composante connexe *dans un graphe G est un sous-graphe H connexe maximal, c'est-à-dire que pour tout $u \in V(H), v \in V(G) \setminus V(H)$, on a $[u,v] \notin E(G)$.*

Pour le graphe G, on note l'ensemble de ses composantes connexes par $CC(G) = \{H \leq G : H \text{ est maximal et connexe}\}$.

Une façon équivalente de définir les composantes connexes de G est en réutilisant la relation d'équivalence R de la preuve du lemme 2.0.12 : uRv si et seulement si il existe une chaîne entre u et v. Alors les composantes connexes de G sont les classes d'équivalences induites par la relation R.

Pour construire plusieurs des graphes dont nous avons besoin dans ce mémoire, il faut que nous assemblions des composantes connexes ensemble. Nous définissons deux opérations.

Définition 2.0.15 (Union de graphes)**.** *Si $G = (V, E)$ et $H = (U,F)$ sont des graphes, alors $G \cup H = (V \cup U, E \cup F)$ est l'*union *de ces deux graphes. Si $V \cap U = \emptyset$, on parle d'*union disjointe *et on la note $G \sqcup H$.*

Bien sûr, $E \cap F = \emptyset$ quand $U \cap V = \emptyset$. Quand deux ensembles X et Y sont disjoints, alors $X \sqcup Y = X \cup Y$. Sinon, si les ensembles ne sont pas disjoints, on interprétera dans ce mémoire $X \sqcup Y$ comme $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$.

De manière analogue, on passera d'un graphe $G = (V,E)$ au graphe $G \times \{0\}$ en prenant $V \times \{0\}$ comme ses sommets et $\{[(u,0),(v,0)] : [u,v] \in E\}$ comme ses arêtes. Le graphe G est isomorphe au graphe $G \times \{0\}$ par l'isomorphisme $f : G \longrightarrow G \times \{0\}$ où $f(v) = (v,0)$. Ainsi $G \sqcup H$ n'est jamais connexe, puisque l'expression représente $G \times \{0\} \sqcup H \times \{1\}$, et ces derniers graphes n'ont pas de sommets en commun.

On peut étendre la notation $\sqcup$ ainsi : si I est un ensemble de graphes, $G_I = \bigsqcup_{G \in I} G$ est un graphe qui contient tous les graphes de I de façon disjointe : on aura que $CC(G_I)$ contient $\bigsqcup_{G \in I} CC(G)$ — dans cette dernière expression, la notation $\bigsqcup$ réfère à l'union disjointe d'ensembles, puisque $CC(G)$ n'est pas un graphe, mais un ensemble de graphes.

Si on considère un graphe comme une structure relationnelle (V,R), on peut considérer la structure formée de ses sommets V et de l'inverse de la relation R qui définit les arêtes, c'est-à-dire la relation $\bar{R} : u\bar{R}v \iff \neg(uRv)$. On appelle la structure $(V,\bar{R})$ le complément de (V,R).

Définition 2.0.16 (Complément)**.** *Le* complément *d'un graphe* $G = (V,E)$ *est le graphe* $\bar{G} = \left(V,\binom{V}{2} \setminus E\right)$.

Une petite définition lie la notion de classe d'équivalence par isomorphisme à celle de composante connexe :

Définition 2.0.17 (Soustraction de classe)**.** *Pour deux graphes* G *et* H*, avec* H *connexe, on note la* soustraction *de la classe d'équivalence par isomorphisme de* H *à* G *comme étant* $G - [H]_{\cong}$*. L'opération consiste à enlever à* G *toute composante connexe isomorphe à* H *:* $V(G - [H]_{\cong}) = \{v \in V(J) : J \in CC(G), J \notin [H]_{\cong}\}$.

Précisons qu'on enlève seulement à G les *composantes connexes* isomorphes à H. Si H est présent comme sous-graphe de G sans être une composante connexe entière et indépendante, alors il est ignoré par cette soustraction.

Si H n'était jamais isomorphe à une composante connexe de G, alors $G - [H]_{\cong} = G$. Si on a besoin de soustraire à G plusieurs classes, représentées par des graphes $G_i \in I$, on pourra utiliser la notation $G - \bigsqcup_{G_i \in I}[G_i]_{\cong}$.

2.0.2. Exemples de graphes

Commençons par quelques classes de graphes usuelles :

Définition 2.0.18 (Cycle)**.** *Un* cycle *de longueur* n*,* $n < \omega$ *est un graphe* $C_n = (V,E)$ *de la forme* $V = [n]$ *,* $E = \{[0,1],[1,2],...[n-2,n-1],[n-1,0]\}$ *pour* $0 < n < \omega$.

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont voisines.

Définition 2.0.19 (K_κ)**.** *Un* graphe complet $K_\kappa = (V,E)$*, où* $\kappa > 0$ *est un cardinal, a comme sommets* $V = \kappa$ *et arêtes* $E = \binom{V}{2}$.

On appelle aussi un graphe complet une *clique*, mais ce terme réfère par définition à un ensemble de sommets deux à deux adjacents dans un graphe donné. En général, on utilise le terme *complet* pour décrire un graphe lorsque toutes les arêtes possibles sont présentes.

Définition 2.0.20 (Stable)**.** *Le complément du graphe* K_κ*, pour* $\kappa > 0$ *un cardinal, est* $\overline{K_\kappa} = (\kappa, \emptyset)$.

Comme avec la clique, on appelle aussi ce graphe un *stable*, surtout lorsqu'il est présent comme sous-graphe d'un autre graphe.

Définition 2.0.21 (Arbre)**.** *Un* arbre $A = (V,E)$ *est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle comme sous-graphe.*

Définition 2.0.22 (Feuille)**.** *Une* feuille *dans un arbre A est un sommet de A qui ne possède qu'un voisin et est donc de degré 1.*

Définition 2.0.23 (Biparti)**.** *Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ deux cardinaux.*

Un graphe biparti complet $K_{\alpha,\beta} = (V,E)$ *a comme ensemble de sommets $V = V_0 \sqcup V_1$ tel que $|V_0| = \alpha$ et $|V_1| = \beta$, et son ensemble d'arêtes est $E = \{[u_0, u_1] : u_0 \in V_0$ et $u_1 \in V_1\}$.*

Un graphe biparti *qui n'est pas complet est un sous-graphe propre d'un graphe biparti complet.*

On peut considérer que les sous-ensembles V_0, V_1 tels que $V_0 \sqcup V_1 = V$ forment une partition de V.

Un graphe biparti ne peut pas contenir de cycles de longueur impaire puisque chacune des parties de ses sommets induit un stable. Tous les arbres sont bipartis.

Les classes de graphes suivantes sont importantes pour énoncer certaines conjectures, ainsi que pour la revue de littérature.

Définition 2.0.24 (Arborescence)**.** *Une* arborescence *est une paire (A, r) où A est un arbre, $r \in V(A)$. On appelle r la* racine *de A.*

On utilise souvent les arborescences pour représenter une hiérarchie. Une façon de conceptualiser une arborescence est de dire que pour chaque paire de sommets adjacents, il y a un sommet parent et un sommet enfant ; le parent est celui pour lequel la distance à la racine est la plus petite.

Définition 2.0.25 (Localement fini)**.** *Un graphe est* localement fini *si tous ses sommets ont un degré fini.*

Avant de définir la prochaine classe de graphes, deux autres définitions sont nécessaires :

Définition 2.0.26 (Arbre binaire)**.** *Un* arbre binaire complet *est une arborescence dont la racine est de degré 2, et dont tous les autres sommets qui ne sont pas des feuilles sont de degré 3.*

Un arbre binaire *est un sous-graphe connexe de l'arbre binaire complet qui contient la racine.*

On peut voir l'arbre binaire selon la hiérarchie définie pour l'arborescence plus haut : dans un arbre binaire, chaque sommet a au plus deux enfants.

Définition 2.0.27 (Sous-division)**.** *Une* sous-division *d'un graphe G est un graphe formé en remplaçant un certain nombre d'arêtes $[u,v]$ de G par des chaînes $uv_1v_2...v_{n-1}v$, où les v_i, $0 < i < n$, ne sont pas dans $V(G)$ et où n et $v_1, v_2...v_{n-1}$ dépendent de l'arête $[u,v]$.*

Grâce à ces deux définitions, on peut conceptualiser les graphes suivants :

Définition 2.0.28 (Arbre dispersé)**.** *Un* arbre dispersé *est un arbre qui ne contient pas de sous-division de l'arbre binaire complet comme sous-graphe.*

Définition 2.0.29 (Étoile)**.** *Une étoile est un graphe biparti $K_{1,\kappa}$, où $\kappa > 0$ est un cardinal.*

On considérera que $V(K_{1,\kappa}) = V_0 \sqcup V_1$ où $V_0 = \{0\}$ et $V_1 = \kappa \setminus \{0\}$. On peut généraliser le concept d'étoile de plusieurs façons en remplaçant les arêtes $\{0,\alpha\}$, où $\alpha \in \kappa$, par des chaînes. Si on les remplace toutes par des chaînes P^2, par exemple, on a une étoile de diamètre 4. En remplaçant chaque arête $\{0,\alpha\}$ par la chaîne P^α, on obtient un graphe au diamètre non borné si κ est infini, et dont toutes les branches sont de longueur différente si κ est fini.

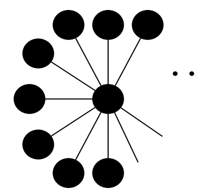

Figure 2.1. L'étoile infinie

Définition 2.0.30 (Chaînes croissantes)**.** *Le graphe que nous appellerons* chaînes croissantes *est l'union disjointe de composantes $\bigsqcup_{0<i<\omega} P^i$.*

Il contient toutes les chaînes finies comme composantes connexes, et nous les représentons habituellement dans l'ordre croissant de leurs longueurs.

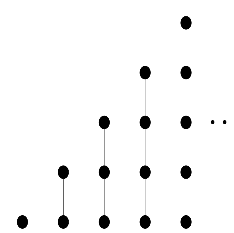

Figure 2.2. Le graphe des chaînes croissantes

Définition 2.0.31 (Rayon)**.** *Un* rayon *est un graphe isomorphe à celui qui a comme sommets ω et comme arêtes $\{[i, i+1] : i < \omega\}$.*

On peut visualiser le rayon comme une chaîne infinie dans une direction. On abusera donc de la notation pour le noter P_ω dans ce travail.

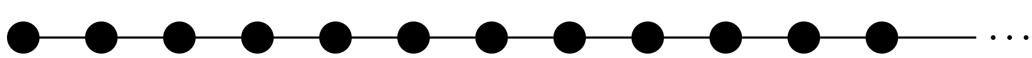

Figure 2.3. Le rayon

Définition 2.0.32 (Double rayon). *Le* double rayon *est le graphe ayant comme sommets* $\mathbb{Z}$ *et comme arêtes* $\{[i,i+1] : i \in \mathbb{Z}\}$.

Le double rayon est un graphe qui ne possède pas de «fin». Certains le voient comme un cycle infini.

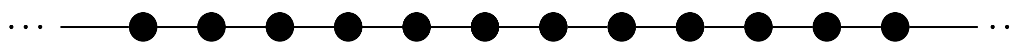

Figure 2.4. Le double rayon

Définition 2.0.33 (Arbre (i,j)). *Un* arbre (i,j) $T_{i,j}$ [**7**] *est une arborescence construite récursivement à partir du sommet* v_0 *grâce à l'algorithme suivant :*

(1) Ajouter à v_0 i *voisins de degré 1.*

(2) Ajouter à chaque sommet de degré 1 du graphe j *voisins de degré 1.*

(3) Ajouter à chaque sommet de degré 1 du graphe i *voisins de degré 1. Passer à l'étape 2*

De manière plus précise, on peut définir $T_{i,j}$ récursivement. Soit $T^0_{i,j}$ le graphe P^0. On obtient $T^{2n+1}_{i,j}$ en ajoutant i enfants à chaque feuille de $T^{2n}_{i,j}$, et on obtient $T^{2n}_{i,j}$ en ajoutant j enfants à chaque feuille de $T^{2n-1}_{i,j}$. L'arbre (i,j) $T_{i,j}$ est le graphe obtenu en prenant la limite $\bigcup_{n<\omega} T^n_{i,j}$, qui existe puisque $T^n_{i,j} < T^{n+1}_{i,j}$ pour tout $n < \omega$.

En particulier, on fera référence dans ce texte à l'arbre (2,3).

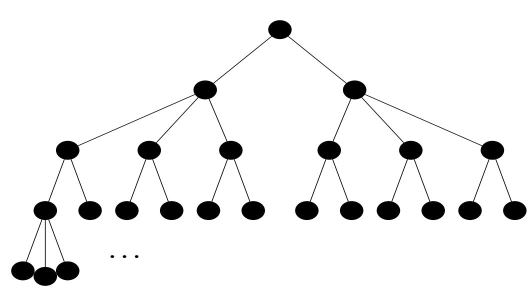

Figure 2.5. $T_{2,3}$

Définition 2.0.34 (Peigne). *Un* peigne *est une réunion connexe entre un rayon et un ensemble de chaînes finies disjointes qui ont leur premier sommet dans le rayon. Les chaînes peuvent être de longueur nulle.*

On appelle ce graphe un peigne puisqu'on peut voir le rayon comme un «manche» pour les chaînes finies, qui sont ses «dents». On peut étendre la définition pour pouvoir parler d'un rayon qui intersecte n'importe quelle suite de graphes connexes, avec un graphe attaché à chaque sommet du rayon.

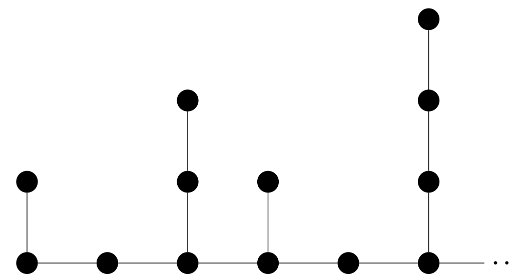

Figure 2.6. Un peigne

Définition 2.0.35 (Grappe)**.** *Pour une suite* $\{(G_i, v_i)\}_{i<\omega}$ *avec* $v_i \in V(G_i)$*,* G_i *connexe,* $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$ *pour tous* $i \neq j$*, la* grappe $\mathbb{G} = (V,E)$ *est le graphe avec* $V(\mathbb{G}) = \bigsqcup_{i<\omega} V(G_i)$ *et* $E(\mathbb{G}) = \bigcup_{i<\omega} E(G_i) \cup \{[v_i, v_{i+1}] : i < \omega\}$*.*

Autrement dit, une grappe $\mathbb{G}$ est la réunion connexe d'un rayon et d'un ensemble de graphes connexes disjoints ayant exactement un de leurs sommets dans le rayon. On identifie le *raisin* G de la grappe $\mathbb{G}$ pour lequel le sommet $v \in V(G)$ est dans le rayon par (G,v).

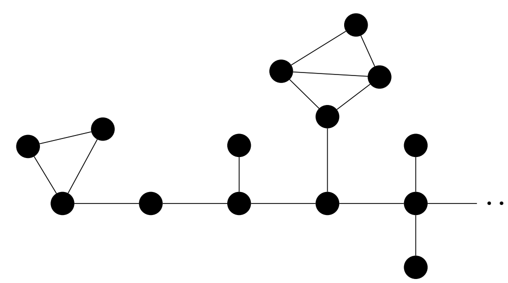

Figure 2.7. Une grappe

Définition 2.0.36 (Double peigne)**.** *Le graphe qu'on appellera un* double peigne *a comme sommets* $\mathbb{Z} \cup \{u_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{v_i : i \in \omega\}$ *et arêtes* $\{[u_i, i] : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{[v_i, i] : i \in \omega\} \cup \{[i, i+1] : i \in \mathbb{Z}\}$*.*

Le double peigne est aussi la jonction par leurs extrémités d'un peigne, aux dents toutes des chaînes P^1, à une grappe dont tous les raisins sont de la forme (P^2, u_1) où $P^2 = u_0u_1u_2$. C'est un graphe dont la définition provient de [**12**].

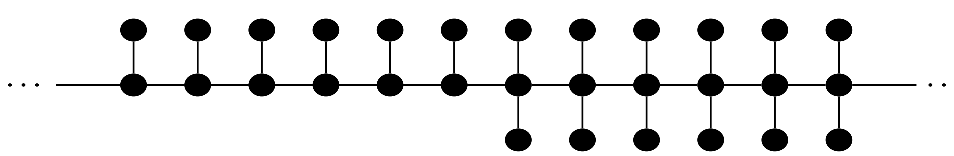

Figure 2.8. Le double peigne

Définition 2.0.37 (Arbre de noël)**.** *Le graphe que nous appelons* arbre de noël *est un peigne dont les dents sont* $\{Q_i\}_{i\in\omega}$ *où la dent* Q_i *est attachée au sommet* i *du rayon. Une dent* Q_i *va être la chaîne* P^j *si* $i = 2^j$*, et* P^0 *sinon.*

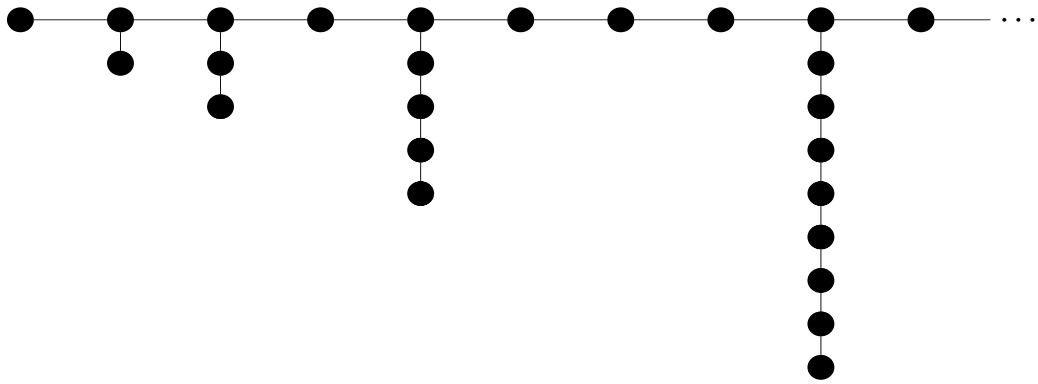

Figure 2.9. L'arbre de noël

Définition 2.0.38 (Rado graph)**.** *Le graphe de* Rado R *est le graphe aléatoire dénombrable, c'est-à-dire que c'est le graphe avec comme ensemble de sommets* $V = \omega$ *et avec l'arête* $[i,j]$ *dans* E *avec probabilité* $\frac{1}{2}$*.*

Il a été démontré, comme expliqué dans [**5**], que R est l'unique graphe dénombrable ultra-homogène (à isomorphisme près) et que c'est un graphe universel, c'est-à-dire que le graphe de Rado contient tous les graphes dénombrables ou finis comme sous-graphes. Il a aussi la propriété d'être sommet-transitif, ce qui signifie que pour toute paire de sommets u,v de R, il existe un *automorphisme* qui envoie le sommet u vers le sommet v. Ceci n'est possible que si u et v partagent les mêmes propriétés, par exemple le nombre de voisins, la présence dans un cycle ou une clique, etc. Ainsi, si un graphe est sommet-transitif, on doit comprendre qu'il est extrêmement symétrique et que tous ses sommets sont «pareils» d'un point de vue structurel. Le graphe de Rado possède cette propriété parce que tous ses sommets sont générés de la même façon.

2.0.3. Jumeaux, observations et conjectures

Maintenant, passons à des définitions spécifiques à ce mémoire.

Définition 2.0.39 (Abritement)**.** *Un graphe* G' *est* abrité *dans le graphe* G *si* G' *est isomorphe à un sous-graphe* propre *de* G*. L'isomorphisme* f *entre* G' *et le sous-graphe de* G *est appelé un* abritement *de* G' *dans* G *et est noté* $f : G' \hookrightarrow G$*.*

Souvent on écrit simplement $G' \hookrightarrow G$ pour indiquer l'existence de l'isomorphisme f. Dans la littérature anglophone, on utilise souvent le mot *embedding* pour décrire un abritement ; cependant, nous traduirons ce terme par *abritement non strict* puisqu'il est subtilement différent du concept d'abritement décrit plus haut. En effet, si G' est abrité non strictement par la fonction f dans le graphe G, alors il est possible que $f(G') = G$, alors que si f était un abritement strict on aurait $f(G') < G$. Notre définition d'abritement strict est bien utile pour parler de certains concepts :

Définition 2.0.40 (Jumeaux)**.** *Deux graphes non isomorphes G et G' sont* jumeaux *si G est abrité dans G' et G' dans G.*

Exemple 1 (Un jumeau du rayon)**.** Le rayon P_ω, défini à 2.0.31, est un graphe qui possède un jumeau. En effet, il est jumeau, entre autres, au graphe $H = P_\omega \sqcup P_0$. On peut voir que P_ω est abrité dans H, puisqu'il est l'une de ses composantes connexes. De plus, H est abrité dans P_ω puisque on peut l'obtenir de P_ω en retirant à ce dernier son deuxième sommet à partir du bout. Le sommet au bout du rayon est isomorphe à P_0, et ce qui reste du rayon est isomorphe au rayon. Puisque les deux graphes ne sont pas isomorphes, ce sont donc des jumeaux.

La conjecture qui nous intéresse parle du nombre de jumeaux d'un graphe. La propriété suivante sera utile pour discuter de ceux-ci :

Définition 2.0.41 (Propriété alternative des graphes)**.** *Un graphe respectera la* propriété alternative des graphes *s'il possède soit 0, soit au moins $\aleph_0$ jumeaux.*

Ainsi un graphe qui respecte la propriété alternative des graphes, qu'on abrégera par PAG, ne pourra pas avoir un nombre de jumeaux fini non nul. Grâce aux définitions du jumeau et de l'abritement, on déduit qu'un graphe n'est jamais jumeau à lui-même. Mais un graphe peut être abrité dans lui-même.

Définition 2.0.42 (Auto-abrité)**.** *Un graphe* auto-abrité *est un graphe qui est abrité dans lui-même.*

Quelques observations :

Observation 1. Tout graphe possédant un jumeau est aussi auto-abrité.

En effet, la relation d'abritement est transitive. On a donc $G \hookrightarrow G' \hookrightarrow G \Longrightarrow G \hookrightarrow G$.

Observation 2. Tous les graphes auto-abrités sont infinis.

Par exemple, le rayon P^ω est un graphe auto-abrité : en se rappelant que ses sommets sont ω, l'application $n \longrightarrow n+1$ est un isomorphisme. L'image de l'isomorphisme est un sous-graphe propre du rayon puisqu'elle ne contient pas le sommet 0. Pour plus de détails, se référer à la section 4.1. Un abritement entre graphes finis impliquera toujours une différence stricte entre leurs nombres de sommets respectifs, puisqu'un abritement n'est jamais surjectif.

Observation 3. Le nombre minimum de jumeaux qu'un graphe peut posséder est 0.

Par exemple, les graphes finis ne peuvent pas avoir de jumeaux, et certains graphes infinis peuvent aussi ne pas en avoir. Parmi nos exemples, le double rayon ne possède pas de jumeau, et l'arbre de noël non plus.

Les auteurs des premiers articles sur les jumeaux [**4**] travaillent avec la notion d'abritement non strict, alors ils comptent G lui-même parmi les jumeaux de G. Dans leur paradigme, le nombre minimum de jumeaux d'un graphe est 1. Nous avons choisi un paradigme différent parce que le jumeau trivial ne présente aucun intérêt.

En étudiant les graphes auto-abrités, on a parfois besoin de différencier le graphe original de l'image de son abritement vers lui-même. Pour ce faire, on relaxera un peu la terminologie pour que le terme «abritement» puisse vouloir dire un peu plus que seulement «la fonction qui abrite», selon le contexte.

On laissera «abritement» vouloir dire «le fait de s'abriter» dans un contexte comme «Lors de l'abritement de G, des sommets disparaissent.» De plus, on verra que si l'abritement f avec lequel on travaille est très clair dans le contexte, le mot peut vouloir dire $f(G)$. Par exemple, «Cette composante est entièrement dans l'abritement de G.» Cet allégement de la notation est inspiré de l'utilisation du terme «embedding» dans des articles comme [**11**].

Quelques observations au sujet de la connexité :

Observation 4. Le complément du jumeau d'un graphe G est le jumeau du complément du graphe G.

En effet, soit G' le jumeau de G et soit un abritement $f : G \hookrightarrow G'$. Premièrement, $f(V(G)) = f(V(\overline{G}))$ puisqu'un graphe a les mêmes sommets que son complément. Donc f est une bijection de $\overline{V(G)}$ à $f(V(\overline{G}))$. Ensuite, s'il existe une arête entre u et $v \in V(\overline{G})$, alors il n'existe pas d'arête entre u et v dans G. Donc il n'y en a pas non plus entre $f(u)$ et $f(v)$ dans $f(G)$ puisque f est un isomorphisme. Donc il y a bien une arête entre $f(u)$ et $f(v)$ dans $f(\overline{G})$. Ceci nous permet de conclure que f est aussi un abritement entre $\overline{G}$ et $\overline{G'}$. Comme la relation d'abritement se transfère au complément, celle de jumeau le fait aussi.

Observation 5. Le complément d'un graphe déconnecté est connexe.

En effet, si un graphe G n'est pas connexe, alors deux sommets qui sont dans des composantes connexes différentes dans G seront forcément voisins dans son complément. De plus, deux sommets de la même composante connexe dans G seront connectés dans $\overline{G}$, puisqu'il existe une chaîne entre eux passant par un sommet d'une autre composante connexe.

Résumons finalement les conjectures qui seront traitées dans la revue de littérature, et plus loin dans ce mémoire. La conjecture qui suit lança la discussion sur les jumeaux en 2000.

Conjecture 1 (Thomassé)**.** *Pour toute structure relationnelle dénombrable R, il existe soit 0, soit $\aleph_0$ ou soit $2^{\aleph_0}$ autres structures relationnelles qui s'abritent et sont abritées dans R.* [**14**]

Puisque nous traitons de théorie des graphes, la conjecture qui sera la plus appropriée est celle énoncée par Bonato et Tardif en 2006 :

Conjecture 2 (Graph Alternative Conjecture (GAC))**.** *Tout graphe possède soit zéro, soit au moins $\aleph_0$ jumeaux.* [**4**]

Ces auteurs étaient intéressés par la restriction de cette conjecture aux arbres. En effet, il n'y a pas d'intuition évidente pour prouver la GAC directement, et il se peut même qu'elle ne soit pas vraie. Le travail sur le sujet en revient à identifier des classes de graphes qui respectent la PAG pour limiter l'espace dans lequel chercher soit une preuve de la GAC, soit un contre-exemple.

Chaque classe de graphes pour laquelle on se demande si ses graphes respectent la PAG induit une nouvelle conjecture, qui est une restriction de la GAC. La première de ces conjectures a été nommée par Bonato et Tardif, encore en 2006 :

Conjecture 3 (Tree Alternative Conjecture (TAC))**.** *Tout arbre possède une infinité d'arbres comme jumeaux, ou aucun.* [**4**]

Les arbres sont une classe de graphes assez grande pour mériter leur propre conjecture indépendante. En effet, on verra dans la revue de littérature que plusieurs auteurs choisissent de s'intéresser seulement à la TAC.

Dans l'ordre, voici les classes de graphes qui ont induit une restriction de la GAC au fil de la littérature. On peut faire une distinction entre les conjectures où les jumeaux doivent faire partie de la classe en question, et celles où les jumeaux peuvent aussi appartenir à une classe plus générale.

Conjecture 4. *Toute arborescence possède une infinité d'arborescences comme jumelles, ou aucune.* [**15**]

Conjecture 5. *Tout graphe localement fini possède une infinité de jumeaux, ou aucun.* [**?**]

Conjecture 6. *Tout graphe sans rayon possède une infinité de jumeaux, ou aucun.* [**1**]

Conjecture 7. *Tout arbre dispersé possède une infinité d'arbres comme jumeaux, ou aucun.* [**11**]

Dans ce mémoire, on va s'intéresser aux conjectures qui traitent de la connexité des graphes. Il est possible d'en former deux qui ressemblent à des restrictions de la GAC aux graphes connexes :

Conjecture 8. *Tout graphe connexe respecte la propriété alternative des graphes.*

Conjecture 9. *Tout graphe connexe possède un nombre infini de jumeaux connexes, ou aucun.*

La conjecture 8 porte sur le nombre de jumeaux d'un graphe connexe, que les jumeaux soient connexes ou non. La conjecture 9, elle, limite l'univers aux graphes connexes.

Quelques conjectures de cette liste ont été prouvées vraies, mais pour d'autres on ne sait encore rien. Malgré ça, il est possible d'obtenir des résultats à partir de conjectures qu'on n'a pas prouvées. Ainsi, la conjecture suivante est une spéculation à propos de la GAC et de la conjecture 9 :

Conjecture 10. *La conjecture 2 est équivalente à la conjecture 9.* [**12**]

La conjecture 10 prend une place importante dans un des articles revus dans le prochain chapitre. Si elle était prouvée, les prochains mathématiciens à se pencher sur le sujet pourraient oublier les graphes déconnectés définitivement pour se concentrer sur les graphes connexes. Nous prouverons dans ce travail une version plus faible de la conjecture 10 :

Conjecture 11. *La conjecture 2 est équivalente à la conjecture 8.*

Plus spécifiquement, dans ce travail, on montre qu'un graphe qui exhibe une structure auto-abritée particulièrement déconnectée respecte la propriété alternative des graphes, alors que tout graphe dont la structure auto-abritée se limite à une composante connexe respectera la PAG tout autant que les graphes connexes en général la respectent.

Les conjectures précédentes, sauf la première, évitent de mentionner une propriété d'un graphe auto-abrité : la cardinalité exacte de son nombre de jumeaux. En effet, la conjecture originale distinguait les structures relationnelles au nombre de jumeaux dénombrables de celles qui en auraient une quantité indénombrable. Pour le moment, on peut poser la conjecture suivante par rapport au nombre exact de jumeaux d'un graphe d'ordre κ :

Conjecture 12. *Tout graphe d'ordre $\kappa \geq \omega$ possède soit 0, soit au plus 2^κ jumeaux.*

Les valeurs sont choisies ainsi parce que pour l'instant, tous les graphes inspectés d'ordre $\aleph_0$ possèdent soit 0, soit $\aleph_0$, soit $2^{\aleph_0}$ jumeaux, et que certains graphes d'ordre κ possèdent au moins 2^κ jumeaux. Aussi, une classe contenant 2^κ graphes non isomorphes d'ordre κ peut être appelée *large* dans la littérature.

Nous n'allons étudier que des graphes dénombrables dans ce mémoire, bien que nos théorèmes n'excluent pas spécifiquement les graphes de plus grand ordre. Par conséquent, nous allons nous limiter à trouver jusqu'à $2^{\aleph_0}$ jumeaux aux graphes, en ne considérant qu'une partie dénombrable de chaque graphe indénombrable. Ceci nous permettra quand même de trouver des exemples dénombrables pour appuyer la conjecture 12, même si nous ne trouverons pas de borne supérieure à la quantité de jumeaux d'un graphe sauf dans des cas très simples.

Maintenant que nous avons en main tous les outils pour comprendre ce mémoire, révisons en détail les travaux publiés précédemment au sujet des graphes jumeaux.

Chapitre 3

Revue de littérature

On peut considérer l'article de Halin [**8**] le premier dans la littérature qui discute des endomorphismes d'un graphe qui ne sont pas des automorphismes, ces fonctions ressemblant beaucoup à nos auto-abritements. Halin les appelle des endomorphismes propres. Par contre, il n'exige pas que tous ses endomorphismes soient injectifs.

Plusieurs mathématiciens utilisent le terme *endomorphisme* pour parler de ce qui est, dans notre terminologie, un auto-abritement non strict. Mais dans l'article de Halin, ce sont des homomorphismes du graphe vers lui-même.

L'auteur explore l'effet des endomorphismes sur les classes terminales des graphes infinis localement finis. La notion de *classe terminale* d'un graphe est une généralisation du concept de rayon qui, par exemple, considère trois rayons qui s'entrelacent à l'infini comme étant une seule classe terminale. Halin utilise des notions de théorie des groupes pour étudier les endomorphismes et automorphismes de graphes localement finis, ce qui rend l'article compliqué à lire pour quelqu'un qui n'est pas un théoricien aguerri des groupes.

Nous n'avons pas réussi à obtenir une copie du manuscrit de Thomassé [**14**] où il énonce pour la première fois la conjecture qui inspira tous les articles suivants, qui se trouve dans la section 2.0.3 en tant que la conjecture 1.

Les premiers mathématiciens à avoir fait des avancées sur le sujet des graphes jumeaux étaient Bonato et Tardif. Avant d'arriver à ce sujet précis, Bonato et Tardif avaient écrit, en 2003, un article appelé *Large families of mutually embeddable vertex-transitive graphs* [**3**]. On peut voir que l'expression «mutually embeddable graphs» (graphes mutuellement abritables) réfère aux graphes jumeaux même si ce terme n'avait pas encore été inventé. Ils sont motivés par les propriétés du graphe de Rado R, telles que l'*universalité*, et veulent en quelque sorte déterminer combien de propriétés un graphe arbitraire peut partager avec R.

Ils donnent, pour chaque cardinal κ infini, un ensemble de 2^κ graphes d'ordre κ qui sont jumeaux deux à deux. C'est un résultat intéressant puisque c'est le seul article de la liste qui prend la peine de trouver des familles de jumeaux de cardinalité plus que dénombrable. Dans ce mémoire, nous montrerons que certains des graphes dénombrables que nous regardons ont $\aleph_0$ jumeaux, alors que d'autres en ont $2^{\aleph_0}$, ce qui est la limite conjecturée par Thomassé.

Les graphes de l'article de Bonato et Tardif sont tous sommets-transitifs. C'est parce qu'ils les construisent à partir de produits forts faibles d'arbres finis, qui représentent les «factorisations» de leurs graphes. Cette opération donne tout le temps des résultats sommets-transitifs ; voir Bonato et Hahn [**2**] pour cette construction inventée par Imrich dans [**9**].

Ils parlent aussi d'*universalité*, qui est un concept adjacent à l'abritement mutuel. Un graphe universel abrite tous les graphes finis ou dénombrables qui existent, alors qu'un graphe κ-universel abrite tous les graphes d'ordre au plus κ. Les auteurs montrent qu'il est possible de trouver une famille infinie de graphes κ-universels jumeaux entre eux si on peut produire au moins un graphe κ-universel. Ils se demandent aussi s'il est possible d'avoir une famille finie de graphes mutuellement abritables.

Dans leur prochain article, Bonato et Tardif [**4**] présentent l'abritement mutuel comme étant une propriété séparée de l'universalité, ce qui leur ouvre la porte pour parler de jumeaux.

Les auteurs mettent en publication pour la première fois une conjecture inspirée de celle créée par Thomassé. Ils la nomment «Tree Alternative Conjecture», soit la conjecture 3 (TAC), qui propose que tout arbre va avoir soit une infinité d'autre arbres avec qui il est mutuellement abrité, ou un seul (lui-même). En effet, la notion d'*embedding*, qui est celle avec laquelle Bonato et Tardif travaillent, ne signifie pas nécessairement qu'un graphe soit sous-graphe *propre* d'un autre, contrairement à un abritement. C'est en fait un abritement non strict.

Dans cet article de 2006 ayant seulement sept pages, ils parviennent à prouver que la TAC est vraie pour les arbres sans rayons. Ils notent aussi la version de la conjecture qui s'applique à tous les graphes, la conjecture 2 (GAC).

Remarquons que la GAC et la TAC ne précisent pas l'ordre du graphe en question, contrairement à la conjecture de Thomassé. Pour un graphe dont on ne connaît pas l'ordre, il n'y a pas de borne sur le nombre de jumeaux, comme les auteurs les prouvent dans [**3**]. Ceci peut expliquer pourquoi Bonato et Tardif ne précisent pas la quantité exacte de jumeaux d'un graphe dans les conjectures de cet article.

Pour obtenir leur résultat sur les arbres sans rayon, Bonato et Tardif commencent par prouver que la TAC s'applique aux arborescences sans rayons. Ils utilisent ensuite un résultat de Halin sur les endomorphismes des arbres sans rayons, disant que chacun de ces endomorphismes fixe au moins un sommet ou une arête, pour choisir un sommet candidat à transformer en racine.

Finalement, ils démontrent que dans le cas des arbres sans rayons, si une «version enracinée» de l'arbre possède $\aleph_0$ jumeaux, alors la version «déracinée» de l'arbre en possède autant. On peut voir par exemple que l'étoile infinie, qui est un arbre infini sans rayon, a son sommet central fixé par n'importe quel endomorphisme. Selon le théorème de Bonato et Tardif, cette étoile possède donc autant de jumeaux que l'arborescence obtenue en choisissant le centre comme racine.

En 2009, Tyomkin [**15**] prouve que la GAC est vraie lorsque restreinte aux arborescences, avec ou sans rayons, en plus de progresser vers la restriction de la conjecture aux graphes localement finis. C'est le premier article qui utilise le nom «Jumeaux» («Twins» dans le texte) pour parler de deux graphes mutuellement abritables.

La preuve de Tyomkin commence par un lemme qui permet de déduire de l'information sur le nombre de jumeaux d'une arborescence selon le nombre de jumeaux respectifs de ses «branches» enracinées. Grâce à un lemme de Bonato et Tardif, l'auteur déduit que l'existence d'une arborescence avec un nombre de jumeaux fini non nul n implique qu'une de ses branches contient un rayon de «racines» tel que chacune de leurs sous-branches respectives possède aussi n jumeaux. Ceci impliquera qu'il existe toujours un isomorphisme entre les sous-graphes de l'arborescence qui ne contiennent pas la sous-branche mentionnée plus haut, et ceux du jumeau de cette arborescence.

Ainsi, on peut construire récursivement un isomorphisme entre l'arborescence et chacun de ses «jumeaux», ce qui devrait être impossible puisque le fait que deux graphes soient jumeaux implique qu'ils ne sont pas isomorphes. Par cette contradiction, Tyomkin montre que les arborescences jumelles à la première n'avaient jamais été des jumelles finalement. Donc il est bien vrai qu'une arborescence ne peut avoir un nombre fini non nul de jumeaux.

En 2011, Bonato, Bruhn, Diestel et Sprussel publient un article nommé *Twins of rayless graphs* [**1**], qui bâtit sur les techniques et les résultats de Tyomkin. Ils officialisent le terme «jumeau» dans le contexte des abritements mutuels et reformulent les conjectures de Bonato et Tardif avec ce terme. Ils introduisent aussi une notion de jumeau «fort» et de jumeau «faible» : le jumeau fort d'un graphe G est isomorphe à un sous-graphe *induit* de G — sous-graphe tout court dans notre définition — alors que le jumeau faible peut laisser tomber certaines arêtes du graphe original. Certains graphes, tels que l'étoile infinie, auront des jumeaux faibles (par exemple la même étoile, avec un sommet isolé supplémentaire), mais aucun jumeau fort.

Afin de montrer que la GAC tient pour les graphes sans rayons, les auteurs utilisent une fonction de «rang» pour ordonner ces graphes par rapport au niveau auquel leur structure s'apparente à celle d'une étoile. Le rang est du même ordre de grandeur que le nombre de sommets qu'on doit enlever à un graphe sans rayon afin d'obtenir un graphe composé uniquement de composantes connexes finies. On peut remarquer que pour les graphes avec rayon, ce rang ne peut être qu'infini, et c'est pourquoi le théorème de Bonato et al. ne les concerne pas ; mais il sera fini pour chaque graphe sans rayon.

Grâce à cette notion, il devient possible de faire de l'induction sur les graphes par rapport à leur rang. Effectivement, on observe qu'un graphe de rang k se décompose en composantes connexes de rang $k-1$, ce qui donne un lien entre les graphes d'un rang et ceux du rang suivant. L'hypothèse d'induction sera que le graphe de rang $k-1$ possède soit une infinité de jumeaux, soit aucun.

Les auteurs de l'article réussissent ensuite à créer des jumeaux au graphe de rang k à partir de ses sous-graphes de rang $k-1$ pour compléter l'induction.

En 2016, Laflamme, Pouzet et Sauer publient un article sur `arXiv` appelé *Invariant subsets of scattered trees and the tree alternative property of Bonato and Tardif* [**11**]. Un «scattered tree» est un arbre dispersé, c'est-à-dire un arbre qui ne contient pas parmi ses branches une sous-division de l'arbre binaire complet.

Cet article introduit aussi une expression pour parler du fait qu'un arbre brise la TAC. Les auteurs déclarent que si un arbre possède soit un nombre infini de jumeaux, soit aucun, alors il respecte la *tree alternative property*, soit la *propriété alternative des graphes* (PAG). Ils renomment aussi le terme «jumeau» à *équimorphe*, par analogie avec le terme «isomorphe».

Laflamme, Pouzet et Sauer généralisent le théorème de Halin, voulant qu'un endomorphisme injectif fixe un sommet ou une arête d'un graphe, aux arbres dispersés. Dans leur nouveau théorème, ils ajoutent la possibilité qu'un automorphisme fixe exactement deux classes terminales de l'arbre.

Ils utilisent ce théorème et d'autres propriétés des classes terminales pour prédire la structure des endomorphismes d'un arbre dispersé possédant au moins une classe terminale. En énumérant les caractéristiques qu'un de ces arbres peut partager avec ses endomorphismes, les auteurs parviennent à montrer que tous les arbres dispersés respectent la TAP.

Ils prouvent aussi du même coup que la conjecture de Tyomkin par rapport aux graphes localement finis est vérifiée pour les arbres dispersés localement finis.

En 2019 , la communauté se rend compte de l'existence d'une thèse de doctorat déposée en 2008 par Tateno qui propose un contre-exemple à la TAC. Toutefois il est encore trop tôt en date de dépôt de ce mémoire pour savoir si le contre-exemple est correct. L'article utilise les arborescences. Il utilise aussi lui aussi le théorème de Halin sur les sommets fixés par les endomorphismes. Le résultat est sous vérification par plusieurs personnes depuis un an, sans conclusion pour le moment.

3.1. Un article sur les graphes auto-abrités

Le dernier article revu ici est le plus important pour ce mémoire. C'est en effet celui qui a motivé le présent travail.

L'article, intitulé simplement «Self-Contained Graphs», présente un angle très différent des articles précédents de cette revue pour regarder les graphes jumeaux et les graphes auto-abrités. Il met l'accent sur les abritements eux-mêmes et sur la partie du graphe qui est perdue lorsqu'on lui applique un endomorphisme. Aussi, alors que la majorité des articles précédents portaient sur les arbres, qui sont des structures connexes, les auteurs étudient ici spécifiquement les graphes déconnectés. Ils analysent les auto-abritements d'un graphe d'abord et ses jumeaux ensuite, alors que dans les articles précédents il n'était pas nécessaire de faire le «test» qu'un graphe soit auto-abrité avant d'essayer de compter ses jumeaux.

Les auteurs de cet article, Shekarriz et Mirzavaziri, publient une première version de leur article sur `arXiv` en 2015, et une version un peu modifiée en 2016, suivie d'une version corrigée la même année [**12**] qui est celle que nous avons étudiée le plus. L'objectif de leur travail était de montrer que la GAC peut être déduite de sa version connexe : c'est la conjecture 10 que nous avons explicitée dans la section 2.0.3.

Cette conjecture découle du fait que le complément d'un graphe déconnecté est toujours connexe. Dans la dernière partie de l'article, ils prouvent des résultats supplémentaires par rapport aux structures qu'ils décrivent au début de l'article.

Shekarriz et Mirzavaziri introduisent des définitions pour parler de certains concepts propres aux graphe auto-abrités. Ils définissent un sous-graphe *enlevable* d'un graphe auto-abrité G comme étant tout sous-graphe de G dont la soustraction à G résulte en un graphe isomorphe à G. En fait, c'est ce qui s'en va après un auto-abritement. L'ensemble de tous les sous-graphes enlevables de G est appelé $Rem(G)$. Ils définissent aussi la *fondation* $Fnd(G)$ du graphe auto-abrité, qui est le sous-graphe qui n'intersecte aucun sous-graphe enlevable et qui est donc en commun dans tous les abritements du graphe. Finalement, ils définissent l'ensemble $Iso_G(H)$ qui contient tous les isomorphismes $f : G \longrightarrow G \setminus H$.

L'article commence par donner une classification des graphes non connexes auto-abrités.

Théorème 3.1.1. *Soit G un graphe auto-abrité non-connexe. Alors au moins une des affirmations suivantes est vraie :*

(1) G contient une composante connexe qui est aussi auto-abritée.

(2) Il existe une composante connexe de G qui fait partie de $Rem(G)$.

(3) Pour tout $H \in Rem(G)$ et $f \in Iso_G(H)$ il existe une infinité de composantes connexes de G, soit $\{G_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, telles que pour tout $z \in \mathbb{Z}$ on a que H et $f(H)$ ont une intersection non vide avec G_z.

Dans leur preuve, ils prennent un graphe auto-abrité G quelconque, un de ses sous-graphes enlevables H et l'isomorphisme entre G et $G \setminus H$. Ensuite, ils classent G dans une catégorie différente selon si H contient une des composantes connexes de G dans son entièreté ; si H intersecte un nombre fini de composantes connexes de G ou non ; et si la fonction f envoie les parties connexes de H vers des composantes intersectant H ou non.

Ils finissent par classer les graphes auto-abrités non connexes en trois types : ceux qui possèdent une composante connexe qui est elle-même auto-abritée, ceux dont au moins une de leurs composantes connexes est *enlevable* par elle-même, et ceux chez lesquels chaque abritement enlève une fraction des sommets à une infinité de composantes connexes du graphe.

Voici quelques exemples pour illustrer ces concepts :

(1) Comme graphe du premier type, on peut imaginer un simple rayon B, avec un sommet isolé ajouté pour que ce graphe ne soit pas connexe. Ce sommet isolé sera le seul sommet dans $Fnd(B)$, la fondation du graphe, parce que tous les sommets du rayon font partie d'un sous-graphe H de $Rem(B)$ ou d'un autre. Pour plus sur le rayon, voir la section 4.1.

(2) Comme graphe du deuxième type, l'exemple classique est le stable dénombrable. Chaque composante connexe contient un seul sommet, et si on l'enlève au graphe, il reste identique.

(3) Comme graphe du troisième type, le plus simple qui existe est le graphe aux chaînes croissantes de la définition 2.0.30. Pour obtenir un abritement, on peut choisir un H qui contient un sommet de degré 1 dans chaque chaîne.

La figure suivante représente les premières composantes d'un autre graphe du troisième type :

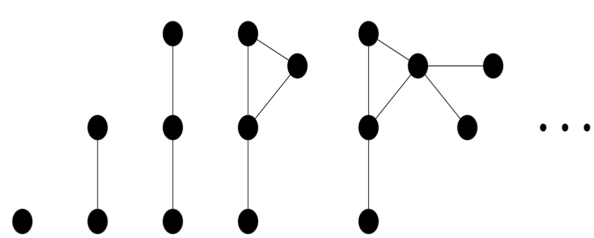

Figure 3.1. Un graphe du troisième type

Dans la suite de l'article, Shekarriz et Mirzavaziri utilisent leur terminologie pour discuter des jumeaux des graphes déconnectés, et des jumeaux déconnectés des graphes connexes. Ils prouvent que la GAC est équivalente à la conjecture 9, c'est-à-dire qu'ils prouvent la conjecture 10.

Dans la deuxième version de leur article, une première erreur est découverte dans cette preuve lors d'une revue prépublication. Voici l'affirmation qui se révéla être fausse :

Affirmation 1. Si un graphe non connexe G possède un jumeau $G \setminus P$, et P ne contient aucune composante connexe de G dans son entièreté, alors il existe une composante $\hat{G} \in CC(G)$ que P intersecte telle que soit $\hat{G}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes isomorphes dans G, soit $\hat{G} \setminus P$ contient une composante connexe avec seulement un nombre fini de composantes isomorphes dans G.

Ceci peut sembler correct, l'intuition étant que si P modifie une composante $\hat{G}$ qui est présente un nombre infini de fois, alors le graphe G va sembler ne pas changer ; de même, si le résultat de $\hat{G} \setminus P$ est déjà présent une infinité de fois, alors leur ajout ne peut rien changer au graphe. Ceci fait qu'il semble impossible que $G \setminus P$ soit bien un jumeau de G qui ne lui est pas isomorphe.

Ce sont Hahn et Woodrow qui trouvent le premier contre-exemple lors de la revue prépublication de l'article [**12**]. Généralisé, cet exemple en donne une infinité : les paires d'arbres (i,j) et (j,i) distincts. Nous avons trouvé une façon plus simple de construire un contre-exemple à l'affirmation 1 :

Soit A et B des graphes jumeaux connexes tels que $f : B \hookrightarrow A$ et soit $Q = A \setminus f(B)$. Soit $G = \bigsqcup_{i\in\omega} A_i \sqcup \bigsqcup_{j\in\omega} B_j$, le graphe contenant une infinité de graphes A et B comme composantes connexes. De G, prenons le sous-graphe $P = \bigsqcup_{i\in\omega} Q_i = \bigsqcup_{i<\omega} A_i \setminus f_i(B)$ où $f_i : B \hookrightarrow A_i$. Alors le graphe $G \setminus P$ est le graphe obtenu en retirant de chaque composante isomorphe à A de G son sous-graphe Q_i, ce qui transforme A_i en un graphe isomorphe à B. Donc $G \setminus P \cong \bigsqcup_{i<\omega} B$ puisque ses composantes connexes sont soit une des composantes B_i utilisées dans la construction de G, soit des composantes isomorphes à A auxquelles on a retiré les bons sommets pour qu'elles soient isomorphes à B. Donc toutes les composantes de $G \setminus P$ sont bien isomorphes à B.

Dans le contexte de l'affirmation 1, on a que le sous-graphe P est bien tel que $G \setminus P$ est un jumeau de G. En effet, ce nouveau graphe n'est pas isomorphe à G, et de plus, G est abrité dans $G \setminus P$ puisque ses composantes B abritent toutes A. Ensuite, P n'intersecte dans G que les composantes connexes isomorphes à A, qui apparaissent bien une infinité de fois dans G. Finalement, la composante de $A \setminus P$ est isomorphe à B, et G contient bien une infinité de composantes qui lui sont isomorphes.

L'intuition du contre-exemple est que P peut intersecter toutes les composantes connexes isomorphes entre elles. Donc bien que retirer Q à une seule des composantes ne peut rien changer, si on l'enlève à toutes les composantes, l'effet se fait certainement sentir.

On peut donc construire un contre-exemple à l'affirmation de Shekarriz et Mirzavaziri en choisissant deux graphes jumeaux connexes, par exemple les arbres (2,3) et (3,2).

Les auteurs réparent cette partie de leur preuve dans la prochaine version de l'article en introduisant une nouvelle notation qui indique la cardinalité de l'ensemble de composantes connexes d'un graphe qui sont isomorphes à un sous-graphe donné. Ainsi, l'affirmation 1 devient :

Affirmation 2. Pour le sous-graphe P, il existe au moins une composante connexe $\hat{G}$ dont la cardinalité change de G à $G \setminus P$, ou dont la cardinalité d'une des composantes de $\hat{G} \setminus P$ change.

Shekarriz et Mirzavaziri observent ensuite les unions de sous-graphes enlevables. On pourrait deviner que l'union de deux sous-graphes enlevables est toujours enlevable, mais ils montrent que ce n'est pas le cas :

Exemple 2 (Le double peigne)**.** Prenons le graphe double peigne 2.0.36. Son ensemble de sommets du «haut» est $\{u_z : z \in \mathbb{Z}\}$, et ses sommets du bas sont $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. On peut voir que $\{v_0, v_1, ...v_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est évidemment enlevable. La soustraction de cet ensemble provoque visuellement un genre de translation de n vers les positifs. Par contre, si on se fie

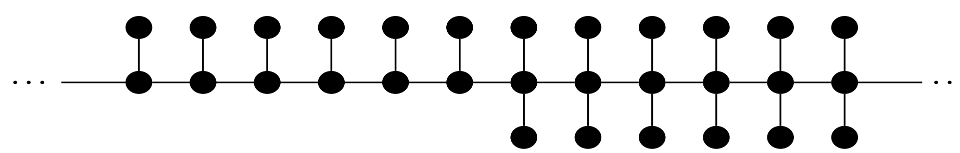

Figure 3.2. Le double peigne

au dessin, il est moins évident de voir que $\{u_0, u_1, ...u_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est aussi enlevable. En effet, les sommets u ne sont pas vraiment en haut ; ils sont complètement identiques dans leur fonction aux sommets v pour $n \geq 0$. Il existe un automorphisme qui échange les sommets u_z et v_z si $z \geq 0$.

On peut voir que l'union de ces sous-graphes enlevables n'est pas enlevable elle-même. En effet, retirer à la fois u_0 et v_0 du graphe crée un sommet de degré 2 dans le double rayon, alors qu'il n'en existe pas dans le graphe double peigne.

Dans leur article, Shekarriz et Mirzavaziri explorent donc les conditions dans lesquelles on peut s'attendre que l'union de sous-graphes enlevable est aussi enlevable. Ils introduisent la notion de *torsion* d'un graphe, qui regroupe les sommets qui sont enlevables dans le graphe original, mais qui font partie de la fondation de certains abritements du graphe. Les sommets u_0 et v_0 de l'exemple précédents seraient tous deux de tels sommets *tordus*.

Les résultats de cet article sont plutôt intéressants, mais ils sont à prendre avec un grain de sel. Il y a un problème avec la classification du début de l'article de Shekarriz et Mirzavaziri : la définition du troisième type dans leur théorème est trop précise, et elle exclut beaucoup de graphes qui semblent avoir une structure similaire au graphe de chaînes croissantes décrit plus haut. Donc le théorème est faux puisqu'il prétendait donner une qualification exhaustive des graphes auto-abrités. Les auteurs n'ont pas remarqué l'erreur, qui découlait d'une faille logique dans leur preuve.

En 2017, nous avons remarqué l'erreur de logique lorsque nous avons eu l'occasion de lire l'article alors qu'il était en révision. Nous nous sommes alors mis à la tâche de proposer une nouvelle version du théorème qui serait exhaustive, et ensuite de la prouver. La nouvelle preuve en cas par cas était bien plus longue que l'originale, et très lourde. Dans les années suivantes, nous avons essayé de trouver une nouvelle perspective et une nouvelle notation qui permettraient d'exprimer et de prouver le théorème de façon plus fluide.

Dans leur théorème, Shekarriz et Mirzavaziri décrivaient le troisième type de graphe auto-abrité de la façon suivante :

Troisième catégorie (2016). *Pour tout $H \in Rem(G)$ et $f \in Iso_G(H)$ il existe une infinité de composantes connexes de G, qu'on appellera $\{G_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, telles que pour tout z, $H \cap G_z$ et $f(H) \cap G_z$ ne sont pas vides.*

Nous rappelons que les premiers et deuxièmes types de graphes sont ceux qui contiennent une composante connexe auto-abritée, et ceux qui contiennent une infinité de copies isomorphes à une de leurs composantes connexes respectivement.

L'intuition derrière la définition plus haut est que $\{G_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ est une suite dénombrable de composantes connexes où chaque composante s'abrite dans la suivante. Ainsi en enlevant à chaque composante la différence entre celle-ci et la composante précédente, on trouve un abritement du graphe original. Dans ce cas on voit qu'un sous-graphe enlevable H va avoir une intersection non vide avec toutes les composantes de $\{G_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$. De plus, on peut supposer que l'isomorphisme f entre le graphe et son prochain abritement envoie toujours un élément d'une de ces composantes vers la suivante dans la suite. Donc on aurait que $f(H)$ intersecte aussi la suite dénombrable de composantes. Donc à première vue, le théorème de l'article semble bien représenter le cas où le graphe auto-abrité contient une suite infinie de composantes connexes emboîtables comme des poupées russes.

Par contre, le problème consiste à supposer que si H intersecte la chaîne, alors $f(H)$ le fait aussi pour *tous* les f qui sont des isomorphismes $f : G- > G \setminus H$. Il semble être toujours possible de construire un tel f pour chaque H ayant la caractéristique, mais il est aussi aisé de construire un exemple où le théorème tel quel est faux.

Exemple 3. Considérons le graphe suivant : $G = \bigsqcup_{n<\omega} P^n \sqcup \bigsqcup_{n<\omega} P^n$.

Ce graphe contient deux exemplaires de chaque chaîne comme composantes connexes. Il est le double du graphe des chaînes croissantes. On peut appeler les deux composantes connexes de longueur n de ce graphe P^n et Q^n. Avant de continuer, définissons l'automorphisme $a : G \longrightarrow G$ qui envoie tous les sommets de la composante P^n, $n < \omega$, vers leur analogue dans Q^n, et vice-versa.

Choisissons un H pour que H intersecte chaque composante d'une suite infinie de composantes connexes : nous choisissons que H contienne exactement un sommet de degré 1 de la composante P^n pour chaque $0 < n < \omega$. Le sommet isolé P^0 sera aussi dans H, alors que Q^0 non.

Pour voir que H est un sous-graphe enlevable de G, on peut construire un isomorphisme $f : G \longrightarrow G \setminus H$ où chaque sommet d'une composante P^n, $n > 0$, est envoyé vers la composante $P^{n+1} \setminus H$ de $G \setminus H$, alors que les composantes Q^n sont inchangées. Ainsi on peut remarquer que H et $f(H)$ intersectent tous deux les composantes P^n, $n > 0$. À remarquer que $f(H)$ n'intersecte pas P^0. Tout ceci semble être cohérent avec le théorème.

Par contre, f n'est pas le seul isomorphisme entre G et $G \setminus H$. Soit $g : G \longrightarrow G \setminus H$ défini, pour $n < \omega$ et $u \in V(G)$, par $g(u) = a(u)$ si $u \in P^n$, et $g(u) = f(a(u))$ sinon. Tandis que H intersecte tous les P^n, $g(H)$ intersecte tous les Q^n. Donc cette paire $H \in Rem(G)$ et $g \in Iso_G(H)$ ne permet pas de classer G dans une des catégories de graphes auto-abrités énoncées par le théorème de Shekarriz et Mirzavaziri. Mais G est auto-abrité. C'est donc que leur théorème n'est pas exhaustif.

Pour tenter de rendre le théorème vrai, le changement le plus évident était de modifier la définition du troisième type de graphe auto-abrité pour qu'elle dise quelque chose comme :

Troisième catégorie (réparée). *Pour tout $H \in Rem(G)$, il existe $f \in Iso_G(H)$ et une infinité de composantes connexes de G, qu'on appellera $\{G_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, tels que pour tout z, $H \cap G_z$ et $f(H) \cap G_z$ ne sont pas vides.*

C'est un simple changement de quantificateurs qui était nécessaire. Il reste ensuite à prouver ce nouveau théorème pour être certains que le changement est suffisant, et que cette classification est maintenant exhaustive.

Lorsque nous nous sommes rendu compte qu'il fallait améliorer le théorème de classification des graphes auto-abrités de Shekarriz et Mirzavaziri en 2017, nous avons travaillé sur une preuve qui utilisait la même terminologie que la preuve de l'article original, tout en rajoutant des définitions plus précises faisant référence aux composantes connexes. La structure de preuve en cas par cas est gardée, mais les tests sont plus complexes. Pour chaque cas, un isomorphisme qui correspond exactement à une des conditions du théorème est construit. La première preuve que nous avions construite comprenait cinq cas et trois niveaux d'imbrication, comparé à trois cas et deux niveaux d'imbrication dans la preuve de Shekarriz et Mirzavaziri. Elle est aussi trois fois plus longue et a besoin d'un lemme. Par contre, elle est rigoureuse.

Heureusement, nous avons réussi à présenter le résultat de façon beaucoup plus concise dans les sections qui suivront.

Chapitre 4

Notre version du théorème

Après 2017, nous avons tenté de trouver comment «déspaghettifier» notre preuve, ce qui a aussi impliqué de remettre en question les définitions utilisées dans l'article original. On se rend compte qu'il est très rarement nécessaire de parler de sous-graphe enlevables directement, alors ce concept sort de la terminologie. On met plutôt l'accent sur les abritements : c'est la raison pour laquelle on les définit dans la section 2.0.3.

Un autre détail qui change est la présence de l'ensemble $\mathbb{Z}$ dans l'énoncé du théorème. Il est possible d'avoir un graphe qui comprend une composante connexe non vide pour chaque élément de $\mathbb{Z}$, et que tous ces graphes s'emboîtent les uns dans les autres (on peut créer un tel graphe grâce aux arbres de Noël définis en 2.0.2 et à leurs propriétés qui seront décrites en 4.1). Par contre, on peut toujours choisir une composante arbitrairement pour être notre «0», à partir duquel on étudiera la suite croissante en ignorant les composantes précédentes. Donc on n'a pas besoin des entiers négatifs pour exprimer la structure, donc $\mathbb{Z}$ s'en va.

Ainsi nous avons réussi à exprimer le théorème de façon plus simple et, nous l'espérons, élégante :

Théorème 4.0.1. *Un graphe G sera auto-abrité selon l'abritement $f : G \longrightarrow G$ si et seulement si il possède au moins une des structures suivantes :*

(1) Le graphe contient une composante connexe de G auto-abritée ;

(2) Le graphe contient ω composantes connexes de G isomorphes ;

(3) Il existe une suite $\{C_i\}_{i<\omega}$ de composantes connexes de G non isomorphes telles que $C_i \hookrightarrow C_{i+1}$ pour $i < \omega$ dans le graphe.

Avant de voir la preuve du théorème, passons à travers les exemples de graphes infinis définis en 2.0.2 pour résumer ce qu'on connaît de leurs auto-abritements, leurs jumeaux et de la catégorie dans laquelle ils se placent selon le dernier théorème.

4.1. Exemples analysés

Exemple 4 (Le rayon P^ω)**.** Voir la définition 2.0.31. C'est un graphe auto-abrité : pour n'importe quel entier $k < \omega$, on peut abriter P^ω dans lui-même avec la fonction $f(i) = i + k$.

Le rayon a une classe infinie de jumeaux qui sont de la forme $P^\omega \sqcup P^k, k < \omega$. Les graphes de cette classe ne sont donc pas connexes. P^ω n'a pas de jumeaux connexes parce que chacun de ses sous-graphes infinis connexes est aussi un rayon.

C'est un graphe de la première catégorie selon le théorème 4.0.1.

Exemple 5 (Le stable dénombrable $\overline{K_\omega}$)**.** Voir la définition 2.0.20. Ce stable est auto-abrité : pour n'importe quel entier $k < \omega$, on peut abriter $\overline{K_\omega}$ dans lui-même avec la fonction $f(i) = 2 * i$. Ceci résulte en un graphe qui a encore un nombre dénombrable de sommets bien qu'on en ait retiré un sur deux.

Le stable n'a pas de jumeau parce que tous ses sous-graphes sont aussi des stables. Ainsi, pour n'importe quel abritement $f : G \hookrightarrow \overline{K_\omega}$, G est soit un stable fini, soit un stable dénombrable, c'est-à-dire $\overline{K_\omega}$ lui-même.

Ce graphe contient une structure du deuxième type selon le théorème 4.0.1.

Exemple 6 (Les chaînes croissantes)**.** Voir la définition 2.0.30. Ce graphe, qu'on appellera G ici, est auto-abrité : chaque P^n peut s'abriter dans P^{n+1}. Cette propriété permet de créer un auto-abritement $f : G \hookrightarrow G$ à l'échelle du graphe au complet. Dans $f(G)$, la composante P^0 originale a disparu, mais il y a une composante isomorphe à P^0 abritée dans le graphe qui était originalement P^1.

Le graphe a des jumeaux. Par exemple, si on retire uniquement la composante P^0 du graphe original, on crée un jumeau, car on peut retrouver P^0 dans P^1, ce qui nous demande d'abriter P^1 dans P^2, et ainsi de suite. On voit que retirer n'importe quelle composante P^n cause le même phénomène. On a donc au moins une infinité dénombrable de jumeaux des chaînes connexes.

Ce graphe a bien entendu la troisième structure du théorème.

Exemple 7 (L'étoile infinie S)**.** Voir la définition 2.0.29. L'étoile infinie est auto-abritée. En effet, toutes les branches de l'étoile sont interchangeables. Puisque ces sommets sont indexés par ω, on peut abriter S dans elle-même avec une fonction du genre $f(v) = v$, $f(i) = i + j$ pour $j < \omega$. Cette fonction n'aura pas dans son image j des branches de l'étoile, mais en gardera encore $\aleph_0$. Puisque S est connexe, c'est un graphe du premier type selon 4.0.1.

Toutefois, ce graphe n'a aucun jumeau. Tout abritement dans S qui possède son centre v dans son image sera isomorphe à S si il donne à v une infinité de voisins, et sinon sera une étoile finie. Par contre si v n'est pas dans l'image, le résultat est un stable, qui ne contient pas S comme sous-graphe.

Exemple 8 (Le double rayon $P^{\mathbb{Z}}$)**.** Voir la définition 2.0.32. Le double rayon n'est pas abrité. En effet, tout abritement dans $P^{\mathbb{Z}}$ exclut nécessairement un sommet de $V(P^{\mathbb{Z}})$ de son image. Donc cette image ne peut plus être un double rayon, puisque les voisins du sommet exclus n'ont plus degré 2. A

Exemple 9 (L'arbre (2,3) $T_{2,3}$)**.** Voir la définition 2.0.33. L'arbre $T_{2,3}$ est auto-abrité. Cette arborescence est construite récursivement pour qu'à chaque niveau pair, chaque sommet, considéré comme une racine, induise un arbre isomorphe au graphe initial. De plus, à chaque niveau impair, les sommets induisent chacun un arbre $T_{3,2}$, qui est un jumeau du graphe original. Une des classes infinies de jumeaux de cette arborescence est $\bigsqcup_{0<i<j} T_{3,2}$ pour $j < \omega$, soit l'union disjointe d'une quantité arbitraire non nulle d'arbres (3,2).

L'arbre (2,3) est du premier type, car il est connexe. Par contre, on vient de voir qu'il possède des jumeaux qui ne sont pas connexes. Les jumeaux de la classe donnée plus haut sont quand même du premier type puisque chacune de leurs composantes est un graphe auto-abrité. De plus, ces jumeaux comportent tous un nombre fini de composantes, ce qui veut dire qu'ils ne possèdent pas la deuxième ni la troisième structure.

$T_{2,3}$ possède aussi des jumeaux connexes.

Exemple 10 (L'arbre de noël)**.** Voir la définition 2.0.37. L'arbre de noël n'est pas auto-abrité. On peut le constater, car ses sommets de degré 3 sont espacés les uns des autres par des distances toujours plus grandes. Ainsi, ils ne sont pas interchangeables. On ne peut pas abriter la dent P^2 dans la dent P^4 parce que leurs deux sommets sur le rayon sont à distance 2, alors que le prochain sommet de degré 3 est à distance 4.

En plus de ne pas être auto-abrité, ce graphe a la particularité que tous ses sous-graphes infinis connexes, sauf le rayon lui-même, ne sont pas auto-abrités non plus. Cette propriété peut être utilisée pour construire un graphe auto-abrité ayant la troisième structure selon le théorème 4.0.1 et dont les composantes connexes sont indexées par $\mathbb{Z}$. En donnant à l'arbre de noël l'index 0, on peut créer la composante indexée i en ajoutant à l'extrémité de l'arbre la chaîne $0u_1u_2...u_i$, et on trouve la composante $-i$ en retirant i sommets au rayon et les premières $\lfloor \log_2(i) \rfloor$ dents.

Le graphe créé en réunissant toutes ces composantes n'est pas du premier ou deuxième type : uniquement du troisième.

Exemple 11 (Le graphe de Rado R)**.** Voir la définition 2.0.38. Le graphe aléatoire est auto-abrité. Par sa construction, si on lui retire un nombre fini de sommets, l'infinité de sommets restante a été générée aléatoirement de la même façon que le graphe de Rado, et y est donc isomorphe.

Ce graphe est de la première structure selon le théorème 4.0.1 puisqu'il est connexe.

En effet, il possède la *propriété d'extension* qui postule que pour toute paire de sous-ensembles non triviaux et disjoints V et U de ses sommets, il existe un sommet x qui est adjacent à tous les sommets de V, mais adjacent à aucun des sommets de U. Ainsi, si on veut construire une chaîne entre u et $v \in V(R)$, il suffit de choisir comme ensembles $U = \{u,v\}$ et $V = \{w\}$ où $w \in V(R)$ est un sommet au hasard. Alors il existe x relié à tous les sommets de U. Alors uxv est une chaîne entre u et v dans R. C'est donc vrai que R est connexe.

On rappelle que le graphe de Rado est universel, donc il contient tous les graphes d'ordre fini ou dénombrable comme sous-graphes. De plus, il est lui-même dénombrable. Ceci nous donne une manière facile de construire une infinité de jumeaux déconnectés pour le graphe de Rado.

Prenons n'importe quel ensemble dénombrable $\mathcal{C}$ de graphes finis, non vides et connexes tels que pour tout $G_i, G_j \in \mathcal{C}$, $G_i \ncong G_j$, c'est-à-dire que les graphes de $\mathcal{C}$ sont tous différents par isomorphisme. Un tel ensemble existe puisque l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ en est un exemple. Ensuite, soit un sous-ensemble non vide $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ de l'ensemble choisi. On sait que $\mathcal{E}$ contient un nombre au plus dénombrable de graphes finis, ce qui fait qu'au total, la somme $\Sigma_{G\in\mathcal{E}}|G|$ des ordres des graphes dans $\mathcal{E}$ est aussi au plus dénombrable.

Soit le graphe $R_{\mathcal{E}} = R \sqcup \bigsqcup_{G\in\mathcal{E}} G$, c'est-à-dire le graphe de Rado auquel on ajoute $|\mathcal{E}|$ composantes connexes toutes différentes. Le nouveau graphe $R_{\mathcal{E}}$ n'est pas connexe, donc il est différent de R. De plus, il est d'ordre dénombrable, ce qui implique que par la propriété d'universalité, $R_{\mathcal{E}} < R$. Trivialement on a aussi $R < R_{\mathcal{E}}$. Donc R et $R_{\mathcal{E}}$ sont des jumeaux. Puisqu'il existe $2^{\aleph_0}$ façons de choisir l'ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, et que chaque sous-ensemble $\mathcal{E}$ génèrera un jumeau $R_{\mathcal{E}}$ unique, on voit que R a $2^{\aleph_0}$ jumeaux déconnectés.

Est-ce que R possède autant de jumeaux connexes ? Oui !

On peut obtenir un jumeau connexe $R'_{\mathcal{E}}$ de R à partir de chaque jumeau déconnecté de la forme $R_{\mathcal{E}}$. Ajoutons-lui un nouveau sommet v et ajoutons les arêtes $[v,u]$ pour chaque $u \in V(R_{\mathcal{E}})$. On voit que $R'_{\mathcal{E}}$ est toujours un graphe dénombrable qui contient R, alors pour prouver que ce graphe est un jumeau de R on a seulement besoin de montrer que $R \ncong R'_{\mathcal{E}}$. Or $R'_{\mathcal{E}}$ contient le sommet v, qui a un degré infini, ainsi qu'au moins un sommet u provenant de l'ensemble $\mathcal{E}$, dont le degré est nécessairement fini. Donc $R'_{\mathcal{E}}$ n'est pas sommet-transitif, puisque les sommets u et v ont des propriétés très différentes. Mais R est sommet-transitif, comme mentionné au chapitre 2.0.2. Donc on a bien $R \ncong R'_{\mathcal{E}}$.

Ceci implique que le graphe de Rado possède une infinité non dénombrable de jumeaux connexes.

4.2. Preuve du théorème 4.0.1

Finalement, voici la preuve du théorème :

Démonstration. Soit G un graphe auto-abrité. Si G est connexe, il n'a qu'une composante connexe. G a donc une structure du premier type.

Supposons que G n'est pas connexe. Soit $f : G \hookrightarrow G$ l'abritement de G dans lui-même. Pour chaque composante connexe $C \in CC(G)$, il existe une composante $\hat{C} \in CC(G)$ telle que $f(C) \leq \hat{C}$.

Supposons que pour toutes les composantes $C \in CC(G)$, $f(C) = \hat{C}$. Dans ce cas, choisissons $C_0 \in CC(G)$ tel que $C_0 \neq \hat{C}_0$ et renommons $\hat{C}_0$ à C_1. Un tel C_0 existe, car sinon f est un isomorphisme. Construisons récursivement la suite $\{C_i\}_{i<\omega}$ telle que C_0 et C_1 sont les composantes qu'on vient d'identifier et $C_{i+1} \in CC(G)$ est la composante telle que $C_{i+1} = \hat{C}_i$. La suite C est infinie, car f est un abritement.

Puisque nous avons supposé que $f(C) = \hat{C}$ pour tous les $C \in CC(G)$, alors C est toujours isomorphe à $\hat{C}$. Donc tous les C_i de la suite sont isomorphes entre eux. De plus, si il existe $i,j < \omega$ tels que $C_i = C_j$, alors f agit seulement comme un automorphisme sur les éléments de la suite. Il doit donc exister un autre choix de C_0 tel que $C_i \neq C_j$ pour tous $i,j < \omega$ puisque f est un abritement. Donc les composantes de la suite $\{C_i\}_{i<\omega}$ sont toutes distinctes. Donc G possède une structure du deuxième type.

Supposons maintenant qu'il existe une composante $C_0 \in CC(G)$ telle que $f(C_0) \neq \hat{C}_0$ et renommons $\hat{C}_0$ à C_1. Que $f(C_0) \neq C_1$ signifie que la fonction f, si on considère sa restriction à $C_0 \cup C_1$, est un abritement et non un isomorphisme : certains sommets de C_1 ne sont pas présents dans l'image $f(G)$. Construisons la suite $\{C_i\}_{i<\omega}$ telle que C_0 et C_1 sont les composantes qu'on vient d'identifier et $C_{i+1} \in CC(G)$ est telle que $C_{i+1} = \hat{C}_i$. On voit que pour tout $i < \omega$, C_i est abritée de façon non stricte dans C_{i+1}, c'est-à-dire que C_i peut être abritée dans C_{i+1} ou peut lui être isomorphe. On peut observer que pour tout $i < j$, on a que $f^{j-i}(C_i) \leq C_j$.

Dans la suite $\{C_i\}_{i<\omega}$, supposons qu'il existe $i < j \in \mathbb{N}$ tels que non seulement $C_i \cong C_j$, mais aussi $C_i = C_j$. Une répétition dans la suite est seulement possible si une des composantes est auto-abritée. Pour le voir, faisons quelques observations simples.

Observation 6. Soit $m \geq n$. La composante de $f^n(G)$ qui est sous-graphe de C_m, c'est-à-dire $f^n(G)[C_m]$, est isomorphe à C_{m-n}. En effet, on a que $f^n(C_{m-n}) \leq C_m$. Dans ce cas $f^n(C_{m-n}) \cong f^n(G)[C_m]$ puisque G est isomorphe à $f^n(G)$.

En particulier, on a que $f^{j-1}(G)[C_j] \cong C_1$ et $f^i(G)[C_i] \cong C_0$.

Observation 7. Pour $m \geq n$, on a que $f^m(G) \leq f^n(G)$ puisque f est un abritement. De même, on peut appliquer cette même relation à la restriction de f à un sous-graphe $H < G$: $f^m(G)[H] \leq f^n(G)[H]$.

Puisque $C_i = C_j$ et $i \leq j-1$, et grâce aux deux dernières affirmations, on peut donc poser l'inégalité suivante :

$$C_1 \cong f^{j-1}(G)[C_j] = f^{j-1}(G)[C_i] \leq f^i(G)[C_i] \cong C_0 \tag{4.2.1}$$

Mais par choix de C_0 et C_1, on avait que $C_0 < C_1$. Donc on a $C_0 < C_1 \leq C_0$. Donc C_0 est auto-abrité. Donc G possède une structure du premier type.

Sinon, on suppose que toutes les C_i de la suite sont distinctes. On sait que C_i peut soit être isomorphe à C_{i+1} ou être abritée dans C_{i+1}. Soit $A = \{i < \omega : C_i \hookrightarrow C_{i+1}\}$ l'ensemble des indices de C pour lesquels on a un abritement strict vers le prochain élément.
Supposons que $|A|$ est fini. Soit $m = max(A)$. La sous-suite $C' = (C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3}, ...) = \{C_n\}_{m<n<\omega}$ ne contient que des composantes connexes uniques isomorphes deux à deux. G contient donc une infinité de composantes connexes isomorphes à C_{m+1}, et sa structure est du deuxième type.

Si, au contraire, $|A| = \aleph_0$, alors on peut créer une suite infinie de composantes connexes abritées les unes dans les autres. Il suffit de considérer A comme l'ensemble des indices des éléments de C qu'on sélectionne dans notre sous-séquence $C' = \{C_n\}_{n \in A}$. Ainsi si C_i est dans C', alors soit $i+1 \in A$, ou non. Si oui, alors C_i s'abrite bien dans le prochain élément de la suite C'. Sinon, si le prochain élément de A est $j > i+1$, on est assurés que $C_j \cong C_{i+1}$. Donc puisque C_i s'abrite dans C_{i+1}, C_i aussi dans C_j, son successeur dans la suite C'. Le graphe G a donc une structure du troisième type.

Ainsi, tout graphe auto-abrité possède nécessairement une des trois structures.

Pour l'autre sens de la preuve, si un graphe possède une des trois structures, alors il est auto-abrité.

Supposons que $G = (V,E)$ possède la première structure. Alors G possède une composante connexe H qui est auto-abritée, disons par l'abritement $f : H \hookrightarrow H$. Alors la fonction $f' : G \longrightarrow G$ définie comme suit est un auto-abritement :

$$f'(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in V(H) \\ u & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons maintenant que G possède la deuxième structure. Soit $A \subseteq CC(G)$ un ensemble dénombrable de composantes connexes de G qui sont toutes deux-à-deux isomorphes. Soit $b : \mathbb{N} \longrightarrow A$ une fonction qui dénombre les composantes de A. Alors la fonction $f : G \longrightarrow G$, telle que $f(b(i)) = b(i+1)$ pour $i < \omega$ et $f(u) = u$ si u ne fait pas partie d'une des composantes de A, est un auto-abritement de G.

Supposons enfin que G possède la troisième structure, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{C_i\}_{i<\omega}$ de composantes connexes de G telles que $C_i \hookrightarrow C_{i+1}$ pour $i < \omega$. Pour chaque $i < \omega$, soit f_i l'abritement tel que $f : C_i \hookrightarrow C_{i+1}$. Alors la fonction $f : G \longrightarrow G$ suivante est un abritement :

$$f(u) = \begin{cases} f_i(u) & \text{si } u \in V(C_i) \\ u & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc dans tous les cas, si G possède une des trois structures, alors il est auto-abrité.

Donc le théorème est correct. $\square$

Pour prouver le théorème, on a créé une suite infinie $\{C_i\}_{i\in\omega}$, qu'on peut conceptualiser comme étant des composantes qui s'emboîtent toutes l'une dans la suivante, de façon propre ou non, et qui peuvent être uniques ou non. On essaie de commencer la suite par une composante qui s'abrite dans la suivante, mais si ce n'est pas possible, tous les éléments de la suite seront isomorphes et distincts, ce qui nous permet de classer le graphe dans la deuxième catégorie.

Selon la terminologie de Shekarriz et Mirzavaziri, les composantes de la chaîne intersectent le sous-graphe enlevable induit par l'abritement f.

Des observations sur les éléments de la suite permettent de classer le graphe dans une des trois catégories du théorème. Si les composantes de la suite ne sont pas uniques, on peut isoler une composante auto-abritée et classer le graphe dans la première boîte. On peut ensuite supposer que les composantes sont toutes uniques.

Reste ensuite à observer combien de composantes de la suite sont abritées dans la composante suivante, et combien y sont isomorphes. Puisque la suite est infinie, au moins un de ces évènements se passe une infinité de fois. Si on a une infinité d'abritements, on peut classer le graphe dans la troisième boîte ; si on en a un nombre fini, il sera dans la deuxième boîte — à partir d'un certain point, tous les graphes de la suite seront isomorphes l'un à l'autre. Ceci conclut un sens de la preuve : il faut ensuite prouver le «si» du «si et seulement si», ce qui n'est pas très compliqué.

Remarquons que la preuve ne dépend pas du fait que le graphe auto-abrité soit d'ordre dénombrable ou non. Donc le théorème s'applique à tous les graphes. Par contre, les informations que nous donne la classification relèvent de caractéristiques dénombrables du graphe : par exemple, la suite C qu'on crée sera toujours dénombrable par sa définition. Il sera donc difficile d'utiliser les résultats pour parler des propriétés qu'ont les graphes indénombrables : par exemple, avoir un nombre de jumeaux supérieur à $2^{\aleph_0}$.

On peut voir que le fait de dire qu'un graphe appartient à une des catégories n'exclut pas qu'il appartienne aux autres. La preuve du théorème 4.0.1 identifie simplement la structure exhibée par l'abritement choisi. Par exemple, voici un graphe qui possède les trois structures simultanément :

Exemple : Soit P^ω un rayon. Soit P_n^ω le rayon ayant une chaîne de longueur n attachée à son n^e sommet pour $0 < n < \omega$. Alors $G = \bigsqcup_\omega P^\omega \sqcup \bigsqcup_{n<\omega} P_n^\omega$ possède une composante connexe auto-abritée (n'importe quel des rayons P^ω) ; il possède une infinité de composantes connexes isomorphes (au rayon) ; finalement, puisque $P_n^\omega \hookrightarrow P_{n+1}^\omega$ pour $n < \omega$, G possède une suite infinie de composantes connexes qui s'abritent l'une dans la suivante.

Maintenant munis d'un outil pour parler des graphes auto-abrités déconnectés, servons-nous de ces catégories pour trouver de nouvelles classes de graphes respectant la propriété alternative des graphes.

Chapitre 5

Corollaires au théorème

5.1. Les graphes possédant la troisième structure

Le premier corollaire prouvé concerne les graphes de la troisième catégorie. Ce sont ceux pour lesquels la génération de jumeaux est la plus facile puisqu'on sait qu'ils contiennent beaucoup de composantes connexes uniques par isomorphisme.

Théorème 5.1.1. *Soit un graphe auto-abrité G dont la structure est du troisième type selon le théorème 4.0.1, mais qui n'a aucune structure du deuxième type. Alors G a au moins $2^{\aleph_0}$ jumeaux.*

Pour montrer ce corollaire, nous commencerons par montrer qu'il existe au moins un nombre dénombrable de composantes C_i dans le graphe G qui sont distinctes par isomorphisme et telles que $G \setminus C_i$ est un jumeau de G. Nous remarquerons ensuite que pour $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles distincts de composantes, retirer le sous-ensemble à G crée encore un jumeau qui est distinct. Les seuls sous-ensembles de composantes dont la soustraction ne créera pas de jumeau sont ceux qui ne laissent derrière qu'un nombre fini de composantes de G, et il n'existe que $\aleph_0$ de ces sous-ensembles. Ceci suffira pour conclure que G a $2^{\aleph_0}$ jumeaux.

Démonstration. Selon le théorème 4.0.1, G contient une suite dénombrable de composantes connexes $C = \{C_i\}_{i<\omega}$ telles que C_i est abritée dans C_{i+1} pour tout $i < \omega$. Soit $F = \{C_i : i < \omega\}$ l'ensemble des composantes faisant partie de la suite C. L'ensemble F a comme cardinalité $\aleph_0$. Prenons $E \subseteq F$ quelconque. Si $F \setminus E$ est fini, travaillons plutôt avec $F \setminus E$; si $E = \emptyset$, ignorons ce cas. Abusons de la notation pour déclarer que $V(E) = \{u \in C_i : C_i \in E\}$.

On veut prouver que $G' = G \setminus G[V(E)]$, c'est-à-dire le graphe G' obtenu en enlevant les composantes connexes contenues dans E de G, est un jumeau de G.

Premièrement, $G' \ncong G$ puisque G ne fait pas partie de la deuxième catégorie. En effet, pour chaque $H \in CC(G)$, l'ensemble de composantes isomorphes à H dans G $\{H' \in CC(G) : H' \in [H]_{\cong}\}$ est fini. Comme $E \neq \emptyset$, on a retiré au moins une composante de G et au moins un des ensembles $\{H' \in CC(G) : H' \in [H]_{\cong}\}$ pour un certain $H \in CC(G)$ a changé de taille, ce qui est suffisant pour dire que G et G' ne sont pas isomorphes.

Deuxièmement, G' est évidemment abrité dans G puisqu'il est obtenu en retirant des sommets de G.

Troisièmement, G est abrité dans G'. En gardant l'ensemble F infini, on s'est assurés que la sous-suite de C obtenue en enlevant les éléments E était encore infinie. Appelons cette sous-suite C'. Si la suite C contenait $C_0, C_1, C_2, ...$ alors sa sous-suite C' contient $C'_0, C'_1, C'_2, ...$ Posons $k = min\{i < \omega : C_i \in E\}$. On peut remarquer que pour $i < \omega, C_i = C'_i$ si $i < k$, ou $C_i \hookrightarrow C'_i$ sinon.

En effet, soit ces composantes sont identiques, car elles font partie du début de leurs sous-suites respectives, avant que la première composante C_k de E ne soit retirée de C ; soit la composante identifiée C'_i représente la composante C_j puisque $j - i$ des j premières composantes de C font partie de E. Dans ce cas, puisque les composantes de C sont toutes abritées les unes dans les autres, il est facile de voir que $C_i \hookrightarrow C'_i$ par transitivité. Nommons cet abritement $f_i : C_i \longrightarrow C'_i$.

Ces observations nous permettent de créer la fonction $f : G \longrightarrow G'$ suivante, qui est un abritement de G dans G' :

$$f(u) = \begin{cases} f_i(u) & \text{si } u \in V(C_i) \text{ et } C_i \hookrightarrow C'_i \\ u & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci montre que G est abrité par G' et il est donc clair que G et G' sont jumeaux. Nous avons maintenant moyen de générer un jumeau pour chaque sous-ensemble de composantes E choisies de F de la manière indiquée plus haut.

Il faut maintenant montrer que la cardinalité de $A = \{E \subseteq F : E \neq \emptyset \text{ et } |F \setminus E| = \aleph_0\}$ est $2^{\aleph_0}$.

On sait qu'un autre ensemble dont la cardinalité est $2^{\aleph_0}$ est $\mathbb{P}(F) = \{E \subseteq F\}$. En effet, F est dénombrable.

La condition $|F \setminus E| = \aleph_0$ est équivalente à $|F \setminus E| \neq n < \omega$ puisque F est un ensemble dénombrable. Donc on peut écrire la cardinalité de A comme ceci :

$$|A| = |B| - |\{F \setminus E : |F \setminus E| = n < \omega\}| - |\{\emptyset\}| \tag{5.1.1}$$

On peut laisser tomber le $|\{\emptyset\}|$ puisque ça donne une quantité négligeable par rapport aux autres.

Puisque $F \setminus E \subseteq F$, ces deux ensembles sont équivalents :

$$\{F \setminus E : |F \setminus E| = n < \omega\} = \{E \subseteq F : |E| = n < \omega\} = \text{fini}(F) \tag{5.1.2}$$

Comme F est dénombrable, l'ensemble fini(F) devrait avoir la même cardinalité que fini$(\mathbb{N}) = \{C \subseteq \mathbb{N} : |C| = n < \omega\}$.

Soit $b_k b_{k-1}...b_1 b_0$ la représentation en binaire du nombre naturel n. Alors la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \text{fini}(\mathbb{N})$, où $f(n) = \{m \leq k \in \mathbb{N} : b_m = 1\}$, est une bijection entre les naturels et l'ensemble des ensembles finis de naturels.

Ensuite, la fonction $g : \text{fini}(\mathbb{N}) \longrightarrow \text{fini}(F)$ où $f(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = \{C_{n_1}, C_{n_2}, ..., C_{n_k}\}$ est une bijection entre fini$(\mathbb{N})$ et fini(F).

Donc pour la cardinalité de A on a

$$\begin{aligned}
|A| =& |B| - |\{F \setminus E : |F \setminus E| = n < \omega\}| - |\{\emptyset\}| \\
|A| =& |B| - |\{E \subseteq F : |E| = n < \omega\}| - |\{\emptyset\}| \\
|A| =& |B| - |\{C \subseteq \mathbb{N} : |C| = n < \omega\}| - |\{\emptyset\}| \\
|A| =& |B| - |\mathbb{N}| - |\{\emptyset\}| \\
|A| =& 2^{\aleph_0} - \aleph_0 - 1 \\
|A| =& 2^{\aleph_0}
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

La dernière étape de cette preuve est justifiée par les propriétés des cardinaux.

Donc on a bien qu'un graphe possédant la troisième structure, mais pas la deuxième possède aussi $2^{\aleph_0}$ jumeaux. $\square$

Remarquons encore que le théorème ne dépend pas de l'ordre du graphe. Pour des graphes dénombrables, on conjecture que le nombre maximum de jumeaux est $2^{\aleph_0}$, ce qui donnerait aux graphes dénombrables du troisième type le nombre maximal de jumeaux. Mais si le graphe n'est pas dénombrable, il pourrait posséder nombre de jumeaux encore plus grand. C'est la raison pour laquelle l'énoncé du théorème ne dit pas que ces graphes ont exactement $2^{\aleph_0}$ jumeaux : nous n'avons pas prouvé que les jumeaux de la preuve étaient les seuls que peut posséder un tel graphe.

5.2. Les graphes possédant la deuxième structure

Maintenant que ce résultat est montré, prouvons un théorème similaire pour les graphes possédant la deuxième structure, y compris ceux qui contiennent aussi la troisième.

Théorème 5.2.1. *Soit G un graphe auto-abrité qui appartient à la deuxième catégorie selon, 4.0.1 mais qui n'appartient pas à la première. Alors le nombre de jumeaux de G est soit 0, soit au moins $\aleph_0$, soit au moins $2^{\aleph_0}$.*

Précisons que nous ne voulons pas donner une borne supérieure sur le nombre de jumeaux des graphes lorsque celui-ci n'est pas 0. Pour un graphe qui n'est pas dénombrable, il est possible que son nombre de jumeaux soit plus que $2^{\aleph_0}$ et que ses jumeaux soient construits d'une façon à laquelle on ne touche pas ici.

Pour prouver le théorème, on va se servir du fait que dans un graphe possédant la deuxième structure, certaines composantes sont présentes une infinité de fois. Le but sera donc de choisir une composante qui est présente ω fois et d'obtenir un jumeau en transformant un certain nombre de ces composantes isomorphes en quelque chose de nouveau, tout en en laissant une infinité derrière. Si la composante dont on se sert est finie, on peut extraire n'importe quel nombre de sommets isolés P^0 de nos composantes. Ceci nous donne une infinité dénombrable de jumeaux. Par contre, si la composante est infinie, il existe une infinité de sous-graphes de la composante. Il est donc possible de créer $2^{\aleph_0}$ jumeaux au graphe, en s'inspirant de l'ensemble des sous-ensembles $\mathbb{P}(\omega)$. La preuve utilise le lemme 5.2.2 dont l'énoncé la suit.

Démonstration. Puisque G appartient à la deuxième catégorie, alors il existe au moins une composante connexe $H \in CC(G)$ telle que G contient $\bigsqcup_\omega H$ comme sous-graphe. Soit $B = \{H \in CC(G) : \bigsqcup_\omega H \subseteq G\}$ l'ensemble des composantes connexes de G avec cette propriété. On choisit un $H' \in B$ de la façon suivante : s'il existe $H \in B$ tel que $|H| \geq \aleph_0$, alors on choisit ce H pour notre H' . Sinon, H' sera n'importe quelle composante de B telle que $|H'| > 1$. Si ce n'est pas possible, c'est que $B = \{P^0\}$ et on n'a pas le choix de prendre $H' = P^0$.

Premièrement, supposons que H' est isomorphe à P^0.

On suppose que le graphe ne contient pas la troisième structure décrite en 4.0.1. Alors G n'a aucun jumeau, car sa seule structure abritable est le stable dénombrable (voir l'exemple 5 de la section 4.1). Si on retire de G des sommets qui ne font pas partie du stable dénombrable, le graphe résultant ne contiendra plus G comme sous-graphe parce que ces autres sommets font partie de composantes qui sont seulement présentes un nombre fini de fois dans G.

Si, au contraire, G possède aussi la troisième structure du théorème 4.0.1, alors G héritera des jumeaux induits par cette structure. En effet, la présence d'un stable dénombrable ne va pas affecter le nombre de jumeaux qu'on trouve à ce genre de graphe lors de la preuve du théorème 5.1.1.

Deuxièmement, supposons que H' contient un nombre infini dénombrable de sommets. Donc H' contient au moins un sous-graphe connexe A_i de chaque ordre $i < \omega$:

$$\forall i < \omega, \exists A_i < H' \text{ tel que } |A_i| = i \tag{5.2.1}$$

Pour trouver un sous-graphe qui peut être A_i, il suffirait de faire une fouille à travers les sommets de H' à partir d'un certain sommet, et de rassembler les i premiers sommets trouvés grâce à cette fouille.

Prenons l'ensemble A qui contient un sous-graphe connexe A_i de H' d'ordre i pour chaque $i < \omega$. L'ensemble A existe grâce à l'axiome du choix. On sait que les sous-graphes dans A sont tous différents puisqu'ils ont des ordres différents.

Considérons le graphe $G' = G - \bigsqcup_{A_i \in A} [A_i]_{\cong}$, le graphe qui ne contient aucun exemplaire de A_i parmi ses composantes connexes pour tout $A_i \in A$. Si G ne possédait pas de telle composante, alors $G' \cong G$; mais sinon, G et G' sont jumeaux selon le lemme 5.2.2. En effet, on peut écrire G comme $G = G' \sqcup (\bigsqcup_{A_i \in A} (\bigsqcup_{j \leq I(A_i)} A_i))$ où $I(A_i)$ est le nombre d'exemplaires de la composante A_i dans G.

Montrons que G' a $2^{\aleph_0}$ jumeaux. On sait que l'ensemble de sous-ensembles de ω, $\mathbb{P}(\omega)$, a comme cardinalité $2^{\aleph_0}$; montrons que l'ensemble de tous les jumeaux de G', $T = \{J : J \hookrightarrow G', G' \hookrightarrow J\}$, a au moins la même cardinalité.

Soit $M \subseteq \omega$ un ensemble d'ordinaux non vide dans $\mathbb{P}(\omega)$. Sachant que l'ensemble A contient A_n à n sommets pour $n < \omega$, soit $G_M = G' \sqcup (\bigsqcup_{n \in M} A_n)$. G_M est un jumeau de G' par le lemme 5.2.2, en supposant que la fonction I demandée par le lemme soit $I(A_i) = 0$ pour tous les A_i.

Par ailleurs, pour tous $M, M' \subseteq \omega$ tels que $M \neq M'$, on a $G_M \ncong G_{M'}$. En effet, sans perte de généralité, soit $n \in M$ tel que $n \notin M'$. Alors G_M contient comme composante connexe A_n alors que $G_{M'}$ n'a aucune composante connexe isomorphe à A_n, ce qui indique que G_M et $G_{M'}$ ne sont pas isomorphes.

Donc il y a une bijection b entre $\mathbb{P}(\omega)$ et $\{G_M : M \subseteq \omega\}$, qui est définie par $b(M) = G_M$. Ces deux ensembles ont donc la même cardinalité. Alors G' a au moins $2^{\aleph_0}$ jumeaux. Par transitivité, G en a autant, puisque G est jumeau ou identique à G'.

Donc G a au moins $2^{\aleph_0}$ jumeaux.

Troisièmement, supposons que H' contient un nombre fini de sommets qui est plus grand que 1. On va prouver que G a au moins $\aleph_0$ jumeaux.

Soit $G' = G - [P^0]_{\cong}$ le sous-graphe de G dont toutes les composantes connexes ont au moins deux sommets. Puisque le graphe P^0 est sous-graphe de tout graphe à au moins deux sommets, et que H' a au moins deux sommets, alors par le lemme 5.2.2 on sait que G et

G' sont jumeaux. L'ensemble A demandé par le lemme est simplement $A = \{P^0\}$, alors que $I(P^0) = n < \omega$ où n est le nombre de $H \in cc(G)$ tels que $H \cong P^0$.

Soit $T = \{G' \sqcup (\bigsqcup_{i<n} P^0) : n < \omega\}$ un ensemble de graphes. D'abord, tous ces graphes sont différents les uns des autres. Le nombre de composantes connexes d'ordre 1 de chacun de ces graphes est différent. Ensuite, l'ensemble T est dénombrable puisqu'il est indexé par ω. Finalement, chacun des graphes dans T est un jumeau de G' par le lemme 5.2.2, avec $A = \{P^0\}$ et $I(P^0) = n$. Par transitivité, on conclut que G possède au moins $\aleph_0$ jumeaux.

G pourrait posséder plus de jumeaux si, quand on ignore toutes les composantes connexes dont la multiplicité dans G est infinie, on obtient une structure du troisième type. Alors selon le théorème 5.1.1 cette structure induit $2^{\aleph_0}$ jumeaux qui ne dépendent pas des composantes ignorées.
Ceci passe à travers tous les cas. On peut conclure qu'il est impossible pour un graphe du deuxième type d'avoir un nombre fini non nul de jumeaux, et que certains cas garantissent qu'un graphe avec cette structure possède $2^{\aleph_0}$ jumeaux.

□

Lemme 5.2.2. *Soit H un graphe connexe, $\mathcal{A} \subseteq \{A : A < H\}$ un ensemble non vide de sous-graphes distincts par isomorphisme de H tel que $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$, et $J : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ une fonction.*

Soit G' un graphe qui possède $\bigsqcup_\omega H$ comme composantes connexes et qui ne possède pas de composantes connexes dans la classe d'équivalence par isomorphisme $[A]_\cong$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Alors G' est jumeau à $G = G' \sqcup (\bigsqcup_{A\in\mathcal{A}}(\bigsqcup_{j\leq J(A)} A))$.

Démonstration. On peut voir rapidement que G' est abrité dans G. Par construction, G' est un sous-graphe de G, et les deux graphes ne sont pas isomorphes, car il existe au moins un $A \in \mathcal{A}$; ce A est une composante de G, mais pas de G'.

Remarquons que puisque $\mathcal{A}$ est fini ou dénombrable, ses éléments peuvent être indexés chacun par un nombre naturel différent. Chaque composante $A \in \mathcal{A}$ peut donc être représentée par A_i pour $i < |\mathcal{A}|$.

Pour montrer que G est abrité dans G', remarquons qu'on peut identifier chaque composante connexe C ajoutée à G avec deux entiers positifs : le $i < \omega$ qui indexe la composante $A_i \in \mathcal{A}$ qui est isomorphe à C, et la valeur $j \leq J(A_i)$ qui représente l'itération de la deuxième boucle pendant laquelle on a ajouté C au graphe. Donc chaque composante C est distinguée par la coordonnée $(i,j), i \leq |\mathcal{A}|, j \leq J(A_i)$. Par ailleurs, chaque composante isomorphe à H peut recevoir une étiquette k distincte qui permet de les énumérer, puisqu'il y en a une infinité dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une fonction bijective. La procédure suivante permet de retirer les sommets nécessaire à G' pour voir qu'il abrite G.

Pour chaque composante H_k, soit $(i,j) = f(k)$. Si $i > |\mathcal{A}|$, $j > 2 * J(A_i)$, ou j est impair, laisser H_k tel quel. Sinon, garder de H_k seulement le sous-graphe A_i. Ceci fait que chaque paire $(i, 2 * j)$ ajoute une composante A_i au graphe si $j \leq J(A_i)$, ce qui produit la même quantité que possède G. De plus, même si un nombre infini de composantes H_k étaient dénaturées pour extraire ces sous-graphes, il en reste encore une infinité puisque chaque couple $f(k) = (i,j)$ où j est impair laisse la composante H_k intacte.

Le graphe obtenu après cette opération est isomorphe à G : pour chaque composante connexe de G sur laquelle on avait opéré, la bonne quantité demeure.

Pour plus de rigueur, décrivons l'abritement $g : G \longrightarrow G'$. Nommons les composantes isomorphes à des sous-graphes de $\mathcal{A}$ dans G $C_{i,j}$ selon leur coordonnée décrite plus haut.

Si $v \in V(H_k)$, alors $g(v)$ sera le sommet équivalent à v dans la composante H_{2k+1}.

Si $v \in C_{i,j}$, alors $g(v)$ sera le sommet équivalent faisant partie du sous-graphe isomorphe à A_i dans $H_{2*f(i,j)}$.

Sinon, $g(v) = v$.

L'abritement est propre puisqu'il existe au moins un $A \in \mathcal{A}$ et que celui-ci est un sous-graphe propre de H.

Donc G' et G sont jumeaux. $\square$

5.3. Un théorème sur la GAC

Grâce aux corollaires précédents, on a de l'information sur le nombre de jumeaux de grandes classes de graphes. Ceci peut nous permettre de tirer des conclusions par rapport à quelques conjectures posées au chapitre 2.

Théorème 5.3.1. *La conjecture alternative des graphes (GAC) sera vraie si et seulement si les graphes connexes respectent la propriété alternative des graphes.*

Ce théorème rappelle la conjecture que Shekarriz et Mirzavaziri ont tenté de prouver, voulant que la GAC soit vraie si et seulement si les graphes connexes ne peuvent avoir un nombre fini non nul de jumeaux *connexes*. En enlevant la restriction que le jumeau soit connexe dans la deuxième conjecture, on obtient la restriction aux graphes connexes de la GAC, soit le corollaire 8, et le théorème 5.3.1 devient un simple corollaire des théorèmes déjà prouvés dans ce mémoire.

Pour prouver le théorème 5.3.1, il faudra montrer d'abord que si la GAC est vraie, sa restriction aux graphes connexes est vraie. Ensuite, on doit prouver l'implication inverse, c'est-à-dire que si tous les graphes connexes ont le bon nombre de jumeaux, alors cette propriété s'étend aux graphes non connexes.

Démonstration. D'abord, voyons que si la GAC est vraie, c'est que tous les graphes respectent la propriété alternative des graphes. Alors il sera vrai que les graphes connexes, entre autres, respectent la propriété alternative des graphes. Il suffit donc de prouver l'implication inverse du théorème.

Supposons que tous les graphes connexes satisfont la propriété alternative des graphes.

Soit un graphe G qui n'est pas connexe. Si G n'est pas auto-abrité, il n'a aucun jumeau. Si G est auto-abrité, il possède au moins une des trois structures du théorème 4.0.1. Si G possède la deuxième ou la troisième structure, alors il a au moins $\aleph_0$ jumeaux, ou 0.

Sinon, il tire sa propriété d'être auto-abrité d'une de ses composantes connexes ; soit H cette composante. Si H possède un jumeau H', alors $G' = H' \sqcup G \setminus H$ est abrité dans G, puisque H' est abrité dans H ; également, G' abrite G puisque H abrite H'. De même, on peut voir que $G \ncong G'$. Si H' est un jumeau connexe, on a simplement que les composantes H et H' ne sont pas isomorphes. Sinon, si H' n'est pas un jumeau connexe, alors il ajoute les composantes $CC(H')$ à celles de $G \setminus H$. Or, nous supposons que G n'est pas du deuxième type. Donc pour tout $J \in CC(H')$, le nombre de composantes connexes de $G \setminus H$ qui sont dans $[J]_{\cong}$ est fini. Ceci implique que le graphe G n'est pas isomorphe à G', parce que $CC(G) \ncong CC(G')$.

Donc le jumeau H' de H induit toujours un jumeau G' dans G. Dans ce cas, G possède au moins autant de jumeaux que H possède de jumeaux. Si G possède des jumeaux supplémentaires, ils seraient induits par d'autres composantes connexes auto-abritées H_1, $H_2, \ldots$ puisque G n'a pas de structure auto-abritée du deuxième ou troisième type. Puisqu'on a supposé que les graphes connexes satisfont la propriété alternative des graphes, c'est aussi le cas pour G, car chacune de ses composantes auto-abritées lui ajoute soit zéro, soit une infinité de jumeaux.

C'est donc que tous les graphes qui ne sont pas connexes respectent la propriété alternative des graphes, ce qui implique que tous les graphes la respectent grâce à notre supposition.

Ainsi les deux conjectures sont équivalentes. $\square$

Chapitre 6

Problèmes ouverts

En conclusion nous avons trouvé de nouvelles classes de graphes pour lesquelles la conjecture tient. Les classes de graphes pour lesquelles on avait de l'information étaient les arborescences, les arbres dispersés et les graphes sans rayons. Nos classes n'intersectent pas les arbres puisqu'elles ne contiennent pas d'arbre connexe, mais elles comprennent des graphes avec ou sans rayons sans discrimination. Donc nous avons obtenu des résultats complètement nouveaux pour les graphes avec rayon qui ne sont pas connexes. Nos classes de graphes peuvent aussi servir à étudier les graphes auto-abrités sous de nouvelles perspectives. Nous avons aussi permis à de futurs chercheurs d'ignorer les graphes non connexes pour leur propre recherche, ayant prouvé le corollaire 5.3.1.

Le champ de recherche des graphes auto-abrités promet d'être palpitant lorsque le travail de Tateno [**13**] sera vérifié. S'il a bien trouvé un contre-exemple à la GAC, alors nous pourrons chercher à voir quelles sont les classes exactes pour lesquelles la GAC n'est pas vérifiée, et s'il existe plusieurs paradigmes pour trouver un contre-exemple. Sinon, la tâche de montrer que le contre-exemple ne fonctionne pas aura sûrement mis en évidence des outils qui pourraient servir à prouver la GAC vraie définitivement.

En attendant, il serait possible à de prochains chercheurs de réfléchir au nombre de jumeaux des graphes connexes possédant au moins un rayon. Il pourrait aussi être intéressant d'étudier les graphes auto-abrités eux-mêmes pour voir s'ils exhibent des propriétés particulières. On pourrait regarder le lien entre ces structures et des structures d'autres champs des mathématiques comme les monoïdes.

De plus, tel que mentionné dans la section 2.0.3, il y a lieu de considérer le nombre de jumeaux des graphes à la cardinalité plus grande que $\aleph_0$, et de tenter de prouver que le nombre de jumeaux trouvés dans ce mémoire est une borne supérieure. Quelles caractéristiques des graphes indénombrables affectent leur nombre de jumeaux ?

Index

Références bibliographiques

[1] Anthony Bonato, Henning Bruhn, Reinhard Diestel et Philipp Sprüssel : Twins of rayless graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 101:60–65, 01 2011.

[2] Anthony Bonato, Gena Hahn et Claude Tardif : Large classes of infinite k-cop-win graphs. *Journal of Graph Theory*, 65:334–342, 12 2010.

[3] Anthony Bonato et Claude Tardif : Large families of mutually embeddable vertex-transitive graphs. *Journal of Graph Theory*, 43:99 – 106, 06 2003.

[4] Anthony Bonato et Claude Tardif : Mutually embeddable graphs and the tree alternative conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 96:874–880, 11 2006.

[5] Peter J. Cameron : The random graph, 2013. arXiv :1301.7544 [math.CO].

[6] Reinhard Diestel : *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, Berlin, Heidelberg, 5e édition, 2017.

[7] Alizée Gagnon, Geňa Hahn et Robert Woodrow : Self-embedded graphs and twin graph conjectures. En préparation, 2022+.

[8] Rudolf Halin : Automorphisms and endomorphisms of infinite locally finite graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:251–283, 1973.

[9] Wilfried Imrich : Embedding graphs into cartesian products. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576:266–274, 1989.

[10] Kenneth Kunen : *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*. Elsevier, 5e édition, 1992.

[11] Claude Laflamme, Maurice Pouzet et Norbert Sauer : Invariant subsets of scattered trees. an application to the tree alternative property of Bonato and Tardif, 2016. arXiv :1508.01223 [math.CO].

[12] Mohammad Hadi Shekarriz et Madjid Mirzavaziri : Self-contained graphs, 2018. arXiv :1503.00139 [math.CO].

[13] Atsushi Tateno : *Mutually embeddable trees and a counterexample to the Tree Alternative Conjecture*. Thèse de doctorat, University of Oxford Mathematical Institute, 2008.

[14] Stéphan Thomassé : Conjecture on countable relations. Manuscrit en circulation, 2000.

[15] Mykhaylo Tyomkyn : A proof of the rooted tree alternative conjecture. *Discrete Mathematics*, 309, décembre 2008.