

Université de Montréal

Études sur l'interaction des particules quantiques avec
la gravitation

par

Alexandre Landry

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Physique

22 juin 2020

© Alexandre Landry, 2020

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée

Études sur l'interaction des particules quantiques avec la gravitation

présentée par

Alexandre Landry

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Léonelli

(président-rapporteur)

Fayçal Hammad

(directeur de recherche)

Paul Charbonneau

(membre du jury)

Jean-François Fortin

(examineur externe)

Molly Kao

(représentant du doyen de la FESP)

Résumé

Le but est d'explorer l'interaction entre les particules quantiques et la gravitation. On utilisera la quantification de Landau, l'effet Hall quantique et on examinera la relation entre la gravitation et l'effet Josephson. On propose une version de l'expérience "COW" (Colella-Overhauser-Werner) pour examiner les déviations de la loi du carré inverse de type Yukawa et de puissance inverse. Il est question de montages permettant d'investiguer la possibilité de mesurer le gravitomagnétisme et la constante de la gravitation G .

On a examiné les transitions quantiques pour des neutrons ultra-froids (Ultra-Cold Neutron : UCN). Les résultats étaient satisfaisants pour 10^5 UCN. On a imaginé un effet laser avec ces neutrons émetteurs de gravitons : le phénomène est cependant très faible.

Pour les corrections des niveaux de Landau : on a utilisé trois types d'espace-temps. Pour Schwarzschild, en utilisant une masse perturbatrice, les corrections d'ordres 1 et 2 dépendent du niveau n et du nombre quantique ℓ . Cela enlève la dégénérescence des niveaux conventionnels. On obtient des résultats similaires pour les espaces-temps de Kerr et de Levi-Civita.

On a proposé une expérience analogue à l'expérience COW. On a des déphasages malgré de faibles valeurs anticipées : de 10^{-18} rad à 10^{-4} rad pour le type Yukawa et de 10^{-3} rad à 10^{-9} rad pour puissance inverse. On a proposé des mesures possibles pour le gravitomagnétisme.

On a aussi repris l'étude de l'influence de la gravitation sur l'effet Hall quantique. On obtient de faibles corrections pour un champ gravitationnel. On ne peut toutefois pas conclure à des quantités mesurables pour les déviations de type Yukawa et de puissance inverse. Par contre, on peut utiliser l'effet pour mesurer G avec grande précision.

On a examiné l'effet Josephson sous l'effet de la gravitation en imaginant un montage simple. On a d'excellents résultats : des corrections de 10^{-7} à 10^{-9} Hz pour des déviations de type Yukawa et 10^{-6} Hz pour des déviations en puissance inverse. Surtout, le lien entre la gravitation et la fréquence du courant de Josephson est clairement établi et mesurable.

Mots clés : Transitions quantiques, Laser, Quantification-Landau, Schwarzschild, Kerr, Levi-Civita, Yukawa, Puissance Inverse, Effet Hall Quantique, Fréquence de Josephson

Abstract

The goal is to explore the interaction between quantum particles and gravitation. We will use Landau quantization, the quantum Hall effect and we will examine the relationship between gravity and Josephson's effect. We propose a version of "COW" experience (Colella-Overhauser-Werner) to examine the Yukawa and inverse power deviations. We propose setups to investigate the possibility to measure gravitomagnetism and the gravitational constant G .

Quantum transitions for ultra-cold neutrons (UCN) have been examined. The results were satisfactory for 10^5 UCN. We imagined a laser effect with these graviton emitting neutrons: the phenomenon is however very weak.

For Landau level corrections: we proceeded with three types of space-times. For Schwarzschild, using a disturbing mass, the corrections of orders 1 and 2 depend on the level n and the quantum number " ℓ ". This removes the degeneracy of conventional levels. Similar results are obtained for the Kerr and the Levi-Civita spacetimes.

We took over an analog of the COW experiment. We have phase shifts despite low expected values: from 10^{-18} rad to 10^{-4} rad for Yukawa and from 10^{-3} rad to 10^{-9} rad for inverse power laws. The same setup has been proposed for testing gravitomagnetism.

We have also resumed the study of the influence of gravity on the quantum Hall effect. Small corrections are obtained for a gravitational field. We cannot however conclude with measurable quantities for Yukawa and inverse power laws. On the other hand, one can use the effect to measure G with great precision.

We examined the Josephson effect under the effect of gravity by imagining a simple setup. We have excellent results: corrections from 10^{-7} to 10^{-9} Hz for Yukawa and 10^{-6} Hz for inverse power law. Above all, the link between gravity and the frequency of Josephson's current is clearly established and measurable.

Keywords: Quantum transitions, Laser, Landau Quantization, Schwarzschild, Kerr, Levi-Civita, Yukawa, Inverse-Power Law, Quantum Hall Effect, Josephson frequencies

Table des matières

| | |
|--|----|
| Résumé | 5 |
| Abstract | 7 |
| Liste des tableaux | 17 |
| Table des figures | 19 |
| Liste des sigles et des abbréviations | 21 |
| Notation | 23 |
| Chapitre 2 | 23 |
| Premier Article (Chapitre 3) | 26 |
| Deuxième Article (Chapitre 4) | 28 |
| Troisième Article (Chapitre 5) | 30 |
| Quatrième Article (Chapitre 6) | 34 |
| Cinquième Article (Chapitre 7) | 37 |
| Sixième Article (Chapitre 8) | 39 |
| Septième Article (Chapitre 9) | 42 |
| Dédicace | 45 |
| Remerciements | 47 |
| Préface | 49 |
| Chapitre 1. Introduction | 51 |
| 1.1. Les motivations | 51 |
| 1.2. Contenu de la thèse | 52 |
| 1.2.1. Vue globale | 52 |

| | | |
|--------------------|--|-----------|
| 1.2.2. | Phénomènes physiques évoqués | 52 |
| 1.2.3. | Proposition d'expériences | 53 |
| 1.3. | La démarche | 53 |
| 1.3.1. | Transitions quantiques induites par la gravitation et l'effet laser | 53 |
| 1.3.2. | Niveaux de Landau en présence de la gravitation | 53 |
| 1.3.3. | Proposition d'expériences pour étudier la gravitation par interférences | 54 |
| 1.3.4. | L'influence gravitationnelle sur l'effet Hall Quantique | 54 |
| 1.3.5. | La gravitation à travers l'effet Josephson | 54 |
| 1.4. | L'organisation de la thèse | 54 |
| Chapitre 2. | Fondements théoriques | 55 |
| 2.1. | L'équation de Schrödinger et les perturbations quantiques | 55 |
| 2.1.1. | L'équation de Schrödinger et les postulats sous-jacents | 55 |
| 2.1.2. | Théorie des perturbations quantiques indépendantes du temps | 57 |
| 2.1.3. | Les perturbations dépendantes du temps et les probabilités de transitions inter-états | 58 |
| 2.2. | La relativité générale et l'équation de Klein-Gordon | 60 |
| 2.2.1. | Le formalisme covariant en relativité générale | 60 |
| 2.2.2. | L'équation de Klein-Gordon | 63 |
| 2.3. | L'oscillateur harmonique | 64 |
| 2.3.1. | Les états quantiques du potentiel harmonique. | 64 |
| 2.3.2. | L'approximation par le potentiel harmonique autour de points d'équilibres stables | 65 |
| 2.4. | Les niveaux de Landau conventionnels | 66 |
| 2.4.1. | La quantification de Landau et les niveaux d'énergies par l'équation de Schrödinger | 66 |
| 2.4.2. | Les niveaux de Landau dans l'espace-temps de Minkowski sphérique par l'équation de Klein-Gordon | 67 |
| 2.5. | Les différentes corrections au potentiel newtonien | 69 |
| 2.5.1. | Potentiels de type Yukawa | 70 |
| 2.5.2. | Potentiels de type puissances inverses | 71 |

| | |
|---|-----|
| Chapitre 3. Introduction au premier article : Les transitions quantiques induites par la gravitation | 75 |
| 3.1. Les états quantiques des neutrons ultra-froids sous la gravité terrestre et les expériences passées | 75 |
| 3.1.1. Les travaux passés sur les neutrons de type UCN | 75 |
| 3.1.2. Les états quantiques sous la gravité terrestre | 77 |
| 3.2. Objectifs et méthodologie | 80 |
| 3.3. Principaux résultats | 81 |
| 3.3.1. Perturbation par une masse sphérique | 82 |
| 3.3.2. Perturbation par une masse cylindrique | 83 |
| 3.3.3. Perturbation par plaque massive | 84 |
| 3.3.4. Nombre de neutrons UCN nécessaires pour l'expérience | 84 |
| 3.4. Les contributions | 85 |
| Mes contributions | 85 |
| Les contributions de mon directeur | 86 |
| Premier article. Gravitationally induced quantum transitions | 87 |
| Chapitre 4. Introduction au deuxième article : Le laser à gravitons | 95 |
| 4.1. Quelques notions théoriques supplémentaires | 95 |
| 4.1.1. Une introduction historique au sujet | 95 |
| 4.1.2. Les champs libres de spins 1 et 2 | 96 |
| 4.1.3. Les métriques de Schwarzschild et de l'onde gravitationnelle incidente | 97 |
| 4.2. Objectifs et méthodologie | 98 |
| 4.3. Principaux résultats | 99 |
| 4.4. Les contributions | 101 |
| Mes contributions | 101 |
| Les contributions de mon directeur | 101 |
| Deuxième article. Graviton laser | 103 |
| Chapitre 5. Introduction au troisième article : Les corrections aux niveaux de Landau pour l'espace-temps de Schwarzschild | 111 |
| 5.1. Quelques notions théoriques supplémentaires | 111 |

| | | |
|--|---|-----|
| 5.1.1. | Espace-temps de Schwarzschild-Melvin versus Schwarzschild..... | 111 |
| 5.1.2. | Le quadripotentiel sous le formalisme des tétrades..... | 113 |
| 5.1.3. | Le potentiel de type Yukawa pour les situations astrophysiques..... | 114 |
| 5.2. | Objectifs et méthodologie..... | 114 |
| 5.3. | Principaux résultats..... | 116 |
| 5.3.1. | Les équations finales de Klein-Gordon et de Schrödinger à résoudre..... | 116 |
| 5.3.2. | Les niveaux de Landau avec corrections via les perturbations quantiques .. | 117 |
| 5.3.3. | Les niveaux de Landau avec corrections via l'approximation de l'oscillateur harmonique..... | 120 |
| 5.3.4. | Les niveaux de Landau avec correction par le potentiel de type Yukawa ... | 120 |
| 5.4. | Les contributions..... | 121 |
| | Mes contributions..... | 121 |
| | Les contributions de mon directeur..... | 122 |
| | | |
| Troisième article. Landau levels in a gravitational field : the Schwarzschild spacetime case..... | | |
| 123 | | |
| | | |
| Chapitre 6. Introduction au quatrième article : Les corrections aux niveaux de Landau pour les espace-temps de Levi-Civita et de Kerr . | | |
| 145 | | |
| 6.1. | Quelques notions préliminaires..... | 145 |
| 6.1.1. | L'espace-temps de Levi-Civita..... | 145 |
| 6.1.2. | L'espace-temps de Kerr..... | 147 |
| 6.2. | Objectifs et méthodologie..... | 148 |
| 6.3. | Principaux résultats..... | 151 |
| 6.3.1. | Pour l'espace-temps de Levi-Civita..... | 151 |
| 6.3.1.1. | Les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger..... | 151 |
| 6.3.1.2. | Perturbations quantiques..... | 151 |
| 6.3.1.3. | Approche du potentiel harmonique..... | 152 |
| 6.3.2. | Pour l'espace-temps de Kerr..... | 154 |
| 6.3.2.1. | Les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger..... | 154 |
| 6.3.2.2. | Perturbations quantiques..... | 154 |
| 6.3.2.3. | Approche du potentiel harmonique..... | 156 |
| 6.4. | Les contributions..... | 157 |

| | |
|---|------------|
| Mes contributions | 157 |
| Les contributions de mon directeur | 158 |
| Quatrième article. Landau levels in a gravitational field : the Levi-Civita and Kerr spacetimes case | 159 |
| Chapitre 7. Introduction au cinquième article : L'expérience d'interférométrie de Mach-Zehnder en gravitation et le gravitomagnétisme..... | 177 |
| 7.1. Un rappel concernant le gravitomagnétisme | 177 |
| 7.2. Objectifs et méthodologie | 179 |
| 7.3. Principaux résultats | 181 |
| 7.3.1. Les déphasages pour les corrections de types Yukawa et de puissance inverse | 181 |
| 7.3.1.1. Potentiel de type Yukawa | 181 |
| 7.3.1.2. Potentiels de puissance inverse | 182 |
| 7.3.2. Le déphasage pour le gravitomagnétisme | 183 |
| 7.3.3. La quantification d'énergie sous des potentiels non-newtoniens..... | 184 |
| 7.3.4. Le déphasage pour un montage avec hémisphères..... | 185 |
| 7.4. Les contributions | 186 |
| Mes contributions | 186 |
| Les contributions des autres co-auteurs | 187 |
| Cinquième article. Prospects for testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference | 189 |
| Chapitre 8. Introduction au sixième article : L'influence de la gravitation sur l'effet Hall Quantique | 213 |
| 8.1. Un rappel au sujet de l'effet Hall Quantique..... | 213 |
| 8.2. Objectifs et méthodologie | 215 |
| 8.3. Principaux résultats | 217 |
| 8.3.1. Sous la gravité terrestre..... | 217 |
| 8.3.2. Les niveaux de Landau élargis sous la gravité produite par des hémisphères | 218 |
| 8.3.3. Les effets du champ électrique induit..... | 220 |
| 8.3.3.1. Pour la gravité terrestre | 220 |
| 8.3.3.2. Pour les hémisphères..... | 221 |

| | |
|---|------------|
| 8.3.4. Les corrections gravitationnelles et possibilité d'expérience | 226 |
| 8.4. Les contributions | 226 |
| Mes contributions | 226 |
| Les contributions des autres co-auteurs | 226 |
| Sixième article. A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect | 227 |
| Chapitre 9. Introduction au septième article : L'influence de la gravitation sur l'effet Josephson en supraconductivité..... | 245 |
| 9.1. Rappel sur l'effet Josephson en supraconductivité | 245 |
| 9.1.1. La supraconductivité..... | 245 |
| 9.1.2. L'effet Josephson | 247 |
| 9.2. Objectifs et méthodologie..... | 248 |
| 9.3. Principaux résultats | 251 |
| 9.3.1. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel newtonien | 251 |
| 9.3.2. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel avec correction de type Yukawa..... | 252 |
| 9.3.3. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel avec correction de type puissance-inverse..... | 253 |
| 9.3.4. Fréquences des différents courant de Josephson avec l'effet du champ électrique induit | 253 |
| 9.4. Les contributions | 254 |
| Mes contributions | 254 |
| Les contributions de mon directeur | 255 |
| Septième article. A simple superconductor quantum interference device for testing gravity | 257 |
| Chapitre 10. Conclusion | 269 |
| 10.1. Pour des travaux futurs..... | 271 |
| Annexe A. Évaluation des intégrales avec les fonctions de Kummer à l'aide des polynômes de Laguerre | 273 |

| | |
|---|-----|
| Annexe B. Calculs de potentiels gravitationnels pour des sphères, cylindres et autres figures similaires | 283 |
| B.1. Potentiels newtonien et de type Yukawa | 283 |
| B.2. Potentiels de type puissances inverses | 287 |
| B.2.1. Pour $n = 1$ | 288 |
| B.2.2. Pour $n = 2$ | 290 |
| B.2.3. Pour $n = 3$ | 292 |
| B.2.4. Pour $n = 4$ | 294 |
| B.2.5. Pour $n = 5$ | 295 |
| B.2.6. Pour $n = 6$ | 296 |
| B.3. Potentiels entre deux hémisphères | 297 |
| B.4. Les potentiels de disque avec approximations en potentiels harmoniques | 299 |
| B.4.1. Pour le potentiel newtonien | 299 |
| B.4.2. Pour le potentiel de type Yukawa | 300 |
| B.4.3. Pour le potentiel de puissance inverse à $n = 1$ | 301 |
| Références bibliographiques | 303 |

Liste des tableaux

| | | |
|---|---|-----|
| 1 | Paramètres physiques pour obtenir les probabilités de transitions et les densités de neutrons. | 82 |
| 2 | Valeurs de préfacteurs de transition et du nombre de neutrons pour une perturbation sphérique. | 83 |
| 3 | Valeurs de préfacteurs de transition et de nombre de neutrons pour une perturbation cylindrique. | 84 |
| 4 | Probabilités totales de transitions sur deux demi-vies des neutrons ultra-froids. ... | 85 |
| 5 | Nombres d'UCN minimaux pour effectuer des expériences. | 86 |
| 1 | Valeurs du coefficient d'émission stimulée, de la section efficace, du facteur d'amplification et de la distance d'amplification pour une émission entre le niveau fondamental et le premier niveau excité pour une couche de carbone d'une étoile à neutrons. | 101 |
| 2 | Flux de gravitons provenant d'une étoile à neutrons de rayon 10 km se situant à 100 années-lumières de la terre avec une forte hausse du coefficient d'émission spontanée de gravitons. | 101 |
| 1 | Valeurs numériques des corrections aux niveaux de Landau pour un potentiel newtonien avec correction de type Yukawa. | 121 |
| 1 | Valeurs de corrections d'ordre 1 en énergie du niveau de Landau $n = 1$ pour des cylindres de différentes tailles avec des électrons comme particules tests. Pour des protons comme particules tests, on multiplie les corrections d'énergies par 1836. . | 153 |
| 2 | Corrections du niveau de Landau $n = 1$ et facteurs de rotation de la masse centrale pour des situations réalisables en laboratoire (sans compter le facteur coût et les défis technologiques). | 157 |
| 3 | Facteurs de rotation de la masse centrale pour un magnétar (cas astrophysique). | 157 |
| 1 | Déphasages de la correction de type Yukawa pour différentes valeurs de paramètres. | 182 |

| | | |
|---|--|-----|
| 2 | Déphasages pour les différentes valeurs de n de puissance de la correction en puissance inverse. | 184 |
| 3 | Déphasage de la correction de type Yukawa pour des hémisphères séparées par un mince disque. | 186 |
| 1 | Valeurs de correction à la résistivité de Hall dans le champ gravitationnel terrestre. La situation 3 s'applique pour un système placé à l'intérieur d'une centrifugeuse, d'où la valeur amplifiée de g | 218 |
| 2 | Conductivité et résistivité de Hall pour les corrections par la gravité terrestre avec le cuivre (masse atomique $M = 1,0552061 \times 10^{-25}$ kg). | 221 |
| 3 | Valeurs de densité massique et de dimensions des hémisphères produisant les effets gravitationnels. | 222 |
| 4 | Corrections gravitationnelles pour les hémisphères sur les niveaux d'énergies de Landau anticipées. | 224 |
| 5 | Comparaison entre les profondeurs d'élargissement gravitationnelle et thermique anticipées. | 224 |
| 1 | Fréquences d'oscillateur harmonique et de Josephson pour la gravité newtonienne à l'état fondamental $n = 0$ | 251 |
| 2 | Valeurs des énergies E_I^Y et E_O^Y ainsi que de fréquences de Josephson Ω_0^Y pour la correction de type Yukawa à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. | 252 |
| 3 | Valeurs des énergies E_I^Y et E_O^Y ainsi que des fréquences de Josephson Ω_0^Y pour la correction de puissance inverse $q = 1$ à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. | 253 |
| 4 | Valeurs des fréquences de Josephson au niveau fondamental $n = 0$ de l'oscillateur harmonique avec ou sans correction provenant du champ électrique induit par la gravitation. | 254 |

Table des figures

| | | |
|---|---|-----|
| 1 | Graphes des fonctions d’Airy de première et de seconde espèce, $Ai(u)$ et $Bi(u)$, respectivement. | 79 |
| 1 | La trajectoire cordale d’un graviton à la surface d’une étoile à neutrons. x est la distance maximale de la trajectoire cordale obtenue en tenant compte de l’épaisseur de 0,03 m de la couche de carbone à la surface de l’étoile à neutrons. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir la relation $(10^4 + 0,03)^2 = (10^4)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$. De là, on développe le membre de gauche et on obtient en approximant que $\frac{x}{2} \approx \sqrt{600}$. On obtient ainsi que $x = 2\sqrt{600}$ mètres. | 102 |
| 1 | Un interféromètre de type Mach-Zehnder avec une sphère massive percée par un cylindre étroit passant à travers celle-ci. Le tout se situe sur un des bras de l’interféromètre. | 180 |
| 1 | a) Un conducteur rectangulaire à l’intérieur du champ gravitationnel vertical de la terre. b) Un conducteur circulaire, situé à gauche, à être inséré entre les deux hémisphères à droite. | 216 |
| 2 | a) La densité d’états des électrons autour de l’énergie de Fermi E_f , la résistivité de Hall $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité azimutale $\rho_{\phi\phi}$ dans le conducteur circulaire en absence de champ gravitationnel. b) La densité d’états des électrons autour de l’énergie de Fermi E_f (Les lignes horizontales montrent les niveaux de Landau subdivisés.), la résistivité de Hall $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité azimutale $\rho_{\phi\phi}$ dans le conducteur circulaire entre deux hémisphères massives. Les caractéristiques des deux situations sont amplifiées dans le but de mettre en évidence les différences de types qualitatives entre les deux situations. | 223 |
| 3 | a) Le graphe supérieur montre la variation de la résistivité transversale $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité longitudinale $\rho_{\phi\phi}$ en fonction du champ magnétique appliqué B . La pente décrivant la transition entre les deux échelles de plateaux proportionnelles à la température allant comme $T^{-\mu}$, avec la constante μ , pour $T \rightarrow 0$. Dans le cas de la présence du champ gravitationnel non-linéaire entre les deux hémisphères | |

| | | |
|---|--|-----|
| | massives, la pente deviendra inversement proportionnelle à B^2 . D'une manière similaire, la profondeur ΔB du graphe $\rho_{\phi\phi}$ définie comme étant proportionnelle à T^μ pour $T \rightarrow 0$ deviendra inversement proportionnelle à B à l'intérieur des hémisphères massives. L'élargissement des niveaux de Landau, tel que montré au graphe inférieur, est dû à (i) la subdivision induite gravitationnellement (les lignes verticales abritant les états extensionnés) et (ii) les impuretés locales abritant les états localisés. | 225 |
| 1 | Un supraconducteur en forme de D est enveloppé autour d'une sphère massive. Le diagramme de gauche nous donne une vue latérale du montage et le diagramme de droite montre une vue du dessus de ce même montage. Le courant électrique i circulant dans la boucle est causé par le courant passant au travers des jonctions de Josephson (J.J.) des deux côtés des deux segments linéaires rectilignes du supraconducteur. | 250 |

Liste des sigles et des abréviations

| | |
|------|---|
| AL | Alexandre Landry |
| COW | Colella-Overhauser-Werner (expérience portant ces noms) |
| Eff | Effective (ou effectif) |
| GM | Gravitomagnetism (Gravitomagnétisme) |
| GEM | Gravito-electromagnetism (Gravito-électromagnétisme) |
| GR | General Relativity (Relativité Générale) |
| I | Champ électrique induit par la gravitation |
| ISL | Inverse Square Law (Loi de gravitation newtonienne) |
| KG | Klein-Gordon equation |
| MQ | Mécanique quantique |
| N | Newton |
| PL | Power Law (Puissance inverse) |
| MHS | Mouvement Harmonique Simple |
| QFT | Quantum Field Theory (Théorie des champs quantiques) |
| QHE | Quantum Hall Effect (Effet Hall quantique) |
| QM | Quantum Mechanics (Mécanique quantique) |
| RG | Relativité générale |
| SHO | Simple Harmonic Oscillator |
| UCN | Ultra Cold Neutrons (Neutrons ultra-froids) |
| Y | Yukawa |
| 2DEG | Two Dimensional Electrons Gas (Gaz d'électrons bi-dimensionnel) |

Notation

Chapitre 2

- \hbar Constante de Planck.
- m Masse de la particule quantique.
- x et y Coordonnées spatiales.
- \vec{x} Vecteur position.
- $V_{eff}(x)$ Potentiel effectif en x .
- E Valeur propre d'énergie.
- $V(\vec{x})$ Potentiel scalaire tridimensionnel.
- $V(\vec{x}, t)$ Potentiel scalaire spatio-temporel.
- ψ Fonction d'onde.
- t Coordonnée temporelle.
- \hat{H} Hamiltonien.
- \vec{A} Potentiel vecteur électromagnétique.
- \vec{p} et p Quantité de mouvement.
- q Charge électrique de la particule quantique.
- ∇ Vecteur gradient.
- n Niveau d'énergie d'un système quantique (Sections 2.1 à 2.4).
- ψ_n Fonction propre de l'état quantique n .
- a_n Coefficient de superposition associée à l'état n .
- x_1 et x_2 Bornes spatiales de définition du système quantique.
- \hat{O} Opérateur associé à un observable O .
- O_n Valeur propre d'un observable.
- $V(x)$ Potentiel scalaire du système non perturbé.
- $W(x)$ Potentiel scalaire de perturbation quantique.
- E_n Énergie du niveau n avec les termes de perturbations.
- E_{n0} Énergie du niveau n du système non-perturbé.
- $W(x, t)$ Potentiel scalaire de perturbation avec dépendance temporelle.
- $W_1(x)$ Partie spatiale d'un potentiel dépendant du temps.

| | |
|--------------------------|--|
| $W_2(x)$ | Partie spatiale d'un potentiel dépendant du temps. |
| ω_{fi} | Fréquence angulaire associée à la différence d'énergie entre les niveaux initial et final. |
| E_{f0} | Énergie du niveau final non perturbé. |
| E_{i0} | Énergie du niveau initial non perturbé. |
| $P_{fi}(t)$ | Probabilité de transition temporelle entre les niveaux d'énergies initial et final. |
| $\psi_f(x)$ | État propre de l'état quantique final. |
| $\psi_i(x)$ | État propre de l'état quantique initial. |
| ω | Fréquence angulaire. |
| $f(\omega_{mn}, t)$ | Fonction de résonance d'un système quantique. |
| ω_{mn} | Fréquence angulaire associée à la différence d'énergie entre les niveaux n et m . |
| τ | Temps propre. |
| ds | Intervalle d'espace-temps. |
| $g_{\mu\nu}$ | Métrie . |
| ∂_μ | Dérivée tensorielle. |
| dx^μ | Différentielle tensorielle. |
| $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ | Connexion métrique (ou symbole de Christoffel) . |
| $G_{\mu\nu}$ | Tenseur d'Einstein. |
| $T_{\mu\nu}$ | Tenseur d'énergie-impulsion . |
| G | Constante de gravitation universelle. |
| $R_{\mu\nu}$ | Tenseur de Ricci. |
| R | Invariant (ou scalaire) de Ricci. |
| $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$ | Tenseur de courbure d'espace-temps. |
| $h_{\mu\nu}$ | Tenseur métrique de faible champ de perturbation. |
| $\eta_{\mu\nu}$ | Métrie de Minkowski. |
| A^μ | Quadripotential électromagnétique covariant. |
| J^μ | Quadricourant électromagnétique. |
| $F_{\mu\nu}$ | Tenseur électromagnétique. |
| μ_0 | Perméabilité magnétique. |
| ∇_ρ | Dérivée covariante. |
| e_a | Dérivée de forme tétrade. |
| e^a | Différentielle de forme tétrade. |
| g | Métrie de forme tétrade. |
| D_μ | Dérivée covariante (2e forme contenant un quadripotential). |
| c | Vitesse de la lumière. |

| | |
|--------------------------------|---|
| A_0 | Composante temporelle du quadripotentiel. |
| A_i | Composantes spatiales du quadripotentiel. |
| r | Coordonnée radiale dans l'espace. |
| θ | Coordonnée angulaire. |
| ϕ | Coordonnée angulaire azimutale. |
| x_0 | Position d'équilibre d'un oscillateur harmonique. |
| b | Paramètre d'états propres d'oscillateur. |
| H_n | Polynôme d'Hermite d'ordre n . |
| \hat{a}^\dagger et \hat{a} | Opérateurs de création et d'annihilation. |
| x_* | Point d'équilibre stable d'un potentiel non-linéaire. |
| V_0 | Potentiel constant d'origine. |
| E_n | Énergie du niveau n d'une quantification de type oscillateur harmonique simple. |
| δ^{ij} | Delta de Kronecker. |
| B | Champ magnétique. |
| p_i | Composante spatiale i de quantité de mouvement. |
| ω_c | Fréquence cyclotron. |
| e | Charge électrique élémentaire. |
| $R(r, \theta)$ | Fonction propre spatiale. |
| ρ | Coordonnée radiale dans le plan xy . |
| \mathcal{E}_n | Énergie du niveau n de Landau. |
| $R(\rho)$ et $v(\rho)$ | Fonctions propres radiales dans le plan xy . |
| α et β | Paramètres de dérivation de la quantification de Landau. |
| A et A' | Amplitude. |
| ℓ | Nombre quantique azimutal ou orbital. |
| a' et b' | Arguments de fonction de Kummer. |
| $U(r)$ | Énergie potentiel gravitationnelle. |
| m_1 et m_2 | Masses gravitationnelles. |
| α_Y et λ_Y | Paramètres de type Yukawa. |
| μ_1 | Densité massique linéique. |
| σ_1 | Densité massique surfacique. |
| ρ_1 | Densité massique volumique. |
| n | Puissance d'un potentiel en puissances inverses (Section 2.5). |
| R | Rayon de sphère. |
| a | Rayon de cylindre. |
| r_0 | Paramètre de potentiel de puissance inverse. |
| G_n | Constante gravitationnelle associée aux dimensions spatiales supplémentaires. |

Premier Article (Chapitre 3)

- \hbar Constante de Planck.
- m Masse de particule.
- z Coordonnée spatiale de hauteur.
- $V(z)$ Potentiel en z .
- E Valeur propre d'énergie.
- m_N Masse des neutrons.
- g Accélération gravitationnelle ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).
- $\psi(z)$ Fonction d'onde.
- $\psi_E(z)$ Fonction propre de la valeur propre E .
- $Ai(z)$ Fonction d'Airy
- z_0 Hauteur caractéristique $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2gm_N^2}$.
- α Zéro de fonction d'Airy.
- α_n n ième zéros de fonction d'Airy.
- \mathcal{N}_n Normalisation de fonction d'onde.
- η Variable d'intégration.
- u Variable de définition de la fonction d'Airy.
- p_z Quantité de mouvement en z .
- n Nombre quantique.
- E_n et E_{n0} Énergie du niveau n d'un système quantique non-perturbé.
- ψ_n Fonction d'onde d'un état propre n .
- $W(z)$ Potentiel de perturbation.
- $W_1(z)$ Potentiel de perturbation spatiale.
- $W_2(t)$ Potentiel de perturbation temporelle.
- $P_{fi}(t)$ Probabilité de transition.
- ω_{fi} Fréquence d'oscillation de perturbation entre les états initiaux et finaux.
- M masse perturbatrice (en kg).
- ρ Densité massique de la masse perturbatrice.
- ζ_0 Rayon de l'objet sphérique ou cylindrique.
- $\Delta\zeta$ Variation de distance entre la masse perturbatrice et les neutrons.

| | |
|---------------------|--|
| ω | Fréquence angulaire d'oscillation de la masse perturbatrice. |
| $f(\omega_{mn}, t)$ | Fonction de résonance |
| t' | Variable temporelle d'intégration. |
| ω_{mn} | Fréquence de résonance du système de neutrons. |
| δ_{mn} | Delta de Kronecker. |
| y | Variable d'intégration normalisée $y = \frac{z}{\zeta_0}$. |
| $P_{nm}(\omega, t)$ | Probabilité de transition entre les états n et m . |
| L | Longueur du cylindre. |
| $W_{cyl}(z)$ | Potentiel de perturbation cylindrique. |
| $W_{surf}(z, t)$ | Potentiel de perturbation d'une plaque. |
| G | Constante gravitationnelle. |
| τ | Constante de desintégration (s^{-1}). |
| N_0 | Quantité initiale de neutrons. |
| μ | Taux de pertes par chûtes. |
| v | vitesse des neutrons (m/s). |
| \mathcal{N}_n | Densité de neutrons d'un système. |

Deuxième Article (Chapitre 4)

| | |
|--|---|
| $h_{\mu\nu}$ | Amplitude d'onde gravitationnelle. |
| k | Nombre d'onde. |
| $A(\vec{k})$ et $a(\vec{k})$ | Opérateur de création. |
| $A^\dagger(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ | Opérateur d'annihilation. |
| $\epsilon_{\mu\nu}$ | Tenseur de polarisation. |
| x^μ | Coordonnée d'espace-temps. |
| V | Volume d'onde. |
| \hbar | Constante de Planck. |
| c | Vitesse de la lumière (m/s). |
| k_0 | Fréquence du graviton. |
| τ | Temps propre (sec). |
| ds | Intervalle d'espace-temps. |
| M_\oplus | Masse de la terre. |
| Ω | Angle solide. |
| r | Coordonnée radiale. |
| G | Constante gravitationnelle. |
| t | Coordonnée temporelle. |
| x, y, z | Coordonnées de l'onde gravitationnelle incidente. |
| $h(x - ct)$ | Amplitude de l'onde gravitationnelle incidente. |
| $\Gamma_{\mu\nu}^i$ | Connexion métrique. |
| w_i | Paramètre de Bertschinger. |
| ϕ et ψ | Paramètre de Bertschinger exprimant le potentiel gravitationnel de la terre. |
| s_{ij} | Paramètre de Bertschinger exprimant le potentiel total ressenti. |
| s_{ij}^\oplus et \tilde{s}_{ij} | Paramètre de Bertschinger exprimant les potentiels de la terre (forme dipolaire) et de l'onde gravitationnelle. |
| $H(x^i, \pi_j)$ | Hamiltonien généralisé. |
| $E(p_j)$ | Énergie généralisée. |
| p_i | Quantité de mouvement généralisée. |
| π_j | Quantité de mouvement canonique. |
| m_N | Masse des neutrons. |
| g | Accélération gravitationnelle. |

| | |
|---|--|
| N_1 et N_2 | Densité des particules émettant ou captant des photons. |
| $\psi_{n'}$ et ψ_n | Fonction d'ondes initiales et finales. |
| α_m | Zeros de fonction d'Airy. |
| y | Variable d'intégration. |
| z_0 | Longueur caractéristique $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2gm_N^2}$. |
| $\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}}$ | Coefficient d'émission de gravitons. |
| N_k | Nombre de graviton émis. |
| θ | Angle entre le plan xy et l'onde gravitationnelle. |
| $E_{n'}$ | États d'énergie des particules émettrices de gravitons. |
| k | Nombre d'onde. |
| E_k | Energie du nombre d'onde k des gravitons. |
| $\mathcal{N}_{n'}(t)$ et $\mathcal{N}_n(t)$ | Nombre d'occupation des neutrons. |
| λ | Constante de desintégration. |
| κ | Facteur d'amplification d'un laser. |
| Φ | Flux de gravitons par unité de surface et de temps. |
| ω | Fréquence des gravitons. |
| $I(\omega)$ | Flux d'énergie par unité de surface et de fréquence. |
| σ | Section efficace d'absorption. |
| $N_k(x)$ | Quantité de graviton sur une couche. |

Troisième Article (Chapitre 5)

- A** Potentiel vecteur.
- B** Champ magnétique.
- B** Vecteur du champ magnétique.
- x Coordonnée spatiale (m).
- ∇ Opérateur gradient à trois dimensions.
- \hbar Constante de Planck ($J\cdot s$).
- m Masse de la particule test (kg).
- ψ Fonction d'onde.
- e Charge électrique.
- E Énergie de la particule (J).
- ω_c Fréquence cyclotron (s^{-1}).
- x_0 Position du centre du système.
- n Niveau d'énergie.
- E_n Énergie de la particule de niveau n (J).
- c Vitesse de la lumière.
- t Coordonnée temporelle.
- D_μ Dérivée covariante.
- $g_{\mu\nu}$ Métrique.
- $g^{\mu\nu}$ Matrice inverse de la métrique.
- g Déterminant de $g_{\mu\nu}$.
- ∂_μ Dérivée tensorielle.
- A_μ Quadripotentiel de forme covariante.
- ds Intervalle d'espace-temps.
- G Constante gravitationnelle.
- θ Coordonnée angulaire à partir de l'axe z .
- ϕ Coordonnée angulaire sur le plan xy .
- r Coordonnée radiale dans l'espace.
- M Masse de l'objet au centre de l'espace-temps de Schwarzschild.
- Δ Fonction de r et M .
- Λ Fonction de B , r et θ .
- $A_{\hat{\mu}}$ Quadripotentiel de forme tétrade.
- $B^{\hat{\mu}}$ Champ magnétique de forme tétrade.
- $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ Tenseur de permutation.

| | |
|--------------------------|---|
| ℓ | Nombre quantique azimutal ou orbital. |
| $R(r, \sin \theta)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| $R(r, \theta)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| ρ | Coordonnée radiale sur le plan xy . |
| $R(\rho)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| \mathcal{E} | Énergie quantique d'une particule. |
| $v(\rho)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| z | Variable de normalisation. |
| α | Coefficient de normalisation. |
| β | Coefficient de normalisation. |
| a | Coefficient de normalisation. |
| b | Coefficient de normalisation. |
| ${}_1F_1(a; b; z)$ | Fonction hypergéométrique confluyente (fonction de Kummer) |
| A | Amplitude de la fonction d'onde. |
| A' | Amplitude de la fonction d'onde. |
| \mathcal{E}_n | Énergie quantique de la particule de niveau n . |
| $\Psi(\rho)$ | Fonction d'onde de Schrödinger. |
| $V_{eff}(\rho)$ | Potentiel effectif. |
| $\mathcal{E}_n^{(0)}$ | Énergie du niveau de Landau n non perturbé. |
| $V(\rho)$ | Potentiel de perturbation. |
| $\Psi_{nl}^{(0)}(\rho)$ | Solution non perturbée de l'équation de Schrödinger. |
| A_{nl} | Amplitude de la solution non perturbée de l'équation de Schrödinger. |
| ρ_0 | Rayon de la masse sphérique M de Schwarzschild. |
| $\Gamma(x)$ | Fonction Gamma de x |
| \mathcal{M}_{nl} | Amplitude de normalisation de fonction d'onde. |
| \mathcal{E}_{nl} | Énergie avec correction du niveau n et de l'orbitale ℓ . |
| \mathcal{P}_{nl} | Amplitude de correction des niveaux pour le potentiel newtonien. |
| $\bar{\mathcal{M}}_{nl}$ | Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde. |
| $\bar{\mathcal{P}}_{nl}$ | Amplitude normalisée de correction des niveaux pour le potentiel newtonien. |
| $\mathcal{M}_{1\ell}$ | Amplitude de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$. |
| $\mathcal{E}_{1\ell}$ | Énergie avec correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ . |

- $\mathcal{P}_{1\ell}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\bar{\mathcal{M}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$.
- $\bar{\mathcal{P}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\mathcal{M}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$ et $\ell \gg 1$.
- $\mathcal{E}_{1(\ell \gg 1)}$ Énergie avec correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$.
- $\mathcal{P}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et $\ell \gg 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\bar{\mathcal{M}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$ et $\ell \gg 1$.
- $\bar{\mathcal{P}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et $\ell \gg 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\mathcal{E}_{n\ell}^{(2)}$ Correction des niveaux d'énergie à l'ordre 2 pour le niveau n et l'orbitale ℓ .
- k Nombre quantique du niveau de Landau k .
- $\bar{\mathcal{P}}_{knl}$ Amplitude normalisée de correction des niveaux de Landau pour le potentiel newtonien.
- \mathcal{P}_{knl} Amplitude de correction des niveaux de Landau pour le potentiel newtonien.
- k_e Constante de proportionnalité de la force électrique coulombien.
- ρ_* Position d'équilibre du système associé à un potentiel.
- V_0 Potentiel d'origine à l'équilibre.
- ω Fréquence d'oscillation d'équilibre de l'approximation par le potentiel harmonique.
- x_{eq} Variable exprimant un point d'équilibre pour un développement en séries de Taylor.
- γ Coefficient de normalisation.
- a_k Coefficient de série infinie.
- a, b, c et d Paramètres de Heun.
- $\mathcal{H}(a, b, c, d, z)$ Fonction de Heun bi-confluente.
- C_1 Constante d'intégration.
- C_2 Constante d'intégration.
- $\mathcal{A}_k(a, b, c, d)$ Coefficient de série infinie.
- $(1+a)_k$ Symbole de Pochhammer.

| | |
|------------------------------|---|
| \mathbb{D}_k | Coefficient de déterminant de Heun. |
| \mathbb{A}_k | Coefficient de déterminant de Heun. |
| $\mathcal{N}(a, b, c, d)$ | Constante de solution de Heun. |
| λ | Paramètre de Heun (Section 3.4 de l'article). |
| δ | Paramètre exprimant la taille du potentiel additionnel de type Yukawa versus newtonien. |
| λ | Paramètre d'échelle de type Yukawa (Section 4 de l'article). |
| $\mathcal{E}_n^{(0)L}$ | Énergie du niveau de Landau n non-perturbé. |
| $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)N}$ | Correction d'ordre 1 des niveaux de Landau due au potentiel newtonien. |
| $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)Y}$ | Correction d'ordre 1 des niveaux de Landau due au potentiel de type Yukawa. |
| $\mathcal{Y}_{n\ell}$ | Amplitude de correction des niveaux pour le potentiel de type Yukawa. |
| $\bar{\mathcal{Y}}_{n\ell}$ | Amplitude normalisée de correction des niveaux pour le potentiel de type Yukawa. |
| $\mathcal{Y}_{1\ell}$ | Amplitude de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel de type Yukawa. |
| $\bar{\mathcal{Y}}_{1\ell}$ | Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel de type Yukawa. |
| $\mathcal{E}_{1\ell}^{(1)Y}$ | Correction d'ordre 1 du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ due au potentiel de type Yukawa. |

Quatrième Article (Chapitre 6)

- c Vitesse de la lumière.
- ρ_0 Rayon de la sphère.
- ρ Coordonnée radiale sur le plan xy .
- \mathbf{A} Potentiel vecteur.
- B Champ magnétique.
- \mathbf{B} Vecteur du champ magnétique.
- x Coordonnée spatiale (m).
- ∇ Opérateur gradient à trois dimensions.
- \hbar Constante de Planck (Js).
- m Masse de la particule (kg).
- ψ Fonction d'onde.
- δ^{ij} et δ_{ij} Delta de Kronecker.
- e Charge électrique.
- $g_{\mu\nu}$ Métrique.
- g Déterminant de $g_{\mu\nu}$.
- ∂_μ Dérivée tensorielle.
- A_μ Quadripotentiel de forme covariante.
- ds Intervalle d'espace-temps.
- G Constante gravitationnelle.
- θ Coordonnée angulaire à partir de l'axe z .
- ϕ Coordonnée angulaire sur le plan xy .
- r Coordonnée radiale dans l'espace.
- M Masse de l'objet au centre de l'espace-temps de Kerr.
- ℓ Nombre quantique azimutal ou orbital.
- $R(r, \sin \theta)$ Fonction d'onde normalisée.
- $R(r, \theta)$ Fonction d'onde normalisée.
- \mathcal{E} Énergie quantique d'une particule.
- ${}_1F_1(a; b; z)$ Fonction hypergéométrique confluyente (fonction de Kummer)
- A Amplitude de la fonction d'onde.
- A' Amplitude de la fonction d'onde.
- \mathcal{E}_n Énergie quantique de la particule de niveau n .
- $\Psi(\rho)$ Fonction d'onde de Schrödinger.
- $V_{eff}(\rho)$ Potentiel effectif.

- $\mathcal{E}_n^{(0)}$ Énergie d'un niveau de Landau n non perturbé.
 $V(\rho)$ Potentiel perturbatif.
 $V_{eff}(\rho)$ Potentiel effectif.
 $\Psi_{nl}^{(0)}(\rho)$ Solution non perturbée de l'équation de Schrödinger.
 A_{nl} Amplitude de la solution non perturbée de l'équation de Schrödinger.
 $\Gamma(x)$ Fonction Gamma de x
 \mathcal{M}_{nl} Amplitude de normalisation de fonction d'onde.
 \mathcal{E}_{nl} Énergie avec correction du niveau n et de l'orbitale ℓ .
 \mathcal{P}_{nl} Amplitude de correction des niveaux pour le potentiel newtonien.
 \mathcal{L}_{nl} Amplitude de correction de fonction d'onde pour Levi-Civita.
 \mathcal{Q}_{nl} Amplitude de correction de fonction d'onde pour la deuxième correction de Kerr.
 $\bar{\mathcal{M}}_{nl}$ Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde.
 $\bar{\mathcal{P}}_{nl}$ Amplitude normalisée de correction des niveaux pour le potentiel newtonien.
 $\bar{\mathcal{L}}_{nl}$ Amplitude normalisée de correction de fonction d'onde pour Levi-Civita.
 $\bar{\mathcal{Q}}_{nl}$ Amplitude normalisée de correction pour la deuxième correction de Kerr.
 $\mathcal{M}_{1\ell}$ Amplitude de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$.
 $\mathcal{E}_{1\ell}$ Énergie avec correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ .
 $\mathcal{P}_{1\ell}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel newtonien.
 $\mathcal{L}_{1\ell}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ pour Levi-Civita.
 $\mathcal{Q}_{1\ell}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ pour la deuxième correction de Kerr.
 $\bar{\mathcal{M}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$.
 $\bar{\mathcal{P}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ pour le potentiel newtonien.
 $\bar{\mathcal{L}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ pour Levi-Civita.
 $\bar{\mathcal{Q}}_{1\ell}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale ℓ pour la deuxième correction de Kerr.

- $\mathcal{M}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$ et $\ell \gg 1$.
- $\mathcal{E}_{1(\ell \gg 1)}$ Énergie avec correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$.
- $\mathcal{P}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et $\ell \gg 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\mathcal{L}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$ pour Levi-Civita.
- $\mathcal{Q}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$ pour la deuxième correction de Kerr.
- $\bar{\mathcal{M}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de normalisation de fonction d'onde pour $n = 1$ et $\ell \gg 1$.
- $\bar{\mathcal{P}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et $\ell \gg 1$ pour le potentiel newtonien.
- $\bar{\mathcal{L}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$ pour Levi-Civita.
- $\bar{\mathcal{Q}}_{1(\ell \gg 1)}$ Amplitude normalisée de correction du niveau $n = 1$ et de l'orbitale $\ell \gg 1$ pour la deuxième correction de Kerr.
- $\mathcal{E}_{n\ell}^{(2)}$ Correction des niveaux d'énergie à l'ordre 2 pour le niveau n et de l'orbitale ℓ .
- k Nombre quantique du niveau de Landau k .
- $\bar{\mathcal{P}}_{knl}$ Amplitude normalisée de correction des niveaux pour le potentiel newtonien.
- \mathcal{P}_{knl} Amplitude de correction des niveaux pour le potentiel newtonien.
- α Moment cinétique angulaire par unité de masse (Paramètre de Kerr).
- a Paramètre de Levi-Civita
- b Paramètre de Levi-Civita
- K Déficit ou surplus angulaire de Levi-Civita
- ρ_* Rayon d'équilibre de Levi-Civita.
- ρ_e Rayon d'équilibre de Levi-Civita pour oscillateur harmonique.
- J Moment cinétique angulaire.
- I Moment d'inertie.
- ω Fréquence angulaire.
- γ Densité massique volumique.
- $A_{\hat{\mu}}$ Quadripotentiel de forme tétrade.

Cinquième Article (Chapitre 7)

| | |
|--------------|---|
| E_g | Champ gravitoélectrique (équivalent du champ gravitationnel usuel). |
| B_{GM} | Champ gravitomagnétique. |
| J_{GM} | Courant gravitomagnétique. |
| v_{GM} | Vitesse du flux gravitomagnétique. |
| c | Vitesse de la lumière. |
| m_1 | Masse gravitationnelle. |
| m_2 | Masse gravitationnelle. |
| m | Masse de la particule. |
| M | Masse de la source gravitationnelle. |
| G | Constante gravitationnelle. |
| ρ | Densité volumique de masse. |
| r | Coordonnée radiale dans l'espace. |
| $U(r)$ | Énergie potentielle gravitationnelle. |
| α | Paramètre d'intensité de Yukawa. |
| λ | Paramètre de Yukawa. |
| r_0 | Paramètre radial de potentiel en puissance inverse. |
| n | Puissance du potentiel de correction en puissance inverse. |
| G_n | Constante gravitationnelle variable selon n . |
| R | Rayon de la sphère pleine. |
| a | Rayon du tunnel cylindrique. |
| $\Delta\phi$ | Déphasage total des faisceaux de particules. |
| λ_0 | Longueur d'onde de de Broglie. |
| k_0 | Nombre d'onde de de Broglie. |
| \hbar | Constante de Planck. |
| Δp | Variation de quantité de mouvement. |
| x | Coordonnée spatiale. |
| y | Coordonnée spatiale. |
| s | Coordonnée spatiale d'intégration. |
| μ | Densité linéique de masse. |
| σ | Densité surfacique de masse. |
| $V_{eff}(x)$ | Potentiel effectif de la sphère perforée. |

- $V_S(x)$ Potentiel de la sphère pleine.
- $V_C(x)$ Potentiel du tunnel cylindrique.
- \mathbf{B}_G Champ gravitomagnétique.
- \mathbf{L} Moment cinétique.
- ω Vitesse angulaire.
- $H(x)$ Hamiltonien de système physique.
- t Coordonnée temporelle.
- t_i Temps de départ.
- t_f Temps d'arrivée.
- v_0 Vitesse des particules.
- L Distance entre la sphère et le diviseur de faisceaux.
- \mathcal{E} Énergie des niveaux quantiques de type oscillateur harmonique.
- V_D^N Potentiel gravitationnel newtonien du disque.
- V_Y^N Potentiel gravitationnel de correction de Yukawa du disque.
- $\Delta\phi_H$ Déphasage total du faisceau pour les hémisphères.

Sixième Article (Chapitre 8)

| | |
|---------------------|--|
| $\vec{F}_{Lorentz}$ | Force électromagnétique de Lorentz. |
| m_e | Massé de l'électron. |
| σ | Conductivité électrique. |
| c | Vitesse de la lumière. |
| m | Masse de la particule. |
| M | Masse des atomes du conducteur. |
| ρ | Densité volumique de masse. |
| G | Constante gravitationnelle. |
| \hbar | Constante de Planck. |
| r | Coordonnée radiale dans l'espace. |
| E | Champ électrique. |
| B | Champ magnétique. |
| e | Charge électrique. |
| z | Coordonnée spatiale. |
| g | Accélération gravitationnelle terrestre. |
| ℓ | Nombre quantique azimutal ou orbital. |
| \mathcal{E} | Énergie quantique d'une particule. |
| ℓ_M | Longueur magnétique. |
| $H(z)$ | Hamiltonien de système physique. |
| p_y | Quantité de mouvement dans la direction y . |
| p_z | Quantité de mouvement dans la direction z . |
| ω_c | Fréquence cyclotron. |
| z_0 | Position spatiale d'équilibre. |
| $\psi_n(z - z_0)$ | Fonction d'onde. |
| k | Nombre d'onde. |
| I_y | Courant électrique. |
| J_y | Densité surfacique de courant. |
| S | Aire de surface servant de section de conducteur électrique. |
| ν | Nombre de niveaux de Landau occupés par des électrons. |
| N_0 | Nombre d'états du conducteur partageant les mêmes niveaux de Landau. |
| Φ_0 | Flux quantique des électrons. |

| | |
|---------------------|---|
| h | Constante de Planck non normalisée. |
| ρ_{yz} | Résistivité transverse de Hall. |
| \mathbf{A} | Potentiel vecteur. |
| $V_g(r)$ | Potentiel gravitationnel entre les hémisphères. |
| ϕ | Coordonnée angulaire sur le plan xy . |
| $R(r)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| \mathbf{p} | Vecteur de quantité de mouvement. |
| $H(r, \phi)$ | Hamiltonien de système physique en coordonnées cylindriques. |
| n | Niveau quantique de Landau. |
| K | Constante de rappel contenant les termes de champs gravitationnels. |
| $C_g(r)$ | Potentiel gravitationnel perturbatif entre les hémisphères. |
| R | Rayon des hémisphères. |
| a | Demi-distance de séparation entre les hémisphères. |
| $v(r)$ | Fonction d'onde normalisée. |
| z | Variable de normalisation. |
| α | Coefficient de normalisation. |
| β | Coefficient de normalisation. |
| ϖ_c | Fréquence de cyclotron modifiée. |
| \mathcal{E}_{nl} | Énergie quantique du niveau n et de l'orbitale ℓ . |
| r_0 | Point d'équilibre du système physique. |
| χ | Fonction d'onde normalisée. |
| N | Nombre d'états quantiques. |
| $V_{eff}(r)$ | potentiel total effectif. |
| p_r | Quantité de mouvement radiale. |
| r_* | Position centrale d'équilibre du système physique. |
| J_C | Courant dans le conducteur circulaire inter-hémisphère. |
| n | Densité de gaz d'électrons. |
| n_0 | Densité de gaz d'électrons d'équilibre. |
| E^I | Champ électrique induit. |
| ϵ | Énergie moyenne des électrons. |
| p_e | Pression produite par les électrons. |
| C | Constante d'élasticité du conducteur. |
| γ | Constante de conductivité. |
| $V_e^I(r)$ | Potentiel électrique induit. |
| ϖ_c^I | Fréquence de cyclotron modifiée et induite. |
| $\Delta\mathcal{E}$ | Séparation en énergie des niveaux de Landau. |

- α Paramètre de type Yukawa.
- λ Paramètre d'échelle de type Yukawa.
- r_0 Paramètre radial d'échelle pour potentiel en puissance inverse.
- k_B Constante de Boltzmann.
- T Température du système.
- Δ_g Profondeur d'élargissement gravitationnel.
- Δ_{th} Profondeur d'élargissement thermique.
- μ Puissance de profondeur magnétique.
- ΔB Profondeur magnétique.
- \bar{R}_K et R_K Constante de von Klitzing normalisée et non normalisée.
- S Aire de surface de conducteur.

Septième Article (Chapitre 9)

- c Vitesse de la lumière.
- m Masse de la particule.
- M Masse de la source gravitationnelle.
- ρ Densité volumique de masse.
- r Coordonnée radiale.
- T_C Température critique du supraconducteur.
- T Température du supraconducteur.
- G Constante gravitationnelle.
- \hbar Constante de Planck.
- E Champ électrique.
- B Champ magnétique.
- \vec{J} Densité de courant.
- e Charge électrique.
- λ_L Longueur de pénétration de London.
- n_s Densité d'électrons supraconducteurs.
- μ_0 Perméabilité magnétique.
- t Coordonnée temporelle.
- $I(t)$ Courant de Josephson.
- I_0 Courant de Josephson critique.
- $\phi_i(t)$ Phase temporelle.
- V_1 et V_2 Potentiels des condensats de chaque côtés de la jonction de Josephson.
- $J(t)$ Densité de courant de Josephson.
- J_{max} Densité de courant de Josephson maximale.
- λ_B Longueur de pénétration magnétique.
- Φ Profondeur de flux quantique des autres modes.
- Φ_0 Profondeur de flux quantique fondamental.
- $V_g(x)$ et $V_g^N(x)$ Potentiel gravitationnel newtonien de la sphère.
- x Coordonnée spatiale.
- R Rayon de la sphère.
- ω_0 Fréquence d'oscillation.
- μ Potentiel chimique.
- m Masses d'un électron de la paire de Cooper.

| | |
|-----------------|---|
| E_I | Énergie du condensat interne. |
| E_O | Énergie du condensat externe. |
| \mathcal{H}_I | Hamiltonien du condensat interne. |
| \mathcal{H}_O | Hamiltonien du condensat externe. |
| \mathcal{H}_T | Hamiltonien de l'effet tunnel de couplage des condensats. |
| K | Constante de couplage pour effet tunnel. |
| $ I\rangle$ | État quantique du condensat interne. |
| $ O\rangle$ | État quantique du condensat externe. |
| ρ_I | Paramètre d'amplitude du condensat interne. |
| ρ_O | Paramètre d'amplitude du condensat externe. |
| ρ_0 | Paramètre d'amplitude fixe du système. |
| ψ_I | Fonction d'onde du condensat interne. |
| ψ_O | Fonction d'onde du condensat externe. |
| ϕ_I | Phase du condensat interne. |
| ϕ_O | Phase du condensat externe. |
| ϕ_0 | Phase initiale des condensats. |
| $\Delta\phi$ | Différence de phase des condensats. |
| ΔE | Différence d'énergie totale des condensats. |
| J | Densité de courant de Josephson. |
| J_0 | Densité de courant de Josephson critique. |
| n | Niveau d'énergie. |
| Ω_n | Fréquence d'oscillation quantifiée du courant de Josephson gravitationnel. |
| $V_g^Y(x)$ | Potentiel gravitationnel de la correction de type Yukawa. |
| α | Paramètre d'amplitude de la correction de type Yukawa. |
| λ | Paramètre d'échelle de la correction de type Yukawa. |
| m_1 et m_2 | Masses des objets impliqués dans l'interaction de type Yukawa. |
| r | Distance inter-masses. |
| $V_g^{N+Y}(x)$ | Potentiel gravitationnel superposé du terme newtonien et de la correction de type Yukawa. |
| E_I^Y | Énergie du condensat interne de la correction de type Yukawa. |
| E_O^Y | Énergie du condensat externe de la correction de type Yukawa. |
| b | Paramètre associé aux polynômes d'Hermite. |
| $\psi_n(x)$ | Fonction d'onde non perturbée de l'état quantique n du potentiel harmonique. |
| $H_n(x)$ | Polynôme d'Hermite d'ordre n . |

- Ω_n^Y Fréquence du courant de Josephson provenant de la correction de type Yukawa.
- Ω_n^{N+Y} Fréquence du courant de Josephson provenant de la superposition du potentiel newtonien et de sa correction de type Yukawa.
- $V_g^{PL}(x)$ Potentiel gravitationnel de la correction de puissances inverses.
- r_0 Paramètre d'intervalle d'interaction de la correction de puissances inverses.
- q Puissance entière du potentiel de puissances inverses.
- $V_g^{N+PL}(x)$ Potentiel gravitationnel superposé du terme newtonien et de la correction de puissances inverses.
- E_I^{PL} Énergie du condensat interne de la correction de puissances inverses.
- E_O^{PL} Énergie du condensat externe de la correction de puissances inverses.
- Ω_n^{PL} Fréquence du courant de Josephson provenant de la correction de puissances inverses.
- Ω_n^{N+PL} Fréquence du courant de Josephson provenant de la superposition du potentiel newtonien et de sa correction de puissances inverses.
- Ω_0 Fréquence du niveau fondamental du courant de Josephson pour le potentiel newtonien pur.
- a Rayon du tunnel perforant la sphère supraconductrice.
- e Charge électrique fondamentale de l'électron.
- $V_e(x)$ Potentiel électrique induit.
- M Masse des atomes constituant le matériau supraconducteur.
- E Énergie gravitationnelle effective.
- T Température du supraconducteur.
- $\delta\phi$ Différence de phase thermique.
- k_B Constante de Boltzmann.

Dédicace

"Il existe trois sortes d'infini : l'infiniment grand, l'infiniment petit et l'infiniment complexe"

Pierre Teilhard de Chardin (1881-1955)
Philosophe, Géologue et Anthropologue

Remerciements

Je remercie d'abord mes commanditaires : Biothermica Inc., la fondation Sibylla Hesse et le CRSNG.

Je remercie chaleureusement mon directeur de recherche, Prof. Fayçal Hammad, Ph.D..

Je remercie mon premier directeur de recherche, Prof. Manu Paranjape, Ph.D., celui avec lequel j'ai publié les premier et deuxième articles de cette thèse.

Je remercie particulièrement la faculté des Études Supérieures et Postdoctorales, la faculté des Arts et Sciences ainsi que les instances du département de physique.

Pour leur soutien de diverses manières, je remercie les personnes suivantes : Jean-François Angers, Ph.D. ; Inès Colmegna, M.D. ; Guy Drouin, Ing., MBA ; Richard Landry, B.Sc. ; Richard Léonelli, Ph.D. ; François Levac, M.Sc., M.D. ; Michel Moisan, Ph.D. et Hugues Parent, L.L.D.

Enfin, je remercie toutes les autres personnes qui m'ont encouragé.

Préface

Au départ, mon intérêt était grand pour tous les domaines de la physique théorique. J'ai eu besoin d'une grande volonté pour trouver mes propres fonds de recherche : j'ai envoyé plusieurs centaines de missives à des commanditaires potentiels. En novembre 2013, j'avais enfin trouvé les fonds nécessaires. Je fus admis en janvier 2014. Il y eut une maladie inflammatoire peu connue, maintenant sous contrôle. J'ai aussi changé de directeur.

En gribouillant, j'ai fait une réflexion sur la gravité. Mon hypothèse au départ était que l'effet de la gravitation sur les particules quantiques pourrait être étudié sous d'autres angles. D'où les calculs sur les neutrons et les configurations simples de la matière ainsi que sur l'analogie entre la gravité et l'électromagnétisme.

Alexandre Landry

Chapitre 1

Introduction

1.1. Les motivations

Un des sujets d'actualité dans le monde de la physique théorique est le problème de l'unification des quatre types de forces fondamentales gouvernant l'univers. On tente, pour y arriver, de réconcilier la mécanique quantique et la relativité générale pour aboutir à une théorie unificatrice pouvant expliquer l'infiniment petit et l'infiniment grand.

La mécanique quantique (MQ) et la théorie quantique des champs (QFT) parviennent à expliquer trois des quatre types d'interactions fondamentales : les interactions fortes, faibles et électromagnétiques [1, 2, 3, 4, 5, 6]. On a 5 bosons d'interactions appelés aussi "bosons vecteur", car ils interviennent dans les interactions entre particules fondamentales. Ces bosons sont tous de spin 1 : soit le gluon pour l'interaction forte ; les W^\pm (courants chargés) et le Z_0 (courant neutre) pour l'interaction faible ainsi que le photon pour l'électromagnétisme. Pour compléter, on a le boson de Higgs de spin 0 détecté il y a quelques années au CERN. Il constitue le sixième boson fondamental ; il est responsable de la masse des particules [7, 8]. Avec les 5 bosons d'interaction, on aboutit au modèle standard de Glashow-Salam-Weinberg [1, 2, 5, 9]. Mais celui-ci possède plusieurs lacunes, dont l'absence de l'interaction gravitationnelle.

La relativité générale (RG) explique l'interaction gravitationnelle. Celle-ci posséderait un boson d'interaction de spin 2 : le graviton. Mais quantiquement, son intensité en termes d'énergie-impulsion est beaucoup plus faible, voire négligeable, par rapport aux autres bosons d'interaction. La RG possède comme postulat les principes d'équivalences fort et faible ainsi que le principe de covariance. Ce dernier principe utilise grandement le formalisme tensoriel [10, 11]. D'un point de vue expérimental, on est parvenu par l'expérience LIGO à détecter des ondes gravitationnelles venant du cosmos lointain [12]. Puisque les ondes gravitationnelles étaient au départ prédites par la théorie de la RG formulée par Einstein, la détection de ces ondes est une preuve directe de la validité de la RG aux grandes échelles.

On tente depuis les dernières décennies d'élaborer diverses théories d'unification des mondes quantiques et gravitationnels au moyen de théories alternatives en gravitation. Il y a les théories des cordes (i.e. "string theories"), la gravitation quantique (i.e. "quantum gravity"), les théories par membranes (i.e. "branes"), la géométrie non-commutative et quelques autres approches moins connues [13, 14, 15, 16]. Mais avant d'arriver à cette unification, on désire étudier, via les effets sur des phénomènes physiques connus, comment des particules quantiques réagiraient face à la gravitation.

L'hypothèse de base est donc que la gravitation pourrait être étudiée à travers ses effets sur des particules quantiques. Comme la gravité est universelle, chaque petit élément des objets dans la nature contribue à l'interaction gravitationnelle. De plus, les ondes gravitationnelles sont aussi émises par des corps massifs : c'est ce que montrent les observations de l'expérience LIGO [12]. D'autre part, des potentiels de puissances inverses et de type Yukawa sont envisagés [17, 18]. On ne doit pas oublier qu'au départ, le potentiel de Yukawa original avait été formulé pour expliquer les forces de cohésion des noyaux atomiques via l'interaction forte [5]. Toutefois, la même forme mathématique de potentiel est utilisée pour des expériences de précision en gravité. Ces potentiels sont souvent traités comme étant des déviations par rapport au potentiel newtonien pur en $1/r$ [14, 15, 17, 18]. Finalement, on propose dans cette thèse d'examiner les différents aspects du comportement de particules quantiques baignant dans un champ gravitationnel.

1.2. Contenu de la thèse

1.2.1. Vue globale

On étudiera en détail le comportement de particules quantiques sous l'influence de la gravitation. Il sera souvent question dans ce travail de masses centrales sphériques et cylindriques de rayons finis. Il sera parfois question de disques ayant une épaisseur finie. On utilisera souvent dans cet ouvrage des perturbations quantiques indépendantes ou dépendantes du temps, ce qui facilitera grandement la tâche. On utilisera aussi différentes méthodes impliquant l'oscillateur harmonique et sa quantification. Du côté du formalisme mathématique, on utilisera notamment les fonctions d'Airy, d'Hermite, de Kummer ainsi que les produits et intégrales de ces fonctions.

1.2.2. Phénomènes physiques évoqués

On désire connaître les effets de la gravitation à travers le champ gravitationnel terrestre, le champ gravitationnel dû à un cylindre, le champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère, la quantification de Landau, l'Effet Hall Quantique (QHE) et l'effet Josephson en supraconductivité. On veut connaître précisément les différentes manières et processus par lesquels la

gravitation manifeste son influence à travers ces phénomènes en utilisant la quantification et les perturbations quantiques.

1.2.3. Proposition d'expériences

Par l'usage d'outils expérimentaux, on propose de mesurer l'ensemble des paramètres constituant les différents types d'interactions gravitationnelles. On fera cet exercice particulièrement pour les interactions de type Yukawa et de puissance inverse. On propose aussi des montages pour mesurer avec une très grande précision la constante gravitationnelle G . On étudiera en plus la possibilité de mesurer le phénomène du gravitomagnétisme, soit l'équivalent du magnétisme pour l'interaction gravitationnelle. La mise en situation de particules quantiques dans des champs gravitationnels par des montages astucieux permettra de réaliser cette étude.

1.3. La démarche

1.3.1. Transitions quantiques induites par la gravitation et l'effet laser

Dans le premier article (chapitre 3), on propose de perturber gravitationnellement les neutrons ultra-froids (UCN : Ultra-cold neutrons) soumis à la gravité terrestre. On veut précisément connaître les probabilités de transitions quantiques de ces neutrons par différents types de perturbations gravitationnelles et proposer des mesures en laboratoire. On désire au deuxième article (chapitre 4) utiliser certains résultats obtenus sur les UCN pour l'étude de l'effet laser gravitationnel. On veut dans ce cas connaître les coefficients d'émission stimulée des gravitons par les neutrons.

1.3.2. Niveaux de Landau en présence de la gravitation

Les niveaux de Landau proviennent du mouvement circulaire d'une particule ponctuelle soumise à un certain champ magnétique constant et uniforme. Ceci est appelée la quantification de Landau. Au troisième article (chapitre 5), on perturbera d'abord ce système physique par une masse sphérique au centre du système via l'espace-temps de Schwarzschild. On traitera ensuite le même problème au quatrième article (chapitre 6), mais avec une masse cylindrique centrale. On fera de même dans cet article pour une masse sphérique centrale en rotation sur elle-même. Le tout donnera des corrections aux niveaux d'énergie de Landau qui suppriment la dégénérescence de ces derniers. À travers cette étude, nous examinerons en détail et d'une manière critique les différentes approches souvent utilisées dans la littérature pour extraire la quantification d'énergie.

1.3.3. Proposition d'expériences pour étudier la gravitation par interférences

Pour le cinquième article (chapitre 7), on veut mesurer précisément les forces gravitationnelles de type Yukawa et de puissance inverse. On proposera un montage, avec une sphère percée par un cylindre, fonctionnant par interférométrie. On examinera aussi parallèlement la possibilité de mesurer le gravitomagnétisme. Le gravitomagnétisme est l'équivalent du magnétisme pour la gravitation.

1.3.4. L'influence gravitationnelle sur l'effet Hall Quantique

On veut étudier les effets de la gravitation sur l'effet Hall Quantique (QHE) au sixième article (chapitre 8). On étudiera les effets du champ gravitationnel terrestre ainsi que d'un champ gravitationnel non-linéaire produit par deux hémisphères massives séparées par un disque conducteur. On proposera aussi de mesurer les effets des différentes forces gravitationnelles sur ce phénomène de QHE : soit l'interaction newtonienne, de type Yukawa et de puissance inverse. On proposera même de mesurer la constante G avec une grande précision.

1.3.5. La gravitation à travers l'effet Josephson

Au septième article (chapitre 9), on propose d'étudier l'influence gravitationnelle sur l'effet Josephson en supraconductivité. On utilisera un montage similaire à celui proposé au cinquième article, mais ce dernier sera soumis à de très basses températures et impliquera un système supraconducteur. On s'inspire d'expériences passées basées sur les SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Device). On étudiera aussi l'influence des interactions de type Yukawa et de puissance inverse sur l'effet Josephson.

1.4. L'organisation de la thèse

Il y aura d'abord un chapitre expliquant les méthodes générales, surtout mathématiques, pour mieux comprendre le contenu des sept articles de la thèse ; ce sera le chapitre 2 s'intitulant "fondements théoriques".

Les chapitres 3 à 9 correspondent aux sept articles de la thèse. Ces chapitres expliquent les notions, objectifs et méthodologies spécifiques de chacun des articles. Ils contiennent aussi les résultats sous formes d'équations et de tableaux. Chaque chapitre se termine par la version intégrale de l'article correspondant.

On conclura au chapitre 10 sur les avancés qu'ont apportés les sept articles de recherche. On proposera des suggestions de travaux pouvant faire suite aux articles présentés ici.

Chapitre 2

Fondements théoriques

2.1. L'équation de Schrödinger et les perturbations quantiques

2.1.1. L'équation de Schrödinger et les postulats sous-jacents

En mécanique quantique, toute particule dans un espace donné sous l'influence d'un potentiel peut être décrite par une onde. En fait, même la lumière possède comme caractéristique importante la dualité onde-cosposcule. C'est cette dualité qui permet à la lumière d'être considérée comme une particule, le photon, mais aussi comme une onde électromagnétique.

La première équation importante auquel on pense en mécanique quantique est l'équation de Schrödinger. Sa forme la plus générale est la suivante [4, 6, 19, 20] :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H}(\vec{p}, \vec{x}) \psi(\vec{x}, t) \quad (2.1.1)$$

L'hamiltonien $\hat{H}(\vec{p}, \vec{x})$ pour un système fait d'une particule de masse m et de charge électrique q soumise à un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{x}, t)$ et d'un potentiel scalaire $V(\vec{x}, t)$ s'exprime par :

$$\hat{H}(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t))^2}{2m} + V(\vec{x}, t) \quad (2.1.2)$$

La quantité de mouvement présente dans l'hamiltonien s'exprime sous forme d'un opérateur $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, et l'équation (2.1.1) devient :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[\frac{(i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A}(\vec{x}, t))^2}{2m} + V(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t) \quad (2.1.3)$$

L'équation (2.1.3) représente la forme la plus générale de l'équation de Schrödinger pour une particule chargée soumise à un potentiel scalaire $V(\vec{x}, t)$ ainsi qu'à un potentiel vecteur électromagnétique $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Toutefois, pour plusieurs situations usuelles, l'équation (2.1.3) peut se simplifier en entrant tous les termes non-différentiels dans un potentiel dit effectif

$V_{eff}(\vec{x}, t)$ comme suit [4, 6, 19] :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{eff}(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t) \quad (2.1.4)$$

L'équation (2.1.4) représente la forme la plus usuelle de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. De plus, si on travaille avec une seule dimension spatiale et la variable temporelle, l'équation (2.1.4) devient :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{eff}(x, t) \right] \psi(x, t) \quad (2.1.5)$$

Maintenant, pour un système stationnaire, on peut décomposer la fonction d'onde ψ en écrivant $\psi(x, t) = \exp(-iEt/\hbar) \psi(x)$ et puisque dans ce cas, on a $V_{eff}(x, t) = V_{eff}(x)$, on utilisera la méthode de séparation de variables en équations différentielles pour obtenir l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$E\psi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{eff}(x) \right] \psi(x). \quad (2.1.6)$$

D'un point de vue mathématique, on a en l'équation (2.1.6) un problème de type Sturm-Liouville aux valeurs propres réelles donnant comme solution des fonctions propres [21, 22]. D'un point de vue physique, les valeurs propres sont les énergies des niveaux et les fonctions propres sont qualifiées d'états propres. Mais avant d'aller plus loin, il faut énoncer certains principes inhérents à l'équation (2.1.6). D'abord, il y a le principe de superposition linéaire des fonctions propres du point de vue discret [4, 19] :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\psi_n\rangle = |\psi\rangle \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

L'équation (2.1.7) signifie aussi que la mécanique quantique est une approche probabiliste. Les coefficients a_n^2 représentent des probabilités de trouver le système dans l'état ψ_n . C'est un des postulats de cette théorie. De plus, cette même équation (2.1.7) a comme conséquence l'orthonormalisation des fonctions d'ondes et des états propres solution de l'équation (2.1.6) comme suit [4, 19] :

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (2.1.8)$$

De plus, l'équation (2.1.6) avec la condition d'orthonormalisation donne des solutions normalisées sur un intervalle $[x_1, x_2]$ en x . Aux points $x = x_1$ et $x = x_2$, le problème de Sturm-Liouville propose certains types de conditions aux limites d'un domaine de définition d'une fonction d'onde $\psi(x)$ [21, 22]. Les deux types de conditions aux limites les plus usuelles sont les suivantes :

– Les conditions de Dirichlet : applicables sur la fonction d'onde elle-même :

$$\psi_n(x = x_1) = \psi_n(x = x_2) = 0 \quad (2.1.9)$$

– Les conditions de Neumann : applicables sur la dérivée première de la fonction d'onde :

$$\psi'_n(x = x_1) = \psi'_n(x = x_2) = 0 \quad (2.1.10)$$

Au lieu d'employer directement les fonctions d'ondes, on peut employer la notation des "bras" et des "kets" pour simplifier l'écriture des états quantiques. La valeur moyenne d'une observable \hat{O} peut donc se calculer de la manière suivante via les "bras" et les "kets" [6, 19] :

$$\langle \hat{O} \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x) \hat{O} \psi(x) dx \equiv \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \sum_n \langle \psi | \psi_n \rangle O_n \langle \psi_n | \psi \rangle. \quad (2.1.11)$$

C'est avec l'équation (2.1.11) qu'on peut obtenir certaines valeurs associées à une observable. On travaillera en général avec les équations (2.1.4) à (2.1.11) dans les différents articles présentés dans cette thèse. Toutefois, les équations (2.1.5) et/ou (2.1.6) peuvent prendre des formes bien particulières selon le type de problème quantique étudié. Aux sous-sections 2.1.2 et 2.1.3, il existe deux formes bien particulières pour les équations (2.1.5) et (2.1.6) selon la forme du potentiel effectif V_{eff} . Le tout sert à élaborer les deux théories de perturbations des états quantiques en fonction ou non du temps.

2.1.2. Théorie des perturbations quantiques indépendantes du temps

Il y a d'abord la théorie des perturbations indépendantes du temps : la perturbation par un système avec un potentiel dépendant uniquement des coordonnées spatiales donnera des corrections aux niveaux d'énergies. Ces décalages dépendent des états du système quantique non-perturbé ainsi que du potentiel de la perturbation [4, 19]. Cette première théorie sera essentielle dans la compréhension de tous les articles de cette thèse. Celle-ci se base, en effet, sur un potentiel effectif qui s'exprime sous la forme suivante :

$$V_{eff}(x) = V(x) + W(x), \quad (2.1.12)$$

où $V(x)$ est le potentiel du système quantique non-perturbé et $W(x)$ est le potentiel de perturbation. On considère dans ce cas que $|W(x)| \ll |V(x)|$ pour que cette théorie soit appropriée.

Dans cette théorie, vu la faiblesse de $W(x)$, on ne calcule que le terme de correction au premier ordre de cette perturbation en $W(x)$. De plus, ce type de perturbation peut aussi donner au deuxième ordre des perturbations des fonctions d'onde pour les différents états d'énergies [4, 19, 20]. D'un point de vue mathématique, les niveaux d'énergies d'après cette théorie s'expriment comme suit pour des corrections aux premier et deuxième ordre :

$$E_n = E_{n0} + \langle \psi_n | W(x) | \psi_n \rangle + \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \psi_p | W(x) | \psi_n \rangle|^2}{E_{n0} - E_{p0}}, \quad (2.1.13)$$

$$\psi = \psi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\langle \psi_p | W(x) | \psi_n \rangle}{E_{n0} - E_{p0}} |\psi_p\rangle, \quad (2.1.14)$$

où E_{n0} et E_{p0} sont les énergies des états non-perturbés et $W(x)$ est le potentiel de perturbation. L'équation (2.1.13) sera grandement utile, voir essentielle, dans la plupart des articles de cette thèse.

2.1.3. Les perturbations dépendantes du temps et les probabilités de transitions inter-états

La théorie des perturbations quantiques dépendantes du temps est plus générale, car elle fait intervenir les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle [4, 6, 19]. C'est surtout la coordonnée temporelle qui influence les résultats physiques de ce type de perturbation. Cela se fait à travers les probabilités de transitions inter-états.

Ces perturbations dépendantes du temps se basent sur un potentiel effectif $V_{eff}(x, t)$ de l'équation (2.1.5) ayant la forme suivante :

$$V_{eff}(x, t) = V(x) + W(x, t) = V(x) + W_1(x)W_2(t), \quad (2.1.15)$$

avec $V(x)$ comme potentiel du système non-perturbé et $W(x, t)$ comme potentiel dépendant des coordonnées spatiales et du temps. Ce type de perturbation donne des transitions quantiques entre les états non perturbés provenant d'un potentiel décrit comme un produit d'une fonction spatiale $W_1(x)$ et d'une fonction temporelle $W_2(t)$.

Si on définit $\omega_{fi} = (E_{f0} - E_{i0})/\hbar$ avec les énergies E_{f0} et E_{i0} de l'état final et initial non perturbés respectivement, la probabilité de transition pour une perturbation $W(x, t)$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} P_{fi}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int dx \int_0^t dt' \exp(i\omega_{fi}t') \psi_f^*(x) W(x, t') \psi_i(x) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int dx \psi_f^*(x) W_1(x) \psi_i(x) \right|^2 \left| \int_0^t dt' \exp(i\omega_{fi}t') W_2(t') \right|^2 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

L'équation (2.1.16) montre clairement qu'il y a deux intégrales, l'une spatiale et l'autre temporelle. La partie spatiale s'appelle la matrice de transition et s'exprime comme :

$$|\langle \psi_f | W_1(x) | \psi_i \rangle|^2 = \left| \int dx \psi_f^*(x) W_1(x) \psi_i(x) \right|^2. \quad (2.1.17)$$

La partie temporelle est exprimée par l'intégrale :

$$\frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \exp(i\omega_{fi}t') W_2(t') \right|^2. \quad (2.1.18)$$

On a supposé ici que les parties spatiales et temporelles peuvent se séparer en un produit, ce qui n'est pas toujours le cas. Toutefois, il arrivera souvent qu'on aura des perturbations dont les parties temporelles et spatiales se séparent en un produit : c'est une situation souvent

rencontrée en mécanique quantique [4, 6, 20]. Cela permet de résoudre les intégrales spatiales et temporelle plus aisément qu'autrement. Dans certains cas, on peut décomposer l'intégrale spatio-temporelle en utilisant les séries de Fourier ou encore une décomposition en séries de Taylor. On veut obtenir un produit entre les termes spatiaux et temporels, ce qui permet à la partie temporelle d'être oscillante dans le temps pour des temps relativement courts. Ces situations donneront des transitions quantiques entre les états quantiques non-perturbés d'un système donné. On verra dans le premier article que c'est le cas pour les perturbations causées par des masses sphériques et cylindriques. Par contre, si $W(x, t)$ ne donne pas un produit ou n'est pas décomposable en séries de Fourier donnant des produits, il n'y aura possiblement pas de transition. Le but de ce type d'exercice est d'obtenir des transitions entre les niveaux d'énergie. La partie spatiale déterminera l'amplitude de la transition inter-états. Par contre, la composante temporelle déterminera surtout la manière dont les transitions se produiront dans le temps. On tiendra compte du fait que la perturbation du système $W(x, t)$ sera en résonance avec les fréquences naturelles du système quantique non-perturbé. Il ne faut finalement pas oublier que les perturbations sont toujours plus fortes lorsqu'il y a résonance. Cela permet d'exciter les particules quantiques plus facilement, même avec une perturbation de faible amplitude.

On verra par exemple dans le premier article qu'on perturbera un système quantique par un potentiel gravitationnel provenant d'une masse externe que l'on fait osciller autour d'une position d'équilibre. On veut induire des transitions quantiques pour les états quantiques des particules du système. Dans un tel cas, on considère la perturbation de forme oscillante suivante :

$$W(x, t) = W_1(x) \cos(\omega t). \quad (2.1.19)$$

Cette forme de perturbation signifie que l'équation (2.1.16) s'exprimera de la manière suivante :

$$P_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \psi_f | W_1(x) | \psi_i \rangle|^2 \left| \int_0^t dt' \exp(i\omega_{fi}t') \cos(\omega t') \right|^2. \quad (2.1.20)$$

La partie spatiale de l'équation (2.1.20) correspondant exactement à l'équation (2.1.17). Par contre, la partie temporelle est équivalente à l'équation (2.1.18) et s'exprimera comme suit :

$$\frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \exp(i\omega_{fi}t') \cos(\omega t') \right|^2. \quad (2.1.21)$$

L'intégrale présente dans l'expression (2.1.21) se résout facilement et le résultat est connu en mécanique quantique. On résout cette intégrale de manière générale pour toutes les valeurs possibles de ω_{fi} et ω . On prend ensuite le résultat et on impose la condition de résonance $\omega_{fi} = \omega$. Avec quelques manipulations algébriques sur le résultat et en désignant l'état final par la lettre m et l'état initial par n , on obtient la fonction de résonance $f(\omega_{mn}, t)$ suivante

[4, 6, 20] :

$$f(\omega_{mn}, t) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\sin(\omega_{mn}t)}{\omega_{mn}} \right)^2 + t \left(\frac{\sin(2\omega_{mn}t)}{\omega_{mn}} \right) + t^2 \right]. \quad (2.1.22)$$

Cette équation (2.1.22) possède deux limites. Si on a que la fréquence de transition est faible, soit $\omega_{mn}t \rightarrow 0$, on peut approximer la fonction de résonance par $f(\omega_{mn}, t) \rightarrow t^2$. Ensuite, si on a de grandes fréquences de transition, soit $\omega_{mn}t \rightarrow \infty$, on obtient que $f(\omega_{mn}, t) \rightarrow \frac{t^2}{4}$. Ces approximations sont souvent utiles en physique des particules, notamment lorsqu'on a des systèmes quantifiés évoluant dans le temps. Donc, on peut exprimer l'équation (2.1.20) en substituant l'expression (2.1.22) dans celle-ci pour obtenir la forme finale de probabilité de transition lors de la résonance d'un système quantique comme suit :

$$P_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \psi_f | W_1(x) | \psi_i \rangle|^2 f(\omega_{mn}, t). \quad (2.1.23)$$

On obtient en l'équation (2.1.23) la probabilité de transition pour une perturbation oscillante dans le temps telle qu'exprimée par l'équation (2.1.19). Dans le premier article de cette thèse, on obtient des résultats ayant la forme de l'équation (2.1.23). Donc, ces notions seront utiles pour la compréhension des résultats obtenus aux premier et deuxième articles.

2.2. La relativité générale et l'équation de Klein-Gordon

2.2.1. Le formalisme covariant en relativité générale

On sait que le principe gouvernant la relativité restreinte stipule que toute loi de la physique, sauf la gravitation, est identique dans tous les référentiels inertiels. De plus, il y a invariance de la vitesse de la lumière c . Cette invariance de la vitesse de la lumière se vérifie via l'expérience de Michelson-Morley.

Tout phénomène physique en relativité générale exige le respect des principes d'équivalences fort et faible. Le principe d'équivalence faible stipule que la masse inertielle est identique à la masse gravitationnelle. Cela se vérifie par l'universalité de la chute libre dans un espace-temps donné. Le principe d'équivalence fort dit clairement que la gravitation est uniquement déterminée par la métrique. De plus, le mouvement des masses tests est gouverné par des équations décrivant des géodésiques [10, 11].

En plus, on a élaboré le principe de covariance stipulant que toutes les lois de la physique conservent leurs formes mathématiques dans n'importe quel repère. Les coordonnées n'étant pas des absolues, on a des complications à des vitesses relativistes. C'est entre-autre pour cette raison que les quantités physiques en relativité générale s'expriment via des relations tensorielles. Donc, le principe le plus général en relativité générale est que toute loi de la physique s'exprime identiquement dans n'importe quel type de référentiel [10, 11].

De là, on doit définir quelques quantités physiques de base essentielles en relativité générale. Pour un espace-temps quelconque, le temps propre différentiel $d\tau$ s'exprime en termes de la métrique $g_{\mu\nu}$ comme suit [10, 11]¹ :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.1)$$

Afin de pouvoir définir les géodésiques et la courbure d'un espace-temps donné, il faut définir la connexion métrique, aussi appelée symbole de Christoffel :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \quad (2.2.2)$$

L'équation des géodésiques s'exprime en utilisant l'équation (2.2.2) par :

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.2.3)$$

À partir de là, on peut obtenir l'équation générale d'Einstein reliant la courbure de l'espace-temps $G_{\mu\nu}$ à une source d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ comme suit :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.2.4)$$

Ici, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci exprimant la courbure de l'espace-temps et R est l'invariant de même nom. Si le phénomène se situe dans le vide, cette équation devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.2.5)$$

L'invariant R et le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho}^\rho \\ R_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu\rho}^\rho. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

La courbure de l'espace-temps $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$ se définit finalement comme :

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\rho\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (2.2.7)$$

Avec les équations (2.2.1) à (2.2.7), on a l'équipement nécessaire pour utiliser convenablement la relativité générale afin de traiter les problèmes physiques. Il y a toutefois des situations physiques particulières qui peuvent apparaître dans certains chapitres de la présente thèse.

Par exemple, il y a le phénomène des ondes gravitationnelles. Elles s'expliquent à l'origine par l'approximation des faibles champs $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ où $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ [10, 11]. Ces ondes perturbent très légèrement en intensité l'espace-temps de Minkowski de métrique $\eta_{\mu\nu}$. En

1. Dans cette thèse, on utilisera particulièrement la signature $(-, +, +, +)$ pour la métrique de l'espace-temps.

partant de ce fait, on obtient l'équation d'Einstein dans la jauge harmonique $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$:

$$\partial^\rho \partial_\rho \left[h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right] = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.2.8)$$

On obtient une équation similaire à une équation d'onde conventionnelle avec une source externe $T_{\mu\nu}$.

Ensuite, la formulation covariante de l'électromagnétisme s'exprime en termes de quadripotential A^μ et de quadricourant $J^\mu = (\rho, \vec{J})$. Les équations de Maxwell sous forme covariantes sont les suivantes [23] :

$$\begin{aligned} \nabla^\rho \nabla_\rho A^\mu &= \nabla_\rho F^{\rho\mu} = \mu_0 J^\mu, \\ \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

où $F^{\rho\mu} = \partial^\rho A^\mu - \partial^\mu A^\rho$ est le tenseur de champ électromagnétique. Ici, les dérivées partielles ont été remplacées par des dérivées covariantes (e.g., $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$) pour tenir compte de la courbure de l'espace-temps. Une dérivée covariante appliquée sur un vecteur U^ρ s'exprime par la relation suivante :

$$\nabla_\mu U^\rho \equiv U^\rho_{;\mu} = \partial_\mu U^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho U^\nu. \quad (2.2.10)$$

Des dérivées partielles apparaissent à la deuxième ligne des équations (2.2.9) à cause de la symétrie des symboles de Christoffel. La première des équations de Maxwell relie le quadripotential et la source de charge et/ou de courant. La seconde est son dual et s'exprime par l'identité de Bianchi. Ces deux équations résument l'électromagnétisme, peu importe la métrique $g_{\mu\nu}$ décrivant l'espace-temps environnant. On doit finalement mentionner qu'un champ gravitationnel en présence d'un champ électromagnétique est décrit par l'équation d'Einstein-Maxwell. Celle-ci est l'équation (2.2.4) avec le tenseur d'énergie-impulsion suivant [10, 11] :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\kappa} F^{\rho\kappa} \right]. \quad (2.2.11)$$

Il sera question de cette équation (2.2.4) contenant l'équation (2.2.11) à son membre de droite au troisième article de cette thèse.

De plus, il existe une autre méthode de représentation en relativité générale appelée formalisme des tétrades. Ce formalisme est basé sur les formes différentielles (ou topologiques) au lieu des tenseurs [10, 11]. C'est une formulation dite localisée au lieu d'être formulée par l'intermédiaire des coordonnées. Au lieu de représenter les dérivées par ∂_μ , les différentielles par dx^μ et la métrique par $g_{\mu\nu}$, on représente ces quantités par $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$, $e^a = e_a^\mu dx^\mu$, $g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab} e^a e^b$, respectivement. De plus, on doit respecter le commutateur $[e_a, e_b] \neq 0$ dans ce formalisme. On verra dans les troisième et quatrième articles que les quadripotentials peuvent s'exprimer de deux manières différentes à l'aide des tétrades.

2.2.2. L'équation de Klein-Gordon

En relativité générale, il arrive souvent que l'on travaille avec des particules quantiques dans l'espace-temps de Minkowski ou encore des espaces-temps courbes de divers types. Cela arrive couramment en théorie quantique des champs [1, 2, 24]. L'équation de Schrödinger telle qu'exprimée par l'équation (2.1.4) ne convient pas pour ces situations. La raison en est que cette dernière a été pensée pour de la quantification dans un monde non-relativiste. Surtout, cette équation de Schrödinger n'est pas sous forme covariante. Toutefois, on peut utiliser une autre approche pour obtenir une équation générale équivalente à celle de Schrödinger, mais dans un contexte relativiste.

Dans un tel contexte, pour les particules sans spin ou encore bosoniques, on utilise l'équation de Klein-Gordon qui s'exprime comme suit [24] :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) + m^2 c^2 \right] \psi = 0, \quad (2.2.12)$$

où $g_{\mu\nu}$ est la métrique et $D_\mu = -i\hbar\partial_\mu - qA_\mu$. Pour utiliser correctement l'équation (2.2.12), on doit aussi connaître le quadripotiel A_μ correspondant au système physique. Cette équation est fortement utile pour comprendre correctement les troisième et quatrième articles de cette présente thèse.

Puisque l'équation (2.2.12) fonctionne pour tout type d'espace-temps représenté par $g_{\mu\nu}$, on peut dériver cette dernière pour l'espace-temps de Minkowski en coordonnées cartésiennes et pour un système physique représenté par un quadripotiel covariant A_μ quelconque. En posant $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\sqrt{-g} = \sqrt{-(-1)} = 1$ et $A_\mu = (A_t, \vec{A}(\vec{x}, t))$, l'équation (2.2.12) se résume à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} [D_\mu D^\mu + m^2 c^2] \psi &= 0, \\ \left[-(i\hbar\partial_0 + qA_0)^2 + \sum_{i=1}^3 (i\hbar\partial_i + qA_i)^2 + m^2 c^2 \right] \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

L'équation (2.2.13) est l'équation de Klein-Gordon pour l'espace-temps plat de Minkowski. S'il n'y a aucun potentiel dans le système physique (i.e. $A_\mu = 0$), cette équation deviendra simplement une équation d'onde plane conventionnelle si on remplace exactement t par ct dans l'équation (2.2.13) :

$$\left[\hbar^2 \partial_t^2 - c^2 \hbar^2 \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 + m^2 c^4 \right] \psi = 0. \quad (2.2.14)$$

On reconnaît en cette équation l'invariant relativiste $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$. L'équation de Klein-Gordon minkowskienne dans le vide respecte donc les postulats de la relativité restreinte.

Pour son équivalent en coordonnées sphériques, on utilise plutôt la métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ et donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \sqrt{-(-1)(1)(r^2)(r^2 \sin^2 \theta)} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} \\ &= r^2 \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

En substituant l'équation (2.2.15) et la métrique $g_{\mu\nu}$ en coordonnées sphériques dans l'équation (2.2.12), on obtient l'équation suivante :

$$\left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} D_\mu (r^2 \sin \theta g^{\mu\nu} D_\nu) + m^2 c^2 \right] \psi = 0.\tag{2.2.16}$$

Dans l'équation (2.2.16), on a que $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta)$. Au final, l'équation (2.2.16) deviendra sous toutes ces considérations :

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{c^2} D_t^2 + \frac{1}{r^2} D_r (r^2 D_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} D_\theta (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} D_\phi^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0, \\ &\left[-\frac{1}{c^2} (i\hbar \partial_t + qA_t)^2 + \frac{1}{r^2} (-i\hbar \partial_r - qA_r) (r^2 (-i\hbar \partial_r - qA_r)) \right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (-i\hbar \partial_\theta - qA_\theta) (\sin \theta (-i\hbar \partial_\theta - qA_\theta)) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (-i\hbar \partial_\phi - qA_\phi)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0.\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

On a l'équation de Klein-Gordon pour un espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques la plus complète. Cette dernière est utile pour obtenir la quantification d'un système physique en présence de l'électromagnétisme relativiste. Si on se situe dans le vide où $A_\mu = 0$ et $J_\mu = 0$, alors l'équation (2.2.17) deviendra :

$$\left[\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0.\tag{2.2.18}$$

On a obtenu l'équation pour les ondes sphériques dans le vide. Si on substitue les opérateurs $E = i\hbar \partial_t$ et $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ dans l'invariant $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, on obtient l'équation (2.2.18). Cette substitution prouve le respect de l'invariant par l'équation (2.2.18) de Klein-Gordon minkowskien dans le vide.

Avec l'équation (2.2.12), on peut traiter n'importe quel problème de quantification relativiste. Cela a d'ailleurs été essentiel pour les troisième et quatrième articles de cette thèse.

2.3. L'oscillateur harmonique

2.3.1. Les états quantiques du potentiel harmonique.

On expose dans cette section un problème quantique bien particulier utilisant l'équation (2.1.6) et qui revient très souvent dans presque tous les articles de cette thèse. Il s'agit

du problème de l'oscillateur harmonique quantique avec le fameux potentiel quadratique $V_{eff}(x) = \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2$ où x_0 est la position d'équilibre de l'oscillateur. Cette équation (2.1.6) s'écrira sous cette considération comme étant [6, 19, 20] :

$$E\psi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} (x - x_0)^2 \right] \psi(x). \quad (2.3.1)$$

À l'aide d'une solution en séries de puissances ou d'une autre méthode équivalente en équations différentielles, la solution à l'équation (2.3.1) s'exprime sous la forme d'un produit d'une fonction gaussienne avec un polynôme d'Hermite $H_n(x)$ ainsi que sa normalisation [6, 19, 20] :

$$|n\rangle = \psi_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{b}{2}x^2} H_n(\sqrt{b}x), \quad (2.3.2)$$

où $b = \frac{m\omega}{\hbar}$ et $H_n(z)$ est le polynôme d'Hermite d'ordre n [21, 22]. En appliquant les conditions aux frontières et de continuité appropriées, on obtient que les niveaux d'énergies prévus par l'équation (2.3.1) sont :

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.3.3)$$

De plus, ce problème quantique peut s'exprimer en termes d'opérateurs de création-annihilation \hat{a}^\dagger et \hat{a} s'appliquant sur les états quantiques $|n\rangle$ exprimées par l'équation (2.3.2) [20]. Pour créer une particule, on applique l'opérateur de création $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ tandis que pour détruire une particule, on applique l'opérateur d'annihilation $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ et leur commutateur est $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. De plus, l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'exprime par $\hat{H} = \hbar\omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right]$. C'est une autre manière d'exprimer le problème physique de l'oscillateur harmonique quantique. De plus, en théorie quantique des champs, on reprend un formalisme similaire pour des champs continus bosoniques [1, 2]. On précisera davantage ces notions au chapitre 4 lorsqu'on introduira le deuxième article pour le champ libre de spin 2 du graviton.

2.3.2. L'approximation par le potentiel harmonique autour de points d'équilibres stables

Maintenant, ce ne sont pas tous les problèmes physiques qui sont exactement exprimés en termes d'un potentiel harmonique. Par contre, un potentiel non-linéaire peut s'exprimer d'une manière approximative autour de points d'équilibres stables par un potentiel quadratique de la forme d'un potentiel harmonique [25, 26]. Cela s'applique pour toute forme d'énergie potentielle non-linéaire d'une particule tout près d'un certain point d'équilibre stable x_* . De plus, les niveaux d'énergies d'un oscillateur harmonique quantique sont bien connus et définis par l'équation (2.3.3).

On commence par utiliser l'équation de Schrödinger telle qu'exprimée par l'équation (2.1.6) et on prend le développement en séries de Taylor de son potentiel $V_{eff}(x)$ autour de

x_* , la position d'équilibre. À ce point, on obtient d'abord que les points x_* respectent la condition de la dérivée première nulle :

$$\frac{dV_{eff}(x_*)}{dx} = 0. \quad (2.3.4)$$

Pour un potentiel $V_{eff}(x)$ quelconque, on applique l'équation (2.3.4) sur celui-ci pour obtenir ce qu'on appelle l'équation caractéristique permettant d'obtenir les valeurs de x_* , c'est-à-dire les points d'équilibre.

Au deuxième ordre de développement, l'énergie potentielle $V_{eff}(x)$ s'exprime donc comme suit :

$$V_{eff}(x) \approx V_0 + \frac{m\omega^2}{2} (x - x_*)^2, \quad (2.3.5)$$

où $V_0 = V_{eff}(x_*)$ et $m\omega^2 = \frac{d^2V_{eff}(x_*)}{dx^2}$. Avec cette approximation pour $V_{eff}(x)$, une équation de Schrödinger de la forme de l'équation (2.1.6) contenant ce potentiel effectif non nécessairement quadratique peut alors s'exprimer autour de points d'équilibres stables par l'équation (2.3.1). Cela en respectant la condition pour les points d'équilibre stables :

$$m\omega^2 = \frac{d^2V_{eff}(x_*)}{dx^2} > 0. \quad (2.3.6)$$

Après avoir approximé ce potentiel $V_{eff}(x)$ autour de x_* , les niveaux d'énergie de ce potentiel autour de ce point s'exprimeront selon l'équation (2.3.3) comme suit [6, 19, 20] :

$$\mathcal{E}_n = V_0 + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.3.7)$$

où n est encore un nombre quantique positif. Donc, les équations (2.3.4) à (2.3.7) seront très utiles pour la bonne compréhension de la majorité des articles de cette présente thèse. La prochaine section de ce présent chapitre présente un bel exemple d'application de l'oscillateur harmonique quantique et ses résultats.

2.4. Les niveaux de Landau conventionnels

2.4.1. La quantification de Landau et les niveaux d'énergies par l'équation de Schrödinger

La quantification de Landau étudie l'influence d'un champ magnétique généralement constant et uniforme sur le mouvement d'une particule chargée. Ce champ magnétique s'étale dans une direction, généralement la hauteur (l'axe z), et provoque un mouvement de rotation circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique [3]. Ce champ magnétique possède un potentiel vecteur. Dans la présente situation, le champ magnétique sera uniforme et alors le potentiel vecteur sera linéaire. À partir de ces faits, on peut obtenir l'équation de Schrödinger non-relativiste décrivant la quantification liée au phénomène. Cette équation

ressemble à l'équation de Schrödinger pour le potentiel harmonique avec une fréquence de type cyclotron.

De manière pratique, on aura un champ magnétique de type $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ provenant d'un potentiel vecteur de type $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ en coordonnées cartésiennes, car $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. À partir de là, on peut obtenir l'équation de Schrödinger pour ce système physique comme suit [3, 4] :

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi. \quad (2.4.1)$$

Comme l'équation de Schrödinger est indépendante du temps et que l'opérateur laplacien s'exprime par $\nabla^2 = \delta^{ij}(-i\hbar\partial_i - eA_i)(-i\hbar\partial_j - eA_j) = \delta^{ij}(p_i - eA_i)(p_j - eA_j)$, on aura :

$$\begin{aligned} E\psi &= \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - eA_y)^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right] \psi \\ &= \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - eBx)^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right] \psi \\ &= \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{e^2B^2}{2m} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} \right] \psi \\ &= \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m} \right] \psi. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

où $\omega_c = \frac{eB}{m}$ est la fréquence propre appelée la pulsation cyclotron et $x_0 = \frac{p_y}{eB}$ est le centre du système. Donc, l'équation (2.4.2) est une équation quantique pour un potentiel harmonique dont les niveaux d'énergies s'expriment comme suit :

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (2.4.3)$$

Ces états quantiques s'appellent les niveaux de Landau. Ils sont identiques à ceux de l'équation (2.3.3) pour les niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique simple. Ces niveaux expriment les états quantiques d'une particule chargée soumise à un champ magnétique B tournant autour d'un centre x_0 à une fréquence angulaire ω_c . Ce résultat est valide pour un espace-temps euclidien comme pour un espace-temps de Minkowski [3]. Pour la suite, on partira de ce développement pour obtenir les corrections à ces niveaux de Landau dans des espace-temps courbes dans les troisième et quatrième articles.

2.4.2. Les niveaux de Landau dans l'espace-temps de Minkowski sphérique par l'équation de Klein-Gordon

On commence par utiliser l'équation de Klein-Gordon exprimée par l'équation (2.2.17) pour l'espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques. En plus, on prend comme quadripotentiel covariant A_μ ayant comme unique composante non-nulle $A_\phi = \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2}$ pour un système soumis à un champ magnétique B constant en direction $+\hat{z}$. On suppose encore

ici que la particule test évolue dans le plan xy faisant un mouvement circulaire. L'équation (2.2.17) s'exprimera alors comme suit si $q = e$:

$$\left[\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(-i \partial_\phi - \frac{eBr^2 \sin^2 \theta}{2\hbar} \right)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0. \quad (2.4.4)$$

Si on utilise comme ansatz $\psi = \exp(-iEt/\hbar) \exp(i\ell\phi) R(r, \theta)$, alors l'équation (2.4.4) se simplifie davantage et donnera comme expression :

$$\left[-\frac{E^2}{c^2} - \hbar^2 \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \hbar^2 \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \hbar^2 \left(\ell - \frac{eBr^2 \sin^2 \theta}{2\hbar} \right)^2 + m^2 c^2 \right] R(r, \theta) = 0. \quad (2.4.5)$$

Pour une approximation non-relativiste de l'équation (2.4.5), on pose que l'énergie de la particule est $E = mc^2 + \mathcal{E}$ et que l'on est sur le plan xy (i.e. $\theta = \frac{\pi}{2}$). On ajoute aussi dans ce cas que $\mathcal{E} \ll mc^2$. L'équation (2.4.5) devient sous ces approximations :

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (2.4.6)$$

Afin de résoudre facilement l'équation (2.4.6), on pose comme solution l'ansatz suivant :

$$R(\rho) = \rho^\ell v(\rho) \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar} \rho^2\right) \quad (2.4.7)$$

L'équation (2.4.6), en mettant $v'(\rho) = \frac{dv}{d\rho}$, $v''(\rho) = \frac{d^2v}{d\rho^2}$ et en utilisant l'équation (2.4.7), se transforme en :

$$\rho v''(\rho) + (2\ell + 1 - \beta \rho^2) v'(\rho) + (\alpha - \beta) \rho v(\rho) = 0, \quad (2.4.8)$$

où $\alpha = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$ et $\beta = \frac{eB}{\hbar}$. Ensuite, en faisant le changement de variable $z = \frac{\beta \rho^2}{2}$, l'équation (2.4.8) devient de la forme canonique suivante [21] :

$$z v''(z) + (l + 1 - z) v'(z) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \right) v(z) = 0. \quad (2.4.9)$$

L'équation (2.4.9) respecte la forme $z v'' + (b' - z) v' - a' v = 0$. Cette dernière est appelée l'équation différentielle hypergéométrique confluyente et possède comme solution générale la forme suivante :

$$v(z) = A {}_1F_1(a'; b'; z) + A' z^{1-b'} {}_1F_1(a' - b' + 1; 2 - b'; z), \quad (2.4.10)$$

où ${}_1F_1(a'; b'; z)$ est la fonction hypergéométrique confluyente, soit une fonction de Kummer [21]. La définition des fonctions de Kummer ainsi que les intégrales impliquant celles-ci sont détaillées à l'annexe A. On a ici deux constantes d'intégration A et A' ainsi que les constantes

$a' = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta}$ et $b' = \ell + 1$. Toutefois, la solution en $z^{1-b'} {}_1F_1(a' - b' + 1; 2 - b'; z)$ dans l'équation (2.4.10) diverge à l'origine (i.e. $r = 0$) pour tout nombre azimutal $0 \leq \ell$. Donc, l'équation (2.4.10) se simplifie grandement et donnera comme équation (2.4.7) la solution spécifique :

$$R(\rho) = A\rho^\ell \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar}\rho^2\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta}; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right). \quad (2.4.11)$$

La solution décrite par l'équation (2.4.11) diverge exponentiellement si $\rho \rightarrow \infty$. Pour contrer cela, on doit absolument imposer la condition [21, 27] :

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} = -n. \quad (2.4.12)$$

Avec la condition (2.4.12), l'équation (2.4.11) devient :

$$R(\rho) = A\rho^\ell \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right), \quad (2.4.13)$$

où la fonction hypergéométrique confluyente devient un polynôme de degré fini.

L'équation (2.4.12) donne la condition sur les niveaux de Landau :

$$\alpha = \beta(2n + 1). \quad (2.4.14)$$

On remplace α et β par leur valeurs respectives pour obtenir les niveaux de Landau classiques :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar eB}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.4.15)$$

Ces niveaux sont en fait dégénérés, car il y a l'existence du nombre quantique azimutal ℓ qui donne de la liberté à la particule. On utilisera fréquemment les équations (2.4.13) et (2.4.15) dans les troisième, quatrième et sixième articles afin d'obtenir les corrections en énergies aux niveaux de Landau conventionnels.

2.5. Les différentes corrections au potentiel newtonien

Pour mieux comprendre le contenu des cinquième, sixième et septième articles, il faut faire un certain rappel des différents types d'interactions gravitationnelles proposées dans la littérature en général. Dans les articles mentionnés ci-dessus, on propose certaines expériences bien précises qui pourraient permettre de vérifier certaines de ces théories. Voici donc un rappel des principales déviations possibles au potentiel newtonien pur.

D'abord, il est connu dans la littérature que pour de grandes masses et vitesses, la relativité générale fournit de bonnes valeurs de corrections à la théorie newtonienne pour de grandes distances inter-masses [15]. Toutefois, pour les faibles champs gravitationnels, la relativité générale se ramène au potentiel newtonien classique qui est exprimé par [15, 16] :

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (2.5.1)$$

sans la moindre déviation de la puissance inverse, et ce même pour de faibles distances de séparation entre les deux masses en interaction.

Toutefois, plusieurs modèles de gravitations modifiées [14], d'unification des forces fondamentales et de théories plus évoluées prédisent des déviations par rapport à la gravitation newtonienne [17, 28, 29, 30, 31]. Trois grandes alternatives de départ ont été élaborées et étudiées dans les ouvrages.

2.5.1. Potentiels de type Yukawa

La première de toutes les alternatives est le potentiel de type Yukawa. Le potentiel de Yukawa original a d'abord été élaboré dans le but de mieux expliquer les forces nucléaires de cohésion à l'intérieur des noyaux atomiques [5]. On associe souvent ce potentiel à l'interaction forte.

Dans la littérature en gravitation, certaines expériences s'effectuent via un potentiel très similaire à celui de Yukawa à l'origine. On décrit ce type de gravitation par un potentiel gravitationnel newtonien exprimé par l'équation (2.5.1) comportant en plus un terme de déviation de type Yukawa comme suit [14] :

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} (1 + \alpha_Y \exp(-r/\lambda_Y)). \quad (2.5.2)$$

Le premier terme de l'équation (2.5.2) est le terme newtonien tel qu'exprimé par l'équation (2.5.1) alors que le second terme est la correction de type Yukawa. La constante α_Y est sans dimension et représente l'amplitude de la déviation par rapport à la gravitation de Newton. Cette constante est souvent qualifiée d'intensité de la cinquième force. Cette constante peut dépendre de la composition baryonique des masses impliquées dans le processus associé à cette interaction. Dans ce cas, le principe d'équivalence en relativité générale est violé. Ensuite, le paramètre λ_Y possède les dimensions d'une longueur et représente l'échelle dimensionnelle de cette cinquième force. C'est toutefois la petitesse de ce paramètre apparaissant au dénominateur de l'exponentielle qui rend difficile la mesure et la vérification expérimentale des effets de cette correction de type Yukawa. Cette correction exponentielle décroissante sera de plus en plus faible selon la distance r de séparation inter-masses. En fait, λ_Y possède des contraintes dépendantes de α_Y pour la gravitation à courtes échelles de distances : λ_Y ne peut excéder 10 micro-mètres [28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Pour détecter ces déviations, il ne faudra pas que la distance inter-masses n'excède 1 micro-mètre. Conséquemment, en électromagnétisme, les forces de van der Waals et de Casimir vont rendre difficile les expériences de gravitation en laboratoire avec ces précisions afin de pouvoir distinguer ces forces par rapport aux forces purement gravitationnelles. Ce type de problème apparaît aussi pour les expériences gravitationnelles en accélérateur de particules. En effet, les trois autres forces fondamentales dominant par rapport à la gravité pour de courtes échelles de distance. On se réfèrera alors à une proposition de mesurer les déviations

de la gravitation newtonienne que l'on verra au troisième article basées sur les corrections dues à la gravitation aux niveaux de Landau.

Dans plusieurs articles présentés dans cette thèse, on partira de l'équation (2.5.2) pour obtenir ce potentiel pour certains types de configuration de géométries circulaires à deux et trois dimensions. À partir de cette équation (2.5.2), on veut calculer un potentiel gravitationnel dû à une distribution continue de masses. À une distance x sur l'axe de symétrie d'un anneau de masse linéique de densité μ_1 et de rayon y , la forme du potentiel sera d'après l'équation (2.5.2) :

$$V_{Lin}^{N+Y}(x, y) = -2\pi G\mu_1 y (x^2 + y^2)^{-1/2} \left(1 + \alpha_Y \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda_Y\right) \right). \quad (2.5.3)$$

En intégrant l'équation (2.5.3) sur les différents anneaux concentriques, c'est-à-dire par rapport à y , formant ainsi un disque, on obtient facilement le potentiel gravitationnel d'un disque uniforme. On obtient le potentiel à une distance x sur l'axe de symétrie du centre du disque de rayon y et de densité surfacique de masse σ_1 . On a comme expression :

$$V_{Surf}^{N+Y}(x, y) = -2\pi G\sigma_1 \left[\sqrt{x^2 + y^2} - x + \alpha_Y \lambda_Y \left(\exp(-x/\lambda_Y) - \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda_Y\right) \right) \right]. \quad (2.5.4)$$

Utilisant cette dernière expression pour un disque uniforme, on peut obtenir facilement le potentiel total le long de l'axe de symétrie produit par un cylindre de rayon a , de densité de masse volumique ρ_1 et de longueur $2R$, le tout à une distance x du milieu de la longueur du cylindre. Il suffit d'intégrer le potentiel du disque exprimé par l'équation (2.5.4) sur la distribution contenant les différents disques formant le cylindre. Le tout est fait en détail dans la section B.1 de l'annexe B. Le résultat du potentiel d'un cylindre est donné par l'équation (B.1.3) de l'annexe B. En effectuant le même type de démarche pour une sphère, on obtient ainsi le potentiel à l'intérieur de la sphère de rayon R et de densité massique ρ_1 à une distance x du centre de celle-ci. Cela donne alors le potentiel $V_S(x)$ tel qu'exprimé par l'équation (B.1.7) en annexe B. Bref, toutes ces équations seront fortement utiles à partir du cinquième article pour obtenir une multitude de quantités physiques mesurables expérimentalement.

2.5.2. Potentiels de type puissances inverses

Il existe d'autres types de déviations de la gravitation newtonienne qui sont appelées les potentiels en puissances (i.e. "power-law potentials"). Ces potentiels gravitationnels ont été bien étudiés dans des ouvrages [28, 29, 30, 31]. Cela même si ces types de potentiels gravitationnels ont été moins vérifiés par rapport au cas de type Yukawa [29]. Le premier type de potentiel de puissance inverse est décrit par :

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right). \quad (2.5.5)$$

Le type de potentiel décrit par l'équation (2.5.5) provient de l'extension du modèle standard en physique des particules (Modèle de Glashow-Salam-Weinberg). D'une manière pratique, on a choisi une forme de ce potentiel avec le paramètre r_0 ayant la dimension d'une longueur [29]. Ce paramètre décrirait aussi l'intensité et l'échelle d'une cinquième force fondamentale, équivalente ainsi à la déviation de type Yukawa. Cette dépendance au modèle, et donc la dépendance en composition, mènent aussi à la violation du principe d'équivalence faible en relativité générale. La puissance n est un entier positif. Dans les scénarios de dimensions spatiales supplémentaires (4 et plus), on considère cette puissance n inférieure ou égale à 6, et cette dernière est fixe selon le nombre de dimensions spatiales supplémentaires du système physique en question. Dans ce cas, le terme constant r_0^n sera un paramètre de composition indépendant.

De manière pratique, pour les mêmes raisons que pour le potentiel de type Yukawa, on veut obtenir pour des géométries circulaires les potentiels de type puissances inverses à deux ou trois dimensions. Pour y parvenir, on se sert du terme de correction de l'équation (2.5.5) pour avoir le potentiel gravitationnel sur un anneau de rayon y , de densité massique linéaire μ_1 , situé à une distance x du centre sur l'axe de symétrie. On obtient un potentiel de correction de type :

$$V_{Lincorr}^n(x, y) = -2\pi G\mu_1 r_0^n \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2.5.6)$$

En intégrant cette expression (2.5.6) par rapport à y sur les différents anneaux concentriques pour former un disque, on obtient un potentiel de correction pour une particule à une distance x sur l'axe de symétrie du centre du disque de densité massique surfacique uniforme σ_1 et de rayon y . On obtient un résultat pour $n = 1$ donnant comme potentiel :

$$V_{Surfcorr}^{n=1}(x, y) = -2\pi G\sigma_1 r_0 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}/x\right). \quad (2.5.7)$$

Pour $n \neq 1$, on obtient un potentiel de la forme :

$$V_{Surfcorr}^{n \neq 1}(x, y) = -\frac{2\pi G\sigma_1 r_0^n}{(1-n)} \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1-n}{2}} - x^{1-n} \right]. \quad (2.5.8)$$

Utilisant les expressions (2.5.7) et (2.5.8) de potentiel gravitationnel pour un disque massif, on peut obtenir le potentiel d'un cylindre de densité uniforme ρ_1 , de rayon a et de longueur $2R$ ressenti à une distance x du centre par une particule. Utilisant la même stratégie, on peut faire le même type de démarche avec les potentiels d'un disque massif pour obtenir le potentiel gravitationnel d'une sphère massive de rayon R et de densité ρ_1 à une distance x de son centre. Puisque dans une des deux expressions de potentiel de disque, on a le facteur $1 - n$, on doit effectuer les démarches pour les six cas allant de $n = 1$ jusqu'à $n = 6$ inclusivement. Les potentiels de corrections de puissance inverse pour un cylindre ou une sphère pour différentes valeurs de n sont exposés par les équations (B.2.1) à (B.2.30) à la

section (B.2) de l'annexe B. Bref, toutes ces équations de potentiels seront fortement utiles à partir du cinquième article pour obtenir une multitude de quantités physiques mesurables expérimentalement.

Toutefois, il existe un second type de potentiel de puissance, utilisé dans la littérature et provenant de modèles ayant des dimensions spatiales supplémentaires à trois, décrit par l'équation :

$$U(r) = -\frac{G_n m_1 m_2}{r^{n+1}}. \quad (2.5.9)$$

La constante gravitationnelle G_n dépend du nombre n des dimensions spatiales supplémentaires du système physique. Pour la limite des faibles énergies, cette constante G_n se réduit à G . Cette équation (2.5.9) est supposée valide pour des distances r inférieures aux échelles des dimensions spatiales supplémentaires (4 et plus). Souvent, l'équation (2.5.9) est ramenée à la forme plus générale exprimée par l'équation (2.5.5) pour le côté pratique [29]. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on considèrera uniquement l'équation (2.5.5) dans les articles de cette présente thèse pour les cas de potentiels de puissances inverses.

Chapitre 3

Introduction au premier article : Les transitions quantiques induites par la gravitation

Le premier article de cette thèse aborde les questions concernant les états ainsi que les transitions quantiques induites par la force gravitationnelle. Cet article s'intitule "Gravitationally induced quantum transitions" et ce dernier est publié dans Physical Review D [44]. Mais avant de présenter l'article, on doit d'abord présenter la théorie concernant les états quantiques sous la gravité terrestre, car on s'en sert abondamment dans l'article.

3.1. Les états quantiques des neutrons ultra-froids sous la gravité terrestre et les expériences passées

3.1.1. Les travaux passés sur les neutrons de type UCN

Les états quantiques de particules soumises à la gravité terrestre sont connus et observés depuis près de vingt ans [45, 46]. Cela représente un progrès dans la compréhension de l'ensemble des effets de la gravité sur les états quantiques.

Il existe des états quantiques pour tout objet quantique soumis à la gravité terrestre. On peut utiliser un système de neutrons soumis à la gravité terrestre, car ces particules ne subiront pas d'autres types d'interaction. Ces neutrons ont de très faibles énergies et sont considérés comme ultra-froids à cause de cette faible énergie. Comme ceux-ci ne ressentent que la gravité terrestre ; cela explique la faiblesse de leurs énergies. Un système de neutrons donnera des états quantiques soumis au potentiel gravitationnel terrestre. On a des valeurs d'énergies de l'ordre du pico-électron-volt (peV) [46]. Il y a eu des mesures expérimentales sur ces états quantiques des systèmes de neutrons [46, 47].

Il y a eu les travaux de Nesvizhevsky au début des années 2000 qui ont permis de connaître avec précision les états quantiques des neutrons dans un potentiel gravitationnel terrestre [45, 46, 47]. On a effectué ces expériences en étudiant le mouvement des neutrons dans une

enceinte avec des miroirs et un capteur au dessus de celui-ci. On a alors obtenu les différents niveaux d'énergies.

Il y a eu ensuite les travaux réalisés par Abele [48]. Dans ces travaux, on séparait les neutrons entre deux états quantiques en faisant vibrer une base sur laquelle reposent les neutrons à l'état fondamental. On induit par ces vibrations une sorte de transition quantique entre l'état fondamental et les deux premiers états excités. La fréquence d'oscillation entre ces états due à la vibration de la base est appelée la fréquence de Rabi. Cette méthode est aussi appelée la méthode de Ramsey [48, 49]. Cette expérience montre qu'il est possible d'induire des transitions quantiques entre les niveaux d'énergies des neutrons.

On ajoute aussi les expériences Q-bounce où on a des neutrons dans un champ gravitationnel qui réfléchissent sur des parois et qui font des "chutes" dans une enceinte fermée [50]. On mesurait entre autres les chûtes de ces neutrons ultra-froids dans un champ gravitationnel terrestre. Ces neutrons ne passent pas à travers les parois à cause de leur faibles énergies. Celles-ci sont de l'ordre de quelques centaines de nano-electron-volt (neV). Les neutrons ont une longueur d'onde de de Broglie élevée et ces derniers se feront repousser par les noyaux atomiques des parois d'un tel système. Dans cette expérience, ces neutrons ultra-froids de très faibles énergies réfléchiront plutôt que de passer au travers de la paroi. Mais, pour être sensible à la force gravitationnelle, il faut que ces neutrons aient des énergies beaucoup plus faibles, soit de l'ordre du pico-electron-volt (peV).

Avec ces expériences, autant par les faibles niveaux d'énergie que par les résultats positifs observés expérimentalement sur les états quantiques : on en vient à imaginer théoriquement des transitions entre ces états. On peut provoquer des transitions entre les états d'énergies de ce système soumis à la gravité : on approche une masse externe perturbatrice qui engendre des transitions entre ces états. Cela constitue une expérience fictive : une considération théorique sur les transitions inter-états quantiques gravitationnelles.

Il serait bon de définir ce que sont ces neutrons ultra-froids (en anglais les Ultra-Cold Neutrons "UCN"). Dans ce premier article, les neutrons ultra-froids sont des neutrons dont la température est de l'ordre du milli-kelvin et d'énergie de l'ordre du pico-électron-volt. Avec une température de l'ordre du milli-kelvin, on obtient comme énergie pour les neutrons la valeur $k_B T = 8,6 \times 10^{-8}$ eV [51]. Tel que décrit dans Jenke et al., il y a eu des expériences qui ont menés à l'observation de transitions quantiques causées par la force gravitationnelle [49]. Ces transitions sont survenues en faisant vibrer une base à la fréquence de résonance du système. Ces vibrations engendrent des transitions quantiques entre l'état fondamental et les premiers niveaux excités. La vibration de cette base se fait à la fréquence de résonance du système quantique des neutrons. À cette fréquence de résonance, on peut observer ces transitions quantiques.

Dans ces expériences, les neutrons traversent une zone où il y a une base en granite polis et un scellé rugueux. Le neutron chûte le long de la surface polie dans la direction x et

grimpe jusqu'au scellé, il frappe ensuite ce dernier. Comme le scellé est rugueux, le neutron sera diffusé dans la direction y et celui-ci se retire de l'expérience. Seulement les neutrons avec une énergie et impulsion en z (hauteur) ainsi qu'une énergie et une impulsion en x resteront dans l'expérience [50, 52].

À cause de leur faibles énergies, les neutrons ultra-froids vont facilement être sensibles à la force gravitationnelle et cette dernière sera même comparable à leur énergie cinétique. On mesure donc les valeurs d'énergies suivantes pour les premiers niveaux : niveau fondamental 1, 41 peV ; deuxième niveau 2, 46 peV, etc...[47]. Dans plusieurs ouvrages, on considère les neutrons d'énergie de l'ordre du nano electron-volt comme ultra-froids. Par contre, les neutrons d'énergies de l'ordre du nano-eV ont une énergie cinétique beaucoup plus grande par rapport à l'énergie due à la gravité [45, 51, 53]. De cette manière, les neutrons d'énergies de l'ordre du neV ne seront pas considérés dans ce premier article de cette thèse.

3.1.2. Les états quantiques sous la gravité terrestre

On doit maintenant traiter mathématiquement et quantiquement le problème des états quantiques des neutrons évoluant sous la gravité terrestre. Dans beaucoup d'expériences, les neutrons ultra-froids sont confinés dans un espace relativement restreint en hauteur, la force gravitationnelle sera considérée comme constante. La raison en est que ce type d'expérience se déroule généralement à la surface de la terre. Donc, les neutrons seront plongés dans un potentiel linéaire en la hauteur z .

Pour traiter ce type de problème, nous avons besoin de l'équation de Schrödinger. De ce point de vue, l'équation de Schrödinger indépendante du temps sera de la forme de l'équation (2.1.6). De là, un système quantique avec différents états d'énergies sera exprimé sous la forme de l'équation (2.1.6) en mettant la hauteur z comme coordonnée spatiale. Cela donne l'équation suivante [45] :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + V(z) \psi(z) = E \psi(z). \quad (3.1.1)$$

Ici, z est la coordonnée en hauteur, m est la masse de la particule quantique et $V(z)$ est le potentiel dans lequel baigne le système quantique.

Dans le cas présent, on a un potentiel gravitationnel $V(z) = m_N g z$, car on étudie un système de neutrons dans le champ gravitationnel terrestre. Voici l'équation de Schrödinger décrivant le comportement quantique des neutrons ultra-froids (les UCNs) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_N} \frac{d^2}{dz^2} \psi_E(z) + m_N g z \psi_E(z) = E \psi_E(z). \quad (3.1.2)$$

L'équation (3.1.2) est exactement équivalente aux équation (3.1.1) et (2.1.6) qui donneront les fonctions spéciales d'Airy. La solution de cette équation (3.1.2) sera la suivante :

$$\psi_n(z) = \mathcal{N}_n Ai\left(\frac{z}{z_0} - \alpha_n\right), \quad (3.1.3)$$

où $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2gm_N^2}$ et les énergies sont exprimées par $E_n = m_N g z_0 \alpha_n$. Il apparaît à l'équation (3.1.3) une nouvelle classe de fonctions orthogonales, les fonctions d'Airy $Ai(u)$ et $Bi(u)$. Ces deux espèces de fonctions d'Airy sont les deux solutions possibles de l'équation (3.1.2). Les fonctions de première espèce $Ai(u)$ s'expriment fondamentalement sous forme intégrale [54, 55] :

$$Ai(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\eta^3}{3} + u\eta\right) d\eta \quad (3.1.4)$$

Pour ce qui est des fonctions d'Airy de seconde espèce $Bi(u)$, ce type de fonction divergera à partir d'une certaine valeur d'argument. Cela est clairement montré à la figure 1. On se concentre ici sur les fonctions de première espèce.

Les fonctions d'Airy de première espèce ont des zéros s'exprimant comme $z/z_0 = -\alpha_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Les premiers zéros de ce type de fonctions d'Airy sont : $-2, 33$; $-4, 09$; $-5, 52$; $-6, 78$;... On peut les observer sur la figure 1 pour la fonction de première espèce. À partir de la fonction d'onde décrite par l'équation (3.1.3), il y a translation de l'argument pour la condition frontière de type Dirichlet en $z = 0$ donnant $\psi_n(z = 0) = 0$ (voir équation (2.1.9)). C'est pour cette raison que le facteur $-\alpha_n$ apparaît dans la fonction d'Airy. La normalisation contenue dans l'équation (3.1.3) s'exprime comme suit [56] :

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{z_0 \int_{-\alpha_n}^\infty Ai(\eta)^2 d\eta}} = \frac{1}{\sqrt{z_0 Ai'(-\alpha_n)}}. \quad (3.1.5)$$

où $Ai'(z)$ est la dérivée première par rapport à l'argument z de la fonction d'Airy de première espèce.

On obtient donc comme solution de l'équation (3.1.2) des fonctions orthogonales entre elles pour chaque état quantique possible. On respecte ainsi les postulats de la mécanique quantique. Maintenant, on veut obtenir les états d'énergies de ce type de système. Par l'approximation de Bohr-Sommerfeld, on peut obtenir la fonction décrivant les états d'énergie de ce système [47]. Ce type d'approximation part de la condition de quantification suivante :

$$\oint p_z dz = 2\pi n \hbar. \quad (3.1.6)$$

Avec la conservation de l'énergie, on a que :

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_z^2}{2m_N} + m_N g z, \\ p_z &= \sqrt{2m_N (E - m_N g z)}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Les fonctions d'Airy de première et de seconde espèces ($Ai(x)$ et $Bi(x)$ respectivement) versus x

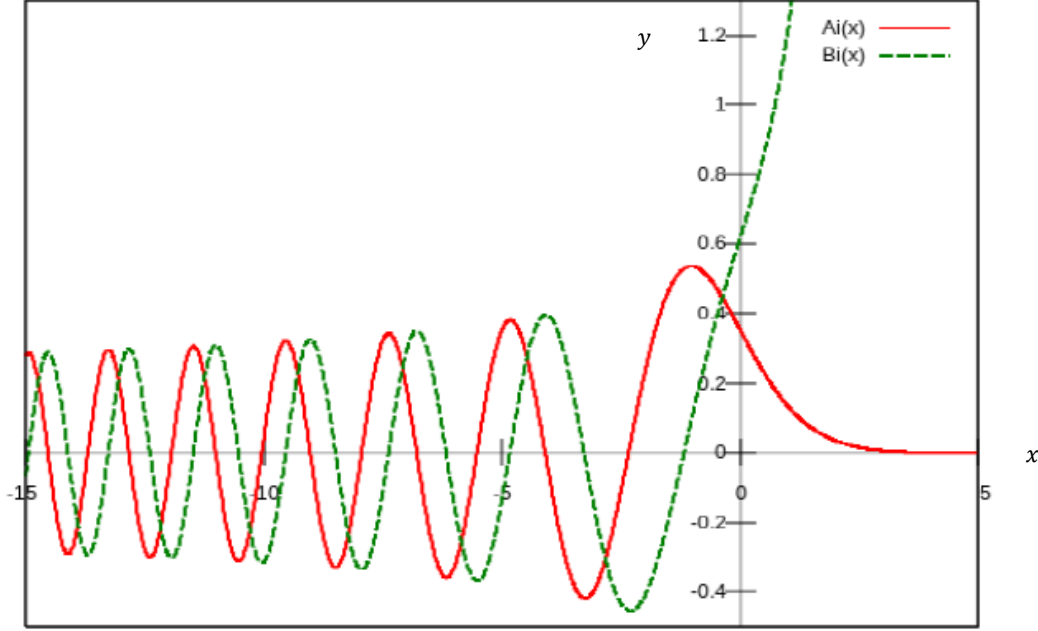


Figure 1. Graphe des fonctions d'Airy de première et de seconde espèce, $Ai(u)$ et $Bi(u)$, respectivement.

On substitue l'équation (3.1.7) dans l'équation (3.1.6), on obtient en tenant compte des fonctions d'Airy la relation :

$$2 \int_0^{E/m_N g} \sqrt{2m_N (E - m_N g z)} dz = \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \hbar. \quad (3.1.8)$$

En intégrant cette équation, on aboutit à la relation :

$$\frac{-2\sqrt{2m_N}}{3m_N g} [(E - m_N g z)^{3/2}]_0^{E/m_N g} = \pi \hbar \left(n - \frac{1}{4}\right). \quad (3.1.9)$$

La borne inférieure est $z = 0$. Donc, on isole la fonction E de la relation précédente pour avoir :

$$E_n = \left[\frac{3\hbar m_N g}{4\sqrt{2m_N}} \left(n - \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3} = \left[\frac{9\hbar^2 m_N g^2}{32} \left(n - \frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/3}. \quad (3.1.10)$$

En insérant les valeurs numériques des constantes \hbar , g et m_N , on obtient finalement les niveaux d'énergies de notre système soumis au champ gravitationnel terrestre avec l'unité

physique adéquate [47] :

$$E_n = 1,69 \left(n - \frac{1}{4} \right)^{2/3} \text{ peV.} \quad (3.1.11)$$

Selon l'équation (3.1.11), on a des niveaux d'énergies qui ne sont pas linéaires en n . Cela peut se voir avec la non-linéarité des oscillations qu'effectuent les fonctions d'Airy et donc ses zéros ne progresseront pas de manière linéaire. Les fonctions d'Airy $Ai(x)$ et $Bi(x)$ sont des fonctions oscillantes lorsque l'argument x est négatif [56]. Ce type de fonction sous la forme $Ai(x)$ (fonction d'Airy de première espèce) s'affaïsse et tend vers 0 du côté positif, tandis que la forme $Bi(x)$ (fonction d'Airy de seconde espèce) diverge à l'infini du côté positif. Les oscillations de ces deux types de fonction seront plus fortes près de zéro du côté négatif. Toutefois, l'amplitude diminue graduellement en allant vers $-x$ du côté négatif tout en oscillant. Il y a alors un déphasage entre les fonctions $Ai(x)$ et $Bi(x)$ [56]. Donc, les différences inter-états ne seront pas identiques entre-elles [47]. Cette considération est importante, car la stimulation d'une transition avec fréquence de résonance ne va stimuler qu'une seule transition entre une seule paire d'état.

3.2. Objectifs et méthodologie

L'objectif principal est de déterminer précisément la possibilité de mesurer des transitions quantiques induites par une perturbation gravitationnelle newtonienne entre les états quantiques d'UCN d'énergies de l'ordre du peV soumis à la gravité terrestre. Lorsqu'on déterminera les probabilités de transitions des perturbations causées par des masses sphériques et cylindriques, on divisera ces quantités par la fonction de résonance pour obtenir les préfacteurs. De là, on utilise la géométrie appropriée ainsi que la densité de neutron présent pour obtenir la quantité de neutrons pouvant être impliqués dans le système quantique. Plus spécifiquement, on désire connaître la quantité minimale d'UCN nécessaire, dans chaque cas de configuration géométrique, pour être assuré d'observer au moins une transition quantique dans une expérience en laboratoire.

Pour y arriver, on procédera au calcul de probabilités de transitions quantiques à l'aide de la méthode décrite à la section 2.1.3. On fera cet exercice pour une perturbation causée par une masse sphérique ainsi que pour une perturbation causée par une masse cylindrique de longueur finie. On a vu que dans ces deux cas, on peut transformer ces potentiels de perturbation sous la forme de l'équation (2.1.19) via un développement en séries de Taylor au premier ordre des potentiels de perturbations. On peut aussi effectuer le même processus via un développement en séries de Fourier en prenant le premier terme oscillant de cette série.

Dans les deux cas, on obtient un produit d'une fonction spatiale avec un cosinus. Une fois cette étape complétée, on applique l'équation (2.1.17) pour obtenir les expressions de la

matrice de transition pour chaque type de perturbation. Une fois cette dernière obtenue, on le substitue dans l'équation (2.1.23) pour obtenir la forme finale de la probabilité de transition pour chacune des perturbations. Il ne faut pas oublier que l'on veut obtenir les transitions inter-états lorsqu'il y a résonance. On doit alors poser que la fréquence de l'oscillation de la perturbation doit être équivalente à la fréquence naturelle provenant de la différence entre les énergies des deux niveaux où il y a transition. C'est ainsi que ces probabilités pour chaque type de perturbation contiennent la fonction de résonance ainsi que la matrice de transition.

On applique cette méthode en utilisant les fonctions d'Airy normalisées (équation (3.1.3)) dans l'équation (2.1.17) pour l'obtention de la matrice de transition. On a décrit en détail l'origine de cette classe de fonctions propres à la section 3.1.1. On a eu besoin d'obtenir les intégrales impliquant les fonctions d'Airy dans l'ouvrage de Vallée et Soares pour obtenir les matrices de transition pour les probabilités de transition [56].

Une fois les probabilités de transitions obtenus, on calcule numériquement les préfacteurs pour des transitions entre le niveau fondamental $m = 1$ et le premier niveau excité $n = 2$ en utilisant les matrices de transitions. Il ne faut pas oublier que l'équation (2.1.23) contient la fonction de résonance telle qu'exprimée par l'équation (2.1.22), ce qui fait qu'on obtient les préfacteurs simplement en divisant l'équation (2.1.23) par l'équation (2.1.22). On calcule ensuite numériquement ces quantités pour certains matériaux massifs et pour les types de perturbations traitées ici.

Une fois ces préfacteurs obtenus, on désire connaître le nombre minimal d'UCN nécessaire pour l'observation de ces transitions. On multiplie les préfacteurs obtenus par le temps équivalent à deux demi-vies du neutron en approximant l'équation (2.1.22). On obtient ainsi la probabilité totale de transitions à long terme. De ces quantités, on déduit le nombre minimal de neutrons UCN nécessaire pour effectuer une expérience en laboratoire en utilisant la distribution de Poisson.

À la fin de l'article, on détaille un peu plus sur les possibilités existantes de réalisation de ce type d'expérience. On évoque les différents laboratoires dans le monde se spécialisant dans ce type d'expériences impliquant des neutrons. On en conclut que les meilleurs laboratoires pouvaient effectuer des expériences avec quelques milliers d'UCN. On arrive à la conclusion qu'il faudra perfectionner ce type d'installation afin d'effectuer les expériences avec les quantités prédites dans l'article. Avec toute cette démarche, on a atteint l'objectif de pouvoir connaître la quantité d'UCN nécessaires pour l'observation de transitions quantiques induites gravitationnellement.

3.3. Principaux résultats

Comme mentionné et expliqué à la section 3.2, on obtient les préfacteurs pour des transitions du niveau fondamental $n = 1$ vers le premier état excité $n = 2$ pour les perturbations

sphérique et cylindrique via la relation suivante :

$$\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right] = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \psi_2 | W(z) | \psi_1 \rangle|^2. \quad (3.3.1)$$

On utilisera dans toutes les situations les paramètres physiques présentés au tableau 1.

| G (J m kg ⁻²) | \hbar (J s) | m_N (kg) | g (m/s ²) | z_0 (10 ⁻⁶ m) | $\alpha_2 - \alpha_1$ | $\Delta\zeta$ (m) |
|-----------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------|
| $6,67 \times 10^{-11}$ | $1,054 \times 10^{-34}$ | $1,67 \times 10^{-27}$ | 9,8 | 5,874 | 1,64 | 0,005 |

Tableau 1. Paramètres physiques pour obtenir les probabilités de transitions et les densités de neutrons.

3.3.1. Perturbation par une masse sphérique

La perturbation par une sphère solide de masse M , de densité ρ et un rayon ζ_0 s'approchant à une distance $\zeta(t) = \zeta_0 + \Delta\zeta + \Delta\zeta \cos(\omega t)$ des neutrons ultra-froids s'exprime comme suit :

$$W(t, z) = \frac{Gm_N M}{\zeta(t) - z} \approx W_1(z) - \Delta\zeta W_2(z) \cos(\omega t). \quad (3.3.2)$$

Dans l'équation (3.3.2), on obtient que $W_1(z) = \frac{Gm_N M}{(\zeta_0 + \Delta\zeta - z)}$ et $W_2(z) = \frac{Gm_N M}{(\zeta_0 - z)^2}$. On approxime au premier ordre en $\Delta\zeta$, car ce dernier est faible par rapport aux autres paramètres. C'est pour cette raison que ce $\Delta\zeta$ n'est pas présent dans les expression de $W_1(z)$ et $W_2(z)$; cela revient à une approximation du deuxième ordre en $\Delta\zeta$. Seulement le potentiel $W_2(z)$ donne des transitions quantiques.

En effectuant à la lettre la démarche décrite à la section 3.2, on obtient pour la perturbation décrite par l'équation (3.3.2) la forme suivante de l'équation (3.3.1) :

$$\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{12}, t)} \right]_{Sph} = \left(\frac{2GMm_N z_0 \Delta\zeta}{\zeta_0^3 \hbar (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right)^2. \quad (3.3.3)$$

La probabilité de transition pour la perturbation sphérique sera obtenue en multipliant l'équation (3.3.3) par l'équation (2.1.22) pour $m = 1$ et $n = 2$. Ce résultat est applicable pour des neutrons à proximité de la masse perturbatrice sphérique.

Le nombre total de neutrons sous la masse sphérique est donné par la relation suivante :

$$\mathcal{N}_N = \left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right]_{Sph} \mathbf{n} (\Delta\zeta)^2 \text{s}^{-2}, \quad (3.3.4)$$

où \mathbf{n} est la densité volumique de neutrons. À l'aide de cette équation (3.3.4), on peut déterminer la quantité de neutrons nécessaire pour observer des transitions entre les niveaux 1 et 2 pour une perturbation sphérique.

Numériquement, en utilisant les données du tableau 1 pour quelques matériaux de forte densité massique, on obtient au tableau 2 les résultats des équations (3.3.3) et (3.3.4) ($M = \frac{4\pi\rho\zeta_0^3}{3}$).

| Matériau | ρ (10^4kg/m^3) | ζ_0 (m) | M (kg) | $\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)}\right]_{Sph}$ (s^{-2}) | \mathcal{N}_N ($\mathbf{n}(\Delta\zeta)^2\text{s}^{-2}$) |
|-----------|--------------------------------|---------------|----------|--|--|
| Osmium | 2,26 | 0,05 | 11,8 | $4,80 \times 10^{-12}$ | $4,80 \times 10^{-12}$ |
| Or | 1,91 | 0,05 | 10,0 | $3,43 \times 10^{-12}$ | $3,43 \times 10^{-12}$ |
| Acier/fer | 1,00 | 0,05 | 5,2 | $9,4 \times 10^{-13}$ | $9,4 \times 10^{-13}$ |

Tableau 2. Valeurs de préfacteurs de transition et du nombre de neutrons pour une perturbation sphérique.

3.3.2. Perturbation par une masse cylindrique

Pour une perturbation par un cylindre de masse M , de longueur L , de densité massique linéaire M/L et de rayon ζ_0 , le potentiel de perturbation sera le suivant :

$$W_{cyl} = \frac{GMm_N}{L} \ln \left(\frac{\zeta_0 + \Delta\zeta - z + \Delta\zeta \cos(\omega t)}{\zeta_0} \right). \quad (3.3.5)$$

Par un développement en séries de Taylor ou encore en séries de Fourier, on obtient un potentiel sous la forme de l'équation (2.1.19)

$$W_{cyl}(z, t) = \frac{GMm_N\Delta\zeta}{L(\zeta_0 - z)} \cos(\omega t) = W_{cyl}(z) \cos(\omega t). \quad (3.3.6)$$

En effectuant la démarche décrite à la section 3.2, on aboutit à la forme suivante de l'équation (3.3.1) à partir de l'équation (3.3.6) :

$$\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right]_{Cyl} = \left(\frac{GMm_N z_0 \Delta\zeta}{L\zeta_0^2 \hbar (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right)^2. \quad (3.3.7)$$

La probabilité de transition pour la perturbation cylindrique sera obtenue en multipliant l'équation (3.3.7) par l'équation (2.1.22) pour $m = 2$ et $n = 1$. Ce résultat est applicable pour des neutrons à proximité de la masse perturbatrice cylindrique.

Le nombre total de neutrons sous la masse cylindrique sera :

$$\mathcal{N}_N = \left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right]_{Cyl} \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 \text{s}^{-2} \left(\frac{L}{\Delta\zeta} \right). \quad (3.3.8)$$

En utilisant les données présentées au tableau 1, on obtient les résultats des équations (3.3.7) et (3.3.8) pour les préfacteurs et la quantité de neutrons au tableau 3 ($\frac{M}{L} = \pi\rho\zeta_0^2$).

| Matériau | ρ (10^4kg/m^3) | ζ_0 (m) | $\frac{M}{L}$ (kg/m) | $\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21},t)}\right]_{Cyl}$ (s^{-2}) | $\mathcal{N}_N \left(\mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 \text{s}^{-2} \left(\frac{L}{\Delta\zeta} \right) \right)$ |
|-----------|--------------------------------|---------------|----------------------|---|---|
| Osmium | 2,26 | 0,05 | 177,5 | $6,75 \times 10^{-13}$ | $6,75 \times 10^{-13}$ |
| Or | 1,91 | 0,05 | 150,0 | $4,82 \times 10^{-13}$ | $4,82 \times 10^{-13}$ |
| Acier/fer | 1,00 | 0,05 | 78,5 | $1,32 \times 10^{-13}$ | $1,32 \times 10^{-13}$ |

Tableau 3. Valeurs de préfacteurs de transition et de nombre de neutrons pour une perturbation cylindrique.

3.3.3. Perturbation par plaque massive

Ce type de perturbation ne donne pas de transitions quantiques, car le potentiel de perturbation d'une plaque massive est le suivant :

$$W_{surf}(z, t) = \frac{GMm_N}{A} |\zeta_0 + \Delta\zeta - z + \Delta\zeta \cos(\omega t)|, \quad (3.3.9)$$

où A est l'aire de la plaque. En effet, comme l'équation (3.3.9) n'est pas de la forme de l'équation (2.1.19), la perturbation par plaque massive ne donne pas de transition quantique.

3.3.4. Nombre de neutrons UCN nécessaires pour l'expérience

En comparant les équations (3.3.3) et (3.3.7) pour les préfacteurs, les équations (3.3.4) et (3.3.8) pour la quantité de neutrons ainsi que les résultats des tableaux 2 et 3, on arrive à la conclusion qu'il est plus pratique d'utiliser la masse perturbatrice cylindrique plutôt que la masse sphérique. La raison en est que la masse sphérique ne permet que des expériences avec un faible nombre de neutron à cause de l'espace restreint dû à la portée de la perturbation. Or, avec la géométrie cylindrique, on pourra réaliser des expériences avec un nombre beaucoup plus grand de neutrons ultra-froids, à cause du facteur $\frac{L}{\Delta\zeta}$ présent dans les résultats. Le cylindre peut être de longueur infinie comparée à l'espace occupé par ces neutrons.

Un autre résultat intéressant, le ratio entre les préfacteurs obtenus aux tableaux 2 et 3 pour les géométries cylindrique et sphérique donne¹ :

$$\frac{\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right]_{Cyl} \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 s^{-2} \left(\frac{L}{\Delta\zeta} \right)}{\left[\frac{P_{12}(t)}{f(\omega_{21}, t)} \right]_{Sph} \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 s^{-2}} = 0,141 \frac{L}{\Delta\zeta}. \quad (3.3.10)$$

Cette équation (3.3.10) dépend de la longueur du cylindre L et donc le ratio peut être grand comme cette longueur L . Ce résultat est valide pour tous les matériaux utilisés aux tableaux 2 et 3. Donc, le rapport entre le nombre de neutrons excités par un cylindre versus le nombre de neutrons excités par la masse sphérique sera :

$$\frac{\mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 \left(\frac{L}{\Delta\zeta} \right)}{\mathbf{n}(\Delta\zeta)^2} = \frac{L}{\Delta\zeta}. \quad (3.3.11)$$

On fait une comparaison au tableau 4 entre les différentes valeurs de probabilités de transitions totales sur deux demi-vies du neutron ($\tau = 880$ sec) pour les perturbations décrites par les équations (3.3.2) et (3.3.6). On utilise les préfacteurs obtenus aux tableaux 2 et 3.

| Matériau | $P_{12}(t = 2\tau)$ Sphérique | $P_{12}(t = 2\tau)$ Cylindrique |
|-----------|-------------------------------|---------------------------------|
| Osmium | $1,49 \times 10^{-5}$ | $2,09 \times 10^{-6}$ |
| Or | $1,06 \times 10^{-5}$ | $1,49 \times 10^{-6}$ |
| Acier/fer | $2,91 \times 10^{-6}$ | $4,10 \times 10^{-7}$ |

Tableau 4. Probabilités totales de transitions sur deux demi-vies des neutrons ultra-froids.

En utilisant les résultats du tableau 4, on présente au tableau 5 les nombres minimaux d'UCN nécessaires pour effectuer des expériences en laboratoire. Ces résultats servent à mieux comparer avec les possibilités actuelles des différents laboratoires pouvant effectuer des expériences utilisant les UCNs.

3.4. Les contributions

Mes contributions

- Calculs de perturbations et de probabilités de transitions pour tous les cas (sphérique, cylindrique et plaque) ;

1. Erratum : Dans le premier article publié dans Phys. Rev. D, on avait fait le ratio entre les préfacteurs de la perturbation cylindrique pour l'acier et de la perturbation sphérique pour l'or : on arrivait à $3,85 \times 10^{-2} \frac{L}{\Delta\zeta}$. Cela fut une erreur de calcul qui s'est glissée. On a maintenant rectifié le tout en calculant les ratios pour le même matériau.

| | | |
|--------------|-----------|-------------|
| Perturbation | Sphérique | Cylindrique |
| Nombre d'UCN | 10^5 | 10^6 |

Tableau 5. Nombres d'UCN minimaux pour effectuer des expériences.

- Établissement des données pour les préfacteurs pour de possibles expériences. ;
- Propositions de paramètres d'expériences possibles ;
- Certaines conclusions et références.
- Suggéré des données réalistes pour les résultats.

Les contributions de mon directeur

M.B. Paranjape, mon directeur de l'époque, a initié le projet et a effectué certaines vérifications et a ajouté des interprétations.

Premier article.

Gravitationally induced quantum transitions

par

Alexandre Landry¹ et Manu B. Paranjape²

(¹) Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7

Cet article a été soumis dans Physical Review D (Publié en 2016 [[44](#)]).

Gravitationally induced quantum transitions

A. Landry* and M. B. Paranjape^{†‡}

*Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal,
C.P. 6128, succursale centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7*

In this paper, we calculate the probability for resonantly inducing transitions in quantum states due to time-dependent gravitational perturbations. Contrary to common wisdom, the probability of inducing transitions is not infinitesimally small. We consider a system of ultracold neutrons, which are organized according to the energy levels of the Schrödinger equation in the presence of the Earth's gravitational field. Transitions between energy levels are induced by an oscillating driving force of frequency ω . The driving force is created by oscillating a macroscopic mass in the neighbourhood of the system of neutrons. The neutrons lifetime is approximately 880 sec while the probability of transitions increase as t^2 . Hence, the optimal strategy is to drive the system for two lifetimes. The transition amplitude then is of the order of 1.06×10^{-5} , and hence with a million ultracold neutrons, one should be able to observe transitions.

PACS numbers: 04.80.Cc, 03.65.Ta

I. INTRODUCTION

In this paper we show that gravitationally induced quantum transitions are in fact easily conceivable, readily calculable and potentially observable. The transitions are to be induced through resonant activation by an external perturbing, oscillatory gravitational source. We consider a quantum system of ultra-cold neutrons [1]. The neutrons are organized according to the quantum energy levels of a particle in the earth's (uniform) gravitational field. The energy levels of this system are well understood and have already been subject to much experimentation [2–6] and the system exhibits the first direct observation of gravitational effects on a quantum system. The energy levels of this system are spaced nonlinearly. Therefore, selecting a particular energy difference picks out exactly two levels. We propose to excite the system with an external, spherical body of mass M placed as near as possible to the system of neutrons. The body will oscillate at the exact frequency corresponding to a transition between two of the energy levels of the system of neutrons. At resonance, the transition amplitude experiences a significant increase when compared to off-resonance driving frequencies.

II. ULTRA-COLD NEUTRONS IN A GRAVITATIONAL FIELD

Ultra-cold neutrons correspond to a system of neutrons where the temperature is less than a milli-Kelvin. At these temperatures, the average energy of the neutrons is of the order of $k_b T \approx 8.6 \times 10^{-8} eV$. As described in [6], an experiment was carried out thoroughly to its conclusion, where gravitational resonant quantum transitions between the levels were observed. The transitions were induced by vibrating the base at the resonant frequency relevant to a quantum transition. The observations allowed to further constrain theories of dark matter and dark energy; for a short review, see Ref. [7] and references therein. These theories in principle modify the $1/r^2$ Newtonian gravitational law and the observed lack of modification sets constraints on the theories. In this experiment, the neutrons pass between a polished stone base and a rough absorber/scatterer ceiling. Basically, the neutron bounces along the polished base in the x direction, but if it rises up and hits the ceiling, as the ceiling is rough, the neutron is scattered into the y direction and removed from the experiment. Only those neutrons with very little z energy and momentum and otherwise only x energy and momentum, remain in the experiment. The vertical energy is so small that the neutrons may only occupy the first four energy levels. The energy in the vertical motion is bounded by $E_4^0 \approx 4.1 \times 10^{-12} eV$.

The neutron quantum system for the z degree of freedom, corresponds to a particle of mass m_N , the neutron mass, in a linear gravitational potential $V(z) = m_N g z$ with an infinite energy barrier at $z = 0$. Therefore the neutron is

[†] e-mail(corresponding author): paranj@lps.umontreal.ca

*Electronic address: alexandre.landry.1@umontreal.ca

[‡]Electronic address: paranj@lps.umontreal.ca

restricted to $0 \leq z$. The corresponding Schrödinger equation is

$$-\frac{\hbar^2}{2m_N} \frac{d^2}{dz^2} \psi_E(z) + m_N g z \psi_E(z) = E \psi_E(z). \quad (1)$$

The normalizable solutions are simply Airy functions, $Ai(\frac{z}{z_0} - \alpha)$ is a eigenfunction with energy $m_N g z_0 \alpha$ where $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2g m_N^2}$. Because of the infinite energy barrier at $z = 0$, our wave functions must vanish there. The Airy functions are non-zero for positive argument and have an infinite set of discrete zeros for negative argument at $z/z_0 = -\alpha_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Therefore the energy eigenfunctions which satisfy the boundary condition are simply $\psi_n(z) = \mathcal{N}_n Ai(\frac{z}{z_0} - \alpha_n)$ where \mathcal{N}_n is the appropriate normalization [8]:

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{z_0 \int_{-\alpha_n}^{\infty} Ai(\eta)^2 d\eta}} = \frac{1}{\sqrt{z_0} Ai'(-\alpha_n)}. \quad (2)$$

The energy of this eigenstate is of course $m_N g z_0 \alpha_n$. The α_n are known numerically to arbitrarily high accuracy, however, the Bohr-Sommerfeld approximation [5, 9] is surprisingly accurate and useful as it yields an analytic formula:

$$E_n = \left(\frac{9m_N \hbar^2 g^2}{32} \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \right)^{1/3} \times 10^{-12} eV = 1,69 \left(n - \frac{1}{4} \right)^{2/3} peV. \quad (3)$$

III. GRAVITATIONAL PERTURBATION

A. Spherical perturbation

The gravitational perturbation that we imagine the system is subjected to corresponds to the effect of a macroscopic mass, M , brought as close as possible to the system of neutrons, and subjected to oscillatory motion at exactly the frequency corresponding to a resonance. It is simplest to imagine the mass M as a spherical body, of density ρ and radius ζ_0 , which is brought to a position ζ on the z axis, above the system of neutrons. Its height varies as a $\zeta(t) = \zeta_0 + \Delta\zeta + \Delta\zeta \cos(\omega t)$; in this way, it just grazes the UCNs at its minimum height. The distance from a neutron at position z is of course $\zeta(t) - z$. Then the perturbing potential is

$$W(t, z) = \frac{Gm_N M}{\zeta(t) - z} \approx W_1(z) - \Delta\zeta W_2(z) \cos(\omega t), \quad (4)$$

where $W_1(z) = \frac{Gm_N M}{(\zeta_0 + \Delta\zeta - z)}$ and $W_2(z) = \frac{Gm_N M}{(\zeta_0 - z)^2}$ (to first order in $\Delta\zeta$). The first term can be treated by time-independent perturbation theory while the second term needs the time-dependent theory. The relevant time dependent perturbation theory is that which computes the probability of transitions between two isolated, discrete levels. As we have noted, the energy differences, and hence the relevant frequencies between any two levels are distinct, as the energy spectrum is non-linear. Therefore the relevant transitions will be essentially restricted to a two level system. With an oscillatory driving force, the system in Ref. [10] experiences Rabi oscillations [11] and the neutron moves sinusoidally from one state to the other. However, in our case, the perturbation is not the same as what is required for Rabi oscillations. Indeed, we will find that the proper approximation is to calculate the short time transition rate between the two levels. Such a calculation neglects the probability of the transition back to the original state, which is valid if very few transitions occur. Then, the fact that transitions have occurred will be observable only if there are many neutrons available. We will see that this is indeed the case.

The first term of (4) is to be treated by time-independent perturbation theory. This will give perturbed static energy levels and eigenfunctions. The second term will in principle provoke transitions between these perturbed levels. Since the time dependent perturbation is already very small, it will not be necessary or even consistent to take into account any corrections to the energy levels due to the static perturbation. Thus we will simply disregard the static perturbation.

For the time-dependent term of Eq. (4), assuming the driving force is started at $t = 0$, the probability of transition between two levels, n and m , is given by

$$P_{nm}(\omega, t) = \frac{\Delta\zeta^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \langle \psi_m(z, t') | W_2(z) \cos(\omega t') | \psi_n(z, t') \rangle \right|^2. \quad (5)$$

Using the expression for $W_2(z)$, and with the notation $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$, we get

$$P_{nm}(\omega, t) = \left| \frac{Gm_N M \Delta \zeta}{\hbar} \left[\int_0^t dt' \exp(i\omega_{mn} t') \cos(\omega t') \right] \times \left[\int_0^\infty dz \frac{\psi_m(z) \psi_n(z)}{(\zeta_0 - z)^2} \right] \right|^2 \quad (6)$$

The time integral is trivially done, and it is well known that on resonance, when $\omega = \omega_{mn}$ it gives a factor which we will call $f(\omega_{mn}, t)$,

$$f(\omega_{mn}, t) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\sin(\omega_{mn} t)}{\omega_{mn}} \right)^2 + t \left(\frac{\sin(2\omega_{mn} t)}{\omega_{mn}} \right) + t^2 \right]. \quad (7)$$

This expression is usually only valid for short times but is in fact valid as long as no appreciable amount of transitions have been made. If the level to which transitions are made begins to be macroscopically occupied, then we must take into account the transitions back to the original level. The expression Eq. (6) does not take into account return transitions, which are being neglected. The time dependence is essentially quadratic with a slight oscillation about the parabola. The overall transition rate is controlled by the spatial matrix elements in Eq. (6).

The time-independent integrals correspond to

$$I_2(\alpha_m, \alpha_n) = \int_0^\infty dz \frac{1}{(\zeta_0 - z)^2} \psi_m(z) \psi_n(z) \approx \frac{1}{\zeta_0^2} \delta_{mn} + \frac{2}{\zeta_0} \mathcal{N}_m \mathcal{N}_n \left(\frac{z_0}{\zeta_0} \right)^2 \times \int_0^\infty dy y Ai(y - \alpha_m) Ai(y - \alpha_n). \quad (8)$$

The integral can be found in Ref. [8]; we get for the case $m \neq n$

$$\int_0^\infty dy y Ai(y - \alpha_m) Ai(y - \alpha_n) = \frac{-2}{(\alpha_m - \alpha_n)^2} Ai'(-\alpha_m) Ai'(-\alpha_n), \quad (9)$$

and substituting for the normalization from Eq. (2), the derivatives of the Airy function nicely cancel, and we find

$$I_2(\alpha_m, \alpha_n) \approx \frac{1}{\zeta_0^2} \delta_{nm} - \frac{4z_0}{\zeta_0^3} \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^2}. \quad (10)$$

Therefore, we find, with $m \neq n$, and replacing for $M = \frac{4}{3} \pi \zeta_0^3$,

$$P_{nm}(\omega, t) = \left(\frac{Gm_N M \Delta \zeta}{2\zeta_0^2 \hbar} \right)^2 \left(\frac{4z_0}{\zeta_0} \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^2} \right)^2 f(\omega_{mn}, t) = \left(\frac{8\pi Gm_N \rho z_0 \Delta \zeta}{3\hbar} \right)^2 \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^4} f(\omega_{mn}, t). \quad (11)$$

We note that ζ_0 neatly cancels, and the effective perturbation only depends on the density of the perturbing mass, not on its total mass. This transition probability will apply only to those neutrons that are approximately directly underneath the perturbing sphere.

B. Cylindrical perturbation

Although the spherical perturbation gives an interesting result, experimentally, the sphere will be directly above only a small number of neutrons. Hence, the possibility of inducing transitions will be restricted. It is reasonable to see what will be the effect of a horizontally extended mass. First we consider a cylindrical mass M , of length L (hence of linear mass density M/L), radius ζ_0 and density ρ . We will get a perturbation of the following form:

$$W_{cyl}(z, t) = \frac{GMm_N}{L} \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta_0} + \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} + \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} \cos(\omega t) \right) \quad (12)$$

This expression is valid for an infinitely long cylinder, and hence for an experimental application, it is valid far from the ends of the cylinder. We will assume that the end effects can be neglected. We have also set the zero of the potential so that it vanishes at $z = 0$ and $\Delta \zeta = 0$; the zero of the gravitational potential obviously does not matter to the induced transition probability. We decompose Eq. (12) in its Fourier series, and in fact we are only interested in the first harmonic. The coefficient of $\cos(\omega t)$ is given by its Fourier component

$$\frac{\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos(\omega t) \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta_0} + \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} + \frac{\Delta \zeta}{\zeta_0} \cos(\omega t) \right) \approx \left(\frac{\Delta \zeta}{\zeta_0 - z} \right), \quad (13)$$

to first order in $\Delta\zeta$. Evidently, the sine components do not contribute. Hence the perturbation Eq.(12) effectively becomes

$$W_{cyl}(z, t) = \frac{GMm_N\Delta\zeta}{L(\zeta_0 - z)} \cos(\omega t) = W_{cyl}(z) \cos(\omega t). \quad (14)$$

From the time-dependent term, we obtain the same expression as (7), while the spatial matrix elements for a transition between state m to state n is given by

$$\langle \psi_n | W_{cyl}(z) | \psi_m \rangle = \frac{GMm_N\Delta\zeta}{L} \left\langle \psi_n \left| \frac{1}{\zeta_0 - z} \right| \psi_m \right\rangle = \frac{GMm_N\Delta\zeta}{L\zeta_0^2} \langle \psi_n | z | \psi_m \rangle. \quad (15)$$

The matrix element is the same as in Eq. (8),

$$\langle \psi_n | z | \psi_m \rangle = -\frac{2z_0}{(\alpha_n - \alpha_m)^2}, \quad (16)$$

and thus we find

$$\langle \psi_n | W_{cyl}(z) | \psi_m \rangle = -\frac{2GMm_N z_0 \Delta\zeta}{L\zeta_0^2 (\alpha_n - \alpha_m)^2}. \quad (17)$$

Then, the expression for the transition probability is given by

$$P_{12}(t) = \left(\frac{GMm_N z_0 \Delta\zeta}{\hbar L \zeta_0^2} \right)^2 \frac{1}{(\alpha_n - \alpha_m)^4} f(\omega_{mn}, t) = \left(\frac{G\rho\pi m_N z_0 \Delta\zeta}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{(\alpha_n - \alpha_m)^4} f(\omega_{mn}, t). \quad (18)$$

We note again that the effective perturbation only depends on the density of the perturbing mass and not on its total mass. But now, this perturbation can simultaneously and independently act on a whole ensemble of neutrons placed along the length of the cylinder.

C. Planar perturbation

We can do the same exercise but now with a planar slab giving the perturbation. Here, as makes sense in hindsight, there is no effect. The potential of a planar mass distribution is linear in the separation,

$$W_{surf}(z, t) = \frac{GMm_N}{A} |\zeta_0 + \Delta\zeta - z + \Delta\zeta \cos(\omega t)|, \quad (19)$$

where A is the area of the slab, which is assumed of much greater linear dimension than the distance to the neutrons. As the slab will always be above the neutrons, the absolute value signs are dropped. Then, we see that the time dependent perturbation does not involve z in any way. Thus, it will not induce any transitions between different levels. This makes intuitive sense; even though the Schrödinger equation only contains the potential, physically, the force on the neutrons is constant and independent of the height of the slab above the neutrons. Therefore no transitions are induced between the energy levels of the neutrons. This should be a relief to the experimenters of Refs. [2–6]; the vibrational motion of the base would not have caused any gravitationally induced quantum transitions.

IV. NUMERICAL VALUES AND EXPERIMENTAL POSSIBILITIES

A. Spherical perturbation

The numerical value of the pre-factor in Eq. (11) or Eq. (18), which has units of sec^{-2} and is the coefficient of $f(\omega_{mn}, t)$ which has units sec^2 , depends on experimental choices. The transition probabilities depend only on the density of the perturbing mass and not on its total mass. However, we have always assumed that $\zeta_0 \gg \Delta\zeta$ or z_0 , hence we cannot take ζ_0 arbitrarily small. We will take the most favourable values imaginable with $M = 10$ kg. The densest materials on earth are Osmium and Iridium at approximately 22.6 gm/cm^3 . However Platinum and Gold are not far behind in the $19\text{-}20 \text{ gm/cm}^3$. Lead and Silver, cheap alternatives, are unfortunately relatively very light at around $10\text{-}11 \text{ gm/cm}^3$. Considering as a concrete example, a 10 kg sphere of gold, it will have a radius of just under

5 cm. Hence we can take $\zeta_0 = 5$ cm and $\Delta\zeta = 0.5$ cm to find the order of magnitude of the pre-factor in Eq. (2) for the spherical perturbation. Then, with the values for $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Ntm²/kg², $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Joule sec, $m_N = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, and $z_0 = 5.874 \times 10^{-6}$ m (which is a characteristic length for the system of neutrons) and for transitions between the 1st and 2nd energy levels, for which $\Delta E = .493$ peV and $(\alpha_2 - \alpha_1) = 1.64$, we get

$$\left(\frac{Gm_N M \Delta\zeta}{2\zeta_0^2 \hbar}\right)^2 \left(\frac{4z_0}{\zeta_0} \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^2}\right)^2 = 3.43 \times 10^{-12} \text{sec}^{-2}. \quad (20)$$

The probability, obtained by multiplication by $f(\omega_{mn}, t)$, will be applicable only to the neutrons that lie approximately underneath the sphere. This should correspond to the neutrons in an area of the order of $(\Delta\zeta)^2$. If the density of neutrons per unit area is \mathbf{n} , then we should multiply the probability by $N = \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2$, which gives

$$3.43 \times 10^{-12} \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2 \text{sec}^{-2}. \quad (21)$$

B. Cylindrical perturbation

For the cylinder of mass $M/L = 78.5$ kg/m (of gold, indeed), which corresponds to a radius $\zeta_0 = \sqrt{78.5/\pi} \approx 5$ cm, and with the same data set as before, we get the expression for the pre-factor:

$$\left(\frac{GMm_N z_0 \Delta\zeta}{L\hbar\zeta_0^2}\right)^2 \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^4} = 1.32 \times 10^{-13} \text{sec}^{-2}. \quad (22)$$

The cylindrical perturbation will act on neutrons along the entire length of the cylinder in an area $L\Delta\zeta$. Taking a length L and the same number density per unit area \mathbf{n} , the cylinder will act on $N = \mathbf{n}L\Delta\zeta$ neutrons. This yields a pre-factor for the cylindrical case of

$$1.32 \times 10^{-13} \text{sec}^{-2} \mathbf{n}L\Delta\zeta, \quad (23)$$

and hence the ratio of the two probabilities is

$$\frac{1.32 \times 10^{-13} \text{sec}^{-2} \mathbf{n}L\Delta\zeta}{3.43 \times 10^{-12} \text{sec}^{-2} \mathbf{n}(\Delta\zeta)^2} = \frac{1.32 \times 10^{-13} L}{3.43 \times 10^{-12} \Delta\zeta} = \frac{3.85 \times 10^{-2} L}{\Delta\zeta}. \quad (24)$$

Evidently, this ratio can be quite large as L is taken large. More to the point, the ratio of the number of neutrons that can be excited by the cylinder to those that can be excited by the sphere is

$$\frac{\mathbf{n}L\Delta\zeta}{\mathbf{n}(\Delta\zeta)^2} = \frac{L}{\Delta\zeta}. \quad (25)$$

For $L = 15$ cm, the cylinder of 78.5 kg/m acts on 30 times more neutrons than the sphere, of course, L can be taken as large as is experimentally feasible.

For the sphere of mass 10 kg, the pre-factor is very small; however, in principle, we can drive the system for a long time. The neutron lifetime τ is about $\tau = 880$ sec; that is, the number of neutrons diminishes exponentially as

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (26)$$

But the probability of transition increases quadratically with time (with an oscillatory variation that we can neglect) from Eq. (11). Hence, the function to maximize is $t^2 e^{-t/\tau}$, which occurs at $t = 2\tau$. Thus, with an initial, large number of neutrons, N_0 , we can optimally pump the system for twice the lifetime. This yields a factor of $(2 \times 880)^2 = 3.10 \times 10^6 \text{sec}^2$, which gives a transition probability of 1.06×10^{-5} using Eq. (11) and Eq. (20). Thus, if the initial number of neutrons is, say, $N_0 = p \times e^2 \times 10^5$, where $e \approx 2.71828$ and p , an integer, could be up to 100, then we will have $p \times e^2 \times 10^5 / e^2 = p \times 10^5$ neutrons left, after two lifetimes. Then, this implies that we would have, on average, induced p transitions of neutrons.

However, generally speaking, there is a loss rate for UCNs after every bounce. For neV UCNs, the loss rate per bounce, μ , is about $\mu \approx 10^{-5}$, where the velocity is of the order of $v \approx 5$ m/s [12]; however, it has also been found that μ can be as small as 10^{-9} [13]. This loss rate would be relevant for the horizontal reflections of the UCNs. The lifetime for the horizontal reflection then is given by $L/(v \times \mu) = 0.15/(5 \times 10^{-5}) = 3000$ sec, taking $L \approx 15$ cm. This lifetime is in fact much longer than what is experimentally observed [12]; actual observed lifetimes are in the few hundreds of seconds. In the light of this reality, it means that many more UCNs will actually be necessary in order to

be able to observe the excitations. However, the densities of UCNs that are available are evolving rapidly. Densities of the order of 100 per cm^3 are commonly obtained with projections to $10^3 \sim 10^4$ per cm^3 in the near future. For the vertical motion, the neutrons are in a quantum state, and a semi-classical description in terms of a bouncing ball would be incorrect. If the neutrons were in a highly excited vertical state, (which is not the case here), then the semi-classical description would be valid, and one could apply a similar analysis to the horizontal reflections. In any case, since the energies are a thousand times less, extrapolation from the data given in Ref. [1] indicates that the loss factor will be much smaller.

The experimental set up for observing the transitions should be quite straightforward. We simply imagine the neutrons captured in an open box with sides of height $\langle \psi_1 | z | \psi_1 \rangle = \frac{2\alpha_1 z_0}{3} \approx 9.16$ mm. Then, neutrons in the first energy level will be confined inside the box, but any neutrons that have been promoted to higher levels will of course not be trapped inside the box and will fall over the edge and outside. Of course, there will be the possibility of up-scattering of the UCNs through wall interactions. Therefore, the background rate for observing any neutrons that have managed to be driven over the wall will have to be properly established. Then, observing any enhancement of the number of neutrons outside would be proof that the gravitational perturbation has provoked transitions. More elaborate experimental methods are clearly possible. For example, creating a channel that will accept only neutrons which are in the fourth excited state by a slit in the wall at the height corresponding to the fourth excited state might be a better way of confirming that the neutrons have been promoted to the fourth level due to the gravitational perturbation.

V. CONCLUSION

Ultra cold neutron sources exist in many places; two of the most important ones are at the Institute Langevin-Laue, Grenoble, France [12], and at the Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, Texas, USA [14]. Ultra cold neutrons densities of the order of $100/\text{cm}^3$ are easily obtained, and projections for up to 10^4 are common. Therefore, obtaining a system with a million cold neutrons is not absurdly unimaginable. However, UCNs are defined as those that can be contained in a material bottle, and this only requires their kinetic energies to be in the range of $10^{-9}eV$, which is very much more than what we can tolerate. We require extremely cold neutrons, with vertical kinetic energies of the order of $10^{-12}eV$. The Q Bounce experiments [15], now done almost 10 years ago, consisted of about 4500 sufficiently cold UCNs. It does not seem impossible to get the number of sufficiently cold neutrons to observe the induced transitions. Observation of gravitationally induced transitions in a quantum system would be confirmation of an important, fundamental physical property of the interplay of gravitation and quantum mechanics.

VI. ACKNOWLEDGMENTS

We thank NSERC of Canada, Biothermica Corporation and the Sibylla Hesse Foundation for their financial support and Georges Azuelos and Richard MacKenzie for useful discussions.

-
- [1] R. Golub, D. Richardson, and S. Lamoreaux, *Ultra-Cold Neutrons* (Taylor & Francis, 1991), ISBN 9780750301152, URL <https://books.google.ca/books?id=QPUjlcwNg78C>.
 - [2] H. Abele, S. Baeßler, and A. Westphal, in *Quantum Gravity: From Theory to Experimental Search*, edited by D. Giulini, C. Kiefer, and C. Laemmerzahl (2003), vol. 631 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pp. 355–366, hep-ph/0301145.
 - [3] V. V. Nesvizhevsky et al., *Eur. Phys. J.* **C40**, 479 (2005), hep-ph/0502081.
 - [4] V. V. Nesvizhevsky et al., *Nature* **415**, 297 (2002).
 - [5] V. V. Nesvizhevsky et al., *Phys. Rev.* **D67**, 102002 (2003), hep-ph/0306198.
 - [6] T. Jenke et al., *Phys. Rev. Lett.* **112**, 151105 (2014), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.151105>.
 - [7] M. Kamionkowski, in *Visions for Discovery: New Light on Physics, Cosmology, and Consciousness* (edited by R. Y. Chiao, M. L. Cohen, A. J. Leggett, W. D. Phillips, C. L. Harper, Jr. (Cambridge University Press, Cambridge), 2010), ISBN 9780521882392.
 - [8] O. Vallée and M. Soares, *Airy functions and applications to physics* (Imperial College Press, 2004).
 - [9] P. Pedram, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 1901 (2012), 1201.2802.
 - [10] H. Abele, T. Jenke, H. Leeb, and J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. D* **81**, 065019 (2010), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.065019>.
 - [11] I. I. Rabi, S. Millman, P. Kusch, and J. R. Zacharias, *Phys. Rev.* **55**, 526 (1939), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.526>.

- [12] F. M. Piegsa, M. Fertl, S. N. Ivanov, M. Kreuz, K. K. H. Leung, P. Schmidt-Wellenburg, T. Soldner, and O. Zimmer, *Phys. Rev.* **C90**, 015501 (2014), 1404.3527.
- [13] A. Serebrov et al., *Physics Letters A* **309**, 218 (2003), ISSN 0375-9601, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103001993>.
- [14] A. Saunders et al., *Review of Scientific Instruments* **84**, 013304 (2013), URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/rsi/84/1/10.1063/1.4770063>.
- [15] T. Jenke, D. Stadler, H. Abele, and P. Geltenbort, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **611**, 318 (2009), ISSN 0168-9002, particle Physics with Slow Neutrons, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900209015538>.

Chapitre 4

Introduction au deuxième article : Le laser à gravitons

Ce deuxième article traite de la possibilité d'un laser à gravitons. Cet article s'intitule "Graviton Laser" et ce dernier a été soumis à la Gravity Research Foundation et a obtenu la mention honorifique [57]. Cette publication est présentée immédiatement après ce chapitre d'introduction. Mais avant de présenter la publication elle-même, on doit présenter certains faits et notions préalables afin de faciliter la compréhension.

4.1. Quelques notions théoriques supplémentaires

4.1.1. Une introduction historique au sujet

Aussitôt que la possibilité d'onde gravitationnelle fut acceptée, on a pensé à un laser à gravitons en se basant sur la grande analogie entre les forces gravitationnelle et électromagnétique. On doit toutefois relater deux publications pionnières.

En 1993, il y eut l'article "Gravitational Laser Back-Scattering" de Novaes et Spehler [58]. Il était question de la production de gravitons à partir d'un faisceau de photons qui attaque un faisceau d'électrons. La rencontre entre ces deux faisceaux se comporte un peu comme la diffusion Compton, sauf qu'à la fin, il y a production et diffusion de gravitons. On imagine le concept de section efficace de cette diffusion de type Compton "Back-Scattering" afin de mieux caractériser les gravitons. Cela donne donc un certain effet laser par l'émission de gravitons, mais stimulé par des photons énergétiques provenant d'un laser conventionnel. Il n'y a pas de précision sur l'énergie possiblement dégagée pour les gravitons ainsi formés. On prétendait que chaque photon était capable de libérer un graviton. Cela voudrait dire que l'émission de gravitons aurait été en nombre semblable à l'émission de photons. On aurait eu ainsi un laser à gravitons plutôt performant. Or, on n'a pas eu de rapport sur l'existence d'un laser basé sur ce principe. Toute la publication de Novaes et Spehler est plutôt hypothétique et manque de précision technique.

En 1997, il y a eu C.M. Will qui étudia le comportement et la production de gravitons massiques : "Bounding the mass of graviton using Gravitational Waves observation of inspiralling compact binaries" [59]. Celui-ci étudia la propagation des gravitons afin de connaître leurs masses et leurs énergies. Will n'a pas proposé la possibilité d'un laser à gravitons, mais il a étudié chaque élément nécessaire [59].

4.1.2. Les champs libres de spins 1 et 2

Il est bien connu dans la littérature que le champ libre de spin 1 du photon en électrodynamique quantique s'exprime via un quadripotiel A_μ comme suit [1, 2] :

$$A_\mu(x^\mu) = \int d^3k \left(\frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} A(\vec{k}) \epsilon_\mu + \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} \epsilon_\mu^* A^\dagger(\vec{k}) \right). \quad (4.1.1)$$

Dans cette équation (4.1.1), on a des vecteurs de polarisation de type ϵ_μ et ϵ_μ^* . En plus, en analogie avec le problème de l'oscillateur harmonique quantique présenté à la section 2.3.2, on utilise des opérateurs de création et d'annihilation $A^\dagger(\vec{k})$ et $A(\vec{k})$. Ces derniers satisfont au commutateur suivant [1, 2, 60] :

$$[A(\vec{k}), A^\dagger(\vec{k}')] = \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.1.2)$$

Ces opérateurs peuvent créer ou encore détruire le graviton libre, qui possède une quantité de mouvement \vec{k} . La fréquence est déterminée par $\frac{\omega}{c} = k^0 = |\vec{k}|$, ce qui est appropriée pour un photon sans masse. Ce type de champ est utile en théorie quantique des champs pour résoudre des diagrammes de Feynman en électrodynamique quantique.

Pour les gravitons, on peut approximer à l'ordre 0 le champ libre correspondant à l'excitation non interagissante des équations d'Einstein linéaires : on a alors une forme similaire à l'équation (2.2.8) pour les faibles champs gravitationnels [10, 11]. Ces équations de la forme (2.2.8) vont décrire la dynamique d'un champ libre d'une particule de spin 2. La quantification est triviale et connue. Ce champ libre de spin 2 gravitationnel peut être décomposé en modes de Fourier dans un volume V de la manière suivante :

$$h_{\mu\nu} = \int d^3k \left(\frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} A(\vec{k}) \epsilon_{\mu\nu} + \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} \epsilon_{\mu\nu}^* A^\dagger(\vec{k}) \right), \quad (4.1.3)$$

où $k^\mu = (k^0, \vec{k})$. Dans l'équation (4.1.3), on a que $\epsilon_{\mu\nu}$ est le tenseur de polarisation pour le champ de spin 2 sans masse. Cela contrairement au champ de spin 1 où l'on avait plutôt des vecteurs de polarisation. Encore une fois, on a dans l'équation (4.1.3) des opérateurs de création et d'annihilation. Cette équation (4.1.3) sera le point de départ de ce deuxième article, car on peut étudier l'effet laser impliquant la propagation des gravitons ayant ce type de quantification.

4.1.3. Les métriques de Schwarzschild et de l'onde gravitationnelle incidente

Maintenant, il est question du champ gravitationnel provoqué par un graviton en interaction avec des particules quantiques. Il y a alors distorsion de l'espace-temps dans lequel ces particules évoluent. L'espace-temps environnant correspond, dans ce cas, à celui de la Terre ou encore peut s'appliquer à une masse sphérique. On décrit ce type d'espace-temps par la métrique de Schwarzschild¹ [10, 11] :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1.4)$$

où la masse M se situe au centre de l'espace-temps et $d\Omega$ est l'élément infinitésimal d'angle solide. On a dans la métrique exprimée par l'équation (4.1.4) que la masse M fait courber l'espace-temps environnant. Il est bien connu que la métrique minkowskienne s'applique à un espace-temps plat. Dans l'article, on prend que $M = M_{\oplus}$ avec comme symbole \oplus signifiant que c'est la masse de la Terre. Donc, la masse de la Terre fait courber l'espace-temps autour de celle-ci.

Dans l'article, on pose dans le problème physique qu'une onde gravitationnelle peut déclencher la production d'un graviton. On sait qu'une onde gravitationnelle est décrite par l'approximation des faibles champs selon la présentation effectuée à la fin de la section 2.2.1. On exposait alors $h_{\mu\nu}$ comme étant une perturbation de la métrique minkowskienne. Sous cette considération, l'espace-temps engendré par une onde gravitationnelle se propageant le long de l'axe x de l'espace-temps de Minkowski et de polarisation positive s'exprime de la manière suivante :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + (1 + h(x - ct))dy^2 + (1 - h(x - ct))dz^2. \quad (4.1.5)$$

Toutefois, on veut superposer les métriques décrites par les équations (4.1.4) et (4.1.5). Il ne suffit pas simplement d'additionner les équations (4.1.4) et (4.1.5). On doit plutôt approximer l'équation (4.1.4) pour obtenir un champ gravitationnel faible de type $h_{\mu\nu}$. Ensuite, on superpose à ce champ terrestre faible la partie $h_{\mu\nu}$ de l'équation (4.1.5), car on tient compte de l'approximation des champs faibles pour cette équation. Cela est possible et donnera la métrique superposée suivante :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM_{\oplus}}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM_{\oplus}}{c^2 r}\right) (\vec{x} \cdot \vec{dx})^2 / r^2 + h(x - ct)dy^2 - h(x - ct)dz^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.1.6)$$

La dynamique classique des particules émetteurs de gravitons est gouvernée par l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.1.7)$$

1. Dans le deuxième article, on utilise la signature $(+, -, -, -)$ au lieu de $(-, +, +, +)$.

Les connexions métriques pour l'approximation des champs faibles seront décrites par la relation :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = (1/2)\eta^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}h_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}h_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}h_{\mu\nu}). \quad (4.1.8)$$

Les équations (4.1.7) et (4.1.8) décrivent la dynamique des particules dans un espace-temps de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ perturbé par les composantes de quantités $h_{\mu\nu}$. Toutefois, on tient compte de l'équation (4.1.6) pour la métrique totale du système de particules induites par une onde gravitationnelle incidente.

Ces équations sont souvent utiles lors de calculs impliquant des ondes gravitationnelles excitant des particules quantifiées comme c'est le cas dans ce présent article. De plus, la métrique de Schwarzschild décrite par l'équation (4.1.4) ainsi que ses effets reviendront par la suite au troisième article. Cette métrique peut aussi se généraliser comme on verra au quatrième article, particulièrement lorsque la masse centrale M est en rotation et donc possède un moment cinétique angulaire.

4.2. Objectifs et méthodologie

L'objectif principal de cet article est d'évaluer la possibilité de l'existence d'un laser émettant des gravitons. On suppose un milieu contenant des neutrons qui peuvent se dé-exciter en émettant des gravitons et s'exciter en capturant des gravitons. On reprend en partie le même principe que pour le laser conventionnel où il y a émissions de photons provenant de l'excitation électronique des matériaux. Toutefois, on utilise dans l'article des neutrons qui émettent des gravitons par émission stimulée. Il y a émission de gravitons par stimulation provoquant d'autres émissions de gravitons. Le déclencheur de ce processus est l'interaction d'une onde gravitationnelle incidente avec les neutrons ultra-froids (UCN) présents dans ce milieu. C'est ainsi que l'on provoque une cascade d'émissions de gravitons menant au phénomène d'émission laser de gravitons.

Pour la démarche, on débute par le champ libre du graviton tel que décrit par l'équation (4.1.3). Ensuite, on pose que les neutrons émetteurs de gravitons évoluent dans l'espace-temps décrit par l'équation (4.1.6) et dont le mouvement de ces derniers est décrit par les équations (4.1.7) et (4.1.8). De là, on utilise méthodiquement le formalisme développé par Bertschinger dans son volume : "Gravitation in the Weak Field Limit" [61]. On utilise la composante h_{00} dans la majeure partie des étapes du développement. De là, on obtient les trois parties de l'hamiltonien auquel sont soumis les neutrons UCN. Il y a d'abord l'hamiltonien de base dû au mouvement des neutrons sous la gravité terrestre. Ensuite, il y a les deux termes d'hamiltoniens de perturbation : soit la perturbation due à la gravité terrestre et celle due à l'onde gravitationnelle incidente. L'hamiltonien de base exprime le mouvement des neutrons en trois dimensions, sauf que ce dernier mène exactement à l'hamiltonien utilisé à l'équation (3.1.2) du premier article pour l'une des dimensions spatiales. Donc, la solution non-perturbée

pour les neutrons du système correspond exactement aux fonctions d'ondes décrites par l'équation (3.1.3).

Pour les perturbations, le terme correspondant à celui de la perturbation terrestre ne donnera pas de transitions quantiques entre les différents niveaux d'énergies des neutrons sous gravité terrestre. Par contre, la perturbation due à l'onde gravitationnelle donnera des transitions quantiques entre les niveaux quantiques des neutrons. On transformera ensuite cet hamiltonien de perturbation par l'onde incidente pour l'adapter à la géométrie du système où évoluent les neutrons.

Par la suite, on se sert d'une des matrices de transition obtenue au premier article pour finalement poser le coefficient d'Einstein d'émission stimulée. Pour obtenir la forme finale de celui-ci, on se sert de la même démarche que celle utilisée pour le laser conventionnel. On se sert de la quantité de gravitons présents dans le processus ainsi que d'autres paramètres physiques usuels. On utilise l'espace des phases, on simplifie l'expression de ce coefficient et finalement on intègre sur les angles solides pour finalement obtenir ce coefficient d'émission stimulée tel que désiré au départ.

Ensuite, anticipant la faiblesse de la valeur de ce coefficient, on désire amplifier le processus laser via l'inversion de population. En utilisant les équations gouvernant le nombre de neutrons par niveau quantique, leur spectre ainsi que le coefficient calculé à l'étape précédente, on parvient à obtenir la section efficace d'absorption. On utilise cette section efficace pour connaître l'ampleur de l'amplification sur une étoile à neutron ayant une mince couche de carbone pouvant émettre des gravitons. On arrive finalement à la conclusion que le processus laser, même pour une situation de type astrophysique, n'est pas observable sur terre. Même si physiquement, il y a moyen de traiter ce problème; les ordres de grandeur anémiques des résultats obtenus ne permettent pas d'observer ce phénomène. C'est en ce sens qu'on a respecté l'objectif de déterminer la possibilité et l'ampleur du phénomène du point de vue physique.

4.3. Principaux résultats

En effectuant au complet la démarche décrite dans la section 4.2, on obtient le coefficient d'Einstein d'émission stimulée pour l'émission de gravitons par un système de neutrons de type UCN soumis à la gravité terrestre comme suit :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}} &= \frac{256}{15} \frac{G}{\hbar^2 c^5} (N_k + 1) \left(\frac{m_N g z_0}{\alpha_{n'} - \alpha_n} \right)^3 \\
&= \frac{128}{15} \frac{G}{\hbar^2 c^5} (N_k + 1) \frac{m_N g^2 \hbar^2}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^3} \\
&= \frac{128}{15} \frac{G}{c^5} (N_k + 1) \frac{m_N g^2}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^3}.
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

L'équation (4.3.1) dépend de l'accélération gravitationnelle g ; de la masse du neutron; du nombre de gravitons impliqués ainsi que des niveaux d'énergies des neutrons du système. On déduit déjà de cette expression que ce coefficient d'émission sera très faible à cause de la présence du coefficient $\frac{G}{c^5}$.

Par le phénomène d'inversion de population des neutrons, on obtient la section efficace d'absorption des neutrons. On utilise l'équation (4.3.1) ainsi que les équations de flux d'énergie des gravitons (éq. 30 à 34 de l'article). La section efficace d'absorption des neutrons s'exprime comme suit :

$$\sigma = \frac{4\pi^2 \hbar G}{c^3} \frac{16}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^6}. \quad (4.3.2)$$

Cette expression ne fait pas intervenir la masse des neutrons. Cela est due au principe d'équivalence faible (voir section 2.2.1) qui joue un certain rôle dans ce résultat. La section efficace ne fait intervenir que les niveaux d'énergie du système qui émet des gravitons.

On a effectué dans l'article un exemple d'application pour une étoile à neutrons ayant une couche de carbone pur d'épaisseur 0,03 m à sa surface telle que présentée à la figure 1. On peut calculer à partir de ce fait la densité d'atomes de carbone disponible pour l'émission stimulée de gravitons. Avec la section efficace totale d'absorption exprimée par l'équation (4.3.2), on peut résoudre l'équation différentielle gouvernant la quantité de gravitons émis sur l'épaisseur de carbone de l'étoile (noté ici \mathcal{N}_C) :

$$\frac{dN_k(x)}{dx} = \sigma \mathcal{N}_C N_k(x), \quad (4.3.3)$$

où $N_k(x)$ est la quantité de graviton sur la couche. La solution d'une telle équation est :

$$N_k(x) = N_k(0) e^{\sigma \mathcal{N}_C x}. \quad (4.3.4)$$

Numériquement, en se servant des valeurs présentées au tableau 1 du chapitre 3, on présente les valeurs des équations (4.3.1), (4.3.2) ainsi que du facteur d'amplification $\sigma \mathcal{N}_C$ au tableau 1. Les quantités présentées dans ce tableau sont très petites à cause du coefficient $\frac{G}{c^5}$ présent au départ dans l'équation (4.3.1) et qui se répercute dans les autres quantités obtenues par la suite. Autrement dit, les résultats du tableau 1 démontrent clairement que le phénomène est trop faible pour qu'il puisse être mesuré.

Par ailleurs, on peut arriver aux mêmes conclusions avec un calcul de flux de gravitons provenant d'une étoile à neutrons avec un résultat très similaire. On connaît la densité d'atomes de carbone, on peut obtenir la quantité maximale de gravitons par seconde pouvant être émise. En augmentant de plusieurs ordres de grandeurs le coefficient d'émission de graviton provenant de l'étoile à neutrons, on peut obtenir la quantité totale maximale de gravitons pouvant être émise par l'étoile par seconde. Connaissant la distance de l'étoile par rapport à la terre, on peut alors connaître la quantité maximale de ces gravitons parvenant à

| ρ_C (kg m^{-3}) | \mathcal{N}_C (10^{29} m^{-3}) | $\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}}$ (10^{-78} s^{-1}) | σ (10^{-68} m^2) | $\sigma \mathcal{N}_C$ (m^{-1}) | x_{ampl} (m) |
|---------------------------------|--|---|-------------------------------------|--|-----------------------|
| 3530 | 1,75 | 8,59 | 5,3 | $9,4 \times 10^{-39}$ | 10^{39} |

Tableau 1. Valeurs du coefficient d'émission stimulée, de la section efficace, du facteur d'amplification et de la distance d'amplification pour une émission entre le niveau fondamental et le premier niveau excité pour une couche de carbone d'une étoile à neutrons.

nous. Toutes ces valeurs numériques sont présentés au tableau 2. Avec ces valeurs numériques, il est clair qu'on ne peut pas observer des gravitons excités provenant d'une surface d'étoile à neutrons. Cela constitue un autre argument complémentaire à la non-observation d'un laser à gravitons de type astrophysique.

| \mathcal{N}_C (10^{29} m^{-3}) | $N_{NS} 10^{37} \text{ s}^{-1}$ | $\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm. ampli}}$ (10^{-54} s^{-1}) | d_{NS} (10^{17} m) | $\text{Flux}_{\text{grav}}$ (10^{-53} m^{-2}) |
|--|---------------------------------|---|----------------------------------|---|
| 1,75 | 7,92 | 8,59 | 9,46 | 6,05 |

Tableau 2. Flux de gravitons provenant d'une étoile à neutrons de rayon 10 km se situant à 100 années-lumières de la terre avec une forte hausse du coefficient d'émission spontanée de gravitons.

4.4. Les contributions

Mes contributions

- Calculs de coefficient d'absorption et de section efficace pour les possibilités du phénomène d'un point de vue physique.
- Calculs numériques pour vérifier l'ampleur du phénomène.
- Explication et vérification de la non-possibilité de laser à gravitons par la grande faiblesse du phénomène à l'aide des paramètres réels et possibles.

J'ai effectué plusieurs calculs importants et suggéré des données réalistes. J'ai trouvé et conclu sur la non-possibilité ou la grande faiblesse du phénomène du laser émetteur de gravitons.

Les contributions de mon directeur

Mon directeur de l'époque, M.B. Paranjape, a proposé le projet suite à nos résultats du premier article de cette thèse. Il a fait plusieurs vérifications et plusieurs calculs. Il ajouté

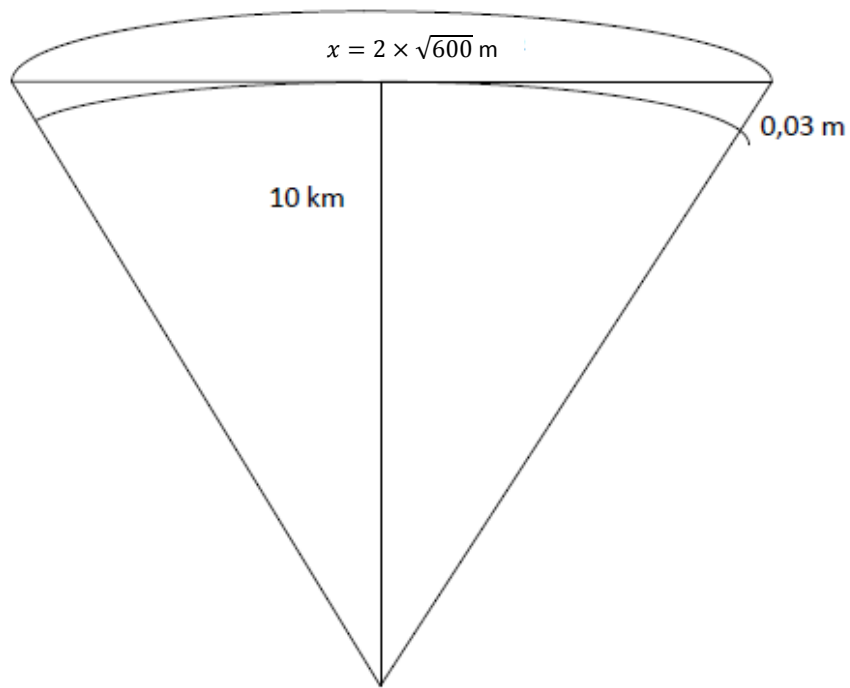


Figure 1. La trajectoire cordale d'un graviton à la surface d'une étoile à neutrons. x est la distance maximale de la trajectoire cordale obtenue en tenant compte de l'épaisseur de 0,03 m de la couche de carbone à la surface de l'étoile à neutrons. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir la relation $(10^4 + 0,03)^2 = (10^4)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$. De là, on développe le membre de gauche et on obtient en approximant que $\frac{x}{2} \approx \sqrt{600}$. On obtient ainsi que $x = 2\sqrt{600}$ mètres.

plusieurs interprétations.

Deuxième article.

Graviton laser

par

Alexandre Landry¹ et Manu B. Paranjape²

(¹) Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7

Cet article a été soumis dans International Journal of Modern Physics D ² (Publié en 2016 [[57](#)]).

2. Mention honorifique au concours 2016 de la Gravity Research Foundation

Graviton laser

A. Landry* and M. B. Paranjape†

*Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal,
C.P. 6128, succ. centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7*

We consider the possibility of creating a graviton laser. The lasing medium would be a system of contained, ultra cold neutrons. Ultra cold neutrons are a quantum mechanical system that interacts with gravitational fields and with the phonons of the container walls. It is possible to create a population inversion by pumping the system using the phonons. We compute the rate of spontaneous emission of gravitons and the rate of the subsequent stimulated emission of gravitons. The gain obtainable is directly proportional to the density of the lasing medium and the fraction of the population inversion. The applications of a graviton laser would be interesting.

PACS numbers: 73.40.Gk,75.45.+j,75.50.Ee,75.50.Gg,75.50.Xx,75.75.Jn

I. INTRODUCTION

A laser works by the principle that in a (lasing) medium, where there are more quantum excited states than de-excited states, spontaneously emitted photons can subsequently stimulate the emission of more photons, which then are coherent with the stimulating photon. The process can cascade multiple times creating an avalanche of coherent photons. If the gain of the lasing medium is sufficiently high, a significant amplification can be obtained with a single pass, there is no need for reflecting mirrors. In this essay, we examine the possibility that such amplification can be obtained for gravitons.

Ultra cold neutrons, [1] are normally defined to have a low enough kinetic energy so that they are unable to penetrate the material walls of a container. The kinetic energy of the neutrons has to be typically less than about 300 nano eV. When the energy of a neutron is in this range, then its de Broglie wavelength is of the order of 100 nm, which means that the neutron coherently senses at once almost a thousand nuclei of the wall of the container, in fact through the strong interaction. The neutrons have negligible other interactions with the material of the container. The zero Fourier component of the strong interaction between the nuclei and the neutron is all that is relevant and corresponds to a constant energy valued work function. To be able to penetrate into the walls of the container, the neutrons must have a greater kinetic energy than the threshold. Failing that, the neutrons are reflected perfectly. We will consider an ensemble of even colder neutrons. 100 nano-Kelvin neutrons have kinetic energies that are of the order of a few pico eV. At such low energies, the neutrons become sensitive to the gravitational field of the earth. Indeed the Q-bounce experiment [2] measures exactly the consequences of the quantum mechanical interaction of the neutrons with this gravitational field.

For 100 nano-Kelvin neutrons bouncing on a smooth, horizontal base, the Schrödinger equation for the neutrons is easily, analytically solved. The potential in the z direction is $m_N g z$ (where m_N is the neutron mass and g is the earth's gravitational acceleration) and the boundary condition at $z = 0$ corresponds to an effectively, infinite energy barrier. The eigenfunctions are simply the Airy functions $\psi_n(z) = Ai(\frac{z}{z_0} - \alpha_n)$ where $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2gm_N^2}$ and $-\alpha_n$ is the n th zero of the Airy function with energy eigenvalue $E_n = m_N g z_0 \alpha_n$ [3]. An approximate analytic formula for the energy levels is given by $E_n \approx 1.69 (n - \frac{1}{4})^{2/3} peV$. Transitions between these quantum levels have already been induced and observed by pumping the system by mechanically vibrating the base at the appropriate frequency, approximately 600Hz. The neutrons can be lifted to say the third excited level using the mechanical pumping method. Pumping at the resonant frequency for the transition between the first and third levels asymptotically will populate each of these levels equally. But then there will be a population inversion with respect to the second excited level. Thus spontaneous emission of a graviton from a transition from the third to the second level, and the subsequent stimulated emission of gravitons could yield significant, laser type amplification of the gravitational wave.

*Electronic address: alexandre.landry.1@umontreal.ca

†Electronic address: paranj@lps.umontreal.ca

II. QUANTUM GRAVITONS AND THE AMPLITUDE FOR SPONTANEOUS AND STIMULATED EMISSION

In a zero order approximation, gravitons correspond to the non-interacting excitations of the quantized, linearized Einstein equations. These equations describe the free field dynamics of a massless spin 2 field. The quantization is trivial and well understood. The quantum gravitational field corresponds to the tensor $h_{\mu\nu}$, which can be decomposed into its Fourier modes

$$h_{\mu\nu} = \int d^3k \left(\frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} A(\vec{k}) \epsilon_{\mu\nu} + \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{V}} \epsilon_{\mu\nu}^* A^\dagger(\vec{k}) \right) \quad (1)$$

where $\epsilon_{\mu\nu}$ is the polarization tensor for massless spin two particles and the operators $A^\dagger(\vec{k})$ and $A(\vec{k})$ satisfy the simple algebra of annihilation and creation operators

$$[A(\vec{k}), A^\dagger(\vec{k}')] = \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2)$$

These operators respectively create and destroy one free graviton of momentum \vec{k} . The frequency satisfies $k_0 = |\vec{k}|$ which is appropriate for a massless particle.

The gravitational field of the graviton, interacts with the system of ultra-cold neutrons by distorting the space-time in which the neutron is immersed. The ambient space-time is that which corresponds to the gravitational field of the earth. This space-time is simply the Schwarzschild geometry

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3)$$

where the symbol \oplus stands for the earth. Superimposed on this space-time is that of the gravitational wave of the graviton

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - (1 + h(x - ct)) dy^2 - (1 - h(x - ct)) dz^2 \quad (4)$$

for a gravitational wave propagating in the x direction polarized in the $+$ sense in Minkowski space-time. In the weak field linear approximation, the combined metric is

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM_\oplus}{c^2 r}\right) (\vec{x} \cdot \vec{dx})^2 / r^2 - h(x - ct) dy^2 + h(x - ct) dz^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (5)$$

The classical dynamics of the neutrons, apart from the reflection from the base, is governed by the geodesic equation:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (6)$$

The connection is given to first order by $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = (1/2)\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu})$. We follow closely the exposition by Bertschinger in Ref. [4], decomposing the gravitational field as

$$h_{00} = -2\phi, \quad h_{0i} = w_i, \quad h_{ij} = -2\psi\delta_{ij} + 2s_{ij} \quad (7)$$

where $\delta^{ij}s_{ij} = 0$, we have $w_i = 0$, $\phi = GM_\oplus/r$, $\psi = GM_\oplus/3r$ and $s_{ij} = s_{ij}^\oplus + s_{ij}^\approx$ with $s_{ij}^\oplus = (-GM_\oplus/r^3)(x_i x_j - (r^2/3)\delta_{ij})$ and $s_{zz}^\approx = -s_{yy}^\approx = (1/2)h(x - t)$ where we now add the usage of the symbol \approx for the gravitational wave.

The Hamiltonian for the system is given by

$$H(x^i, \pi_j) = (1 + \phi)E(p_j) \text{ where } E(p_j) = (\delta^{ij}p_i p_j + m_N^2)^{1/2} \quad (8)$$

with $p_i = (1 + \psi)\pi_i - (\delta^{ij}\pi_i \pi_j + m_N^2)^{1/2}w_i - s^j_i \pi_j$ which in our case becomes just $p_i = (1 + \psi)\pi_i - s^j_i \pi_j$. As π_i and p_i differ only by first order terms, we get the Hamiltonian to first order

$$H(x^i, \pi_j) = E(\pi_j) + \frac{(\psi\delta^{ij} - s^{ij})\pi_i \pi_j}{E(\pi_j)} + \phi E(\pi_j). \quad (9)$$

Expanding to second order in the canonical momentum gives

$$H(x^i, \pi_j) = m_N + \frac{|\vec{\pi}|^2}{2m_N} + \frac{(\psi\delta^{ij} - s^{ij})\pi_i \pi_j}{m_N} + \phi(m_N + \frac{|\vec{\pi}|^2}{2m_N}). \quad (10)$$

From this expression we extract our basic Hamiltonian of the neutron interacting with the gravitational field of the earth

$$H_0(x^i, \pi_j) = \frac{|\pi|^2}{2m_N} + m_N\phi \quad (11)$$

subtracting off the rest mass, and the perturbation, which we split into two terms

$$H^\oplus(x^i, \pi_j) = \frac{\phi|\vec{\pi}|^2}{2m_N} + \frac{(\psi\delta^{ij} - s^\oplus{}^{ij})\pi_i\pi_j}{m_N} \quad (12)$$

$$H^\approx(x^i, \pi_j) = \frac{-s^\approx{}^{ij}\pi_i\pi_j}{m_N}. \quad (13)$$

The Schrödinger equation resulting from Eq. (11) is essentially free in the x and y directions, but in the z direction it is

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m_N} \frac{d^2}{dz^2} + m_Ngz \right) \psi(z, t) = E\psi(z, t). \quad (14)$$

the perturbation from Eq. (12) induces some perturbative changes in the energies and wavefunctions of $H_0(x^i, \pi_j)$, however, these changes are static and do not give rise to any transitions, spontaneous or stimulated, between levels. The time dependent perturbation that is relevant, from Eq. (13) (replacing $h(x - ct) \rightarrow \frac{\sqrt{G}}{c^2}h(x - ct)$ which is the canonically normalized metric perturbation) is given by

$$H^\approx(x^i, \pi_j) = -\frac{\sqrt{G}}{c^2} \frac{h(x - ct)(\pi_z^2 - \pi_y^2)}{m_N} \quad (15)$$

which is written for a gravitational wave that is propagating exclusively in the x direction. We can in principle drop the π_y^2 term as it will not contribute in the matrix element of the relevant states of the neutron. For a direction of propagation $\hat{k} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ corresponding to a polar angle θ (taking it for simplicity in the (x, z) plane), we get

$$H^\approx(x^i, \pi_j) = -\frac{\sqrt{G}}{c^2} \frac{h(\hat{k} \cdot \vec{x} - ct)((-\hat{k}_z\pi_x + \hat{k}_x\pi_z)^2 - \pi_y^2)}{m_N} = -\frac{\sqrt{G}}{c^2} \frac{h(\hat{k} \cdot \vec{x} - ct) \sin^2\theta \pi_z^2}{m_N}. \quad (16)$$

Then the amplitude for spontaneous or stimulated emission of a graviton is proportional to the matrix element $\langle \psi_{n'} | -\frac{\pi_z^2}{m_N} | \psi_n \rangle$ which, using Eq. (14), gives

$$\langle \psi_{n'} | -\frac{\pi_z^2}{m_N} | \psi_n \rangle = \langle \psi_{n'} | (2m_Ngz - 2E_n) | \psi_n \rangle = \langle \psi_{n'} | 2m_Ngz | \psi_n \rangle. \quad (17)$$

The matrix element is easily computed using the exact eigenfunctions and the integral

$$\int_0^\infty dy y Ai(y - \alpha_m) Ai(y - \alpha_n) = \frac{-2Ai'(-\alpha_m)Ai'(-\alpha_n)}{(\alpha_m - \alpha_n)^2} \quad (18)$$

which gives

$$\langle \psi_{n'} | 2m_Ngz | \psi_n \rangle = -\frac{4m_Ngz_0}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^2}. \quad (19)$$

The rate, per unit time and volume, of spontaneous or stimulated emission of gravitons is then given by, modifying a calculation in Baym, [5]

$$d\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emmm}} = \frac{G}{c^4} \frac{4\pi^2 c^2}{ckV} (N_k + 1) \sin^4\theta |\langle \psi_{n'} | 2m_Ngz | \psi_n \rangle|^2 \delta(E_{n'} - E_n - \hbar ck) \quad (20)$$

where N_k is the number of gravitons involved in the stimulated emission, and when $N_k = 0$ we get the rate for spontaneous emission. (The whole system is imagined in a box of volume V .) There are $Vd^3k/(2\pi)^3$ states in the volume of phase space and as $E_k = \hbar c|k|$

$$V \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = V E_k^2 \frac{dE_k d\Omega}{(2\pi\hbar c)^3} \quad (21)$$

states per unit energy. Then integrating Eq.(20) over the energy of the emitted graviton we get

$$d\Gamma_{n'\rightarrow n}^{\text{emm.}} = \frac{G}{c^4} \frac{(E_{n'} - E_n)d\Omega}{2\pi\hbar^2 c} (N_k + 1) \sin^4 \theta \left(\frac{4m_N g z_0}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^2} \right)^2 \quad (22)$$

Since $E_n = m_N g z_0 \alpha_n$ where $z_0^3 = \frac{\hbar^2}{2gm_N^2}$ and integrating over directions, we get

$$\Gamma_{n'\rightarrow n}^{\text{emm.}} = \frac{256}{15} \frac{G}{\hbar^2 c^5} (N_k + 1) \left(\frac{m_N g z_0}{\alpha_{n'} - \alpha_n} \right)^3 = \frac{128}{15} \frac{G}{\hbar^2 c^5} (N_k + 1) \frac{m_N g^2 \hbar^2}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^3} = \frac{128}{15} \frac{G}{c^5} (N_k + 1) \frac{m_N g^2}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^3} \quad (23)$$

III. POPULATION INVERSION

We can obtain a population inversion by mechanically vibrating the base at the resonant frequency corresponding to the transition between two levels [2]. Resonant pumping of a system has the property that the probability of inducing a transition from level n to level n' is equal to the probability of inducing a transition in the opposite direction. The long time behaviour of such a system is governed by the simple equations, with $\mathcal{N}_n(t)$ the occupation number (or equivalently the density) of the neutrons in the n th level,

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}}_{n'}(t) &= -\lambda \mathcal{N}_{n'}(t) + \lambda \mathcal{N}_n(t) \\ \dot{\mathcal{N}}_n(t) &= -\lambda \mathcal{N}_n(t) + \lambda \mathcal{N}_{n'}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

where λ is the effective rate of transitions per unit time. The solution of this system is

$$\mathcal{N}_{n'}(t) = \frac{(\mathcal{N}_{n'}(0)(1 + e^{-2\lambda t}) + \mathcal{N}_n(0)(1 - e^{-2\lambda t}))}{2} \quad (25)$$

$$\mathcal{N}_n(t) = \frac{(\mathcal{N}_n(0)(1 + e^{-2\lambda t}) + \mathcal{N}_{n'}(0)(1 - e^{-2\lambda t}))}{2} \quad (26)$$

Hence in the long time limit, the populations go to $\mathcal{N}_{n'}(t) = \mathcal{N}_n(t) \rightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{N}_n(0) + \mathcal{N}_{n'}(0))$.

If we pump the system between levels n and $n + m$, with $m > 1$, there will be intermediate levels in between the two with respect to which there will be a population inversion. Then one could imagine spontaneous emission of a graviton by a transition from the upper level to one of the intermediate levels.

The amplification factor κ of a lasing medium is given by

$$\kappa = \sigma(\mathcal{N}_{n'} - \mathcal{N}_n) \quad (27)$$

where σ is the cross section of induced transitions between the levels of the medium [6]. The cross section is trivially related to the transition rate for spontaneous emission computed above in Eq. (23) by dividing by the incident flux. Evidently a population inversion, $\mathcal{N}_{n'} > \mathcal{N}_n$ is necessary for any amplification.

IV. DISCUSSION

The rate computed in Eq. (23) is absurdly small for terrestrial applications. Taking the following values for the various constants $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ and $(\alpha_{n'} - \alpha_n) = 1.64$ (considering the transition between first excited state and ground state) we get a spontaneous emission rate of

$$\Gamma_{n'\rightarrow n}^{\text{emm.}} = 8.59 \times 10^{-78} / \text{s}. \quad (28)$$

But if the neutron is in a highly excited state we do get some enhancement. The energy levels behave as $E_n \sim n^{2/3}$, which comes from a similar behaviour of the zeros of the Airy functions. Clearly, for two highly excited levels $n + m$ and n as $n \rightarrow \infty$, we get

$$\alpha_{n+m} - \alpha_n \sim \frac{m}{n^{1/3}}. \quad (29)$$

Therefore the denominator in Eq. (23) can in principle be made arbitrarily small, giving a corresponding enhancement of the probability of spontaneous emission. In general, for levels separated by gravitons of energies in the deep

infrared limit, there is no suppression. Observing and controlling stimulated amplification of gravitons would be of unimaginable importance.

One can also imagine the process of lasing amplification occurring on the surface of a star, say a neutron star. Here the surface gravity can be 10^{12} times greater than on the surface of the earth. This yields an additional factor of 10^{24} . Coupled with a pair of excited levels, it is not impossible that there could be a lasing amplification of spontaneously emitted gravitons. Neutron stars are supposed to have an atmosphere of carbon, only 3cm thick and of mass density around 3530 kg/m^3 , the density of diamond. This corresponds to a number density of $\mathcal{N}_{carbon} = 3530/(12 \times 1.67 \times 10^{-27}) = 1.75 \times 10^{29}$ carbon atoms per cubic meter, which for simplicity we will assume all are in an excited state. We assume the carbon atoms replace the ultra cold neutrons of the terrestrial considerations, the carbon atoms dropping down from excited states would spontaneously emit gravitons. The amplification factor per unit length then is $\sigma\mathcal{N}_{carbon}$. To calculate σ (for details see Baym in Ref. [5]) we must divide $\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}}$ by the flux

$$\sigma = \Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}} / \Phi \quad (30)$$

where Φ is the graviton flux (gravitons per unit area per unit time). The expression for $\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}}$ should be integrated over gravitons with a wave vector in a given direction with a narrow angular spread $d\Omega$. Thus we replace $\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow d\Omega \int \omega^2 d\omega / (2\pi c)^3$, which then gives

$$\Gamma_{n' \rightarrow n}^{\text{emm.}} = d\Omega \int \frac{\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} \left(\frac{2\pi \hbar c^2 N_k}{\omega} \right) \frac{2\pi G}{\hbar c^4} \sin^4 \theta |\langle \psi_{n'} | 2m_N g z | \psi_n \rangle|^2 \delta(E_{n'} - E_n - \hbar\omega). \quad (31)$$

We identify the energy flux per unit area per unit frequency as

$$I(\omega) = d\Omega \frac{\omega^4}{(2\pi c)^4} \left(\frac{2\pi \hbar \omega c^2 N_k}{\omega^2} \right) \quad (32)$$

and the corresponding graviton number flux (number of gravitons per unit area per unit time)

$$\Phi = \frac{1}{\hbar\omega} \int d\omega I(\omega). \quad (33)$$

Then, the total absorption cross section is

$$\sigma = \frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{2\pi G}{\hbar c^4} \sin^4 \theta |\langle \psi_{n'} | 2m_N g z | \psi_n \rangle|^2 \quad (34)$$

with $\theta = \pi/2$ and $\hbar\omega = E_{n'} - E_n$ from the delta function. The matrix element is given in Eq. (19) which after putting everything together gives

$$\sigma = \frac{4\pi^2 \hbar G}{c^3} \frac{16}{(\alpha_{n'} - \alpha_n)^6} \quad (35)$$

interestingly with no reference to the neutron mass (this must be due to the weak equivalence principle playing a role). Then the differential equation for the amplification of a beam of gravitons is given by

$$\frac{dN_k(x)}{dx} = \sigma \mathcal{N}_{carbon} N_k(x) \quad (36)$$

with evident solution

$$N_k(x) = N_k(0) e^{\sigma \mathcal{N}_{carbon} x}. \quad (37)$$

Numerically $\sigma = 5.3 \times 10^{-68}$ thus on the surface of a neutron star we have $\sigma \mathcal{N}_{carbon} \approx 9.4 \times 10^{-39}$ per meter. Thus we will not have significant amplification except after distances of the order of 10^{39} m, which is much larger than the size of the observable universe. For a generic neutron star of radius 10 km with a carbon atmosphere of thickness 3 cm, we get a chordal distance of only about 50 m, see Fig. (1). This kind of amplification will only work if the quantum states exist in regions of much stronger gravitational fields, for example near the surface of some black holes.

Furthermore, speculatively, if m_N is replaced by a considerably heavier, as yet undiscovered, supersymmetric or dark matter particle, again there could be substantial increase in the rate of spontaneous emission. Finally, one can imagine, in an astrophysical scenario, that an enormous number of gravitons are somehow released in some cataclysmic event, for example, the recently observed black-hole merger event [7]. Then N_k could be sufficiently high to compensate for the other factors that are rendering the amplitude small.

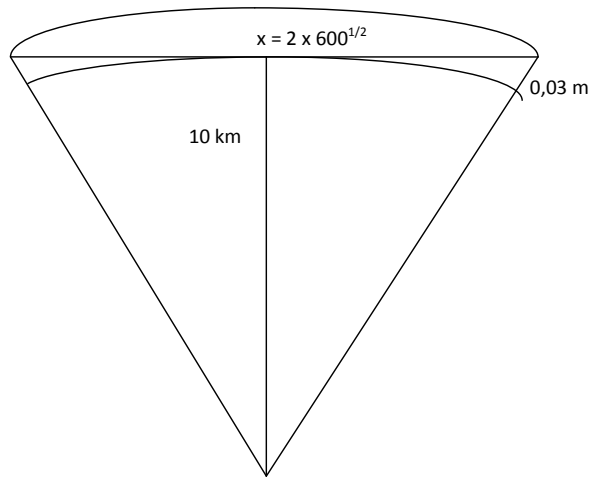


FIG. 1: The chordal trajectory of the graviton inside the atmosphere of a neutron star.

V. ACKNOWLEDGMENTS

We thank Biothermica Corporation, Sibylla Hesse foundation and NSERC of Canada for their financial support. We thank Bhujyo Bhattacharya and Eric Dupuis for useful discussions.

-
- [1] R. Golub, D. Richardson, and S. K. Lamoreaux, *Ultra-cold neutrons* (CRC Press, US, 1991).
 - [2] T. Jenke, D. Stadler, H. Abele, and P. Geltenbort, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **611**, 318 (2009), ISSN 0168-9002, particle Physics with Slow Neutrons, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900209015538>.
 - [3] A. Landry and M. B. Paranjape (2016), 1601.06132.
 - [4] E. Bertschinger (2000), URL <http://web.mit.edu/edbert/GR/gr6.pdf>.
 - [5] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, Advanced book program (Addison-Wesley, 1990), ISBN 9780805306675, URL <https://books.google.ca/books?id=6KrvAAAAMAAJ>.
 - [6] L. Tarasov, *Laser Physics* (URSS, 2014), ISBN 9785396006126, URL <https://books.google.ca/books?id=ERV6rgEACAAJ>.
 - [7] B. P. Abbott et al. (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016), 1602.03837.

Chapitre 5

Introduction au troisième article : Les corrections aux niveaux de Landau pour l'espace-temps de Schwarzschild

À la section 2.4, on a présenté en détail l'origine des niveaux de Landau conventionnels. On a montré que ces niveaux sont aussi valides pour un espace-temps minkowskien. Maintenant, on désire savoir si ces niveaux seront perturbés par des espace-temps courbes. On commencera par effectuer cet exercice dans l'espace-temps de Schwarzschild où il y aura une masse au centre de celui-ci. C'est ce que fait ce troisième article s'intitulant "Landau levels in a gravitational field : the Schwarzschild spacetime case". Cet article a été soumis à l'European Physical Journal Plus [62] et est présenté immédiatement après ce chapitre d'introduction. Mais auparavant, on doit présenter certains éléments de théories essentiels pour la compréhension de cet article.

5.1. Quelques notions théoriques supplémentaires

5.1.1. Espace-temps de Schwarzschild-Melvin versus Schwarzschild

Avant d'aborder les niveaux de Landau dans un espace-temps de Schwarzschild usuel, il faut réfléchir au sujet de l'effet du champ magnétique lui-même sur cet espace-temps de Schwarzschild. En supposant un champ magnétique constant en direction $+\hat{z}$, il y aura dans ce cas une courbure de l'espace-temps engendré par ce champ magnétique, ce qui mène à l'espace-temps de Schwarzschild-Melvin [63]. Cela est une solution dérivée de la solution générale de l'équation d'Einstein-Maxwell, soit l'équation (2.2.4) avec le tenseur d'énergie-impulsion décrit par l'équation (2.2.11) [64, 65]. À partir de ces considérations, on définira cette métrique générale en coordonnées sphériques par [63] :

$$ds^2 = \Lambda^2 \left(-\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right) + \frac{r^2}{\Lambda^2} \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.1.1)$$

On a dans cette équation (5.1.1) que $\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2}$ et $\Lambda = 1 + 2\pi Gc^{-2}\epsilon_0 B^2 r^2 \sin^2 \theta$ dans le système d'unités standards selon l'ouvrage de Gal'tsov et Petukhov [66]. Le paramètre ϵ_0 est la permittivité du vide. À partir de là, en tenant compte de cet espace métrique, on définit le quadripotentiel vecteur A_μ pour un champ magnétique constant et uniforme, parallèle à la direction $+\hat{z}$ de la manière suivante :

$$A_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2\Lambda} \right). \quad (5.1.2)$$

Donc, le mouvement d'une particule chargée ou non est étudié en détail dans l'ouvrage de Gal'tsov et Petukhov [66]. Le champ magnétique influence géométriquement ces particules pour créer une barrière de potentiel, empêchant une particule soumise de s'échapper à l'infini. Pour ces particules d'un point de vue classique, les trajectoires sont intégrables dans des conditions très particulières selon les travaux de Karas et al. [67].

En fait, on sait que l'espace-temps de Schwarzschild se réduit à l'espace-temps de Minkowski dans le cas où une masse centrale M est nulle. Mais, pour l'espace-temps de Schwarzschild-Melvin, ce n'est pas le cas. L'équation (5.1.1) avec $M = 0$ représente l'espace-temps de Melvin magnétique [68, 69]. Les états quantiques pour une particule évoluant dans ce type d'univers donnera des niveaux de Landau avec une correction émergeant de l'influence du champ magnétique B sur la géométrie de l'espace-temps environnant. On a étudié cela en détail dans l'ouvrage de Santos et Barros en 2016 [70]. On explique que cette influence devient significative pour des champs magnétiques très élevés, soit de l'ordre $B = 10^{19}$ gauss (alors que les magnétars atteignent seulement 10^{15} gauss.), ainsi que pour des nombres quantiques très élevés, de l'ordre $n = 10^{30}$.

Dans ce troisième article, on veut connaître l'effet sur les niveaux de Landau du champ gravitationnel produit par une masse sphérique M au centre de l'espace-temps de Schwarzschild. Il n'est pas nécessaire d'utiliser les effets géométriques provoqués par le champ magnétique lui-même. Dans cette situation, ces effets géométriques seront très négligeables par rapport à la contribution de l'espace-temps à ces niveaux d'énergies de Landau. Ces considérations sont appropriées autant pour des expériences sur Terre qu'au niveau astrophysique auquel la condition $2\pi Gc^{-2}\epsilon_0 B^2 r^2 \ll 1$ est respectée. Dans les ouvrages usuels, il est reconnu que les jeunes étoiles à neutrons ainsi que les étoiles magnétisées (i.e. magnetars) possèdent un champ magnétique entre 10^8 et 10^{15} gauss [71]. Alors, on considère que $\Lambda \approx 1$ et l'équation (5.1.1) se réduit à la métrique de l'espace-temps de Schwarzschild conventionnel. Cette métrique de Schwarzschild en coordonnées sphériques se définit comme suit :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.1.3)$$

On considère ici qu'on se situe dans la jauge de symétrie axiale cylindrique. C'est l'équivalent de la jauge de Landau en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) . Le potentiel vecteur décrit par

l'équation (5.1.2) pour $\Lambda \approx 1$ s'exprimera comme suit :

$$A_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2} \right). \quad (5.1.4)$$

Ces équations (5.1.3) et (5.1.4) serviront de point de départ pour l'obtention des principaux résultats de ce troisième article.

5.1.2. Le quadripotentiel sous le formalisme des tétrades

À la fin de la section 2.2.1, on avait brièvement introduit les bases du formalisme des tétrades en relativité générale. On avait expliqué que ce formalisme est basé sur une vision plus topologique faisant impliquer les formes différentielles. On avait terminé cette brève explication en mentionnant que l'électromagnétisme pouvait se formuler sous cette forme. Dans cette sous-section, on détaillera plus.

On montrera ici un bel exemple de la différence entre les formalismes covariant et des tétrades via le quadripotentiel exprimé par l'équation (5.1.4). On voit dans cette équation (5.1.4) que le quadripotentiel covariant est quadratique. Mais puisque qu'un champ magnétique se définit conventionnellement comme $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, il y a à prime abord un certain problème de dimension physique. Pour régler ce problème, on utilise plutôt le quadripotentiel sous la forme des tétrades. Ce quadripotentiel sera alors linéaire et donnera le champ magnétique constant dans ce cas.

Donc, à partir de cette équation (5.1.4), par cette méthode des tétrades, on obtient un champ magnétique constant s'étalant dans la direction positive de l'axe z (i.e. $\mathbf{B}^{\hat{\mu}} = (0, 0, B)$). On a d'abord le résultat que la seule composante non nulle de $A_{\hat{\mu}}$ est donnée par [66, 72] :

$$A_{\hat{\phi}} = A^{\hat{\phi}} = \sqrt{A_\phi A^\phi} = \frac{Br \sin \theta}{2}. \quad (5.1.5)$$

Avec les équations (5.1.3) et (5.1.4) ainsi que $u_\beta = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}(1, 0, 0, 0) \approx (1, 0, 0, 0)$ pour les champs faibles, on trouve que le champ magnétique s'exprime comme :

$$B^\alpha = \frac{\epsilon^{\alpha t \mu \phi}}{\sqrt{-g}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} F_{\mu\phi} \approx \frac{\epsilon^{\alpha t \mu \phi}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu A_\phi = B \left(0, \cos \theta, -\frac{\sin \theta}{r}, 0 \right). \quad (5.1.6)$$

Alors, on obtient de la même méthode des tétrades que :

$$B^{\hat{\alpha}} = B (0, \cos \theta, -\sin \theta, 0). \quad (5.1.7)$$

L'équation (5.1.7) correspond à un champ magnétique constant en direction $+\hat{z}$ en coordonnées cylindriques. On peut donc obtenir ce résultat en prenant le produit vectoriel avec les composantes spatiales de $A_{\hat{\mu}}$.

5.1.3. Le potentiel de type Yukawa pour les situations astrophysiques

Dans ce troisième article, on a aussi comme but de vérifier l'interaction gravitationnelle d'un point de vue expérimental. On doit dans ce cas utiliser l'interaction de type Yukawa pour y arriver. Dans la littérature, il n'y a pas uniquement la forme exprimée par l'équation (2.5.2) de ce potentiel qui existe. Cette équation (2.5.2) est surtout valide pour une interaction à courtes distances. On veut toutefois une forme de ce potentiel pouvant être valide pour de grandes distances et applicable à des situations astrophysiques.

Le domaine de l'expérimentation des effets de la gravitation sur les particules quantiques est intéressant et riche en études pour tester la force gravitationnelle newtonienne. On a étudié dans ces travaux les effets de la gravité sur des faibles distances dans des expériences en laboratoire (voir réfs. [73, 74, 75]). On a aussi fait l'étude sur des observations astrophysiques [76]. Le type d'étude le plus largement effectuée pour examiner la force gravitationnelle proportionnelle à l'inverse du carré de la distance est basée sur un potentiel gravitationnel augmenté par un terme de type Yukawa. On l'exprime comme suit (voir réfs. [28, 32]) :

$$V(\rho) = -\frac{GMm}{(1+\delta)\rho} \left(1 + \delta \exp\left(-\frac{\rho}{\lambda}\right) \right), \quad (5.1.8)$$

où δ est un paramètre sans dimension exprimant l'intensité du potentiel additionnel de type Yukawa par rapport au potentiel newtonien et λ est la distance de Yukawa sur laquelle l'interaction additionnelle agit. Cette forme exprimée par l'équation (5.1.8) sera utilisée à la fin du troisième article, notamment pour estimer numériquement l'intensité des corrections gravitationnelles aux niveaux de Landau.

5.2. Objectifs et méthodologie

En ayant montré à la section 2.4 l'origine de la quantification de Landau, ce troisième article possède comme premier objectif de connaître précisément les corrections gravitationnelles en énergie des niveaux de Landau conventionnels exprimés par l'équation (2.4.15). On veut en même temps déterminer si la dégénérescence de ces niveaux conventionnels sera supprimée via ces corrections gravitationnelles. On commencera par effectuer ce travail pour une particule quantique soumise à un champ magnétique uniforme, dont son quadripotential est décrit par l'équation (5.1.4), et qui évolue dans un espace-temps de Schwarzschild dont la métrique est décrite par l'équation (5.1.3). Une fois l'équation de Schrödinger obtenue, on obtient les niveaux de Landau avec les corrections gravitationnelles provenant de l'espace-temps de Schwarzschild via deux méthodes différentes. On utilise en premier lieu la méthode des perturbations quantiques indépendantes du temps décrite à la section 2.1.2 et ensuite la méthode d'approximation par le potentiel harmonique décrite à la section 2.3.2. On démontre par la suite que certaines autres méthodes ne peuvent pas fonctionner. Finalement, on répète le même type d'exercice via la méthode de la section 2.1.2 pour la perturbation décrite par

l'équation (5.1.8) afin de pouvoir vérifier expérimentalement ces corrections gravitationnelles aux niveaux de Landau conventionnels.

La première grande étape consiste à poser l'équation de Klein-Gordon de la forme (2.2.12) pour obtenir l'équation de quantification de cette particule baignant dans un champ magnétique uniforme dans l'espace-temps de Schwarzschild. En posant certains Ansatz et en se projetant sur le plan xy , on obtiendra l'équation de Klein-Gordon générale et applicable pour toute situation physique sur le plan où évolue la particule quantique.

Dans cet article, on a surtout insisté sur l'approximation non-relativiste et on a supposé que le champ gravitationnel auquel la particule est soumise est faible. On effectue ce type d'approximation pour des niveaux de Landau et un champ gravitationnel newtonien beaucoup plus faibles par rapport à l'énergie provenant de la masse de la particule test. Sous ces considérations, on applique ces approximations à l'équation de Klein-Gordon obtenu précédemment pour finalement obtenir l'équation de Schrödinger de la quantification de Landau avec en supplément le potentiel newtonien de la masse centrale M comme terme de perturbation. Ce potentiel newtonien de cette masse M provient de la métrique de Schwarzschild et représente le terme d'influence gravitationnelle pour ce système physique.

De là, on se servira de la solution non-perturbée décrite par l'équation (2.4.13) de cette équation de Schrödinger pour appliquer la méthode des perturbations quantiques décrite à la section 2.1.2. On applique les conditions aux frontières de type Dirichlet (éq. (2.1.9)) à l'infini et à la surface $\rho = \rho_0$ de la masse M . En appliquant l'orthonormalisation pour les solutions exprimées par l'équation (2.4.13) et en appliquant la perturbation exprimée par le potentiel newtonien de la masse M , on obtient les niveaux de Landau avec correction d'ordre 1. On définit même des nouvelles fonctions spéciales basées sur les intégrales de perturbations et d'orthonormalisation pour parvenir à cet objectif. Les détails de ces dérivations sont présentés à l'annexe A. On obtient aussi que le terme de correction dépend non-seulement du niveau n , mais dépend également du nombre quantique azimutal ℓ . Cette dépendance en ℓ subdivise ces niveaux de Landau et supprime définitivement la dégénérescence de ces mêmes niveaux. Pour le montrer clairement, on prend l'énergie avec la correction d'ordre 1 du niveau $n = 1$, peu importe ℓ , et on voit clairement l'influence du nombre quantique ℓ sur les termes de correction d'ordre 1. Par la suite, on prendra la limite pour ℓ très grand et on se trouve à simplifier grandement les termes de corrections d'ordre 1. Finalement, de manière similaire, on obtient les corrections quantiques d'ordre 2, là aussi la subdivision des niveaux selon ℓ se maintient. Et en plus, contrairement à la correction d'ordre 1, on obtient que la correction d'ordre 2 dépend d'abord des termes gravitationnels. Cela veut dire que si on enlève le champ magnétique du système, la correction d'ordre 2 continuera d'exister pendant que la correction d'ordre 1 disparaîtra. On a même fait l'analogie entre la correction d'ordre 2 obtenu ici et les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène.

On retrouvera des résultats similaires via l'approche du potentiel harmonique telle que décrite à la section 2.3.2. On applique la démarche de cette section 2.3.2 à la lettre. On obtient pour les énergies de quantification une expression contenant les niveaux de Landau conventionnels ainsi que les corrections d'ordres 1 et 2 contenant les termes gravitationnels newtoniens. Cette deuxième méthode confirme bel et bien que l'on obtient des corrections d'ordres 1 et 2 aux niveaux d'énergies de Landau de valeurs finies. On obtient d'ailleurs des termes très similaires aux expressions obtenues par les perturbations quantiques.

On démontre que les méthodes utilisant les équations différentielles de Heun bi-confluentes ne donnent pas une condition de quantification satisfaisante. Pour la forme polynômiale de cette équation, la raison en est que l'on ne retrouve pas exactement les niveaux de Landau exprimés par l'équation (2.4.15). Or, pour avoir une condition de quantification satisfaisante, il faut impérativement retrouver exactement la même forme que l'équation (2.4.15). Pour la forme asymptotique, on obtient une seule condition sous forme d'une série infinie, ce qui en pratique ne permet pas de dégager une expression analytique finie. On ne peut donc obtenir une quantification via un polynôme de degré fini. Ces deux méthodes sont à éliminer.

Pour pouvoir éventuellement mesurer les corrections gravitationnelles aux niveaux de Landau, on prend le potentiel de type Yukawa exprimé par l'équation (5.1.8). Cette forme est valide surtout pour des situations de type astrophysique. En utilisant les perturbations quantiques via l'application de la méthode de la section 2.1.2, on obtient les corrections aux niveaux de Landau, y compris la contribution du terme de type Yukawa. On obtient un terme supplémentaire sous forme d'une série infinie pour la correction de type Yukawa. De là, on approxime ce dernier terme en posant que l'exponentielle reste constante et ainsi on obtient des termes plus près des termes de correction d'ordre 1 pour le potentiel newtonien. On peut alors estimer les effets gravitationnels de la masse centrale et de la déviation de type Yukawa sur les niveaux de Landau.

Toute cette démarche pour connaître les corrections en énergies aux niveaux de Landau nous a permis de respecter tous les objectifs de ce troisième article. On a effectué cet exercice pour une masse centrale produisant un champ gravitationnel purement newtonien pour ensuite répéter la même démarche pour un potentiel de type Yukawa pour des situations astrophysiques. On répétera cet exploit pour le quatrième article pour deux autres types d'espace-temps en utilisant une méthodologie très similaire.

5.3. Principaux résultats

5.3.1. Les équations finales de Klein-Gordon et de Schrödinger à résoudre

À partir des équations (5.1.3) et (5.1.4), on applique à la lettre les premières étapes de la méthode expliquée à la section 5.2 pour obtenir l'équation de Klein-Gordon générale pour

la particule dans le plan xy :

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 \rho}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 \rho}\right)^{-1} \left(-\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right) \right] R = 0. \quad (5.3.1)$$

On effectue les approximations suivantes non-relativistes et de faibles champs : soit $GM \ll c^2 \rho$, $\hbar eB/m \ll mc^2$, $\mathcal{E} \ll mc^2$ et $E = mc^2 + \mathcal{E}$. De là, on obtient une équation de Schrödinger de la forme de l'équation (2.1.6) pour notre système comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' + \left[\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2 (\ell^2 - \frac{1}{4})}{2m \rho^2} - \frac{\hbar e B \ell}{2m} - \frac{GMm}{\rho} \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (5.3.2)$$

C'est l'équation (5.3.2) qui sera résolue via les deux méthodes expliquées aux sections 2.1.2 et 2.3.2, respectivement.

5.3.2. Les niveaux de Landau avec corrections via les perturbations quantiques

On applique la méthode décrite à la section 2.1.2 en utilisant la solution non-perturbée décrite par l'équation (2.4.13) et qui s'exprime ici comme :

$$\Psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) = A_{n\ell} \rho^{\ell + \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar} \rho^2\right) {}_1F_1\left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2} \rho^2\right). \quad (5.3.3)$$

En appliquant la démarche décrite à la section 5.2, on obtient en bout de piste l'expression des niveaux de Landau avec correction d'ordre 1 comme suit :

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}, \quad (5.3.4)$$

où on a les expressions :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell} &= \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+1} \mathcal{M}_{n\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2} \rho_0^2} \Gamma(\ell+1) (-n)_p (-n)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q) \Gamma(n+k)}{\Gamma(q+k) \Gamma(n+\ell+1)} \\ &\quad \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k} {}_3F_2(-n+p, \ell+1-k, 1-k-q; \ell+p+1, 1-k-n; 1), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{P}}_{n\ell} &= \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{n\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell + \frac{1}{2}) (-n)_p (-n)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma(n + \frac{1}{2} + k)}{\Gamma(q+k+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\ell+1)} \\
&\quad \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k} {}_3F_2\left(-n+p, \ell + \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} - k - q; \ell+p+1, \frac{1}{2} - k - n; 1\right). \quad (5.3.6)
\end{aligned}$$

Les équations (5.3.5) et (5.3.6) sont obtenues en utilisant les équations (A.0.10) et (A.0.17) de l'annexe A en prenant $m = n$ dans ces deux expressions. Toutefois, les facteurs $\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\ell-1}$ et $\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}$ présents dans ces équations (A.0.10) et (A.0.17) se simplifient et donnent le facteur $\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ présent à l'équation (5.3.4).

Pour le niveau $n = 1$, on obtient comme expression pour les niveaux de Landau avec correction d'ordre 1 :

$$\mathcal{E}_{1\ell} = \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{P}}_{1\ell} \bar{\mathcal{M}}_{1\ell}^{-1}. \quad (5.3.7)$$

Les quantités $\bar{\mathcal{M}}_{1\ell}$ et $\bar{\mathcal{P}}_{1\ell}$ sont exprimées à partir des équations (A.0.14) et (A.0.18) de l'annexe A qui sont les suivantes :

$$\bar{\mathcal{M}}_{1\ell} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+1} \mathcal{M}_{1\ell} = \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\ell + 1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + 2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + 3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (5.3.8)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{1\ell} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{1\ell} = \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (5.3.9)$$

De plus, si $\ell \gg 1$, l'équation (5.3.7) se simplifie davantage comme suit :

$$\mathcal{E}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\ell + \frac{3}{4}}{\ell+1}\right) \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\ell+1)}. \quad (5.3.10)$$

Enfin, les équations (5.3.8) et (5.3.9) deviennent selon les équations (A.0.15) et (A.0.19) de l'annexe A :

$$\bar{\mathcal{M}}_{1(\ell \gg 1)} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+1} \mathcal{M}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{1}{2} \left[\Gamma(\ell+1) - \frac{2\Gamma(\ell+2)}{\ell+1} + \frac{\Gamma(\ell+3)}{(\ell+1)^2} \right] \approx \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\ell+1}. \quad (5.3.11)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_{1(\ell \gg 1)} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell + \frac{1}{2}} \mathcal{P}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{1}{2} \left[\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) - \frac{2\Gamma(\ell + \frac{3}{2})}{\ell + 1} + \frac{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})}{(\ell + 1)^2} \right] \approx \frac{1}{2} \frac{(\ell + \frac{3}{4})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{(\ell + 1)^2}. \quad (5.3.12)$$

On voit donc clairement dans les équations (5.3.4) à (5.3.12) qu'il y a subdivision des niveaux de Landau selon ℓ et donc la dégénérescence infinie des niveaux de Landau est définitivement supprimée. C'est un des résultats très crucial de ce troisième article.

De plus, la correction d'ordre 2 aux niveaux de Landau s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n\ell}^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k, \ell | V(\rho) | n, \ell \rangle|^2}{\mathcal{E}_k^{(0)} - \mathcal{E}_n^{(0)}} = m(GMm)^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k, \ell | \rho^{-1} | n, \ell \rangle|^2}{\beta \hbar^2 (k - n)} \\ &= m(GMm)^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\mathcal{P}_{kn\ell} \mathcal{M}_{n\ell}^{-1/2} \mathcal{M}_{k\ell}^{-1/2}|^2}{\beta \hbar^2 (k - n)} = m(GMm)^2 \sum_{k \neq n} \frac{\beta}{2} \frac{|\bar{\mathcal{P}}_{kn\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1/2} \bar{\mathcal{M}}_{k\ell}^{-1/2}|^2}{\beta \hbar^2 (k - n)} \\ &= \sum_{k \neq n} \frac{m(GMm)^2}{2\hbar^2 (k - n)} \bar{\mathcal{P}}_{kn\ell}^2 \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} \bar{\mathcal{M}}_{k\ell}^{-1}, \quad (5.3.13) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{P}_{kn\ell}$ et $\bar{\mathcal{P}}_{kn\ell}$ qui sont selon l'équation (A.0.17) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{kn\ell} &= \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\ell - \frac{1}{2}} \bar{\mathcal{P}}_{kn\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell + \frac{1}{2}) (-n)_p (-k)_q \rho_0^{2(p+q+j)}}{2j! p! q! (\ell + 1)_p (\ell + 1)_q} \frac{\Gamma(\ell + q + 1) \Gamma(k + \frac{1}{2} + j)}{\Gamma(q + j + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \ell + 1)} \\ &\quad \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+j-\ell - \frac{1}{2}} {}_3F_2(-n + p, \ell + \frac{1}{2} - j, \frac{1}{2} - j - q; \ell + p + 1, \frac{1}{2} - j - k; 1). \quad (5.3.14) \end{aligned}$$

Si on met que le champ magnétique $B = 0$ à l'équation (5.3.13), on voit facilement que cette correction d'ordre 2 subsistera dans cette situation d'absence de champ magnétique. De par sa forme, on peut facilement comparer l'équation (5.3.13) aux niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène.

5.3.3. Les niveaux de Landau avec corrections via l'approximation de l'oscillateur harmonique

En appliquant la méthode exposée à la section 2.3.2, on obtient que les niveaux d'énergies de Landau avec corrections d'ordres 1 et 2 s'expriment par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nl} = \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\ell}{2} \right) + \frac{GMm}{(\ell^2 - \frac{1}{4})^{3/4}} \sqrt{\frac{eB}{32\hbar}} \left(n + \frac{1}{2} - 4 \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right) \\ + \frac{11m(GMm)^2}{64\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})^{3/2}} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{8}{11} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Si on met le champ magnétique $B = 0$ dans le potentiel effectif de l'équation (5.3.2), on obtient que les niveaux de Landau avec corrections s'expriment par :

$$\mathcal{E}_{nl} = \frac{m(GMm)^2}{2\hbar^2 \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2}} \left(2n + 1 - \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \quad (5.3.16)$$

Par contre, si on met $M = 0$ dans ce même potentiel effectif de l'équation (5.3.2), on obtient que ces mêmes niveaux s'expriment par :

$$\mathcal{E}_{nl} = \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\ell}{2} \right). \quad (5.3.17)$$

On voit aux équations (5.3.15) à (5.3.17) les similitudes avec les résultats obtenus par les perturbations quantiques. On voit surtout que l'équation (5.3.15) possède plusieurs points en commun avec les équations (5.3.4) et (5.3.13), notamment à cause des constantes physiques qui y sont présentes respectant ainsi, dans tous les cas, les mêmes proportionnalités.

5.3.4. Les niveaux de Landau avec correction par le potentiel de type Yukawa

En utilisant le potentiel de type Yukawa tel que défini par l'équation (5.1.8), on obtient, via les perturbations quantiques, les niveaux de Landau avec corrections comme suit :

$$\mathcal{E}_{nl} = \mathcal{E}_n^{(0)L} + (1 + \delta)^{-1} \mathcal{E}_{nl}^{(1)N} + \delta (1 + \delta)^{-1} \mathcal{E}_{nl}^{(1)Y}, \quad (5.3.18)$$

où le terme de correction dû à la correction de type Yukawa dans l'équation (5.1.8) est :

$$\mathcal{E}_{nl}^{(1)Y} = -GMm \mathcal{Y}_{nl} \mathcal{M}_{nl}^{-1} = -GMm \sqrt{\frac{\beta}{2}} \bar{\mathcal{Y}}_{nl} \bar{\mathcal{M}}_{nl}^{-1}. \quad (5.3.19)$$

Selon l'équation (A.0.22) de l'annexe A pour $m = n$, on a que $\bar{\mathcal{Y}}_{n\ell}$ s'exprime par :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{Y}}_{n\ell} &= \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{n\ell} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ r=0}}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}) (-n)_p (-n)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2e^{\frac{\beta}{2}\rho_0^2} r! k! \lambda^r p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q)\Gamma(n+\frac{1}{2}+k-\frac{r}{2})}{\Gamma(q+\frac{1}{2}+k-\frac{r}{2})\Gamma(n+\ell+1)} \\ &\times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\frac{r}{2}} {}_3F_2\left(-n+p, \ell+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}-k, \frac{r}{2}+\frac{1}{2}-k-q; \ell+p+1, \frac{r}{2}+\frac{1}{2}-k-n; 1\right).\end{aligned}\tag{5.3.20}$$

Puisque l'équation (5.3.19) implique une série infinie en $1/\lambda$ selon l'équation (5.3.20), on préfère fixer le terme exponentiel comme étant $e^{-\rho_0/\lambda}$. En considérant ce terme pour la correction de type Yukawa, l'équation (5.3.19) s'exprimera plutôt de la forme :

$$\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)Y} \approx -GMme^{-\rho_0/\lambda} \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} = e^{-\rho_0/\lambda} \mathcal{E}_{n\ell}^{(1)N}.\tag{5.3.21}$$

On a dans cette équation les équations (5.3.5) et (5.3.6) tout comme pour les corrections dues au potentiel newtonien pur.

Numériquement, on montre au tableau 1 les corrections aux niveaux de Landau newtonienne ainsi que la réduction de la correction provenant du terme de type Yukawa via l'utilisation des équations (5.3.4) et (5.3.21) pour une sphère massive.

| M (kg) | ρ_0 (m) | $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)N}$ (eV) | λ (m) | $e^{-\rho_0/\lambda}$ |
|----------|--------------|-----------------------------------|---------------|-----------------------|
| 1000 | 1,0 | 10^{-16} | 10^{-6} | e^{-10^6} |

Tableau 1. Valeurs numériques des corrections aux niveaux de Landau pour un potentiel newtonien avec correction de type Yukawa.

5.4. Les contributions

Mes contributions

- Obtention et vérification de la forme finale de l'équation de Schrödinger afin de pouvoir appliquer les approches possibles pour les niveaux de Landau.
- Calculs des niveaux d'énergies de Landau via la théorie des perturbations quantiques indépendantes du temps. Il y a eu introduction d'une classe de polynômes inédits pour mieux résoudre.

- Calculs des niveaux d'énergies de Landau via l'approche de l'oscillateur harmonique et approximations appropriées pour les obtenir.
- Vérification et améliorations pour le cas de type Yukawa : proposition d'une expérience.
- J'ai effectué les vérifications pour toutes les démarches et les intégrales.
- Vérifications finales et détaillées des résultats.
- J'ai effectué les calculs, surtout les niveaux de Landau par les perturbations quantiques et par l'approche de l'oscillateur harmonique.

Bref, la rédaction et le travail sur cet article s'est effectué avec beaucoup d'échanges entre moi-même et mon directeur ; l'un corrigeait l'autre.

Les contributions de mon directeur

F. Hammad a fait les préliminaires, des vérifications, a proposé plusieurs intégrales ainsi que beaucoup d'interprétations. Il a proposé l'approche de perturbation avec le potentiel de type Yukawa pour des expériences futures de vérification du phénomène de la force gravitationnelle.

Troisième article.

Landau levels in a gravitational field : the Schwarzschild spacetime case

par

Alexandre Landry¹ et Fayçal Hammad²

- (¹) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (²) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7
- (³) Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, Que-
bec, Canada J1M 0C8

Cet article a été soumis dans European Physical Journal Plus [[62](#)].

Landau levels in a gravitational field: The Schwarzschild spacetime case

Alexandre Landry¹ and Fayçal Hammad^{1,2,3ab}

¹ Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada

² Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada

³ Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 0C8 Canada

Received: date / Revised version: date

Abstract. We investigate the gravitational effect on Landau levels. We show that the familiar infinite Landau degeneracy of the energy levels of a quantum particle moving inside a uniform and constant magnetic field is removed by the interaction of the particle with a gravitational field. First, two independent approaches are used to solve the relevant Schrödinger equation. It is found that both approaches yield qualitatively similar results within their respective approximations. Then, with the goal of clarifying some confusing results found in the literature concerning the use of a third independent approach for extracting the quantization condition based on a similar differential equation, we show that such an approach cannot yield a general and yet consistent result. We point out to the more accurate, and yet impractical, way to use such an approach, a way which does in principle yield a consistent quantization condition. Finally, we show how our results could be used to contribute in a novel way to the existing methods for testing gravity at the tabletop experiments level as well as at the astrophysical observational level.

PACS. 04.80.y Experimental studies of gravity – 04.20.q Classical general relativity – 03.65.w Quantum mechanics – 03.65.Ge Solutions of wave equations: bound states

1 Introduction

Bringing to light the quantum properties of gravity has recently been the subject of intense investigation. Many of the investigations conducted in the past were focused on the more modest attempt to observe the effect of gravity on a quantum particle by studying, more noticeably, the behavior of cold neutrons inside a gravitational field [1, 2, 3, 4, 5, 6]. In such experiments the gravitational effect manifests itself on the quantum particle through the discrete gravitational energy spectrum the particle acquires while moving inside the gravitational field of the Earth.

On the other hand, more recent proposals [7, 8, 9] have rather been more ambitious in the sense that they consist of experimental setups designed to make manifest the quantum character of gravity itself rather than the way a particle behaves under the influence of gravity. The quantum character investigated is the quantum superposition of the gravitational field. Notwithstanding the higher importance of these more recent proposals towards unraveling the quantum nature of gravity, we believe that any additional effect based on the quantum interaction between the classical gravitational field and a quantum particle would, not only take us closer towards understanding gravity at the quantum level as well, but might even give us new ways of testing classical gravity itself.

In two recent papers, new proposals have been put forward to bring to light this interaction of a classical gravitational field with a quantum particle. In Ref. [10], the effect on the quantum states of cold neutrons of a gravitational field created by an oscillating massive object has been studied in detail. In Ref. [11] the possibility of stimulating gravitons with ultra cold neutrons has been suggested. Now, in both of these works the investigation consisted of using the quantum behavior of neutrons in a known pure gravitational field — that of the Earth. It would be interesting, however, to investigate the gravitational effect on a particle, not through what is expected from its quantum behavior inside a given potential — here gravitational — but by searching for a novel effect the gravitational field could have

^a *Present address:* alexandre.landry.1@umontreal.ca

^b *Present address:* fhammad@ubishops.ca

on an otherwise usual quantum phenomena involving the particle that does not originally include gravity. Such investigation could indeed serve two independent purposes; one which would be purely theoretical and one which might be oriented more towards the experimental side of the field. Indeed, our first purpose here is to make a new contribution to the existing proposals for making manifest the interaction of gravity with quantum particles. Our second purpose, which will be based on the outcomes of the first, is to put forward a new way for testing gravity itself using quantum particles.

We propose here to investigate the effect of the gravitational field on the well-known Landau quantized energy levels of a charged particle moving inside a uniform and constant magnetic field (see, e.g., Ref. [12]). More specifically, we show that the gravitational field splits the Landau levels and removes their usual degeneracy¹. It is known that this simple quantum effect helped explain the very important quantum Hall effect behind which many important technological applications have sprung (see, e.g., Refs. [14, 15]).

It should be noted here, that, unlike the indifference of the quantum Hall effect to the gravitational field, as shown in Ref. [16], gravity does have an effect on the Landau levels of a charged particle as we are going to show. Our investigation aligns thus with what was pointed out in Ref. [17] — based on general grounds — that Landau levels are split under the effect of an external potential which is monotonic in the radial distance along the plane perpendicular to the magnetic field. This does not, however, contradict what was found in Ref. [16], for the investigation in the latter reference was about the Hall conductivity, which is indeed topological, and hence metric-independent.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we derive the differential equation governing the motion of a charged particle inside a uniform magnetic field from the Klein-Gordon equation of a charged particle minimally coupled to the electromagnetic field in the curved Schwarzschild spacetime around a spherical mass. We first show how one recovers the familiar Landau levels by setting the mass to zero in the differential equation, and then we extract an approximate equation for the case of a weak non-zero gravitational field. In Section 3, we expose four different methods for using the equation to extract the quantization condition. We show that only the first two methods yield a consistent and general result. The third approach introduces an extra condition on the source of the gravitational field, whereas the last one is consistent but cannot be useful in practice. In Section 4, we rely on the first approach to show how to use the splitting of Landau levels induced by the gravitational field to test any departure from Newton's square-law for gravity. We examine the widely investigated Yukawa-like potential as a concrete example. We conclude this paper with a brief Summary & Conclusion section. Appendix A is devoted to the presentation of the detailed calculations needed in the text.

2 A particle inside a magnetic field in the Schwarzschild spacetime

Landau quantization of the energy levels of a charged particle in Minkowski spacetime arises in the presence of a uniform and constant magnetic field \mathbf{B} which is perpendicular to the plane in which the charged particle is moving. In the usual textbook treatment of the problem (see e.g., Ref. [12]) one writes down the Schrödinger equation for a particle, minimally interacting with the field, by substituting the partial spatial derivatives $-i\hbar\partial_i$ by the operator $-i\hbar\partial_i - qA_i$, where q is the charge of the particle and A_i is the vector potential causing the magnetic field \mathbf{B} .

In order to take into account the interaction of the particle with the gravitational field, however, we are going to use, instead of the Schrödinger equation, the Klein-Gordon equation, $(\square + m^2c^2)\varphi = 0$. We ignore in this paper the spin of the test particle. The equation is written in curved spacetime, where m is the mass of the particle, c is the speed of light and $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ is the d'Alembertian operator. Therefore, our particle is going to be governed by the following second-order differential equation (see e.g., Ref. [18]),

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) + m^2 c^2 \right] \varphi = 0. \quad (1)$$

Here, $g^{\mu\nu}$ is the inverse of the spacetime metric and g its determinant. We have used here the minimal prescription $D_\mu = -i\hbar\partial_\mu - eA_\mu$ to couple the particle to the four dimensional vector potential A_μ of the electromagnetic field. Also, in view of the possibility of using heavy ions as test particles to minimize the contribution of the intrinsic spin, we choose here to take the electron charge e as the charge of our particle.

We are interested in this paper in finding how the gravitational field of a spherical mass affects the Landau levels of a charged particle moving along the *equatorial plane* of the mass. For that purpose, one needs first to consider the curved spacetime created by the spherical mass M . Such a spacetime is represented by the Schwarzschild metric. As is

¹ See Ref. [13] for a recent investigation on the effect of a linear electric field on Landau levels. In this regard, it should be remarked here that one could conduct a similar investigation using gravity rather than an electric field. In addition, one could then use a large massive plane with a circular hole in order to create the needed linear gravitational field that would lead to the simple harmonic oscillations of the charge in the vertical direction to the plane. The fundamental issue behind such an approach remains, of course, the radiation of the charge during its simple harmonic motion in the vertical direction.

well-know in general relativity, however, one should *a priori* take into account the effect on the curvature of spacetime due to the uniform and constant magnetic field \mathbf{B} as well. The combined effect of the mass M and such a \mathbf{B} -field – chosen to lie along the z direction — gives rise the so-called Schwarzschild-Melvin spacetime [19]. It is a special case given by Ernst in Ref. [20] of the full solution of the Einstein-Maxwell equations obtained in Ref. [21]. In the coordinates (t, r, θ, ϕ) , such a metric reads [19],

$$ds^2 = \Lambda^2 \left(-\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right) + \frac{r^2}{\Lambda^2} \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2)$$

We have used here, after restoring the standard units, the convenient notation of Ref. [22] in which, $\Delta = r^2 - 2GM r/c^2$ and $\Lambda = 1 + 2\pi G \epsilon_0 c^{-2} B^2 r^2 \sin^2 \theta$, with ϵ_0 being the vacuum permittivity constant. On the other hand, the vector potential corresponding to such a constant magnetic field within the metric (2) takes the form [22]²,

$$A_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2\Lambda} \right). \quad (3)$$

Now, the classical motion of both neutral and charged test particles are affected by such a spacetime and have been studied analytically in detail in Ref. [22]. It was found that the magnetic field influences neutral particles *geometrically* and creates a potential barrier that prevents both neutral and charged particles from escaping away from the axis of symmetry to infinity. In addition, a numerical study of the trajectories of such classical particles has also been carried out in Ref. [23] with the conclusion that the particles' trajectories in such a spacetime are integrable in very special cases only.

In fact, unlike the Schwarzschild spacetime, the metric (2) does not reduce to the flat Minkowski metric even in the absence of the central mass M . In such a case, the metric (2) represents the so-called Melvin's magnetic universe [24, 25]. The investigation of the behavior of a *quantum* particle in Melvin's universe has been carried out in Ref. [26]. The energy spectrum of the test particle was found to display indeed a Landau-like form which is corrected by a term arising from the *geometric* influence of the \mathbf{B} -field on the particle. In addition, as argued in Ref. [26], such a correction term becomes significant only for a magnetic field intensity as high as 10^{19} G and for a quantum number n of the order 10^{30} .

However, our focus in this paper is, rather, the effect of the gravitational field created by a spherical mass on the usual Landau levels, not the geometric, *i.e.*, gravitational, effect of the magnetic field itself. For that purpose, our setup here will be that of a spherical mass immersed inside a magnetic field the intensity of which brings a negligible geometric contribution to the background spacetime. Such an assumption is indeed amply sufficient for tabletop experiments on Earth as well as at the level of astrophysical objects for which the approximation $2\pi G \epsilon_0 c^{-2} B^2 r^2 \ll 1$ holds. For young neutron stars and magnetars the intensity of the magnetic field can indeed be low and range around $10^{8 \sim 12}$ G (See, e.g., Ref. [27]). Under those conditions we may thus safely adopt the metric (2) with the approximation $\Lambda \sim 1$, in which case the metric reduces to the pure Schwarzschild spacetime.

Therefore, in this paper we take the metric in Eq. (1) to be that of the pure Schwarzschild spacetime around a spherical mass M :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4)$$

Here, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ is the 2-metric on the unit sphere. Also, we are going to use the vector potential A_μ of expression (3) which reduces, for $\Lambda \sim 1$, to its usual form in the axially symmetric (cylindrical) gauge (the equivalent of the Landau gauge) in spherical coordinates (t, r, θ, ϕ) , in which it reads, $A_\mu = (0, 0, 0, \frac{1}{2} Br^2 \sin^2 \theta)$. Thus, we assume, for definiteness, that the magnetic field \mathbf{B} is indeed directed along the z -axis.

Now, because of the symmetry of the planar motion of the particle around the z -axis, we expect the wave function for the particle to be of the form, $\varphi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\ell\phi} R(r, \sin \theta)$, where E is the energy of the particle and ℓ is a positive integer — we assume the particle is going in a specific direction, say counterclockwise, around the mass M . Therefore, the Klein-Gordon equation for the particle in this curved spacetime reads explicitly,

$$\left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \partial_r + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_r^2 + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \frac{\cos \theta \partial_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4\hbar^2} \right] R(r, \theta) = 0. \quad (5)$$

² Note that we resorted back here to the covariant form of the potential vector as the tetrad form $A_\phi = \frac{1}{2\Lambda} Br \sin \theta$ we wrote in our previous version of the manuscript leads to much confusion. In fact, the advantage of the tetrad expression used in the previous version is that it has the right dimensions for a potential vector and it allows one to straightforwardly extract the magnetic field from the spatial components using the usual curl formula, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Further, by having the particle move along the equatorial plane, along which $\theta = \frac{\pi}{2}$, the cylindrical symmetry of the system allows us to also expect the function $R(r, \theta)$ to depend only on the distance $\rho = r \sin \theta$ of the particle from the z -axis which is perpendicular to the plane of motion. This would then make R a function of the form $R(r, \sin \theta) = R(r \sin \theta) = R(\rho)$. Therefore, we have, $\partial_\theta R = r \cos \theta \partial_\rho R$. Thus, we also have, $\partial_\theta^2 R = -r \sin \theta \partial_\rho R + r^2 \cos^2 \theta \partial_\rho^2 R$. Substituting these inside the previous equation, the latter takes the following simplified explicit form for $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 \rho}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 \rho}\right)^{-1} \left(-\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2}\right) \right] R = 0. \quad (6)$$

This is the general equation that describes the planar motion of a charged particle inside a magnetic field within the spherically symmetric Schwarzschild spacetime. Before we examine how to extract the quantization condition from this equation for small gravitational fields, we shall first set $M = 0$ and solve the equation for $R(\rho)$ in order to make contact with what we already know about the dynamics of a charged particle in a uniform magnetic field inside the Minkowski spacetime. In fact, in addition of allowing us to check the correctness of Eq. (6), this first step will provide us with the fundamental wave function to be used later in the more interesting case of $M \neq 0$.

2.1 In Minkowski spacetime: $M = 0$

For $M = 0$, we know that we should recover the free particle of relativistic energy $E = \mathcal{E} + mc^2$, moving inside a uniform magnetic field of magnitude B and perpendicular to the plane $\theta = \frac{\pi}{2}$. Let us assume, for simplicity, a non-relativistic regime for the particle, *i.e.*, $\mathcal{E} \ll mc^2$. Then, Eq. (6) becomes, after setting $M = 0$, as follows,

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (7)$$

In order to easily solve this equation, let us choose the following ansatz for the radial wave function³, $R(\rho) = \rho^\ell v(\rho) \times \exp(-\frac{eB}{4\hbar}\rho^2)$, and denote by a prime a derivative with respect to ρ . The equation then becomes,

$$\rho v''(\rho) + (2\ell + 1 - \beta \rho^2) v'(\rho) + (\alpha - \beta)\rho v(\rho) = 0. \quad (8)$$

Here, we have set, for convenience, $\alpha = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$ and $\beta = \frac{eB}{\hbar}$. Next, perform the following change of variable: $z = \frac{1}{2}\beta\rho^2$. This allows us, in turn, to rewrite the equation in the following canonical form [28],

$$z v''(z) + (\ell + 1 - z) v'(z) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \right) v(z) = 0. \quad (9)$$

This equation is of the well-known form $z v'' + (b - z)v' - av = 0$, called a confluent hypergeometric differential equation, the solution of which is a linear combination of two confluent hypergeometric functions ${}_1F_1(a; b; z)$. These functions are also known as Kummer's functions [28]. The general solution to the canonical equation (9) is therefore, $v(z) = A {}_1F_1(a; b; z) + A' z^{1-b} {}_1F_1(a - b + 1; 2 - b; z)$. The constants A and A' are the two constants of integration and, in our case, $a = (1 - \alpha/\beta)/2$ and $b = \ell + 1$. Combining this general solution with our ansatz for $R(\rho)$, and using our definition of z , we finally get the particle's radial wave function as follows,

$$R(\rho) = A \rho^\ell e^{-\frac{\beta}{4}\rho^2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta}; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right). \quad (10)$$

We have discarded here the second solution that goes with the constant A' as it would make $R(\rho)$, and hence the wave function $\varphi(r)$, diverge at the origin $r = 0$ for any azimuthal quantum number $\ell \geq 0$. Now, keeping only this first solution (10), the latter also diverges exponentially for $\rho \rightarrow \infty$ unless we impose the following condition [28, 29],

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} = -n, \quad (11)$$

for some positive integer n , in which case the confluent hypergeometric function in expression (10) becomes a finite-degree polynomial. The condition (11), in turn, implies that,

$$\alpha = \beta(2n + 1). \quad (12)$$

³ In the literature, the ansatz $R(\rho) = \rho^{|\ell|} e^{-\frac{eB}{4\hbar}\rho^2} v(\rho)$ is sometime chosen for the radial function $R(\rho)$. This just makes for the two possibilities of a left(right)-moving particle around the mass M .

By substituting the values of α and β we defined below Eq. (8), we find the following more familiar quantization condition for the energy \mathcal{E} of a charged particle inside a uniform magnetic field:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (13)$$

These are the usual Landau's quantized energy levels in which we clearly see the high degeneracy of the levels due to the freedom the particle has with the orbital quantum number ℓ . Let us now use these results to examine the case of the spherically symmetric curved spacetime.

2.2 Back to the Schwarzschild spacetime: $M \neq 0$

We are interested in this paper in finding the effect of the gravitational field on the Landau levels (13). Therefore, the case of a spherical mass M for which $GM \ll c^2 \rho$ will amply be sufficient for us here. In addition of simplifying greatly our calculations, this restriction is also greatly motivated by its practical side with regard to an eventual experimental setup. Indeed, since even for neutron stars, magnetars and magnetic white dwarfs, for which the mass could be of the order of a few solar masses (or a fraction thereof for white dwarfs) and for which the radius ranges from a few kilometers for neutron stars/magnetars to a few thousands of kilometers for magnetic white dwarfs, the approximation $GM \ll c^2 \rho$ is very realistic and, hence, serves well our main purpose in the present paper.

Therefore, we can now expand what is inside the square brackets in Eq. (6) in powers of $2GM/(c^2 \rho)$ and keep only the leading order in such a ratio. Eq. (6) then takes the following form:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 + \frac{4GM}{c^2 \rho} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left(1 + \frac{2GM}{c^2 \rho} \right) + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 \rho} \right) \left(-\frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right) \right] R = 0. \quad (14)$$

This equation is very general and applicable even at the astrophysical level, provided the restrictions on the mass and the radius of the astrophysical objects of interest, as mentioned above, are satisfied. On the other hand, for not too strong magnetic fields, like those used in tabletop experiments, we always have $\hbar e B/m \ll mc^2$. Furthermore, for magnetic fields in the range $10^{3 \sim 9}$ G, like those on the surface of magnetic white dwarfs [30], the inequality $\hbar e B/m \ll mc^2$ holds even for electrons, whereas for neutron stars/magnetars, for which the magnetic fields could reach the range $10^{8 \sim 12}$ G, such an inequality holds for protons and heavier ions. Therefore, by using $E = \mathcal{E} + mc^2$, the non-relativistic regime for which $\hbar e B/m \ll mc^2$ holds makes the approximation $\mathcal{E} \ll mc^2$ amply sufficient for us here. This then implies that $E^2 \approx 2mc^2 \mathcal{E} + m^2 c^4$ and Eq. (14) becomes, after keeping only the leading first-order correction coming from the $GM/(c^2 \rho)$ factor, as follows

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} + \frac{2m^2 GM}{\hbar^2 \rho} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (15)$$

It turns out, as discussed in the Introduction, that there are at least four ways of using this equation to extract the quantization condition of the energy of the particle. In what follows, we are going to present all four methods and show that only the first two are able to provide us with a consistent, practical, and general quantization condition of energy.

3 Four methods leading to quantization

Differential equations of the form similar to Eq. (15) arise in many areas of both physics and quantum chemistry, ranging from the study of the harmonium to the confinement potentials [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. Various exact and approximate methods are known for solving such an equation with central potentials [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. However, among the more familiar ones, only two yield the right quantization condition on the energy of the particle that is both general, consistent, and practical. We are going to examine first the ones that do yield a consistent quantization condition, but which, unfortunately, are the least used ones in the recent physics literature dealing with the quantization condition of a particle obeying a similar equation. The first one consists in using the time-independent perturbation theory, whereas the second one consists in approximating the system by a simple harmonic oscillator.

3.1 Using perturbation theory

To make contact with the time-independent perturbations, we should first rewrite Eq. (15) in a Schrödinger-like form. To achieve that, let us set $R(\rho) = \rho^{-1/2}\psi(\rho)$. Eq. (15) then takes the form,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \left(\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})}{2m\rho^2} - \frac{\hbar e B \ell}{2m} - \frac{GMm}{\rho} \right) \psi = \mathcal{E}\psi \quad (16)$$

This is just a Schrödinger equation with an effective potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ made of two parts. The first part, consisting of the first three terms inside the parentheses, represents the potential of a particle inside a uniform magnetic field. This part of the effective potential is what would give rise to the familiar Landau levels (13) when solving Eq. (16) without the last term inside the parentheses. The eigenfunctions $\psi(\rho)$ of the corresponding Hamiltonian would then be found using expression (10). The last term inside the parentheses in Eq. (16) represents the second part of the effective potential, and constitutes just a small perturbing potential $V(\rho)$. In fact, recall that in our approximation of a weak gravitational field, we assume that $\rho^{-1}GMm \ll \hbar B/m$, so that the Newtonian potential $-GMm/\rho$ is indeed nothing but a small perturbation compared to the terms coming from the magnetic interaction. We are thus set for making use of the time-independent perturbation theory formalism (see, e.g., Ref. [48]).

Now, since Eq. (16) describes a particle inside a constant magnetic field and a central Newtonian potential, the system we are dealing with is very reminiscent of the well-studied systems of atoms inside high magnetic fields (see, e.g., Refs. [50,51] for a nice review). However, the works dealing with atoms inside a magnetic field are concerned with finding the energy-eigenstates and the electromagnetic transitions of an atom inside a magnetic field. As such, the problem dealt with in the literature on the subject is that of solving for the fully three-dimensional motion of the electron moving within the central potential of the nucleus. A specific approximation has to be used in that case (for strong magnetic fields it is called the ‘‘adiabatic approximation’’ [51]), which consists in expanding the wavefunction in terms of the Landau states weighed by longitudinal wave functions along the direction parallel to the magnetic field. As such, the result is that the usual Landau levels simply get augmented by the Coulomb bound state energies as displayed in Eq. (8.7) of Ref. [51]. In our case, however, we shall use instead the time-independent perturbation theory to deal with the effect of the gravitational central potential on the *planar* motion of a particle moving around a massive object inside a magnetic field. For this reason our results will differ drastically from what is found in the case of an atom inside a strong magnetic field based on the adiabatic approximation. Our result will indeed display a product of the magnetic and gravitational contributions that has not been previously reported in the literature.

If we denote the unperturbed n^{th} Landau energy level (13) by $\mathcal{E}_n^{(0)}$ then, as long as the spacing $\mathcal{E}_n^{(0)} - \mathcal{E}_m^{(0)}$ between these energy levels is greater than the Newtonian potential GMm/ρ , we are guaranteed that the perturbation expansion will be legitimate. The problem that might arise with this method is that the computation might become inaccessible as the Landau levels are infinitely degenerate. Fortunately, however, the fact that the Newtonian perturbation depends only on ρ , *i.e.*, is rotational symmetric, means that there is no coupling between two different Landau orbitals within the same Landau level.

Since we already saw that only expression (10) converges for small ρ , we are going again to keep here only that expression and use it as the eigenfunction of the unperturbed Hamiltonian corresponding to Eq. (16). Recalling then that $\psi(\rho) = \rho^{1/2}R(\rho)$, we have the following explicit expression for the unperturbed wave functions of the Schrödinger equation (16),

$$\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) = A_{n\ell} \rho^{\ell + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{4}\rho^2} {}_1F_1\left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right), \quad (17)$$

with $n = \frac{1}{2}(\alpha/\beta - 1)$. Therefore, our first task is to find the normalization constants $A_{n\ell}$ which can be determined by imposing the completeness condition on the eigenfunctions, $\int_0^\infty \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho)\psi_{m\ell}^{(0)}(\rho) d\rho = \delta_{nm}$. However, since for a more realistic setting the sphere of mass M has a finite nonzero radius ρ_0 , the test particle’s position would be limited to the interval $\rho \in [\rho_0, \infty)$. Very important, also, is the fact that our gravitational field is valid only for $\rho \geq \rho_0$, *i.e.*, outside the spherical mass.

In the realistic case of a finite-radius spherical mass we should therefore distinguish two different regions when solving the Schrödinger equation. Region *I*, say, would represent the outside of the spherical mass, for which $\rho > \rho_0$, while region *II* would represent the inside of the spherical mass, for which $\rho < \rho_0$. As an ideal system, however, we assume the spherical mass to be completely reflective for the particle. This means the particle’s wave function vanishes inside the sphere as the particle has no chance of penetrating inside the latter. Indeed, in this case our system consists effectively of a particle moving around a semi-infinite well, inside of which the potential is infinite and outside of which the potential is just that given in Eq. (16). The wave function in the region *I* being then just the expression (17), all we need to impose therefore is the continuity of the latter and its first derivative across the surface $\rho = \rho_0$. This amounts to imposing the following requirement:

$$\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho_0) = 0. \quad (18)$$

Based on expression (17), this requirement, in turn, amounts to imposing the following condition involving the confluent hypergeometric function:

$${}_1F_1\left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) = 0. \quad (19)$$

The physical meaning of the condition (19) can easily be understood as arising from the geometry of our system. In fact, solving the condition (19) for the two unknown integers n and ℓ simply returns these as a function of β , *i.e.*, the magnetic field, and the radius ρ_0 of the massive sphere. By having the finite-radius mass sit at the center does indeed geometrically disturb the motion of the particle to which all the possible Landau levels $n = 1, 2, 3, \dots$ and all the possible orbital numbers $\ell = 1, 2, 3, \dots$ would have otherwise been accessible. The existence of the forbidden region $0 < \rho \leq \rho_0$ implies that only certain values of n and ℓ are possible depending on the value of the product $\frac{1}{2}\beta\rho_0^2$. Thus, to make the particle's energies acquire the Landau levels, the magnetic field itself should be adjusted with the size of the massive sphere to allow for the condition (19) to be simultaneously satisfied. In the case of a point-like mass, *i.e.*, for $\rho_0 = 0$, the condition (18) is automatically satisfied and one does not need to impose (19) and, hence, no restriction is imposed on the quantum numbers n and ℓ either. Being interested here simply in the effect of the gravitational field on the Landau energy levels, however, we are going to assume in the remainder of this paper that a specific combination of the magnetic field and the size of the sphere has already been chosen to guarantee the existence of Landau quantum levels and orbitals.

Going back to the normalization constants $A_{n\ell}$, the normalization condition that we should impose here to get these constants is then $\int_{\rho_0}^{\infty} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho)\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho = 1$. For this purpose, we make use of the integrals computed in appendix A. We easily find that the constants $A_{n\ell}$ are given by $\mathcal{M}_{n\ell}^{-1/2}$, where $\mathcal{M}_{n\ell}$ is given by Eq. (62) after setting $n = m$ there.

Now, as noted above, although the Landau energy levels are infinitely degenerate, the fact that the gravitational interaction is rotational symmetric means that the perturbing potential $V(\rho)$ does not couple between two different Landau orbitals of quantum numbers ℓ and ℓ' . This implies that the matrix elements $\langle n, \ell | V(\rho) | n, \ell' \rangle$ of the perturbation are diagonal. Therefore, the degenerate time-independent perturbation theory yields $\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} + \langle n, \ell | V(\rho) | n, \ell \rangle$, where $\mathcal{E}_n^{(0)}$ is the unperturbed n^{th} Landau level (13). This gives then the following more explicit first-order correction to the energy of the orbital ℓ belonging to the n^{th} Landau level,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{-1} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho)\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho. \quad (20)$$

To evaluate the improper integral, we first substitute expressions (17) for the wave functions and their normalization constants $A_{n\ell}$ as given by Eq. (62). Then, using the result (69) given in appendix A we find,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \mathcal{P}_{n\ell} \mathcal{M}_{n\ell}^{-1}, \quad (21)$$

where $\mathcal{P}_{n\ell}$ is given by Eq. (69) after setting $n = m$. Although the product $\mathcal{P}_{n\ell} \mathcal{M}_{n\ell}$ has a long and cumbersome expression, it is actually easy to conclude from such a product that the first-order correction to the energy levels is proportional to the square root of the magnetic field. In fact, in both infinite series (62) and (69) defining $\mathcal{P}_{n\ell}$ and $\mathcal{M}_{n\ell}$, respectively, there appears the common constant factor $(\beta/2)^{-\ell}$. However, the $\mathcal{M}_{n\ell}$ -series has, in addition, the constant factor $(\beta/2)^{-\frac{1}{2}}$, whereas the $\mathcal{P}_{n\ell}$ -series comes with the additional constant factor $(\beta/2)^{-\frac{1}{2}}$. This implies that the product $\mathcal{P}_{n\ell} \mathcal{M}_{n\ell}^{-1}$ gives rise to the constant factor $(\beta/2)^{\frac{1}{2}}$. In light of this observation, a better formula for the general first-order correction to the Landau levels is then the following:

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}. \quad (22)$$

We have introduced here the reduced series $\bar{\mathcal{P}}_{n\ell}$ and $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ which consist of expressions (69) and (62), respectively, without their respective factors $(\beta/2)^{-\ell-\frac{1}{2}}$ and $(\beta/2)^{-\ell-1}$.

In order to see this more clearly, let us compute the explicit correction to the first Landau level by setting $n = 1$ in Eq. (21). We find,

$$\mathcal{E}_{1\ell} = \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \bar{\mathcal{P}}_{1\ell} \bar{\mathcal{M}}_{1\ell}^{-1}. \quad (23)$$

The quantities $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$ are given by Eqs. (66) and (70), respectively. This result shows that the splitting induced on the Landau levels by the gravitational field has actually a simple form at each level and for each orbital. We notice that the splitting is larger for stronger magnetic fields. The additional term on the right-hand side of expression (23)

is still not fully transparent, however, as it involves inside the product $\bar{\mathcal{P}}_{1\ell}\bar{\mathcal{M}}_{1\ell}^{-1}$ incomplete gamma functions of the form $\Gamma(\ell + 1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)$ and $\Gamma(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)$, which, in turn, involve infinite series made up of ℓ and $\frac{\beta}{2}\rho_0^2$.

For small values of ℓ , it is already obvious from the general definitions (61) and (68) of the terms $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$, respectively, that the product $\mathcal{P}_{1\ell}\mathcal{M}_{1\ell}^{-1}$ is of the order ρ_0^{-1} , so that the correction term in Eq. (21) is of the order $-GMm/\rho_0$, as expected. But, in order to extract a useful and a more transparent expression for the splitting of the $n = 1$ Landau level, we shall use the large- ℓ limits (67) and (71) of the exact expressions (66) and (70), respectively. Then, the splitting (23) takes on the elegant and more transparent form,

$$\mathcal{E}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm\sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \left(\frac{\ell + \frac{3}{4}}{\ell + 1} \right) \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1)} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm\sqrt{\frac{eB}{2\hbar}}. \quad (24)$$

Thus, for large- ℓ orbitals the correction to the first Landau level is due to the generic product of the gravitational field contribution and the square root of the magnetic field. The last step in Eq. (24) comes from the asymptotic expansion for large arguments z of the gamma function [28],

$$\Gamma(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} e^{z(\log z - 1)}. \quad (25)$$

Therefore, the correction term in Eq. (24) decreases like $1/\sqrt{\ell}$, and thus becomes gradually suppressed for large ℓ . In contrast, from Eqs. (62) and (69) giving $\mathcal{M}_{n\ell}$ and $\mathcal{P}_{n\ell}$, respectively, we see that the first-order correction (22) does not get suppressed for large n . In addition, we notice that for large ℓ , the correction becomes insensitive to the radius ρ_0 of the massive sphere.

We would like to emphasize here the fact that, as explained in appendix A, the large- ℓ approximation (24) is valid for extremely large values of ℓ , for the limit was found by taking into account the already very large term $\frac{\beta}{2}\rho_0^2$ inside the incomplete gamma functions in (66) and (70). Therefore, contrary to what it might seem at first sight, the correction term on the right-hand side in Eq. (24) is really small (as is required for a perturbation) in comparison to the first term even for masses M of the order of the solar mass. As derived in detail in appendix A, this is in fact guaranteed provided that ℓ is bigger than $\frac{\beta\rho_0^2}{2}$. Therefore, the correction term in Eq. (24) is indeed smaller than GMm/ρ_0 , which, as we already argued below Eq. (16), is nothing but a small perturbation compared to the Landau energy represented by the first term. The same remark is also valid for the general splitting formula (23). In the latter, the smallness of the correction term compared to the first is less transparent but can, nevertheless, still be inferred from the less trivial expressions (62) and (69) of $\mathcal{M}_{n\ell}$ and $\mathcal{P}_{n\ell}$, respectively. In fact, first of all, both series are exponentially suppressed by the term $e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2}$. More important, however, is that the series (62) contains the factor $\Gamma(\ell + 1)$ in the numerator whereas the numerator of the series (69) contains the factor $\Gamma(\ell + \frac{1}{2})$.

It is now important to remark here that when setting $B = 0$, *i.e.*, in the absence of the magnetic field, one does not find any quantization of energy coming from magnetism. Setting $B = 0$ in Eq. (22), however, makes the energy vanish altogether. Actually, this is simply due to the fact that in this case both series \mathcal{M}_{mnl} and \mathcal{P}_{mnl} do not exist, for the integrals that gave rise to these series vanish since the Kummer's functions vanish for $\beta = 0$. A proper treatment of the case $B = 0$ consists indeed in solving the Schrödinger equation with the full central gravitational potential as the unique potential.

It is interesting to compute now the second-order correction to be able to fully appreciate the effect of the gravitational field. The second-order corrections to the energy levels are of the form,

$$\mathcal{E}_{n\ell}^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k, \ell | V | n, \ell \rangle|^2}{\mathcal{E}_k^{(0)} - \mathcal{E}_n^{(0)}} = \sum_{k \neq n} \frac{m(GMm)^2}{2\hbar^2(k-n)} \bar{\mathcal{P}}_{kn\ell}^2 \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} \bar{\mathcal{M}}_{k\ell}^{-1}. \quad (26)$$

We have introduced here again the reduced series $\bar{\mathcal{P}}_{kn\ell}$ and $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$. The form of this correction is actually very familiar, for one should indeed recover at the second order in GM a form for the energy levels similar to that of a particle inside a central potential of the Coulombic $1/\rho$ -form. This is in analogy with the hydrogen atom for which the electron's energy levels are $\propto m(k_e e^2)^2/\hbar^2$ (see, for example, Ref. [48]). However, this expression cannot be used to find energy levels in the case of a pure gravitational field, *i.e.*, by setting $B = 0$ inside this formula either. In fact, a proper treatment in this case would be to set $B = 0$ instead in Eq. (16), as the latter solves exactly just like for the hydrogen atom in terms of Laguerre polynomials [48].

Before we move on to the second approach, another short note is here in order. It is actually possible to start instead from the unperturbed Hamiltonian of a particle inside the gravitational potential $V(\rho)$, together with the second term inside the parentheses in Eq. (16), and consider the rest of the terms rising from the interaction of the particle with the magnetic field as being the perturbing potential. This approach would also easily work because the Laguerre polynomials — which constitute then the eigenfunctions of the unperturbed Hamiltonian — are also easy to integrate like the hypergeometric functions. The downside of this strategy for finding the effect of gravity on the

Landau levels is that, experimentally, it does not make much sense to have a magnetic field so small that a mass of a few kilograms would overcome the force that such a magnetic field exerts on the charged particle. Earth's magnetic field would already affect the particle with a force that is greater than the gravitational force a few kilograms of iron would exert on the particle. Furthermore, although the reverse might be true for astrophysical processes, it is rather still the weak gravitational field relative to the magnetic field that matters most, as we shall discuss in Section 4.

3.2 Using a harmonic oscillator approximation

This approach is based on finding the equilibrium distance of the particle from the spherical mass at which the potential energy of the particle is minimum [32]. In fact, the gravitational interaction of the particle with the spherical mass adds up to the interaction of the particle with the magnetic field to balance the centrifugal force due to the kinetic term and, hence, form the Landau bound states. This balance takes place at a specific radial distance ρ_0 from the center of the mass for each specific Landau level n and orbital ℓ . At this specific radial distance, the total potential of the particle can be approximated by that of a simple harmonic oscillator for which the quantized energy spectrum is well known.

Let us then start again from the Schrödinger equation (16) and expand the effective potential $V_{\text{eff}}(\rho)$, contained inside the parentheses, in a Taylor series around the equilibrium position ρ_* given by $V'_{\text{eff}}(\rho_*) = 0$. At the second order of the expansion, the effective potential then reads,

$$V_{\text{eff}}(\rho) \simeq V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2(\rho - \rho_*)^2, \quad (27)$$

where $V_0 = V_{\text{eff}}(\rho_*)$ and $m\omega^2 = V''_{\text{eff}}(\rho_*)$. With such an approximate potential, Eq. (16) takes the form of the usual Schrödinger equation of a simple harmonic oscillator for which the energy eigenvalues are given by,

$$\mathcal{E}_n = V_0 + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (28)$$

where n is again a positive integer. Our task now reduces then to solving for ρ_* the condition $V'_{\text{eff}}(\rho_*) = 0$. That is, we need to solve the following quartic equation in ρ_* ,

$$\frac{e^2 B^2}{4m} \rho_*^4 + GMm\rho_* - \frac{\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})}{m} = 0. \quad (29)$$

Notice that the case $\ell = 0$ does not arise here as in such a case Eq. (29) does not admit any real solution. Now, before we solve this equation for the general case $M \neq 0$ and $B \neq 0$, it is instructive to examine first what would this approach give for the well-known cases of a particle inside a Coulombic potential, *i.e.*, when $B = 0$, and then for a particle inside a magnetic field only, *i.e.*, when $M = 0$. This will help us find out to what extent we could rely on this approach when tackling the general case of non-vanishing B and M .

Setting $B = 0$ in Eq. (29) turns the latter into a first-degree equation which can easily be solved for ρ_* . Substituting then the resulting expression of ρ_* inside Eq. (28) gives the following quantized energy levels of the particle inside the gravitational field,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \frac{m(GMm)^2}{2\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})^{3/2}} \left(2n + 1 - \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \quad (30)$$

We recognize in this expression once again the main terms characteristic of the quantized energy levels of a particle inside a Coulombic potential [12, 48]. This would give rise to the familiar proportionality $\propto m(GMm)^2/(\hbar^2\ell^2)$ for large ℓ . The large- ℓ limit required for this approach to be accurate can be understood as enhancing our approximation of a very weak gravitational field, for then the Lorentz force becomes indeed much bigger than the Newtonian attraction. This actually agrees qualitatively with what we found in Eq. (26) using the perturbation theory approach at the second order, provided of course one takes the large- ℓ limit there too.

Setting $M = 0$ in Eq. (29), on the other hand, leaves the latter as a quartic equation, the solution of which is, however, very easily found. Substituting then the resulting expression of ρ_* inside Eq. (28) gives the following quantized energy levels of the particle inside a uniform magnetic field in Minkowski spacetime,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}} \right). \quad (31)$$

We recognize in the first two terms of this formula the Landau quantized energy levels. However, the exact formula (13) is recovered only in the large- ℓ limit again.

Let us now turn to the general case of a non-vanishing magnetic field in Eq. (29). The four independent solutions to general quartic equations are well-known, see e.g., Ref. [52]. However, instead of writing down the exact cumbersome expression of the physical solution for which ρ_* is real and positive, we are going to content ourselves here by extracting only an approximation for it. In fact, since we are already in a weak gravitational field approximation, $GMm \ll eB/m$, solving exactly Eq. (29) is not necessary for us here. Thus, the approximate real and positive solution we find for ρ_* is the following,

$$\begin{aligned} \rho_* &\approx \sqrt{\frac{2\hbar}{eB}} \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/4} \left(1 - x - \frac{x^2}{2} \right), \\ x &= \frac{GMm^2}{\sqrt{8\hbar^3 eB} \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/4}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Next, substituting this expression inside Eq. (28), the latter gives the sought-after quantized energy levels,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n\ell} &= \frac{\hbar eB}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}} \right) + \frac{GMm}{\left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/4}} \sqrt{\frac{eB}{32\hbar}} \left(n + \frac{1}{2} - 4 \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right) \\ &+ \frac{11m(GMm)^2}{64\hbar^2 \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2}} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{8}{11} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

We clearly see from this expression that we recover again the usual Landau levels plus the first- and second-order corrections we obtained using perturbation theory. Both first- and second-order corrections agree qualitatively with expressions (22) and (26), respectively. More important, however, is that for large ℓ the first-order correction does agree quantitatively as well with the expression obtained in Eq. (24) using perturbation theory. In fact, in addition of displaying the generic product of the gravitational field contribution and the square root of the magnetic field contribution, the two corrections become actually identical for large ℓ . The numerical factors coincide and both imply a correction that decreases like $1/\sqrt{\ell}$. The second correction does not depend on the magnetic field. It is entirely due to the the gravitational field encoded in the Schwarzschild metric, and is quadratic in GMm as in Eq. (26).

3.3 Using the biconfluent Heun equation: The Polynomial approach

In contrast to the previous two methods for dealing with Eq. (15), this approach does not consist in extracting the energy levels from the corresponding Schrödinger equation (16) by approximately solving the latter. Instead, it is based on solving Eq. (15) exactly and then require that such a solution be physical by imposing a specific condition to be satisfied. The quantization condition on the particle's energy thus merely comes from imposing such a condition on the wave function.

In order to solve Eq. (15) exactly, we begin, as we did in Section 2, by setting, $R(\rho) = \rho^\ell v(\rho) \exp(-\frac{eB}{4\hbar} \rho^2)$, and denote by a prime a derivative with respect to ρ . The equation then takes the form,

$$\rho v''(\rho) + [2\ell + 1 - \beta\rho^2] v'(\rho) + [(\alpha - \beta)\rho + \gamma] v(\rho) = 0, \quad (34)$$

where, we have set, $\alpha = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$, $\beta = \frac{eB}{\hbar}$, and $\gamma = \frac{2m^2 GM}{\hbar^2}$.

One way of dealing with this equation would be to expand the function $v(\rho)$ in an infinite series in the variable ρ . Thus, one would set $v(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \rho^k$ and one would then plug this series inside Eq. (34). The latter would be turned into the following identity involving an infinite series in ρ ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ k(k+2\ell) a_k \rho^{k-1} + \gamma a_k \rho^k + [\alpha - (k+1)\beta] a_k \rho^{k+1} \} = 0. \quad (35)$$

Requiring that this identity holds for all ρ leads to the following three-term recursion relations:

$$(k+3)(2\ell+k+3) a_{k+3} + \gamma a_{k+2} + [\alpha - (k+2)\beta] a_{k+1} = 0. \quad (36)$$

Unfortunately, there is no known general analytical solution and no simple convergence criterion for dealing with such a three-term recursion relation series. In addition, the truncation method one often uses to terminate the series when dealing with two-term series does not work here. A closely related but more accurate approach, that is indeed based on a truncation method, will be given in what follows and in the following subsection.

The right way to deal with Eq. (34) is actually to solve exactly for the radial function $v(\rho)$ as follows. First, we need to introduce the new variable $z = \sqrt{\beta/2}\rho$. Substituting this inside Eq. (34) makes the latter take the following canonical form, known as the bi-confluent Heun differential equation [53, 54, 55, 56],

$$zv''(z) + (1 + a - bz - 2z^2)v'(z) + \left((c - a - 2)z - \frac{1}{2}[d + (1 + a)b] \right)v(z) = 0, \quad (37)$$

with $a = 2\ell$, $b = 0$, $c = 2\alpha/\beta + 2\ell$, and $d = -2\gamma\sqrt{2/\beta}$. The solution to this equation is given by a linear combination of two independent bi-confluent Heun functions as follows,

$$v(z) = C_1\mathcal{H}(a, b, c, d; z) + C_2z^{-a}\mathcal{H}(-a, b, c, d; z). \quad (38)$$

The constants C_1 and C_2 are the two constants of integration. Only the first term is convergent for $z \rightarrow 0$, however. Although in our case the distance ρ , and hence z , does not go to zero because the mass used to create the Schwarzschild metric has a finite radius, we only keep the first term in order to guarantee the convergence of the series for arbitrary small, but non-zero, z .

The special function $\mathcal{H}(a, b, c, d; z)$ is called the biconfluent Heun function and it is given explicitly by the following infinite series [53, 38],

$$\mathcal{H}(a, b, c, d; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_k(a, b, c, d)}{(1+a)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (39)$$

where $(1+a)_k$ is the Polchhammer symbol (see appendix A). The factors \mathcal{A}_k in the series satisfy the following three-term recursion relation,

$$\mathcal{A}_{k+2} - \left\{ (k+1)b + \frac{1}{2}[d + (1+a)b] \right\} \mathcal{A}_{k+1} + (k+1)(k+1+a)(c-a-2-2k)\mathcal{A}_k = 0. \quad (40)$$

Two possibilities [38] are now available for extracting valid quantization conditions on the energy of the particle based on the biconfluent Heun function (39). The first will be exposed here and the second will be left for the next subsection.

The first possibility for finding a quantization of energy is to use the fact that the series (39) is highly divergent at infinity and, therefore, one necessarily needs to truncate the series to obtain an n -th order polynomial which would represent indeed a physical solution. For this purpose, one easily deduces that, according to the recursion relation (40), one has just to set [38],

$$c - a - 2 = 2n \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_{n+1} = 0, \quad (41)$$

for some positive integer n . In fact, such a requirement guarantees that all the subsequent factors \mathcal{A}_{n+k} in the series (40) vanish for any positive integer k . This method has indeed been adopted by many authors interested in finding quickly a quantization condition involving Landau levels of various systems under a magnetic field. This approach has recently been used in Ref. [58] to study the energy levels of a galaxy moving in a Newtonian potential corrected by the cosmological constant. On the other hand, in Ref. [59] the effect on the Landau levels of a charged particle moving around a rotating cosmic string inside a magnetic field was also investigated by extracting a quantization rule for the energy of the charged particle based on this approach.

Unfortunately, the downside of this approach is that it does not provide a consistent quantization rule for all values of the magnetic field — or of the mass-source of the gravitational field — in which the physical system is immersed. In fact, by substituting in the first condition of Eqs. (41) the expressions of a and c as given in terms of α , β , and ℓ , one just recovers a quantization condition similar to the usual Landau quantization; *i.e.*, $\alpha = \beta(n+1)$, from which one deduces that,

$$\mathcal{E}_n = \frac{e\hbar}{2m}B(n+1). \quad (42)$$

This expression is indeed similar, but not exactly identical, to condition (13). In the latter the energy levels are proportional to half-integer multiples of the cyclotron frequency $eB/2\pi m$ whereas according to condition (42) the quantized energy is any integer or half-integer multiple of that frequency.

Furthermore, the second condition in Eqs. (41) constitutes, as already pointed out in Ref. [38], an additional constraint involving again the energy \mathcal{E} of the particle as well as the magnetic field B . In fact, the coefficient \mathcal{A}_{k+1} in the recursion relation (40) is given by the following matrix determinant [38],

$$\mathcal{A}_{k+1}(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} \mathbb{D}_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{A}_0 & \mathbb{D}_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{D}_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A}_2 & \mathbb{D}_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbb{A}_{k-1} & \mathbb{D}_{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_k & \mathbb{D}_k \end{vmatrix}, \quad (43)$$

where,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_k &= (k+1)b + \frac{1}{2}[d + (1+a)b], \\ \mathbb{A}_k &= (k+1)(k+1+a)(c-a-2-2k).\end{aligned}\tag{44}$$

In our case, we have $b = 0$ so that $\mathbb{D} = \frac{1}{2}d$. It is clear then from the matrix determinant (43) that requiring the term \mathcal{A}_{n+1} to vanish will produce an $(n+1)$ -degree equation in the parameter $d = -2\gamma\sqrt{2/\beta} = -2\sqrt{\epsilon B\hbar/(2m^2GM)}$. Such an equation involves, in addition, the term $a = 2\ell$ as well as the term $c = 2\alpha/\beta + 2\ell = 4m\mathcal{E}/(\epsilon B\hbar) + 2\ell$.

However, having already obtained the quantization condition (42) that relates the energy \mathcal{E} to the magnetic field B , it is clear that the extra $(n+1)$ -degree equation $\mathcal{A}_{n+1} = 0$ can only impose a specific constraint on the spherical mass M used to create the gravitational field. This means that this approach cannot be consistently applied for an arbitrary gravitational field but only for cases in which one manages to fine-tune the mass M in such a way to produce the quantization (42) itself. In addition, such a quantization would not therefore introduce any novelty as all it yields are quantized energies similar to, but not exactly the same as, the usual Landau levels in Minkowski spacetime. The only advantage of the method is thus to show that it might be possible to achieve a quantization of a particle's energy in a magnetic field even in the presence of a non-zero gravitational field by fine-tuning the mass-source of the gravitational field.

3.4 Using the biconfluent Heun equation: The Asymptotic approach

This approach is again based on the solution (39) to Eq. (37) in terms of the biconfluent Heun function. However, in this approach one does not truncate the solution (39) by imposing the conditions (41) in order to recover a finite-degree polynomial to guarantee convergence. Instead, in this approach [38] one is rather concerned by the fact that for $z \rightarrow \infty$, the asymptotic behavior of Heun's biconfluent function $\mathcal{H}(a, b, c, d; z)$ is given by [53, 38, 57],

$$\mathcal{H}(a, b, c, d; z) = \mathcal{N}(a, b, c, d)z^{-\frac{1}{2}(c+a+2)}e^{bz+z^2},\tag{45}$$

where $\mathcal{N}(a, b, c, d)$ is a constant. This asymptotic behavior renders indeed the function $\mathcal{H}(a, b, c, d; x)$ not square integrable, and hence unphysical as a wavefunction. Therefore, the only way to guarantee square integrability, and hence for the wave function to represent a physical system, is to impose $\mathcal{N}(a, b, c, d) = 0$ [38]. This condition is what constitutes a real quantization condition free of any inconsistency as it does not involve two separate conditions involving the energy of the particle and the parameters of the system.

The constant $\mathcal{N}(a, b, c, d)$ with $b = 0$, which is the case of interest to us here, is given by the following infinite series [38],

$$\mathcal{N}(a, 0, c, d) = \frac{\Gamma(a+1)2^{\lambda-1}}{\Gamma(a+1-\lambda)\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \Gamma\left(\frac{\lambda+k}{2}\right) \mathcal{A}_k(a, 0, c, d),\tag{46}$$

where, $\lambda = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + 1$ and the factors $\mathcal{A}_k(a, b, c, d)$ in the series are given by the determinant (43) in which the terms \mathbb{D}_k and \mathbb{A}_k are given this time by [38],

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_k &= \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + k + 1}{\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + k + 2\right)(k + 2)}, \\ \mathbb{A}_k &= \frac{d}{2\sqrt{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + k + 1\right)(k + 1)}.\end{aligned}\tag{47}$$

It is obvious from these expressions that, while the requirement $\mathcal{N}(a, 0, c, d) = 0$ would indeed give a genuine quantization condition, as it involves a single equation in all the parameters of the system, it is not at all useful in practice as it requires one to find the zeros of the infinite series (46) in order to be able to extract the quantization condition.

4 Testing gravity

In the previous two sections we were concerned only by bringing to light the effect of a known spherically symmetric gravitational field on the familiar Landau energy levels of a charged particle inside a magnetic field. The results we obtained in those sections may actually be put to use the other way around. In other words, we may now use what we have learned on how to deal with the simultaneous presence of a gravitational field and a magnetic field to unravel, or at least to test, a given unknown spherically symmetric gravitational field based on this specific splitting of the Landau energy levels of charged particles.

The field of testing gravity using elementary particles is also rich in intense recent investigations aimed at testing Newton's inverse-square law for the gravitational attraction, either at short distances based on tabletop experiments [60, 61, 62], or at the observational astrophysical level [63]. The most widely investigated form of departure from the inverse-square law for gravity has the following Yukawa-like gravitational potential (see, e.g., Refs. [64, 65]),

$$V(\rho) = -\frac{GMm}{(1+\delta)\rho} \left(1 + \delta e^{-\rho/\lambda}\right), \quad (48)$$

where δ is a dimensionless parameter that quantifies the relative strength of the additional Yukawa-like potential compared to the Newtonian potential, and λ represents the distance range of such an additional potential.

Our task now is to use again the time-independent perturbation theory based on this new gravitational potential. Having found the contribution $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)}$ of the $1/\rho$ -perturbing term in Eq. (22), all we need now is to evaluate the extra contribution of the perturbation coming from the second term inside the parentheses of expression (48). More specifically, to the first-order, the correction to the n^{th} Landau level will read,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)\text{L}} + (1+\delta)^{-1}\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{N}} - \delta(1+\delta)^{-1}GMm \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{-1} e^{-\rho/\lambda} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho, \quad (49)$$

where, $\mathcal{E}_n^{(0)\text{L}}$ is the usual unperturbed Landau n^{th} level, and $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{N}}$ is given by the second term on the right-hand side in Eq. (22), and is due to the perturbation coming from the Newtonian potential. The presence of the exponential in this integral makes its evaluation less straightforward than those needed in Section 3. The detailed steps leading to the exact evaluation of the integral are exposed in appendix A. Substituting Eq. (79) into the third term of the right-hand side of Eq. (49), leads to the following first-order correction to the n^{th} Landau level due to the modified gravity potential (48),

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)\text{L}} + (1+\delta)^{-1}\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{N}} + \delta(1+\delta)^{-1}\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{Y}}, \quad (50)$$

where the first-order Yukawa perturbation $\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{Y}}$ is given by the following expression:

$$\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{Y}} = -GMm \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \bar{\mathcal{Y}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}. \quad (51)$$

We have introduced here again the reduced series $\bar{\mathcal{Y}}_{n\ell}$ and $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ which consist of expressions (75) and (62), respectively, but without their respective factors $(\beta/2)^{-\ell-\frac{1}{2}}$ and $(\beta/2)^{-\ell-1}$. The splitting of the first Landau level $n=1$ is found by substituting expressions (76) and (66) of $\mathcal{Y}_{1\ell}$ and $\mathcal{M}_{1\ell}$, respectively, into (51).

While the result (51) has the advantage of being exact, the fact that it involves, as displayed in Eq. (75), an infinite series in $1/\lambda$ (λ being a very small parameter) makes it of limited practical use for estimating the order of magnitude of such a correction in a given physical setting. For this reason, we shall, instead, look for an approximate estimate of the correction by replacing the exponential function $e^{-\rho/\lambda}$ in the integral (49) by the dominant value $e^{-\rho_0/\lambda}$ it takes within the whole interval of integration. In fact, the integrand in that integral, being already exponentially suppressed for large values of ρ by the factor $e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2}$ as we saw in Section 3.1 for the Newtonian correction, the error we introduce in our estimate based on such a substitution will be at most of the order of $\lambda e^{-\rho_0/\lambda}$ times the exact correction. Therefore, by performing the integral in Eq. (49) after replacing $e^{-\rho/\lambda}$ by $e^{-\rho_0/\lambda}$, we find the first-order correction to the n^{th} Landau level to be given by Eq. (50), where the Yukawa contribution to the correction is approximately given by,

$$\mathcal{E}_{n\ell}^{(1)\text{Y}} \approx -GMm e^{-\rho_0/\lambda} \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}. \quad (52)$$

We have again used here the results of appendix A where the integral in Eq. (49) without the term $e^{-\rho/\lambda}$ is found in terms of the quantities $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$ as given by Eqs. (66) and (70), respectively. We introduced, as done in Section 3.1, the barred quantities $\bar{\mathcal{M}}_{1\ell}$ and $\bar{\mathcal{P}}_{1\ell}$ to be able to extract the factor $\sqrt{eB/2\hbar}$.

Now, this result can actually be used to probe any deviation from Newton's square-law, not only using tabletop experiments, but even by using astrophysical observations. In fact, there is no better setup for a strong magnetic field combined with a relatively weak gravitational field required here — but still strong compared to Earth's standards — than within the environment of an astrophysical object, like a neutron star, a magnetar, or even a magnetic white dwarf. The quantized Landau states of the electrons in the magnetic field of a white dwarf undergo a change in their equation of state which influences the pressure and energy density of the white dwarf. The combined pressure and energy densities of matter and of the magnetic field determine the mass-radius relation of strongly magnetized white dwarfs [66, 67, 68]. On the other hand, it is known [69] that the strong magnetic field of a neutron star softens the equation of state of matter inside the star also due to Landau quantization. In addition, it was recently shown

in Refs. [70, 71] that as a result of Landau quantization of electrons' motion under the strong magnetic field of a magnetar, the neutron-drip transition in the crust of the star is shifted to either higher or lower densities depending on the magnetic field strength. Also, the quantization of the motion of the electrons makes the star's crust almost incompressible, leading to a density that remains almost unchanged over a wide range of pressures. With a splitting of the Landau levels due to the gravitational field of the star, however, we should observe a variation in any of these predicted patterns as a function of the star's mass. The extent of such a variation should betray any eventual deviation from the Newtonian inverse-square law thanks to the factor $e^{-\rho_0/\lambda}$ in Eq. (52).

Our main approximation, $\rho^{-1}GMm \ll \hbar B/m$, and the non-relativistic regime $\mathcal{E} \ll mc^2$, on which our investigations in this paper are based, easily find common ground within the environment of young neutron stars and/or magnetars and magnetized white dwarfs for which the intensity of the magnetic field is high enough compared to the gravitational interaction of the particle and, yet, is low enough for the spacetime effect of the magnetic field itself to be negligible. We thus expect our results to very well find a good application in those extreme environments of these stellar objects where both gravity and the magnetic field strengths are beyond what one could hope to achieve at the laboratory level. However, for the sake of generality and for wider applications, a relativistic extension of the analysis done in this manuscript is needed and is going to be the subject of a forthcoming work. In fact, in a fully relativistic analysis, we are going to keep the full energy E of the particle inside the general equation (6). Doing so, would require us to also keep a term linear in ρ in that equation. In such a case, however, the solution to the unperturbed equation is not given by the expression (17) any more and a different and more involved mathematical treatment is then required. For this reason we are going to defer such a work to be presented in another separate paper. A closer and more specialized investigation on how to combine this splitting in the Landau levels with astrophysical observations will then also be presented there.

5 Summary & Conclusion

We have studied the effect of the gravitational field of a spherical mass on a charged particle inside a uniform and constant magnetic field. We started from the full Schwarzschild metric and derived Eq. (14) that describes the dynamics of the particle for both laboratory-based experiments and astrophysical level observations. Although we subsequently simplified further the equation by keeping only the leading contribution from the Schwarzschild term $GM/(c^2\rho)$, going through Eq. (14) was actually a crucial step for filtering out each individual contribution to the interaction potential. Furthermore, such a step will allow us, as we shall see in a forthcoming work⁴, to clearly see how to adapt our present approach to other spacetime metrics and how to extend it to include relativistic regimes.

We found that the infinite Landau degeneracy is removed as the Landau orbitals of the same Landau level split in energy. We used two independent methods to achieve our goal and both gave similar results up to the approximating scheme adopted under each approach. We pointed out that a third method, which seems at first sight to be able to yield the right quantization condition, does not actually yield a complete and consistent quantization of energy. We saw in detail where the shortcoming of such an approach occurs. We also indicated in detail why a fourth method, which is capable — in principle — to lead us to the desired quantized energies, is not really practical for finding the right quantization condition.

In addition to bringing to light the effect of the gravitational field on the Landau levels, we showed that our results could also serve another purpose which is to test any departure from Newton's inverse-square law for gravity using quantum mechanical particles. In this paper, we restricted ourselves to the Schwarzschild spherically symmetric metric for which a Yukawa-like potential is most easily incorporated. Moreover, such a spherically symmetric setup is easily achievable at the tabletop experiments level with, say, a two-dimensional gas of electrons or protons moving around a massive sphere immersed inside a strong magnetic field. The splitting of the Landau levels could be detected through the induced quantum Hall effect. At the laboratory level, however, the Newtonian correction being of the order of GMm/ρ_0 , a spherical mass of the order of a thousand kilograms with a radius ρ_0 of one meter would only bring a splitting in the Landau levels of the order of 10^{-16} eV. Thus, for a Yukawa range λ of the order of the micrometer [60, 74, 75], the splitting caused by a Yukawa-like deviation from the Newtonian potential would take on this value but dramatically reduced by a factor of the order of e^{-10^6} . Our next tasks, therefore, which will be presented in forthcoming works, are to (i) first consider the effect on Landau levels of more involved spacetime metrics, and then (ii) take into account the relativistic regime into consideration and investigate closer the implications for the highly magnetized astrophysical objects. The first would allow us to use this splitting to probe in novel ways the modifications brought by GR to Newtonian gravity. The second promises to make it possible to probe any deviation from the inverse-square law when no restriction on the magnetic strengths of the astrophysical objects is imposed, for only within such general and hostile environments does the Yukawa correction have greater chances of being detected based on this splitting of the Landau levels.

⁴ In preparation.

Acknowledgments

This work is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) Discovery Grant (RGPIN-2017-05388).

A Evaluating integrals involving Kummer's functions using Laguerre polynomials

In this appendix we show in detail how to evaluate the various improper integrals involving two Kummer's functions used in Sections 3 and 4. Note that an integral involving two Kummer's functions might be found solely in terms of a ratio between products of gamma functions [28]. However, for our purposes here a better strategy is to make a detour and use instead integrals involving Laguerre polynomials. In fact, given that the gamma function $\Gamma(x)$ has simple poles at $x = 0, -1, -2, \dots$ and that our Kummer's functions come with the negative integers $-n$, plugging our completeness condition directly into the integral formulas given in Ref. [28] would lead to ambiguous ratios between simple poles of the gamma functions.

Let us therefore start from the following relation between Kummer's hypergeometric function ${}_1F_1(-n, b+1; x)$ and the generalized Laguerre polynomial $L_n^{(b)}(x)$ (see, e.g., Refs. [72, ?]),

$$L_n^{(b)}(x) = \frac{\Gamma(n+b+1)}{n!\Gamma(b+1)} {}_1F_1(-n; b+1; x). \quad (53)$$

On the other hand, an improper integral, consisting of the Laplace-like transform involving two generalized Laguerre polynomials, reads, [72, 73],

$$\int_0^\infty x^b e^{-x} L_n^{(b)}(x) L_m^{(b)}(x) dx = \frac{\Gamma(n+b+1)}{n!} \delta_{nm}. \quad (54)$$

Therefore, substituting the expression (53) of the generalized Laguerre polynomial in terms of Kummer's function, we also have,

$$\int_0^\infty x^b e^{-x} {}_1F_1(-n, b+1; x) {}_1F_1(-m, b+1; x) dx = \frac{n![\Gamma(b+1)]^2}{\Gamma(n+b+1)} \delta_{nm}. \quad (55)$$

This result shows that our wave functions form a complete normalized set of basis for our eigenfunctions. On the other hand, we also have the following more general integral involving two generalized Laguerre polynomials [72, 73]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-zx} L_n^{(b)}(zx) L_m^{(b')}(zx) dx \\ = z^{-c} \frac{\Gamma(c)\Gamma(n+b+1)\Gamma(m+b'+1-c)}{n!m!\Gamma(b+1)\Gamma(b'+1-c)} {}_3F_2(-n, c, c-b; b'+1, c-m-b'; 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Here, ${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1)$ is the generalized hypergeometric function, and it is defined by the following infinite series [28, 49],

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k k!}, \quad (57)$$

where $(a)_k$ is the so-called Pochhammer symbol, defined by the product $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$, and such that $(a)_0 = 1$. Therefore, combining Eqs. (53) and (56), we have also,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{c-1} e^{-zx} {}_1F_1(-n; b+1; zx) {}_1F_1(-m; b'+1; zx) dx \\ = z^{-c} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b'+1)\Gamma(m+b'+1-c)}{\Gamma(b'+1-c)\Gamma(m+b'+1)} {}_3F_2(-n, c, c-b'; b+1, c-m-b'; 1). \end{aligned} \quad (58)$$

Furthermore, we have the following useful addition theorem for Kummer's functions [28] that we are going to use:

$${}_1F_1(a, b; z+z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z_0^k}{(b)_k k!} {}_1F_1(a+k, b+k; z). \quad (59)$$

Therefore, by starting from the result (58) and shifting the integration boundary from 0 to x_0 and then using the theorem (59), we arrive, after a little bit of extra work, at the following important result,

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{\infty} x^{c-1} e^{-zx} {}_1F_1(-n, b+1; zx) {}_1F_1(-m, b+1; zx) dx \\
&= \int_0^{\infty} (x+x_0)^{c-1} e^{-z(x+x_0)} {}_1F_1[-n, b+1; z(x+x_0)] {}_1F_1[-m, b+1; z(x+x_0)] dx \\
&= e^{-zx_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{x_0^k \Gamma(c)}{k! \Gamma(c-k)} \frac{(-n)_p (-m)_q (zx_0)^{p+q}}{p! q! (b+1)_p (b+1)_q} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} x^{c-k-1} e^{-zx} {}_1F_1(-n+p, b+1+p; zx) {}_1F_1(-m+q, b+1+q; zx) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-zx_0} \Gamma(c) (-n)_p (-m)_q x_0^{p+q+k}}{k! p! q! (b+1)_p (b+1)_q} \frac{\Gamma(b+1+q) \Gamma(m+b+1+k-c)}{\Gamma(b+q+1+k-c) \Gamma(m+b+1)} z^{p+q+k-c} \\
&\quad \times {}_3F_2(-n+p, c-k, c-k-b-q; b+p+1, c-k-m-b; 1). \tag{60}
\end{aligned}$$

In the second step we have used the generalized binomial theorem to expand the term $(x+x_0)^{c-1}$ in powers of x and x_0 for an arbitrary real exponent c , and we then used theorem (59). In the last step we have used again the result (58).

A.1 Integrals needed in Section 3.1

Now, from this very general result (60) we can extract all the useful integrals needed in this paper. In fact, performing the change of variable, $x = \rho^2$, and setting $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + 1$ and $x_0 = \rho_0^2$, the above result yields,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{M}_{mn\ell}, \tag{61}$$

where,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{mn\ell} &= \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+1) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2 k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q) \Gamma(m+k)}{\Gamma(q+k) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-1} \\
&\quad \times {}_3F_2(-n+p, \ell+1-k, 1-k-q; \ell+p+1, 1-k-m; 1). \tag{62}
\end{aligned}$$

Notice that the series in k in this last expression terminates at ℓ because in this case the exponent in $(x+x_0)^{c-1}$, to which we apply the binomial theorem, is the integer ℓ . The result (62) is what is needed to find the normalization constants $A_{n\ell}$ of the wave functions $\psi_{n\ell}(\rho)$ used in Sections 3 and 4.

From Eq. (62), one can also find the needed expression $\mathcal{M}_{1\ell}$ by setting $n = m = 1$. Unfortunately, the presence of the three sums in expression (62) makes the task very tedious. Therefore, a better strategy to get an explicit expression for $\mathcal{M}_{1\ell}$ is to just set $n = m = 1$ directly in the integral (61) giving $\mathcal{M}_{mn\ell}$ and then evaluate the integral. The task becomes then very straightforward indeed and yields the following:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1\ell} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\
&= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)} \rho^2\right]^2 d\rho. \tag{63}
\end{aligned}$$

In the second step, we used the definition, ${}_1F_1(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}$, of Kummer's function [28]. To evaluate this integral (63), recall the definition of the incomplete gamma function [28],

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s, t_0), \tag{64}$$

from which the variable re-definitions, $t = \frac{\beta}{2}\rho^2$ and $t_0 = \frac{\beta}{2}\rho_0^2$, yield,

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2s-1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} d\rho &= \frac{2^{s-1}}{\beta^s} \Gamma\left(s, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) \\ &= \frac{2^{s-1}}{\beta^s} \left[\Gamma(s) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)^{s+n}}{n! (s+n)^2} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

In the second line we have used the explicit expression of the incomplete gamma function in terms of a sum of the usual gamma function and an infinite series [28]. Expanding the square brackets of the integral (63) and then applying the result (65) to each term of that sum individually, we easily find the sought-after expression,

$$\mathcal{M}_{1\ell} = \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \left[\Gamma\left(\ell+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (66)$$

As explained in the text below Eq. (23), we are interested in the large- ℓ limit of $\mathcal{M}_{1\ell}$. From expression (66) it is actually easy to estimate $\mathcal{M}_{1\ell}$ in the large- ℓ limit using the explicit expression of the incomplete gamma function as given by the square brackets in the second line of Eq. (65) as well as the recursion relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. In fact, we have,

$$\mathcal{M}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \left[\Gamma(\ell+1) - \frac{2\Gamma(\ell+2)}{\ell+1} + \frac{\Gamma(\ell+3)}{(\ell+1)^2} \right] \approx \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\ell+1}. \quad (67)$$

Note that to get to the middle step in Eq. (67), we had to discard the term $\frac{\beta}{2}\rho_0^2$ from the incomplete gamma functions in Eq. (66). This becomes possible only for values of ℓ bigger than the dimensionless factor $\frac{\beta}{2}\rho_0^2$, as can be seen by examining the infinite defining series of the incomplete gamma function on the right-hand side of Eq. (65). In fact, for the ratio $\frac{1}{s} \left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^s$ of the infinite series inside the square brackets to be negligible compared to the first term $\Gamma(s) \sim s!$, one needs to have $s > \frac{\beta\rho_0^2}{2}e$, where e — not to be confused with the electron's charge — is the base of the natural logarithm. This condition is arrived at by evaluating the limit of the ratio $\frac{1}{s!} \left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^s$ using Stirling's approximation formula for large n : $\ln n! \sim n \ln n - n$. Thus, ℓ needs to be bigger than $\frac{\beta\rho_0^2}{2}e$ for the approximation (67) to hold. The last term in expression (67) is used in Section 3 to estimate the splitting of the energy levels for large orbitals ℓ .

Another useful integral can be extracted from the general result (60) by performing again the change of variable $x = \rho^2$ and setting this time $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + \frac{1}{2}$ and $x_0 = \rho_0^2$. We easily find then the following result:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{P}_{mn\ell}, \quad (68)$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{mn\ell} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma\left(m + \frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(q+k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times {}_3F_2\left(-n+p, \ell + \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} - k - q; \ell+p+1, \frac{1}{2} - k - m; 1\right). \end{aligned} \quad (69)$$

This result is what allows us to find in Section 3 the correction to the quantized energy levels \mathcal{E}_n due to the splitting of the orbitals. We would like to find from this result the expression of $\mathcal{P}_{1\ell}$ by setting $n = m = 1$. However, like for the expression $\mathcal{M}_{1\ell}$, it is also here much easier instead to proceed by substituting $n = m = 1$ directly into the integral (68) defining $\mathcal{P}_{mn\ell}$ and then evaluated the former. In fact, following similar steps as those that led us to the result (66), we easily find the following expression for $\mathcal{P}_{1\ell}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1\ell} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)}\rho^2\right]^2 d\rho \\ &= \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

From this expression it is also easy to estimate $\mathcal{P}_{1\ell}$ in the large- ℓ limit, as we did for the term $\mathcal{M}_{1\ell}$ above, using the explicit expression of the incomplete gamma function as given by the square brackets in the second line of Eq. (65) as well as the recursion relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. In fact, we have,

$$\mathcal{P}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) - \frac{2\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}{\ell+1} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}\right)}{(\ell+1)^2} \right] \approx \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \frac{(\ell + \frac{3}{4})\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{(\ell+1)^2}. \quad (71)$$

The same remark, as the one made below Eq. (67), about how large should ℓ be for the middle step in the approximation (71) to be justified, holds here also.

A.2 Integrals needed in Section 4

The last category of integrals we need to evaluate now is the one of Section 4. The integral reads,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\ell}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \quad (72)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho. \quad (73)$$

In the second line we have Taylor-expanded the exponential $\exp(-\rho/\lambda)$. The integral can be evaluated using the general result (60) by performing the change of variable $x = \rho^2$ and setting this time $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}$ and $x_0 = \rho_0^2$. We easily arrive then at the following:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\ell}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) \times {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{Y}_{mnl}, \quad (74)$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{mnl} = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ r=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} (-1)^r \Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2r! k! \lambda^r p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q) \Gamma(m + \frac{1}{2} + k - \frac{r}{2})}{\Gamma(q + \frac{1}{2} + k - \frac{r}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \\ & \times {}_3F_2\left(-n+p, \ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k, \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k - q; \ell+p+1, \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k - m; 1\right). \end{aligned} \quad (75)$$

To the best of our knowledge, these integrals that are shifted from the origin and involve, in addition, an extra exponential function have not been previously given in the literature.

Now, just as we did for the previous integrals, we would also like to evaluate the quantity $\mathcal{Y}_{1\ell}$ by setting $m = n = 1$. As with the extraction of the quantities (66) and (70), it is very tedious to attempt to use the general result (75). Therefore, we are instead going to substitute again $m = n = 1$ directly into the defining integral (74) of \mathcal{Y}_{mnl} . Following exactly the same steps used to get $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$, we find,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{1\ell} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)}\rho^2\right]^2 d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\lambda^r} \frac{2^{\ell+\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

A.3 Additional integrals

For completeness, we display here the improper integrals involving two Kummer's functions with the integration boundaries $[0, \infty[$. Performing the change of variable, $x = \rho^2$, and setting $b = \ell$ and $z = \beta/2$ in Eq. (55), the latter takes the following form,

$$\int_0^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \frac{n!2^\ell [\Gamma(\ell+1)]^2}{\beta^{\ell+1} \Gamma(n+\ell+1)} \delta_{nm}. \quad (77)$$

Next, using identity (53), and then performing again the change of variable, $x = \rho^2$, and setting $c = \ell + \frac{1}{2}$, $z = \beta/2$ and $b = \ell$, Eq. (56) yields,

$$\int_0^\infty \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}} \Gamma(\ell + 1) \Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} {}_3F_2\left(-n, \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell + 1, -m + \frac{1}{2}; 1\right). \quad (78)$$

Finally, similar steps to those followed to get Eq. (75) allow us to prove that,

$$\int_0^\infty \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\rho}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k 2^{\ell+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma(\ell + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\ell + 1) \Gamma(m + \frac{1}{2} - \frac{k}{2})}{k! \lambda^k \beta^{\ell+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} {}_3F_2\left(-n, \ell + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \ell + 1, \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - m; 1\right). \quad (79)$$

This last result, which, to the best of our knowledge, has not been given previously in the literature on Kummer's functions either, is actually a generalization of the more familiar improper integral (78) to the case of a Laplace transform involving an extra exponential function besides Kummer's functions.

References

1. V.V. Nesvizhevsky et al., "Study of the neutron quantum states in the gravity field", *Nature* **415**, 297 (2002).
2. V.V. Nesvizhevsky et al., "Measurement of quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field", *Phys. Rev. D* **67**, 102002 (2003) [arXiv:hep-ph/0306198].
3. V.V. Nesvizhevsky et al., "Study of the neutron quantum states in the gravity field", *Eur. Phys. J. C* **40**, 479 (2005) [arXiv:hep-ph/0502081].
4. H. H. Rauch and S.A. Werner, *Neutron Interferometry, Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*, Second Edition (Oxford University Press, Oxford, 2015).
5. G.V. Kulin, A.I. Frank, S.V. Goryunov, D.V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, A.N. Strepetov and V.A. Bushuev, "Spectrometer for new gravitational experiment with UCN", *In Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **792**, 38 (2015) [arXiv:1502.03243].
6. H. Abele, "Precision experiments with cold and ultra-cold neutrons", *Hyperfine Interact* **237**, 155 (2016).
7. C. Marletto and V. Vedral, "Witnessing the quantumness of a system by observing only its classical features", *npj. Quantum Information* **3**, 43 (2017) [arXiv:1704.00120].
8. C. Marletto and V. Vedral, "Gravitationally Induced Entanglement between Two Massive Particles is Sufficient Evidence of Quantum Effects in Gravity", *Phys. Rev. Lett.* **119**, 240402 (2017) [arXiv:1707.06036].
9. S. Bose et al., "A Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity", *Phys. Rev. Lett.* **119**, 240401 (2017) [arXiv:1707.06050].
10. A. Landry and M.B. Paranjape, "Gravitationally induced quantum transitions", *Phys. Rev. D* **93**, 122006 (2016) [arXiv:1601.06132].
11. A. Landry and M.B. Paranjape, "Graviton Laser", *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1644016 (2016) [arXiv:1604.02762].
12. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, Second Edition (Pergamon Press, Oxford, 1965).
13. A. Edery and Y. Audin, "New degeneracies and modification of Landau levels in the presence of a parallel linear electric field", *J. Phys. Commun.* **3**, 025013 (2019) [arXiv:1808.00369].
14. R.E. Prange and S.M. Girvin eds., *The Quantum Hall Effect* (Springer: Heidelberg, Germany, 1992).
15. M. Janssen, O. Viehweger, U. Fastenrath, and J. Hajdu, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, (VCH: Weinheim, Germany, 1994)
16. F.W. Hehl, Y.N. Obukhov and B. Rosenow, "Is the Quantum Hall Effect Influenced by the Gravitational Field?", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 096804 (2004) [arXiv:cond-mat/0310281].
17. H. Grosse and J. Stubbe, "Splitting of Landau levels in the presence of external potentials", *Lett. Math. Phys.* **34** 59, (1995).
18. L.E. Parker and D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime, Quantized Fields and Gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
19. J.B. Griffiths and J. Podolský, *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
20. F.J. Ernst, "Black holes in a magnetic universe", *J. Math. Phys.* **17**, 54 (1976).
21. F.J. Ernst, "Removal of the nodal singularity of the C -metric", *J. Math. Phys.* **17**, 515 (1976).

22. D. V. Gal'tsov and V. I. Petukhov, "black hole in an external magnetic field", *Sov. Phys. JETP* **47**, 419 (1978). (Russian original: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **74**, 801 (1978))
23. V. Karas and D. Vokrouhlicky, "Chaotic motion of test particles in the Ernst space-time", *Gen. Relat. Gravit.* **24**, 729 (1992).
24. W.B. Bonnor, "Static Magnetic Fields in General Relativity", *Proc. Phys. Soc. A* **67** 225 (1954).
25. M.A. Melvin, "Pure magnetic and electric geons", *Phys. Lett.* **8**, 65 (1964).
26. L.C.N. Santos and C.C. Barros Jr., "Dirac equation and the Melvin metric", *Eur. Phys. J. C* **76**, 560 (2016) [arXiv:1508.07307].
27. P. Haensel, A.Y. Potekhin and D.G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure* (Springer, Berlin, 2007).
28. W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
29. H. Buchholz, *The Confluent Hypergeometric Function, with Special Emphasis on its Applications*, (Springer-Verlag, Berlin, 1969).
30. L. Ferrario, D. de Martino and B. Gaensicke, "Magnetic White Dwarfs", *Space Sci. Rev.* **191**, 111 (2015) [arXiv:1504.08072].
31. R.N. Chaudhuri, "The Hill determinant: an application to a class of confinement potentials", *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 209 (1983).
32. M. Taut, "Two electrons in an external oscillator potential: Particular analytic solutions of a Coulomb correlation problem", *Phys. Rev. A* **48**, 3561 (1993).
33. T.T. Truong and D. Bazzali, "Exact low-lying states of two interacting equally charged particles in a magnetic field", *Phys. Lett. A* **269**, 186 (2000).
34. J. Karwowski and L. Cyrnek, "Harmonium", *Ann. Phys. (Leipzig)* **13**, 181 (2004).
35. J. Karwowski, "Few-particle systems: quasi-exactly solvable models", *J. Phys.: Conf. Ser.* **104**, 012033 (2008).
36. J. Karwowski and K. Szewc, "Separable N-particle Hookean models", *J. Phys.: Conf. Ser.* **213** 012016 (2010).
37. F. Caruso, J. Martins and V. Oguri, "Solving a two-electron quantum dot model in terms of polynomial solutions of a Biconfluent Heun Equation", *Ann. Phys.* **347**, 130 (2014) [arXiv:1308.0815].
38. J. Karwowski and H.A. Witek, "Biconfluent Heun equation in quantum chemistry: Harmonium and related systems", *Theor. Chem. Acc.* **133** (2014).
39. S-H. Dong, Z-Q. Ma and G. Esposito, "Exact Solutions of the Schrodinger Equation with Inverse-Power Potential in Two Dimensions", *Found. Phys. Lett.* **12**, 465 (1999) [arXiv:quant-ph/9902081].
40. S-H. Dong, "Exact Solutions of the Two-Dimensional Schrödinger Equation with Certain Central Potentials", *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 1119 (2000) [arXiv:quant-ph/0003100].
41. S. Ikhdair and R. Sever, "Exact solutions of the radial Schrödinger equation for some physical potentials", *C. Eur. Phys. J.* **5**, 516 (2007).
42. V.C. Aguilera-Navarro, G.A. Estévez and R. Guardiola, "Variational and perturbative schemes for a spiked harmonic oscillator", *J. Math. Phys.* **31**, 99 (1990).
43. R.L. Hall, N. Saad and A.B. von Keviczky, "Matrix elements for a generalized spiked harmonic oscillator", *J. Math. Phys.* **39**, 6345 (1998) [arXiv:quant-ph/9812048].
44. R.L. Hall and N. Saad, "Variational analysis for a generalized spiked harmonic oscillator", *J. Phys. A* **33**, 569 (2000) [arXiv:quant-ph/9911118].
45. R.L. Hall and N. Saad, "Perturbation expansions for the spiked harmonic oscillator and related series involving the gamma function", *J. Phys. A* **33**, 5531 (2000) [arXiv:math-ph/0006024].
46. R.L. Hall, N. Saad and A.B. von Keviczky, "Generalized spiked harmonic oscillator", *J. Phys. A* **34**, 1169 (2001) [arXiv:math-ph/0101006].
47. N. Saad and R.L. Hall, "Integrals containing confluent hypergeometric functions with applications to perturbed singular potentials", *J. Phys. A* **36**, 7771 (2003) [arXiv:math-ph/0306043].
48. J.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, First Edition, (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949).
49. L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Function*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).
50. R H Garstang, "Atoms in high magnetic fields (white dwarfs)", *Rep. Prog. Phys.* **40**, 105 (1977).
51. H. Ruder, G. Wunner, H. Herold and F. Geyer, *Atoms in Strong Magnetic Fields: Quantum Mechanical Treatment and Applications in Astrophysics and Quantum Chaos*, (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
52. M. Abramowitz and I.A. Stegun (Eds.), *Solutions of Quartic Equations*, in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover, New York, 1972).
53. F.M. Arscott et al., *Heun's Differential Equation*, A. Ronveaux, Ed. (Oxford University Press, Oxford, 1995).
54. M. Hortacsu, "Heun Functions and Some of Their Applications in Physics", *Adv. High Energy Phys.* **2018**, 8621573 (2018) [arXiv:1101.0471].
55. E.R. Arriola, A. Zarzo and J.S. Dehesa, "Spectral properties of the biconfluent Heun differential equation", *J. Com. Appl. Math.* **37**, 161 (1991).
56. E.M. Ferreira and J. Sesma, "Global solutions of the biconfluent Heun equation", *Numer. Algor.* **71**, 797 (2016).
57. N.M. Temme, "Asymptotic Methods for Integrals", Series in Analysis Vol. 6, (World Scientific, New Jersey, 2015)
58. H.S. Vieira and V.B. Bezerra, "Quantum Newtonian cosmology and the biconfluent Heun functions", *J. Math. Phys.* **56**, 092501 (2015) [arXiv:1502.03071].
59. M.S. Cunha, C.R. Muniz, H.R. Christiansen and V.B. Bezerra, "Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime", *Eur. Phys. J. C.* **76**, 512 (2016) [arXiv:1606.04481].

60. H. Abele, S. Baessler and A. Westphal, “Quantum states of neutrons in the gravitational field and limits for non-Newtonian interaction in the range between 1 micron and 10 microns”, *Lect. Notes Phys.* **631**, 355 (2003) [arXiv:hep-ph/0301145].
61. G.W. Biedermann, X.Wu, L. Deslauriers, S. Roy, C. Mahadeswaraswamy and M.A. Kasevich, “Testing gravity with cold-atom interferometers”, *Phys. Rev. A* **91**, 033629 (2015) [arXiv:1412.3210].
62. Y. Kamiya, K. Itagami, M. Tani, G.N. Kim and S. Komamiya, “Constraints on New Gravitylike Forces in the Nanometer Range”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 161101 (2015) [arXiv:1504.02181].
63. D. Borika, P. Jovanović, V.B. Jovanović and A.F. Zakharov, “Constraining the range of Yukawa gravity interaction from S2 star orbits”, *JCAP.* **11**, 050 (2013) [arXiv:1311.1404].
64. E.G. Adelberger, B.R. Heckel and A.E. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 77 (2003) [arXiv:hep-ph/0307284].
65. E.G. Adelberger, B.R. Heckel and A.E. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 102 (2009).
66. D. Koester and G. Chanmugam, “Physics of white dwarf stars”, *Rep. Prog. Phys.* **53**, 837 (1990).
67. S. Balberg and S. L. Shapiro, “The Properties of Matter in White Dwarfs and Neutron Stars”, *Handbook of Elastic Properties of Solids, Liquids, and Gases, Four-Volume Set, 1st Edition* Eds. M. Levy, H. Bass and R. Stern (Academic Press, 2000) [arXiv:astro-ph/0004317].
68. U. Das, B. Mukhopadhyay, “Strongly magnetized cold electron degenerate gas: Mass-radius relation of the magnetized white dwarf”, *Phys. Rev. D* **86**, 042001 (2012) [arXiv:1204.1262].
69. A. Broderick, M. Prakash and J.M. Lattimer, “The Equation of State of Neutron Star Matter in Strong Magnetic Fields”, *Astrophysical J.* **537**, 351 (2000).
70. N. Chamel, Zh.K. Stoyanov, L.M. Mihailov, Y.D. Mutafchieva, R.L. Pavlov and Ch.J. Velchev, “Role of Landau quantization on the neutron-drip transition in magnetar crusts”, *Phys. Rev. C* **91**, 065801 (2015).
71. N. Chamel, Y.D. Mutafchieva, Zh.K. Stoyanov, L.M. Mihailov and R.L. Pavlov, “Landau quantization and neutron emissions by nuclei in the crust of a magnetar”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **724**, 012034 (2016) [arXiv:1607.05934].
72. L. Poh-aun, S-H Ong and H.M. Srivastava, “Some Integrals of the products of Laguerre polynomials”, *Int. J. Computer Math.* **78**, 303 (2000).
73. A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev, *Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions*, English translation (Gordon and Breach, New York, 1986).
74. E. G. Adelberger, B. R. Heckel and A. E. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 77 (2003) [arXiv:hep-ph/0307284].
75. J. Murata and S. Tanaka, “Review of short-range gravity experiments in the LHC era”, *Class. Quantum Grav.* **32**, 033001 (2015) [arXiv:1408.3588].

Chapitre 6

Introduction au quatrième article : Les corrections aux niveaux de Landau pour les espace-temps de Levi-Civita et de Kerr

Ce chapitre est une introduction au quatrième article s'intitulant "Landau levels in a gravitational field : the Levi-Civita and Kerr spacetimes case" publié à l'European Physical Journal Plus et présenté après ce chapitre [77]. L'objectif général de ce quatrième article est de répéter la même démarche qu'au troisième article, mais avec les espaces-temps de Levi-Civita et de Kerr. Le tout en appliquant les approches des perturbations quantiques ainsi que de l'oscillateur harmonique présentées aux sections 2.1.2 et 2.3.2, respectivement. Mais avant, on doit préciser ce que sont exactement les espaces-temps de Levi-Civita et de Kerr.

6.1. Quelques notions préliminaires

6.1.1. L'espace-temps de Levi-Civita

Dans cette sous-section, on doit préciser la nature physique et géométrique de l'espace-temps de Levi-Civita. Celui-ci décrit un système contenant une masse cylindrique M de longueur infinie se situant au centre de l'espace-temps. La métrique associée à cet espace-temps contient deux paramètres inter-reliés a et b ainsi que le déficit angulaire K [78, 79]. À partir de cette métrique, on peut obtenir l'équation de Klein-Gordon (équation (2.2.12)). On définit cette métrique comme suit :

$$ds^2 = -c^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2a} dt^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2(a+b)} d\rho^2 + K^2 \rho^2 d\phi^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2b} dz^2. \quad (6.1.1)$$

L'équation (6.1.1) n'est pas la forme la plus connue dans la littérature [80, 81, 82, 83] (voir aussi l'article plus récent [84]). Dans cette même équation, on a que les paramètres a et b respectent la relation $ab + a + b = 0$ [78]. Celle-ci provient exactement de la résolution des équations d'Einstein dans le vide sous la forme de l'équation (2.2.5). Cette contrainte a été

obtenue via la méthode de séparation des variables appliquée aux équations d'Einstein dans le vide.

On a utilisé et défini le paramètre ρ_* , un rayon constant, afin de pouvoir utiliser la variable ρ en termes d'unités de longueur. Cela permettra d'utiliser le paramètre sans dimension $\frac{\rho}{\rho_*}$ dans le but d'effectuer les approximations appropriées pour la métrique et d'utiliser les logarithmes sans s'exposer à ces problèmes de non-respect de dimensions physiques. On pourra ainsi résoudre l'équation de Klein-Gordon associée à cette métrique. Ensuite, puisque la masse cylindrique au centre du système possède un rayon non-nul, ce rayon ρ_* localise le potentiel nul de référence [85].

Une deuxième spécificité se situe au niveau du paramètre K et de sa signification physique comme composante angulaire. Ce paramètre K a comme but de garder la composante angulaire ϕ à l'intérieur du domaine $[0, 2\pi[$ [78]. Toutefois, un excès ou un déficit angulaire K peut mener à une singularité conique si jamais l'espace-temps autour du cylindre est extrapolé jusqu'au centre de celui-ci. Cette singularité est donc encodée dans le paramètre K . Si $K < 1$, on a un déficit d'angle dans l'espace-temps. Si $K > 1$, on a alors un excès angulaire dans l'espace-temps (le tout est détaillé dans la référence [81]). Donc, en exposant explicitement ce paramètre K dans la métrique, on montre clairement les effets du surplus ou du déficit angulaire sur les quantités physiques et sur les niveaux d'énergies sans altérer la composante angulaire ϕ .

Une troisième particularité que l'on voit dans l'équation (6.1.1) est que les composantes en ρ et en z ont des coefficients bien différents. Nous avons opté pour ce choix de coordonnées afin de garder la forme usuelle de la composante angulaire de la métrique, contrairement à la forme de la métrique de Levi-Civita des références [78, 83, 84].

Le potentiel vecteur A_μ , qui est utilisé dans cet article, se définit pour un système de coordonnées cylindriques (t, ρ, ϕ, z) sous la forme covariante comme suit :

$$A_\mu = \left(0, 0, \frac{BK\rho^2}{2}, 0 \right). \quad (6.1.2)$$

Ce quadripotential exprimé par l'équation (6.1.2) donne un champ magnétique constant, même si ce champ n'est pas présent dans l'équation (6.1.1). Ce potentiel permet à notre métrique de respecter l'équation d'Einstein-Maxwell pour un cylindre de longueur infinie. Par la formulation des tétrades telle qu'exposée à la section 5.1.2, on obtient que $B^z = B^{\hat{z}} = B$, un champ magnétique constant, avec comme expression de la composante azimutale du quadripotential la forme suivante :

$$A_{\hat{\phi}} = \frac{B\rho}{2}. \quad (6.1.3)$$

Par ailleurs, le champ magnétique est assez faible pour pouvoir négliger les effets géométriques sur celui-ci et donc ses effets géométriques sur une particule [62]. En fait, les corrections dues aux effets "géométriques" occasionés par le champ magnétique sont de l'ordre

de $G\epsilon_0 c^{-2} B^2 \rho^2$. Ces corrections deviennent non-négligeables pour des champs magnétiques d'au moins 10^{19} gauss [70]. Pour les objectifs de cet article, on se concentrera sur les effets du champ magnétique sur une particule subissant la force de Lorentz usuelle.

Finalement, on doit mentionner que le paramètre a présent dans l'équation (6.1.1) possède une signification physique bien précise. Dans les références [82, 83], on expose clairement que pour $0 < a < \frac{1}{4}$ ou encore pour $a > 1$, on aura un espace-temps environnant où seulement les géodésiques circulaires du genre temps peuvent exister. Pour $a = \frac{1}{4}$ ou $a = 1$, les géodésiques sont du genre lumière et lorsque $\frac{1}{4} < a < 1$, on obtient des géodésiques du genre espace. Heureusement, puisque dans le quatrième article, on travaille avec $a \ll 1$, cet aspect n'est toutefois pas inquiétant. Néanmoins, ces obstacles à l'interprétation physique des effets de la métrique de Levi-Civita peuvent occasionner d'autres investigations sur les effets quantiques liés aux particules. Cela peut non seulement confirmer les effets de l'interaction gravitationnelle dans un système cylindrique, mais peut aussi créer une nouvelle porte d'entrée pour la compréhension des différents effets de la métrique elle-même.

6.1.2. L'espace-temps de Kerr

À la section 5.1.1, on avait défini la métrique de Schwarzschild usuelle pour une masse centrale M n'ayant aucun mouvement. Toutefois, si cette même masse M tourne sur elle-même, on doit alors tenir compte des effets de cette rotation de la masse sur l'espace-temps environnant et donc de son moment cinétique angulaire J . Cela peut se faire via l'espace-temps de Kerr [86]. En partant de l'approximation des champs faibles et d'une rotation à vitesse angulaire relativement faible de la masse M , la métrique de cet espace-temps de Kerr pour une masse M et un moment cinétique angulaire J possède la forme suivante en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) [86] :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \frac{4GM\alpha}{cr} \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (6.1.4)$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ et $\alpha = \frac{J}{Mc}$ est le moment cinétique angulaire spécifique (ou moment cinétique angulaire par unité de masse) de la sphère en rotation. En développant cette métrique au premier ordre en $\frac{GM}{c^2 r}$ et $\frac{GM\alpha}{c}$, on obtient que $\sqrt{-g} \approx cr^2 \sin \theta$. De plus, on suppose dans ce quatrième article que les champs gravitationnel et magnétique sont indépendants du temps et qu'il peut y avoir une symétrie de rotation autour de l'axe z . On voit à cette équation (6.1.4) que les trois premiers termes du membre de droite sont identiques à la métrique de Schwarzschild usuelle telle qu'exprimée par l'équation (5.1.3).

De ces considérations, on suppose alors que le potentiel vecteur dans la jauge symétrique, pour un champ magnétique constant et uniforme, se définit comme suit [72] :

$$\begin{aligned}
A_\mu &= (A_t, 0, 0, A_\phi), \\
A_t &= \frac{1}{c}B\alpha g_{tt} + \frac{1}{2}Bg_{t\phi} = -cB\alpha\left[1 - \frac{GM}{c^2r}(2 - \sin^2\theta)\right], \\
A_\phi &= \frac{1}{2}Bg_{\phi\phi} + \frac{1}{c}B\alpha g_{t\phi} \approx \frac{1}{2}Br^2 \sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

On a toujours un champ magnétique constant en direction z pour des raisons et arguments similaires au troisième article. On a exposé à l'équation (6.1.5) la forme covariante que l'on met généralement dans l'équation (2.2.12) de Klein-Gordon. Selon la section 5.1.2, il existe encore une fois la forme des tétrades de ce potentiel vecteur définie comme suit :

$$A_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2}Br \sin\theta. \tag{6.1.6}$$

Cette équation (6.1.6) permet de retrouver le champ magnétique constant s'étalant en direction $+\hat{z}$ via la relation $\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$ [72]. Autant par la forme covariante que par la forme des tétrades, on peut obtenir l'équation (2.2.12) permettant de décrire un problème physique d'une particule quantique. Bref, ces équations (6.1.4) et (6.1.5) sont essentielles à la compréhension de la partie concernant l'espace-temps de Kerr de ce quatrième article.

6.2. Objectifs et méthodologie

L'objectif principal de ce quatrième article est de répéter la démarche et la méthodologie utilisée au troisième article afin d'obtenir les énergies des niveaux de Landau avec corrections gravitationnelles pour deux types d'espaces-temps supplémentaires. D'abord, on effectuera cet exercice pour un espace-temps de géométrie cylindrique contenant une masse cylindrique provoquant un champ gravitationnel. Il s'agit de l'espace-temps de Levi-Civita. Ensuite, on fera de même pour l'espace-temps de Kerr qui est de géométrie sphérique contenant une masse M au centre, comme pour l'espace-temps de Schwarzschild. La différence pour cet espace-temps de Kerr est que l'on tient compte du moment cinétique angulaire α de cette même masse centrale M , ce qui ajoute des termes supplémentaires hors-diagonales à la métrique $g_{\mu\nu}$.

Tout comme pour le troisième article, on utilisera l'approche des perturbations quantiques indépendantes du temps telle que présentée à la section 2.1.2 ainsi que l'approche de l'approximation par le potentiel harmonique telle que présentée à la section 2.3.2. En plus, contrairement au troisième article, on y effectuera beaucoup plus d'applications numériques afin de pouvoir éventuellement mesurer expérimentalement ces corrections d'énergies. On fera par ailleurs des applications pour des situations réalisables en laboratoire pour les deux types d'espaces-temps. On montrera dans tous les cas, et aussi de la même manière, qu'il y

a toujours cette subdivision des niveaux de Landau selon ℓ et donc suppression de la dégénérescence infinie de ces niveaux. On fera de même pour des situations de type astrophysiques pour l'espace-temps de Kerr afin de connaître les effets du moment cinétique angulaire sur les corrections en énergies aux niveaux de Landau. Ces applications numériques concrètes constituent un autre objectif pour cet article.

D'un point de vue méthodologique, pour l'espace-temps de Levi-Civita, on pose d'abord l'équation (2.2.12) de Klein-Gordon pour la métrique exprimée par l'équation (6.1.1) et le quadripotential exprimé par l'équation (6.1.2). Ensuite, on applique la même démarche et on suit les mêmes étapes que pour le troisième article afin d'obtenir une équation de Schrödinger de la forme de l'équation (2.1.6). On obtient alors l'équation de Schrödinger pour les niveaux de Landau conventionnels avec en prime un potentiel de perturbation de forme logarithmique. On a obtenu cette équation en utilisant les approximations non-relativistes et de faibles champs. Puisque l'on a encore comme objectif d'obtenir les énergies des niveaux de Landau avec corrections gravitationnelles, on appliquera les deux méthodes utilisées au troisième article pour y parvenir. D'abord, on appliquera à la lettre la méthode des perturbations quantiques indépendantes du temps telle que décrite à la section 2.1.2 avec le potentiel logarithmique comme perturbation. On utilisera les fonctions propres non-perturbées décrites par l'équation (5.3.3). On obtient les énergies des niveaux avec corrections d'ordre 1 contenant toujours les termes avec dépendance au nombre quantique azimutal ℓ . On a donc encore une fois la subdivision des niveaux de Landau selon ℓ ainsi que la suppression de la dégénérescence infinie des niveaux conventionnels. On obtiendra le même type de résultat en appliquant l'approche du potentiel harmonique telle que décrite à la section 2.3.2. On obtient de cette méthode les énergies des niveaux non-perturbés plus la correction d'ordre 1 seulement selon la section 6.3.1.3. On y observe encore et toujours cette subdivision des niveaux selon ℓ .

De plus, on a que les corrections en énergies d'ordre 1 sont directement proportionnelles à la masse de la particule test, ce qui facilitera les expériences de mesures de ces corrections en énergie d'ordre 1. On le démontre clairement dans les résultats du tableau 1. De plus, on a que le champ magnétique B se retrouve aussi dans l'argument du logarithme présent dans cette correction d'énergie d'ordre 1. Cela permet aussi de montrer que même si le champ magnétique est élevé, les corrections d'énergies n'augmentent que de manière très raisonnable. Cela démontre clairement que les approximations effectuées ici sont justifiées, même pour des champs magnétiques élevées.

Pour l'espace-temps de Kerr, on pose encore une fois l'équation (2.2.12) de Klein-Gordon pour la métrique exprimée par l'équation (6.1.4) et le quadripotential exprimé par l'équation (6.1.5). Tout comme pour le troisième article, on y effectue les approximations de faibles champs et non-relativistes. On obtient alors une équation de Schrödinger similaire à l'équation (5.3.2), mais avec des termes de perturbations constitués globalement de deux facteurs

de corrections contenant tous les deux le moment cinétique angulaire spécifique α . On aboutit presque aux mêmes types de corrections d'ordres 1 et 2 des niveaux d'énergies via les deux approches décrites respectivement aux sections 2.1.2 et 2.3.2. On s'est aussi basés sur les résultats obtenus au troisième article pour l'espace-temps de Schwarzschild. On utilise encore une fois les fonctions propres non-perturbées décrites par l'équation (5.3.3) pour la méthode de la section 2.1.2. Contrairement à la situation prévalant au troisième article, on doit tenir compte des facteurs de correction dûs au moment cinétique angulaire spécifique α de la masse M au centre de l'espace-temps. Toutefois, on met surtout l'emphase sur les corrections d'ordre 1, car on s'intéresse aussi aux effets provenant du facteur d'entraînement de référentiel. C'est un phénomène propre à l'espace-temps de Kerr. On peut facilement faire le lien et la comparaison avec les résultats obtenus dans le troisième article.

Dans les résultats pour l'espace-temps de Kerr, on retrouve fréquemment ce facteur supplémentaire d'entraînement de référentiel contenant le moment cinétique, le champ magnétique ainsi que la masse de la particule test. On voit dans les résultats numériques présentés au tableau 2 que ce facteur est négligeable pour les situations réalisables en laboratoire sur terre. Par contre, on montrera numériquement, via les résultats présentés au tableau 3, que ce même facteur sera très dominant pour les situations astrophysiques. La raison en est que les objets astrophysiques engendrent très souvent des énergies gravitationnelles, mais surtout des énergies cinétiques, qui dominent largement par rapport aux énergies des niveaux de Landau pour des particules tests comme des électrons ou encore des protons.

Finalement, on aura obtenu au quatrième article pour les espaces-temps de Levi-Civita et de Kerr des résultats relativement proches à ceux de l'espace-temps de Schwarzschild. On a obtenu encore la subdivision des niveaux de Landau dans tous les cas et on a en plus tenu compte des effets du moment cinétique angulaire pour l'espace-temps de Kerr. Nos objectifs de départ ont été atteints intégralement. En plus, on a obtenu des résultats numériques pouvant être mesurés en laboratoire sur terre comme en observation astrophysique. On montre dans les résultats astrophysiques la domination des termes provenant de la rotation de ces objets versus les autres types de contribution. C'est un autre objectif également atteint.

6.3. Principaux résultats

6.3.1. Pour l'espace-temps de Levi-Civita

6.3.1.1. Les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger

En utilisant la métrique décrite par l'équation (6.1.1), l'équation de Klein-Gordon sous la forme de l'équation (2.2.12) pour l'espace-temps de Levi-Civita se définit comme suit :

$$\left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{2a} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{2a+2b-1} \partial_\rho \left(\frac{\rho}{\rho_*} \partial_\rho \right) - \frac{\ell^2}{K^2 \rho^2} + \frac{eB\ell}{K\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right] R(\rho) = 0. \quad (6.3.1)$$

En utilisant l'approximation $a, b \ll 1$, les puissances de $\frac{\rho}{\rho_*}$ dans l'équation (6.3.1) sont approximées au premier ordre en a et b . De cette condition, on respecte ensuite la condition $g_{00} \approx -1 + 2U$, où $U = a \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)$ est l'approximation post-newtonienne du potentiel. Le paramètre a se définit comme suit :

$$a \approx \pi G \gamma \rho_0^2 / c^2, \quad (6.3.2)$$

où ρ_0 est le rayon du cylindre et γ est la masse volumique de celui-ci. Cette équation (6.3.2) sera utile lors des applications numériques pour les situations réalisables en laboratoire.

Puisque un des objectifs de cet article est de proposer des expériences en laboratoire, on effectue les approximations pour les faibles champs (i.e. $a, b \ll 1$) et non-relativistes (i.e. $E^2 \approx m^2 c^4 + 2mc^2 \mathcal{E}$ et $mc^2 \gg \hbar eB/m$). On pose l'ansatz $R(\rho) = \rho^{-1/2} \Psi(\rho)$ et l'équation (6.3.1) devient de la forme de l'équation (2.1.6) comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' + \left[\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(\frac{\ell^2}{K^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\hbar eB\ell}{2mK} - amc^2 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (6.3.3)$$

6.3.1.2. Perturbations quantiques

On applique la méthode des perturbations quantiques, en utilisant la méthode présentée à la section 2.1.2, pour le potentiel de perturbation logarithmique présent au dernier terme de l'équation (6.3.3) exprimé comme suit :

$$V(\rho) = -amc^2 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right). \quad (6.3.4)$$

De l'équation (6.3.4), on obtient comme énergie des niveaux de Landau avec correction au premier ordre l'expression suivante :

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - amc^2 \bar{\mathcal{L}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}. \quad (6.3.5)$$

Dans cette équation (6.3.5), $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ est donné par l'équation (5.3.5) et $\bar{\mathcal{L}}_{n\ell}$ est exprimé à l'aide de l'équation (A.0.28) en mettant $m = n$ et en enlevant le facteur $(2/\beta)^{(\ell+1)}$. L'équation (6.3.5) montre encore une fois qu'il y a subdivision des niveaux de Landau selon le nombre quantique azimutal ℓ et qu'il y a donc suppression de la dégénérescence infinie des niveaux de Landau conventionnels.

Pour montrer clairement ce phénomène, on peut obtenir pour le niveau $n = 1$ avec la subdivision par le nombre ℓ les niveaux de Landau avec correction d'ordre 1. Pour les faibles valeurs de ℓ , on obtient des énergies avec correction d'ordre 1 similaires à la forme :

$$\mathcal{E}_{1\ell} \approx \mathcal{E}_1^{(0)} - amc^2 \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho_*} \right). \quad (6.3.6)$$

Pour des valeurs de ℓ très grandes, on utilise les équations (A.0.15) et (A.0.33) pour obtenir en bout de piste la relation suivante pour $n = 1$:

$$\mathcal{E}_{1\ell \gg 1} = \mathcal{E}_1^{(0)} - amc^2 \mathcal{L}_{1\ell \gg 1} \mathcal{M}_{1\ell \gg 1}^{-1} \approx \frac{3\hbar e B}{2m} + \frac{amc^2}{2} \ln \left(\frac{eB\rho_*^2}{2\hbar\ell} \right). \quad (6.3.7)$$

L'équation (6.3.7) montre que la correction et la subdivision des niveaux pour ℓ très grand se résument par une expression simple, tout comme pour le cas Schwarzschild présenté au troisième article [62]. Cette subdivision des niveaux ne dépend pas du rayon du cylindre ρ_0 , mais plutôt du rayon de référence du potentiel ρ_* . Toutefois, la correction des niveaux dépend logarithmiquement du champ magnétique B , contrairement à l'espace-temps de Schwarzschild. Pour $K \neq 1$, le niveau de Landau non-perturbé sera $\frac{3\hbar e B}{2Km}$ et le facteur à l'intérieur du logarithme ne sera pas affecté car K se retrouve présent au numérateur comme au dénominateur : ces facteurs s'annulent complètement. De plus, l'équation (6.3.5) montre que pour n très grand, la correction des niveaux demeure bien présente.

Pour la correction d'ordre 2, en appliquant le dernier terme de l'équation (2.1.13) pour le potentiel de perturbation exprimé par l'équation (6.3.4), on obtient l'expression suivante :

$$\mathcal{E}_{n\ell}^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k, \ell | V(\rho) | n, \ell \rangle|^2}{\mathcal{E}_k^{(0)} - \mathcal{E}_n^{(0)}} = \frac{a^2 m^3 c^4}{\hbar e B} \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k, \ell | \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) | n, \ell \rangle|^2}{(k - n)}. \quad (6.3.8)$$

Ce terme donne un terme logarithmique au numérateur en B et un terme en B au dénominateur. Si $B \rightarrow 0$, on aura une correction d'ordre 2 qui sera divergente. Donc, pour $B = 0$, la correction d'ordre 2 sera avec cette équation (6.3.8) non définie. De ce fait, la seule manière d'obtenir une correction non-divergente pour $B = 0$ est de résoudre l'équation (6.3.3) avec $B = 0$.

6.3.1.3. Approche du potentiel harmonique

On peut aussi résoudre l'équation (6.3.3) pour les niveaux de Landau avec corrections en utilisant la méthode de l'approximation par le potentiel harmonique décrite à la section

2.3.2. On applique à la lettre cette méthode pour le potentiel effectif de l'équation (6.3.3), soit les termes entre crochets. De là, on obtient les niveaux d'énergies avec corrections comme suit :

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\ell}{2} \right) - \frac{amc^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}}} \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \ln \left(\frac{2\hbar}{eB\rho_*^2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right) \right]. \quad (6.3.9)$$

L'équation (6.3.9) donne les énergies de Landau avec correction au premier ordre en a pour tout n et ℓ . Bien sûr, on remplace ℓ par ℓ/K pour $K \neq 1$. Avec tout cela, on retrouve le résultat exprimé par l'équation (6.3.5) obtenu avec les perturbations quantiques pour la correction au premier ordre. Ce résultat en l'équation (6.3.9) concorde bien pour ℓ grand avec l'équation (6.3.7) : cela donne une expression identique pour le cas $n = 1$. En enlevant le cylindre, pour $a = 0$, on retrouve bel et bien les niveaux de Landau pour l'espace-temps de Minkowski.

Numériquement, en utilisant les équations (6.3.2) et (6.3.9), on obtient au tableau 1 les corrections au niveau de Landau $n = 1$ pour une possible expérience en laboratoire avec une résolution de l'ordre de 10^{-15} eV (i.e. cylindre plus gros). On suppose ici des électrons d'énergies de l'ordre de 10^{-3} eV (10^{-6} eV si on utilise les protons) comme particules tests et on utilise des cylindres longs constitués de pur platine [87, 88].

| Champ B (T) | Rayon (m) | Longueur (m) | Correction d'énergie (eV) |
|---------------|-----------|--------------|---------------------------|
| 10 | 0,01 | 2,0 | 10^{-19} |
| 10 | 1,0 | 200 | 10^{-15} |

Tableau 1. Valeurs de corrections d'ordre 1 en énergie du niveau de Landau $n = 1$ pour des cylindres de différentes tailles avec des électrons comme particules tests. Pour des protons comme particules tests, on multiplie les corrections d'énergies par 1836.

6.3.2. Pour l'espace-temps de Kerr

6.3.2.1. Les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger

À partir des équations (6.1.4) et (6.1.5), on obtient comme équation (2.2.12) de Klein-Gordon l'expression suivante :

$$\left[\left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2GMEeB\alpha(2 - \sin^2 \theta)}{\hbar^2 c^3 r} \right) \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_r^2 + \left(\frac{2}{r} - \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \partial_r + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \frac{\cos \theta \partial_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4\hbar^2} - \frac{4GM\alpha E\ell}{\hbar c^3 r^3 \sin^2 \theta} + \frac{2GM\alpha EeB}{\hbar^2 c^3 r} \right] R(r, \theta) = 0. \quad (6.3.10)$$

En travaillant dans le plan xy , on impose que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et donc que $\rho = r \sin \theta$ dans cette équation (6.3.10). Tout comme pour les autres types d'espace-temps, on se sert de l'Ansatz $R(\rho) = \frac{\Psi(\rho)}{\sqrt{\rho}}$ et on effectue les approximations de faibles champs ainsi que non-relativistes. On obtient alors la forme de l'équation (2.1.6) de Schrödinger pour l'équation (6.3.10) comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' + \left[\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2 (\ell^2 - \frac{1}{4})}{2m \rho^2} - \frac{\hbar e B \ell}{2m} - \frac{GMm}{\rho} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) + \frac{2\hbar GM \ell \alpha}{c \rho^3} \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (6.3.11)$$

On remarque que l'équation (6.3.11) est très similaire à l'équation (5.3.2) pour l'espace-temps de Schwarzschild avec l'approximation des champs faibles [62]. On a encore le terme newtonien $-\frac{GMm}{\rho}$ avec en plus un facteur de correction multiplicatif $\left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right)$ qui tient compte de l'effet du moment cinétique de la masse M au centre du système. Toutefois, on a en plus un terme supplémentaire en ρ^{-3} et en ℓ au numérateur, car ce terme devient très important pour ℓ très grand, malgré la présence de \hbar à ce numérateur.

6.3.2.2. Perturbations quantiques

On appliquera la méthode décrite à la section 2.1.2 pour le potentiel de perturbation de l'équation (6.3.11) comme suit :

$$V(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) + \frac{2\hbar GM \ell \alpha}{c \rho^3}. \quad (6.3.12)$$

En appliquant l'équation (2.1.13) au premier ordre pour cette perturbation décrite par l'équation (6.3.12), on obtient les niveaux de Landau avec corrections d'ordre 1 comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n\ell} &= \mathcal{E}_n^{(0)} + \langle n, \ell | V(\rho) | n, \ell \rangle \\ &= \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm\sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \left[\left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc}\right) \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} - \left(\frac{eB\alpha\ell}{mc}\right) \bar{\mathcal{Q}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} \right].\end{aligned}\quad (6.3.13)$$

On a dans l'équation (6.3.13) que les amplitudes sont décrites par les termes suivants : $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ est donné par l'équation (5.3.5), $\bar{\mathcal{P}}_{n\ell}$ est donné par l'équation (5.3.6) et $\bar{\mathcal{Q}}_{n\ell}$ est donné par l'équation (A.0.35) avec $m = n$ et sans le facteur $(2/\beta)^{\ell-\frac{1}{2}}$. Tout comme pour l'espace-temps de Schwarzschild, on obtient que le premier terme de correction d'ordre 1 est proportionnel au facteur $\sqrt{\beta/2}$. De plus, l'amplitude $\bar{\mathcal{Q}}_{n\ell}$ provient du deuxième terme de l'équation (6.3.12) en ρ^{-3} . Cette équation (6.3.13) montre encore une fois la subdivision des niveaux de Landau selon ℓ et provenant des termes de perturbations gravitationnelles. En plus, on obtient dans ces mêmes expressions le facteur $\frac{eB\alpha}{mc}$ exprimant alors l'entraînement du référentiel dû à la rotation du référentiel occasionnée par le moment cinétique angulaire de la masse centrale M .

On veut maintenant obtenir ces énergies avec corrections pour le niveau $n = 1$. Pour les ℓ de faibles valeurs, on utilise les intégrales (A.0.9), (A.0.16) et (A.0.34) pour obtenir que $\mathcal{P}_{1\ell} \mathcal{M}_{1\ell}^{-1} \sim \rho_0^{-1}$ et que $\mathcal{Q}_{1\ell} \mathcal{M}_{1\ell}^{-1} \sim \rho_0^{-3}$. Comme le deuxième terme de perturbation s'exprime en $\hbar\rho^{-3}$, ce terme devient dans ce cas négligeable par rapport au terme newtonien et le niveau de Landau avec correction devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{1\ell} &= \frac{3\hbar eB}{2m} - \frac{GMm}{\rho_0} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc}\right) + \left(\frac{2\hbar GM\alpha\ell}{c}\right) \frac{1}{\rho_0^3} \\ &\approx \frac{3\hbar eB}{2m} - \frac{GMm}{\rho_0} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc}\right).\end{aligned}\quad (6.3.14)$$

Pour ℓ très grand $\ell \gg 1$, on a obtenu les équations (A.0.15), (A.0.19) et (A.0.37) pour $\mathcal{M}_{1\ell \gg 1}$, $\mathcal{P}_{1\ell \gg 1}$ et $\mathcal{Q}_{1\ell \gg 1}$. En les substituant dans l'équation (6.3.13) et en utilisant l'approximation asymptotique de la fonction Gamma (i.e. l'approximation de Stirling), on obtient comme équation (6.3.13) la relation suivante [21] :

$$\mathcal{E}_{1\ell \gg 1} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm\sqrt{\frac{eB}{2\hbar\ell}} \left(1 + \frac{eB\alpha}{mc}\right).\quad (6.3.15)$$

L'équation (6.3.15) montre que le terme de correction newtonien décroît comme $1/\sqrt{\ell}$ et disparaît pour ℓ tendant vers l'infini tout comme pour la situation de l'espace-temps de Schwarzschild, même avec la correction due au moment cinétique angulaire de la masse centrale [62]. Maintenant, en regardant les équations (A.0.10), (A.0.17) et (A.0.35), on remarque que si n devient très grand, la correction des niveaux de Landau ne décroît pas du tout. On

remarque d'ailleurs que pour ℓ très grand, ces mêmes corrections ne sont pas du tout dépendantes du rayon ρ_0 de la masse M en rotation au centre du système, autant pour $n = 1$ que pour les autres valeurs de $n > 1$.

6.3.2.3. Approche du potentiel harmonique

En appliquant à la lettre la méthode décrite à la section 2.3.2, on approxime le potentiel effectif se situant entre les crochets de l'équation (6.3.11) par un potentiel d'oscillateur harmonique simple. Cette méthode donne au final les niveaux de Landau avec corrections comme suit :

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\ell}{2} \right) + \frac{GMm}{(\ell^2 - \frac{1}{4})^{3/4}} \sqrt{\frac{eB}{32\hbar}} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) \times \left(n + \frac{1}{2} - 4\sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \quad (6.3.16)$$

On tient compte du fait que l'on a dans le potentiel effectif de l'équation (6.3.11) un terme en $GMm \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right)$. On n'a donc qu'à remplacer le facteur GMm dans l'équation (5.3.15) par ce facteur $GMm \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right)$ pour obtenir l'équation (6.3.16). La seule différence est que l'on tient compte des effets du moment cinétique angulaire contenu dans le paramètre α de la masse centrale M .

On retrouve donc les niveaux de Landau usuels plus une correction due aux effets gravitationnels, avec la dépendance en la racine carrée de B et au facteur $\frac{eB\alpha}{mc}$. Malgré les similitudes entre les deux méthodes utilisées ici pour les corrections au premier ordre, on ne peut utiliser l'approximation pour ℓ très grand pour approximer l'équation (6.3.16). On ne peut donc comparer cette équation (6.3.16) avec l'équation (6.3.15) pour ℓ très grand. On voit très bien la supériorité de l'approche des perturbations quantiques par rapport à celle de l'oscillateur harmonique pour les corrections aux niveaux de Landau.

Maintenant, avec des protons ou encore des électrons comme particule test (masse m), on obtient avec les équations (6.3.14) et (6.3.15) les valeurs de corrections d'ordre 1 du niveau de Landau $n = 1$ ainsi que le facteur $\frac{eB\alpha}{mc}$ dû à la rotation de la masse centrale. On utilise ici du platine pur et les résultats anticipés sont exposés au tableau 2 pour des situations réalisables en laboratoire. On pose dans un tel cas que les énergies des protons et des électrons sont, respectivement, de l'ordre de 10^{-6} eV et de 10^{-3} eV. On aura alors que les corrections en énergies sont relativement faibles par rapport aux énergies des niveaux non-perturbés.

Par contre, on peut aussi effectuer des observations astrophysiques ayant pour objectif de mesurer les corrections d'énergies et le facteur d'entraînement de référentiel. Comme on doit tenir compte des champs magnétiques très intenses pour les étoiles à neutrons et les naines blanches, on en verra les effets sur les énergies des niveaux de Landau ainsi que sur

| Particule Test | B (T) | Rayon (m) | Corr. énergie (eV) | ω (tours/minute) | $\left(\frac{eB\alpha}{mc}\right)$ |
|----------------|---------|-----------|--------------------|-------------------------|------------------------------------|
| Proton | 10 | 1 | 10^{-8} | 100 | 10^{-7} |
| Électron | 10 | 1 | 10^{-11} | 100 | 10^{-4} |

Tableau 2. Corrections du niveau de Landau $n = 1$ et facteurs de rotation de la masse centrale pour des situations réalisables en laboratoire (sans compter le facteur coût et les défis technologiques).

ses corrections [89, 90, 91]. En plus, certains de ces objets astrophysiques possèdent des vitesses de rotation très élevées, ce qui donnera des facteurs d'entraînement de référentiels très élevés. Ces termes provenant du moment cinétique angulaire de l'étoile seront alors très dominants par rapport aux corrections provenant de la gravitation newtonienne, mais surtout par rapport aux énergies des niveaux de Landau non-perturbées. On le voit dans les résultats présentés au tableau 3. On pose que les énergies des niveaux de Landau non-perturbés pour les protons et les électrons sont, respectivement, de l'ordre de 10^3 eV et 10^6 eV. Selon les résultats du tableau 3, on déduit clairement que ces facteurs d'entraînement donnent bel et bien des énergies cinétiques largement dominantes versus les autres contributions en énergies. On obtiendra d'ailleurs des résultats similaires à ceux du tableau 3 pour les magnétars [92].

| Part. Test | B (T) | Rayon (m) | ω (tours/minute) | $\left(\frac{eB\alpha}{mc}\right)$ |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-------------------------|------------------------------------|
| Proton | 10^{10} | 10^4 | 10^4 | 10^{11} |
| Électron | 10^{10} | 10^4 | 10^4 | 10^{15} |
| Proton (rotation lente de l'étoile) | 10^{10} | 10^3 | 10^{-5} | 1, 0 |
| Électron (rotation lente de l'étoile) | 10^{10} | 10^3 | 10^{-5} | 10^4 |

Tableau 3. Facteurs de rotation de la masse centrale pour un magnétar (cas astrophysique).

6.4. Les contributions

Mes contributions

- Vérification et aussi obtention de la forme finale de l'équation de Schrödinger pour appliquer les approches possibles pour les niveaux de Landau.

- Calculs finals des niveaux de Landau via la théorie des perturbations quantiques indépendantes du temps pour les deux métriques.
- Calculs des niveaux de Landau via l'approche de l'oscillateur harmonique et certaines approximations appropriées pour l'obtenir.
- Ajout de certaines interprétations pour les résultats des niveaux de Landau des deux types d'espace-temps (Levi-Civita et Kerr).

J'ai effectué une grande partie des principaux calculs et j'ai proposé certaines méthodes et approximations pour les résultats.

Les contributions de mon directeur

F. Hammad a fait des vérifications, a proposé plusieurs intégrales ainsi que beaucoup d'interprétations. Il a proposé un facteur de correction supplémentaire à la perturbation pour Kerr afin de tenir compte des grandes valeurs de ℓ . Toujours, il y a eu un dialogue constant entre moi et mon directeur pour affiner nos calculs et nos résultats.

Quatrième article.

Landau levels in a gravitational field : the Levi-Civita and Kerr spacetimes case

par

Fayçal Hammad¹ et Alexandre Landry⁴

- (¹) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (²) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7
- (³) Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, Que-
bec, Canada J1M 0C8
- (⁴) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada

Cet article a été soumis dans European Physical Journal Plus (Publié en 2020 [[77](#)]).

Landau levels in a gravitational field: The Levi-Civita and Kerr spacetimes case

Fayçal Hammad^{1,2,3} and Alexandre Landry^{3ab}

¹ Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada

² Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 0C8 Canada

³ Département de Physique, Université de Montréal, 2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada

Received: date / Revised version: date

Abstract. We have recently found that the gravitational field of a static spherical mass removes the Landau degeneracy of the energy levels of a particle moving around the mass inside a magnetic field by splitting the energy of the Landau orbitals. In this paper we present the second part of our investigation of the effect of gravity on Landau levels. We examine the effect of the gravitational fields created by an infinitely long massive cylinder and a rotating spherical mass. In both cases, we show that the degeneracy is again removed thanks to the splitting of the particle's orbitals. The first case would constitute an experimental test — which is quantum mechanical in nature — of the gravitational field of a cylinder. The approach relies on the Newtonian approximation of the gravitational potential created by a cylinder but, in view of self-consistency and for future higher-order approximations, the formalism is based on the full Levi-Civita metric. The second case opens up the possibility for a novel quantum mechanical test of the well-known rotational frame-dragging effect of general relativity.

PACS. 04.80.-y Experimental studies of gravity – 04.20.-q Classical general relativity – 03.65.-w Quantum mechanics – 03.65.Ge Solutions of wave equations: bound states

1 Introduction

We have recently shown in Ref. [1] that gravity has a nontrivial effect on the quantum Landau energy levels (see, e.g., Ref. [2]) of a particle moving around a spherical static mass and surrounded by a constant and uniform magnetic field. We found that the degeneracy of the Landau levels is removed by splitting the energy of each of the Landau orbitals. We have also pointed out that the gravitational splitting of the levels could be used to test departures from the inverse square-law of gravity using quantum particles.

It is worth recalling, and emphasizing, here that the investigation done in Ref. [1] belongs actually to two different classes of research involving gravity and quantum particles. The first class of investigations aims at bringing into light the gravitational effects on a quantum particle. Noticeable among such investigations are those studying the behavior of cold neutrons inside a gravitational field [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. The central idea behind such an approach is to substitute the gravitational potential for the usual electric potentials frequently used in non-relativistic quantum mechanics of point particles. Just like with the familiar electric potentials, the gravitational one is indeed expected to induce a quantization of the energy of the particle immersed inside it, or even lead to interference patterns as the particle moves inside such a potential. From this point of view, the work we presented in Ref. [1] indeed subscribes to this class of research by showing that the effect of the additional potential due to gravity modifies the familiar Landau energy levels of a charged particle inside a magnetic field.

Besides showing how gravity disturbs the Landau levels of a charged particle, however, the work in Ref. [1] allowed to explicitly expose the effect a departure from the inverse square-law for gravity would have on a quantum particle. As such, our previous work can also be assigned to the second class of investigations the aim of which is to *test* the gravitational field itself in the same spirit as the works such as the one in Ref. [11]. Investigating the effect of gravity on Landau levels becomes thus a fundamental approach in the sense that it consists in using the *quantum* theory to probe the *classical* gravitational field.

^a *Present address:* fhammad@ubishops.ca

^b *Present address:* alexandre.landry.1@umontreal.ca

In the present paper, our goal is to explore even more this second category of investigations while still providing evidence for the effect of more complicated spacetimes on a quantum particle. More specifically, we are going to study the fate of Landau's energy levels of a charged particle inside a uniform and constant magnetic field, first (i) when the particle is moving within the Levi-Civita spacetime then (ii) when the particle is moving within the Kerr spacetime. The goal of the first investigation is, above all, to contribute to the existing efforts in the literature towards devising tests for that elusive and much debated spacetime of general relativity. In fact, although the so-called Levi-Civita spacetime was discovered exactly now a century ago [12, 13], such a metric still holds many mysteries and is less often used in the literature compared to the more famous ones of the Schwarzschild and Kerr spacetimes.

The Kerr metric, in contrast, is indeed very well known, for it is used mainly to describe the spacetime of a rotating black hole. As such, our present investigation based on the Kerr metric does actually more than just test a special solution to the gravitational equations. It provides a novel way — *quantum mechanical* in nature — for testing the frame-dragging effect of general relativity which, hitherto, has only been tested through the famous Lense-Thirring effect (see e.g., Ref. [14] and the references therein). The Lense-Thirring effect consists of the precession of a gyroscope, or any spinning body, in the vicinity of a rotating mass, like the Earth. In this paper, we show how frame-dragging creates a specific signature on the splitting of the quantum Landau levels. For approaches relying instead on the effect of rotating frames on the quantum spin of particles and on their internal clocks, as well as on quantum interferences, see Refs. [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

The remaining sections of this paper are organized as follows. In Section 2, we build the curved-spacetime Klein-Gordon equation for a charged particle minimally coupled to the electromagnetic field and moving in the full Levi-Civita spacetime created by an infinitely long massive cylinder. We then solve the equation in the Newtonian approximation, with the goal of making contact with laboratory experimental tests, and then we evaluate the splitting of the Landau levels. In Section 3, we repeat the same analysis as the one done for the Levi-Civita spacetime in Section 2, but using the Kerr metric instead. We compare the Landau levels splitting caused by the latter spacetime to the one obtained in Ref. [1] within the static spherical mass. The frame-dragging effect reveals itself clearly. We conclude this paper with a brief discussion and conclusion section. A short appendix is included in which many of the complicated integrals needed in the text are gathered for reference.

2 A particle inside a magnetic field in the Levi-Civita spacetime

In both this section and the next, we are going to use a charged spinless particle of mass m as our test particle. For practical purposes, we are going to assume the particle has the elementary charge e . This is motivated by the possibility of experimentally implementing the setup by using heavy ions the spin of which can be neglected. Thus, the Klein-Gordon equation for a scalar field in curved spacetime, $(\square + m^2 c^2)\varphi = 0$, will be amply sufficient for our present purposes.

For a minimally coupled particle to the electromagnetic field A_μ and to the metric $g_{\mu\nu}$ of the spacetime, the Klein-Gordon equation reads (see, e.g., Ref. [26]),

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) + m^2 c^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (1)$$

where, the minimal-coupling prescription, $D_\mu = -i\hbar\partial_\mu - eA_\mu$, is assumed. Next, the Levi-Civita metric around an infinitely long cylinder of mass M can be written in the cylindrical coordinates (t, ρ, ϕ, z) as follows [27]:

$$ds^2 = -c^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2a} dt^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2(a+b)} d\rho^2 + K^2 \rho^2 d\phi^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-2b} dz^2. \quad (2)$$

Here, the constants a, b and K are all arbitrary — with a constraint between a and b — while c is the speed of light. Note that the form (2) of the Levi-Civita metric we use here is not the one that one often encounters in the literature [28, 29, 30, 31] (see also, the very nice recent review [32]). In fact, the first difference is that we have introduced here the fixed constant radius ρ_* to allow us to keep inside the metric the radius ρ , describing the position of the particle away from the center of the cylinder, with the dimensions of a length. In addition, in view of the approximations we are going to perform in order to be able to solve our differential equations, having a dimensionless ratio is very well suited for expanding the metric in powers of such a ratio as well as for keeping the argument of the logarithms appearing there dimensionless. Furthermore, as is well-known in the case of logarithmic potentials, in particular the one created by an infinitely long cylinder (see, e.g., Ref. [33]), one does not have a vanishing potential anywhere. As a consequence, the reference point for potentials cannot be taken to be at infinity anymore (as is the case with a spherical mass). To remedy such an issue, one introduces a fixed radial distance from the center of the source and takes such a point to be the reference for measuring potentials. As we shall see shortly, our fixed radius ρ_* allows us specifically to take it to be the reference point of zero gravitational potential.

The second difference with respect to the usual forms of the metric given in the literature is the presence of the multiplicative constant K in the angular component of the metric. The role of this constant is actually just to avoid rescaling the azimuth angle ϕ , keeping it instead within the familiar range $[0, 2\pi[$ [27]. As such, any possible excess or deficit angle, which would give rise to a conical singularity whenever the spacetime around the cylinder is continued all the way to the center of the latter (the latter becoming then a string), is encoded in the constant K . If $K < 1$, one has a deficit angle (a wedge is removed from spacetime), whereas for $K > 1$ one has an excess of spacetime (a wedge is added)¹. As we shall see below, our results make even more transparent the effect of this deficit/excess angle on the energy-spectrum of the particle when we display explicitly the constant K in the metric instead of absorbing it by redefining the angle ϕ .

The third difference in our choice (2) for the form of the Levi-Civita metric, is the fact that our z - and ρ -component of the metric acquire different coefficients. This specific choice is merely made here for the sake of simplicity. In fact, had we chosen to use instead the more familiar form of the metric, in which both coordinates acquire the same metric component [31, 32], the angular component of the metric would also acquire² a power function of ρ instead of having the above familiar factor ρ^2 . This would indeed only render our equations and analysis uselessly complicated.

Let us now focus on the meaning of the remaining two parameters a and b of the metric. First, as mentioned above, the two parameters are not completely arbitrary as they obey a specific constraint in the form of an algebraic relation between them. Such a relation reads, $ab + a + b = 0$ [27]. This implies that the total number of independent parameters in the Levi-Civita spacetime is actually just two. The meaning of one of these two parameters, say, a , can now be found as follows. For very small a , we can expand the 00-component of the metric to the first order as, $(\rho/\rho_*)^{-2a} \approx 1 - 2a \ln(\rho/\rho_*)$. Comparing this with the weak-field approximation of general relativity, $g_{00} \approx -1 + 2U$, reveals what potential U in the post-Newtonian approximation one has; it reads $U = a \ln(\rho/\rho_*)$. This, when compared, in turn, with the well-known Newtonian potential around an infinitely long cylinder [33], implies that a should be identified with the product $G\lambda/c^2$, where λ is the linear mass density of the cylinder. For a finite-radius cylinder, we should then identify a with $\pi G\gamma\rho_0^2/c^2$ when the radius of the cylinder is ρ_0 and its volume mass density is γ . It should be kept in mind, though, that for the infinitely-long cylinder approximation to be accurate in the case of a finite cylinder, the particle should be kept very close to the lateral surface of the long cylinder.

It is worth noting here, however, that, as alluded to in the Introduction, the Levi-Civita metric is not free from ambiguities when it comes to its full interpretation. In fact, it was shown in Refs. [30, 31] that only for the range $0 < a < 1/4$ of the parameter a does one extract a physically sensible spacetime around the cylinder, for only then do circular time-like geodesics exist. For $a = 1/4$ or $a = 1$, the circular geodesics are null, whereas for $1/4 < a < 1$ those geodesics are spacelike. The circular geodesics become timelike only for $0 < a < 1/4$ or $a > 1$. Fortunately, since we are interested here in the case $a \ll 1$, such issues do not need to worry us. Nevertheless, these serious obstacles in the interpretation of the Levi-Civita metric make actually the investigation of the effects of the metric on quantum particles, not only a way for testing cylindrical gravitational fields, but constitutes thus an additional input towards understanding the metric itself.

Let us now substitute the metric (2) into the Klein-Gordon equation (1). As for the vector potential A_μ , we are going to use the usual symmetric gauge adapted to the cylindrical coordinates (t, ρ, ϕ, z) in which the only non-vanishing component reads³, $A_\phi = \frac{1}{2}KB\rho^2$. Note that with the presence of the magnetic field \mathbf{B} , one might expect a spacetime metric that is not the one in Eq. (2), but a metric that would be a solution to the Einstein-Maxwell equations with a massive infinitely long cylinder. However, as explained in detail in Ref. [1], we assume the magnetic field to be as weak as to allow us to neglect its *geometric* effect on the spacetime and, hence, neglect its effect on the particle via geometry. In fact, the correction that arises from taking into account the effect of the magnetic field on geometry is of the order of $G\epsilon_0 c^{-2}B^2\rho^2$ and becomes significant only for magnetic fields of the order of 10^{19}G [34]. We therefore focus in this paper only on the effect of the magnetic field on the particle due the usual Lorentz force.

Now, because of the time-independence of both the metric and the magnetic field, and thanks to the symmetry of the planar motion of the particle around the z -axis, we expect the wavefunction for the particle of energy E to be of the form, $\varphi(t, \rho, \phi, z) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\ell\phi} R(\rho)$, with ℓ a non-negative integer. For simplicity, we assume that the particle has no momentum along the z -direction and that it is moving counterclockwise around the cylinder. Therefore, the Klein-Gordon equation (1) in the curved spacetime (2) takes the form,

$$\left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{2a} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{2a+2b-1} \partial_\rho \left(\frac{\rho}{\rho_*} \partial_\rho \right) - \frac{\ell^2}{K^2 \rho^2} + \frac{eB\ell}{K\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right] R(\rho) = 0. \quad (3)$$

¹ The role of this parameter in the Levi-Civita metric in encoding the global topology of the spacetime was first pointed out in Ref. [29].

² See Ref. [27] for the various coordinate re-definitions that allow one to switch from one form of the metric to the other.

³ We display here the covariant form of the potential vector, as the tetrad form we used in the first version of this manuscript leads to much confusion. In fact, while the usual tetrad form of the vector potential $A_\phi = \frac{1}{2}B\rho$ has the advantage of displaying the right dimensions for a potential vector, it requires one to be careful when substituting it inside Eq. (1). By taking such care, the result one finds is, of course, the same with both expressions.

In the case of small parameters, $a, b \ll 1$, the powers of the ratio (ρ/ρ_*) can be expanded and the above equation then reads, at the first-order approximation in a and b , as follows:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{dR}{d\rho} + \left[\left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\ell^2}{K^2 \rho^2} + \frac{eB\ell}{K\hbar} - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right) + 2 \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{\ell^2}{K^2 \rho^2} - \frac{eB\ell}{K\hbar} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} \right) (a+b) \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) - \frac{2bE^2}{\hbar^2 c^2} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \right] R(\rho) = 0. \quad (4)$$

Next, performing the change of variable $R(\rho) = \psi(\rho)/\sqrt{\rho}$, and then decomposing the total energy of the test particle as, $E = \mathcal{E} + mc^2$, and using the non-relativistic approximation $E^2 \approx 2mc^2\mathcal{E} + m^2c^4$, the above equation, in turn, simplifies to,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \left[\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(\frac{\ell^2}{K^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\hbar eB\ell}{2mK} - amc^2 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) \right] \psi = \mathcal{E}\psi. \quad (5)$$

We have denoted by a prime a derivative of $\psi(\rho)$ with respect to the radial variable ρ . In addition, we have kept here only the leading term mc^2 from the second and third lines of Eq. (4). Again, this approximation is amply sufficient for our purposes here, for we have indeed $\hbar eB/m \ll mc^2$ for the orders of magnitude of the magnetic fields used in the laboratory. This Schrödinger equation will give us the full quantized energy spectrum of the particle.

Now, we argued at length in Ref. [1] (see also the references therein) that there are essentially two practical working methods for extracting the quantized energy levels from such a Schrödinger equation containing extra non-trivial central potentials. Our non-trivial extra term here is the logarithmic term inside the square brackets of Eq. (5). The first approach relies on the time-independent perturbation theory. The second approach consists simply in approximating the effective potential, contained inside the square brackets, by that of a simple harmonic oscillator. When using the latter approach, one would directly read off the energy levels as given by the familiar energy spectrum of a simple harmonic oscillator. We are going to apply in the rest of this section both methods, starting with the one relying on the time-independent perturbation theory. A short note will be given at the very end of this section about two other less reliable and less practical methods for extracting the quantized levels.

2.1 Using Perturbation theory

In Ref. [1], we have already found the solutions to Eq. (5) without the very last term inside the square brackets. Those solutions constitute the unperturbed eigenvalues of the Landau Hamiltonian. Note, however, that now we have the extra parameter K that enters even in the unperturbed equation. Nevertheless, the solutions with such an extra parameter can easily be adapted from the results of Ref. [1]. Indeed, this can be accomplished simply by introducing the reduced orbital quantum number, $\bar{\ell} = \ell/K$. For simplicity, however, and without any loss of generality, we are going to set hereafter $K = 1$. The effect of the parameter K , when the latter is different from unity, can then be inferred from the results with $K = 1$ just by replacing ℓ by $\bar{\ell}$.

The unperturbed eigenfunctions $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho)$ corresponding to Eq. (5) without the last term inside the square brackets are then [1],

$$\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) = A_{n\ell} \rho^{\ell+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{4}\rho^2} {}_1F_1 \left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2 \right). \quad (6)$$

The special functions ${}_1F_1(a, b, z)$ are called Kummer's, or confluent hypergeometric, functions [36]. As usual, n is here a non-negative integer. The normalization constants $A_{n\ell}$ would, in principle, be determined by imposing as usual the completeness condition on the eigenfunctions, $\int_0^\infty \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{m\ell}^{(0)}(\rho) d\rho = \delta_{nm}$. However, in contrast to what is assumed in the case of cosmic strings, a cylinder of mass M has a finite nonzero radius ρ_0 . As a consequence, the test particle's position is necessarily limited to the interval of radii $\rho \in [\rho_0, \infty)$. In addition, our gravitational field is valid only for $\rho > \rho_0$, *i.e.*, outside the cylinder.

Because of this particular configuration, we should distinguish two different regions when solving the Schrödinger equation. The region outside the cylinder, for which $\rho > \rho_0$, and the region inside the cylinder, for which $\rho < \rho_0$. We shall assume, however, that the cylinder is completely reflective to the test particle. In other words, we take the particle's wavefunction to vanish inside the cylinder, meaning that the particle has zero probability of penetrating inside the latter. In fact, with this assumption we are simply dealing with a semi-infinite potential well, for then our system just consists effectively of a test particle moving around an infinitely long cylinder, inside of which the potential is infinite and outside of which the potential is gravitational and is given by Eq. (5). The wavefunction outside the cylinder having the expression (6), all we need to further impose on the latter is its continuity across the surface

$\rho = \rho_0$. This condition translates then into the requirement, $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho_0) = 0$. Based on expression (6), this requirement is equivalent to the following identity to be imposed on the confluent hypergeometric function:

$${}_1F_1\left(-n; \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) = 0. \quad (7)$$

This condition already arose for the case of a spherical mass examined in Ref. [1]. Its physical interpretation is therefore similar to the one proposed in that reference. Indeed, this condition is due to the geometry of the system itself. The condition (7) involves the two unknown integers n and ℓ and, hence, implies that the latter are related to the parameter β , *i.e.*, the magnetic field, and to the radius ρ_0 of the cylinder. In the absence of the cylinder, all possible Landau levels n and all possible orbital numbers ℓ would be accessible to the particle without any restriction. The presence of the cylinder at the center of motion disturbs the motion of the test particle by creating the forbidden region $0 \leq \rho \leq \rho_0$, implying that, depending on the value of the product $\frac{1}{2}\beta\rho_0^2$, a specific correlation emerges between the values of n and ℓ . This means that only specific combinations of the magnetic field and the radius of the cylinder, sitting at the center of motion of a test particle, would give rise to the quantum numbers n and ℓ that the particle could take while moving around the cylinder and avoiding the interior of the latter.

In the case of a string-like mass distribution, *i.e.*, for $\rho_0 = 0$, the requirement $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho_0) = 0$ is, of course, automatically satisfied. In that case, the condition (7) does not need to be imposed anymore and, hence, no correlation between the quantum numbers n and ℓ and the parameter $\frac{1}{2}\beta\rho_0^2$ is implied either. Since we are interested here only in the fate of the Landau energy levels inside the gravitational field, we are going to ignore in the remainder of this paper such a restriction and assume that a specific combination of the radius of the cylinder and of the magnetic field, guaranteeing the appearance of Landau quantum levels and orbitals for the particle, has already been set up.

Because of this forbidden region to the test particle, the normalization condition that we should impose here is then $\int_{\rho_0}^{\infty} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho)\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho = 1$. In Ref. [1], the normalization constants of the wavefunctions $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho)$ implied by such a condition were explicitly found to be $A_{n\ell} = \mathcal{M}_{n\ell}^{-1/2}$. The quantities $\mathcal{M}_{n\ell}$ are infinite series obtained by setting $n = m$ in the infinite series \mathcal{M}_{mnl} , given explicitly for reference in Eq. (27) of appendix A. In addition, the energy eigenvalues corresponding to the unperturbed wavefunctions (6) are given by [1],

$$\mathcal{E}_n^{(0)} = \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

These are the familiar Landau quantized energy levels. The high degeneracy of the levels shows up in the freedom the particle has with the orbital quantum number ℓ for each quantum number n . Note that, had we kept the parameter K of the Levi-Civita metric (2), these energy levels would not have been modified as the only difference would be the substitution $\ell \rightarrow \ell/K$.

The perturbed Landau energy levels due to the cylindrical gravitational field are now easy to compute at the first order using the time-independent perturbation theory. Although the Landau energy levels are infinitely degenerate, the fact that the gravitational interaction potential $V(\rho) = -amc^2 \ln(\rho/\rho_*)$ around the cylinder is rotational symmetric means that the gravitational perturbation does not couple between two different Landau orbitals of quantum numbers ℓ and ℓ' . This implies, as was the case with a spherical mass [1], that the perturbation matrix elements $\langle n, \ell | V(\rho) | n, \ell' \rangle$ are diagonal. Consequently, the degenerate time-independent perturbation theory yields the first-order correction, $\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} + \langle n, \ell | V(\rho) | n, \ell \rangle$, where the term $\mathcal{E}_n^{(0)}$ represents the unperturbed n^{th} Landau level (8). We have thus the following more explicit first-order correction to the energy of the n^{th} Landau level in the quantum orbital ℓ :

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - amc^2 \int_{\rho_0}^{\infty} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho)\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) d\rho. \quad (9)$$

In order to evaluate the improper integral in this equation, we have to substitute expression (6) for the unperturbed wavefunctions $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho)$ and replace the normalization constants $A_{n\ell}$ by their expressions $\mathcal{M}_{n\ell}^{-1/2}$ as given by Eq. (27). Afterwards, by using the result (28) of appendix A, we find,

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} - amc^2 \bar{\mathcal{L}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1}. \quad (10)$$

As was done in Ref. [1], we have denoted here by $\bar{\mathcal{L}}_{n\ell}$ and $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ the reduced forms of the series (27) and (29), obtained by suppressing the constant factor $(2/\beta)^{\ell+1}$ common to both series, and by setting $n = m$ in both. This result shows how the degenerate Landau levels split at the first-order in amc^2 due to gravity. Although not explicitly displayed, the dependence of this splitting on the magnetic field B is still present inside the individual series (27) and (29).

For the sake of concreteness, let us evaluate the explicit correction to the first Landau level by setting $n = 1$ in Eq. (10). First, it is obvious from the defining integrals (26) and (28) of $\mathcal{M}_{n\ell}$ and $\mathcal{L}_{n\ell}$, respectively, that for small

values of ℓ , the gravitational correction to the first Landau level is of the order $-amc^2 \ln(\rho_0/\rho_*)$. For larger values of ℓ , however, one cannot easily get a simple physical picture of the effect of the gravitational field on the first Landau level based on the full expression (35) of $\mathcal{M}_{1\ell}$ and the full expression (40) from which $\mathcal{L}_{1\ell}$ can be found. For this reason, we are going instead to give here an estimate of the perturbation correction for the large- ℓ orbitals. In fact, in this case the expressions simplify greatly by using the asymptotic results (41) and (45) for $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{L}_{1\ell}$, respectively. We find,

$$\mathcal{E}_{1,\ell \gg 1} = \mathcal{E}_1^{(0)} - amc^2 \mathcal{L}_{1,\ell \gg 1} \mathcal{M}_{1,\ell \gg 1}^{-1} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} + \frac{amc^2}{2} \ln \left(\frac{eB\rho_*^2}{2\hbar\ell} \right). \quad (11)$$

This result shows that, just like what happens in the case of a spherical static mass [1], the splitting brought to the Landau levels by the gravitational field of the cylinder has, in fact, a simple form for large orbitals ℓ . This splitting is independent of the radius of the cylinder ρ_0 and depends instead on the fixed radius ρ_* we took as a reference for the gravitational potential. In contrast to the case of the spherical mass [1], however, the splitting depends here logarithmically on the magnetic field. For the case of $K \neq 1$, the Landau term remains unaffected but the correction term does get affected as the denominator inside the logarithm acquires the multiplicative factor K^{-1} . On the other hand, as is the case with the spherical mass, from the general formula (10) we see that for large n , the first-order correction does not get suppressed.

It is worth noting here also that, like with the case of the spherical mass [1], in the absence of the magnetic field, *i.e.* when setting $B = 0$ in Eq. (10), the first-order perturbation vanishes together with the zeroth-order levels $\mathcal{E}_n^{(0)}$, for both series \mathcal{M}_{mnl} and \mathcal{P}_{mnl} do not exist in this case as the integrals that gave rise to them vanish for $\beta = 0$. A proper treatment of the motion of the particle around the cylinder without the magnetic field consists in solving the Schrödinger equation with only the logarithmic potential as the unique potential (see, e.g., Ref. [38]).

At the second order, the corrections to the energy levels would be even more complicated than what was found for the spherical mass case in Ref. [1]. In fact, the correction $\mathcal{E}_{n\ell}^{(2)} = \sum_{k \neq n} |\langle k, \ell | V | n, \ell \rangle|^2 / (\mathcal{E}_k^{(0)} - \mathcal{E}_n^{(0)})$, which is quadratic in the product am , would involve, besides terms logarithmic in the magnetic field, a ratio with the magnetic field in the denominator as well. Suffice it then to note here that, like in the spherical mass case [1], the second-order correction to the energy levels of the particle is quadratic in $G\lambda$, where λ is the linear mass density of the long cylinder. Furthermore, because of the presence of the magnetic field in the denominator in such a correction, the latter is not valid anymore without the magnetic field, *i.e.*, when $B = 0$. In this case, one should instead solve Eq. (5) by setting $B = 0$ there. In fact, in that case such an equation solves differently from the way the Schrödinger equation of the hydrogen atom is solved (see, e.g., Ref. [37]). Different specific approximation methods can indeed then be applied for that case [38]. We are not going here to deal with such a purely gravitational problem, for our main purpose in the present paper is the effect of gravity on the Landau levels.

2.2 Using the harmonic oscillator approximation

It is actually possible to also achieve quantization of the energy levels of the particle by starting from the Schrödinger equation (5) and approximating the latter with the equation of a harmonic oscillator. All one needs to do is find the equilibrium radius ρ_e around which the particle's effective potential $V_{\text{eff}}(\rho)$, as given by the square brackets in Eq. (5), reaches a minimum. Such a radius ρ_e is thus the solution to the equation $dV_{\text{eff}}(\rho)/d\rho = 0$. The latter equation is a quartic equation but its special form (quadratic in ρ_e^2),

$$\frac{e^2 B^2}{4m} \rho_e^4 - amc^2 \rho_e^2 - \frac{\hbar^2}{m} \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right) = 0, \quad (12)$$

in contrast to the case of the effective potential around the spherical mass [1], is easily solvable. It has indeed two roots; the positive one being,

$$\rho_e^2 = \frac{2am^2 c^2}{e^2 B^2} + \sqrt{\frac{4a^2 m^4 c^4}{e^4 B^4} + \frac{4\hbar^2}{e^2 B^2} \left(\ell^2 - \frac{1}{4} \right)} \approx \frac{2\hbar}{eB} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \left(1 + \frac{am^2 c^2}{\hbar e B \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}}} \right). \quad (13)$$

In the second step we have expanded in powers of a up to the first order as this will allow us shortly to (i) easily see how one recovers the Minkowski case $a = 0$, as well as to (ii) extract the first-order correction in a to the Landau levels. The effective potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ of the particle around this equilibrium position ρ_e can now be Taylor-expanded at the second order in ρ and approximated by a quadratic potential as follows:

$$V_{\text{eff}}(\rho) \simeq V_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\rho - \rho_e)^2. \quad (14)$$

Here, $V_0 = V_{\text{eff}}(\rho_e)$ and $m\omega^2 = d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2|_{\rho=\rho_e}$. With such a potential, the Schrödinger equation (5) becomes that of a simple harmonic oscillator for which the energy eigenvalues are well-known, and given by,

$$\mathcal{E}_n = V_0 + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (15)$$

where n is again a non-negative integer. Substituting the value of ρ_e from Eq. (13) into $V_{\text{eff}}(\rho_{\text{eq}})$ and $d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2|_{\rho=\rho_e}$, allows us to find the quantized energy levels:

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\ell}{2} \right) - \frac{amc^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}}} \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \ln \left(\frac{2\hbar}{eB\rho_*^2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right) \right]. \quad (16)$$

This is the expression of the energy levels of the particle — up to the first order in a — for each quantum number n and for each quantum orbital ℓ . It should be recalled, though, that, as mentioned above, for the case of $K \neq 1$ one has to replace in this result ℓ by ℓ/K . We clearly see now from this expression that we recover the usual Landau levels plus the first-order correction we obtained using perturbation theory. These, of course, do agree exactly in the large- ℓ limit. Indeed, for large ℓ , Eq. (16) becomes identical to Eq. (11) obtained for the particular case $n = 1$. On the other hand, for $a = 0$ (*i.e.*, by removing the cylinder), formula (16) reproduces, in the large- ℓ limit, the familiar Landau energy levels of a particle inside a constant and uniform magnetic field within the Minkowski spacetime.

From the full expression (16), we also see that the first-order correction depends logarithmically on the magnetic field as well. However, in contrast to the case of the spherical mass [1], and the Kerr spacetime case we are going to see shortly, we do not obtain quantized energy levels when putting $B = 0$. In fact, when putting $B = 0$ in Eq. (16) the first line vanishes whereas the second line blows up. This is due to the fact that the equilibrium distance ρ_e does not actually exist in the absence of the magnetic field as the logarithmic potential alone does not allow for any equilibrium position of the particle with $\ell \neq 0$. In the absence of the magnetic field, we are left with an infinitely long cylinder the gravitational field of which is unable to counterbalance the centrifugal force on the particle due to the circular motion of the latter. The simple harmonic approximation does not therefore work for a pure gravitational field created by an infinitely long cylinder.

It is now enlightening to examine the orders of magnitude involved in such energy levels splittings. For a magnetic field of the order of 10 T — now easily achievable in a laboratory [39] — and using a 1 cm-radius cylinder of pure platinum and 2 meters in length for the infinitely-long cylinder approximation to hold, leads to a first-order correction to the first Landau levels of the order of 10^{-19} eV. This small energy difference is, unfortunately, still too small for the presently achievable resolution which is of the order of 10^{-15} eV [40]. To remedy this, one would just have to increase the size of the cylinder. In fact, using a 1 m-radius cylinder would effectively increase such a gravitational correction by four orders of magnitude to easily reach the present sensitivity limit of $\Delta E \sim 10^{-15}$ eV. The only downside is that one would then have to increase the length of the cylinder accordingly.

Before we move on to the case of a particle inside the Kerr metric, we would like to note here three important facts. The first two are the ones already pointed out in Ref. [1] for the case of the spherical mass and which still apply here. The first is that it is actually possible to rely solely on the solutions to Eq. (4) and extract the energy quantization condition without making use of the Schrödinger equation (5). In fact, while it is obvious that the logarithm in Eq. (4) makes the latter hardly solvable analytically, by expanding the logarithmic function one might turn the equation into a Heun-like differential equation [41]. Such a differential equation has well-known solutions, called Heun functions. The procedure then consists in imposing either one of two specific conditions on such a function to guarantee the square-integrability of the latter, and hence to provide it with a physical meaning [1]. The problem with such a procedure, as explained in detail in Ref. [1], is that one of the conditions to impose does not provide a consistent quantization of energy for arbitrary values of the mass-source of the gravitational field, while the other condition does not allow to practically extract a simple answer as it involves finding the zeros of an infinite series. For this reason, we are not going to dwell more on these other two approaches here.

The last point we would like to comment on here is that it would be natural now to attempt to apply the same techniques used above to the case of a rotating cylinder. Unfortunately, however, to deal with such a case one has to use the so-called Lewis spacetime [35], which is even more complicated than the metric (2). Given that the Lewis spacetime reduces in the limit of zero radius of the cylinder to that of a rotating cosmic string (see, e.g., Ref. [32] and the references therein for more details about such a metric), which, in turn, has extensively been studied in Ref. [42], we are going to turn instead into the rotating spacetime represented by the Kerr metric. The latter is indeed much more prone to experimental verification, both at the tabletop experiments level and at the astrophysical level.

3 A particle inside a magnetic field in the Kerr spacetime

In this section, our test particle is still a charged spinless particle moving in the plane perpendicular to the constant and uniform magnetic field \mathbf{B} . Now, however, we assume the particle is going around a massive sphere of radius r_0 , of

mass M , and of angular momentum J the direction of which is parallel to that of the magnetic field. In the weak-field approximation and slow rotation of the mass source, the Kerr metric around a rotating sphere of mass M and angular momentum J takes the following form in the spherical coordinates (t, r, θ, ϕ) (see, e.g., Ref. [43]),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \frac{4GM\alpha}{cr} \sin^2 \theta dt d\phi. \quad (17)$$

Here, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ and $\alpha = J/Mc$ is the specific angular momentum, that is, the angular momentum per unit mass, of the rotating sphere. To the first order in $GM/c^2 r$ and in $GM\alpha/c$, at which we expanded this metric, the square root of the determinant of the metric is $\sqrt{-g} \approx cr^2 \sin \theta$. On the other hand, because of the time-independence of both the gravitational field and of the magnetic field, and because of the symmetry around the z -axis, we expect the wavefunction of the test particle of energy E to be of the form, $\varphi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\ell\phi} R(r, \theta)$. We assume again that the particle has no momentum along the z -direction and that it is moving counterclockwise around the sphere. Therefore, in the symmetric gauge, expressed in a covariant form in spherical coordinates, the non-vanishing components of the potential vector in a rotating spacetime read [44], $A_t = \frac{1}{c} B\alpha g_{tt} + \frac{1}{2} B g_{t\phi} = -cB\alpha \left[1 - \frac{GM}{c^2 r} (2 - \sin^2 \theta)\right]$ and $A_\phi = \frac{1}{2} B g_{\phi\phi} + \frac{1}{c} B\alpha g_{t\phi} \approx \frac{1}{2} B r^2 \sin^2 \theta$.⁴ Here, we have kept only the first-order in α . The effect of the constant term in the time-component A_t consists simply in redefining the energy reference of the charged particle in the spacetime by shifting the energy of the latter by the constant $-ceB\alpha$. Therefore, by redefining the energy reference for E by performing the shift $E \rightarrow E + ceB\alpha$, the constant term in A_t is absorbed. The Klein-Gordon equation for the particle in this curved spacetime then takes, up to the first-order in α , the following form,

$$\left[\left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2GMEeB\alpha(2 - \sin^2 \theta)}{\hbar^2 c^3 r} \right) \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_r^2 + \left(\frac{2}{r} - \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \partial_r \right. \\ \left. + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \frac{\cos \theta \partial_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4\hbar^2} - \frac{4GM\alpha E\ell}{\hbar c^3 r^3 \sin^2 \theta} + \frac{2GM\alpha EeB}{\hbar^2 c^3 r} \right] R(r, \theta) = 0. \quad (18)$$

Further, by having the particle move along the equatorial plane, along which $\theta = \frac{\pi}{2}$, the cylindrical symmetry of the system allows us to also expect the radial function $R(r, \theta)$ to depend only on the distance $\rho = r \sin \theta$ of the particle from the z -axis which is perpendicular to the plane of motion. This would then make the radial function $R(r, \theta)$ a function of the form $R(r, \sin \theta) = R(r \sin \theta) = R(\rho)$. Therefore, we can use the greatly simplifying identities, $\partial_\theta R = r \cos \theta \partial_\rho R$ and $\partial_\theta^2 R = -r \sin \theta \partial_\rho R + r^2 \cos^2 \theta \partial_\rho^2 R$. In fact, substituting these into the previous equation, the latter takes the following simplified explicit form for $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 + \frac{4GM}{c^2 \rho} \right) - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 \rho} \right) \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{\ell^2}{\rho^2} - \frac{eB\ell}{\hbar} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar^2} + \frac{4GME\ell\alpha}{\hbar c^3 \rho^3} - \frac{4GMEeB\alpha}{\hbar^2 c^3 \rho} \right) \right] R = 0. \quad (19)$$

By performing the change of variable $R(\rho) = \psi(\rho)/\sqrt{\rho}$, and then decomposing the energy of the test particle as $E = \mathcal{E} + mc^2$, and using again the usual non-relativistic approximation $E^2 \approx 2mc^2 \mathcal{E} + m^2 c^4$, the above equation becomes, after keeping only the leading terms in α and $GM/c^2 \rho$, the final Schrödinger equation reads,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \left[\frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + \frac{\hbar^2 (\ell^2 - \frac{1}{4})}{2m\rho^2} - \frac{\hbar eB\ell}{2m} - \frac{GMm}{\rho} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) + \frac{2\hbar GME\ell\alpha}{c\rho^3} \right] \psi = \mathcal{E}\psi. \quad (20)$$

This equation looks very similar to Eq. (18) of Ref. [1] found for the weak-field limit of the Schwarzschild spacetime. The only difference is, indeed, the presence of the correction term $(1 + 2eB\alpha/mc)$ multiplying the Newtonian term GMm/ρ , as well as the extra term which decreases with the inverse cube of the distance ρ of the particle from the center of the sphere. The reason we kept this latter term, despite the \hbar multiplying it, is, as we shall below, the orbital number ℓ could become very large. In fact, it could become as large as $eB\rho_0^2/\hbar$, in which case the last term inside the square brackets of Eq. (20) becomes of the same order as the first term to its left. Nonetheless, having already obtained the necessary tools for dealing with such extra perturbative terms inside the Schrödinger equation in Ref. [1], we can greatly benefit here from the results in that reference concerning the Newtonian term and its Kerr correction. For the

⁴ Note that we displayed here again the covariant form of the potential vector as the tetrad form $A_\phi = \frac{1}{2} B r \sin \theta$ we used in our previous version of the manuscript leads to much confusion. The advantage of the tetrad expression is that it has the right dimensions for a potential vector and it allows one to straightforwardly extract the magnetic field from the spatial components, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. However, one has then to take special care when plugging such an expression inside Eq. (1). The result one obtains is, of course, the same with both expressions.

last term, however, a new integral is required and is given in appendix A. We are going therefore to apply here also the two different approaches used in Section 2 to extract the quantized energy levels based on the key results given in Ref. [1]. Note that, similarly to what we discussed in Section 2 for the cylinder, the wavefunctions $\psi_{n\ell}^{(0)}$ around a rotating sphere of finite radius ρ_0 have to satisfy the continuity condition (7). However, we are going to simply assume here again that the radius of the sphere and the magnitude of the magnetic field are such that quantum numbers n and ℓ are guaranteed for the particle.

3.1 Using perturbation theory

Treating Eq. (20) with the time-independent perturbation theory gives in fact the perturbed Landau energy levels at the first order as [1], $\mathcal{E}_{n\ell} = \mathcal{E}_n^{(0)} + \langle \psi_{n\ell}^{(0)} | V(\rho) | \psi_{n\ell}^{(0)} \rangle$, where $V(\rho)$ is the perturbing potential given by the last three terms inside the square brackets of Eq. (20). Thus, by adopting the specific expression (18) found in Ref. [1] — after inserting the correcting factor $(1 + 2eB\alpha/mc)$ there — and adding the contribution of the cubic term in Eq. (20), we immediately find the first-order correction to the Landau levels as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n\ell} &= \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \left[\left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) \mathcal{P}_{n\ell} \mathcal{M}_{n\ell}^{-1} - \left(\frac{2\hbar\alpha}{mc} \ell \right) \mathcal{Q}_{n\ell} \mathcal{M}_{n\ell}^{-1} \right] \\ &= \mathcal{E}_n^{(0)} - GMm \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \left[\left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) \bar{\mathcal{P}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} - \left(\frac{eB\alpha}{mc} \ell \right) \bar{\mathcal{Q}}_{n\ell} \bar{\mathcal{M}}_{n\ell}^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

The factor $\mathcal{P}_{n\ell}$ represents an infinite series and is given by expression (32) of appendix A after setting the integers $m = n$ there. It arises from the $1/\rho$ Newtonian term in the potential. The factor $\mathcal{Q}_{n\ell}$ is also an infinite series and is given by expression (34). It arises from the $1/\rho^3$ term in the potential. In the second line, we have introduced again the reduced series $\bar{\mathcal{M}}_{n\ell}$ which consists of expression (27) but without the constant factor $(2/\beta)^{\ell+1}$. Similarly, we introduced the reduced series $\bar{\mathcal{P}}_{n\ell}$ and $\bar{\mathcal{Q}}_{n\ell}$ which consist of expressions (32) and (34), respectively, in which we suppress the constant factors $(2/\beta)^{\ell+\frac{1}{2}}$ and $(2/\beta)^{\ell-\frac{1}{2}}$, respectively. This, in fact, allows us to get explicitly the factor $\sqrt{eB/2\hbar}$ out in Eq. (21). This result shows how the degenerate Landau levels split at the first-order in GMm due to gravity. The ratio $eB\alpha/mc$ contains the frame-dragging effect created by the rotating curved spacetime.

In order to appreciate this result, it is instructive to examine the fate of the first Landau level $n = 1$. On the one hand, according to the definitions (26), (31) and (33), for small values of ℓ , the product $\mathcal{P}_{1\ell} \mathcal{M}_{1\ell}^{-1}$ is simply of the order of $1/\rho_0$ whereas the product $\mathcal{Q}_{1\ell} \mathcal{M}_{1\ell}^{-1}$ is of the order of $1/\rho_0^3$. The last term in the first line in Eq. (21) then becomes suppressed simply because of the presence of the \hbar factor in the numerator. The splitting of the Landau levels in this case reduces to the following first-order correction,

$$\mathcal{E}_{1\ell} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - \frac{GMm}{\rho_0} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right). \quad (22)$$

On the other hand, for large values of ℓ , substituting the large- ℓ limits (41), (42) and (43) of $\mathcal{M}_{1\ell}$, $\mathcal{P}_{1\ell}$ and $\mathcal{Q}_{1\ell}$, respectively, inside Eq. (21) we find, after using the asymptotic property of the gamma function $\Gamma(z) \sim z^{-\frac{1}{2}} e^{z(\log z - 1)}$ [36], the following approximation for the energy splitting of the first Landau level:

$$\mathcal{E}_{1,\ell \gg 1} \approx \frac{3\hbar eB}{2m} - GMm \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}} \left(1 + \frac{eB\alpha}{mc} \right). \quad (23)$$

We see that the Newtonian correction term in Eq. (23) decreases like $1/\sqrt{\ell}$, and therefore becomes gradually suppressed for large ℓ as it was the case for a static spherical mass [1]. In addition, the frame-dragging correcting factor itself does not depend on the orbital quantum number ℓ . In contrast, for large n we see from Eqs. (27), (32) and (34), giving $\mathcal{M}_{n\ell}$, $\mathcal{P}_{n\ell}$ and $\mathcal{Q}_{n\ell}$, respectively, that the first-order correction (21) does not decrease with an increasing n . On the other hand, for large ℓ , we see from Eq. (23) that the correction becomes for $n = 1$ insensitive to the radius ρ_0 of the rotating sphere. The same remark is valid for $n > 1$, though.

It should be kept in mind here, as emphasized in Ref. [1], that the large- ℓ approximation obtained in Eq. (23) is valid for very large values of ℓ . This is because the large- ℓ limit in the appendix was found by taking into account the very large term $\frac{\beta}{2} \rho_0^2$ appearing inside the incomplete gamma functions in Eqs. (35), (36) and (37). As a consequence, and contrary to what it might seem at first sight, the correction term obtained on the right-hand side in Eq. (23) is really small as is required for a perturbation.

Similarly, using the results of Ref. [1] for the second order in the perturbation theory, we can also easily deduce the second-order correction to the energy levels. However, given the already complicated first-order expression (21), we are not going to display the second order-correction here, suffice it to note that it is going to be quadratic in GMm as was the case for the static spherical mass. The frame-dragging effect will then simply appear as corrections terms proportional to various powers of the ratio $eB\alpha/mc$.

3.2 Using the harmonic oscillator approximation

Let us now apply here the method based on approximating the effective potential of the particle by that of a simple harmonic oscillator. Unfortunately, the presence of the last term inside the effective potential in the Schrödinger equation (20) renders this method analytically intractable for arbitrary values of the orbital number ℓ . In fact, the condition $dV_{\text{eff}}/d\rho = 0$, that would give the radius ρ_e at which the potential reaches its minimum, becomes in this case a quintic equation. For this reason, the harmonic oscillator approximation becomes really useful only for small values of ℓ , for then the last term in the effective potential in Eq. (20) can be neglected.

Therefore, given that for the case of small ℓ the only difference between the Schrödinger equation of our system as given by Eq. (20) and that of Ref. [1] resides only in the correcting factor $(1 + 2eB\alpha/mc)$ that multiplies the Newtonian potential, we are not going to display here the details of the calculations. We are going to content ourselves by displaying the final results after inserting such a correcting term. In addition, since within the perturbation theory we used above we restricted ourselves to the first-order approximation, we are not going to display the second-order correction here either.

Based on the general formula for the perturbed energy levels in the spherical static mass [1], the energy levels for the rotating mass thus split at the first order in the specific angular momentum α as follows:

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \frac{\hbar eB}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}} \right) + \frac{GMm}{(\ell^2 - \frac{1}{4})^{3/4}} \sqrt{\frac{eB}{32\hbar}} \left(1 + \frac{2eB\alpha}{mc} \right) \left(n + \frac{1}{2} - 4\sqrt{\ell^2 - \frac{1}{4}} \right). \quad (24)$$

We clearly see from this result that we recover again the usual Landau levels plus a similar formal structure for the first-order correction we obtained using perturbation theory. The dependence of the correction on the square root of the magnetic field and on the ratio $eB\alpha/mc$ is remarkable. Of course, despite these similarities between the results of the two methods at this first-order level, the result (24) cannot be used for large values of ℓ , in contrast to the result (23) which is specifically found for large ℓ . This particular case shows the superiority in this investigation of the approach based on perturbation theory over the simple harmonic oscillator approximation.

As was the case with the results obtained in Ref. [1] concerning the static spherical mass, our results here for the rotating spherical mass might *a priori* both be applied at the tabletop experiments level and at the astrophysical observations level. Unfortunately, as we shall see, for the latter case our above approximations become too restrictive to be applicable for the wide range of astrophysical situations. In fact, our approximation does show that for the Landau quantization to be significant, the frame-dragging contribution to the effective potential of the particles should not dominate the interaction of the latter with the magnetic field.

Indeed, with protons as the test particles, a 1 m-radius spherical mass of platinum, and a laboratory magnetic field of the order of 10 T, the first-order correction to the first Landau levels of the protons is, according either to Eq. (22) or Eq. (23), of the order of 10^{-8} eV. If the sphere is then rotated at about 100 revolutions per minute, the frame-dragging effect induces the dimensionless correction to the Newtonian potential, $eB\alpha/mc$, which is of the order of 10^{-7} . For electrons, this dimensionless factor would be of the order of 10^{-4} . Of course, due to the presence of the magnetic field, the rotating platinum spherical mass should be grounded in order to avoid any induced electric current.

On the other hand, at the astrophysical level, it is already known in the literature that the strong magnetic fields around rotating neutron stars, magnetars and magnetic white dwarfs could be taken into account to study how the equations of states of the surface (or even the bulk) nuclei matter would be affected by the Landau quantization caused by such strong magnetic fields [45, 46, 47]. However, these astrophysical objects could acquire, in addition to the strong magnetic fields, very high rotational speeds that could reach up to 10^4 revolutions per minute. The contribution to the splitting of the energy levels in Eqs. (22) and (23) due to the frame-dragging effect becomes then dominant over the contribution due to the Newtonian potential and even over the Landau energy levels themselves. For a 10 kilometer-radius neutron star, rotating at such a rate and producing a magnetic field of the order of 10^{10} T, which is also typical of magnetars [48], the frame-dragging term $eB\alpha/mc$ is already of the order 10^{15} for electrons and of the order of 10^{11} for protons. Our weak-field approximation due to a slow rotation of the mass source then breaks down in this case. Actually, such strong magnetic fields combined with a radius of the star that is above one kilometer keeps the frame-dragging effect dominant unless the rotation rate of the star is much smaller than one revolution per year.

4 Discussion & Conclusion

We have studied the effect of two different gravitational fields on a charged particle moving inside a uniform and constant magnetic field. The first consists of the field created by an infinitely long cylinder, expressed in the form of the Levi-Civita metric, and the second one was the field created by a rotating spherical mass, expressed in the form of the Kerr spacetime. We found that the infinite Landau degeneracy is removed in both cases as the Landau orbitals of the same Landau level split in energy. As was done in Ref. [1] for the Schwarzschild spacetime case, we used

here two independent methods to reach the quantized energy levels implied by the corresponding curved-spacetime Klein-Gordon equations.

The results of the two methods are quantitatively different due to the different degrees of approximation each method relies on. Both methods, however, point towards the same qualitative splitting of the energy levels. In the case of the Levi-Civita metric the splitting is characterized by a logarithmic dependence on the radius of the cylinder and of the radius of the position taken as a reference for the gravitational potential. Our results for this metric would be valid in a realistic setup provided one uses a very long and very thin massive cylinder, with the test particle moving very closely to the surface of the cylinder. This first investigation is more of a gravitational-testing tool. It provides an additional important approach towards testing the century-old and apparently illusive Levi-Civita metric.

The second investigation provided us with a very nice way of testing the famous frame-dragging of general relativity at the level of quantum particles. The larger the specific angular momentum of the rotating massive sphere is, the bigger is the splitting in the energy of the Landau levels. This second investigation is testable at the level of tabletop experiments using strong magnetic fields and rapidly rotating massive grounded spheres. Both investigations have been carried out using, for simplicity, spinless particles. Such a setup can indeed easily be achieved experimentally by using heavy ions the total spin of which is negligible.

At the level of astrophysical observations of rapidly rotating neutron stars, magnetars and magnetic white dwarfs, our investigation showed that for a wide range of realistic astrophysical objects (with fast rotations and strong magnetic fields) the frame-dragging effect cannot constitute a mere perturbation compared to the Newtonian potential neither compared to the Landau levels themselves. We saw that the frame-dragging effect couples to the magnetic field in such a way that the effect of the latter alone on the particles is what actually constitutes a perturbation. Therefore, because of the frame-dragging effect the Landau levels would emerge and dominate on such highly magnetized stars only when the latter are slowly rotating around their axes.

We have based our whole approach in this paper on the combination of the Klein-Gordon equation in curved spacetime and the full spacetime metrics of both the Kerr and Levi-Civita spacetimes. The full equations (4) and (19) have then been approximated into much easier to solve equations by relying on the low-curvature and non-relativistic regime approximations. Such restrictions have been dictated by, respectively, the orders of magnitude of the massive sources and of the magnetic fields in which we are interested in this paper. Our main goal in this paper has indeed been to simply bring into light the effect of more complicated gravitational fields than that due to a static spherical mass on the Landau quantum levels. A fully relativistic treatment of the motion of charged particles in a strong magnetic field and in a curved spacetime, as done in, e.g., Refs. [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58], will be the next step. We defer the investigation taking into account the relativistic corrections to the motion of the electrons or neutrons moving on the surface of neutron stars/magnetars/magnetic white dwarfs to forthcoming works. We shall then conduct rigorously a detailed study of the fate of the equation of state on these astrophysical objects caused by the splitting of the Landau levels due to their rotation. In fact, on the one hand, going beyond the non-relativistic regime leads to extra terms of the form $\rho^2 \ln \rho$ inside Eq. (4) for the Levi-Civita spacetime and might allow one to get to higher order approximations in the parameters a and b of the Levi-Civita metric. On the other hand, allowing for a relativistic regime of the test particle would lead to non-perturbative terms of the form $1/\rho$ and $1/\rho^3$ inside Eq. (19) for the Kerr spacetime. The presence of all these extra terms necessitates different mathematical methods for solving the corresponding differential equations than those adopted here.

Acknowledgments

We are grateful to Bobur Turimov for the helpful comment about our notation for the potential vector and for having pointed out to us Ref. [44] that contains the complete form of the potential vector in rotating spacetimes. We are also grateful to the anonymous referee for the pertinent comment that led us to rectify a previous erroneous version of the condition (7) imposed on the wavefunction. This work is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) Discovery Grant (RGPIN-2017-05388).

A Evaluating integrals involving products of Kummer's functions, power functions and a logarithm

In this appendix we give the results for the integrals needed in the text and give brief outlines of their derivation, referring for more details to Ref. [1]. The various integrals needed are improper integrals involving the product of two Kummer's functions, powers of the distance ρ from the center of motion and a logarithm involving the distance ρ . For this purpose we need to recall the following general result from Ref. [1], which involves an integral of two Kummer's

functions [36] with an arbitrary power-function x^{c-1} :

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{\infty} x^{c-1} e^{-zx} {}_1F_1(-n, b+1; zx) {}_1F_1(-m, b+1; zx) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-zx_0} \Gamma(c) (-n)_p (-m)_q x_0^{p+q+k}}{k! p! q! (b+1)_p (b+1)_q} \frac{\Gamma(b+1+q) \Gamma(m+b+1+k-c)}{\Gamma(b+q+1+k-c) \Gamma(m+b+1)} z^{p+q+k-c} \\ & \quad \times {}_3F_2(-n+p, c-k, c-k-b-q; b+p+1, c-k-m-b; 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Here, the symbol $(a)_k$ stands for the product $(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$, such that, by definition, $(a)_0 = 1$. It is often called in the literature the Pochhammer symbol [36]. The special functions ${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1)$ are the so-called generalized hypergeometric functions [59] and $\Gamma(x)$ is the gamma function [36]. First, the expression of $\mathcal{M}_{n\ell}$, needed to find the normalization constants $A_{n\ell}$ in Section 2, is based on the normalization condition,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho = 1,$$

involving the unperturbed wavefunctions $\psi_{n\ell}^{(0)}(\rho)$ given explicitly by Eq. (6). Using the general result (25), we can evaluate the left-hand side of this integral by performing the change of variable, $x = \rho^2$, and setting $b = \ell$, $c = \ell + 1$, $z = \beta/2$ and $x_0 = \rho_0^2$. The explicit expression of $\mathcal{M}_{mn\ell}$, from which the needed quantities $\mathcal{M}_{n\ell}$ can be extracted by setting $n = m$, is found to be [1],

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{M}_{mn\ell}, \quad (26)$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{mn\ell} &= \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+1) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2 k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q) \Gamma(m+k)}{\Gamma(q+k) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-1} \\ & \quad \times {}_3F_2(-n+p, \ell+1-k, 1-k-q; \ell+p+1, 1-k-m; 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Notice that, in contrast to the general series (25), the series in k in expression (27) terminates at $k = \ell$, for in this case the exponent c in Eq. (25), coming from a binomial expansion (see the appendix of Ref. [1]), is an integer.

A.1 Integral needed in Section 2

The integral in Section 2, involving the product of a logarithm and the unperturbed wavefunctions (6), has the form,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho,$$

and can be computed using the general result (25) by making the change of variable $x = \rho^2$, and then setting $z = \beta/2$, $b = \ell$, $c = \ell + s + 1$ and $x_0 = \rho_0^2$. In fact, using the identity $\ln \rho = \left(\frac{d}{ds} \rho^s\right)_{s=0}$ allows us to transform the above integral with a logarithm into an integral with a power function of ρ to which the general result (25) can be applied. Doing so, we find the following result:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{L}_{mn\ell}, \quad (28)$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mn\ell} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \right]_{s=0} \\ & \quad - \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \ln \rho_* {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{mn, \ell+s} \right)_{s=0} - \mathcal{M}_{mn\ell} \ln \rho_*, \end{aligned} \quad (29)$$

with,

$$\mathcal{D}_{mn,\ell+s} = \sum_{k=0}^{\ell+s} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+s+1) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma(m+k-s)}{\Gamma(q+k-s) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-s-1} \\ \times {}_3F_2(-n+p, \ell+s-k+1, s-k-q+1; \ell+p+1, s-k-m+1; 1). \quad (30)$$

A.2 Integrals needed in Section 3

One of the two integrals needed in Section 3 and involving the unperturbed wavefunctions (6), has the form,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{-1} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho.$$

To evaluate this integral we use again the general result Eq. (25) after performing the change of variable $x = \rho^2$, and by setting $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + \frac{1}{2}$ and $x_0 = \rho_0^2$. The result is the following [1]:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{P}_{mnl}, \quad (31)$$

where,

$$\mathcal{P}_{mnl} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+\frac{1}{2}) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma(m+\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(q+k+\frac{1}{2}) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-\frac{1}{2}} \\ \times {}_3F_2(-n+p, \ell+\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}-k-q; \ell+p+1, \frac{1}{2}-k-m; 1). \quad (32)$$

The second integral needed in Section 3, has the following form:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{-3} \psi_{n\ell}^{(0)*}(\rho) \psi_{n\ell}^{(0)}(\rho) d\rho,$$

The evaluation of such an integral proceeds in a similar fashion as with the previous integrals. After using the general result (25), performing the change of variable, $x = \rho^2$, and setting $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell - \frac{1}{2}$ and $x_0 = \rho_0^2$, we find,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell-2} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \mathcal{Q}_{mnl}, \quad (33)$$

where,

$$\mathcal{Q}_{mnl} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell-\frac{1}{2}) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(q+k+\frac{3}{2}) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell+\frac{1}{2}} \\ \times {}_3F_2(-n+p, \ell-\frac{1}{2}-k, -\frac{1}{2}-k-q; \ell+p+1, -\frac{1}{2}-k-m; 1). \quad (34)$$

A.3 Computation of $\mathcal{M}_{1\ell}$, $\mathcal{L}_{1\ell}$, $\mathcal{P}_{1\ell}$ and $\mathcal{Q}_{1\ell}$

Now, although these various resulting expressions are lengthy and cumbersome, they actually become much simpler in special cases. For concreteness, we are going to find the expressions of the quantities $\mathcal{M}_{1\ell}$, $\mathcal{L}_{1\ell}$, $\mathcal{P}_{1\ell}$ and $\mathcal{Q}_{1\ell}$ as these are needed to find the splitting of the first Landau level $n = 1$. However, instead of substituting directly $m = n = 1$ in the final formulas (27), (29), (30) and (34), it is much easier actually to evaluate these directly from their integral definitions (26), (28), (31) and (33), respectively. The expressions of $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$ have already been derived in Ref. [1], so we just reproduce them here for reference. The expression of $\mathcal{Q}_{1\ell}$ has not been given in Ref. [1], but its derivation proceeds in a similar fashion to the derivation of $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$ given in Ref. [1]. We find,

$$\mathcal{M}_{1\ell} = \frac{2^{\ell+1}}{2\beta^{\ell+1}} \left[\Gamma(\ell+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2) - \frac{\Gamma(\ell+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma(\ell+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)^2} \right], \quad (35)$$

$$\mathcal{P}_{1\ell} = \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (36)$$

$$\mathcal{Q}_{1\ell} = \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{2\beta^{\ell-\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell - \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (37)$$

Here, the function $\Gamma(a, x)$ is the so-called incomplete gamma function [36]. In the specific form used here, it is coming from the following integral [1]:

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\sigma-1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} d\rho = \frac{2^{\sigma-1}}{\beta^{\sigma}} \Gamma\left(\sigma, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) = \frac{2^{\sigma-1}}{\beta^{\sigma}} \left[\Gamma(\sigma) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)^{\sigma+k}}{\sigma+k} \right] \quad (38)$$

In the second step we have used the infinite series definition of the incomplete gamma function [36] in order to be able, shortly, to compute its first derivative with respect to the auxiliary argument s .

Now, for the expression of $\mathcal{L}_{1\ell}$, we easily find what it is explicitly given by following the same steps performed in the appendix of Ref. [1] to get $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$. Therefore, we only outline here the derivation and we refer to the appendix A of Ref. [1] for more details.

Starting from the first integral in Eq. (29), we use the infinite series definition of Kummer's function, ${}_1F_1(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$ [36] in order to display the few non-vanishing terms in the unique function ${}_1F_1(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho_0^2)$ inside the integral. Then, the main steps of the derivation are as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,\ell+s} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[{}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) \right]^2 d\rho \\ &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)}\rho^2 \right]^2 d\rho \\ &= \beta^{-1} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\ell+s} \left[\Gamma\left(\ell+s+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell+s+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell+s+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

From this result, we may now find the expression of the required derivative in Eq. (29). For that purpose, we use the infinite series definition of the incomplete gamma function, as given by the square brackets in the second line of Eq. (38). We also use the identity $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\Psi(x)$ [36], linking the derivative of the gamma function with respect to its argument to the so-called di-gamma function $\Psi(x)$. The latter function satisfies the recurrence relation $\Psi(x+1) = \Psi(x) + 1/x$. This recurrence relation will be useful to us shortly for finding the large- ℓ limit of our final expression. The latter is found, after a lengthy but straightforward calculation, to be,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds}\mathcal{D}_{1,\ell+s}\right)_{s=0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\ell+1} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\beta}\right) \left[\Gamma\left(\ell+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+1)^2} \right] \right. \\ &\quad + \Gamma(\ell+1)\Psi(\ell+1) - \frac{\Gamma(\ell+2)\Psi(\ell+2)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma(\ell+3)\Psi(\ell+3)}{(\ell+1)^2} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^{\ell+k+1} \left[\frac{\ln\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{\ell+k+1} - \frac{\beta\rho_0^2 \ln\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+k+2)(\ell+1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)^2 \ln\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell+k+3)(\ell+1)^2} - \frac{1}{(\ell+k+1)^2} + \frac{\beta\rho_0^2}{(\ell+1)(\ell+k+2)^2} - \frac{\left(\frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)^2}{(\ell+1)^2(\ell+k+3)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

As we can see, all these three expressions of $\mathcal{M}_{1\ell}$, $\mathcal{P}_{1\ell}$ and $\left(\frac{d}{ds}\mathcal{D}_{1,\ell+s}\right)_{s=0}$ are long and cumbersome. It is, however, possible, and very instructive, to find an estimate for these quantities for large ℓ -limits for which all three of them simplify indeed greatly and allow us to have a physical idea of the energy levels splitting in Sections 2 and 3.

As for $\mathcal{M}_{1\ell}$ and $\mathcal{P}_{1\ell}$, we already found their explicit asymptotic expressions for $\ell \gg 1$ in Ref. [1]. The asymptotic expression of $\mathcal{Q}_{1\ell}$ is found here in a similar way. After using the property $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ of the gamma function [36], the asymptotic expressions read, respectively,

$$\mathcal{M}_{1,\ell \gg 1} \approx \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\ell+1}, \quad (41)$$

$$\mathcal{P}_{1,\ell \gg 1} \approx \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}} (\ell + \frac{3}{4}) \Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}} (\ell + 1)^2}, \quad (42)$$

$$\mathcal{Q}_{1,\ell \gg 1} \approx \frac{2^{\ell-\frac{3}{2}} (\ell + \frac{7}{4}) \Gamma(\ell - \frac{1}{2})}{\beta^{\ell-\frac{1}{2}} (\ell + 1)^2}. \quad (43)$$

In a similar fashion, based on identical steps, we find here the following additional asymptotic expression,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s} \right)_{s=0,\ell \gg 1} \approx \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2}{\beta} \right) + \ln(\ell + 1) \right] \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\ell + 1}. \quad (44)$$

The second term inside the square brackets comes from the asymptotic expansion $\Psi(x) \sim \ln(x)$ of the di-gamma function for large argument x [36]. Combining the result (44) with the expression (41) of $\mathcal{M}_{1,\ell \gg 1}$, we deduce that,

$$\mathcal{L}_{1,\ell \gg 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s} \right)_{s=0,\ell \gg 1} - \mathcal{M}_{1,\ell \gg 1} \ln \rho_* \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\ell}{\beta \rho_*^2} \right) \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\ell + 1}. \quad (45)$$

References

1. A. Landry and F. Hammad, “Landau levels in a gravitational field: The Schwarzschild spacetime case”, [arXiv:1909.01827](#).
2. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, Second Edition (Pergamon Press, Oxford, 1965).
3. V.V. Nesvizhevsky et al., “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Nature* **415**, 297 (2002).
4. V.V. Nesvizhevsky et al., “Measurement of quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field”, *Phys. Rev. D* **67**, 102002 (2003) [[arXiv:hep-ph/0306198](#)].
5. V.V. Nesvizhevsky et al., “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Eur. Phys. J. C* **40**, 479 (2005) [[arXiv:hep-ph/0502081](#)].
6. H. H. Rauch and S.A. Werner, *Neutron Interferometry, Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*, Second Edition (Oxford University Press, Oxford, 2015).
7. G.V. Kulin, A.I. Frank, S.V. Goryunov, D.V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, A.N. Strepetov and V.A. Bushuev, “Spectrometer for new gravitational experiment with UCN”, *In Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **792**, 38 (2015) [[arXiv:1502.03243](#)].
8. H. Abele, “Precision experiments with cold and ultra-cold neutrons”, *Hyperfine Interact* **237**, 155 (2016).
9. A. Landry and M.B. Paranjape, “Gravitationally induced quantum transitions”, *Phys. Rev. D* **93**, 122006 (2016) [[arXiv:1601.06132](#)].
10. A. Landry and M.B. Paranjape, “Graviton Laser”, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1644016 (2016) [[arXiv:1604.02762](#)].
11. G.W. Biedermann, X.Wu, L. Deslauriers, S. Roy, C. Mahadeswaraswamy and M.A. Kasevich, “Testing gravity with cold-atom interferometers”, *Phys. Rev. A* **91**, 033629 (2015) [[arXiv:1412.3210](#)].
12. H. Weyl, “Zur Gravitationstheorie”, *Ann. Phys. (Berlin)*, **54**, 117 (1917) (English translation by C. Nutto1 and S.J. Crothers)
13. T. Levi-Civita, “ds² einsteiniani in campi newtoniani. IX: L’analogo del potenziale logaritmico”, *Rend. Accad. Lincei, Classe Sci. Fis., Mat. e Nat* **28** 101 (1919).
14. L. Iorio, “Juno, the angular momentum of Jupiter and the Lense-Thirring effect”, *New Astron.* **15**, 554 (2010); Erratum-ibid. **16**, 17 (2011) [[arXiv:0812.1485v3](#)].
15. J.S. Dowker, “A gravitational Aharonov-Bohm effect”, *Il Nuovo Cimento B* **52**, 129 (1967).
16. B. Mashhoon, F. Gronwald and H.I.M. Lichtenegger, “Gravitomagnetism and the Clock Effect”, *Lect. Notes Phys.* **562**, 83 (2001) [[arXiv:gr-qc/9912027](#)].
17. C. Lämmerzahl and G. Neugebauer, *The Lense-Thirring Effect: From the Basic Notions to the Observed Effects*, in: Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in space. Editors: C. Lämmerzahl, C.W.F. Everitt and F.W. Hehl (Springer-Verlag, New York, 2001).
18. L. Herrera and N.O. Santos, “On the gravitomagnetic effects in cylindrically symmetric spacetimes”, *J. Math. Phys.* **42**, 4956 (2001) [[arXiv:gr-qc/0107040](#)].
19. M.L. Ruggiero and A. Tartaglia, “Gravitomagnetic effects”, *Nuovo Cim. B* **117**, 743 (2002) [[arXiv:gr-qc/0207065](#)].
20. B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism: A Brief Review*, in: The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise. Editor, L. Iorio (Nova Science, New York, 2007) [[arXiv:gr-qc/0311030](#)].
21. M.L. Ruggiero, “The Sagnac effect in curved space-times from an analogy with the Aharonov-Bohm effect”, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1845 (2005) [[arXiv:gr-qc/0510047](#)].
22. H. Okawara, K. Yamada and H. Asada, “Possible Daily and Seasonal Variations in Quantum Interference Induced by Chern-Simons Gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 231101 (2012) [[arXiv:1210.4628](#)].
23. H. Okawara, K. Yamada and H. Asada, “Possible latitude effects of Chern-Simons gravity on quantum interference”, *Phys. Rev. D* **87**, 084038 (2013) [[arXiv:1302.0002](#)].

24. D. Kikuchi, N. Omoto, K. Yamada and H. Asada, “Possible altitudinal, latitudinal and directional dependence of relativistic Sagnac effect in Chern-Simons modified gravity”, *Phys. Rev. D* **90**, 064036 (2014) [arXiv:1405.7472].
25. F. Hammad, A. Landry and K. Mathieu, “Testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference”, arXiv:1910.13814.
26. C. Kiefer and C. Weber, “On the interaction of mesoscopic quantum systems with gravity”, *Annalen Phys.* **14**, 253 (2005) [arXiv:gr-qc/0408010].
27. C.S. Trendafilova and S.A. Fulling, “Static solutions of Einstein’s equations with cylindrical symmetry”, *Eur. J. Phys.* **32**, 1663 (2011) [arXiv:1101.4668].
28. L. Marder, “Gravitational waves in general relativity I. Cylindrical waves”, *Proc. Roy. Soc. A* **244**, 524 (1958).
29. W.B. Bonnor, “Solution of Einstein’s equations for a line mass of perfect fluid”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **12**, 847, (1979).
30. L. Herrera, F.M. Paiva and N.O. Santos, “Geodesics in the Gamma spacetime”, *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, 649 (2000) [arXiv:gr-qc/9812023].
31. L. Herrera, N.O. Santos, A.F.F. Teixeira and A.Z. Wang, “On the interpretation of cylindrically symmetric Levi-Civita spacetime for $0 < \sigma < \infty$ ”, *Class. Quant. Grav.* **18**, 3847 (2001) [arXiv:gr-qc/0107088].
32. K. Bronnikov, N. O. Santos and Anzhong Wang, “Cylindrical Systems in General Relativity”, [arXiv:1901.06561].
33. R.J. Blakely, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
34. L.C.N. Santos and C.C. Barros Jr., “Dirac equation and the Melvin metric”, *Eur. Phys. J. C* **76**, 560 (2016) [arXiv:1508.07307].
35. M.S. Cunha, C.R. Muniz, H.R. Christiansen and V.B. Bezerra, “Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime”, *Eur. Phys. J. C* **76**, 512 (2016) [arXiv:1606.04481].
36. W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
37. J.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, First Edition, (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949).
38. H.J.W. Müller-Kirsten and S.K. Bose, “Solution of the wave equation for the logarithmic potential with application to particle spectroscopy”, *J. Math. Phys.* **20**, 2471 (1979).
39. Z. Gan *et al.*, “NMR spectroscopy up to 35.2 T using a series-connected hybrid magnet”, *J. Magn. Reson.* **284**, 125 (2017).
40. G. Cronenberg *et al.*, “Acoustic Rabi oscillations between gravitational quantum states and impact on symmetron dark energy”, *Nature Phys.* **14**, 1022 (2018) [arXiv:1902.08775].
41. F.M. Arscott *et al.*, *Heun’s Differential Equation*, A. Ronveaux, Ed. (Oxford University Press, Oxford, 1995).
42. T. Lewis, “Some special solution of the equations of axially symmetric gravitational fields”, *Proc. R. Soc. A* **136**, 176, (1932).
43. M. Visser, “The Kerr spacetime - a brief introduction”, in *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*, Edited by, D. L. Wiltshire, M. Visser and S. M. Scott (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
44. R. M. Wald, “Black hole in a uniform magnetic field”, *Phys. Rev. D* **10**, 15 (1974).
45. A. Broderick, M. Prakash and J.M. Lattimer, “The Equation of State of Neutron Star Matter in Strong Magnetic Fields”, *Astrophysical J.* **537**, 351 (2000).
46. N. Chamel, Y.D. Mutafchieva, Zh.K. Stoyanov, L.M. Mihailov and R.L. Pavlov, “Landau quantization and neutron emissions by nuclei in the crust of a magnetar”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **724**, 012034 (2016) [arXiv:1607.05934].
47. P. Haensel, A. Y. Potekhin and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*, *Astrophys. Space Sci. Libr.* **326** (Springer, New York, 2007).
48. S. A. Olausen and V. M. Kaspi, “The McGill Magnetar Catalogue*”, *ApJS* **212**, 6 (2014).
49. A. N. Aliev and N. Özdemir, “Motion of charged particles around a rotating black hole in a magnetic field”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **336**, 241 (2002) [gr-qc/0208025].
50. V. P. Frolov and A. A. Shoom, “Motion of charged particles near a weakly magnetized Schwarzschild black hole”, *Phys. Rev. D* **82**, 084034 (2010), [arXiv:1008.2985].
51. J. Kovář, O. Kopáček, V. Karas and Z. Stuchlík, “Off-equatorial orbits in strong gravitational fields near compact objects—II: halo motion around magnetic compact stars and magnetized black holes”, *Class. Quant. Grav.* **27**, 135006 (2010) [arXiv:1005.3270].
52. V. P. Frolov, “Weakly magnetized black holes as particle accelerators”, *Phys. Rev. D* **85**, 024020 (2012) [arXiv:1110.6274].
53. J. Kovář, P. Slaný, C. Cremaschini, Z. Stuchlík, V. Karas and A. Trova, “Electrically charged matter in rigid rotation around magnetized black hole”, *Phys. Rev. D* **90**, 044029 (2014) [arXiv:1409.0418].
54. Z. Stuchlík and M. Kološ, “Acceleration of the charged particles due to chaotic scattering in the combined black hole gravitational field and asymptotically uniform magnetic field”, *Eur. Phys. J. C* **76**, 32 (2016) [arXiv:1511.02936].
55. M. Kološ, A. Tursunov and Z. Stuchlík, “Possible signature of magnetic fields related to quasi-periodic oscillation observed in microquasars”, *Eur. Phys. J. C* **77**, 860 (2017) [arXiv:1707.02224].
56. S. Shaymatov, B. Ahmedov, Z. Stuchlík and A. Abdujabbarov, “Effect of an external magnetic field on particle acceleration by a rotating black hole surrounded with quintessential energy”, *Int. J. Mod. Phys. D* **27**, 1850088 (2018).
57. B. Narzilloev, A. Abdujabbarov, C. Bambi and B. Ahmedov, “Charged particle motion around a quasi-Kerr compact object immersed in an external magnetic field”, *Phys. Rev. D* **99**, 104009 (2019) [arXiv:1902.03414].
58. B. Turimov, B. Toshmatov, B. Ahmedov and Z. Stuchlík, “Quasinormal modes of magnetized black hole”, *Phys. Rev. D* **100**, 084038 (2019) [arXiv:1910.00939].
59. L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Function*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).

Chapitre 7

Introduction au cinquième article : L'expérience d'interférométrie de Mach-Zehnder en gravitation et le gravitomagnétisme

Dans les articles précédents, on a étudié les effets de l'interaction gravitationnelle d'un point de vue théorique en utilisant les perturbations. On a aussi fait cet exercice avec le problème physique des niveaux de Landau dans différents types d'espace-temps. On a obtenu dans ce cas des corrections intéressantes par rapport au phénomène original. On a abordé les corrections aux niveaux de Landau dues au potentiel gravitationnel de type Yukawa.

Sans utiliser les niveaux de Landau et ses corrections, on veut traiter la gravitation en imaginant des moyens expérimentaux pour vérifier les gravitations de type Yukawa ainsi que de type puissance inverse. Ce cinquième article s'intitule "Prospects for testing the inverse square law and gravitomagnetism using quantum interference" sera publié à l'International Journal of Modern Physics D et est présenté immédiatement après ce chapitre [93]. Mais avant d'introduire l'article lui-même, on doit faire un rappel sur le gravitomagnétisme, car il en est question dans cet article.

7.1. Un rappel concernant le gravitomagnétisme

On sait que les champs électriques et magnétiques sont gouvernées par les équations de Maxwell exprimées par les équations (2.2.9). Il est bien connu qu'il y a existence d'un champ électrique pour une charge électrique au repos. Par contre, une charge électrique en mouvement engendrera un champ magnétique. Le tout respecte les équations de Maxwell, même si les charges sont soumises à un espace-temps courbe [23]. Par contre, pour la gravitation, il existe une analogie similaire pour les équivalents des champs électriques et magnétiques. On peut déduire très bien l'équivalent du champ électrique : c'est le champ gravitationnel que l'on connaît et auquel on est très familier. Par contre, si une masse gravitationnelle est en mouvement de rotation sur elle-même, elle engendre, dans l'approximation de faibles champs

gravitationnels, un champ équivalent au champ magnétique et qui engendre un effet équivalent à celui-ci, mais pour la gravitation. Ce champ équivalent est dit gravitomagnétique. C'est sur cette équivalence que se base la théorie du gravitomagnétisme (GM) [94, 95, 96]. On déclare souvent que le champ magnétique provient d'un effet relativiste du champ électrique, car les charges électriques sont en mouvement. Donc, par analogie, on peut dire que le gravitomagnétisme est l'effet relativiste de la gravité. Un champ gravitomagnétique est toujours produit par une masse en mouvement, plus particulièrement une masse en rotation sur elle-même [97].

Tout comme pour l'électromagnétisme conventionnel, les champs gravitationnels et gravitomagnétiques respectent tous l'équivalent des équations de Maxwell. On remplace dans ces équations le champ électrique par le champ gravitationnel que l'on connaît et le champ magnétique par le champ gravitomagnétique. Cette théorie générale regroupant ces deux type de champ s'appelle le gravito-électromagnétisme (GEM) [94, 95]. Les équations du gravitomagnétisme, équivalentes à celles de Maxwell, prennent la forme :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G\rho, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{GM} &= 0, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}_g &= -\frac{\partial B_{GM}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{B}_{GM} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_g}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2} \vec{J}_{GM}
\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Dans ces équations (7.1.1), on a que \vec{E}_g est le champ gravitationnel usuel, \vec{B}_{GM} est le champ gravitomagnétique et $\vec{J}_{GM} = \rho\vec{v}_{GM}$ est le courant gravitomagnétique contenant la vitesse du flux massique gravitomagnétique \vec{v}_{GM} . Ces champs gravitomagnétiques sont reliés à un potentiel scalaire équivalent au potentiel gravitationnel usuel ainsi qu'à un équivalent d'un potentiel vecteur \vec{A} [94, 95]. Bref, d'un point de vue covariant, le gravito-électromagnétisme est gouverné par une forme très similaire aux équations (2.2.9). En plus, le principe d'invariance de jauge est aussi respecté tout comme pour l'électromagnétisme conventionnel.

En prime, ces champs obéissant aux équations (7.1.1) de la GEM respecteront aussi les équations d'Einstein pour les faibles champs telles qu'exprimées par l'équation (2.2.8). De plus, il faut que l'espace-temps où il y a des champs de type GEM soit relativement plat. Toutefois, ces champs gravitomagnétiques sont connus pour être de faibles intensités en comparaison avec le champ gravitationnel usuel. Il y a eu diverses expériences pour tenter de mesurer ce phénomène du gravitomagnétisme, malgré sa faible intensité [98, 99, 100]. On a même tenté récemment de mesurer le champ gravitomagnétique produit par la terre [101]. Ce sont pour ces raisons que dans ce cinquième article, on propose une manière par interférométrie de Mach-Zehnder de mesurer ce phénomène via une sphère en rotation sur elle-même.

7.2. Objectifs et méthodologie

L'objectif premier de cet article est de proposer une expérience utilisant l'interférométrie de Mach-Zehnder pour étudier le comportement de faisceaux de particules quantifiées sous les effets de différentes formes d'interactions gravitationnelles. On fera interagir un faisceau de neutrons ou de molécules plus lourdes avec une sphère massive perforée par un tunnel cylindrique afin de les faire interagir gravitationnellement. On veut ainsi pouvoir mesurer les différents paramètres des potentiels de type Yukawa et de puissances inverses. On propose même une forme différée de cette expérience en utilisant des hémisphères séparées par un espace circulaire avec une petite épaisseur de disque. Ensuite, on souhaite aussi pouvoir mesurer les effets d'un champ de type gravitomagnétique en faisant tourner sur elle-même la sphère massive. On veut ainsi en connaître plus sur l'intensité du phénomène du gravitomagnétisme. Finalement, on veut quantifier sous forme d'un potentiel harmonique les interactions gravitationnelles de types newtonienne, Yukawa et de puissances inverses.

D'abord, cet article se base particulièrement sur un montage contenant une sphère perforée par un tunnel cylindrique faisant les particules quantiques dans un interféromètre de type Mach-Zehnder tel que montré à la figure 1. Sur cette figure, on a au départ deux faisceaux de particules quantiques parfaitement en phase. Le premier faisceau sera non perturbé et sert de référence pour la mesure de déphasage. L'autre faisceau de particules quantiques quant à lui traversera la sphère perforée pour interagir gravitationnellement avec la sphère. On mesurera, à la fin des trajectoires des faisceaux, le déphasage entre les deux faisceaux.

Ce sont des expressions et des valeurs numériques anticipées de ces déphasages que l'on calcule dans la majeure partie de cet article. À partir de ces valeurs anticipées de déphasages, on pourra déduire les valeurs bien précises des paramètres de type Yukawa ou encore de puissance inverse. Cela en plus du déphasage provenant des termes de gravitation newtonienne. On montre en détail aux sections B.1, B.2 et B.3 de l'annexe B le calcul des potentiels de sphères, de cylindres et de disques pour les potentiels gravitationnels avec corrections de type Yukawa et/ou de puissances inverses exprimés par les équations (2.5.2) et (2.5.5). On se sert par la suite des potentiels effectifs pour finalement les intégrer sur le tunnel cylindrique. On obtient ainsi les expressions pour le déphasage dans chacune des situations. On effectue cette démarche pour le potentiel newtonien avec correction de type Yukawa ainsi que pour les potentiels de corrections de type puissances inverses pour $n = 1, 2, 3$. Les autres valeurs de n ne donneront pas des valeurs finies de déphasages. De plus, on effectuera tous ces calculs pour ces potentiels à l'extérieur de la sphère et du tunnel cylindrique. On obtiendra que les déphasages pour les trajectoires externes des particules test sont négligeables dans tous ces cas.

Par la suite, on s'intéresse au déphasage causé par un champ gravitomagnétique. On dérive d'abord pour des coquilles sphériques internes et externes l'expression du champ

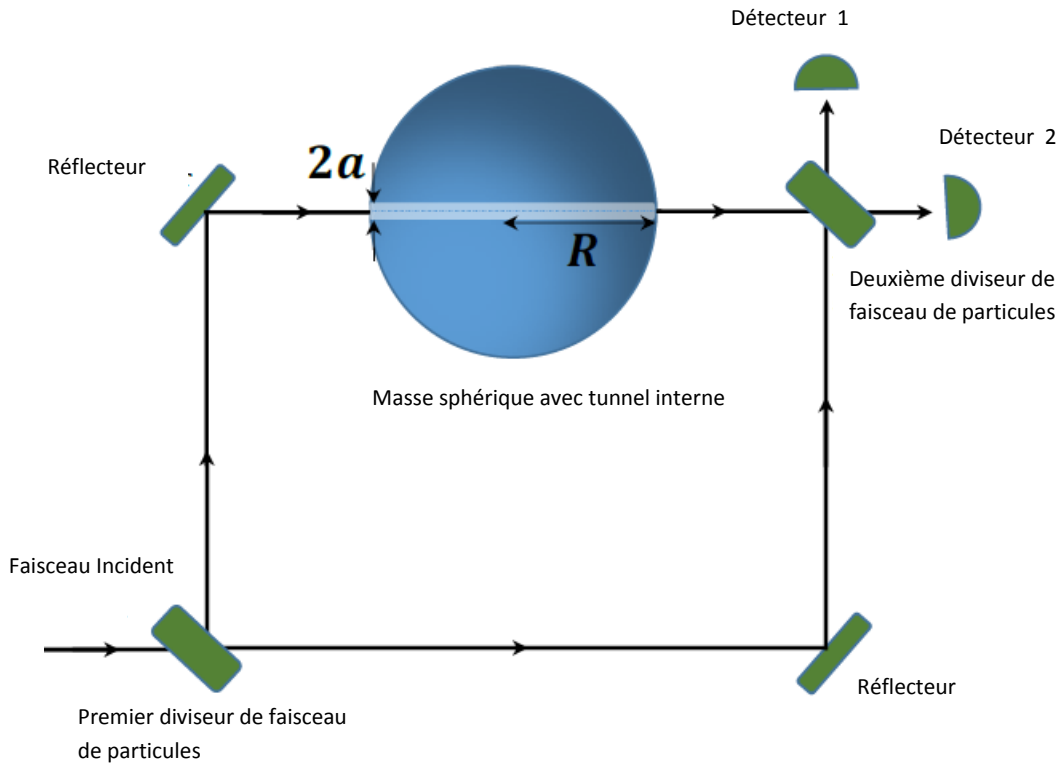


Figure 1. Un interféromètre de type Mach-Zehnder avec une sphère massive percée par un cylindre étroit passant à travers celle-ci. Le tout se situe sur un des bras de l'interféromètre.

gravitomagnétique d'une sphère en rotation sur elle-même. Ensuite, on tient compte du spin des particules tests pour obtenir l'hamiltonien associée à ce champ. On calcule finalement le déphasage associé à ce champ gravitomagnétique : on obtient une très faible valeur pour cette quantité.

Par la suite, on obtient pour certaines conditions des potentiels harmoniques et donc des quantifications sous la forme de l'équation (2.3.3) pour tous les potentiels gravitationnels s'exprimant fondamentalement par les équations (2.5.1) à (2.5.5). Cela permet de traiter de la quantification des potentiels gravitationnels pour de faibles déplacements des particules quantiques. Ces résultats et développements seront utiles dans les sixième et septième articles.

Finalement, on traite brièvement de la forme différée du montage de la figure 1 en remplaçant la sphère percée par les deux hémisphères séparées par un disque vide de très mince épaisseur. Cela donne une valeur de déphasage un peu plus élevée que pour la sphère percée, ce qui peut être avantageux à première vue. Toutefois, on expose clairement que le

tunnel offre l'avantage de servir de guide pour les particules quantiques test par rapport aux hémisphères.

Suite aux valeurs de déphasages relativement faibles obtenues pour les potentiels de corrections de type Yukawa et de puissances inverses, on propose certaines améliorations technologiques afin de pouvoir réaliser dans l'avenir ce type d'expérience. Ces améliorations permettront de mieux mesurer ces déphasages ainsi que la mesure des effets du gravitomagnétisme. On aura alors atteint pleinement l'objectif premier de proposition d'une expérience interférométrie permettant en bout de piste de mesurer les différents paramètres des interactions gravitationnelles de type Yukawa et de puissance inverse. Ensuite, on aura aussi atteint l'objectif de proposition de mesure du gravitomagnétisme malgré sa faiblesse anticipée en terme d'intensité. Finalement, les quantifications des interactions gravitationnelles internes à la sphère par le potentiel harmonique seront fortement utiles dans les sixième et septième articles. Ces quantifications des énergies gravitationnelles montrent bel et bien le comportement quantique de l'énergie gravitationnelle des particules quantiques comme les neutrons du faisceau pouvant être utilisé ici. C'est un autre objectif aussi atteint avec ce cinquième article.

7.3. Principaux résultats

7.3.1. Les déphasages pour les corrections de types Yukawa et de puissance inverse

7.3.1.1. Potentiel de type Yukawa

Pour l'obtention des déphasages, on utilisera l'équation suivante avec $U(x) = mV_{eff}$:

$$\Delta\phi = -\frac{m\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R U(x)dx = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{eff}(x)dx. \quad (7.3.1)$$

Pour la gravitation newtonienne avec en addition la correction de type Yukawa telle qu'exprimée par l'équation (2.5.2), on utilisera le potentiel effectif exprimé par l'équation (B.1.8) obtenue à la section B.1 de l'annexe B. Lorsqu'on substitue l'équation (B.1.8) dans l'équation (7.3.1) pour obtenir le déphasage, cela donne le déphasage suivant :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2Gm^2\rho\lambda_0}{\hbar^2} \left[\frac{20R^3}{9} - \frac{(2R^2 - a^2)}{3} \sqrt{4R^2 + a^2} - \frac{a^3}{3} - a^2R \ln \frac{2R + \sqrt{4R^2 + a^2}}{a} \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\lambda^3 e^{-\frac{R}{\lambda}} \sinh\left(\frac{R}{\lambda}\right) - 2\alpha\lambda^2(R + \lambda)e^{-\frac{R}{\lambda}} \text{Shi}\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right] \\ &= \Delta\phi^N + \Delta\phi_{Corr}^Y. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Ici, $\text{Shi}(z)$ est l'intégrale de sinus hyperbolique telle que définie dans la référence [21]. Dans cette équation (7.3.2), on voit une nette distinction entre la contribution du potentiel newtonien et la contribution du potentiel de type Yukawa. On peut donc obtenir une valeur claire pour le déphasage selon les différentes valeurs de λ et de α . Pour le cas où on a que $a, \lambda \ll R$ et $a \ll \lambda$ [29], on obtient le déphasage en approximant la fonction $\text{Shi}(R/\lambda)$ dans l'équation (7.3.2) :

$$\Delta\phi \approx \frac{4GMm^2\lambda_0}{3\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{9\alpha\lambda^4}{4R^4}\right) \quad (7.3.3)$$

Numériquement, on a que $\lambda_0 = 10 \text{ \AA}$ et que le déphasage pour le potentiel purement newtonien est $\Delta\phi^N = 0,01$ radian. Pour les corrections de type Yukawa, on obtient au tableau 1 les valeurs de déphasages pour $\Delta\phi_{Corr}^Y$ obtenues aux équations (7.3.2) et (7.3.3) pour différentes situations. On constate dans ces résultats numériques les faibles valeurs de corrections en comparaison avec le déphasage $\Delta\phi^N$ provenant de la contribution newtonienne.

| Situation | R (m) | α | λ (m) | $\Delta\phi_{Corr}^Y$ (rad) |
|-----------|---------|-----------|---------------|-----------------------------|
| 1 | 1 | 10^{30} | 10^{-12} | 10^{-18} |
| 2 | 1 | 10^{-2} | 10^{-3} | 10^{-14} |
| 3 | 1 | 10^{-7} | 10^3 | 2×10^{-4} |

Tableau 1. Déphasages de la correction de type Yukawa pour différentes valeurs de paramètres.

7.3.1.2. Potentiels de puissance inverse

Avec les potentiels effectifs obtenus à la section B.2 de l'annexe B, on obtient les déphasages dus à la partie non-newtonienne de l'équation (2.5.5) pour $n = 1, 2, 3$. Pour $n = 1$, on obtient comme déphasage en substituant l'équation (B.2.3) dans l'équation (7.3.1) :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{corr}^{n=1} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{eff_{corr}}^{n=1}(x) dx \\ &= \frac{Gm^2\rho\lambda_0 r_0}{\hbar^2} \left[R^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) - 4Ra \tan^{-1}\left(\frac{2R}{a}\right) - 2R^2 \ln \frac{4R^2 + a^2}{4R^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{4R^2 + a^2}{a^2} \right] \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0 r_0}{4\pi\hbar^2 R} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

À la dernière ligne de l'équation (7.3.4), on a fait l'approximation pour $a \ll R$. On n'a gardé que les termes dominant dans les grands crochets de la deuxième ligne de l'équation (7.3.4).

Pour $n = 2$, on trouve comme correction de déphasage $\Delta\phi_{corr}^{n=2}$ en substituant l'équation (B.2.10) dans l'équation (7.3.1) :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{corr}^{n=2} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{eff_{corr}}^{n=2}(x)dx \\ &= -\frac{Gm^2\rho\lambda_0r_0^2}{\hbar^2} \left[4R + 2\sqrt{4R^2 + a^2} - 2a - 4R \ln \frac{2R + \sqrt{4R^2 + a^2}}{a} \right] \\ &\approx -\frac{3GMm^2\lambda_0r_0^2}{\pi\hbar^2R^2} \left(2 - \ln \frac{4R}{a} \right).\end{aligned}\quad (7.3.5)$$

Encore une fois, à la dernière ligne de l'équation (7.3.5), on a fait les mêmes approximations en ne gardant que les termes dominants dans le grand crochet de la deuxième ligne.

Ensuite, pour $n = 3$, on obtient comme correction de déphasage $\Delta\phi_{corr}^{n=3}$ en substituant l'équation (B.2.17) dans l'équation (7.3.1) :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{corr}^{n=3} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{eff_{corr}}^{n=3}(x)dx \\ &= -\frac{Gm^2\rho\lambda_0r_0^3}{\hbar^2} \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{2R}{a} \tan^{-1} \left(\frac{2R}{a} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4R^2}{a^2} \right) \right] \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0r_0^3}{4\hbar^2aR^2}.\end{aligned}\quad (7.3.6)$$

Cette correction de déphasage (7.3.6) est inversement proportionnelle au rayon a du cylindre traversant la sphère de rayon R . Cette correction devient donc importante au fur et à mesure que le rayon a diminue.

Numériquement, on obtient les corrections au déphasage pour $n = 1, 2$ et 3 en utilisant respectivement les équations (7.3.4), (7.3.5) et (7.3.6) pour différentes valeurs de paramètres. Les résultats anticipés sont donnés par le tableau 2 pour des paramètres utilisables expérimentalement [29]. On remarque avec les résultats du tableau 2 que les limitations du montage augmentent avec la puissance n de la loi exprimée par l'équation (2.5.5). On remarque que ces déphasages de corrections en puissances inverses sont relativement faibles par rapport au déphasage $\Delta\phi^N$ pour la contribution newtonienne.

7.3.2. Le déphasage pour le gravitomagnétisme

Dans l'article, on a discuté et développé en détail des raisons physiques menant au champ gravitomagnétique de la sphère en rotation. On a obtenu comme champ gravitomagnétique total en tenant compte de toutes les coquilles constituant la sphère l'expression suivante :

$$B_G(x) = B_G^{Out}(x) + B_G^{In}(x) = \frac{32\pi G\rho\omega}{15c^2}x^2 + \frac{16\pi G\rho\omega}{9c^2R} (R^3 - x^3).\quad (7.3.7)$$

| Valeur de n | R (m) | r_0 (m) | a (m) | $\Delta\phi_{\text{corr}}^n$ (rad) |
|---------------|---------|------------|-----------|------------------------------------|
| 1 | 1 | 10^{-14} | n.d | 10^{-14} |
| 1 | 1 | 10^{-3} | n.d. | 10^{-3} |
| 2 | 1 | 10^{-3} | 10^{-9} | 10^{-6} |
| 3 | 1 | 10^{-3} | 10^{-9} | 10^{-9} |

Tableau 2. Déphasages pour les différentes valeurs de n de puissance de la correction en puissance inverse.

En utilisant l'hamiltonien suivant contenant ce champ gravitomagnétique et le spin des neutrons comme particules test :

$$H_{GM}(x) = sB_G(x) = (\hbar/2)B_G(x), \quad (7.3.8)$$

on obtient le déphasage que subissent les neutrons sous l'effet du champ gravitomagnétique :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{GM} &= \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H_{GM}(x) dt = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} B_G(x) dt \\ &= \frac{16\pi G\rho\omega}{3c^2} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{R^2}{6} - \frac{x^3}{6R} \right) dt \\ &= \frac{32\pi G\rho m\lambda_0\omega}{3hc^2} \int_0^R \left(\frac{x^2}{5} + \frac{R^2}{6} - \frac{x^3}{6R} \right) dx \\ &= \frac{23GMm\lambda_0\omega}{15hc^2}. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

On obtient de cette équation (7.3.9) une très faible valeur de déphasage de 10^{-19} radian. Cela signifie que le gravitomagnétisme est un phénomène physique de faible intensité par rapport aux champs gravitationnels usuels. Cette faiblesse rend le phénomène difficilement mesurable.

7.3.3. La quantification d'énergie sous des potentiels non-newtoniens

Sans tenir compte des termes constants pouvant être présents dans le potentiel, on obtient des potentiels harmoniques ainsi que des quantifications de type oscillateur harmonique définies selon l'équation (2.3.3). Le montage présenté à la figure 1 permettent d'étudier ces quantifications de potentiels gravitationnels.

Le potentiel newtonien s'exprime par :

$$V_{eff}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2, \quad (7.3.10)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$. Cela permet d'avoir une quantification de la forme de l'équation (2.3.3).

Maintenant, pour les faibles déplacements $x \ll \lambda$ loin du centre de la sphère dans le tunnel, on obtient comme approximation pour le potentiel effectif des neutrons avec la correction de type Yukawa l'expression suivante :

$$V_{eff}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left[1 - 2\alpha \left(1 - \frac{R}{2\lambda} \right) \exp\left(-\frac{R}{\lambda}\right) \right]. \quad (7.3.11)$$

Cette correction donnera une modification à la fréquence fondamentale ω des particules dans le tunnel s'exprimant comme $\omega \approx \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \left[1 - \alpha \left(1 - \frac{R}{2\lambda} \right) \exp\left(-\frac{R}{\lambda}\right) \right]$. Cette correction dépend maintenant de la taille de la sphère à cause de la présence du rayon R .

Pour $x \ll R$ et en utilisant l'équation (B.2.3), on obtient, pour le potentiel de puissance inverse exprimé par l'équation (2.5.5) à $n = 1$, un potentiel harmonique de la forme :

$$V_{eff}^{n=1}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left[1 + \frac{2r_0}{R} \right]. \quad (7.3.12)$$

La correction est simplement de l'ordre de r_0 linéaire pour une sphère de rayon $R = 1$ m.

Pour le cas $n = 2$, on fait les mêmes approximations au premier ordre en x pour le potentiel effectif exprimé par l'équation (B.2.10) et on obtient que :

$$V_{eff}^{n=2}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left[1 + \frac{3r_0^2}{R^2} \right]. \quad (7.3.13)$$

Cette équation montre une indépendance de la correction du potentiel face au rayon du tunnel a ainsi qu'une dépendance au carré du ratio $\frac{r_0}{R}$.

Finalement, pour le cas $n = 3$, en prenant le potentiel exprimé par l'équation (B.2.17) et en l'approximant encore une fois pour x faible, on obtient l'expression :

$$V_{eff}^{n=3}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left[1 + \frac{r_0^3}{R^3} \right]. \quad (7.3.14)$$

Suite aux équations (7.3.12), (7.3.13) et (7.3.14), les trois cas du potentiel de puissance inverse (2.5.5) donnent comme résultat une correction au potentiel gravitationnel d'oscillation qui dépend de l'intensité du ratio $\frac{r_0}{R}$ et des termes en puissances de ce ratio. Plus $\frac{r_0}{R}$ est grand, plus la correction au potentiel gravitationnel est importante. Tous ces résultats montrent clairement que dans certaines situations, les potentiels exprimés par les équations (2.5.1), (2.5.2) et (2.5.5) peuvent tous mener à la quantification du potentiel harmonique telle qu'exprimée par l'équation (2.3.3).

7.3.4. Le déphasage pour un montage avec hémisphères

Dans ce cas, on remplace dans l'interféromètre présenté à la figure 1 la sphère percée par un tunnel cylindrique par deux hémisphères de rayon R séparées par un disque vide de mince épaisseur a . On utilise toujours un potentiel newtonien avec correction de type Yukawa pour faciliter la comparaison avec le déphasage obtenu à l'équation (7.3.2). On prend d'abord le potentiel effectif suivant :

$$V_{H_{eff}}(x) = V_S(x) - V_D^N(x) - V_D^Y(x), \quad (7.3.15)$$

où $V_S(x)$, $V_D^N(x)$ et $V_D^Y(x)$ sont, respectivement, les équations (B.1.7), (B.3.1) et (B.3.5). En utilisant les équations (B.3.4) et (B.3.6), on obtient le déphasage selon l'équation (7.3.1) sur les neutrons se propageant entre les deux hémisphères comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_H &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{H_{eff}}(x)dx \\ &\approx \frac{2Gm^2\rho\lambda_0}{\hbar^2} \left[\frac{8R^3}{9} - aR \left(RI_D^N - a + 2\alpha\lambda \exp\left(-\frac{a}{\lambda}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

On ne garde à l'équation (7.3.16) que la correction de premier ordre de type Yukawa. Le résultat du calcul est montré au tableau 3. Cela donne bel et bien une valeur de correction au déphasage provenant du potentiel newtonien mentionné auparavant. Cela montre un certain avantage du point de vue des corrections de déphasage d'utiliser les hémisphères avec espace libre plutôt qu'une sphère perforée. Cela pourrait permettre d'éviter la correction d'ordre 4 en λ , au prix d'avoir une exponentielle décroissante, comme on voit à l'équation (7.3.3). Par contre, le tunnel possède comme avantage de servir de guide pour les particules quantiques traversant le champ gravitationnel.

| R (m) | $2a$ (m) | α | λ (m) | $\Delta\phi_H^Y$ (rad) |
|---------|-----------|-----------|---------------|------------------------|
| 1 | 10^{-3} | 10^{-2} | 10^{-3} | 10^{-5} |

Tableau 3. Déphasage de la correction de type Yukawa pour des hémisphères séparées par un mince disque.

7.4. Les contributions

Mes contributions

- Calculs finaux de certains potentiels de cylindre, de la sphère et des potentiels effectifs
- Calculs finaux des déphasages provenant des potentiels effectifs.
- Ajout de certaines interprétations pour résultats de déphasages pour les potentiels de type Yukawa et de puissances inverse.
- Calculs finaux pour le cas du gravitomagnétisme.
- Vérifications finales et détaillées des résultats.

J'ai effectué une grande partie des principaux calculs et j'ai proposé certaines interprétations et approximations pour les résultats. J'ai fait avec F. Hammad des ajouts pour les effets externes au montage proposé. De plus, il y a eu de multiples échanges de courriels entre moi et mon directeur de recherche ; l'un corrigeait l'autre lors de la rédaction de l'article.

Les contributions des autres co-auteurs

Mon directeur de recherche a démarré le projet, a effectué les préliminaires, fait certains calculs. Il a fait beaucoup d'interprétations et des vérifications.

K. Mathieu a effectué des vérifications.

Cinquième article.

Prospects for testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference

par

Fayçal Hammad¹, Alexandre Landry⁴ et Kaleb Mathieu⁵

- (¹) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (²) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7
- (³) Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, Que-
bec, Canada J1M 0C8
- (⁴) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (⁵) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7

Cet article a été soumis dans International Journal of Modern Physics D (accepté pour publication en 2020 [[93](#)]).

PROSPECTS FOR TESTING THE INVERSE-SQUARE LAW AND GRAVITOMAGNETISM USING QUANTUM INTERFERENCE

FAYÇAL HAMMAD

*Department of Physics and Astronomy,
Bishop's University, 2600 College Street,
Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada*
*Physics Department, Champlain College-Lennoxville,
2580 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 0C8 Canada*
*Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit,
Montréal, QC, H3T 1J4 Canada*
fhammad@ubishops.ca

ALEXANDRE LANDRY

*Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit,
Montréal, QC, H3T 1J4 Canada*
alexandre.landry.1@umontreal.ca

KALEB MATHIEU

*Department of Physics and Astronomy,
Bishop's University, 2600 College Street,
Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada*
kmathieu17@ubishops.ca

We examine a simple tabletop experimental setup for probing the inverse-square law of gravity and detecting eventual deviations therefrom. The nature of the setup allows indeed to effectively reach for shorter distances compared to what is allowed by other methods. Furthermore, we show that the same setup could also in principle be used to probe the interaction between gravitomagnetism and the intrinsic angular spin of quantum particles. Moreover, we show that the setup allows to have a gravitationally induced harmonic oscillator, introducing thus the possibility of studying in a novel way the interaction between gravity and quantum particles.

PACS numbers: 04.80.Cc; 04.80.-y; 03.75.Dg; 07.60.Ly; 04.50.Cd; 04.50.Kd

I. INTRODUCTION

For large masses and high velocities, General Relativity (GR) —the theory that currently provides the best description of gravity— successfully provides well-tested relativistic corrections to Newton's law of gravitation at long separation distances between the interacting masses [1]. However, in the weak-field regime, GR simply reduces to Newtonian gravity no matter what the separation distance is between the two masses. In fact, GR does not suggest any deviation from the inverse-square law (ISL) for the gravitational interaction, Gm_1m_2/r^2 , where G is Newton's constant and r is the distance between two static masses m_1 and m_2 [1, 2].

In contrast to GR, many models aiming at modifying gravity [3] or at unifying gravity with the other three fundamental forces of Nature predict some form of deviation from this ISL [4–8]. Three main classes of departures from the ISL have been intensively investigated in the literature. The most favored one is a formula usually given in terms of the gravitational interaction energy $U(r)$ between the two masses, displaying a Yukawa-like correction:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right). \quad (1)$$

The first term in this formula represents the Newtonian potential while the second term is the correction. The constant α is dimensionless and it quantifies the strength of the deviation from the ISL, i.e., the strength of a possible “fifth force”. Such a constant might in principle depend on the baryonic composition of the test masses in the case of particle physics models, in which case the Weak Equivalence Principle (WEP) of GR becomes also violated. On the other hand, within standard spacetime-based gravitational theories, like in $f(R)$ -modified gravitational theories, the parameters α and λ arise in the post-Newtonian limit of the theory: α depends on the first derivative of the modified gravitational Lagrangian $f(R)$ with respect to the Ricci scalar R , whereas the parameter λ depends on the first and

second derivatives of the functional $f(R)$ (see, e.g., Refs. [9, 10]). The parameter λ has the dimensions of a length and it quantifies the range of the fifth force. It is the smallness of the parameter λ , appearing in the denominator of a decaying exponential, that makes it difficult to experimentally bring into evidence this minute possible correction to the ISL. The correction, if any, is thus exponentially suppressed with the separation distance. In fact, the parameter λ is constrained (for certain values of α) by various short-range gravity experiments—that continues to be improved—to not exceed $\sim 10\ \mu\text{m}$ [7, 8, 11–22]. To detect such a deviation one needs thus to probe separation distances of the order of the micrometer. Obviously, electromagnetic, van der Waals and Casimir forces all make it the more difficult to attain the desired precision to distinguish these other forces from a purely gravitational contribution based on tabletop experiments. A similar issue arises at particle accelerators, where very short distances are probed, because of the weakness of gravity compared to the other three fundamental forces. We refer, however, to the recent proposal in Ref. [23] for a new way of putting into evidence deviations from the ISL based on the effect of gravity on the quantized Landau levels (see also Refs. [24–26] for recent prospects for exploiting other quantum phenomena to reach such a goal).

Two other classes of deviations from the ISL are the so-called power-law potentials. These are also well investigated [5–8], although less favored and less tested by the community compared to the Yukawa-like deviation [8]. The first of these classes gives a gravitational potential energy between two masses in the form,

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]. \quad (2)$$

This class of potentials arises mainly—but not only—within the extensions of the Standard Model of particle physics and models of spacetime involving extra spatial dimensions. We have chosen here, for practical purposes, the simple form (2) given in terms of a single parameter r_0 that has the dimensions of a length [8]. This parameter quantifies therefore both the strength of the fifth force and the range of the latter. It is model-dependent, and hence composition-dependent, which means that it might also in principle lead to violations of the WEP. The power n is an integer. In the extra spatial dimensions scenarios, it is usually taken to be $n \leq 6$ and it is assumed to take on a fixed value for a specific number n of extra dimensions. In this case, the factor r_0^n becomes a composition-independent parameter.

The second class of power-law potentials frequently found in the literature arises exclusively from models involving extra dimensions of space and takes the form,

$$U(r) = -\frac{G_n m_1 m_2}{r^{n+1}}. \quad (3)$$

The constant G_n denotes a new gravitational constant, which depends on the number n of the extra spatial dimensions of spacetime. It reduces to Newton’s constant in the low-energy limit. Formula (3) is supposed to be valid for distances below the scale of the extra dimensions. Therefore, this expression is usually recast in the more general form (2) for convenience [8]. For this reason, we are going to consider in this paper only formula (2) for the case of power-law deviations from the ISL.

It is clear that the worse problem one faces when attempting to use massive gravitational sources for testing these various possible deviations from the ISL is the fact that only the closest layers of the massive source would efficiently participate in the interaction [5]. Our goal in this paper is therefore to examine a setup that would not only be able to attain the required short distances and be able to avoid the other non-gravitational interactions [27–32], but, above all, be also able to “use up” the whole mass source. The strategy is thus to get the test particle not only closer to the gravitational source, but literally delve deep inside the latter and interact with every layer of the source all the way to the heart of the latter. As we shall see, the very configuration of our setup renders the latter indeed capable of realizing each one of these objectives and thus test the various possible deviations from the ISL all at once.

Now, it is also well known that in the case of a rotating massive source, GR predicts deviations from Newtonian gravity thanks to the so-called frame-dragging effect which, in turn, gives rise to the so-called gravitomagnetism [33–37]. It is believed that intrinsic spin of quantum particles could couple to this gravitomagnetism and hence provide a means for testing the latter. However, the problem one faces when trying to test gravitomagnetism is again, as discussed by various authors [38–44], the weakness of such an interaction [71]. As we shall see, although it cannot presently improve much on the precision one can reach in measuring gravitomagnetism, our setup does constitute a means that is way more efficient and more suitable for fully testing gravitomagnetism once effective noise elimination techniques and higher phase-shifts detection precision are achieved.

Finally, the same setup, as we shall see, is also suitable for studying the quantum behavior of particles within a classical gravitational field. The configuration of the massive source used in our setup is indeed capable of gravitationally inducing a simple harmonic oscillation in the motion of a quantum particle. The energy levels of the particle become thus quantized by the gravitational field in a way similar to what is done based on the behavior of cold neutrons inside the Earth’s gravitational field [45–50]. Therefore, any deviation from the quantized energy levels caused by

Newtonian gravity would automatically indicate a departure from the ISL.

The rest of this paper is organized as follows. In the next section we describe our setup and explain its working principle. In Section III, we compute the phase shift that would be recorded by such a setup as it is induced on the quantum particles used in the experiment for each of the two ISL deviation classes (1) and (2). In Section IV, we compute the phase shift that would result when the test particles interact with the gravitomagnetism of the massive source used in the setup. In Section V, we explain how one could use the setup to create a gravitationally induced harmonic oscillator. We find the quantized energy levels of the latter caused by the Newtonian potential and then compute the correction brought to such levels by deviations from the ISL. We conclude this paper with a short Summary & Discussion Section.

II. THE SETUP

Our setup consists simply of a massive homogeneous solid sphere, inside of which a narrow cylindrical tunnel of radius a is drilled across the diameter of the sphere to make a pathway for the neutrons, atoms, or even the molecules, used in the experiment. Such a special configuration of the mass source allows, as mentioned in the Introduction, to use up every layer of the mass. The sphere is to be placed in one of the arms of a Mach-Zehnder interferometer as shown in figure 1.

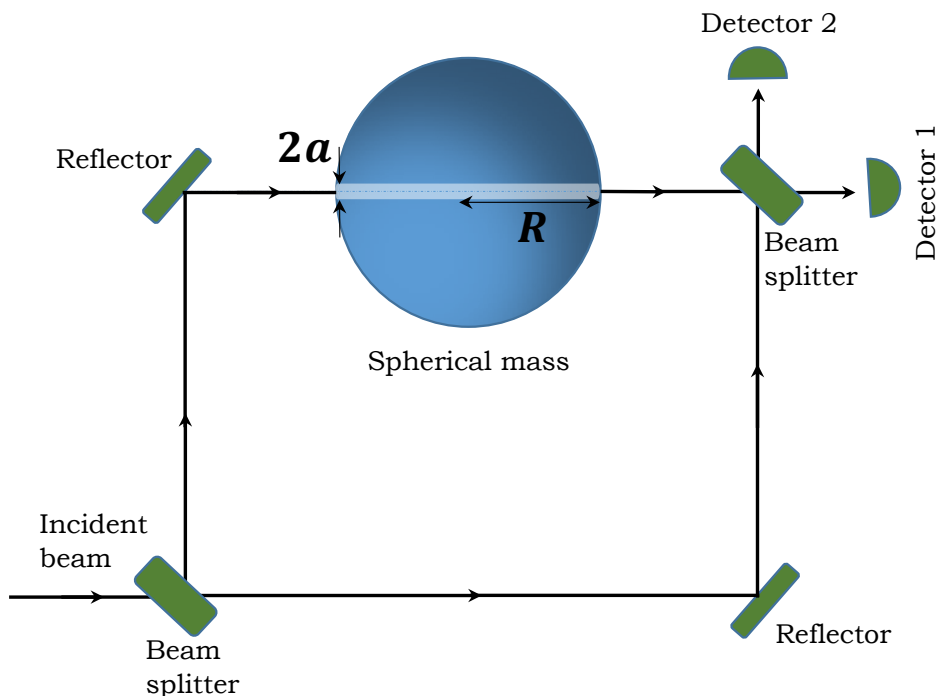


Figure 1: A Mach-Zehnder interferometer with a massive sphere, containing a narrow tunnel drilled across its diameter and lying along one of the arms of the interferometer.

As we shall see later, the diameter $2a$ of the tunnel inside the sphere should be made small enough compared to the radius of the sphere in order to be able to extract useful approximations for the resulting phase shifts as well as to be able to gravitationally induce a harmonic oscillator. However, in order to avoid unwanted diffraction of the beam of particles, the diameter $2a$ of the tunnel should be made much larger than the Compton wavelength λ_C of the test particles used in the experiment.

The interferometer detects the difference in the quantum phase between the two beams going through its two arms in a way very similar to a COW experiment [51]. Indeed, the number of registered clicks at each of the two detectors—located after the second beam splitter on the right—depends on the relative phase between the two beams.

The beam going through the solid sphere in the positive x -direction experiences one of the gravitational potentials leading to either energies (1) or (2). As a consequence, that beam acquires, due to the change $\Delta p(x)$ in the linear momentum $p(x)$ of the particles, like in a COW experiment, an extra phase of $\Delta\phi = (2/\hbar) \int_0^R \Delta p(x) dx$ relative to the

reference beam which did not go through the massive sphere. For prepared wave packets of de Broglie's wavelength λ_0 and wave number $k_0 = p_0/\hbar$, the energy of the particles of mass m is $\mathcal{E}_0 = \hbar^2 k_0^2/2m \gg U(x)$. That is, the gravitational interaction of the particles with the massive sphere is treated as a small perturbation. The conservation of energy of the particles of mass m then leads to $\mathcal{E}_0 = p^2(x)/2m + U(x)$, so that $\Delta p(x) = p - p_0 \approx -p_0 U(x)/2\mathcal{E}_0 = -m\lambda_0 U(x)/\hbar$. Thus, the phase shift between the two beams is simply given by $\Delta\phi = -(m\lambda_0/\pi\hbar^2) \int_0^R U(x) dx$. Therefore, substituting into this formula successively the two potential energies (1) and (2) would give us at once the different phase shifts to be expected to result between the two beams of the interferometer.

III. PHASE SHIFTS DUE TO DEVIATIONS FROM THE ISL

In this section we are going then to compute the phase shift due to each of the above two forms of deviations from the ISL. For that purpose, we need to compute the gravitational potential felt by the particle at any distance x from the center of the sphere based on each of the formulas (1) and (2). To properly take into account the presence of the cylindrical tunnel inside the sphere, we first need to compute both the gravitational potential inside a full sphere of radius R at the distance x from its center and the one due to a uniform full cylinder of radius a and length $2R$ at a distance x from its middle point along its axis of symmetry. Then, we simply subtract the potential due to the cylinder from the one due to the sphere to find the effective potential felt by the particle traveling through the tunnel. We are going to follow this strategy for each of the two possible deviations (1) and (2).

A. With a Yukawa-like deviation

First, we easily see that formula (1) gives the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a ring of uniform linear mass density μ and radius y in the form $-2\pi G\mu y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + \alpha e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda})$. By integrating this expression over the concentric rings that make up a uniform disk, we easily deduce also the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a massive disk of radius y and of uniform surface mass density σ . We find, $-2\pi G\sigma[\sqrt{x^2 + y^2} - x + \alpha\lambda(e^{-x/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda})]$.

Using this last expression for the uniform massive disk, we easily also compute the gravitational potential along the axis of symmetry of a full cylinder of radius a , of uniform density ρ and of length $2R$, at a distance x from its middle point. It suffices indeed to integrate the potential due to a uniform disk over the continuous distribution of disks that make up the cylinder. The detailed calculation is given in A and the result is $V_C(x)$ as given by Eq. (A1). Similarly, by integrating over the continuous distribution of uniform disks that make up a sphere, we find the gravitational potential inside a sphere of radius R and of uniform mass density ρ at any distance x from its center. The result is $V_S(x)$ as given by Eq. (A2).

Now, the potential $V_C(x)$ is the one that would have been created by the missing full cylinder due to the presence of the tunnel along the diameter of the sphere. Therefore, the effective gravitational potential felt by the quantum particle at a given distance x from the center of the sphere as it moves inside the cylindrical tunnel is,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(x) &= V_S(x) - V_C(x) \\ &= -4\pi G\rho \left[R^2 + \frac{x^2}{3} + \alpha\lambda^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\alpha\lambda^2}{x}(R + \lambda)e^{-\frac{R}{\lambda}} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{R-x}{4}\sqrt{(R-x)^2 + a^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R+x}{4}\sqrt{(R+x)^2 + a^2} - \frac{a^2}{4} \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} - \frac{a^2}{4} \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

We thus see that, in contrast to the usual exponentially suppressed Yukawa correction to the potential felt by a particle outside a massive sphere, a particle traveling through the tunnel across the sphere feels a Yukawa correction that also contains terms that are proportional to the exponential $e^{x/\lambda}$, as well as terms inversely proportional to the distance x of the particle from the center of the sphere. As we shall see by computing the phase shift, these crucial terms help amplify the contribution from the Yukawa correction to the potential by giving rise to a contribution that is not exponentially suppressed anymore. As a result, this setup does — thanks to its peculiar configuration — enhance the effect on quantum particles of a Yukawa-like correction to the gravitational interaction.

Indeed, going back now to our expression for the phase shift and substituting the effective potential (4), we find

the following phase shift,

$$\Delta\phi = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{\text{eff}}(x)dx = \frac{2Gm^2\rho\lambda_0}{\hbar^2} \left[\frac{20R^3}{9} - \frac{(2R^2 - a^2)}{3} \sqrt{4R^2 + a^2} - \frac{a^3}{3} - a^2R \ln \frac{2R + \sqrt{4R^2 + a^2}}{a} + 2\alpha\lambda^3 e^{-\frac{R}{\lambda}} \sinh\left(\frac{R}{\lambda}\right) - 2\alpha\lambda^2(R + \lambda)e^{-\frac{R}{\lambda}} \text{Shi}\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right]. \quad (5)$$

Here, $\text{Shi}(z)$ is the hyperbolic sine integral [52]. Note that we were able to apply here the prescription described in the previous section—which consists in taking twice the integral over x between 0 and R —because the effective potential (4) is even in the integration variable x . In fact, the value of the integral is then odd in the variable x and, hence, simply doubles when taken between the bounds of integration $-R$ and R . In this formula, we have a net separation between the contribution of the Newtonian potential and the contribution of the Yukawa-like correction. We can now find an estimate for the phase shift for any given value of the range λ and of the coefficient α .

For a Yukawa range of the order of $\sim 10^{-3}$ m, using cold neutrons for which the diameter of the tunnel is only required to be much larger than their $\sim 10^{-15}$ m-Compton wavelength, we may easily extract from Eq. (5) an approximation for the phase shift. Indeed, keeping in mind that $a, \lambda \ll R$, as well as $a \ll \lambda$ [8], we are led, after expanding $\text{Shi}(R/\lambda)$, to the following expression,

$$\Delta\phi \approx \frac{4GMm^2\lambda_0}{3\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{9\alpha\lambda^4}{4R^4} \right). \quad (6)$$

We have expressed here the final result in terms of the mass M of the sphere. This expression shows that the phase shift nicely splits into an overall factor that depends on the mass of the sphere and terms that solely depend on the Yukawa range and the composition-dependent factor α . As such, it becomes remarkably possible to test out the WEP by placing on both arms of the interferometer massive spheres of the same radius and mass, but of different material compositions. With such a configuration of the interferometer, any phase shift between the two beams would betray a composition-dependent gravitational interaction.

Now, although the result (6) does not display the usual exponentially decaying term with the radius of the sphere, $e^{-R/\lambda}$, the fact that the correction is proportional to the fourth power of λ still makes the phase shift correction extremely small. For a 1 m-radius sphere of platinum, and with cold neutrons of wavelength $\lambda_0 \sim 10$ Å, the Newtonian phase shift is of the order of 0.01 rad. For an α of the order of 10^{30} and a Yukawa range of the order of 10^{-12} m [8], the correction to this phase shift induced by the Yukawa interaction is of the order of 10^{-18} . However, for an α of the order of 10^{-2} and a range of order 10^{-3} m [8], the correction is of the order 10^{-14} . Yet, for even higher values of λ (of the order of 10^3 m) but small values of α of the order of $\sim 10^{-7}$, a case which is still not excluded by experiments [8], expanding formula (5) for small R/λ , yields a correction proportional to $-2\alpha\lambda R^2 e^{-R/\lambda}$. The correction we obtain for the phase shift relative to the one caused by ordinary Newtonian gravity in this case becomes then as high as 2×10^{-4} .

B. With a power-law deviation

To compute the phase shift between the two beams that would result from an ISL deviation of the form (2), we proceed in a way similar to what we just did with the Yukawa-like correction (1). We first compute the gravitational potential felt by the particle at any distance x from the center of the sphere as it travels through the tunnel.

First, we can easily see that the correction term in formula (2) gives the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a ring of uniform linear mass density μ and radius y in the form $-2\pi G\mu r_0^n y/(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}$. By integrating this expression over the concentric rings that make up a uniform disk, we easily deduce also the correction to the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a massive disk of radius y and of uniform surface mass density σ . By distinguishing the cases $n = 1$ and $n \neq 1$, we find the expression $-2\pi G\sigma r_0 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$ for the former and the expression $-2\pi G\sigma r_0^n [(x^2 + y^2)^{(1-n)/2} - x^{1-n}]/(1-n)$ for the latter.

Using these expressions coming from the uniform massive disk, we can easily compute the gravitational potential $V_C(x)$ at any distance x from the middle point (along the axis of symmetry) of a cylinder of radius a , of uniform density ρ and of length $2R$. Using the same strategy adopted for the sphere in Section III A, these potentials of the uniform disk also allow us to compute the potential $V_S(x)$ at any distance x from the center of a sphere of mass density ρ and radius R . Because of the presence of $1-n$ in the denominator of the potential due to a disk, however, we should distinguish between all six different cases of $n = 1$ to $n = 6$. The corrections $V_{C_{\text{corr}}}(x)$, $V_{S_{\text{corr}}}(x)$ and $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}(x)$ to the

potential of a full cylinder, of a full sphere and of the effective potential inside the tunnel, respectively, emerging from these different cases are calculated in Eqs. (B1)-(B30) of B. As can be seen with those results, only the cases $n = 1, 2, 3$ yield converging potentials for all values of x . Those are given in Eqs. (B3), (B10) and (B17). The other three cases of n , given in Eqs. (B24), (B27) and (B30) are all diverging at $x = R$. The divergences for those cases come from the rapidly decreasing potential with distance. The divergence for the cases $n = 2, 3$ is cured by the presence of the empty tunnel inside of the sphere. In fact, although the expressions (B8) and (B9) for the case $n = 2$ contain the diverging integrals $\int_0^{R\pm x} ds/s$, the resulting effective potential inside the sphere with a tunnel is finite. Similarly, the potential that results from combining the expressions (B15) and (B16) is finite although both contain the terms $\int_0^{R\pm x} ds/s^2$. In contrast, for the more rapidly decreasing potentials of the cases $n = 4, 5, 6$, it does not help much to have an empty tunnel inside the sphere to remedy the short-distance divergences as the latter would have considerably accumulated by the time the particle reaches the outside surface of the sphere. As such, only the cases $n = 1, 2, 3$ will be dealt with here as they lead to finite phase shifts as well. We shall come back on this divergence for the cases $n = 4, 5, 6$ in Section VII.

Using the corrections to the effective potentials found in B, we compute the following corrections to the phase shifts caused by the non-Newtonian part of the potential for the cases $n = 1, 2, 3$ [72].

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{corr}}^{n=1} &= \frac{Gm^2\rho\lambda_0r_0}{\hbar^2} \left[R^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) - 4Ra \tan^{-1} \left(\frac{2R}{a} \right) - 2R^2 \ln \frac{4R^2 + a^2}{4R^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{4R^2 + a^2}{a^2} \right] \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0r_0}{4\pi\hbar^2R} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

In the last line, we have expanded the final result and kept the leading-order terms inside the square brackets of the first line. Thus, in contrast to the Yukawa-like correction (1), the power-law correction (2) yields a phase shift that is linear in the ratio r_0/R and is independent of the radius a of the tunnel.

Similarly, we find for the case $n = 2$,

$$\Delta\phi_{\text{corr}}^{n=2} = -\frac{Gm^2\rho\lambda_0r_0^2}{\hbar^2} \left[4R + 2\sqrt{4R^2 + a^2} - 2a - 4R \ln \frac{2R + \sqrt{4R^2 + a^2}}{a} \right] \approx -\frac{3GMm^2\lambda_0r_0^2}{\pi\hbar^2R^2} \left(2 - \ln \frac{4R}{a} \right). \quad (8)$$

In the last line, we have again expanded the final result and kept the leading-order terms inside the square brackets of the first line. In contrast to the case $n = 1$, this correction to the phase shift depends on the radius a of the tunnel through a logarithm that involves the ratio of R over a . The correction then logarithmically increases with the increase of the relative difference between the radius of the sphere and that of the tunnel inside it.

Finally, for the case $n = 3$, we get

$$\Delta\phi_{\text{corr}}^{n=3} = -\frac{Gm^2\rho\lambda_0r_0^3}{\hbar^2} \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{2R}{a} \tan^{-1} \left(\frac{2R}{a} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4R^2}{a^2} \right) \right] \approx \frac{3GMm^2\lambda_0r_0^3}{4\hbar^2aR^2}. \quad (9)$$

This correction is inversely proportional to the radius of the tunnel and, hence, becomes important for smaller radii of the latter. Given the Compton wavelength limit on the smallness of the radius of the tunnel, heavier atoms and molecules, for which λ_C is smaller, are best suited for testing this case of $n = 3$.

With the 1 m-radius sphere and cold neutrons, the correction to the phase shift for $n = 1$ already reaches the order of 10^{-14} for an r_0 as small as 10^{-2} pm [8], but becomes as high as 10^{-3} for an r_0 of the order of a millimeter. On the other hand, for an order of magnitude of a millimeter for r_0 , the correction for the case $n = 2$ reaches the order of 10^{-6} , whereas for the case $n = 3$ it reaches an order of magnitude which is only 10^{-9} for a diameter of the tunnel as small as a nanometer. Therefore, the limitations of the setup increase with the exponent in the power-law deviation formula.

IV. PHASE SHIFT DUE TO GRAVITOMAGNETISM

Actually, with the same setup as above it is also possible to probe an eventual gravitomagnetism interaction of a rotating sphere with the quantum spin of particles. Indeed, making the massive sphere of mass M rotate counterclockwise around the positive x -axis with an angular frequency ω , the sphere creates a gravitomagnetic field B_G parallel to the x -axis and oriented in the positive x -direction as well. The gravitomagnetic field outside a sphere of uniform density at any distance r from its center is given by $\mathbf{B}_G^{\text{out}} = 2G(\mathbf{L}r^2 - 3\mathbf{r}\mathbf{L}\cdot\mathbf{r})/c^2r^5$ [33]. Here, \mathbf{L} is the

angular momentum of the rotating sphere, of magnitude $L = 2MR^2\omega/5$, and c is the speed of light.

On the other hand, the magnitude of the gravitomagnetic field inside a spherical shell of exterior radius R is $B_G^{\text{In}} = 4GM_{\text{Shell}}\omega/(3c^2R)$ at any distance from the center of the shell and it has the same direction as $\mathbf{B}_G^{\text{Out}}$. This expression is used as an approximate value for the gravitomagnetism inside a thin shell [33]. We chose this expression here for want of a better and more rigorous formula for the unknown full field in the interior of the successive continuous shells. Nevertheless, being interested here in the possibility of putting into evidence the gravitomagnetic interaction itself, the precise multiplicative factors, which would result from an exact formula of the interior field B_G^{In} , would not change our final qualitative conclusions. Furthermore, it is specifically one of the purposes of our present setup to test gravitomagnetism and the precise form the latter should have inside spherical shells[73].

We therefore would like to stress and emphasize here the fact that our approach in this section is going to be totally heuristic and that it serves the only goal of offering concrete approximate orders of magnitude to be expected from such a setup aimed at testing the unknown gravitomagnetism phenomenon inside rotating bodies. In fact, although our treatment here is fully heuristic—given that no viable solution to gravitomagnetism inside matter is available yet[74]—the formulas we extract from our present analysis allow us to pinpoint the difference brought, and the advantage offered, by having particles travel through a channel over conventional setups that rely instead on the effect of the external gravitomagnetic field of rotating bodies when it comes to testing gravitomagnetism. Our subsequent formulas displayed below should thus be taken with a grain of salt as they are not based on any known rigorous expression of the eventual gravitomagnetic field inside the solid rotating sphere. Our approach here will indeed consist in desperately resorting to the superposition principle suggested only by the weakness of the approximate gravitomagnetic field expression inside a spherical thin shell we displayed above and which we borrowed from Ref. [33][75]. Our formulas do, nevertheless, serve well the purpose of pointing towards the best possible way of efficiently exploiting quantum particles when investigating gravitomagnetism, especial the one that could be created inside rotating bodies.

Being interested here in neutral particles with spins aligned along the positive x -axis and traveling along the axis of the sphere, we only need the magnitudes of such gravitomagnetic fields at the north pole of both the sphere and the shell. At that point, we have \mathbf{r} parallel to \mathbf{L} so that the magnitude of the exterior field of a sphere of radius r is $B_G^{\text{Out}} = 8GM\omega/(5c^2r)$. Now, as the particle is traveling through the channel, the gravitomagnetic field it feels changes with its position x from the center. In fact, as the particle moves forward, a B_G^{Out} at position x is created by the inner sphere of radius x and mass $4\pi\rho x^3/3$ in front of the particle. Another field B_G^{In} is created by a shell, of exterior radius R and interior radius x , surrounding the particle at that specific position x . The mass of a shell of uniform density ρ and of exterior and interior radii R and x , respectively, is given by $M_{\text{Shell}} = \frac{4\pi}{3}\rho(R^3 - x^3)$. Therefore, the total gravitomagnetic field felt by the particle at a position x from the center inside the tunnel would be,

$$B_G(x) = \frac{32\pi G\rho\omega x^2}{15c^2} + \frac{16\pi G\rho\omega}{9c^2R} (R^3 - x^3). \quad (10)$$

Thus, for a beam of polarized neutrons such that the spins of those going through the channel are perfectly aligned with the positive x -direction, we have the gravitomagnetism (GM) interaction Hamiltonian $H_{GM}(x) = sB_G(x)$, where $s = \hbar/2$ is the intrinsic spin of the polarized particles. Now, the phase difference induced by any interaction Hamiltonian between times t_i and t_f is given by $\Delta\phi = \hbar^{-1} \int_{t_i}^{t_f} H(x)dt$ [51]. Thus, in addition to the phase differences found above for a nonrotating sphere, the rotation of the sphere would induce an extra phase difference $\Delta\phi_{GM}$ between the two beams given by,

$$\Delta\phi_{GM} = \frac{16\pi G\rho\omega}{3c^2} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{R^2}{6} - \frac{x^3}{6R} \right) dt = \frac{32\pi G\rho m\lambda_0\omega}{3hc^2} \int_0^R \left(\frac{x^2}{5} + \frac{R^2}{6} - \frac{x^3}{6R} \right) dx = \frac{23GM m\lambda_0\omega}{15hc^2}. \quad (11)$$

In the second line we have traded dt for dx by introducing the neutrons' velocity $v_0 = h/m\lambda_0$ considered, within our approximations, to be constant all along the tunnel. We have multiplied by a factor of 2 as our integration variable x goes from 0 to R whereas the particle feels a symmetric potential on both sides of the center of the sphere along its trip through the tunnel. In other words, having taken here twice the integral over x between 0 and R is justified not because of the parity of the integrated function, as was the case for the gravitational potentials of the previous section, but because x represents here the distance of the particle from the origin. We have expressed the final result in terms of the mass $M = 4\pi\rho R^3/3$ of the sphere instead of its radius and mass density[76]. The benefit of having the particles travel through the channel is obviously to accumulate the induced phase differences, making the total phase difference scale like ρR^3 instead of ρR^2 as it would be the case when relying on the purely external gravitomagnetic field. Furthermore, we have not included here the phase shift due to the extra distance the particle travels outside the sphere, first, from the reflector on the left all the way to the sphere, and then from the sphere all the way to the beam splitter on the right. If the reflector and the beam splitter are each at a distance L from the center of the

sphere, then the extra phase shift brought by the extra path is given by,

$$\Delta\phi_{GM}^{\text{Out}} = \frac{4GM\omega}{5c^2} \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{x} = \frac{8GM m\lambda_0\omega}{5hc^2} \int_R^L \frac{dx}{x} = \frac{8GM m\lambda_0\omega}{5hc^2} \ln \frac{L}{R}. \quad (12)$$

This extra phase shift is clearly very small whenever the reflector and the beam splitter are not very far from the surface of the sphere.

These formulas for the phase shift show that, in addition of requiring a very massive and a very fast rotating sphere, the longer is the wavelength λ_0 , i.e., the colder are the particles, the bigger the measured shift will be. With a 1 m-radius sphere of platinum, rotating at the rate of 300 revolutions per minute, and cold neutrons of wavelength $\lambda_0 \sim 10\text{\AA}$, the induced phase shift due to gravitomagnetism would be of the order of 10^{-19} rad. Increasing the mass of the test particles, as well as the mass and the angular speed of the sphere would, of course, increase the resulting phase shift, and only mechanical limitations could hinder improvements on this latter front due to the minute phase shifts involved. It is, nevertheless, clearly a daunting experimental and engineering challenge to achieve such a rotation rate with such a heavy massive sphere through which cold quantum particles with aligned spins must travel.

V. THE GRAVITATIONALLY INDUCED HARMONIC OSCILLATOR

The possibilities offered by our setup depicted in Fig. 1 do not end with the interference experiments presented in the previous two sections. In fact, looking at the effective potential in Eq. (4), we see that when neglecting the Yukawa-like correction, and for a very small radius a of the tunnel, the gravitational potential simplifies considerably and yields, up to a constant term,

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2. \quad (13)$$

This is nothing but the potential of a simple harmonic oscillator with one degree of freedom along the x -axis. No charge is required to be carried by the test particles in this case. Therefore, any neutral quantum object of a size ranging from the that of a neutron, to that of atoms and molecules, and all the way to the size of objects exhibiting macroscopic quantum states like superfluids[77], could very well serve our purpose. For simplicity, though, we just continue to assume here that one still uses cold neutrons as test particles. The energy of such neutrons becomes then quantized inside the tunnel and is given by that of a simple harmonic oscillator:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (14)$$

with n a non-negative integer and the fundamental angular frequency is given by $\omega = (\frac{4\pi}{3}G\rho)^{1/2}$. These quantized energies do not thus depend on the size of the sphere but only on the density of the latter. This makes the experimental setup more flexible. For a platinum sphere of density $2.145 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, the predicted difference between two consecutive energy levels is of the order of 10^{-18} eV.

Now, for very small displacements $x \ll \lambda$ away from the center inside the tunnel, we may extract from Eq. (4) the following approximation for the gravitational potential of the neutrons due to the Yukawa-like deviation:

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left[1 - 2\alpha \left(1 - \frac{R}{2\lambda} \right) e^{-R/\lambda} \right]. \quad (15)$$

This correction to the potential of the oscillator yields the following modification to the fundamental angular frequency of the particles, $\omega \approx (\frac{4\pi}{3}G\rho)^{1/2} [1 - \alpha(1 - \frac{R}{2\lambda})e^{-\frac{R}{\lambda}}]$. This correction depends on the size of the sphere. Moreover, the correction is exponentially suppressed for ranges of the order of the micrometer. Only for ranges of λ of the order of R and beyond do we get a correction of the order of the factor α .

Still, for very small $x \ll R$ again, and using Eq. (B3), we get, up to a constant, the following expression for the gravitational potential of the harmonic oscillator due to the power-law (2) with $n = 1$:

$$V_{\text{eff}}^{n=1}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} x^2 \left(1 + \frac{2r_0}{R} \right). \quad (16)$$

We see that the correction is simply of the order of r_0 for a unit-radius sphere. For smaller radii of the sphere, the correction is enhanced as it is inversely proportional to the radius R . Similarly, for the case $n = 2$ we find, the

following expression, after expanding (B10) at the first order in x and discarding constant terms:

$$V_{\text{eff}}^{n=2}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3}x^2 \left(1 + \frac{3r_0^2}{R^2}\right). \quad (17)$$

This expression displays a correction that is still independent of the radius of the tunnel and a proportionality to the square of the ratio r_0/R . Like with the case of $n = 1$, the smaller is the sphere used in the experiment, the more enhanced will be the correction. Finally, for the case $n = 3$, a similar approximation for small x as the one done for the previous two cases of n leads to the following correction:

$$V_{\text{eff}}^{n=3}(x) = \frac{2\pi G\rho}{3}x^2 \left(1 + \frac{r_0^3}{R^3}\right). \quad (18)$$

Thus, in all three cases of the power-law deviation (2), the order of magnitude of the correction to the gravitational potential of the induced simple harmonic oscillator is conditioned by the order of magnitude of the ratio r_0/R .

VI. A VARIANT OF THE SETUP

In the previous sections, we showed how the cylindrical tunnel drilled inside the massive sphere helps induce quantum interference between the arms of the interferometer. The advantage of the tunnel is that it offers a pathway to the particles inside the sphere, making the particles interact with every layer of the latter. The technological challenge behind such a setup consists, of course, in making as many neutrons as possible go through such a small-diameter hole and the difficulty in detecting the small induced phase shifts. In this section, we are going to describe a variant of the setup that is based on the same principle as the previous one but in which the resolution could be improved and the limitations corresponding to the focusing of the neutrons could be overcome.

In fact, a variant of such a setup consists simply in replacing the cylindrical tunnel inside the sphere by an empty disk of thickness $2a$. That is, the sphere becomes then split into two hemispheres of the same radius and mass, between which the particles could freely move. As we shall see now, this configuration allows us to easily find an estimate for the Yukawa-like correction without putting such a high constraint on the separation distance $2a$ between the two hemispheres. In addition, allowing larger values of a removes the constraints in the focusing of the neutron beam.

With a Yukawa-like correction (1), the gravitational potential $V_{\text{Heff}}(x)$ between the two hemispheres at a distance x from the center is given by $V_S(x) - V_D^N(x) - V_D^Y(x)$, where the potentials $V_S(x)$, $V_D^N(x)$ and $V_D^Y(x)$ are given by Eqs. (A2), (C1) and (C5), respectively. Then, using Eqs. (C4) and (C6), we find the induced phase shift on the neutrons travelling between the two hemispheres as follows,

$$\Delta\phi_H = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_0^R V_{\text{Heff}}(x)dx \approx \frac{2Gm^2\rho\lambda_0}{\hbar^2} \left[\frac{8R^3}{9} - aR \left(RI_D^N - a + 2\lambda\alpha e^{-a/\lambda} \right) \right]. \quad (19)$$

As indicated in C, what is contained inside the factor I_D^N depends on the degree of precision one would want to achieve which, in turn, depends on the order of magnitude of a . However, for an α of the order 10^{-2} and a Yukawa range λ of the order of 10^{-3} m, the phase shift correction due to the Yukawa-like contribution is already of the order $\sim 10^{-5}$ for 1 m-radius hemispheres and for a separation distance $2a$ between them of the order of a millimeter. For this reason, only the first-order term in λ is kept here. For higher values of α [8] the correction becomes, of course, enhanced. Comparing formulae (6) and (19), we clearly see the advantage of having the particles go in between the two hemispheres. It helps avoid the fourth power of λ and replaces it instead by the exponential $e^{-a/\lambda}$, which calls, of course, for a small separation $2a$ between the two hemispheres. Yet, there is still the advantage of having a tunnel inside a massive sphere instead of just two separated hemispheres as the former provides a guide for the particles as well.

VII. SUMMARY AND DISCUSSION

Our simple setup could constitute a new tool for contributing to the various tests on the interplay between gravity and quantum mechanics. The basic principle of the setup is similar to that of a COW experiment in that it relies on the quantum interference between the two beams of a Mach-Zehnder interferometer. The difference with a COW experiment lies in the fact that now the test particles interact in a different way with the mass source. The tunnel

through the mass source (or the regions between the two massive hemispheres) allows test particles to interact fully with *every layer* of the mass. The resulting final phase shift between the two beams is thus due to an accumulation of infinitesimal phase shifts acquired by the particle along its journey inside the tunnel (or between the two hemispheres). This accumulation effect helps to improve the sensitivity of existing experiments aimed at testing deviations from the ISL using tabletop massive sources of gravity and other means [27–32].

Now, one might argue that since any deviation from the ISL would automatically have a short interaction range, one could then just replace the heavy sphere by a long thin tube through which the particle would travel as the latter would only interact with the immediate surrounding material from which the tube is made. This could indeed be done in practice, but using a long thin tube would not have the same “using up” effect as the one provided by a full solid sphere with a hole. To see this, one can just use Eq. (A1) which gives the potential inside a full cylinder. To find the potential inside a thin tube of thickness, say $b - a$, one has only to subtract the potential given by Eq. (A1) with a diameter $2a$ of the cylinder from the potential given by Eq. (A1) with a diameter $2b$ of the cylinder. The resulting Yukawa deviation is clearly not the same and is less important than what is found in Eq. (4) for a sphere with a hole. This can physically be understood as being due to an accumulation of the (albeit small) contributions from the successive concentric spheres through which the quantum particle goes during its journey through the hole. This is also valid for the power-law deviation from the Newtonian potential. Thus, the capacity of using up the whole source mass comes both from (i) the contribution of the many concentric spheres along the journey of the particle and (ii) the fact that the phase shifts are accumulated within the prolonged duration it takes the particle to complete its journey.

It was possible to examine here both a Yukawa-like deviation from the ISL and a power-law deviation. For the latter, only the cases $n = 1, 2, 3$ yield a finite potential felt by the particle as it travels through the tunnel inside the sphere. Now, the fact that we obtained divergent effective gravitational potentials inside the tunnel for the cases $n = 4, 5, 6$ is in itself a very interesting physical result —regardless of its use for interferometry purposes— and is worth discussing here. These divergences are due to the much more rapidly increasing potentials with the decreasing distance for the cases $n = 4, 5, 6$. When taken at face value, this fact alone already constitutes a solid physical argument against the validity of such power-law deviations from the ISL at very short distances. The only cure for such a pathology in this case is, indeed, to have such a power-law deviation from the ISL be itself modified and corrected at even much shorter distances. The natural conclusion then would be that these power-law models themselves, if valid at certain short distances, would certainly be accompanied by new deviations at even shorter distances as they cannot be valid at all scales. In any case, our proposed setup could allow at least to detect possible interferometric effects arising from power-law deviations with $n = 1, 2, 3$ and, at the same level of importance, to measure the gravitational constant G to unprecedented precision and to study its behavior at very short distances.

The only requirement one needs to respect with such a setup is to make the diameter of the tunnel (or the separation of the two hemispheres) quite larger than the Compton wavelength of the particles in order to avoid unwanted diffraction of the particles when they come out of the sphere. For cold neutrons at the lowest temperatures of the order of 10^{-3} K presently achievable, the diameter of the tunnel is allowed to be very small indeed.

We would like to stress here that our setup is designed to work with any quantum object as a test particle since the only important property of such objects is their matter waves and the interference they exhibit. As such, atom interferometers, or even flowing superfluids, could just as well do the job. Presently available small-scale neutron interferometers are thus neither necessary nor the best for the task. In fact, given the present precision and limitations of such devices (sizes of a few centimeters and phase shift measurements precision of the order of 10^{-4} rad), the goals addressed here seem to be out of reach when based on such presently available designs of this kind of interferometers. The presently widely used designs for neutron interferometry are indeed based on Bragg diffraction obtained from silicon-crystal blades carved from a monolithic base made of a single silicon ingot of the order of a few centimeters (see, e.g., Ref. [57]). Similar size limitations of the order of a centimeter are also encountered in the three phase-grating moiré neutron interferometers supposed to cover larger areas [58]. This far-field neutron interferometry technique allows indeed to fully use intense neutron sources for precision measurements [59]. In addition, this technique would also serve well our needs as it overcomes the alignment and stability issues, as well as the fabrication challenges associated with the more conventional perfect-crystal neutron interferometers [59]. However, as our setup requires a large mass source, even this kind of neutron interferometer could not be used as it is without modification. Nevertheless, the technology employed there does actually allow to reach distances of the order of a few meters between the slit receiving the incident beam and the imaging camera recording the fringes pattern due to the moiré effect [59]. Therefore, while such interferometers themselves cannot be used as they are for our purposes, the technology on which they rely can be adopted to our setup to provide the needed spacing, intensity, stability and alignment of the neutron beams.

Furthermore, the same setup could also help, as we saw, to gravitationally induce a quantum harmonic oscillator. The Yukawa-like correction and the power-law deviation bring distinct modifications to the quantized energy of the harmonic oscillator. The contribution of the former is exponentially suppressed with the size of the sphere but the contribution of the latter depends on the ratio r_0/R with a power equal to the power n in the formula (2). The cases

$n = 4, 5, 6$ do not yield a finite potential for the particle inside the tunnel. As emphasised above, the use of neutrons to exploit such a gravitationally induced harmonic oscillator is not necessary. In fact, given the difficulty in handling a neutron cloud inside such a narrow tunnel, other quantum objects like atoms and even superfluids could be used instead.

In addition, our setup offers the possibility of testing gravitomagnetism in a novel way by measuring the *accumulated* phase shift a quantum particle acquires due to each layer of the rotating source as it travels through the tunnel. Moreover, as the particle moves along the diameter of the sphere, around which the latter is rotating, the coupling between the gravitomagnetic field and the intrinsic spin of the polarized particles of the beam is at its maximum. This offers the best configuration ever for testing gravitomagnetism. Unfortunately, as we saw, the coupling between gravitomagnetism and intrinsic spin of particles is still very small. However, our setup offers the possibility of improving the sensitivity of tabletop experiments aimed at testing gravitomagnetism by using in the future polarized atoms and molecules by relying on their total intrinsic spin and orbital angular spin [60–62].

It is well-known that it is often the case that minute phase shifts are involved in any quantum interference experiment designed to take into account gravitational effects [63–67]. In this regard, our setup is no exception. Therefore, our setup heavily relies on future improvements in neutron interferometry technology. Achieving decoherence-free environments and high levels of noise suppression, based, for example, on quantum-error-correcting codes [68], remains indeed very critical. In particular, a neutron interferometry that would include quantum error corrections to protect our experimental setup against mechanical vibrations [68], that accompany Mach-Zehnder configurations, is very much needed, especially when the mass source is required to be spinning as is the case when testing gravitomagnetism. Increasing phase shifts measuring precision entails the possibility of using smaller-scale source masses which, in turn, lead to a better control of noise levels and an easier achievement of coherence-free environments.

Now, it should be noted that although our setup relies here solely on the interference collected at the end of the second beam splitter like in a COW experiment, it is not excluded that the same setup be combined with other more precise techniques for measuring minute energy differences such as the use of Ramsey interferometry instead [69]. A future work relying on this setup, but combining modern techniques for measuring small phase shifts, will be devoted to reach such a goal.

Acknowledgments

The authors are grateful to the anonymous referee for the very pertinent and helpful comments. This work is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) Discovery Grant (RGPIN-2017-05388).

Appendix A: THE GRAVITATIONAL POTENTIAL INSIDE THE TUNNEL BASED ON FORMULA (1)

In this appendix we are going to compute the required gravitational potentials $V_C(x)$ and $V_S(x)$ needed in subsection III A. These are due, respectively, to the a full uniform cylinder of radius a and length $2R$ and a full uniform sphere of radius R ; both having the same uniform density ρ . As explained in subsection III A, we shall use the gravitational potential $-2\pi G\sigma[\sqrt{x^2 + y^2} - x + \alpha\lambda(e^{-x/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda})]$ at a distance x along the axis of symmetry of a uniform disk of radius y and surface mass density σ . By integrating this potential over the region $s \in [0, R - x]$, which lies to the left of the point x , and then over the region $s \in [0, R + x]$ which lies to the right of the point x , we find, after setting for convenience, $f(s) = \sqrt{s^2 + a^2} - s$ and $g(s) = \exp(-s/\lambda) - \exp(-\sqrt{s^2 + a^2}/\lambda)$,

$$\begin{aligned}
 V_C(x) &= -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s) ds - 2\pi G\rho\alpha\lambda \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\
 &= -\pi G\rho \left[(R-x)\sqrt{(R-x)^2 + a^2} - (R-x)^2 + (R+x)\sqrt{(R+x)^2 + a^2} - (R+x)^2 \right. \\
 &\quad \left. + a^2 \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} + a^2 \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right. \\
 &\quad \left. + 2\alpha\lambda \left(2\lambda - \lambda e^{-\frac{R-x}{\lambda}} - \lambda e^{-\frac{R+x}{\lambda}} - I[x, a, R, \lambda] \right) \right]. \tag{A1}
 \end{aligned}$$

The four first lines in this result are solely due to the Newtonian potential, whereas the very last line represents the correction due to the Yukawa-like deviation.

Here, $I[x, a, R, \lambda]$ arises from the sum of the two integrals in the second line, involving the exponential, $(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x})e^{-\sqrt{s^2+a^2}/\lambda}ds$. Such an integral does not admit any analytical expression. It is, nevertheless, possible to estimate its order of magnitude. In fact, with the change of variable $s/a = \sinh z$, the integrals acquire the form $(\int_0^{z_0^-} + \int_0^{z_0^+})e^{-\frac{\alpha}{\lambda} \cosh z} a \cosh z dz$, with the boundaries given by $z_{0\pm} = \sinh^{-1}(\frac{R\pm x}{a})$. These integrals have a similar form as the integral giving rise to the modified Bessel function $K_1(\frac{\alpha}{\lambda})$, which reads $\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{\lambda} \cosh z} \cosh z dz$ [52]. The only difference, then, is in their respective ranges of integration. Given that our integrals stop at the finite boundaries $z_{0\pm}$, and the fact that the factor $e^{-\frac{\alpha}{\lambda} \cosh z}$ is rapidly suppressed for positive values of z , it is clear that the value of the sum of our two integrals would not differ much from the value of the modified Bessel function $K_1(\frac{\alpha}{\lambda})$. On the other hand, we know that for large arguments u , we have the approximation $K_1(u) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2u}}e^{-u}$ [52]. Therefore, we deduce that the integral $I[x, a, R, \lambda]$ is of the order of $\sqrt{a\lambda}e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}$. By adopting this value, we will be off from the real value, at most, by terms of the form $\sqrt{a\lambda}e^{-\sqrt{(R\pm x)^2+a^2}/\lambda}$. However, for very small values — compared to a typical Yukawa range λ — of the radius a of the tunnel (which is only much larger than the Compton wavelength of the test particles, $\sim 10^{-15}$ m for neutrons), these terms are much smaller than the rest of the terms in the last line of the result (A1). For this reason, we may safely discard the term $I[x, a, R, \lambda]$ from the potential (A1) due to the cylinder.

By making use of the same expression we found above for the gravitational potential of a massive disk at a distance x along its axis, we also easily compute the gravitational potential at a distance x from the center of a sphere of radius R and of uniform density ρ . For that purpose, we set for convenience $f(s, y) = \sqrt{s^2 + y^2} - s$ and $g(s, y) = \exp(-s/\lambda) - \exp(-\sqrt{s^2 + y^2}/\lambda)$. Then, integrating again separately over the left and right regions with respect to the point x , we find,

$$\begin{aligned} V_S(x) &= -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s, y) ds - 2\pi G\rho\alpha\lambda \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds \\ &= -2\pi G\rho \left[R^2 - \frac{x^2}{3} + \alpha\lambda^2 \left(2 - e^{-\frac{R-x}{\lambda}} - e^{-\frac{R+x}{\lambda}} \right) + \frac{\alpha\lambda^2}{x} \left((R+x+\lambda)e^{-\frac{R+x}{\lambda}} - (R-x+\lambda)e^{-\frac{R-x}{\lambda}} \right) \right] \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

To evaluate the integrals over the volume of the full sphere, we have taken into account the shape of the sphere as follows. For the infinitesimally thin disks that lie on the left region of the point x , for which $s \in [0, R-x]$, we used the fact that $y^2 = R^2 - (s+x)^2$, whereas for the disks that lie on the right region with respect to the point x , for which $s \in [0, R+x]$, we used the fact that $y^2 = R^2 - (s-x)^2$. The first two terms in this result are due to the Newtonian potential, whereas the rest of the terms, which are proportional to α , are due to the Yukawa-like deviation. Notice that the potential (A2) is finite everywhere inside the sphere, including the origin.

The gravitational potential at any distance x from the origin outside a full sphere, based on formula (1), is easily found by adding the Newtonian part $V_S^N(x)$ to the Yukawa part $V_S^Y(x)$. As we saw above, the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a uniform disk of radius y and surface mass density σ due to the Yukawa-like correction is $-2\pi G\sigma[\alpha\lambda(e^{-x/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+y^2}/\lambda})]$. By integrating this potential over the region $r \in [0, R]$, which lies to the left and to the right of the center of the sphere, and using $y^2 = R^2 - r^2$, where r is the distance of the disk of radius y from the center of the sphere, we find the following gravitational potential outside the full sphere,

$$\begin{aligned} V_S^{\text{Out}}(x) &= V_S^{N(\text{Out})}(x) + V_S^{Y(\text{Out})}(x) \\ &= -\frac{GM}{x} - 2\pi G\rho\alpha\lambda \int_0^R \left[e^{-(x+r)/\lambda} + e^{-(x-r)/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+R^2+2xr}/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+R^2-2xr}/\lambda} \right] dr \\ &= -\frac{GM}{x} + 4\pi G\rho\alpha\lambda^2 e^{-x/\lambda} \left[\frac{\lambda}{x} \sinh\left(\frac{R}{\lambda}\right) - \frac{R}{x} \cosh\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right]. \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

Similarly, recalling that the tunnel inside the sphere has the radius a and the length $2R$, we would have the following

gravitational potential outside the missing cylinder of radius a and of length $2R$:

$$\begin{aligned}
 V_C^{\text{Out}}(x) &= V_C^{N(\text{Out})}(x) + V_C^{Y(\text{Out})}(x) \\
 &= -2\pi G\rho \int_0^R \left[\sqrt{(x+r)^2 + a^2} + \sqrt{(x-r)^2 + a^2} - 2x \right] dr \\
 &\quad - 2\pi G\rho\alpha\lambda \int_0^R \left[e^{-(x+r)/\lambda} + e^{-(x-r)/\lambda} - e^{-\sqrt{(x+r)^2 + a^2}/\lambda} - e^{-\sqrt{(x-r)^2 + a^2}/\lambda} \right] dr \\
 &\approx -\pi G\rho \left[(x+R)\sqrt{(x+R)^2 + a^2} - (x-R)\sqrt{(x-R)^2 + a^2} - 4xR \right. \\
 &\quad \left. + a^2 \ln \frac{\sqrt{(x+R)^2 + a^2} + x + R}{\sqrt{(x-R)^2 + a^2} + x - R} + 4\alpha\lambda^2 e^{-x/\lambda} \sinh \frac{R}{\lambda} \right]. \tag{A4}
 \end{aligned}$$

Here, we have kept only the terms up to the second order in a and the leading exponential terms $e^{-(x\pm r)/\lambda}$. Therefore, the effective gravitational potential outside the sphere with the tunnel drilled inside it is $V_{\text{eff}}^{\text{Out}}(x) = V_S^{\text{Out}}(x) - V_C^{\text{Out}}(x)$. This potential yields an extra induced phase shift due to the trip made by the particle outside the sphere from the left reflector to the surface of the sphere and from the surface of the sphere to the right beam splitter, both at a distance L from the center of the sphere. This extra phase shift evaluates to,

$$\Delta\phi^{\text{Out}} = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{eff}}^{\text{Out}}(x) dx \approx \frac{GMm^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \left[\ln \frac{L}{R} + \frac{3\alpha\lambda^3}{2R^3} e^{(R-L)/\lambda} \left(1 - \frac{R}{L} \right) \right]. \tag{A5}$$

Provided that the reflector on the left and the beam splitter on the right are both close to the surface of the sphere, i.e., that $L \sim R$, this extra phase shift will not contribute much to the phase shift (6) caused by the interior of the sphere on the particles.

Appendix B: CORRECTION TO THE GRAVITATIONAL POTENTIAL INSIDE THE TUNNEL BASED ON FORMULA (2)

In this appendix we are going to compute the effective gravitational potential inside the tunnel at any distance x away from the center of the sphere. For that purpose, we follow the same strategy as the one followed in subsection III A for the Yukawa-like deviation. We first compute the gravitational potential $V_C(x)$ inside a full cylinder of mass density ρ , of radius a and length $2R$, at any distance x from the middle point for the cylinder along its axis of symmetry. Then, we compute the potential $V_S(x)$ at any distance x from the center of a full sphere of radius R and of mass density ρ . We are going to examine individually each of the different cases $n = 1, 2, 3, 4$.

1. Case: $n = 1$.

We saw in Section III B that for the case $n = 1$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-2\pi G\sigma r_0 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$. Let us then introduce, for convenience in order to make the calculations clearer, the function $g(s) = \ln(\sqrt{s^2 + a^2}/s)$. Then, by integrating such a function separately over the left and right regions of a point that is at a distance x away from the center of a full cylinder of radius a and of length $2R$, we easily find the following correction $V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x)$ to the Newtonian potential at that point inside the cylinder,

$$\begin{aligned}
 V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\
 &= -2\pi G\rho r_0 \left[(R-x) \ln \frac{\sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{R-x} + (R+x) \ln \frac{\sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{R+x} + a \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + a \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \tag{B1}
 \end{aligned}$$

In order to compute the correction $V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = \ln(\sqrt{s^2 + y^2}/s)$. For the integration, however, we should take again into account the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ for the disks on the left of the point x while $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ for the disks on the right of the point x . Thus we find,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x) = -2\pi G\rho r_0 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right]. \quad (\text{B2})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, found in [A](#), we compute the correction to the effective potential inside the tunnel for case $n = 1$ to find,

$$V_{\text{eff corr}}^{n=1}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x) = -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} - (R-x) \ln \frac{\sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{R-x} \right. \\ \left. - (R+x) \ln \frac{\sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{R+x} - a \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - a \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \quad (\text{B3})$$

The gravitational potential at any distance x from the origin outside a full sphere, based on the power law formula with $n = 1$ can be found by adding the Newtonian part $V_S^N(x)$ and the deviation part $V_S^{n=1}(x)$. As we saw above, the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a uniform disk of radius y and surface mass density σ for $n = 1$ is $-2\pi G\sigma r_0 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$. By integrating this potential over the region $r \in [0, R]$, which lies to the left and to the right of the center of the sphere, and using $y^2 = R^2 - r^2$, where r is the distance of the disk of radius y from the center of the sphere, we find the following correction to the Newtonian potential outside the sphere,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) = -2\pi G\rho r_0 \int_0^R \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + R^2 + 2xr}}{x+r} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xr}}{x-r} \right) dr \\ = -\pi G\rho r_0 \left[\frac{(R+x)^2}{x} \ln(x+R) - \frac{(R-x)^2}{x} \ln(x-R) - 2R \right] + 2\pi G\rho r_0 \int_0^R [\ln(x+r) + \ln(x-r)] dr. \quad (\text{B4})$$

Similarly, recalling that the tunnel inside the sphere has the radius a and the length $2R$, we would have the following gravitational potential outside the missing cylinder of radius a and length $2R$:

$$V_{C_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) = -2\pi G\rho r_0 \int_0^R \left(\ln \frac{\sqrt{(x+r)^2 + a^2}}{x+r} + \ln \frac{\sqrt{(x-r)^2 + a^2}}{x-r} \right) dr \\ = -\pi G\rho r_0 \left[(x+R) \ln [(x+R)^2 + a^2] - (x-R) \ln [(x-R)^2 + a^2] \right. \\ \left. - 4R + 2a \tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - 2a \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right] + 2\pi G\rho r_0 \int_0^R [\ln(x+r) + \ln(x-r)] dr. \quad (\text{B5})$$

Therefore, the effective gravitational potential outside the sphere with the tunnel drilled inside it is $V_{\text{eff Corr}}^{n=1(\text{Out})}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x)$, which yields,

$$V_{\text{eff Corr}}^{n=1(\text{Out})}(x) \approx -2\pi G\rho r_0 \left(\frac{x^2 - R^2}{2x} \ln \frac{x-R}{x+R} + R \right). \quad (\text{B6})$$

We have dropped terms of order $\mathcal{O}(a)$ and higher since they only bring a correction of the order $\mathcal{O}(ar_0)$. The extra

induced phase shift due to the trip made by the particle outside the sphere is then:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{Corr}}^{n=1(\text{Out})} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{effCorr}}^{n=1(\text{Out})}(x)dx \\ &= \frac{3GMm^2\lambda_0r_0}{4\pi\hbar^2R} \left[\Re\left(\text{Li}_2\left(\frac{L}{R}\right)\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{L}{R}\right) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{L^2 - R^2}{2R^2} \ln\frac{L-R}{L+R} + \frac{L-R}{R} \right].\end{aligned}\quad (\text{B7})$$

Here, $\text{Li}_2(z)$ represents Spence's (or dilogarithm) function [52] and $\Re(\text{Li}_2(z))$ means that we take the real part of the function. It is clear from this expression that when the reflector and the beam splitter are not very far from the sphere, this extra phase shift correction remains negligible compared the phase shift (7) caused by the motion of the particle inside the tunnel.

2. Case: $n = 2$.

We saw that for the case $n = 2$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-2\pi G\sigma r_0^2[x^{-1} - (x^2 + y^2)^{-1/2}]$. Therefore, by setting now, $g(s) = 1/s - 1/\sqrt{s^2 + a^2}$, we find the following correction $V_{\text{Corr}}^{n=2}(x)$ to the Newtonian potential inside a full cylinder of radius a and length $2R$,

$$\begin{aligned}V_{\text{Corr}}^{n=2}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -2\pi G\rho r_0^2 \left[\int_0^{R-x} ds/s + \int_0^{R+x} ds/s - \ln\frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} - \ln\frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right].\end{aligned}\quad (\text{B8})$$

The first two integrals in the second line are both divergent but, as we shall see shortly, these two integrals do not contribute to the effective potential because they cancel exactly with a similar contribution from the full sphere.

In order to compute the correction $V_{\text{Corr}}^{n=2}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = 1/s - 1/\sqrt{s^2 + y^2}$. For the integration, we take into account as usual the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ for the disks on the left of the point x while $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ to the right of the point x . Thus, we find,

$$V_{\text{Corr}}^{n=2}(x) = -2\pi G\rho r_0^2 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -2\pi G\rho r_0^2 \left[\int_0^{R-x} ds/s + \int_0^{R+x} ds/s - 2 \right].\quad (\text{B9})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, found in A, we compute the effective potential inside the tunnel for case $n = 2$ to be,

$$V_{\text{effCorr}}^{n=2}(x) = V_{\text{S}_{\text{Corr}}}^{n=2}(x) - V_{\text{C}_{\text{Corr}}}^{n=2}(x) = 2\pi G\rho r_0^2 \left[2 - \ln\frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} - \ln\frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} \right].\quad (\text{B10})$$

The gravitational potential at any distance x from the origin outside a full sphere, based on the power law formula with $n = 2$ can be found by adding the Newtonian part $V_S^N(x)$ and the deviation part $V_S^{n=2}(x)$. As we saw above, the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a uniform disk of radius y and surface mass density σ for $n = 2$ is $-2\pi G\sigma r_0^2[x^{-1} - (x^2 + y^2)^{-1/2}]$. By integrating this potential over the region $r \in [0, R]$, which lies to the left and right of the center of the sphere, and using $y^2 = R^2 - r^2$, where r is the distance of the disk of radius y from the center of the sphere, we find,

$$\begin{aligned}V_{\text{S}_{\text{Corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 + 2xr}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xr}} \right) dr \\ &= 4\pi G\rho r_0^2 - 2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right) dr.\end{aligned}\quad (\text{B11})$$

Because of the tunnel inside the sphere, we would have the following gravitational potential outside a missing cylinder of radius a and length $2R$:

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} - \frac{1}{\sqrt{(x+r)^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2+a^2}} \right) dr \\ &= -2\pi G\rho r_0^2 \ln \frac{\sqrt{(x-R)^2+a^2}+x-R}{\sqrt{(x+R)^2+a^2}+x+R} - 2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right) dr. \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

Therefore, the effective gravitational potential outside the sphere with the tunnel drilled inside it is $V_{\text{eff}C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x)$, which gives,

$$V_{\text{eff}C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) = 2\pi G\rho r_0^2 \left(2 + \ln \frac{x-R}{x+R} \right). \quad (\text{B13})$$

Here, we have again dropped terms quadratic in a . The extra induced phase shift due to the trip made by the particle outside the sphere is then:

$$\Delta\phi_{C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})} = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{eff}C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) dx \approx \frac{3GMm^2\lambda_0 r_0^2}{2\pi\hbar^2 R^3} \left[R \ln \frac{L^2-R^2}{R^2} - L \ln \frac{L-R}{L+R} + 2(R-L) - R \ln 4 \right]. \quad (\text{B14})$$

For L not very different from R , this additional phase shift is again negligible compared to the phase shift correction (8) acquired by the particle through its journey along the tunnel.

3. Case: $n = 3$.

We saw that for the case $n = 3$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-\pi G\sigma r_0^3 [1/x^2 - 1/(x^2+y^2)]$. Therefore, by setting now, $g(s) = 1/s^2 - 1/(s^2+a^2)$, we find the following correction $V_{C_{\text{corr}}}^{n=3}(x)$ to the Newtonian potential inside a full cylinder of radius a and length $2R$,

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=3}(x) &= -\pi G\rho r_0^3 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\pi G\rho r_0^3 \left[\int_0^{R-x} ds/s^2 + \int_0^{R+x} ds/s^2 - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

The first two integrals in the second line are both divergent but, again, as we shall see shortly, these two integrals do not contribute to the effective potential because they cancel exactly with a similar contribution from the full sphere.

In order to compute the correction $V_{S_{\text{corr}}}^{n=3}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = 1/s^2 - 1/(s^2+y^2)$. For the integration, we should take into account again the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ for the disks on the right of the point x while $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ to the left of the point x . Thus we find,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=3}(x) = -\pi G\rho r_0^3 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -\pi G\rho r_0^3 \left[\int_0^{R-x} ds/s^2 + \int_0^{R+x} ds/s^2 - \frac{1}{x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right]. \quad (\text{B16})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, found in A, we compute the effective potential inside the tunnel for case $n = 3$ to be,

$$V_{\text{eff}C_{\text{corr}}}^{n=3}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=3}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=3}(x) = \pi G\rho r_0^3 \left[\frac{1}{x} \ln \frac{R+x}{R-x} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right]. \quad (\text{B17})$$

The gravitational potential at any distance x from the origin outside a full sphere, based on the power law formula

with $n = 3$ can be found by adding the Newtonian part $V_S^N(x)$ and the deviation part $V_S^{n=3}(x)$. As we saw above, the gravitational potential at a distance x along the axis of symmetry of a uniform disk of radius y and surface mass density σ for $n = 3$ is $-\pi G\sigma r_0^3[1/x^2 - 1/(x^2 + y^2)]$. By integrating this potential over the region $r \in [0, R]$, which lies to the left and right of the center of the sphere, and using $y^2 = R^2 - r^2$, where r is the distance of the disk of radius y from the center of the sphere, we find,

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{(n=3)\text{Out}}(x) &= -\pi G\rho r_0^3 \int_0^R \left(\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} - \frac{1}{x^2 + R^2 + 2xr} - \frac{1}{x^2 + R^2 - 2xr} \right) dr \\ &= -\pi G\rho r_0^3 \left(\frac{1}{x} \ln \frac{x-R}{x+R} \right) - \pi G\rho r_0^3 \int_0^R \left[\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{B18})$$

Similarly, recalling that the tunnel inside the sphere has the radius a and the length $2R$, we have the following gravitational potential outside a missing cylinder of radius a and length $2R$:

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) &= -\pi G\rho r_0^3 \int_0^R \left(\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} - \frac{1}{(x+r)^2 + a^2} - \frac{1}{(x-r)^2 + a^2} \right) dr \\ &= \frac{\pi G\rho r_0^3}{a} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right] - \pi G\rho r_0^3 \int_0^R \left[\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{B19})$$

Therefore, the effective gravitational potential outside the sphere with the tunnel drilled inside it is $V_{\text{effCorr}}^{n=3(\text{Out})}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x)$, which gives,

$$V_{\text{effCorr}}^{n=3(\text{Out})}(x) = -\frac{3GMr_0^3}{4R^3} \left[\frac{1}{x} \ln \frac{x-R}{x+R} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right]. \quad (\text{B20})$$

This effective potential is the same as the one found in the interior of the sphere at a distance x from the center of the latter. The extra induced phase shift due to the trip made by the particle outside the sphere is then,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{Corr}}^{n=3(\text{Out})} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{effCorr}}^{n=3(\text{Out})}(x) dx \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0 r_0^2}{4\pi\hbar^2 a R^3} \left[(L+R) \tan^{-1} \left(\frac{L+R}{a} \right) - (L-R) \tan^{-1} \left(\frac{L-R}{a} \right) - 2R \tan^{-1} \left(\frac{2R}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

We have kept here only the leading terms which are inversely proportional to a . For L not very far off from R , this extra phase shift is negligible (and even more so for very small a) compared to the phase shift correction (9) due to the journey of the particle inside the sphere.

4. Case: $n = 4$.

We saw that for the case $n = 4$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-\frac{2}{3}\pi G\sigma r_0^4[1/x^3 - 1/(x^2 + y^2)^{3/2}]$. Therefore, by setting now, $g(s) = 1/s^3 - 1/(s^2 + a^2)^{3/2}$, we find the following correction $V_{C_{\text{corr}}}^{n=4}(x)$ to the Newtonian potential inside a full cylinder of radius a and length $2R$,

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=4}(x) &= -\frac{2\pi}{3} G\rho r_0^4 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{2\pi}{3} G\rho r_0^4 \left[\int_0^{R-x} ds/s^3 + \int_0^{R+x} ds/s^3 - \frac{R-x}{a^2\sqrt{(R-x)^2 + a^2}} - \frac{R+x}{a^2\sqrt{(R+x)^2 + a^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

Again, the first two integrals in the second line are both divergent but, as with the previous cases we saw above, these two integrals do not contribute to the effective potential because they cancel exactly with a similar contribution from the full sphere.

In order to compute the correction $V_{S_{\text{corr}}}^{n=4}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = 1/s^3 - 1/(s^2 + y^2)^{3/2}$. For the integration, we should take into account again the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ for the disks on the right of the point x while $y^2 = R^2 - (s + x)^2$ to the left of the point x . Thus we find,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=4}(x) = -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left[\int_0^{R-x} ds/s^3 + \int_0^{R+x} ds/s^3 - \frac{2}{R^2 - x^2} \right]. \quad (\text{B23})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, found in A, we compute the effective potential inside the tunnel for case $n = 4$ to be,

$$V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=4}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=4}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=4}(x) = \frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left[\frac{2}{R^2 - x^2} - \frac{R - x}{a^2 \sqrt{(R - x)^2 + a^2}} - \frac{R + x}{a^2 \sqrt{(R + x)^2 + a^2}} \right]. \quad (\text{B24})$$

5. Case: $n = 5$.

We saw that for the case $n = 5$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-\frac{\pi}{2}G\sigma r_0^5[1/x^4 - 1/(x^2 + y^2)^2]$. Therefore, by setting now, $g(s) = 1/s^4 - 1/(s^2 + a^2)^2$, we find the following correction $V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x)$ to the Newtonian potential inside a full cylinder of radius a and length $2R$,

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x) &= -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left[\int_0^{R-x} ds/s^4 + \int_0^{R+x} ds/s^4 - \frac{R-x}{2a^2((R-x)^2 + a^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R+x}{2a^2((R+x)^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B25})$$

As usual, the first two integrals in the second line are both divergent but, again, as with the previous cases we saw above, these two integrals do not contribute to the effective potential because they cancel exactly with a similar contribution from the full sphere.

In order to compute the correction $V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = 1/s^4 - 1/(s^2 + y^2)^2$. For the integration, we should take into account again the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ for the disks on the right of the point x while $y^2 = R^2 - (s + x)^2$ to the left of the point x . Thus we find,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x) = -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left[\int_0^{R-x} ds/s^4 + \int_0^{R+x} ds/s^4 - \frac{2R}{(R^2 - x^2)^2} \right]. \quad (\text{B26})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, as found in A, we easily compute the effective potential inside the tunnel for the case $n = 5$ to be,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=5}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x) \\ &= -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left[-\frac{2R}{(R^2 - x^2)^2} + \frac{R-x}{2a^2((R-x)^2 + a^2)} + \frac{R+x}{2a^2((R+x)^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

6. Case: $n = 6$.

We saw that for the case $n = 6$, the correction to the Newtonian gravitational potential due to a disk of radius y and mass density σ , at a distance x along the axis of symmetry, is $-\frac{2\pi}{5}G\sigma r_0^6[1/x^5 - 1/(x^2 + y^2)^{5/2}]$. Therefore, by setting now, $g(s) = 1/s^5 - 1/(s^2 + a^2)^{5/2}$, we find the following correction $V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x)$ to the Newtonian potential inside a full cylinder of radius a and length $2R$,

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x) &= -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left[\int_0^{R-x} ds/s^5 + \int_0^{R+x} ds/s^5 - \frac{(R-x)(3a^2 + 2(R-x)^2)}{3a^4(a^2 + (R-x)^2)^{3/2}} - \frac{(R+x)(3a^2 + 2(R+x)^2)}{3a^4(a^2 + (R+x)^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B28})$$

Again, the first two integrals in the second line are both divergent but, as with the previous cases we saw above, these two integrals do not contribute to the effective potential because they cancel exactly with a similar contribution from the full sphere.

In order to compute the correction $V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x)$ to the potential inside a full sphere, we shall use for convenience the function $g(s, y) = 1/s^5 - 1/(s^2 + y^2)^{5/2}$. For the integration, we should take into account again the shape of the sphere by using the fact that $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ for the disks on the right of the point x while $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ to the left of the point x . Thus we find,

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x) = -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left(\int_0^{R+x} + \int_0^{R-x} \right) g(s, y) ds = -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left[\int_0^{R+x} ds/s^5 + \int_0^{R-x} ds/s^5 - \frac{(6R^2 + 2x^2)}{3(R^2 - x^2)^3} \right]. \quad (\text{B29})$$

Combining these corrections to the potential inside the sphere and the cylinder with the Newtonian potential inside each one of the latter, found in A, we compute the effective potential inside the tunnel for case $n = 6$ to be,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=6}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x) \\ &= \frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left[\frac{(6R^2 + 2x^2)}{3(R^2 - x^2)^3} - \frac{(R-x)(3a^2 + 2(R-x)^2)}{3a^4(a^2 + (R-x)^2)^{3/2}} - \frac{(R+x)(3a^2 + 2(R+x)^2)}{3a^4(a^2 + (R+x)^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B30})$$

Appendix C: THE GRAVITATIONAL POTENTIAL BETWEEN TWO HEMISPHERES BASED ON FORMULA (1)

We show here how to compute the gravitational potential $V_{\text{Heff}}(x)$ between two hemispheres needed in Section VI. For that purpose, we one needs only subtract the gravitational potential $V_D(x)$ due to a full uniform disk of radius R and thickness $2a$ from the gravitational potential (A2) of a full uniform sphere of radius R . In this appendix, we are going then to compute the potential due to a full disk.

The gravitational potential at a distance x from the center of a full disk of thickness $2a$, of radius R and of mass density ρ , due to the Newtonian part in formula (1), can be found by following the same strategy as the one adopted in Ref. [70]. We find,

$$\begin{aligned} V_D^N(x) &= -4G\rho \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} d\phi dr dz \\ &= -2G\rho \int_0^\pi \left[a\sqrt{r^2(\phi) + a^2} + r^2(\phi) \ln \left(\frac{\sqrt{r^2(\phi) + a^2} + a}{r(\phi)} \right) - a^2 \right] d\phi. \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

In the first line, we integrated, first, the potential due to the mass element $r d\phi dr dz$ over the thickness $2a$. In the second line, we integrated over the rest of the disk from $r = 0$ to $r = r(\phi) = x \cos \phi + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \phi}$ [70]. Now, the second term in the integrand in Eq. (C1) does not admit any analytical expression. As such, one is tempted to perform a series expansion in x on that term in order to be able to integrate it. Unfortunately, given that our goal is to be able later to integrate the potential $V_D^N(x)$ from $x = 0$ to $x = R$, it does not help much to find a series

expansion in x that would terminate at some power of x . If a series expansion is to be used, it can only be a full series. Therefore, we shall instead seek a rough estimate of such an integral. Since the thickness of the disk is $2a \ll R$, it is clear that $r(\phi)$ inside the argument of the square root and the logarithm is mainly much larger than a , except for $x \sim R$. As a consequence, assuming $r(\phi) \gg a$ for all $x \lesssim R$ shall very well serve our purpose here for then the main contribution to the integral $\int_0^R V_D^N(x) dx$, which comes from the values $x \lesssim R$, would not be much affected. Thus, up to the second order in a , the first term inside the square brackets of the integral (C1) can be approximated by $ar(\phi)$ and the logarithm can be approximated by $a/r(\phi)$. In this case, Eq. (C1) reduces to,

$$V_D^N(x) \approx -2G\rho \int_0^\pi [2ar(\phi) - a^2] d\phi \approx -2G\rho \left[2aRE \left(\frac{x^2}{R^2} \right) - \pi a^2 \right]. \quad (\text{C2})$$

Here, the function $E(z)$ is the so-called complete elliptic integral of the second kind [52]. It admits a series representation as it is linked to the classical hypergeometric function through, $E(z) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right)$. Therefore, using the power expansion of the hypergeometric functions [52], we find the following power-expansion for the potential $V_D^N(x)$,

$$V_D^N(x) = -2\pi G\rho a R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (1)_n} \frac{x^{2n}}{R^{2n}} + 2\pi G\rho a^2. \quad (\text{C3})$$

The symbol $(x)_n$ stands for the product $x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ and is called the Pochhammer symbol. By definition, $(x)_0 = 1$. Note that this is a full series in x and not a truncation of a series. This potential can therefore be integrated exactly over the diameter of the disk to provide the phase shift $\Delta\phi$ for Section VI. The integral of (C3) gives the following result,

$$\int_0^R V_D^N(x) dx \approx -2\pi G\rho a R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(2n+1)n! (1)_n} + 2\pi G\rho a^2 R \equiv -2\pi G\rho a R (RI_D^N - a). \quad (\text{C4})$$

The factor RI_D^N represents the infinite sum. The number of terms of the sum to keep depends on the degree of precision one would wish to achieve which, in turn, depends on the order of magnitude of a .

Similarly, the gravitational potential inside the disk due to the Yukawa-like term in formula (1) can be found as follows,

$$\begin{aligned} V_D^Y(x) &= -4G\rho\alpha \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r e^{-\sqrt{r^2+z^2}/\lambda}}{\sqrt{r^2+z^2}} d\phi dr dz \approx -4G\rho\alpha e^{-a/\lambda} \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a e^{-r/\lambda} d\phi dr dz \\ &\approx -4G\lambda\rho\alpha e^{-a/\lambda} \int_0^\pi \left(1 - e^{-r(\phi)/\lambda}\right) d\phi \\ &\approx -4\pi G\lambda\rho\alpha e^{-a/\lambda} \left(1 - e^{-\frac{R-x}{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

Given that the integral in the first line does not admit any analytical expression, we have approximated it in the second line by noticing that the main contribution to the integral comes from $r(\phi) \gg a$. This allowed us to absorb the z^2 inside the square root. Consequently, we had then to take the lowest limit, $e^{-(a+r)/\lambda}$, of the exponential in the numerator. In fact, thanks to these approximations, the integral is easily evaluated in the third line. The latter expression does not admit any analytical expression either. For this reason, we had to take the lowest absolute value of $r(\phi)$, which is $R - x$. With such an approximate result, we find, up to the first order in λ ($\ll R$) the following integral,

$$\int_0^R V_D^Y(x) dx \approx -4\pi G\lambda\rho\alpha R e^{-a/\lambda}. \quad (\text{C6})$$

-
- [1] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, 2nd Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
 [2] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment”, *Living Rev. Relativ.* **17** (2014) 4.
 [3] L. Perivolaropoulos and L. Kazantzidis, “Hints of Modified Gravity in Cosmos and in the Lab?”, *Int. J. Mod. Phys. D* **28** (2019) 1942001 [arXiv:1904.09462].
 [4] E. Fischbach and C. Talmadge, *The search for non-Newtonian gravity*, (Springer-Verlag, New York, 1999).

- [5] D. E. Krause and E. Fischbach, “Searching for Extra Dimensions and New String-Inspired Forces in the Casimir Regime”, *Lect. Notes Phys.* **562** (2001) 292 [arXiv:hep-ph/9912276].
- [6] J. C. Long and J. C. Price, “Current Short-Range Tests of the Gravitational Inverse Square Law”, *Compt. Rend. Phys.* **4** (2003) 337 [arXiv:hep-ph/0303057].
- [7] E. G. Adelberger, B. R. Heckel and A. E. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53** (2003) 77 [arXiv:hep-ph/0307284].
- [8] J. Murata and S. Tanaka, “Review of short-range gravity experiments in the LHC era”, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 033001 [arXiv:1408.3588].
- [9] G. J. Olmo, “Limit to General Relativity in f(R) theories of gravity”, *Phys. Rev. D* **75**, 023511 (2007) [arXiv:gr-qc/0612047v2].
- [10] M. De Laurentis, I. De Martino and R. Lazkoz, “Analysis of the Yukawa gravitational potential in f(R) gravity II: relativistic periastron advance”, *Phys. Rev. D* **97**, 104068 (2018) [arXiv:1801.08136].
- [11] J. K. Hoskins, R. D. Newman, R. Spero and J. Schultz, “Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm”, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 3084.
- [12] M. V. Moody and H. J. Paik, “Gauss’s law test of gravity at short range”, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1195.
- [13] J. C. Long, H. W. Chan and J. C. Price, “Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime”, *Nucl. Phys. B* **539** (1999) 23 [arXiv:hep-ph/9805217].
- [14] C. D. Hoyle *et al.*, “Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for “large” extra dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1418 [arXiv:hep-ph/0011014].
- [15] E. G. Adelberger and for the EÖT-WASH GROUP, “Sub-mm tests of the gravitational inverse-square law”, *CPT and Lorentz Symmetry*, **9** (2002) [arXiv:hep-ex/0202008].
- [16] D. J. Kapner *et al.*, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale”, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 021101 [arXiv:hep-ph/0611184].
- [17] E. G. Adelberger *et al.*, “Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62** (2009) 102
- [18] A. O. Sushkov, *et al.*, “New experimental limits on non-Newtonian forces in the micrometer-range”, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 171101 [arXiv:1108.2547].
- [19] S.-Q. Yang *et al.*, “Test of the Gravitational Inverse Square Law at Millimeter Ranges”, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 081101.
- [20] C.-G. Shao *et al.*, “Search for Lorentz invariance violation through tests of the gravitational inverse square law at short-ranges”, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 102007 [arXiv:1504.03280].
- [21] W.-H. Tan *et al.*, “New Test of the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range with Dual Modulation and Compensation”, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 131101.
- [22] J. Bergé, “The Inverse Square Law And Newtonian Dynamics space explorer (ISLAND)”, [arXiv:1809.00698].
- [23] A. Landry and F. Hammad, “Landau levels in a gravitational field: The Schwarzschild spacetime case”, arXiv:1909.01827.
- [24] F. Hammad, A. Landry and K. Mathieu, “A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect”, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 449 [arXiv:2005.10631].
- [25] F. Hammad and A. Landry, “A simple superconducting quantum interference device for testing gravity”, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (2020) 2050171 [arXiv:2005.05798].
- [26] F. Hammad and A. Landry, “Landau levels in a gravitational field: The Levi-Civita and Kerr spacetimes case”, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 90 [arXiv:1910.01899v2].
- [27] V. V. Nesvizhevsky and K. V. Protasov, “Constraints on non-Newtonian gravity from the experiment on neutron quantum states in the earth’s gravitational field”, *Class. Quantum Grav.* **21** (2004) 4557 [arXiv:hep-ph/0401179].
- [28] R. S. Decca *et al.*, “Constraining New Forces in the Casimir Regime Using the Isoelectronic Technique”, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 240401 [arXiv:hep-ph/0502025].
- [29] C. R. Jamell and R. S. Decca, “Yukawa corrections to the Newtonian gravitational potential: finite size effects in a recent experiment”, *Int. J. Mod. Phys.: Conference Series* **3** (2011) 48.
- [30] N. R. Napolitano *et al.*, “Testing Yukawa-like potentials from f(R)-gravity in elliptical galaxies”, *ApJ.* **748** (2012) 87 [arXiv:1201.3363].
- [31] A. Saha, “COW test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time?”, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 025010 [arXiv:1306.4202].
- [32] G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, “New constraints on the Yukawa-type corrections to Newtonian gravity at short separations”, *Gravit. Cosmol.* **20** (2014) 3 [arXiv:1403.5778].
- [33] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*, (Princeton University Press, Princeton, 1995).
- [34] H. Pfister, “Gravitomagnetism: From Einstein’s 1912 Paper to the Satellites LAGEOS and Gravity Probe B”, In: Bičák J., Ledvinka T. (eds), *Rel. Grav. Springer Proceedings in Physics* **157** (Springer, Cham 2014).
- [35] B. Malekolkalami, M. Farhodi, “About Gravitomagnetism”, *Mod. Phys. Lett. A* **24** (2009) 601 [arXiv:gr-qc/0610095].
- [36] R. J. Adler and P. Chen, “Gravitomagnetism in Quantum Mechanics”, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 025004 [arXiv:0912.2814].
- [37] Q. Exirifard, “Gravitomagnetism in Modified theory of Gravity”, [arXiv:1906.02013].
- [38] J. Biemond, “The gravitomagnetic field of a sphere, Gravity Probe B and the LAGEOS satellites”, [arXiv:0802.3346].
- [39] I. Ciufolini *et al.*, “Measurement of gravitomagnetism”, *EPL.* **39** (1997) 359.
- [40] A. Tartaglia, “Detection of the gravitomagnetic clock effect”, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 783 [arXiv:gr-qc/9909006].
- [41] M. L. Ruggiero, A. Tartaglia, “Gravitomagnetic effects”, *Nuovo Cim. B* **117** (2002) 743 [arXiv:gr-qc/0207065].
- [42] M. Tajmar, F. Plesescu, B. Seifert and K. Marhold, “Measurement of Gravitomagnetic and Acceleration Fields Around

- Rotating Superconductors”, *AIP Conf. Proc.* **880** (2007) 1071 [arXiv:gr-qc/0610015].
- [43] B. J. Ahmedov and N. I. Rakhmatov, “Concerning Measurement of Gravitomagnetism in Electromagnetic Systems”, *Found. Phys.* **33** (2003) 625 [arXiv:gr-qc/0608036].
- [44] M. L. Ruggiero and A. Tartaglia, “Test of gravitomagnetism with satellites around the Earth”, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 205 [arXiv:1810.11785].
- [45] H. Abele, S. Baessler and A. Westphal, “Quantum states of neutrons in the gravitational field and limits for non-Newtonian interaction in the range between 1 micron and 10 microns”, *Lect. Notes Phys.* **631** (2003) 355 [arXiv:hep-ph/0301145].
- [46] T. Jenke *et al.*, “Q-BOUNCE-Experiments with quantum bouncing ultracold neutrons”, *Nucl. Instr. Meth. A* **611** (2009) 318.
- [47] H. Abele *et al.*, “QuBounce: the dynamics of ultra-cold neutrons falling in the gravity potential of the Earth”, *Nucl. Phys. A* **827** (2009) 593c.
- [48] D. Dubbers and M. G. Schmidt, “The neutron and its role in cosmology and particle physics”, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 1111 [arXiv:1105.3694].
- [49] H. Abele and H. Leeb, “Gravitation and quantum interference experiments with neutrons”, *New J. Phys.* **14** (2012) 055010 [arXiv:1207.2953].
- [50] A. N. Ivanov, M. Wellenzohn and H. Abele, “Probing of violation of Lorentz invariance by ultracold neutrons in the Standard Model Extension”, *Phys. Lett. B* **797** (2019) 134819 [arXiv:1908.01498].
- [51] S. A Werner, “Gravitational, rotational and topological quantum phase shifts in neutron interferometry”, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994) A207.
- [52] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
- [53] P. Kovtun and A. Shukla, “Einstein’s Equations in Matter”, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 104051 [arXiv:1907.04976].
- [54] A. D. Rendall, “Solutions of the Einstein equations with matter”, *Proceedings of the 14th International Conference on General Relativity and Gravitation: Florence, Italy, 6-12 August 1995 (pp. 313-335)*. World Scientific [arXiv:gr-qc/9510009].
- [55] E. Battista *et al.*, “Quantum time delay in the gravitational field of a rotating mass”, *Class. Quantum Grav.* **34** (2017) 165008 [arXiv:1703.08095].
- [56] B. Mashhoon and F. W. Hehl, “Nonlocal Gravitomagnetism”, *Universe* **5** (2019) 195 [arXiv:1908.05431v3].
- [57] M. G. Huber *et al.*, “Overview of neutron interferometry at NIST”, *EPJ Web of Conferences* **219** (2019) 06001.
- [58] D. Sarenac *et al.*, “Three Phase-Grating Moiré Neutron Interferometer for Large Interferometer Area Applications” *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 113201.
- [59] D. A. Pushin *et al.*, “Far-field interference of a neutron white beam and the applications to noninvasive phase-contrast imaging”, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 043637.
- [60] M. S. Safronova *et al.*, “Search for New Physics with Atoms and Molecules”, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 025008 [arXiv:1710.01833].
- [61] M. S. Safronova *et al.*, “Search for New Physics with Atoms and Molecules”, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018) 025008 [arXiv:1710.01833].
- [62] S. Franke-Arnold, “Optical angular momentum and atoms”, *Phil. Trans. R. Soc. A* **375** (2017) 20150435.
- [63] K. K. Nandi, I. R. Kizirgulov, O. V. Mikolaychuk, N. P. Mikolaychuk and A. A. Potapov, “Quantum phase shift in Chern-Simons modified gravity”, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 083006 [arXiv:0812.4342].
- [64] S. A Werner and A. G Klein, “Observation of Aharonov-Bohm effects by neutron interferometry”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 354006.
- [65] H. Okawara, K. Yamada and H. Asada, “Possible Daily and Seasonal Variations in Quantum Interference Induced by Chern-Simons Gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 231101 [arXiv:1210.4628].
- [66] H. Okawara, K. Yamada and H. Asada, “Possible latitude effects of Chern-Simons gravity on quantum interference”, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 084038 [arXiv:1302.0002].
- [67] D. Kikuchi, N. Omoto, K. Yamada and H. Asada, “Possible altitudinal, latitudinal and directional dependence of relativistic Sagnac effect in Chern-Simons modified gravity”, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 064036 [arXiv:1405.7472].
- [68] D. A. Pushin, M. G. Huber, M. Arif and D. G. Cory, “Experimental Realization of Decoherence-Free Subspace in Neutron Interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 150401.
- [69] H. Abele *et al.*, “Ramsey’s method of separated oscillating fields and its application to gravitationally induced quantum phase shifts”, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 065019 [arXiv:0907.5447].
- [70] H. Lass and L. Blitzer, “The gravitational potential due to uniform disks and rings”, *Celestial Mechanics* **30** (1983) 225.
- [71] See Ref. [26] for a new proposal for testing the frame-dragging effect using quantum particles.
- [72] Note that the same remark made above also applies here. That is, we are able to apply the prescription that consists in taking twice the integral over x between 0 and R because all the effective power-law potentials (B3), (B10) and (B17) are even in the integration variable x .
- [73] Note that if one assumes the analogy between magnetism and gravitomagnetism holds even inside the shell and simply replaces the magnetic moment μ_B by the angular momentum L_{Shell} , then the interior gravitomagnetic field would, as for real magnetism, simply be $\mathbf{B}_G^{\text{In}} = 2G\mathbf{L}_{\text{Shell}}/c^2R^3$. Therefore, since for a shell of uniform density ρ and of exterior and interior radii R and x , respectively, the moment of inertia is $I_{\text{Shell}} = \frac{8\pi}{15}\rho(R^5 - x^5)$, one would find, $B_G^{\text{In}}(x) = \frac{16\pi G\rho\omega}{15c^2R^3}(R^5 - x^5)$.
- [74] See Ref. [53] for a very recent work on dealing with Einstein equations inside matter and Ref. [54] for a brief review on the latter topic.
- [75] The weakness of the gravitomagnetic field has actually been exploited for other purposes in literature. In the recent work in Ref. [55], the weak-field limit has been exploited to study quantum corrections to the time delay caused by a spinning

source and in the more recent work in Ref. [56] it has been used to estimate the correction to the external gravitomagnetism that would arise from nonlocal gravity.

[76] Had we relied on a pure analogy between magnetism and gravitomagnetism, we would have found the phase shift $\frac{32\pi G\rho m\lambda_0\omega}{15hc^2} \int_0^R \left(x^2 + \frac{R^2}{2} - \frac{x^5}{2R^3}\right) dx = \frac{8GMm\lambda_0\omega}{5hc^2}$. Thus, we clearly see indeed that only the numerical factors would differ in the final result.

[77] An investigation of the effect of such a gravitationally induced harmonic oscillator on the super-electrons inside a superconductor is under investigation by the present authors.

Chapitre 8

Introduction au sixième article : L'influence de la gravitation sur l'effet Hall Quantique

Dans les troisième et quatrième articles, on avait obtenu les corrections aux niveaux de Landau pour différents types d'espaces-temps courbes comme Schwarzschild réduit à l'approximation newtonienne, Levi-Civita et Kerr. Ces corrections proviennent principalement d'une masse produisant un champ gravitationnel perturbant les niveaux de Landau conventionnels. Par la suite, on a étudié au cinquième article la possibilité d'expérience ayant pour but de mesurer et de vérifier les différentes formes de potentiels gravitationnels, que cela soit le potentiel de type Yukawa ou encore les potentiels de type puissance-inverse. Maintenant, on désire étudier l'influence des différents types de champs gravitationnels sur l'effet Hall quantique (i.e. Quantum Hall Effect ou QHE). Cet article s'intitulant "A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect" est publié dans l'European Physical Journal Plus et présenté immédiatement après ce chapitre d'introduction [102]. Mais avant de discuter du contenu de l'article, on doit présenter sommairement le phénomène d'effet Hall Quantique découvert expérimentalement par K. von Klitzing il y a quarante ans.

8.1. Un rappel au sujet de l'effet Hall Quantique

L'effet Hall provient du problème physique du mouvement d'un électron dans un conducteur soumis à des champs électrique et magnétique en même temps. On sait que les électrons sont soumis à la force de Lorentz s'exprimant comme suit [23] :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{Lorentz} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.1.1)$$

Selon l'équation (8.1.1), le champ magnétique \vec{B} provoque la rotation des électrons dans un matériau. Pour ce qui est de l'ajout du champ électrique, c'est lui qui est responsable du mouvement rectiligne des électrons. Ses effets sont limités par les impuretés du matériau où évoluent les électrons. Ce champ \vec{E} dans un matériau empêchera les électrons d'effectuer un mouvement circulaire causé par le champ magnétique. Alors, les électrons présents dans un

matériau vont s'accumuler sur les extrémités de celui-ci provoquant l'apparition d'un nouveau champ électrique appelé champ de Hall [103]. Ce nouveau champ électrique engendre une nouvelle force qui tend à faire diminuer la force de Lorentz sur les électrons. Après un temps assez court, ce champ de Hall compense les effets du champ magnétique perpendiculaire et le matériau atteint un équilibre où il n'y a plus de déviation provenant du champ magnétique. Cela donne le voltage de Hall et par la suite, on obtient le courant et la résistivité de Hall. Toutefois, ces quantités dépendent de la géométrie du matériau.

Par contre, il y a l'effet Hall quantique qui est une version quantifiée de l'effet Hall. On sait que le champ magnétique présent dans un matériau contenant un gaz d'électrons donnera quantiquement, par rapport aux énergies des électrons, les niveaux de Landau conventionnels tels qu'exprimés par l'équation (2.4.15). Si on a une densité de courant $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, on obtient que la conductivité donne une valeur constante bien précise de $\sigma = \nu e^2/h$ pour un matériau contenant un gaz d'électrons bi-dimensionnel (two dimensional electron gas (2DEG)) à très basse température [104, 105, 106, 107]. Le paramètre de remplissage ν pour l'effet Hall quantique sera entier dans la présente situation. C'est ce que l'on appelle l'effet Hall quantique entier. Par contre, le paramètre de conductivité e^2/h mène à une constante bien précise. Cette dernière s'appelle la constante de von Klitzing et sa valeur est de $R_K = \frac{h}{e^2} = 25812,8075 \Omega$ [106, 107]. Cette dernière a été découverte en 1980. Cette valeur est reconnue comme étant très précise et permet la quantification dite exacte. Cela est en fait une manifestation du principe d'invariance de jauge [106, 107].

Pour ce phénomène quantique, il existe des propriétés typiques selon les références [106, 107] : soit l'indépendance du phénomène à la forme géométrique du conducteur et l'insensibilité de ce même phénomène aux petites variations locales instantanées provenant de l'application d'un voltage externe. Il y a aussi cette insensibilité aux variations venant des impuretés internes du conducteur ; à la condition qu'elles ne varient pas sur une longueur dite "longueur magnétique" [103, 108, 109]. La plus grande manifestation de ces effets demeure sur la topologie ainsi que sur la présence d'un certain désordre interne du conducteur [108, 110]. En fait, tout ce qui est vraiment requis pour que l'effet QHE apparaisse est d'utiliser un conducteur relativement propre, traversé par un courant électrique direct et longitudinal et submergé à basse température par un champ magnétique constant, uniforme et perpendiculaire à la direction de propagation du courant électrique dans ce même conducteur. Les électrons dans le conducteur seront soumis uniquement à deux champs : les champs électriques et magnétiques. Les niveaux de Landau quantiques, auxquels les électrons adhèrent, ainsi que les impuretés sont responsables de faire émerger les plateaux de résistivité quantique de Hall. L'universalité de l'effet et l'incertitude relative des plateaux de résistivité, c'est-à-dire environ une partie sur 10^{10} [111, 112], donnent une possibilité de

mesurer la constante de structure fine en mécanique quantique [106, 113]. Avec ces caractéristiques et les avancées en métrologie [112], on peut imaginer des applications de l'effet Hall quantique en physique fondamentale, comme une étude sur les interactions gravitationnelles.

8.2. Objectifs et méthodologie

L'objectif principal est d'étudier les effets des différents types de champs gravitationnels sur l'effet Hall quantique. On aurait possiblement ces influences sur les champs électromagnétiques présents dans l'effet Hall quantique. On a aussi comme second objectif de retrouver les niveaux de Landau avec corrections provenant de ces champs gravitationnels. On veut ensuite étudier les effets d'un champ électrique induit gravitationnellement sur l'effet Hall quantique. On veut étudier les impacts des différents effets gravitationnels sur les plateaux de résistivité et les transitions entre ceux-ci, notamment à très basses températures. Comme dernier objectif, il serait bon de proposer une méthode pour mesurer les divers paramètres de champs gravitationnels, tout comme pour le cinquième article de cette présente thèse.

Pour traiter de l'effet QHE sous la gravité terrestre, on suppose un conducteur contenant un gaz d'électrons bi-dimensionnel (2DEG) étendu sur le plan vertical yz tel que montré à la figure 1 a). À partir de cette configuration, on pose l'hamiltonien du système auquel sont soumis les électrons du gaz 2DEG soumis aux champs électrique, magnétique ainsi qu'au champ gravitationnel terrestre. On obtient alors l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique de forme similaire à l'équation (2.3.1) avec en supplément un terme de correction constant dû à la présence du champ électrique ainsi que du champ gravitationnel terrestre. On obtient les niveaux de Landau tels qu'exprimés à l'équation (2.4.15) additionnés du terme de correction contenant les champs électrique et gravitationnel. Ensuite, on dérivera le courant total de Hall à l'intérieur du conducteur rectangulaire en direction y . De cette quantité, on parvient à obtenir la densité de courant de Hall avec correction due à la force gravitationnelle terrestre. Finalement, on déduit la résistivité de Hall avec correction due à la gravité terrestre. On exposera les valeurs numériques au tableau 1 présenté à la section 8.3.1.

Pour l'étude de l'effet Hall quantique avec les effets d'un champ gravitationnel non-linéaire produit par deux hémisphères, on se base essentiellement sur le montage de la figure 1 b). Ce montage consiste simplement en un conducteur circulaire tel que montré à la gauche de la figure 1 b). Celui-ci est placé entre les deux hémisphères massives comme montré à la droite de la figure 1 b). Le disque sur lequel circule une densité de courant électrique est sujet à un champ électrique E transverse, constant et de direction radiale. Le champ magnétique B , quant à lui, sera de direction perpendiculaire au plan circulaire du conducteur. Ce champ possède un potentiel vecteur linéaire dans la jauge symétrique en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) de la forme $\mathbf{A} = (0, \frac{1}{2}Br, 0)$. On a comme point de départ l'équation de Schrödinger de la forme (2.1.2) donnant une équation de la forme (2.4.2) à laquelle on ajoute un terme supplémentaire de potentiel de perturbation gravitationnelle. De ce terme

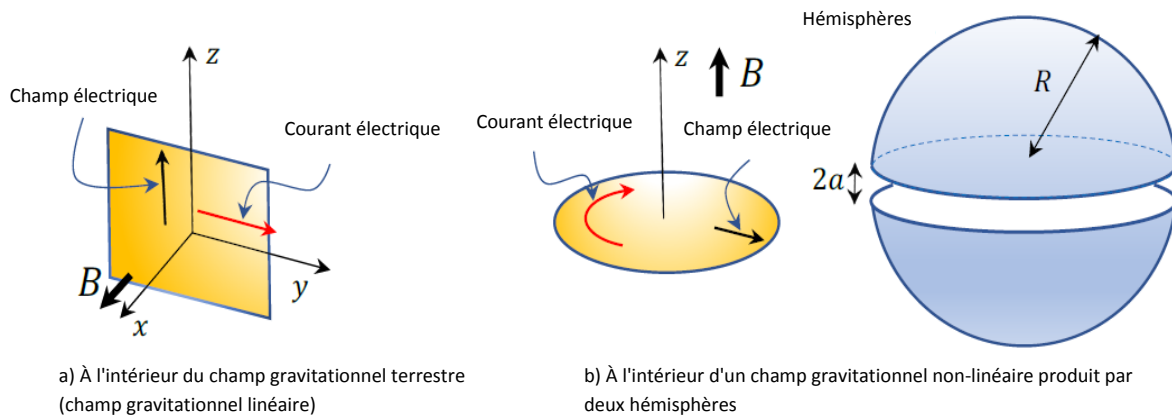


Figure 1. a) Un conducteur rectangulaire à l'intérieur du champ gravitationnel vertical de la terre. b) Un conducteur circulaire, situé à gauche, à être inséré entre les deux hémisphères à droite.

de perturbation, on parvient à dégager un potentiel gravitationnel quadratique s'ajoutant au potentiel donnant les niveaux de Landau. Cela permet d'obtenir les niveaux d'énergies de Landau avec élargissement et subdivision de ces niveaux selon le nombre quantique azimutal ℓ . Cela permettra des corrections gravitationnelles à la quantité de sous-niveaux possibles. Finalement, on obtiendra la densité de courant de Hall dans le disque conducteur inter-hémisphères. Cette densité de courant contient après approximations un terme de corrections gravitationnelles dues au champ gravitationnel quadratique produit par ces hémisphères.

Pour les effets du champ électrique induit, ce phénomène implique les atomes constituant le matériau conducteur. Ces atomes sont comprimés par la force gravitationnelle occasionnée par leur propres poids. Pour compenser et maintenir la neutralité de charge électrique, un champ électrique induit par les ions atomiques est produit pour compenser le champ gravitationnel et provoque la réaction des électrons du gaz 2DEG. De cette considération, on obtiendra ce champ et ensuite le potentiel pour la gravité terrestre ainsi que pour les hémisphères. On obtiendra ensuite le fameux facteur de correction $M/7m$ permettant de corriger en augmentant de plusieurs ordres de grandeurs les corrections gravitationnelles obtenues aux étapes précédentes. Pour ses effets sur la gravité terrestre, on comparera les valeurs de la constante de von Klitzing selon ces corrections dues au champ induit. Pour le cas des hémisphères, on montrera que ce facteur de correction rehausse l'élargissement des niveaux de Landau et diminue davantage l'écart en énergie entre des groupes de sous-niveaux voisins.

Cela permettra en plus de mieux montrer les effets gravitationnels sur les plateaux de résistivités et la forme de transitions entre ces plateaux. On verra en même temps ces effets sur les distributions d'états autour des énergies de Fermi associées aux pics de résistivité de Hall. On étudiera en supplément les effets de la température d'un système supraconducteur sur les transitions entre ces plateaux de résistivité. On verra que les transitions entre ces plateaux se font graduellement et en douceur lorsqu'on tient compte des effets gravitationnels au lieu d'obtenir des transitions abruptes. On aura des pics d'énergies beaucoup plus élargis avec ces effets de la gravité au lieu d'obtenir des pics étroits.

Pour les corrections gravitationnelles newtonienne et non-newtoniennes, on utilise la démarche proposée à la section B.4 de l'annexe B pour obtenir les expressions pour les paramètres K de chaque type d'interactions gravitationnelles. On obtient finalement que les corrections de type Yukawa ainsi que de puissances inverses sont trop faibles par rapport au paramètre K du cas newtonien pur. Cette faiblesse en intensité rend les paramètres de ces corrections non-newtoniennes non-mesurable dans cette situation. Par contre, on pourra proposer de mesurer avec grande précision la constante gravitationnelle G ainsi que l'accélération gravitationnelle terrestre g .

Finalement, on aura satisfait les objectifs de déterminer les effets de différentes formes d'interactions gravitationnelles sur le QHE, y compris en tenant compte du champ électrique induit par les atomes constituant le conducteur. Toutefois, même si le QHE avec interaction gravitationnelle ne permettrait pas de mesurer les paramètres des termes de type Yukawa et de puissances inverses, on pourra quand même mesurer les constantes G et g avec grande précision. C'est en ce sens qu'on aura satisfait l'ensemble des objectifs de cet article.

8.3. Principaux résultats

8.3.1. Sous la gravité terrestre

On part de l'hamiltonien suivant contenant les champs électrique, magnétique et gravitationnel :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2m} [(p_y - eBz)^2 + p_z^2] + (eE + mg)z \\ &= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(z - z_0)^2 + (eE + mg)z_0 + \frac{(eE + mg)^2}{2m\omega_c^2}. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Les niveaux d'énergies de Landau avec décalage provenant des champs électrique et gravitationnel s'expriment par :

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + (eE + mg)z_0 + \frac{(eE + mg)^2}{2m\omega_c^2}. \quad (8.3.2)$$

Des équations (8.3.1) et (8.3.2), on se servira du centre d'équilibre z_0 et de la fonction d'onde délocalisée pour obtenir au final la densité de courant de Hall comme suit :

$$J_y = \frac{e}{mS} \sum_{n,k} \langle \psi_n | \hbar k - eBz | \psi_n \rangle = \frac{\nu N_0 e}{S} \left(\frac{eE + mg}{eB} \right) = \left(1 + \frac{mg}{eE} \right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (8.3.3)$$

Ici, ν est le nombre de niveaux de Landau remplis et N_0 est le nombre d'états dans le conducteur partageant le même niveau de Landau. Pour une section de surface d'aire S , cette dégénérescence est donnée en termes de la quantité de flux quantique $\Phi_0 = h/e$, soit par l'expression $N_0 = SB/\Phi_0$ [110]. En utilisant l'équation (8.3.3), la résistivité de Hall ρ_{yz} est donnée par la relation suivante pour $\frac{mg}{eE} \ll 1$:

$$\rho_{yz} = \frac{E}{J_y} = \frac{h}{\nu e^2} \left(1 + \frac{mg}{eE} \right)^{-1} \approx \frac{h}{\nu e^2} \left(1 - \frac{mg}{eE} \right) \quad (8.3.4)$$

Numériquement, les résultats associés à l'équation (8.3.4) contenant le terme de correction dû au champ gravitationnel terrestre sont présentés au tableau 1. On voit dans cette équation (8.3.4) que la résistivité de Hall est proportionnelle au facteur $(1 - \frac{mg}{eE})$ si $\frac{mg}{eE} \ll 1$. De plus, on voit dans ces résultats du tableau 1 que le facteur de correction $\frac{mg}{eE}$ est très petit par rapport au terme dominant.

| Situation | g (m/s ²) | E (V/m) | $m_e g / eE$ |
|-----------|-------------------------|-----------|--------------|
| 1 | 9,80665 | 1,0 | 10^{-10} |
| 2 | 9,80665 | 10^{-3} | 10^{-7} |
| 3 | $9,80665 \times 10^5$ | 10^{-3} | 10^{-2} |

Tableau 1. Valeurs de correction à la résistivité de Hall dans le champ gravitationnel terrestre. La situation 3 s'applique pour un système placé à l'intérieur d'une centrifugeuse, d'où la valeur amplifiée de g .

8.3.2. Les niveaux de Landau élargis sous la gravité produite par des hémisphères

On a traité un système d'électrons évoluant dans un conducteur soumis à une interaction gravitationnelle non-linéaire via un hamiltonien ayant la forme de l'équation (2.1.2). On met celui-ci dans l'équation de Schrödinger sous la forme de l'équation (2.1.3) et on applique la méthode de séparation des variables en posant $\psi = e^{i\ell\phi} R(r)$. Cela donne l'équation suivante pour un électron d'énergie \mathcal{E} comme suit :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 r^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2m^2 V_g(r)}{\hbar^2} \right) R = 0. \quad (8.3.5)$$

On déduit facilement que si $V_g(r) = 0$, on retrouve alors les niveaux de Landau conventionnels tels qu'exprimés par l'équation (2.4.15) et que la solution non-perturbée de cette équation de Schrödinger s'exprime selon l'équation (2.4.11). Par contre, si on ajoute un potentiel gravitationnel quadratique de la forme $\frac{1}{2}Kr^2$ à l'équation (8.3.5), cette dernière s'exprimera comme suit :

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{(e^2B^2 + 4m^2K)r^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2m^2C_g(r)}{\hbar^2} \right] R = 0. \quad (8.3.6)$$

À partir de l'équation (8.3.6), on répète le même type de démarche que celle présentée à la section 2.4.2 pour les niveaux de Landau conventionnels. On obtient alors comme quantification découlant de l'équation (8.3.6) l'expression suivante :

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \hbar\varpi_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\ell}{2} (\varpi_c - \omega_c). \quad (8.3.7)$$

On a introduit dans cette équation (8.3.7) la fréquence cyclotron modifiée comme suit :

$$\varpi_c = \sqrt{e^2B^2 + 4m^2K}/m = \omega_c \sqrt{1 + \frac{4m^2K}{e^2B^2}} = \omega_c \sqrt{1 + \frac{4K}{\omega_c^2}}, \quad (8.3.8)$$

On obtient aux équations (8.3.7) et (8.3.8) des niveaux de Landau élargis. En effet, la distance en énergie entre deux niveaux voisins est augmentée par un facteur $\hbar\omega_c \left[\sqrt{1 + \frac{4K}{\omega_c^2}} - 1 \right]$. De plus, on remarque dans cette équation (8.3.7) la présence du nombre quantique azimutal ℓ . Cela signifie qu'il y a encore la subdivision des niveaux de Landau dans les corrections de ces niveaux, tout comme dans les résultats obtenus dans les troisième et quatrième articles. Le paramètre K est un paramètre de quantification par approximation du potentiel harmonique d'une interaction gravitationnelle. Celui-ci dépend du type de gravitation, que cela soit pour la gravitation newtonienne, de type Yukawa ou encore de type puissance-inverse. On a démontré à la section B.4 de l'annexe B que ces potentiels gravitationnels s'expriment tous sous forme d'un potentiel d'oscillateur harmonique simple de la forme $\frac{1}{2}Kr^2$. Pour de faibles corrections gravitationnelles ($\frac{4K}{\omega_c^2} \ll 1$), l'équation (8.3.7) s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar K \ell}{\omega_c}. \quad (8.3.9)$$

On voit clairement en l'équation (8.3.9) l'élargissement ainsi que la subdivision selon ℓ des niveaux de Landau.

Pour les conséquences sur l'effet Hall quantique, on réutilise l'équation (8.3.6) en appliquant l'ansatz $R(r) = r^{-1/2}\chi(r)$ comme suit :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \chi'' + \left[\left(\frac{e^2B^2 + 4m^2K}{8m} \right) r^2 + \frac{\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})}{2mr^2} - \frac{\hbar eB\ell}{2m} + mC_g(r) \right] \chi = \mathcal{E}\chi. \quad (8.3.10)$$

On applique à la lettre la méthode de l'approximation du potentiel harmonique telle qu'expliquée à la section 2.3.2 pour le potentiel effectif de l'équation (8.3.10). De là, on obtient les points d'équilibres stables permettant ainsi la densité d'états par niveau d'énergie de Landau. Pour un conducteur de section circulaire et d'aire S , le nombre d'états N inclus dans un certain rayon interne d'équilibre sera estimé comme étant :

$$N \approx \frac{S\sqrt{e^2B^2 + 4m^2K}}{h} \approx N_0 \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2}\right). \quad (8.3.11)$$

Ici, $N_0 = SB/\Phi_0$ est le nombre d'états partageant le même niveau n de Landau sans la présence du champ gravitationnel. À partir de ce résultat, on obtient plus précisément la distance en énergie entre deux niveaux de Landau élargis voisins en tenant compte de tous les sous-niveaux. Cela s'exprime par la relation :

$$\Delta\mathcal{E} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2}\right) - \frac{\hbar KN}{\omega_c} \approx \hbar\omega_c \left(1 - \frac{m^2KS}{heB}\right). \quad (8.3.12)$$

On veut finalement tenir compte du champ électrique radial dans le conducteur entre les hémisphères. On reprend l'équation (8.3.10) et on l'approxime par l'équation d'un oscillateur harmonique en direction radiale pour des valeurs de ℓ très élevées. On obtient alors l'hamiltonien approximé contenant un champ électrique radial constant E :

$$H(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}m\varpi_c^2(r - r_*)^2 + \frac{\hbar\ell}{2}(\varpi_c - \omega_c) + eEr_0 - \frac{e^2E^2}{2m\varpi_c^2} + mC_g(r), \quad (8.3.13)$$

où $p_r = -i\hbar\partial_r$ est l'opérateur quantique de quantité de mouvement radiale. On applique encore une fois la méthode d'approximation de l'oscillateur harmonique telle que présentée à la section 2.3.2 et on obtient la densité de courant de Hall comme suit :

$$J_C = \frac{e}{mS} \sum_{n,k} \langle \psi_n | \hbar k - \frac{1}{2}eBr | \psi_n \rangle \approx \frac{\nu Ne^2E}{mS} \frac{\omega_c}{\varpi_c^2} \approx \left(1 - \frac{2K}{\omega_c^2}\right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (8.3.14)$$

On a utilisé dans cette équation (8.3.14) l'équation (8.3.11) pour le nombre de sous-niveaux. De plus, on a aussi négligé les termes de corrections gravitationnelles d'ordres supérieurs à deux en K/ω_c^2 et $eE/m\omega_c^2$. En termes d'intensité, ces corrections gravitationnelles seront plus faibles par rapport aux corrections pour la gravité terrestre.

8.3.3. Les effets du champ électrique induit

8.3.3.1. Pour la gravité terrestre

On obtient que le champ électrique induit par la gravité provenant des atomes constituant le conducteur s'exprime par :

$$E^I \approx Mg/7e, \quad (8.3.15)$$

pour un conducteur en cuivre. Ce champ s'applique d'ailleurs pour le gaz d'électrons présent dans le conducteur. Ce facteur de correction amplifie les corrections gravitationnelles de quelques ordres de grandeurs, autant pour la gravité terrestre que pour la gravité par les hémisphères.

Dans le cas de la gravité terrestre, pour l'équation (8.3.3), on ajoutera à celle-ci la contribution eE^I du champ électrique induit du gaz d'électrons, c'est-à-dire côte à côte avec les effets du champ gravitationnel. On obtient la modification suivante à la résistivité de Hall quantique :

$$J_y = \left(1 + \frac{Mg}{7eE} + \frac{mg}{eE}\right) \frac{\nu e^2}{h} E \approx \left(1 + \frac{Mg}{7eE}\right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (8.3.16)$$

On a obtenu les corrections dues au champ gravitationnel terrestre de la résistivité de Hall en utilisant l'équation (8.3.16) tenant compte du facteur $\frac{M}{7m} = 1,16 \times 10^4$ pour le cuivre. En utilisant le facteur $\frac{e^2}{h}$, l'inverse de la constante de von Klitzing, on présente au tableau 2 les différentes valeurs de conductivité et de résistivité de Hall selon l'intensité du champ électrique E [114]. On obtient les conductivités observables et les résistivités pour les plateaux d'effet Hall. On remarque dans ce tableau 2 que les différences dans les résistivités (les constantes de von Klitzing R_K) sont très minces entre chacune des situations.

| Situation | g (m/s ²) | E (V/m) | $\left(\frac{Mg}{7eE}\right)$ | $(1/R_K)$ (10 ⁻⁵ S) | R_K (Ω) |
|------------|-------------------------|-----------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------|
| Sans corr. | n.d | n.d. | n.d. | 3,8740458655 | 25812,8075 |
| Avec corr. | 9,80665 | 1,0 | $9,23 \times 10^{-7}$ | 3,874049433 | 25812,7837 |
| Avec corr. | 9,80665 | 10^{-3} | $9,23 \times 10^{-4}$ | 3,8776203 | 25789,0126 |

Tableau 2. Conductivité et résistivité de Hall pour les corrections par la gravité terrestre avec le cuivre (masse atomique $M = 1,0552061 \times 10^{-25}$ kg).

8.3.3.2. Pour les hémisphères

Pour les hémisphères, on obtient, via la même démarche que pour la gravité terrestre, le champ électrique induit radial comme suit :

$$E^I(r) \approx M \partial_r V_g(r) / 7e. \quad (8.3.17)$$

On sait que le potentiel gravitationnel entre les deux hémisphères s'exprime comme $\frac{1}{2}Kr^2 + C_g(r)$. Cela signifie que le potentiel électrique induit $V_e^I(r)$ dans le conducteur s'exprime par :

$$V_e^I(r) \approx M \left[\frac{1}{2}Kr^2 + C_g(r) \right] / 7e. \quad (8.3.18)$$

La fréquence cyclotron ϖ_c pour les niveaux de Landau élargis gravitationnellement sera aussi modifiée par ce champ électrique induit. Cela donnera une fréquence cyclotron induite et modifiée, s'exprimant par :

$$\varpi_c^I = \sqrt{\frac{e^2 B^2}{m^2} + \frac{4M}{7m}K + 4K} \approx \omega_c \left(1 + \frac{2MK}{7m\omega_c^2}\right). \quad (8.3.19)$$

Avec le potentiel électrique induit $V_e^I(r)$, la séparation $\Delta\mathcal{E}$ entre deux niveaux de Landau voisins telle qu'exprimée par l'équation (8.3.12) deviendra sous ce changement :

$$\Delta\mathcal{E} \approx \hbar\omega_c \left(1 - \frac{mMK S}{7\hbar e B}\right). \quad (8.3.20)$$

On reprend l'équation (8.3.9) pour y insérer le champ électrique induit. On obtiendra comme relation modifiée pour les niveaux d'énergies de Landau l'expression :

$$\mathcal{E}_{nl} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2mMK}{7e^2 B^2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar MK \ell}{7eB}. \quad (8.3.21)$$

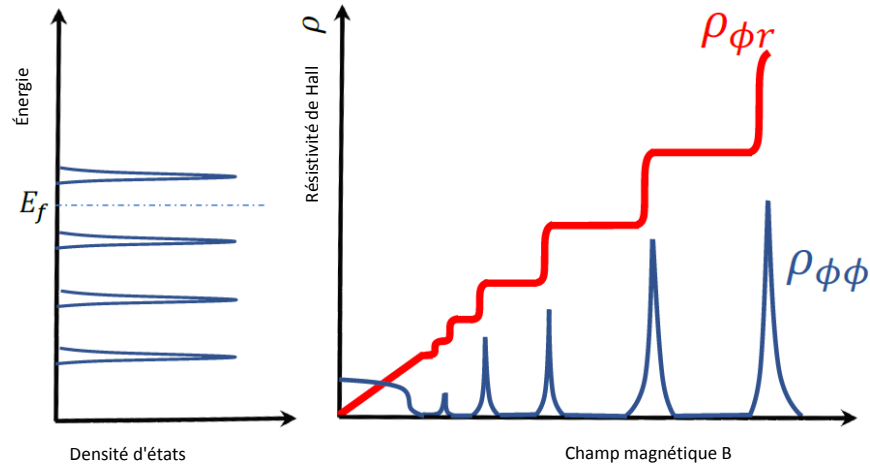
On voit encore l'élargissement et la subdivision par ℓ des niveaux de Landau. Toutefois, l'élargissement est grandement amplifié par le champ électrique induit.

On compare les distributions de densités d'états entre les situations présentées aux figures 2 a) et b). On prévoit que les effets de la gravité sur les plateaux horizontaux ainsi que sur les sauts entre les plateaux seraient plus claires et plus visibles pour des champ magnétiques moins intenses selon cette figure 2.

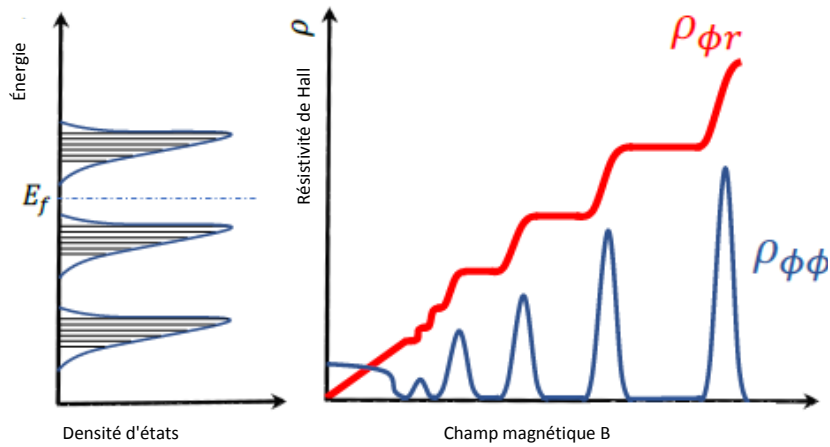
On a obtenu des valeurs numériques pour les effets des hémisphères sur la QHE via l'utilisation des équations (8.3.20) et (8.3.21). À partir des données présentées au tableau 3, on obtient au tableau 4 les valeurs des corrections présentes dans les équations (8.3.27) à (8.3.31). On effectue encore une fois cet exercice pour un conducteur en cuivre. Selon ce tableau 4, on obtient que $\delta B \approx 10^{-13}$ tesla, permettant d'utiliser les montages à base de SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device) qui demandent une précision sur le champ magnétique de l'ordre de 10^{-15} tesla [115].

| Matériau | ρ (kg/m ³) | R (m) | $2a$ (m) |
|----------|-----------------------------|---------|--------------------|
| Platine | 21 447 | 1 | 2×10^{-3} |

Tableau 3. Valeurs de densité massique et de dimensions des hémisphères produisant les effets gravitationnels.



a) L'effet Hall quantique en absence de champ gravitationnel



b) L'effet Hall quantique entre les deux hémisphères

Figure 2. a) La densité d'états des électrons autour de l'énergie de Fermi E_f , la résistivité de Hall $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité azimutale $\rho_{\phi\phi}$ dans le conducteur circulaire en absence de champ gravitationnel. b) La densité d'états des électrons autour de l'énergie de Fermi E_f (Les lignes horizontales montrent les niveaux de Landau subdivisés.), la résistivité de Hall $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité azimutale $\rho_{\phi\phi}$ dans le conducteur circulaire entre deux hémisphères massives. Les caractéristiques des deux situations sont amplifiées dans le but de mettre en évidence les différences de types qualitatives entre les deux situations.

On a aussi comparé les profondeurs thermique et gravitationnelle en utilisant la valeur maximale du nombre quantique $\ell = N \approx N_0 = SB/\Phi_0 = SBe/h$. La profondeur gravitationnelle se définit par :

$$\Delta_g \approx \frac{MKS}{14\pi} \quad (8.3.22)$$

| | | | | | |
|--|-------------------------------------|---------|----------------------|---|---|
| K ($\times 10^{-6} \text{rad}^2/\text{s}^2$) | M ($\times 10^{-25} \text{kg}$) | B (T) | S (m^2) | $\left(\frac{MKS}{7h\omega_c}\right) \left(\frac{\delta B}{B}\right)$ | $\left(\frac{2MK}{7m\omega_c^2}\right)$ |
| 5,986906 | 1,0552061 | 1,0 | 10^{-4} | $7,74396 \times 10^{-14}$ | $6,405 \times 10^{-24}$ |

Tableau 4. Corrections gravitationnelles pour les hémisphères sur les niveaux d'énergies de Landau anticipées.

On compare au tableau 5 la profondeur d'élargissement gravitationnelle Δ_g et la profondeur d'élargissement thermique $\Delta_{th} = k_B T$. On remarque que pour une température d'un kelvin, la profondeur d'élargissement gravitationnelle est très faible par rapport à celle thermique. Cela fera toutefois une différence pour les transitions entre les différents plateaux de résistivité. Par contre, plus on s'approche du zéro absolu, plus l'écart en énergie entre les deux profondeurs diminue pour être négligeable lorsqu'on atteint le zéro absolu selon ce même tableau 5.

| K ($\times 10^{-6} \text{rad}^2/\text{s}^2$) | M ($\times 10^{-25} \text{kg}$) | S (m^2) | T (K) | Δ_g (eV) | Δ_{th} (eV) |
|--|-------------------------------------|----------------------|------------|-----------------|-------------------------|
| 5,986906 | 1,0552061 | 10^{-4} | 1,0 | 10^{-17} | $8,617 \times 10^{-5}$ |
| 5,986906 | 1,0552061 | 10^{-4} | 10^{-12} | 10^{-17} | $8,617 \times 10^{-17}$ |

Tableau 5. Comparaison entre les profondeurs d'élargissement gravitationnelle et thermique anticipées.

Expérimentalement, si la température $T \rightarrow 0$, la phase de transition d'un semi-conducteur comme le InGaAs-InP est caractérisée par le comportement d'échelle suivant :

$$\frac{\partial \rho_{xy}}{\partial B} \propto T^{-\mu}. \quad (8.3.23)$$

Dans l'équation (8.3.23), on a obtenu expérimentalement que $\mu \approx 0.4$ [116, 117, 118, 119, 120]. La divergence de cette loi de puissance pour $T \rightarrow 0$ se répercute dans les transitions entre deux plateaux de résistivité décrites par une pente selon la figure 3. Ces transitions deviennent progressivement plus abruptes lorsque la température est décroissante, ce qui donne les transitions abruptes et tranchantes à très faibles températures.

La profondeur magnétique ΔB du sommet ρ_{xx} est très décroissante à très basse température comme suit [116] :

$$\Delta B \propto T^\mu. \quad (8.3.24)$$

Cela se répercute sur l'élargissement des niveaux de Landau :

$$\frac{\Delta_g}{\hbar\omega_c} = \frac{m\Delta_g}{\hbar eB} = \frac{mMKS\Delta_g}{7\hbar eB}. \quad (8.3.25)$$

Il y a aussi des effets sur les transitions de résistivité :

$$\frac{\partial\rho_{xy}}{\partial B} \propto -\frac{mMKS\Delta_g}{7\hbar eB^2}. \quad (8.3.26)$$

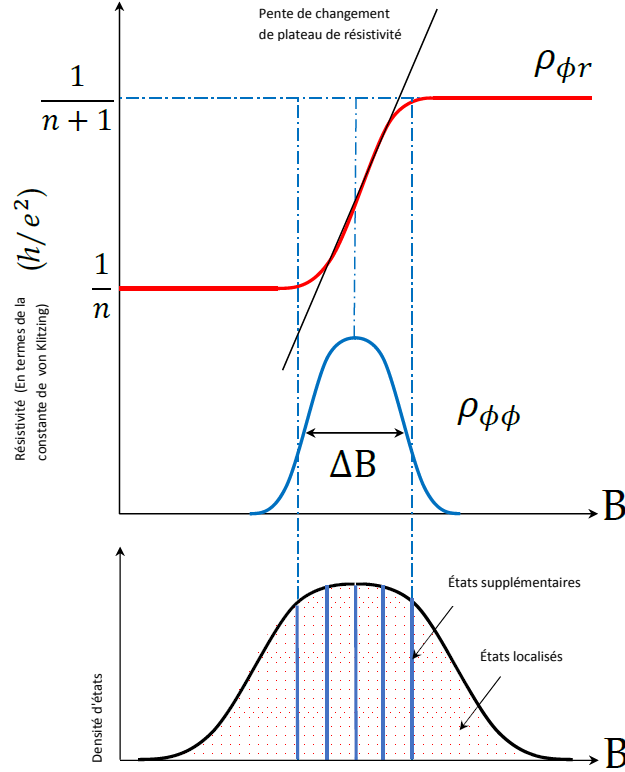


Figure 3. a) Le graphe supérieur montre la variation de la résistivité transversale $\rho_{\phi r}$ ainsi que la résistivité longitudinale $\rho_{\phi\phi}$ en fonction du champ magnétique appliqué B . La pente décrivant la transition entre les deux échelles de plateaux proportionnelles à la température allant comme $T^{-\mu}$, avec la constante μ , pour $T \rightarrow 0$. Dans le cas de la présence du champ gravitationnel non-linéaire entre les deux hémisphères massives, la pente deviendra inversement proportionnelle à B^2 . D'une manière similaire, la profondeur ΔB du graphe $\rho_{\phi\phi}$ définie comme étant proportionnelle à T^μ pour $T \rightarrow 0$ deviendra inversement proportionnelle à B à l'intérieur des hémisphères massives. L'élargissement des niveaux de Landau, tel que montré au graphe inférieur, est dû à (i) la subdivision induite gravitationnellement (les lignes verticales abritant les états extensionnés) et (ii) les impuretés locales abritant les états localisés.

8.3.4. Les corrections gravitationnelles et possibilité d'expérience

Le potentiel gravitationnel newtonien entre les hémisphères, obtenu par l'équation (B.4.2) de la section B.4 de l'annexe B montre clairement une constante K s'exprimant comme étant :

$$K = \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right). \quad (8.3.27)$$

La correction de type Yukawa au potentiel newtonien est exprimée, selon l'équation (B.4.5) en section B.4 de l'annexe B, par la constante K suivante :

$$K \approx \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} + \frac{\alpha R}{\lambda} e^{-R/\lambda}\right). \quad (8.3.28)$$

La correction en puissance inverse au potentiel newtonien s'exprime, en utilisant l'équation (B.4.8) de l'annexe B, par la constante K comme suit :

$$K \approx \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right) \left(1 + \frac{2r_0}{R}\right). \quad (8.3.29)$$

On obtient de très faibles contributions provenant des parties de type Yukawa ainsi que pour puissance inverse comparativement à l'équation (8.3.27) pour la correction provenant de la gravitation newtonienne. Ces faibles intensités de corrections rendent ces déviations indiscernables par rapport aux termes newtoniens. Par contre, on pourra mesurer la constante gravitationnelle G ainsi que l'accélération gravitationnelle terrestre g .

8.4. Les contributions

Mes contributions

- Calculs des potentiels de disque, des hémisphères et des potentiels finaux.
- Calculs finaux des quantifications des potentiels, notamment pour la partie concernant la QHE pour les hémisphères.
- Calculs des corrections des niveaux de Landau avec les termes gravitationnels : j'ai donc obtenu les quantifications.
- Ajout de certaines interprétations pour les résultats de quantification, surtout pour la partie concernant la gravité par les hémisphères.
- Vérifications finales et détaillées des calculs et des résultats.

Les contributions des autres co-auteurs

F. Hammad a démarré le projet, a effectué les préliminaires, fait certains calculs. Il a aussi fait beaucoup d'interprétation et des vérifications. Il y a eu un dialogue intensif, six ou sept courriels par semaine, sur le type de matériau à utiliser.

K. Mathieu a effectué des vérifications, certains calculs d'effet Hall quantique, et a obtenu les résultats pour les champs électriques induits.

Sixième article.

A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect

par

Fayçal Hammad¹, Alexandre Landry⁴ et Kaleb Mathieu⁵

- (¹) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (²) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7
- (³) Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, Que-
bec, Canada J1M 0C8
- (⁴) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (⁵) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7

Cet article a été soumis dans European Physical Journal Plus (Publié en 2020 [[102](#)]).

A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect

F. Hammad^{1,2,3a}, A. Landry^{3b}, and K. Mathieu^{1c}

¹ Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada

² Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 0C8 Canada

³ Département de Physique, Université de Montréal, 2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada

Received: date / Revised version: date

Abstract. We study the quantum Hall effect inside a gravitational field. First, we review the influence of the gravitational field of the Earth on the quantum Hall effect. Taking the gravitational field of the Earth to be uniform along the vertical direction, we compute the affected quantized Hall resistivity. Then, we investigate how the gravitational field modifies the Landau levels of a particle moving between two massive hemispheres in the presence of a constant and uniform magnetic field perpendicular to the plane of motion. We find that the familiar degeneracy of the Landau levels is removed and the spacing between the latter becomes dependent on the mass density of the hemispheres and on the gravitational constant G . We use this result to show that the quantum Hall effect in a thin conductor, sandwiched between two massive hemispheres, should yield a slightly different variation of the Hall resistivity with the applied magnetic field. We then argue that the well-known problem of the gravitationally induced electric field, that might a priori be thought to hinder the effect of gravity, has actually a beneficial role as it amplifies the latter. We finally discuss whether there is a possibility of using the quantum Hall effect to probe the inverse-square law of gravity.

PACS. 04.80.-y Experimental studies of gravity – 71.70.Di Landau levels – 73.43.-f Quantum Hall effect

1 Introduction

Two of the praised properties of the quantum Hall effect (QHE) [1, 2] are its independence of the shape of the conductor as well as its insensitivity to small bulk variations of an externally applied voltage and of the small variations due to internal impurities that are within a scale that is below the order of magnitude of the magnetic length [3, 4, 5]. The very manifestation of the effect rests, indeed, on topology and on the presence of disorder in the conductor [6, 4]. All that is required for the effect to arise is a relatively clean conductor, traversed by a direct longitudinal current and submerged — at low temperatures — inside a constant and uniform magnetic field that is perpendicular to the flow of the current. That is, the free electrons of the conductor are only subjected to two fields, the constant magnetic and electric fields. The quantized Landau levels, to which the free electrons adhere, together with the presence of a few impurities, are responsible for giving rise to the famous plateaus of the quantized Hall resistivity. In fact, the universality of the effect and the relative uncertainty in the reproducibility of those unique plateaus, up to one part in 10^{10} [7, 8], gave rise immediately after the discovery of the effect to the proposal to use it to measure the fine structure constant [1, 9]. In view of these remarkable features of the effect and the recent advances in metrology [8], it is tempting to think about other applications of the QHE in fundamental physics, such as to probe the fundamental gravitational interaction.

Recalling that the QHE relies on the presence of a constant electric field in the transverse direction, one cannot help but wonder why the effect would not be influenced by any other constant field acting on the free electrons in the same direction as the transverse electric field. In particular, by submerging the conductor inside a constant and uniform gravitational field, that would be parallel to the electric field, the two fields should simply add up to give a different quantized Hall resistivity than the one expected to appear in the presence of the electric field alone. One can even conceive of a situation in which the transverse electric field is canceled altogether to be replaced by the gravitational

^a *Present address:* fhammad@ubishops.ca

^b *Present address:* alexandre.landry.1@umontreal.ca

^c *Present address:* kmathieu17@ubishops.ca

field alone. The problem that accompanies such a scenario is, of course, the difficulty of measuring or detecting any variation in the current that would be purely due to the gravitational field alone and using such a current to determine the resistivity as usually done in the QHE. In either scenarios, therefore, the effect would obviously be very small owing to the weakness of the gravitational field. Nevertheless, the mere possibility of the influence of the gravitational field on the QHE makes the latter — at least in theory — a real potential tool for probing the gravitational interaction.

Unfortunately, the influence of the gravitational field on the QHE has attracted very little attention in the literature, with the exception of Ref. [10]. In the latter reference, an elegant study of the influence of the gravitational field on the QHE was presented. It was found there that there is no influence of the gravitational field when the latter is perpendicular to the 2-dimensional electron gas (2DEG) inside the conductor, and this up to the order of φ/c^2 , where φ is the gravitational potential and c is the speed of light. The influence of a gravitational field that would be parallel to the 2DEG current inside the conductor was found to be of the order of φ/c^2 . The latter specific ratio comes from the relativistic treatment of the interaction of the gravitational field with the electrons [11, 12]. Our goal in this paper is, first, to review the non-relativistic gravitational influence on the QHE by going back to the case of the uniform gravitational field of the Earth and computing the influence of the latter on the Hall resistivity. Then, we propose a new setup that would allow for a study of the influence of a *nonlinear* field of gravity on the electrons' motion in the QHE (see also Ref. [13]).

In fact, the uniform gravitational field to use cannot obviously be better than the one provided by the Earth. Indeed, to a very good approximation, the gravitational potential energy of a particle of mass m near the surface of the Earth can be taken to be linear and given by mgz at a given small vertical distance z above a reference point. In particular, it is such a potential that gave rise to the proposal to probe the influence of the gravitational field of the Earth on cold neutrons [14, 15, 16]. In the usual QHE, one might include inside the Schrödinger equation for the free electrons the effect of a constant transverse electric field E in the z -direction by adding the potential term eEz , where e is the elementary charge. It is then natural to think that the effect of the gravitational field of the Earth could also be taken into account in the QHE by replacing the transverse uniform electric field E by the effective uniform field $E + mg/e$. One is then also naturally tempted to think that this additional contribution could be used to probe the inverse-square law (ISL) via the QHE as the gravitational field of the Earth would be different from mg by correction terms depending on the exact form of the law of gravity.

This approach, as we shall see, does really introduce an extra correcting term in the Hall resistivity. However, the correction manifest itself as a very small shift in the Hall resistivity. In addition, in order not to overwhelm the gravitational field, as already pointed out in Ref. [10], the magnitude of the electric field involved should not *a priori* exceed much mg/e , which is of the order of 10^{-10} V/m for electrons and a few orders of magnitude larger for protons and ions. It is then important to seek also a manifestation of the effect of the gravitational field on the QHE at the level of the resistivity plateaus. For that purpose, one needs to gravitationally affect the quantized Landau levels themselves. In fact, it was recently shown that the Landau levels around a massive sphere and around a cylinder are indeed affected by the gravitational field of those massive objects [17, 18]. However, the way the levels were found to be modified there was only through the removal of their degeneracy in the orbital quantum number. We propose here a new setup that is capable of affecting gravitationally not only the degeneracy of the Landau levels, but even the spacing between the latter.

In fact, as was alluded to above, the QHE is insensitive to perturbations in the bulk that are of the order of the magnetic length $\ell_M^2 = \hbar/eB$, where \hbar is the reduced Planck constant and B is the strength of the magnetic field. In addition, the very manifestation of the QHE relies heavily on both the spacing between the Landau levels and the degeneracy of each one of them. In Refs. [17, 18], it was found that the gravitational field due to a (static and/or rotating) sphere as well as that due to a long cylinder both remove the degeneracy of the Landau levels by splitting the orbital energies of a charged particle going around such massive objects. As we shall see, using, instead, two massive hemispheres separated by a small distance gives rise to the motion of the free 2DEG inside a conductor sandwiched between the two hemispheres to a gravitationally induced harmonic oscillator. Consequently, a setup based on two weakly separated hemispheres not only removes the degeneracy of the Landau levels, but modifies also the spacing between the latter. Furthermore, we show that for a very small separation between the two hemispheres, the deviation of the gravitational potential from that of a pure harmonic oscillator varies, in fact, over distance scales much larger than the magnetic length ℓ_M . This implies that the QHE should be affected while remaining immune to such deviations.

Finally, it is well known that when a conductor is immersed inside a gravitational field, the latter is itself always accompanied by an opposite induced electric field acting on the free electrons of the conductor in the same direction as does the gravitational field [19, 20, 21]. The magnitude of the induced electric field is of the order $\sim 0.1 Mg/e$, where M is the mass of the ions in the conductor's lattice [19, 20, 21, 10]. Unlike in the experiments [22, 23] testing the equivalence principle through the free fall of charged particles, however, we show that the gravitationally induced electric field does not hinder the effect of gravity on the QHE. On the contrary, we show that such an induced electric field actually amplifies the gravitational influence on the QHE.

The rest of this paper is organized as follows. In Sec. 2, we examine the effect on the QHE of the linear gravitational field provided by the Earth and compute the explicit expression of the modified Hall resistivity. In Sec. 3, we examine the fate of Landau levels of particles moving in a horizontal plane between two close massive hemispheres in the presence of a uniform and constant magnetic field that is normal to the equatorial plane of the hemispheres. We then study how, in turn, this affects the QHE that would arise in a circular conductor — a Corbino-like disk — put in between the two hemispheres with the center of the latter coinciding with the center of the conductor. In Sec. 4, we discuss the effect of the gravitationally induced electric field in both cases, inside the gravitational field of the Earth and then in between the two hemispheres. For both cases we provide real and detailed quantitative predictions with a discussion on the technological limitations (centered around the cryogenics) that presently prohibit the manifestation of some those predictions. In Sec. 5, we discuss whether there is a possibility of using the QHE for testing the ISL. We conclude this paper with a short summary section.

2 The QHE inside Earth's gravitational field

The observed resistivity plateaus in the QHE are due to the combination of the quantized Landau levels of the free electrons of the conductor and the few defects of the conductor around which the electrons move. Suppose the conductor containing the 2DEG lies in the vertical yz -plane as shown in Figure 1-a).

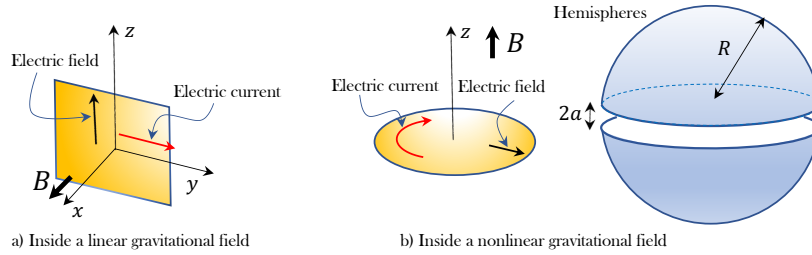


Fig. 1. a) A rectangular conductor inside the vertical gravitational field of the Earth. b) A circular conductor, on the left, to be inserted between the two massive hemispheres on the right.

The free electrons of mass m and at distance z from the bottom of the conductor acquire then the gravitational potential energy mgz . Suppose also that a constant transverse electric field E , acting between the two edges of the conductor, is chosen to be parallel to the z -direction and pointing upwards. We assume the constant and uniform magnetic field B is perpendicular to the conductor and parallel to the x -direction as in Figure 1-a). We adopt the Landau gauge in which the vector potential reads $\mathbf{A} = (0, -Bz, 0)$. As the 2DEG is freely moving parallel to the y -direction with momentum $\hbar k$, the wavefunctions will take the simple form $e^{iky}\psi_n(z - z_0)$. These are indeed the eigenfunctions of the electron Hamiltonian $H(z)$, which takes the form,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2m} [(p_y - eBz)^2 + p_z^2] + (eE + mg)z \\ &= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(z - z_0)^2 + (eE + mg)z_0 + \frac{(eE + mg)^2}{2m\omega_c^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

We have introduced in the second line the cyclotron frequency, defined by $\omega_c = eB/m$, as well as the shifted centers $z_0 = k\ell_M^2 - m(eE + mg)\ell_M^4/\hbar^2$ along the z -direction for each delocalized wavefunction of momentum $\hbar k$. In fact, we recognize in the second line of expression (1) the Hamiltonian of a simple harmonic oscillator displaced from the origin by the amount z_0 . The quantized energy eigenvalues of such a Hamiltonian are then given by,

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + (eE + mg)z_0 + \frac{(eE + mg)^2}{2m\omega_c^2}. \quad (2)$$

We thus see that the spacing $\hbar\omega_c$ between two consecutive Landau levels is not affected by the gravitational field. However, the shifted centers z_0 , conditioned by the gravitational field, do influence the current corresponding to a delocalized state $e^{iky}\psi_n(z - z_0)$ in the y -direction. In fact, the current I_y in the y -direction, given by $-e\langle v_y \rangle = e\langle \hbar k - eBz \rangle / m$ for a single moving electron, does acquire a contribution from the gravitational term mg because of

the fact the the plane waves are centered at z_0 ; that is, $\langle z \rangle = z_0$. More explicitly, the current density due to all the free electrons of the sample of surface area S evaluates to,

$$J_y = \frac{e}{mS} \sum_{n,k} \langle \psi_n | \hbar k - eBz | \psi_n \rangle = \frac{\nu N_0 e}{S} \left(\frac{eE + mg}{eB} \right) = \left(1 + \frac{mg}{eE} \right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (3)$$

Here, ν is the number of filled Landau levels and N_0 is the number of states in the conductor sharing the same Landau level. For a conducting sample of surface area S , this degeneracy is given in terms of the quantum of flux $\Phi_0 = h/e$ by the ratio $N_0 = SB/\Phi_0$ [6].

According to Eq. (3), then, the Hall resistivity, given by $\rho_{yz} = E/J_y$, exhibits the correction factor $(1 + mg/eE)^{-1}$ in front of the familiar quantized expression $h/\nu e^2$. This correction factor depends on the ratio mg/eE . As discussed in the Introduction, this ratio is indeed very small. The correction factor brought to the quantized Hall resistivity can thus be taken, to a good approximation, to be $(1 - mg/eE)$. For an electric field of the order of 1 V/m, we find by plugging the value of the mass m of the electron and using the gravitational acceleration at the surface of the Earth, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, that the ratio mg/eE becomes of the order of 10^{-10} . This estimate is based on the assumption that the sensitivity to the Hall voltage allowed by the equipment used in the setup is of the order of a few millivolts for a sample size of the order of a millimeter. Such voltage sensitivity is presently easily achievable. Moreover, we see from Eq. (3) that any higher sensitivity in measuring the Hall voltage would greatly increase the sensitivity to the gravitational effect on the Hall resistivity as well. Indeed, with a sensitivity on the Hall voltage down to the microvolt within very low temperatures, the transverse electric field E could be as low as 10^{-3} V/m . With such a low electric field, the correcting factor mg/eE accompanying the Hall resistivity would be increased to attain the order of 10^{-7} . Obviously, if it were not for technological challenges, one can always create strong artificial gravitational fields, thanks to the weak equivalence principle, by putting the setup inside a centrifugal machine¹. Gravitational accelerations as high as $10^9 g$ might then easily be achieved for which the correcting factor mg/eE in front of the quantum Hall resistivity would reach the order of 10^{-2} .

As we shall see in detail in Sec. 4, however, by taking into account the gravitationally induced electric field in the conductor, the small correction term due to Earth's gravity, obtained here by ignoring such an induced electric field, becomes actually much larger. Before we do that, however, we are first going to examine in the next section a new configuration of the gravitational field obtained with two very close massive hemispheres. Such a setup gives rise to a nonlinear gravitational field which allows the spacing between the Landau levels themselves, as well as their degeneracy, to be gravitationally affected.

3 The QHE between two massive hemispheres

The key feature in using two hemispheres is the appearance of a gravitationally induced simple harmonic oscillator that combines with the magnetically induced one to give rise to gravitationally modified Landau levels. The latter would, in turn, modify the shape of the plateaus of the quantized Hall resistivity. For this purpose, we first need to find the gravitational potential at any point in between the two hemispheres at a distance r away from the center of mass of the two hemispheres. The detailed calculations of the gravitational potential based on (i) the purely Newtonian potential, (ii) on the Newtonian potential plus a Yukawa-like correction and (iii) on a Newtonian potential plus a power-law correction are all given in Appendix A. Before we use those various expressions of the potential, however, we shall first briefly describe here the physical setup and then study the Schrödinger equation that governs the motion of a free electron inside the conductor (or any charged particle for that matter) when such a gravitational interaction is taken into account.

3.1 Landau levels between two massive hemispheres

The setup simply consists of a circular conductor (on the left in Figure 1-b)) to be sandwiched between the two massive grounded hemispheres (on the right in Figure 1-b)). The disk, along which the current flows, is subjected to a transverse radial constant electric field E . The magnetic field, being perpendicular to the plane of the conductor, its corresponding vector potential \mathbf{A} can be described in the cylindrical coordinates (r, ϕ, z) by adopting the symmetric gauge in which it reads, $\mathbf{A} = (0, \frac{1}{2}Br, 0)$.

Let $V_g(r)$ denote the gravitational potential felt by an electron of mass m moving in the equatorial plane sandwiched between the two hemispheres. The motion of the electron being planar around the center, we choose the ansatz $\psi(r, \phi) = e^{i\ell\phi} R(r)$ for the wavefunction of the particle; ℓ being a positive integer. The Hamiltonian in the cylindrical

¹ Many thanks to Valerio Faraoni for suggesting to use our local centrifuge.

coordinates reads $H(r, \phi) = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2/2m + mV_g(r)$. The Schrödinger equation for an electron of energy \mathcal{E} then takes the form,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{e^2 B^2 r^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2m^2 V_g(r)}{\hbar^2} \right) R = 0. \quad (4)$$

The solution to this equation without the gravitational potential $V_g(r)$ has been given in Refs. [17, 18] with all the steps outlined in great detail. The result is a function $R(r) \sim r^\ell e^{-\frac{eB}{4\hbar} r^2}$, with the proportionality factor being a hypergeometric function. More important, however, is the fact that the energy eigenvalues are those of a simple harmonic oscillator $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$, with the cyclotron frequency ω_c given again by $\omega_c = eB/m$ [24].

Now, all the gravitational potentials found in Appendix A have the mathematical form $\frac{1}{2}Kr^2$ (with K a constant with the dimensions of a squared angular frequency) which is that of the potential of a simple harmonic oscillator, to which adds weaker deviation terms, which we shall denote here by $C_g(r)$. This perturbing term $C_g(r)$ exhibits various higher-than-three powers of the ratios r/R and a/R between, respectively, the distance r of the electrons from the center and the radius R of the hemispheres and the separation distance $2a$ and R . The constant K depends on the gravitational constant G and on the mass density of the hemispheres, but its specific form varies depending on the law one adopts for the gravitational interaction. For an ISL, for a Yukawa-like deviation from the ISL and for a power-law deviation from the ISL, the constant K is given, respectively, by Eqs. (21), (27) and (28) below. As a consequence, Eq. (4) can then be written in the following more useful form:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{eB\ell}{\hbar} - \frac{(e^2 B^2 + 4m^2 K)r^2}{4\hbar^2} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2m^2 C_g(r)}{\hbar^2} \right] R = 0. \quad (5)$$

In order to solve this equation and extract the quantization condition on the energy \mathcal{E} , we proceed along the same steps used in Ref. [17] to solve the simpler equation (4) without the last term. Here, we are going to solve Eq. (5) without the last term which just brings in a very weak perturbation.

Let us choose the ansatz $R(r) = e^{-\frac{\beta}{4} r^2} r^\ell v(r)$, where $v(r)$ is a function of r only and $\beta = \sqrt{e^2 B^2 + 4m^2 K}/\hbar$. Inserting this expression of $R(r)$ into Eq. (5), and denoting by a prime a derivative with respect to the variable r , the equation becomes,

$$\begin{aligned} r v''(r) + (2\ell + 1 - \beta r^2) v'(r) + (\alpha - \beta) r v(r) &= 0. \\ \alpha &= \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} + \left(\frac{eB}{\hbar} - \beta \right) \ell. \end{aligned} \quad (6)$$

By performing the change of variable $z = \frac{1}{2}\beta r^2$, the differential equation in $v(r)$ takes the following canonical form [25],

$$z v''(z) + (\ell + 1 - z) v'(z) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \right) v(z) = 0. \quad (7)$$

This equation is a confluent hypergeometric differential equation [26]. Its general solution is a linear combination of two confluent hypergeometric functions ${}_1F_1(a; b; z)$, also known as Kummer's functions [25]. Keeping only from the linear combination the term that converges at the origin $r = 0$, we get the following expression for the radial function $R(r)$ [17]:

$$R(r) = A r^\ell e^{-\frac{\beta}{4} r^2} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta}; \ell + 1; \frac{\beta}{2} r^2 \right). \quad (8)$$

We have introduced here the constant of integration A that also plays the role of a normalization constant [17]. This expression, in turn, is diverging exponentially for large r because of the Kummer function. For this reason, one should impose the following condition on the first argument of the latter [25, 26]:

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} = -n. \quad (9)$$

Here, n is a non-negative integer for which the confluent hypergeometric function becomes then indeed a finite-degree polynomial in r^2 . By substituting into this condition the values of α and β we defined above, we arrive at the following quantization condition for the energy \mathcal{E} of the electron inside the conductor:

$$\mathcal{E}_{n\ell} = \hbar\varpi_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\ell}{2} (\varpi_c - \omega_c). \quad (10)$$

Here, we introduced the modified cyclotron frequency,

$$\varpi_c = \sqrt{\frac{e^2 B^2 + 4m^2 K}{m^2}} = \omega_c \sqrt{1 + \frac{4m^2 K}{e^2 B^2}}, \quad (11)$$

as opposed to the original cyclotron frequency $\omega_c = eB/m$. The first term in the result (10) represents the usual form of the quantized Landau energy levels. The second term, however, depends on the orbital quantum number ℓ . The consequence of having such an extra term is the removal of the usual familiar infinite degeneracy of Landau levels as the energy of the latter acquires a different value for each different orbital ℓ . For a small gravitational term $4m^2 K$ compared to the magnetic term $e^2 B^2$, the following first-order approximation of Eq. (10) is valid,

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar K \ell}{\omega_c}. \quad (12)$$

Now, this result is valid not only for an electron inside a conductor sandwiched between the two hemispheres, but also for *any* charged particle that would happen to be moving between the two hemispheres under the influence of the magnetic and gravitational fields. The effect of the correction term to the Landau levels and the effect of the last term that splits each level in Eq. (12) would therefore both become accentuated for more massive charged particles. In fact, heavy ions and molecules would multiply the correction term to the Landau levels by a factor of at least of the order of 10^8 for an atom of atomic number 6, like carbon, given that the proton mass is about 1836 times larger than the electron mass. Similarly, the Landau levels-splitting term is then multiplied by a factor of at least of the order of 10^4 . In fact, given that the cyclotron frequency of the carbon ion is $\omega_c \approx 8 \times 10^6$ rad/s, the unsplit lowest Landau level is at 2×10^{-7} eV under a magnetic field strength of 1 T. The sub-level $\ell \sim 10^{19}$ is then found at 10^{-7} eV because, as we shall see later on, the constant K is of the order of 6×10^{-6} rad²/s² for a massive sphere of platinum. Thus, by amplifying the splitting of the Landau levels by using molecules which are much heavier, one might be able to resolve between the different possible forms the parameter K can take for the different possible corrections to the Newtonian ISL for gravity one considers. Furthermore, in obtaining the result (12), we have not taken into account the contribution of the weaker perturbing terms gathered inside the term $C_g(r)$ in Eq. (5). Such terms would introduce additional, albeit tiny, splittings of the Landau levels.

With this general result at hand, we can now apply it to the electrons in a conductor to examine its consequences on the QHE.

3.2 Consequences on the QHE

As we saw below Eq. (3), a longitudinal current in the conductor is proportional to the available number N_0 of degenerate states at each Landau level as well as to the number ν of those levels that are filled by the conducting electrons. As for the degeneracy, we just saw that it is removed by the gravitational field between the two hemispheres. As a consequence, the electrons contributing to the total conductance will be spread, according to their energies, over all the sub-levels available at each allowed Landau level. It is actually easy to estimate the new number of the sub-levels N corresponding to each principle Landau level n when ℓ is very large. In fact, by setting $R(r) = r^{-1/2}\chi(r)$, Eq. (5) takes the following form:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\chi'' + \left[\left(\frac{e^2 B^2 + 4m^2 K}{8m} \right) r^2 + \frac{\hbar^2(\ell^2 - \frac{1}{4})}{2mr^2} - \frac{\hbar e B \ell}{2m} + mC_g(r) \right] \chi = \mathcal{E}\chi. \quad (13)$$

Apart from the perturbing term $mC_g(r)$, the unperturbed potential $V(r)$ inside the square brackets may be expanded in powers of r around the equilibrium position r_0 . The latter is found by solving $dV/dr = 0$. For very large orbitals, $\ell \gg 1$, we find,

$$r_0^2 \approx \frac{2\hbar\ell}{\sqrt{e^2 B^2 + 4m^2 K}} = \frac{2\hbar\ell}{m\varpi_c}. \quad (14)$$

Using this expression, the effective potential in Eq. (13) can be approximated by that of a perturbed simple harmonic oscillator, $V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\varpi_c^2(r - r_0)^2 + \frac{1}{2}\hbar\ell(\varpi_c - \omega_c) + mC_g(r)$. The wavefunctions become then concentrated around the approximate radial distance r_0 . For a circular conductor of surface area S , the number N of states comprised inside the radius r_0 can then be estimated to be,

$$N \approx \frac{S\sqrt{e^2 B^2 + 4m^2 K}}{h} \approx N_0 \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2}\right), \quad (15)$$

where, $N_0 = SB/\Phi_0$ is the number of states sharing the same Landau principle level n in the absence of the gravitational field.

We thus see that the number of sub-levels available around a given Landau level n is the same as the number of degenerate states emerging in the absence of the gravitational field. This number is in fact only corrected by the ratio $2K/\omega_c^2$. More important, however, is that this number of states is huge. Therefore, given that, in addition, each orbital ℓ provides a slightly different energy from another adjacent orbital $\ell + 1$, two adjacent principle Landau levels n and $n + 1$ do not remain sharply distinct as they are in the case when the gravitational field is absent. In fact, in the latter case, the separation between adjacent Landau levels is simply $\hbar\omega_c$. With the removal of the degeneracy by the gravitational field, however, the sharp Landau levels broaden as the available energies that arise right above a given Landau level exhibit a nearly continuous spectrum as can be seen from Eq. (12). However, due to the finite surface of the conductor, the number of available sub-levels between two consecutive Landau levels is not infinite, but given instead by Eq. (15). As a result, according to Eq. (12) we can estimate the maximum energy gap between two adjacent broadened Landau levels \mathcal{E}_{n+1} and \mathcal{E}_n (which is the difference between the lowest sub-level of \mathcal{E}_{n+1} and the highest sub-level of \mathcal{E}_n) to be,

$$\Delta\mathcal{E} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2K}{\omega_c^2}\right) - \frac{\hbar KN}{\omega_c} \approx \hbar\omega_c \left(1 - \frac{m^2 KS}{\hbar e B}\right). \quad (16)$$

The consequence of this shrinking of the distance between the broadened Landau levels could only show up in the length of the plateaus of the quantum Hall resistivity without affecting the vertical distance between the plateaus. Indeed, in analogy to what we did for the gravitational field of the Earth in Sec. 2, we can also derive an approximate expression for the azimuthal current density J_C in the circular conductor. Since equation (13) can be approximated by that of a perturbed simple harmonic oscillator in the radial direction for large ℓ , we have the following approximation for the Hamiltonian in the presence of a constant radial electric field E :

$$H(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}m\varpi_c^2(r - r_*)^2 + \frac{\hbar\ell}{2}(\varpi_c - \omega_c) + eEr_0 - \frac{e^2 E^2}{2m\varpi_c^2} + mC_g(r). \quad (17)$$

Here, p_r stands for $-i\hbar\partial_r$. Also, we have introduced here the shifted center $r_* = r_0 - eE/m\varpi_c^2$ along the radial direction for each delocalized wavefunction of linear momentum $\hbar k$ and angular momentum $\hbar\ell = \hbar k r$. Thus, we find, up to the first order in K/ω_c^2 , the following approximate estimate for the current density along the circular conductor,

$$J_C = \frac{e}{mS} \sum_{n,k} \langle \psi_n | \hbar k - \frac{1}{2}eBr | \psi_n \rangle \approx \frac{\nu N e^2 E}{mS} \frac{\omega_c}{\varpi_c^2} \approx \left(1 - \frac{2K}{\omega_c^2}\right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (18)$$

In the third step, we have used the expression (15) of the estimated number of sub-levels N and discarded second- and higher-orders in K/ω_c^2 and $eE/m\omega_c^2$. The integer ν is the number of filled Landau levels. Thus, the variation of the quantized Hall resistivity with the strength of the magnetic field should display again the characteristic jumps marked by an integer ν as observed in the absence of the gravitational field. In addition, the magnitude of each jump is again given by the familiar constant h/e^2 , as in the absence of the gravitational field, up to the negligible correction $2K/\omega_c^2$. This negligible correction to the von Klitzing constant as compared to the correction brought by the gravitational field of the Earth can be understood by the fact that the transverse gravitational field created by the hemispheres is at least 20 orders of magnitude smaller than that of the Earth.

The remarkable difference as compared to the effect of the Earth, however, is that each sharp and distinct degenerate Landau level is now split into sub-levels, and is thus broadened according to Eq. (12), and — to a lesser extent as we saw — the distance between adjacent groups of split Landau levels shrinks according to Eq. (16). Consequently, as the magnetic field is gradually increased, the 2DEG is provided with a huge number of sub-levels $N_0 \sim 10^{12}$ per unit area of the sample that can be occupied before the group of such sub-levels becomes inaccessible again and lies above the Fermi level. It is as if the role used to be played by the impurities inside the conductor, which are responsible for creating the mobility gap and giving rise to the horizontal plateaus in the quantum Hall effect, is now also played by the Landau orbitals that provide sub-levels for the 2DEG to occupy. In contrast to the mobility gap created by the localized states made available by the impurities, however, the sub-levels made available by splitting the Landau levels provide extended (delocalized) states for the 2DEG. As such, the filling of these sub-levels is accomplished by the electrons participating in the conduction. As a result, if we increase the electron density in the system or reduce the magnetic field, so that the Fermi level lies within the region of the extended states, we do gain current-carrying states. Therefore, the conductivity should increase at that point. This then should show up in the deformation of the transition from one plateau to another resulting in a more gentle jump than the one observed in the absence of the gravitational field (see Fig. 2 b)). In fact, as in the absence of the gravitational field, the localized states provided by the impurities will still make the split Landau levels broader, resulting in the usual observed plateaus. We shall analyse this point in more detail below.

Note also that in our present discussion, the perturbing terms gathered inside the term $mC_g(r)$ in Eq. (17) are merely treated as bulk variations of the effective potential felt by the 2DEG. That perturbing potential, as we shall see below, brings, in fact, deviations from the pure simple harmonic oscillator that are of the order of r^4/R^2 and higher, where r is the distance of the electron from the center and R is the radius of the two hemispheres. Therefore, keeping in mind that the QHE effect is insensitive to the bulk perturbations that vary over distances much larger than the magnetic length ℓ_M [3,4], we conclude that we may safely take these perturbing terms to be a mere bulk perturbation.

Now, formula (16) predicts only a shrinking of the distance between adjacent groups of split Landau levels that is of the order of 10^{-14} for a one-Tesla magnetic field per unit area of the sample. However, as we shall see in the next section, this correction becomes amplified by a factor of nearly five orders of magnitude. In addition, we shall see that the splitting of the Landau levels will become much more accentuated due to this amplification that the resistivity plateaus will become much more affected than what one gets without taking into account such an induced electric field.

4 The effect of the induced electric field

As mentioned in the Introduction, the gravitational field induces an electric field in the conductor which, in turn, affects the free electrons of the latter. A detailed study of such an effect is conducted in Refs. [19,20,21]. The simplest way to understand the origin of such an induced electric field is to notice that the atoms making the lattice of the conductor get compressed by the gravitational field due to their own weight. In order to preserve charge neutrality, an electric field in the opposite direction to the gravitational field is then induced by the shifted ions, attracting thus the electrons. In this section, we are first going to review the simple model that allows one to find the induced electric field in the presence of the gravitational field of the Earth. We then examine the effect of this electric field on the quantum Hall resistivity. Next, we adapt the same model to find the induced electric field inside the conductor caused by the nonlinear gravitational field we found between the two hemispheres. We then take into account such an induced field to study the behaviour of the new quantum Hall resistivity.

A simple model to arrive at the induced electric field E^I for the case of the constant gravitational field of the Earth in the z -direction is given in Ref. [21]. The model is based on the balance between, on the one hand, the gravitational and electric forces, $n_0(eE^I + mg)$, acting on the electron gas of equilibrium density n_0 and, on the other hand, the gradient of the pressure of the electron gas, $\partial_z p_e$. Then, for an electron gas of density n the average energy is $\varepsilon \propto n^{2/3}$ and, assuming that the electrons' pressure is $p_e = \frac{2}{3}n\varepsilon \propto \frac{2}{3}n^{5/3}$, the balance equation reads, $\frac{10}{9}\varepsilon \partial_z n = -n_0(eE^I + mg)$ [21]. Next, the atoms of the lattice, of mass M , display an atomic density that obeys the following equilibrium equation under the influence of the gravitational field: $C\partial_z n/n_0 = -n_0 Mg$, where the constant C depends on the elastic properties of the conductor [21]. Finally, as the electrons density is conditioned by the atomic density (to preserve charge neutrality), we deduce, by comparing the two previous balance equations, that $E^I = g(\gamma M - m)/e$, where the constant γ is given by $\frac{10}{9}\varepsilon n_0/C$ [21]. It is found that for the case of copper the constant γ is of the order of $1/7$, so that the contribution of the electron mass m to the induced electric field is negligible. Therefore, the induced electric field reduces to $E^I \approx \frac{1}{7}Mg/e$ [21].

4.1 Earth's effect

Going back now to the result (3), and adding the contribution eE^I of this induced electric field to the 2DEG, side by side with the effect of the gravitational field, we arrive at the following modification in the quantum Hall resistivity:

$$J_y = \left(1 + \frac{Mg}{7eE} + \frac{mg}{eE}\right) \frac{\nu e^2}{h} E \approx \left(1 + \frac{Mg}{7eE}\right) \frac{\nu e^2}{h} E. \quad (19)$$

In the second step, we have kept the leading term proportional to the atomic mass of the lattice. Thus, we see that the effect of the gravitational field has been amplified thanks to the compression of the ions of the lattice. As the mass of the ions of the conductor (here, copper) is nearly five orders of magnitude larger than that of the electrons, we have a huge amplification factor indeed. This allows one to go from a gravitational correction of the order of 10^{-10} coming from the ratio mg/eE , when one does not take into account the induced electric field, to a correction that is four orders of magnitude higher when including the induced field.

In order to better appreciate this effect, let us compute the precise correction the gravitational field of the Earth brings to the quantum Hall resistivity by injecting actual values into formula (19). First, using the charge of the electron e and Planck's constant h , we easily compute the ratio e^2/h to be $3.8740458655 \times 10^{-5}$ S, the inverse of which is the famous von Klitzing constant, a measurable resistance quantum of $R_K \equiv 25812.80745\dots \Omega$ [27]. Each of the plateaus in the plot showing the variation of resistivity in the QHE as a function of the magnetic field in the absence of gravity (see the plot on the left in Fig. 2 below) represents thus an integer multiple of the ratio h/e^2 . Taking into account

the effect of Earth's gravitational field, formula (19) predicts that each of these plateaus should be shifted down by a constant factor. For a conducting sample made of copper we have the atomic mass $M = 1.0552061 \times 10^{-25}$ kg. Then, taking the gravitational acceleration at the surface of the Earth to be $g = 9.81$ m/s² and having a transverse electric field $E = 1$ V/m, the multiplicative factor in Eq. (19) evaluates to $1 + 9.23 \times 10^{-7}$. Thereby, the plot for the quantum Hall resistivity should display transverse conductivity plateaus separated by the distance $3.8740494412 \times 10^{-5}$ S. This, in turn would translate into an apparent von Klitzing "constant" $\bar{R}_K = 25812.78363\dots\Omega$.

Now, one might argue that since this effect is just an overall upward shift of the Hall conductivity (or, equivalently, a downward shift of the von Klitzing constant), no such difference could ever be detected. However, it is very important to keep in mind that while the correcting factor displayed by formula (19) is explicitly independent of the magnetic field B , it does actually depend on the transverse electric field E as it is inversely proportional to the latter. It is for this reason that we put the word "constant" between quotation marks when referring to the apparent value \bar{R}_K . In other words, the correction to the quantum Hall resistivity becomes larger for smaller transverse electric fields E and smaller for larger fields. This very interesting and remarkable fact is simply absent in the absence of a transverse gravitational field. By carefully measuring the Hall voltage to a high accuracy, one is then certainly able to detect such a dependence. Thereby, by managing to lower the Hall voltage to the order of a microvolt in a millimeter-size sample, the transverse electric field could decrease to 10^{-3} V/m (and to 10^{-4} V/m in a centimeter-size sample). With such a small value of the transverse electric field, the correcting factor in formula (19) increases to $1 + 9.23 \times 10^{-4}$. The quantized QHE conductivity then increases to $3.8776216098 \times 10^{-5}$ S. This yields a relatively dramatic decrease in the apparent von Klitzing constant to $\bar{R}_K = 25789.00420\dots\Omega$.

It is worth emphasizing here the importance of having the electric field act transversely on the used sample in the QHE experiment. In fact, the remarkable quantitative effect we arrived at above using formula (19) was possible only because the gravitational field acts parallel to the transverse electric field, and hence the effects of the former add up to the effects of the latter. This key point is related to one of the two intuitively unexpected outcomes of the effect of gravity on the QHE. The first unexpected outcome is related to the fact that the QHE is naturally insensitive to the latitude at which the experiment is conducted on Earth. In this case, while the gravitational potential does indeed vary with the height, it nevertheless remains uniform in the transverse direction. In contrast, in our case the sample is set vertically so that the gravitational potential due to Earth varies linearly in the transverse direction exactly as does the Hall voltage. The second unexpected outcome, to which we turn to in the next subsection, is also related to this point in that it still involves a transverse gravitational field. The only difference, is that the latter is, in addition, nonlinear.

4.2 The Hemispheres' effect

Let us now adapt the same model for the case of the nonlinear gravitational field between the two massive hemispheres. Again, the compression of the atoms of the conductor by the gravitational field will be responsible for inducing an electric field in the opposite direction. As the gravitational potential $V_g(r)$ now varies with the radial distance r from the center of mass of the two hemispheres, the induced electric field E^I should be radial as well and should also vary accordingly with the distance r . Therefore, the balance equation between the gravitational and electric forces acting on the electron gas and the gradient of the pressure of the latter now reads in the cylindrical coordinates, $\frac{10}{9}\varepsilon\partial_r n = -n_0 [eE^I(r) + m\partial_r V_g(r)]$. Similarly, under the influence of the gravitational field the atomic density obeys the equilibrium equation, $C\partial_r n/n_0 = -n_0 M\partial_r V_g(r)$. As a consequence, by following the same steps as we did for the Earth's gravitational field, the radially induced electric field $E^I(r)$ should be given by $E^I(r) \approx \frac{1}{7}M\partial_r V_g(r)/e$. As we saw above, the gravitational potential between the two hemispheres has the form $\frac{1}{2}Kr^2 + C_g(r)$. This means that the induced electric potential $V_e^I(r)$ inside the conductor is given by $V_e^I(r) \approx \frac{1}{7}M [\frac{1}{2}Kr^2 + C_g(r)]/e$. As such, the cyclotron frequency ϖ_c obtained in the presence of gravity for the modified Landau levels (3.1) becomes modified into the following induced cyclotron frequency:

$$\varpi_c^I = \sqrt{\frac{e^2 B^2}{m^2} + \frac{4M}{7m}K + 4K} \approx \omega_c \left(1 + \frac{2MK}{7m\omega_c^2}\right). \quad (20)$$

In the second step, we have again taken into account the fact that $M/m \gg 1$ and discarded the last term inside the square root. The effect of gravity on the cyclotron frequency becomes thus much amplified compared to what we find when not taking into account the induced electric field.

The Newtonian gravitational potential between the hemispheres, found in Eq. (32) of Appendix A, displays a constant K given by,

$$K = \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right). \quad (21)$$

For two one meter-radius hemispheres made of platinum, this constant K is of the order of 10^{-6} rad²/s². The correction to the cyclotron frequency $\omega_c \sim 10^{11}$ rad/s, obtained under a constant magnetic field $B = 1$ T, will therefore be of the

order of 10^{-24} . This correction is obviously negligible. However, what is important, as we saw in Sec. 3 and as we shall see shortly, is not the correction to the cyclotron frequency as given by Eq. (20) but rather the modification brought to the degeneracy of the Landau levels. Before, we examine the fate of such a degeneracy, let us first look at the fate of the distance between the split Landau levels.

We saw in Eq. (16) that the distance between two adjacent Landau levels is affected by the gravitational field between the two hemispheres. Taking into account the induced electric potential $V_c^I(r)$, the distance $\Delta\mathcal{E}$ we found in Eq. (16) becomes,

$$\Delta\mathcal{E} \approx \hbar\omega_c \left(1 - \frac{mMK S}{7heB} \right). \quad (22)$$

For the same size platinum hemispheres used above, and for the same magnitude of 1 T for the magnetic field B , the order of magnitude of the correcting factor inside the parentheses is $\sim 10^{-9}$ per unit area of the sample. This is a larger correction compared to what we get when not taking into account the induced electric field, but it is still way smaller than the correction we found for the current density in the Earth's gravitational field. Furthermore, such a shrinking in the distance between the split Landau levels decreases for larger strengths of the magnetic field. Yet, this shrinking should certainly affect the length of the horizontal plateaus of the quantum Hall resistivity. We shall examine this point in more detail using actual values shortly below.

Going back now to expression (12), and inserting the induced electric field, we find the following modified formula for the splitting of the energy levels,

$$\mathcal{E}_{n\ell} \approx \hbar\omega_c \left(1 + \frac{2mMK}{7e^2B^2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar MK \ell}{7eB}. \quad (23)$$

In order to be able to detect any eventual influence of the magnetic field on the shape of the Hall resistivity plateaus, we have expressed in this formula the correcting term as well as the levels-splitting term as functions of the magnetic field B instead of the cyclotron frequency ω_c as done in Eq. (12). First, expression (23) clearly implies that the initially broadened Landau levels, due to the sub-states made available by the defects of the sample, become even more broadened due to the amplification of the levels-splitting by the induced electric field — compare the distribution of the density of states shown in parts a) and b) of Figure 2 below. Second, as the ratio $\frac{\hbar MK \ell}{7eB}$ is inversely proportional to the strength of the magnetic field B , Eq. (23) entails that the spectrum of sub-states made of individual orbitals ℓ becomes closer to a continuous spectrum for stronger magnetic fields. As such, we expect that the effect of gravity on the horizontal plateaus and the steps would be much cleaner for weaker magnetic fields. See Figure 2.

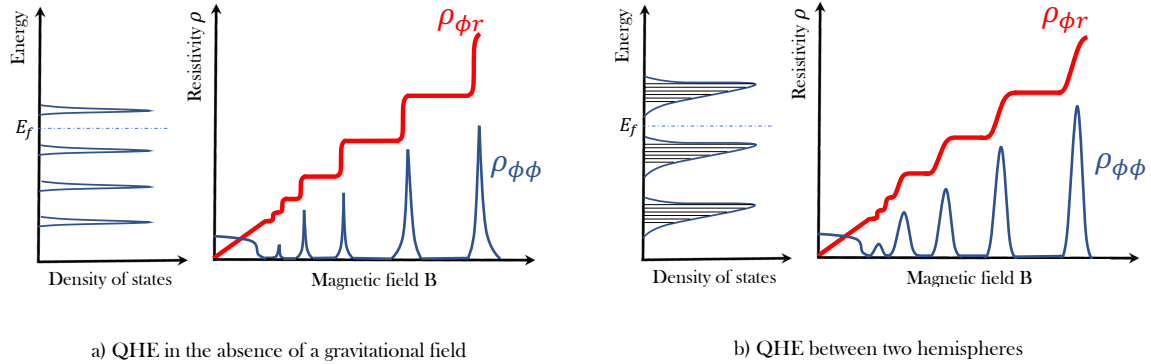


Fig. 2. a) The electron's density of state around the Fermi energy E_f and the Hall resistivity $\rho_{\phi r}$ and the azimuthal resistivity $\rho_{\phi\phi}$ inside a circular conductor in the absence of a gravitational field. b) The electron's density of states around the Fermi energy E_f (the horizontal lines represent the split Landau levels) and the Hall resistivity $\rho_{\phi r}$ and the azimuthal resistivity $\rho_{\phi\phi}$ in a circular conductor between two massive hemispheres. The features of both cases are exaggerated in order to see the qualitative difference between the two.

Let us now perform a more precise quantitative evaluation of the effect of the massive hemispheres on the QHE by injecting actual values in our formulas (22) and (23). First, let us assume that the massive hemispheres have each a radius $R = 1$ m and that both are made of pure platinum of mass density $\rho = 21447$ kg/m³, separated by a distance $2a = 2 \times 10^{-3}$ m. Then, the squared angular frequency of the gravitationally induced harmonic oscillator as given by Eq. (21) evaluates to $K \approx 6 \times 10^{-6}$ rad²/s². Next, for a conducting sample made of copper we have the atomic mass $M \approx 1 \times 10^{-25}$ kg. This then yields the value 8×10^{-14} for the correction factor inside the parentheses in Eq. (22) under a magnetic field strength of 1 T and for a sample of surface area $S = 1$ cm². Recalling now that $\omega_c = eB/m$, formula (22) entails that the length of the Hall plateau parallel to the B -axis of the graph should shrink at the magnetic field

strength of 1 T by an amount of the order $\delta B \sim 10^{-13}$ T. Although this is a very small value, it is well-known that the use of a superconductor quantum interference device (SQUID) at very low temperatures does presently allow to reach very high precision measurements of the magnetic field strength variation of the order of 10^{-15} T (see e.g. Ref. [28]).

This is not the end of the story, however. In fact, it is already clear from formula (23) that both the location of the Landau levels and the degeneracy of the latter depend on the applied magnetic field. The first parentheses of the first term in Eq. (23) represent the correction to each Landau level. It is clear, though, that such a correction is too small to make any noticeable difference in our present discussion. A rough estimate shows indeed that the correcting term inside the parentheses is of the order of 10^{-24} . With the second term, however, the phenomenology becomes more interesting. That term represents the splitting of each Landau level. It is the term responsible for the gravitational broadening of the Landau levels. The width of such a gravitationally induced broadening is found by identifying the largest orbital number ℓ with the number $N \approx N_0 = SB/\Phi_0$. We then find the following width,

$$\Delta_g \approx \frac{MKS}{14\pi}. \quad (24)$$

With the above values of M and K , we find a gravitationally-induced broadening of the Landau levels of the order of $\Delta_g \sim 10^{-17}$ eV for a sample size of 1 cm^2 . Now, while this is still too small to make any difference compared to the thermal broadening $\Delta_{\text{th}} \sim k_B T \approx 10^{-5}$ eV under a temperature of 1 K, it does make a difference in the quantum Hall plateau-plateau transitions. To see this, we need a brief digression to recall the well-known and actively investigated scaling behaviour of the quantum Hall plateau-plateau transitions.

In a defect-free sample at a temperature $T = 0$, each Landau level gives rise to extremely sharp density of states filled at the Fermi energy by extended electronic states whose wavefunction is delocalized throughout the sample. The presence of defects and finite temperatures changes this picture in the following way. First, the presence of defects in the sample dramatically broadens a density of states around the Landau levels. This impurity-broadening effect is carried out by the localized electronic states. As such, the longitudinal resistivity remains unchanged as the extended states are unaffected, whence the large horizontal plateaus. Therefore, if it were only for this impurity-induced broadening of the density of states, a sharp discontinuity from one plateau to another would be witnessed. Instead, what is experimentally observed is a smooth transition. Such a smoothness is due to the thermal broadening of the density of states. In fact, as thermal fluctuations around each sharp Landau level affect the extended electronic states near the Fermi energy, the transverse and longitudinal resistivities are accordingly affected as a dissipation (or a metallic regime, i.e. a phase transition) then emerges [29]. It was found experimentally that as $T \rightarrow 0$, the transition phase in InGaAs-InP is characterized by the scaling behaviour $\partial\rho_{xy}/\partial B \propto T^{-\mu}$. The exponent μ is found to be $\mu \sim 0.4$ [30] (see also Refs. [31, 32, 33] and the review paper [34]). The divergence in this power-law scaling at low temperatures translates into a plateau-plateau transition characterized by a slope (see Fig. 3) that is becoming steeper with decreasing temperatures, whence the sharpness of the transitions at very low temperatures. Similarly, it is found that the magnetic width ΔB of the ρ_{xx} -peaks is exponentially decreasing at very low temperatures according to the scaling law $\Delta B \propto T^\mu$ [30].

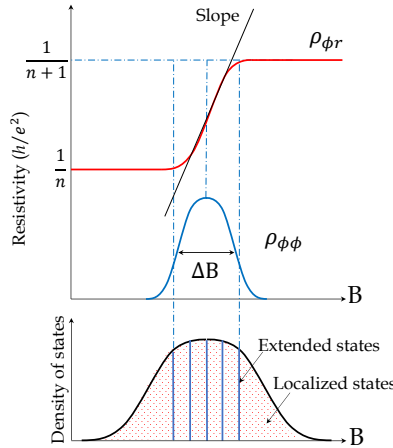


Fig. 3. a) The top graph shows the variation of the transverse resistivity $\rho_{\phi r}$ and the longitudinal resistivity $\rho_{\phi\phi}$ as functions of the applied magnetic field B . The slope of the transition between plateaus scales with temperature like $T^{-\mu}$, with constant μ , for $T \rightarrow 0$. In the presence of the nonlinear gravitational field between the massive hemispheres, the slope becomes inversely proportional to B^2 . Similarly, the width ΔB of the $\rho_{\phi\phi}$ -plot that scales like T^μ for $T \rightarrow 0$ becomes inversely proportional to B inside the massive hemispheres. The broadening of the Landau levels, shown by the bottom graph, is due to (i) the gravitationally-induced splitting (vertical lines housing the extended states) and (ii) local defects housing the localized states.

In the presence of the non-linear gravitational field between the hemispheres, however, the relative gravitationally induced broadening of a Landau level is given by $\Delta_g/\hbar\omega_c = m\Delta_g/\hbar eB$. This ratio dictates how much the resistivity departs from a sudden jump. Therefore, using Eq. (24) we deduce that by taking into account the gravitationally induced plateau-plateau transitions the slope of the QHE graph in those regions should not display any singular behavior at very low temperatures $T \rightarrow 0$ because gravity then takes over and the slope adopts the following form,

$$\frac{\partial\rho_{xy}}{\partial B} \propto -\frac{mMKS}{7\hbar eB^2}. \quad (25)$$

Similarly, according to Eq. (23) the magnetic field width ΔB of the longitudinal resistivity peaks will not decay exponentially anymore as $T \rightarrow 0$ since it then takes, independently of the magnetic field, the following universal form,

$$\Delta B \approx \frac{mMKS}{7\hbar e}. \quad (26)$$

With a magnetic field strength of 1 T and the values we adopted above for M , K and S , the slope is shifted from the vertical direction by the amount $\sim 10^{-13} \times \tilde{R}_K/\text{T} \sim 2.6 \times 10^{-9} \Omega/\text{T}$ and the magnetic width of the $\rho_{\phi\phi}$ -peak is of the order $\Delta B \sim 10^{-13} \text{T}$; the same order of magnitude by which the quantum Hall plateau shrinks as we saw above. It is clear, of course, that these minute corrections become meaningful only at very low temperatures that are presently far from being accessible. In fact, the gravitational broadening Δ_g becomes of the same order as the thermal broadening Δ_{th} for temperatures of the order of a pico-kelvin. It is worth noting, however, that as temperature is decreased the transport time τ of the electrons increases and the condition $\omega_c\tau > 1$ becomes satisfied for lower magnetic fields [35], and hence a larger effect on the slope results according to formula (25) even before reaching such low temperatures.

Finally, we would like to comment now on the various approximations we made in deriving our results. Given that all our approximations have been made based on the fact that the term $mC_g(r)$ in Eqs. (13) and (17) — which consists of terms of order $\mathcal{O}(r^4/R^4, r^2a^2/R^4)$ and higher (see Appendix A) — has been treated as a perturbation, one might wonder whether adding the amplification term $\frac{1}{7}M/m$ to the latter would prevent it from being a mere perturbation. The answer depends on the ratios r/R and a/R between, respectively, the radial distance r of the 2DEG from the center and the radius R of the two hemispheres, and the separation distance $2a$ and R . As the ratio M/m is of the order of 10^6 for copper, we need the ratios r/R and a/R to be at most of the order of 10^{-4} . That is, for two one-meter radius hemispheres, the radius r and the separation distance $2a$ between the two hemispheres should not be larger than a few fractions of a millimeter. In addition, for such scales the variation of the perturbation $mC_g(r)$ is still guaranteed to be larger than the magnetic length ℓ_M . In fact, in this case, we also have $C_g^{-1}(r)\partial_r C_g(r)$ of the order of a fraction of a millimeter which is much larger than the magnetic length $\ell_M \sim 250 \text{ \AA}$ under a one-Tesla magnetic field. Moreover, we have $mC_g(r) \ll \hbar\omega_c$, as well as $m\partial_r^2 C_g(r) \ll m\omega_c^2$ which testifies about the very slow variation of the bulk perturbation.

Whenever the radius r from the center exceeds a few fractions of a millimeter, the term $mC_g(r)$ cannot be considered as a mere perturbation anymore. Then, the “protective” feature that the QHE is not affected by weak bulk perturbations cannot be relied on anymore. In such a case, the Landau energy levels would still lose their degeneracy, but the levels would then become split in a such a way that they cannot be investigated analytically as done here.

5 The possibility of testing the ISL

As we saw in Sec. 3, the Hall resistivity depends on the gravitational acceleration g for the case of a QHE under the influenced of Earth’s gravitational field. Also, as we just saw in the previous section, the broadening of the Landau levels and, hence, the reshaping of the resistivity plateaus depend on the parameter K coming from the gravitational field between the two hemispheres. As such, we might expect that the extent to which the Hall resistivity is affected and the extent to which the Hall plateaus are reshaped would depend, respectively, on the exact form of the gravitational interaction encoded inside g and inside the factor K . For the case of the Earth’s gravitational field, even though we saw that the correction brought to the quantized Hall resistivity is measurable, it is clear that any different method for measuring g would be more efficient for investigating a possible departure from the ISL of gravity. Let us then examine also the possibility, at least in theory, for such a departure to affect the shape of the dependence of the Hall resistivity with the strength of the magnetic field.

For the case of a Yukawa-like correction to the ISL, we have, according to Eq. (36) of Appendix A,

$$K \approx \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} + \frac{\alpha R}{\lambda} e^{-R/\lambda} \right). \quad (27)$$

Although the presence of the exponential factor $e^{-R/\lambda}$ in the last term makes the latter exponentially suppressed, the smallness of the ratio a/R suggests that for some special values of the parameters α and λ , the second and the last

terms inside the parentheses might become comparable. Unfortunately, for this to happen, with a separation distance $2a$ between the two hemispheres of the order of a fraction of a millimeter, one needs to have the term $\frac{\alpha}{\lambda} R e^{-\frac{R}{\lambda}}$ of the order of 10^{-4} . Only for a separation distance between the hemispheres of the order of a fraction of a micrometer, would the term $\frac{\alpha}{\lambda} R e^{-\frac{R}{\lambda}}$ be allowed to be as low as 10^{-6} . But, then, such a correction would already become too small to make any detectable difference.

For a power-law deviation from the ISL, we have, according to Eq. (39),

$$K \approx \frac{4\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right) \left(1 + \frac{2r_0}{R}\right). \quad (28)$$

In contrast to the Yukawa-like correction, the absence of the exponential factor here implies that the allowed range of the distance scale r_0 of the deviation to be probed is directly determined by the separation distance between the hemispheres. In fact, a separation distance between the two hemispheres of the order of a micrometer allows one to investigate departures from the ISL down to distance scales of the micrometer too. With such a deviation, and given the order of magnitude of the uncorrected K — which is $\sim 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{s}^2$ — formula (28) indicates that we need to detect in the QHE the effect of gravity up to the order of $10^{-12} \text{ rad}^2/\text{s}^2$. Now this might seem to be a minute quantity to be detected experimentally, but what the QHE would actually allow to detect is not those individual tiny differences in energies, but the accumulated effect of such available minute energies as the 2DEG gradually occupies those available sub-levels when the magnetic field is gradually decreased. Unfortunately, formula (23) indicates that such a correction to the term K would affect evenly all the individual orbitals ℓ at once. In such a case, the only effect on the 2DEG would be to modify the distance between the available sub-levels without modifying the total available number of these sub-levels. Therefore, the difference between the effect on the QHE of an ISL of gravity and that which deviates from the latter would not be possible to detect in the lab.

6 summary

We have examined in this paper the effect of gravity on the QHE. We first examined such an effect when due to the uniform gravitational field of the Earth and derived the correction to the quantized Hall resistivity brought by the field. Plugging in actual experimental values for the various parameters of the setup, we saw that the resulting apparent von Klitzing constant \bar{R}_K is affected by the gravitational acceleration g in a measurable way. On the other hand, we saw that the gravitational field of the Earth has no effect, neither on the shape of the quantum Hall plateaus nor on the plateau-plateau transitions of the transverse resistivity. We then turned our attention to a different source for the gravitational field. Such a source consists of two very massive hemispheres of the same radius and composition, put very close to each other. We saw that such a configuration does create a nonlinear field of gravity between the two hemispheres that is quadratic in its leading terms. As such, we saw that although the field thus created is weak compared to that of the Earth, the fact that it allows to induce a simple harmonic motion in the 2DEG inside a circular conductor sandwiched between the two hemispheres affects instead the Landau levels of a 2DEG (or any used ion or charged molecule) and their degeneracy. The gap between two adjacent Landau levels shrinks and the energy of each level is split into sub-levels spread over the orbitals. The consequence of this for the QHE is to provide, at each Landau level, sub-levels for the 2DEG to occupy as the magnetic field is decreased. This would then play the same role played by the defects in the sample. That is, as the magnetic field is increased, the gap between adjacent Landau levels increases but the 2DEG is still allowed to occupy the remaining accessible sub-levels within a given principle level n . As such, we expect to see a more gentle transition of the Hall resistivity from one plateau to another than the one observed in the absence of the gravitational field, for the sub-levels that arise are all extended (current-carrying) states. Such an effect involves the highly and very actively investigated plateau-plateau transitions of the quantum Hall resistivity. We saw that the technological challenges associated with cryogenics is the only obstacle in actually observing the described effect induced by gravity as it requires extremely low temperatures.

We investigated in detail the issue of the gravitationally induced electric field in the sample. We saw that, in contrast to what an induced electric field does in experiments that aim at testing the equivalence principle, in the case of the QHE such an induced electric field has a beneficial effect. In fact, we saw that all the effects of gravity, whether due to the uniform Earth's gravitational field or the nonlinear field created between the two hemispheres, become amplified. We found, as a result, that the correction to the quantized Hall resistivity increases by a few orders of magnitude. Similarly, we saw that the separation distance between adjacent Landau levels and their splitting become also amplified by the same amount.

Finally, we have examined the possibility for the QHE to play an eventual role in the modern investigations of gravity based on mesoscopic systems [36] or those based on the use of ultracold neutrons [37, 38, 39, 40]. We came to the conclusion that, even though gravity does influence the Hall resistivity, the Landau levels and their degeneracy, and hence also the QHE, the latter cannot really allow to differentiate between an ISL of gravity and another law

that deviates from the latter. We have examined in the process both a Yukawa-like deviation from the ISL law and a power-law deviation. Both implied that no distinction could easily be made, either from measuring the minute deviation in the quantized Hall resistivity or from the plot of the variation of the quantum Hall resistivity with the magnetic field strength. Yet, the influence of gravity on the quantum Hall effect has been demonstrated and could thus be used as a means for high precision measurements of the gravitational acceleration g and (once much lower temperatures become easily accessible in the laboratory) of the gravitational constant G .

We have focused in this paper solely on the integer quantum Hall effect as it is easier to implement in it the effect of the gravitational field. It would be very interesting, though, to investigate also the effect of gravity on the fractional quantum Hall effect (and even other phenomena involving quantum effects such as superconductivity). However, such an investigation requires to take into account also the interaction between the electrons. In addition, given the very small separation between the hemispheres required for our approximations, it is natural to also try to exploit the thin films of graphite [41]. We should defer such an investigation to a future work as those tasks remain beyond the scope of the present paper.

Acknowledgments

The authors are grateful to the anonymous referee for his/her comments that improved the clarity and quality of our presentation. This work is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) Discovery Grant (RGPIN-2017-05388).

A The gravitational potential inside a full disk of radius R and thickness a

A.1 Newtonian potential $V(r) = -GM/r$.

Let us denote the Newtonian gravitational potential between the two hemispheres of Sec. 3 at any point x away from the center by $V_H^N(x)$. Then, we have $V_H^N(x) = V_S^N(x) - V_D^N(x)$. Here, $V_S^N(x)$ is the Newtonian gravitational potential at any distance x from the center of a full sphere of radius R and $V_D^N(x)$ is the Newtonian gravitational potential at the distance x from the center of a full disk of thickness $2a$ and radius R . We are going to give here the detailed calculations that yield $V_D^N(x)$. The calculation of $V_S^N(x)$ has been done in detail in Ref. [40], so we are only displaying here the final expression of that potential. It is given by,

$$V_S^N(x) = -2\pi G\rho \left(R^2 - \frac{x^2}{3} \right). \quad (29)$$

The Newtonian gravitational potential at a distance x from the center of a full disk of thickness $2a$, of radius R and of mass density ρ , can be found by integrating first the infinitesimal contributions of the mass elements $r d\phi dr dz$ over the thickness $2a$. These contributions should, in turn, be integrated over the whole disk by following the same strategy as the one adopted in Ref. [42]. We find,

$$\begin{aligned} V_D^N(x) &= -4G\rho \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} d\phi dr dz \\ &= -2G\rho \int_0^\pi \left[a\sqrt{r^2(\phi)+a^2} + r^2(\phi) \ln \left(\frac{\sqrt{r^2(\phi)+a^2}+a}{r(\phi)} \right) - a^2 \right] d\phi. \end{aligned} \quad (30)$$

In the second step we have integrated over the rest of the disk from $r = 0$ to $r(\phi) = x \cos \phi + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \phi}$ [42]. For small distances x away from the center of the disk and for a small thickness $2a$ of the disk compared to the radius R of the latter, we may, in turn, expand the integrand in powers of the ratios x/R and a/R . This allows us then to easily integrate over the variable ϕ . Keeping only the lower orders in the expansion, we find the following result for the Newtonian gravitational potential inside the full disk at a distance x from its center:

$$V_D^N(x) = \frac{\pi G\rho a}{R} x^2 + \mathcal{O} \left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4} \right) + \text{const.} \quad (31)$$

We have discarded here orders four and higher in x/R and a/R . Also, we have gathered all the constant terms inside the last term. Using this result, we can now find the Newtonian gravitational potential between the two hemispheres at a distance x from the center by using Eq. (29) and computing $V_H^N(x) = V_S^N(x) - V_D^N(x)$. We thus find the following result:

$$V_H^N(x) = \frac{2\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} \right) x^2 + \mathcal{O} \left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4} \right) + \text{const.} \quad (32)$$

A.2 Yukawa-like correction $V^Y(r) = -\frac{1}{r}GM\alpha e^{-r/\lambda}$.

The gravitational potential inside a full sphere of radius R and mass density ρ due to the Yukawa-like correction term has already been found in Ref. [40]. The result is

$$V_S^Y(x) = -2\pi G\rho \left[\alpha\lambda^2 \left(2 - e^{-\frac{R-x}{\lambda}} - e^{-\frac{R+x}{\lambda}} \right) + \frac{\alpha\lambda^2}{x} \left((R+x+\lambda)e^{-\frac{R+x}{\lambda}} - (R-x+\lambda)e^{-\frac{R-x}{\lambda}} \right) \right]. \quad (33)$$

This potential cannot be of any use in the form given here so we need to expand it in powers of x/λ . This expansion would be valid provided, of course, that $x < \lambda$. The result is

$$V_S^Y(x) = e^{-R/\lambda} \left[\frac{2\pi GR\rho\alpha}{3\lambda} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right) \right] + \text{const.} \quad (34)$$

We have kept here also only the terms up to the second order in x/λ and gathered all the constant terms inside the last constant term.

Let us now denote by $V_D^Y(x)$ the Yukawa-like correction to the gravitational potential at a distance x from the center of a full uniform disk of radius R and of thickness $2a$, having the uniform mass density ρ . Integrating over the disk as done for the Newtonian potential, we get,

$$\begin{aligned} V_D^Y(x) &= -4G\rho\alpha \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r e^{-\sqrt{r^2+z^2}/\lambda}}{\sqrt{r^2+z^2}} d\phi dr dz \\ &\approx e^{-\frac{\sqrt{R^2+a^2}}{\lambda}} \left[\frac{\pi G\rho a\alpha}{R} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4}\right) + \text{const.} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Note that this is the lowest limit of the integral. Indeed, given that the integral in the first line of Eq. (35) does not admit any analytical expression, we have to approximate the exponential inside the integrand in order to get a rough estimate of such an integral. Then we integrated over the whole disk as we did above for the Newtonian potential by assuming that $x \ll R$. Owing to the smallness of a , we clearly see that the contribution of this lower limit of $V_D^Y(x)$ is very small. Finally, then, using Eqs. (32) and (34), the gravitational potential $V_H^{N+Y}(x)$ that takes into account the Yukawa-like correction at any distance x from the center between two hemispheres is found, up to the first two lowest orders, as follows:

$$V_H^{N+Y}(x) \approx V_H^N(x) + V_S^Y(x) \approx \frac{2\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} + \frac{\alpha R}{\lambda} e^{-R/\lambda} \right) x^2 + \text{const.} \quad (36)$$

Note that this approximation is valid provided that $x^4/R^4 \ll \alpha R/\lambda e^{R/\lambda}$. For this to be the case, one needs of course to choose the allowed range for x according to one's estimate of λ and α .

A.3 Power-law correction $V^n(r) = -GM r_0^n / r^{n+1}$.

Let us denote by $V_D^n(x)$ the power-law correction to the gravitational potential at a distance x from the center of a full uniform disk of radius R and thickness $2a$, having the uniform mass density ρ .

A.3.1 Case $n = 1$.

Only for the case $n = 1$ do we have a converging potential inside the sphere [40]. Therefore, we only focus here on that case. The gravitational potential correction at a distance x from the center of a sphere of radius R and mass density ρ for such a case has already been computed in detail in Ref. [40]. Therefore, we just pick up here the result found there and expand in powers of x/R . We find,

$$\begin{aligned} V_S^{n=1}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right] \\ &= -4\pi G\rho r_0 R \left(1 - \frac{x^2}{3R^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (37)$$

On the other hand, we should integrate over the disk of radius R and thickness $2a$ as done for the Newtonian potential. We get,

$$\begin{aligned}
 V_D^{n=1}(x) &= -4G\rho r_0 \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r}{r^2+z^2} d\phi dr dz \\
 &= -2G\rho r_0 \int_0^\pi \left[a \ln \left(\frac{a^2+r^2(\phi)}{a^2} \right) + r(\phi) \tan^{-1} \left(\frac{a}{r(\phi)} \right) \right] d\phi \\
 &= \frac{2\pi G\rho r_0 a}{R^2} x^2 + \mathcal{O} \left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4} \right) + \text{const.}
 \end{aligned} \tag{38}$$

As the integral in the second line does not again admit any analytical solution, the best we could do is expand the integrand in powers of x/R and a/R and then integrate for the single variable ϕ . The above result is thus valid only for $x \ll R$ as well as $a \ll R$. Therefore, the total gravitational potential between the two hemispheres reads,

$$V_H^{N+(n=1)}(x) = V_H^N + V_S^{n=1} - V_D^{n=1} \approx \frac{2\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} \right) \left(1 + \frac{2r_0}{R} \right) x^2 + \text{const.} \tag{39}$$

References

1. K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
2. D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, “Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
3. A. H. MacDonald, T. M. Rice and W. F. Brinkman, “Hall voltage and current distributions in an ideal two-dimensional system”, *Phys. Rev.* **B28**, 3648(R) (1983).
4. R. E. Prange, “Effects of Imperfection and Disorder”, in *The Quantum Hall Effect*. R. E. Prange and S. M. Girvin eds. Second Edition. (Springer-Verlag, New York, 1990).
5. A. C. Montes de Oca and D. Martinez-Pedraza, “Role of impurities in stabilizing quantum Hall effect plateaus”, *Phys. Rev.* **B67**, 245310 (2003).
6. D. J. Thouless, “Topological Considerations”, in *The Quantum Hall Effect*. R. E. Prange and S. M. Girvin eds. Second Edition. (Springer-Verlag, New York, 1990).
7. B. Jeckelmann and B. Jeanneret, “The quantum Hall effect as an electrical resistance standard”, *Rep. Prog. Phys.* **64**, 1603 (2001).
8. J. Weis and K. von Klitzing, “Metrology and microscopic picture of the integer quantum Hall effect”, *Phi. Tran. R. Soc. A* **369**, 3954 (2011).
9. K. von Klitzing, “Quantum Hall Effect: Discovery and Application”, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **8**, 13 (2017).
10. F. W. Hehl, Y. N. Obukhov and B. Rosenow, “Is the Quantum Hall Effect Influenced by the Gravitational Field?”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 096804 (2004) [arXiv:cond-mat/0310281].
11. F. W. Hehl and W.-T. Ni, “Inertial effects of a Dirac particle”, *Phys. Rev. D* **42**, 2045 (1990).
12. Y. N. Obukhov, “Spin, Gravity, and Inertia”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 192 (2001) [arXiv:gr-qc/0012102].
13. F. Hammad and A. Landry, “A simple superconducting quantum interference device for testing gravity”, *Mod. Phys. Lett. A* **35**, 2050171 (2020) [arXiv:2005.05798].
14. V. V. Nesvizhevsky et al., “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Nature* **415**, 297 (2002).
15. V. V. Nesvizhevsky et al., “Measurement of quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field”, *Phys. Rev. D* **67**, 102002 (2003) [arXiv:hep-ph/0306198].
16. V. V. Nesvizhevsky et al., “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Eur. Phys. J. C* **40**, 479 (2005) [arXiv:hep-ph/0502081].
17. A. Landry and F. Hammad, “Landau levels in a gravitational field: The Schwarzschild spacetime case”, arXiv:1909.01827.
18. F. Hammad and A. Landry, “Landau levels in a gravitational field: The Levi-Civita and Kerr spacetimes case”, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 90 (2020) [arXiv:1910.01899v2].
19. L. I. Schiff and M. V. Barnhill, “Gravitation-Induced Electric Field near a Metal”, *Phys. Rev.* **151**, 1067 (1966).
20. F. C. Witteborn and W. M. Fairbank, “Experimental Comparison of the Gravitational Force on Freely Falling Electrons and Metallic Electrons”, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1049 (1967).
21. A. J. Dessler, F. C. Michel, H. E. Rorschach and G. T. Trammell, “Gravitationally Induced Electric Fields in Conductors”, *Phys. Rev.* **168**, 737 (1968).
22. T. W. Darling, F. Rossi, G. I. Opat and G. F. Moorhead, “The fall of charged particles under gravity: A study of experimental problems”, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 237 (1992).
23. H. Dittus, C. Lämmerzahl and H. Selig, “The fall of charged particles under gravity: A study of experimental problems”, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 571 (2004).

24. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, Second Edition (Pergamon Press, Oxford, 1965).
25. W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
26. H. Buchholz, *The Confluent Hypergeometric Function, with Special Emphasis on its Applications*, (Springer-Verlag, Berlin, 1969).
27. P. J. Mohr, D.B. Newell and B.N. Taylor, “CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014”, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035009 (2016) [arXiv:1507.07956]. (For a more recent update, refer to the document physics.nist.gov/cuu/pdf/wall_2018.pdf available on the official website of the *National Institute of Standards and Technology*.)
28. R. G. Sharma, *Superconductivity: Basics and Applications to Magnets*, (Springer, New York, 2015).
29. A. M. M. Pruisken, “Universal Singularities in the Integral Quantum Hall Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1297 (1988).
30. H. P. Wei, D. C. Tsui, M. A. Paalanen and A. M. M. Pruisken, “Experiments on Delocalization and Universality in the Integral Quantum Hall Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1294 (1988).
31. S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, and K. Ploog, “Size-dependent analysis of the metal-insulator transition in the integral quantum Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 883 (1991).
32. A. J. M. Giesbers *et al.*, “Scaling of the quantum Hall plateau-plateau transition in graphene”, *Phys. Rev. B* **80**, 241411(R) (2009) [arXiv:0908.0461].
33. S.V. Gudina *et al.*, “Scaling laws under quantum Hall effect for a smooth disorder potential”, *Low Temp. Phys.* **45**, 176 (2019).
34. B. Huckestein, “Scaling theory of the integer quantum Hall effect”, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 357 (1995) [arXiv:cond-mat/9501106].
35. B. Huckestein, “Quantum Hall Effect at Low Magnetic Fields”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3141 (2000) [cond-mat/9906450v2].
36. C. Kiefer and C. Weber, “On the interaction of mesoscopic quantum systems with gravity”, *Annalen Phys.* **14**, 253 (2005) [arXiv:gr-qc/0408010].
37. G.V. Kulin, A.I. Frank, S.V. Goryunov, D.V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, A.N. Strepetov and V.A. Bushuev, “Spectrometer for new gravitational experiment with UCN”, *In Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **792**, 38 (2015) [arXiv:1502.03243].
38. H. Abele, “Precision experiments with cold and ultra-cold neutrons”, *Hyperfine Interact* **237**, 155 (2016).
39. G.W. Biedermann, X.Wu, L. Deslauriers, S. Roy, C. Mahadeswaraswamy and M.A. Kasevich, “Testing gravity with cold-atom interferometers”, *Phys. Rev. A* **91**, 033629 (2015) [arXiv:1412.3210].
40. F. Hammad, A. Landry and K. Mathieu, “On the possibility of testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference”, arXiv:1910.13814v2.
41. J. Yin *et al.*, “Dimensional reduction, quantum Hall effect and layer parity in graphite films”, *Nat. Phys.* **15**, 437 (2019) [arXiv:1812.10740].
42. H. Lass and L. Blitzer, “The gravitational potential due to uniform disks and rings”, *Celestial Mechanics* **30**, 225 (1983).

Chapitre 9

Introduction au septième article : L'influence de la gravitation sur l'effet Josephson en supraconductivité

Dans les articles précédents, on a étudié plusieurs types d'implications physiques de la gravitation. On a abordé le champ gravitationnel comme un champ perturbatif sur des phénomènes tel que la gravité terrestre, le laser gravitationnel, les niveaux de Landau ainsi que l'effet Hall quantique. On a proposé une expérience, basée sur des interférences quantiques, pouvant vérifier les différents types de champs gravitationnels tels que les types Yukawa et puissances inverses. Ce chapitre a pour objectif d'introduire ce septième article intitulé "A Simple Superconductor Quantum Interference Device for Testing Gravity", publié au Modern Physics Letters A, présenté après ce chapitre [121]¹. Mais avant, on fera un rappel sur la supraconductivité et l'effet Josephson afin de mieux comprendre les principes physiques de la démarche et de l'expérience proposée.

9.1. Rappel sur l'effet Josephson en supraconductivité

9.1.1. La supraconductivité

La supraconductivité est un état de la matière où celle-ci ne possède aucune résistivité électrique. Dans cet état, les particules constituantes sont à des énergies quantiques plus fondamentales. De la matière supraconductrice baignant dans un champ magnétique non nul repoussera et/ou engendrera une déviation de ce même champ. Un matériau deviendra supraconducteur lorsque celui-ci est refroidi à une température égale ou inférieure à une température T_C [122]. On compare souvent dans les ouvrages, le conducteur non-parfait ayant une résistance électrique non-nulle, le conducteur parfait et le matériau supraconducteur. Dans les deux premiers cas, le conducteur électrique respectera les équations de Maxwell ; tandis que pour le dernier cas, le supraconducteur respectera les équations de London [122].

1. On a reçu pour cet article les félicitations du Pr. Mikhail Kupriyanov de Moscou, Russie.

Ces dernières se résument comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} &= \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{J} &= -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}, \\
\nabla^2 \vec{B} &= \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \\
\nabla^2 \vec{J} &= \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J},
\end{aligned} \tag{9.1.1}$$

où $\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$ est la longueur de pénétration de London avec n_s comme densité d'électrons supraconducteurs. Les quatre relations ci-haut (éqs. (9.1.1)) existent de manière équivalente pour les conducteurs parfaits [122]. Seulement la quantité λ_L sera déterminée différemment. On remarque aussi que cette longueur de pénétration de London peut se mesurer expérimentalement, sa valeur variera selon le type de matériau ainsi qu'avec la température T de celui-ci. Toutefois, il est connu que la densité n_s d'électrons supraconducteurs s'exprimera par l'expression [122] :

$$n_s \approx (T_C - T), \tag{9.1.2}$$

où T_C est la température critique du matériau supraconducteur. Les équations (9.1.1) et (9.1.2) constituent une description de type phénoménologique de la supraconductivité selon la théorie de London. Les justifications au niveau microscopiques de ces équations pourront s'effectuer en utilisant la théorie BCS microscopique. C'est avec cette dernière théorie que l'on peut expliquer la formation de paires de Cooper d'électrons [122, 123]. Comme les électrons sont des particules de spin 1/2, alors une paire de Cooper possède un spin 1, donc c'est un boson. Le principe d'exclusion de Pauli ne s'applique pas ici. C'est pour cette raison que les électrons formant des paires de Cooper tendent tous à occuper et à se condenser dans le même état quantique fondamental du système supraconducteur. C'est ce comportement qui cause les propriétés spéciales des supraconducteurs [123].

En plus, il existe une autre théorie de supraconductivité décrivant les paires de Cooper et les supraconducteurs, soit la théorie Ginzburg-Landau. Cette dernière associe les aspects thermodynamiques et électromagnétiques; cela est exprimé par l'équation (9.1.3). Cette théorie impose qu'une fonction d'onde macroscopique ψ décrivant les états quantiques d'un supraconducteur respecte l'équation suivante [124, 125] :

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \tag{9.1.3}$$

où ψ est une fonction d'onde normalisée. Cette équation (9.1.3) décrit le comportement spatial de cette fonction ψ pour une valeur bien précise de longueur de cohérence $\xi = \xi(T)$ à une température donnée. Dans cette théorie de Ginzburg-Landau, la longueur ξ se décrit

comme suit [124] :

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{4m\gamma(T_C - T)}, \quad (9.1.4)$$

avec γ comme paramètre de Ginzburg-Landau. De cette équation (9.1.4), on peut obtenir l'amplitude d'un courant appelé courant critique I_0 , qui est décrit par la relation [124, 126] :

$$I_0 = \frac{\hbar e \gamma}{\beta m} (T_C - T), \quad (9.1.5)$$

avec β comme deuxième paramètre de Ginzburg-Landau. Le résultat de l'équation (9.1.5) s'appelle le courant critique de Josephson. Ce dernier courant est particulièrement applicable pour des températures T près de la température critique T_C . On verra en détail les conséquences de ce résultat à la section 9.1.2. Ce résultat est notamment applicable pour les paires de Cooper d'électrons dans un matériau supraconducteur.

9.1.2. L'effet Josephson

L'effet Josephson est un phénomène consistant à l'apparition d'un courant électrique entre deux matériaux supraconducteurs séparés par un isolant [124]. Les deux supraconducteurs produisant le courant de Josephson se comportent en quelque sorte comme l'anode et la cathode d'une pile électrochimique. Ce courant permet par exemple d'alimenter un élément électrique possédant une certaine résistance.

Il existe deux types de courants de Josephson, soit le courant de Josephson alternatif (i.e. AC Josephson current) ainsi que le courant de Josephson continu (i.e. DC Josephson current). On utilisera le type alternatif ; celui-ci nous permettra de mieux voir les effets gravitationnels sur l'effet Josephson. On utilisera dans ce cas l'hamiltonien avec un terme exprimant l'effet tunnel. Le courant de Josephson est associé à la différence d'énergie potentielle à une jonction de Josephson entre deux supraconducteurs séparés par un matériau isolant. Il faut toutefois que la couche isolante soit assez mince pour que les électrons des paires de Cooper puissent traverser cette couche via l'effet tunnel tout en maintenant leur cohérence de phase. Ce type de courant de Josephson prend généralement la forme [124, 126] :

$$I(t) = I_0 \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t)), \quad (9.1.6)$$

où I_0 est le courant supraconducteur de Josephson critique (voir éq. (9.1.5)), ainsi que $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sont les phases initiales et finales temporelles. Ces phases dépendront d'abord des énergies potentielles eV_1 et eV_2 que possèdent les super-électrons de part et d'autre de la jonction de Josephson. Ces phases sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{2e}{\hbar} V_1 t \\ \phi_2(t) &= \frac{2e}{\hbar} V_2 t \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

Donc, cette différence de phase est linéairement proportionnelle à la différence de potentiel, à la jonction, $(V_1 - V_2)$ des deux supraconducteurs comme suit :

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = \frac{2e}{\hbar} (V_1 - V_2) t \quad (9.1.8)$$

Ces potentiels V_1 et V_2 dépendent aussi des autres phénomènes physiques présents dans l'environnement de cette jonction de Josephson. Ces derniers peuvent par exemple être dépendants de la gravitation comme on le verra plus loin. Le paramètre I_0 peut dépendre aussi de facteurs géométriques ainsi que de la température du supraconducteur.

Si on ajoute l'effet d'un champ magnétique externe, on aura une densité de courant de Josephson obéissant à l'équation suivante [124] :

$$J(x) = J_{max} \sin(\phi_0 + 4e\lambda_B Bx), \quad (9.1.9)$$

avec λ_B comme longueur de pénétration du champ magnétique B à l'intérieur de la jonction. De cette équation (9.1.9), on obtiendra comme courant critique total de Josephson I_0 l'expression :

$$I_0(B) = I_0(B=0) \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} \right|, \quad (9.1.10)$$

où $\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)$ dépend du champ B . On a dans cette dernière équation que $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ est le flux quantique fondamental et Φ est le flux quantique des autres modes oscillants. Si B devient près de 0, alors l'équation (9.1.10) donne comme courant critique total : $I_0(B) = I_0(B=0)$. De plus, si $\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} = n\pi$, on obtient que $I_0(B) = 0$ pour un entier n non-nul.

On obtient aussi ces résultats pour le courant supraconducteur de Josephson en utilisant l'approche de Ginzburg-Landau comme on a montré à la section 9.1.1. On obtient à l'équation (9.1.5) l'amplitude du supercourant oscillant décrit par l'équation (9.1.6). On peut aussi utiliser ce type d'approche pour traiter des cas plus complexes de jonctions de Josephson comme des supraconducteurs à double bandes d'énergies. D'ailleurs, les mêmes types de théories applicables pour les jonctions de semi-conducteurs peuvent être adaptées pour les systèmes impliquant les jonctions de Josephson [124]. On aurait pu aborder le cas de courant continu de Josephson, mais ce dernier ne sera pas utile pour notre expérience. Dans les prochaines sections, on se servira de relations similaires aux équations (9.1.6) à (9.1.8), mais on utilisera des potentiels gravitationnels pour V_1 et V_2 au lieu des termes purement magnétiques. On aura donc des phases $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ dépendantes de la gravitation et non du magnétisme.

9.2. Objectifs et méthodologie

La raison première de cet article est de proposer une autre expérience pouvant vérifier la gravitation et son influence. On étudiera le lien entre la gravitation et l'effet Josephson en

supraconductivité. On discute dans cet article d'une expérience permettant une mesure plus précise de l'interaction gravitationnelle via la fréquence d'un courant de Josephson.

Le premier objectif de cet article est de connaître les effets des différents types d'interactions gravitationnelles sur la fréquence du courant de Josephson produit par un circuit quantique constitué de deux condensats supraconducteurs séparés par des jonctions de Josephson. Pour y arriver, on propose un montage expérimental comme montré à la figure 1. L'autre objectif est de mieux connaître via les fréquences de Josephson les divers paramètres gravitationnels. On veut par exemple mesurer plus précisément la constante gravitationnelle G , les paramètres de la gravitation de type Yukawa, les paramètres de la gravitation de type puissance inverse ainsi que les effets du champ électrique induit par les atomes du supraconducteur.

Tout l'article est basé sur le traitement mathématique et physique du montage de la figure 1. Dans celle-ci, il y a d'abord un condensat qui traverse une sphère massive par le diamètre de celle-ci, ce qui donne au condensat une énergie potentielle gravitationnelle newtonienne quadratique. L'autre condensat se situe à l'extérieur de la sphère, faisant le tour de celle-ci, et possède une énergie potentielle gravitationnelle constante. Ces deux condensats sont séparés par deux jonctions de Josephson se situant à chaque extrémités de la sphère massive. Pour exploiter la différence d'énergie entre les condensats, il suffit de brancher une électrode sur chacun des deux condensats, formant ainsi une différence de potentiel. On obtient donc un courant de type Josephson.

Maintenant, d'un point de vue mathématique, on écrit un système de deux équations de Schrödinger couplés à partir de trois hamiltoniens pour décrire au final les états quantiques des paires de Cooper présents dans le système. Il y a d'abord les hamiltoniens associés aux deux condensats du système supraconducteur. Ensuite, il y a l'hamiltonien de couplage permettant, via les deux jonctions de Josephson, aux deux condensats d'interagir ensemble par l'effet tunnel. On impose l'équation générale de Schrödinger sur l'ensemble de la fonction d'onde constituée des états quantiques des condensats internes et externes. On projette l'hamiltonien total du système supraconducteur sur chacun des états quantiques pour obtenir finalement les deux équations couplées décrivant les états des condensats interne et externe.

On pose ensuite un système d'ansatz pour découpler ces deux équations différentielles. De cette manière, on obtient les deux équations découplées du système supraconducteur. Il y a une équation exprimant exactement la densité de courant de Josephson dans la boucle quantique et l'autre équation porte sur la phase de ce courant. Cette dernière permet d'obtenir la fréquence de Josephson impliquant les énergies potentielles gravitationnelles. Pour le potentiel newtonien dominant, on remplace le potentiel quadratique par la quantification de l'oscillateur harmonique quantique, car on est à des niveaux d'énergies quantiques fondamentaux. On obtient en bout de piste la fréquence de Josephson telle que présentée à

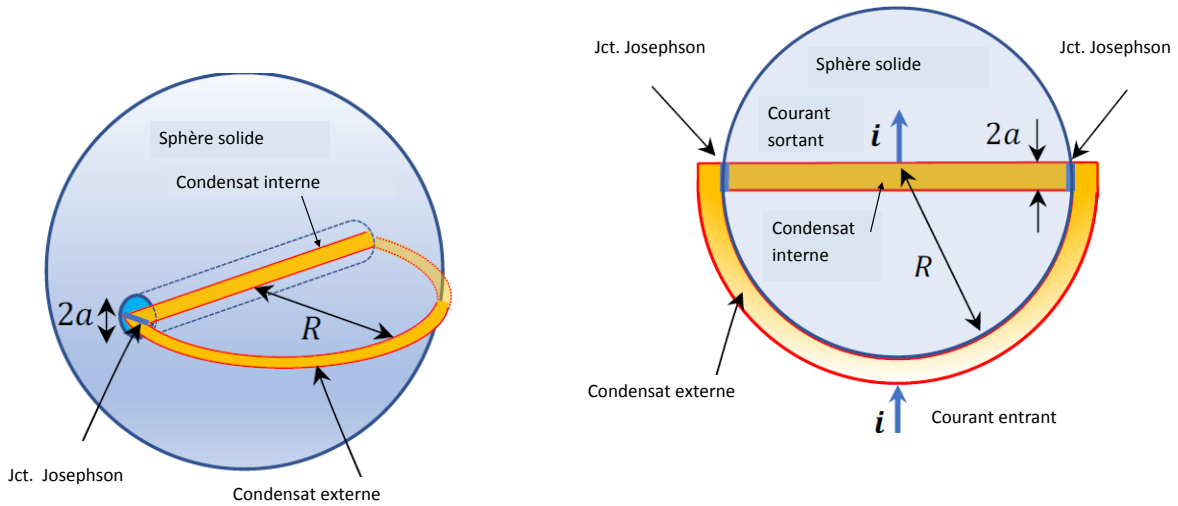


Figure 1. Un supraconducteur en forme de D est enveloppé autour d'une sphère massive. Le diagramme de gauche nous donne une vue latérale du montage et le diagramme de droite montre une vue du dessus de ce même montage. Le courant électrique i circulant dans la boucle est causé par le courant passant au travers des jonctions de Josephson (J.J.) des deux côtés des deux segments linéaires rectilignes du supraconducteur.

l'équation (9.3.2) contenant la densité massique de la sphère ρ , la constante gravitationnelle G , la masse des électrons sous formes de paires de Cooper ainsi que le rayon R .

Pour les corrections de type Yukawa et de puissance inverse, puisque l'on a une quantification de type oscillateur harmonique pour le potentiel newtonien, on reprend la solution de l'équation différentielle pour la phase. On ajoute la différence d'énergies entre les deux condensats pour la correction quantique et on traite ce type de terme comme une perturbation quantique. On obtient de cette manière la correction voulue à la fréquence de Josephson newtonienne. Pour obtenir les énergies du condensat interne de chaque situation, on utilise les perturbations quantiques indépendantes du temps au premier ordre en se servant de l'équation (2.1.13). On utilise les états quantiques non-perturbés exprimés par l'équation (2.3.2) pour obtenir la correction au premier ordre en énergie. C'est ainsi qu'on pose les équations (9.3.4) et (9.3.7) pour les corrections aux énergies internes. De plus, sans avoir à intégrer, on utilise dans chaque situation les potentiels de correction pour obtenir les énergies des condensats externes, soit les équations (9.3.5) et (9.3.8). C'est ainsi que l'on obtient les équations (9.3.3) et (9.3.6) pour les fréquences de Josephson avec corrections de type Yukawa et de puissance inverse, respectivement.

Pour ce qui des corrections par le champ électrique induit gravitationnellement, on avait obtenu au sixième article le facteur de correction $\frac{M}{7m}$ avec M comme masse de chaque atome du matériau conducteur. Pour les deux condensats, on applique ce facteur aux fréquences

obtenues aux étapes précédentes. On rehausse ainsi les fréquences anticipées et on augmente ainsi la mesurabilité des fréquences de Josephson. Cela permettra de mieux dégager les différents paramètres gravitationnels qu'on désire obtenir au final. On aura respecté tous les objectifs concernant ce septième article.

De plus, on aborde la question des effets thermiques pouvant survenir dans ce type de montage proposé. On montre clairement que les énergies thermiques n'ont aucun effet sur les fréquences de Josephson. On démontre plutôt que les effets thermiques se retrouvent dans l'amplitude du courant supercritique de Josephson. Bref, il n'est pas nécessaire de réaliser ce type d'expérience à des températures très près du zéro absolu.

9.3. Principaux résultats

9.3.1. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel newtonien

On a obtenu avec les équations couplées de Schrödinger un courant de Josephson de la forme suivante :

$$J = J_0 \sin \left(\phi_0 + \frac{2\Delta E}{\hbar} t \right) = J_0 \sin (\phi_0 + \Omega_n t). \quad (9.3.1)$$

Avec les énergies gravitationnelles E_I et E_O pour les deux condensats obtenus dans l'article, on déduit que la densité de courant supraconducteur J est une fonction sinusoïdale temporelle de fréquence d'oscillation quantifiée Ω_n :

$$\Omega_n = \frac{8\pi G m \rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G \rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (9.3.2)$$

Numériquement, pour un matériau très massif, on montre les résultats de l'équation (9.3.2) au tableau 1. On obtient une fréquence de courant de Josephson relativement faible, mais mesurable.

| Matériau | ρ (10^4kg/m^3) | G ($10^{-11} \text{m}^3/\text{kgs}^2$) | R (m) | ω_0 (10^{-3}Hz) | Ω_0 (10^{-3}Hz) |
|----------|---------------------------------|--|---------|------------------------------------|------------------------------------|
| Osmium | 2,25872 | 6,67408 | 0,01 | 2,51288 | 2,52379 |

Tableau 1. Fréquences d'oscillateur harmonique et de Josephson pour la gravité newtonienne à l'état fondamental $n = 0$.

9.3.2. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel avec correction de type Yukawa

Pour le potentiel newtonien avec correction de type Yukawa, la nouvelle fréquence de Josephson quantifiée s'exprimera par :

$$\Omega_n^{N+Y} \approx \frac{8\pi Gm\rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G\rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{2(E_O^Y - E_I^Y)}{\hbar} = \Omega_n + \Omega_n^Y. \quad (9.3.3)$$

Le terme $\frac{2(E_O^Y - E_I^Y)}{\hbar}$ représente une correction à la fréquence de Josephson purement newtonienne exprimée par l'équation (9.3.2). Les énergies E_I^Y et E_O^Y des deux condensats s'obtiennent via les relations suivantes :

$$E_I^Y \approx 8\pi Gm\rho\alpha\lambda^2 e^{-R/\lambda} \int_0^R \left[\frac{R+\lambda}{x} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \psi_n^2(x) dx. \quad (9.3.4)$$

$$E_O^Y = 8\pi Gm\rho\alpha\lambda^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \left[\frac{R+\lambda}{R} \sinh\frac{R}{\lambda} - \cosh\frac{R}{\lambda} \right]. \quad (9.3.5)$$

L'équation (9.3.4) implique les états propres de l'oscillateur harmonique quantique tels qu'exprimés par l'équation (2.3.2) ainsi que le potentiel de type Yukawa. On doit toutefois mentionner que la résolution de l'équation (9.3.4) ne peut se faire de manière purement analytique : l'utilisation de méthodes numériques s'impose dans un tel cas. La détection de Ω_n^Y dans la mesure de la fréquence de Josephson permettra de connaître les valeurs précises des paramètres de type Yukawa. Numériquement, on obtient les résultats des équations (9.3.3) à (9.3.5) pour certaines valeurs de paramètres de type Yukawa au tableau 2. On voit clairement via les valeurs numériques que les fréquences obtenus pour la correction de type Yukawa sont des corrections à la fréquence provenant du potentiel newtonien.

| (α, λ) (λ en m) | E_I^Y (\hbar Hz) | E_O^Y (\hbar Hz) | Ω_0^Y (Hz) |
|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $(10^{-4}, 1)$ | 1×10^{-8} | $3, 2 \times 10^{-7}$ | $6, 2 \times 10^{-7}$ |
| $(10^8, 10^{-6})$ | 1×10^{-14} | 2×10^{-9} | 4×10^{-9} |

Tableau 2. Valeurs des énergies E_I^Y et E_O^Y ainsi que de fréquences de Josephson Ω_0^Y pour la correction de type Yukawa à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

9.3.3. Fréquence du courant de Josephson pour un potentiel avec correction de type puissance-inverse

On a obtenu la nouvelle fréquence du courant de Josephson pour les termes de potentiels newtoniens et de puissance-inverse comme suit :

$$\Omega_n^{N+PL} \approx \frac{8\pi Gm\rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G\rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2(E_O^{PL} - E_I^{PL})}{\hbar} = \Omega_n + \Omega_n^{PL}. \quad (9.3.6)$$

Le dernier terme de l'équation (9.3.6), celui en E_I^{PL} et E_O^{PL} , représente les termes de correction à la fréquence pour la gravité purement newtonienne. La détection du terme Ω_n^{PL} dans la mesure de la fréquence totale de Josephson permettra de connaître précisément les paramètres du potentiel de puissance inverse. Maintenant, Les énergies E_I^{PL} et E_O^{PL} des condensats internes et externes sont exprimées comme suit :

$$E_I^{PL} \approx 4\pi Gm\rho r_0 \int_0^R \left(R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right) \psi_n^2(x) dx. \quad (9.3.7)$$

$$E_O^{PL} = 4\pi Gm\rho Rr_0. \quad (9.3.8)$$

L'équation (9.3.7) implique encore une fois les états propres de l'oscillateur harmonique quantique exprimés par l'équation (2.3.2) ainsi que le potentiel de type puissance inverse. Encore une fois, on doit mentionner que la résolution de l'équation (9.3.7) ne peut se faire de manière purement analytique : l'utilisation de méthodes numériques s'impose encore dans un tel cas, tout comme pour l'équation (9.3.4). Numériquement, on présente les valeurs des équations (9.3.6) à (9.3.8) au tableau 3. On obtient véritablement des corrections à la fréquence de Josephson obtenu pour le potentiel newtonien pur.

| (R, r_0) (m) | E_I^{PL} (\hbar Hz) | E_O^{PL} (\hbar Hz) | Ω_0^{PL} (Hz) |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| $(0, 01, 10^{-3})$ | $1, 1 \times 10^{-7}$ | $1, 64 \times 10^{-6}$ | $3, 06 \times 10^{-6}$ |
| $(0, 1, 10^{-4})$ | $9, 4 \times 10^{-7}$ | $1, 64 \times 10^{-6}$ | $1, 40 \times 10^{-6}$ |

Tableau 3. Valeurs des énergies E_I^Y et E_O^Y ainsi que des fréquences de Josephson Ω_0^Y pour la correction de puissance inverse $q = 1$ à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

9.3.4. Fréquences des différents courant de Josephson avec l'effet du champ électrique induit

Au sixième article, on avait obtenu, en considérant le champ électrique induit gravitationnellement par les atomes constituant le conducteur, un facteur de correction pour diverses quantités obtenu s'exprimant par $\frac{M}{7m}$. On avait calculé ce facteur pour un conducteur en

cuivre. On obtenait dans ce cas une correction d'au moins 10^4 . Dans le septième article, on utilise ce même facteur, mais pour des condensats supraconducteurs fabriqués en plomb. Si la masse atomique du plomb est $3,44064 \times 10^{-25}$ kg (soit 207,2 unités atomiques.); on obtient comme facteur $\frac{M}{7m} = 5,39575 \times 10^4$. De là, on obtient les nouvelles fréquences de Josephson corrigées et amplifiées, comme il est montré au tableau 4.

| Type de gravitation | Sans correction | Avec correction |
|---|--------------------------|-----------------|
| Newton Pur Ω_0 (Hz) | $2,52379 \times 10^{-3}$ | 1,1723 |
| Cor. type Yukawa $\Omega_0^Y(\alpha, \lambda) = (10^{-4}, 1\text{m})$ (Hz) | $6,2 \times 10^{-7}$ | 0,0334 |
| Cor. type Yukawa $\Omega_0^Y(\alpha, \lambda) = (10^8, 10^{-6}\text{m})$ (Hz) | 4×10^{-9} | 0,0002 |
| Cor. puis. inv. $\Omega_0^{PL}(R, r_0) = (0,01, 10^{-3}\text{m})$ (Hz) | $3,06 \times 10^{-6}$ | 0,16 |
| Cor. puis. inv. $\Omega_0^{PL}(R, r_0) = (0,1, 10^{-4}\text{m})$ (Hz) | $1,40 \times 10^{-6}$ | 0,07 |

Tableau 4. Valeurs des fréquences de Josephson au niveau fondamental $n = 0$ de l'oscillateur harmonique avec ou sans correction provenant du champ électrique induit par la gravitation.

9.4. Les contributions

Mes contributions

J'ai grandement collaboré pour les items suivants :

- Calculs finaux des solutions du système d'équations différentielles.
- Calculs finaux des corrections aux fréquences d'oscillation des courants de Josephson.
- Ajout de certaines interprétations pour résultats pour les corrections gravitationnelles.
- Vérifications finales et détaillées des calculs, des explications et des résultats.
- Ajouts de références supplémentaires sur les expériences passées et présentes, notamment concernant les SQUIDS.
- Une grande partie calculs numériques nécessaires pour permettre la réalisation future de ce type d'expérience.
- La plupart des calculs de corrections quantiques de type Yukawa et de puissance inverse pour l'obtention des fréquences de Josephson.

Bref, j'ai effectué une bonne partie des principaux calculs et j'ai proposé certaines interprétations pour les résultats. J'ai obtenu les résultats finaux et j'ai répété ces calculs pour les potentiels de type Yukawa et de puissance inverse.

Les contributions de mon directeur

F. Hammad a démarré le projet, a effectué les préliminaires et certains calculs. Le travail s'est fait avec beaucoup d'interactions entre moi et mon directeur, l'un corrigeait l'autre. Il a fait beaucoup d'interprétation et des vérifications.

Septième article.

A simple superconductor quantum interference device for testing gravity

par

Fayçal Hammad¹ et Alexandre Landry⁴

- (¹) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada
- (²) Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke,
Quebec, Canada J1M 1Z7
- (³) Physics Department, Champlain College-Lennoxville, 2580 College Street, Sherbrooke, Que-
bec, Canada J1M 0C8
- (⁴) Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada

Cet article a été soumis dans Modern Physics Letters A (Publié en 2020 [[121](#)])².

2. On a reçu pour cet article les félicitations du Pr. Mikhail Kupriyanov de Moscou, Russie.

A simple superconducting quantum interference device for testing gravity

Fayçal Hammad*

*Department of Physics and Astronomy, Bishop's University,
2600 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada
Physics Department, Champlain College-Lennoxville,
2580 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 0C8 Canada and
Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada*

Alexandre Landry†

*Département de Physique, Université de Montréal,
2900 Boulevard Édouard-Montpetit, Montréal, QC, H3T 1J4 Canada*

A simple tabletop setup based on a superconducting quantum interference device is proposed to test the gravitational interaction. A D-shaped superconducting loop has the straight segment immersed inside a massive sphere while the half-circle segment is wrapped around the sphere. The superconducting condensate within the straight arm of the loop thus bathes inside a gravitational simple harmonic oscillator potential while the condensate in the half-circle arm bathes in the constant gravitational potential around the sphere. The resulting phase difference at the Josephson junctions on both sides of the straight arm induces a sinusoidal electric current that has a frequency determined by the precise gravitational potential due to the massive sphere.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

The smallness of the universal gravitational constant G and the inverse square-law (ISL) — the $1/r^2$ -dependence of the gravitational interaction between any two massive objects separated by a distance r — are the main sources of difficulties one faces when attempting to test gravity and its universal constant G to high precision. Any attempt to decrease the separation distance r between the two masses in the hope of making the resulting gravitational force stronger and, hence, easier to be detected, is automatically accompanied by an increase in the strength of the other non-gravitational interactions, such as the van der Waals and Casimir forces to which rapidly add then the electric, the weak and strong nuclear forces that easily overwhelm the gravitational force as one keeps decreasing the separation distance r [1–18]. For this reason researchers have switched to indirect and more subtle tests based on quantum particles that do not rely on the gravitational force between a weakly separated pair of masses [19–27].

Among the more recent proposals in this direction by the present authors, are two setups based on two independent but somewhat related strategies. In Ref. [28], the possibility of using quantum interference of cold neutrons (or any other neutral quantum particles for that matter) in a modified Colella-Overhauser-Werner (COW) experiment (see Ref. [19] for a review) was proposed. Such an experiment relies on the quantum interference induced by the gravitational field. It was shown in Ref. [28] that the gravitational potential felt by a quantum particle traveling inside a narrow cylindrical tunnel drilled along the diameter of a massive sphere is that of a one-dimensional harmonic oscillator. As such, it was shown that when making one of the two beams of an interferometer go through the tunnel, while the other beam lies outside the mass source, a precise phase shift between the two beams of the interferometer results. Unfortunately, as such a strategy relies on a single particle interference, the induced phase shift calculated is extremely small and the setup is vulnerable to quantum decoherence. The expected phase shift is of the order $\sim 10^{-2}$ rad for a Newtonian potential and below $\sim 10^{-4}$ rad for any eventual deviation from the ISL.

In order for those small phase shifts to be detected one should manage to amplify the effect by either (i) increasing the mass and size of the gravitational source or (ii) by adding up such tiny phase shifts as they accumulate from a large number of affected particles. As the first possibility is rather expansive and would be accompanied by many technological challenges, one would rather opt for the second. Such a possibility is indeed feasible as shown in Ref. [29]. The key idea [29] is that the effects of gravity could be rendered macroscopic in mesoscopic systems [30] by making

*Electronic address: fhammad@ubishops.ca

†Electronic address: alexandre.landry.1@umontreal.ca

many particles respond in unison to gravity as they do [31, 32] in the presence of a magnetic field in the quantum Hall effect [33]. In fact, it is found [29] that the influence of gravity does show up in the quantum Hall effect but that such an effect would still not easily allow to distinguish between different possible deviations from the ISL.

Sticking to this idea of exploiting quantum effects due to a large number of particles, we propose in this paper to use quantum interference due to a large number of particles in a condensate state. In fact, it is well known that such a state, provided by superconductors, is a macroscopic state and, hence, any effect of gravity [34, 35] on it could show up at the macroscopic level as well. To achieve that, we propose here to use the so-called Josephson effect (see e.g., Ref. [36]). It is well known that such an effect is so sensitive that it allows one to measure minute magnetic fields down to strengths of the order of 10^{-15} T. Similarly, the setup we propose here would allow to measure the gravitational interaction to very high precision. If at the first stages of its realization the setup does not reach the final desired precision to allow to test the ISL of gravity, it would still allow to measure the gravitational constant G in a novel way and with high precision.

The remainder of this paper is structured as follows. In Sec. II, we present and describe the details of our proposed setup. In Sec. III, we conduct a rigorous mathematical analysis of the way the gravitational effect would manifest itself with the help of the setup. We provide a detailed derivation of the resulting gravitation-dependent frequency of the induced AC Josephson effect based on the ISL and various scenarios of deviations from the latter. In Sec. IV, we focus more on the eventual experimental realization of our setup, we provide its quantitative predictions and put into perspective its performance relative to those of the presently existing methods for testing gravity. We end this paper with a brief conclusion and discussion section in which we highlight the main potentialities of our setup and possible future developments and improvements of the key idea behind the latter.

II. THE SETUP DESIGN

The setup we propose here is depicted in Fig. 1. The setup consists of a massive solid sphere of radius R , inside of which is drilled a cylindrical tunnel of small radius a along the diameter of the sphere. A D-shaped superconductor is used. The superconductor is thus made of two segments. The straight segment is connected through two superconductor-insulator-superconductor (S-I-S) Josephson junctions [36] to another segment curved into a half circle. The straight segment is immersed inside the sphere, along the drilled tunnel, while the curved segment is wrapped around the right in Fig. 1.

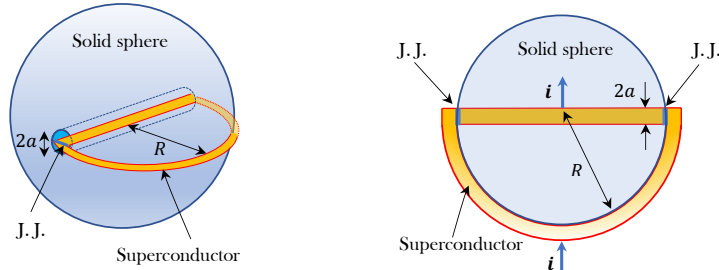


Figure 1: A D-shaped superconductor is partly immersed inside a massive sphere and partly wrapped around the latter. The left diagram gives a side view of the setup while the right one shows a top view. The current i through the loop is due to the flow across the Josephson junctions (J.J.) on both sides of the straight segment of the superconductor.

Such a setup must then be cooled down to extremely low temperatures. Such a requirement, as we shall see in the next section, is what constrains the degree of sensitivity and precision of the device. In fact, in analogy to the low temperatures constraint imposed by any attempt to measure magnetic fields using a superconductor interference device (SQUID)[36], the weakness of the gravitational interaction also requires very low temperatures to guarantee high performances of the setup. Nevertheless, we shall see that while the level of performance of the setup depends greatly on the low temperatures attainable, measuring the gravitational constant G and testing gravity with such a device does not actually impose more constraints on the cryogenics than what other uses of SQUIDS do.

The requirement to have a very uniform mass density for the solid sphere is also very important. This requirement, while not necessary for the gravitational effect detection proper, is going to render any correlation between an actual experimental measurement and the mathematical analysis we provide in Sec. III is extremely rigorous. However, this requirement is not as experimentally challenging as is the case with the cryogenics. In fact, as we shall see in the

next section, the size of the solid sphere does not have to be large. This is one of the great advantages of the present setup as compared to the proposal made in Ref. [28]. As such, attaining a uniform density for the sphere is much more easily achievable than the required low temperatures.

III. THEORY

The principle behind our proposal relies on the remarkable difference between the form of the gravitational potential filling the interior of the tunnel inside the solid sphere and the form the gravitational potential has outside the sphere. The ultimate goal of our setup is thereby to use this difference in order to induce a current through the Josephson junctions connecting the two parts of the same superconductor spanning the inside and the outside regions of the solid sphere. In this section we are going to compute the frequency of the induced AC Josephson effect due to such a difference in the gravitational potential, first we investigate the case of a purely Newtonian potential and then we investigate two well-known possible cases for a deviation from the ISL: a Yukawa-like deviation and a power-law deviation.

A. With a Newtonian potential

As shown in great detail in Ref. [28], for a very small radius ($a \ll R$) of the tunnel inside the solid sphere, the Newtonian gravitational potential inside the latter at any position x from the center of the sphere of radius R and of mass density ρ is given by, $V_g^N(x) = 2\pi G\rho(R^2 + \frac{1}{3}x^2)$. Here, we took the center of the sphere as the reference point for the gravitational potential. This gravitational potential is, however, nothing but the potential of a simple harmonic oscillator shifted by a constant term. Consequently, the superconducting condensate in the straight segment of the loop inside the sphere acquires the quantized energy of a simple harmonic oscillator of fundamental frequency $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}G\rho$. Therefore, the energy of the Cooper pairs of effective mass $2m$ within the segment inside the sphere is given by,

$$E_I = \mu + 4\pi Gm\rho R^2 + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{III.1})$$

where μ is the chemical potential and n is a non-negative integer. Meanwhile, the superconducting condensate in the half-circle segment outside the sphere acquires the Newtonian gravitational potential energy,

$$E_O = \mu + 2GMm/R = \mu + \frac{8\pi}{3}Gm\rho R^2 \quad (\text{III.2})$$

Thanks to the two Josephson junctions, the outside condensate is made to interact with the inside condensate via tunneling. Let us then denote by K the real coupling amplitude between the outside and the inside condensates, and by $|I\rangle$ and $|O\rangle$ the inside and the outside states of the condensates, respectively. Then, the inside and outside Hamiltonians read $\mathcal{H}_I = E_I |I\rangle \langle I|$ and $\mathcal{H}_O = E_O |O\rangle \langle O|$, respectively, whereas the tunneling Hamiltonian reads $\mathcal{H}_T = K(|I\rangle \langle O| + |O\rangle \langle I|)$ [36]. The total system described by the state $|\psi\rangle = \psi_I |I\rangle + \psi_O |O\rangle$ then obeys the Schrödinger equation, $i\hbar\partial_t |\psi\rangle = (\mathcal{H}_I + \mathcal{H}_O + \mathcal{H}_T) |\psi\rangle$. Projecting this equation on the states $|I\rangle$ and $|O\rangle$, we arrive at the following coupled differential equations, respectively [36],

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_I}{\partial t} &= E_I \psi_I + K \psi_O, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_O}{\partial t} &= E_O \psi_O + K \psi_I. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Let us now take the expression for the wave functions of the inside and outside condensates to be, respectively, $\psi_O = \sqrt{\rho_O} e^{i\phi_O}$ and $\psi_I = \sqrt{\rho_I} e^{i\phi_I}$, where ρ_I , ρ_O , ϕ_I and ϕ_O are all real. Inserting these expressions inside Eqs. (III.3), and separating the imaginary from the real parts, we find, after taking into account that $\partial_t \rho_I = -\partial_t \rho_O$ by virtue of charge conservation and $\rho_I = \rho_O = \rho_0$, the following two differential equations,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_I}{\partial t} &= \frac{2K}{\hbar} \rho_0 \sin \Delta\phi, \\ \frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} &= \frac{2\Delta E}{\hbar}. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Here, we have set $\Delta\phi = \phi_I - \phi_O$ and $\Delta E = E_I - E_O$. By integrating the second equation we find the expression for the induced phase difference across the junction to be given by, $\Delta\phi = 2\hbar^{-1}\Delta E t + \phi_0$, for some arbitrary constant of integration ϕ_0 . Substituting this phase difference inside the first equation, and introducing the supercurrent density $J = \partial_t \rho_I$ of the pair condensate, we arrive at the following expression for the supercurrent density in terms of the energy ΔE ,

$$J = J_0 \sin\left(\phi_0 + \frac{2\Delta E}{\hbar}t\right). \quad (\text{III.5})$$

Here, J_0 is called the critical supercurrent of the junction and the resulting effect is called an AC Josephson effect [36]. It is this factor that requires low temperatures in order for any application of the AC Josephson effect to be able to allow high precision measurements. In other words, the low temperatures constraint imposed on SQUID-based measurements is universal and arises regardless of what specific phenomena giving rise the energy difference ΔE one is trying to detect. We shall come back to this point in Sec. V.

Inserting the gravitational energies E_I and E_O we found above for the inside and outside condensates, we deduce that the supercurrent density J is a sinusoidal function of time, with a quantized frequency Ω_n given by,

$$\Omega_n = \frac{8\pi G m \rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G \rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{III.6})$$

The very interesting fact about this resulting frequency is that it is made of two parts. The second part is quantized and depends only on the gravitational constant G and the density of the massive solid sphere ρ , whereas the first part is not quantized and depends, in addition, on the effective mass $2m$ of the Cooper pair and on the radius R of the massive sphere. A closer inspection shows that if a massive sphere made of a metal as dense as platinum or osmium is used, the two terms would be of the same order only if the sphere has a radius of the order of a meter. This implies that the size of the sphere is not a constraint and that one can actually use a smaller sphere. For this reason, we may very well focus only in the Newtonian case on the second term of this formula and neglect the first term which becomes four orders of magnitude smaller than the second term for a 1-cm radius massive sphere. However, for precision measurements purposes, one needs to include the first term as well.

B. With a Yukawa-like deviation from the ISL

In this section, we consider a deviation from the ISL for which the gravitational potential has the Yukawa-like form, $Gm_1 m_2 \frac{\alpha}{r} e^{-r/\lambda}$, where r is the distance between the two point masses m_1 and m_2 and α is a dimensionless parameter. The latter parameter quantifies the strength of the deviation from the ISL and might in principle depend on the baryonic composition of the massive sphere, in which case the Weak Equivalence Principle (WEP) becomes violated. The parameter λ has the dimensions of a length and represents the interaction range of the non-Newtonian gravitational force [11]. With such an additional term to the Newtonian potential, the full potential inside the sphere found in Ref. [28] has a highly nonlinear form. Consequently, the Schrödinger equation cannot be solved analytically and the energy eigenvalues can only be extracted numerically, a task which lies beyond the scope of this paper. The best we can do here is seek an analytic estimate using perturbation theory with the main goal to demonstrate to full potential of our setup. Furthermore, as we shall see in Sec. IV, the approximations we allow ourselves here are well justified by the very nature of our setup.

For a very small radius of the tunnel, such that $a \ll R$ and $a^2 \ll \alpha\lambda^2$, the gravitational potential inside the tunnel, found in Ref. [28] at any distance x from the center, can be approximated by, $V_g^N(x) + 4\pi G \rho \alpha \lambda^2 e^{-R/\lambda} \left[\frac{1}{x}(R + \lambda) \sinh \frac{x}{\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda}\right]$. Here, $V_g^N(x)$ represents the contribution we found above for the Newtonian part of the potential. In fact, the dominant contribution of these extra terms, as we shall see shortly, comes from an integration over x around the value $x = R$ for which those extra terms become all proportional to $\alpha\lambda^2$. Treating such extra terms as a small perturbation then, the gravitational potential felt by the condensate inside the tunnel is that of a perturbed harmonic oscillator. Indeed, using the time-independent perturbation theory, we have the following first-order correction to the n -th energy eigenvalue (III.1) of the unperturbed harmonic oscillator inside the tunnel:

$$E_I^Y \approx 8\pi G m \rho \alpha \lambda^2 e^{-R/\lambda} \int_0^R \left[\frac{R + \lambda}{x} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] \psi_n^2(x) dx. \quad (\text{III.7})$$

Here the superscript Y stands for Yukawa. We have introduced here the harmonic oscillator's normalized eigen-

functions [37] $\psi_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{b}{2}x^2} H_n(\sqrt{b}x)$, where $b = \frac{2m\omega_0}{\hbar}$ and $H_n(z)$ is the n -th Hermite polynomial [38]. Unfortunately, integral (III.7) does not admit any simple analytic expression for general n . For this reason, we shall content ourselves in Sec. IV with performing a numerical evaluation of such an integral for specific values of the various parameters R , α , λ and n .

On the other hand, the extra gravitational energy the external condensate acquires due to the additional Yukawa-like term is [28],

$$E_O^Y = 8\pi Gm\rho\alpha\lambda^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \left[\frac{R+\lambda}{R} \sinh \frac{R}{\lambda} - \cosh \frac{R}{\lambda} \right]. \quad (\text{III.8})$$

The difference between these two energies adds to the energy difference ΔE between the inside and the outside condensates. The resulting new quantized frequency of the AC Josephson effect then reads,

$$\Omega_n^{N+Y} \approx \frac{8\pi Gm\rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G\rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2(E_O^Y - E_I^Y)}{\hbar}. \quad (\text{III.9})$$

The last two terms in this expression represent then a correction to the frequency induced by the purely Newtonian potential. Detecting such a correction in the measured frequency amounts then to detecting a Yukawa-like deviation from the ISL.

C. With a power-law deviation from the ISL

In this section, we consider a deviation from the ISL that has the form of a power-law, $Gm_1 m_2 \frac{1}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^q$, where r_0 is a parameter with the dimensions of length and it represents the interaction range of the non-Newtonian interaction. In addition, this parameter quantifies also the strength of the non-Newtonian interaction. It is model-dependent, and hence composition-dependent, which means that it might also in principle lead to violations of the WEP. The power q is an integer [11].

With such an additional term in the Newtonian potential, with $q = 1$ (for simplicity) and for a very small radius of the tunnel, such that $a \ll R$, the gravitational potential inside the tunnel, at any distance x from the center, found in Ref. [28], can be approximated by, $V_g^N(x) + 2\pi G\rho r_0 \left(R + \frac{R^2-x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right)$. Here, $V_g^N(x)$ represents again the contribution we found above for the Newtonian part of the potential. Treating the extra terms as a small perturbation, we find the following first-order correction to the n -th energy eigenvalue (III.1) of the unperturbed harmonic oscillator inside the tunnel:

$$E_I^{PL} \approx 4\pi Gm\rho r_0 \int_0^R \left(R + \frac{R^2-x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right) \psi_n^2(x) dx. \quad (\text{III.10})$$

Here the superscript PL stands for power-law. We have introduced here again the harmonic oscillator's normalized eigenfunctions $\psi_n(x)$. As with the case of the Yukawa-like deviation from the ISL, there is no simple analytic expression for integral (III.10). We resort therefore to a numerical evaluation of such an integral by picking up specific values of the parameters R , n and r_0 . This is done in Sec. IV below. On the other hand, the extra gravitational energy the external condensate acquires due to the additional power-law term is [28],

$$E_O^{PL} = 4\pi Gm\rho R r_0. \quad (\text{III.11})$$

The difference between these two energies adds to the energy difference ΔE between the inside and the outside condensates. The resulting new quantized frequency of the AC Josephson effect then reads,

$$\Omega_n^{N+PL} \approx \frac{8\pi Gm\rho R^2}{3\hbar} + \sqrt{\frac{16\pi G\rho}{3}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2(E_O^{PL} - E_I^{PL})}{\hbar}. \quad (\text{III.12})$$

The last two terms in this expression represent again a correction to the frequency induced by the purely Newtonian potential. Detecting such a correction in the measured frequency amounts to detecting a power-law deviation from the ISL.

IV. EXPECTED EXPERIMENTAL RESULTS

As we have seen in Sec. III, our setup does not only predict a quantized frequency for the AC Josephson effect due to the gravitational effect of the solid sphere, but, more importantly, it predicts that the measured frequency would be different depending on whether or not gravity keeps obeying exactly the Newtonian ISL at short distances.

A. Measuring G

Even the possibility of simply providing a new way for measuring the Newtonian gravitational attraction is in itself a remarkable feature of our setup. Indeed, the prevailing disagreement between the presently measured values of G [39] makes any new proposal for measuring the latter very attractive[18].

In fact, the quantized frequency (III.6) provided by our setup is directly determined by the gravitational constant G . Taking the latter to be the presently recommended value[39] $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$, and using a 1 cm-radius solid sphere of, say, osmium of mass density $\rho = 2.25872 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, we find the fundamental frequency $\omega_0 = 2.51288 \times 10^{-3} \text{ Hz}$ and the supercurrent frequency Ω_0 evaluates to $2.52379 \times 10^{-3} \text{ Hz}$ for the ground state $n = 0$ of the harmonic oscillator. This is an easily measurable frequency in the lab. The number of decimal places one allows inside the gravitational constant and inside the mass density of the sphere is what determines the precision one achieves for the frequency Ω_0 . As such, the setup could also be used the other way around. That is, by knowing the mass density ρ of the solid sphere to a high precision and by measuring the frequency Ω_0 of the supercurrent with an arbitrary number of decimal places, one would measure the gravitational constant G up to the desired precision.

Now, one might argue that frequencies of the order of 10^{-3} Hz are already too small to allow such large numbers of decimals in the measurements (see, however, Refs. [40, 41] for reports on the low-frequency applications of SQUIDS). Nonetheless, as we shall soon see below, there is an important beneficial experimental side-effect of the so-called gravitationally induced electric field, not yet taken into account here, which dramatically helps amplify the gravitational effect on the induced AC Josephson current. Let us first, however, turn to the possibility of experimentally distinguishing between the purely Newtonian gravity and the two possible deviations from the ISL examined above.

B. Detecting a Yukawa-like deviation from the ISL

To obtain the estimate (III.9) for the induced frequency, we had to make the assumption that $a \ll R$ in both cases and we had to make the extra assumption that $a^2 \ll \alpha\lambda^2$ for the Yukawa-like deviation. These assumptions are actually not at all required by the formalism on which our proposal is based, but they do make the resulting gravitational potentials much easier to handle analytically when extracting the induced frequencies. In fact, all our setup requires is that one finds the gravitational potential energy difference between the condensates of the superconductor inside and outside of the solid sphere. As such, we might as well have relied on a numerical analysis when evaluating the gravitational potential at the outset. Although such an enterprise would have allowed a much wider applications range for our setup, it would nevertheless have taken us way beyond the goal and scope of the present Letter.

Fortunately, however, the very nature of our setup does indeed justify the approximations we adopted above in order to extract the analytic expressions (III.7) and (III.10). In fact, the D-shaped superconductor in our setup has, as is customary in standard SQUIDS [42, 43], a very small thickness which does not exceed a few micrometers allowing, thereby, a separation distance $2a$ between the two hemispheres to be of the order of a few micrometers as well or below. Therefore, even Yukawa-like deviations that are within a range such that, $\alpha\lambda^2 \sim 10^{-10} \text{ m}^2$, would be largely within the framework of the analytic approximations we relied on above.

It is worth noting here that there are presently many imposed constraints on the Yukawa parameters α and λ coming from various experimental tests of gravity. These experiments include Earth-based ones[1–13], of which the Eöt-Wash group[5] has provided a neat excluded region on the Yukawa (α, λ)-plane for α within the interval $[10^{-4} \sim 10^8]$ and for λ within the interval $[10^{-6} \text{ m} \sim 10^{-2} \text{ m}]$. On the other hand, older[3] and more recent[14–18] space-based tests allow to put constraints on the Yukawa (α, λ)-plane for α within the interval $[10^{-10} \sim 10^{-1}]$ and for λ within the interval $[10^{-2} \text{ m} \sim 10^{14} \text{ m}]$. In all cases, however, the domain in the Yukawa (α, λ)-plane for which α and λ lie below certain regions still remains inaccessible. In fact, the major obstacle in reaching lower values of α and/or λ in all experimental tests relying on the gravitational attraction between two masses — hence, that are mechanical in nature — remains of course the sensitivity of the setups to environmental noise. The sources of noise are mainly thermal fluctuations, seismic noise, and parasitic non-gravitational forces. In this respect, our setup stands out with its insensitivity to seismic vibrations and unwanted parasitic forces. As for thermal fluctuations, our setup reaches its full potentiality as soon as the required low temperatures for superconductivity to emerge are achieved. Thermal fluctuations around

such temperatures, as we shall see below, do not alter the performance of the setup. With such advantages, our setup allows to effectively reach the presently inaccessible regions of the product $\alpha\lambda^2$.

For concreteness, we shall now resort to a numerical evaluation of the integral (III.7) by adopting specific values of the various parameters of the experiment. If we assume that a 1 cm-radius massive sphere of osmium is used, then we have again $\omega_0 = 2.51288 \times 10^{-3}$ Hz and thus $b = 43.4124 \text{ m}^{-2}$. For the case $\alpha = 10^{-4}$ and $\lambda = 1$ m, which still lies in the presently inaccessible region of the Yukawa (α, λ) -plane, the correction E_I^Y to the energy of the ground state of the harmonic oscillator is easily evaluated from Eq. (III.7) to be $E_I^Y \approx \hbar \times 1 \times 10^{-8}$ Hz. On the other hand, with such parameters Eq. (III.8) gives $E_O^Y \approx \hbar \times 3.2 \times 10^{-7}$ Hz. Therefore, the resulting correction to the measured frequency Ω_0 as given by Eq. (III.9) evaluates to 6.2×10^{-7} Hz. For the case $\alpha = 10^8$ and $\lambda = 10^{-6}$ m, which is also presently within the inaccessible region of the Yukawa (α, λ) -plane, the correction E_I^Y to the energy of the ground state of the harmonic oscillator is easily evaluated from Eq. (III.7) to be $E_I^Y \approx \hbar \times 10^{-14}$ Hz. On the other hand, with such parameters Eq. (III.8) gives $E_O^Y \approx \hbar \times 2 \times 10^{-9}$ Hz. Therefore, the resulting correction to the measured frequency Ω_0 as given by Eq. (III.9) evaluates to 4×10^{-9} Hz.

C. Detecting a power-law deviation from the ISL

For a power-law deviation that has the parameter $r_0 = 10^{-3}$ m, we find from Eq. (III.10) that $E_I^{PL} \approx \hbar \times 1.1 \times 10^{-7}$ Hz whereas Eq. (III.11) gives the value $E_O^{PL} \approx \hbar \times 1.64 \times 10^{-6}$ Hz. From Eq. (III.12) we find then that the correction to the frequency Ω_0 is 3.06×10^{-6} Hz. Remarkably, however, our setup is, as mentioned above, immune to the other non-gravitational forces like the Casimir force and the van der Waals that usually plague any short-distance investigation of the gravitational attraction that rely on the standard mechanical devices. In fact, as the gravitational energy of the condensate outside the sphere as given in Eq. (III.11) depends on the product Rr_0 , we see that if we allow for a radius R of the sphere of the order of $R = 10$ cm, the probed distance r_0 can go down to the order of $r_0 = 10^{-4}$ m for the same frequency correction of the order of 1.40×10^{-6} Hz.

One might still argue that these frequencies are still way too small to allow any definitive conclusion as to the existence of non-Newtonian forces. However, as mentioned above, we shall look closer now at the effect of the induced electric field in the superconductor due to the gravitational field.

D. The effect of the induced electric field

Let us then revisit our results (III.6), (III.9) and (III.12), and perform some ramifications on them. First of all, as it is shown in Ref. [29], by taking into account the well-known gravitationally induced electric field inside a metal under the influence of a gravitational field [44–46], the effect of the gravitationally induced harmonic oscillator potential $V_g(x)$ on each of the electrons of the Cooper pairs is amplified by a factor of $\frac{1}{7}M/m$, where M is the atomic mass of the superconductor's lattice. In fact, for a given gravitational potential $V_g(x)$ the induced electric potential felt by the electrons is $V_e(x)$ such that $eV_e(x) = \frac{1}{7}MV_g(x)$ [46]. Thereby, the effective gravitational energy acquired by the Cooper pairs is actually due to the induced electric potential energy and is given by $E = 2m(\frac{1}{7}MV_g(x)/m)$.

Therefore, the frequency Ω_0 due to the purely Newtonian potential in Eqs. (III.6), (III.9) and (III.12) becomes amplified by the factor $\frac{1}{7}M/m$. Similarly, the correcting terms in Eqs. (III.9) and (III.12) become also multiplied by such a factor as it arises from Eqs. (III.7), (III.8), (III.10) and (III.11) giving the gravitational potential energies E_I and E_O of the condensate. For a superconductor made of lead, the atomic mass of which is 3.44064×10^{-25} kg, the amplifying factor $\frac{1}{7}M/m$ reaches the value 5.39575×10^4 . Inserting such a factor into our estimates for the frequency Ω_0 , we find that the latter increases to 1.1723 Hz. Similarly, the corrections to the latter frequency become also affected. For the Yukawa-like deviation with $\alpha = 10^{-4}$ and $\lambda = 1$ m the frequency correction is evaluated to be 0.0334 Hz. For $\alpha = 10^8$ and $\lambda = 10^{-6}$ m, the frequency correction is 0.0002 Hz. For a power-law deviation, this amplifying factor allows to reach down to short distances of the order $r_0 \sim 10^{-4}$ m even with a 10 cm-radius sphere of osmium, for which the frequency correction becomes as high as 0.07 Hz.

V. DISCUSSION AND CONCLUSION

We have presented a new setup based on a superconductor made of two pieces. One piece is immersed inside a massive solid sphere and the other piece is wrapped around the latter. We saw that such a setup could be used not only to detect the usual Newtonian gravitational interaction and to measure the gravitational constant G to very high precision, but also to detect any deviation from the ISL of gravity. In fact, any gravitational potential inside the tunnel that would be due to various possible deviations from the ISL introduced in the literature would modify the

pure harmonic oscillator potential we derived for the inside of the solid sphere, and the Josephson frequency Ω_0 would be slightly different from what is found from pure Newtonian gravity. Unfortunately, as the gravitational potential due to a deviation from the ISL is highly nonlinear [28], a rigorous analytic expression for the gravitational potential energy of the condensate caused by such a deviation cannot be obtained. A systematic numerical analysis is required and will be attempted elsewhere. Nevertheless, the rough approximations we relied on here in order to evaluate such potentials were amply justified by the very nature of our setup which accommodates such estimates thanks to the possibility of using a very small diameter of the tunnel inside the sphere.

Yet, the mere capability of the setup to probe deviations from the ISL to unprecedentedly shorter distances offers new possibilities to use it to probe other gravity-related phenomena such dark matter and gravitational waves. In fact, in contrast to all the various ways SQUIDs have so far been proposed in the literature to test gravity [42, 43, 47–51], our setup offers a much more compact design and much more economy. Now, while detecting gravitational waves using our setup is probably out of reach as gravitational wavelengths are of the order of thousands of kilometers, we believe that it would be possible to adapt the key principle behind our present proposal to achieve an accumulated effect in order to achieve such a detection. Nonetheless, it is not excluded that, thanks to its ability to detect deviations from the ISL, our setup could be used as a table-top experiment to detect dark matter. In fact, as it has already been suggested in Ref. [52], dark matter could be responsible for the violation of the WEP. As such, detecting the latter would be equivalent to detecting the former. As we saw, our setup offers, indeed, the possibility of measuring the gravitational interaction to high precision using massive solid spheres made of different materials. Any slight deviation that would be due to different compositions of the used solid spheres would signal a violation of the WEP.

Let us now discuss the important issue of thermal fluctuations. In fact, one would expect that by exciting the harmonic oscillator within the sphere by using an applied voltage on both sides of the superconductor, one could benefit from having higher energy levels with larger integers n which lead to an increase in the value of the quantized frequency and reduce, thereby, the effect of thermal noise. However, we should keep in mind that while the motion of the Cooper pair condensate is really governed by the potential of a simple harmonic oscillator inside the tunnel, the fact that the Josephson junctions constitute finite potential barriers on both sides alters the energy of the higher levels of the harmonic oscillator [53]. Such barriers constitute indeed a real perturbation, albeit a tiny one due to the very high potential barrier made by the junctions compared to the gravitational potential. Only the low-lying states of the harmonic oscillator can thus be treated as pure unperturbed states to a very good approximation.

Although the experiment proposed here is supposed to be performed at extremely low temperatures in order to prevent thermal fluctuations from overwhelming the gravitational potential inside the tunnel, such fluctuations are inevitable as long as the experiment is conducted at finite temperatures. From the order of magnitude of the ground state of the harmonic oscillator one would wish indeed to ideally achieve a temperature of a few picokelvins for the thermal energy to be of the same order as that of the ground state. It is clear, however, that such extremely low temperatures are presently beyond reach in Earth-based laboratories in which the lowest temperatures achieved so far are tens of picokelvins and realized only on a few atoms [54]. In superconductors, the temperatures achieved are of the order of a few millikelvins [55]. Yet, it is easy to check that the thermal fluctuations cannot screen the gravitational effect, and hence, that temperatures of the order of a picokelvin are not necessary for the present experiment to be successfully carried out based on the following classical argument [56]. Letting $\delta\phi$ denote the induced phase difference due to thermal fluctuations, expression (III.6) yields $J = J_0 \sin(\phi_0 + \frac{2}{\hbar}Et + \delta\phi)$. As $\sin \delta\phi$ averages to zero, we have $\langle J \rangle = \bar{J}_0 \sin(\phi_0 + \frac{2}{\hbar}Et)$, where only the critical supercurrent becomes thus averaged to $\bar{J}_0 = J_0 \langle \cos \delta\phi \rangle$. At temperature T , the average critical supercurrent is then approximated by $e^{-k_B T/2K}$, where k_B is the Boltzmann constant and K is the coupling energy at the junction [56]. Therefore, the low temperature constraints are only dictated by the precision reached by the presently used current detectors. Presently used temperatures in SQUIDs of the order of a few kelvins or below are amply sufficient.

Finally, we would like to conclude by emphasizing that the key idea behind our setup is to exploit the difference between the gravitational potentials inside and outside the solid sphere. We suggested here to use such a difference to create a phase difference between the condensates of two pieces of the same superconductor. Such a phase difference, in turn, manifests itself in the AC Josephson effect. It is clear, then, that such a strategy can very well be carried out using other macroscopic quantum states than the one supplied by a superconductor. In particular, the superconductor in our setup can easily be replaced by a superfluid or any Bose-Einstein gas condensate, as long as the induced phase difference allows to give rise to a detectable interference effect in the manner reported in Refs. [57, 58].

Acknowledgments

The authors are grateful to the anonymous referees for their comments that helped improve the clarity and presentation of the manuscript. This work is supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of

Canada (NSERC) Discovery Grant (RGPIN-2017-05388).

-
- [1] J. K. Hoskins, R. D. Newman, R. Spero and J. Schultz, “Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm”, *Phys. Rev. D* **32**, 3084 (1985).
- [2] M. V. Moody and H. J. Paik, “Gauss’s law test of gravity at short range”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1195 (1993).
- [3] J. C. Long, H. W. Chan and J. C. Price, “Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime”, *Nucl. Phys. B* **539**, 23 (1999) [arXiv:hep-ph/9805217].
- [4] C. D. Hoyle *et al.*, “Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for “large” extra dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1418 (2001) [arXiv:hep-ph/0011014].
- [5] E. G. Adelberger *and for the Eöt-Wash Group*, “Sub-mm tests of the gravitational inverse-square law”, *CPT and Lorentz Symmetry*, **9** (2002) [arXiv:hep-ex/0202008].
- [6] E. G. Adelberger, B. R. Heckel and A. E. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 77 (2003) [arXiv:hep-ph/0307284].
- [7] D. J. Kapner *et al.*, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 021101 (2007) [arXiv:hep-ph/0611184].
- [8] E.G. Adelberger *et al.*, “Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 102 (2009)
- [9] A. O. Sushkov, *et al.*, “New experimental limits on non-Newtonian forces in the micrometer-range”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 171101 (2011) [arXiv:1108.2547].
- [10] S-Q. Yang *et al.*, “Test of the Gravitational Inverse Square Law at Millimeter Ranges”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 081101 (2012).
- [11] J. Murata and S. Tanaka, “Review of short-range gravity experiments in the LHC era”, *Class. Quantum Grav.* **32**, 033001 (2015) [arXiv:1408.3588].
- [12] C-G. Shao *et al.*, “Search for Lorentz invariance violation through tests of the gravitational inverse square law at short-ranges”, *Phys. Rev. D* **91**, 102007 (2015) [arXiv:1504.03280].
- [13] W-H. Tan *et al.*, “New Test of the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range with Dual Modulation and Compensation”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 131101 (2016).
- [14] S. G. Turyshev *et al.*, “Advancing Tests of Relativistic Gravity via Laser Ranging to Phobos”, *Experimental Astronomy* **28**, 209 (2010) [arXiv:1003.4961v2].
- [15] M. Armano *et al.*, “Sub-Femto- g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 231101 (2016).
- [16] Pierre Touboul *et al.*, “MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 231101 (2017) [arXiv:1909.10598].
- [17] J. Bergé *et al.*, “ISLAND: The inverse square law and Newtonian dynamics space explorer”, *42nd COSPAR Scientific Assembly (2018). Vol. 42, p. H0.3-6-18.* [arXiv:1809.00698].
- [18] M. Armano *et al.*, “Novel methods to measure the gravitational constant in space”, *Phys. Rev. D* **100**, 062003 (2019).
- [19] S. A Werner, “Gravitational, rotational and topological quantum phase shifts in neutron interferometry”, *Class. Quantum Grav.* **11**, A207 (1994).
- [20] V.V. Nesvizhevsky *et al.*, “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Nature* **415**, 297 (2002).
- [21] V.V. Nesvizhevsky *et al.*, “Measurement of quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field”, *Phys. Rev. D* **67**, 102002 (2003) [arXiv:hep-ph/0306198].
- [22] V.V. Nesvizhevsky *et al.*, “Study of the neutron quantum states in the gravity field”, *Eur. Phys. J. C* **40**, 479 (2005) [arXiv:hep-ph/0502081].
- [23] G.W. Biedermann, X.Wu, L. Deslauriers, S. Roy, C. Mahadeswaraswamy and M.A. Kasevich, “Testing gravity with cold-atom interferometers”, *Phys. Rev. A* **91**, 033629 (2015) [arXiv:1412.3210].
- [24] G.V. Kulin, A.I. Frank, S.V. Goryunov, D.V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, A.N. Strepetov and V.A. Bushuev, “Spectrometer for new gravitational experiment with UCN”, *In Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **792**, 38 (2015) [arXiv:1502.03243].
- [25] H. Abele, “Precision experiments with cold and ultra-cold neutrons”, *Hyperfine Interact* **237**, 155 (2016).
- [26] P. Asenbaum *et al.*, “Phase Shift in an Atom Interferometer due to Spacetime Curvature across its Wave Function”, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 183602 (2017).
- [27] V. Xu *et al.*, “Probing gravity by holding atoms for 20 seconds”, *Science* **366**, 745 (2017) [arXiv:1907.03054].
- [28] F. Hammad, A. Landry and K. Mathieu, “On the possibility of testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference”, arXiv:1910.13814v2.
- [29] F. Hammad, A. Landry and K. Mathieu, “A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect”, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 449 (2020) [arXiv:2005.10631].
- [30] C. Kiefer and C. Weber, “On the interaction of mesoscopic quantum systems with gravity”, *Annalen Phys.* **14**, 253 (2005) [arXiv:gr-qc/0408010].
- [31] A. Landry and F. Hammad, “Landau levels in a gravitational field: The Schwarzschild spacetime case”, arXiv:1909.01827.
- [32] F. Hammad and A. Landry, “Landau levels in a gravitational field: The Levi-Civita and Kerr spacetimes case”, *Eur. Phys.*

- J. Plus* **135**, 90 (2020) [arXiv:1910.01899v2].
- [33] K. von Klitzing, “Quantum Hall Effect: Discovery and Application”, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **8**, 13 (2017).
- [34] G. A. Ummarino and A. Gallerati, “Superconductor in a weak static gravitational field”, *Eur. Phys. J. C.* **77**, 549 (2017) [arXiv:1710.01267].
- [35] Y.-P. Hu, H.-F. Li, H.-B. Zeng, H.-Q. Zhang, “Holographic Josephson Junction from Massive Gravity”, *Phys. Rev. D* **93**, 104009 (2016) [arXiv:1512.07035].
- [36] A. Barone and G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect*. (Wiley & Sons, New York, 1982).
- [37] J.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, First Edition, (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949).
- [38] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
- [39] P. J. Mohr, D. B. Newell and B. N. Taylor, “CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014”, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035009 (2016) [arXiv:1507.07956].
- [40] T. Ryhänen, H. Seppä, R. Ilmoniemi and J. Knuutila, “SQUID magnetometers for low-frequency applications”, *J. Low Temp. Phys.* **76**, 287 (1989).
- [41] M. Salomon *et al.*, “Nanohertz Frequency Determination for the Gravity Probe B HF SQUID Signal”, *Review of Scientific Instruments* **82**, 125110 (2011) [arXiv:1111.4521].
- [42] H. Weinstock (Ed.), *SQUID Sensors: Fundamentals, Fabrication and Applications*, Nato Science Series E. (Springer, Netherlands, 1995).
- [43] A. H. Silver, “How the SQUID was born, Superconduction”, *Supercond. Sci. Technol.* **19**, S173 (2006).
- [44] L. I. Schiff and M. V. Barnhill, “Gravitation-Induced Electric Field near a Metal”, *Phys. Rev.* **151**, 1067 (1966).
- [45] F. C. Witteborn and W. M. Fairbank, “Experimental Comparison of the Gravitational Force on Freely Falling Electrons and Metallic Electrons”, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1049 (1967).
- [46] A. J. Dessler, F. C. Michel, H. E. Rorschach and G. T. Trammell, “Gravitationally Induced Electric Fields in Conductors”, *Phys. Rev.* **168**, 737 (1968).
- [47] D. Fargion, L. Chiatti and A. Aiello, “Quantum Mach effect by Sagnac phase shift on Cooper pairs in rf-SQUID”, *Physica C: Superconductivity* **336**, 27 (2000) [arXiv:astro-ph/9606117].
- [48] W. Vodel *et al.*, “High Sensitive DC SQUID Based Position Detectors for Application in Gravitational Experiments at the Drop Tower Bremen”, P. 248 in *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*. C. Lammerzahl, C. W. F. Everitt and F. W. Hehl (Eds.), Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001).
- [49] A. Sterck, S. Weiss and D. Koelle, “SQUID ratchets: basics and experiments”, *Appl. Phys. A* **75**, 253 (2002).
- [50] C. Beck, “Axion physics in a Josephson junction environment”, *Physica C: Superconductivity* **473**, 21 (2012) [arXiv:1008.2085].
- [51] B. Kiczek, M. and K. I. Wysokinski, “DC SQUID as a sensitive detector of dark matter”, arXiv:1904.00653.
- [52] S. M. Carroll *et al.*, “Dark-Matter-Induced Weak Equivalence Principle Violation”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 011301 (2009) [arXiv:0807.4363].
- [53] W. N. Mei and Y. C. Lee, “Harmonic oscillator with potential barriers-exact solutions and perturbative treatments”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 1623 (1983).
- [54] T. Kovachy *et al.*, “Matter wave lensing to picokelvin temperatures”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 143004 (2015) [arXiv:1407.6995].
- [55] R. G. Sharma, *Superconductivity: Basics and Applications to Magnets*, (Springer, New York, 2015).
- [56] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Second Edition. (McGrw-Hill, New York, 1996).
- [57] O. Avenell and E. Varoquaux, “Josephson Effect and Phase Slippage in Superfluids”, *Jpn. J. Appl. Phys.* **26**, 1798 (1987).
- [58] C. Ryu *et al.*, “Experimental Realization of Josephson Junctions for an Atom SQUID”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 205301 (2013) [arXiv:1304.8095].

Chapitre 10

Conclusion

L'objectif général d'étudier en détail certains comportements des particules quantiques sous l'effet de la gravitation est atteint. On a proposé des études sur l'influence de la gravitation sur différents phénomènes quantiques : cela a aussi été atteint. Pour ce qui est des différentes propositions d'expériences de mesure de la gravitation : c'est également atteint.

- (1) **Les transitions quantiques induites par la gravitation** : Ces transitions pour les neutrons ultra-froids (UCN) sont observables et seraient mesurables en laboratoire dans un certain avenir. Cela vaut pour une configuration sphérique, mais idéalement pour une configuration cylindrique. Il faudrait produire au moins 10^5 , mais idéalement 10^6 , de ces neutrons ultra-froids pour observer ces transitions et effectuer l'expérience sur un temps d'au moins 1760 secondes, soit deux fois la demi-vie du neutron ($\tau = 880$ sec).
- (2) **L'effet laser** : On obtient un coefficient d'émission de gravitons par des neutrons à un niveau très faible : soit de l'ordre de 10^{-78} s^{-1} . Cela est très difficilement observable ; même avec une très forte amplification. Cela est dû au faible couplage G/c^5 présent dans l'expression du coefficient d'émission.
- (3) **Les niveaux de Landau** : On obtient des corrections quantiques d'ordres 1 et 2 des niveaux conventionnels pour trois types d'espace-temps. Pour l'espace-temps de Schwarzschild avec la masse sphérique perturbatrice au centre dans l'approximation newtonienne : les corrections d'ordres 1 et 2 dépendent du niveau n , mais dépendent également du nombre quantique azimutal ℓ . Cela enlève la dégénérescence infinie des niveaux de Landau conventionnels ; le tout occasionne la subdivision des niveaux de Landau selon n et ℓ . On obtient les mêmes types de résultats pour l'espace-temps de Kerr ; mais il y a en plus des termes supplémentaires contenant le moment cinétique angulaire de la masse perturbatrice du centre. Pour l'espace-temps de Levi-Civita avec la masse cylindrique au centre, on a seulement la correction d'ordre 1 ; on observe encore la suppression de la dégénérescence des niveaux et donc la subdivision des niveaux selon n et ℓ . Toutes les corrections sont obtenues par les perturbations

quantiques et par la méthode d'approximation par le potentiel de l'oscillateur harmonique. Ces corrections sont très mesurables expérimentalement.

- (4) **L'expérience d'interférence** : Le tout donne des valeurs de déphasages bien précises et mesurables dans un certain avenir. Cela est vrai pour les corrections à la gravitation newtonienne de type Yukawa comme pour les corrections en puissance inverse. On obtient des déphasages de 10^{-18} à 10^{-4} radian pour une correction de type Yukawa et de 10^{-3} à 10^{-9} radian pour les différents cas de puissances inverses. On a fait la même démarche pour le gravitomagnétisme, même si cela donne un faible déphasage (10^{-19} radian versus 10^{-2} radian pour la gravitation newtonienne). Cela prendra certaines innovations technologiques pour la possibilité de mesures des résultats prescrits, car ce sont de faibles valeurs par rapport au déphasage prévu pour la gravitation newtonienne.
- (5) **L'influence de la gravitation sur l'effet Hall quantique (QHE)** : On obtient de faibles corrections pour le champ gravitationnel terrestre (10^{-10}) et pour les hémisphères massives (10^{-14} sur les niveaux de Landau). Parallèlement, on a réobtenu les corrections gravitationnelles aux niveaux de Landau avec la subdivision des niveaux par le nombre quantique azimutal ℓ . Heureusement, via le champ électrique induit par la gravitation, on rehausse d'un facteur de 10^4 les corrections gravitationnelles précédentes. On a même proposé la mesure des corrections qui seraient de type Yukawa ou en puissance inverse. Avec les résultats obtenus, les valeurs anticipées ne permettent pas de discerner clairement ces interactions par rapport à l'interaction newtonienne. On pourra toutefois mesurer la constante G avec précision.
- (6) **L'effet de la gravitation sur l'effet Josephson** : On propose un montage similaire à celui de l'expérience basée sur les interférences quantiques, mais pour des températures près du zéro absolu. On obtient une fréquence du courant de Josephson de $2,5 \times 10^{-3}$ hertz pour le potentiel gravitationnel newtonien et des valeurs de corrections de fréquence de 10^{-7} à 10^{-9} hertz pour le potentiel gravitationnel de type Yukawa ainsi que de 10^{-6} hertz pour le potentiel gravitationnel en puissances inverses. On veut encore une fois mesurer les corrections de type Yukawa et de puissances inverses, mais aussi la constante G avec grande précision. Avec le champ électrique induit par le champ gravitationnel, on rehausse la fréquence de Josephson d'un facteur 10^2 pour la gravitation newtonienne et d'un facteur 10^4 pour les différentes corrections. Cela augmente la mesurabilité des fréquences de Josephson et donc l'influence de la gravitation sur le courant.

10.1. Pour des travaux futurs

On aurait pu étudier d'autres phénomènes physiques avec les outils employés dans cette thèse. Par exemple, on aurait pu étudier l'influence de l'interaction gravitationnelle sur les structures fine et hyperfine de l'atome d'hydrogène. Ou encore, on pourrait aussi étudier les effets de la gravitation sur la diffusion de Rutherford ou encore sur celle de Compton [6, 20].

Pour l'étude des corrections aux niveaux de Landau, on pourrait traiter en détail des effets du spin de la particule test sur les corrections. On sait dans la littérature que le spin des particules quantiques est sensible et couple avec le champ magnétique. Tout dernièrement, on a ajouté une section supplémentaire au troisième article qui traite en détail de la solution de l'équation de Klein-Gordon purement relativiste. On y emploie des méthodes similaires au reste de cet article. On arrive encore une fois à la subdivision des niveaux de Landau conventionnels ainsi qu'à la suppression de la dégénérescence infinie. En plus, on a estimé les nouvelles valeurs des niveaux et de ses corrections pour le cas astrophysique d'une naine blanche typique.

Pour le sixième article, on pourrait étudier en détail les effets de la gravitation sur l'effet Hall quantique fractionnaire. On pourrait inclure notamment les interactions entre les électrons du gaz de type 2DEG dans les modèles développés dans cet article [127]. On pourrait même proposer des expériences réalisables en laboratoire pour vérifier clairement ces théories.

Pour l'effet Josephson avec la gravitation : le phénomène offre beaucoup de possibilités. On pourrait avec un montage similaire à celui du septième article étudier plus en détail la matière sombre [128]. Comme mentionné à la fin de cet article, il est question de violation des principes d'équivalences en relativité générale. Cela pourrait être un indice de faiblesse de la théorie relativiste de la gravitation.

Bref, cette présente thèse a permis de mettre en lumière et d'avancer grandement à propos de la quantification de l'énergie des particules en présence de l'interaction gravitationnelle. Ce n'est pas un voyage vers la lune, mais l'ensemble des sept articles de cette thèse ont été un grand pas vers une étude plus profonde de l'influence de la gravitation, entre-autre la relativité générale, sur le comportement des objets décrits par la mécanique quantique. Un petit pas vers une réconciliation entre deux théories qui sont à priori diamétralement opposées.

Annexe A

Évaluation des intégrales avec les fonctions de Kummer à l'aide des polynômes de Laguerre

On expose ici en détail les étapes de calculs des intégrales présentes dans les troisième et quatrième articles de cette thèse.

D'abord, on doit évaluer les intégrales impropres impliquant un produit de deux fonctions de Kummer. Ce type d'intégrale peut donner comme résultat des ratios contenant des produits de fonctions Gamma [21]. On peut aussi adopter une meilleure stratégie. On fera un détour en exprimant les fonctions de Kummer en termes des polynômes de Laguerre et donc les intégrales seront en termes de ces polynômes. En fait, la fonction Gamma ($\Gamma(x)$) admet des pôles pour $x = 0, -1, -2, \dots$. Comme les fonctions de Kummer ont un argument en $-n$, en mettant nos conditions de complétude dans ces intégrales [21], on obtient des ratios de fonctions Gamma avec pôles qui n'ont aucun sens autant du point de vue mathématique que physique. C'est pour cette raison que l'on utilise les polynômes de Laguerre.

Selon les références [129, 130], la relation entre une fonction hypergéométrique de Kummer et un polynôme de Laguerre généralisé est la suivante ;

$$L_n^{(b)}(x) = \frac{\Gamma(n+b+1)}{n!\Gamma(b+1)} {}_1F_1(-n; b+1; x). \quad (\text{A.0.1})$$

D'un autre point de vue, une intégrale impropre de type "transformée de Laplace" impliquant deux polynômes de Laguerre généralisés s'exprime comme suit selon les références [129, 130] :

$$\int_0^\infty x^b \exp(-x) L_n^{(b)}(x) L_m^{(b)}(x) dx = \frac{\Gamma(n+b+1)}{n!} \delta_{nm}. \quad (\text{A.0.2})$$

En substituant l'équation (A.0.1) dans l'équation (A.0.2), on obtient l'équation (A.0.2) en termes des fonctions de Kummer :

$$\int_0^\infty x^b \exp(-x) {}_1F_1(-n; b+1; x) {}_1F_1(-m; b+1; x) dx = \frac{n! [\Gamma(b+1)]^2}{\Gamma(n+b+1)} \delta_{nm}. \quad (\text{A.0.3})$$

Le résultat associé à l'équation (A.0.3) montre que les fonctions d'onde utilisées ici forment une base orthonormée de fonctions propres. De là, on a aussi l'intégrale généralisée suivante qui implique également deux polynômes de Laguerre généralisés [129, 130] :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{c-1} \exp(-zx) L_n^{(b)}(zx) L_m^{(b')}(zx) dx \\ &= z^{-c} \frac{\Gamma(c) \Gamma(n+b+1) \Gamma(m+b'+1-c)}{n! m! \Gamma(b+1) \Gamma(b'+1-c)} {}_3F_2(-n, c, c-b; b'+1, c-m-b'; 1), \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

où ${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1)$ est la fonction hypergéométrique généralisée qui est définie par la série infinie suivante [21, 131] :

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k k!}. \quad (\text{A.0.5})$$

Dans la dernière équation, $(a)_k$ est le symbole de Pochhammer qui se définit comme : $(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$ et $(a)_0 = 1$. En combinant les équations (A.0.1) et (A.0.4), on obtient la relation :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{c-1} \exp(-zx) {}_1F_1(-n; b+1; zx) {}_1F_1(-m; b'+1; zx) dx \\ &= z^{-c} \frac{\Gamma(c) \Gamma(b'+1) \Gamma(m+b'+1-c)}{\Gamma(b'+1-c) \Gamma(m+b'+1)} \times {}_3F_2(-n, c, c-b'; b+1, c-m-b'; 1). \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

Toutefois, on obtient la relation suivante en utilisant le théorème d'addition pour les fonctions de Kummer [21] :

$${}_1F_1(a, b; z+z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z_0^k}{(b)_k k!} {}_1F_1(a+k, b+k; z). \quad (\text{A.0.7})$$

En partant de l'équation (A.0.6), on déplace la borne inférieure en x de 0 à x_0 . Ensuite, on utilise le théorème (A.0.7) pour remplacer les fonctions de Kummer et l'équation (A.0.6) se transforme en :

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{\infty} x^{c-1} e^{(-zx)} {}_1F_1(-n; b+1; zx) {}_1F_1(-m; b+1; zx) dx \\
&= \int_0^{\infty} (x+x_0)^{c-1} e^{(-z(x+x_0))} {}_1F_1[-n; b+1; z(x+x_0)] {}_1F_1[-m; b+1; z(x+x_0)] dx \\
&= e^{-zx_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{x_0^k \Gamma(c)}{k! \Gamma(c-k)} \frac{(-n)_p (-m)_q (zx_0)^{p+q}}{p! q! (b+1)_p (b+1)_q} \int_0^{\infty} x^{c-k-1} e^{-zx} \\
&\quad \times {}_1F_1(-n+p, b+1+p; zx) {}_1F_1(-m+q, b+1+q; zx) dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-zx_0} \Gamma(c) (-n)_p (-m)_q x_0^{p+q+k}}{k! p! q! (b+1)_p (b+1)_q} \frac{\Gamma(b+1+q) \Gamma(m+b+1+k-c)}{\Gamma(b+q+1+k-c) \Gamma(m+b+1)} z^{p+q+k-c} \\
&\quad \times {}_3F_2(-n+p, c-k, c-k-b-q; b+p+1, c-k-m-b; 1).
\end{aligned} \tag{A.0.8}$$

Dans la troisième étape de l'équation (A.0.8), le théorème binomial généralisé a été utilisé pour développer le terme $(x+x_0)^{c-1}$ en séries de puissances en x et x_0 . Par la suite, on a utilisé l'équation (A.0.7) pour simplifier ces termes. On a encore, dans la dernière étape, utilisé le résultat de l'équation (A.0.6) pour finalement obtenir l'équation (A.0.8) finale.

Cette dernière est vraiment un résultat général permettant de résoudre toutes les intégrales impropres présentes dans les troisième et quatrième articles. En effectuant le changement de variable $x = \rho^2$ et en mettant $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + 1$ ainsi que $x_0 = \rho_0^2$, l'équation (A.0.8) nous donne comme résultat :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{mnl} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \tag{A.0.9} \\
\mathcal{M}_{mnl} &= \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+1) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2 k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \frac{\Gamma(\ell+1+q) \Gamma(m+k)}{\Gamma(q+k) \Gamma(m+\ell+1)} \\
&\quad \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-1} {}_3F_2(-n+p, \ell+1-k, 1-k-q; \ell+p+1, 1-k-m; 1). \tag{A.0.10}
\end{aligned}$$

On doit remarquer dans l'équation (A.0.10) que la série en k se termine à ℓ et non à l'infini. La raison est que l'exposant dans l'expression $(x+x_0)^{c-1}$ à laquelle on applique le théorème binômiale est l'entier ℓ . L'équation (A.0.10) est nécessaire pour obtenir la condition de normalisation et par la suite les termes de corrections aux niveaux de Landau. On peut aussi obtenir de cette équation (A.0.10) l'expression nécessaire $\mathcal{M}_{1\ell}$ en mettant $n = m = 1$ dans cette dernière. Malheureusement, dans cette équation, il y a trois sommations qui rendent cette tâche vraiment ardue, voire impossible à effectuer convenablement. On doit dans ce

cas plutôt mettre $n = m = 1$ dans l'intégrale de l'équation (A.0.9) et évaluer cette dernière. Cela devient vraiment plus facilement réalisable et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1\ell} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)}\rho^2\right]^2 d\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.0.11})$$

Dans la deuxième étape ci-haut, on utilise la définition d'une fonction de Kummer comme suit : ${}_1F_1(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$ [21]. Pour évaluer l'équation (A.0.11), on utilise la fonction Gamma incomplète se définissant de la manière suivante [21] :

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\sigma-1} \exp(-t) dt = \Gamma(\sigma, t_0), \quad (\text{A.0.12})$$

où on définit $t = \frac{\beta\rho^2}{2}$ et $t_0 = \frac{\beta\rho_0^2}{2}$ pour obtenir le résultat :

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\sigma-1} \exp\left(-\frac{\beta\rho^2}{2}\right) d\rho = \frac{2^{\sigma-1}}{\beta^\sigma} \Gamma\left(\sigma, \frac{\beta\rho_0^2}{2}\right) = \frac{2^{\sigma-1}}{\beta^\sigma} \left[\Gamma(\sigma) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^{\sigma+n}}{\sigma+n} \right]. \quad (\text{A.0.13})$$

On a utilisé dans l'équation (A.0.13) l'expression explicite d'une fonction Gamma incomplète en termes d'une fonction Gamma régulière et d'une série infinie [21]. En développant le terme au carré avec parenthèses de l'équation (A.0.11) et en appliquant pour chacun des termes du développement le résultat de l'équation (A.0.13), on obtient l'expression finale pour $\mathcal{M}_{1\ell}$ comme suit :

$$\mathcal{M}_{1\ell} = \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \left[\Gamma\left(\ell+1, \frac{\beta\rho_0^2}{2}\right) - \frac{2\Gamma\left(\ell+2, \frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)}{(\ell+1)} + \frac{\Gamma\left(\ell+3, \frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)}{(\ell+1)^2} \right]. \quad (\text{A.0.14})$$

De l'équation (A.0.14), il est plus facile de déterminer $\mathcal{M}_{1\ell}$ pour ℓ très large. On utilise la dernière étape de l'équation (A.0.13) pour la définition de la fonction Gamma incomplète ainsi que l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. L'équation (A.0.14) s'exprime pour ℓ très large :

$$\mathcal{M}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \left[\Gamma(\ell+1) - \frac{2\Gamma(\ell+2)}{(\ell+1)} + \frac{\Gamma(\ell+3)}{(\ell+1)^2} \right] \approx \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{(\ell+1)}. \quad (\text{A.0.15})$$

On remarque que ce résultat est utile pour décrire correctement les corrections et la subdivision ("splitting of energy levels") des niveaux de Landau pour ℓ larges.

Une autre intégrale utile peut être obtenue à partir de l'équation (A.0.8). En effectuant encore le changement de variable $x = \rho^2$ et en mettant $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + \frac{1}{2}$ ainsi que

$x_0 = \rho_0^2$, l'équation (A.0.8) nous donne comme résultat pour ces paramètres :

$$\mathcal{P}_{mnl} = \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \quad (\text{A.0.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{mnl} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell + \frac{1}{2}) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2 k! p! q! (\ell + 1)_p (\ell + 1)_q} \frac{\Gamma(\ell + q + 1) \Gamma(m + \frac{1}{2} + k)}{\Gamma(q + k + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} \\ &\times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-\frac{1}{2}} {}_3F_2\left(-n + p, \ell + \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} - k - q; \ell + p + 1, \frac{1}{2} - k - m; 1\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.17})$$

Les équations (A.0.10) et (A.0.17) permettront d'obtenir les corrections en énergies aux niveaux de Landau \mathcal{E}_n , de premier et de deuxième ordres, dues à la subdivision provenant des orbitales de Landau. On veut obtenir de l'équation (A.0.17) une expression pour $\mathcal{P}_{1\ell}$ en mettant $n = m = 1$. Tout comme pour $\mathcal{M}_{1\ell}$, on doit plutôt mettre $n = m = 1$ dans l'intégrale de l'équation (A.0.16) et évaluer cette dernière pour se faciliter la vie. Avec des étapes similaires à l'obtention de l'équation (A.0.14), on obtient l'expression suivante pour $\mathcal{P}_{1\ell}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1\ell} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell + 1)}\rho^2\right]^2 d\rho \\ &= \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.0.18})$$

De l'équation (A.0.18), à l'aide de l'équation (A.0.13) et de l'identité $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, on obtient facilement la limite pour les grands ℓ de $\mathcal{P}_{1\ell}$ comme suit :

$$\mathcal{P}_{1(\ell \gg 1)} \approx \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) - \frac{2\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}{\ell + 1} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}\right)}{(\ell + 1)^2} \right] \approx \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}} (\ell + \frac{3}{4}) \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}} (\ell + 1)^2}. \quad (\text{A.0.19})$$

Une troisième intégrale est utile pour résoudre les perturbations dues au potentiel de type Yukawa près de la fin du chapitre 5. L'intégrale en question se définit comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\rho}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.0.20})$$

Dans la dernière étape, on a mis le développement en séries de Taylor pour la fonction $\exp(-\rho/\lambda)$. On évalue cette intégrale avec l'équation (A.0.8) en faisant encore le changement de variable $x = \rho^2$ et en mettant $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}$ ainsi que $x_0 = \rho_0^2$. On obtient

comme résultat avec toutes ces considérations :

$$\mathcal{Y}_{mnl} = \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\rho}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho, \quad (\text{A.0.21})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{mnl} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ r=0}}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)} \Gamma(\ell + 1 + q) \Gamma(m + \frac{1}{2} + k - \frac{r}{2})}{2e^{\frac{\beta}{2}\rho_0^2} r! k! \lambda^r p! q! (\ell + 1)_p (\ell + 1)_q} \frac{\Gamma(\ell + 1 + q) \Gamma(m + \frac{1}{2} + k - \frac{r}{2})}{\Gamma(q + \frac{1}{2} + k - \frac{r}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} \\ &\times \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} {}_3F_2\left(-n + p, \ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k, \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k - q; \ell + p + 1, \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - k - m; 1\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.22})$$

Ces intégrales, qui ont été déplacées de l'origine vers le rayon de la masse sphérique et impliquant une fonction exponentielle supplémentaire, n'ont jamais été obtenues auparavant dans la littérature, ni en mathématique, ni en physique.

Comme pour les quantités \mathcal{M}_{mnl} et \mathcal{P}_{mnl} , on veut aussi obtenir une expression pour $\mathcal{Y}_{1\ell}$ en mettant $m = n = 1$. Tout comme pour les équations (A.0.14) et (A.0.18), il est difficile, voire impossible, d'utiliser directement l'équation (A.0.22). On résoudra plutôt l'intégrale de l'équation (A.0.21) directement en mettant $m = n = 1$. Avec les mêmes étapes que pour $\mathcal{M}_{1\ell}$ et $\mathcal{P}_{1\ell}$, on obtient pour $\mathcal{Y}_{1\ell}$ que :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{1\ell} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-1, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-1, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \lambda^r} \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+r} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell + 1)}\rho^2\right]^2 d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \lambda^r} \frac{2^{\ell+\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{\beta^{\ell+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{r}{2} + \frac{5}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.0.23})$$

On veut aussi étudier le cas où les intégrales impropres des fonctions de Kummer avec un domaine d'intégration allant pour ρ de 0 à ∞ . On effectue le changement de variable $x = \rho^2$ et en mettant $b = \ell$ ainsi que $z = \beta/2$ pour l'équation (A.0.3). On obtient donc le résultat suivant pour l'équation (A.0.3) :

$$\int_0^{\infty} \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho = \frac{n! 2^\ell [\Gamma(\ell + 1)]^2}{\beta^{\ell+1} \Gamma(n + \ell + 1)} \delta_{nm}. \quad (\text{A.0.24})$$

En utilisant l'équation (A.0.1), on effectue encore le changement de variable $x = \rho^2$ et en mettant $b = \ell$, $c = \ell + \frac{1}{2}$ ainsi que $z = \beta/2$. On obtient alors pour l'équation (A.0.4) :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}} \Gamma(\ell + 1) \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\beta^{\ell+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(m + \ell + 1)} {}_3F_2\left(-n, \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ell + 1, -m + \frac{1}{2}; 1\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.25})$$

Avec les étapes similaires à celles utilisées pour l'équation (A.0.22), on obtient le résultat :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \rho^{2\ell} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2 - \frac{\rho}{\lambda}} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k 2^{\ell+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\ell + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\ell + 1) \Gamma\left(m + \frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)}{k! \lambda^k \beta^{\ell+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) \Gamma(m + \ell + 1)} \\ & \quad \times {}_3F_2\left(-n, \ell + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \ell + 1, \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - m; 1\right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.26})$$

Dans la littérature sur les fonctions de Kummer, l'équation (A.0.26) n'existe pas. On a innové par une généralisation de l'équation (A.0.25) où on ajoute une fonction exponentielle supplémentaire dans l'intégrale.

Dans le quatrième article, on a aussi besoin de deux autres intégrales utiles pour obtenir les corrections aux niveaux de Landau pour l'espace-temps de Levi-Civita. La première est exprimée par \mathcal{L}_{mnl} . Elle est utile pour les intégrales de fonctions de Kummer contenant un logarithme de la forme $\ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)$. On utilisera par la suite l'identité $\left(\frac{d}{ds}\rho^s\right)_{s=0} = \ln\rho$ pour obtenir le résultat final de \mathcal{L}_{mnl} . Si on fait le changement de variable $x = \rho^2$ et que l'on met $b = \ell$, $z = \beta/2$, $c = \ell + s + 1$ ainsi que $x_0 = \rho_0^2$, on obtient comme résultat pour \mathcal{L}_{mnl} [21] :

$$\mathcal{L}_{mnl} = \int_{\rho_0}^\infty \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho, \quad (\text{A.0.27})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mnl} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} \int_{\rho_0}^\infty \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \right]_{s=0} \\ & \quad - \int_{\rho_0}^\infty \rho^{2\ell+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \ln\rho_* {}_1F_1\left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) {}_1F_1\left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{mn, \ell+s} \right)_{s=0} - \mathcal{M}_{mnl} \ln\rho_*, \end{aligned} \quad (\text{A.0.28})$$

où \mathcal{M}_{mnl} est donné par l'équation (A.0.10) et $\mathcal{D}_{mn,\ell+s}$ est exprimé par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn,\ell+s} &= \sum_{k=0}^{\ell+s} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell+s+1) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2k! p! q! (\ell+1)_p (\ell+1)_q} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\ell+q+1) \Gamma(m+k-s)}{\Gamma(q+k-s) \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+q+k-\ell-s-1} \\ &\quad \times {}_3F_2(-n+p, \ell+s-k+1, s-k-q+1; \ell+p+1, s-k-m+1; 1). \end{aligned} \tag{A.0.29}$$

On veut aussi obtenir les expressions $\mathcal{D}_{1,\ell+s}$ et $\mathcal{L}_{1\ell}$ en mettant $m = n = 1$ et en se servant directement des intégrales pour les quantités \mathcal{L}_{mnl} et $\mathcal{D}_{mn,\ell+s}$. En se servant de l'équation (A.0.13), on obtient pour $\mathcal{D}_{1,\ell+s}$ l'expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,\ell+s} &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[{}_1F_1\left(-n, \ell+1; \frac{\beta}{2}\rho^2\right) \right]^2 d\rho \\ &= \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell+2s+1} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \left[1 - \frac{\beta}{2(\ell+1)} \rho^2 \right]^2 d\rho \\ &= \beta^{-1} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\ell+s} \left[\Gamma(\ell+s+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2) - \frac{\Gamma(\ell+s+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma(\ell+s+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)^2} \right]. \end{aligned} \tag{A.0.30}$$

On veut obtenir par la suite l'expression de la dérivée présente dans l'équation (A.0.28). On utilise la définition de la fonction Gamma incomplète donnée par l'équation (A.0.13). On a aussi besoin de l'identité $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\Psi(x)$ pour dériver la fonction Gamma en respectant l'argument appelé fonction "di-Gamma" et définie comme $\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$. Cette relation sera utile pour la limite ℓ "grand" de l'expression pour $\left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s}\right)_{s=0}$. Cette dernière s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s}\right)_{s=0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\ell+1} \left\{ \ln\left(\frac{2}{\beta}\right) \left[\Gamma(\ell+1, \frac{\beta}{2}\rho_0^2) - \frac{\Gamma(\ell+2, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma(\ell+3, \frac{\beta}{2}\rho_0^2)}{(\ell+1)^2} \right] \right. \\ &\quad + \Gamma(\ell+1)\Psi(\ell+1) - \frac{\Gamma(\ell+2)\Psi(\ell+2)}{(\ell+1)/2} + \frac{\Gamma(\ell+3)\Psi(\ell+3)}{(\ell+1)^2} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^{\ell+k+1} \left[\frac{\ln\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)}{\ell+k+1} - \frac{\beta\rho_0^2 \ln\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)}{(\ell+k+2)(\ell+1)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)}{(\ell+k+3)(\ell+1)^2} - \frac{1}{(\ell+k+1)^2} + \frac{\beta\rho_0^2}{(\ell+1)(\ell+k+2)^2} - \frac{\left(\frac{\beta\rho_0^2}{2}\right)^2}{(\ell+1)^2(\ell+k+3)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{A.0.31}$$

On voit que les équations (A.0.14), (A.0.18) et (A.0.31) sont longues, lourdes et très encombrantes. Pour l'équation (A.0.31), on peut encore une fois faire l'approximation pour $\ell \gg 1$. Comme pour obtenir les équations (A.0.15) et (A.0.19), l'équation (A.0.31) se transforme en :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s} \right)_{s=0, \ell \gg 1} \approx \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2}{\beta} \right) + \ln(\ell + 1) \right] \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\ell + 1}. \quad (\text{A.0.32})$$

En utilisant l'équation précédente ainsi que l'équation (A.0.15) pour $\mathcal{M}_{1,\ell \gg 1}$, on obtient comme expression finale pour $\mathcal{L}_{1,\ell \gg 1}$:

$$\mathcal{L}_{1,\ell \gg 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{D}_{1,\ell+s} \right)_{s=0, \ell \gg 1} - \mathcal{M}_{1,\ell \gg 1} \ln \rho_* \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\ell}{\beta \rho_*^2} \right) \frac{2^\ell}{\beta^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\ell + 1}. \quad (\text{A.0.33})$$

Pour la partie sur l'espace-temps de Kerr, on a besoin d'une autre intégrale :

$$\mathcal{Q}_{mnl} = \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{2\ell-2} e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} {}_1F_1 \left(-n, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2 \right) {}_1F_1 \left(-m, \ell + 1; \frac{\beta}{2}\rho^2 \right) d\rho. \quad (\text{A.0.34})$$

\mathcal{Q}_{mnl} est aussi donnée par la sommation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{mnl} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\rho_0^2} \Gamma(\ell - \frac{1}{2}) (-n)_p (-m)_q \rho_0^{2(p+q+k)}}{2 k! p! q! (\ell + 1)_p (\ell + 1)_q} \frac{\Gamma(\ell + q + 1) \Gamma(m + k + \frac{3}{2})}{\Gamma(q + k + \frac{3}{2}) \Gamma(m + \ell + 1)} \\ &\times \left(\frac{\beta}{2} \right)^{p+q+k-\ell+\frac{1}{2}} {}_3F_2 \left(-n + p, \ell - \frac{1}{2} - k, -\frac{1}{2} - k - q; \ell + p + 1, -\frac{1}{2} - k - m; 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.35})$$

On peut avoir la quantité $\mathcal{Q}_{1\ell}$ comme suit, tout comme pour $\mathcal{M}_{1\ell}$ et $\mathcal{P}_{1\ell}$:

$$\mathcal{Q}_{1\ell} = \frac{2^{\ell-\frac{1}{2}}}{2\beta^{\ell-\frac{1}{2}}} \left[\Gamma\left(\ell - \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right) - \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)/2} + \frac{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}, \frac{\beta}{2}\rho_0^2\right)}{(\ell + 1)^2} \right]. \quad (\text{A.0.36})$$

Finalement, pour ℓ très grand, on peut obtenir avec certaines approximations $\mathcal{Q}_{1\ell \gg 1}$ comme suit :

$$\mathcal{Q}_{1,\ell \gg 1} \approx \frac{2^{\ell-\frac{3}{2}} (\ell + \frac{7}{4}) \Gamma(\ell - \frac{1}{2})}{\beta^{\ell-\frac{1}{2}} (\ell + 1)^2}. \quad (\text{A.0.37})$$

On a finalement obtenu toutes les intégrales nécessaires dans cette annexe pour les troisième et quatrième articles de cette thèse.

Annexe B

Calculs de potentiels gravitationnels pour des sphères, cylindres et autres figures similaires

Dans les cinquième et sixième articles, on avait effectué des calculs de potentiels gravitationnels pour des sphères, cylindres et hémisphères. On a effectué cet exercice pour des potentiels newtonien, de type Yukawa ainsi que pour les potentiels de type puissances inverses pour différentes valeurs de n . Dans cet annexe, les détails de ces calculs sont présentés.

B.1. Potentiels newtonien et de type Yukawa

Dans cette section, on obtiendra les potentiels gravitationnels pour un cylindre et une sphère pour des potentiels newtonien et de type Yukawa. Comme mentionné dans le cinquième article, on a un cylindre de rayon a et de longueur $2R$ ainsi qu'une sphère complète uniforme de rayon R . Le tout ayant une densité massique de ρ constant. On a démontré au début du cinquième article ainsi qu'à la section 2.5.1 du chapitre 2 que le potentiel gravitationnel s'exprime comme $-2\pi G\sigma[\sqrt{x^2 + y^2} - x + \alpha\lambda(e^{-x/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/\lambda})]$ à une distance x sur l'axe de symétrie d'un disque de rayon y et de densité massique surfacique σ . En intégrant ce potentiel sur la région $s \in [0, R - x]$ reliant la gauche du point x , ainsi que sur la région $s \in [0, R + x]$ reliant la droite du point x ; on utilise comme expression de potentiel newtonien $f(s) = \sqrt{s^2 + a^2} - s$. Pour la partie de type Yukawa, on utilise la fonction $g(s) = \exp(-s/\lambda) - \exp(-\sqrt{s^2 + a^2}/\lambda)$.

Les potentiels du cylindre et de la sphère pour la gravitation purement newtonienne dont le potentiel est décrit fondamentalement par l'équation (2.5.1) sont pour une densité

de potentiel $f(s) = \sqrt{s^2 + a^2} - s$: Pour un cylindre, on obtient que :

$$\begin{aligned} V_C^N(x) &= -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s) ds \\ &= -\pi G\rho \left[(R-x)\sqrt{(R-x)^2 + a^2} - (R-x)^2 + (R+x)\sqrt{(R+x)^2 + a^2} - (R+x)^2 \right. \\ &\quad \left. + a^2 \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} + a^2 \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

Pour une sphère, on a comme densité de potentiel $f(s, y) = \sqrt{s^2 + y^2} - s$. On obtient que :

$$V_S^N(x) = -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s, y) ds = -2\pi G\rho \left[R^2 - \frac{x^2}{3} \right]. \quad (\text{B.1.2})$$

Pour la gravitation avec la correction de type Yukawa, on aura les potentiels gravitationnels suivants, correspondant au potentiel décrit par l'équation (2.5.2).

Pour un cylindre, la densité de potentiel pour la partie purement de type Yukawa sera $g(s) = \exp(-s/\lambda) - \exp(-\sqrt{s^2 + a^2}/\lambda)$. De là, on obtient que :

$$\begin{aligned} V_C^{N+Y}(x) &= -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s) ds - 2\pi G\rho\alpha\lambda \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\pi G\rho \left[(R-x)\sqrt{(R-x)^2 + a^2} - (R-x)^2 + (R+x)\sqrt{(R+x)^2 + a^2} - (R+x)^2 \right. \\ &\quad \left. + a^2 \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} + a^2 \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\lambda \left(2\lambda - \lambda e^{-\frac{R-x}{\lambda}} - \lambda e^{-\frac{R+x}{\lambda}} - I[x, a, R, \lambda] \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

Les deux premières lignes du résultat de (B.1.3) correspondent aux termes newtoniens tel qu'exprimés à l'équation (B.1.1). La dernière ligne correspond aux termes de type Yukawa.

Ici, le terme $I[x, a, R, \lambda]$ émerge de la somme de deux intégrales d'exponentielles s'exprimant comme $(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x}) e^{-\sqrt{s^2 + a^2}/\lambda} ds$. Ce type d'intégrale n'admet pas de solution analytique. Toutefois, il est possible d'estimer son ordre de grandeur et donc son importance dans l'équation (B.1.3). En faisant le changement de variable $s/a = \sinh z$, on obtient comme solution :

$$I[x, a, R, \lambda] = \left(\int_0^{z_0^-} + \int_0^{z_0^+} \right) e^{-\frac{a}{\lambda} \cosh z} a \cosh z dz, \quad (\text{B.1.4})$$

où les limites sont exprimées par $z_{0\pm} = \sinh^{-1}(\frac{R\pm x}{a})$. Les intégrales de l'équation (B.1.4) sont similaires à l'intégrale de la fonction de Bessel modifiée $K_1(\frac{a}{\lambda})$ s'exprimant comme [21] :

$$K_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \int_0^\infty e^{-\frac{a}{\lambda} \cosh z} \cosh z \, dz. \quad (\text{B.1.5})$$

La seule différence entre les équations (B.1.4) et (B.1.5) se situe au niveau des domaines d'intégration. En sachant que les domaines de l'équation (B.1.4) se limitent à $z_{0\pm}$ et que le facteur $e^{-\frac{a}{\lambda} \cosh z}$ diminue et ainsi sera supprimé rapidement pour z positif, il est clair que la somme des deux intégrales en l'équation (B.1.4) ne sera pas très différente de la fonction $K_1(\frac{a}{\lambda})$. De là, on sait que pour de très grandes valeurs de u (valeurs asymptotiques), on a l'approximation $K_1(u) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u}$ [21]. De cette approximation, on déduit que l'équation (B.1.4) s'exprimera comme suit :

$$I[x, a, R, \lambda] \approx \sqrt{a\lambda} e^{-\frac{a}{\lambda}}. \quad (\text{B.1.6})$$

En adoptant cette valeur pour $I[x, a, R, \lambda]$, on sera près de la valeur réelle, du moins par les termes de forme $\sqrt{a\lambda} e^{-\sqrt{(R\pm x)^2 + a^2}/\lambda}$. Pour de très petites valeurs de rayon du tunnel a , en comparant à la valeur caractéristique du paramètre de Yukawa λ , soit au dessus de la valeur de longueur d'onde de Compton pour les particules tests ($\sim 10^{-15}$ m pour les neutrons); la valeur de $I[x, a, R, \lambda]$ sera beaucoup plus faible que le reste des autres termes de type Yukawa de l'équation (B.1.3). C'est pour cette raison que l'on peut enlever le terme $I[x, a, R, \lambda]$ du potentiel exprimé par l'équation (B.1.3).

En utilisant le même type de potentiel gravitationnel d'un disque à une distance x sur son axe, on peut obtenir le potentiel à une distance x sur l'axe provenant d'une sphère de rayon R et de densité massique uniforme ρ . On utilise la densité de potentiel $g(s, y) = \exp(-s/\lambda) - \exp(-\sqrt{s^2 + y^2}/\lambda)$. On obtient que :

$$\begin{aligned} V_S^{N+Y}(x) &= -2\pi G\rho \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) f(s, y) \, ds - 2\pi G\rho\alpha\lambda \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) \, ds \\ &= -2\pi G\rho \left[R^2 - \frac{x^2}{3} + \alpha\lambda^2 \left(2 - e^{-\frac{R-x}{\lambda}} - e^{-\frac{R+x}{\lambda}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\lambda^2}{x} \left((R+x+\lambda)e^{-\frac{R+x}{\lambda}} - (R-x+\lambda)e^{-\frac{R-x}{\lambda}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

Pour développer les intégrales (B.1.7) et (B.1.2) sur le volume de la sphère entière, on considère sa forme comme suit. Pour les disques infinitésimalement minces de la région à gauche du point x , où $s \in [0, R-x]$, on obtient la relation $y^2 = R^2 - (s+x)^2$. Pour les mêmes types de disques, mais de la région à droite du point x où $s \in [0, R+x]$, on obtient que $y^2 = R^2 - (s-x)^2$. Les termes provenant de l'intégration de la fonction $f(s, y)$ donnent les termes newtoniens (éq. (B.1.2)), tandis que les termes proportionnels à α provenant de

l'intégration de la fonction $g(s, y)$ donneront les corrections de type Yukawa. On notera toutefois que le potentiel final de la sphère exprimé par l'équation (B.1.7) est de grandeur finie, même à l'origine.

Pour obtenir le potentiel effectif total de la sphère percée par un cylindre, on prend tout simplement la différence entre les équations (B.1.7) et (B.1.3) pour le potentiel newtonien avec correction de type Yukawa. Cela donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{N+Y}(x) &= V_S^{N+Y}(x) - V_C^{N+Y}(x) \\
&= -4\pi G\rho \left[R^2 + \frac{x^2}{3} + \alpha\lambda^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\alpha\lambda^2}{x} (R + \lambda) e^{-\frac{R}{\lambda}} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right. \\
&\quad - \frac{R-x}{4} \sqrt{(R-x)^2 + a^2} - \frac{R+x}{4} \sqrt{(R+x)^2 + a^2} \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{4} \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} - \frac{a^2}{4} \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right]. \quad (\text{B.1.8})
\end{aligned}$$

Cette équation (B.1.8) servira au cinquième article pour obtenir le déphasage pour la gravité newtonienne avec correction de type Yukawa.

Maintenant, le potentiel gravitationnel total de la sphère, basé sur le potentiel de l'équation (2.5.2), ressenti en dehors de celle-ci à toute distance x de son origine peut facilement s'obtenir en additionnant les parties newtonienne et de type Yukawa. Comme mentionné précédemment, le potentiel gravitationnel de la partie de type Yukawa à une distance x sur l'axe de symétrie d'un disque uniforme, de rayon y et de densité massique de surface σ , sera $-2\pi G\sigma[\alpha\lambda(e^{-x/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+y^2}/\lambda})]$. En intégrant ce potentiel sur la région $r \in [0, R]$, reliant les régions de droite et de gauche par rapport au centre de la sphère, et en utilisant la relation $y^2 = R^2 - r^2$, où r est la distance du disque de rayon y par rapport au centre de la sphère ; on obtient le potentiel total ressenti par les particules à l'extérieur de la sphère pleine et provenant de celle-ci comme suit :

$$\begin{aligned}
V_S^{\text{Out}}(x) &= V_S^{N(\text{Out})}(x) + V_S^{Y(\text{Out})}(x) \\
&= -\frac{GM}{x} - 2\pi G\rho\alpha\lambda \int_0^R \left[e^{-(x+r)/\lambda} + e^{-(x-r)/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+R^2+2xr}/\lambda} - e^{-\sqrt{x^2+R^2-2xr}/\lambda} \right] dr \\
&= -\frac{GM}{x} + 4\pi G\rho\alpha\lambda^2 e^{-x/\lambda} \left[\frac{\lambda}{x} \sinh\left(\frac{R}{\lambda}\right) - \frac{R}{x} \cosh\left(\frac{R}{\lambda}\right) \right]. \quad (\text{B.1.9})
\end{aligned}$$

Similairement, on obtient le potentiel total ressenti par les particules en dehors de la sphère provenant du cylindre. On se rappelle que le tunnel est de longueur $2R$ et de rayon a

et donc son potentiel sera :

$$\begin{aligned}
V_C^{\text{Out}}(x) &= V_C^{N(\text{Out})}(x) + V_C^{Y(\text{Out})}(x) \\
&= -2\pi G\rho \int_0^R \left[\sqrt{(x+r)^2 + a^2} + \sqrt{(x-r)^2 + a^2} - 2x \right] dr \\
&\quad - 2\pi G\rho\alpha\lambda \int_0^R \left[e^{-(x+r)/\lambda} + e^{-(x-r)/\lambda} - e^{-\sqrt{(x+r)^2 + a^2}/\lambda} - e^{-\sqrt{(x-r)^2 + a^2}/\lambda} \right] dr \\
&\approx -\pi G\rho \left[(x+R)\sqrt{(x+R)^2 + a^2} - (x-R)\sqrt{(x-R)^2 + a^2} - 4xR \right. \\
&\quad \left. + a^2 \ln \frac{\sqrt{(x+R)^2 + a^2} + x + R}{\sqrt{(x-R)^2 + a^2} + x - R} + 4\alpha\lambda^2 e^{-x/\lambda} \sinh \frac{R}{\lambda} \right]. \tag{B.1.10}
\end{aligned}$$

On a gardé les termes jusqu'à l'ordre 2 dans l'équation (B.1.10) ainsi que le terme exponentiel dominant $e^{-(x\pm r)/\lambda}$. Le potentiel effectif ressenti par les particules en dehors de la sphère percée par le cylindre sera $V_{\text{eff}}^{\text{Out}}(x) = V_S^{\text{Out}}(x) - V_C^{\text{Out}}(x)$. Ce potentiel effectif ressenti par les particules en dehors de la sphère percée donnera au final un déphasage supplémentaire pour le déplacement des particules entre le réflecteur de gauche et la surface de la sphère percée ainsi qu'entre celle-ci et le diviseur de faisceaux. Les deux instruments externes sont situés à une distance L du centre de la sphère. Le déphasage supplémentaire des particules pour leur trajectoire totale extérieure à la sphère est donné par :

$$\Delta\phi^{\text{Out}} = -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{eff}}^{\text{Out}}(x)dx \approx \frac{GMm^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \left[\ln \frac{L}{R} + \frac{3\alpha\lambda^3}{2R^3} e^{(R-L)/\lambda} \left(1 - \frac{R}{L} \right) \right]. \tag{B.1.11}$$

En supposant alors que le réflecteur à gauche ainsi que le diviseur de faisceaux sont près de la surface de la sphère ($L \sim R$), le déphasage supplémentaire (éq. (B.1.11)) ne contribuera pas beaucoup au déphasage total provenant essentiellement de l'intérieur de la trajectoire interne à la sphère. C'est pour cette raison que l'on tend souvent à négliger cette contribution additionnelle de l'équation (B.1.11) au présent déphasage des particules [93].

B.2. Potentiels de type puissances inverses

On ne doit pas oublier que l'on développe dans cet annexe les potentiels effectifs ressentis par les particules se promenant dans le tunnel perforant la sphère ainsi qu'à l'extérieur de ce système à toute distance x du centre de la sphère. Pour les cas de puissances inverses, on veut répéter le même type de démarche que pour le cas du potentiel de type Yukawa. On obtient d'abord le potentiel $V_C(x)$ à l'intérieur du cylindre de longueur $2R$, de rayon a , de densité massique ρ à une distance x du centre du cylindre à l'axe de symétrie. On obtiendra aussi le potentiel $V_S(x)$ de la sphère de rayon R et de densité massique ρ , à une distance x de son centre. On évaluera aussi le potentiel extérieur ressenti par les particules provenant de la sphère ainsi que du cylindre. On fera donc ces démarches pour les cas $n = 1, 2, 3, \dots, 6$.

B.2.1. Pour $n = 1$

On veut obtenir les potentiels du cylindre, de la sphère ainsi que le potentiel effectif ressenti par une particule dans un tunnel passant à l'intérieur de la sphère massive pour le cas $n = 1$ du potentiel décrit par l'équation (2.5.5).

Pour un cylindre, on a vu que la correction au potentiel newtonien provenant du disque de rayon y et de densité massique σ à une distance x sur l'axe de symétrie s'exprime comme $-2\pi G\sigma r_0 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$. Pour clarifier le tout, on introduit la fonction $g(s) = \ln(\sqrt{s^2 + a^2}/s)$. On veut intégrer de chaque côté séparément du point x sur l'ensemble du cylindre de rayon a et de longueur $2R$. On obtient que la correction au potentiel newtonien $V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x)$ pour le cylindre sera :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -2\pi G\rho r_0 \left[(R-x) \ln \frac{\sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{R-x} + (R+x) \ln \frac{\sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{R+x} \right. \\ &\quad \left. + a \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) + a \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

Pour obtenir le potentiel de la sphère $V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x)$ à l'intérieur de celle-ci, on utilisera pour les mêmes raisons que précédemment la fonction $g(s, y) = \ln(\sqrt{s^2 + y^2}/s)$. Toutefois, pour l'intégration sur toute la sphère, on tiendra compte de sa forme. On prendra le changement de variable $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ pour la partie à gauche de x ainsi que la relation $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ pour la partie à droite de x . De là, on obtient que :

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x) = -2\pi G\rho r_0 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right]. \quad (\text{B.2.2})$$

En faisant la différence entre les équations (B.2.2) et (B.2.1), on obtient le potentiel effectif pour la correction de potentiel $n = 1$ donnant ainsi $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=1}(x)$. Ce dernier est donné par :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=1}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=1}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=1}(x) \\ &= -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} - (R-x) \ln \frac{\sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{R-x} \right. \\ &\quad \left. - (R+x) \ln \frac{\sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{R+x} - a \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - a \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

Ce potentiel effectif de la correction $n = 1$ s'additionne au potentiel effectif des termes purement newtonien pour avoir le potentiel total ressenti par les particules traversant le tunnel cylindrique interne à la sphère.

On peut aussi obtenir le potentiel gravitationnel total ressenti à l'extérieur de la sphère perforée à la distance x de son centre en additionnant la contribution de la correction $V_S^{n=1}(x)$ avec le terme purement newtonien $V_S^N(x)$. Comme on a vu précédemment, le potentiel gravitationnel à une distance x sur l'axe de symétrie provenant d'un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ pour $n = 1$ s'exprime comme $-2\pi G\sigma r_0 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$. On intègre ce potentiel sur la région $r \in [0, R]$, reliant ainsi les parties gauche et droite par rapport au centre de la sphère, et on utilise la relation $y^2 = R^2 - r^2$ où r est la distance du disque de rayon y du centre de la sphère. Alors, on obtient le potentiel pour la correction $n = 1$ provenant de la sphère ressenti par les particules en dehors de la sphère comme suit :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \int_0^R \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + R^2 + 2xr}}{x+r} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xr}}{x-r} \right) dr \\ &= -\pi G\rho r_0 \left[\frac{(R+x)^2}{x} \ln(x+R) - \frac{(R-x)^2}{x} \ln(x-R) - 2R \right] \\ &\quad + 2\pi G\rho r_0 \int_0^R [\ln(x+r) + \ln(x-r)] dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

Similairement, pour le cylindre de longueur $2R$ et de rayon a dans la sphère, on obtient le potentiel provenant du cylindre ressenti par les particules en dehors de la sphère comme suit :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \int_0^R \left(\ln \frac{\sqrt{(x+r)^2 + a^2}}{x+r} + \ln \frac{\sqrt{(x-r)^2 + a^2}}{x-r} \right) dr \\ &= -\pi G\rho r_0 \left[(x+R) \ln [(x+R)^2 + a^2] - (x-R) \ln [(x-R)^2 + a^2] - 4R \right. \\ &\quad \left. + 2a \tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - 2a \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right] \\ &\quad + 2\pi G\rho r_0 \int_0^R [\ln(x+r) + \ln(x-r)] dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.5})$$

Le potentiel effectif de correction pour $n = 1$ ressenti par les particules en dehors de la sphère sera exprimé par la relation $V_{\text{effCorr}}^{n=1(\text{Out})}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=1(\text{Out})}(x)$ donnant ainsi :

$$V_{\text{effCorr}}^{n=1(\text{Out})}(x) \approx -2\pi G\rho r_0 \left(\frac{x^2 - R^2}{2x} \ln \frac{x-R}{x+R} + R \right). \quad (\text{B.2.6})$$

On a négligé les termes d'ordres $\mathcal{O}(a)$ et supérieurs puisqu'ils n'apportent qu'une correction d'ordre $\mathcal{O}(ar_0)$. Ainsi, le déphasage des particules se propageant à l'extérieur de la

sphère provenant de l'influence externe de celle-ci sera :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{Corr}}^{n=1(\text{Out})} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{effCorr}}^{n=1(\text{Out})}(x)dx \\ &= \frac{3GMm^2\lambda_0r_0}{4\pi\hbar^2R} \left[\Re\left(\text{Li}_2\left(\frac{L}{R}\right)\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{L}{R}\right) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{L^2 - R^2}{2R^2} \ln \frac{L - R}{L + R} + \frac{L - R}{R} \right].\end{aligned}\tag{B.2.7}$$

Dans l'équation (B.2.7), $\text{Li}_2(z)$ représente une fonction de Spence (ou dilogarithmique) et $\Re(\text{Li}_2(z))$ signifie que l'on prend seulement la partie réelle de cette fonction [21]. Il est clair que, selon l'équation (B.2.7), lorsque le réflecteur et le diviseur de faisceaux sont situés près de la surface de la sphère, le déphasage supplémentaire externe demeure négligeable par rapport au déphasage provenant du mouvement des particules dans le tunnel interne à la sphère comme montré dans le cinquième article.

B.2.2. Pour $n = 2$

On veut obtenir les potentiels du cylindre, de la sphère ainsi que le potentiel effectif ressenti par une particule dans un tunnel passant à l'intérieur de la sphère massive pour le cas $n = 2$ du potentiel décrit par l'équation (2.5.5).

Par la section 2.5.2, on déduit que pour $n = 2$, le potentiel de correction au potentiel newtonien, pour un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ , à une distance x sur l'axe de symétrie s'exprime comme $-2\pi G\sigma r_0^2[x^{-1} - (x^2 + y^2)^{-1/2}]$. Toutefois, en utilisant la fonction $g(s) = 1/s - 1/\sqrt{s^2 + a^2}$, on obtient le potentiel de correction $V_{\text{Corr}}^{n=2}(x)$ pour $n = 2$ ressenti à l'intérieur du cylindre de longueur $2R$ et de rayon a comme suit :

$$\begin{aligned}V_{\text{Corr}}^{n=2}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -2\pi G\rho r_0^2 \left[\int_0^{R-x} ds/s + \int_0^{R+x} ds/s - \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} \right].\end{aligned}\tag{B.2.8}$$

Les deux premiers termes du crochet (les intégrales) de l'équation (B.2.8) sont divergentes. On verra plus loin que ces contributions dans le potentiel du cylindre s'annuleront avec exactement les mêmes contributions dans le potentiel de la sphère lors de l'obtention du potentiel effectif. Au final, le potentiel effectif sera de grandeur fini et convergent.

Afin d'obtenir le potentiel de correction pour $n = 2$ de la sphère $V_{\text{S}_{\text{corr}}}^{n=2}(x)$, on utilisera cette fois la fonction $g(s, y) = 1/s - 1/\sqrt{s^2 + y^2}$. On intégrera cette fonction en tenant toujours compte de la géométrie de la sphère : soit les relations $y^2 = R^2 - (s + x)^2$ pour les disques à gauche de la position x et $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ pour les disques à droite de cette

même position x . On obtient que :

$$V_{S_{\text{corr}}}^{n=2}(x) = -2\pi G\rho r_0^2 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds = -2\pi G\rho r_0^2 \left[\int_0^{R-x} ds/s + \int_0^{R+x} ds/s - 2 \right]. \quad (\text{B.2.9})$$

En combinant les équations (B.2.8) et (B.2.9), le potentiel effectif de correction pour $n = 2$, soit $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=2}(x)$, sera alors donné par :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=2}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=2}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=2}(x) \\ &= 2\pi G\rho r_0^2 \left[2 - \ln \frac{R+x + \sqrt{(R+x)^2 + a^2}}{a} - \ln \frac{R-x + \sqrt{(R-x)^2 + a^2}}{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

Le potentiel gravitationnel total à toute distance x du centre de la sphère, ressenti en dehors de celle-ci et basé sur le potentiel de puissance inverse pour $n = 2$, sera la somme du potentiel newtonien externe $V_S^N(x)$ avec le potentiel de correction $V_S^{n=2}(x)$. Comme on a vu auparavant, le potentiel gravitationnel de correction pour $n = 2$ à une distance x sur l'axe de symétrie d'un disque uniforme, de rayon y et de densité massique de surface σ , s'exprimera comme $-2\pi G\sigma r_0^2[x^{-1} - (x^2 + y^2)^{-1/2}]$. On intègre ce potentiel sur le domaine $r \in [0, R]$, reliant ainsi les parties de gauche et de droite par rapport au centre de la sphère. On utilise la relation $y^2 = R^2 - r^2$ dans ce potentiel avec r comme distance entre le disque de rayon y et le centre de la sphère. Ce potentiel ressenti en dehors de la sphère sera exprimé par :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 + 2xr}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xr}} \right) dr \\ &= 4\pi G\rho r_0^2 - 2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right) dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.11})$$

Puisque l'on a un cylindre de longueur $2R$ et de rayon a servant de tunnel traversant la sphère, on obtient comme potentiel ressenti en dehors de la sphère provenant de ce cylindre l'expression :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) &= -2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} - \frac{1}{\sqrt{(x+r)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + a^2}} \right) dr \\ &= -2\pi G\rho r_0^2 \ln \frac{\sqrt{(x-R)^2 + a^2} + x - R}{\sqrt{(x+R)^2 + a^2} + x + R} - 2\pi G\rho r_0^2 \int_0^R \left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r} \right) dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.12})$$

Le potentiel effectif de correction $n = 2$ ressenti par les particules en dehors de la sphère sera exprimé par :

$$V_{\text{eff}_{\text{Corr}}}^{n=2(\text{Out})}(x) = 2\pi G\rho r_0^2 \left(2 + \ln \frac{x-R}{x+R} \right). \quad (\text{B.2.13})$$

Encore une fois, on a négligé les termes quadratiques en a . Le déphasage supplémentaire provenant de l'influence externe de la sphère, et donc de la trajectoire extérieure des particules, sera exprimé par :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{Corr}}^{n=2(\text{Out})} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{effCorr}}^{n=2(\text{Out})}(x)dx \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0r_0^2}{2\pi\hbar^2R^3} \left[R \ln \frac{L^2 - R^2}{R^2} - L \ln \frac{L - R}{L + R} + 2(R - L) - R \ln 4 \right].\end{aligned}\quad (\text{B.2.14})$$

Pour L près de la valeur du rayon de la sphère R , on obtient un déphasage supplémentaire faible, voire négligeable, par rapport au déphasage obtenu par l'équation (7.3.5) pour le passage des particules dans le tunnel.

B.2.3. Pour $n = 3$

On veut obtenir les potentiels du cylindre, de la sphère ainsi que le potentiel effectif ressenti par une particule dans un tunnel passant à l'intérieur de la sphère massive pour le cas $n = 3$ du potentiel décrit par l'équation (2.5.5). Par la section 2.5.2, on déduit que pour $n = 3$, le potentiel gravitationnel de correction d'un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ , à une distance x sur l'axe de symétrie ; s'exprime comme $-\pi G\sigma r_0^3[1/x^2 - 1/(x^2 + y^2)]$. Alors, en posant la fonction $g(s) = 1/s^2 - 1/(s^2 + a^2)$, on obtient, pour un cylindre de longueur $2R$ et de rayon a , pour $n = 3$; la correction au potentiel newtonien. La correction $V_{\text{Corr}}^{n=3}(x)$ sera :

$$\begin{aligned}V_{\text{Corr}}^{n=3}(x) &= -\pi G\rho r_0^3 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\pi G\rho r_0^3 \left[\int_0^{R-x} ds/s^2 + \int_0^{R+x} ds/s^2 - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right].\end{aligned}\quad (\text{B.2.15})$$

Encore une fois, les deux premières intégrales sont divergentes, mais lorsqu'on obtiendra le potentiel pour la sphère, ces deux intégrales s'annuleront avec exactement les mêmes expressions dans le potentiel de la sphère. Ce qui fait que le potentiel effectif de correction sera convergent et de grandeur fini.

Afin d'obtenir le potentiel de correction $n = 3$ au potentiel newtonien de la sphère, soit $V_{\text{Corr}}^{n=3}(x)$, on utilisera la fonction $g(s, y) = 1/s^2 - 1/(s^2 + y^2)$. On intègre cette fonction en considérant la forme de la sphère, soit en utilisant la relation $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ à droite du point x ainsi que $y^2 = R^2 - (s + x)^2$ à gauche de ce même point x . De là, on obtient comme

potentiel :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=3}(x) &= -\pi G \rho r_0^3 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds \\ &= -\pi G \rho r_0^3 \left[\int_0^{R-x} ds/s^2 + \int_0^{R+x} ds/s^2 - \frac{1}{x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.16})$$

À partir des équations (B.2.15) et (B.2.16), on obtient le potentiel effectif de correction au potentiel newtonien $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=3}(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=3}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=3}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=3}(x) \\ &= \pi G \rho r_0^3 \left[\frac{1}{x} \ln \frac{R+x}{R-x} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.17})$$

Maintenant, on veut obtenir le potentiel de correction d'une sphère pleine $V_S^{n=3}(x)$ à l'extérieur de celle-ci à partir de la formule (2.5.5) pour $n = 3$. Comme on a vu auparavant, le potentiel gravitationnel de correction pour $n = 3$ à une distance x de l'axe de symétrie provenant d'un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ sera $-\pi G \sigma r_0^3 [1/x^2 - 1/(x^2 + y^2)]$. On intègre ce potentiel sur le domaine $r \in [0, R]$, reliant les parties de gauche et de droite par rapport au centre de la sphère, et on se sert de la relation $y^2 = R^2 - r^2$ avec r comme distance entre le disque de rayon y et le centre de la sphère. On obtient comme potentiel de la sphère ressenti en dehors de celle-ci, l'expression :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{(n=3)\text{Out}}(x) &= -\pi G \rho r_0^3 \int_0^R \left(\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} - \frac{1}{x^2 + R^2 + 2xr} - \frac{1}{x^2 + R^2 - 2xr} \right) dr \\ &= -\pi G \rho r_0^3 \left(\frac{1}{x} \ln \frac{x-R}{x+R} \right) - \pi G \rho r_0^3 \int_0^R \left[\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.18})$$

De manière similaire, on veut obtenir le potentiel du cylindre de longueur $2R$ et de rayon a ressenti en dehors de ce cylindre. Ce potentiel sera exprimé par :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) &= -\pi G \rho r_0^3 \int_0^R \left(\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} - \frac{1}{(x+r)^2 + a^2} - \frac{1}{(x-r)^2 + a^2} \right) dr \\ &= \frac{\pi G \rho r_0^3}{a} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right] \\ &\quad - \pi G \rho r_0^3 \int_0^R \left[\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{1}{(x-r)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{B.2.19})$$

Au final, le potentiel effectif ressenti par les particules en dehors de la sphère et du cylindre $V_{\text{eff}_{\text{Corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) = V_{S_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x)$ sera exprimé par :

$$V_{\text{eff}_{\text{Corr}}}^{n=3(\text{Out})}(x) = -\frac{3GM r_0^3}{4R^3} \left[\frac{1}{x} \ln \frac{x-R}{x+R} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x+R}{a} \right) - \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x-R}{a} \right) \right]. \quad (\text{B.2.20})$$

Ce potentiel effectif est exactement le même que celui obtenu dans le tunnel interne à la sphère à une distance x de son centre. Le déphasage supplémentaire des particules provenant de l'influence externe de la sphère, et donc du mouvement de ces particules en dehors de la sphère, sera :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{Corr}}^{n=3(\text{Out})} &= -\frac{m^2\lambda_0}{\pi\hbar^2} \int_R^L V_{\text{effCorr}}^{n=3(\text{Out})}(x)dx \\ &\approx \frac{3GMm^2\lambda_0r_0^2}{4\pi\hbar^2aR^3} \left[(L+R) \tan^{-1}\left(\frac{L+R}{a}\right) - (L-R) \tan^{-1}\left(\frac{L-R}{a}\right) - 2R \tan^{-1}\left(\frac{2R}{a}\right) \right].\end{aligned}\tag{B.2.21}$$

On a gardé uniquement les termes dominants qui sont inversement proportionnels à a . Pour les valeurs de L près du rayon de la sphère R , ce déphasage supplémentaire est négligeable, même pour de très faibles valeurs de a . Cela comparativement au déphasage des particules obtenu pour le passage de celles-ci dans le tunnel interne à la sphère.

B.2.4. Pour $n = 4$

On utilisera encore une fois le même procédé qu'en $n = 3$ avec l'équation (2.5.5), mais pour $n = 4$. On avait obtenu que la correction au potentiel newtonien pour un disque de rayon y et de densité massique de surface σ à une distance x sur l'axe de symétrie s'exprime comme $-\frac{2}{3}\pi G\sigma r_0^4[1/x^3 - 1/(x^2 + y^2)^{3/2}]$. En utilisant la fonction $g(s) = 1/s^3 - 1/(s^2 + a^2)^{3/2}$, on obtient le potentiel de correction du cylindre pour $n = 4$, $V_{\text{Corr}}^{n=4}(x)$, à l'intérieur du cylindre de longueur $2R$ et de rayon a . On obtient que :

$$\begin{aligned}V_{\text{Corr}}^{n=4}(x) &= -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left[\int_0^{R-x} ds/s^3 + \int_0^{R+x} ds/s^3 - \frac{R-x}{a^2\sqrt{(R-x)^2 + a^2}} - \frac{R+x}{a^2\sqrt{(R+x)^2 + a^2}} \right].\end{aligned}\tag{B.2.22}$$

Encore une fois, on obtient que les deux première intégrales de l'équation (B.2.22) sont divergentes. Ces deux dernières s'annuleront complètement avec exactement les mêmes termes présents dans le potentiel de la sphère. Cela fait en sorte que le potentiel effectif sera convergent et de grandeur fini.

Afin d'obtenir le potentiel de correction interne de la sphère $V_{\text{Scorr}}^{n=4}(x)$, on doit alors définir la fonction $g(s, y) = 1/s^3 - 1/(s^2 + y^2)^{3/2}$. On intègre cette fonction en tenant compte de la forme de la sphère, soit en utilisant les relations $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ pour les disques à droite

du point x et $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ à gauche du point x . On obtient que :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=4}(x) &= -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds \\ &= -\frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left[\int_0^{R-x} ds/s^3 + \int_0^{R+x} ds/s^3 - \frac{2}{R^2 - x^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.23})$$

Avec les équations (B.2.22) et (B.2.23), on obtient le potentiel effectif de correction pour $n = 4$, soit $V_{\text{effcorr}}^{n=4}(x)$. Ce potentiel sera donné par :

$$\begin{aligned} V_{\text{effcorr}}^{n=4}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=4}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=4}(x) \\ &= \frac{2\pi}{3}G\rho r_0^4 \left[\frac{2}{R^2 - x^2} - \frac{R-x}{a^2\sqrt{(R-x)^2 + a^2}} - \frac{R+x}{a^2\sqrt{(R+x)^2 + a^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.24})$$

B.2.5. Pour $n = 5$

On utilise encore le même procédé qu'en $n = 4$, mais pour $n = 5$. Le potentiel d'un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ à une distance x sur l'axe de symétrie s'exprime par $-\frac{\pi}{2}G\sigma r_0^5[1/x^4 - 1/(x^2 + y^2)^2]$. Toutefois, en utilisant la fonction $g(s) = 1/s^4 - 1/(s^2 + a^2)^2$, on obtiendra le potentiel de correction au potentiel newtonien $V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x)$ pour un cylindre de longueur $2R$ et de rayon a . On obtient que :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x) &= -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{\pi}{2}G\rho r_0^5 \left[\int_0^{R-x} ds/s^4 + \int_0^{R+x} ds/s^4 - \frac{R-x}{2a^2((R-x)^2 + a^2)} - \frac{R+x}{2a^2((R+x)^2 + a^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.25})$$

Comme auparavant, on obtient que les deux premières intégrales de l'équation (B.2.25) sont divergentes. Encore une fois, ces deux termes s'annuleront avec ces mêmes termes présents dans le potentiel de la sphère. Cela donnera un potentiel effectif convergent et de grandeur fini.

Pour obtenir le potentiel de correction interne de la sphère $V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x)$, on utilisera la fonction $g(s, y) = 1/s^4 - 1/(s^2 + y^2)^2$. On intègre cette fonction en tenant compte de la forme de la sphère, soit en utilisant les relations $y^2 = R^2 - (s-x)^2$ pour les disques à droite du point

x et $y^2 = R^2 - (s + x)^2$ à gauche de ce même point x . On obtient que :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x) &= -\frac{\pi}{2} G \rho r_0^5 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s, y) ds \\ &= -\frac{\pi}{2} G \rho r_0^5 \left[\int_0^{R-x} ds/s^4 + \int_0^{R+x} ds/s^4 - \frac{2R}{(R^2 - x^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.26})$$

En combinant les équations (B.2.25) et (B.2.26), on obtient le potentiel effectif de correction pour $n = 5$, soit $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=5}(x)$. Ce dernier sera donné par :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=5}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=5}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=5}(x) \\ &= -\frac{\pi}{2} G \rho r_0^5 \left[-\frac{2R}{(R^2 - x^2)^2} + \frac{R-x}{2a^2((R-x)^2 + a^2)} + \frac{R+x}{2a^2((R+x)^2 + a^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R-x}{a} \right) + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \left(\frac{R+x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.27})$$

B.2.6. Pour $n = 6$

On applique une dernière fois le même procédé pour $n = 6$. Le potentiel de correction d'un disque uniforme de rayon y et de densité massique de surface σ , à une distance x sur l'axe de symétrie, s'exprime par $-\frac{2\pi}{5} G \sigma r_0^6 [1/x^5 - 1/(x^2 + y^2)^{5/2}]$. En utilisant la fonction $g(s) = 1/s^5 - 1/(s^2 + a^2)^{5/2}$, on obtient le potentiel de correction au potentiel newtonien interne $V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x)$ du cylindre de longueur $2R$ et de rayon a . On obtient que :

$$\begin{aligned} V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x) &= -\frac{2\pi}{5} G \rho r_0^6 \left(\int_0^{R-x} + \int_0^{R+x} \right) g(s) ds \\ &= -\frac{2\pi}{5} G \rho r_0^6 \left[\int_0^{R-x} ds/s^5 + \int_0^{R+x} ds/s^5 - \frac{(R-x)(3a^2 + 2(R-x)^2)}{3a^4(a^2 + (R-x)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R+x)(3a^2 + 2(R+x)^2)}{3a^4(a^2 + (R+x)^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.28})$$

Comme auparavant, on obtient que les deux premières intégrales de l'équation (B.2.28) sont divergentes. Comme on a vu, ces deux termes s'annulent avec exactement les mêmes termes présents dans le potentiel de la sphère. Cela donnera un potentiel effectif convergent et de grandeur fini.

Afin d'obtenir le potentiel interne de correction de la sphère $V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x)$, on utilisera la fonction $g(s, y) = 1/s^5 - 1/(s^2 + y^2)^{5/2}$. On intègre cette fonction en tenant compte de la forme de la sphère, soit en utilisant les relations $y^2 = R^2 - (s - x)^2$ pour les disques à droite

du point x ainsi que $y^2 = R^2 - (s+x)^2$ à gauche du point x . On obtient que :

$$\begin{aligned} V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x) &= -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left(\int_0^{R+x} + \int_0^{R-x} \right) g(s, y) ds \\ &= -\frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left[\int_0^{R+x} ds/s^5 + \int_0^{R-x} ds/s^5 - \frac{(6R^2 + 2x^2)}{3(R^2 - x^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.29})$$

En utilisant les équations (B.2.28) et (B.2.29), on obtient le potentiel effectif de correction au potentiel newtonien pour $n = 6$, soit $V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=6}(x)$. Ce dernier sera donné par :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}_{\text{corr}}}^{n=6}(x) &= V_{S_{\text{corr}}}^{n=6}(x) - V_{C_{\text{corr}}}^{n=6}(x) \\ &= \frac{2\pi}{5}G\rho r_0^6 \left[\frac{(6R^2 + 2x^2)}{3(R^2 - x^2)^3} - \frac{(R-x)(3a^2 + 2(R-x)^2)}{3a^4(a^2 + (R-x)^2)^{3/2}} - \frac{(R+x)(3a^2 + 2(R+x)^2)}{3a^4(a^2 + (R+x)^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2.30})$$

B.3. Potentiels entre deux hémisphères

On montrera dans cette section comment obtenir le potentiel gravitationnel $V_{H_{\text{eff}}}(x)$ entre deux hémisphères nécessaire pour le déphasage à la fin du cinquième article. On a besoin de soustraire le potentiel gravitationnel $V_D(x)$ d'un disque de rayon R et d'épaisseur $2a$ du potentiel total de la sphère de rayon R exprimé par l'équation (B.1.7). Dans cette section, on calculera précisément le potentiel d'un disque plein pour un potentiel gravitationnel de type Yukawa.

On va considérer le potentiel gravitationnel d'un disque à une distance x du centre avec une épaisseur $2a$, un rayon R et une densité massique uniforme ρ ; le tout pour un potentiel purement newtonien exprimé par l'équation (2.5.1). Ce potentiel est obtenu par les mêmes méthodes que dans les travaux présentés dans la référence [132]. La formule est donnée par :

$$\begin{aligned} V_D^N(x) &= -4G\rho \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} d\phi dr dz \\ &= -2G\rho \int_0^\pi \left[a\sqrt{r^2(\phi) + a^2} + r^2(\phi) \ln \left(\frac{\sqrt{r^2(\phi) + a^2} + a}{r(\phi)} \right) - a^2 \right] d\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

À la première ligne de l'équation (B.3.1), on intègre d'abord le potentiel provenant de l'élément de masse $r d\phi dr dz$ sur l'épaisseur $2a$ par rapport à z . En seconde ligne de l'équation (B.3.1), on intègre en r sur le reste du disque entre $r = 0$ et $r = r(\phi) = x \cos \phi + \sqrt{R^2 - x^2 \sin^2 \phi}$ [132]. Toutefois, le deuxième terme de l'intégrand de l'équation (B.3.1) n'admettra pas de solution analytique. On serait d'abord tentés d'effectuer un développement en séries de x pour ce terme afin de pouvoir intégrer cette expression. Malheureusement, en ayant pour but de pouvoir ensuite intégrer le potentiel $V_D^N(x)$ de $x = 0$

à $x = R$ pour obtenir le déphasage total, cette approche n'aidera pas à obtenir un développement en série de x se terminant à une certaine puissance de x bien précise. Si on utilise un développement en séries, ce sera seulement une série dans son intégralité. Avec cela, on cherchera plutôt à effectuer une estimation "grossière" de cette intégrale. Considérant que l'épaisseur du disque est $2a \ll R$, il est évident que le terme $r(\phi)$ présent dans l'argument de la racine carrée ainsi que du logarithme est particulièrement plus large que a , excepté lorsque $x \sim R$. On a comme conséquence, en supposant $r(\phi) \gg a$ pour tout $x \lesssim R$, que l'approximation est adéquate ici pour la principale contribution à l'intégrale $\int_0^R V_D^N(x) dx$. Cela n'affectera pas ladite contribution, en restant fidèle à l'hypothèse formulée à la fin du cinquième article. Ensuite, au-delà des termes de deuxième ordre en a , le premier terme des crochets de l'intégrale dans l'équation (B.3.1) peut être approximé par $ar(\phi)$ et le logarithme peut s'approximer par $a/r(\phi)$. Dans ce cas, l'équation (B.3.1) se réduira comme suit :

$$V_D^N(x) \approx -2G\rho \int_0^\pi [2ar(\phi) - a^2] d\phi \approx -2G\rho \left[2aRE \left(\frac{x^2}{R^2} \right) - \pi a^2 \right]. \quad (\text{B.3.2})$$

Dans cette dernière équation, on a la fonction $E(z)$ se définissant comme l'intégrale elliptique complète de deuxième type [21]. Cette dernière admet une représentation en séries qui est reliée à la fonction hypergéométrique conventionnelle par la relation $E(z) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2 \right)$. Toutefois, en utilisant le développement en séries de puissance de la fonction hypergéométrique [21], on obtiendra le développement en séries de puissances pour le potentiel $V_D^N(x)$ comme suit :

$$V_D^N(x) = -2\pi G\rho a R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (1)_n} \frac{x^{2n}}{R^{2n}} + 2\pi G\rho a^2. \quad (\text{B.3.3})$$

Le symbole $(x)_n$ exprime le produit des termes $x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ et est appelé le symbole de Pochhammer. Par définition, on a que $(x)_0 = 1$. On doit noter que cela représente une série complète en x et non une troncature d'une série. Donc, le potentiel exprimé par l'équation (B.3.3) peut être intégré exactement sur le diamètre du disque afin d'obtenir le déphasage final présenté à la fin du cinquième article. L'intégrale de l'équation (B.3.3) donne comme résultat :

$$\int_0^R V_D^N(x) dx \approx -2\pi G\rho a R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(2n+1)n! (1)_n} + 2\pi G\rho a^2 R \equiv -2\pi G\rho a R \left(RI_D^N - a \right). \quad (\text{B.3.4})$$

Le facteur I_D^N représente la somme infinie dans l'équation (B.3.4). Le nombre de termes que l'on veut garder dans cette somme dépend de la précision désirée pour les résultats. Cela dépend aussi de l'ordre de grandeur de a .

Similairement, on veut obtenir le potentiel gravitationnel dans le disque pour le terme de correction de type Yukawa présent dans l'équation (2.5.2). On le calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
V_D^Y(x) &= -4G\rho\alpha \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r e^{-\sqrt{r^2+z^2}/\lambda}}{\sqrt{r^2+z^2}} d\phi dr dz \\
&\approx -4G\rho\alpha e^{-a/\lambda} \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a e^{-r/\lambda} d\phi dr dz \\
&\approx -4G\lambda\rho\alpha e^{-a/\lambda} \int_0^\pi (1 - e^{-r(\phi)/\lambda}) d\phi \\
&\approx -4\pi G\lambda\rho\alpha e^{-a/\lambda} \left(1 - e^{-\frac{R-x}{\lambda}}\right). \tag{B.3.5}
\end{aligned}$$

Sachant que l'intégrale à la première ligne ne donne pas d'expression purement analytique, on a approximé cette expression à la seconde ligne. On a noté alors que la principale contribution provient de $r(\phi) \gg a$, ce qui permet d'absorber le terme z^2 dans la racine carrée. Conséquemment, on a eu par la suite à prendre la limite inférieure de l'exponentielle du numérateur, soit $e^{-(a+r)/\lambda}$. En fait, grâce à ces approximations, cette intégrale est facilement évaluée à la troisième ligne de l'équation (B.3.5). Cette dernière expression n'admet toujours pas d'expression proprement analytique. Pour cette raison, on a alors opté pour l'évaluation par la plus faible valeur absolue de $r(\phi)$, soit $R - x$. Avec cette valeur approximative, on obtient au premier ordre en λ , λ étant $\ll R$, l'intégrale suivante :

$$\int_0^R V_D^Y(x) dx \approx -4\pi G\lambda\rho R\alpha e^{-a/\lambda}. \tag{B.3.6}$$

B.4. Les potentiels de disque avec approximations en potentiels harmoniques

B.4.1. Pour le potentiel newtonien

En définissant le potentiel gravitationnel fondamental comme $V(r) = -GM/r$, on veut obtenir le potentiel gravitationnel newtonien entre les deux hémisphères tel qu'exigé au sixième article. Ce potentiel gravitationnel sera défini pour une distance x du centre d'hémisphère et se pose $V_H^N(x) = V_S^N(x) - V_D^N(x)$. On a que $V_S^N(x)$ est le potentiel newtonien de la sphère pleine de rayon R à une distance x de son centre tel qu'exprimé par l'équation (B.1.2). On a aussi le potentiel newtonien $V_D^N(x)$ du disque de rayon R et d'épaisseur $2a$ à une distance x de son centre qui est exprimé par l'équation (B.3.1). De cette dernière équation, on prend l'approximation pour de faibles distances x ainsi que de faibles épaisseurs $2a$ par rapport au rayon R . On exprime donc en séries de puissances l'intégrand de l'équation (B.3.1) en puissances de x/R et a/R . Cela permettra d'intégrer facilement par rapport à ϕ cette équation. En ne gardant que les termes dominants dans le résultat, on obtient comme

potentiel gravitationnel newtonien du disque à la distance x de son centre, l'expression :

$$V_D^N(x) = \frac{\pi G \rho a}{R} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4}\right) + \text{const.} \quad (\text{B.4.1})$$

On a évidemment enlevé les termes d'ordres 4 et supérieurs en x/R et a/R . On a aussi rassemblé tous les termes constants du potentiel dans le dernier terme. Avec les équations (B.1.2) et (B.4.1), on obtient le potentiel entre les deux hémisphères avec la relation $V_H^N(x) = V_S^N(x) - V_D^N(x)$ comme suit :

$$V_H^N(x) = \frac{2\pi G \rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right) x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4}\right) + \text{const.} \quad (\text{B.4.2})$$

B.4.2. Pour le potentiel de type Yukawa

Avec une correction fondamentale de type Yukawa sous forme $V^Y(r) = -\frac{1}{r} GM \alpha e^{-r/\lambda}$, on avait déjà obtenu comme potentiel de correction de type Yukawa pour une sphère pleine de rayon R l'équation (B.1.7) sans le terme newtonien exprimé par l'équation (B.1.2). Ce terme de correction de type Yukawa de l'équation (B.1.7) pour le cas de faibles déplacements en x devra être développé en termes de puissances de x/λ . Ce développement sera valide pour les cas où $x < \lambda$. Le tout donnera la relation suivante :

$$V_S^Y(x) = e^{-R/\lambda} \left[\frac{2\pi G R \rho \alpha}{3\lambda} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right) \right] + \text{const.} \quad (\text{B.4.3})$$

On a encore une fois gardé uniquement les termes allant jusqu'à l'ordre 2 en x/λ et on a aussi rassemblé tous les termes constants dans le dernier terme de cette équation (B.4.3).

On désignera le potentiel de correction de type Yukawa du disque de densité massique uniforme ρ , de rayon R et d'épaisseur $2a$ ressenti à une distance x de son centre par $V_D^Y(x)$. On partira de la définition exprimée par l'équation (B.3.5), sauf que l'on approximera pour des valeurs de x très faibles par rapport au rayon R . On intègre cette dernière sur l'ensemble du disque pour avoir la relation :

$$\begin{aligned} V_D^Y(x) &= -4G\rho\alpha \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r e^{-\sqrt{r^2+z^2}/\lambda}}{\sqrt{r^2+z^2}} d\phi dr dz \\ &\approx e^{-\frac{\sqrt{R^2+a^2}}{\lambda}} \left[\frac{\pi G \rho a \alpha}{R} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4}\right) + \text{const.} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4.4})$$

On doit mentionner que l'approximation en (B.4.4) est obtenue par la limite inférieure de l'intégrale. Puisque l'intégrale de départ ne donne pas de solution purement analytique, on a été contraint d'utiliser une estimation "grossière". On a ensuite intégré sur la totalité du disque, comme on a effectué pour le potentiel newtonien dans la limite où $x \ll R$, comme à la section B.3. Avec la faiblesse de a , on voit clairement que la contribution de cette limite inférieure de $V_D^Y(x)$ est très faible, voire négligeable par rapport aux potentiels

newtoniens. Au final, en utilisant les équations (B.4.2) et (B.4.3), on obtient comme potentiel gravitationnel $V_H^{N+Y}(x)$ entre les deux hémisphères ressenti à une distance x de son centre, et en ne mettant que les termes jusqu'au deuxième ordre, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} V_H^{N+Y}(x) &\approx V_H^N(x) + V_S^Y(x) \\ &\approx \frac{2\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R} + \frac{\alpha R}{\lambda} e^{-R/\lambda}\right) x^2 + \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{B.4.5})$$

Il faut noter que cette équation (B.4.5) n'est valide que pour $x^4/R^4 \ll \alpha R/\lambda e^{R/\lambda}$. Pour le respect de cette condition, il faut choisir l'échelle de x en fonction des valeurs des paramètres de Yukawa λ et α .

B.4.3. Pour le potentiel de puissance inverse à $n = 1$

Pour tout potentiel gravitationnel de puissance inverse n , on se sert de la correction de la forme $V^n(r) = -GM r_0^n/r^{n+1}$ de ce dernier. On désire obtenir le potentiel $V_D^n(x)$ du disque de rayon R , d'épaisseur $2a$ et de densité massique uniforme ρ ressenti à une distance x de son centre. Il n'y a que le cas $n = 1$ qui permet d'obtenir un potentiel fini et convergent interne à la sphère selon la section B.2 de cet annexe [93]. On se concentrera uniquement sur ce cas $n = 1$ de correction de puissance inverse. Pour une sphère uniforme de rayon R et de densité massique ρ , on prend comme point de départ l'équation (B.2.2) de la section B.2. On prendra la limite des faibles déplacements en x et on obtiendra le développement en séries de puissances en x/R comme suit :

$$\begin{aligned} V_S^{n=1}(x) &= -2\pi G\rho r_0 \left[R + \frac{R^2 - x^2}{2x} \ln \frac{R+x}{R-x} \right] \\ &= -4\pi G\rho r_0 R \left(1 - \frac{x^2}{3R^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{B.4.6})$$

D'une autre manière, on devra aussi obtenir le potentiel du disque de rayon R et d'épaisseur $2a$ tout comme pour le cas newtonien. On obtient sous les mêmes types d'approximations qu'en B.3 la relation :

$$\begin{aligned} V_D^{n=1}(x) &= -4G\rho r_0 \int_0^\pi \int_0^{r(\phi)} \int_0^a \frac{r}{r^2 + z^2} d\phi dr dz \\ &= -2G\rho r_0 \int_0^\pi \left[a \ln \left(\frac{a^2 + r^2(\phi)}{a^2} \right) + r(\phi) \tan^{-1} \left(\frac{a}{r(\phi)} \right) \right] d\phi \\ &= \frac{2\pi G\rho r_0 a}{R^2} x^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}, \frac{x^2 a^2}{R^4}\right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{B.4.7})$$

Comme l'intégrale de la seconde ligne de l'équation (B.4.7) n'admet toujours pas de solution analytique, la meilleure solution dans ce cas est de développer l'intégrand en séries de puissances en x/R et a/R , et ainsi intégrer en ϕ . Ce résultat est valide uniquement pour les cas où $x \ll R$ ainsi que $a \ll R$, le tout selon les hypothèses du sixième article.

Maintenant, le potentiel gravitationnel total entre les deux hémisphères s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
 V_H^{N+(n=1)}(x) &= V_H^N + V_S^{n=1} - V_D^{n=1} \\
 &\approx \frac{2\pi G\rho}{3} \left(1 - \frac{3a}{2R}\right) \left(1 + \frac{2r_0}{R}\right) x^2 + \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{B.4.8}$$

Références bibliographiques

- [1] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [2] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [3] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory, Second Edition*. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, *Mécanique Quantique, tome II*. Hermann, 1977.
- [5] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, 4th ed. Cambridge University Press, 2000.
- [6] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, 3rd ed. Wiley, 2003.
- [7] F. Gianotti and T. Virda, “The discovery and measurements of a Higgs Boson,” *Royal Society Transcript A*, vol. 373, p. 2032, 2014.
- [8] ATLAS Collaboraton, “Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data,” *Phys. Letters B*, vol. 726, p. 120, 2013.
- [9] B. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*, 4th ed. Wiley, 2017.
- [10] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principe and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [12] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [13] C. Will, *Theory and experiments in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [14] L. Perivolaropoulos and L. Kazantzidis, “Hints of Modified Gravity in Cosmos and in the Lab?” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 28, p. 1942001, 2019. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021827181942001X>
- [15] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics, 2nd Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [16] —, “The Confrontation between General Relativity and Experiment,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 17, p. 4, 2014. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-4>
- [17] E. Fischbach and C. Talmadge, *The search for non-Newtonian gravity*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [18] C. Jamell and R. Decca, “Yukawa corrections to the Newtonian gravitational potential : finite size effects in a recent experiment,” *Int. J. Mod. Phys. : Conference Series*, vol. 3, p. 48, 2011. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S2010194511001139>

- [19] J. Schiff, *Quantum Mechanics, First Edition*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949.
- [20] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1995.
- [21] W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Third Edition*. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [22] S. Lea, *Mathematics for Physicists*. Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [23] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. John Wiley and Sons, 1999.
- [24] L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime, Quantized Fields and Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [25] M. Taut, “Two electrons in an external oscillator potential : Particular analytic solutions of a Coulomb correlation problem,” *Phys. Rev. A*, vol. 48, p. 3561, 1993. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.48.3561>
- [26] K. Symon, *Mechanics*, 3rd ed. Addison Wesley Longman, 1971.
- [27] H. Buchholz, *The Confluent Hypergeometric Function, with Special Emphasis on its Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [28] E. Adelberger, B. Heckel, and A. Nelson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 53, p. 77, 2003. [Online]. Available : <https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.nucl.53.041002.110503>
- [29] J. Murata and S. Tanaka, “Review of short-range gravity experiments in the LHC era,” *Class. Quantum Grav.*, vol. 32, p. 033001, 2015. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/32/3/033001>
- [30] D. Krause and E. Fischbach, “Searching for Extra Dimensions and New String-Inspired Forces in the Casimir Regime,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 562, p. 292, 2001. [Online]. Available : https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F3-540-40988-2_14
- [31] J. Long and J. Price, “Current Short-Range Tests of the Gravitational Inverse Square Law,” *Compt. Rend. Phys.*, vol. 4, p. 337, 2003. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070503000422?via%3Dihub>
- [32] E. Adelberger, B. Heckel, and A. Nelson, “Torsion balance experiments : A low-energy frontier of particle physics,” *Prog. Part. Nucl. Phys.*, vol. 62, p. 102, 2009. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641008000720?via%3Dihub>
- [33] J. Hoskins, R. Newman, R. Spero, and J. Schultz, “Experimental tests of the gravitational inverse-square law for mass separations from 2 to 105 cm,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, p. 3084, 1985. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.32.3084>
- [34] M. Moody and H. Paik, “Gauss’s law test of gravity at short range,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 1195, 1993. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.70.1195>
- [35] J. Long, H. Chan, and J. Price, “Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime,” *Nucl. Phys. B*, vol. 539, p. 23, 1999. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398007111>
- [36] C. Hoyle and al., “Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law : A search for ”large” extra dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, p. 1418, 2001. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.86.1418>

- [37] E. Adelberger and for the EOT-WASH GROUP, “Sub-mm tests of the gravitational inverse-square law,” *CPT and Lorentz Symmetry*, p. 9, 2002. [Online]. Available : https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812778123_0002
- [38] D. Kapner and al., “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 021101, 2007. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.98.021101>
- [39] A. Sushkov and al., “New experimental limits on non-Newtonian forces in the micrometer-range,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 171101, 2011. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.107.171101>
- [40] S. Yang and al., “Test of the Gravitational Inverse Square Law at Millimeter Ranges,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 081101, 2012. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.108.081101>
- [41] C. Shao and al., “Search for Lorentz invariance violation through tests of the gravitational inverse square law at short-ranges,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 102007, 2015. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.91.102007>
- [42] W.-H. T. *et al.*, “New Test of the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range with Dual Modulation and Compensation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 131101, 2016. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.131101>
- [43] J. Bergé, “The Inverse Square Law And Newtonian Dynamics space explorer (ISLAND),” *42nd COSPAR Scientific Assembly*, vol. 42, pp. H0.3–6–18, 2018. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/1809.00698>
- [44] A. Landry and M. B. Paranjape, “Gravitationally induced quantum transitions,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 122006, 2016. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.93.122006>
- [45] V. V. Nesvizhevsky *et al.*, “Quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field,” *Nature*, vol. 415, pp. 297–299, 2002. [Online]. Available : <https://www.nature.com/articles/415297a>
- [46] —, “Measurement of quantum states of neutrons in the earth’s gravitational field,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 102002, 2003. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.67.102002>
- [47] —, “Study of the neutron quantum states in the gravity field,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 40, pp. 479–491, 2005. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1140>
- [48] H. Abele, T. Jenke, H. Leeb, and J. Schmiedmayer, “Ramsey’s method of separated oscillating fields and its application to gravitationally induced quantum phase shifts,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 065019, Mar 2010. [Online]. Available : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.065019>
- [49] T. Jenke, G. Cronenberg, J. Burgdörfer, L. A. Chizhova, P. Geltenbort, A. N. Ivanov, T. Lauer, T. Lins, S. Rotter, H. Saul, U. Schmidt, and H. Abele, “Gravity resonance spectroscopy constrains dark energy and dark matter scenarios,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 151105, Apr 2014. [Online]. Available : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.151105>
- [50] T. Jenke, D. Stadler, H. Abele, and P. Geltenbort, “Q-bounce - experiments with quantum bouncing ultracold neutrons,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 611, no. 2–3,

- pp. 318 – 321, 2009, particle Physics with Slow Neutrons. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900209015538>
- [51] R. Golub, D. Richardson, and S. Lamoreaux, *Ultra-Cold Neutrons*. Taylor & Francis, 1991. [Online]. Available : <https://books.google.ca/books?id=QPUjlcWNg78C>
- [52] P. Pedram, “Minimal Length and the Quantum Bouncer : A Nonperturbative Study,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 51, pp. 1901–1910, 2012.
- [53] A. Serebrov, J. Butterworth, M. Daum, A. Fomin, P. Geltenbort, K. Kirch, I. Krasnoschekova, M. Lasakov, Y. Rudnev, V. Varlamov, and A. Vassiljev, “Low-energy heating of ultracold neutrons during their storage in material bottles,” *Physics Letters A*, vol. 309, no. 3 - 4, pp. 218 – 224, 2003. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103001993>
- [54] B. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, New York, 2013.
- [55] G. Dattoli and K. Zhukovsky, “Linear Potentials, Airy Wave Packets and Airy Transform.” ENEA, Roma, 2009.
- [56] O. Vallée and M. Soares, *Airy functions and applications to physics*. Imperial College Press, 2004.
- [57] A. Landry and M. Paranjape, “Graviton Laser,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 25, p. 1644016, 2016. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271816440168>
- [58] S. Novaes and D. Spehler, “Gravitational Laser Back-Scattering,” *Phys.Rev. D*, vol. 47, pp. 2432–2434, 1993. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.47.2432>
- [59] C. Will, “Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries,” *Phys.Rev.D*, vol. 57, pp. 2061–2068, 1998. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.57.2061>
- [60] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, ser. Advanced book program. Addison-Wesley, 1990. [Online]. Available : <https://books.google.ca/books?id=6KrvAAAAMAAJ>
- [61] E. Bertschinger, “Gravitation in the Weak Field Limit,” 2000. [Online]. Available : <http://web.mit.edu/edbert/GR/gr6.pdf>
- [62] A. Landry and F. Hammad, “Landau levels in a gravitational field : the Schwarzschild spacetime case,” *Submitted to Euro. Phys. Journal Plus for review*, 2019. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/1909.01827>
- [63] Griffiths, J.B. and Podolský, J., *Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [64] F. Ernst, “Black holes in a magnetic universe,” *Journal of Math. Phys.*, vol. 17, p. 54, 1976. [Online]. Available : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.522781>
- [65] —, “Removal of the nodal singularity of the C-metric,” *Journal of Math. Phys.*, vol. 17, p. 515, 1976. [Online]. Available : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.522935>
- [66] Gal’tsov, D.V. and Petukhov, V.I., “Black hole in an external magnetic field,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 47, p. 419, 1978. [Online]. Available : <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/r/74/3/p801?a=list>
- [67] V. Karas and D. Vokrouhlicky, “Chaotic motion of test particles in the Ernst space-time,” *Gen. Relat. Gravit.*, vol. 24, p. 729, 1992. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00760079>
- [68] W. Bonnor, “Static Magnetic Fields in General Relativity,” *Proc. Phys. Soc. A*, vol. 67, p. 225, 1954. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0370-1298/67/3/305/pdf>

- [69] M. Melvin, “Pure magnetic and electric geons,” *Phys. Lett.*, vol. 8, p. 65, 1964. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916364908017?via%3Dihub>
- [70] L. Santos and C. J. Barros, “Dirac equation and the Melvin metric,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 76, p. 560, 2016. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-016-4409-x>
- [71] P. Haensel, A. Potekhin, and D. Yakovlev, *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*. Springer, Berlin, 2007.
- [72] R. Wald, “Black hole in a uniform magnetic field,” *Phys. Rev. D*, vol. 10, p. 15, 1974. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.10.1680>
- [73] H. Abele, S. Baessler, and A. Westphal, “Quantum states of neutrons in the gravitational field and limits for non-newtonian interaction in the range between $1 \mu\text{m}$ and $10 \mu\text{m}$,” in *Quantum Gravity : From Theory to Experimental Search*, ser. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, vol. 631. Giulini, D. and Kiefer, C. and Laemmerzahl, C., 2003, pp. 355–366. [Online]. Available : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003LNP...631..355A>
- [74] G. Biedermann, X. Wu, L. Deslauriers, S. Roy, C. Mahadeswaraswamy, and M. Kasevich, “Testing gravity with cold-atom interferometers,” *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 033629, 2015. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.91.033629>
- [75] Y. Kamiya, K. Itagami, M. Tani, G. Kim, and S. Komamiya, “Constraints on New Gravitylike Forces in the Nanometer Range,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 161101, 2015. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.114.161101>
- [76] Borka, D. and Jovanović, P. and Jovanović, V.B. and Zakharov, A.F., “Constraining the range of Yukawa gravity interaction from S2 star orbits,” *JCAP.*, vol. 11, p. 0502, 2013. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2013/11/050/meta>
- [77] F. Hammad and A. Landry, “Landau levels in a gravitational field : the Levi-Civita and Kerr spacetimes case,” *Euro. Phys. Journal Plus*, vol. 135, p. 90, 2020. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1140/epjp/s13360-020-00108-1>
- [78] C. Trendafilova and S. Fulling, “Static solutions of Einstein’s equations with cylindrical symmetry,” *Eur. J. Phys.*, vol. 32, p. 1663, 2011. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/32/6/020/meta>
- [79] C. Kiefer and C. Weber, “On the interaction of mesoscopic quantum systems with gravity,” *Annalen Phys.*, vol. 14, p. 253, 2005. [Online]. Available : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.200410119>
- [80] L. Marder, “Gravitational waves in general relativity I. Cylindrical waves,” *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 244, p. 524, 1958. [Online]. Available : <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1958.0058>
- [81] W. Bonnor, “Solution of Einstein’s equations for a line mass of perfect fluid,” *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 12, p. 847, 1979. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/12/6/014/meta>
- [82] L. Herrera, F. Paiva, and N. Santos, “Geodesics in the Gamma spacetime,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 9, p. 649, 2000. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021827180000061X>
- [83] L. Herrera, N. Santos, A. Teixeira, and A. Wang, “On the interpretation of cylindrically symmetric Levi-Civita spacetime for $0 < \sigma < \infty$,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 18, p. 3847, 2001. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/18/18/305/meta>

- [84] K. Bronnikov, N. Santos, and A. Wang, “Cylindrical Systems in General Relativity,” 2019. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/1901.06561>
- [85] R. Blakely, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [86] M. Visser, *The Kerr spacetime - a brief introduction, in The Kerr Spacetime : Rotating Black Holes in General Relativity*. Wiltshire, D.L., Visser, M. and Scott, S.M. (Cambridge University Press, Cambridge), 2009.
- [87] Z. Gan and al., “NMR spectroscopy up to 35.2 T using a series-connected hybrid magnet,” *J. Magn. Reson.*, vol. 284, p. 125, 2017. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1090780717302045>
- [88] Cronenberg, G. and al., “Acoustic Rabi oscillations between gravitational quantum states and impact on symmetron dark energy,” *Nature Phys.*, vol. 14, p. 1022, 2018. [Online]. Available : <https://www.nature.com/articles/s41567-018-0205-x>
- [89] A. Broderick, M. Prakash, and J. Lattimer, “The Equation of State of Neutron Star Matter in Strong Magnetic Fields,” *Astrophysical J.*, vol. 537, p. 351, 2000. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/309010/meta>
- [90] N. Chamel, Y. Mutafchieva, Z. Stoyanov, L. Mihailov, and R. Pavlov, “Landau quantization and neutron emissions by nuclei in the crust of a magnetar,” *J. Phys. : Conf. Ser.*, vol. 724, p. 012034, 2016. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/724/1/012034/meta>
- [91] P. Haensel, A. Potekhin, and D. Yakovlev, *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*. Astrophys. Space Sci. Libr. **326** (Springer, New York), 2007. [Online]. Available : <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-0-387-47301-7>
- [92] S. Olausen and V. M. Kaspi, “The McGill Magnetar Catalogue*,” *ApJS.*, vol. 212, p. 6, 2014. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0067-0049/212/1/6>
- [93] F. Hammad, A. Landry, and K. Mathieu, “Prospects on the possibility of testing the inverse-square law and gravitomagnetism using quantum interference,” *Int. Journal of Mod. Phys D. Apparâitra très bientôt.*, 2020. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271821500048>
- [94] H. Pfister, “Gravitomagnetism : From Einstein’s 1912 Paper to the Satellites LAGEOS and Gravity Probe B, In : Bičák J., Ledvinka T. (eds),” *Rel. Grav. Springer Proceedings in Physics*, vol. 157, 2014. [Online]. Available : https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-06761-2_24
- [95] B. Malekolkalami and M. Farhoudi, “About Gravitomagnetism,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 24, p. 601, 2009. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732309028618>
- [96] R. Adler and P. Chen, “Gravitomagnetism in Quantum Mechanics,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 025004, 2010. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.82.025004>
- [97] J. Biemond, “The gravitomagnetic field of a sphere, Gravity Probe B and the LAGEOS satellites,” 2008. [Online]. Available : <https://arxiv.org/abs/0802.3346>
- [98] I. Ciufolini and al., “Measurement of gravitomagnetism,” *EPL.*, vol. 39, p. 359, 1997. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/epl/i1997-00362-7>
- [99] M. Tajmar, F. Plesescu, B. Seifert, and K. Marhold, “Measurement of Gravitomagnetic and Acceleration Fields Around Rotating Superconductors,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 880, p. 1071, 2007. [Online]. Available : <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2437552>

- [100] B. Ahmedov and N. Rakhmatov, “Concerning Measurement of Gravitomagnetism in Electromagnetic Systems,” *Found. Phys.*, vol. 33, p. 625, 2003. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1023722704270>
- [101] M. Ruggiero and A. Tartaglia, “Test of gravitomagnetism with satellites around the Earth,” *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, p. 205, 2019. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1140%2Fepjp%2Fi2019-12602-6>
- [102] F. Hammad, A. Landry, and K. Mathieu, “A fresh look at the influence of gravity on the quantum Hall effect,” *Eur. Phys. Jour. Plus*, vol. 135, p. 449, 2020. [Online]. Available : <https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjp/s13360-020-00481-x>
- [103] A. MacDonald, T. Rice, and W. Brinkman, “Hall voltage and current distributions in an ideal two-dimensional system,” *Phys. Rev. B*, vol. 28, p. 3648(R), 1983. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.28.3648>
- [104] R. Prange and S. e. Girvin, *The Quantum Hall Effect*. Springer : Heidelberg, Germany, 1992.
- [105] M. Janssen, O. Viehweger, U. Fastenrath, and J. Hajdu, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*. VCH : Weinheim, Germany, 1994.
- [106] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, p. 494, 1980. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.45.494>
- [107] D. Tsui, H. Stormer, and A. Gossard, “Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, p. 1559, 1982. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.48.1559>
- [108] R. Prange, *Effects of Imperfection and Disorder, in "The Quantum Hall Effect"*. R.E. Prange and S.M. Girvin eds. Second Edition. (Springer-Verlag, New York), 1990.
- [109] A. Montes de Oca and D. Martinez-Pedrerá, “Role of impurities in stabilizing quantum Hall effect plateaus,” *Phys. Rev. B*, vol. 67, p. 245310, 2003. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.67.245310>
- [110] D. Thouless, *Topological Considerations, in "The Quantum Hall Effect"*. R. E. Prange and S. M. Girvin eds. Second Edition. (Springer-Verlag, New York), 1990.
- [111] B. Jeckelmann and B. Jeanneret, “The quantum Hall effect as an electrical resistance standard,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 64, p. 1603, 2001. [Online]. Available : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0034-4885/64/12/201>
- [112] J. Weis and K. von Klitzing, “Metrology and microscopic picture of the integer quantum Hall effect,” *Phi. Tran. R. Soc. A*, vol. 369, p. 3954, 2011. [Online]. Available : <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rsta.2011.0198>
- [113] K. von Klitzing, “Quantum Hall Effect : Discovery and Application,” *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, vol. 8, p. 13, 2017. [Online]. Available : <https://www.annualreviews.org/doi/full/10.1146/annurev-conmatphys-031016-025148>
- [114] P. Mohr, D. Newell, and B. Taylor, “CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2014,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 88, p. 035009, 2016. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.88.035009>
- [115] R. Sharma, *Superconductivity : Basics and Applications to Magnets*. Springer, New York, 2015.

- [116] H. Wei, D. Tsui, M. Paalanen, and A. Pruisken, “Experiments on Delocalization and Universality in the Integral Quantum Hall Effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, p. 1294, 1988. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.61.1294>
- [117] S. Koch, R. Haug, K. Klitzing, and K. Ploog, “Size-dependent analysis of the metal-insulator transition in the integral quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, p. 883, 1991. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.67.883>
- [118] A. Giesbers and al., “Scaling of the quantum Hall plateau-plateau transition in graphene,” *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 241411(R), 2009. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.80.241411>
- [119] S. Gudina and al., “Scaling laws under quantum Hall effect for a smooth disorder potential,” *Low Temp. Phys.*, vol. 45, p. 176, 2019. [Online]. Available : <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5086407>
- [120] B. Huckestein, “Scaling theory of the integer quantum Hall effect,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 67, p. 357, 1995. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.67.357>
- [121] F. Hammad and A. Landry, “A simple superconductor quantum interference device for testing gravity,” *Mod. Phys. Letters A*, vol. 35, p. 2050171, 2020. [Online]. Available : <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0217732320501710>
- [122] P. Mangin and R. Kahn, *Superconductivity : An introduction*. Springer, Switzerland, 2017.
- [123] L. Cooper, “Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas,” *Phys. Rev.*, vol. 104, p. 1189, 1956. [Online]. Available : http://prola.aps.org/abstract/PR/v104/i4/p1189_1
- [124] I. Askerzade, A. Bozbey, and M. Canturk, *Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity Electronics*. Springer, Switzerland, 2017.
- [125] V. Ginzburg and L. Landau, “On the theory of superconductivity,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 20, p. 1064, 1950.
- [126] L. Aslamazov and A. Larkin, “Josephson effect in superconductivity point contact,” *Sov. Phys. JETP Lett.*, vol. 9, p. 150, 1969.
- [127] J. Yin and al., “Dimensional reduction, quantum Hall effect and layer parity in graphite films,” *Nat. Phys.*, vol. 15, p. 437, 2019. [Online]. Available : <https://www.nature.com/articles/s41567-019-0427-6#citeas>
- [128] S. Carroll and al., “Dark-Matter-Induced Weak Equivalence Principle Violation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 011301, 2009. [Online]. Available : <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.103.011301>
- [129] L. Poh-aun, S.-H. Ong, and H. Srivastava, “Some Integrals of the products of Laguerre polynomials,” *Int. J. Computer Math.*, vol. 78, p. 303, 2000. [Online]. Available : <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207160108805112>
- [130] A. Prudnikov, Y. Brychkov, and O. Marichev, *Integrals and Series, Vol. 2 : Special Functions, English translation*. Gordon and Breach, New York, 1986.
- [131] L. Slater, *Generalized Hypergeometric Function*. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [132] H. Lass and L. Blitzer, “The gravitational potential due to uniform disks and rings,” *Celestial Mechanics*, vol. 30, p. 225, 1983. [Online]. Available : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01232189>