

**Université de Montréal**

**Le problème de Steklov paramétrique et ses  
applications**

par

**Simon St-Amant**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

28 avril 2020



# Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

## Le problème de Steklov paramétrique et ses applications

présenté par

**Simon St-Amant**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Yvan Saint-Aubin*

---

(président-rapporteur)

*Iosif Polterovich*

---

(directeur de recherche)

*Alexandre Girouard*

---

(membre du jury)



# Sommaire

---

Ce mémoire contient deux articles que j'ai rédigés au cours de ma maîtrise. Le premier chapitre sert d'introduction à ces articles. Plusieurs concepts de géométrie spectrale y sont présentés dans le contexte du problème de Steklov, en plus des résultats principaux des chapitres subséquents.

Le second chapitre porte sur le problème de Steklov paramétrique sur des surfaces lisses. Un développement asymptotique complet des valeurs propres du problème est obtenu à l'aide de méthodes pseudodifférentielles. Celui-ci généralise l'asymptotique spectrale déjà connue du problème de Steklov classique. Nous en déduisons de nouveaux invariants géométriques déterminés par le spectre.

Le troisième chapitre porte sur le problème de ballotement sur des prismes à base triangulaire. Le but est de comprendre comment les angles du prisme affectent le deuxième terme du développement asymptotique de la fonction de compte des valeurs propres. En construisant des quasimodes, nous obtenons une expression de ce terme que nous conjecturons comme étant la bonne pour les vraies valeurs propres. Cette conjecture est alors supportée par des expériences numériques.

**Mots-clés :** géométrie spectrale, opérateur Dirichlet-vers-Neumann, problème de Steklov paramétrique, problème de ballotement, asymptotique spectrale.



# Summary

---

This thesis contains two articles that I wrote during my M.Sc. studies. The first chapter serves as an introduction to both articles. Some concepts of spectral geometry in the context of the Steklov problem are presented, as well as the main results of the subsequent chapters.

The second chapter concerns the parametric Steklov problem on smooth surfaces. We obtain a complete asymptotic expansion of the eigenvalues of the problem by using pseudodifferential techniques. This generalizes the already known spectral asymptotics of the classical Steklov problem. We deduce new geometric invariants determined by the spectrum.

The third chapter concerns the sloshing problem on triangular prisms. The goal is to understand how the angles in the prism affect the second term in the asymptotic expansion of the eigenvalue counting function. By constructing quasimodes, we obtain an expression for this term that we conjecture as being correct for the true eigenvalues. This conjecture is then supported by numerical experiments.

**Key words :** spectral geometry, Dirichlet-to-Neumann operator, parametric Steklov problem, sloshing problem, spectral asymptotics.





# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	5
<b>Summary</b> .....	7
<b>Liste des tableaux</b> .....	13
<b>Liste des figures</b> .....	15
<b>Remerciements</b> .....	17
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	19
1.1. La géométrie spectrale .....	19
1.2. Le problème de Steklov paramétrique .....	21
1.2.1. L'opérateur Dirichlet-vers-Neumann .....	22
1.2.2. Quelques propriétés du problème .....	24
1.2.3. L'exemple du disque .....	26
1.2.4. Le problème sur des surfaces .....	28
1.3. Le problème de ballottement .....	30
1.3.1. Propriétés du problème .....	30
1.3.2. Résultats principaux .....	31
1.4. Démonstrations des Propositions 1.2.1 et 1.2.3 .....	33
<b>Chapitre 2. Spectral invariants of Dirichlet-to-Neumann operators on surfaces</b> .....	37
2.1. Introduction and main result .....	40
2.1.1. The Dirichlet-to-Neumann map .....	40
2.1.2. Spectral asymptotics .....	40
2.1.3. Inverse spectral geometry .....	42
2.1.4. Sketch of the proof of Theorem 2.1.1 .....	44
2.1.5. Plan of the paper .....	45

Acknowledgements .....	45
2.2. The symbol of the Dirichlet-to-Neumann map on surfaces .....	46
2.2.1. Reduction to the disk .....	46
2.2.2. The symbol of the Dirichlet-to-Neumann map on the disk .....	48
2.2.3. Symmetries of the symbol .....	50
2.3. Transformation of the symbol .....	51
2.3.1. Diagonalisation of the principal symbol .....	51
2.3.2. Diagonalisation of the full symbol .....	55
2.4. General eigenvalue asymptotics from the symbol .....	58
2.4.1. Self-adjointness .....	58
2.4.2. General eigenvalue asymptotics .....	59
2.5. Eigenvalue asymptotics .....	60
2.6. Spectral invariants .....	62
<b>Chapitre 3. Asymptotics of sloshing eigenvalues for a triangular prism....</b>	<b>69</b>
3.1. Introduction .....	72
3.1.1. Steklov and the sloshing problem .....	72
3.1.2. Our problem .....	72
3.1.3. Motivation .....	74
3.1.4. Main results .....	75
3.1.5. Our approach .....	77
3.1.6. Acknowledgments .....	77
3.2. Explicit computation of the case $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ .....	77
3.3. Construction of quasimodes .....	80
3.3.1. Sloping beach problem .....	81
3.3.2. Edge wave solutions of the sloping beach problem .....	82
3.3.3. Edge wave quasimodes .....	82
3.3.4. Surface wave solutions of the sloping beach problem .....	83
3.3.5. Surface wave quasimodes .....	86
3.4. Counting the quasi-eigenvalues .....	86
3.4.1. Counting the edge wave quasi-eigenvalues .....	86
3.4.2. Finding the surface wave quasi-eigenvalues .....	87

3.4.3. Counting the surface wave quasi-eigenvalues.....	89
3.5. Discussion on quasimodes and numerical evidence.....	95
3.5.1. Discussion on quasimodes.....	95
3.5.2. Numerical evidence of Conjecture 3.1.7.....	95
<b>Références bibliographiques</b> .....	99
<b>Annexe A. Les opérateurs pseudodifférentiels</b> .....	103
A.1. Transformée de Fourier et espace de Schwartz.....	103
A.2. Opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$ .....	104
A.3. Opérateurs pseudodifférentiels sur une variété.....	108
<b>Annexe B. Expériences numériques</b> .....	111



## Liste des tableaux

---

- 1 Eigenfunctions  $\varphi(x,y)$  obtained by separation of variables that are symmetric with respect to  $y = x$  and  $y = -x$ . . . . . 79



## Liste des figures

---

1.1	Les premières courbes $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$ .....	26
1.2	Les courbes $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$ proche de $\lambda = 0$ . ....	27
3.1	Example of domain $\Omega$ with $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ .....	72
3.2	Reflections of $\Omega$ along $\Gamma_N$ to get $\tilde{\Omega}$ . ....	78
3.3	The angular sector $S_\alpha$ .....	81
3.4	Value of $S(\sigma)$ compared to its conjectured limit indicated by the horizontal line. ....	97





## Remerciements

---

Tout comme Rome, mon mémoire ne s'est pas fait en un jour. Il est le résultat de tous mes travaux et mes efforts au cours des deux années de ma maîtrise, mais je n'y serais jamais parvenu sans l'aide inestimable des gens qui m'entourent. J'aimerais profiter des prochains paragraphes pour les remercier.

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur de recherche Iosif Polterovich. Merci de m'avoir initié au merveilleux sujet qu'est la géométrie spectrale et d'avoir cru en moi alors que je n'étais qu'un étudiant au baccalauréat tout frais sorti de ma première année. Merci de m'avoir conseillé, guidé et formé au cours des dernières années.

Merci à Jean Lagacé pour sa collaboration dans notre article, mais aussi pour m'avoir inspiré à poursuivre une carrière en mathématiques grâce à ses conseils et sa volonté de réussir.

Merci à Charles et Julien de m'avoir accepté dans leur projet de recherche et pour avoir pris le temps de lire et comprendre mes idées.

Je me dois de reconnaître l'aide de mes professeurs au DMS tout au long de mon parcours en mathématiques. Plus particulièrement, merci à Marlène Frigon, Paul Gauthier, Dimitris Koukoulopoulos et Yvan Saint-Aubin pour leur support.

Je tiens à remercier mes collègues en mathématiques qui m'ont suivi au cours de mon parcours. En particulier, mes partenaires du Trio, Jérémie et Alexis. Vous avez alimenté ma curiosité mathématique plus que quiconque et les moments passés avec vous sont les plus mémorables de mes années à l'Université de Montréal.

Merci à mes parents de croire en moi autant qu'ils le font et pour leur support sans limite. Finalement, un énorme merci à ma partenaire de bientôt sept ans, Samantha. Cette dernière année passée en appartement avec toi a été la plus belle de ma vie et tu es la seule personne avec qui j'accepterais d'être en quarantaine pendant plus de trois mois. Merci de m'encourager dans tout ce que j'entreprends et d'être là pour moi dès que j'en ai besoin.



# Chapitre 1

---

## Introduction

Les chapitres 2 et 3 sont constitués d'articles que j'ai rédigés au cours de ma maîtrise en géométrie. La première section de l'introduction sert d'introduction à la géométrie spectrale et j'y présente quelques théorèmes classiques du sujet. La deuxième section de l'introduction est dédiée à introduire le problème de Steklov paramétrique ainsi que la motivation pour les résultats du chapitre 2. La troisième section de l'introduction porte sur le problème de ballotement et sert en quelque sorte d'introduction au chapitre 3. Il est à noter que certaines notations dans l'introduction sont différentes de celles utilisées dans les articles, mais qu'elles demeurent cohérentes tout au long de l'introduction.

### 1.1. La géométrie spectrale

La géométrie spectrale consiste en l'étude des liens entre les propriétés spectrales (telles les valeurs propres et fonctions propres) d'opérateurs agissant sur des fonctions définies sur des domaines et les propriétés géométriques de ces domaines. Le problème le plus fameux de géométrie spectrale est dû à une question posée par Mark Kac en 1966 [**Kac66**] : «Peut-on entendre la forme d'un tambour?» Cette question fait référence au lien entre les fréquences produites par le son d'un tambour et sa forme.

On peut voir la membrane d'un tambour comme étant un domaine borné  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ . En supposant que les vibrations de la membrane sont purement verticales, elles peuvent être décrites par une fonction  $U(t,x,y) : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $t$  représente le temps. Par la nature même d'un tambour, la membrane est fixée en ses extrémités et donc  $U(t,x,y) = 0$  pour tout  $t \in [0,T]$  et tout  $(x,y) \in \partial\Omega$ . Les lois de la physique dictent que

$$\Delta U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  et  $c$  dépend des propriétés physiques de la membrane (telles sa composition et sa tension) et est renormalisé à 1. En supposant que  $U = T(t)u(x,y)$ , on obtient que

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{T''}{T} = -\lambda < 0$$

et donc que  $T$  est une combinaison linéaire de  $\sin \sqrt{\lambda}t$  et  $\cos \sqrt{\lambda}t$ . Ainsi, la fréquence de vibration du tambour est donnée par  $\sqrt{\lambda}$ . D'autre part,  $u$  est une solution non-triviale de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

et c'est cette équation qui détermine les fréquences de vibration possibles du tambour. La question de Kac correspondait donc à comprendre les liens entre  $\Omega$  et ces valeurs  $\lambda$  provenant de l'équation (1). Il s'avère que l'ensemble des fréquences ne permet pas de déterminer  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'il existe des formes de tambour non-isométriques qui produisent les mêmes sons (voir [GWW92]). Néanmoins, quelles informations géométriques sur  $\Omega$  peut-on récupérer des solutions de (1)?

Formellement, on peut voir  $\lambda$  comme une valeur propre de l'opérateur de Laplace  $-\Delta$ . Elle est appelée une valeur propre de Dirichlet en raison de la condition frontière de Dirichlet  $u = 0$ . On peut facilement généraliser le problème (1) à  $n$  dimensions en prenant  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Il existe aussi d'autres conditions frontières possibles. La plus répandue est celle de Neumann, qui demande plutôt que  $\partial_\nu u = 0$  sur  $\partial\Omega$  où  $\partial_\nu$  est la dérivée dans la direction normale à la frontière. On désigne les valeurs propres de Neumann par la lettre  $\mu$ . En autant que  $\Omega$  soit suffisamment lisse, les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann forment un ensemble discret s'accumulant seulement à l'infini et elles peuvent être ordonnées

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow \infty \quad \text{et} \quad 0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \nearrow \infty.$$

Ici,  $\mu_0 = 0$  correspond à la solution constante sur  $\Omega$ . L'opérateur  $-\Delta$  est auto-adjoint et les fonctions propres  $u_k$  associées aux valeurs propres  $\lambda_k$  ou  $\mu_k$  peuvent être normalisées pour former une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ . Ce résultat est l'analogie en dimension infinie du fait que les vecteurs propres d'une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Un premier résultat reliant les valeurs propres de Dirichlet ou Neumann aux propriétés géométriques de  $\Omega$  peut être obtenu en étudiant le comportement asymptotique de leur fonction de compte  $N(\lambda)$  définie par

$$N(\lambda) := \#\{\lambda_k < \lambda\}$$

dans le cas de Dirichlet, et où  $\lambda_k$  est remplacé par  $\mu_k$  dans le cas de Neumann.

**Théorème 1.1.1** (Loi de Weyl, [Cha84]). *La fonction de compte  $N(\lambda)$  des valeurs propres de Dirichlet et de Neumann est donnée asymptotiquement par*

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{Vol}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + o(\lambda^{\frac{n}{2}})$$

où  $\omega_n$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$ .

Il s'en suit que le volume de  $\Omega$  est déterminé par son spectre de Dirichlet ou de Neumann. Weyl a même conjecturé que le développement asymptotique de  $N(\lambda)$  devrait avoir un deuxième terme de façon à ce que

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{vol}_n(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} \mp \frac{\omega_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}} \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \lambda^{\frac{n-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \quad (2)$$

où le signe est négatif dans le cas de Dirichlet et positif dans le cas de Neumann. Plusieurs travaux ont été réalisés dans l'espoir de prouver cette conjecture. Le meilleur résultat dans cette veine est du à Ivrii [Ivr80] qui a montré (2) sous l'hypothèse que l'ensemble des trajectoires de billards périodiques sur  $\Omega$  a mesure nulle. Dans les cas où (2) est vrai, on peut donc déduire les volumes de  $\Omega$  et de  $\partial\Omega$  par les spectres de Dirichlet ou de Neumann. Ces quantités sont donc appelées des invariants spectraux.

Bien qu'en général on ne puisse pas déterminer  $\Omega$  par l'ensemble de ses valeurs propres  $(\lambda_n)$  ou  $(\mu_n)$ , il y a certains domaines pour lesquels c'est possible. Par exemple, il s'avère qu'à volume égal, on peut discerner une boule tout simplement par sa première valeur propre de Dirichlet.

**Théorème 1.1.2** (Inégalité de Faber-Krahn, [Cha84]). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Alors  $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B)$  où  $B$  est une boule de même volume que  $\Omega$ , avec égalité si et seulement si  $\Omega$  est une boule.*

Puisque la loi de Weyl nous permet de déterminer le volume de  $\Omega$ , il s'en suit qu'une boule est uniquement déterminée par son spectre de Dirichlet.

Il existe une multitude de résultats reliant les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann à la géométrie et on peut définir le problème sur des variétés plutôt que des domaines de  $\mathbb{R}^n$ . Les problèmes de Dirichlet et de Neumann ne sont toutefois pas les seuls problèmes étudiés en géométrie spectrale, mais les résultats présentés ci-haut ont pour but de présenter les concepts et les types de questions posées en géométrie spectrale.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons plutôt au problème de Steklov paramétrique ainsi qu'au problème de ballotement. Ce sont deux problèmes spectraux et notre objectif demeurera de relier leurs valeurs propres à des propriétés géométriques.

## 1.2. Le problème de Steklov paramétrique

Soit  $(\Omega, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  avec frontière  $\partial\Omega$ . On suppose que  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  sont lisses. Étant donné  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le problème de Steklov paramétrique sur  $\Omega$  consiste en trouver l'ensemble des valeurs  $\sigma \in \mathbb{R}$  et des fonctions  $u \in C^\infty(\Omega)$  qui sont

solutions de

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Ici,  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami qui est donné en coordonnées locales par

$$\Delta_g u = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j u \right),$$

et  $\partial_\nu$  est la dérivée normale dans la direction extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ . Les valeurs  $\sigma(\lambda; \Omega)$  pour lesquelles il existe une solution  $u \not\equiv 0$  sont les valeurs propres du problème de Steklov paramétrique sur  $\Omega$ . Le spectre de Steklov paramétrique est l'ensemble de ces valeurs propres.

Lorsque  $\lambda = 0$ , cela correspond au problème de Steklov classique (ou tout simplement le problème de Steklov) qui a été amplement étudié au cours des dernières années. Voir [GP17] pour une exposition des récents résultats liés au problème de Steklov.

Le problème de Steklov paramétrique est en quelque sorte un problème avec deux valeurs propres. Il serait équivalent de fixer  $\sigma \in \mathbb{R}$  et d'étudier alors les valeurs propres  $\lambda(\sigma, \Omega)$ . De ce point de vue, le problème porte le nom de problème de Robin. Par contre, nous serons intéressés à étudier le comportement asymptotique de  $\sigma$ . Il est donc plus naturel de formuler le problème en fixant  $\lambda$ .

### 1.2.1. L'opérateur Dirichlet-vers-Neumann

Le problème de Steklov paramétrique est directement relié à l'opérateur Dirichlet-vers-Neumann  $DN_\lambda : C^\infty(\partial\Omega) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$  qui associe à  $f \in C^\infty(\partial\Omega)$  la fonction  $\partial_\nu \tilde{f}$  où  $\tilde{f}$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_g \tilde{f} = \lambda \tilde{f} & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{f} = f & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

L'opérateur  $-\Delta_g$  peut être étendu en un opérateur auto-adjoint sur  $L^2(\Omega)$  [Bé86] de façon à ce que la résolvante  $(-\Delta_g - \lambda I)^{-1}$  soit un opérateur compact. Par l'alternative de Fredholm [Bré83, Théorème VI.6], il s'en suit qu'en autant que le problème

$$\begin{cases} -\Delta_g f = \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ f = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

n'admet pas de solution non-triviale, le problème (4) a une unique solution, et donc  $DN_\lambda f$  est bien défini. Or, ces valeurs  $\lambda$  sont les valeurs propres de Dirichlet de  $\Omega$  et, par le théorème spectral [Cha84, Théorème 1.1], elles ne forment qu'un ensemble discret. On dénote par  $\mathcal{V}$  l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $DN_\lambda$  est bien défini. Il est à noter que  $0 \in \mathcal{V}$ .

L'opérateur  $DN_\lambda$  est un opérateur pseudodifférentiel elliptique auto-adjoint d'ordre 1 dont le symbole principal est donné par  $|\xi|_g$  ([Fri91, Proposition 2.1] et [Tay13]). Dans

le chapitre 2, nous utiliserons des techniques pseudodifférentielles pour étudier son spectre. Pour une vue d'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels, voir l'annexe A.

Pour  $\lambda \in \mathcal{V}$ , le problème (3) est équivalent à trouver les fonctions propres et valeurs propres de  $\text{DN}_\lambda$ . En effet, il est clair que si  $u$  respecte (3), alors  $\widetilde{u|_{\partial\Omega}} = u$  et donc  $f = u|_{\partial\Omega}$  est une fonction propre de  $\text{DN}_\lambda$ . Et inversement, si  $\text{DN}_\lambda f = \sigma f$ , alors  $\widetilde{f}$  est une solution de (3).

Il n'est pas évident de montrer que l'opérateur Dirichlet-vers-Neumann est auto-adjoint, mais il est facile de voir qu'il est symétrique. En effet, pour  $u, v \in C^\infty(\partial\Omega)$ , en appliquant l'identité de Green, on a

$$\begin{aligned} \langle \text{DN}_\lambda u, v \rangle &= \int_{\partial\Omega} (\text{DN}_\lambda u) \bar{v} \, ds \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{v} \Delta_g \widetilde{u} + \nabla \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{v} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{u} \Delta_g \widetilde{v} + \nabla \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{v} \, dV \\ &= \int_{\partial\Omega} u \overline{(\text{DN}_\lambda v)} \, ds \\ &= \langle u, \text{DN}_\lambda v \rangle \end{aligned}$$

puisque  $\widetilde{v} \Delta_g \widetilde{u} = -\lambda \widetilde{u} \widetilde{v} = \widetilde{u} \Delta_g \widetilde{v}$  et  $\text{DN}_\lambda \bar{v} = \overline{\text{DN}_\lambda v}$ .

Le spectre de l'opérateur Dirichlet-vers-Neumann est discret et ne s'accumule qu'à l'infini [Fri91]. Les valeurs propres forment une suite qu'on ordonne par ordre croissant

$$\sigma_0(\lambda; \Omega) \leq \sigma_1(\lambda; \Omega) \leq \sigma_2(\lambda; \Omega) \leq \dots \nearrow \infty.$$

Elles possèdent une caractérisation variationnelle exprimée à l'aide du quotient de Rayleigh

$$R_\lambda[u] := \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 \, dV}{\int_{\partial\Omega} |u|^2 \, ds}$$

donnée par

$$\sigma_k(\lambda) = \min_{E \in \mathcal{E}(k)} \max_{0 \neq u \in E} R_\lambda[u]$$

où  $\mathcal{E}(k)$  est l'ensemble des sous-espaces  $k$ -dimensionnels de  $H^1(\Omega)$ , l'espace des fonctions dans  $L^2(\Omega)$  qui sont dérivables au sens faible et telles que leurs dérivées d'ordre 1 sont aussi dans  $L^2(\Omega)$ .

Les valeurs propres  $\sigma_k$  dépendent implicitement du choix de  $\Omega$ . Mais alors quels sont les liens entre  $\Omega$  et ces valeurs propres? Que peut-on inférer sur les valeurs propres à partir de  $\Omega$  et inversement, quelles informations peut-on retirer de ces valeurs propres à propos des propriétés géométriques de  $\Omega$ ?

Un premier résultat dans cette veine suit de la loi de Weyl (voir [Hör84, Théorème 29.1.5]) qui nous dit que le comportement asymptotique de la fonction de compte  $N(\sigma) =$

$\#\{\sigma_k < \sigma\}$  est donné par

$$N(\sigma) = \frac{\omega_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)\sigma^{n-1} + O(\sigma^{n-2})$$

quand  $\sigma \rightarrow \infty$ , où  $\omega_{n-1}$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)$  correspond au volume en dimension  $n-1$  de  $\partial\Omega$ . Il est à noter qu'un tel terme d'erreur n'est possible que si la frontière est lisse, comme c'est le cas ici. Par contre, du moment que la frontière n'est pas lisse,  $\text{DN}_\lambda$  n'est pas un opérateur pseudodifférentiel et la loi de Weyl avec un tel reste ne s'applique pas. On obtient alors plutôt un reste de la forme  $o(\sigma^{n-1})$  en autant que  $\partial\Omega$  est Lipschitz. Dans tous les cas, le premier terme est le même et donc il s'en suit que le volume de  $\partial\Omega$  est un invariant spectral du problème de Steklov paramétrique. En d'autres mots, si les variétés  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont isospectrales (leurs spectres coïncident), alors leurs frontières doivent avoir le même volume.

Il est à noter que la loi de Weyl est indépendante du choix de  $\lambda \in \mathcal{V}$  et donc qu'il n'affecte pas le premier terme dans l'asymptotique spectrale. En particulier, cette expression est valide pour  $\lambda = 0$ , ce qui correspond au problème de Steklov classique. L'effet de  $\lambda$  est donc relativement petit sur le spectre. Mais son impact est-il suffisamment grand pour nous permettre d'en apprendre plus sur  $\Omega$ ?

### 1.2.2. Quelques propriétés du problème

Une première question géométrique intéressante est de comprendre comment les valeurs propres sont affectées par une dilatation, ou une homothétie, de  $(\Omega, g)$ . Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , une homothétie d'un facteur  $a$  est équivalent à une dilatation de la métrique par  $a^2$ . Cela nous mène à la proposition suivante (voir la section 1.4 pour sa preuve).

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $(\Omega, g)$  une variété riemannienne et  $a > 0$ . Alors*

$$\sigma_k(\lambda; (\Omega, a^2g)) = \frac{1}{a} \sigma_k \left( \frac{\lambda}{a^2}; (\Omega, g) \right).$$

Une conséquence de cette dernière proposition est que la quantité

$$\Sigma_k(\lambda; (\Omega, g)) := \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)^{\frac{1}{n-1}} \sigma_k \left( \lambda \text{vol}_n(\Omega)^{\frac{2}{n}}; (\Omega, g) \right)$$

est invariante par dilatation. Il est à noter que ce n'est pas la seule façon de normaliser les valeurs propres, mais celle-ci tient compte du caractère frontalier des valeurs propres et de la manière dont le paramètre  $\lambda$  est influencé par l'intérieur de  $\Omega$ .

Une autre question intéressante est de comprendre comment les valeurs propres varient avec  $\lambda$ . Premièrement, on remarque que si  $u \in C^\infty(\Omega)$  est une fonction propre du problème (3) avec valeur propre  $\sigma(\lambda) = 0$ , alors  $u$  est une fonction propre de Neumann sur  $\Omega$ . C'est-à-dire que  $\lambda$  est une valeur propre de Neumann. Similairement, on a vu que  $\text{DN}_\lambda$  est bien défini en autant que  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de Dirichlet sur  $\Omega$ . Intuitivement, si  $(u_n)$



est une suite de fonctions lisses telles qu'il existe des suites  $(\lambda_n) \subset \mathcal{V}$  et  $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$  pour lesquelles on a

- $\text{DN}_{\lambda_n} u_n = \sigma_n u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $\lambda_n$  converge vers  $\lambda$  une valeur propre de Dirichlet;
- $u_n$  converge ponctuellement vers une fonction propre de Dirichlet  $u$  avec valeur propre  $\lambda$ ;

alors

$$|\sigma_n| = \frac{|\text{DN}_{\lambda_n} u_n(x)|}{|u_n(x)|}$$

en tout point  $x \in \partial\Omega$  tel que  $u_n(x) \neq 0$ . En particulier, si on prend n'importe quel  $x$  tel que  $|\text{DN}_{\lambda_n} u_n(x)|$  ne tend pas vers 0, alors on voit que  $|\sigma_n| \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  puisque  $u_n(x) \rightarrow 0$ . Ainsi, les valeurs propres de Dirichlet se manifestent comme étant les asymptotes des courbes  $\sigma_k(\lambda)$ .

Ces observations reliant les courbes  $\sigma_k(\lambda)$  aux valeurs propres de Dirichlet et Neumann ont été formalisées par Friedlander [Fri91]. En dérivant le quotient de Rayleigh  $R_\lambda[u]$  par rapport à  $\lambda$ , il a démontré le théorème suivant.

**Théorème 1.2.2** (Friedlander). *Soit  $(\Omega, g)$  une variété riemannienne et un intervalle  $I \subset \mathcal{V}$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\sigma_k(\lambda)$  est strictement décroissante sur  $I$ .*

À l'aide du théorème précédent, Friedlander a pu montrer que les valeurs propres de Dirichlet  $\lambda_1^D < \lambda_2^D \leq \dots$  et celles de Neumann  $0 = \lambda_1^N < \lambda_2^N \leq \dots$  satisfont l'inégalité

$$\lambda_{k+1}^N \leq \lambda_k^D$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Pour ce faire, il a montré que la différence entre les fonctions de compte de Dirichlet et de Neumann

$$N^D(\lambda) = \#\{\lambda_k^D < \lambda\} \quad N^N(\lambda) = \#\{\lambda_k^N < \lambda\}$$

est donnée par

$$n(\lambda) = N^N(\lambda) - N^D(\lambda) \tag{5}$$

où  $n(\lambda)$  est le nombre de valeurs propres négatives de  $\text{DN}_\lambda$ , en autant que  $\lambda$  n'est pas dans un des deux spectres. Il a ensuite montré que si  $\lambda > 0$ , alors  $n(\lambda) \geq 1$  pour obtenir l'inégalité.

Tentons de justifier l'égalité (5). Lorsque  $\lambda < 0$ , le quotient de Rayleigh  $R_\lambda[u]$  est toujours positif et donc  $n(\lambda) = 0$ . Considérons une des courbes  $\sigma(\lambda)$  sans tenir compte de sa multiplicité. Une telle courbe est strictement décroissante et possède plusieurs asymptotes, un peu comme la fonction  $-\tan x$ . Si  $\sigma(\lambda^N) = 0$ , alors  $\lambda^N$  est une valeur propre de Neumann et la fonction de compte  $N^N$  augmente. Par décroissance, pour  $\lambda > \lambda^N$  suffisamment proche de  $\lambda^N$ , la valeur propre  $\sigma(\lambda)$  est négative et contribue à  $n(\lambda)$ . Cela continue d'être le cas jusqu'à ce que  $\sigma(\lambda)$  rencontre une asymptote en une valeur propre de Dirichlet  $\lambda^D$ . Auquel cas, la fonction de compte  $N^D$  augmente, mais  $n(\lambda)$  diminue puisque  $\sigma(\lambda)$  est toujours

décroissante et donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow (\lambda^D)^+} \sigma(\lambda) = \infty.$$

En fait, on peut montrer que pour tout  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} n(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} n(\lambda) + m^N(\lambda_0) - m^D(\lambda_0)$$

où  $m^N(\lambda_0)$  et  $m^D(\lambda_0)$  sont les multiplicités de  $\lambda_0$  en tant que valeur propre de Dirichlet et Neumann respectivement (valent 0 si  $\lambda_0$  n'est pas une valeur propre).

### 1.2.3. L'exemple du disque

Il est rare de pouvoir calculer explicitement les fonctions propres et valeurs propres du problème de Steklov paramétrique. Par contre, on peut le faire sur le disque. Soit le disque  $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  muni de la métrique plate  $g_0 = (dx)^2 + (dy)^2$  induite de  $\mathbb{R}^2$ . En coordonnées polaires, le laplacien est donné par

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}$$

alors que la dérivée normale sur la frontière  $\partial\Omega = \mathbb{S}^1$  est donnée par  $\partial_\nu = \partial_r$ . En séparant les variables, on peut obtenir les solutions de (3). Ces solutions sont données par

$$\begin{cases} u_k^{(1)}(r,\theta) = J_k(\sqrt{\lambda}r) \cos(k\theta) & k \in \mathbb{N}_0, \\ u_k^{(2)}(r,\theta) = J_k(\sqrt{\lambda}r) \sin(k\theta) & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

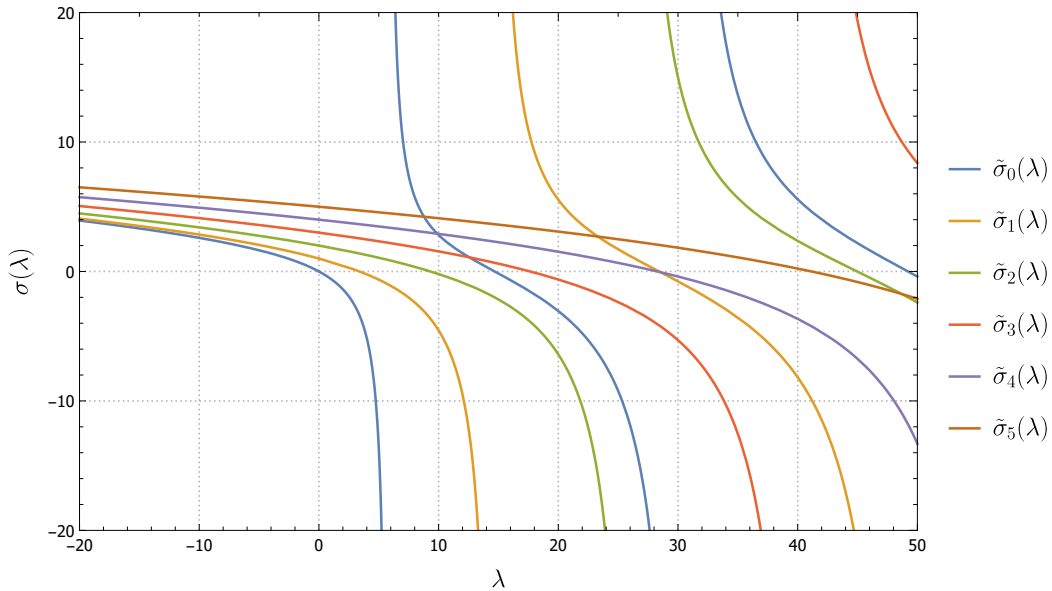


Figure 1.1. Les premières courbes  $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$ .

où  $J_k$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $k$ . Les valeurs propres sont alors données par les courbes

$$\tilde{\sigma}_k(\lambda) = \sqrt{\lambda} \frac{J'_k(\sqrt{\lambda})}{J_k(\sqrt{\lambda})} \quad (6)$$

avec multiplicité double pour  $k \geq 1$  et simple pour  $k = 0$ . Il est à noter que la  $k$ -ième valeur propre distincte n'est pas toujours donnée par  $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$  puisqu'on n'a pas toujours  $\tilde{\sigma}_{k+1}(\lambda) \geq \tilde{\sigma}_k(\lambda)$ . Or, c'est éventuellement le cas, c'est-à-dire que pour tout  $\lambda \in \mathcal{V}$ , il existe  $K$  tel que

$$\sigma_{2k}(\lambda) = \sigma_{2k-1}(\lambda) = \tilde{\sigma}_k(\lambda)$$

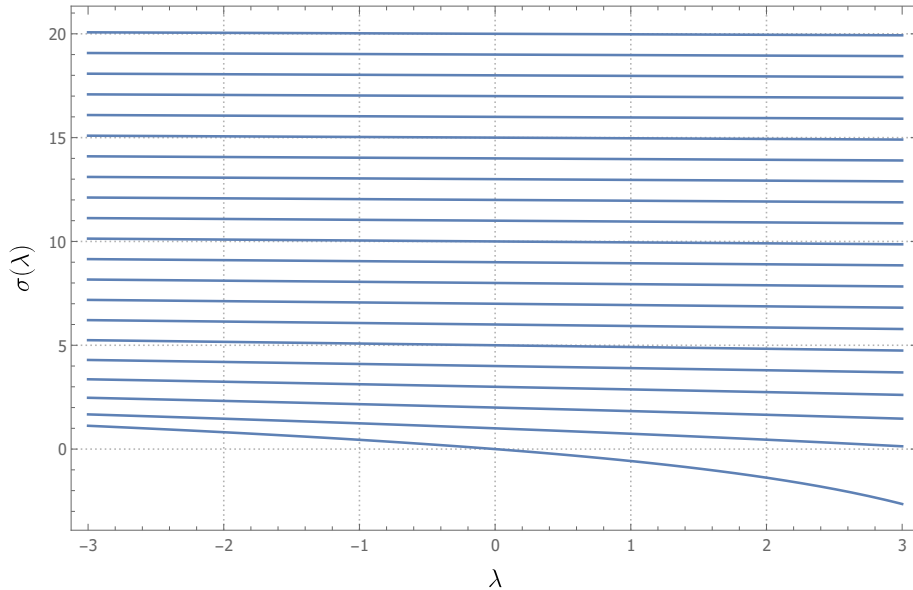
pour tout  $k \geq K$ . La figure 1.1 présente les six premières courbes  $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$ . Comme attendu, les courbes sont toutes décroissantes et possèdent des asymptotes qui correspondent aux valeurs propres du problème de Dirichlet sur le disque.

À l'aide de l'expression explicite, on peut calculer l'expansion asymptotique des  $\sigma_k$  pour le disque. Voir la section 1.4 pour la preuve de cette prochaine proposition. Les calculs dans la preuve s'appliquent uniquement au disque et sont assez simples. Par contre, ils ont servi d'inspiration et de vérification pour les résultats du chapitre 2.

**Proposition 1.2.3.** *Les valeurs propres du problème de Steklov paramétrique sur le disque  $\mathbb{D}$  admettent un développement asymptotique complet dont les premiers termes sont donnés par*

$$\sigma_{2k}(\lambda) = \sigma_{2k-1}(\lambda) = k - \frac{\lambda}{2k} + \frac{\lambda}{2k^2} - \frac{\lambda(\lambda+4)}{8k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

La figure 1.2 présente les vingt premières courbes  $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$  dans un voisinage de  $\lambda = 0$ . En comparaison avec la figure 1.1, les courbes sont beaucoup moins erratiques et semblent



**Figure 1.2.** Les courbes  $\tilde{\sigma}_k(\lambda)$  proche de  $\lambda = 0$ .

être espacées régulièrement. On peut ainsi s’attendre à pouvoir obtenir un développement asymptotique de  $\sigma(\lambda, \Omega)$  en fixant  $\lambda$  beaucoup plus précis que si l’on étudiait plutôt  $\lambda(\sigma, \Omega)$  en fixant  $\sigma$ . En terme d’asymptotiques spectrales, le problème de Steklov paramétrique semble donc plus prometteur que le problème de Robin.

#### 1.2.4. Le problème sur des surfaces

Jusqu’à maintenant, on a considéré le problème de Steklov paramétrique sur des variétés riemanniennes avec frontière quelconques. Or, dans le chapitre 2, on s’intéresse au problème uniquement en deux dimensions, c’est-à-dire sur des surfaces riemanniennes. En particulier, on étudie le comportement asymptotique des valeurs propres  $\sigma_k(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  est fixé et  $k$  tend vers l’infini, dans le but d’obtenir des invariants spectraux.

Lorsque  $\lambda = 0$ , Rozenblum [Roz86] et Guillemin-Melrose [Edw93a] ont montré indépendamment que si  $\Omega$  est simplement connexe, alors

$$\sigma_{2k}(0) = \sigma_{2k-1}(0) + O(k^{-\infty}) = \frac{2\pi k}{\text{per}(\partial\Omega)} + O(k^{-\infty}) \quad (7)$$

où  $\text{per}(\partial\Omega)$  est le périmètre de la frontière  $\partial\Omega$  et où  $O(k^{-\infty})$  signifie que l’erreur décroît plus vite que n’importe quel polynôme. Il est à noter que le premier terme de l’asymptotique correspond exactement à la valeur propre d’un disque de même périmètre.

Pour ce qui est du cas multiplement connexe, Girouard, Polterovich, Parnowski et Sher [GPPS14] ont montré que le spectre est constitué d’une union de suites de la même forme que (7) correspondant à chaque composante connexe de frontière. Ils ont aussi montré que cette union de suite peut être découpée et donc qu’il est possible de récupérer la longueur de chaque composante de frontière ainsi que leur nombre. Dans tous les cas, l’erreur décroît plus rapidement que tout polynôme, et donc aucun autre invariant spectral ne peut être obtenu à l’aide d’une asymptotique spectrale polynomiale. En contrepartie, il s’en suit que les périmètres de chaque composante de frontière permettent de déterminer les valeurs propres de façon extrêmement précise lorsqu’elles deviennent grandes.

Le cas qui nous intéresse est donc lorsque  $\lambda \neq 0$ . La grande question est la suivante. Peut-on calculer l’asymptotique spectrale des valeurs propres  $\sigma_k(\lambda)$ ? Et si oui, sommes-nous en mesure de trouver de nouveaux invariants spectraux autres que le périmètre? La réponse à ces deux questions est oui et elle se trouve dans le Théorème 2.1.1. Celui-ci est équivalent au théorème qui suit.

**Théorème 1.2.4.** *Soit  $(\Omega, g)$  une surface riemannienne compacte simplement connexe avec frontière lisse. Pour  $\lambda \in \mathcal{V}$ , les valeurs propres de  $\text{DN}_\lambda$  sont asymptotiquement doubles et admettent un développement asymptotique complet, c’est-à-dire qu’il existe des coefficients*

$s_n(\lambda; \Omega)$  tels que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$\sigma_{2k}(\lambda) = \sigma_{2k-1}(\lambda) + O(k^{-\infty}) = \frac{2\pi k}{\text{per}(\partial\Omega)} + \sum_{n=1}^N s_n(\lambda; \Omega) k^{-n} + O(k^{-N-1}). \quad (8)$$

Les coefficients  $s_n(\lambda; \Omega)$  sont des polynômes en  $\lambda$  dont le coefficient constant est nul. Ils dépendent seulement de la métrique dans un voisinage de  $\partial\Omega$  et les premiers coefficients sont donnés par

$$s_1(\lambda; \Omega) = -\frac{\lambda \text{per}(\partial\Omega)}{4\pi} \quad \text{et} \quad s_2(\lambda; \Omega) = \frac{\lambda \text{per}(\partial\Omega)}{8\pi^2} \int_{\partial\Omega} k_g \, ds$$

où  $k_g$  est la courbure géodésique de  $\partial\Omega$ .

Puisque le coefficient constant des  $s_n(\lambda; \Omega)$  est toujours nul, ils s'annulent tous lorsque  $\lambda = 0$  et on obtient (7). Des deux premiers coefficients, on voit que  $\lambda$  et la courbure géodésique totale de  $\partial\Omega$  sont des invariants spectraux. Ce deuxième invariant est particulièrement intéressant puisqu'il est purement géométrique.

Dans le cas où  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, comme dans le cas  $\lambda = 0$ , le spectre est constitué d'une union de suites correspondant à chaque composante connexe de frontière. Par contre, ces suites sont maintenant de la même forme que (8). Découpler ces suites est alors plus ardu, mais tout de même faisable, comme nous le montrons à la Proposition 2.6.3. Il s'en suit que chacun des coefficients  $s_n$  provenant de chaque composante de frontière peut être récupéré et est donc un invariant spectral. La courbure géodésique totale de chaque composante de frontière est donc un invariant spectral. En les additionnant toutes et en appliquant le théorème de Gauss-Bonnet, on obtient que

$$\int_{\partial\Omega} k_g \, ds = 2\pi\chi(\Omega) - \int_{\Omega} K_g \, dA$$

est aussi un invariant spectral, où  $\chi(\Omega)$  est la caractéristique d'Euler de  $\Omega$  et  $K_g$  est sa courbure gaussienne. La caractéristique d'Euler de  $\Omega$  est donnée par

$$\chi(\Omega) = 2 - 2\gamma - \ell$$

où  $\gamma$  est le genre de  $\Omega$  et  $\ell$  est le nombre de composantes connexes de  $\partial\Omega$ . On savait déjà que  $\ell$  est un invariant spectral par le résultat de [GPPS14]. On obtient alors le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.5.** *Si la courbure gaussienne  $K$  de  $\Omega$  est constante, alors la quantité*

$$4\pi\gamma + K(\Omega) \text{aire}(\Omega)$$

*est un invariant spectral.*

En particulier, si  $\Omega$  est un domaine de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , son aire est un invariant spectral puisqu'alors  $\gamma = 0$  et  $K(\Omega) = 1$ . De même, si  $\Omega$  est plat, son genre est un invariant spectral. Ainsi, si  $\Omega$  est un domaine simplement connexe sur un tore plat, son spectre permet de le distinguer de son complément même s'ils ont le même périmètre ou possiblement

la même aire. Ces deux résultats ne peuvent pas être obtenus à l'aide de l'asymptotique spectrale du problème de Steklov classique. L'ajout du paramètre  $\lambda$  est donc significatif et permet d'obtenir de l'information globale sur  $\Omega$  même si l'opérateur  $DN_\lambda$  ne dépend que d'un voisinage de sa frontière.

### 1.3. Le problème de ballottement

Le contenu du chapitre 3 porte sur le problème de ballottement. Ce problème décrit les petites oscillations d'un fluide assujéti à la gravité à la surface d'un contenant, comme du café dans une tasse.

#### 1.3.1. Propriétés du problème

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine borné. On divise la frontière  $\partial\Omega$  en deux parties lisses  $(\partial\Omega)_N$  et  $(\partial\Omega)_S$  correspondant respectivement aux parois rigides et à la surface libre d'un contenant dont la forme est donnée par  $\Omega$ . Supposons qu'on veuille étudier la dynamique d'un fluide parfait incompressible dans  $\Omega$ . Un champ de vitesse  $\mathbf{v}$  peut être utilisé pour décrire son mouvement. Puisque le fluide est parfait, son écoulement est potentiel, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\varphi$  telle que  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . L'incompressibilité du fluide est équivalente à ce que la divergence du champ de vitesse  $\operatorname{div}(\mathbf{v})$  soit nulle. Il s'en suit que

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$$

et donc que  $\varphi$  est une fonction harmonique. Sur la paroi  $(\partial\Omega)_N$ , le mouvement du fluide doit se faire de façon perpendiculaire au vecteur normal à  $(\partial\Omega)_N$  puisque celui-ci ne peut pas traverser la paroi. Il s'en suit que

$$0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \partial_\nu\varphi$$

et donc que la dérivée normale  $\partial_\nu\varphi$  s'annule sur  $(\partial\Omega)_N$ . Finalement, en autant que les oscillations du fluide sur la surface  $(\partial\Omega)_S$  sont relativement petites, elles sont décrites par l'équation aux valeurs propres  $\partial_\nu\varphi = \sigma\varphi$ . En réunissant toutes ces équations, on obtient que  $\varphi$  doit satisfaire le problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi = 0 & \text{sur } (\partial\Omega)_N, \\ \partial_\nu\varphi = \sigma\varphi & \text{sur } (\partial\Omega)_S. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de valeurs propres aux conditions frontières mixtes Neumann-Steklov.

En autant que  $\Omega$  est borné et que  $\partial\Omega$  est lisse par morceaux, le spectre de ce problème est discret et on peut ordonner les valeurs propres

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \nearrow \infty$$

où  $\sigma_0 = 0$  correspond à la solution triviale donnée par  $\varphi \equiv C$ , pour  $C$  une constante réelle non-nulle. Ce problème ressemble beaucoup au problème de Steklov. On peut y associer un opérateur Dirichlet-vers-Neumann DN :  $C^\infty((\partial\Omega)_S) \rightarrow C^\infty((\partial\Omega)_S)$  comme dans le cas du problème de Steklov paramétrique. Celui-ci envoie maintenant une fonction  $u$  définie sur  $(\partial\Omega)_S$  vers  $\partial_\nu \tilde{u}|_{(\partial\Omega)_S}$  où  $\tilde{u}$  est solution du problème mixte

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu \tilde{u} = 0 & \text{sur } (\partial\Omega)_N, \\ \tilde{u} = u & \text{sur } (\partial\Omega)_S. \end{cases}$$

Par contre, cet opérateur n'est pas nécessairement pseudodifférentiel et de nouvelles techniques doivent être utilisées pour étudier son spectre. La loi de Weyl ne s'applique plus, mais les résultats d'Agranovich [Agr06] nous permettent d'obtenir que la fonction de compte des valeurs propres a un comportement asymptotique donné par

$$N(\sigma) = \frac{\text{aire}((\partial\Omega)_S)}{4\pi} \sigma^2 + o(\sigma^2).$$

Le terme d'erreur dans la dernière expression est assez mauvais, mais a le bénéfice d'être général. Par contre, il se peut très bien qu'il existe des domaines pour lesquels  $N(\sigma)$  admette un deuxième terme d'ordre  $\sigma$  dans son asymptotique. Peut-on trouver de tels domaines et quelle information est-ce que ce deuxième terme peut-il nous donner? Il est à noter que le meilleur terme d'erreur possible est  $O(1)$  puisque la fonction de compte prend uniquement des valeurs entières.

### 1.3.2. Résultats principaux

Dans le chapitre 3, nous allons nous concentrer sur des domaines de la forme d'un prisme à base triangulaire où la surface libre  $(\partial\Omega)_S$  est un rectangle  $[0, L] \times [0, M]$  qui forme des angles  $\alpha$  et  $\beta$  avec les deux autres faces rectangulaires (voir la figure 3.1 à la page 72 pour un exemple d'un tel domaine). Même s'ils ne sont pas forcément égaux, ces angles seront de la forme  $\frac{\pi}{2q}$  pour  $q$  un entier. Ce choix permet d'approximer les fonctions propres et les valeurs propres par des quasimodes provenant d'un autre problème, appelé celui de la plage en pente. Cette approche est inspirée des travaux de Levitin, Parnovski, Polterovich et Sher dans [LPPSa] et [LPPSb] où ils étudient les solutions du problème de ballonnement en deux dimensions dans des coins. Ils sont alors en mesure d'utiliser ces solutions pour calculer le comportement asymptotique des valeurs propres de Steklov dans des polygones curvilinéaires. Idéalement, notre étude du problème de ballonnement devrait nous amener à mieux comprendre le problème de Steklov sur des polytopes en comprenant davantage l'effet des coins dans l'asymptotique spectrale. Le but du chapitre est de comprendre comment  $N(\sigma)$  varie quand les angles entre les faces changent. La surface libre reste la même et donc

le premier terme de  $N(\sigma)$  reste inchangé, mais il s'avère possible de percevoir cette variation dans le deuxième terme.

Lorsque  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , il est possible de calculer explicitement les fonctions propres et les valeurs propres. Cela nous permet de trouver précisément le deuxième terme dans le développement asymptotique de  $N(\sigma)$ .

**Théorème 1.3.1.** *Si  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , la fonction de compte des valeurs propres du problème de ballotement sur  $\Omega$  est donnée par*

$$N(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L + M(2\sqrt{2} + 1)}{2\pi}\sigma + o(\sigma).$$

Nous ne sommes pas en mesure de calculer explicitement les fonctions propres pour d'autres angles. Par contre, nous tentons d'obtenir  $N(\sigma)$  en approximant les fonctions propres par des solutions approximatives provenant du problème de la plage en pente, appelées quasimodes. Nous utilisons deux types de quasimodes dénommés vagues de surface (*surface waves*) et vagues de bords (*edge waves*). Ces noms sont dus au fait que les vagues de surface se concentrent sur la surface libre  $(\partial\Omega)_S$  alors que les vagues de bords se concentrent plutôt le long des bords de longueur  $M$ . Plutôt que de compter directement  $N(\sigma)$ , on trouve des expressions pour  $N^s(\sigma)$  et  $N^e(\sigma)$ , les fonctions de compte des valeurs propres des vagues de surface et de bord respectivement. Pour comprendre les expressions obtenues, nous avons besoin de quelques notations. Supposons que  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  et  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ . On définit

$$\theta_\alpha(t) = -\sum_{j=1}^{q-1} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-t^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{1 - \cos \frac{j\pi}{q}}\right)$$

et similairement  $\theta_\beta$  en remplaçant  $q$  par  $r$ . Soient  $\nu_{\alpha,\beta} = qr \pmod{2}$  et  $\kappa_{\alpha,\beta} = \frac{q-r \pmod{2}}{2}$ .

**Théorème 1.3.2.** *Les fonctions de compte  $N^s(\sigma)$  et  $N^e(\sigma)$  sont données par*

$$N^s(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L-M}{2\pi}\sigma + \frac{\kappa_{\alpha,\beta}M}{\pi}\sigma + \frac{M\sigma}{\pi^2} \left( \int_0^1 [\theta_\alpha(t) + \theta_\beta(t)] dt \right) + o(\sigma)$$

et

$$N^e(\sigma) = \nu_{\alpha,\beta} \frac{M\sigma}{\pi} + \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{q}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2m+1)\alpha} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{r}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2\ell+1)\beta} + O(1).$$

Notre expression conjecturée de  $N(\sigma)$  est alors donnée par

$$N(\sigma) = N^s(\sigma) + N^e(\sigma) + o(\sigma).$$

Cette expression n'est qu'une conjecture puisque nous ne comptons pas les valeurs propres associées aux vraies fonctions propres du problème de ballotement, mais celles provenant des quasimodes. Dans le cas où  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , elle concorde avec l'expression du Théorème 1.3.1. Pour ce qui est des autres angles, des calculs numériques effectués à l'aide de FreeFEM++ sont présentés à la fin du chapitre 3 pour supporter la conjecture.



Afin de démontrer cette conjecture, il faudrait être en mesure de montrer que les valeurs propres des quasimodes sont de bonnes approximations des vraies valeurs propres et les approximent toutes. En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [LPPSa], il devrait être possible de montrer qu'il y a une vraie valeur propre proche de chaque valeur propre d'un quasimode. Par contre, il devrait être beaucoup plus difficile de montrer que toutes les valeurs propres sont approximées. En deux dimensions, il s'avère que les quasimodes développés dans [LPPSa] solutionnent une équation de Sturm-Liouville sur la surface libre et forment alors une base hilbertienne. De cela, on peut en déduire que toutes les vraies solutions sont approximées par des quasimodes et donc qu'il en est de même pour les valeurs propres. Une généralisation de ces idées en trois dimensions devrait permettre de résoudre notre conjecture. Or, nous obtenons plus de quasimodes que dans [LPPSa] et ceux-ci sont de deux types différents. Il se peut alors très bien que leur approche soit infructueuse dans notre cas.

## 1.4. Démonstrations des Propositions 1.2.1 et 1.2.3

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.1. Premièrement, de l'expression du laplacien en coordonnées locales, on peut voir que

$$\Delta_{a^2g} = \frac{1}{a^2} \Delta_g.$$

On aimerait obtenir une expression similaire pour la dérivée normale. Dénotons par  $\partial_\nu^g$  la dérivée dans la direction normale à la frontière  $\partial\Omega$  associée à  $(\Omega, g)$ . On avance que  $\partial_\nu^{a^2g} = \frac{1}{a} \partial_\nu^g$ . En effet, si  $p \in \partial\Omega \subset \Omega$  et  $X \in T_p\partial\Omega \subset T_p\Omega$ , on a

$$a^2g \left( \frac{1}{a} \partial_\nu^g, X \right) = ag(\partial_\nu^g, X) = 0$$

par définition de  $\partial_\nu^g$ . De même,

$$a^2g \left( \frac{1}{a} \partial_\nu^g, \frac{1}{a} \partial_\nu^g \right) = g(\partial_\nu^g, \partial_\nu^g) = 1$$

encore par définition de  $\partial_\nu^g$ . Il s'en suit que  $\frac{1}{a} \partial_\nu^g$  est orthogonal à  $T_p\partial\Omega$  en chaque  $p \in \partial\Omega$  et a norme 1 dans la norme induite par  $a^2g$ . Il s'agit donc bel et bien de  $\partial_\nu^{a^2g}$ .

Soit maintenant une fonction  $u \in C^\infty(\Omega)$  telle que  $-\Delta_g u = \lambda u$  et  $\partial_\nu^g u = \sigma u$ . Par les calculs précédents, on voit que

$$-\Delta_{a^2g} u = -\frac{1}{a^2} \Delta_g u = \frac{\lambda}{a^2} u$$

et

$$\partial_\nu^{a^2g} u = \frac{1}{a} \partial_\nu^g u = \frac{\sigma}{a} u.$$

Cela donne une bijection entre les valeurs propres de  $(\Omega, a^2g)$  et celles de  $(\Omega, g)$ . Cette bijection préserve l'ordre des valeurs propres et donc la proposition suit.  $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.3. En utilisant l'identité

$$J'_k(\sqrt{\lambda}) = \frac{k}{\sqrt{\lambda}} J_k(\sqrt{\lambda}) - J_{k+1}(\sqrt{\lambda})$$

on peut réécrire (6) comme

$$\tilde{\sigma}_k = k - \sqrt{\lambda} \frac{J_{k+1}(\sqrt{\lambda})}{J_k(\sqrt{\lambda})} = k - \varepsilon_k$$

où  $\varepsilon_k = \sqrt{\lambda} \frac{J_{k+1}(\sqrt{\lambda})}{J_k(\sqrt{\lambda})}$ . De la définition des fonctions de Bessel, on peut montrer que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , et ce peu importe la valeur de  $\lambda$  fixée. On peut aussi le déduire de [GR07, p. 921], qui nous garantit alors que  $\varepsilon_k$  admet un développement asymptotique complet en  $k$ . Pour trouver les coefficients de ce développement, on utilise l'identité

$$\frac{2k}{\sqrt{\lambda}} J_k(\sqrt{\lambda}) = J_{k-1}(\sqrt{\lambda}) + J_{k+1}(\sqrt{\lambda})$$

qui donne, en réarrangeant les termes,

$$\varepsilon_k = 2k - \frac{\lambda}{\varepsilon_{k-1}}. \quad (9)$$

Posons  $\varepsilon_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^n}$ . On va utiliser la relation précédente pour calculer les coefficients  $a_n$ . Commençons par exprimer  $\frac{1}{\varepsilon_{k-1}}$  en fonction des coefficients  $a_n$ . On pose

$$\frac{1}{\varepsilon_{k-1}} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{b_n}{(k-1)^n}. \quad (10)$$

À l'aide du développement de  $\varepsilon_k$ , on peut calculer celui de  $\frac{1}{\varepsilon_k}$  et donc calculer les  $b_n$  récursivement. On a  $b_{-1} = \frac{1}{a_1}$  et

$$b_n = -\frac{1}{a_1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{j+1} b_{n-j}. \quad (11)$$

Afin de pouvoir utiliser (9), il faut exprimer  $\varepsilon_k$  en terme de  $\frac{1}{k-1}$  plutôt que de  $\frac{1}{k}$ . Pour ce faire, on utilise la formule du binôme négatif qui donne

$$\varepsilon_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} \frac{a_n}{(k-1)^{n+j}}$$

où

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-j+1)}{j!}.$$

On rassemble les termes selon les puissances de  $n$  et on obtient

$$\varepsilon_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n \binom{-j}{n-j} a_j \right) \frac{1}{(k-1)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_n}{(k-1)^n} \quad (12)$$

où

$$c_n = \sum_{j=1}^n \binom{-j}{n-j} a_j.$$

En remplaçant les expressions (10) et (12) pour  $\frac{1}{\varepsilon_{k-1}}$  et  $\varepsilon_k$  dans (9), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(k-1)^n} = 2(k-1) + 2 - \lambda \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{b_n}{(k-1)^n}.$$

En comparant les termes de l'équation, on voit directement que  $b_{-1} = b_0 = \frac{2}{\lambda}$ . Il s'en suit que  $a_1 = \frac{\lambda}{2}$  et, en remplaçant dans l'expression de  $b_0$ , que  $a_2 = -\frac{\lambda}{2}$ . Pour trouver les autres  $a_n$ , on observe que pour  $n \geq 1$ , on a la relation

$$c_n = -\lambda b_n,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n \binom{-j}{n-j} a_j = \frac{\lambda}{a_1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{j+1} b_{n-j}.$$

En remplaçant  $n$  par  $n-2$  ainsi que les valeurs de  $a_1$  et  $b_0$ , on peut isoler  $a_n$  pour  $n \geq 3$  de telle sorte que

$$a_n = \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^{n-2} \left[ \binom{-j}{n-2-j} a_j - 2a_{j+1} b_{n-2-j} \right].$$

En utilisant cette dernière équation ainsi que l'équation (11) avec  $b_0 = b_1 = \frac{2}{\lambda}$ ,  $a_1 = \frac{\lambda}{2}$  et  $a_2 = -\frac{\lambda}{2}$ , on peut déterminer tous les  $a_n$  par récurrence. En particulier, on a

$$a_3 = -\frac{\lambda(\lambda+4)}{8}$$

et donc

$$\tilde{\sigma}_k(\lambda) = k - \frac{\lambda}{2k} + \frac{\lambda}{2k^2} - \frac{\lambda(\lambda+4)}{8k^3} + O_\lambda \left( \frac{1}{k^4} \right)$$

lorsque  $k$  tend vers l'infini. □



## Chapitre 2

# Spectral invariants of Dirichlet-to-Neumann operators on surfaces

par

Jean Lagacé<sup>1</sup> et Simon St-Amant<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>) Department of Mathematics  
University College London  
Gower Street, London  
WC1E 6BT  
United Kingdom

(<sup>2</sup>) Département de mathématiques et de statistique  
Université de Montréal  
C. P. 6128, Succ. Centre-ville  
Montréal, QC  
H3C 3J7  
Canada

Cet article a été soumis dans Journal of Spectral Theory.

Chacun des auteurs a contribué à part égale à la publication.



RÉSUMÉ. Nous obtenons un développement asymptotique complet des valeurs propres d'opérateurs Dirichlet-vers-Neumann associés à des opérateurs de Schrödinger sur des surfaces riemanniennes compactes avec frontière. Pour le potentiel nul, nous retrouvons l'asymptotique spectrale du problème de Steklov. Pour des potentiels non-nuls, nous obtenons de nouveaux invariants géométriques déterminés par le spectre. En particulier, si le potentiel est constant, correspondant au problème de Steklov paramétrique, la courbure géodésique totale sur chaque composante connexe de frontière est un invariant spectral. Sous l'hypothèse de courbure constante, cela nous permet d'obtenir de l'information intérieure à partir du spectre de ces opérateurs de frontière.

**Mots clés :** Mots clés

ABSTRACT. We obtain a complete asymptotic expansion for the eigenvalues of the Dirichlet-to-Neumann maps associated with Schrödinger operators on compact Riemannian surfaces with boundary. For the zero potential, we recover the well-known spectral asymptotics for the Steklov problem. For nonzero potentials, we obtain new geometric invariants determined by the spectrum. In particular, for constant potentials, which give rise to the parameter-dependent Steklov problem, the total geodesic curvature on each connected component of the boundary is a spectral invariant. Under the constant curvature assumption, this allows us to obtain some interior information from the spectrum of these boundary operators.

**Keywords:** Key words

## 2.1. Introduction and main result

### 2.1.1. The Dirichlet-to-Neumann map

Let  $(\Omega, g)$  be a compact Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$  and  $\tau \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ . For  $\lambda \in \mathbb{R}$ , the Dirichlet-to-Neumann map on  $\Omega$

$$\text{DN}_\lambda := \text{DN}_\lambda(\Omega; \tau) : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$$

is defined as  $\text{DN}_\lambda u = \partial_\nu \tilde{u}$ , where  $\partial_\nu$  is the outward pointing normal derivative on  $\Sigma$  and  $\tilde{u}$  is the solution to the problem

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda\tau)\tilde{u} = 0 & \text{in } \Omega; \\ \tilde{u} = u & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Given  $\Omega$  and  $\tau$ , the map  $\text{DN}_\lambda$  is well-defined for all  $\lambda \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ , where  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{V}$  is a discrete set consisting in the Dirichlet eigenvalues of the linear operator pencil  $\Delta_g + \lambda\tau$ , i.e. the values of  $\lambda$  such that the problem

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda\tau)u = 0 & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } \Sigma; \end{cases}$$

admits a non-trivial solution. For fixed  $\lambda \in \mathcal{V}$ , the Dirichlet-to-Neumann map is a self-adjoint elliptic pseudodifferential operator of order one with principal symbol  $|\xi|_g$  [Tay13]. Its spectrum is discrete and accumulating only at infinity, i.e.

$$\sigma_0(\Omega; \tau; \lambda) \leq \sigma_1(\Omega; \tau; \lambda) \leq \dots \nearrow \infty.$$

These eigenvalues are solutions to the eigenvalue problem

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda\tau)u = 0 & \text{in } \Omega; \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (13)$$

A survey of the general properties of the Steklov problem, i.e. the problem for  $\lambda = 0$ , is found in [GP17].

### 2.1.2. Spectral asymptotics

Since  $\text{DN}_\lambda$  is a self-adjoint elliptic pseudodifferential operator of order one with principal symbol  $|\xi|_g$ , it follows from Weyl's law with sharp remainder (see [Hör84]) that for any  $\lambda, \tau$  the eigenvalues satisfy

$$\sigma_j(\Omega; \tau; \lambda) = \frac{\pi j}{\text{per}(\Sigma)} + O(1),$$

where  $\text{per}(\Sigma)$  denotes the length of  $\Sigma$ . When  $\lambda = 0$  and  $\Omega$  is simply connected Rozenblum [Roz86] and Guillemin–Melrose (see [Edw93a]) obtained independently the precise



asymptotics

$$\sigma_{2j} = \sigma_{2j-1} + O(j^{-\infty}) = \frac{2\pi j}{\text{per}(\Sigma)} + O(j^{-\infty}),$$

where for any sequence the notation  $a_j = O(j^{-\infty})$  means that  $|a_j| \leq C_N j^{-N}$  for any  $N \in \mathbb{N}$ . Our first result is an extension of this result to the Dirichlet-to-Neumann operators associated to Schrödinger operators. Given  $K \in \mathbb{Z}$ , we say that a sequence  $a_j$  has complete asymptotic expansion

$$a_j \sim \sum_{n=K}^{\infty} b_n j^{-n} \quad (14)$$

if for every  $N \geq K$ , there is  $C_N$  such that

$$\left| a_j - \sum_{n=K}^{N-1} b_n j^{-n} \right| \leq C_N j^{-N}$$

for all  $j \in \mathbb{N}$ .

**Theorem 2.1.1.** *Let  $(\Omega, g)$  be a simply connected compact Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$ . For  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \mathcal{V}$ , the eigenvalues of  $\text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  are asymptotically double and admit a complete asymptotic expansion given by*

$$\sigma_{2j} = \sigma_{2j-1} + O(j^{-\infty}) \sim \frac{j}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\lambda; \Omega) j^{-n}, \quad (15)$$

where  $L = \frac{\text{per}(\Sigma)}{2\pi}$ . The coefficients  $s_n$  are polynomials in  $\lambda$  of degree at most  $n$  with vanishing constant coefficients. They depend on both  $\tau$  and the metric in an arbitrarily small neighborhood neighborhood of  $\Sigma$ . If  $\tau \equiv 1$ , the first two terms are given by

$$s_1(\lambda; \Omega) = -\frac{\lambda L}{2}, \quad s_2(\lambda; \Omega) = \frac{\lambda L}{4\pi} \int_{\Sigma} k_g \, ds \quad (16)$$

where  $k_g$  is the geodesic curvature on  $\Sigma$ .

Let  $\Xi = \{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\ell)}\}$  be a finite set of increasing sequences of positive numbers accumulating at  $\infty$ . We denote by  $S(\Xi)$  the sequence  $\xi^{(1)} \cup \dots \cup \xi^{(\ell)}$  rearranged in monotone increasing order. Here, the union is understood as union of multisets, i.e. repeated elements are kept with their multiplicity. When  $\Omega$  is an arbitrary surface, we obtain a generalisation of Theorem 2.1.1. Note that Theorem 2.1.3 obviously implies Theorem 2.1.1. However, the statement for simply connected surfaces is cleaner and obtained as an intermediate step in proving Theorem 2.1.3. Hence we state them separately. When  $\lambda = 0$ , Girouard, Parnowski, Polterovich and Sher proved this result in [GPPS14], whereas Arias-Marco, Dryden, Gordon, Hassannezhad, Ray and Stanhope proved in [AMDG<sup>+</sup>19] the equivalent statement for the eigenvalues of  $\text{DN}_0$  on orbisurfaces.

In order to state Theorem 2.1.3, we need a slight generalization of (14).

**Definition 2.1.2.** Given  $K \in \mathbb{Z}$  and sequences  $B_j^{(N)}$  defined for  $N \geq K$  and  $j \geq 0$ , we write

$$a_j \sim B_j^{(\infty)}$$

if for every  $N \geq K$ , there is  $C_N$  such that

$$|a_j - B_j^{(N-1)}| \leq C_N j^{-N}$$

for all  $j \in \mathbb{N}$ .

This is obviously equivalent to (14) if  $B_j^{(N)} = \sum_{n=K}^N b_n j^{-n}$ .

**Theorem 2.1.3.** *Let  $(\Omega, g)$  be a compact Riemannian surface whose smooth boundary  $\Sigma$  has  $\ell$  connected components  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$ . For every  $1 \leq m \leq \ell$  and  $N \geq 1$ , define the sequence  $\xi^{(m, N)}$  as  $\xi_0^{(m, N)} = 0$  and for  $j \geq 1$ ,*

$$\xi_{2j}^{(m, N)} = \xi_{2j-1}^{(m, N)} := \frac{j}{L_m} + \sum_{n=1}^N s_n^{(m)}(\lambda; \Omega) j^{-n}, \quad (17)$$

where  $L_m = \frac{\text{per}(\Sigma_m)}{2\pi}$  and the coefficients  $s_n^{(m)}$  depend only on  $\lambda$ ,  $\tau$  and the metric in an arbitrarily small neighborhood of  $\Sigma_m$  in the same way as in (15) (including the case when  $\tau \equiv 1$ ). Let  $\Xi^{(N)} = \{\xi^{(1, N)}, \dots, \xi^{(\ell, N)}\}$ . For  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \mathcal{V}$ , the eigenvalues of  $\text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  are asymptotically given by

$$\sigma_j \sim S(\Xi^{(\infty)})_j. \quad (18)$$

### 2.1.3. Inverse spectral geometry

Inverse problems consist in recovering data of some PDE — the domain of definition  $\Omega$ , the metric, the potential, etc. — from properties of the operator alone, and inverse spectral geometry consists in recovering that data from the spectrum only. One of the seminal questions in that field was asked for the Dirichlet Laplacian by Mark Kac in [Kac66] and answered negatively by Gordon, Webb and Wolpert in [GWW92]: “Can one hear the shape of a drum?” For this reason, we often say that any geometric data that one can recover from the spectrum of an operator can be “heard”.

It is long known and follows from Weyl’s law that the total boundary length can be heard from  $\text{DN}_\lambda$ . It also follows from the standard theory of the wave trace asymptotics as developed by Duistermaat and Guillemin [DG75] that the length spectrum — that is the length of the closed geodesics — of the boundary  $\Sigma$  can be heard as well. For  $\text{DN}_0$ , it is shown in [GPPS14] that we can recover the number of connected components, as well as their lengths. It is also shown that from polynomial eigenvalue asymptotics alone in dimension two nothing more can be recovered. This can be seen as a consequence of Theorems 2.1.1 and 2.1.3 since the coefficients  $s_n$  and  $s_n^{(m)}$  are all polynomials in  $\lambda$  that vanish when  $\lambda = 0$ .

For  $\text{DN}_0$ , to extract more information different authors have turned to spectral quantities that have a more global nature. In [PS15], Polterovich and Sher obtain an asymptotic expansion as  $t \rightarrow 0$  for the heat trace of  $\text{DN}_0$ . From the coefficients, they obtain that the total mean curvature is a spectral invariant for  $d \geq 3$ . See also [Liu15] for further works.

In the case of  $\text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$ , heat trace asymptotics as well as invariants deduced from them have also been obtained by Wang and Wang in [WW19], again in dimension  $d \geq 3$ . We also refer to the works of Jollivet and Sharafutdinov [JS14, JS18] where they find invariants for simply connected domains from the zeta function associated with  $\text{DN}_0$ .

Our main theorem shows that for non-zero potential, one can hear more information from polynomial eigenvalue asymptotics.

The spectral inverse problem for the Dirichlet-to-Neumann map consists in extracting information about  $\Omega, g, \tau$  and  $\lambda$  (or a subset of these parameters) from the eigenvalues  $\{\sigma_j : j \in \mathbb{N}\}$ . As an application of our methods, we will find spectral invariants when  $\tau \equiv 1$ , and show that we can recover  $\lambda$  as well as geometric data on  $\Omega$ . For  $\lambda = 0$ , the problem has been studied already and is referred to as the Steklov problem. Lee and Uhlmann have shown in [LU89] that the map  $\text{DN}_0$  (but not necessarily its spectrum) determines the Taylor series for  $g$  close to the boundary. Girouard, Parnowski, Polterovich and Sher show in [GPPS14] that from polynomial order spectral asymptotics, one can determine the number of boundary components and each of their lengths, but nothing more. Our goal is to obtain more information from the spectrum when  $\lambda \neq 0$ .

**Theorem 2.1.4.** *For any  $\lambda \in (\mathbb{R} \cap \mathcal{V}) \setminus \{0\}$ , the spectrum of  $\text{DN}_\lambda$  determines the following quantities:*

- *the number of connected components of the boundary, and their respective perimeters;*
- *each coefficient  $s_n^{(m)}$  in (17), and in particular if  $\tau \equiv 1$ :*
  - *the parameter  $\lambda$ ;*
  - *the total geodesic curvature on each boundary component.*

The previous theorem along with the Gauss-Bonnet theorem also yield.

**Theorem 2.1.5.** *Let  $\Omega$  be a compact Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$  and genus  $\gamma$ . Suppose further that the Gaussian curvature  $K$  of  $\Omega$  is constant. Then, the quantity*

$$4\pi\gamma + K(\Omega) \text{area}(\Omega) \tag{19}$$

*is a spectral invariant of  $\text{DN}_\lambda(\Omega; 1)$ .*

Here the genus  $\gamma$  of  $\Omega$  corresponds to the minimal genus of a closed surface in which  $\Omega$  can be topologically embedded. Equivalently, it is the genus of the closed surface obtained from  $\Omega$  by gluing topological disk onto each boundary component. By restricting the choice of  $\Omega$ , we can gain more interior geometric information from the spectrum. Note that while the Steklov spectrum is not known to determine interior information in general, for planar domains it is already known from the work of Edward [Edw93b, Theorem 4] that we can get lower bounds for the area.

**Corollary 2.1.6.** *If  $\Omega$  is a domain of the standard sphere  $\mathbb{S}^2$ , its area is a spectral invariant.*

PROOF. If  $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ , then  $\gamma = 0$  and  $K(\Omega) = 1$ . This leaves only  $\text{area}(\Omega)$  in (19). □

**Corollary 2.1.7.** *If  $\Omega$  is a domain in a flat space form, its genus is a spectral invariant.*

PROOF. If  $\Omega$  is a domain in a flat space form, then  $K(\Omega) = 0$  and only  $4\pi\gamma$  remains in (19).  $\square$

The inverse problem for  $\text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  has a concrete interpretation in terms of the inverse scattering problem. In this context,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  has anisotropic refraction index  $\tau$ . Non-destructive testing is the process of using the far-field data to measure the scattering of an incoming wave at frequency  $\sqrt{\lambda}$  by the obstacle  $\Omega$ . The inverse scattering problem consists in recovering then the refraction index  $\tau$ , as well as the geometry of  $\Omega$ . In [CCMM16], it is shown that the far-field data determines the spectrum of  $\text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$ , so that any spectral invariant of  $\text{DN}_\lambda$  can be obtained from the far-field data. We have explicit expressions for geometric quantities related to the boundary of  $\Omega$  when the refraction index is isotropic, i.e. constant. When it is not, we do not give an explicit value of the coefficients  $s_n$ , however the algorithmic procedure to compute them in Sections 2.3 and 2.6 applies. Similarly, Theorem 2.4.2 is also valid in that context, giving an exact expression for the first few invariant quantities. Note that the coefficients  $s_n$  are polynomials of order at most  $n$  in  $\lambda$  with vanishing constant coefficient. This means that it is possible to decouple the coefficients of this polynomial by knowing the asymptotics for  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Physically, this simply means measuring the scattered far-field data for incoming waves at  $n$  different frequencies.

### 2.1.4. Sketch of the proof of Theorem 2.1.1

Let us introduce a slightly more general version of Problem (13). For  $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$  a strictly positive smooth function, we consider the eigenvalue problem

$$\begin{cases} (\Delta_g + \lambda\tau)u = 0 & \text{in } \Omega; \\ \partial_\nu u = \sigma\rho u & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (20)$$

Our first step will be to show that we can reduce Theorems 2.1.1 and 2.1.3 for Problem (20) to proving them for

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\tau u & \text{in } \mathbb{D}; \\ \partial_\nu u = \sigma\rho u & \text{on } \mathbb{S}^1. \end{cases} \quad (21)$$

In other words, by introducing this extra parameter  $\rho$  they only need to be proved in the case where  $\Omega$  is a disk, and  $g$  is the flat metric  $g_0$ .

This reduction will be done by following the strategy set out in [GPPS14], where they glue a disk to a tubular neighborhood of every boundary component, and discard the rest of the surface. Since the symbol of  $\text{DN}_\lambda$  depends solely on data obtained from a neighborhood of the boundary, this doesn't change the symbol of the Dirichlet-to-Neumann map. Mapping

these topological disks conformally to the unit disk in  $\mathbb{R}^2$  will multiply the factors  $\tau$  and  $\rho$  by a conformal factor, in other words it doesn't change the structure of the problem.

We then follow the general theory set out by Rozenblum in [Roz79] to obtain a complete asymptotic expansion of the eigenvalues of a pseudodifferential operator on a circle in terms of integrals of its symbol. Note that in [Roz79], an abstract algorithm is given to do so, but as is often the case with pseudodifferential symbolic calculus the expressions become unwieldy very quickly, and the difficulty resides in extracting actual geometric information out of it. The symbol is easy to compute for  $\rho = 1$ ,  $\lambda = 0$ , where it is simply  $|\xi|$ , with no lower order terms. However, when  $\lambda \neq 0$ , this is no longer the case, and it will lead to the full asymptotic expansion that we obtain.

We obtain the following theorem for the disk.

**Theorem 2.1.8.** *The eigenvalues of Problem (21) satisfy the asymptotic expansion*

$$\sigma_{2j} = \sigma_{2j-1} + O(j^{-\infty}) \sim \frac{j}{\int_{\mathbb{S}^1} \rho \, dx} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n j^{-n}.$$

where the coefficients  $b_n$  depend only on  $\rho$ ,  $\lambda$  and the values of  $\tau$  in a neighborhood of  $\mathbb{S}^1$ , as well as their derivatives.

We will then specialize the previous theorem to the values of  $\tau$  and  $\rho$  coming from the conformal mapping between the disk and  $\Omega$ . We obtain explicit values of the coefficients  $b_n$  in that situation.

## 2.1.5. Plan of the paper

In Section 2.2, we make clear our reduction to the disk and compute the full symbol of the Dirichlet-to-Neumann map. In Section 2.3 and Section 2.4, using the method laid out in [Roz79], we transform the symbol of a general Dirichlet-to-Neumann map on a circle to extract the asymptotic expansion of its eigenvalues. In Section 2.5, we specify our results to the case of the parametric Steklov problem in order to show Theorem 2.1.1. Finally, in Section 2.6, we prove Theorem 2.1.4. There, we use Diophantine approximation to decouple the sequences obtained in Theorem 2.1.3 recursively.

## Acknowledgements

The research of J.L. was supported by EPSRC grant EP/P024793/1 and the NSERC Postdoctoral Fellowship. The research of S.St-A. was supported by NSERC's CGS-M and FRQNT's M.Sc. scholarship (B1X). This work is part of his M.Sc. studies at the Université de Montréal, under the supervision of Iosif Polterovich. Both authors would like to thank him for many useful discussions, and relevant comments when this paper was in its final stages. The authors would also like to thank Alexandre Girouard, Michael Levitin, Leonid

Parnowski, and Grigori Rozenblum, who read the preliminary version of this paper and gave useful suggestions.

## 2.2. The symbol of the Dirichlet-to-Neumann map on surfaces

This section will be split into two parts : first, we follow Melrose's factorisation method, as described in [LU89]. We will see that the symbol of  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  depends only on  $\lambda$ ,  $\rho$ , as well as on the restriction of  $\tau$  and the metric  $g$  in a neighborhood of the boundary  $\Sigma$ . This will allow us to show that we can reduce the problem at hand to the situation where  $\Omega$  is the unit disk  $\mathbb{D}$ . In the second part of this section, we explicitly compute the value of the symbol for the disk.

Recall the construction of Fermi coordinates. Let  $\text{Roll}(\Omega)$  denote the rolling radius of  $\Omega$  (see [How99]). For some  $0 < \varepsilon < \text{Roll}(\Omega)$ , let  $\Upsilon$  be a collar  $\varepsilon$ -neighborhood of the boundary, i.e.

$$\Upsilon := \{x' \in \Omega : \text{dist}(x', \Sigma) < \varepsilon\}.$$

For each  $x \in \Sigma$ , let  $\gamma_x$  be the unit speed geodesic starting at  $x$ , normal to  $\Sigma$ . Since  $\varepsilon < \text{Roll}(\Omega)$ , for every  $x' \in \Upsilon$ , there is a unique  $x \in \Sigma$  such that  $x' \in \gamma_x$ . Set  $x' = (x, t)$  where  $t$  is the parameter along  $\gamma_x$ . The boundary  $\Sigma$  is characterised by  $\{t = 0\}$ , and the outward normal derivative is given by  $\partial_\nu = -\partial_t$ . In these coordinates, the metric has a much simpler form as

$$g(x') = \tilde{g}(x')(dx)^2 + (dt)^2,$$

for some positive function  $\tilde{g}$ . The Laplacian reads

$$-\Delta_g = D_t^2 - \frac{i}{2}(\partial_t \log \tilde{g})D_t + \tilde{g}^{-1}D_x^2 - i\frac{(\partial_x \tilde{g})}{\tilde{g}^2}D_x,$$

where  $D_x = -i\partial_x$  and  $x$  now denotes an arclength parameter along  $\Sigma$ .

### 2.2.1. Reduction to the disk

We start by observing that [LU89, Propositions 1.1 and 1.2] applies to the Schrödinger operator  $H = -\Delta - \lambda\tau$ .

**Proposition 2.2.1.** *There is a family  $A(x, t, D_x)$  of pseudodifferential operators acting on functions defined in a neighborhood of  $\Sigma$  and depending smoothly on  $t$  such that*

$$-\Delta_g - \lambda\tau(x) \equiv (D_t + iE - iA(x, t, D_x))(D_t + iA(x, t, D_x)) \pmod{\Psi^{-\infty}},$$

where

$$E := -\frac{i}{2}(\partial_t \log \tilde{g}).$$

PROOF. The proof follows that of [LU89, Proposition 1.1] in computing the symbol of  $A$  recursively. Their construction only relies on ellipticity of  $H$ , and the fact that the only derivatives in  $t$  are in  $\Delta_g$ .  $\square$

**Remark 2.2.2.** In subsection 2.2.2, we make this recursive computation of the symbol explicit for the disk, as we need to obtain concrete values of the coefficients in that case. The reader interested in a more detailed proof of Proposition 2.2.1 can see that this recursive computation also works for a general  $\Omega$ .

Proposition 2.2.1 admits the same corollary as in [LU89].

**Corollary 2.2.3.** *Let  $r(x, \xi)$  be the symbol of  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  and  $a(x, t, \xi)$  be the symbol of  $A$ . Then*

$$r(x, \xi) = -\frac{a(x, 0, \xi)}{\rho(x)}.$$

In other words,

$$\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega; \tau) \equiv \frac{-1}{\rho} A|_\Sigma \pmod{\Psi^{-\infty}}.$$

In particular, the symbol of  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega; \tau)$  depends only on  $\lambda, \rho$  and the boundary values of  $g, \tau$  and of their derivatives.

We denote by  $\sigma_j(\Omega; \tau; \rho; \lambda)$  the  $j^{\text{th}}$  eigenvalue of  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega, \tau)$ .

**Lemma 2.2.4.** *Let  $\Omega_1, \Omega_2$  be compact Riemannian surfaces with smooth boundary  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . Suppose there exists an isometry  $\varphi$  between collar neighborhoods  $\Upsilon_1$  of  $\Sigma_1$  and  $\Upsilon_2$  of  $\Sigma_2$ . Let  $\tau \in C^\infty(\Omega_2)$  and  $\rho \in C^\infty(\Sigma_2)$ . Then,*

$$|\sigma_j(\Omega_1; \varphi^* \tau; \varphi^* \rho; \lambda) - \sigma_j(\Omega_2; \tau; \rho; \lambda)| = O(j^{-\infty})$$

where  $\varphi^*$  denotes the pullback by  $\varphi$ , i.e. the precomposition by  $\varphi$ .

PROOF. By Corollary 2.2.3, the operators  $\frac{1}{\varphi^* \rho} \text{DN}_\lambda(\Omega_1; \varphi^* \tau) \circ \varphi^*$  and  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega_2; \tau)$  have the same symbol, or in other words

$$\frac{1}{\varphi^* \rho} \text{DN}_\lambda(\Omega_1; \varphi^* \tau) \circ \varphi^* \equiv \frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega_2; \tau) \pmod{\Psi^{-\infty}}.$$

It follows from [GPPS14, Lemma 2.1] that their eigenvalues are close to infinite order. The result then follows since  $\varphi^* : C^\infty(\Sigma_2) \rightarrow C^\infty(\Sigma_1)$  is a bijection.  $\square$

**Lemma 2.2.5.** *Let  $\Omega$  be a compact simply connected surface with smooth boundary  $\Sigma$ . Let  $\varphi : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \Omega$  be conformal. Then, the Steklov problem (20) on  $\Omega$  is isospectral to the problem*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^{2f}(\varphi^* \tau)u & \text{in } \mathbb{D}; \\ \partial_\nu u = \sigma e^f(\varphi^* \rho)u & \text{on } \mathbb{S}^1; \end{cases}$$

where  $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  is such that  $\varphi^* g = e^{2f} g_0$ .

PROOF. It follows directly from the observation, see [JS14], that the Laplacian and normal derivatives transform under a conformal mapping  $\varphi : (\overline{\mathbb{D}}, g_0) \rightarrow (\Omega; g)$  as

$$\Delta_{g_0}(\varphi^*u) = e^{2f}\varphi^*(\Delta_g u)$$

and

$$\partial_{\nu, g_0}(\varphi^*u) = e^f\varphi^*(\partial_{\nu, g}u)$$

respectively. □

This leads us to the main theorem of this subsection, reducing the problem to the one on the unit disk.

**Theorem 2.2.6.** *Let  $(\Omega, g)$  be a compact Riemannian surface whose smooth boundary  $\Sigma$  has  $\ell$  connected components  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$ , and let  $\Omega'$  be the disjoint union of  $\ell$  identical unit disks  $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_\ell$  with boundary  $\Sigma' = \mathbb{S}_1^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}_\ell^1$ . There exist*

$$\tau_0 : \Omega' \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{and} \quad \rho_0 : \Sigma' \rightarrow \mathbb{C}.$$

such that

$$|\sigma_j(\Omega; \tau; \rho; \lambda) - \sigma_j(\Omega'; \tau_0; \rho_0; \lambda)| = O(j^{-\infty}).$$

PROOF. The proof follows that of [GPPS14, Theorem 1.4]. For  $1 \leq m \leq \ell$ , let  $\Omega_m$  be a topological disk with a Riemannian metric that is isometric to a collar neighborhood  $\Upsilon_m$  of  $\Sigma_m$ , and denote by  $\Omega_{\#}$  the union of the disks  $\Omega_m$ . We abuse notation and denote also by  $\tau$  any smooth function on  $\Omega_{\#}$  whose value on  $\Upsilon_m$  coincides with  $\tau$  on  $\Omega$ . This is justified since only its value in a neighborhood of the boundary affects eigenvalue asymptotics. It follows from Lemma 2.2.4 that

$$|\sigma_j(\Omega; \tau; \rho; \lambda) - \sigma_j(\Omega_{\#}; \tau; \rho; \lambda)| = O(j^{-\infty}).$$

For every  $m$  the Riemann mapping theorem implies the existence of a conformal diffeomorphism  $\varphi_m : (\mathbb{D}_m, g_0) \rightarrow (\Omega_m, g_m)$ , which can be extended to the boundary since  $\Sigma_m$  is smooth. Given that  $\varphi_m^*g_m = e^{2f_m}g_0$ , define  $\tau_0$  and  $\rho_0$  for  $x \in \mathbb{D}_m$  and  $\mathbb{S}_m^1$  respectively as

$$\begin{cases} \tau_0(x) := e^{2f_m}\tau(\varphi_m(x)); \\ \rho_0(x) := e^{f_m}\rho(\varphi_m(x)). \end{cases}$$

It follows from Lemma 2.2.5 that  $\frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\Omega_m; \tau)$  is isospectral to  $\frac{1}{\rho_0} \text{DN}_\lambda(\overline{\mathbb{D}_m}; \tau_0)$ . The conclusion then follows from the fact that the spectrum of the Dirichlet-to-Neumann map defined on a disjoint union of domains is the union of their respective spectra. □

## 2.2.2. The symbol of the Dirichlet-to-Neumann map on the disk

We now compute the full symbol of  $\Lambda := \frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\mathbb{D}; \tau)$  on  $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$  from the factorisation obtained in Proposition 2.2.1. Let us introduce boundary normal coordinates  $(x, t)$  for the



collar neighborhood  $\mathbb{S}^1 \times [0, \delta)$ , for some small but fixed  $\delta$ . The flat metric in these coordinates reads

$$g(x, t) = (1 - t)^2(dx)^2 + (dt)^2,$$

and the Laplacian reads as

$$-\Delta = D_t^2 + \frac{i}{1-t}D_t + \frac{1}{(1-t)^2}D_x^2.$$

We are therefore looking for a factorisation of the form

$$-\Delta_g - \lambda\tau(x) \equiv (D_t + iE(t) - iA(x, t, D_x))(D_t + iA(x, t, D_x)) \pmod{\Psi^{-\infty}},$$

where  $E(t) = (1 - t)^{-1}$ .

Rearranging, this implies finding  $A$  such that

$$A^2(x, t, D_x) - \frac{1}{(1-t)^2}D_x^2 + i[D_t, A] - E(t)A(x, t, D_x) + \lambda\tau(x) \equiv 0 \pmod{\Psi^{-\infty}},$$

which at the level of symbols is tantamount to finding  $a(x, t, \xi)$  such that

$$\sum_{K \geq 0} \frac{1}{K!} (\partial_\xi^K a)(D_x^K a) - \frac{\xi^2}{(1-t)^2} + \partial_t a - \frac{a}{1-t} + \lambda\tau = 0,$$

where

$$a(x, t, \xi) \sim \sum_{m \leq 1} a_m(x, t, \xi)$$

is the symbol of  $A$  and the coefficients  $a_m$  are positively homogeneous of degree  $m$  in  $\xi$ .

By gathering the terms of degree two, we obtain

$$a_1 = -\frac{|\xi|}{1-t},$$

while gathering the terms of degree one yields

$$a_0(x, t, \xi) = \frac{-1}{2a_1} \left( \partial_t a_1 - \frac{a_1}{1-t} \right) = 0.$$

One can observe that neither  $a_1$  nor  $a_0$  depend on  $\lambda\tau$ . However, by gathering the terms of order 0, we get

$$a_{-1}(x, t, \xi) = \frac{-\lambda\tau}{2a_1} = \frac{\lambda(1-t)\tau}{2|\xi|}.$$

For  $m \leq -1$ ,  $a_{m-1}$  is found recursively by gathering the terms of order  $m$  and is given by

$$a_{m-1}(x, t, \xi) = -\frac{1}{2a_1} \left( \sum_{\substack{j, k \\ m \leq j, k \leq 1 \\ \gamma = j+k-m}} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma(a_j) \partial_x^\gamma(a_k) + \partial_t a_m - \frac{a_m}{1-t} \right). \quad (22)$$

Note that this is the same recurrence relation as the one appearing in [LU89] as soon as  $m < -1$ . For the sequel, we will require explicit knowledge of the term of order  $-2$ . From

the previous equation we deduce that

$$a_{-2}(x,t,\xi) = \frac{(1-t)\lambda}{4|\xi|^2} (i\tau_x \operatorname{sgn}(\xi) - 2\tau + (1-t)\tau_t).$$

As indicated by corollary (2.2.3), the symbol of  $\Lambda$  is given by

$$r(x,\xi) = -\rho(x)^{-1}a(x,0,\xi)$$

where the sign is chosen so that  $\Lambda$  is a positive operator. Note that  $\partial_t$  is the interior normal derivative hence  $\partial_t = -\partial_\nu$ . Writing  $f(x) := f(x,0)$  for the restriction of any function to the boundary, the first few terms of the symbol of  $\Lambda$  read as

$$r(x,\xi) = \frac{|\xi|}{\rho(x)} - \frac{\lambda\tau(x)}{2\rho(x)|\xi|} + r_{-2}(x,\xi) + O(|\xi|^{-3}),$$

with

$$r_{-2}(x,\xi) = \frac{-\lambda}{4\rho(x)|\xi|^2} (i\tau_x(x) \operatorname{sgn}(\xi) - 2\tau(x) - \partial_\nu\tau(x)).$$

### 2.2.3. Symmetries of the symbol

When  $\lambda$  and  $\tau$  are real, we see from these first expressions, that the real part of the symbol is an even function of  $\xi$ , while its imaginary part is an odd function of  $\xi$ . This is equivalent to the following definition.

**Definition 2.2.7.** A symbol  $a(x,\xi)$  is hermitian if  $a(x, -\xi) = \overline{a(x,\xi)}$  for all  $x,\xi \in \mathbb{R}$ .

We now show recursively that the symbol of  $\Lambda$  is hermitian.

**Proposition 2.2.8.** For  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in C^\infty(\mathbb{D}; \mathbb{R})$ , the symbol  $r_m$  is hermitian for all  $m \leq 1$ .

The proposition follows from (22) and the following lemma whose proof is straightforward.

**Lemma 2.2.9.** Let  $a$  and  $b$  be two hermitian symbols corresponding to operators  $A$  and  $B$ . Then

- (1)  $\partial_x a$  and  $D_\xi a$  are hermitian;
- (2)  $a + b$  and  $ab$  are hermitian;
- (3) The symbol of  $AB$  is hermitian.

**PROOF.** Let  $a(x,\xi) = u(x,\xi) + iv(x,\xi)$  where both  $u$  and  $v$  are real-valued. The fact that  $a$  is hermitian is equivalent to

$$u(x, -\xi) + iv(x, -\xi) = u(x,\xi) - iv(x,\xi)$$

which means that  $u$  and  $v$  are even and odd functions of  $\xi$  respectively. When differentiated with respect to  $x$ , they remain even and odd functions of  $\xi$ , and hence  $\partial_x a$  is hermitian. On the other hand, if we consider  $D_\xi a$ , its real part is given by  $\partial_\xi v$  and its imaginary part by  $-\partial_\xi u$ . Since the derivative of an odd function is even and the derivative of an even function is odd, it follows that  $D_\xi a$  is hermitian. Since  $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$  and  $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$ , it follows directly

that  $a + b$  and  $ab$  are also hermitian. Finally, if  $c$  denotes the symbol of  $AB$ , we have

$$c \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha a) (D_\xi^\alpha b)$$

and therefore  $c$  is hermitian (up to  $S^{-\infty}$ , but we can choose it as truly hermitian), as it is the sum of hermitian symbols.  $\square$

## 2.3. Transformation of the symbol

In this section, we follow and make explicit the strategy laid out in [Roz79], [Agr84, Section 2] and [ES97] in the specific case of the parametric Dirichlet-to-Neumann map.

Specifically, we want to find a sequence  $P_N \in \Psi^1$  such that

- $\Lambda U_N = U_N P_N \pmod{\Psi^{1-N}}$  for a bounded operator  $U_N$ ;
- The symbol of  $P_N$  depends only on the cotangent variable  $\xi$  up to order  $1 - N$ .

Such a procedure (making the symbol dependent solely on  $\xi$ ) will be referred to as a *diagonalisation* of the symbol. It is motivated by the following proposition resulting from [Roz79, Theorem 9].

**Proposition 2.3.1.** *Let  $A$  be an elliptic, self-adjoint pseudodifferential operator of order 1 and let  $P$  be the operator with symbol*

$$p(x, \xi) = \sum_{k=0}^N p_{1-k}(\xi)$$

where  $p_{1-k}$  depends only on  $\xi$  and is positively homogeneous of order  $1 - k$ . Suppose that  $AU - UP \in \Psi^{-N}$  for some bounded operator  $U$ . Then the eigenvalues of  $A$  are given by the sequences

$$\sigma_j^\pm = \sum_{k=0}^N p_{1-k}(\pm j) + O(j^{-N})$$

### 2.3.1. Diagonalisation of the principal symbol

We start by diagonalising the principal symbol of  $\Lambda = \frac{1}{\rho} \text{DN}_\lambda(\mathbb{D}; \tau)$ . Let

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(x) dx \tag{23}$$

and

$$S(x, \eta) = \frac{\eta}{L} \int_0^x \rho(t) dt.$$

The function  $S$  is a generating function for the canonical transformation  $(y, \xi) = T(x, \eta)$  given by the relations

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial \eta}.$$

We define the Fourier integral operator  $\Phi$  with phase function  $S$  as

$$\Phi u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iS(x,\xi)} \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

where  $\widehat{u}$  is the Fourier transform of  $u$ . We use  $\Phi$  to diagonalise the principal symbol of  $\Lambda$  in the following proposition.

**Proposition 2.3.2.** *For any  $N$ , there is an operator  $B_N \in \Psi^1$  such that its principal symbol depends only on  $\xi$  and such that*

$$\Lambda\Phi - \Phi B_N \in \Psi^{1-N}.$$

PROOF. We are looking for the symbol of  $B$  in the form

$$b(x,\xi) = b_1(\xi) + \sum_{m \leq 0} b_m(x,\xi)$$

with  $b_j(x,\xi)$  positively homogeneous of order  $j$  in  $\xi$ . Let us first study the operator  $\Lambda\Phi$ . It acts on smooth functions as

$$\begin{aligned} \Lambda\Phi u(x) &= \iiint r(x,\eta) e^{i(x-y)\eta} e^{iS(y,\xi)} \widehat{u}(\xi) d\eta dy d\xi \\ &= \int k(x,\xi) e^{iS(x,\xi)} \widehat{u}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

where

$$k(x,\xi) = \iint r(x,\eta) e^{i(x-y)\eta} e^{i(S(y,\xi) - S(x,\xi))} dy d\eta.$$

We now look for the asymptotic expansion of  $k$  as a symbol on  $\mathbb{S}^1$ , up to symbols of order  $-\infty$ . Note that the expressions here have sense in terms of distributions, see [ES97, Section 2.2.2]. By following the method of proof in [ES97, Theorem 6.5], we can localize the symbol by finding smooth cut-off functions  $h_1(x,y)$  and  $h_2(\xi,\eta)$  supported in suitable neighborhoods of  $x = y$  and  $\xi = \eta$  such that if

$$k'(x,\xi) = \iint r(x,\eta) e^{i(x-y)\eta} e^{i(S(y,\xi) - S(x,\eta))} h_1(x,y) h_2(\xi,\eta) dy d\eta,$$

then  $\text{Op}(k - k') \in \Psi^{-\infty}$ . By Taylor's theorem, we can write

$$S(y,\xi) - S(x,\xi) = \frac{\partial S(x,\xi)}{\partial x} (y - x) + R(x,y,\xi) (y - x)^2$$

with

$$R(x,y,\xi) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 S(x+t(y-x),\xi)}{\partial x^2} dt. \quad (24)$$

We can rewrite  $k'$  as

$$k'(x,\xi) = \iint r(x,\eta) e^{i(x-y)(\eta - R(x,y,\xi)(y-x) - \frac{\partial S}{\partial x})} h_1(x,y) h_2(\xi,\eta) dy d\eta.$$

Changing variables as  $\tilde{\eta} = \eta - R(x, y, \xi)(y - x)$  and  $\tilde{\xi} = \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial x} = \frac{\xi \rho}{L}$ , we obtain that  $k'$  is of the form

$$k'(x, \xi) = \iint K(x, y, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) e^{i(x-y)(\tilde{\eta}-\tilde{\xi})} dy d\tilde{\eta}$$

where

$$K(x, y, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = r(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)) h_1(x, y) h_2(\xi, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)).$$

From [ES97, Lemma 2.13], we know that  $k'(x, \xi)$  is a symbol given by

$$k'(x, \xi) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\tilde{\eta}}^{\alpha} D_y^{\alpha} K(x, y, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \Big|_{\substack{\tilde{\eta}=\tilde{\xi} \\ y=x}}.$$

By the choice of cut-off functions, when  $x$  is close to  $y$  and  $\tilde{\eta}$  is close to  $\tilde{\xi}$ , we have that  $h_1$  and  $h_2$  are constant and equal to one. Hence, they don't intervene in the symbol's calculation and

$$k'(x, \xi) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\tilde{\eta}}^{\alpha} D_y^{\alpha} r(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)(y - x)) \Big|_{\substack{\tilde{\eta}=\tilde{\xi} \\ y=x}}.$$

We now make the following observation : if  $r(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)(y - x))$  is a symbol of order  $m$ , then applying  $\partial_{\tilde{\eta}}^{\alpha} D_y^{\alpha}$  results in a symbol of order  $m - \alpha$ . In fact, for  $\alpha = 1$ , and denoting by  $\partial_2$  the derivative with respect to the second argument, we have

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\eta}} D_y r(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)(y - x)) \Big|_{\substack{\tilde{\eta}=\tilde{\xi} \\ y=x}} &= -i \left[ \partial_2^2 r(x, \tilde{\xi}) \right] R(x, x, \xi) \\ &= -i \left[ \partial_2^2 r \left( x, \frac{\rho(x)\xi}{L} \right) \right] \frac{\xi \rho'(x)}{2L}. \end{aligned}$$

It is clear from this last equation that it is a symbol of order  $m - 1$ . Induction on  $\alpha$  is then straightforward. This yields the asymptotic symbolic expansion  $k'(x, \xi) = \sum_{m \leq 1} \tilde{a}_m(x, \xi)$  where

$$\tilde{a}_m(x, \xi) = \sum_{0 \leq \alpha \leq 1-m} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\tilde{\eta}}^{\alpha} D_y^{\alpha} r_{m+\alpha}(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)(y - x)) \Big|_{\substack{\tilde{\eta}=\frac{\xi \rho(x)}{L} \\ y=x}}. \quad (25)$$

We can compute the first few terms of the symbolic expansion, using the fact that in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  the second derivative of  $a_1$  in the second variable vanishes identically. This gives

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(x, \xi) &= \frac{|\xi|}{L}; \\ \tilde{a}_0(x, \xi) &= 0; \\ \tilde{a}_{-1}(x, \xi) &= -\frac{\lambda L \tau}{2\rho^2 |\xi|}; \\ \tilde{a}_{-2}(x, \xi) &= \frac{\lambda L^2}{4\xi^2 \rho^3} (\tau_r - i \operatorname{sgn}(\xi) \tau_x + 2\tau) + \frac{i\lambda L^2 \tau \operatorname{sgn}(\xi) \rho'}{2\xi^2 \rho^4}. \end{aligned}$$

Let us now compute the symbol of  $\Phi B$ . We have

$$\begin{aligned}\Phi B u(x) &= \iiint e^{iy(\xi-\eta)} e^{iS(x,\eta)} b(y,\xi) \widehat{u}(\xi) \, dy \, d\eta \, d\xi \\ &= \int f(x,\xi) e^{iS(x,\xi)} \widehat{u}(\xi) \, d\xi,\end{aligned}$$

where

$$f(x,\xi) = \iint b(y,\xi) e^{i(S(x,\eta)-S(x,\xi))} e^{iy(\xi-\eta)} \, dy \, d\eta.$$

As above, this integral only converges in the sense of distributions. As in [ES97], we can find a smooth cut-off function  $h(\xi,\eta)$  supported in a neighborhood of  $\xi = \eta$  such that the symbol

$$f'(x,\xi) = \iint b(y,\xi) e^{i(S(x,\eta)-S(x,\xi))} e^{iy(\xi-\eta)} h(\xi,\eta) \, dy \, d\eta$$

satisfies  $\text{Op}(f - f') \in \Psi^{-\infty}$ .

Let us observe that

$$S(x,\eta) - S(x,\xi) = \frac{(\eta - \xi)}{L} \int_0^x \rho(x) \, dx = (\eta - \xi) F(x)$$

and that  $F(x) = \frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi)$ . After the change of variable  $\tilde{y} = y + x - F(x)$ , the equation for  $f'$  becomes

$$\begin{aligned}f'(x,\xi) &= \iint b(\tilde{y} - x + F(x), \xi) h(\xi,\eta) e^{i(x-\tilde{y})(\eta-\xi)} \, d\tilde{y} \, d\eta \\ &= \iint Q(x,\tilde{y}, \eta, \xi) e^{i(x-\tilde{y})(\eta-\xi)} \, d\tilde{y} \, d\eta.\end{aligned}$$

Once again from [ES97, Lemma 2.13], we have that  $f'$  is a symbol in  $S^1$  and

$$f'(x,\xi) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\eta^\alpha D_{\tilde{y}}^\alpha Q(x,\tilde{y}, \xi, \eta) \Big|_{\substack{\tilde{y}=x \\ \eta=\xi}}.$$

Since  $Q$  is constant in  $\eta$  close to  $\xi$ , the derivatives in  $\eta$  always vanish. Hence, the symbol of  $B_N$  is given by

$$f'_N(x,\xi) = \sum_{-N \leq m \leq 1} b_m \left( \frac{1}{L} \int_0^x \rho(t) \, dt, \xi \right).$$

To have the terms of the same order of homogeneity cancel out, we need to choose

$$b_m(x,\xi) = \tilde{a}_m(s(x), \xi), \tag{26}$$

where  $s(x)$  is the number  $s$  such that

$$x = \frac{1}{L} \int_0^s \rho(t) \, dt.$$

This concludes the proof. □

### 2.3.2. Diagonalisation of the full symbol

Let us denote by  $P_1$  the operator with symbol

$$p^{(1)}(x, \xi) = b_1(\xi) + \sum_{m \leq -1} b_m(x, \xi). \quad (27)$$

The diagonalisation of the full symbol is based on the following lemma inspired by the methods laid out by Rozenblum [Roz79] and Agranovich [Agr84]. We include it for completeness.

**Lemma 2.3.3.** *Let  $N \geq 0$  and suppose that there exists a bounded operator  $U_N$  such that  $\Lambda U_N - U_N P_N \in \Psi^{-\infty}$  where  $P_N$  is a pseudodifferential operator whose symbol is given by*

$$p^{(N)}(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}^{(N)}(\xi) + p_{-N}^{(N)}(x, \xi) + O_x(|\xi|^{-(N+1)}).$$

Then if

$$p_{-N}^{(N+1)}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{-N}^{(N)}(x, \xi) dx \quad (28)$$

and  $K$  is the pseudodifferential operator with symbol

$$k(x, \xi) = 1 - iL \operatorname{sgn} \xi \int_0^x p_{-N}^{(N)}(t, \xi) - p_{-N}^{(N+1)}(\xi) dt, \quad (29)$$

there exists an operator  $P_{N+1}$  with symbol

$$p^{(N+1)}(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}^{(N)}(\xi) + p_{-N}^{(N+1)}(\xi) + O_x(|\xi|^{-(N+1)})$$

satisfying  $\Lambda(U_N K) - (U_N K)P_{N+1} \in \Psi^{-\infty}$ .

PROOF. Starting off with the pseudodifferential operator  $P_N$ , we would like to find a bounded operator  $K$  and a pseudodifferential operator  $P_{N+1}$  whose symbol  $p^{(N+1)}$  satisfies

$$p^{(N+1)}(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}^{(N)}(\xi) + p_{-N}^{(N+1)}(\xi) + O_x(|\xi|^{-(N+1)})$$

such that  $P_N K - K P_{N+1} \in \Psi^{-\infty}$ . We choose  $K$  to have symbol  $1 + k_{-N}(x, \xi)$  with  $k_{-N}$  positively homogeneous of order  $-N$  in  $\xi$ . The symbol of  $P_N K - K P_{N+1}$  is then given by

$$p_{-N}^{(N)}(x, \xi) - p_{-N}^{(N+1)}(\xi) - i(\partial_\xi p_1^{(N)})(\partial_x k_{-N}) + O(|\xi|^{-N-1}).$$

The symbol  $p_1^{(N)}$  comes from the diagonalisation of the principal symbol and is given by  $p_1^{(N)}(\xi) = p_1^{(1)}(\xi) = b_1(\xi) = \frac{|\xi|}{L}$ . Hence, we see that the terms of order  $-N$  cancel if the symbol of  $K$  is given by (29) and since  $0 = k_{-N}(0, \xi) = k_{-N}(2\pi, \xi)$ , we must take  $p_{-N}^{(N+1)}$  as in (28). In order to get that  $P_N K - K P_{N+1} \in \Psi^{-\infty}$  knowing that the symbol of  $P$  is given by

$$p^{(N)}(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}^{(N)}(\xi) + \sum_{m \geq N+1} p_{1-m}^{(N)}(x, \xi),$$

we need to take  $P_{N+1}$  with symbol

$$p^{(N+1)}(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}^{(N+1)}(\xi) + p_{-N}^{(N+1)}(\xi) + \sum_{m \geq N+2} p_{1-m}^{(N+1)}(x, \xi),$$

which is calculated inductively as

$$p_m^{(N+1)} = p_m^{(N)} + \sum_{\alpha=0}^{1-m-N} \frac{1}{\alpha!} \left[ (\partial_x^\alpha k_{-N})(D_\xi^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N)}) - (\partial_x^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N)})(D_\xi^\alpha k_{-N}) \right] \quad (30)$$

for  $m \leq -N - 1$ . It follows that  $\Lambda(U_N K) - (U_N K)P_{N+1}$  is smoothing.  $\square$

The previous lemma gives us a family of operators  $P_N$  that diagonalise  $\Lambda$  down to any desired order. By applying it  $N - 1$  times starting from  $P_1$ , we get that there exists  $P_N$  with symbol

$$p^{(N)}(x, \xi) = \frac{|\xi|}{L} + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{-m}^{(m)}(x, \xi) dx + O_x(|\xi|^{-N})$$

such that  $\Lambda U_N - U_N P_N$  is smoothing for some bounded operator  $U_N$ . We summarize the properties of the operators  $P_N$  that were proved along the discussion above in the following proposition.

**Proposition 2.3.4.** *The symbols  $p^{(N)}$  of  $P_N$  possess the following properties.*

- (1) *The first symbol  $p^{(1)} = b_1(\xi) + \sum_{m \leq -1} b_m(x, \xi)$ , see (27).*
- (2) *For  $m \geq 1 - N$ ,  $p_m^{(N+1)} = p_m^{(N)}$  and  $\partial_x p_m^{(N)} = 0$ . In other words, for every  $m \leq -1$  the sequence stabilises and eventually becomes diagonal with respect to  $\xi$ .*
- (3) *For  $m \leq -N - 1$ ,  $p_m^{(N+1)}$  is given recursively by equation (30).*
- (4) *When the sequence stabilises, the diagonalised symbol can be explicitly computed as  $p_{-N}^{(N+1)}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{-N}^{(N)}(x, \xi) dx$ .*

One can see that  $p_m^{(N)}$  is a polynomial in  $\lambda$  with coefficients that are functions of  $x$  and  $\xi$ . From this point of view, we observe the following.

**Lemma 2.3.5.** *For each  $m \leq -1$  and for each  $N \geq 1$ , the function  $p_m^{(N)}$  is a polynomial in  $\lambda$  of degree at most  $-m$  whose constant coefficient vanishes.*

**PROOF.** We denote by  $\deg(p)$  the degree of a function  $p(x, \xi)$  as a polynomial in  $\lambda$ . We proceed by induction on both  $N$  and  $m$ .

It is easily seen from (22) and the expressions for  $a_1$  and  $a_{-1}$  that the functions  $a_m$  (and hence  $r_m$ ) are polynomials of order  $\left\lceil \frac{-m}{2} \right\rceil \leq -m$  whenever  $m \leq -1$ . It then follows from equations (25) and (26) that  $\deg(p_m^{(1)}) = \deg(b_m) \leq -m$  for all  $m \leq -1$ .

Let  $N \geq 1$  be arbitrary and suppose that  $\deg(p_m^{(N')}) \leq -m$  for all  $1 \leq N' \leq N$  and  $m \leq -1$ . From Proposition 2.3.4, we know that

$$\deg(p_{-1}^{(N+1)}) = \deg(p_{-1}^{(1)}) = 1.$$



Let  $m_0 \leq -1$  and suppose that  $\deg(p_m^{(N+1)}) \leq -m$  for all  $-1 \geq m \geq m_0$ . We want to estimate the degree of  $p_{m_0-1}^{(N+1)}$ . Its expression is given by (30) and we can see that the term of highest degree in  $\lambda$  in the sum is obtained when  $\alpha = 0$ . Hence,

$$\deg(p_{m_0-1}^{(N+1)}) \leq \deg(k_{-N}) + \deg(p_{m_0-1+N}^{(N+1)}) \quad (31)$$

From the definition of  $k_{-N}$ , we have

$$\deg(k_{-N}) = \deg(p_{-N}^{(N)}) \leq N \quad (32)$$

by the induction hypothesis. Since  $m_0 - 1 + N \geq m_0$ , the induction hypothesis yields

$$\deg(p_{m_0-1+N}^{(N+1)}) \leq -m_0 + 1 - N. \quad (33)$$

Therefore, by combining (31), (32) and (33),  $\deg(p_{m_0-1}^{(N+1)}) \leq -m_0 + 1$  and the claim follows by induction.

Finally, to show that the constant coefficient of  $p_m^{(N)}$  vanishes, it suffices to show that it is the case for  $a_m$ . Proceeding inductively, since  $a_0 = 0$ , notice from (22) that the only term in  $a_{m-1}$  that could be constant in  $\lambda$  is  $\frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma(a_1) \partial_x^\gamma(a_1)$  with  $\gamma = 2 - m$ . However,  $D_\xi^\gamma(a_1) = 0$  for  $\gamma \geq 2$ .  $\square$

**Remark 2.3.6.** That  $p_m^{(N)} = 0$  whenever  $\lambda = 0$  is not surprising. Indeed, this corresponds to the classic Dirichlet-to-Neumann operator whose symbol is precisely  $|\xi|$ .

If one is interested in computing the symbols explicitly in a given example the calculations quickly become very involved. The following lemma allows us to reduce the number of computations to obtain the  $k$ -th term in the diagonalised symbol.

**Lemma 2.3.7.** For all  $N \geq \lceil \frac{-m}{2} \rceil$ ,

$$\int_0^{2\pi} p_m^{(-m)} dx = \int_0^{2\pi} p_m^{(N)} dx.$$

**PROOF.** If  $m \geq 1 - 2N$ , then  $\partial_x^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N)} = \partial_x^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N+1)} = 0$  for all  $\alpha > 0$ . We also have  $p_{m+N}^{(N)} = p_{m+N}^{(N+1)}$  and hence

$$p_m^{(N+1)} = p_m^{(N)} + \sum_{\alpha=1}^{1-m-N} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha k_{-N}) (D_\xi^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N)}).$$

Therefore, since  $p_{m+\alpha+N}^{(N)}$  doesn't depend on  $x$ , integrating both sides yields

$$\int_0^{2\pi} p_m^{(N+1)} dx = \int_0^{2\pi} p_m^{(N)} dx + \sum_{\alpha=1}^{1-m-N} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p_{m+\alpha+N}^{(N)}) \int_0^{2\pi} (\partial_x^\alpha k_{-N}) dx.$$

The rightmost integral vanishes for all  $\alpha$  since  $k_{-N}$  is periodic and thus

$$\int_0^{2\pi} p_m^{(N+1)} dx = \int_0^{2\pi} p_m^{(N)} dx.$$

Finally, if  $m = -2N$ , we have

$$\int_0^{2\pi} p_{-2N}^{(N+1)} dx = \int_0^{2\pi} p_{-2N}^{(N)} dx + \int_0^{2\pi} k_{-N}(p_{-N}^{(N)} - p_{-N}^{(N+1)}) dx$$

and since  $\partial_x k_{-N} = -iL \operatorname{sgn} \xi (p_{-N}^{(N)} - p_{-N}^{(N+1)})$  the rightmost integral vanishes. The result then follows since  $m \geq -2N$  is equivalent to  $N \geq \lceil \frac{-m}{2} \rceil$ .  $\square$

The previous lemma simplifies calculations. Indeed, in order to get the diagonalised term of order  $-m$ , it suffices to apply the diagonalisation lemma  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  rather than  $m$  times. In particular, we get

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_{-2}^{(2)} dx &= \int_0^{2\pi} p_{-2}^{(1)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} b_{-2}(x, \xi) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{a}_{-2}(s(x), \xi) dx. \end{aligned}$$

Using that  $s'(x) = \frac{L}{\rho(s(x))}$ , we get

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_{-2}^{(2)} dx &= \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \rho(x) \tilde{a}_{-2}(x, \xi) dx \\ &= \frac{\lambda L}{4|\xi|^2} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_r + 2\tau}{\rho^2} dx \end{aligned}$$

where the terms containing  $i \operatorname{sgn} \xi$  vanish from the fact that

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tau_x}{\rho^2} dx = 2 \int_0^{2\pi} \frac{\tau \rho'}{\rho^3} dx,$$

this equality being obtained by integrating by parts. Therefore, by doing a similar calculation for  $\int_0^{2\pi} b_{-1}(x, \xi) dx$ , we see that the symbol of  $P_2$  is given by

$$p^{(2)}(x, \xi) = \frac{\xi}{L} - \frac{\lambda}{4\pi|\xi|} \int_0^{2\pi} \frac{\tau}{\rho} dx + \frac{\lambda L}{8\pi|\xi|^2} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_r + 2\tau}{\rho^2} dx + O_x(|\xi|^{-3}). \quad (34)$$

## 2.4. General eigenvalue asymptotics from the symbol

### 2.4.1. Self-adjointness

For  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \mathcal{V}$  and  $\tau$  real-valued, the operator  $\Lambda := \frac{1}{\rho} \operatorname{DN}_\lambda(\mathbb{D}; \tau)$  is self-adjoint and therefore has real spectrum. This follows from the fact that  $\operatorname{DN}_\lambda(\mathbb{D}; \tau)$  is self-adjoint and the following lemma applied to  $P = \operatorname{DN}_\lambda(\mathbb{D}; \tau)$ .

**Lemma 2.4.1.** *Let  $P$  be a self-adjoint pseudodifferential operator on  $L^2(\mathbb{S}^1; dx)$  and  $\rho > 0$  be a positive function on  $\mathbb{S}^1$  and denote  $M_{1/\rho}$  the operator of multiplication by  $\rho^{-1}$ . For  $f \in \operatorname{Diff}(\mathbb{S}^1)$ , define by  $K_f$  the composition operator  $K_f u = u \circ f$ . Defining*

$$g(x) = \frac{1}{L} \int_0^x \rho(t) dt \in \operatorname{Diff}(\mathbb{S}^1),$$

the operator

$$Q = K_g^{-1} M_{1/\rho} P K_g$$

is self-adjoint on  $L^2(\mathbb{S}^1; dx)$ .

PROOF. The operator  $K_g$  is an invertible isometry from  $L^2(\mathbb{S}^1; dx)$  to  $L^2(\mathbb{S}^1; \rho(x)/L dx)$ . Indeed, for  $u, v \in L^2(\mathbb{S}^1; dx)$ , we have

$$\begin{aligned} (K_g u, K_g v)_{L^2(\rho(x)/L dx)} &= \int_0^{2\pi} u(g(x)) v(g(x)) g'(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} u(x) v(x) dx \\ &= (u, v)_{L^2(dx)}. \end{aligned}$$

The operator  $M_{1/\rho} P$  is self adjoint on  $L^2(\mathbb{S}^1; \rho(x)/L dx)$ , hence we have

$$\begin{aligned} (u, Qv)_{L^2(dx)} &= (u, K_g^{-1} M_{1/\rho} P K_g v)_{L^2(dx)} \\ &= (K_g u, M_{1/\rho} P K_g v)_{L^2(\rho(x)/L dx)} \\ &= (M_{1/\rho} P K_g u, K_g v)_{L^2(\rho(x)/L dx)} \\ &= (K_g^{-1} M_{1/\rho} P K_g u, v)_{L^2(dx)} \\ &= (Qu, v)_{L^2(dx)}, \end{aligned}$$

proving that  $Q$  is self adjoint. □

## 2.4.2. General eigenvalue asymptotics

We have shown how to diagonalise the symbol down to any order. We can now deduce the spectral asymptotics of  $\Lambda$  from Proposition 2.3.1. Eigenvalue asymptotics for an elliptic pseudodifferential operator on a circle are discussed also in [Agr84, Theorem 3.1].

**Theorem 2.4.2.** *The eigenvalues of  $\Lambda$  are asymptotically double and admit a full asymptotic expansion given by*

$$\sigma_{2j} = \sigma_{2j-1} + O(j^{-\infty}) = \frac{j}{L} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi j^k} \int_0^{2\pi} p_{-k}^{(k)}(x, 1) dx + O(j^{-N})$$

for all  $N \geq 0$ . For  $N = 3$ , this yields

$$\sigma_{2j} = \frac{j}{L} - \frac{\lambda}{4\pi j} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\tau}{\rho} dx + \frac{\lambda L}{8\pi j^2} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\tau_r + 2\tau}{\rho^2} dx + O(j^{-3}). \quad (35)$$

PROOF. The fact that the eigenvalues admit a full asymptotic expansion follows from Propositions 2.3.1 and 2.3.3. Moreover, (35) follows from equation (34) and Proposition 2.3.1. It remains to show that the eigenvalues are asymptotically double. This will follow from Proposition 2.3.1 if we can show that, for all  $N \in \mathbb{N}$ , there exists a bounded operator  $U_N$

and a pseudodifferential operator  $P_N$  with symbol

$$p(x, \xi) = \sum_{m=0}^N p_{1-m}(\xi) + O_x(|\xi|^{-N})$$

such that  $p_{1-m}$  is an even function of  $\xi$  (since then  $p_{1-m}(j) = p_{1-m}(-j)$ ) and such that  $\Lambda U_N - U_N P_N$  is smoothing. To do so, it is sufficient to show that a symbol being hermitian is an invariant property of the diagonalisation procedure, see Definition (2.2.7). The claim will then follow since  $\Lambda$  is self-adjoint and hence all its eigenvalues must be real.

We know from Proposition 2.2.8 that the symbol of  $\Lambda$  is hermitian. In order to diagonalise the principal symbol, we conjugated by the Fourier integral operator  $\Phi$ . The resulting symbol is given by

$$b(x, \xi) \sim \sum_{m \leq 1} \tilde{a}_m(s(x), \xi)$$

where  $\tilde{a}_m$  is given by (25). It suffices to show that  $\tilde{a}_m$  is hermitian for all  $m$ . This is a consequence of the fact that

$$D_{\tilde{\eta}}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r_{m+\alpha}(x, \tilde{\eta} + R(x, y, \xi)(y - x)) \Big|_{\substack{\tilde{\eta} = \frac{\xi \rho(x)}{L} \\ y=x}} \quad (36)$$

is hermitian for all  $\alpha \geq 0$ . Indeed, by Leibniz's formula and (24) we have

$$\partial_y^{\beta} [R(x, y, \xi)(y - x)] \Big|_{y=x} = \frac{\xi}{(\beta + 1)L} \rho^{(\beta)}(x)$$

for all  $\beta \geq 0$ . Hermiticity of (36) then follows from Faà di Bruno's formula since each derivative in the second argument will come with a power of  $\xi$ , thus preserving the parity in the real and imaginary parts.

Let  $N \geq 0$  and suppose that  $\Lambda U_N - U_N P_N \in \Psi^{-\infty}$  as in the notation of Proposition 2.3.3 is such that the symbol  $p^{(N)}$  of  $P_N$  is hermitian. From (29), (30) and Lemma 2.2.9, we see that the symbol  $p^{(N+1)}$  of  $P_{N+1}$  is also hermitian. The fact that the spectrum is asymptotically double then follows from the previous discussion.  $\square$

## 2.5. Eigenvalue asymptotics

Let  $(\Omega, g)$  be a simply connected compact Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$ . We are now interested in finding the spectral asymptotic for the operator  $\text{DN}_{\lambda}(\Omega; \tau; 1)$  corresponding to the problem

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \lambda \tau u & \text{in } \Omega; \\ \partial_{\nu} u = \sigma u & \text{on } \Sigma; \end{cases}$$

which we refer as the parametric Steklov problem on  $\Omega$ . By the Riemann mapping theorem, there exists a conformal diffeomorphism  $\varphi$  which maps  $(\mathbb{D}, g_0)$  onto  $\Omega$  such that  $\varphi^* g = e^{2f} g_0$

for some smooth function  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Therefore, the parametric Steklov problem on  $(\Omega, g)$  is isospectral to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^{2f} \varphi^* \tau u & \text{in } \mathbb{D}; \\ \partial_\nu u = \sigma e^f u & \text{on } \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

In the notation of (23), we have

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^f dx = \frac{\text{per}_g(\Sigma)}{2\pi}.$$

We are now in a position to prove our main results about eigenvalue asymptotics.

**PROOF OF THEOREM 2.1.1.** The theorem follows directly from Theorem 2.4.2 for the existence of the complete asymptotic expansion. The fact that  $s_n$  is a polynomial in  $\lambda$  of degree at most  $n$  follows directly from Lemma 2.3.5. For the explicit values of  $s_{-1}$  and  $s_{-2}$  when  $\tau \equiv 1$ , we replace in (35) the values of  $\tau$  and  $\rho$  by the conformal factor. The second term in (35) is given by

$$\frac{\lambda}{4\pi j} \int_{\mathbb{S}^1} e^f dx = \frac{\lambda L}{2j}.$$

Finally, the third term is given by  $\frac{\lambda L}{8\pi j^2}(G + 4\pi)$  where

$$G := \int_{\mathbb{S}^1} \frac{(e^{2f})_r}{e^{2f}} dx = \int_{\mathbb{S}^1} \partial_\nu \log e^{2f} dx = 2 \int_{\mathbb{S}^1} \partial_\nu f dx.$$

By Green's theorem, we have

$$G = 2 \int_{\mathbb{D}} \Delta f dA.$$

Recall that the Gaussian curvature of  $(\mathbb{D}, \varphi^*g)$  is given by

$$K_{\varphi^*g} = -e^{-2f} \Delta f.$$

Hence, since  $\varphi^*K_g = K_{\varphi^*g}$  and  $\varphi^*dA_g = e^{2f} dA$ ,

$$\begin{aligned} G &= -2 \int_{\mathbb{D}} K_{\varphi^*g} e^{2f} dA \\ &= -2 \int_{\mathbb{D}} \varphi^*(K_g dA_g) \\ &= -2 \int_{\Omega} K_g dA_g. \end{aligned}$$

Combining everything and using the Gauss-Bonnet theorem yields

$$\begin{aligned} \frac{\lambda L}{8\pi j^2}(G + 4\pi) &= \frac{\lambda L}{4\pi j^2} \left( 2\pi - \int_{\Omega} K_g dA_g \right) \\ &= \frac{\lambda L}{4\pi j^2} \int_{\Sigma} k_g ds \end{aligned}$$

since  $\Omega$  is simply connected, and hence its Euler characteristic is 1. □

PROOF OF THEOREM 2.1.3. Let  $(\Omega, g)$  now be any Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$ . Suppose that  $\Sigma$  has  $\ell$  connected components  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$  and let  $\Omega_m$  be a smooth topological disk with a Riemannian metric that is isometric to  $\Omega$  in a neighborhood of  $\Sigma_m$ . Denote by  $\Omega_{\sharp}$  the union of the disks  $\Omega_m$ . From Lemma (2.2.4), we know that

$$\sigma_j(\lambda, \Omega) = \sigma_j(\lambda, \Omega_{\sharp}) + O(j^{-\infty}).$$

Since  $\Omega_{\sharp}$  is a union of disks, its spectrum is given by the union of each disk's spectrum. Applying Theorem (2.1.1) to each  $\Omega_m$ , and using that the parametric Steklov spectrum of a disjoint union of surfaces is the union of their spectra we see that the spectrum of  $\Omega$  is the union of  $\ell$  different sequences taking the form of equation (15). This is the statement of Theorem 2.1.3, as claimed. □

## 2.6. Spectral invariants

When the surface  $\Omega$  is simply connected, the search for spectral invariants is easier. From the first two terms of the eigenvalue asymptotic expansion, we can deduce uniquely the values of both  $L$  and  $\lambda$ . Hence, from the third term, we can deduce uniquely the value of  $\int_{\Sigma} k_g ds$  and it is a spectral invariant. By restricting ourselves to surfaces of constant curvature, we get the following.

**Corollary 2.6.1.** *Let  $(\Omega, g)$  be a simply connected compact Riemannian surface with smooth boundary  $\Sigma$ . Suppose further that the Gaussian curvature  $K$  of  $\Omega$  is constant, then the quantity*

$$K(\Omega) \text{ area}(\Omega)$$

*is a spectral invariant of the parametric Steklov problem on  $\Omega$ .*

In the multiply connected case, we need to introduce some definitions to talk about functions between two multisets. To determine the number of boundary components and the lengths of them, we will use methods from Diophantine approximation. This is in the spirit of [GPPS14], where they obtained those quantities as invariants of the Steklov problem with  $\lambda = 0$ . There, they had an asymptotic expansion of the form (17)–(18), where all the coefficients  $s_n$  were 0. However in order to obtain the number of boundary components and their lengths as spectral invariants, they need only that the second term is  $o(1)$ , which we do have.

Recovering  $\lambda$  as well as the total geodesic curvature of the boundary is more complicated and requires an algorithmic procedure to recover subsequences (which can be explicitly constructed) once we know the number of boundary components and the length of the largest one. We start by introducing terminology found in [GPPS14, Section 2.3]

**Definition 2.6.2.** Let  $A, B$  be two multiset of positive real numbers. We say that  $F : A \rightarrow B$  is *close* if it has the property that for every  $\varepsilon > 0$ , there are only finitely many  $x \in A$  with  $|F(x) - x| \geq \varepsilon$ . We say that  $F$  is an *almost-bijection* if for all but finitely many  $y \in B$ , the pre-image  $F^{-1}(y)$  consists in a single point.

For a finite set of positive real numbers  $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ , we denote by  $R(M)$  the multiset

$$R(M) := \{0, \dots, 0\} \cup \alpha_1 \mathbb{N} \cup \alpha_1 \mathbb{N} \cup \dots \cup \alpha_\ell \mathbb{N} \cup \alpha_\ell \mathbb{N},$$

where 0 is repeated  $\ell$  times and the union is understood in the sense of multisets, i.e. multiplicity is conserved.

**Proposition 2.6.3.** *Let  $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  be a finite multi-set of positive numbers. For  $N \in \mathbb{N}$ , let*

$$\Xi^{(N)} = \left\{ \left\{ \xi_j^{(m,N)} : j \in \mathbb{N} \right\} : 1 \leq m \leq \ell \right\}$$

be a set of sequences given by  $\xi_0^{(m,N)} = 0$  and such that for  $j \geq 1$ ,

$$\xi_{2j}^{(m,N)} = \xi_{2j-1}^{(m,N)} + O_N \left( j^{-N-1} \right) = j\alpha_m + \sum_{n=1}^N s_n^{(m)} j^{-n} + O_N \left( j^{-N-1} \right). \quad (37)$$

Then,  $M$  and the quantities  $s_n^{(m)}$  for  $1 \leq n \leq N$  are uniquely determined by the sequence  $S(\Xi^{(N)})$  defined as the reordering of the union of the sequences  $\xi^{(m,N)}$  in increasing order.

Let us first describe heuristically how the proof goes. In the first step, we simply show that [GPPS14, Lemmas 2.6 and 2.8] apply to this situation. This will allow us to recover  $M$  from  $S(\Xi^{(N)})$ , and we assume from then on that  $M$ , and therefore  $R(M)$ , are already known to be spectral invariants.

In the second step, we show that for any  $\alpha_m \in M$  which is not an integer multiple of another strictly smaller element of  $M$ , we can identify a subsequence along which  $S(\Xi^{(N)})_j = \xi_{k(j)}^{(m,N)}$  where  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  is a function that can be computed explicitly. For this, we use Dirichlet's simultaneous approximation theorem.

In the third step, we obtain the coefficients of those sequences  $\alpha_m$  that we decoupled in the previous step. Obviously, if  $\alpha_m$  appears only once in  $M$  this is trivial, the difficulty comes when  $\alpha_m$  has multiplicity.

In the fourth step, we proceed inductively and show that if  $\alpha_m$  is an integer multiple of some other  $\alpha_n \in M$ , but we already know the coefficients of the relevant sequences for  $\alpha_n$ , then we can apply the same procedures as in steps 2 and 3 to recover the coefficients of  $\xi^{(m,N)}$  for any  $N$ .

**PROOF. Step 1:** We obtain  $M$  from  $S(\Xi^{(N)})$ . From [GPPS14][Lemmas 2.6 and 2.8], it suffices to show that there is a close almost-bijection from  $R(M)$  to  $S(\Xi^{(N)})$ . Now, it is not hard to see that the map  $F : R(M) \rightarrow S(\Xi^{(N)})$  that maps  $R(M)_j$  to  $S(\Xi^{(N)})_j$  is a close

almost-bijection. Indeed, it follows from the definition of the sequences  $\xi^{(m,N)}$  that

$$S(\Xi^{(N)})_j = R(M)_j + O(j^{-1})$$

which implies that  $F$  is a close almost-bijection.

**Step 2:** Suppose without loss of generality that the smallest element of  $M$  is 1. Define on positive real numbers the strict partial order  $x \prec y$  if there is an integer  $n \geq 2$  such that  $y = nx$ , and denote by  $x \preceq y$  the non-strict version of this partial order, i.e. if  $n = 1$  is allowed. For any multiset  $U$  of positive real numbers, we say that  $x \in U$  is minimal in  $U$  if for all  $y \in U$ , either  $x \preceq y$ , or  $x$  and  $y$  are incomparable. Let  $I \subset \{1, \dots, \ell\}$  be defined as

$$I = \{1 \leq m \leq \ell : \alpha_m \text{ is minimal in } M\}.$$

We claim that there exist  $\delta > 0$  and subsets  $E_m \subset \mathbb{N}$  of infinite cardinality for each  $m \in I$  such that for all  $j \in E_m$ ,

$$[j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta] \cap R(M) = \underbrace{\{j\alpha_m, \dots, j\alpha_m\}}_{2\mu(m) \text{ times}}, \quad (38)$$

where  $\mu(m)$  is the multiplicity of  $\alpha_m$  in  $M$ .

Split  $M$  into  $M_1 \cup M_2$ , where  $M_1 \subset \mathbb{Q}$  and  $M_2 \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Let  $Q$  be the smallest common integer multiple of elements in  $M_1$ . Dirichlet's simultaneous approximation theorem states that there is an infinite subset  $E \subset \mathbb{N}$  such that for all  $q \in E$  and  $\alpha_m \in M_2$  there exists  $p_{q,m} \in \mathbb{N}$  such that

$$\left| \frac{Q}{\alpha_m} - \frac{p_{q,m}}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+1/\ell}}$$

or, equivalently,

$$|Qq - p_{q,m}\alpha_m| < \alpha_m q^{-1/\ell}.$$

This means that for all  $q \in E$ , there is an integer multiple of  $\alpha_m$  within  $q^{-1/\ell}$  of  $qQ$ . Note that for  $\alpha_m \in M_1$ , the integer multiple is actually exactly  $qQ$ . In that case we put  $p_{q,m} = Qq\alpha_m^{-1}$ . Set

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{|\alpha_m - n\alpha_k| : m \in I, \alpha_k \neq \alpha_m, n \in \mathbb{N}\},$$

and observe that  $\delta > 0$  from the assumption that  $\alpha_m$  is minimal in  $M$  for all  $m \in I$ . Assume that  $\alpha_\ell$  is the largest element of  $M$  and for  $m \in I$ , set

$$E_m := \left\{ p_{q,m} + 1 : q \in E, q^{-1/\ell} < \frac{\delta}{2\alpha_\ell} \right\}. \quad (39)$$



We claim that for all  $j \in E_m$ , (38) holds. Indeed, if  $\alpha_k \neq \alpha_m$  and  $n \in \mathbb{N}$ , we have

$$\begin{aligned} |j\alpha_m - n\alpha_k| &= |(p_{q,m} + 1)\alpha_m - (p_{q,k} + n')\alpha_k| \\ &\geq |\alpha_m - n'\alpha_k| - |p_{q,m}\alpha_m - p_{q,k}\alpha_k| \\ &\geq 2\delta - (\alpha_m + \alpha_k)q^{-1/\ell} \\ &> \delta. \end{aligned}$$

It follows that no integer multiple of  $\alpha_k \neq \alpha_m$  is within distance  $\delta$  of  $j\alpha_m$ , when  $j \in E_m$ . On the other hand, by definition of  $R(M)$ , and assuming without loss of generality that  $\delta < 1$ ,  $j\alpha_m$  is the only integer multiple of  $\alpha_m$  in the interval  $[j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta]$ , and this happens with multiplicity  $2\mu(m)$ .

**Step 3:** For  $m \in I$ , we recover the quantities  $s_n^{(k)}$  from  $S(\Xi^{(N)})$  for any  $n \leq N$  and for all  $k$  such that  $\alpha_k = \alpha_m$ .

Let  $j \in E_m$  and observe that for any  $N \in \mathbb{N}$ , the indices in the sequence  $S(\Xi^{(N)})$  for the elements in the interval  $[j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta]$  can be uniquely determined from  $R(M)$ , which is determined by  $S(\Xi^{(N)})$  as seen in the first step of this proof. It is also easy to see that by (37), for all  $k$  such that  $\alpha_m = \alpha_k$  and  $j \in E_m$  large enough, we have

$$\left\{ \xi_p^{(k,N)} : p \in \mathbb{N} \right\} \cap [j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta] = \left\{ \xi_{2j-1}^{(k,N)}, \xi_{2j}^{(k,N)} \right\}.$$

For any  $N \geq 1$ , consider the set

$$X_1^{(m,N)} = \{(x - j\alpha_m)j : j \in E_m, x \in S(\Xi^{(N)}) \cap [j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta]\}.$$

From the definition of  $E_m$ , we have

$$X_1^{(m,N)} = \bigcup_{k:\alpha_k=\alpha_m} \left\{ (\xi_{2j-1}^{(k,N)} - j\alpha_m)j, (\xi_{2j}^{(k,N)} - j\alpha_m)j \right\}_{j \in E_m}.$$

Consider the limit points of  $X_1^{(m,N)}$ . We claim that those points are exactly the values of  $s_1^{(k)}$  for which  $\alpha_k = \alpha_m$ . In fact, from the previous equation,  $X_1^{(m,N)}$  is a union of sequences and the claim follows from the fact that

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in E_m}} (\xi_{2j-1}^{(k,N)} - j\alpha_m)j = \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in E_m}} (\xi_{2j}^{(k,N)} - j\alpha_m)j = s_1^{(k)}.$$

Moreover, we can know the number of  $k'$  such that  $s_1^{(k')} = s_1^{(k)}$ , which we denote by  $\text{mult}(s_1^{(k)})$ . Indeed, by setting

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ |s_1^{(k)} - s_1^{(k')}| : s_1^{(k)} \neq s_1^{(k')}, \alpha_k = \alpha_m \right\},$$

we have that  $\frac{\text{mult}(s_1^{(k)})}{\mu(m)}$  is given by

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\left| \{(x - j\alpha_m)j \in X_1^{(m,N)} \cap (s_1^{(k)} - \varepsilon, s_1^{(k)} + \varepsilon) : j \in E_m, j \leq J\} \right|}{2|\{j \in E_m : j \leq J\}|}.$$

Note that from the construction, we cannot directly know which  $k$  is associated to each  $s_1^{(k)}$ , but without loss of generality we can label them in any way we choose since we know their multiplicity. For  $k$  with  $\alpha_k = \alpha_m$ , we construct the sequences

$$\eta_j^{(k,1)} = j\alpha_m + s_1^{(k)}j^{-1}$$

taking into account the multiplicity of  $s_1^{(k)}$ . We let  $\text{mult}(\eta_j^{(k,1)})$  be the number of such sequences identical to  $\eta_j^{(k,1)}$ . In this case,  $\text{mult}(\eta_j^{(k,1)}) = \text{mult}(s_1^{(k)})$ . Moreover,  $\eta_j^{(k,1)}$  is determined by  $S(\Xi^{(N)})$  for any  $N \geq 1$ .

Suppose now that we know  $s_1^{(k)}, \dots, s_T^{(k)}$  from  $S(\Xi^{(N)})$  for all  $N \geq T$  and  $k$  for which  $\alpha_k = \alpha_m$ , and consider the sequences

$$\eta_j^{(k,T)} = j\alpha_m + \sum_{n=1}^T s_n^{(k)}j^{-n}.$$

As previously, for  $N \geq T + 1$ , consider the set

$$X_{T+1}^{(k,N)} = \{(x - \eta_j^{(k,T)})j^{T+1} : j \in E_m, x \in S(\Xi^{(N)}) \cap [j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta]\}$$

which we can rewrite as

$$X_{T+1}^{(k,N)} = \bigcup_{k': \alpha_{k'} = \alpha_m} \left\{ (\xi_{2j-1}^{(k',N)} - \eta_j^{(k,T)})j^{T+1}, (\xi_{2j}^{(k',N)} - \eta_j^{(k,T)})j^{T+1} \right\}_{j \in E_m}.$$

We claim that the limit points of  $X_{T+1}^{(k,N)}$  are precisely the coefficients  $s_{T+1}^{(k')}$  such that  $\eta_j^{(k',T)} = \eta_j^{(k,T)}$  for all  $j \in \mathbb{N}$ . This follows from the fact that

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in E_m}} (\xi_{2j-1}^{(k',N)} - \eta_j^{(k,T)})j^{T+1} &= \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in E_m}} (\xi_{2j}^{(k',N)} - \eta_j^{(k,T)})j^{T+1} \\ &= \begin{cases} s_{T+1}^{(k')} & \text{if } \eta_j^{(k',T)} = \eta_j^{(k,T)}, \\ \pm\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

We can also deduce the multiplicity of each  $s_{T+1}^{(k)}$  in a similar fashion as before. It follows that we can construct the sequences

$$\eta_j^{(k,T+1)} = j\alpha_m + \sum_{n=1}^{T+1} s_n^{(k)}j^{-n}$$

and we know the multiplicity of each such sequence. By induction, we can then deduce any coefficient  $s_n^{(k)}$  from  $S(\Xi^{(N)})$  as long as  $N \geq n$ .

**Step 4:** We now turn our attention to  $m \notin I$ , and assume that we have already proved the proposition for all  $k$  such that  $\alpha_k \prec \alpha_m$ . Defining this time

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{ |\alpha_m - n\alpha_k| : \alpha_k \not\prec \alpha_m, n \in \mathbb{N} \}$$

and  $E_m$  as in (39), it follows from the same construction as in Step 2 that

$$[j\alpha_m - \delta, j\alpha_m + \delta] \cap R(M) = \underbrace{\{j\alpha_m, \dots, j\alpha_m\}}_{\mu \text{ times}},$$

where  $\mu = 2 \sum_{\alpha_k \preceq \alpha_m} \mu(k)$ . We observe that once again, the indices in the sequence  $S(\Xi^{(N)})$  of those elements are uniquely determined by  $R(M)$  for any  $N \geq 1$ . For every  $k$  such that  $\alpha_k \preceq \alpha_m$ , write  $r(k)$  to be the integer such that  $\alpha_m = r(k)\alpha_k$ . Defining  $X_1^{(m,N)}$  as in step 3, its limit points are now given by the values of  $\frac{s_1^{(k)}}{r(k)}$  for which  $\alpha_k \preceq \alpha_m$ . From the induction hypothesis, we know those values whenever  $r(k) > 1$ . Hence, we can disregard them. What is left are the values of  $s_1^{(k)}$  for which  $\alpha_k = \alpha_m$ . Proceeding in a similar manner as in step 3, but with

$$\eta_j^{(k,T+1)} = j\alpha_m + \sum_{n=1}^{T+1} s_n^{(k)} (r(k)j)^{-n}$$

and disregarding the values we already know, we are then able to recover recursively the values of  $s_n^{(k)}$  from  $S(\Xi^{(N)})$  for any  $n \leq N$  for each  $k$  with  $\alpha_k = \alpha_m$ . The set  $M$  is finite, hence our inductive procedure necessarily terminates, finishing the proof.  $\square$

Theorem 2.1.4 follows directly from Proposition 2.6.3.

PROOF OF THEOREM 2.1.4. Let  $N \in \mathbb{N}$  and for  $1 \leq m \leq \ell$ , let  $\xi^{(m,N)}$  and  $\Xi^{(N)}$  be as defined in the statement of Theorem 2.1.3. Since  $\sigma_j \sim S(\Xi^{(\infty)})_j$ , there exists a constant  $C_N$  such that for all  $j \geq 0$ ,

$$|\sigma_j - S(\Xi^{(N)})_j| \leq C_N j^{-N-1}. \quad (40)$$

We define a new set of sequences  $\tilde{\xi}^{(m,N)}$  by

$$\tilde{\xi}_j^{(m,N)} = \xi_j^{(m,N)} + \sigma_{\iota(m,j)} - \xi_j^{(m,N)} \quad (41)$$

where  $\iota : \{1, \dots, \ell\} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  is a bijective map such that

$$S(\Xi^{(N)})_{\iota(m,j)} = \xi_j^{(m,N)}.$$

By (40), we have

$$\tilde{\xi}_j^{(m,N)} = \xi_j^{(m,N)} + O_N(j^{-N-1}).$$

Therefore, the sequences  $\tilde{\xi}_j^{(m,N)}$  satisfy the hypotheses of Proposition 2.6.3 with  $M = \left\{ \frac{2\pi}{\text{per}(\Sigma_1)}, \dots, \frac{2\pi}{\text{per}(\Sigma_\ell)} \right\}$ . Letting  $\tilde{\Xi}^{(N)} = \left\{ \tilde{\xi}^{(1,N)}, \dots, \tilde{\xi}^{(\ell,N)} \right\}$ , it follows that  $S(\tilde{\Xi}^{(N)})$  determines  $M$  and the coefficients  $s_n^{(m)}$  for  $1 \leq m \leq \ell$  and  $n \leq N$ . By taking  $N$  arbitrarily large, we can recover any coefficient  $s_n^{(m)}$ . On the other hand, by (41), every  $\tilde{\xi}_j^{(m,N)}$  is simply an eigenvalue  $\sigma_j$ , and since  $\iota$  is a bijection,

$$S(\tilde{\Xi}^{(N)})_j = \sigma_j$$

for all  $j \geq 0$ . It follows that the spectrum of  $DN_\lambda$  is given by  $S(\tilde{\Xi}^{(N)})$  for any  $N \in \mathbb{N}$  and therefore determines the number of connected components of the boundary and their respective perimeters (from  $M$ ), as well as all the coefficients  $s_n^{(m)}$ .

In particular, from (16) we have

$$s_{-1}^{(m)}(\lambda; \Omega) = \frac{\lambda \operatorname{per}(\Sigma_m)}{4\pi},$$

allowing us to recover  $\lambda$ , and

$$s_{-2}^{(m)}(\lambda; \Omega) = \frac{\lambda \operatorname{per}(\Sigma_m)}{8\pi} \int_{\Sigma_m} k_g \, ds,$$

allowing us to recover the total geodesic curvature on each boundary component.  $\square$

We can now as well prove Theorem 2.1.5

**PROOF OF THEOREM 2.1.5.** Since the total geodesic curvature on each boundary component is a spectral invariant, the total integral

$$\int_{\Sigma} k_g \, ds = \sum_{m=1}^{\ell} \int_{\Sigma_m} k_g \, ds$$

is a spectral invariant. Applying the Gauss-Bonnet theorem, we get

$$\int_{\Sigma} k_g \, ds = 2\pi(2 - 2\gamma - \ell) - \int_{\Omega} K_g \, dA_g$$

where  $\gamma$  is the genus of  $\Omega$ . Since the number of boundary components  $\ell$  is a spectral invariant, we can deduce that the quantity

$$4\pi\gamma + \int_{\Omega} K_g \, dA_g$$

is also a spectral invariant of the parametric Steklov problem.  $\square$

**Remark 2.6.4.** It is impossible to completely decouple the genus and the average of the Gaussian curvature as spectral invariants from the eigenvalue asymptotic expansion since the addition of a handle far from the boundary changes the genus of  $\Omega$  but leaves the symbol of the Dirichlet-to-Neumann operator unchanged. However, a priori information on  $\Omega$ , such as being a domain of a specific space form of constant Gaussian curvature can yield additional information, as in Corollaries 2.1.6 and 2.1.7.

## Chapitre 3

# Asymptotics of sloshing eigenvalues for a triangular prism

par

Julien Mayrand<sup>1</sup>, Charles Sénécal<sup>1</sup> et Simon St-Amant<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>) Département de mathématiques et de statistique  
Université de Montréal  
C. P. 6128, Succ. Centre-ville  
Montréal, QC  
H3C 3J7  
Canada

Cet article n'a pas encore été soumis pour publication.

Chacun des auteurs a contribué à part égale à la publication.



RÉSUMÉ. Nous considérons le problème de ballottement en trois dimensions sur un prisme triangulaire dont les angles avec la surface de ballottement sont de la forme  $\frac{\pi}{2q}$ , où  $q$  est entier. Nous voulons trouver un développement asymptotique à deux termes de la fonction de compte des valeurs propres. Lorsque les deux angles sont  $\frac{\pi}{4}$ , nous calculons exactement le deuxième terme. Dans le cas général, nous conjecturons un développement asymptotique en construisant des quasimodes pour le problème et en calculant la fonction de compte de leurs valeurs propres. Ces quasimodes proviennent de solutions du problème de la plage en pente et correspondent à deux types de vagues, des vagues de bord et des vagues de surface. Le développement asymptotique de la fonction de compte des valeurs propres des quasimodes est liée de très proche à un problème de comptage des points entiers à l'intérieur d'une ellipse dont la frontière a été perturbée de façon presque aléatoire. La contribution des angles peut alors être détectée à travers cette perturbation.

**Mots clés :** Problème de ballottement, asymptotique spectrale, quasimode, problème de Steklov, coins, opérateur Dirichlet-vers-Neumann

ABSTRACT. We consider the three-dimensional sloshing problem on a triangular prism whose angles with the sloshing surface are of the form  $\frac{\pi}{2q}$ , where  $q$  is an integer. We are interested in finding a two-term asymptotic expansion of the eigenvalue counting function. When both angles are  $\frac{\pi}{4}$ , we compute the exact value of the second term. As for the general case, we conjecture an asymptotic expansion by constructing quasimodes for the problem and computing the counting function of the related quasi-eigenvalues. These quasimodes come from solutions of the sloping beach problem and correspond to two kinds of waves, edge waves and surfaces waves. The asymptotic expansion of the quasi-eigenvalues counting function is closely related to a lattice counting problem inside a perturbed ellipse where the perturbation is in a sense random. The contribution of the angles can then be detected through that perturbation.

**Keywords:** Sloshing problem, spectral asymptotic, Steklov problem, corners, Dirichlet-to-Neumann operator

## 3.1. Introduction

### 3.1.1. Steklov and the sloshing problem

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be a bounded domain with boundary  $\Gamma$  and let  $\rho \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$  be a non-negative weight function. The Steklov problem with weight  $\rho$  consists of finding all solutions  $u \in H^1(\Omega)$  and  $\sigma \in \mathbb{R}$  of the problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = \sigma \rho u & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (42)$$

where  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  and  $\partial_\nu$  denotes the exterior normal derivative on the boundary. The classical Steklov problem consists in having  $\rho \equiv 1$  on  $\Gamma$ .

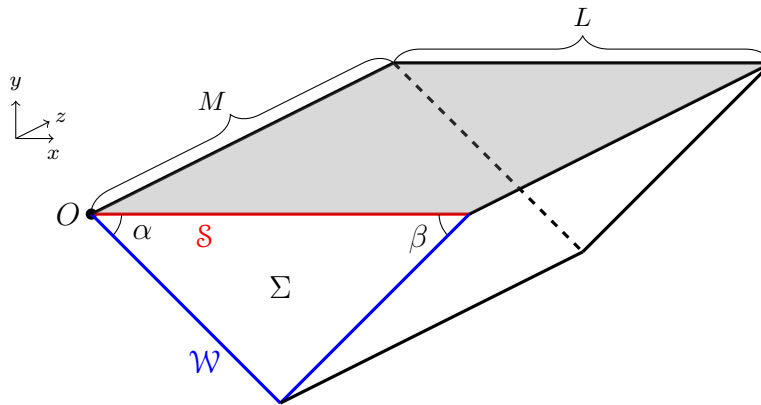
Our main interest is the sloshing problem. Given a partition of the boundary  $\Gamma = \Gamma_N \sqcup \Gamma_S$ , the sloshing problem consists of solving (42) with  $\rho \equiv 0$  on  $\Gamma_N$  and  $\rho \equiv 1$  on  $\Gamma_S$ . It is a mixed Steklov-Neumann boundary problem describing the oscillations of an ideal fluid in a tank shaped like  $\Omega$  with walls  $\Gamma_N$  and free surface (or sloshing surface)  $\Gamma_S$ . The admissible values of  $\sigma$  are called the sloshing eigenvalues.

### 3.1.2. Our problem

Let  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  be a triangle with a side  $\mathcal{S} = [0, L] \times \{0\}$  of length  $L$  making angles  $\alpha$  at  $(0, 0)$  and  $\beta$  at  $(L, 0)$  with the other sides. We denote the union of those two other sides by  $\mathcal{W}$ . Given  $M > 0$ , we consider the sloshing problem on the rectangular prism  $\Omega = \Sigma \times [0, M] \subset \mathbb{R}^3$  with sloshing surface  $\Gamma_S = \mathcal{S} \times [0, M]$  and walls

$$\Gamma_N = (\mathcal{W} \times [0, M]) \cup (\Sigma \times \{0\}) \cup (\Sigma \times \{M\}).$$

All this notation is summarized in Figure 3.1 where the sloshing surface is shaded in grey.



**Figure 3.1.** Example of domain  $\Omega$  with  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ .



The sloshing problem on  $\Omega$  consists of finding functions  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  such that

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu\Phi = 0 & \text{on } \Gamma_N, \\ \partial_\nu\Phi = \sigma\Phi & \text{on } \Gamma_S. \end{cases} \quad (43)$$

for some  $\sigma \in \mathbb{R}$ . It is a mixed Steklov-Neumann boundary problem describing the oscillations of an ideal fluid in a tank shaped like  $\Omega$ . The sloshing eigenvalues correspond to the eigenvalues of the Dirichlet-to-Neumann map  $\text{DN} : H^{1/2}(\Gamma_S) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_S)$  which maps a function  $u$  to  $\partial_\nu\tilde{u}$  where  $\tilde{u}$  is the solution to

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu\tilde{u} = 0 & \text{on } \Gamma_N, \\ \tilde{u} = u & \text{on } \Gamma_S. \end{cases}$$

It is a positive semi-definite self-adjoint operator with compact resolvent. As such, its eigenvalues form a discrete sequence

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \nearrow \infty$$

accumulating at infinity. By separating variables, it is sufficient to consider functions of the form

$$\Phi(x, y, z) = \cos(\lambda_n z)\varphi(x, y)$$

with  $\lambda_n = \frac{n\pi}{M}$  where  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda_n^2\varphi & \text{in } \Sigma, \\ \partial_\nu\varphi = 0 & \text{on } \mathcal{W}, \\ \partial_\nu\varphi = \sigma\varphi & \text{on } \mathcal{S}. \end{cases} \quad (44)$$

We are interested in the asymptotic expansion of the eigenvalue counting function

$$N(\sigma) := \#\{j \in \mathbb{N}_0 : \sigma_j < \sigma\}.$$

From [Agr06], we know that

$$N(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + o(\sigma^2).$$

This asymptotic does not capture the contribution from the angles  $\alpha$  and  $\beta$ . Our goal is to find a suitable second term in the asymptotic expansion for  $N(\sigma)$  which reveals how both angles affect the counting function. We will be more particularly interested in the case where  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$  for some integers  $q$  and  $r$  greater or equal to 1, but not both 1.

**Remark 3.1.1.** The case  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$  obviously does not result in a triangular prism and would actually give rise to an unbounded domain. However, the asymptotic behavior of the sloshing eigenvalues should only depend on a neighborhood of the sloshing surface. This

intuition is supported by the following computation. Consider the cuboid  $\Omega = [0, L] \times [0, R] \times [0, M] \subset \mathbb{R}^3$  with the sloshing surface corresponding to  $y = R$ . As above, we can separate variables to get eigenfunctions of the form  $\cos(\lambda_n z)\varphi(x, y)$  with  $\varphi$  satisfying (44). We can then separate variables again in the  $x$  direction to get eigenfunctions of the form

$$\Phi(x, y, z) = \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{M}z\right) Y(y)$$

where  $m$  and  $n$  are non-negative integers and the function  $Y$  satisfies  $Y'(0) = 0$ ,  $Y'(R) = \sigma Y(R)$  and

$$\frac{Y''}{Y} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 =: \mu^2.$$

It follows that  $Y(y) = \cosh(\mu y)$  and the eigenvalue is given by  $\sigma = \mu \tanh(\mu R)$ . As  $m$  and  $n$  get big, so does  $\mu$ , and  $\tanh(\mu R)$  quickly converges to 1. Hence,  $\sigma = \mu + O(e^{-\mu R})$  and the eigenvalues barely depend on  $R$ . The eigenvalue counting function is then given by

$$N(\sigma) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}_0^2 : \left(\frac{m\pi}{\sigma L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2 < 1 \right\} + o(\sigma) = \frac{LM}{4\pi} \sigma^2 + \frac{L+M}{2\pi} \sigma + o(\sigma).$$

This last expression comes from estimates on the Gauss circle problem (see [LW24] for example). Therefore, the asymptotic behavior of  $N(\sigma)$  does not depend on  $R$ .

**Remark 3.1.2.** Since the asymptotic behavior of the sloshing eigenvalues should only depend on a neighborhood of the sloshing surface, the results we will show on the asymptotic behavior of  $N(\sigma)$  should also be valid in the more general case where  $\mathcal{W}$  is a piecewise smooth curve  $y = w(x)$  with  $w(0) = w(L) = 0$ ,  $w(x) < 0$  for  $x \in (0, L)$ , and making the same angles  $\alpha$  and  $\beta$  with  $\mathcal{S}$ .

### 3.1.3. Motivation

The sloshing problem has its origins in the theory of hydrodynamics (see [Lam24, Chapter 9] for example). It describes the oscillations of an ideal fluid on the surface of a container, such as coffee in a cup. Modern results and references on the sloshing problem can be found in [KKM04] and [KMV02].

There has been recent interest into the Steklov problem (42), see [GP17] for a survey on the problem. The Steklov eigenvalues correspond to the eigenvalues of the Dirichlet-to-Neumann map which is often referred to as the voltage-to-current map. It is very closely related to the Calderón problem [FSU19] upon which lies electrical impedance tomography, used in geophysical and medical imaging.

If  $\partial\Omega$  and  $\rho$  are smooth, the Dirichlet-to-Neumann operator is a pseudodifferential operator and one can use pseudodifferential techniques to study its spectrum [GPPS14, LSA20, PS15, Roz79]. However, whenever  $\partial\Omega$  is not smooth (in the presence of corners for example), those techniques fail and other approaches have to be considered. The simplest example of  $\Omega$  without a smooth-boundary is a cuboid in  $\mathbb{R}^n$ . The eigenvalue counting function on

cuboids has been studied in [GLPS19] where they showed that it admits a two-term asymptotic where the second term accounts for the  $n - 2$  dimensional facets of the cuboid, e.g. the length of the edges in a regular cube. However, in the case of a cuboid, all the angles between the facets are the same right angles. Changing the angles should change the asymptotic and that is what we wish to quantify.

The problem we are considering stems from the work of Levitin, Parnovski, Polterovich and Sher in [LPPSa] and [LPPSb]. In both papers, their goal is to understand how angles inside a two dimensional curvilinear polygon affect its Steklov or sloshing eigenvalues. They started off by considering the same triangles  $\Sigma$  as we described in 3.1.2. Their goal was then to solve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Sigma, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on } \mathcal{W}, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \mathcal{S}. \end{cases} \quad (45)$$

This problem is exactly like the problem (44) with  $n = 0$ . They were able to show the following.

**Theorem 3.1.3** (Levitin, Parnovski, Polterovich, Sher [LPPSa], 2019). *Suppose that  $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ . Then the following asymptotic expansion holds for the eigenvalues of problem (45) as  $k \rightarrow \infty$ :*

$$\sigma_k L = \pi \left( k - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + o(1).$$

A key idea of their proof was to reduce the problem to angles of the form  $\frac{\pi}{2q}$  for  $q \in \mathbb{N}$ , which are referred to as exceptional angles. They then used domain monotonicity to show the result for arbitrary angles  $\alpha$  and  $\beta$  by bounding them from above and below by exceptional angles. Considering these exceptional angles allowed them to compute explicitly solutions from the sloping beach problem emanating from each corner which they glued together to obtain approximate solutions of (45) called quasimodes. Through careful analysis of the quasimodes, they were able to show that the related quasi-eigenvalues were close to real eigenvalues of problem (45) and approximated all of them.

We now aim to generalize their approach to three dimensions. By separating variables, we can bring everything back to two dimensions, but we are now solving for solutions of the Helmholtz equation with different eigenvalues  $\lambda_n^2$  rather than for harmonic functions.

### 3.1.4. Main results

Our first result concerns the case where  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$  and is obtained by finding explicitly the eigenfunctions.

**Theorem 3.1.4.** *The eigenvalue counting function of problem (43) with  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$  is given by*

$$N(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L + M(2\sqrt{2} + 1)}{2\pi}\sigma + o(\sigma).$$

For other values of  $\alpha$  and  $\beta$ , we were not able to find the eigenfunctions explicitly and it probably is unfeasible. Hence, we have to resort to new methods. Our idea is to construct quasimodes that are approximate solutions of problem (43). More specifically, our quasimodes will satisfy the eigenvalue condition on the sloshing surface, but rather than satisfy the Neumann condition on the walls, the normal derivative will decay exponentially with respect to their eigenvalue  $\sigma$ . Hence, the quasimodes will be very close to being eigenfunctions and we should expect the error between quasi-eigenvalues and real eigenvalues of the problem to converge to zero as they get large. We will use two kinds of quasimodes that we refer to as edge waves and surface waves. Their construction is presented in Section 3.3. Let  $N^e(\sigma)$  and  $N^s(\sigma)$  be the counting functions for the eigenvalues of the edge waves and surface waves respectively. Our main results then concern the asymptotic expansion of those counting functions. Before stating them, we need to introduce some quantities.

Let  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ . Define

$$\theta_\alpha(t) = -\sum_{j=1}^{q-1} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-t^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{1 - \cos \frac{j\pi}{q}}\right).$$

and define similarly  $\theta_\beta$  by substituting  $q$  by  $r$ . Furthermore, let  $\nu_{\alpha,\beta} = qr \pmod{2}$  and  $\kappa_{\alpha,\beta}$  be 0 if  $q$  and  $r$  share the same parity, and  $\frac{1}{2}$  otherwise. Then, we show the following two theorems.

**Theorem 3.1.5.** *The counting function  $N^s(\sigma)$  for the surface waves quasi-eigenvalues satisfies the following asymptotic expansion:*

$$N^s(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L - M}{2\pi}\sigma + \frac{\kappa_{\alpha,\beta}M}{\pi}\sigma + \frac{M\sigma}{\pi^2} \left( \int_0^1 [\theta_\alpha(t) + \theta_\beta(t)] dt \right) + o(\sigma).$$

**Theorem 3.1.6.** *The counting function  $N^e(\sigma)$  for the edge waves quasi-eigenvalues satisfies the following asymptotic expansion:*

$$N^e(\sigma) = \nu_{\alpha,\beta} \frac{M\sigma}{\pi} + \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{q}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2m+1)\alpha} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{r}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2\ell+1)\beta} + O(1).$$

Ideally, these quasi-eigenvalues would correspond to real eigenvalues of the sloshing problem. Proving that it is indeed the fact requires more analysis on the quasimodes which we discuss in Section 3.5. This leads us to conjecture the following.

**Conjecture 3.1.7.** *The eigenvalue counting function  $N(\sigma)$  of Problem (43) is given by*

$$N(\sigma) = N^s(\sigma) + N^e(\sigma) + o(\sigma).$$

Note that when  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , this coincides with what we got in Remark 3.1.1. Moreover, when  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , this conjecture coincides with the expression in Theorem 3.1.4. Although we are not able to prove Conjecture 3.1.7 for other angles, we provide numerical evidence supporting it in Section 3.5.

### 3.1.5. Our approach

Firstly, in Section 3.2, we compute explicitly the eigenfunctions and eigenvalues for the case where  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ . From those computations, we show Theorem 3.1.4. Then, in Section 3.3, using solutions coming from the theory of the sloping beach problem, we construct quasimodes for any angles  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ . These solutions arise in two forms that we refer to as edge waves and surface waves, corresponding to the discrete and continuous parts of the spectrum of the sloping beach problem (see [Urs52]). Using these quasimodes, we find suitable asymptotic formulas for  $N^e$  and  $N^s$  in Section 3.4, showing Theorems 3.1.6 and 3.1.5. Counting the eigenvalues coming from edge wave solutions is straightforward. However, counting the eigenvalues coming from surface wave solutions is more involved and we reduce the problem to that of counting integer points in a randomly perturbed ellipse. We discuss the theory of quasimodes and provide numerical evidence of our conjecture in Section 3.5.

### 3.1.6. Acknowledgments

The research of J.M. and C.S. was supported by NSERC's USRA, and was done as part of an internship at Université de Montréal, under the supervision of Iosif Polterovich. The research of S.St-A. was supported by NSERC's CGS-M and FRQNT's M.Sc. scholarship (B1X). This work is part of his M.Sc. studies at the Université de Montréal, under the supervision of Iosif Polterovich. Authors would like to thank Iosif Polterovich for useful discussions and guidance. They would like to thank Zeev Rudnick for the proof of Lemma 3.4.4 and introducing them to the theory of exponential sums. S.St-A. would also like to thank Thomas Davignon and Alexis Leroux-Lapierre for useful discussions.

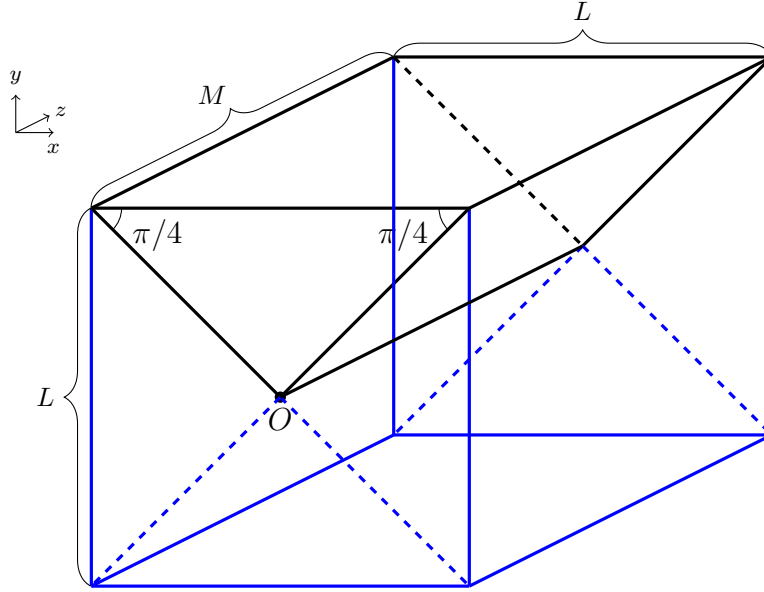
## 3.2. Explicit computation of the case $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

Consider the cuboid  $\tilde{\Omega} = [-L/2, L/2]^2 \times [0, M]$ . Let  $\tilde{\Gamma}_S \subset \partial\tilde{\Omega}$  denote the four faces of the cuboid with area  $LM$  and let  $\tilde{\Gamma}_N \subset \partial\tilde{\Omega}$  denote the two faces of the cuboid with area  $L^2$ . If  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is a solution of (43), then the function  $\tilde{\Phi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  obtained by reflecting evenly

$\Phi$  along a rectangular part of  $\Gamma_N$  three times satisfies

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\Phi} = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu \tilde{\Phi} = 0 & \text{on } \tilde{\Gamma}_N, \\ \partial_\nu \tilde{\Phi} = \sigma \tilde{\Phi} & \text{on } \tilde{\Gamma}_S. \end{cases} \quad (46)$$

We illustrate these reflections in Figure 3.2 (note that we changed the position of the origin  $O$  from Figure 3.1). Conversely, if  $\tilde{\Phi}$  is a solution of (46) that is symmetric along both planes spanned by the rectangular parts of  $\Gamma_N$ , then  $\Phi = \tilde{\Phi}|_\Omega$  is a solution of (43). Therefore, solving (43) is equivalent to finding solutions with even symmetries along these planes. In other words, the functions must be invariant under the change of variables  $(x,y) \mapsto (y,x)$  and  $(x,y) \mapsto (-y, -x)$ . Finding such solutions is much easier since we can separate variables completely.



**Figure 3.2.** Reflections of  $\Omega$  along  $\Gamma_N$  to get  $\tilde{\Omega}$ .

Let  $\lambda_n = \frac{n\pi}{M}$  for  $n \in \mathbb{N}_0$ . The corresponding eigenfunctions then take the form

$$\tilde{\Phi}(x,y,z) = \varphi(x,y) \cos(\lambda_n z)$$

where  $\varphi(x,y)$  is given by one of the functions in Table 1. One can check that all these eigenfunctions satisfy  $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) = \varphi(-y, -x)$ .

Let  $N^{(i)}(\sigma)$  be the number of eigenvalues of problem (43) smaller than  $\sigma$  corresponding to eigenfunctions in the  $i$ -th line of Table 1 for  $i = 1, \dots, 5$ . First, since there is only one function of type 5,  $N^{(5)}(\sigma) = O(1)$ . Second, since the hyperbolic tangents and cotangents

Eigenfunction $\varphi$	Conditions on $\chi$ and $n$	Eigenvalue
$\cosh\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}x\right)\cosh\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}y\right)$	$n \geq 0$	$\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}\tanh\left(\frac{\lambda_n}{2\sqrt{2}}L\right)$
$\sinh\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}x\right)\sinh\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}y\right)$	$n > 0$	$\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}\coth\left(\frac{\lambda_n}{2\sqrt{2}}L\right)$
$\cos(\chi x)\cosh(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2}y)$ + $\cos(\chi y)\cosh(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2}x)$	$n \geq 0$ $-\chi \tan \frac{\chi L}{2} = \sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \tanh\left(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \frac{L}{2}\right)$	$-\chi \tan \frac{\chi L}{2}$
$\sin(\chi x)\sinh(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2}y)$ + $\sin(\chi y)\sinh(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2}x)$	$n \geq 0$ $\chi \cot \frac{\chi L}{2} = \sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \coth\left(\sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \frac{L}{2}\right)$	$\chi \cot \frac{\chi L}{2}$
$xy$	$n = 0$	$\frac{2}{L}$

**Table 1.** Eigenfunctions  $\varphi(x,y)$  obtained by separation of variables that are symmetric with respect to  $y = x$  and  $y = -x$ .

quickly converge to 1, we have

$$N^{(1)}(\sigma) = N^{(2)}(\sigma) = \frac{\sqrt{2}M}{\pi}\sigma + O(1).$$

We can rewrite the third condition on  $\chi$  and  $n$  as

$$\chi = \frac{\pi}{L} \left( -\frac{2}{\pi} \arctan \left[ \sqrt{1 + (\lambda_n/\chi)^2} \tanh \left( \sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \frac{L}{2} \right) \right] + 2m \right) \quad (47)$$

for  $m \in \mathbb{N}_0$ . Similarly, the fourth condition is given by

$$\chi = \frac{\pi}{L} \left( -\frac{2}{\pi} \arctan \left[ \sqrt{1 + (\lambda_n/\chi)^2} \coth \left( \sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} \frac{L}{2} \right) \right] + (2m + 1) \right) \quad (48)$$

where again  $m \in \mathbb{N}_0$ . We only consider the positive solutions of  $\chi$  as the negative solutions give rise to the same eigenfunctions. When  $m = 0$ , equation (47) admits no solution  $\chi > 0$ . Notice that the hyperbolic tangents and cotangents quickly converge to 1 as

$$\sigma = \sqrt{\chi^2 + \lambda_n^2} + O(e^{-c\sigma}) \quad (49)$$

gets big, and hence the solutions of both equations (47) and (48) are exponentially close to the solutions of

$$\chi = \frac{\pi}{L} \left( m - \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{1 + (\lambda_n/\chi)^2} \right)$$

for  $m \in \mathbb{N}$ , where the even values of  $m$  account for (47) and the odd values account for (48). Plugging this expression into (49) yields

$$\sigma^2 = \left( \frac{\left( m - \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{1 + (\lambda_n/\chi)^2} \right) \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{M} \right)^2 + O(e^{-c\sigma}). \quad (50)$$

Again by using (49), we have

$$\frac{1}{1 + (\lambda_n/\chi)^2} = 1 - (\lambda_n/\sigma)^2 + O(e^{-c\sigma})$$

and therefore

$$\arctan \sqrt{1 + (\lambda_n/\chi)^2} = -\arctan \sqrt{1 - (\lambda_n/\sigma)^2} + \frac{\pi}{2} + O(e^{-c\sigma}).$$

By plugging this relation into (50) and including the  $\frac{\pi}{2}$  into the integer  $m$ , it follows that the eigenvalues  $\sigma$  of type 3 and 4 are exponentially close to the solutions of

$$\sigma^2 = \left( \frac{\left( m + \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{1 - (\lambda_n/\sigma)^2} \right) \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{M} \right)^2 \quad (51)$$

for  $m \geq 0$  and  $n \geq 0$ . In Section 3.4, we show how to count the number of solutions of such an equation. Theorem 3.1.4 then follows from those calculations.

It is important to note the behavior of the eigenfunctions in Table 1. We can ignore the singular solution  $xy$  since it doesn't contribute significantly to  $N(\sigma)$ . The first two functions are concentrated in the corners of the square  $[-L/2, L/2]^2$ . Hence, the corresponding solutions  $\Phi$  on  $\Omega$  are concentrated on the edges of the sloshing surface that have length  $M$ . It makes sense to call such solutions *edge waves*. On the other hand, the third and fourth solutions are concentrated on the edge of the square  $[-L/2, L/2]^2$  where they oscillate. Therefore, the corresponding solutions  $\Phi$  on  $\Omega$  oscillate on the whole sloshing surface, but vanish fast inside  $\Omega$ . In contrast to the edge waves, we refer to those solutions as *surface waves*.

Hence, in order to approximate solutions on a domain  $\Omega$  with angles  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ , we have to consider both kinds of waves. In the next section, we show how to construct these solutions for each type of wave.

### 3.3. Construction of quasimodes

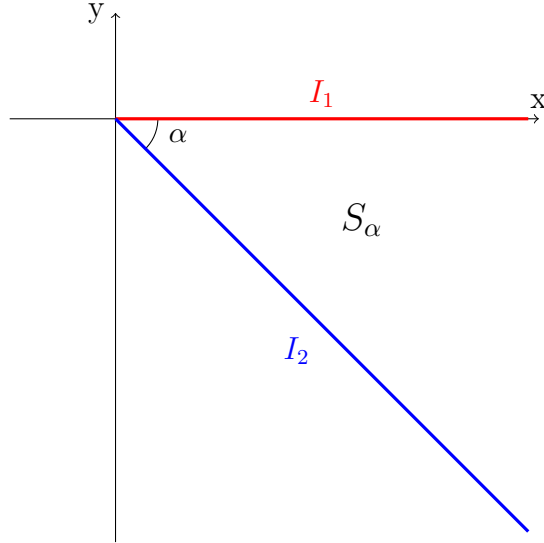
In order to approximate solutions of the sloshing problem, we are going to glue together solutions of a similar problem emanating from both corners. The functions we obtain are not exactly eigenfunctions for our problem. Nonetheless, they give rise to eigenvalues that should be close to the actual eigenvalues. We refer to them as quasi-eigenvalues. We discuss the theory of quasimodes in Section 3.5. The functions we use arise from the solutions of the sloping beach problem which has both discrete and continuous spectrum (see [Urs52] and [Eva89]). We refer to the solutions corresponding to the discrete part of the spectrum as *edge waves* and those corresponding to the continuous part as *surface waves*. We construct quasimodes corresponding to both kind of waves.



Note that although the spectrum corresponding to surface waves is continuous, the resulting quasi-eigenvalues will be discrete, since we will get “gluing” conditions in order for our resulting approximate solutions to be sufficiently smooth.

### 3.3.1. Sloping beach problem

Consider the angular sector  $S_\alpha = \{-\alpha \leq \theta \leq 0\}$  in the  $xy$ -plane as illustrated in Figure 3.3 and let  $\Omega_\alpha = S_\alpha \times [0, M]$  be a sloping beach domain. The water surface is given by



**Figure 3.3.** The angular sector  $S_\alpha$ .

$I_S = I_1 \times [0, M]$  and the bottom of the beach is given by  $I_N = I_2 \times [0, M]$  where  $I_1 = \{\theta = 0\}$  and  $I_2 = \{\theta = -\alpha\}$ . The sloping beach problem corresponds to finding a velocity potential  $\Phi : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\Phi$  is harmonic inside  $\Omega_\alpha$ , satisfies Neumann boundary conditions on  $I_N$  and the Steklov boundary condition  $\partial_\nu \Phi = \sigma \Phi$  on  $I_S$ . By separating variables, we get that  $\Phi = \varphi(x, y) \cos \lambda_n z$  with  $\lambda_n = \frac{n\pi}{M}$  and  $\varphi$  satisfying

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \lambda_n^2 \varphi & \text{in } S_\alpha, \\ \partial_\nu \varphi = 0 & \text{on } I_2, \\ \partial_\nu \varphi = \sigma \varphi & \text{on } I_1. \end{cases} \quad (52)$$

We will create an approximate solution of (44) by gluing solutions from the sloping beach problem (52) coming from the corners  $\alpha$  and  $\beta$ . The solution coming from angle  $\alpha$  will need to meet smoothly with the solution coming from angle  $\beta$ , and both solutions will have to give rise to the same eigenvalue. This gluing condition will then determine the possible quasi-eigenvalues.

### 3.3.2. Edge wave solutions of the sloping beach problem

Let  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  and  $n \in \mathbb{N}_0$ . The edge wave solutions of the sloping beach problem (52) given by Ursell [Urs52] are as follows. For  $0 \leq m \leq \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , let

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}(x,y) = & e^{-\lambda_n(x \cos \alpha - y \sin \alpha)} + \sum_{j=1}^m A_{jm} \left( e^{-\lambda_n(x \cos(2j-1)\alpha + y \sin(2j-1)\alpha)} + \right. \\ & \left. + e^{-\lambda_n(x \cos(2j+1)\alpha - y \sin(2j+1)\alpha)} \right) \end{aligned}$$

where  $A_{jm} = (-1)^j \prod_{r=1}^j \frac{\tan(m-r+1)\alpha}{\tan(m+r)\alpha}$ . One can check that  $\varphi_{nm}$  solves (52) with

$$\sigma_{nm} = \lambda_n \sin(2m+1)\alpha.$$

Notice that for  $m \neq \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2}$ , the solution  $\varphi_{nm}$  quickly vanishes outside the corner and faster as  $n$  gets large. However, for  $m = \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2}$ , since  $\cos(2m+1)\alpha = 0$ , we see that  $\varphi_{nm}(x,0) = A_{mm} + O(e^{-c\lambda_n x})$  for  $x$  outside of the corner. This only happens if  $\alpha = \frac{\pi}{2(2m+1)}$ . Hence, given that  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$ , there is a nonvanishing solution if and only if  $q$  is odd.

### 3.3.3. Edge wave quasimodes

We use the edge wave solutions of the sloping beach problem to construct solutions for the sloshing problem. To do so, we aim to glue together solutions coming from each corner. Notice that if a solution vanishes quickly outside its corresponding corner, we don't need to glue a solution coming from the other corner since it'll simply correspond to the zero solution near the other corner. However, if a solution does not vanish, then we have to be careful since there might not be a solution coming from the other corner for that eigenvalue.

Let  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ . Denote by  $\varphi_{nm}^\alpha$  (respectively  $\varphi_{nm}^\beta$ ) the edge wave solution of the sloping beach problem coming from angle  $\alpha$  with eigenvalue  $\sigma_{nm}^\alpha = \lambda_n \sin(2m+1)\alpha$  for  $0 \leq m < \frac{q-1}{2}$ .

If  $q$  is even, every  $\varphi_{nm}^\alpha(x,y)$  vanishes exponentially fast outside the corner  $\alpha$ , and therefore we can consider them as quasimodes individually. The same applies if  $r$  is even for the solutions coming from angle  $\beta$  that are given in  $\Sigma$  by  $\varphi_{n\ell}^\beta(L-x,y)$  with eigenvalue  $\sigma_{n\ell}^\beta = \lambda_n \sin(2\ell+1)\beta$  for  $0 \leq \ell < \frac{r-1}{2}$ .

If  $q$  is odd, then as above the solution  $\varphi_{nm}^\alpha$  is a valid quasimode as long as  $m \neq \frac{q-1}{2}$ . However, when  $m = \frac{q-1}{2}$ , the solution  $\varphi_{nm}^\alpha$  tends to  $A_{mm}^\alpha$  on the surface  $y = 0$  with a corresponding eigenvalue  $\lambda_n$ . In order to get a valid quasimode, there should be a non-zero solution coming from the corner  $\beta$  with the same eigenvalue. This is only possible if  $r$  is also odd. In that case, we consider the quasimode

$$\psi_n(x,y) = A_{\ell\ell}^\beta \varphi_{nm}^\alpha(x,y) + A_{mm}^\alpha \varphi_{n\ell}^\beta(L-x,y) - A_{mm}^\alpha A_{\ell\ell}^\beta e^{\lambda_n x}$$

where  $\ell = \frac{r-1}{2}$ . The last term is present so that  $|\partial_\nu \psi_n|$  is small on all  $\mathcal{W}$ . We will use a similar trick for the surface wave quasimodes.

In short, given  $n \in \mathbb{N}$ , we constructed  $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$  and  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  quasimodes concentrated in the corners  $\alpha$  and  $\beta$  respectively, as well as an additional quasimode if both  $q$  and  $r$  are odd.

### 3.3.4. Surface wave solutions of the sloping beach problem

Let us now construct surface wave solutions of the sloping beach problem. To do so, we generalize the method used in [LPPSa]. By rescaling in the  $z$  variable and by setting  $\mu := \lambda_n/\sigma$ , the problem (52) is equivalent to solving

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \mu^2 \varphi & \text{in } S_\alpha, \\ \partial_\nu \varphi = 0 & \text{on } I_2, \\ \partial_\nu \varphi = \varphi & \text{on } I_1. \end{cases} \quad (53)$$

However, recall that we are still solving to find the possible values of  $\sigma$  and although it doesn't appear in the last formulation, it is actually hidden in  $\mu$ .

Let  $\xi = -\pi/q$ , and for  $a, b \in \mathbb{R}$ , let  $g_{a,b}$  denote the function

$$g_{a,b}(x,y) = e^{x \cos(a) + y \sin(a)} e^{i\sqrt{1-\mu^2}(x \cos(b) + y \sin(b))}.$$

We define the linear operators  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  by

$$(\mathcal{A}g_{a,b})(x,y) := e^{x \cos(-a+\xi) + y \sin(-a+\xi)} e^{i\sqrt{1-\mu^2}(x \cos(-b+\xi) + y \sin(-b+\xi))} = g_{-a+\xi, -b+\xi}(x,y)$$

and

$$(\mathcal{B}g_{a,b})(x,y) := C_{a,b} e^{x \cos(a) - y \sin(a)} e^{i\sqrt{1-\mu^2}(x \cos(b) - y \sin(b))} = C_{a,b} g_{-a, -b}(x,y)$$

where

$$C_{a,b} = \frac{\sin a + i\sqrt{1-\mu^2} \sin b - 1}{\sin a + i\sqrt{1-\mu^2} \sin b + 1}.$$

For an arbitrary function  $u$  on  $S_\alpha$ , we define its Steklov defect by

$$\text{SD}(u) := (\partial_\nu u - u)|_{I_1}.$$

Note that  $\text{SD}(u) = 0$  if and only if  $u$  satisfies the Steklov condition on  $I_1$  with eigenvalue 1. By simple calculations, one can show that these operators have the following useful properties.

**Proposition 3.3.1.** *Let  $g$  be as above. We have*

- (1)  $(g - \mathcal{A}g)|_{I_2} = 0$ ,
- (2)  $\partial_\nu(g + \mathcal{A}g)|_{I_2} = 0$ ,
- (3)  $\text{SD}(g + \mathcal{B}g) = 0$ .

We will use these properties to construct a suitable function on  $S_\alpha$ . Let  $f_0(x,y) = e^y e^{-i\sqrt{1-\mu^2}x}$ , i.e.  $f_0$  is given by  $g_{\frac{\pi}{2},\pi}$ . For  $1 \leq m \leq 2q-1$ , we construct the functions

$$f_m = \begin{cases} \mathcal{A}f_{m-1} & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \mathcal{B}f_{m-1} & \text{if } m \text{ is even.} \end{cases}$$

Finally, we let

$$v_\alpha = \sum_{m=0}^{2q-1} f_m.$$

The function  $v_\alpha$  is our main interest. In fact, it is a solution of (53)!

**Theorem 3.3.2.** *The function  $v_\alpha$  as defined above satisfies  $\Delta v_\alpha = \mu^2 v_\alpha$  in  $S_\alpha$ , the Neumann condition on  $I_2$  and  $\text{SD}(v_\alpha) = 0$ . In other words, it is a solution of (53).*

PROOF. First off, we can see that for any choice of  $a, b \in \mathbb{R}$ , we have

$$\Delta g_{a,b} = \left[ \mu^2 + 2i\sqrt{1-\mu^2} \cos(a-b) \right] g_{a,b}.$$

Since  $f_0 = g_{\frac{\pi}{2},\pi}$ , we have  $\Delta f_0 = \mu^2 f_0$ . Both  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  act on  $g_{a,b}$  by scaling and modifying the coefficients  $a$  and  $b$ , but keep the value of  $|a-b|$  unchanged. Then since  $f_m$  is obtained by consecutively applying  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  on  $f_0$ , we also have  $\Delta f_m = \mu^2 f_m$  for all  $m$ . By linearity, it then follows that  $\Delta v_\alpha = \mu^2 v_\alpha$ .

For the Neumann condition, we see that we can write  $v_\alpha$  as

$$v_\alpha = \sum_{m=0}^{q-1} (f_{2m} + f_{2m+1}) = \sum_{m=0}^{q-1} (f_{2m} + \mathcal{A}f_{2m})$$

and therefore, by Proposition 3.3.1,

$$\partial_\nu v_\alpha|_{I_2} = \sum_{m=0}^{q-1} \partial_\nu (f_{2m} + \mathcal{A}f_{2m})|_{I_2} = 0.$$

It remains to show that  $\text{SD}(v_\alpha) = 0$ . We now write  $v_\alpha$  as

$$v_\alpha = f_0 + \sum_{m=1}^{q-1} (f_{2m-1} + f_{2m}) + f_{2q-1} = f_0 + \sum_{m=1}^{q-1} (f_{2m-1} + \mathcal{B}f_{2m-1}) + f_{2q-1}$$

and therefore, by Proposition 3.3.1 and linearity of the Steklov defect,

$$\text{SD}(v_\alpha) = \text{SD}(f_0) + \text{SD}(f_{2q-1}).$$

Since  $f_0 = e^y e^{-i\sqrt{1-\mu^2}x}$ , we easily see that  $\text{SD}(f_0) = 0$ . Let us now show that  $\text{SD}(f_{2q-1}) = 0$ . For any choice of  $a$  and  $b$ ,

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})g_{a,b} = C_{-a+\xi, -b+\xi} g_{a-\xi, b-\xi}.$$

Hence, since  $f_{2q-1} = \mathcal{A}(\mathcal{BA})^{q-1} f_0 = \mathcal{A}(\mathcal{BA})^{q-1} g_{\frac{\pi}{2}, \pi}$ , we get

$$f_{2q-1} = \mathcal{A} \left[ \left( \prod_{j=1}^{q-1} C_{-\frac{\pi}{2}+j\xi, -\pi+j\xi} \right) g_{\frac{\pi}{2}-(q-1)\xi, \pi-(q-1)\xi} \right] = \gamma(\xi) g_{q\xi-\frac{\pi}{2}, q\xi-\pi} \quad (54)$$

where

$$\gamma(\xi) := \prod_{j=1}^{q-1} C_{-\frac{\pi}{2}+j\xi, -\pi+j\xi}.$$

Since  $\xi = -\pi/q$ , we get  $f_{2q-1} = \gamma(\xi) g_{-\frac{3\pi}{2}, -2\pi} = \gamma(\xi) e^y e^{i\sqrt{1-\mu^2}x}$  and thus  $\text{SD}(f_{2q-1}) = 0$ . It follows that  $\text{SD}(v_\alpha) = 0$ .  $\square$

In the previous proof, we started to compute  $f_{2q-1}$ . Moving forward, we will need its exact expression.

**Lemma 3.3.3.** *The function  $f_{2q-1}$  is given by  $\gamma(\xi) e^y e^{i\sqrt{1-\mu^2}x}$  where*

$$\gamma(\xi) = (-1)^{q-1} \exp \left[ 2i \sum_{j=1}^{q-1} \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{\cos \frac{j\pi}{q} - 1} \right) \right].$$

PROOF. The expression of  $f_{2q-1}$  follows from (54). Moreover,

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \prod_{j=1}^{q-1} \frac{\sin(-\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{q}) + i\sqrt{1-\mu^2} \sin(-\pi - \frac{j\pi}{q}) - 1}{\sin(-\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{q}) + i\sqrt{1-\mu^2} \sin(-\pi - \frac{j\pi}{q}) + 1} \\ &= \prod_{j=1}^{q-1} \frac{-\cos \frac{j\pi}{q} + i\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q} - 1}{-\cos \frac{j\pi}{q} + i\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q} + 1} \\ &= (-1)^{q-1} \prod_{j=1}^{q-1} \frac{\cos \frac{j\pi}{q} + i\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q} - 1}{\cos \frac{j\pi}{q} - i\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q} - 1} \end{aligned}$$

where we have reordered the terms in the numerator by  $j \mapsto q-j$  to get the last expression.

The denominator is the complex conjugate of the numerator. Therefore,  $|\gamma(\xi)| = 1$  and

$$\arg \gamma(\xi) = (q-1)\pi + \sum_{j=1}^{q-1} 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{\cos \frac{j\pi}{q} - 1} \right).$$

The claim readily follows.  $\square$

**Lemma 3.3.4.** *On the boundary  $I_1$ , the solution  $v_\alpha(x, y)$  takes the form*

$$v_\alpha(x) = e^{-i\sqrt{1-\mu^2}x} + \gamma(\xi) e^{i\sqrt{1-\mu^2}x} + \text{decaying exponentials}.$$

PROOF. On the surface  $I_1$ , the function  $v_\alpha$  is a linear combination of the functions

$$g_{a,b}(x, 0) = e^{x \cos(a)} e^{i\sqrt{1-\mu^2}x \cos(b)}$$

for  $a = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \frac{j\pi}{q}\right)$  where  $j \in \{0, \dots, q\}$ . The claim follows from the fact that for such  $j$ ,

$$\cos \left[ \pm \left( \frac{\pi}{2} + \frac{j\pi}{q} \right) \right] \leq 0$$

with equality if and only if  $j = 0$  or  $j = q$ , which corresponds to the terms  $f_0$  and  $f_{2q-1}$ .  $\square$

### 3.3.5. Surface wave quasimodes

We can now use the surface wave solutions of the sloping beach problem to construct approximate solutions (quasimodes) for the sloshing problem on  $\Sigma$ . Let  $\sigma$  be a real scaling factor. We consider the functions  $v_\alpha(\sigma x)$  and  $v_\beta(\sigma(L-x))$  corresponding to solutions of the sloping beach problem starting off from the angles  $\alpha$  and  $\beta$  respectively. Let  $v_\alpha^p$  and  $v_\alpha^d$  correspond to the principal part and decaying parts of  $v_\alpha$  on the boundary  $I_1$  (as in Lemma 3.3.4). In order for the sloping beach solutions to meet smoothly on  $\mathcal{S}$ , we want their principal parts to match. Therefore, we look for  $\sigma$  such that

$$v_\alpha^p(\sigma x) = Qv_\beta^p(\sigma(L-x)). \quad (55)$$

for some non-zero  $Q \in \mathbb{C}$ . We call this the quantization condition. It fixes the values of  $\sigma$  and leads to the quasimodes on  $\Sigma$  given by

$$g_\sigma(x,y) = v_\alpha(\sigma x, \sigma y) + Qv_\beta^d(\sigma(L-x), \sigma y) = Qv_\beta(\sigma(L-x), \sigma y) + v_\alpha^d(\sigma x, \sigma y).$$

Notice that  $g_\sigma$  satisfies  $\Delta g_\sigma = \mu^2 \sigma^2 g_\sigma = \lambda_n^2 g_\sigma$  in  $\Sigma$  and  $\partial_\nu g_\sigma = \sigma g_\sigma$  on  $\mathcal{S}$ , but  $\partial_\nu g_\sigma \neq 0$  on  $\mathcal{W}$  and as such it is not exactly a solution of (44). However, we have  $\partial_\nu v_\alpha = 0$  on the side making the angle  $\alpha$  with  $\mathcal{S}$ , as well as  $\partial_\nu v_\beta = 0$  on the side making the angle  $\beta$ . The error term in  $\partial_\nu g_\sigma$  on each side of  $\mathcal{W}$  therefore comes from the decaying part of the solution coming from the other side, which vanishes exponentially. Hence, The solution  $g_\sigma$  is very close to being a solution of (44).

## 3.4. Counting the quasi-eigenvalues

Let  $N^e$  and  $N^s$  denote the counting functions for the edge wave and surface wave quasi-eigenvalues respectively. The total counting function for quasi-eigenvalues then becomes  $N^e + N^s$ .

### 3.4.1. Counting the edge wave quasi-eigenvalues

Recall that for  $0 \leq m < \frac{q-1}{2}$  the quasi-eigenvalue of the edge wave quasimode  $\varphi_{nm}^\alpha(x,y)$  coming from the corner  $\alpha$  is  $\sigma_{nm}^\alpha = \frac{n\pi}{M} \sin(2m+1)\alpha$ . Therefore, the eigenvalue counting function for one such quasimode is given by

$$\#\{n \in \mathbb{N} : \sigma_{nm}^\alpha < \sigma\} = \frac{M\sigma}{\pi \sin(2m+1)\alpha} + O(1).$$

For  $0 \leq \ell < \frac{r-1}{2}$ , we have a similar expression for the eigenvalue counting function of each edge wave quasimode  $\varphi_{n\ell}^\beta(L-x, y)$  coming from the corner  $\beta$ .

If  $q$  and  $r$  are both odd, we constructed another edge wave quasimode with eigenvalue  $\frac{n\pi}{M}$ . Hence, if we let  $\nu_{\alpha,\beta} := qr \pmod{2}$ , the total eigenvalue counting function for the edge wave quasimodes is given by

$$N^e(\sigma) = \nu_{\alpha,\beta} \frac{M\sigma}{\pi} + \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{q}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2m+1)\alpha} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{r}{2}-1 \rfloor} \frac{M\sigma}{\pi \sin(2\ell+1)\beta} + O(1)$$

which is precisely the statement of Theorem 3.1.6.

An interesting thing to note is that the expression for  $N^e$  only depends on the angles and  $M$ , the length of the side where the angles are on  $\Omega$ . It does not depend on  $L$ . This makes sense since the solutions mainly live along the side of length  $M$ .

### 3.4.2. Finding the surface wave quasi-eigenvalues

Suppose that  $\alpha = \frac{\pi}{2q}$  and  $\beta = \frac{\pi}{2r}$ . By Lemma 3.3.4, the principal part of  $v_\alpha(\sigma x)$  is given by

$$v_\alpha^p(\sigma x) = e^{-i\sqrt{1-\mu^2}\sigma x} + \gamma(\xi)e^{i\sqrt{1-\mu^2}\sigma x}$$

where we can write  $\gamma(\xi) = (-1)^{q-1}e^{2i\theta_\alpha}$  for

$$\theta_\alpha(n, \sigma) = \sum_{j=1}^{q-1} \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{\cos \frac{j\pi}{q} - 1} \right) = - \sum_{j=1}^{q-1} \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2} \sin \frac{j\pi}{q}}{1 - \cos \frac{j\pi}{q}} \right). \quad (56)$$

We have substituted  $\mu = \frac{n\pi}{\sigma M}$  in the last equation. We have similar expressions for  $v_\beta$ . Since multiplying  $v_\alpha$  and  $v_\beta$  by constants still results in solutions of (53), we consider rather the functions  $V_\alpha$  and  $V_\beta$  where

$$V_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-i\theta_\alpha} v_\alpha(x) & \text{if } q \text{ is odd,} \\ ie^{-i\theta_\alpha} v_\alpha(x) & \text{if } q \text{ is even,} \end{cases}$$

with  $V_\beta$  defined similarly. Notice that if  $q$  is odd, then the principal part of  $V_\alpha$  is given by

$$V_\alpha^p(x) = 2 \cos(\sqrt{1-\mu^2}x + \theta_\alpha)$$

and if  $q$  is even,

$$V_\alpha^p(x) = 2 \sin(\sqrt{1-\mu^2}x + \theta_\alpha).$$

The quantization condition (55) then becomes

$$V_\alpha(\sigma x) = \pm V_\beta(\sigma(L-x))$$

which reduces to solving

$$\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2} \sigma L = -(\theta_\alpha + \theta_\beta) + (m - \kappa_{\alpha,\beta})\pi \quad (57)$$

for  $m \in \mathbb{Z}$  and

$$\kappa_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } q \text{ and } r \text{ have the same parity,} \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We can rewrite this equation as

$$\sigma^2 = \left( \frac{(m - \kappa_{\alpha,\beta} - \frac{1}{\pi}(\theta_\alpha + \theta_\beta))\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{M} \right)^2. \quad (58)$$

It is important to keep in mind that  $\theta_\alpha$  and  $\theta_\beta$  depend on  $\sigma$  and this is what makes the equation difficult to solve. In the case where  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , notice that equation (58) coincides with the equation (51) that we obtained from exact computation of the eigenfunctions. When  $\kappa_{\alpha,\beta} = 0$ , the trivial solution  $m = 0$  and  $\sigma = \frac{n\pi}{M}$  corresponds to the constant solution and we can ignore it. We wish to restrict ourselves to positive values of  $m$  but since  $-(\theta_\alpha + \theta_\beta) \geq 0$ , we see that  $m$  can take negative values in (57). However, there is only a finite number of such solutions.

**Lemma 3.4.1.** *There is at most a finite number of pairs  $(m,n)$  with  $m \leq 0 \leq n$  such that (57) admits a nontrivial solution. Furthermore, for all  $m > 0$  and  $n \geq 0$ , there exists a unique solution  $\sigma_{m,n}$  of (57).*

PROOF. First, we show the case  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2q}$ . For  $n \in \mathbb{N}_0$ , consider the functions  $f_n : [\frac{n\pi}{M}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$f_n(\sigma) = \frac{1}{\pi} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2} \sigma L + 2\theta_\alpha(n,\sigma) \right).$$

Notice that  $f_n(\frac{n\pi}{M}) = 0$  and  $f_n(\sigma)$  tends to infinity as  $\sigma \rightarrow \infty$ . Moreover, we can write

$$f'_n(\sigma) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2}} \left( L - 2 \left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\alpha_j}{\sigma^3 [1 + \alpha_j^2 \left(1 - \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2\right)]} \right) \quad (59)$$

with  $\alpha_j = \frac{\sin \frac{j\pi}{q}}{1 - \cos \frac{j\pi}{q}} > 0$ . When  $\sigma$  increases, the value of the sum strictly decreases and tends to zero. Hence, even if  $f'_n(\sigma) < 0$  for some values, it is eventually positive and tends to  $\frac{L}{\pi}$  with the derivative vanishing at most once. When  $n$  gets sufficiently large, so does  $\sigma$ , and the derivative is positive for all values of  $\sigma$ . In fact, when  $\sigma \rightarrow \frac{n\pi}{M}^+$ , the expression in parentheses in (59) behaves like

$$L - \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j$$



which is positive for  $\sigma$  sufficiently large. Hence there exists  $n_0$  such that  $f'_n(\sigma) > 0$  for all  $\sigma > \frac{n\pi}{M}$  and  $n > n_0$ .

We see that  $\sigma$  is a solution of (57) corresponding to given integers  $m$  and  $n$  if and only if  $f_n(\sigma) = m$ . From the previous calculations, there is only a finite number of  $f_n$  which take negative values and the set  $f_n^{-1}((-\infty, 0])$  is bounded since  $f_n$  tends to infinity as  $\sigma \rightarrow \infty$ . If  $f_n$  takes negative values, it can then only take a finite number of negative integer values, and since its derivative vanishes exactly once,  $f_n$  can be a given negative integer at most twice. Therefore, the set

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(\mathbb{Z}_{<0})$$

is finite and the first part of the lemma follows since we ignore the solutions with  $\sigma = \frac{n\pi}{M}$  and  $m = 0$ . The second part of the lemma follows from the fact that  $f'_n(\sigma) > 0$  whenever  $f_n(\sigma) > 0$  and that  $f_n$  tends to infinity.

The proof with  $\alpha \neq \beta$  is similar. Indeed, we only need to change one  $\theta_\alpha$  by  $\theta_\beta + \kappa_{\alpha,\beta}$  in the definition of  $f_n(\sigma)$ . It is straightforward to see that  $f'_n(\sigma)$  is eventually positive for all  $n$  sufficiently big and since  $f_n\left(\frac{n\pi}{M}\right) = \kappa_{\alpha,\beta}$ , there is still a finite number of negative solutions.  $\square$

### 3.4.3. Counting the surface wave quasi-eigenvalues

Now that we know how to find the surface wave quasi-eigenvalues, we can count them in order to prove Theorem 3.1.5.

We know from Lemma 3.4.1 that there is only a finite number of solutions corresponding to non-positive values of  $m$ . They contribute  $O(1)$  to the counting function and we can ignore them. Therefore, we restrict ourselves to solutions corresponding to  $m > 0$  and  $n \geq 0$ . We also know that for each such pair  $(m, n)$ , there exists a unique solution of (57). We denote it by  $\sigma_{m,n}$ . Let  $\sigma > 0$  and consider the set

$$E_\sigma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x\pi}{\sigma L}\right)^2 + \left(\frac{y\pi}{\sigma M}\right)^2 < 1 \right\}.$$

We have

$$\#\{(m, n) \in E_\sigma \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0)\} = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L-M}{2\pi}\sigma + o(\sigma) \quad (60)$$

where the error term  $o(\sigma)$  comes from known estimates on the Gauss circle problem (see [LW24] for example). Suppose that  $(m, n) \in E_\sigma$  and let  $d > 0$  be the horizontal distance between  $(m, n)$  and the boundary ellipse of  $E_\sigma$ , i.e.

$$d = x_n - m$$

where  $x_n$  is the positive solution to  $\left(\frac{x_n\pi}{\sigma L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\sigma M}\right)^2 = 1$ . From equation (58), we see that  $\sigma_{m,n} < \sigma$  if and only if

$$m + f(n, \sigma_{m,n}) < x_n$$

or equivalently  $d > f(n, \sigma_{m,n})$  where

$$f(n, \sigma) = -\kappa_{\alpha, \beta} - \frac{1}{\pi}(\theta_{\alpha}(n, \sigma) + \theta_{\beta}(n, \sigma)).$$

Notice that  $f(n, \sigma)$  only depends on  $\frac{n}{\sigma}$  and can hence be written as  $f\left(\frac{n}{\sigma}\right)$ . We will use both notations. Therefore, counting the surface wave eigenvalues is equivalent (up to  $O(1)$ ) to counting the total number of integer points  $(m, n) \in E_{\sigma}$  with  $m > 0$  and  $n \geq 0$  to which we subtract the points such that  $d \leq f(n, \sigma_{m,n})$ . Denote by  $N_{-}^s(\sigma)$  the number of such points, i.e.

$$N_{-}^s(\sigma) = \#\{(m, n) \in E_{\sigma} \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0) : d \leq f(n, \sigma_{m,n})\}.$$

From equation (60), it then follows that

$$N^s(\sigma) = \frac{LM}{4\pi}\sigma^2 + \frac{L-M}{2\pi}\sigma - N_{-}^s(\sigma) + o(\sigma)$$

and therefore proving Theorem 3.1.5 is equivalent to proving the following.

**Theorem 3.4.2.** *The counting function  $N_{-}^s(\sigma)$  satisfies*

$$N_{-}^s(\sigma) = \frac{M\sigma}{\pi} \int_0^1 f(t) dt + o(\sigma).$$

We start by giving an heuristic for this result. Let  $\sigma_{m,n}$  be such that  $(m, n) \in E_{\sigma}$  but  $\sigma_{m,n} \geq \sigma$ . We expect  $\sigma_{m,n}$  to be relatively close to  $\sigma$  in a way that  $f(n, \sigma_{m,n})$  should be close to  $f(n, \sigma)$ . For simplicity of the argument, suppose that  $f(n, \sigma_{m,n}) = f(n, \sigma)$ . The boundary of the ellipse  $E_{\sigma}$  in the first quadrant of the  $(x, y)$  plane can be given by the curve

$$\tau_{\sigma}(t) = \left( \frac{\sigma L}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{t\pi}{\sigma M}\right)^2}, t \right).$$

for  $t \in [0, \frac{M\sigma}{\pi}]$ . Let  $\gamma_{\sigma} : [0, \frac{\sigma M}{\pi}]$  be the curve

$$\gamma_{\sigma}(t) = \tau_{\sigma}(t) - (f(t, \sigma), 0).$$

Then, the integer points in  $E_{\sigma}$  in the region bounded by  $\gamma_{\sigma}$ ,  $\tau_{\sigma}$  and the  $x$ -axis are precisely those such that  $d \leq f(n, \sigma_{m,n})$ , i.e. those that contribute to  $N_{-}^s(\sigma)$ . It is then reasonable to expect that the area of this region should be a good approximation for the number of integer points within it. The area is given by

$$\int_0^{\frac{M\sigma}{\pi}} f\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt = \frac{M\sigma}{\pi} \int_0^1 f(t) dt.$$

However, it could be that this approximation is not good at all since we took the area of a very thin strip which could miss all the integer points. For this estimate to be good, we

need to show that the integer points are well-behaved, in the sense that they are evenly or uniformly distributed across this strip. To do so, we will rely on Weyl's equidistribution theorem.

In order to simplify the expressions, we now assume that  $L = M = \pi$  and  $\alpha = \beta$ . However, the proofs will hold for all values. We will need the following two lemmas.

**Lemma 3.4.3.** *For all  $m$  such that  $x_n - q + 1 \leq m \leq x_n$  and all  $0 \leq n \leq \sigma$ , the estimate*

$$f\left(\frac{n}{\sigma_{m,n}}\right) = f\left(\frac{n}{\sigma}\right) + o(1)$$

*holds uniformly in  $m$  and  $n$  as  $\sigma \rightarrow \infty$ .*

PROOF. Since  $0 \leq f(t) \leq q - 1$  from equation (56) for all  $t \in [0,1]$ , and

$$\sigma_{m,n} = \left(m + f\left(\frac{n}{\sigma_{m,n}}\right)\right)^2 + n^2$$

it follows that

$$(x_n - q + 1)^2 + n^2 \leq \sigma_{m,n}^2 \leq (x_n + q - 1)^2 + n^2$$

for  $m$  satisfying  $x_n - q + 1 \leq m \leq x_n$ . Expanding each side and using the fact that  $\sigma^2 = x_n^2 + n^2$  yields

$$\sigma^2 - 2(q - 1)x_n + (q - 1)^2 \leq \sigma_{m,n}^2 \leq \sigma^2 + 2(q - 1)x_n + (q - 1)^2.$$

Since  $\pm 2(q - 1)x_n + (q - 1)^2 = O(\sigma)$ , it follows that  $\sigma_{m,n}^2 = \sigma^2 + O(\sigma)$  and hence

$$\sigma_{m,n} = \sigma + O(1).$$

Therefore,

$$\frac{n}{\sigma_{m,n}} = \frac{n}{\sigma + O(1)} = \frac{n}{\sigma} + O\left(\frac{n}{\sigma^2}\right).$$

Since  $0 \leq n \leq \sigma$ , we get

$$\frac{n}{\sigma_{m,n}} = \frac{n}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

uniformly in  $n$  (and  $m$ ). Since  $f$  is uniformly continuous, it follows that, as  $\sigma \rightarrow \infty$ ,

$$f\left(\frac{n}{\sigma_{m,n}}\right) = f\left(\frac{n}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) = f\left(\frac{n}{\sigma}\right) + o(1).$$

□

**Lemma 3.4.4.** *Fix  $K \in \mathbb{N}$  and let  $h \in \mathbb{Z}$  with  $h \neq 0$ . Let  $e(x) = e^{2\pi i x}$ . Then*

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{K}{\sigma} \sum_{\frac{r\sigma}{K} \leq n < \frac{(r+1)\sigma}{K}} e(h\sqrt{\sigma^2 - n^2}) = 0$$

*for all  $0 \leq r \leq K - 2$ .*

To prove this lemma, we will need the following theorem from van der Corput [VdC22] on bounding exponential sums.

**Theorem 3.4.5** (van der Corput [VdC22], 1922). *Let  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  be a  $C^2$  function on an interval  $I$  with  $\lambda \leq |F''(x)| \leq \alpha\lambda$ . Then*

$$\sum_{n \in I} e(F(n)) \ll \alpha |I| \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}$$

where the implied constant is absolute.

PROOF OF LEMMA 3.4.4. The following proof is inspired by a proof provided to us by Zeev Rudnick. We apply Theorem 3.4.5 with  $I = \left[ \frac{r\sigma}{K}, \frac{(r+1)\sigma}{K} \right)$  and  $F(x) = h\sqrt{\sigma^2 - x^2}$ . We have

$$F''(x) = -\frac{h\sigma^2}{(\sigma^2 - x^2)^{3/2}}.$$

Since  $\sigma^2 - x^2 \leq \sigma^2$ , we have

$$\frac{|h|}{\sigma} \leq |F''(x)|.$$

On the other hand, since  $r \leq K - 2$ , we have  $\sigma - x > \sigma - \frac{(r+1)\sigma}{K} \geq \frac{\sigma}{K}$  and hence

$$|F''(x)| = \frac{|h|\sigma^2}{((\sigma - x)(\sigma + x))^{3/2}} \leq \frac{|h|\sigma^2}{(\frac{\sigma^2}{K})^{3/2}} = K^{3/2} \frac{|h|}{\sigma}.$$

Fixing  $h$  and applying Theorem 3.4.5 with  $\lambda = \frac{|h|}{\sigma}$  and  $\alpha = K^{3/2}$  yields

$$\sum_{n \in I} e(F(n)) \ll_h K^{3/2} \frac{\sigma}{K} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma}(\sqrt{K} + 1)$$

It follows that

$$\frac{K}{\sigma} \sum_{n \in I} e(h\sqrt{\sigma^2 - n^2}) \ll_h \frac{K^{3/2} + K}{\sqrt{\sigma}}$$

which tends to 0 as  $\sigma \rightarrow \infty$ . □

Denote by  $d_n(\sigma)$  the distance between  $x_n$  (the positive solution of  $\sigma^2 = x_n^2 + n^2$ ) and the closest integer point  $(m, n)$  satisfying  $m^2 + n^2 < \sigma^2$ . This distance is precisely the fractional part of  $\sqrt{\sigma^2 - n^2}$ . From Weyl's equidistribution theorem, Lemma 3.4.4 is equivalent to the following lemma which will enable us to prove Theorem 3.4.2.

**Lemma 3.4.6.** *Fix  $K \in \mathbb{N}$ . Then, for any interval  $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$  and for all  $0 \leq r \leq K - 2$ ,*

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{K}{\sigma} \# \left\{ n \in \left[ \frac{r\sigma}{K}, \frac{(r+1)\sigma}{K} \right) : d_n(\sigma) \in [\alpha, \beta] \right\} = \beta - \alpha.$$

PROOF OF THEOREM 3.4.2. We wish to estimate

$$N_-^s(\sigma) = \sum_{(m, n) \in E_\sigma} \mathbf{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma_{m, n})\}$$

since  $\sigma_{m, n} < \sigma$  if and only if  $x_n - m > f(n, \sigma_{m, n})$ . Since  $f$  is bounded by  $q - 1$ , we have that

$$\mathbf{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma_{m, n})\} = 0$$

for all  $m$  such that  $m < x_n - q + 1$ . Hence,

$$N_-^s(\sigma) = \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \sum_{m=\lceil x_n - q + 1 \rceil}^{\lfloor x_n \rfloor} \mathbb{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma_{m,n})\}.$$

From Lemma 3.4.3, for the values of  $n$  and  $m$  present in the sum, we can find a function  $h(\sigma)$  which goes to zero as  $\sigma \rightarrow \infty$  such that

$$\mathbb{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma) - h(\sigma)\} \leq \mathbb{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma_{m,n})\} \leq \mathbb{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma) + h(\sigma)\}. \quad (61)$$

This motivates us to rather estimate the quantity

$$S(\sigma) := \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \sum_{m=\lceil x_n - q + 1 \rceil}^{\lfloor x_n \rfloor} \mathbb{1} \{x_n - m \leq f(n, \sigma)\}.$$

Writing  $m = \lfloor x_n \rfloor - r$ , this is equivalent to

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \sum_{r=0}^{\lfloor x_n \rfloor - \lceil x_n - q + 1 \rceil} \mathbb{1} \{x_n - \lfloor x_n \rfloor \leq f(n, \sigma) - r\}.$$

Since  $0 \leq x_n - \lfloor x_n \rfloor < 1$ , we see that

$$\mathbb{1} \{x_n - \lfloor x_n \rfloor \leq f(n, \sigma) - r\} = \begin{cases} 1 & \text{if } r \leq \lfloor f(n, \sigma) \rfloor - 1 \\ \mathbb{1} \{x_n - \lfloor x_n \rfloor \leq f(n, \sigma) - r\} & \text{if } r = \lfloor f(n, \sigma) \rfloor \\ 0 & \text{if } r > \lfloor f(n, \sigma) \rfloor + 1. \end{cases}$$

Since  $f$  is strictly decreasing, it takes integer values at most  $q - 1$  times. With a small error, we can therefore change the last condition to  $r \geq \lfloor f(n, \sigma) \rfloor + 1$ . We then get

$$S(\sigma) = \left( \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \lfloor f(n, \sigma) \rfloor + \mathbb{1} \{x_n - \lfloor x_n \rfloor \leq f(n, \sigma) - \lfloor f(n, \sigma) \rfloor\} \right) + O(1)$$

We now consider  $\frac{S(\sigma)}{\sigma}$ . We claim that

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{S(\sigma)}{\sigma} = \int_0^1 f(t) dt.$$

Rewriting  $f(n, \sigma)$  as  $f\left(\frac{n}{\sigma}\right)$ , the first term of  $S(\sigma)$  yields

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \lfloor f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \rfloor = \int_0^1 \lfloor f(t) \rfloor dt.$$

Setting  $g\left(\frac{n}{\sigma}\right) = f\left(\frac{n}{\sigma}\right) - \lfloor f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \rfloor$  and noticing that  $x_n - \lfloor x_n \rfloor = d_n(\sigma)$ , it remains to estimate

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \mathbb{1} \left\{ d_n(\sigma) \leq g\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right\}.$$

Let  $\varepsilon > 0$  and let  $K \in \mathbb{N}$  be such that  $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{3}$  and

$$\left| \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} g(x_r) - \int_0^1 g(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

for all choices of  $x_r \in \left[\frac{r}{K}, \frac{r+1}{K}\right]$ . Such a  $K$  exists since  $g$  is piecewise continuous. Dividing  $[0, \sigma]$  into  $K$  subintervals, we get that

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \mathbb{1} \left\{ d_n(\sigma) \leq g\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right\} \leq \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \frac{K}{\sigma} \# \left\{ n \in \left[ \frac{r\sigma}{K}, \frac{(r+1)\sigma}{K} \right) : d_n(\sigma) \leq \sup_{x \in \left[\frac{r}{K}, \frac{r+1}{K}\right]} g(x) \right\}.$$

The reverse inequality holds with the supremum replaced with the infimum. When  $r = K-1$ , we can use the trivial bound

$$\frac{K}{\sigma} \# \left\{ n \in \left[ \frac{r\sigma}{K}, \frac{(r+1)\sigma}{K} \right) : d_n(\sigma) \leq \sup_{x \in \left[\frac{r}{K}, \frac{r+1}{K}\right]} g(x) \right\} \leq 1.$$

However, when  $0 \leq r \leq K-2$ , we can use Lemma 3.4.6. Together, this yields

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \mathbb{1} \left\{ d_n(\sigma) \leq g\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right\} \leq \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-2} \sup_{x \in \left[\frac{r}{K}, \frac{r+1}{K}\right]} g(x) + \frac{1}{K} < \int_0^1 g(t) dt + \varepsilon. \quad (62)$$

Proceeding similarly with the reversed inequality, it follows that for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\lfloor \sigma \rfloor} \mathbb{1} \left\{ d_n(\sigma) \leq g\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right\} - \int_0^1 g(t) dt \right| < \varepsilon$$

and therefore

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{S(\sigma)}{\sigma} = \int_0^1 \lfloor f(t) \rfloor dt + \int_0^1 f(t) - \lfloor f(t) \rfloor dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

Finally, we see that if we were to change  $f(n, \sigma)$  for  $f(n, \sigma) \pm h(\sigma)$  with  $h(\sigma)$  going to 0 as  $\sigma \rightarrow \infty$  in the definition of  $S(\sigma)$ , the result would still hold since (62) holds from the fact that for all  $y \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{K}{\sigma} \# \left\{ n \in \left[ \frac{r\sigma}{K}, \frac{(r+1)\sigma}{K} \right) : d_n(\sigma) \leq y + o(1) \right\} = y.$$

From (61), it then follows that

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{N_-^s(\sigma)}{\sigma} = \int_0^1 f(t) dt$$

so that

$$N_-^s(\sigma) = \sigma \int_0^1 f(t) dt + o(\sigma).$$

□

## 3.5. Discussion on quasimodes and numerical evidence

### 3.5.1. Discussion on quasimodes

The results we have presented are only approximate solutions of problem (43). In order for our conjecture to hold, we would have to be able to say that our quasi-eigenvalues are good approximations of the actual sloshing eigenvalues and are in one-to-one correspondence with them. On one hand, we are confident that an analogous version of Lemma 2.6 in [LPPSa] holds in our setting and are currently working on it. This would imply that there is an actual eigenvalue of Problem (43) next to each quasi-eigenvalue, which would show that the estimate

$$N(\sigma) \geq N^s(\sigma) + N^e(\sigma) + o(\sigma)$$

holds as long as the eigenvalues are sufficiently spaced to avoid dealing with multiplicity. However, on the other hand, showing that our quasi-eigenvalues approximate all the sloshing eigenvalues should be much more difficult to prove and require new ideas. In dimension 2, it turns out that the quasimodes solve a Sturm-Liouville equation on the sloshing part of the boundary. This fact was used in [LPPSa] to show that their quasimodes formed a complete set, and hence approximated every eigenfunction. Their method could work in our case, but we were unable to find an analogous Sturm-Liouville equation solved by our quasimodes. Furthermore, the presence of edge waves makes it even more complicated.

### 3.5.2. Numerical evidence of Conjecture 3.1.7

We now present numerical evidence to support our conjecture. All numerical experiments were made with FreeFem++ using the finite element method. Let  $\Sigma$  be the triangle of angles  $\alpha$  and  $\beta$  with sidelength  $L$  resulting from the separation of variable on  $\Omega$  (as in Figure 3.1). We used FreeFem++ to solve problem (44). It is a 2-d problem and hence much faster to solve than its 3-d counterpart of solving directly problem (43) on all  $\Omega$ .

For simplicity, we take  $L = M = \pi$ . Our goal will be to compute  $N(\sigma)$  up to  $\sigma = 50$  for all the combinations of  $\alpha$  and  $\beta$  in the set  $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}\}$ . In order to do so, we compute the first eigenvalues corresponding to  $\lambda_n = n$  for sufficiently many  $n$ 's. We order and denote those eigenvalues by  $\sigma_k(n)$ . Note that from a theorem by Friedlander [Fri91], the eigenvalue  $\sigma_k(n)$  gets larger as  $n$  increases. Therefore, we only need to compute these eigenvalues until  $\sigma_1(n) > 50$  and we can reduce the number of computed eigenvalues at each step in order to speed up the computations.

Consider the function

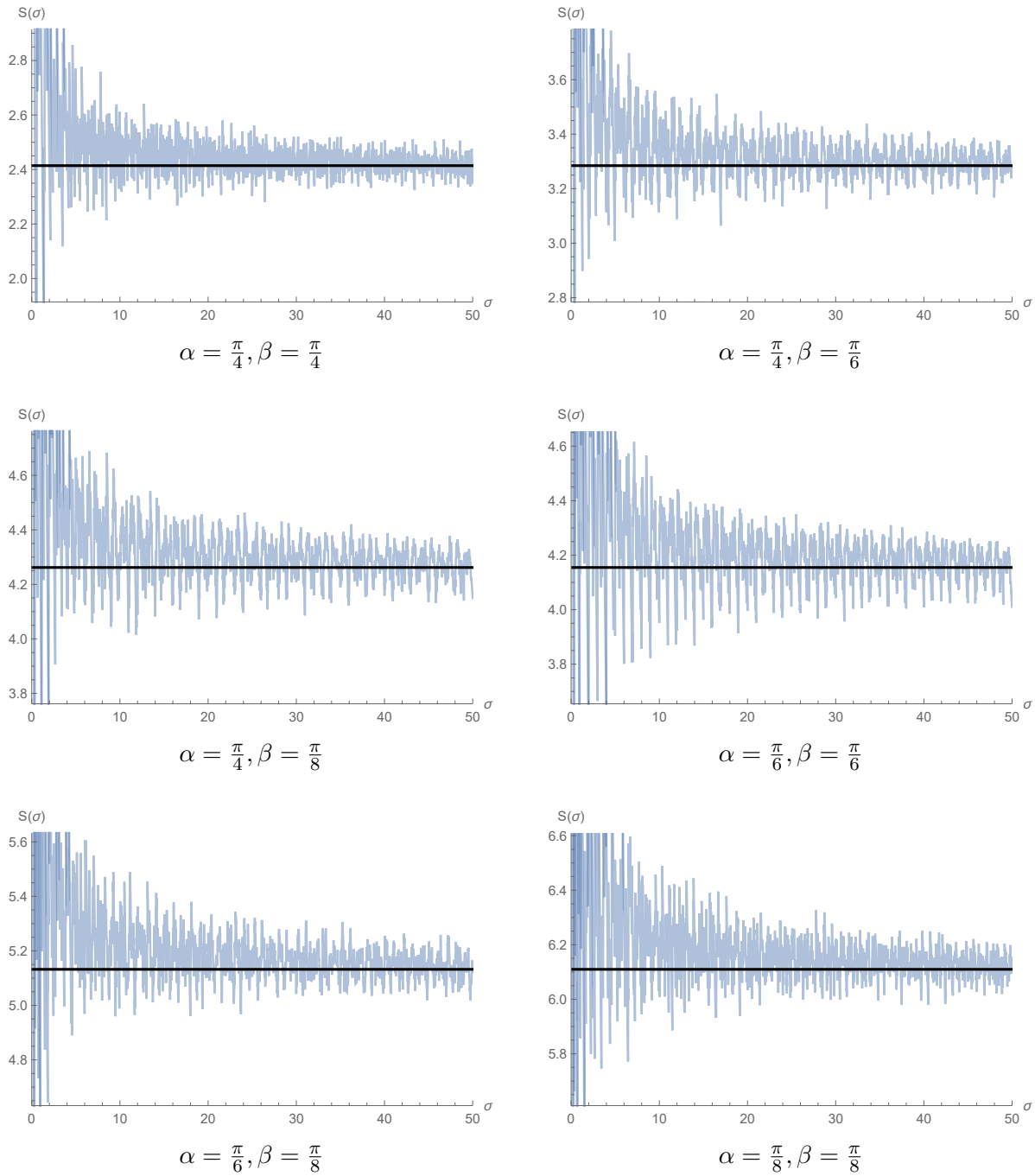
$$S(\sigma) := \frac{1}{\sigma} \left( N(\sigma) - \frac{LM}{4\pi} \sigma^2 \right) = \frac{1}{\sigma} \left( N(\sigma) - \frac{\pi}{4} \sigma^2 \right).$$

Then, Conjecture 3.1.7 is equivalent to showing

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} S(\sigma) = N^e(1) + N^s(1).$$

The plots in Figure 3.4 show our estimated value of  $S(\sigma)$  for  $0 \leq \sigma \leq 50$ , as well as the value of  $N^e(1) + N^s(1)$  to which it should converge when  $\sigma$  tends to infinity.





**Figure 3.4.** Value of  $S(\sigma)$  compared to its conjectured limit indicated by the horizontal line.



## Références bibliographiques

---

- [Agr84] Mikhail S. AGRANOVICH : Elliptic pseudodifferential operators on a closed curve. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 47:22–67, 1984.
- [Agr06] Mikhail S. AGRANOVICH : On a mixed Poincaré-Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 13(3):239–244, 2006.
- [AMDG<sup>+</sup>19] Teresa ARIAS-MARCO, Emily B. DRYDEN, Carolyn S. GORDON, Asma HASSANNEZHAD, Allie RAY et Elizabeth STANHOPE : Spectral geometry of the Steklov problem on orbifolds. *International Mathematics Research Notices*, 2019(1):90–139, 2019.
- [Bé86] Pierre H BÉRARD : Spectral geometry direct and inverse problems. 1986.
- [Bré83] Haïm BRÉZIS : Analyse fonctionnelle. théorie et applications, 1983.
- [CCMM16] Fioralba CAKONI, David COLTON, Shixu MENG et Peter MONK : Stekloff eigenvalues in inverse scattering. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76(4):1737–1763, 2016.
- [Cha84] Isaac CHAVEL : *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic press, 1984.
- [DG75] Johannes J. DUISTERMAAT et Victor W. GUILLEMIN : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Inventiones Mathematicae*, 29:39–79, 1975.
- [Edw93a] Julian EDWARD : An inverse spectral result for the Neumann operator on planar domains. *Journal of Functional Analysis*, 111(2):312–322, 1993.
- [Edw93b] Julian EDWARD : Pre-compactness of isospectral sets for the Neumann operator on planar domains. *Communications in Partial Differential Equations*, 18(7-8):1249–1270, 1993.
- [ES97] Yuri EGOROV et Bert-Wolfgang SCHULZE : *Pseudo-differential operators, singularities, applications*, volume 93. Birkhäuser, 1997.
- [Eva89] David V. EVANS : Edge waves over a sloping beach. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 42(1):131–142, 1989.
- [Fri91] Leonid FRIEDLANDER : Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 116(2):153–160, 1991.
- [FSU19] Joel FELDMAN, Mikko SALO et Gunther UHLMANN : Calderón problem: An introduction to inverse problems. *Preliminary notes on the book in preparation*, 2019.
- [GLPS19] Alexandre GIROUARD, Jean LAGACÉ, Iosif POLTEROVICH et Alessandro SAVO : The Steklov spectrum of cuboids. *Mathematika*, 65(2):272–310, 2019.
- [GP17] Alexandre GIROUARD et Iosif POLTEROVICH : Spectral geometry of the Steklov problem (survey article). *Journal of Spectral Theory*, 7(2):321–360, 2017.
- [GPPS14] Alexandre GIROUARD, Leonid PARNOVSKI, Iosif POLTEROVICH et David A. SHER : The Steklov spectrum of surfaces: asymptotics and invariants. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 157, pages 379–389. Cambridge University Press, 2014.

- [GR07] Izrail S. GRADSHTEYN et Iosif M. RYZHIK : *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 7e édition, 2007.
- [GWW92] Carolyn GORDON, David L. WEBB et Scott WOLPERT : One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1):134–138, 1992.
- [Hör84] Lars HÖRMANDER : *The analysis of partial differential operators, vol. IV*. Springer, 1984.
- [How99] Ralph HOWARD : Blaschke’s rolling theorem for manifolds with boundary. *Manuscripta Mathematica*, 99(4):471–483, 1999.
- [Ivr80] V Ya IVRII : Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. *Functional Analysis and Its Applications*, 14(2):98–106, 1980.
- [JS14] Alexandre JOLLIVET et Vladimir SHARAFUTDINOV : On an inverse problem for the Steklov spectrum of a Riemannian surface. *Contemp. Math*, 615:165–191, 2014.
- [JS18] Alexandre JOLLIVET et Vladimir SHARAFUTDINOV : Steklov zeta-invariants and a compactness theorem for isospectral families of planar domains. *Journal of Functional Analysis*, 275(7):1712–1755, 2018.
- [Kac66] Mark KAC : Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4P2):1–23, 1966.
- [KKM04] Vladimir KOZLOV, Nikolay KUZNETSOV et Oleg MOTYGIN : On the two-dimensional sloshing problem. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2049):2587–2603, 2004.
- [KMV02] Nikolay KUZNETSOV, Vladimir MAZ’YA et Boris VAINBERG : *Linear water waves: a mathematical approach*. Cambridge University Press, 2002.
- [Lam24] Horace LAMB : *Hydrodynamics*. University Press, 1924.
- [Liu15] Genqian LIU : Asymptotic expansion of the trace of the heat kernel associated to the Dirichlet-to-Neumann operator. *Journal of Differential Equations*, 259(7):2499–2545, 2015.
- [LPPSa] Michael LEVITIN, Leonid PARNOVSKI, Iosif POLTEROVICH et David A. SHER : Sloshing, Steklov and corners : Asymptotics of sloshing eigenvalues. Version preprint disponible sur <https://dms.umontreal.ca/~iossif/>.
- [LPPSb] Michael LEVITIN, Leonid PARNOVSKI, Iosif POLTEROVICH et David A. SHER : Sloshing, Steklov and corners : Asymptotics of Steklov eigenvalues for curvilinear polygons. Version preprint disponible sur <https://dms.umontreal.ca/~iossif/>.
- [LSA20] Jean LAGACÉ et Simon ST-AMANT : Spectral invariants of Dirichlet-to-Neumann operators on surfaces. *arXiv preprint arXiv:2003.02143*, 2020.
- [LU89] John M. LEE et Gunther UHLMANN : Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(8):1097–1112, 1989.
- [LW24] John E. LITTLEWOOD et Arnold WALFISZ : The lattice points of a circle. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 106(739):478–488, 1924.
- [PS15] Iosif POLTEROVICH et David A. SHER : Heat invariants of the Steklov problem. *The Journal of Geometric Analysis*, 25(2):924–950, 2015.
- [Roz79] Grigori V. ROZENBLUM : Almost-similarity of operators and spectral asymptotics of pseudo-differential operators on a circle. *Trans. Moscow. Math. Soc.*, 2:59–84, 1979. Translated from Russian.

- [Roz86] Grigori V. ROZENBLUM : On the asymptotics of the eigenvalues of certain two-dimensional spectral problems. *Sel. Math. Sov*, 5:233–244, 1986.
- [Shu87] Mikhail A. SHUBIN : *Pseudodifferential operators and spectral theory*, volume 200. Springer, 1987.
- [SR18] Xavier SAINT RAYMOND : *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*. Routledge, 2018.
- [Tay12] Michael TAYLOR : *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*, volume 100. Springer, 2012.
- [Tay13] Michael TAYLOR : *Partial differential equations II: Qualitative studies of linear equations*, volume 116. Springer, 2013.
- [Urs52] Fritz URSELL : Edge waves on a sloping beach. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 214(1116):79–97, 1952.
- [VdC22] Johannes G. Van der CORPUT : Verschärfung der abschätzung beim teilerproblem. *Mathematische Annalen*, 87(1-2):39–65, 1922.
- [Won14] Man Wah WONG : *An introduction to pseudo-differential operators*, volume 6. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [WW19] Weiwei WANG et Zuoqin WANG : On the relative heat invariants of the Dirichlet-to-neumann operators associated with Schrödinger operators. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 10(4):805–836, 2019.



# Annexe A

---

## Les opérateurs pseudodifférentiels

Dans cette annexe, j'introduis les opérateurs pseudodifférentiels. Pour ce faire, je suis majoritairement la présentation dans [Won14] pour les opérateurs dans  $\mathbb{R}^n$  et [Shu87] pour les opérateurs sur les variétés. Pour d'autres bonnes références, voir [ES97], [SR18] ou [Tay12].

Lorsque  $\partial\Omega$  est lisse, l'opérateur Dirichlet-vers-Neumann est un opérateur pseudodifférentiel. Nous avons explicitement utilisé ce fait dans le Chapitre 2 et utilisé des techniques pseudodifférentielles pour étudier le spectre de  $DN_\lambda$ . Mais qu'est-ce qu'un opérateur pseudodifférentiel? Commençons par introduire ces opérateurs sur  $\mathbb{R}^n$ , puis sur des variétés. Pour ce faire, on a besoin de quelques définitions.

### A.1. Transformée de Fourier et espace de Schwartz

**Definition A.1.1** (Transformée de Fourier). Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

alors que sa transformée de Fourier inverse est donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x) = \check{\varphi}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

En autant que  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , les fonctions  $\widehat{\varphi}$  et  $\check{\varphi}$  sont bien définies. De plus, si  $\widehat{\varphi}$  est aussi intégrable, alors la formule d'inversion de Fourier

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]](x)$$

est valide.

**Definition A.1.2** (Espace de Schwartz). L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est constitué de toutes les fonctions lisses  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tous multi-indices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta \varphi)| < \infty.$$

L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est donc constitué des fonctions lisses dont toutes leurs dérivées décroissent plus vite que n'importe quel polynôme. On a donc

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

L'espace de Schwartz est l'espace de choix pour étudier la transformée de Fourier puisque  $\mathcal{F}$  est une isométrie de l'espace de Schwartz vers lui-même. En fait, pour tous  $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi) d\xi = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle.$$

Étant donné  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on peut aussi considérer son dual  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  constitué de toutes les applications linéaires continues  $Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ces applications sont appelées les distributions tempérées. Un exemple de distribution tempérée est donnée par

$$Q_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \langle f, \varphi \rangle$$

pour une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Une telle distribution est appelée régulière et elle est bien définie en autant que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty$$

pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ .

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , puisque  $\mathcal{F}$  est une isométrie de l'espace de Schwartz, on a

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Cette égalité nous pousse alors à définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée  $Q$  comme l'application  $\widehat{Q} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$\widehat{Q}(\varphi) := Q(\widehat{\varphi}).$$

En particulier, si  $f$  est intégrable, on a  $\widehat{Q_f} = Q_{\widehat{f}}$ . Il s'en suit que  $\mathcal{F}$  peut être étendu à tout  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

## A.2. Opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$

On est maintenant en mesure de définir ce qu'est un opérateur pseudodifférentiel. On commence par faire l'observation suivante: si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $\varphi'(x) = \mathcal{F}^{-1}[i\xi\widehat{\varphi}](x)$ . En effet,

$$\widehat{\varphi}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( [\varphi(x)e^{-ix\xi}]_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right) = i\xi\widehat{\varphi}(\xi)$$

où la deuxième égalité a été obtenue en intégrant par partie. Le terme de bord dans l'intégration par partie s'annule puisque  $\varphi$  décroît vers 0 à l'infini. En appliquant  $\mathcal{F}^{-1}$  des deux côtés de l'équation, on obtient ce qu'on voulait observé. En utilisant la notation  $D\varphi = -i\varphi'$ , on peut réécrire cette égalité comme  $[D\varphi](x) = \mathcal{F}^{-1}[\xi\widehat{\varphi}](x)$ . En fait, on peut généraliser



toute cette procédure pour voir que si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (63)$$

est un opérateur différentiel, alors

$$[P(x,D)\varphi](x) = \mathcal{F}^{-1}[P(x,\xi)\widehat{\varphi}](x).$$

Dans la dernière expression,  $P(x,\xi)$  est un polynôme en  $\xi$ , mais le terme de droite pourrait quand même garder son sens si  $P(x,\xi)$  n'était pas un polynôme. L'opérateur associé ne serait alors pas un opérateur différentiel. En effet, étant donné n'importe quelle fonction  $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , on peut considérer l'opérateur  $T_\sigma$  agissant sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et défini par

$$[T_\sigma\varphi](x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (64)$$

Par contre, ce ne sont pas tous les choix de  $\sigma$  qui mènent à des opérateurs bien définis et il serait bien d'être capable de quantifier l'ordre d'un de ses opérateurs, un peu comme pour les opérateurs différentiels. Cela nous mène à la définition d'un symbole et à l'introduction des classes de symboles.

**Definition A.2.1** (Symbole). Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  est un symbole et appartient à la classe de symbole  $S^m = S^m(\mathbb{R}^n)$  si pour tous multi-indices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , il existe une constante  $C_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$  telle que

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}$$

pour tous  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition A.2.2** (Opérateur pseudodifférentiel). Si  $\sigma$  est un symbole dans  $S^m$ , l'opérateur  $T_\sigma$  défini par (64) est un opérateur pseudodifférentiel et on écrit  $T_\sigma \in \Psi^m = \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ .

L'association  $\sigma \mapsto T_\sigma$  entre  $S^m$  et  $\Psi^m$  est une bijection. En effet, c'est une surjection par définition de  $\Psi^m$  et on peut montrer que si  $T_\sigma = T_\tau$ , alors  $\sigma = \tau$ .

On remarque que si  $\sigma \in S^m$ , alors  $D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x,\xi) \in S^{m-|\beta|}$  pour tous multi-indices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ . De plus, on voit que si  $m < m'$ , alors  $S^m \subset S^{m'}$  puisque

$$(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \leq (1 + |\xi|)^{m'-|\beta|}.$$

On peut donc définir la classe de symbole  $S^{-\infty}$  comme

$$S^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m.$$

Cette classe de symboles est non-vide puisque  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}$  et les opérateurs qui leurs sont associés sont dits lissants (*smoothing* en anglais). Plusieurs propriétés des opérateurs pseudodifférentiels sont considérées à «lissage» près.

Si  $P(x,D)$  est un opérateur différentiel comme dans (63) et que tous ses coefficients  $a_\alpha(x)$  sont lisses et à dérivées bornées, alors  $P(x,\xi)$  est un symbole. Le plus grand  $m$  tel que  $P(x,\xi) \in S^m$  correspond exactement à l'ordre de  $P(x,D)$  en tant qu'opérateur différentiel. De plus, on peut voir facilement qu'alors  $P(x,D)$  envoie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  vers lui-même. Cette propriété est en fait générale à tous les opérateurs pseudodifférentiels.

**Proposition A.2.3.** *Soit  $\sigma \in S^m$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $T_\sigma \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

Une notion importante est celle de développement asymptotique d'un symbole. Soit  $\sigma \in S^m$ . Supposons qu'on puisse trouver des symboles  $\sigma_j \in S^{m_j}$  avec

$$m = m_0 > m_1 > m_2 > \cdots > m_j \searrow -\infty$$

tels que

$$\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^{m_N}$$

pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . On dit alors que  $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$  est un développement asymptotique de  $\sigma$  et on écrit  $\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$ . On appelle  $\sigma_0$  le symbole principal de  $\sigma$ . Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux symboles qui ont la même expansion asymptotique, alors on n'a pas nécessairement que  $\sigma = \tau$ , mais bien que  $\sigma - \tau \in S^{-\infty}$ . La notion de développement asymptotique d'un symbole est utile pour décrire des opérations appliquées à des opérateurs pseudodifférentiels, comme la composition d'opérateurs ou l'adjoint d'un opérateur.

**Théorème A.2.4.** *Soit  $\sigma$  et  $\tau$  des symboles. Alors  $T_\sigma T_\tau$  est un opérateur pseudodifférentiel  $T_\lambda$  dont le symbole satisfait*

$$\lambda \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha \sigma)(\partial_x^\alpha \tau). \quad (65)$$

*En particulier, si  $\sigma \in S^m$  et  $\tau \in S^{m'}$ , alors  $\lambda \in S^{m+m'}$ .*

La notation dans le dernier théorème n'est pas exactement la même que dans notre définition de développement asymptotique, mais si on pose  $\lambda_j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha \sigma)(\partial_x^\alpha \tau)$ , on comprend que  $\lambda \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j$ . Une conséquence du théorème est qu'on peut considérer  $(\bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m) / S^{-\infty}$  comme une algèbre  $\mathbb{R}$ -graduée. Dans cette algèbre, certains symboles sont inversibles. En se fiant à l'équation (65), le symbole principal de  $T_\sigma T_\tau$  est donné par  $\sigma\tau$ . Ainsi, heuristiquement, pour que  $T_\sigma T_\tau = I$ , il faut que  $\tau = \sigma^{-1}$ . Mais alors, pour que  $\tau$  soit un symbole dans  $S^{-m}$ , il faut que  $\sigma \geq (1 + |\xi|)^m$ . Cela motive la définition d'un opérateur elliptique.

**Definition A.2.5** (Opérateur elliptique). Un opérateur pseudodifférentiel  $T_\sigma \in \Psi^m$  est elliptique s'il existe des constantes  $C, R \in \mathbb{R}$  telles que

$$|\sigma(x,\xi)| \geq C(1 + |\xi|)^m$$

pour tout  $|\xi| \geq R$ .

Le théorème suivant confirme notre heuristique.

**Théorème A.2.6.** Soit  $T_\sigma$  un opérateur pseudodifférentiel elliptique avec symbole  $\sigma \in S^m$ . Il existe un symbole  $\tau \in S^{-m}$  et deux opérateurs pseudodifférentiels  $R, S \in \Psi^{-\infty}$  tels que

$$T_\sigma T_\tau = I + R \quad \text{et} \quad T_\tau T_\sigma = I + S.$$

L'opérateur  $T_\tau$  résultant porte le nom de paramétrice. Ce n'est pas exactement un inverse à  $T_\sigma$ , mais ce l'est modulo  $\Psi^{-\infty}$ .

On dit qu'un opérateur  $T_\sigma^*$  est l'adjoint formel de  $T_\sigma$  si

$$\langle T_\sigma \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T_\sigma^* \psi \rangle$$

pour toutes fonctions  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le théorème suivant nous garantit l'existence d'un tel opérateur et qu'il est lui aussi un opérateur pseudodifférentiel.

**Théorème A.2.7.** Soit  $\sigma \in S^m$ . Il existe un symbole  $\tau \in S^m$  tel que  $T_\tau = T_\sigma^*$ . De plus,  $\tau$  satisfait

$$\tau \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \bar{\sigma}).$$

À l'aide de l'adjoint formel, on peut étendre le domaine de définition de  $T_\sigma$  à l'ensemble des distributions tempérées  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $Q_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution régulière avec  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_\sigma f) \varphi \, dx = \langle T_\sigma f, \bar{\varphi} \rangle = \langle f, T_\sigma^* \bar{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \overline{T_\sigma^* \bar{\varphi}} \, dx = Q_f(\overline{T_\sigma^* \bar{\varphi}}).$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , cela nous motive à définir

$$[T_\sigma Q](\varphi) := Q(\overline{T_\sigma^* \bar{\varphi}})$$

peu importe l'application  $Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Définie ainsi,  $T_\sigma : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est une application continue. En fait, on a encore mieux. Si  $Q_f$  est une distribution régulière, alors  $T_\sigma Q_f$  (qu'on associe à  $T_\sigma f$ ) l'est aussi en autant que  $f$  se comporte assez bien. Pour décrire ce qu'on veut dire par «assez bien», il faut se tourner vers les espaces de Sobolev.

**Definition A.2.8.** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  est constitué de toutes les fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  telles que la fonction

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} \, d\xi$$

est aussi dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $s = 0$ , alors  $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ . Et si  $s$  est un entier non-négatif, alors  $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  correspond aux fonctions dans  $L^p$  qui sont faiblement dérivables  $s$  fois et telles que toutes ses dérivées d'ordre au plus  $s$  sont dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème A.2.9.** Soit  $\sigma \in S^m$ . Alors,  $T_\sigma : H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-m,p}(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur continu pour tous  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 < p < \infty$ .

Supposons qu'une fonction  $u \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  est solution de  $T_\sigma u = f$  pour  $\sigma \in S^m$  et  $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Par le théorème précédent, on s'attendrait à ce que  $u$  soit dans  $H^{s+m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Ce n'est pas toujours le cas, mais on voit que ce le serait si on pouvait inverser  $T_\sigma$ , c'est-à-dire si  $T_\sigma$  est un opérateur elliptique.

**Théorème A.2.10** (Régularité elliptique). *Soit  $T_\sigma$  un opérateur pseudodifférentiel elliptique avec symbole  $\sigma \in S^m$ . Si  $f \in H^{s,p}$  et  $u \in H^{s,p}$  est une solution de*

$$T_\sigma u = f,$$

*alors  $u \in H^{s+m,p}$ .*

En utilisant le théorème de plongement de Sobolev, on peut utiliser le dernier théorème pour montrer par exemple que toute fonction harmonique sur  $\mathbb{R}^n$  est nécessairement lisse.

### A.3. Opérateurs pseudodifférentiels sur une variété

Définir ce qu'est un opérateur différentiel sur une variété demande un peu plus de travail puisqu'il n'y a pas de notion générale de transformée de Fourier sur une variété et il faut comprendre ce qu'il se passe lorsqu'on change de système de coordonnées.

Soit  $\Omega$  une variété lisse et soit  $(U, \varphi)$  une carte locale telle que  $\varphi(U) = X$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On peut associer à  $\varphi$  son pullback (ou tiré en arrière)  $\varphi^* : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(U)$  qui associe à  $u \in C^\infty(X)$  la fonction

$$\varphi^* u = u \circ \varphi.$$

Il est à noter que  $\varphi^*$  envoie  $C_0^\infty(X)$  sur  $C_0^\infty(U)$ . Soit  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  un opérateur linéaire. On peut alors définir un nouvel opérateur  $\tilde{A} : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  par

$$\tilde{A}u = (\varphi^{-1})^* \circ (A \circ \varphi^* u)|_U.$$

Ce nouvel opérateur est un opérateur linéaire.

**Definition A.3.1.** Un opérateur  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  est un opérateur pseudodifférentiel dans la classe  $\Psi^m(\Omega)$  si pour toute carte  $(U, \varphi)$ , l'opérateur  $\tilde{A}$  associé est un opérateur pseudodifférentiel dans  $\Psi^m(X)$ .

Étant donné une carte  $(U, \varphi)$ , l'opérateur  $\tilde{A}$  est un opérateur pseudodifférentiel sur  $\mathbb{R}^n$  et on peut donc lui associer un symbole  $\sigma(x, \xi)$ . Mais comment ce symbole change-t-il lorsqu'on change de coordonnées? Cela est équivalent à comprendre comment le symbole change lorsqu'on effectue un changement de variable à l'aide d'un difféomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $F : X \rightarrow X_1$  un difféomorphisme et  $A \in \Psi^m(X)$ . Ces deux applications définissent naturellement  $A_1$  par

$$A_1 = (F^{-1})^* \circ (A \circ F^* u)|_X$$

comme plus haut lorsqu'on a défini  $\tilde{A}$ . Est-ce que  $A_1$  est aussi un opérateur pseudodifférentiel? Et si  $\sigma_A$  correspond au symbole de  $A$ , peut-on exprimer le symbole  $\sigma_{A_1}$  de  $A_1$  à l'aide  $\sigma_A$  et  $F$ ?

**Théorème A.3.2** ([Shu87], Théorème 4.2). *L'opérateur  $A_1$  est un opérateur pseudodifférentiel dans  $\Psi^m(X_1)$  et son symbole satisfait*

$$\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=F(x)} \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} [\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_A](x, F'(x)^T \eta) \cdot D_z^{\alpha} e^{iR_x(z) \cdot \eta} |_{z=x}$$

où  $R_x(z)$  est donné par

$$R_x(z) = F(z) - F(x) - F'(x)(z - x).$$

Il est à noter que  $F'(x)$  est la matrice jacobienne de  $F$  et donc  $F'(x)^T$  est sa transposée. De plus, si  $\sigma_A^p$  est le symbole principal de  $\sigma_A$ , on voit que

$$\sigma_{A_1}^p(x, \xi) = \sigma_A^p(F^{-1}(x), (F'(x)^{-1})^T \xi).$$

Cette dernière formule nous indique qu'on peut définir le symbole principal d'un opérateur pseudodifférentiel de façon invariante comme une fonction de  $T^*\Omega$  vers  $\mathbb{C}$  puisque ce dernier change de la même façon qu'un changement de coordonnées.



# Annexe B

---

## Expériences numériques

La Section 3.5 présente des résultats numériques dans le but de supporter la Conjecture 3.1.7. Je présente ici le code que j'ai utilisé pour obtenir mes données. J'ai ensuite transféré ces données dans Mathematica pour construire les graphiques dans la Figure 3.4. Le langage utilisé est celui du programme FreeFEM++, qui est écrit en C++.

---

```
1 real L; //longueur du triangle
2 int N=100; //nombre de valeurs propres à calculer
3 int npoints = 100; //nombres de points dans le mesh
4 real M; //longueur du canal
5 real lambda;
6
7 real l;
8 cout << "Valeur de L? (L= $\pi$ *rep)" << endl;
9 cin >> l;
10 L = l*pi;
11
12 real m;
13 cout << "Valeur de M? (M= $\pi$ *rep)" << endl;
14 cin >> m;
15 M = m*pi;
16
17 real q;
18 cout << "Valeur de q? ( $\alpha = \pi/2q$ )" << endl;
19 cin >> q;
20
21 real r;
22 cout << "Valeur de r? ( $\beta = \pi/2r$ )" << endl;
23 cin >> r;
24
25 real sigma;
26 cout << "Valeur de sigma maximale?" << endl;
```

```

27 cin >> sigma;
28
29 real alpha = pi/(2*q);
30 real beta = pi/(2*r);
31 real x0 = L*tan(beta)/(tan(alpha)+tan(beta));
32 real t;
33
34 border l1(t=L,0) { x = t; y = 0; label=1; }; //surface de ballonnement
35 border l2(t=0,x0) { x = t; y = -t*tan(alpha); label=2; }; //côté de l'angle alpha
36 border l3(t=x0,L) { x = t; y = (x-L)*tan(beta); label=3; }; //côté de l'angle beta
37
38 mesh Th=buildmesh(l1(npoinst*L)+l2(npoinst*L)+l3(npoinst*L)); //construit le mesh
39
40 plot(Th,wait=1); //affiche le mesh dans le triangle
41
42 fespace Vh(Th,P2); //définit l'espace d'éléments finis
43 Vh u,v;
44 varf b(u,v)=int1d(Th,1)(u*v); //déclare la forme quadratique à la frontière
45 matrix B=b(Vh,Vh); //construit la matrice associée à la forme quadratique
46 {
47   ofstream f("vppi" + 2*q + "pi" + 2*r + ".txt"); //ouvre un fichier .txt
48   f<<"L_u=" + L + ",M_u=" + M + ",alpha_u=pi/" + 2*q + ",beta_u=pi/" + 2*r + ",sigma_u=" +
      sigma << endl; //information en haut du fichier .txt
49
50   int j = 0; //utilisé pour définir lambda
51   while(N!=0){
52     cout<<j<<endl; //pour savoir où on est rendu dans l'évaluation
53     cout<<N<<endl; //test
54     real[int] Evalues(N); //contient les valeurs propres
55     lambda = j*pi/M;
56
57     varf a(u,v)=int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + lambda^2*u*v); //déclare la forme quadratique
      associée à l'intérieur du triangle
58     matrix A=a(Vh,Vh,solver=sparsesolver); //construit la matrice associée à la forme quadratique
59
60     int k=EigenValue(A,B,sym=true,sigma=0,nev = N,value=Evalues); //calcule les N premières valeurs
      propres
61     cout<<k<<endl; //test
62
63     for(int i=0; i<N; i++){
64       if (Evalues[i] <= sigma + 1){ //imprime toutes les valeurs propres jusqu'à sigma (avec une
          erreur +1)
65         f<<Evalues[i]<<endl; //store les valeurs propres dans un fichier .txt
66       } else {

```



```
67         N = i; //permet de calculer moins de valeurs propres à la prochaine itération et diminuer le
           temps de calcul
68         break;
69     }
70 }
71 j++; //prochaine valeur de j
72 }
73 }
```

---