Université de Montréal

Bornes sur les nombres de Betti pour les fonctions propres du Laplacien

par

Fabrice Nonez

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

octobre 2019

Sommaire

Dans ce mémoire, nous travaillons sur les ensembles nodaux de combinaisons de fonctions propres de Δ, le laplacien, sur des variétés spéciales. Soit M_λ l'espace engendré par les fonctions propres de valeurs propres au plus λ. On démontrera que si $u \in M_\lambda$ sur la variété $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique naturelle, alors le nombre total de Betti de $u^{-1}(0)$ est d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$. Nous obtiendrons un résultat similaire pour $\mathbb{T}^n$, le tore carré plat, lorsque $n = 1$, 2, 4 ou 8. Pour les autres dimensions, la borne sera de la forme $\mathcal{O}(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$.

Cela est fortement relié au théorème de Courant, qui traite du nombre de Betti zéro du complément de $u^{-1}(0)$, l'ensemble nodal. Avec la loi de Weyl, on remarque que les bornes obtenues peuvent être vues comme une généralisation.

Afin de tout démontrer, on utilisera des outils de diverses branches des mathématiques, notamment les résultats de Milnor sur les polynômes réels.

Mots-clés : Nombres de Betti, Fonctions propres, Ensemble nodal, Topologie algébrique, Géométrie algébrique

Summary

In this thesis, we will work with the nodal sets of Laplace eigenfunctions on a few simple manifolds. More precisely, let M_λ be the linear subspace generated by eigenfunctions with eigenvalues at most λ. We will prove that for an element $u \in M_\lambda$ on $\mathbb{S}^n$ endowed with its natural metric, the total Betti number of $u^{-1}(0)$ has order of $\mathcal{O}(\lambda^{\frac{n}{2}})$. We will prove similar results on $\mathbb{T}^n$, the square flat torus, when $n = 1$, 2, 4 or 8. For other dimensions, we will obtain a bound of $\mathcal{O}(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$.

Those results are strongly related to Courant's nodal domain theorem, which deals with the Betti number zero on the complement of the nodal set $u^{-1}(0)$. A look at Weyl's law indicates that the bounds we obtain can be seen as a generalization of Courant's theorem.

Our proofs use a variety of techniques, in particular, Milnor's work on real polynomials.

Keywords: Betti numbers, Eigenfunctions, Nodal set, Algebraic topology, Algebraic geometry

Table des matières

Remerciements

Ouf, ce mémoire aura été toute une expérience! Il y a une multitude de personnes que j'aimerais sincèrement remercier.

Tout d'abord, il y a mon directeur de recherche, Iosif Polterovich. Tout au long de cette aventure, il m'a offert du support sur plusieurs formes. Grâce à lui, j'ai pu accéder à l'école d'été de théorie spectrale 2016, où j'ai appris beaucoup sur le domaine et sur la communauté. Avec lui, j'ai pu obtenir du financement. Et à l'aide de ses multiples conseils, remarques et corrections, du début à la fin, j'ai pu mener à bien cette rédaction. De plus, en tant que directeur, il m'a laissé beaucoup de lattitude sur la façon de procéder, ce qui m'a permis de développer ma maturité mathématique à un niveau où je suis bien mieux préparé pour ce qui suit.

Je remercie tout particulièrement Philippe Charron, qui est aussi un étudiant de Iosif. Il a été un mentor pour moi durant le projet. Il m'a relancé toutes les fois où j'étais bloqué, avec des idées toujours très intéressantes. Souvent, une réflexion sur nos discussions m'a mené à trouver une solution à mon problème. Je remercie également les autres étudiants de Iosif, avec qui on tenait un séminaire de théorie spectrale qui nous permettait de rester à jour avec les résultats plus récents du domaine.

Une des personnes qui a rendu ce mémoire possible est Alexis Langlois-Rémillard. Il m'a fourni une grande aide pour le travail de planification, avec des conseils que je garderai pour les projets qui suivent. Lorsque nécessaire, ses critiques ont été très constructives. De plus, il a grandement contribué à la correction de mon brouillon, en me fournissant des modifications simples et précises. Sérieusement, merci beaucoup Alexis.

Ensuite, j'aimerais remercier plusieurs professeurs du département de mathématiques et statistique de l'Université de Montréal. Ça inclut Marlène Frigon, avec qui j'ai eu plusieurs conversations importantes, dont celle où elle m'a conseillé Iosif comme directeur de recherche.

Il y a aussi Yvan Saint-Aubin et Dimitris Koukoulopoulos, puisque même si j'avais l'habitude de me présenter sans rendez-vous, on avait toujours d'excellentes discussions mathématiques. Je fais un clin d'oeil aux cours que j'ai reçus de ces trois professeurs, qui m'ont permis de cultiver ma passion pour les mathématiques.

J'ai plusieurs amis et collègues qui m'ont procuré une aide importante lorsque j'en avais besoin. Je nomme Justin Bélair, Antoine Giard, Julie Kienzle, Dominique Beaini et Maude Sabourin qui ont été là, dans les hauts comme dans les bas, pour m'encourager, me conseiller, et avoir des discussions bien palpitantes. Je pense également à Jonathan Godin, qui m'a fourni le gabarit latex et qui m'a aidé à embellir le document final. Une indication d'Alexis Leroux-Lapierre m'a également été bien utile.

Je veux aussi prendre le temps de remercier ma très grande famille. Ils ont cru en mes capacités, et ce avant tout le monde. En particulier, je pense à ma mère. Honnêtement, je lui dois en partie ce mémoire. Le support matériel et moral qu'elle a fourni est incalculable. Même si elle ne sait peut-être pas à quel point, ses conseils et ses leçons ont été d'une aide capitale. Qui plus est, je n'aurais sans doute pas la « bosse des maths » si ce n'était pas de la sienne.

Pour terminer, je veux remercier les mathématiques en général, et pas seulement pour la raison triviale. Ce domaine a sincèrement changé ma vie. Dès le moment où j'ai vu le résultat $e^{i\pi} = -1$, j'ai été embarqué sur une autoroute sans sortie. Tout au long de mon parcours, j'ai été exposé à une beauté, un art, que je n'avais jamais vu auparavant.

Je pense à la définition des réels, tellement rigoureuse, mais tellement simple et précise. Je pense à la formule intégrale de Cauchy, où jusqu'à ce jour je me dois d'en refaire la preuve tellement c'est incroyable. Je pense à l'analyse fonctionnelle, où on dit « non! » à la restriction en dimension finie. Je pense à l'algèbre, où on extrait le jus des structures, où on étudie la nature même d'un espace. Et je pense aux modèles non-standards, où on concrétise l'abstraction.

En fait, je me rends compte qu'une partie de ce que j'adore des mathématiques, et un thème récurrent dans le paragraphe précédent, est le contrôle qu'on a sur l'objet. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, on n'a pas besoin de se restreindre à des règles. On peut les modifier à notre guise, pour correspondre à l'objectif qu'on se donne. -1 peut avoir une racine, on n'a pas besoin d'être en dimension trois, les infinitésimaux peuvent exister, $p \vee \neg p$ peut être une tautologie ou non. Et malgré cette grande liberté, l'espoir de bons résultats a raison d'être. Bien sûr, c'est aussi un remerciement envers la communauté mathématique en général, qui rend le tout possible.

Introduction

La théorie spectrale est une branche des mathématiques où on travaille avec le spectre d'un opérateur, le plus souvent dans la forme d'une équation aux dérivées partielles. Très fréquemment, l'équation considérée est la suivante :

$$\Delta u = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}, u \in C^\infty(M) - \{0\}.$$

Ici, $\Delta u = -div(\nabla(u))$ est appelé le laplacien de u, et c'est un opérateur qui apparaît naturellement dans plusieurs équations importantes, comme l'équation de la chaleur ainsi que l'équation des ondes. On assume que M est une variété lisse, et dans le cadre du texte, sans bord. Une solution u est appelée fonction propre et le λ correspondant valeur propre. Il est intéressant de constater que les solutions exhibent des propriétés remarquables.

Une façon de considérer ces propriétés est en étudiant l'ensemble nodal de u, c'est-à-dire la surface de niveau $u(x) = 0$. Un des intérêts pour cet objet provient des expériences de Chladni. Lorsqu'il mettait du sel sur une plaque, et qu'il faisait vibrer cette plaque à certaines fréquences précises, les grains de sels s'accumulaient sur des courbes qu'on appela plus tard lignes nodales. L'intérêt est alors de prédire le comportement de ces « lignes » nodales lorsqu'on modifie l'opérateur, la dimension ou la surface.

Si on veut comprendre la topologie de ces ensembles nodaux, alors un objet intéressant est le nombre de Betti tel que défini en 1.3.3. Ce nombre, qui est souvent calculable, compte intuitivement les trous de l'espace considéré. La question de comprendre la complexité des ensembles nodaux se transforme ainsi en : « pour une fonction propre u de Δ, peut-on borner adéquatement le nombre de Betti de l'ensemble nodal de u en fonction de sa valeur propre λ? » C'est alors cette question que ce mémoire va étudier.

À ce sujet, il n'y a que très peu de littérature. Des résultats qui s'y apparentent sont ceux de Milnor, Thom, Oleinik et Petrovskii [**M1, T**], qui seront utilisés en profondeur dans ce texte. Ceux-ci établissent que la somme des nombres de Betti des zéros communs d'un ensemble fini de polynômes est bornée par $d(2d-1)^{n-1}$, où d est le degré maximal et n est la dimension de l'espace. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, on a certains avancements de Lin et Liu [**LL**], qui étudient les solutions des équations élliptiques sur la boule.

On peut trouver bien plus de résultats si on regarde le nombre de Betti zéro, qui est en fait le nombre de composantes connexes. En effet, comme la proposition 3.3.14 l'indique, ce nombre est fortement lié au nombre de composantes connexes du complément, c'est-à-dire le nombre de domaines nodaux. Dans ce cas, on a le célèbre théorème de Courant, qui établit que le nombre de composantes connexes de la i-ème fonction propre est au plus i. De plus, il y a les résultats de Pleijel ([**P**]), qui établissent une borne asymptoptique. Des résultats ont aussi vu le jour dans [**P1**], ainsi que dans [**B**]. Dans le cas de la sphère et de l'espace projectif, on a aussi des résultats de Karpushkin [**K**] et de Leydold [**JL**].

Les nombres de Betti ne sont pas la seule façon d'étudier la topologie des fonctions propres. Par exemple, on peut passer par la théorie de l'homologie persistente ([**PPS**]).

Voici les résultats principaux. Pour une variété riemannienne compacte sans bord V, on considère $M_\lambda(V)$ comme l'espace engendré par les fonctions propres de valeur propre au plus λ. $\mathbb{S}^n$ est la sphère munie de sa métrique naturelle ronde, et $\mathbb{T}^n$ est le tore carré plat. De plus, on dénote par β le nombre total de Betti (dans la littérature, b est souvent utilisé).

- Théorème 3.1.4: si $f \in M_\lambda(\mathbb{S}^n)$, alors

$$\beta(f^{-1}(0)) \leq 2^{2n-1}\lambda^{\frac{n}{2}}.$$

- Théorème 3.2.3: si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$, alors $\beta(f^{-1}(0)) = \mathcal{O}_n(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$.
- Théorème 3.3.12: si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$, et que $n = 1,2,4$ ou 8, alors

$$\beta(f^{-1}(0)) \leq \sqrt{n}^n 2^{2n-1}\lambda^{\frac{n}{2}}.$$

Le chapitre 1 aura alors comme objectif d'établir les mathématiques nécessaires pour donner un sens rigoureux à notre problème. On y étudiera la théorie générale des variétés, la base de la théorie spectrale ainsi que la topologie algébrique permettant la définition des nombres de Betti. Dans le chapitre 2, on étudiera des outils centraux pour la preuve qu'on effectuera par la suite. La théorie de Morse, un théorème de type Bézout pour $\mathbb{R}$ et la preuve de Milnor pour les variétés algébriques seront décrites. Finalement, dans le dernier chapitre, on prouvera les théorèmes sur la sphère et le tore plat, puis on terminera avec un lien entre l'homologie de l'ensemble nodal et celle des domaines nodaux.

Chapitre 1

Notions préliminaires

L'objectif de ce chapitre est d'établir les concepts mathématiques nécessaires pour poser le problème. On discute surtout de la matière plutôt générale, qui est bien documentée et connue par la communauté. Bien qu'il y ait quelques preuves, la plupart des propositions ne seront pas démontrées. Les exemples utilisés sont ceux qui seront à l'étude dans le chapitre 3.

1.1. Variétés riemanniennes

Ici, on rappelle les définitions de variétés riemanniennes, et des concepts reliés. Plus précisément, on donnera des définitons des fonctions lisses, du gradient et de la divergence, tout en étudiant des propriétés comme les sous-variétés définies par une équation, le théorème de Sard et la partition de l'unité.

De multiples recueils et notes sont disponibles pour introduire les notions présentées ici, comme [**M2**], [**C**] ou [**L**].

Définition 1.1.1 (Variété lisse)**.** *Un espace topologique de Hausdorff V est une variété lisse de dimension n sans bord s'il est muni d'un ensemble (qu'on appellera atlas) fini de paires (U_α,ϕ_α), qu'on appellera cartes, tel que:*

- *$\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de V;*
- *$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$;*
- *Pour tout α,β, la transition $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est lisse.*

Aussi, pour deux variétés V_1 et V_2 de dimensions n_1 et n_2, une fonction continue $f : V_1 \to V_2$ est lisse si pour des cartes arbitraires (U_1,ϕ_1) de V_1 et (U_2,ϕ_2) de V_2, la fonction $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \to \mathbb{R}^{n_2}$ est lisse.

L'exemple le plus simple de variété lisse est $\mathbb{R}^n$ ou un de ses ouverts. La sphère et le tore sont deux exemples de variétés non-triviales qui seront vus plus en détail dans cette section.

La définition précédente nous permet, entre autres, de définir une courbe lisse comme étant une fonction lisse d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans V. On utilisera cela pour définir le plan tangent, bien que ce n'est pas la seule façon de le faire.

Définition 1.1.2 (Plan tangent). *Soit une variété V de dimension n et $p \in V$. Si $\gamma_1 :] - \epsilon_1,\epsilon_1[\to V$ et $\gamma_2 :] - \epsilon_2,\epsilon_2[\to V$ sont deux courbes lisses avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, on dit que γ_1 équivaut à γ_2 et on note $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si, pour une carte (U,ϕ) quelconque, $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$. Alors, $T_pV := \{\gamma$ courbes lisses sur $] - \epsilon,\epsilon[, \gamma(0) = p\}/ \sim$.*

Pour tout u dans $\mathbb{R}^n$, il existe γ une courbe lisse avec $\gamma(0) = p$ telle que $(\phi \circ \gamma)'(0) = u$. Donc, ϕ induit une bijection naturelle entre T_pV et $\mathbb{R}^n$. On munit alors T_pV d'une structure d'espace vectoriel de dimension n par cette bijection.

Une grande force du plan tangent T_pV est l'indépendance de la carte dans sa définition et sa structure. Par exemple, si v_1 et v_2 sont des vecteurs tangents à p (c'est-à-dire dans T_pV), alors $v_1 + v_2$, bien que défini par une carte, ne dépend pas de celle-ci. Cela nous permet de construire le fibré tangent TV, qui est l'ensemble des plans tangents (disjoints), muni d'une structure de variété lisse où TU_α correspond à l'ouvert $\phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$. La dimension est de $2n$. Par exemple, le fibré tangent d'un ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$ est (topologiquement) $O \times \mathbb{R}^n$.

De ce fait, on est capable de définir la notion de champ vectoriel, ainsi qu'une métrique riemannienne sur M:

Définition 1.1.3 (Champs et métrique). *Un champ vectoriel X est une fonction lisse $V \to TV$ telle que $\forall p \in V$, $X(p) \in T_pV$. Une métrique riemannienne g est alors, en chaque p, un produit scalaire g_p sur T_pV tel que pour n'importe quelle paire de champs X et Y, $p \to g_p(X(p),Y(p))$ est une fonction lisse. Une variété riemannienne (V,g) est alors une variété lisse munie de la métrique riemannienne g sur V*

Il est temps de parler de coordonnées locales. Pour chaque carte (U_α,ϕ_α), on a une base naturelle du plan tangent en un point $p \in U_\alpha$, donnée par le transfert par une carte des droites des axes. Avec cette base, qu'on appellera $B_{p,\alpha}$ on peut donner une matrice qui indique le produit scalaire selon la base, dont les éléments sont nommées g_{ij}. On peut alors faire des calculs plus explicites sur les objets qu'on étudiera. Comme g_p est défini positif, la matrice est inversible, avec les coordonnées de l'inverse notées g^{ij}.

Définition 1.1.4 (Dérivée et point critique)**.** *Soit $f : V_1 \to V_2$ une fonction lisse. Pour $p \in V_1$, on définit la dérivée (de Fréchet) de f en p comme l'application linéaire $Df_p : T_pV_1 \to T_{f(p)}V_2$ telle que pour v_1, un vecteur tangent à p donné par la courbe γ, $Df_p(v_1)$ est le vecteur tangent associé à la courbe $f \circ \gamma$. La dérivée de f est alors la fonction lisse $Df : TV_1 \to TV_2$.*

On dit que p est un point critique de f si la dérivée Df_p est de rang non-maximal. Un point $y \in V_2$ est une valeur critique de f s'il existe p un point critique de f avec $f(p) = y$.

Remarque 1.1.5. *On note, une fois de plus sans preuve, que tout est bien défini. En ce qui concerne les points critiques, dans le cas où $V_2 = \mathbb{R}$, p est un point critique si $Df_p = 0$, alors que lorsque $V_2 = V_1$, ça arrive si Df_p n'est pas un isomorphisme.*

Une notion importante pour le texte est celle de sous-variété. Une sous-variété $M \subset V$ est définie naturellement comme une structure de variété sur M, où la topologie est induite par celle de M. On a dans les propriétés que T_pM est (à inclusion canonique près) un sous-espace de T_pV. De plus, si f est une fonction lisse sur V, alors elle l'est sur M, et $D(f|_M) = (Df)|_{TM}$. Finalement, si V admet la métrique riemannienne g, celle-ci induit naturellement une métrique sur M. Voici une classe importante de sous-variétés, données par le théorème de la fonction implicite.

Proposition 1.1.6. *Soit une fonction lisse $f : V \to W$, pour $dim(V) \geq dim(W)$. Si 0 n'est pas une valeur critique de f, et que $f^{-1}(0)$ est compact et non-vide, alors $f^{-1}(0)$ est une sous-variété de V de dimension $dim(V) - dim(W)$. De plus, pour $p \in f^{-1}(0)$, $T_pf^{-1}(0) = \ker(Df_p)$.*

La définition suivante nous permet de définir un champ d'importance capitale, le champ gradient. Elle se base sur le théorème de représentation de Riesz, qui garantit que le produit scalaire représente bien les fonctions linéaires sur un espace.

Définition 1.1.7 (Gradient)**.** *Soient V, une variété lisse munie de la métrique g, et $f : V \to \mathbb{R}$, une fonction lisse. Alors, le gradient $\nabla f : V \to TV$ est le champ vectoriel sur V tel que $\forall p \in V, u \in T_pV$, $g_p(u,\nabla f(p)) = Df_p(u)$. Ici, pour $t \in \mathbb{R}$, on identifie $T_t\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}$, donc $Df_p(u)$ est bien un nombre réel, qui est la dérivée de f dans la direction u.*

On a donc que le gradient est un représentant fidèle de la dérivée de f. Les propriétés suivantes, qui utilisent seulement la définition, établissent bien cette affirmation :

- p est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(p) = 0$;

- Si $M \subset V$ est une sous-variété, et $p \in M$, alors $\nabla(f|_M)(p) = \mathrm{proj}_{T_pM} \nabla f(p)$;
- Si 0 n'est pas une valeur critique de f, alors $\forall p \in f^{-1}(0)$, $\nabla f(p)^\perp = T_p f^{-1}(0)$.

Ici, $\mathrm{proj}_W v$ est la projection orthogonale du vecteur v sur le sous-espace W. Pour voir ce qui se passe en coordonées locales, il s'agit de trouver u_0 de T_pM qui résout les équations suivantes, pour $v \in T_pM$ arbitraire:

$$df_p(v) = g_p(\nabla f(p), v) = [\nabla f(p)]_{B_p}[g(p)][v]_{B_p}$$
$$\implies [\nabla f(p)]_{B_p} = [\partial_1 f(p), \ldots, \partial_n f(p)][g(p)]^{-1} = [\sum_{j=1}^n g^{j1}\partial_j f(p), \ldots, \sum_{j=1}^n g^{jn}\partial_j f(p)].$$

On a pu avoir la dernière égalité en passant aux coordonnées locales, avec ∂_i étant la dérivée partielle par rapport à la direction x_i, et B_p étant la base donnée par les coordonnées locales.

Ces dernières propositions nous permettent de définir, ou de comprendre certaines variétés. Deux exemples fondamentaux, qui seront à l'étude plus tard, sont proposés ici.

Définition 1.1.8. *La sphère dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est donnée par $\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} | \|u\|^2 = 1\}$.*

Proposition 1.1.9. *$\mathbb{S}^n$ est une variété plongée de dimension n. De plus, $T_p\mathbb{S}^n = p^\perp$.*

Démonstration. Sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $\nabla\|\vec{x}\|^2 = 2\vec{x}$. Donc, aucun point critique n'est atteint sur $\mathbb{S}^n = (\|\cdot\|^2)^{-1}(\{1\})$, ce qui en fait une variété riemannienne de dimension $(n+1) - 1 = n$ par la proposition 1.1.6 (on note que la sphère est certainement compacte). □

Remarque 1.1.10. *En ce qui concerne la structure d'atlas, plusieurs façons de faire existent. Une qui est élégante est la projection stéréographique. Celle-ci donne l'atlas $\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$, avec $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, $\phi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_1$ donnée par $\phi_1^{-1}(u) = (\frac{2}{\|u\|^2+1}u, \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1})$, et $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ avec $\phi_2^{-1}(u) = (\frac{2}{\|u\|^2+1}u, \frac{1-\|u\|^2}{\|u\|^2+1})$. On note que $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n - 0$, et que $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|^2}$, qui est effectivement lisse sur son domaine.*

Définition 1.1.11. *Le tore carré plat de dimension n est donné par $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$.*

On a que le quotient donne naturellement une structure d'atlas, où les cartes sont fournies par des ouverts de diamètres en déçà de 2π. La métrique plate de $\mathbb{R}^n$ transfère aussi bien dans $\mathbb{T}^n$, d'où l'adjectif plat. Donc, $g_{ij} = \delta_{ij}$ en tout point p, pour une carte fournie par l'atlas utilisé.

Proposition 1.1.12. *La fonction* $\Pi : \mathbb{T}^n \to (\mathbb{S}^1)^n \subset \mathbb{C}^n$ *qui associe* $(\theta_1 \dots \theta_n)$ *à* $(e^{i\theta_1}, \dots e^{i\theta_n})$ *est une isométrie de varétés riemanniennes, c'est-à-dire que* Π *est un difféomorphisme, et* $D\Pi_\Theta$ *est une isométrie pour tout* $\Theta \in \mathbb{T}^n$.

Remarque 1.1.13. *En fait,* $(\mathbb{S}^1)^n$ *est souvent nommé le tore de Clifford. Il représente un plongement naturel du tore dans un espace euclidien, et est donné par* $\{(x_1,y_1, \dots x_n,y_n) | x_k^2 + y_k^2 = 1, 1 \leq k \leq n\}$.

Une classe d'objets notoire est celle des formes différentielles. La théorie est extrêmement jolie (notamment avec le théorème de Stokes), elle permet de donner un sens clair à certains des objets qu'on s'apprête à définir, et ses résultats sont très utiles, voire nécessaires, aux preuves de plusieurs théorèmes qui seront énoncés, comme la symétrie du laplacien via l'intégration par parties. Cependant, on ne l'abordera pas, car elle est large et elle n'est pas utilisée dans les chapitres 2 ou 3. On utilisera plutôt une approche calculatoire pour définir ce dont on a besoin, notamment la forme volume et la divergence. Un outil qui nous aidera est la partition de l'unité.

Proposition 1.1.14 (Partition de l'unité)**.** *Soit* V*, une variété compacte sans bord munie de l'atlas* $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\ \}$*. Il existe* $\{\varphi_\alpha : V \to \mathbb{R}\}$*, toutes des fonctions lisses, telles que:*

- $\varphi_\alpha \geq 0$;
- *supp*$(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$;
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$.

La force de cette proposition est de permettre le passage du local au global dans plusieurs scénarios. Entre autres, ça fournit une preuve du fait que toute variété lisse admet une métrique riemannienne. Une autre est la suivante. Soit $D = \{d_1 \dots d_n\}$, une base de $\mathbb{R}^n$. Soit M, la matrice $n \times n$ avec $M_{ij} = d_i \cdot d_j$. Alors, on a $M = D^T D$, où les vecteurs colonnees de D sont les d_j. De là, on a $\det(M) = \det(D)^2 =$ (Volume du parallépipède formé par $D)^2$. Ça nous permet alors, sur V de dimension n, de « définir l'élément de volume » $d|g| = \sqrt{|\det([g_p])|}d\theta_1 \dots d\theta_n$. Plus rigoureusement, et en utilisant la partition de l'unité, on a la définition suivante :

Définition 1.1.15. *Soit* V*, une variété compacte sans bord de dimension* n*, munie de son atlas* $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ *et de sa partition de l'unité* $\{\varphi_\alpha\}$*. Pour une métrique riemannienne* g*, on* *définit une mesure sur les boréliens de V, telle que:*

$$\mu(A) = \int_V \chi_A d|g| := \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha \chi_A \sqrt{|\det([g])|}) \circ \phi_\alpha^{-1}(\theta_1 \dots \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Chacune des intégrales est effectuée selon Lebesgues.

On note que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'atlas ou de la partition choisie, notemment grâce au théorème de changements de variables. Aussi, comme un ensemble mesurable selon Lebesgues peut être défini par pour tout α, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap A)$ est mesurable, on peut ne pas se restreindre aux boréliens dans la définition précédante. Tout ça nous permet de définir l'espace de Hilbert $L^2(V)$, qui sera important pour le théorème spectral. Notons que comme V est compact, $C^\infty(V) \subset L^2(V)$.

La notion de mesure, en particulier de mesure nulle, nous permet d'énoncer le théorème de Sard.

Théorème 1.1.16 (Sard)**.** *Soit une V et W, des variétés lisses, avec* $\dim(W) \geq 1$, *et $f : V \to W$, une fonction lisse. Alors, l'ensemble des valeurs critiques de f dans W est de mesure nulle.*

Remarque 1.1.17. *Il n'a pas été supposé que W était munie d'une métrique g. En fait, être de mesure nulle est indépendant de celle-ci.*

Le dernier objet à définir dans cette section est la divergence d'un champ vectoriel. Habituellement, on utilise les formes différentielles ainsi que l'opérateur appelé « Hodge Star », mais on peut directement donner une formule en coordonnées locales qui ne dépend que de la métrique riemannienne.

Définition 1.1.18 (Divergence)**.** *Soit V, une variété lisse munie de la métrique g, et X, un champ vectoriel sur V. Fixons un point p et la base locale du plan tangent $B = \{x^1, \dots x^n\}$ donnée par les axes, de telle sorte qu'autour de p, $X(u) = \sum_{i=1}^n b_i(u) x^i(u)$. Alors, on définit*

$$div_g X(p) = \frac{1}{\sqrt{|\det([g])|}} \sum_{k=1}^n \partial_k (b_k \sqrt{|\det([g])|}).$$

Globalement, la divergence $div_g X : V \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. Parfois, on note la divergence $\nabla \cdot X$ (∇_g si le choix de métrique porte à confusion).

1.2. Théorie spectrale

Dans cette section, on étudie le laplacien, qu'on appelle aussi couramment opérateur de Laplace ou opérateur de Laplace-Beltrami. Entre autres, on y voit ses propriétés, le théorème spectrale, le quotient de Rayleigh et le théorème de Courant auquel on s'attarde, vu son importance dans le texte. On énonce également la loi de Weyl, dans l'optique d'analyser quels types de résultats seront recherchés dans le chapitre 3.

Comme à la section précédente, de multiples livres et documents existent sur le sujet, où [**C1**] et [**C**] sont des exemples.

Définition 1.2.1 (Laplacien). *Soit V, une variété avec une métrique riemannienne g. Alors, l'opérateur Δ_g, ou Δ est:*

$$\Delta_g : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$
$$f \to \Delta_g f = -div_g \nabla f.$$

En coordonnées locales, on a donc

$$\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{|\det([g])|}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (g^{ij} \sqrt{|\det([g])|} \partial_i f).$$

Remarque 1.2.2. *L'opérateur est souvent défini comme $div_g \nabla f$, sans le signe « − ». Ces deux façons ne sont fondamentalement pas différentes, mais le signe assure que Δ est semi-défini positif au lieu de semi-défini négatif. Autrement, l'opérateur considéré serait $-\Delta$ dans ce qui suit.*

On note que Δ est un opérateur linéaire. Pour une variété riemannienne (V,g), le problème classique de valeurs propres consiste alors à chercher les solutions non-triviales de l'équation :

$$\Delta f = \lambda f. \tag{1.2.1}$$

Proposition 1.2.3. *On a que Δ est un opérateur symétrique sur $C^\infty(V)$, c'est-à-dire que pour tout $f,g \in C^\infty(V)$, $(\Delta f,g) = (f,\Delta g)$. De plus, pour tout $f \in C^\infty(V)$, $(\Delta f,f) \geq 0$, donc Δ est semi-défini positif.*

Cette dernière proposition donne l'intuition nécessaire pour apprécier le théorème spectral. En effet, en dimension finie, l'algèbre linéaire nous dicte qu'un opérateur symétrique jouit d'une base orthoganale de vecteurs propres à valeurs propres réelles, non-négatives si l'opérateur est semi-défini positif. Bien que la preuve ne soit pas aussi simple en dimension infinie (surtout pour un opérateur non-borné comme Δ), on a tout de même le théorème spectral.

Théorème 1.2.4 (Théorème spectral)**.** *Soit (V,g), une variété riemannienne compacte sans bord. Alors, il existe une suite $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \nearrow \infty$, ainsi qu'une base hilbertienne de $L^2(V)$ $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, où toutes les f_i sont $C^\infty(V)$ avec $\Delta f_k = \lambda_k f_k$.*

Remarque 1.2.5. *Ce théorème s'applique sur des cas plus généraux que celui d'une variété compacte sans bord. En fait, si on permet aux variétés d'avoir un bord, alors il faut définir des conditions frontières. Pour les conditions les plus populaires, comme Neumann et Dirichlet, on bénéficie aussi d'une version du théorème spectral.*

Proposition 1.2.6 (Continuation unique)**.** *Supposons que (V,g) soit une variété riemannienne connexe et que f soit une solution de $\Delta f = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. S'il existe un ouvert $U \subset V$ non-vide tel que $f|_U = 0$, alors $f = 0$.*

Retournons aux deux exemples de la section précédente. Pour la sphère, la proposition suivante nous indique alors comment trouver les valeurs propres et les fonctions propres.

Proposition 1.2.7. *Pour une fonction lisse $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, on peut écrire le laplacien en coordonnées sphériques :*

$$\Delta f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^n} f.$$

Cela nous permet de trouver directement les fonctions propres du laplacien sur la sphère:

Proposition 1.2.8. *Sur $\mathbb{S}^n$, chaque fonction propre u de $\Delta_{\mathbb{S}^n}$ est donnée par $u = P_u|_{\mathbb{S}^n}$, où P_u est un polynôme homogène et harmonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$. La valeur propre correspondante est alors donnée par* $\deg(P_u)(\deg(P_u) - 1 + n)$.

Remarque 1.2.9. *Bien qu'il soit direct de montrer que les polynômes homogènes harmoniques sont bien des fonctions propres à l'aide de la proposition 1.2.7, il n'est pas clair que toutes les fonctions propres sont bien de cette forme.*

Pour le tore, le laplacien est très familier, car la métrique riemanienne est celle de $\mathbb{R}^n$. En effet, $\Delta = -(\partial_1^2 + \dots \partial_n^2)$. Alors, on a une caractérisation claire dans ce cas-ci.

Proposition 1.2.10. *Une base orthonogonale propre de $\Delta_{\mathbb{T}^n}$ est donnée par les $\{\Theta \to e^{ik\cdot\Theta} | k \in \mathbb{Z}^n\}$, avec les valeurs propres correspondantes étant les $\|k\|^2$.*

Remarque 1.2.11. *On pourrait remplacer les exponentielles à valeurs complexes par des polynômes en* sin *et* cos*, mais la formulation serait bien moins élégante.*

On peut se poser naturellement comme question : « À quel point on peut comprendre le comportement d'une fonction propre à partir de sa valeur propre? » L'idée est qu'une façon d'étudier cette question est d'étudier l'ensemble nodal ainsi que les domaines nodaux.

Définition 1.2.12. *Pour une fonction lisse $f : V \to \mathbb{R}$, l'ensemble nodal est $N(f) := f^{-1}(0)$, muni de la topologie induite. Un domaine nodal est alors une composante connexe de $V - N(f)$.*

Alors, la question devient : « peut-on contrôler la complexité des ensembles et domaines nodaux des fonctions propres à l'aide des valeurs propres? » Pour y répondre, on utilise le quotient de Rayleigh.

Définition 1.2.13. *Soit $f \in C^\infty(V)$ non-nulle, où V reste une variété riemannienne compacte sans bord. Alors, on définit le quotient de Rayleigh $R(f) = \frac{(\Delta f,f)}{(f,f)}$.*

Remarque 1.2.14. *On peut montrer, en utilisant la théorie des formes différentielles (l'intégration par parties, pour être plus précis), que:*

$$R(f) = \frac{\int_M \|\nabla f\|^2 d\mu}{\int_M |f|^2 d\mu}.$$

Cette constatation mène à une généralisation importante. On peut définir l'espace de Sobolev $H^1(V)$ à l'aide de la théorie des distributions. Entres autres, cet espace comprend les fonctions continues et lisses par morceaux. Cela nous permet de bien définir $R(f)$ sur de telles fonctions.

Une des grandes raisons qui rendent cet objet central en théorie spectrale est le résultat suivant.

Théorème 1.2.15 (Principe du minimax)**.** *Si $f \in H^1(V) \setminus \{0\}$ est orthogonal à $M_j = \mathrm{span}\{f_k\}_{k=0}^{j-1}$, les j premières fonctions propres de $-\Delta$, alors $R(f) \geq \lambda_j$, avec égalité seulement si f est une fonction propre.*

De plus, la $j+1$-ième valeur propre du laplacien est donnée par:

$$\lambda_j = \min_N \max_{f \in N-0} R(f).$$

Ici, les N sont les sous-espaces de dimension $j+1$ de H.

Ce dernier théorème est central pour prouver, entre autres, le théorème de Courant.

Théorème 1.2.16 (Courant)**.** *Supposons que V est connexe. Si f est une fonction propre de la j-ième valeur propre (λ_{j-1}), alors le nombre de domaines nodaux de f est au plus j.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'on ait (au moins) $V_1, \ldots, V_j, V_{j+1}$, des domaines nodaux distincts de f. Alors, pour tout k entre 1 et j, $f \cdot \mathbf{1}_{V_k}$ est continue (f vaut 0 sur ∂V_k) et lisse par morceaux, donc dans $H^1(V)$.

On note que $\dim(\text{span}(\{f\mathbf{1}_{V_k}\}_{k=1}^{j}))>\dim(M_{j-1})$, donc on peut trouver $\hat{f} \in \text{span}(\{f\mathbf{1}_{V_k}\}_{k=1}^{j})$ non-nul avec $\hat{f} \perp M_{j-1}$. On a donc, (avec c_k, la composante de $f\mathbf{1}_{V_k}$):

$$\begin{aligned} R(\hat{f}) &= \frac{\int_M \|\nabla \hat{f}\|^2 d\mu}{\int_M |\hat{f}|^2 d\mu} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{j} \int_{V_k} \|\nabla \hat{f}\|^2 d\mu}{\sum_{k=1}^{j} \int_{V_k} |\hat{f}|^2 d\mu} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \int_{V_k} \|\nabla f\|^2 d\mu}{\sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \int_{V_k} |f|^2 d\mu}. \end{aligned}$$

Comme $f = 0$ sur ∂V_k, on a, avec l'intégration par parties, que $\int_{V_k} \|\nabla f\|^2 d\mu = \int_{V_k} \Delta f \cdot f d\mu = \lambda_{j-1} \int_{V_k} |f|^2 d\mu$. Alors, on a que $R(\hat{f}) = \lambda_{j-1}$. Par le principe du minimax, on a que $\hat{f}$ est une fonction propre de valeur propre λ_{j-1}. Or, $\hat{f}$ est nulle sur V_{j+1}. Par la proposition 1.2.6, $\hat{f} = 0$ sur V, contredisant sa définition.

□

Voici le dernier théorème de cette section, qui nous sera utile pour à des fins d'analyse.

Théorème 1.2.17 (Loi de Weyl)**.** *Pour la variété riemannenne (V,g) de dimension n, si $N(\lambda) = \#\{l \geq 0 | \lambda_l \leq \lambda\}$, la fonction qui compte le nombre de valeurs propres avec multiplicité, alors on a la formule asymptotique*

$$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} vol_g(V) \lambda^{n/2}.$$

Ici, ω_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.18. *Dans la section suivante, on va définir les nombres de Betti de certains espaces, qui donnent encore plus d'informations sur la complexité que le nombre de composantes connexes. En fait, cette dernière quantité est représentée par β_0, le nombre de Betti* 0*. En vertu de la loi de Weyl, le théorème de Courant nous dit que pour la fonction propre f de valeur propre λ_j, $\beta_0(V \setminus f^{-1}(0)) \leq j + 1 \leq N(\lambda_j) = \mathcal{O}_n(\lambda_j^{n/2})$. Le défi du chapitre 3 sera de trouver une borne semblable pour les nombres de Betti de $f^{-1}(0)$ sur certaines variétés.*

1.3. Topologie algébrique

Pour le reste du chapitre, on va changer un peu de registre. Le but va être d'étudier des concepts d'homologie comme les nombres de Betti. Les structures de CW-complexes seront également vues avec exemples importants, ainsi que des propositions qui seront utiles par la suite. Ça reste un survol des notions importantes pour ce mémoire, et une étude plus approfondie peut être trouvée en [**H**], [**G**] et [**DK**].

Le but d'une théorie de l'homologie est d'attacher une structure algébrique à un espace topologique, si bien que des calculs directs sur la structure algébrique nous permette de comprendre le comportement de l'espace topologique. Les axiomes suivants sont une façon de concrétiser cet objectif.

Définition 1.3.1 (Axiomes Eilenberg-Steenrod)**.** *Une théorie de l'homologie H avec coefficients dans l'anneau R est un foncteur covariant d'une sous-catégorie des paires d'espaces topologiques (X,A), $A \subseteq X$ vers la catégorie des R-modules gradués (suites de modules). On note $H(X,A) = \{H_n(X,A)\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $H_n(X) = H_n(X,\emptyset)$. Pour que H soit bien une théorie de l'homologie, on demande les axiomes suivants:*

- *Un opérateur bord $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ tel que la suite longue $\ldots H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \ldots$ est exacte. Les morphismes i_* et j_* sont induits par les inclusions de paire.*
- *H est invariant sous l'homotopie, c'est-à-dire que si $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ sont homotopes, alors $H_n(f) = H_n(g) : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$. On note f_* le morphisme de chaines induit par f selon H_n. En particulier, deux espaces d'homotopie du même type auront la même homologie.*
- *Le principe d'excision : Pour une paire (X,A) et pour W, un sous-ensemble avec $\overline{W} \subset int(A)$, l'égalité $H_n(X,A) = H_n(X \setminus W, A \setminus W)$ est respectée.*
- *Dimension: Pour un point P, $H_n(P) = 0$ si $n \neq 0$, et $H_0(P) = R$.*
- *Si $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$, alors $\oplus_\alpha (i_\alpha)_* : \oplus_\alpha H_n(X_\alpha) \to H_n(X)$ est un isomorphisme (i_α reste l'inclusion $X_\alpha \hookrightarrow X$).*

Remarque 1.3.2. *On note souvent $H_{-n}(X,A) = 0$ pour ne pas avoir à faire une exception sur la suite exacte en $n = 0$. Aussi, certaines théories ne satisfont pas tous les axiomes, mais restent tout de même intéressantes.*

Les axiomes ci-dessus sont pour une théorie « classique » d'homologie. On a également le concept dual de théorie de cohomologie, avec des axiomes semblables, mais où le foncteur de cohomologie est contravariant, la suite longue est dirigée de l'autre sens, et l'opérateur bord ∂ est remplacé par l'opérateur co-bord δ. On note le n-ième module H^n au lieu de H_n.

Un fait important est qu'il y a plusieurs théories importantes de cohomologie et d'homologie respectant ces axiomes. Elle ne sont pas toujours identiques, et chacune a son champ d'intérêt. D'ici la fin du chapitre, on verra des propriétés communes à toutes les théories d'homologie, ainsi que de cohomologie lorsque nécessaire. De plus, on assumera $R = \mathbb{Z}$, de façon à ce que $H_n(X)$ soit déterminé complètement par sa structure de groupe abélien.

Définition 1.3.3 (Nombres de Betti)**.** *Pour un espace topologique X sur lequel la théorie H s'applique, on définit $\beta_n^{(H)}(X)$ comme le rang de $H_n(X)$ (la taille maximale d'un ensemble linéairement indépendant). De plus, on définit $\beta^{(H)}(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n^{(H)}(X)$, qui est le rang de $H_*(X) := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(X)$. Si la théorie de l'homologie utilisée est claire ou sans importance, alors on peut omettre le H de $\beta_n(X)$ et $\beta(X)$. La définition s'applique aussi pour une théorie de cohomologie.*

Remarque 1.3.4. *La définition reste valide même lorsque le rang de $H_n(X)$ est infini. Pour des espaces relativement simples, comme des variétés compactes, $\beta(X) < \infty$.*

L'homologie de paire est très utile pour établir plusieurs théorèmes d'importance de la théorie. Ceci dit, dans plusieurs scénarios, dont celui de ce texte, ce qui est recherché au final est seulement par rapport à $H_n(X)$ et non $H_n(X,A)$. Le théorème suivant permet parfois de travailler avec $H_n(X)$, sans avoir à considérer des paires.

Théorème 1.3.5 (Mayer-Vietoris)**.** *Soit l'espace X, et les sous-espaces A et B, de telle façon à ce que $X = int(A) \cup int(B)$. Alors, il existe $e : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ tel que la suite $\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} H_n(X) \xrightarrow{e} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$ est exacte. On appelle celle-ci la suite de Mayer-Vietoris.*

Corollaire 1.3.6. *Si X, A et B respectent les conditions du théorème précédent, alors $\beta_n(A) + \beta_n(B) \leq \beta_n(X) + \beta_n(A \cap B)$. En particulier, $\beta(A) + \beta(B) \leq \beta(X) + \beta(A \cap B)$.*

Démonstration. On a que $\beta_n(A) + \beta_n(B) = \mathrm{rg}(\ker(j_{A*} - j_{B*})) + \mathrm{rg}(\mathrm{im}((j_{A*} - j_{B*}))) = \mathrm{rg}(\mathrm{im}(i_{A*} \oplus i_{B*})) + \mathrm{rg}(\mathrm{im}((j_{A*} - j_{B*}))) \leq \beta_n(A \cap B) + \beta_n(X)$. □

Remarque 1.3.7. *On utilise que pour un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $f : A \to B$,* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\ker(f)) + \mathrm{rg}(\mathrm{im}(f))$. *Ça n'est pas aussi trivial que dans les espaces vectoriels, et ça n'est pas nécessairement vrai pour n'importe quel anneau.*

Une classe très importante d'espaces pour étudier l'homologie est celle des CW-complexes. Pour cette classe d'ensembles, les axiomes Eilenberg-Steenrod sont parfaitement suffisants pour déterminer les groupes d'homologie. En fait, on est capable de construire ce qu'on appelle l'homologie (ou la cohomologie) cellulaire afin de pouvoir effectuer des calculs clairs.

Définition 1.3.8 (CW-complexe)**.** *On utilise une définition inductive. Un* 0*-squelette est un ensemble de points $X^{(0)}$ muni de la topologie discrète. Pour $n \geq 1$, une n-cellule D^n_σ est une copie du disque D_n.*

Alors, soit un $(n-1)$-squelette $X^{(n-1)}$, un ensemble $\{D^n_\sigma\}$ de n-cellules (qui peut être vide) ainsi que, pour chaque cellule, une fonction continue $f_\sigma : \partial D^n_\sigma \to X^{(n-1)}$ qu'on appelle application d'attachement. On définit le n-squelette comme l'espace topologique $X^{(n)} = X^{(n-1)} \sqcup (\bigsqcup_\sigma D^n_\sigma)/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par les applications d'attachement.

Alors, X admet une structure de CW-complexe si on peut construire une suite de squelettes $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots$ telle que X est homéomorphe à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}$. Le CW-complexe est dit de dimension n si toutes les cellules utilisées sont de dimension n au plus.

Si on retourne à nos deux exemples précédents, la sphère et le tore admettent tous deux des structures de CW-complexe. Pour $\mathbb{S}^n$, la construction est directe. On prend $K^{(0)}$ comme étant un point p. On construit directement $K^{(n)}$ par l'attachement trivial $\mathbb{S}^{n-1} \to p$. Le résultat est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Pour le tore, on a que $\mathbb{T}^n$ est essentiellement le cube $[0,1]^n$, où on identifie 1 avec 0. Ça nous dit alors quelles seront nos cellules. En effet, une cellule de notre structure est un ensemble de la forme $\prod_{i=1}^n J_i$, avec J_i est soit $0 \equiv 1$, soit $[0,1]$. Alors, une k-cellule est une cellule où $J_i = [0,1]$ pour k indices. La k-cellule a alors comme bord une union de $(k-1)$-cellules, ce qui nous donne directement le recollement. Puisque construire une k-cellule du CW-complexe consiste à choisir les k indices où $J_i = [0,1]$, on trouve que le nombre de k-cellules de la structure est $\binom{n}{k}$.

Le théorème suivant est central pour se permettre le choix d'homologie la plus pertinente dans le contexte, sans changer les groupes obtenus.

Théorème 1.3.9 (Unicité de l'homologie pour les CW-complexes). *Si X a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe, alors les axiomes Eilenberg-Steenrod déterminent complètement l'homologie de X à isomorphisme près, en supposant que l'anneau des coefficients est $\mathbb{Z}$. De même, les axiomes pour la cohomologie suffisent à caractériser $H^n(X)$. Finalement, on a que $\beta_n(X)$ est tout au plus le nombre de n-cellules utilisées.*

Remarque 1.3.10. *Pour démontrer ce théorème, on utilise en fait l'homologie cellulaire (et sa cohomologie duale), une théorie de l'homologie qui se base directement sur la structure de CW-complexe. C'est la raison pourquoi en dehors des CW-complexes, les (co)homologies peuvent différer. Aussi, la borne sur le nombre de Betti vient du fait que le H_n est obtenu par un quotient d'un sous-groupe du groupe abélien libre sur les n-cellules. Cette borne est parfois optimale, par exemple lorsque le bord est « trivial ».*

On peut utiliser la dernière partie du théorème pour estimer l'homologie du tore et de la sphère. On a $\beta_k(\mathbb{S}^n) \leq \delta_{1,k}+\delta_{n,k}$ et $\beta_k(\mathbb{T}^n) \leq \binom{n}{k}$. Dans les deux cas, en utilisant directement l'homologie cellulaire, on se rend compte que ce sont en fait des égalités.

Proposition 1.3.11 (Homologie du tore et de la sphère). *Pour n'importe quelle (co)homologie respectant Eilenberg-Steenrod, on a*

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{S}^n) &\simeq \mathbb{Z}^{\delta_{1,k}+\delta_{n,k}}; \\ H_k(\mathbb{T}^n) &\simeq \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}. \end{aligned}$$

Une des parties intéressantes du théorème précédent est que la classe des espaces de même type d'homotopie qu'un CW-complexe comprend plusieurs objets avec lesquels on va travailler dans les chapitres suivants.

Proposition 1.3.12. *Les variété lisses et les variétés algébriques (qui sont triangularisables) ont le même type d'homotopie qu'un CW-complexe de même dimension. Dans les deux cas, si la variété est compacte, le nombre de cellules utilisées peut être fini. En particuler, le nombre total de Betti d'une variété (lisse ou algébrique) compacte est fini.*

Remarque 1.3.13. *Dans le chapitre suivant, on verra plus directement le cas des variétés lisses avec la théorie de Morse.*

Pour terminer, on va énoncer des propriétés de la théorie en lien avec les limites directes. Aussi, on va étudier la dualité d'Alexander, qui sera utlilisée dans le chapitre suivant.

Définition 1.3.14 (Limites directes)**.** *L'ensemble ordonné* $(I, \leq)$ *est dit filtrant si toute paire d'éléments possède un majorant. Pour un tel ensemble, un système inductif de* $\mathbb{Z}$*-modules est un ensemble de* $\mathbb{Z}$*-modules* $\{A_i\}_{i\in I}$ *muni d'un ensemble de morphismes* $\{f_{ji} : A_i \to A_j\}_{i\leq j}$ *tel que* $f_{ii} = Id_{A_i}$ *et pour* $i \leq j \leq k$, $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$.

La limite directe d'un tel système, dénotée $L = \varinjlim A_i$, *est un* $\mathbb{Z}$*-module muni des morphismes* $\phi_i : A_i \to L$ *tels que si* $i \leq j$, $\phi_j \circ f_{ji} = \phi_i$*. De plus,* L *jouit de la propriété d'universalité: si le* $\mathbb{Z}$*-module* K*, muni des morphismes* $g_i : A_i \to K$*, possède la même propriété, alors il existe un unique morphisme* $g : L \to K$ *tel que pour chaque* $i \in I$, $g_i = g \circ \phi_i$.

Remarque 1.3.15. *Dans le cas des* $\mathbb{Z}$*-modules, on peut montrer que la limite directe existe toujours, et donner une construction explicite. Aussi, la propriété d'universalité assure que la limite directe est unique à isomorphisme près. On peut également définir la limite inverse, et généraliser le tout sur des catégories arbitraires, mais ce n'est pas nécessaire pour ce qui suit.*

Proposition 1.3.16. *Soient* $(I, \leq)$ *un ensemble ordonné filtrant et le système inductif de* $\mathbb{Z}$*-modules* $(\{A_i\}_{i\in I},\{f_{ji}\}_{i\leq j})$*. Alors,* $\mathrm{rg}(\varinjlim A_i) \leq \sup_{i\in I} \mathrm{rg}(\phi_i)$*. En particulier,* $\mathrm{rg}(\varinjlim A_i) \leq \sup_{i\in I} \mathrm{rg}(A_i)$

Démonstration. Soit L, la limite directe. Tout d'abord, on peut montrer que pour chaque x élément de L, il existe $i \in I$ tel que $x \in \mathrm{im}(f_i)$. La construction explicite le démontre, mais on peut aussi utiliser la propriété d'universalité de façon élémentaire.

Soit $\{x_1, \ldots, x_k\}$, un système linéairement indépendant de L. Soient $i_1, \ldots, i_k \in I$ tels que $x_j \in \mathrm{im}(\phi_{i_j})$. Par définition de I appliquée plusieurs fois, on peut trouver i, un majorant des i_j. Puisque $\phi_i \circ f_{ii_j} = \phi_{i_j}$, $\mathrm{im}(\phi_{i_j}) \subset \mathrm{im}(\phi_i)$, et donc tous les x_j sont dans l'image de ϕ_i. On déduit $\mathrm{rg}(\phi_i) \geq k$, et donc $\mathrm{rg}(L) \leq \sup_{i\in I} \mathrm{rg}(\phi_i)$. $\square$

Théorème 1.3.17 (Limites directes, inverses, homologie et cohomologie)**.** *Il existe une théorie de l'homologie, appelée homologie singulière, applicable sur tout espace topologique, qui « commute » avec les limites directes. Plus précisément, supposons que pour l'ensemble ordonné filtrant* $(I, \leq)$*, on associe un système de sous-espaces* $X_i \subset X$ *tel que si* $i \leq j$*, alors* $X_i \subset X_j$*. Supposons aussi que les* X_i *recouvrent* X*, et que tout compact* K *est inclus dans un des* X_i*. Alors,* $H_n(X) \simeq \varinjlim H_n(X_i)$*.*

De plus, il existe une théorie de la cohomologie, appelée cohomologie de Čech, qui « commute » avec les limites inverses. Plus précisément, si $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ sont des espaces d'intersection X, alors $H^n(X) \simeq \varinjlim H^n(X_i)$.

Ce théorème sera particulièrement utile dans les chapitres suivants pour trouver une borne adéquate des nombres de Betti sur des espaces avec des singularités, car on n'aura qu'à l'approcher par des espaces sans ces singularités. On doit aussi noter que l'homologie singulière ne commute pas forcément avec les limites inverses. De même, la cohomologie de Čech ne commute pas nécessairement avec les limites directes. Il faudra parfois changer de théorie au milieu d'une preuve, et s'assurer que l'espace final est une structure où les deux coïncident (du moins au sujet des nombres de Betti).

Théorème 1.3.18. *Pour une variété algébrique réelle X dans $\mathbb{R}^n$, l'homologie singulière et la cohomologie de Čech produisent les mêmes nombres de Betti, c'est-à-dire que $\beta(X)$ ne varie pas si on change la théorie utilisée.*

Remarque 1.3.19. *Ce théorème vient de l'article de Milnor* [**M1**]*, où la déduction découle du fait que toute variété algébrique réelle possède une triangulation.*

Théorème 1.3.20 (Dualité d'Alexander)**.** *Soit un sous-ensemble compact X de $\mathbb{S}^n$. En considérant la cohomologie de Čech, on a $\beta(X) = \beta(\mathbb{S}^n \setminus X)$*

Remarque 1.3.21. *Le théorème n'est pas énoncé dans sa généralité. Il fonctionnerait sur d'autres théories, mais il faudrait ajouter la condition d'être localement contractible. De plus, puisque les nombres de Betti ne disent pas tout sur l'homologie, la version générale et moderne traite plutôt de l'homologie réduite.*

Chapitre 2

Théorie de Morse et travaux de Milnor

Pour ce chapitre, on va étudier des outils dont les méthodes et résultats nous aideront à établir les théorèmes du chapitre 3. Bien que tout ne sera pas prouvé, beaucoup plus de démonstrations seront présentes, avec une preuve complète pour la borne sur les nombres de Betti pour les variétés algébriques. La raison pour ce choix est que la théorie de Morse est utilisée surtout pour ses applications directes, en contraste avec les travaux de Milnor qui sont plus utilisés, au final, comme source d'inspiration.

2.1. Théorie de Morse

La section se base sur [**M**], avec quelques résultats provenant de [**BH**]. Débutons avec la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit V, une variété lisse et compacte. Si $f \in C^\infty(V)$, et que l'intervalle $[a,b]$ ne comprend aucune valeur critique de f, alors $f^{-1}(a)$ est une rétraction de $f^{-1}([a,b])$.*

En utlisant des symétries et la compacité de V, un corollaire direct est :

Corollaire 2.1.2. *Soit I, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement compact). Si J est un sous-intervalle fermé, et que $\overline{I \setminus J}$ ne compte aucune valeur critique de f, alors $f^{-1}(J)$ est une rétraction de $f^{-1}(I)$.*

Pour la preuve, on va utiliser le lemme suivant, qui se base en bonne partie sur le théorème de Picard-Lindelöf sur l'existence et l'unicité de solutions à une ODE.

Lemme 2.1.3 (Existence des lignes de flux)**.** *Pour V toujours une variété compacte et lisse, si X est un champ vectoriel, alors il existe une fonction lisse $\Phi : \mathbb{R} \times V \to V$ telle que:*

- *$\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t,\cdot)$ est un difféomorphisme sur V;*
- *$\forall x_0 \in V$, $\Phi(\cdot, x_0)$ est une solution du problème $u(0) = x_0$, $u'(t) = X(u(t))$.*

Preuve de la proposition 2.1.1. Supposons que $f^{-1}([a,b]) \neq \emptyset$, sinon c'est trivial. Considérons une métrique riemannienne g sur V. De cette façon, on peut considérer le champ $X = -\nabla f$ Soit Φ, la fonction donnée par le lemme précédent. La rétraction consiste alors à « suivre les lignes de flux données par X » jusqu'à $f^{-1}(a)$. Le prochain paragraphe établit donc le critère d'arrêt adéquatement.

On note que $f(\Phi(\cdot,x_0))'|_t = -\|\nabla f(\Phi(t,x_0))\|^2 \leq 0$, ce qui nous dit que la fonction est décroissante. Plus encore, comme $f^{-1}([a,b])$ est compacte et ne comprend aucun point critique, il existe L positif avec $-\|\nabla f(x)\|^2 \leq -L$ sur $f^{-1}([a,b])$. Donc, tant que $f(\Phi(t,x_0)) \geq a$, $f(\Phi(\cdot,x_0))$ est strictement décroissante. De plus $f(\Phi(t,x_0)) \leq f(x_0) - Lt$. On déduit qu'il y a un unique $t \geq 0$ où $f(\Phi(t,x_0)) = a$, qu'on notera $t_{x_0} \leq \frac{b-a}{L}$. Le théorème de la fonction implicite nous assurera que la fonction $x \to t_x$ est continue.

On peut enfin définir la fonction:

$$g : [0,\frac{b-a}{L}] \times f^{-1}([a,b]) \to f^{-1}([a,b])$$

$$g(t,x) = \begin{cases} \Phi(t,x) & \text{si } f(\Phi(t,x)) \geq a; \\ \Phi(t_x,x) & \text{si } f(\Phi(t,x)) \leq a. \end{cases}$$

On a que g est continue, que $g(0,\cdot) = id$ et que $g(\frac{b-a}{L}, x) \in f^{-1}(a)$ pour $x \in f^{-1}([a,b])$ et que si $f(x) = a$, $g(t,x) = x$ pour tout t. Donc, g est une rétraction de $f^{-1}([a,b])$ dans $f^{-1}(a)$. $\square$

Remarque 2.1.4. *En fait, la proposition est assez intuitive dans un cas comme celui où la variété V est donnée par le graphe d'une fonction f $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, avec $f|_V$ comme fonction « hauteur ». Dans ce cas là, une visualisation de la rétraction est de pousser $f^{-1}([a,b])$ sous l'effet de la gravité. La seul endroit où ça n'est pas possible serait à un plateau, qui représente un point critique de f.*

Cette proposition alimente une idée intéressante, celle selon laquelle on peut comprendre la variété compacte V à l'aide d'une fonction $f : V \to \mathbb{R}$. Si on considère $V_a = f^{-1}(]-\infty,a])$, on a qu'à mesure que a augmente, le type d'homotopie V_a ne varie qu'aux valeurs critiques. La théorie de Morse classique consiste à utiliser une fonction f où les points critiques se comportent bien pour étudier l'homologie de V.

Proposition 2.1.5. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ et p, un point critique de f. Alors, la forme bilinéaire $H_p : T_pV \times T_pV \to \mathbb{R}$ donnée par la matrice hessienne en coordonnées locales est indépendante de celles-ci.*

Un point critique p est dit dégénéré si H_p l'est, c'est-à-dire si on a $v \in T_pV - \{0\}$ tel que $\forall u \in T_pV, H_p(u,v) = 0$. En coordonnées locales, ça arrive si et seulement si le déterminant de la matrice hessienne est nul.

Définition 2.1.6 (Fonction de Morse)**.** *$f \in C^\infty(V)$ est une fonction de Morse si aucun de ses points critiques n'est dégénéré.*

Pour le restant du chapitre, supposons que f est une fonction de Morse. On sait que l'action se passe aux points critiques par la proposition 2.1.1. Par la compacité de V, ils doivent former un ensemble fini, car tout point d'accumulation serait un point critique dégénéré. Pour un point critique p, on se souvient par Clairaut que H_p est symétrique. De là, on peut déduire que la matrice la représentant est diagonalisable avec valeurs propres réelles. On peut donc définir l'indice λ_p comme la dimension maximale de sous-espace où H_p est définie négative, donné par le nombre de valeurs propres négatives.

Lemme 2.1.7 (Morse)**.** *Soit p, un point critique de f, et λ_p, son indice. Alors, on peut trouver une carte $(U \ni p,\phi)$ telle que $\phi(p) = 0$, et :*

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots x_n) = f(p) - \sum_{k=1}^{\lambda_p} x_k^2 + \sum_{k=\lambda_{p+1}}^{n} x_k^2.$$

Ce lemme nous donne alors une bonne idée de ce qui passe sur V_a lorsque que l'espace traverse un point critique. On se retrouve avec un « hyper point de selle » avec λ_p directions où f décroît, et $n - \lambda_p$ où f croît. Intuitivement, c'est comme si λ_p directions s'attachaient à $f^{-1}(]-\infty, f(p) - \epsilon])$, alors que les autres s'attachaient à $f^{-1}([f(p) + \epsilon, +\infty[)$. Plus rigoureusement, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.8. *Si p est le seul point critique non-dégénéré de f dans $f^{-1}([f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon])$, alors $V_{f(p)+\epsilon}$ a le même type d'homotopie que $V_{f(p)-\epsilon}$ auquel on a attaché une λ_p-cellule.*

Par exemple, pour un point critique d'indice 0, alors on ne fait qu'ajouter un point, déconnecté du reste jusqu'à l'atteinte d'un autre point critique. Ça a parfaitement du sens, car un tel point est un minimum local de f. De même, pour un point d'indice n, qui est un maximum local, on vient « refermer » l'espace en attachant tout (localement) à une n-cellule.

On a donc l'intuition nécessaire pour énoncer un théorème majeur de la théorie, si ce n'est pas le théorème fondamental.

Théorème 2.1.9 (Morse). *Si f est une fonction de Morse sur la variété lisse et compacte V, alors V a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe, où le nombre de k-cellules est donné par le nombre de points critiques d'indice k.*

En utilisant la dernière partie du théorème 1.3.9, on a directement :

Corollaire 2.1.10 (Inégalités faibles de Morse). *Supposons que V et f respectent les mêmes conditions qu'au théorème précédent. Si $C_k(f)$ représente le nombre de points critiques d'indice k de f, alors $\beta_k(V) \leq C_k$. En particulier, $\beta(V) \leq \#\{\text{points critiques de } f\}$.*

Remarque 2.1.11. *Le mot « faible » vient du fait qu'on puisse démontrer des inégalités encore plus fortes, l'une d'entre elles établissant $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k(M) \leq \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k(f)$.*

La proposition suivante assure que la théorie est loin d'être triviale, c'est-à-dire qu'il y a toujours des fonctions de Morse. En fait, on s'attend à ce qu'une fonction «générique» soit presque tout le temps de Morse, donc ce n'est pas surprenant dans cette optique.

Théorème 2.1.12 (Abondance des fonctions de Morse). *Si V est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, alors pour presque tous les $u \in \mathbb{R}^n$ (selon la mesure de Lebesgues), $h_u|_V$ est une fonction de Morse, où $h_u(x) = x \cdot u$.*

Remarque 2.1.13. *Puisque le théorème de Whitney dit que toute variété peut être plongée de un espace euclidien, ce théorème assure donc que n'importe quelle variété lisse admet une fonction de Morse. Avec le théorème de Morse, on conclut, entre autres, que n'importe quelle variété lisse a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe.*

2.2. Borne de Bézout

Une situation qui va arriver plusieurs fois dans le reste du texte est celle où on devra borner supérieurement le nombre de zéros communs de n polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Alors, dans cette courte section, une démonstration du lemme suivant est proposée. Elle se base sur [**M1**].

Lemme 2.2.1 (Borne de Bézout pour $\mathbb{R}$). *Soit $P_1, \ldots P_n$, des polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Si, $\forall p \in \bigcap_{k=1}^{n} P_k^{-1}(0)$, $\{\nabla P_k(x)\}_{k=1}^{n}$ est linéairement indépendant, alors $|\bigcap_{k=1}^{n} P_k^{-1}(0)|$ est au plus $\prod_{i=1}^{n} \deg(P_i)$.*

Ce lemme ressemble beaucoup au théorème célèbre de Bézout, résultat de la géométrie algébrique.

Théorème 2.2.2 (Bézout)**.** *Soit K, un corps algébriquement clos. Si $P_1, \dots P_n$ sont des polynômes sur K^n tels que le nombre de zéros communs est fini, alors il y en a au maximum $\prod_{i=1}^n \deg(P_i)$. En fait, si on compte la multiplicité et les zéros dans l'espace projectif, il y en a exactement cette quantité.*

Le problème est qu'on ne peut pas directement appliquer ce résultat à $\mathbb{R}$, qui n'est pas algébriquement clos. Le contre-exemple classique est le suivant:

$$P_1(x,y,z) = z$$

$$P_2(x,y,z) = z$$

$$P_3(x,y,z) = \prod_{k=1}^{n}(x-k)^2 + \prod_{k=1}^{n}(y-k)^2$$

Les trois polynômes sur $\mathbb{R}^3$ ont exactement n^2 zéros communs, alors que le produit des degrés est $2n$. Notons qu'on n'a effectivement pas l'indépendance linéaire des gradients aux points d'intérêt. En fait, le problème est qu'il y a une infinité de zéros qui sont « cachés » dans la fermeture algébrique, $\mathbb{C}$.

Les propositions suivantes auront un rôle essentiel dans la preuve qui suit:

Proposition 2.2.3 (van der Waerden, [**M1**])**.** *Si $P_1, \dots P_n$ sont des polyômes sur $\mathbb{R}^n$ tels que l'ensemble des coefficients de tous les P_k est algébriquement indépendant, alors les polynômes ont exactement $\prod_{i=1}^n \deg(P_i)$ zéros communs sur $\mathbb{C}^n$. En particulier, il n'y en a pas plus sur $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 2.2.4 (Application ouverte, version uniforme)**.** *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une fonction C^1, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point régulier de F, c'est-à-dire que DF_{x_0} est inversible. Alors, il existe trois réels positifs ϵ,μ,r, tel que si $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1, et $\|G - F\|_{C^1(\overline{B_\mu(x_0)})} < \epsilon$, on a, $\forall \delta > 0$, $\overline{B_\delta(y)} \subset B_\mu(x_0) \implies B_{r\delta}(G(y)) \subseteq G(\overline{B_\delta(y)})$.*

Remarque 2.2.5. *La preuve est similaire à la classique de* [**R**] *qui utilise le point fixe de Banach, car la taille de l'ouvert ne dépend vraiment que de la norme de DF_x autour de x_0.*

Preuve du lemme 2.2.1. Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la fonction polynômiale dont les coordonnées sont les P_k. On sait, par hypothèse sur les ∇P_k, que 0 n'est pas une valeur critique de P. En effet, la représentation matricielle DP_x est la matrice jacobienne dont la k-ième ligne est $\nabla P_k(x)$. Par le théorème de la fonction inverse, on déduit que $\bigcap_{j=1}^n P_j^{-1}(0) = P^{-1}(0)$ est discret. Pour montrer la borne affirmée, il est suffisant de montrer que pour $R > 0$, $|P^{-1}(0) \cap B_R(0)| \leq \prod_{i=1}^n \deg(P_i)$. L'avantage est que ce dernier ensemble est connu comme étant fini.

Soit N_j, le nombre de monômes à n variables de degré au plus $\deg(P_j)$. On a que la fonction Coef : $\mathbb{R}^{N_1} \times \dots \mathbb{R}^{N_n} \to C^1(\overline{B_R(0)})$ envoyant un vecteur de coefficients à son polynôme associé est continue. Alors, peu importe $\delta > 0$, on peut trouver $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une fonction polynômiale telle que :

- Q_j, la j-ième coordonnée de Q, est de même degré que P_j.
- Les coefficients des Q_j sont tellements proches de ceux de P_j que $\|Q - P\|_{C^1(\overline{B_{2R}(0)})} < \delta$.
- Tous les coefficients de tous les Q_j sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On veut combiner cela avec la proposition précédente. Soit, pour $x \in P^{-1}(0) \cap B_R(0)$, ϵ_x, μ_x, r_x les constantes données par la proposition précédente. On prend alors δ tel que:

- $\forall x \in P^{-1}(0) \cap B_R(0)$, $\delta < \epsilon_x$;
- $\forall x \in P^{-1}(0) \cap B_R(0)$, $\delta < \frac{r_x \mu_x}{2}$;
- $\forall x \neq x' \in P^{-1}(0) \cap B_R(0)$, $\delta < \frac{r_x r_{x'} \|x - x'\|}{r_x + r_{x'}}$.

Pour chaque x dans $P^{-1}(0)$, on a $\|Q(x)\| = \|Q(x) - P(x)\| \leq \|Q - P\|_{C^1(\overline{B_{2R}(0)})} < \delta$, donc $0 \in B_\delta(Q(x)) \subset Q(\overline{B_{\delta/r_x}(x)})$ car $\frac{\delta}{r_x} < \mu_x$. Enfin, ça nous dit qu'il y a $y_x \in Q^{-1}(0)$ tel que $r_x \|y_x - x\| \leq \delta$. Or, si $y_x = y_{x'}$, $\|x - x'\| \leq \|x - y_x\| + \|x' - y_{x'}\| \leq \delta(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_{x'}})$, donc $\delta \geq \frac{r_x r_{x'} \|x - x'\|}{r_x + r_{x'}}$, ce qui n'est possible que si $x = x'$. Donc, $x \to y_x$ est une injection de $P^{-1}(0) \cap B_R(0)$ dans $Q^{-1}(0)$. On déduit, comme voulu, que $|P^{-1}(0) \cap B_R(0)| \leq |Q^{-1}(0)| \leq \prod_{i=1}^n \deg(P_i)$. □

Remarque 2.2.6. *Cette preuve se base directement sur l'idée de Milnor* [**M1**]. *Celle-ci est d'utiliser le fait que si les coefficients des polynômes sont arbitraires, presque sûrement l'ensemble des zéros communs ne sera pas (algébriquement) dégénéré. Alors, en prenant une très bonne approximation de $P_1, \dots, P_n$, on s'attend à ce que les zéros des approximations soient proches des zéros des P_k.*

2.3. Résultats de Milnor

Dans cette section, on va prouver le théorème sur lequel se base le chapitre suivant, par Milnor [**M1**].

Théorème 2.3.1 (Milnor)**.** *Supposons que V soit une variété algébrique de $\mathbb{R}^n$, donnée par k équations polynomiales $P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0$. Si les degrés des polynômes sont au plus d, alors $\beta(V) \leq d(2d-1)^{n-1} = \mathcal{O}(d^n)$*

La preuve se fait en deux parties. Dans la première, on suppose qu'on a un seul polynôme P, et que 0 n'est pas une valeur critique, dans le but d'utiliser la théorie de Morse. Dans la deuxième, on utilise plutôt la théorie de l'homologie pour comparer avec le premier cas.

Théorème 2.3.2. *Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un polynôme de degré d tel que 0 n'est pas une valeur critique. Si $N(P) = P^{-1}(0)$ (l'ensemble nodal) est compact, alors $\beta(N(P)) \leq d(d-1)^{n-1}$.*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est clair, car $N(P)$ est discret, et $\beta(N(P)) = |P^{-1}(0)| \leq d$. Supposons $n \geq 2$. Par la proposition 1.1.6, on sait que $N(P)$ est une variété lisse et compacte de dimension $n-1$. On sait aussi que $T_x(N(P)) = \nabla P(x)^{\perp}$. Le but va être de trouver une fonction de Morse sur $N(P)$ dont les points critiques sont donnés par des équations polynomiales.

Considérons le vecteur normal unitaire $\hat{n} : N(P) \to \mathbb{S}^{n-1}$ avec $\hat{n}(x) = \frac{\nabla P(x)}{\|\nabla P(x)\|}$. Par le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de $\hat{n}$ est de mesure nulle. En notant que $x \to -x$ est une isométrie de la sphère qui préserve la mesure, on trouve $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $\pm v$ ne sont pas des valeurs critiques. Considérons la fonction $H_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui associe x à $x \cdot v$ et la fonction hauteur associée $h_v = H_v|_{N(P)}$. Ce qui suit montre que h_v est une fonction de Morse.

Puisque $\nabla h_v(x) = \operatorname{proj}_{T_x N(P)} \nabla H_v(x) = \operatorname{proj}_{T_x N(P)} v$, x est un point critique de h_v si et seulement si $v \in (T_x N(P))^{\perp}$, ce qui équivaut à ce que $v \parallel \hat{n}(x)$ et donc que $\hat{n}(x) = \pm v$, car les deux vecteurs sont unitaires. Soient x_0, un tel point critique, et U, un ouvert connexe de $N(P)$ contenant x_0 de sorte que $v \notin \nabla h_v(U)$. Ce dernier existe car $\nabla h_v(x_0) = 0 \neq v$. Puisque $\hat{n}(x)$ et $-\hat{n}(x)$ sont les deux seuls vecteurs unitaires à être orthogonaux à $T_x(N(P))$, et puisque $\nabla h_v(x)$ est précisément la projection de v dans le plan tangent, il suit que pour $x \in U$,

$$\hat{n}(x) = \pm \frac{\nabla h_v(x) - v}{\|\nabla h_v(x) - v\|}.$$

À noter, le signe reste constant sur U. La matrice $D\hat{n}_{x_0}$ est non-dégénérée, car $\pm v$ ne sont pas des valeurs critiques de $\hat{n}$ par définition. De plus, comme $\nabla h_v(x_0) = 0$ et $1 = \|\nabla h_v(x)\|^2 + \|\nabla h_v(x) - v\|^2$, pour la fonction $f(x) = \|\nabla h_v(x) - v\|^{-1}$ sur U, on obtient $\nabla f(x_0) = 0$.

Alors, pour une direction $u \in T_{x_0}N(P)$:

$$
\begin{aligned}
D\hat{n}_{x_0}u &= \frac{\partial}{\partial u}\hat{n}(x_0) \\
&= \pm\frac{1}{\|\nabla h_v(x_0) - v\|}\frac{\partial}{\partial u}(\nabla h_v - v)(x_0) \\
&= \pm\frac{\partial}{\partial u}\nabla h_v(x_0).
\end{aligned}
$$

On a donc que $\frac{\partial}{\partial u}\nabla h_v(x_0) \neq 0$ du moment que $u \neq 0$. Or, pour deux directions (locales) u et u', on peut utiliser la criticalité de x_0 pour montrer que $\frac{\partial^2}{\partial u \partial u'}h_v(x_0) = (\frac{\partial}{\partial u}\nabla h_v(x_0)) \cdot u'$, ce qui montre que la matrice hessienne de h_v est non-dégénérée. La fonction h_v est donc bien une fonction de Morse.

Par les inégalités de Morse, on a alors que $\beta(V) \leq \#\{\text{points critiques de } h\}$. Soit $\{v_1, \ldots v_{n-1}\}$, une base orthonormale de $v^\perp$. On sait qu'un point critique $x \in N(P)$ survient lorsque v est parallèle à $\nabla P(x)$. Donc, l'ensemble des points critiques est caractérisé par le systèmes de n équations polynômiales:

$$
\begin{gathered}
P(x) = 0 \\
P_i(x) := \nabla P(x) \cdot v_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq n-1.
\end{gathered}
$$

Puisque $\deg(P_i) \leq \deg(P) - 1$, appliquer le lemme 2.2.1 suffira pour conclure. Il faut donc montrer que les gradients sont linéairement indépendants en une solution x_0.

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= \nabla P(x) \cdot v_i \\
&= \|\nabla P(x)\|\hat{n}(x) \cdot v_i
\end{aligned}
$$

en évaluant le gradient en x_0, où $\hat{n}(x_0) \cdot v_i = 0$:

$$
\nabla P_i(x_0) = \|\nabla P(x_0)\| \; (D\hat{n}_{x_0})^T v_i
$$

où A^T est l'application adjointe. Supposons que $\lambda \nabla P(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \nabla P_i(x_0) = 0$. Comme $\nabla P(x_0)$ est parallèle à v, qui est orthogonal à tout v_k, on obtient:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \nabla P_i(x_0)) \cdot v_k \\
0 &= (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (D\hat{n}_{x_0})^T v_i) \cdot v_k \\
&= ((D\hat{n}_{x_0})^T \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i) \cdot v_k = (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i) \cdot D\hat{n}_{x_0} v_k
\end{aligned}
$$

Puisque $D\hat{n}_{x_0} : T_{x_0}N(P) \to T_{\hat{n}(x_0)}\mathbb{S}^{n-1}$ est non-dégénéré, donc surjectif, et comme les v_k forment une base de $T_{x_0}N(P)$, on a que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \in (T_{\hat{n}(x_0)}\mathbb{S}^{n-1})^\perp$. Or, par la proposition 1.1.9, on a que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \parallel \hat{n}(x_0) = \pm v$. Puisque les v_i sont orthogonaux à v, pour tout i le coefficient λ_i est nul. Alors, $\lambda = 0$ et le système $\{\nabla P(x_0), \nabla P_1(x_0), \dots \nabla P_{n-1}(x_0)\}$ est linéairement indépendant pour une solution x_0 arbitraire. Donc, on conclut $\beta(N(P)) \leq \deg(P)\deg(P_1)\dots\deg(P_{n-1}) \leq d(d-1)^{n-1}$. □

Remarque 2.3.3. *La façon considérée ici est un peu différente en détail (mais pas en idée) du texte original. Ici, les coordonnées locales sont beaucoup moins présentes, et il n'est pas assumé que le « bon » v est $(0,\dots 0,1)$. La raison est que ça s'apparente plus avec les méthodes de la dernière section du chapitre 3, qui sont inspirées d'ici.*

Aussi, il est probablement possible de simplifier la preuve. Au lieu de chercher explicitement une fonction de Morse par Sard, on pourrait directement appliquer le théorème 2.1.12, et l'application du lemme 2.2.1 ne devrait pas être plus complexe. C'est comme ça que ça sera fait dans le chapitre 3.

On peut alors entammer la prochaine preuve.

Preuve du théorème 2.3.1. Supposons maintenant qu'on ait un système fini $\{P_1, \dots, P_k\}$ quelconque de polynômes de degrés au plus d sur $\mathbb{R}^n$. Encore une fois, le cas $n = 1$ est trivial, donc on peut supposer $n \geq 2$. Sans perte de généralité, les polynômes sont non-constants, de façon à ce que $d \geq 1$. Considérons V, la variété algébrique (plus nécessairement lisse) des zéros communs. Alors, considérons le polynôme, pour $\epsilon > 0$:

$$P_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x)^2 + \epsilon\|x\|^2.$$

Considérons ensuite, pour $\delta > 0$, le domaine $V_{\epsilon,\delta} := \{x|P_\epsilon(x) \leq \delta\}$ et son bord $\partial V_{\epsilon,\delta} := \{x|P_\epsilon(x) = \delta\}$. Notons alors que pour chaque ϵ fixé, le théorème de Sard va nous assurer que presque tous les δ ne sont pas des valeurs critiques de P_ϵ. On va vouloir être stratégique: en commençant par fixer $R > 0$, on va vouloir assurer que $\beta(V \cap B_R)$ soit controlé, avec B_R la boule de rayon R centrée en 0. Si $R^2 \leq \frac{\delta}{\epsilon}$, alors $V \cap B_R \subseteq V_{\epsilon,\delta} \subset B_{\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}}$, ce qui nous permet de prendre une suite ϵ_l,δ_l telle que:

- Pour tout l, δ_l n'est pas une valeur critique de P_{ϵ_l}.
- Les suites δ_l et ϵ_l sont positives, décroissantes et convergeantes vers 0.
- La suite $\frac{\delta_l}{\epsilon_l}$ est positive, décroissante et converge vers R^2.

Une telle suite existe. En effet, on peut choisir $\epsilon_l = \frac{1}{l}$. Sachant que l'intervalle $(R^2\epsilon_l, \frac{\epsilon_l}{2}(\frac{\delta_{l-1}}{\epsilon_{l-1}} + R^2))$ n'est pas composé que de valeurs critiques, on peut prendre n'importe quelle non-valeur critique pour notre δ_l. On note $\delta_l \leq \frac{\epsilon_l\delta_{l-1}}{\epsilon_{l-1}} \leq \delta_{l-1}$ car ϵ_l décroît. On a alors que $V_{\epsilon_{l+1},\delta_{l+1}} \subseteq V_{\epsilon_l,\delta_l}$ et que $V \cap B_R = \bigcap_{l=1}^{\infty} V_{\epsilon_l,\delta_l}$. En effet:

$$\begin{aligned} & P_{\epsilon_{l+1}}(\vec{x}) \leq \delta_{l+1} \\ \implies & \frac{P_{\epsilon_{l+1}}(\vec{x})}{\delta_{l+1}} \leq 1 \end{aligned}$$

Puisque les suites $\frac{1}{\delta_l}$ et $\frac{\epsilon_l}{\delta_l}$ sont croissantes, on trouve:

$$\begin{aligned} & \frac{P_{\epsilon_l}(\vec{x})}{\delta_l} \leq \frac{P_{\epsilon_{l+1}}(\vec{x})}{\delta_{l+1}} \leq 1 \\ \implies & P_{\epsilon_l}(\vec{x}) \leq \delta_l \end{aligned}$$

Ça nous dit alors que $V \cap B_R$ est la limite directe des V_{ϵ_l,δ_l}, ce qui nous permet de centrer l'étude de β aux V_{ϵ_l,δ_l} par le théorème 1.3.17 et la proposition 1.3.16.

Puisque 0 n'est pas une valeur critique de $P_{\epsilon_l} - \delta_l$, un polynôme de degré $2d$ au plus, le théorème précédent nous permet d'établir la borne $\beta(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l}) = \beta(N(P - \delta_l)) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$. On va utiliser la dualité d'Alexander pour lier cette propriété à l'homologie de V_{ϵ_l,δ_l}.

Notons que l'ensemble des points critiques de P_{ϵ_l} dans V_{ϵ_l,δ_l} est compact, par la compacité de cette dernière. Alors, on a que les valeurs critiques de P_{ϵ_l} dans $[0,\delta_l]$ forme aussi un compact, donc fermé. Comme δ_l n'est pas une valeur critique, on a $0 < \mu < \delta_l$ de sorte que $[\mu,\delta_l]$ ne comprenne aucune valeur critique. Par la proposition 2.1.1, $P^{-1}([0,\mu])$ est une rétraction de $P^{-1}([0,\delta_l])$, et la rétraction fonctionne aussi bien pour $P^{-1}([0,\delta_l[)$. En particulier, V_{ϵ_l,δ_l} a la même homologie que son intérieur, $P^{-1}([0,\delta_l[)$.

Soit $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, l'homéomorphisme donné par la projection stéréographique. $S(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l})$ sépare $\mathbb{S}^n$ en deux ouverts disjoints, soit l'intéreur de $S(V_{\epsilon_l,\delta_l})$ ($S(V_{\epsilon_l,\delta_l})$ est compact et ne contient pas e_{n+1}, car V_{ϵ_l,δ_l} est borné) et $\mathbb{S}^n \setminus S(V_{\epsilon_l,\delta_l})$. On applique deux fois la dualité d'Alexander (1.3.20):

$$\begin{aligned}
\beta_{H^*}(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l}) &= \beta_{H^*}(S(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l})) \\
&= \beta_{H^*}(\mathbb{S}^n \setminus S(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l})) \\
&= \beta_{H^*}(\mathrm{int}(S(V_{\epsilon_l,\delta_l}))) + \beta_{H^*}(\mathbb{S}^n \setminus S(V_{\epsilon_l,\delta_l})) \\
\beta_{H^*}(\overline{\mathbb{S}^n \setminus S(V_{\epsilon_l,\delta_l})}) &= \beta_{H^*}(\mathrm{int}(S(V_{\epsilon_l,\delta_l}))).
\end{aligned}$$

Ici, β_{H^*} est considéré selon la cohomologie de Čech. Or, on peut utiliser un argument de rétraction commune pour dire que $\overline{\mathbb{S}^n \setminus S(V_{\epsilon_l,\delta_l})}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^n \setminus S(V_{\epsilon_l,\delta_l})$, argument établi par la croissance à l'infini de P_{ϵ_l}. Alors, on obtient $\beta_{H^*}(\partial V_{\epsilon_l,\delta_l}) = 2\beta_{H^*}(\mathrm{int}(S(V_{\epsilon_l,\delta_l}))) = 2\beta_{H^*}(\mathrm{int}(V_{\epsilon_l,\delta_l})) = 2\beta_{H^*}(V_{\epsilon_l,\delta_l})$. Donc, on a bien $\beta_{H^*}(V_{\epsilon_l,\delta_l}) \leq d(2d-1)^{n-1}$.

Par le théorème 1.3.17 et la proposition 1.3.16, $\beta_{H^*}(V \cap B_R) \leq d(2d-1)^{n-1}$, peu importe $R > 0$. Pour passer à la limite quand $R \to \infty$, on utilise l'homologie singulière H_*, ce qui ne change pas le nombre total de Betti par le théorème 1.3.18. Puisque $V = \bigcup_{R>0} V \cap B_R$, et puisque tout compact de V est borné, donc inclus dans un des $V \cap B_R$, on peut appliquer le théorème 1.3.17 puis la proposition 1.3.16 pour obtenir $\beta(V) \leq d(2d-1)^{n-1}$, comme voulu. $\square$

Remarque 2.3.4. *L'article de Milnor* **[M1]** *établit également une preuve qui n'utilise pas le passage par l'homologie singulière, mais plutôt avec le foncteur dérivé de la limite inverse. L'article termine en énonçant plusieurs corollaires directs du théorème de cette section.*

Chapitre 3

Bornes sur le nombre de Betti pour le tore et la sphère

C'est ici qu'on trouve le fruit de la recherche de l'auteur. Dans les deux cas simples qu'on étudie, le tore et la sphère, on est en présence de variétés avec plongements algébriques, et avec des fonctions propres qui sont des restrictions de polynômes. On verra comment utiliser les résultats précédents pour obtenir des bornes sur les nombres de Betti des ensembles nodaux de combinaisons linéaires de fonctions propres.

3.1. Sphère

Dans cette section, on regardera la façon brute d'utiliser Milnor, qui fonctionnera aussi pour le tore, ainsi qu'une méthode qui donne une borne plus optimale sur la sphère.

Corollaire 3.1.1. *Soit V, une variété algébrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'on a $P_1, \ldots P_l$, des polynômes sur $\mathbb{R}^n$, avec $V = \bigcap_{j=1}^{l} P_j^{-1}(0)$. Alors, pour les polynômes non-constants P sur $\mathbb{R}^n$, $\beta(P|_V^{-1}(0)) = O_V(\deg(P)^n)$.*

Démonstration. On a que l'ensemble nodal de P dans V est donné par $P^{-1}(0) \cap V = P^{-1}(0) \cap (\bigcap_{j=1}^{l} P_J^{-1}(0))$. Par le théorème 2.3.1, on a que le nombre total de Betti est borné par $K \max(\deg(P), \deg(P_1), \ldots \deg(P_l))^n$. Puisque les degrés de $P_1 \ldots P_l$ sont fixés par V, on obtient que $\beta(P|_V^{-1}(0)) = O_V(\deg(P)^n)$ □

Remarque 3.1.2. *Plus particulièrement, la borne est donnée par $d(2d-1)^n$, où $d = \max(\deg(P), \deg(P_1), \ldots \deg(P_l))^n$.*

Aussi, cette proposition nous dit que la théorie du chapitre 2 s'applique aussi a une certaine classe de variétés riemanniennes, comprenant celles qui sont plongées algébriquement.

Dans le cadre de la théorie spectrale, si les fonctions propres du laplacien sont également polynomiales, on obtient directement une borne souhaitée sur β pour les combinaisons linéaires de fonctions propres.

Bien que ce corollaire permette d'obtenir des bornes intéressantes sur la sphère et le tore, comme on le verra, on remarque une dépendance à la dimension du plongement. Cela semble arbitraire et non-nécessaire pour une fonction propre, car le laplacien est défini intrinsèquement.

Corollaire 3.1.3. *Soit f (non-constant) un élément de $M_\lambda(\mathbb{S}^n)$, le sous-espace généré par les fonctions propres de Δ sur $\mathbb{S}^n$ dont la valeur propre ne dépasse pas λ. Alors $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^{\frac{n+1}{2}})$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, $\mathbb{S}^n$ est une variété plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par définition. De plus, par la proposition 1.2.8, les fonctions propres de Δ sont données par des polynômes harmoniques.

Soit f, un élément de $M_\lambda(\mathbb{S}^n)$. On sait que $\lambda \geq d(d-1+n)$ pour un certain d entier, avec $\deg(f) \leq d$. On déduit, par le corollaire 3.1.1, que $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(d^{n+1})$. Étant donné que $\lambda \geq d^2$, on déduit $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^{\frac{n+1}{2}})$.

$\square$

Observons qu'on n'a pas la borne souhaitée de la discussion suivant 1.2.17, c'est-à-dire $O(\lambda^{\frac{n}{2}})$. Comme discuté auparavant, ça semble être le plongement dans un espace ambient qui cause la différence. Dans un cas comme la sphère, il est possible d'aller chercher une borne plus raffinée, qui donne le résultat principal de la section.

Théorème 3.1.4. *On peut réduire la borne du corollaire précédent. Si f non-constante est dans $M_\lambda(\mathbb{S}^n)$, alors $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^{\frac{n}{2}})$.*

DÉMONSTRATION. Au lieu de plonger la variété dans un espace de dimension plus grande, on va utiliser la projection stéréographique pour garder la dimension à n.

Sans perte de généralité, $e_{n+1} \notin f^{-1}(0)$. En effet, on a une rotation A de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $Ae_{n+1} \notin f^{-1}(0)$ car $f \neq 0$. Alors, $\hat{f} := f \circ A$ reste une restriction de polynôme du même degré, dont l'ensemble nodal est inchangé à isométrie près. On utilise alors la projection stéréographique donnée par la remarque de 1.1.9:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\} \\ x &\to \left(\frac{2}{\|x\|^2+1} x, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right). \end{aligned}$$

S ici est un homéomorphisme. Alors, car $f^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\}$, on a que $\beta(N(f)) = \beta(N(f \circ S))$. Or, si P est le polynôme de degré d dont f est la restriction, alors $f \circ S(x) = 0$ si et seulement si $(\|x\|^2+1)^d P \circ S(x) = 0$. On sait que $P \circ S$ est une fonction rationnelle avec $\|x\|^2 + 1$ le seul facteur apparaissant au dénominateur, à la puissance d au maximum.

Alors, $(\|x\|^2+1)^d P \circ S(x)$ est un polynôme de degré $2d$ tout au plus. En effet, un terme de P de la forme $y_1^{r_1}, \dots y_{n+1}^{r_{n+1}}$ devient, en composant avec S et en multipliant par $(\|x\|^2+1)^d$, de la forme $(\|x\|^2+1)^{d-(r_1+\dots r_{n+1})} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} (\|x\|^2-1)^{r_{n+1}}$, de degré $2d-(r_1+\dots r_n) \leq 2d$. Par le théorème 2.3.1, on a que $\beta(N(f \circ S)) = O_n(d^n)$. Comme dans la preuve précédente, on a $\lambda \geq d^2$, donc $\beta(N(f)) = O_n(\lambda^{\frac{n}{2}})$. Plus précisément, la borne est $\beta(N(f)) \leq 2d(4d-1)^{n-1} \leq 2^{2n-1}\lambda^{\frac{n}{2}}$. □

Remarque 3.1.5. *Bien que le cas considéré était lorsqu'on avait un seul polynôme P restreint à $\mathbb{S}^n$, rien n'empêche de généraliser lorsqu'on a un nombre fini de tels polynômes, qui n'ont d'ailleurs pas besoin d'être harmoniques. Le théorème de Milnor 2.3.1, avec la même preuve que ci-dessus, indique que si $f_1, \dots f_k$ sont des restrictions (pas toutes nulles) sur $\mathbb{S}^n$ de polynômes $P_j : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de degré d tous au plus, alors $\beta(\cap_{j=1}^k N(f_j)) \leq 2d(4d-1)^{n-1} \leq 2^{2n-1}d^n$.*

3.2. Tore

Dans cette section, on va se concentrer sur le tore carré plat, tel que défini dans 1.1.11. On va tout d'abord étudier la méthode brute, donnée par le plongement dans $\mathbb{C}^n$, puis la raffiner. La borne obtenue sur β ne semblera pas optimale selon la discussion suivant 1.2.17, et il faudra faire une étude en profondeur dans la section suivante. On va alors préparer le terrain ici.

Proposition 3.2.1. *Soit une fonction f non-constante du sous-espace propre (réel) $M_\lambda(\mathbb{T}^n)$. Alors, $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^n)$.*

Démonstration. On rappelle le plongement du tore dans $\mathbb{C}^n$ donné par 1.1.12 :

$$\Pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^n$$
$$(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) \to (e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\ldots,e^{i\theta_n})$$

On note que l'image de Π est exactement $(\mathbb{S}^1)^n = \{(z_1,z_2,\ldots,z_n) \in \mathbb{C} | \forall j \ |z_j|^2 - 1 = 0\}$, donc une variété algébrique. Il suffit alors de montrer que les fonctions propres se traduisent également bien. Or, un élément f du sous-espace propre de $-\Delta$ sur $\mathbb{T}^n$ est un polynôme trigonométrique, qui est en fait un polynôme à coefficients complexes $P(e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n},e^{-i\theta_n})$. On a donc que l'ensemble nodal est $\Pi(f^{-1}(0)) = (\mathbb{S}^1)^n \cap \{(z_1,\ldots,z_n) | P(z_1,\bar{z_1},\ldots,z_n,\bar{z_n}) = 0\}$. Or, en se ramenant à $\mathbb{R}^{2n}$ et $z_j = x_j + iy_j$, et en faisant les manipulations algébriques nécessaires, on se retrouve avec $P(z_1,\bar{z_1},\ldots,z_n,\bar{z_n}) = Q(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) + iR(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ où Q et R sont deux polynômes réels sur $\mathbb{R}^{2n}$. Or, on sait que f est à valeurs réelles (combinaisons réelles de cosinus et sinus), donc on aura que R s'annule, du moins sur le tore. On déduit que $\Pi(f^{-1}(0)) = (\mathbb{S}^1)^n \cap Q^{-1}(0)$.

De plus, le degré de Q le même que celui de P. Le corollaire 3.1.1 assure donc que $\beta(f^{-1}(0)) = \beta((\mathbb{S}^1)^n \cap Q^{-1}(0)) = O_n(\deg(P)^{2n})$. Sachant que la valeur propre associée au monôme $e^{ik_1\theta_1} \ldots e^{ik_n\theta_n}$ est $k_1^2 + \cdots + k_n^2$ et que Cauchy-Schawrz assure $(|k_1| + \cdots + |k_n|)^2 \leq (k_1^2 + \cdots + k_n^2) \cdot n$, on a $\deg(P) = O_n(\sqrt{\lambda})$, ce qui nous donne la borne $\beta(f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^n)$. □

Remarque 3.2.2. *Ici, les limites du raisonnement brute sont plus claires que pour la sphère. Comme le plongement naturel se fait dans un espace qui double la dimension, la borne sur β obtenue est d'ordre λ^n au lieu de $\lambda^{\frac{n}{2}}$. Ceci dit, on a une réduction facile de la borne.*

Théorème 3.2.3. *La borne de la proposition précédente peut être légèrement améliorée. Si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$, alors $\beta(N(f)) = O(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$*

Démonstration. Notons que pour chaque $z \in (\mathbb{S}^1)^n$, $\|z\| = \sqrt{n}$, ce qui indique que $(\mathbb{S}^1)^n \subset \sqrt{n}\mathbb{S}^{2n-1}$.

Alors, $G := \frac{1}{\sqrt{n}}\Pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^{2n-1}$ est un plongement. Considérons le polynôme Q sur $\mathbb{R}^{2n}$ de la preuve précédente, afin que $\deg(Q) = \deg(f)$ et $\Pi(f^{-1}(0)) = (\mathbb{S}^1)^n \cap Q^{-1}(0)$. Alors, $G(f^{-1}(0)) = \{x \in \mathbb{S}^{2n-1} | \sqrt{n}x \in \Pi(f^{-1}(0))\} = \{x \in \mathbb{S}^{2n-1} | Q(\sqrt{n}x) = 0$ et $\forall j \leq n$ $F_j(x) = 0\}$, avec le polynôme $F_j(x_1,y_1,\ldots x_n,y_n) = nx_j^2 + ny_j^2 - 1$. Par la remarque du théorème 3.1.4, dès que $\deg(f) \geq 2$, $\beta(f^{-1}(0)) = \beta(G(f^{-1}(0))) \leq 2\deg(f)(4\deg(f)-1)^{2n-2}$. En ajoutant le cas $\deg(f) = 1$, on obtient bien $\beta(N(f)) = O_n(\deg(f)^{2n-1}) = O_n(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$. □

L'amélioration obtenue n'est tout de même pas celle souhaitée, sauf le cas $n = 1$, qui était déjà couvert par la section précédante. Dans la section suivante, on explorera une généralisation possible du théorème 2.3.2, qui traitera du cas où 0 n'est pas une valeur critique de f. On va donc énoncer une proposition qui permet de passer de ce cas au général.

Théorème 3.2.4. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$, une fonction lisse sur la variété lisse et compacte V. Considérons $N(f) = f^{-1}(0)$ et $\mathrm{Crit}(f)$, l'ensemble des valeurs critiques. Alors, $\beta_{H^*}(N(f)) \leq 2B + \beta_{H^*}(V)$, où $B = \sup\{\beta_{H^*}(f^{-1}(v)) | v \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Crit}(f)\}$.*

Remarque 3.2.5. *Ici, on spécifie que la théorie utilisée est la cohomologie de Čech, car il n'est pas supposé que $f^{-1}(0)$ a une structure de CW-complexe. Par contre, dans le corollaire suivant important, qui est un cas particulier, l'ensemble nodal d'un polynôme trigonométrique est homéomorphe à une variété algébrique, et on n'a pas cette ambiguïté.*

Corollaire 3.2.6. *Pour $n \geq 1$, on a $\sup\{\beta(N(f)) | f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)\} \leq 2\sup\{\beta(N(f)) | f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ et $0 \notin \mathrm{Crit}(f)\} + 2^n$.*

En particulier, si on a, pour n, d et C donné, $\beta(N(f)) \leq C\lambda^d$ lorsque $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ n'a pas 0 comme valeur critique, alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n) \setminus 0$, $\beta(N(f)) \leq K\lambda^d$.

Démonstration. Soit $f_0 \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$. Alors, le théorème 3.2.4 établit que $\beta(N(f_0)) \leq 2B + \beta_{H^*}(\mathbb{T}^n) = 2B + 2^n$. Or, $f_0^{-1}(v) = N(f_0 - v)$ et v est une valeur critique de f_0 si et seulement si 0 est une valeur critique de $f_0 - v$. Alors, $B = \sup\{N(f_0 - v) | 0 \notin \mathrm{Crit}(f_0 - v)\}$. Car $f_0 - v \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ pour n'importe quel v réel, on a que pour une non-valeur critique, $\beta(N(f_0 - v)) \leq \sup\{\beta(N(f)) | f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ et $0 \notin \mathrm{Crit}(f)\}$. Par définition du supremum, on a $\beta(N(f_0)) \leq 2\sup\{\beta(N(f)) | f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ et $0 \notin \mathrm{Crit}(f)\} + 2^n$.

Soit n, d et C tels que pour $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ n'ayant pas 0 comme valeur critique, $\beta(N(f)) \leq C\lambda^d$. Si $\lambda < 1$, alors $M_\lambda(\mathbb{T}^n) = \{$fonctions constantes$\}$, donc $K = C$ fonctionne. Sinon, $\lambda^d \leq 1$, donc on peut prendre $K = 2C + 2^n$. □

Preuve du théorème 3.2.4. La preuve est fortement inspirée de celle du théorème 2.3.1. Ceci dit, comme on travaille sur V, on n'a pas un théorème aussi puissant que la dualité d'Alexander. Le rôle de ce dernier sera joué par la suite de Mayer-Vietoris.

Si 0 n'est pas une valeur critique, c'est trivial. Supposons donc que 0 soit une valeur critique. Par le théorème de Sard, il existe une suite $\delta_k \searrow 0$ telle que pour tout k, $\pm\delta_k$ ne sont pas des valeurs critiques de f. On note que puisque V est compact, l'ensemble des valeurs critiques est fermé. Donc pour chaque k, on a $\mu_k > 0$ tel qu'il n'y a aucune valeur critique dans $[-\delta_k, -\delta_k + \mu_k] \sqcup [\delta_k - \mu_k, \delta_k]$.

Soit $V_k = f^{-1}([-\delta_k, \delta_k])$ et $W_k = f^{-1}(]-\infty, -\delta_k + \mu_k] \cup [\delta_k - \mu_k, \infty[)$. On a que les intérieurs de V_k et W_k recouvrent bien V. On peut donc appliquer le corollaire 1.3.6 de la suite de Mayer-Vietoris, duquel on conclut $\beta_{H^*}(V_k) \leq \beta_{H^*}(V) + \beta_{H^*}(V_k \cap W_k)$. Or, $V_k \cap W_k = f^{-1}([-\delta_k, -\delta_k + \mu_k]) \sqcup f^{-1}([\delta_k - \mu_k, \delta_k])$, qui, par la proposition 2.1.1 et son corollaire, a le même type d'homotopie que $f^{-1}(-\delta_k) \sqcup f^{-1}(\delta_k)$. On a donc $\beta_{H^*}(V_k \cap W_k) \leq \beta_{H^*}(f^{-1}(-\delta_k)) + \beta_{H^*}(f^{-1}(\delta_k)) \leq 2B$, donc $\beta_{H^*}(V_k) \leq 2B + \beta_{H^*}(V)$.

Puisque la suite $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ a $N(f)$ comme intersection, par le théorème 1.3.17 et la proposition 1.3.16, on a bien $\beta_{H^*}(N(f)) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{H^*}(V_k) \leq 2B + \beta_{H^*}(V)$. $\square$

3.3. Variétés algébriques régulières

Le théorème précédent, et son corollaire, nous permettent de nous concentrer sur le cas où l'ensemble nodal est régulier, certainement pour le tore, mais potentiellement pour plusieurs autres variétés lisses.

Pour le tore, on remarque que ce qui a été utilisé jusqu'à maintenant, c'est l'isométrie avec une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, dans ce scénario, si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ et que 0 n'est pas une valeur critique, alors $N(f)$ est isométrique a une sous-variété lisse et compacte de $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par $n+1$ équations polynomiales. Ça nous amène à la définition suivante:

Définition 3.3.1. *Une variété algébrique $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension k est dite régulière s'il existe $P_1 \dots P_{n-k}$, des polynômes sur $\mathbb{R}^n$, avec $V = \{x \in \mathbb{R}^n | P_1(x) = \dots = P_{n-k}(x) = 0\}$, de telle sorte à ce que pour tout $x \in V$, le système $\{\nabla P_l(x)\}_{l=1}^{n-k}$ est linéairement indépendant. De plus, on demande à ce que V soit compacte.*

On note que V est une variété lisse par la proposition 1.1.6, car $V = N(P)$, où $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ a les P_j comme coordonnées. La même proposition nous dit également que si $x_0 \in V$, $T_{x_0}V = (\{\nabla P_l(x_0)\}_{l=1}^{n-k})^\perp$, car ces vecteurs sont les lignes de la matrice Jacobienne en x_0. La conjecture suivante, si vérifiée, pourrait aider à résoudre certains de ces cas, comme celui de $\mathbb{T}^n$.

Conjecture 3.3.2. *Pour la variété algébrique régulière V de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, définie par les polynômes $P_1, \ldots, P_{n-k}$, on a $\beta(V) \leq (\prod_{j=1}^{n-k} \deg(P_j))(\sum_{j=1}^{n-k}(\deg(P_j)-1))^k$.*

Conjecture 3.3.3 (Corollaire de 3.3.2)**.** *Soit V, une variété algébrique régulière de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré $d \geq 1$ et que $f = F|_V$ n'admet pas 0 comme valeur critique, alors $\beta(N(f)) = O_V d^k$*

La preuve que la première conjecture implique la suivante consiste à voir que $N(f) = V \cap N(F)$ et que par la proposition 1.1.6, « 0 est une valeur régulière de f » donne précisément la condition d'indépendance linéaire sur les gradients, de telle façon à ce que $N(f)$ soit une variété algébrique régulière de dimension $k-1$.

On remarque que cette conjecture est déjà vérifiée pour $k = 0$ et $k = n-1$. En effet, le lemme 2.2.1 vérifie le cas $k = 0$, et le théorème 2.3.2 vérifie le cas $k = n-1$. Pour donner encore plus de poids à cette conjecture, le cas $k = 1$ sera démontré, mais c'est surtout la recherche de cet objectif qui va nous aider à résoudre $\mathbb{T}^n$ pour certains n non-triviaux.

La technique utilisée ressemblera à celle de Milnor pour la preuve de 2.3.2, où on trouve une fonction de Morse sur V dont les points critiques correspondent à des équations polynomiales. Dans cette optique, le lemme suivant sera important.

Lemme 3.3.4. *Soit V, une variété algébrique régulière de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, définie par $P_1, \ldots, P_{n-k}$. Si $f_1, \ldots, f_k$ sont des restrictions de polynômes sur V, telles que sur $f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$, $\{\nabla f_l(x)\}_{l=1}^k$ est un système linéairement indépendant, alors $\#\{x \in V | f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} \leq (\prod_{i=1}^{n-k} \deg(P_i))(\prod_{i=1}^k \deg(f_i))$. Ici, $\deg(f_i)$ signifie le degré minimal d'un polynôme dont la restriction sur V est f_i.*

Démonstration. Soit $F_1, \ldots F_k$, les polynômes sur $\mathbb{R}^n$ dont les f_i sont les restrictions avec $\deg(F_i) = \deg(f_i)$. On veut appliquer le lemme 2.2.1 sur le système $P_1, \ldots, P_{n-k}, F_1, \ldots, F_k$. Il faut donc vérifier la condition d'indépendance linéaire.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $P_1(x_0) = \cdots = P_{n-k}(x_0) = F_1(x_0) = \cdots = F_k(x_0) = 0$. On veut vérifier que le système $\{\nabla P_l(x_0)\}_{l=1}^{n-k} \cup \{\nabla F_j(x_0)\}_{j=1}^k$ est linéairement indépendant. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels tels que $\sum_{l=1}^{n-k} \beta_l \nabla P_l(x_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_k \nabla F_j(x_0) = 0$. Pour $u \in T_{x_0}V \subset \mathbb{R}^n$, on sait que $\forall l \; \nabla P_l(x_0) \cdot u = 0$. On déduit:

$$\begin{aligned}
0 &= (\sum_{l=1}^{n-k} \beta_l \nabla P_l(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \nabla F_j(x_0)) \cdot u \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \nabla F_j(x_0) \cdot u \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \nabla f_j(x_0) \cdot u.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité tient car on sait $\nabla f_j(x_0) = \mathrm{proj}_{T_{x_0}V} \nabla F_j(x_0)$. On déduit que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_k \nabla f_j(x_0) = 0$. Puisque $x_0 \in V$ et $f_1(x_0) = \cdots = f_k(x_0) = 0$, par hypothèse $\{\nabla f_j(x_0)\}_{j=1}^{k}$ est un système linéairement indépendant. Alors, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. On se retrouve donc avec l'équation $\sum_{l=1}^{n-k} \beta_l \nabla P_l(x_0) = 0$. Par hypothèse sur la régularité de V, on a aussi $\beta_1 = \cdots = \beta_{n-k} = 0$.

On a bien que le système $\{\nabla P_l(x_0)\}_{l=1}^{n-k} \cup \{\nabla F_j(x_0)\}_{j=1}^{k}$ est linéairement indépendant. On déduit alors que $\#\{x \in V | f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} = \#\{x \in \mathbb{R}^n | P_1(x) = \cdots = P_{n-k}(x) = F_1(x) = \cdots = F_k(x) = 0\} \leq (\deg(P_1) \ldots \deg(P_{n-k}))(\deg(f_1) \ldots \deg(f_k))$. $\square$

Remarque 3.3.5. *Deux faits sont à noter. Premièrement, étant donné que les P_l sont déjà fixés par V, on a que le nombre de zéros est $O_V(d^k)$, si tous les f_j sont de degrés d tout au plus. Ensuite, une force du lemme est que la condition d'indépendance linéaire est intrinsèque: elle ne dépend que des ∇f_j qui ont comme domaine seulement variété riemannienne V.*

Il nous manque un seul ingrédient pour démontrer un théorème important de la section.

Définition 3.3.6. *Une variété lisse V de dimension k est dite parallélisable si on a des champs vectoriels $X_1, \ldots X_k : V \to TV$ tels que pour tout $x \in V$, $\{X_i(x)\}_{i=1}^{k}$ forme une base de T_xV, avec les X_i formant une parallélisation. Si V est munie de la métrique g, on demande également à ce que la base $\{X_i(x)\}_{i=1}^{k}$ soit orthogonale.*

Pour une sous-variété V de $\mathbb{R}^n$, un champ X est dit polynomial si on a une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $F|_V = X$ et chacune des coordonnées de F est un polynôme. On dit que $\deg(F)$ *est le maximum des degrés de ses coordonnées, et* $\deg(X)$ *est le minimum des degrés de tels F.*

Si on muni V de la métrique induite par $\mathbb{R}^n$, la parallélisation $\{X_i\}_{i=1}^{k}$ est dite polynomiale si tous les X_i son polynômiaux. Si on a une telle parallélisation, on dit que V est polynomialement parallélisable.

Théorème 3.3.7. *Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, un variété algébrique régulière de dimension k, donnée par les polynômes $P_1, \ldots, P_{n-k}$. Supposons, en plus, que V est munie de la parallélisation polynomiale $\{X_i\}_{i=1}^k$. Alors, $\beta(V) \leq (\deg(P_1) \ldots \deg(P_{n-k}))(\deg(X_1) \ldots \deg(X_k))$.*

DÉMONSTRATION. En fait, le défi initial est de trouver une fonction de Morse h sur V, dont les points critiques représentent les zéros de polynômes appropriés dans V. On pourra alors appliquer le lemme 3.3.4.

L'approche utilisée va être moins explicite que dans la preuve du théorème 2.3.2. On va directement se référer au théorème 2.1.12, pour prendre n'importe quel $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $h = H_u|_V$ est une fonction de Morse, avec $H_u(x) = x \cdot u$. Les inégalités de Morse nous disent alors que $\beta(V) \leq |\{$ points critiques de $h\}|$.

Or, pour $x \in V$, on a que $\nabla h(x) = \operatorname{proj}_{T_xV} \nabla H(x) = \operatorname{proj}_{T_xV} u$. Par hypothèse sur les $X_1, \ldots, X_k$, x est un point critique de h si et seulement si $\forall 1 \leq j \leq k$, on a $u \cdot X_j(x) = 0$. Soit F_j, la fonction polynomiale de la définition 3.3.6. Si $f_j(x) = u \cdot X_j(x)$ sur V, on a que $f_j = u \cdot F_j|_V$, c'est à dire que f_j est la restriction d'un polynôme sur V, et $\deg(f_j) \leq \deg(u \cdot F_j) \leq \deg(F_j) = \deg(X_j)$.

On va appliquer le lemme 3.3.4 sur $f_1, \ldots, f_k$, pour qu'on ait $\beta(V) \leq |\{$Solutions à $f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$ sur $V\}| \leq (\deg(P_1) \ldots \deg(P_{n-k}))(\deg(X_1) \ldots \deg(X_k))$ comme affirmé. Le reste de la preuve est de montrer que pour une solution x_0, le système $\{\nabla f_j(x_0)\}_{j=1}^k$ est linéairement indépendant, tel que le critère le demande.

Soit n'importe quelle carte (selon la définition 1.1.1) (U,ϕ) de V telle que $x_0 \in U$, et $p_0 = \phi(x_0)$. Considérons $\psi = \phi^{-1}$ sur $\phi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Puisque $x_0 = \psi(p_0)$ est un point critique de h, on sait que p_0 est un point critique de $h \circ \psi$ (qui est une fonction lisse sur l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^k$). Mais h est une fonction de Morse, donc la matrice hessienne $(h \circ \psi)''(p_0)$ est non-dégénérée. On va exprimer ce fait d'une façon intéressante. Pour $p \in \phi(U)$:

$$
\begin{aligned}
\partial_j(h \circ \psi)(p) &= \nabla h(\psi(p)) \cdot \partial_j \psi(p) \\
&= \operatorname{proj}_{T_{\psi(p)}V} u \cdot \partial_j \psi(p) \\
&= \left(\sum_{i=1}^k \frac{u \cdot X_i(\psi(p))}{\|X_i(\psi(p))\|^2} X_i(\psi(p)) \right) \cdot \partial_j \psi(p) \\
&= \sum_{i=1}^k f_i(\psi(p)) \frac{X_i(\psi(p)) \cdot \partial_j \psi(p)}{\|X_i(\psi(p))\|^2}.
\end{aligned}
$$

Cette formule semble compliquée à dériver une fois de plus, mais la règle du produit la simplifie énormément en p_0, où $f_i(\psi(p_0)) = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_l \partial_j (h \circ \psi)(p_0) &= \sum_{i=1}^{k} \partial_l (f_i \circ \psi)(p_0) \frac{X_i(\psi(p_0)) \cdot \partial_j \psi(p_0)}{\|X_i(\psi(p_0))\|^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \nabla f_i(\psi(p_0)) \cdot \partial_l \psi(p_0) \frac{X_i(\psi(p_0)) \cdot \partial_j \psi(p_0)}{\|X_i(\psi(p_0))\|^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \nabla f_i(x_0) \cdot \partial_l \psi(p_0) \frac{X_i(x_0) \cdot \partial_j \psi(p_0)}{\|X_i(x_0)\|^2}.\end{aligned}$$

Alors, on obtient que la matrice hessienne est un produit matriciel. En effet, si on définit les matrices A, B carrées de dimension k par $A_{li} = \nabla f_i(x_0) \cdot \partial_l \psi(p_0)$ et $B_{ij} = \frac{X_i(x_0) \cdot \partial_j \psi(p_0)}{\|X_i(x_0)\|^2}$, on a que $(h \circ \phi)''(p_0) = AB$. Cela établit donc que A est une matrice injective.

On note que si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0$, alors:

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\nabla f_1)(x_0) \cdot \partial_1 \psi(p_0) & \dots & (\nabla f_k)(x_0) \cdot \partial_1 \psi(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla f_1)(x_0) \cdot \partial_k \psi(p_0) & \dots & (\nabla f_k)(x_0) \cdot \partial_k \psi(p_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla f_j(x_0)) \cdot \partial_1 \psi(p_0) \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla f_j(x_0)) \cdot \partial_k \psi(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par injectivité de A, on a que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. On conclut que le système $\{\nabla f_1(x_0), \dots \nabla f_k(x_0)\}$ est linéairement indépendant. Car x_0 est un zéro arbitraire de f_i, on a terminé. $\square$

Remarque 3.3.8. *On devrait pouvoir enlever la condition d'orthogonalité de la base $X_1(x) \dots X_k(x)$. En effet, l'idée serait d'appliquer Gram-Schmidt modifié préalablement. Cela risquerait d'augmenter la borne, en restant du même ordre. Par contre, il semble que la preuve deviendrait pas mal moins claire.*

Toutes les variétés algébriques régulières ne sont pas parallélisables, encore moins polynomialement. Un contre-exemple direct est $\mathbb{S}^2$, où le théorème de la boule chevelue garantit qu'il n'existe pas de champ vectoriel jamais nul, encore moins une base orthogonale formée *de tels champs. Cela rend le champ (ha!) d'application du théorème très limité, mais va tout de même permettre la démonstration de certains cas intéressants et non-triviaux.*

En contraste, on a que le tore de Clifford $(\mathbb{S}^1)^n$ *est polynomialement parallélisable avec* $X_i((x_1,y_1,\ldots,x_i,y_i,\ldots,x_n,y_n)) = (0,0,\ldots,-y_i,x_i,\ldots,0,0)$, *$n$ champs polynomiaux de degré 1. Alors, le théorème prédit que* $\beta((\mathbb{S}^1)^n) \leq 2^n$ *car le tore est donné par n polynômes de degré* 2, *comme prévu.*

Corollaire 3.3.9. *La conjecture 3.3.2 est vérifiée pour* $k = 1$, *c'est-à dire si la variété* V *est générée par* $n - 1$ *polynômes.*

Démonstration. L'astuce est qu'avec $n-1$ vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$, on peut aisément « compléter » la base avec un vecteur orthogonal, d'une façon apparente au produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Ici, on définit F, vu comme le tangent:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \det\left(\begin{bmatrix} e_1 \ldots e_n \\ -\nabla P_1(x)- \\ \vdots \\ -\nabla P_{n-1}(x)- \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ici, $-\nabla P_j(x)-$ signifie la ligne dont les éléments sont les coordonnées de $\nabla P_j(x)$, et les e_j sont les vecteurs de la base canonique (c'est un abus de notation, mais il fonctionne bien). Par les propriétés du déterminant, on a que F est une fonction polynomiale de degré $\sum_{j=1}^{n-1}(\deg(P_j)-1)$ au plus. De plus, pour x où ces derniers sont linéairement indépendants, on a $F(x) \in (\{\nabla P_j(x)\}_{j=1}^{n-1})^{\perp} - 0$. On a donc que pour n'importe quel $x \in V$, $F(x) \in T_xV - \{0\}$. Car V est de dimension 1, si $X = F|_V$, X est trivialement une parallélisation polynomiale de V, et $\deg(X) \leq \deg(F)$. Par le théorème précédent, on conclut $\beta(V) \leq (\prod_{j=1}^{n-1}\deg(P_j))\deg(X) \leq (\prod_{j=1}^{n-1}\deg(P_j))(\sum_{j=1}^{n-1}(\deg(P_j)-1))$, tel que la conjecture le prédisait.

□

En particulier, puisque $\mathbb{T}^2$ est inséré dans $\mathbb{R}^4$, on peut appliquer le corollaire précédent pour donner une borne très acceptable sur les nombres de Betti des domaines nodaux, qui seront de dimension 1. Mais dans le cas du tore, on peut appliquer le théorème sur d'autres dimensions.

Lemme 3.3.10. *Si $n = 2$, 4 ou 8, alors $\mathbb{R}^n$ admet des isométries (linéaires) $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ telles que:*

- *$A_0 = I$, l'identité sur $\mathbb{R}^n$;*
- *$\forall u \in \mathbb{R}^n$, $A_k(u) \cdot A_m(u) = \|u\|^2 \delta_{km}$.*

En particulier, les restrictions des $A_1, \ldots, A_{n-1}$ forment une parallélisation polynomiale de $\mathbb{S}^{n-1}$, où tous les degrés sont 1.

Remarque 3.3.11. *Les dimensions sont exactement celles où $\mathbb{R}^n$ peut être munie d'une structure d'algèbre de division. Ce n'est pas une coïncidence.*

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^n$ de la multiplication de sorte que $\mathbb{R}^n$ devienne $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, selon n. Pour garder une preuve unique, on dénote la structure obtenue par $\mathbb{F}$. Soient $e_1, \ldots, e_{n-1}$, les racines canoniques de -1, et $e_0 = 1$, l'identité. Alors, considérons les fonctions, pour $0 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned} A_j : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ u &\to e_j u. \end{aligned}$$

On sait que pour $u, v \in \mathbb{F}$, on retrouve le produit scalaire usuel avec $u \cdot v = \Re(u\overline{v})$. Puisque $A_0 = I$ trivialement, il reste à montrer $\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = \|u\|^2 \delta_{km}$ pour u arbitraire. C'est direct lorsque l'associativité est présente, mais $\mathbb{O}$ ne jouit pas de cette propriété. On utilise plutôt les identités de Moufang ainsi que l'alternativité de $\mathbb{F}$ ([**CS**]). Si $k = m$, alors $(e_k u)(\overline{e_m u}) = (e_k u)(\overline{u}\ \overline{e_k}) = ((e_k u)\overline{u})\overline{e_k}$ par alternativité[1]. En réutilisant l'alternativité, on obtient $(e_k \|u\|^2)\overline{e_k} = \|u\|^2 \|e_k\|^2$, et donc $A_k(u) \cdot A_k(u) = \|u\|^2$.

On doit alors démontrer que si $k \neq m$, $\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = 0$. Soit $u_0 = \Re(u)$ et $u_v = u - u_0 e_0$, en notant $\overline{u_v} = -u_v$. En distribuant, on obtient :

$$\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = -\Re\big((u_0 e_k)(u_0 e_m) - (u_0 e_k)(u_v e_m) + (e_k u_v)(u_0 e_m) - (e_k u_v)(u_v e_m)\big).$$

Puisque $k \neq m$, $\Re(e_k e_m) = 0$. Les identités de Moufang et l'alternativité assurent que $(u_v e_m)(e_k u_v) = (u_v(e_m e_k))u_v$. En combinant ces deux dernières propriétés avec le fait que $\Re(ab) = \Re(ba)$, le premier et le dernier terme de l'équation précédente s'annulent. La formule

[1] Spécifiquement, le fait que deux éléments d'une algèbre alternative génèrent une sous-algèbre associative.

simplifiée est donc

$$\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = u_0 \Re\big(e_k(u_v e_m) - (e_k u_v) e_m\big).$$

Soit j tel que $e_k e_m = \pm e_j$. Alors, la partie réelle de $e_k(e_i e_m)$ est non-nulle si et seulement si $e_i e_m = \pm e_k$, et donc si et seulement si $i = j$ (on peut multiplier à droite par e_m et utiliser l'alternativité). On peut en dire autant pour la partie réelle de $(e_k e_i) e_m$. Si u_j est la composante de u_v en e_j, alors le seul terme restant est

$$\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = u_0 u_j \Re\big(e_k(e_j e_m) - (e_k e_j) e_m\big).$$

Or, $e_j = \pm e_k e_m$. On calcule, par alternativité, $e_k((e_k e_m) e_m) = e_k^2 e_m^2 = (e_k(e_k e_m)) e_m$. On obtient donc, enfin, $\Re((e_k u)(\overline{e_m u})) = 0$, peu importe $u \in \mathbb{F}$. $\square$

Théorème 3.3.12. *Si $n = 1{,}2{,}4$ ou 8, et si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$ tel que 0 n'est pas une valeur critique, alors:*

$$\beta(N(f)) \leq 2^n \deg(f)(\deg(f)+1)^{n-1} \leq \sqrt{n}^n 2^{2n-1} \lambda^{\frac{n}{2}}.$$

Démonstration. Une fois de plus, on utilise l'isométrie $\Pi : \mathbb{T}^n \to (\mathbb{S}^1)^n$, et Q, le polynôme sur $\mathbb{R}^{2n}$ de même degré que f tel que $Q \circ \Pi = f$. Soit $q = Q|_{(\mathbb{S}^1)^n}$. Π étant une isométrie surjective, q n'a pas 0 comme valeur critique, et $\beta(N(f)) = \beta(N(q))$. On peut donc travailler sur q et $(\mathbb{S}^1)^n$.

Le cas $n = 1$ est déjà couvert par la preuve du théorème 3.1.4. Donc, on suppose que $n = 2{,}4$ ou 8.

Tout d'abord, montrons que $N(q) = (\mathbb{S}^1)^n \cap Q^{-1}(0)$ est une variété algébrique régulière de dimension $n-1$. En effet, $(\mathbb{S}^1)^n$ en est une, donnée par les polynômes $P_j(x_1,y_1,\dots,x_j,y_j,\dots,x_n,y_n) = \frac{x_j^2+y_j^2-1}{2}$ pour $1 \leq j \leq n$ de gradients $\nabla P_j(x_1,y_1,\dots,x_j,y_j,\dots,x_n,y_n) = (0,0,\dots,x_j,y_j,\dots,0,0)$ formant un système orthonormal. Puisque Q est un polynôme, $N(q)$ est une variété algébrique dans $(\mathbb{S}^1)^n$ (donc compacte), et pour $x \in N(q)$, $0 \neq \nabla q(x) = \mathrm{proj}_{T_x(\mathbb{S}^1)^n} \nabla Q(x)$. Étant donné que les $\nabla P_j(x)$ sont dans $(T_x(\mathbb{S}^1)^n)^\perp$, on conclut que le système $\{\nabla Q(x), \nabla P_1(x), \dots, \nabla P_n(x)\}$ est bien linéairement indépendant.

Comme la remarque 3.3.8 le dit, si $F_i((x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)) = (0,0,\dots,-y_i,x_i,\dots,0,0)$ pour $1 \leq i \leq n$, alors les $X_i = F_i|_{(\mathbb{S}^1)^n}$ forment une parallélisation polynomiale de degré 1 de $(\mathbb{S}^1)^n$. Le gros de la preuve sera d'utiliser ça pour construire une parallélisation polynomiale de $N(q)$

à partir des F_i et ∇Q. On veut alors $Q_1, \dots, Q_{n-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ des fonctions polynomiales telles que si $x \in N(q)$, $\{Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)\}$ forme une base orthogonale de $T_xN(q) \subset T_x(\mathbb{S}^1)^n$. Il faudra donc que $Q_k(x)$ soit une combinaison linéaire des $X_i(x)$ orthogonale à $\nabla q(x)$.

On sait, avec $\|X_i(x)\| = 1$:

$$\begin{aligned}\nabla q(x) &= \mathrm{proj}_{T_x(\mathbb{S}^1)^n} \nabla Q(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla Q(x) \cdot X_i(x) X_i(x).\end{aligned}$$

On considère alors la fonction:

$$\begin{aligned}\hat{Q} : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^n\\ x &\to (\nabla Q(x) \cdot F_1(x), \dots, \nabla Q(x) \cdot F_n(x)).\end{aligned}$$

On a que $\hat{Q}$ est une fonction polynomiale de degré au plus $\deg(Q)$ qui représente, sur le tore, la représentation de ∇q dans la base des X_i. Comme ceux-ci sont orthonormaux, le travail de trouver le champs orthonormaux peut s'effectuer ici. C'est ici qu'on utilise $n = 2$, 4 ou 8. Soient A_0,$A_1, \dots, A_{n-1}$ les isométries sur $\mathbb{R}^n$ du lemme précédent.

Soit $\hat{Q}_k = A_k \circ \hat{Q} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On note que puisque A_k est une application linéaire, les $\hat{Q}_k$ sont des fonctions polynomiales de degré au plus $\deg(\hat{Q}) \leq \deg(Q)$.

Il reste à ramener le tout en combinaisons linéaires des F_j. Si $\hat{Q}_k^{(j)}$ est la j-ième composante de $\hat{Q}_k$, alors considérons les fonctions:

$$\begin{aligned}Q_k : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^{2n} \qquad 0 \leq k \leq n-1\\ x &\to \sum_{j=1}^{n} \hat{Q}_k^{(j)}(x) F_j(x).\end{aligned}$$

Les Q_k sont des fonctions polynomiales de degrés au plus $\deg(Q) + 1$. Soit $q_k = Q_k|_{(\mathbb{S}^1)^n}$. Pour chaque k et x, $q_k(x)$ est une combinaisons linéaire des $X_i(x)$. Alors, q_k est orthogonal aux $\nabla P_j(x)$. De plus,

$$\begin{aligned}
q_k(x) \cdot q_l(x) &= \sum_{j=1}^{n} \hat{Q}_k^{(j)}(x) \hat{Q}_l^{(j)}(x) \\
&= \hat{Q}_k(x) \cdot \hat{Q}_l(x) \\
&= \|\hat{Q}(x)\|^2 \delta_{kl} = \|\nabla q(x)\|^2 \delta_{kl} \\
q_0(x) &= \sum_{j=1}^{n} \hat{Q}_0^{(j)}(x) X_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \nabla Q \cdot X_j(x) X_j(x) \\
&= \nabla q(x).
\end{aligned}$$

On conclut que sur $N(q)$, pour $1 \leq k \leq n-1$, $q_k(x)$ est orthogonal à $\nabla q(x)$ ainsi qu'aux $\nabla P_j(x)$. Puisque $\|q_k(x)\| = \|\nabla q(x)\| \neq 0$, $\{q_1(x), \ldots, q_{n-1}(x)\}$ forme une base orthogonale de $T_x N(q)$. Alors, $q_1, \ldots, q_{n-1}$ parallélisent polynomialement $N(q)$ avec $\deg(q_i) \leq \deg(Q)+1$. Par le théorème 3.3.7, On a $\beta(N(f)) \leq 2^n \deg(f)(\deg(f)+1)^{n-1} \leq \sqrt{n}^n 2^{2n-1} \lambda_{k-1}^{\frac{n}{2}}$, comme affirmé. $\square$

Remarque 3.3.13. *La raison pourquoi les dimensions qui fonctionnent avec cette méthode sont $n = 2, 4$ ou 8 est qu'on est certain de pourvoir paralléliser le plan tangent de l'ensemble nodal. Ça n'est vraiment pas clair dans les autres dimensions, voir impossible à moins que les ensembles nodaux soient beaucoup plus triviaux qu'en apparence. Pour avoir une meilleure généralisation, il semble qu'il faudrait trouver un autre moyen que l'orthogonalité aux vecteurs tangents pour clarifier si x est un point critique de h, la fonction de Morse du théorème 3.3.7.*

Ceci dit, une généralisation du lemme 2.2.1 pourrait suffire. En effet, en analysant la preuve, il semble que si on a $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes sur $\mathbb{R}^n$, alors le nombre de zéros réguliers, où les gradients sont linéairement indépendants, est au plus $\deg(P_1)\deg(P_2)\ldots\deg(P_n)$. Alors, on devrait pouvoir paralléliser notre ensemble nodal, mais avec un certain nombre fini de singularités. En choisissant une fonction de Morse dont les points critiques évitent ces singularités, on s'attendrait à pouvoir démontrer le cas du tore en dimension arbitraire, et potentiellement résoudre la situation des variétés algébriques.

Bien que le lien avec le théorème de Courant 1.2.16 semble évident, les théorèmes du chapitre ne sont pas directement une généralisation. En effet, ceux-ci portent sur les ensembles nodaux, alors que Courant discute des domaines nodaux, le complément. Dans le cas de la sphère, le lien est plus direct, car on peut utiliser la dualité d'Alexander 1.3.20, auquel cas le nombre total de Betti de l'ensemble nodal est le même que celui des domaines nodaux. Et donc, pour $f \in M_\lambda(\mathbb{S}^n)$, $\beta(\mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^{\frac{n}{2}})$, ce qui généralise le théorème de Courant en vertu de la remarque 1.2.18.

Dans les autres cas, on peut tenter d'utiliser la suite de Mayer-Vietoris et le corollaire 1.3.6.

Proposition 3.3.14. *Si 0 n'est pas une valeur critique de la fonction lisse f sur la variété compacte M, alors $\beta(M \setminus f^{-1}(0)) \leq \beta(M) + \beta(N(f))$.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\beta(M \setminus f^{-1}(0)) = \beta(\{f > 0\}) + \beta(\{f < 0\})$. Puisque 0 n'est pas une valeur critique et par la compacité de M, on peut trouver $\delta > 0$ tel que l'intervalle $[-\delta,\delta]$ ne contient aucune valeur critique de f. Alors, par la proposition 2.1.1, $\{f > 0\}$ et $\{f < 0\}$ ont le même type d'homotopie que $\{f \geq -\delta\}$ et $\{f \leq \delta\}$ respectivement. Comme les intérieurs recouvrent M, on peut appliquer le corollaire 1.3.6 sur ces deux ensembles, afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\beta(M \setminus f^{-1}(0)) &= \beta(\{f > 0\}) + \beta(\{f < 0\})\\ &= \beta(\{f \geq -\delta\}) + \beta(\{f \leq \delta\})\\ &\leq \beta(M) + \beta(\{-\delta \leq f \leq \delta\}).\end{aligned}$$

Or, toujours par la proposition 2.1.1, $N(f)$ est une rétraction de $\{-\delta \leq f \leq \delta\}$. On conclut que $\beta(M \setminus f^{-1}(0)) \leq \beta(M) + \beta(N(f))$, comme voulu. □

On remarque que l'argument fonctionne aussi pour chacun des nombres de Betti, pas seulement la somme. On déduit que si $f \in M_\lambda(\mathbb{T}^n)$, et que 0 n'est pas une valeur critique, alors $\beta(\mathbb{T}^n \setminus f^{-1}(0)) = O_n(\lambda^{\frac{2n-1}{2}})$, et qu'on peut réduire à $O_n(\lambda^{\frac{n}{2}})$ si $n = 1$, 2, 4 ou 8. Dans ce dernier cas, on a bien une généralisation de Courant. Il semblerait possible de généraliser ces bornes même lorsque 0 est une valeur critique en utilisant un argument de limite directe d'homologie singulière, mais il y a des technicalités à considérer. Ceci dit, un théorème par Uhlenbeck [**U**] indique que la fontion propre générique est déjà couverte par la proposition.

Bibliographie

[B] Jean Bourgain, *On Pleijel's Nodal Domain Theorem*, International Mathematics Research Notices, vol. 2015. no. 6, p. 1601-1612, 2015.

[BH] A. Banyaga et D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Springer, Netherlands, 2004.

[C] Yaiza Canzani, *Notes for Analysis on Manifolds via the Laplacian*, Math 253, Harvard University, 2013.

[C1] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1984.

[CS] J.H. Conway et D.A. Smith, *On Quaternions and Octonions*, A K Peters, Massachusetts, 2003.

[DK] J. Davis et P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2001.

[G] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, England, 2002.

[JL] Josef Leydold, *On the Number of Nodal Domains of Spherical Harmonics*, Topology, vol. 35, no. 2, p. 301-321, 1996.

[K] Vladimir N. Karpushkin, *Topology of the zeros of eigenfunctions*, Functional Analysis and Its Applications, vol. 23, no. 3, p. 218-220, 1989.

[L] John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[LL] F. Lin et D. Liu, *On the Betti numbers of level sets of solutions to elliptic equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 36, p. 4517-4529, 2013.

[M] John Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, New Jersey, 1963.

[M1] John Milnor, *On the Betti Numbers of Real Varieties*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 15, no. 2, p. 275-280, 1964.

[M2] John Milnor, *Topology: From the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[P] Åke Pleijel, *Remarks on Courant's Nodal Line Theorem*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 9, no. 3, p. 543-550, 1956.

[P1] Iosif Polterovich, *Pleijel's nodal domain theorem for free membranes*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 137, no. 3, p. 1021-1024, 2009.

[PPS] I. Polterovich, L. Polterovich et V. Stojisavljević, *Persistence barcodes and Laplace eigenfunctions on surfaces*, Geometriae Dedicata, vol. 201, no. 1, p. 111-138, 2019.

[R] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[T] René Thom, *Sur L'Homologie des Variétés Algébriques Réelles*, Differential and Combinatorial Topology, p. 255-265, Princeton University Press, 1965.

[U] Karen Uhlenbeck, *Generic Properties of Eigenfunctions*, American Journal of Mathematics, vol. 98, no. 4, p.1059-1078, 1976.