

Université de Montréal

Analyse spectrale de différents types de tambours :
le tambour circulaire, le tabla et la timbale

par

Rosalie Bentz-Moffet

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

août 2019

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

Analyse spectrale de différents types de tambours : le tambour circulaire, le tabla et la timbale

présenté par

Rosalie Bentz-Moffet

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

(président-rapporteur)

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Alexandre Girouard

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

août 2019

Résumé

Ce mémoire traite de l'harmonicité d'instruments de musique à travers la géométrie spectrale. Nous y présentons, en premier lieu, les résultats connus concernant la corde de guitare, le tambour circulaire et puis le tabla ; le premier est harmonique, le deuxième ne l'est pas et puis le dernier s'en approche. Le cas de la timbale est ce qui constitue la majeure partie de notre travail. L'ingénieur-physicien Robert E. Davis [6] en avait déjà étudié la quasi-harmonicité et nous faisons ici une relecture mathématique de sa démarche. En alliant les méthodes analytiques et numériques, nous montrons que la caisse de résonance de la timbale permet à la fois d'ajuster les fréquences de vibration de la forme ω_{i1} , avec $1 \leq i \leq 5$, afin qu'elles s'approchent du rapport idéal 2 : 3 : 4 : 5 : 6, et elle permet aussi d'étouffer certains autres modes dissonants. Pour ce faire, nous élaborons un modèle simplifié de timbale cylindrique basé sur la physique et sur ce que propose Davis dans sa thèse. Ce modèle nous fournit un système d'équations divisé en trois parties : la vibration de la peau et la pression à l'intérieur et à l'extérieur de la timbale. Nous utilisons la méthode des fonctions de Green pour trouver les expressions des deux pressions. Nous nous servons de celles-ci ainsi que d'un développement en série de Fourier-Bessel modifiée pour résoudre les équations de la vibration de la peau. La résolution de ces équations se ramène finalement à celle d'un système matriciel infini dont nous faisons l'analyse numériquement.   l'aide de Mathematica et de ce système matriciel, nous trouvons les fréquences de vibration de la timbale, ce qui nous permet d'analyser l'harmonicité de l'instrument. Gr ce à une mesure de dissonance, nous optimisons l'harmonicité de la timbale en fonction du rayon du cylindre, de sa hauteur et de la tension.

Mots-clés : géométrie spectrale, fonction de Green, valeur propre, mode propre, harmonicité, timbale, fréquence

Summary

This thesis deals with the harmonicity of musical instruments through spectral geometry. First, we present the known results concerning the guitar string, the circular drum and the tabla; the first is harmonic, the second is not, and the last is somewhere in between. The case of the timpani constitutes the major part of our work. The physicist-engineer Robert E. Davis [6] had already studied its quasi-harmonicity and here we undergo a mathematical proofreading of his approach. By combining analytical and numerical methods, we show that the sound box of the timpani allows an adjustment of the vibration frequencies of the form ω_{i1} , with $1 \leq i \leq 5$, so that they get close to the ideal $2 : 3 : 4 : 5 : 6$ ratio, while it also stifles some other dissonant modes. To do so, we develop a simplified model of a cylindrical timpani based on physics and on what Davis suggests in his thesis. This model provides a system of equations divided into three parts : the vibration of the skin and the pressure inside and outside the timpani. We use the method of Green's functions to find the expressions of the pressures. We use these together with a modified Fourier-Bessel series development to solve the equations of the vibration of the skin. In the end, the solving of these equations is reduced to an infinite matrix system that we analyze numerically. Using Mathematica and this matrix system, we find the vibrational frequencies of the timpani, which allows us to analyze the harmonicity of the instrument. Thanks to a measure of dissonance, we optimize the harmonicity of different timpani models with different cylinder radii, heights and tensions.

Keywords : spectral geometry, Green's function, eigenvalue, eigenmode, harmonicity, timpani, tabla, drum, frequency

Table des matières

Résumé	v
Summary	vii
Liste des tableaux	xi
Table des figures	xiii
Liste des sigles et abréviations	xv
Remerciements	xix
Introduction	1
L'harmonie	3
Analyse spectrale d'instruments de musique	4
Contributions	9
Plan du mémoire	10
Chapitre 1. Notions préalables	11
1.1. Fonctions sinusoïdales	11
1.2. Fonctions de Bessel	13
1.2.1. Orthogonalité et complétude	13
1.3. Théorie des distributions	17
Chapitre 2. Analyse spectrale d'instruments simples	21
2.1. La corde de guitare	21

2.2. Le tambour	23
2.3. Le tabla	27
Chapitre 3. Timbale	31
3.1. Modèle	31
3.2. Formules pour la pression	33
3.2.1. Fonctions de Green associée à la pression externe.....	35
3.2.2. Expression de la pression externe.....	43
3.2.3. Fonction de Green associée à la pression interne.....	46
3.2.4. Expression de la pression interne	53
3.3. Recherche des fréquences propres et implémentation.....	54
3.4. Résultats	59
Chapitre 4. Conclusion.....	67
Bibliographie.....	69
Crédits des images	71
Annexe A. Calculs menant au système (3.3.3).....	A-i
Annexe B. Code.....	B-i
Annexe C. Tableaux et graphiques supplémentaires	C-i

Liste des tableaux

0.1	Temps de réverbération de la timbale et rapports des fréquences propres de la timbale et du tambour avec leur deuxième harmonique respective (avec $(a,L,T)=(0,328, 0,4142, 3990)$)	8
3.1	Fréquences f_{ij} (en Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale du modèle 1	60
3.2	Fréquences $f_{ij}^{(o)}$ (Hz) associées aux modes $\eta_{ij}^{(o)}$ du tambour de rayon $a = 0,328$ m avec une tension de $T = 3990$ N	61
3.3	Temps de réverbération TR60 (s) des modes η_{ij} de la timbale du modèle 1	61
3.4	Temps de réverbération des premiers modes propres de la timbale du modèle 1 et comparaison de différents rapports fréquentiels de cette timbale avec ceux du tambour de rayon $a = 0,328$ m et avec une tension de $T = 3990$ N	62
3.5	Les mesures du rayon et de la hauteur de la timbale minimisant la mesure de dissonance μ pour chaque tension considérée	65
C.1	Fréquences f_{ij} (Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale avec $T=3710$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m	C-i
C.2	Temps de réverbération TR60 (s) des modes η_{ij} de la timbale avec $T=3710$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m	C-i
C.3	Fréquences f_{ij} (Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale avec $T=5360$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m	C-ii
C.4	Temps de réverbération TR60 (s) des modes η_{ij} de la timbale avec $T=5360$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m	C-ii

Table des figures

0.1	Un tabla dont les deux composantes sont le dayan (à gauche) et le bayan (à droite)	5
0.2	Timbale d'orchestre.....	6
2.1	Tension dans la corde.....	21
2.2	Modes normaux du tambour η_{nk} ainsi que les rapports des fréquences avec la fondamentale.....	27
3.1	Contour d'intégration.....	39
3.2	Expérience de Chladni sur une timbale.....	55
3.3	Fréquence f_{11} (Hz) associée au mode normal η_{11} pour des trios de paramètres (a, L, T) donnés.....	63
3.4	Variation de la fréquence propre f_{m1} (Hz) associée au mode η_{m1} , pour $1 \leq m \leq 5$, en fonction de la hauteur L de la timbale de rayon $a = 0.328$ m et de tension $T = 3990$ N fixés.....	64
3.5	Mesures de dissonance μ de la timbale pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés	66
C.1	Fréquence f_{21} (Hz) associée au mode normal η_{21} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés.....	C-iii
C.2	Fréquence f_{31} (Hz) associée au mode normal η_{31} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés.....	C-iii
C.3	Fréquence f_{41} (Hz) associée au mode normal η_{41} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés.....	C-iv
C.4	Fréquence f_{51} (Hz) associée au mode normal η_{51} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés.....	C-iv

Liste des sigles et abréviations

a	Le rayon
L	La longueur de la corde de guitare ou la hauteur de la timbale
T	La tension
$\sigma/\sigma_a/\sigma_m$	La densité / de l'air / de la membrane
\mathbb{T}	Le cercle unité
c_a/c_m	La vitesse de vibration de l'air / de la membrane
ω	Une fréquence angulaire
f	Une fréquence ordinaire

$\eta(r,\theta,t)/\eta(r,\theta)$	L'équation d'un mode normal d'un instrument / Le facteur spatial de l'équation d'un mode normal d'un instrument
$p(r,\theta,z,t)/p(r,\theta,z)$	L'équation d'un mode normal de la pression / Le facteur spatial de l'équation d'un mode normal de la pression
$p_+(r,\theta,t)$	$\lim_{l \rightarrow L^+} p(r,\theta,l,t)$
$p_-(r,\theta,t)$	$\lim_{l \rightarrow L^-} p(r,\theta,l,t)$

J_α	La fonction de Bessel de première espèce et d'ordre α
Y_α	La fonction de Bessel de seconde espèce et d'ordre α
X_{mn}	Le n -ième zéro de J_m
Y_{mn}	Le n -ième zéro de J'_m

$L^2(\mathbb{R})/L^2_r(\mathbb{R})$	Les fonctions de carré intégrable / avec un poids $\rho = r$
$C^2(\mathbb{R})/C^\infty(\mathbb{R})$	Les fonctions deux fois continûment différentiables / Les fonctions lisses
Δ	L'opérateur laplacien
$\delta(x)/\delta(r)$	La fonction généralisée delta Dirac / associée au produit scalaire de L^2_r
$v.p.$	La valeur principale de Cauchy
$Res(f,a)$	Le résidu de f au point a
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Un produit scalaire

*À la mémoire de Patrice,
exceptionnel collègue et ami*

Remerciements

On s'inscrit à la maîtrise en mathématiques pour acquérir plus de connaissances et approfondir sa capacité d'abstraction. On dépose finalement un mémoire avec à l'oeil une petite émotion aqueuse, signe de fierté d'avoir complété et remporté cette bataille longue de deux ans contre soi-même : ses peurs, ses contradictions et (plus que quelques fois) son indiscipline. Cette larme c'est aussi beaucoup de reconnaissance et de gratitude dirigée envers toutes ces personnes qui nous ont accompagnée dans notre démarche et qui lui ont donné une belle couleur chaude et humaine.

Je remercie tout d'abord mon superviseur Iosif Polterovich de m'avoir proposé un projet ayant suscité mon intérêt jusqu'à la toute fin et de m'avoir offert la liberté nécessaire à ce que je m'approprie ce travail. Merci aussi à Yvan St-Aubin et à Alexandre Girouard pour leur lecture bienveillante et pour la pertinence de leurs commentaires.

Merci à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université de Montréal pour son soutien financier. Il m'a permis de mettre mes études au premier plan, conférant ainsi à ma démarche le sérieux que je souhaitais lui donner.

Merci à Jonathan pour bien des choses essentielles ; merci d'avoir si généreusement partagé avec moi ton expérience, merci pour ton support impérissable et puis merci pour cette précieuse complicité.

Merci à mes ami.e.s pour tous les encouragements ! Merci à mes incontournables du secondaire, mes vieux pots du profil régulier, avec qui l'on défie de plus en plus les pronostics de réussite ! Merci à Kim, Marie-Odile, Pascale et Raphaèle d'être venues souper et coucher chez mon père un soir avant le début de notre deuxième année de baccalauréat. Il manque maintenant juste un coat de jeans à notre histoire de matheuses. Merci aussi à Catherine

pour cette amitié montréalaise tout à fait rassurante. Merci à Walt Disney pour ta vivifiante présence au bureau. Et puis merci aux filles de Modulation ; bien des nerfs ont été assouplis par la musique et les rires du mardi soir.

Merci à Ryan Lerman et à Jack Conte pour leur délicieux et puissant funk !

Merci à ma grande soeur qui m'inspire depuis... 26 ans, et dont le rire taquin avait un jour fait toute la différence («Noume ? [sniff] Pourquoi t'as fait une maîtrise ?»).

Merci à mon monsieur que j'aime et que j'admire de me pousser et de contribuer, absolument tous les jours, à ce que je devienne celle que j'aspire à être.

Merci à mes parents pour leur sagesse immense et pour cet amour des études et de la connaissance si brillamment transmis. C'est d'une valeur inestimable...

Introduction

Nul n'est sans savoir que la communauté mathématique compte abondamment de musiciennes et de musiciens et encore plus de mélomanes. On soulève à tort et à raison les ressemblances entre les deux langages que sont la musique et les mathématiques. En effet, le ou la scientifique trouve souvent très séduisante l'idée d'utiliser ses outils d'abstraction afin de disséquer et d'anatomiser l'art. Que ces tentatives trouvent leur pertinence ou non, une chose est sûre : autant les mathématiques que la musique n'existent que parce que des individus la créent. Ainsi, il semble souhaitable, voire presque inévitable, que la quête des ressemblances entre ces disciplines commence par l'étude des humains qui les pratiquent toutes les deux. L'histoire par exemple, une science à la fois factuelle et subjective, est un bon point de départ et peut être très révélatrice de ces liens. D'ailleurs, le rapport à l'histoire dans les domaines de la musique et des mathématiques est l'un des aspects communs qu'affectionne particulièrement l'autrice de ces lignes. Si des professeur·e·s nous ont marqué·e·s en soulevant le rôle essentiel qu'ont notamment les « problèmes à la règle et au compas » d'Euclide dans l'apprentissage de la logique et dans l'acquisition de la rigueur qui l'accompagne, il se trouve autant de maîtres pour attribuer aux préludes et fugues de Bach les mêmes atouts dans la formation pianistique.

La géométrie spectrale est l'une de ces branches bien ancrées dans la modernité, mais aussi très attachées aux questions classiques. Elle s'intéresse au lien entre la géométrie d'un domaine et la distribution des valeurs propres d'un opérateur donné. Par exemple, en lien avec ce qui nous intéresse pour le présent projet, la physique nous apprend que la propagation d'une onde mécanique (comme le son) peut être décrite par l'équation des ondes :

$$\Delta_{\mathbf{x}}\eta = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (0.0.1)$$

où c est une constante réelle positive et $\Delta_{\mathbf{x}}$ l'opérateur du laplacien défini par

$$\Delta_{\mathbf{x}} := \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_n^2}. \quad (0.0.2)$$

Dans le contexte d'une vibration sonore, il se trouve que les valeurs propres du laplacien sont en directe correspondance avec les fréquences de vibration qui composent le son : les premières sont le carré des secondes (à un facteur près). Un des exercices classiques d'un cours d'équations aux dérivées partielles consiste en la recherche des valeurs propres du laplacien sur un domaine donné, comme le cercle ou le rectangle. En élargissant l'ensemble des domaines pertinents aux objets qui nous entourent, on en vient à développer ce que nous appellerons l'analyse spectrale d'instruments de musique. Cet exercice consiste à découvrir les fréquences de vibration d'un instrument. Aussi en lien avec le Laplacien, un autre des problèmes les plus connus de la théorie spectrale demande, à l'inverse, de trouver le domaine correspondant à un ensemble de valeurs propres donné. Mark Kac, dans [11], l'avait présenté sous forme ludique et à saveur musicale en adressant la question suivante : *Can One Hear the Shape of a Drum?* À l'époque, la réponse n'était pas connue. C'est par la négative qu'ont répondu Gordon, Webb et Wolpert dans un article publié en 1992, [9]. Dans celui-ci, les auteurs présentent deux domaines distincts dont les spectres (l'ensemble des valeurs propres associées au laplacien, dans ce cas-ci) sont identiques. Autrement dit, deux tambours ayant respectivement les formes des deux domaines identifiés dans l'article feraient entendre les mêmes fréquences de vibration, on ne pourrait donc pas les distinguer les yeux bandés. Que ce soit avec le problème de Kac ou encore par l'analyse spectrale d'instruments, la thématique musicale occupe une place spéciale au sein de la théorie spectrale. Elle fait en quelque sorte partie de sa genèse, fait l'objet encore aujourd'hui de plusieurs publications et d'une forme de fierté dans la communauté. On peut croire que les énergies déployées au service de cette branche sont en partie motivées par l'admiration du génie humain qui a su fabriquer, sans toute la théorie moderne, des tambours qui chantent ou encore des violons dont la valeur et la qualité sont inestimables. Dans ce mémoire, nous profiterons à notre tour de cette ingéniosité humaine et du monde musical pour faire des mathématiques. Nous nous intéresserons à l'**harmonie** que certains instruments produisent. Notre recherche s'est consacrée au problème de la timbale, mais nous prendrons soin de présenter ici les résultats

déjà très connus au sujet d'instruments plus simples à modéliser : la corde de guitare, le tambour et le tabla.

L'harmonie

Avant tout, puisque l'harmonie est un des concepts clefs de cette recherche, introduisons-le et précisons ce qu'il signifie pour nous. Quoique ce terme ait une connotation artistique ou subjective forte, il peut faire référence à un concept plus formel : celui qui compare deux objets, abstraits ou non, au moyen d'une fraction. Comme mathématicienne ou mathématicien, ce terme nous fait d'emblée penser aux suites et aux séries qualifiées d'harmoniques, que l'on étudie en théorie des nombres. Chez les pythagoriciens, le terme est lié à ce qu'on appelait la *musique céleste* ou *l'harmonie du cosmos*. Cette théorie suggérait que les planètes étaient organisées de sorte que les distances entre celles-ci correspondaient à des intervalles musicaux. Sans dire que les membres de cette secte étaient des mélomanes extravagants, la musique céleste était tout de même une démonstration de leur désir de retrouver, dans le monde qui les entoure, une logique satisfaisante et des proportions simples. De plus, à cheval entre l'art et les mathématiques, on parle souvent de l'harmonie des couleurs ou encore de l'harmonie musicale en parlant des accords (des *empilades de notes*). Pour Newton, ces deux concepts sont en fait presque identiques. On associe à chaque couleur et à chaque hauteur de note une valeur numérique appelée **fréquence**, notée f et généralement mesurée en hertz (Hz). Dans sa *théorie des couleurs* (information tirée de [16]), Newton avançait que les combinaisons de couleurs « naturellement belles » ont des rapports numériques « simples », comme si les yeux pouvaient les calculer. Pour un agencement harmonieux, il aurait par exemple préconisé un mariage entre le bleu (724 Hz) et l'orange (483 Hz) puisque le rapport entre ces deux couleurs est de $\frac{724,9}{483,8} \approx 1,5$, plutôt que le violet (768 Hz) et le bleu (724 Hz). On conviendra aussi qu'un mélange excessif de couleurs confond facilement le regard. De la même façon, certains intervalles musicaux sont d'instinct plus beaux, comme la quinte et l'octave qui correspondent à des rapports de 3 : 2 et 2 : 1 respectivement. Le triton, quant à lui, répugne l'oreille avec son rapport de 729 : 512. C'est ce principe qui est à l'origine du concept d'harmonie des instruments. Chaque son peut être décomposé en un spectre sonore. Autrement dit, il est la superposition de plusieurs fréquences qui résonnent avec une certaine amplitude, déterminée par la façon dont le son est excité. Notre capacité à reconnaître à l'oreille les

timbres des différents instruments provient en partie du fait que chacun possède un spectre propre et la prédominance marquée d'une des fréquences nous donne l'impression de n'entendre qu'une seule note. Pour avoir cette impression il faut aussi que l'instrument puisse être qualifié d'**harmonique**, c'est-à-dire que ses fréquences de résonance forment avec la plus basse, appelée **fondamentale**, des rapports entiers¹ (positifs, évidemment). En raison de l'harmonie qui règne entre ces fréquences, toutes, excepté la fondamentale, sont appelées des harmoniques. Un clappement de mains est un exemple de son dont les fréquences ne forment pas un ensemble harmonieux, il fait donc partie de la catégorie des **bruits** et est qualifié de **dissonant**. Le violoncelle, par opposition, reconnu pour avoir un timbre s'approchant de celui de la voix humaine, est très chantant et donc harmonique.

Analyse spectrale d'instruments de musique

Tel que mentionné précédemment, la question de l'harmonicité de la corde de guitare sera le premier élément étudié dans le présent travail. Il sera suivi de l'exemple du tambour circulaire, qui n'est quant à lui pas harmonique. Toutefois, les Indiens ont découvert au XVIII^e siècle un moyen de le modifier et de le faire chanter. En fixant sur la peau un disque de pâte soigneusement préparée, on perçoit une note au son de l'instrument, mais elle est voilée par un bruit et elle tend à disparaître derrière ce bruit. Du point de vue mathématique, cela signifie que les premières fréquences sont dans un rapport très près de l'entier avec la fondamentale. Cet instrument fantastique, qualifié de **quasi harmonique**, porte le nom de **tabla** et ses propriétés spectrales font en sorte qu'une proportion inhabituellement élevée de mathématiciennes et de mathématiciens connaissent son existence. Les *tablistes* ont en fait deux de ces tambours modifiés à leur disposition, le *dayan* et le *bayan*, accordés sur deux notes différentes. On les retrouve à la figure 0.1. L'expérience a permis aux artisans du tabla de déterminer la consistance et les dimensions à donner au poids au centre de la peau afin d'obtenir le son désiré, mais on peut montrer que ces quantités sont effectivement celles qui optimisent mathématiquement l'harmonicité.

Suivant ces trois cas plus simples d'harmonicité musicale, nous attaquerons la portion maîtresse de notre travail : le cas d'un instrument quasi harmonique également, mais auquel

1. Lorsque l'on peut discerner la hauteur d'un son produit par un instrument et que l'on peut chanter cette note, c'est signe que l'instrument est harmonique. Si on en est incapable, alors il ne l'est probablement pas.



FIGURE 0.1. Un tabla dont les deux composantes sont le dayan (à gauche) et le bayan (à droite)

les mathématiques ne s'étaient pas encore réellement intéressées. Il s'agit de la **timbale**, cet instrument d'orchestre dont les prouesses spectrales tiennent fièrement tête à un imposant chœur dans *Carmina Burana* de Carl Orff. La figure 0.2 nous renseigne sur l'allure générale de l'instrument. La caisse de résonance de cette percussion à peau est appelée un *fût* et est généralement de forme quasi hémisphérique. La timbale est en outre munie d'une pédale, aux pieds du timbalier ou de la timbalière, lui permettant de rectifier la tension, de manière à accorder l'instrument à la hauteur désirée. Le diamètre de la peau est également un paramètre pouvant servir à ajuster la hauteur de la note. Ainsi, pour plus de possibilités et de fluidité, on joue généralement entouré de plusieurs timbales, accordées différemment. Finalement, un trou à la base du fût permet de s'assurer de l'uniformité de la tension sur la peau.

Notre tâche principale pour ce mémoire consiste à restructurer, reformuler et compléter la portion mathématique de la démarche de l'ingénieur physicien Robert E. Davis, qui consistait à démontrer les propriétés harmoniques de la timbale expérimentalement et puis numériquement, sur la base d'un modèle mathématique, avant de faire la comparaison des résultats. Nous modéliserons une timbale de forme cylindrique et la peau de celle-ci sera imaginée entourée de ce que l'on appelle un *baffle*, ou encore un écran acoustique, de taille infini. Cet élément permettra de simplifier les équations qui concernent l'acoustique du milieu. À la différence du tambour régulier ou du tabla, il faudra considérer l'effet de la pression à l'intérieur et à l'extérieur de l'instrument. La pression externe devra répondre à la condition de radiation de Sommerfeld, requise puisque les ondes «s'en vont à l'infini». D'ailleurs, cette



FIGURE 0.2. Timbale d'orchestre

irradiation implique localement une perte d'énergie et donc un amortissement de la vibration de la peau. Le mouvement de la membrane sera noté par $\eta(r,\theta,t)$ et on l'appelle un **mode propre** associé à la **fréquence propre** ω s'il est possible d'écrire $\eta(r,\theta,t) = \text{Re} \{ \eta(r,\theta) e^{-i\omega t} \}$. L'amortissement d'un mode propre est bien mis en évidence avec cette notation puisqu'il est engendré par la partie imaginaire négative de ω :

$$\begin{aligned} \eta(r,\theta,t) &= \text{Re} \{ \eta(r,\theta) e^{-i\omega t} \} \\ &= \text{Re} \{ \eta(r,\theta) e^{-i(\text{Re}\{\omega\} + i \text{Im}\{\omega\})t} \} \\ &= \text{Re} \left\{ \eta(r,\theta) \underbrace{e^{\text{Im}\{\omega\}t}}_{\text{amortissement}} e^{-i \text{Re}\{\omega\}t} \right\}. \end{aligned}$$

Nous introduirons davantage le concept de temps de réverbération $TR60$ dans la section 3.3 et verrons qu'il se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$TR60 = \frac{-3}{\text{Im} \{ \omega_{ij} \} \log_{10} e}.$$

Pour tous les instruments étudiés dans les prochains chapitres, nous tâcherons d'expliquer comment trouver les différentes fréquences propres ω et pour ce faire, il nous faudra résoudre un système d'équations physiques modélisant la vibration de l'instrument. Comme mentionné précédemment, l'équation des ondes (ou un dérivé de celle-ci) est un impératif dans la modélisation d'un système vibratoire. Pour la timbale, voici ce que nous devons

résoudre (voir 3.1 pour plus de détails) :

Mouvement de la peau

$$(1) \begin{cases} \left(T \Delta_{\mathbf{x}} - \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \eta = p_+ - p_- & (a) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta & (b) \\ \eta(a, \theta, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

Pression interne

$$(\{0 \leq z \leq L\} \cap \{r \leq a\})$$

$$(2) \begin{cases} \left(\Delta_{\mathbf{x}} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 & (a) \\ \frac{d^2 p}{dt^2} = -\omega^2 p & (b) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} \right|_{\{r=a\}} = 0 & (c) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=0\}} = 0 & (d) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L^-\}} = -\sigma_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & (e) \end{cases}$$

Pression externe

$$(\{z \geq L\})$$

$$(3) \begin{cases} \left(\Delta_{\mathbf{x}} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 & (a) \\ \frac{d^2 p}{dt^2} = -\omega^2 p & (b) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L \cap r>a\}} = 0 & (c) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L^+ \cap r \leq a\}} = -\sigma_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & (d) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_a} p \right) = 0 & (e) \end{cases}$$

où T est la tension, (σ_a, c_a) et (σ_m, c_m) la densité de masse et la vitesse de vibration de l'air et de la membrane respectivement, L la hauteur de la timbale, a son rayon et

$$p_-(r, \theta, t) := \lim_{l \rightarrow L^-} p(r, \theta, l, t)$$

et

$$p_+(r, \theta, t) := \lim_{l \rightarrow L^+} p(r, \theta, l, t).$$

Un tableau qui précède cette introduction rassemble d'ailleurs toutes les notations que nous utilisons.

Au moyen de la méthode des fonctions de Green, nous trouverons, en premier lieu, des expressions intégrales pour p_+ et p_- , que nous pourrons alors remplacer dans le premier système. Nous décomposerons ensuite chacun des modes η , numéroté (i, j) , comme une série

de la forme

$$\eta_{ij}(r,\theta,t) = e^{-i\omega_{ij}t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{ij} \eta_{mn}^{(o)}(r,\theta),$$

où

$$\eta_{mn}^{(o)} := \frac{\sqrt{2}}{a J_{m+1}(X_{mn})} J_m \left(X_{mn} \frac{r}{a} \right)$$

avec X_{mn} le n -ième zéro de la m -ième fonction de Bessel, représentent les modes propres du tambour régulier. Avec cette expression, nous transformerons le système (1) en un système infini d'équations linéaires

$$\left(\frac{c_p}{\omega_{ij}a} \right)^2 b_{m'}^{ij} = A_{m'}(\omega_{ij}) b_{m'}^{ij},$$

où $b_{m'}^{ij} = (b_{m'1}^{ij}, b_{m'2}^{ij}, \dots)$ est un vecteur propre de la matrice $A_{m'}(\omega)$ que nous définirons à la section 3.3. À notre tour, à l'aide d'outils numériques, nous pourrions construire différents modes normaux de vibration en trouvant les coefficients $b_{m'}^{ij}$ appropriés ainsi que les fréquences angulaires ω_{ij} et ordinaires f_{ij} ($= \frac{\text{Re}\{\omega_{ij}\}}{2\pi}$ Hz) correspondantes.

TABLEAU 0.1. Temps de réverbération de la timbale et rapports des fréquences propres de la timbale et du tambour avec leur deuxième harmonique respective (avec $(a,L,T)=(0,328, 0,4142, 3990)$)

(i,j)	$f_{ij}^{(o)}$	f_{ij}	$2f_{ij}^{(o)}/f_{11}^{(o)}$	$2f_{ij}/f_{11}$	TR60
(0,1)	143,1	127,0	-	-	0,170
(1,1)	228,0	150,9	2	2	1,51
(2,1)	305,6	227,7	2,681	3,018	4,97
(0,2)	328,5	253,7	2,881	3,362	0,141
(3,1)	379,7	300,2	3,330	3,979	19,1
(1,2)	417,5	351,5	3,662	4,659	0,202
(4,1)	451,6	370,7	3,961	4,913	77,3
(2,2)	500,9	412,2	4,393	5,463	0,755
(5,1)	522,0	439,9	4,578	5,830	319

Les $f_{ij}^{(o)}$ sont les fréquences propres du tambour régulier.

Les f_{ij} sont les fréquences propres de la timbale.

Les cases **vertes** représentent l'information concernant les modes de la timbale qui vibrent longtemps.

Les cases **rouges** représentent l'information concernant les modes de la timbale qui sont amortis rapidement.

Sur la base de résultats expérimentaux [6], nous ferons l'hypothèse que nous aurons trouvé tous les premiers modes normaux et pourrions alors les mettre en rapport. Le tableau 0.1 dévoile certains résultats qui seront présentés et fait état de l'effet du fût sur l'harmonicité de

la timbale : la caisse permet d'ajuster les modes η_{i1} , avec $1 \leq i \leq 5$, afin qu'ils se rapprochent du rapport idéal $2 : 3 : 4 : 5 : 6$, et elle permet de diminuer de façon considérable le temps de réverbération (TR60) du premier mode de réverbération et aussi des autres modes qui figurent parmi les neuf premiers (les modes suivants ont de toute façon peu d'impact sonore). Ce faisant, les modes η_{i1} en question gagnent considérablement en importance harmonique. Finalement, afin d'appuyer et de développer certaines conclusions de Davis [6], nous mettrons sur pied une mesure de dissonance pour la timbale qui tient compte de l'effet du fût sur le temps de réverbération et nous l'évaluerons sur des modèles de timbales dont le rayon, la tension et la hauteur différeront. Nous observerons que les constantes $(a, L, T) = (0,4264, 0,9734, 2390)$ permettent d'optimiser l'harmonicité d'un tel type de modèle de timbale et que la dissonance dépend faiblement de la tension dans la peau.

Contributions

Ce mémoire est une relecture de la thèse de Davis [6] dont le travail a été poursuivi par Rienstra [18]. Notre volonté première était de présenter le problème de la quasi-harmonicité de la timbale de manière à ce qu'une mathématicienne ou un mathématicien puisse s'y référer beaucoup plus naturellement qu'à la version initiale. Pour ce faire, nous avons d'abord présenté au lecteur la notion élargie d'harmonie puis avons placé la démarche dans son contexte mathématique, en le faisant précéder des exemples de la corde de guitare, du tambour et du tabla. D'autre part, nous avons dû modifier légèrement l'organisation des idées, mais surtout développer et approfondir certains arguments. En l'occurrence, la section 3.2 est un ajout considérable au point de vue pédagogique puisqu'elle présente la construction des fonctions de Green utiles à l'expression des pressions internes et externes à l'instrument. Les justifications entourant le déploiement de ces deux expressions ainsi qu'au sujet de la convergence de nombreuses séries qui figurent dans ce travail n'étaient pas exposées dans la version originale de Davis. Aussi, au contraire des précédents auteurs, nous donnons accès à la partie importante du code numérique que nous avons conçu, à l'aide duquel nous avons confirmé certains résultats numériques de Davis et calculé un beaucoup plus vaste ensemble de données. Par le fait même, nous pouvons offrir un solide appui visuel avec les graphiques de la section des résultats et de l'annexe C. Finalement, notre apport d'une mesure de dissonance servant à

optimiser nos résultats est aussi une façon convaincante de présenter le portrait harmonique global de la timbale.

Plan du mémoire

Le premier chapitre servira de rappel pour certaines notions mathématiques, le chapitre suivant présentera l'analyse spectrale de la corde de guitare, du tambour circulaire et puis du tabla. Le chapitre 3 s'attardera au problème de la timbale : dans la section 3.1 nous présenterons de façon plus détaillée le système d'équations ci-dessus révélé et nous introduirons à la méthode des fonctions de Green. Nous trouverons la fonction de Green externe dans la section 3.2.1 afin de pouvoir trouver une expression pour la pression interne en 3.2.3. Cette démarche sera ensuite répétée pour la pression interne. Nous clorons le tout en présentant la démarche numérique ainsi que les résultats qu'elle a engendrés.

Chapitre 1

Notions préalables

Les prochaines notions sont considérées comme assez connues pour n'en faire qu'un court rappel, à la fois pour rafraîchir nos mémoires, mais surtout pour rassembler à un endroit facile d'accès quelques équations et théorèmes utiles. D'autres sujets beaucoup plus vastes, tels que les équations différentielles et l'analyse fonctionnelle, ne seront pas abordés dans ce rappel, quoiqu'il soit essentiel de les connaître un peu pour comprendre ce travail.

1.1. Fonctions sinusoïdales

Voici en rafale quelques résultats d'analyse de Fourier nécessaires pour le présent mémoire. Nous conseillons les ouvrages [23], [12] et [7] à un lecteur voulant approfondir le sujet.

Théorème 1.1.1. *Soit \mathbb{T} le cercle. Les fonctions qui composent l'ensemble suivant sont orthonormales dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$:*

$$\beta_m := \left\{ \frac{\cos(m\theta)}{\sqrt{2\pi}} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} \cup \left\{ \frac{\sin(m\theta)}{\sqrt{2\pi}} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

De façon équivalente, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1.2. *Les fonctions $\varphi_m^{(0)}(\theta) := \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}$, avec $m \in \mathbb{Z}$, sont orthonormales dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$.*

Tous les résultats de cette section s'appliquent de façon identique aux deux précédents ensembles de fonctions. Ainsi, par souci de concision, nous ne présenterons que ceux concernant le deuxième de ces ensembles. Aussi, à la suite de ce chapitre, nous nous autorisons à utiliser parfois le pan complexe et d'autres fois le pan réel de cette théorie sans besoin de justification.

Théorème 1.1.3. L'ensemble $\left\{ \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Définition 1.1.4. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Le précédent théorème nous autorise à décomposer f en une série connue sous le nom de **série de Fourier** et définie comme suit :

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{im\theta},$$

avec

$$\hat{f}(m) := \left\langle f(\theta), \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \frac{e^{-im\theta}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Sans conditions supplémentaires sur f , la convergence de cette série n'est entendue qu'au sens de la norme $L^2(\mathbb{T})$.

Remarque 1.1.5. Quoique ce soit inutile pour nous, on peut définir les séries de Fourier dans un contexte plus général, lorsque $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Théorème 1.1.6. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Alors on a :

- $\widehat{f+g}(m) = \hat{f}(m) + \hat{g}(m)$;
- $\widehat{cf}(m) = c\hat{f}(m)$ pour toute constante c ;
- $\widehat{\bar{f}}(m) = \overline{\hat{f}(m)}$, avec \bar{f} le conjugué complexe de f ;
- Si $f_\tau(\theta) = f(\theta - \tau)$ et $\tau \in \mathbb{T}$, alors $\widehat{f_\tau}(m) = \hat{f}(m) e^{-im\tau}$.

Théorème 1.1.7. Soit $f \in C^k(\mathbb{T})$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$.

Corollaire 1.1.8. Soit $f \in C^2(\mathbb{T})$. Alors la série de Fourier de f converge uniformément et absolument vers f (ponctuellement).

Remarque 1.1.9. La transformée de Fourier peut être définie de façon analogue pour les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx,$$

de sorte que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Voir [12] pour plus de détails à ce sujet.

1.2. Fonctions de Bessel

Les notions et résultats de cette section se trouvent presque tous dans [25], mais nous avons aussi consulté [7], [5] et le produit local [20].

Les fonctions de Bessel de première espèce J_α et de seconde espèce Y_α sont des solutions de l'équation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha)y = 0. \quad (1.2.1)$$

avec α réel. Les premières sont définies en $x = 0$ et les deuxièmes y admettent une singularité. Seules les fonctions de Bessel de la première espèce seront utiles dans ce mémoire et feront l'objet de nos rappels. Celles-ci peuvent s'exprimer sous la forme de la série entière

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n + \alpha},$$

ce qui met en évidence l'identité $J_{-m} = (-1)^m J_m$, pour $m \in \mathbb{Z}$. Ces fonctions satisfont également aux relations de récurrences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x); \\ J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x); \\ xJ'_m(x) + mJ_m(x) = xJ_{m-1}(x); \\ xJ'_m(x) - mJ_m(x) = -xJ_{m+1}(x); \\ \left(\frac{d}{xdx}\right)^n [x^m J_m(x)] = x^{m-n} J_{m-n}(x); \\ \left(\frac{d}{xdx}\right)^n [x^{-m} J_m(x)] = (-1)^n x^{-m-n} J_{m+n}(x). \end{array} \right.$$

1.2.1. Orthogonalité et complétude

Théorème 1.2.1. *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Posons $\lambda_{mn}^{(1)} := X_{mn}$ et $\lambda_{mn}^{(2)} := Y_{mn}$, respectivement les n -ièmes zéros de J_m et de J_m' ¹. Les fonctions de l'ensemble*

$$\beta_m^{(i)} := \left\{ \frac{J_m(\lambda_{mn}^{(i)} r)}{\|J_m(\lambda_{mn}^{(i)} r)\|} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

1. On pourrait faire plus général en étudiant $\lambda_{mn}^{(3)}$, le n -ième zéro de $x^{-m}[xJ'_m(x) + HJ_m(x)]$, avec H une constante donnée.

avec $i = 1$ ou 2 , forment une base hilbertienne de $L_r^2([0,1])$ muni, à l'accoutumée, du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(r) \overline{g(r)} r dr.$$

Remarque 1.2.2. Il faut mentionner que les auteurs de la littérature étudient d'ordinaire les fonctions J_ν avec $\nu \in \mathbb{R}$, et précisent, afin d'éviter des soucis de convergence, que les théorèmes d'orthogonalité et de complétude sont vrais lorsque $\nu > -\frac{1}{2}$ [25]. Or, la propriété $J_{-m} = (-1)^m J_m$ nous sauve d'un tel problème et nous permet de travailler avec les m entiers.

Démonstration. (Orthogonalité) Esquisons la preuve de l'orthogonalité des fonctions de l'ensemble $\beta^{(1)}$ (resp. $\beta^{(2)}$). Tout d'abord, un changement de variable évident et quelques petites manipulations à l'équation (1.2.1) permettent de réaliser que les fonctions $J_m(X_{mn}r)$ (resp. $J_m(Y_{mn}r)$) sont les fonctions propres (avec un poids $\rho = r$) de l'opérateur de Sturm-Liouville $\mathcal{L} := \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r}$ agissant sur les fonctions $u \in C^2[0,1]$ satisfaisant aux conditions suivantes : u s'annule en $r = 1$ (resp. $u'(1) = 0$) et sa limite (resp. la limite de sa dérivée) en 0 existe et est finie². En utilisant l'identité de Lagrange pour les équations différentielles ordinaires, on montre que l'opérateur \mathcal{L} , accompagné des conditions limites ci-haut mentionnées, est auto-adjoint (voir [7] p.143-145). Si u et v sont deux fonctions propres distinctes de \mathcal{L} , alors les valeurs propres, λ_u et λ_v , qui leur sont associées sont réelles et

$$\langle u, \mathcal{L}v \rangle = \langle u, \lambda_v v \rangle = \lambda_v \langle u, v \rangle.$$

Or, comme \mathcal{L} est auto-adjoint, on a aussi

$$\langle u, \mathcal{L}v \rangle = \langle \mathcal{L}u, v \rangle = \lambda_u \langle u, v \rangle.$$

De sorte que,

$$(\lambda_u - \lambda_v) \langle u, v \rangle = 0.$$

Il en ressort que u et v sont orthogonales si $\lambda_u \neq \lambda_v$. C'est ainsi que l'on conclut que les fonctions $J_m(\lambda_{mn}^{(1)}r)$ (resp. $J_m(\lambda_{mn}^{(2)}r)$) sont orthogonales entre elles. \square

2. Cette condition est une redondance avec la continuité des fonctions du domaine de l'opérateur. Non-obstant ce, nous préférons répéter la contrainte puisqu'il s'agit de l'argument qui permet à la preuve de l'orthogonalité des fonctions de Bessel sur un intervalle $[a,b]$, avec $a > 0$, de s'appliquer aussi lorsque $a = 0$ (voir [7] pour plus de détails sur la différence entre les opérateurs réguliers et singuliers de Sturm-liouville).

Il importe maintenant de calculer la norme de ces fonctions afin de les normaliser. Soit $k \in \mathbb{R}$. On pose $y(r) := J_m(kr)$. Ainsi, $y(r)$ satisfait à l'équation

$$(ry')'(kr) + (k^2r - \frac{m^2}{r})y(kr) = 0.$$

En déployant deux fois cette équation pour deux fonctions y_1 et y_2 et deux constantes k_1 et k_2 puis en multipliant la première par y_2 et la seconde par y_1 , on déduit tour à tour les égalités suivantes :

$$r(k_2^2 - k_1^2)y(k_1r)y(k_2r) = -y(k_2r)(ry')'(k_1r) + y(k_1r)(ry')'(k_2r),$$

ce qui nous donne

$$(k_2^2 - k_1^2) \int_0^1 ry(k_1r)y(k_2r) = \int_0^1 [y(k_2r)(ry')'(k_1r) - y(k_1r)(ry')'(k_2r)] dr,$$

puis en intégrant par partie

$$\begin{aligned} (k_2^2 - k_1^2) \langle y(k_1r), y(k_2r) \rangle &= \frac{ry(k_2r)y'(k_1r)}{k_1} \Big|_0^1 - \frac{k_2}{k_1} \int_0^1 ry'(k_2r)y'(k_1r) dr - \\ &\quad - \frac{ry(k_1r)y'(k_2r)}{k_2} \Big|_0^1 + \frac{k_1}{k_2} \int_0^1 ry'(k_1r)y'(k_2r) dr. \end{aligned}$$

D'où l'on obtient

$$\|y(k_2r)\|^2 = \lim_{k_1 \rightarrow k_2} \langle y(k_1r), y(k_2r) \rangle = \lim_{k_1 \rightarrow k_2} \frac{\frac{y(k_2)y'(k_1)}{k_1} - \frac{y(k_1)y'(k_2)}{k_2}}{k_2^2 - k_1^2},$$

puisque $y(0) = J_m(0) = 0$, sauf si $m = 0$, auquel cas on a $y'(0) = J'_m(0) = 0$. Par la règle de l'Hôpital, on calcule

$$\begin{aligned} \|y(k_2r)\|^2 &\stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{k_1 \rightarrow k_2} \frac{k_2y(k_2)y''(k_1) - k_1y'(k_1)y'(k_2) - y(k_1)y'(k_2)}{-2k_1(k_1k_2) + k_2(k_2^2 - k_1^2)} \\ &= \frac{k_2y(k_2)y''(k_2) - k_2y'(k_2)y'(k_2) - y(k_2)y'(k_2)}{-2k_2^3}. \end{aligned}$$

En fixant d'une part $k_2 = Y_{mn}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \|J_m(Y_{mn}r)\|^2 &= \frac{Y_{mn}J_m(Y_{mn})J''_m(Y_{mn})}{-2Y_{mn}^3} \\ &= \frac{-J_m(Y_{mn})[(m^2 - Y_{mn}^2)J_m(Y_{mn}) - J'_m(Y_{mn})]}{2Y_{mn}^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{J_m^2(Y_{mn})}{2} \left[1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2} \right].$$

D'autre part, si $k_2 = X_{mn}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|J_m(X_{mn}r)\|^2 &= \frac{(J'_m(X_{mn}))^2}{2X_{mn}^2} \\ &= \frac{J_{m+1}^2(X_{mn})}{2X_{mn}^2}. \end{aligned}$$

Démonstration. (Complétude) Le résultat est désormais bien connu, mais la démonstration n'a pas d'intérêt profond pour nous, puisqu'elle relève de beaucoup de calculs et de manipulations, mais de peu de concepts intéressants. Un lecteur curieux pourra la trouver dans [5] p.397-428 ou dans sa formulation un peu plus synthétisée dans [4] à partir de la page 278. Une autre façon de déduire ce résultat est d'en obtenir un encore plus fort et extrêmement utile ([25] chapitre XVIII, sections 18.24,18.25,18.26,18.34,18.55) :

Théorème 1.2.3. *Toute fonction $f \in C^2([0,1])$ peut être décomposée en une série*

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \varphi_n^{(i)}(r)$$

convergente ponctuellement sur $(0,1)$, avec

$$\varphi_n^{(1)}(r) := \frac{\sqrt{2}X_{mn}J_m(X_{mn}r)}{J_{m+1}(X_{mn})}$$

ou encore

$$\varphi_n^{(2)}(r) := \frac{\sqrt{2}J_m(Y_{mn}r)}{J_m(Y_{mn})\sqrt{1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}}}$$

et où les constantes $c_n^{(i)}$ sont définies par

$$c_n^{(i)} := \langle f, \varphi_n^{(i)} \rangle.$$

Plus encore, on a l'égalité en $r = 0$ si on exige

$$f \text{ (resp. } f') \text{ s'annule et est continue en } r = 0 \quad (1)$$

et en $r = 1$ si

$$f \text{ (resp. } f') \text{ s'annule et est continue en } r = 1 \quad (2)$$

Finalement, la convergence est absolue et uniforme sur tout sous-intervalle fermé de $(0,1)$ et on peut inclure 0 à cet intervalle si f satisfait à **(1)** et inclure 1 si elle satisfait à **(2)**.

□

Définition 1.2.4. Lorsque la base utilisée est l'ensemble $\beta_m^{(1)} = \{\varphi_{mn}^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, on parle d'une **série de Fourier-Bessel**, alors qu'on parle d'une **série de Dini** avec la base $\beta_m^{(2)} = \{\varphi_{mn}^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1.3. Théorie des distributions

Comme le titre du chapitre l'indique bien, la théorie des distributions sera ici abordée dans l'optique d'en faire un rappel. Seule, la lecture des prochaines définitions pourrait ne pas suffire à bien comprendre tout le sujet. Pour retrouver ou approfondir les prochaines notions, veuillez-vous référer au chapitre 4 de [22].

Définition 1.3.1. L'espace des **fonctions tests**, noté $\mathcal{D}(\Omega)$ est défini comme l'ensemble des fonctions infiniment différentiables, c'est-à-dire les fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ayant un support compact dans Ω , un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.2. On définit $\mathcal{D}(K)$, pour un compact $K \subset \mathbb{R}^n$, comme l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^\infty$ pour lesquelles il existe un ouvert $U \supset K$ tel que $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et dont le support est inclus dans K .

Définition 1.3.3. Une suite $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

- (1) il existe un compact $K \subset \Omega$ et φ tels que $\varphi, \varphi_k \in \mathcal{D}(K)$ pour tout k ;
- (2) pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ on a $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K .

Définition 1.3.4. L'espace des **distributions**, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, est l'ensemble des fonctionnelles linéaires f sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que $f|_{\mathcal{D}(K)}$ est continue sur $\mathcal{D}(K)$ pour tout compact K .

De façon équivalente, on peut dire qu'une fonctionnelle linéaire f agissant sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ pour toute suite $\{\varphi_k\}$ telle que $\varphi_k \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 1.3.5. Soit $L_{loc}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions sur Ω intégrables au sens de Lebesgue sur tout compact $K \subset \Omega$. On fait correspondre chaque fonction $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ à la fonctionnelle suivante sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Ces fonctionnelles sont des distributions et on les appelle des **distributions régulières**.

La preuve du prochain théorème est présentée sous forme d'un corollaire aux pages 69-72 de [22].

Théorème 1.3.6. *Si deux distributions régulières f_1 et f_2 sont égales, alors elles coïncident presque partout.*

Exemple 1.3.7. La distribution δ de Dirac (souvent qualifiée de fonction par abus de langage) est la distribution définie comme suit :

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx := \varphi(x_0)$$

pour toute fonction test φ .

Cette distribution n'est pas régulière puisque si elle l'était, par le théorème précédent, on aurait alors que δ est nulle presque partout en dehors du point x_0 et donc presque partout sur \mathbb{R}^n . Or cela ferait de δ la distribution nulle, ce qui est une contradiction.

En opérant une simple intégration par partie et en utilisant le fait que $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour toute distribution $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut définir la dérivation dans l'espace des distributions :

Définition 1.3.8. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors on définit*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

et conséquemment,

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

pour tout multi-indice α .

Exemple 1.3.9. Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside définie comme

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Clairement, H est localement intégrable, donc H appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, par définition, on a

$$\langle H'(x), \varphi \rangle = - \langle H, \varphi'(x) \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

On en déduit que $H'(x) = \delta(x)$.

Voici un deuxième espace de fonctions tests extrêmement utile :

Définition 1.3.10. *L'ensemble des fonctions φ infiniment différentiables sur \mathbb{R}^n et telles que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty$ pour tous multi-indices α et β est appelé **l'espace de Schwartz** et est noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.3.11. *En munissant cet espace du système de semi-normes*

$$p_k(\varphi) := \sum_{|\alpha+\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

il est possible de voir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme un espace de Fréchet (voir [22] aux pages 64 à 69 pour la démonstration).

En pratique, l'espace de Fréchet en question nous conduit à cette définition de la convergence dans l'espace de Schwartz :

Proposition 1.3.12. *Une suite φ_k converge dans la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si pour tout opérateur différentiel D à coefficients polynomiaux agissant sur \mathbb{R}^n on a que $D\varphi_k \rightarrow D\varphi$ uniformément sur \mathbb{R}^n .*

Définition 1.3.13. *L'espace dual topologique de l'espace de Schwartz est appelé **l'espace des distributions tempérées** et est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Exemple 1.3.14. Nous allons montrer que la valeur principale de Cauchy de la fonction $\frac{1}{x}$, notée v.p. $(\frac{1}{x})$ est définie comme

$$\left\langle \text{v.p.} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right\rangle := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

pour tout φ dans l'espace de Schwartz, est une distribution tempérée.

On remarque d'abord qu'on a l'égalité suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Or, en appliquant la règle de l'Hôpital on peut vérifier que cet intégrande est continu sur l'intervalle $[0,1]$, par exemple, ce qui implique que

$$\left| \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right| < \infty.$$

On applique maintenant le théorème des accroissements finis au numérateur :

$$\left| \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{T.A.F.}{\leq} \int_0^1 \frac{x - (-x)}{x} \sup_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| dx \\
& = 2 \sup_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)|.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_1^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right| & \leq \int_1^\infty \frac{2x|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x^2} dx \\
& \leq \int_1^\infty \frac{2}{x^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\varphi(x)| dx \\
& \leq \sup_{\mathbb{R}} |x\varphi(x)| \int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx \\
& = 2 \sup_{x \in [1, +\infty)} |x\varphi(x)|.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Les inégalités 1.3.1 et 1.3.2 nous indiquent que v.p. $\frac{1}{x}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace de Schwartz, d'où elle est aussi une distribution tempérée.

Le dernier outil de la théorie des distributions dont nous aurons besoin est la transformée de Fourier sur l'espace des distributions tempérées, notée \mathcal{F} . On peut lire à la page 127 de [22] que celle-ci peut effectivement être définie sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de la façon suivante :

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors on a

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et avec $\widehat{\cdot}$ la transformée de Fourier usuelle sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, cet opérateur est un isomorphisme topologique dont l'inverse s'exprime comme :

$$\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi}^{-1} \rangle = \left\langle f, \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \right\rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 2

Analyse spectrale d'instruments simples

2.1. La corde de guitare

Commençons par établir, à la façon des physiciens et des physiciennes ([1]), le lien entre la vibration d'une corde et l'équation différentielle qui décrit son mouvement. Soit $\eta(x,t)$, la

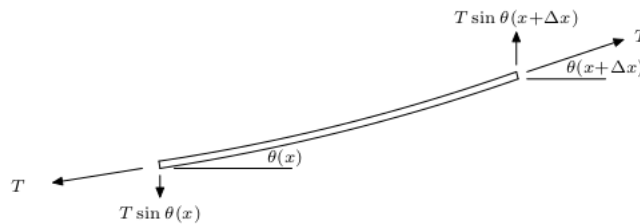


FIGURE 2.1. Tension dans la corde

fonction représentant la hauteur du point x de la corde au temps t , et soit T la tension. Le schéma 2.1 permet facilement d'établir la relation $\tan(\theta(x,t)) = \partial_x \eta(x,t)$. On suppose que les déplacements verticaux sont assez petits pour que l'on puisse estimer $\cos(\theta(x,t)) \approx 1$ et donc que $\sin(\theta(x,t)) \approx \tan(\theta(x,t))$. De cette façon, on utilise la différence entre les tensions aux deux bouts du petit segment $(x, x + \Delta x)$ pour exprimer la force F comme

$$\begin{aligned} T \sin(\theta(x + \Delta x, t)) - T \sin(\theta(x, t)) &\approx T \tan(\theta(x + \Delta x, t)) - T \tan(\theta(x, t)) \\ &= T \Delta x \frac{\tan(\theta(x + \Delta x, t)) - \tan(\theta(x, t))}{\Delta x} \\ &= T \Delta x \frac{\left(\frac{\partial \eta(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)}{\Delta x} \\ &\approx T \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Avec une densité linéaire σ constante le long de la corde, la masse du segment est $\sigma\Delta x$. Sachant cela, les enseignements de Newton, et en particulier sa deuxième loi, nous permettent de réécrire la force F comme

$$F = \sigma\Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \stackrel{(2.1.1)}{\approx} T\Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

En annulant Δx de chaque côté, on conclut

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Comme T et σ sont toutes les deux positives, on pose $c := \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ et l'on réécrit la dernière équation :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

On appelle cette dernière **l'équation des ondes** (en dimension $n = 1$). Shubin (section 1.7), ou tout autre bon manuel d'équations différentielles, montre que la solution générale à cette équation est de la forme

$$\eta(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Ceci étant dit, toutes les solutions η n'importent pas également à notre démarche. Qu'on pense au violon, à la guitare, au banjo ou à la vielle à roue, qui sont tous des instruments à cordes, deux choses demeurent : d'abord, les deux extrémités des cordes sont toujours fixées, immobiles. Les solutions que nous étudierons devront donc respecter la contrainte $\eta(0,t) = \eta(L,t) = 0$, avec L la longueur de la corde. D'autre part, bien que chacun de ces instruments soit associé à une technique de jeu différente, et donc à des conditions initiales et à un forçage propre, la théorie de Fourier (voir par exemple [12] ou [23]) nous garantit la possibilité de fragmenter le son de tous ceux-ci en une somme de modes normaux, c'est-à-dire de solutions de la forme¹ $\eta(x,t) = \eta(x) \cos(\omega t + \phi)$, avec $\omega > 0$, et dont l'amplitude et la phase dépendent de la technique de jeu. L'objectif premier étant de quantifier la qualité de l'harmonie des cordes vibrantes, en calculant le rapport entre les différentes fréquences propres ω , il va donc de soi que nous soyons plutôt à la recherche de solutions de la précédente

1. Suivant cette notation, nous nous autorisons à utiliser et à retirer la dépendance temporelle de η selon la pertinence dans le contexte.

forme. Par conséquent, nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\omega^2 \eta(x) = c^2 \frac{d^2 \eta(x)}{dx^2}, \\ \eta(0) = \eta(L) = 0. \end{cases}$$

La solution générale de ce système est de la forme $\eta(x) = A \cos(\frac{\omega}{c}x) + B \sin(\frac{\omega}{c}x)$, cependant, les contraintes $\eta(0) = 0$ et $\eta(L) = 0$ obligent $A = 0$ et $\omega \in \{\frac{cn\pi}{L}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Par conséquent, on a bien que les rapports des harmoniques ω_n avec la fondamentale sont naturels :

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{n\pi c}{L} \frac{L}{\pi c} = n \in \mathbb{N}.$$

Les instruments à cordes sont donc harmoniques². Avec des idées très semblables on peut aussi montrer que certains instruments à vent comme la flûte et la clarinette sont harmoniques, en soulevant la similitude entre la propagation d'une onde dans une corde et dans un tube d'air. Les conditions aux bords dépendent quant à elles de l'ouverture et de la fermeture des deux bouts de l'instrument. Plus de détails à ce sujet se retrouvent dans [1].

2.2. Le tambour

À toute notion intéressante son contre-exemple; le tambour est le favori lorsqu'il est question d'harmonicité.

Une démonstration rigoureuse s'accompagne toujours de définitions soignées, ainsi, afin de faire l'analyse spectrale de l'instrument percussif, une première étape consiste à présenter sans équivoque ce que l'on considère être « un tambour » : une peau circulaire de rayon a , de densité de surface σ constante et dont le bord, fixé, est soumis uniformément à une tension T . Un travail analogue à celui pour la corde de guitare, avec la deuxième loi de Newton, refait surgir l'équation des ondes, puisque le modèle du tambour n'est en fait que le pendant circulaire et bidimensionnel du modèle de la corde de guitare. Autrement dit, si η représente la hauteur d'une particule de la peau au temps t , alors η satisfait à

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \Delta \eta(x, t), \\ \eta(a, \theta, t) = 0, \end{cases}$$

2. Ou devrait-on plutôt dire : voici ce qui conclut la preuve mathématique de l'harmonicité de la corde vibrante fixée aux deux extrémités... Puisque la première affirmation n'a pas besoin des mathématiques pour être vraie.

avec $c = \frac{T}{\sigma}$ et où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien en deux dimensions. Encore une fois, nous ne cherchons pas à débusquer n'importe quel mouvement vibratoire du modèle, mais bien ceux associés à un mouvement sinusoïdal propre, afin de cataloguer les différentes fréquences propres du tambour. Nous devons conséquemment plutôt travailler avec l'équation

$$c^2 \Delta \eta(x) = -\omega^2 \eta(x), \quad (2.2.1)$$

que l'on peut résoudre plus naturellement en utilisant les coordonnées polaires. On trouve, à l'aide de celles-ci et puis du principe de la dérivation en chaîne, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(r, \theta)}{\partial r} &= \cos(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 \eta(r, \theta)}{\partial r^2} &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial \eta(r, \theta)}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 \eta(r, \theta)}{\partial \theta^2} &= -r \left(\cos(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} \right) + \\ &\quad + r^2 \left(\sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2} - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x \partial y} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Ce qui, combiné à la célèbre identité trigonométrique $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, donne

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \Delta \eta. \quad (2.2.2)$$

On se tourne maintenant vers la méthode de la séparation des variables afin de trouver certains modes normaux puis on montrera qu'il n'en existe aucun autre. Supposons la propriété $\eta(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ vraie et déployons-la dans les équations (2.2.1) et (2.2.2) :

$$-\omega^2 f(r)g(\theta) = c^2 \left(f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r} f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2} f(r)g''(\theta) \right).$$

En divisant par $\frac{f(r)g(\theta)}{r^2}$ de chaque côté et en opérant un dérangement des termes, on trouve l'égalité

$$-\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\omega^2 r^2}{c^2} + r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad (2.2.3)$$

qui doit être constante puisque ses deux versants dépendent de variables distinctes. On désigne cette constante par μ . Or, puisque g est une fonction angulaire, celle-ci doit être périodique sur \mathbb{T} . Une vérification directe montre que ce n'est possible que si μ est le carré d'un entier positif et conséquemment que g est de la forme $C \cos(m\theta + \psi)$, avec $m \in \mathbb{N}$ et ψ une phase qui dépend des conditions initiales. Finalement, de (2.2.3) on retrouve l'équation de Bessel

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)f(r) = 0,$$

qui, d'après le chapitre 1, possède comme solution générale une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de premier et deuxième ordre : $J_m(\frac{\omega r}{c})$ et $Y_m(\frac{\omega r}{c})$. Toutefois, la seconde ayant une singularité en $r = 0$, c'est-à-dire au centre du tambour, elle doit être rejetée. En somme, il a été montré que la fonction

$$\eta(r, \theta, t) = K J_m\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos(m\theta + \phi) \cos(\omega t + \psi)$$

est une solution à l'équation des ondes bidimensionnelle. Pour satisfaire à la condition au bord de la peau, on doit avoir

$$\eta(a, \theta, t) = K J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) \cos(n\theta + \phi) \cos(\omega t + \psi) = 0,$$

ou autrement dit

$$J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0,$$

entraînant une contrainte sur ω puisque le rayon, a , et c sont déjà fixées. Chacune des fonctions de Bessel J_m possède un ensemble discret et infini de zéros (voir [7] section 5.3), il y a donc autant de possibilités pour ω . Nous posons

$$W := \left\{ \omega_{mn} = \frac{c \cdot X_{mn}}{a} \mid X_{mn} \text{ le } n\text{-ième zéro positif de } J_m \text{ et } (m, n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \right\}$$

et aimerions finalement conclure que W couvre le spectre complet des fréquences propres du tambour, afin de confirmer que $\omega_{0,1}$ est bel et bien notre fréquence fondamentale. Pour cela, il faut se convaincre que la séparation des variables a bien su capter tous les modes normaux, autrement dit qu'il n'existe pas de fréquence $\tilde{\omega}$ associée à une fonction $f(r, \theta)$ qui ne soit pas séparable et telle que $\eta(r, \theta, t) = f(r, \theta) \cos(\tilde{\omega}t)$ soit un mode normal du tambour. C'est le fameux *théorème de la théorie spectrale* qui saura nous sortir de cette impasse, affirmant que l'ensemble des fonctions propres d'un opérateur compact et auto-adjoint agissant sur

un espace de Hilbert est une base hilbertienne de ce dernier. L'opérateur d'intérêt ici est le Laplacien, en cause dans (2.2.1), puisque les modes normaux sont ses fonctions propres. Ce dernier n'est malheureusement pas compact, mais il est bien connu ([22]) que son inverse possède les propriétés que le théorème exige et puis que ses fonctions propres sont exactement celles du Laplacien. En montrant que l'ensemble

$$\mathcal{B} := \left\{ \sin(m\theta) J_m \left(X_{mn} \frac{r}{a} \right) \right\} \cup \left\{ \cos(m\theta) J_m \left(X_{mn} \frac{r}{a} \right) \right\}$$

est une base hilbertienne de l'espace de fonctions $L^2(D(0,a))$, avec $D(0,a)$ le disque de rayon a et centré en 0, nous aurons du même coup montré que \mathcal{B} contient toutes les fonctions propres du Laplacien (et de son inverse) et donc qu'aucun mode normal ne nous a échappé.

Démonstration. Les préalables nous ont entre autre rappelé que les fonctions $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{a J_{m+1}(X_{mn})} J_m \left(\frac{X_{mn} r}{a} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2_r([0,a])$, tout comme l'ensemble $\left\{ \frac{\sin(m\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{\cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ en est une de l'espace $L^2(\mathbb{T})$. En définissant le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) \overline{g(r, \theta)} r dr d\theta,$$

on peut directement voir que les fonctions de β sont orthogonales entre elles. De surcroît, si $f \in L^2(D(0,a))$ est orthogonale à β , alors les fonctions

$$g_m(r) := \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin(m\theta) d\theta \quad \text{et} \quad h_m(r) := \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos(m\theta) d\theta$$

doivent être toutes orthogonales à $\left\{ J_m \left(X_{mn} \frac{r}{a} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ce qui implique que h_m et g_m sont nulles. Par conséquent, pour presque chaque r fixé, la fonction $f(r, \theta)$ est orthogonale à $\left\{ \frac{\sin(m\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{\cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ et doit donc être nulle aussi. Il devient alors clair que \mathcal{B} est une base hilbertienne de $L^2(D(0,a))$. Tel qu'annoncé, on peut dès lors conclure que l'ensemble W englobe le spectre complet du tambour. \square

En prenant le rapport entre les différentes fréquences propres ω_{mn} et puis la fréquence fondamentale ω_{01} , on constate immédiatement, connaissant les valeurs des zéros de Bessel, que l'instrument de percussion n'est pas harmonique. Le tableau 2.2 témoigne de ce fait en reliant les premiers rapports fréquentiels et en illustrant accessoirement les domaines nodaux (c'est-à-dire les points (r, θ) tels que $\eta(r, \theta, t) = 0$ pour tout t) de chacun de ces modes.

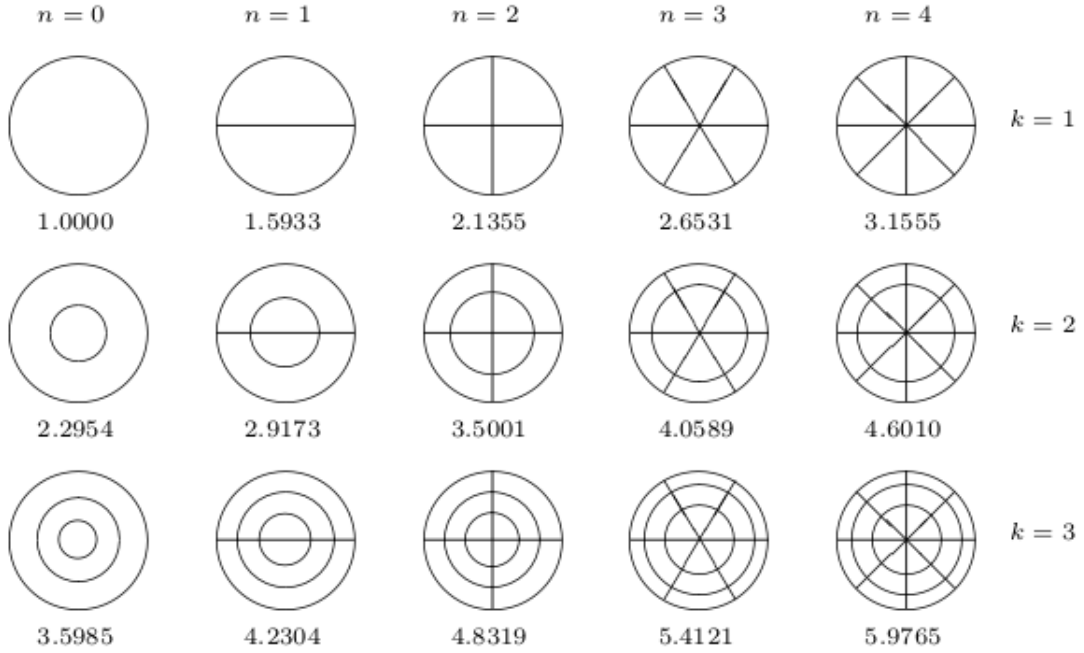


FIGURE 2.2. Modes normaux du tambour η_{nk} ainsi que les rapports des fréquences avec la fondamentale

2.3. Le tabla

Une simple modification au modèle mathématique du tambour régulier permet de modéliser l'ajout de la pâte au centre de ce type de tambour : il suffit de faire varier la densité de la peau en fonction du rayon :

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } 0 \leq r \leq a_0, \\ \sigma_1 & \text{si } a_0 < r \leq a_1, \end{cases}$$

où σ_0 et σ_1 sont des constantes positives. Une fois de plus, c'est l'équation des ondes

$$\Delta\eta(r,\theta,t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & \text{si } r \in [0, a_0], \\ \frac{\sigma_1}{T} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & \text{si } r \in (a_0, a_1] \end{cases}$$

qui décrit le mouvement de la membrane η . Les modes normaux sont de la forme $\eta(r,\theta) \cos(\omega t + \psi)$, ce qui nous renvoie au système :

$$\Delta\eta(r,\theta) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{T} \omega^2 \eta(r,\theta) & \text{si } r \in [0, a_0], \\ -\frac{\sigma_1}{T} \omega^2 \eta(r,\theta) & \text{si } r \in [a_0, a_1]. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

On procède par séparation des variables, à la fois pour la portion intérieure qu'extérieure, en cherchant une solution à (2.3.1) de la forme

$$\eta(r,\theta) = \begin{cases} R_0(r)\Theta(\theta), & \text{si } r \in [0,a_0], \\ R_1(r)\Theta(\theta), & \text{si } r \in [a_0,a_1]. \end{cases}$$

La section précédente nous révèle que Θ doit être de la forme $\Theta(\theta) = \alpha \cos(m\theta + \phi)$, avec $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, et R_i ($i = 0,1$) de la forme

$$\begin{aligned} R_0(r) &= K_{01}J_m\left(\sqrt{\frac{\sigma_0}{T}}\omega r\right), \\ R_1(r) &= K_{11}J_m\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}\omega r\right) + K_{12}Y_m\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}\omega r\right). \end{aligned}$$

Comme par le passé, la fonction R_1 doit respecter la contrainte

$$R_1(a_1) = K_{11}J_m\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}\omega a_1\right) + K_{12}Y_m\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}\omega a_1\right) = 0, \quad (2.3.2)$$

mais on doit de plus ajouter les conditions

$$R_0(a_0) = R_1(a_0) \quad (2.3.3)$$

et

$$R'_0(a_0) = R'_1(a_0). \quad (2.3.4)$$

Le système linéaire de trois équations et de trois inconnues (K_{01} , K_{11} et K_{12}) que composent (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4), pour n'engendrer que des solutions non triviales, doit générer un wronskien nul. En posant $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}$, $k = \frac{a_0}{a_1}$ et $x = \sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}\omega b_0$, cette condition est équivalents (voir [17]) à l'équation

$$\tilde{\sigma} \frac{J_{m-1}(\tilde{\sigma}kx)}{J_m(\tilde{\sigma}kx)} = \frac{J_m(x)Y_{m-1}(kx) - J_{m-1}(kx)Y_m(x)}{J_m(x)Y_m(kx) - J_m(kx)Y_m(x)},$$

dont on numérote les solutions strictement positives par x_{mn} . Les fréquences propres associées à ces solutions sont donc de la forme $\omega_{mn} = \frac{x_{mn}}{a_0} \sqrt{\frac{T}{\sigma_1}}$.

À nouveau, avant de comparer les fréquences entre elles, on doit se convaincre de l'exhaustivité de l'ensemble que nous avons trouvé. À cet égard, il importe donc de montrer que les

modes normaux, de la forme

$$\eta_{mn}(r,\theta) = \begin{cases} A_{mn} J_m\left(\frac{\tilde{\sigma} x_{mn}}{a_0} r\right) \sin(m\theta + \phi_m), & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ A_{mn} \frac{J_m\left(\frac{\tilde{\sigma} x_{mn} a_0}{a_1}\right)}{J_m(kx_{mn}) Y_m(x_{mn}) - J_m(x_{mn}) Y_m(kx_{mn})} \times \\ \quad \times \left[J_m\left(x_{mn} \frac{r}{a_1}\right) Y_m(x_{mn}) - J_m(x_{mn}) Y_m\left(x_{mn} \frac{r}{a_1}\right) \right] \times \\ \quad \times \sin(m\theta + \phi_m), & \text{sinon,} \end{cases}$$

forment une base hilbertienne de $L^2(D(0, a_1))$, puisqu'alors, on aurait trouvé toutes les solutions de

$$\Delta u = -\lambda u,$$

avec

$$\lambda = \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{\sigma_0}{T}}, & \text{lorsque } 0 \leq r \leq a_0, \\ \omega \sqrt{\frac{\sigma_1}{T}}, & \text{autrement.} \end{cases}$$

On trouve une preuve de l'orthogonalité en annexe A de [17], et on y observe que la démarche ressemble fortement à celle que nous avons exposée pour les modes normaux du tambour. Le travail pour la complétude est également assez similaire.

Dans le cas particulier où

$$\frac{a_0}{a_1} = 0,4 \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_1} = 3,125, \quad (2.3.5)$$

Gaudet et collab. (voir [8]) ont calculé que les rapports entre les sept premières fréquences propres et la fréquence fondamentale sont de $1 : 1,94 : 3,06 : 2,95 : 4,1 : 3,97 : 4,83$, ce qui se rapproche assez bien des rapports harmoniques $1 : 2 : 3 : 3 : 4 : 4 : 5$. En faisant varier les rapports entre les rayons a_0 et a_1 et entre les densités σ_0 et σ_1 , les auteurs montrent d'ailleurs que la précédente configuration de rayon et de densité est l'une de meilleures du point de vue la qualité mathématique de l'harmonie. Pour ce faire, les auteurs mettent sur pied une mesure de la dissonance des premières fréquences propres :

$$E(\sigma, k) := \sum_{h=2}^5 \sum_{d=1}^{D_h} \left\{ \left(\frac{\omega(h,d)}{\omega_{01}} - h \right)^2 \right\},$$

où $\omega(h,d)$ est la $(h + d - 1)^e$ fréquence propre (en ordre croissant) et D_h le nombre de modes dégénérés (par exemple, pour la configuration ci-dessus présentée, on aurait $D_3 = 2$ et $D_4 = 2$). Autrement dit, la mesure E calcule la distance avec les rapports idéaux le plus près. Pour notre exemple, cela aurait donné :

$$E(3,125, 0,4) = \frac{(1,94 - 2)^2}{2} + \frac{(3,06 - 3)^2}{3} + \frac{(2,95 - 3)^2}{3} + \frac{(4,1 - 4)^2}{4} + \frac{(4,83 - 5)^2}{5} = 0,01121\bar{3}.$$

Chapitre 3

Timbale

3.1. Modèle

On modélise la timbale un peu différemment de la façon dont on la trouve « dans la nature », afin de simplifier les calculs. Nous nous permettons des simplifications puisque d'une part, nous nous intéressons davantage au principe mathématique derrière le fait qu'un tambour puisse être accordé plutôt qu'à la précision du modèle, et d'autre part, puisque les calculs et les expérimentations de [6] nous montrent que ces modifications ont en général peu d'impact sur le résultat que nous démontrerons : que les plus importantes¹ fréquences de vibration sont dans un rapport quasi harmonique. Notre instrument se déploie donc ainsi : de forme cylindrique, de rayon a et de hauteur L , il est surmonté d'une peau circulaire de densité surfacique de masse σ_m et tendue uniformément avec une tension T . Les matériaux qui composent la caisse de résonance (la base du cylindre ainsi que le tour de celui-ci) n'ont aucune épaisseur et sont extrêmement rigides. Autrement dit, ils réfléchissent entièrement les ondes sonores. On ne lui connaît aucun trou à la base² de la caisse de résonance ni de pédale. Une surface que l'on appelle un *baffle* occupe tout le reste du plan horizontal à la hauteur de la peau circulaire. Celui-ci empêche la réverbération et la pollution sonore. Pour les mêmes raisons, on imagine que la timbale soit placée dans un espace infiniment grand, rempli d'air et sans effet acoustique particulier. Nous aurons besoin d'autres constantes : la vitesse de vibration de la membrane et de l'air seront respectivement notées c_p et c_a et puis σ_a représentera la densité de masse de l'air. Comme dans les exemples précédents, pour chaque mode normal, la hauteur d'un point (r, θ) de la peau au temps t sera notée

1. À préciser lors de l'analyse des résultats

2. Rienstra dans [18] a modélisé ce trou et il s'avère qu'il ne modifie que très légèrement les résultats.

par $\eta(r,\theta,t)$, ω désignera la fréquence du mode et puis on ajoute à ce problème l'influence de la pression $p(r,\theta,z,t)$ autant à l'intérieur de la caisse de résonance qu'à l'extérieur. Voici finalement les systèmes qui seront à l'étude :

Mouvement de la peau

$$(1) \begin{cases} \left(T \Delta_{\mathbf{x}} - \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \eta = p_+ - p_- & (a) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta & (b) \\ \eta(a, \theta, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

Pression interne

$$(\{0 \leq z \leq L\} \cap \{r \leq a\})$$

$$(2) \begin{cases} \left(\Delta_{\mathbf{x}} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 & (a) \\ \frac{d^2 p}{dt^2} = -\omega^2 p & (b) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\{r=a\}} = 0 & (c) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=0\}} = 0 & (d) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L^-\}} = -\sigma_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & (e) \end{cases}$$

Pression externe

$$(\{z \geq L\})$$

$$(3) \begin{cases} \left(\Delta_{\mathbf{x}} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0 & (a) \\ \frac{d^2 p}{dt^2} = -\omega^2 p & (b) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L \cap r > a\}} = 0 & (c) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{\{z=L^+ \cap r \leq a\}} = -\sigma_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & (d) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_a} p \right) = 0 & (e) \end{cases}$$

où le Laplacien $\Delta_{\mathbf{x}}$ est appliqué dans les coordonnées de l'espace seulement et

$$p_-(r,\theta,t) := \lim_{l \rightarrow L^-} p(r,\theta,l,t)$$

et

$$p_+(r,\theta,t) := \lim_{l \rightarrow L^+} p(r,\theta,l,t).$$

La première équation de chaque système nous ramène à l'équation des ondes. Pour une raison évidente, les conditions au bord de la peau de la timbale sont exactement les mêmes que celles du tambour régulier. La condition 3.c traduit mathématiquement la présence du *baffle* infini autour de la peau et puis la rigidité des murs se manifeste par 2.c et 2.d. C'est la dynamique des fluides qui commande les conditions 2.e et 3.d (voir [6]). Comme le domaine extérieur est infini et puisque l'acoustique ne permet aucune réflexion des ondes sonores, il

fallait une condition qui puisse refléter le comportement de l'onde de pression s'éloignant vers l'infini. La condition 3.e est connue sous le nom de **condition d'irradiation de Sommerfeld** et remplit ce rôle, en modélisant une onde qui se propage à l'infini de façon sphérique [21]. Finalement, étant donné que l'on considère les modes normaux individuellement, comme dans les problèmes du chapitre 2, la pression et la fonction η doivent satisfaire à 1.b, 2.b et 3.b. D'ailleurs, la radiation de l'énergie du système, prescrite par les dispositions acoustiques ambiantes, nous laisse conclure que la vibration de la pression et, de concert, le mouvement de la peau seront amortis dans le temps. Ainsi, les modes normaux de p et η peuvent prendre la forme complexe

$$p(r,\theta,z,t) = \text{Re}(p(r,\theta,z)e^{-i\omega t}) = p(r,\theta,z) \cdot \text{Re}(e^{-i\omega t})$$

et

$$\eta(r,\theta,t) = \text{Re}(\eta(r,\theta)e^{-i\omega t}) = \eta(r,\theta) \cdot \text{Re}(e^{-i\omega t}),$$

avec $\omega = a + ib$ et $b < 0$. De manière à alléger la notation, nous nous placerons désormais dans le cadre des complexes et continuerons parfois d'omettre la dépendance dans le temps.

La nature « croisée » des trois systèmes (1), (2) et (3) et puis l'inhomogénéité de 1.a, sans nécessairement compliquer la résolution du système, sont des éléments qui sont très mal compris à ce jour. Par exemple, nous ne saurions affirmer hors de tout doute que l'ensemble des fréquences propres de la timbale est de nature discrète. Voilà pourquoi, dans le présent chapitre, nous construirons des solutions η_{ij} qui correspondent à ce que l'on observe en pratique, mais ne pourrons prouver que nous n'en aurons pas oublié une, plusieurs ou même une infinité.

3.2. Formules pour la pression

Pour résoudre ce système, il faudra d'abord trouver des expressions pour la pression à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre. Puis, ayant les formules de p_- et p_+ , il sera possible d'attaquer le système qui modélise le mouvement de la peau. La méthode des fonctions de Green sera des plus fécondes afin de dévoiler chacune des expressions de la pression. Voici sommairement et généralement de quelle façon se déploie la méthode dans un cas comme le nôtre :

Soit Ω un domaine borné³ de \mathbb{R}^3 . Posons $\mathcal{D} := \Delta + k^2$, l'opérateur de Helmholtz, où k est une constante. On aimerait résoudre le système aux conditions limites suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\psi = 0, \text{ sur } \Omega \\ a\psi + b\frac{\partial\psi}{\partial n} = A, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec a, b et A des constantes. L'idée principale est de trouver une distribution G , qu'on appelle une **solution fondamentale**, qui réponde à des conditions aux limites avantageuses, afin de pouvoir exprimer ψ en fonction de G . Une solution fondamentale au problème de Helmholtz est une distribution qui résout

$$\mathcal{D}_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.2.2)$$

où δ est la fonction généralisée delta Dirac et où $\Delta_{\mathbf{x}}$ est le Laplacien appliqué sur la variable $\mathbf{x} := (r, \theta, z) = (x, y, z)$. De façon tout-à-fait similaire, \mathbf{x}' est définie par $\mathbf{x}' := (r', \theta', z') = (x', y', z')$.

Remarque 3.2.1. *La constante -4π est une convention dont la pertinence ressortira d'elle-même plus tard.*

Une fois que G est trouvée, on multiplie (3.2.2) par ψ et la première partie de (3.2.1) par $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, puis en intégrant chacune de ces expressions sur le domaine, on obtient :

$$\int_{\Omega} [\psi(\mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + k^2\psi(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] d\mathbf{x} = -4\pi \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} = -4\pi\psi(\mathbf{x}') \quad (3.2.3)$$

et

$$\int_{\Omega} [G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Delta_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}) + k^2\psi(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 = 0. \quad (3.2.4)$$

On soustrait (3.2.3) de (3.2.4) pour obtenir

$$\begin{aligned} 4\pi\psi(\mathbf{x}') &= \int_{\Omega} [-\psi(\mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Delta_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x})] dV \\ &= \int_{\partial\Omega} [G(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}, \mathbf{x}')\partial_{n_{\mathbf{s}}}\psi(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}) - \psi(\mathbf{x}_{\mathbf{s}})\partial_{n_{\mathbf{s}}}G(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}, \mathbf{x}')] dS, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

où la dernière égalité a été obtenue par une application directe de la deuxième identité de Green⁴. Il est alors possible de déduire les conditions limites que nous aimerions imposer à

3. Il faudra montrer que la condition de Sommerfeld est suffisante afin d'étendre l'utilisation de cette méthode à un domaine non-borné.

4. L'utilisation de cette identité devra être justifiée pour être utilisée au sens des distributions.

G (toujours inconnue pour le moment). La stratégie consiste à faire annuler G aux endroits sur $\partial\Omega$ où on ne connaît pas le comportement de ψ ou de $\partial_n\psi$.

Dans la situation qui nous intéresse, on pose $\psi := p$ et $k^2 := \left(\frac{\omega}{c_a}\right)^2$ et on divise naturellement le problème en deux domaines : l'intérieur et l'extérieur de l'instrument. Nous devons chercher une fonction de Green G_{int} , applicable sur l'intérieur du cylindre de rayon a et hauteur L qu'est la timbale, dont la dérivée normale s'annule sur tous les murs de la timbale et à la surface de la peau, de sorte que l'expression (3.2.5) de p soit réduite à :

$$\begin{aligned} 4\pi p(\mathbf{x}') &= \left(\int_{\text{murs}} + \int_{\text{peau}} \right) G_{int}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \underbrace{\partial_{n_s} p(\mathbf{x}_s)}_{=0 \text{ sur les murs}} dS \\ &= \int_{\text{peau}} G_{int}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_{n_s} p(\mathbf{x}_s) dS \\ &= \int_{\text{peau}} G_{int}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_z p(\mathbf{x}_s) dS \\ &= -\sigma_a \omega^2 \int_{\text{peau}} G_{int}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \eta(\mathbf{x}_s) dS. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la fonction de Green externe G_{ext} , on rappelle que l'on connaît le comportement de $\frac{\partial p}{\partial z}$ partout sur la surface $\{z = L\}$ et qu'on a modélisé son comportement à l'infini par des conditions de Sommerfeld. Ne connaissant pas l'allure de p elle-même sur la surface $\{z = L\}$, nous chercherons à ce que $\partial_z G_{int} = 0$ partout sur cette surface. L'intuition nous suggère qu'il faudrait aussi que G_{int} réponde aux conditions de Sommerfeld, et nous verrons dans la section 3.2.2 que cela s'avère effectivement utile pour obtenir l'expression de la pression à l'extérieur de la timbale.

3.2.1. Fonctions de Green associée à la pression externe

Dans le but de concevoir une expression intégrale pour p_+ , la dernière section nous incite à trouver une fonction de Green qui soit solution de

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\mathbf{x}} G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), & \text{sur } \{z > L\}; \\ \partial_z G_{ext} = 0, & \text{sur } \{z = L\}; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial G_{ext}}{\partial r}(r, \theta, z, \phi, \mathbf{x}') - i \frac{\omega}{c_a} G_{ext}(r, \theta, \phi, \mathbf{x}') \right) = 0, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_a}$. On commence par observer qu'une distribution qui solutionne l'équation

$$\mathcal{D} \tilde{G}_{ext}(\mathbf{x}) = -4\pi \delta(\mathbf{x}),$$

nous donne accès à la solution fondamentale suivante : $G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \tilde{G}_{ext}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Selon toute logique, une fois exhibée, nous devrions ensuite ajuster la forme générale $G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ afin qu'elle réponde aux deux conditions aux limites. Or, nous verrons qu'il est possible et beaucoup plus simple d'ajuster la forme élémentaire $\tilde{G}_{ext}(\mathbf{x})$ en fonction des deux conditions limites et puis, finalement, de définir la fonction de Green $G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ recherchée à l'aide d'une translation par \mathbf{x}' . A priori, rien ne justifie l'ordre dans lequel nous procéderons, pourtant il simplifie grandement l'écriture des calculs et nous constaterons en définitive que la distribution ainsi construite est bel et bien la fonction de Green recherchée. À la fois pour le travail entourant la recherche de \tilde{G}_{ext} et puis pour l'ajustement de celle-ci en fonction des conditions limites, nous suivrons de près la démarche de Schmalz et collab. [21]

3.2.1.1. La forme générale de la solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz

Puisque $G(\mathbf{x})$ est la solution d'une équation linéaire inhomogène, elle peut être écrite sous la forme

$$G = G_{part} + C \cdot G_{hom},$$

avec C une constante et G_{part} et G_{hom} des solutions particulière et homogène (non triviale) respectivement de l'équation $\mathcal{D}G = -4\pi\delta$. Cette solution G n'étant pas encore soumise à des conditions aux limites, elle n'est pas directement reliée au modèle de la timbale et donc nous avons la souplesse de considérer que son domaine de définition est \mathbb{R}^3 . En fait, en ne considérant que la portion $z \geq L$ nous ferions erreur, puisqu'alors, le point $(0,0,0)$ ne ferait pas partie du domaine, ce qui fait que nous serions à la recherche d'une simple solution homogène.

À la fois pour trouver la solution particulière et la solution homogène, la transformée de Fourier \mathcal{F}^5 sera fort utile. On profitera du fait que celle-ci soit une bijection de l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ sur lui-même ([22], sections 5.8 et 5.9) afin de changer le point de vue du problème. Pour légitimer cette démarche, on supposera au départ que $G_{part} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, on prendra ensuite sa transformée de Fourier et on montrera finalement que celle-ci est dans l'espace des distributions tempérées, justifiant ainsi l'hypothèse de départ.

5. Nous aimons utiliser cette notation plutôt que celle du chapeau lorsque la transformation est appliquée au sens des distributions.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\mathcal{D}G_{part}](z'), \varphi(z') \rangle &\stackrel{\text{déf.}}{=} \langle G_{part}(z), [(\Delta + k^2)\varphi](z') \rangle \\ &= \langle G_{part}(z'), k^2\widehat{\varphi}(z') - |z'|^2\widehat{\varphi}(z') \rangle \\ &= \langle (k^2 - |z'|^2)\mathcal{F}[G_{part}](z'), \varphi(z') \rangle, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\mathcal{D}G_{part}], \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}[-4\pi\delta], \varphi \rangle \\ &\stackrel{\text{déf.}}{=} \langle -4\pi\delta, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle -4\pi\delta(z'), \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot z'} d\mathbf{x} \rangle \\ &= -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x})e^0 d\mathbf{x} \\ &= \langle -4\pi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

On doit donc étudier l'équation :

$$(k^2 - |z'|^2)\mathcal{F}(G_{part})(z') = -4\pi. \quad (3.2.7)$$

Hörmander [10] a montré que le problème de la division d'une constante par un polynôme a toujours une solution (a priori pas unique) dans l'espace des distributions tempérées. Ainsi, la supposition était juste : puisqu'il existe une distribution tempérée $\mathcal{F}(G_{part})$ qui résout (3.2.7), alors il existe une solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz G_{part} qui appartienne aussi à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Il faut maintenant faire un choix pour la distribution tempérée $\mathcal{F}(G_{part})$ et prendre sa transformée inverse en vue de trouver notre solution particulière. Ce choix n'aura aucune incidence fâcheuse sur la réponse finale ; cette liberté cessera dès lors où il faudra déterminer à quelle solution homogène la distribution G_{part} doit être jumelée, afin qu'ensemble elles satisfassent aux bonnes conditions limites. Il va donc de soi de prendre la distribution la plus intuitive : en la fabriquant au moyen de la valeur principale de Cauchy, qu'on note v.p. (à ne pas confondre avec la «valeur propre»). La distribution $\mathcal{F}(G_{part})$ est donc définie comme suit :

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Alors,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(G_{part}), \varphi \rangle &= v.p. \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-4\pi\varphi(z')}{k^2 - |z'|^2} dz' \\ &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|z'|^2 - k^2 > \epsilon} \frac{4\pi\varphi(z')}{|z'|^2 - k^2} dz'.\end{aligned}$$

À présent, prenons la transformée inverse de $\mathcal{F}(G_{part})$:

$$\begin{aligned}G_{part}(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(G_{part})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} v.p. \int_{\mathbb{R}^3} \frac{4\pi e^{iz' \cdot \mathbf{x}}}{|z'|^2 - k^2} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|z'| |\mathbf{x}| \cos(\Gamma)}}{|z'|^2 - k^2} |z'|^2 \sin(\phi) d\theta d\phi dz',\end{aligned}$$

où Γ est l'angle entre z' et \mathbf{x} . Une rotation bien choisie permet de trouver

$$\begin{aligned}G_{part}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|z'| |\mathbf{x}| \cos(\phi)}}{|z'|^2 - k^2} |z'|^2 \sin(\phi) d\theta d\phi dz' \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{i|z'| |\mathbf{x}| \cos(\phi)}}{|z'|^2 - k^2} |z'|^2 \sin(\phi) d\theta d\phi dz' \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_0^\infty \int_1^{-1} \frac{-e^{i\rho |\mathbf{x}| u}}{\rho^2 - k^2} \rho^2 du d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_0^\infty \frac{(-e^{-i\rho |\mathbf{x}|} + e^{i\rho |\mathbf{x}|})}{i\rho |\mathbf{x}| (\rho^2 - k^2)} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{i\pi |\mathbf{x}|} v.p. \int_0^\infty \frac{(e^{i\rho |\mathbf{x}|} - e^{-i\rho |\mathbf{x}|})}{\rho^2 - k^2} \rho d\rho \\ &= \frac{-i}{i\pi |\mathbf{x}|} \frac{d}{d|\mathbf{x}|} v.p. \int_0^\infty \frac{e^{i\rho |\mathbf{x}|} + e^{-i\rho |\mathbf{x}|}}{\rho^2 - k^2} d\rho \\ &= \frac{-1}{\pi |\mathbf{x}|} \frac{d}{d|\mathbf{x}|} v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\rho |\mathbf{x}|}}{\rho^2 - k^2} d\rho.\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Le calcul de (3.2.8) devient alors la prochaine finalité. L'intégrale en question sera évaluée par le biais du contour reproduit à la figure 3.1 On peut ainsi réécrire :

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\rho r}}{\rho^2 - k^2} d\rho = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_2(\epsilon)} + \int_{\gamma_4(\epsilon)} \right) \frac{e^{-izr}}{z^2 - k^2} dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_6(R)} \frac{e^{-izr}}{z^2 - k^2} dz.\tag{3.2.9}$$

Avant de calculer ces trois limites, commençons par se remémorer deux lemmes du cours d'analyse complexe :

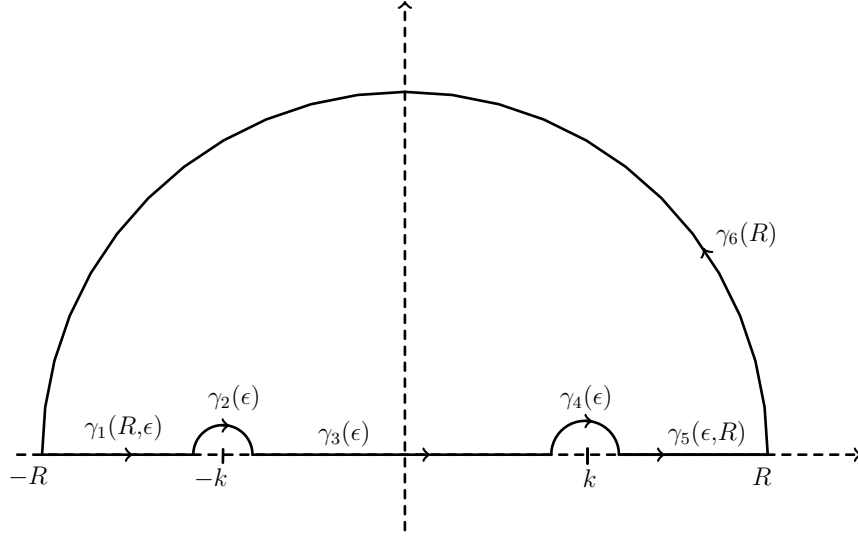


FIGURE 3.1. Contour d'intégration

Lemme 3.2.2 (de Jordan). Soit $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ($t \in [0, \pi]$), f continue sur γ_R et $a > 0$. Si $|f| < M$ sur γ_R , alors

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M}{a}.$$

Démonstration. Voir Brown et Churchill dans [3] p.262. □

Lemme 3.2.3. Soit $\gamma_\epsilon(t) := a + \epsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Si f a un pôle simple en $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f = \pi i \cdot \text{Res}(f, a),$$

où $\text{Res}(f, a)$ le résidu de f en a .

DÉMONSTRATION. Posons $b := \text{Res}(f, a)$ et $g(z) := f(z) - \frac{b}{z-a}$. Comme a est une singularité apparente, il existe une constante M qui borne g sur un voisinage de a . Le lemme d'estimation donne :

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} g \right| \stackrel{L.E.}{\leq} l(\gamma_\epsilon) = M\epsilon\pi \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

D'autre part, on a

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{b}{z-a} dz = \int_0^\pi \frac{bi\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = i\pi b.$$

On conclut en rassemblant ces deux résultats :

$$\int_{\gamma_\epsilon} f = \int_{\gamma_\epsilon} g + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{b}{z-a} dz \rightarrow 0 + i\pi b \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

□

À l'aide du lemme 3.2.3 on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_2(\epsilon)} + \int_{\gamma_4(\epsilon)} \frac{e^{-izr}}{z^2 - k^2} dz \right) &= -\pi i (\text{Res}(f, k) + \text{Res}(f, -k)) \\ &= -\pi i \left(\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2k} \right). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

- L'intégrale sur le contour $\gamma_6(R)$ peut être évaluée à l'aide du lemme de Jordan, à condition que $r > 0$. Effectivement, les hypothèses du lemme sont vérifiées : on remarque que $|z^2 - k^2| \geq |z^2| - |k^2|$ et puis que sur le contour on a $|z|^2 = R^2$. De sorte que

$$\left| \frac{1}{z^2 - k^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - k^2}$$

sur $\gamma_6(R)$, avec $R > k$. De ce fait, si $r > 0$, on trouve

$$\left| \int_{\gamma_6(R)} \frac{e^{izr}}{z^2 - k^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{r(R^2 - k^2)} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty.$$

- Si $r = 0$, alors on a simplement

$$\left| \int_{\gamma_6(R)} \frac{1}{z^2 - k^2} dz \right| \leq \int_{\gamma_6(R)} \frac{1}{R^2 - k^2} dz = \frac{R\pi}{R^2 - k^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Finalement, (3.2.9) est réduite à

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\rho r}}{\rho^2 - k^2} d\rho = \frac{-(\pi i e^{-ikr} - \pi i e^{ikr})}{2k} = \frac{-\pi \sin(kr)}{k}.$$

En se remémorant (3.2.8), on trouve la solution particulière :

$$G_{part}(r) = \frac{\pi \cos(kr)}{\pi r} = \frac{\cos(kr)}{r}.$$

À présent, qu'en est-il des solutions homogènes de l'équation de Helmholtz ? Tel que précédemment, la transformée de Fourier permet de déguiser cette question ; on cherche plutôt une solution à cette équation :

$$(|z'|^2 - k^2) \mathcal{F}(G_{hom}) = 0. \quad (3.2.11)$$

Une telle solution doit être nulle partout ailleurs que sur la sphère de rayon k . Celle-ci peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}(G_{hom}) = \mu \delta_{S_k},$$

où δ_{S_k} est un potentiel de simple couche, c'est-à-dire la généralisation de la fonction Delta Dirac pour une surface, et où $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Autrement dit, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, alors

$$\langle \mu \delta_{S_k}, \varphi \rangle := \int_{S_k} \mu(\mathbf{x}_s) \varphi(\mathbf{x}_s) dS.$$

Il est facile de vérifier qu'effectivement, $\mu \delta_{S_k}$ est une solution de l'équation homogène pour toute distribution μ . Il est en outre démontré rigoureusement dans [21] qu'une solution à (3.2.11) doit nécessairement être de cette forme. La prochaine sous-section sera consacrée à la recherche de cette distribution μ , qui fasse en sorte que $G_{part} + G_{hom}$ convienne aux conditions au bord qui nous concernent.

3.2.1.2. La fonction de Green externe associée aux bonnes conditions limites

La première des deux conditions qui seront traitées est la condition d'irradiation de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\partial_r G(r) - ikG(r)) = 0. \quad (3.2.12)$$

L'opérateur de Helmholtz et la condition de Sommerfeld suggèrent par leur symétrie que la fonction de Green G doit être radiale. Comme cette propriété est préservée par la transformée de Fourier, on déduit que \hat{G} doit être radiale également. Or, une distribution définie sur la sphère et invariante sous rotation doit être constante. Encore une fois, une preuve rigoureuse de cette affirmation se trouve en annexe C de [21]. Posons donc $\mu := C \in \mathbb{C}$.

En prenant la transformée inverse de $C \delta_{S_k}$, il découle que

$$\begin{aligned} G_{hom}(r) &= \frac{C}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{irk \cos(\theta)} k^2 \sin(\theta) d\phi d\theta \\ &= \frac{Ck^2}{4\pi^2} \int_0^\pi e^{irk \cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{-Ck^2 (e^{-irk} - e^{irk})}{4\pi^2 ik} \\ &= \frac{Ck \sin(kr)}{2\pi^2 r}. \end{aligned}$$

On doit maintenant trouver C de sorte que la condition (3.2.12) soit respectée par $G'(r) := \frac{\cos(kr)}{r} + \frac{Ck}{2\pi^2} \frac{\sin(kr)}{r}$. Cette condition se réécrit comme

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{-k \sin(kr)}{r} + \frac{Ck^2}{2\pi^2 r} \cos(kr) - \frac{ik \cos(kr)}{r} - \frac{Cik^2 \sin(kr)}{2\pi^2 r} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{Ck^2}{2\pi^2 r} e^{-ikr} + \frac{ik}{r} e^{ikr} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{Ck^2}{2\pi^2} e^{-ikr} + ik e^{ikr} \right) = 0, \end{aligned}$$

qui est vraie si $C := \frac{i2\pi^2}{k}$. Par conséquent, on définit la fonction

$$\boxed{G'(r) := \frac{\cos(kr)}{r} + \frac{2i\pi^2}{k} \frac{k}{2\pi^2} \frac{\sin(kr)}{r} = \frac{e^{ikr}}{r}}$$

qui est la fameuse solution fondamentale de l'équation de Helmholtz, à propos de laquelle on dit que les « ondes s'en vont à l'infini ».

Le problème de la timbale exige en outre cette condition : $\partial_z G_{ext}(L) = 0$. Morse et Ingard, dans [13] p.369, constatent que l'ajout d'une simple translation verticale de la précédente solution convient. Suivant cette idée, on pose

$$\boxed{\tilde{G}_{ext}(\mathbf{x}) := G'(x, y, z) + G'(x, y, 2L - z)}$$

et l'on vérifie que la condition est respectée :

$$\begin{aligned} \partial_z \tilde{G}_{ext}(\mathbf{x}) \Big|_{z=L} &= \left[\frac{\partial G'(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial G'(x, y, 2L - z)}{\partial z} \right]_{z=L} \\ &= \frac{\partial G'}{\partial z}(x, y, L) - \frac{\partial G'}{\partial z}(x, y, L) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De surcroît, cette légère translation n'affecte en rien le comportement de la fonction lorsque r est grand et on vérifie aisément que, sur le domaine d'intérêt, le second terme annule l'opérateur de Helmholtz. D'où l'on conclut que la fonction

$$\begin{aligned} G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \tilde{G}_{ext}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \\ &\quad - \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2L-z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2L-z-z')^2}} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

est bel et bien une solution fondamentale de l'équation de Helmholtz sur l'ouvert $\{z > L\}$ et que l'on vérifie facilement qu'elle satisfait aux deux conditions aux bords :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial G_{ext}(r, \theta, \phi, \mathbf{x}')}{\partial r} - ikG_{ext}(r, \theta, \phi, \mathbf{x}') \right) = 0$$

et

$$\left. \frac{\partial G_{ext}}{\partial z} \right|_{z=L} = 0.$$

Cette fonction de Green est en fait l'unique fonction de Green qui répond à nos critères (voir [24] p.363).

Remarque 3.2.4. *Nous savions à l'avance que la fonction G_{ext} définie par la translation de \tilde{G}_{ext} allait être une solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz, mais pas qu'elle satisferait toujours aux conditions limites. En fait, il est possible de voir que la condition de Sommerfeld est invariante sous translation mais pas la condition en $z = L$. Il semble que ce soit un heureux hasard qu'à la fois G_{ext} et \tilde{G}_{ext} respecte cette dernière condition.*

3.2.2. Expression de la pression externe

Avec l'expression de la fonction de Green trouvée dans la section précédente, on peut déduire celle de la pression externe. On sait que

$$(\Delta_{\mathbf{x}} + k^2)G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.2.14)$$

et que

$$(\Delta + k^2)p(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.2.15)$$

En multipliant (3.2.14) par p , (3.2.15) par G_{ext} et en soustrayant la première expression de la deuxième, on a aussi

$$G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Delta_{\mathbf{x}}p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')p(\mathbf{x}).$$

Comme annoncé en début de chapitre, on aimerait prendre l'intégrale sur le domaine de chaque côté de la précédente égalité et puis utiliser la deuxième identité de Green pour

conclure

$$\begin{aligned} 4\pi p(\mathbf{x}') &= \int_{\{z \geq L\}} (G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) dV \\ &= \int_{\{z=L\}} (G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_n p(\mathbf{x}_s) - p(\mathbf{x}_s) \partial_n G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}')) dS. \end{aligned}$$

Or deux choses nous freinent : tout d'abord pour utiliser cette identité directement, il est demandé que le domaine soit borné, puis que G_{ext} et p soient deux fois continûment différentiables. La fonction p possède la propriété qu'on lui réclame, mais la fonction de Green possède une singularité en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ et puis notre domaine est non borné.

Pour contourner ces obstacles, nous définissons $V_{\epsilon, R}^+(\mathbf{x}') := B_R(0, 0, L) \cap \{z > L\} \setminus B_\epsilon(\mathbf{x}')$, puis limitons le domaine d'étude :

$$0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_{\epsilon, R}^+(\mathbf{x}')} [G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] dV.$$

Comme $\overline{V_{\epsilon, R}^+(\mathbf{x}')}$ est un domaine borné sur lequel p et G_{ext} sont continûment différentiables deux fois, on peut appliquer la deuxième identité de Green :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{\epsilon, R}^+(\mathbf{x}')} [G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] dV \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{S_\epsilon(\mathbf{x}')} + \int_{S_R^+(0, 0, L)} + \int_{D_R(0, 0, L)} \right) [G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_n p(\mathbf{x}_s) - p(\mathbf{x}_s) \partial_n G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}')] dS, \end{aligned}$$

avec $D_R(0, 0, L)$ le disque de rayon R centré en $(0, 0, L)$ dans le plan $\{z = L\}$, $S_R^+(0, 0, L)$ la demie-sphère supérieure centrée en $(0, 0, L)$ et puis $S_\epsilon(\mathbf{x}')$ la sphère de rayon ϵ centrée en \mathbf{x}' .

Puisque la fonction p est deux fois continûment différentiable sur tout le domaine, sa dérivée $\partial_r p$ est bornée par une constante c sur toutes les sphères $S_\epsilon(\mathbf{x}')$ assez petites. Ce qui nous permet de constater que

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}')} G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_n p(\mathbf{x}_s) dS \right| &= \left| \int_{S_\epsilon(0)} \tilde{G}_{ext}(\epsilon) \partial_r p(\mathbf{x}_s + \mathbf{x}') dS \right| \\ &\leq \int_{S_\epsilon(0)} \left| \tilde{G}_{ext}(\epsilon) \partial_r p(\mathbf{x}_s + \mathbf{x}') \right| dS \\ &\stackrel{(3.2.13)}{=} \int_{S_\epsilon(0)} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 4L\epsilon \cos(\phi) + 4L^2}} \right) |\partial_r p(\mathbf{x}_s + \mathbf{x}')| dS \\ &\leq \frac{2c}{\epsilon} 4\pi\epsilon^2 \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned}
& - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon(\mathbf{x}')} -\frac{\partial G_{ext}(r, r')}{\partial r} p(\mathbf{x}_s) dS = \\
& = \int_{S_\epsilon(0)} \left(\frac{ik\epsilon e^{ik\epsilon} - e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{ik\sqrt{r^2 - 4Lr \cos(\phi)} + 4L^2 e^{ik\sqrt{r^2 - 2Lr \cos(\phi)}}(2r - 2L \cos(\phi))}{2\sqrt{r^2 - 2Lr \cos(\phi)} - 4L^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{ik\sqrt{r^2 - 2Lr \cos(\phi)} - 4L^2}(2r - 2L \cos(\phi))}{2(\sqrt{r^2 - 2Lr \cos(\phi)} - 4L^2)} \right) p(\mathbf{x}_s + \mathbf{x}') dS \\
& = \int_{S_\epsilon(0)} \left(\frac{ik\epsilon e^{ik\epsilon} - e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{e^{ik\sqrt{\epsilon^2 - 2L\epsilon \cos(\phi)} - 4L^2}(2\epsilon - 2L \cos(\phi))}{2(\sqrt{\epsilon^2 - 2L\epsilon \cos(\phi)} - 4L^2)} (ik\sqrt{\epsilon^2 - 2L\epsilon \cos(\phi)} - 4L^2 - 1) \right) p(\mathbf{x}_s + \mathbf{x}') dS \\
& \rightarrow 0 - 4\pi p(\mathbf{x}') - 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0^+).
\end{aligned}$$

Autrement dit, par la deuxième identité de Green, on a

$$-4\pi p(\mathbf{x}') = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{S_R^+(0)} + \int_{D_R(0)} \right) [G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_n p(\mathbf{x}_s) - p(\mathbf{x}_s) \partial_n G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}')] dS.$$

La prochaine étape consiste à montrer que

$$\int_{S_R^+(0)} [G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}') \partial_n p(\mathbf{x}_s) - p(\mathbf{x}_s) \partial_n G_{ext}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}')] dS \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty), \quad (3.2.16)$$

lorsque $R \rightarrow +\infty$. Les translations n'ayant pas d'impact sur le comportement asymptotique de G_{ext} et de $\partial_r G_{ext}$ lorsque R tend vers l'infini, alors seule la conclusion suivante suffit pour déduire (3.2.16) :

$$\int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \partial_n p(r, \theta, \phi) - p(r, \theta, \phi) \partial_n \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) dS \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

Un calcul direct nous montre que

$$\begin{aligned}
\int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \partial_n p(r, \theta, \phi) - p(r, \theta, \phi) \partial_n \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) dS &= \int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \partial_r p - ipk \frac{e^{ikR}}{R} + p \frac{e^{ikR}}{R^2} \right) dS \\
&= \int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikR}}{R} o(R^{-1}) \right) + p \left(\frac{e^{ikR}}{R^2} \right) dS,
\end{aligned}$$

grâce à la condition de Sommerfeld $\partial_r p - ikp = o(r^{-1})$. Par ailleurs, le fait que p satisfasse à la fois aux conditions de Sommerfeld ainsi qu'à l'équation homogène de Helmholtz permet de conclure ([24] p.363) que $p = O(r^{-1})$. De ce fait, le calcul se poursuit :

$$\begin{aligned}
\int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \partial_n p(r, \theta, \phi) - p(r, \theta, \phi) \partial_n \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) dS &= \int_{S_R^+(0)} \left(\frac{e^{ikR}}{R} o(R^{-1}) \right) + O(R^{-1}) \left(\frac{e^{ikR}}{R^2} \right) dS \\
&= \left[\left(\frac{e^{ikR}}{R} o(R^{-1}) \right) + O(R^{-1}) \left(\frac{e^{ikR}}{R^2} \right) \right] \int_{S_R^+(0)} dS \\
&= \left[\left(\frac{e^{ikR}}{R} o(R^{-1}) \right) + O(R^{-1}) \left(\frac{e^{ikR}}{R^2} \right) \right] 2\pi R^2 \\
&\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Finalement, nous concluons

$$\begin{aligned}
-4\pi p(\mathbf{x}') &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R^+(0)} \int_{D_R(0)} (G_{ext} \partial_n p - p \partial_n G_{ext}) dS \\
&= \int_{\{z=L\}} (G_{ext} \partial_n p - p \partial_n G_{ext}) dS \\
&= \int_{\{z=L\}} [G_{ext}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \underbrace{\partial_z p(r, \theta, L^+)}_{=0 \text{ sur le baffle}} - p(r, \theta, L^+) \underbrace{\partial_z G_{ext}(r, \theta, L, \mathbf{x}')}_{=0 \text{ partout}}] dS \\
&= \int_{D_a(0)} [G_{ext}(r, \theta, L, \mathbf{x}') \partial_z p(r, \theta, L^+)] dS \\
&= \int_{D_a(0)} [G_{ext}(r, \theta, L, \mathbf{x}') \sigma_a \omega^2 \eta(r, \theta, L)] dS, \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la mise en application de l'équation (3.d) de la sous-section 3.1.

3.2.3. Fonction de Green associée à la pression interne

On a vu plus tôt que la fonction G_{int} devrait satisfaire au système

$$\begin{cases} \left(\Delta_{\mathbf{r}} + \left(\frac{\omega}{c_a} \right)^2 \right) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \\ \left. \frac{\partial G_{int}}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial G_{int}}{\partial z} \right|_{z=0, L} = 0, \end{cases} \tag{3.2.18}$$

avec $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ et $\mathbf{r}' = (r', \theta', \phi')$. Les contraintes étant cette fois-ci plus difficiles à capturer qu'avec le simple ajout d'une solution homogène, nous devons procéder différemment. En utilisant les résultats de la section préalable, nous montrerons qu'on a l'égalité suivante au sens des distributions :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im\theta} e^{-im\theta'} \frac{J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{\|J_m(Y_{mn} \frac{r}{a})\|^2} = \delta(r - r') \delta(\theta - \theta'). \quad (3.2.19)$$

Suite à quoi, il ne restera qu'à trouver un terme $g_{mn}(z, z')$ qui résout le système

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} - \frac{Y_{mn}^2}{a^2} \right] g_{mn}(z, z') = -4\pi \delta(z - z'), \\ \frac{\partial}{\partial z'} g_{mn}(z, z') \Big|_{z'=0, L} = 0, \end{cases} \quad (3.2.20)$$

pour conclure que la solution est

$$G_{int}(x, x') := \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im\theta} e^{-im\theta'} \frac{J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{\|J_m(Y_{mn} \frac{r}{a})\|^2} g_{mn}(z, z').$$

Afin d'atteindre notre premier objectif, soulevons que le théorème sur la convergence ponctuelle des séries de Dini nous permet de développer toute fonction $f \in C^2([0, a])$ qui s'annule en $r = 1$ en une série de la forme

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{mn}^{(2)} \rangle \varphi_{mn}^{(2)}(r), \quad \text{pour } r \in (0, a],$$

avec $\varphi_{mn}^{(2)}$ les fonctions de la base $\beta_m^{(2)}$ (voir 1.2.3), pour un certain m entier fixé. En développant l'expression, on trouve⁶

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{mn}^{(2)} \rangle \varphi_{mn}^{(2)}(r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a r' f(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_n^{(2)}(r, \theta) dr' \\ &= \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} r' f(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r) dr', \end{aligned}$$

6. Selon le théorème, cette égalité est potentiellement fautive en $r = 0$, toutefois, ce n'est pas un problème puisqu'au bout du compte, nous n'aurons besoin que de l'égalité presque partout (voir A).

où la dernière ligne traduit ce que l'on entend par

$$\begin{aligned}\delta(r - r') &:= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_n(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{\|J_n(Y_{mn} \frac{r}{a})\|^2}.\end{aligned}\quad (3.2.21)$$

Ce qui diffère dans cette définition de celle du delta Dirac habituel n'est que le domaine des fonctions sur lesquelles elle s'applique, mais la fonction généralisée (3.2.21) agit exactement de la façon dont on en a l'habitude. De même, le théorème de convergence ponctuelle des séries de Fourier nous fournit l'expression suivante

$$\delta(\theta - \theta') := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta), \quad (3.2.22)$$

au sens où pour toute fonction test $g \in C^2([0, a])$ on a

$$g(\theta') = \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta), g \right\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(\theta) \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta) d\theta,$$

avec $\varphi_m^{(0)} = \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}$. Tel qu'attendu, on établit (3.2.19) en rassemblant les deux précédents résultats :

Soit f une fonction test $C^\infty(D(0, a))$, alors on a

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta) \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r), f(r, \theta) \right\rangle &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta) \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta) \int_0^a f(r, \theta) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r') \varphi_{mn}^{(2)}(r) r dr d\theta,\end{aligned}$$

grâce à la définition de la limite dans la topologie faible, et puis

$$\begin{aligned}&\stackrel{(3.2.21)}{=} \int_0^{2\pi} f(r', \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_m^{(0)}(\theta')} \varphi_m^{(0)}(\theta) d\theta \\ &\stackrel{(3.2.22)}{=} f(r', \theta').\end{aligned}$$

3.2.3.1. Le terme g_{mn}

Vérifions maintenant que l'ajout à la série (3.2.19) d'un terme g_{mn} ayant les propriétés annoncées plus tôt engendre effectivement la fonction de Green appropriée. Pour ce faire, on réfère encore une fois à la définition de la limite au sens des distributions, qui nous permet de distribuer un opérateur différentiel (ici l'opérateur de Helmholtz) sur chacun des termes d'une série :

$$\begin{aligned}
& \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right) \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') = \\
& = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') \\
& = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') \\
& = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Y_{mn}^2}{a^2} \right) - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') \\
& = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{Y_{mn}^2}{a^2} \right) + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') \\
& = \left[\frac{Y_{mn}^2}{a^2} - \frac{Y_{mn}^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c_a^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') - \\
& \quad - 4\pi \delta(z - z') \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})}.
\end{aligned}$$

En regroupant tous les termes de la série, on a maintenant

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_{\mathbf{r}} - \frac{\omega^2}{c_a^2} \right) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Delta_{\mathbf{r}} - \frac{\omega^2}{c_a^2} \right) \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} g_{mn}(z, z') \\
&= -4\pi \delta(z - z') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} \\
&\stackrel{(3.2.19)}{=} -4\pi \delta(z - z') \frac{\delta(r - r')}{r} \delta(\theta - \theta'),
\end{aligned}$$

qui est ce qui est désiré. D'autre part, on constate que comme les fonctions de Bessel J_m et les fonctions g_{mn} satisfont individuellement aux conditions limites de (3.2.18), on déduit que la fonction de Green G_{int} s'y soumet également.

Il ne reste maintenant plus qu'à trouver le g_{mn} satisfaisant à (3.2.20). Plaçons-nous dans un contexte approprié afin de le trouver et posons

$$\mathcal{L} := \frac{d^2}{dz^2} + c_{mn}^2$$

où $c_{mn} := \sqrt{\frac{\omega^2}{c_a^2} - \frac{Y_{mn}^2}{a^2}}$,⁷ ainsi que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} := \{v(z) \in C^2([0, L]) : v'(0) = v'(L) = 0\}.$$

On trouve aisément $y_1(z) := \cos(c_{mn}z)$ et $y_2(z) := \cos(c_{mn}(L - z))$, deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $\mathcal{L}v = 0$. Il est à remarquer pour la suite que $y_1'(0) = y_2'(L) = 0$ et que $y_1(0) = y_2(L) = 1$. La démarche se décline ensuite ainsi : pour toute fonction continue $f(z)$, nous chercherons une solution $v(z)$ au système

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dz^2} + c_{mn}^2 \right] v(z) = f(z); \\ \left. \frac{d}{dz}v(z) \right|_{z=0, L} = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, on cherche à inverser l'opérateur \mathcal{L} dans le domaine $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. La méthode de variation des paramètres nous permettra de trouver une expression de la forme $v(z) = \int_0^L G_{mn}(z', z) f(z') dz'$, et de là, nous vérifierons que $g_{mn} := -4\pi G_{mn}(z', z)$ est la fonction recherchée.

Tel qu'annoncé, nous cherchons maintenant une solution

$$v(z) := C_1(z)y_1(z) + C_2(z)y_2(z)$$

et assumons artificiellement que celle-ci satisfait à

$$C_1'(z)y_1(z) + C_2'(z)y_2(z) = 0 \tag{3.2.23}$$

et à

$$C_1'(z) \cos(c_{mn}z) + C_2'(z) \cos(c_{mn}(L - z)) = 0, \tag{3.2.24}$$

7. Bien que ω soit complexe, une branche de la racine carrée ou une autre mènerait au même résultat g_{mn} .

en plus des conditions limites du domaine $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. On peut à présent simplifier l'expression suivante

$$\begin{aligned}
v'(z) &= C_1'(z)y_1(z) + C_1(z)y_1'(z) + C_2'(z)y_2(z) + C_2(z)y_2'(z) \\
&= C_1(z)y_1'(z) + C_2(z)y_2'(z) \\
&= -c_{mn}C_1(z)\sin(cz) + c_{mn}C_2(z)\sin(c_{mn}(L-z)). \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

En dérivant une fois de plus, on obtient

$$\begin{aligned}
v''(z) &= -c_{mn}C_1'(z)\sin(c_{mn}z) - c_{mn}v^2C_1(z)\cos(c_{mn}z) - c_{mn}^2C_2(z)\cos(c_{mn}(L-z)) + \\
&\quad + c_{mn}C_2'(z)\sin(c_{mn}(L-z))
\end{aligned}$$

et en additionnant cette expression à $c^2v(z)$ on trouve

$$f(z) = \mathcal{L}v(z) = -c_{mn}C_1'(z)\sin(c_{mn}z) + c_{mn}C_2'(z)\sin(c_{mn}(L-z)). \tag{3.2.26}$$

Maintenant, (3.2.23) et (3.2.26) nous laissent avec un système dont le wronskien est

$$W = c_{mn}\cos(c_{mn}z)\sin(c_{mn}(L-z)) + c_{mn}\sin(c_{mn}z)\cos(c_{mn}(L-z)) = c_{mn}\sin(c_{mn}L).$$

La règle de Cramer permet alors de débusquer les fonctions C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned}
C_1'(z) &= \frac{-1}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}f(z)\cos(c_{mn}(L-z)); \\
C_2'(z) &= \frac{1}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}f(z)\cos(c_{mn}z).
\end{aligned}$$

Or, d'après (3.2.25) et puis le fait que $v'(L) = 0$, on a que $C_1(L) = 0$. On en déduit que

$$C_1(z) = \int_L^z \frac{-f(z')}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}\cos(c_{mn}(L-z'))dz' = \int_z^L \frac{f(z')}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}\cos(c_{mn}(L-z'))dz'.$$

De la même manière, comme $v'(0) = 0$, on sait que $C_2(0) = 0$ et puis que

$$C_2(z) = \int_0^z \frac{f(z')}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}\cos(c_{mn}z')dz'.$$

En combinant, on conclut :

$$v(z) = \int_z^L \frac{f(z')}{c_{mn}\sin(c_{mn}L)}\cos(c_{mn}(L-z'))\cos(c_{mn}z)dz' +$$

$$+ \int_0^z \frac{f(z')}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)} \cos(c_{mn}z') \cos(c_{mn}(L-z)) dz'.$$

On pose finalement

$$g_{mn}(z, z') := -4\pi \frac{\cos(c_{mn}z_{<}) \cos(c_{mn}(L-z_{>}))}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)},$$

avec $z_{<}$ et $z_{>}$ le plus petit et le plus grand respectivement d'entre z' et z . Par construction, la fonction g_{mn} répond aux conditions de Neumann (3.2.20)⁸, et en complément, on vérifie que cette fonction est la solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz⁹ \mathcal{L} :

on dérive une première fois

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{mn}}{\partial z}(z, z') &= -4\pi \left[\delta(z-z') \frac{\cos(c_{mn}z') \cos(c_{mn}(L-z))}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)} + c_{mn} H(z-z') \frac{\cos(c_{mn}z') \sin(c_{mn}(L-z))}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)} - \right. \\ &\quad \left. - \delta(z'-z) \frac{\cos(c_{mn}(L-z')) \cos(c_{mn}z')}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)} - c_{mn} H(z'-z) \frac{\cos(c_{mn}(L-z')) \sin(c_{mn}z)}{c_{mn} \sin(c_{mn}L)} \right] \\ &= -4\pi H(z-z') \frac{\cos(c_{mn}z') \sin(c_{mn}(L-z))}{\sin(c_{mn}L)} + 4\pi H(z'-z) \frac{\cos(c_{mn}(L-z')) \sin(c_{mn}z)}{\sin(c_{mn}L)}, \end{aligned}$$

avec $H(x)$ la fonction de Heaviside qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon.

Puis, en le faisant une seconde fois, on obtient exactement ce qui était escompté :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{mn}}{\partial z^2}(z, z') &= -4\pi \left[\delta(z-z') \frac{\cos(c_{mn}z') \sin(c_{mn}(L-z))}{\sin(c_{mn}L)} + c_{mn} H(z-z') \frac{\cos(c_{mn}z') \cos(c_{mn}(L-z))}{\sin(c_{mn}L)} + \right. \\ &\quad \left. + \delta(z'-z) \frac{\cos(c_{mn}(L-z')) \sin(c_{mn}z)}{\sin(c_{mn}L)} - c_{mn} H(z'-z) \frac{\cos(c_{mn}(L-z')) \cos(c_{mn}z)}{\sin(c_{mn}L)} \right] \\ &= -4\pi \delta(z-z') \frac{\sin(c_{mn}L - c_{mn}z + c_{mn}z')}{\sin(c_{mn}L)} + c_{mn}^2 g_{mn}(z, z') \\ &= -4\pi \delta(z-z') + c_{mn}^2 G_{mn}(z, z'). \end{aligned}$$

Enfin, la fonction de Green associée à la pression interne est :

$$G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := -4\pi \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a}) \cos(c_{mn}z_{<}) \cos(c_{mn}(L-z_{>}))}{a^2 (1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn}) c_{mn} \sin(c_{mn}L)}. \quad (3.2.27)$$

8. Encore une fois, nous constatons que la solution est indépendante du choix de la branche de la racine carrée.

9. Nous présentons cette étape puisque nous avons toujours présenté la fonction de Green comme une solution fondamentale et non pas comme l'opérateur intégral qui inverse l'opérateur différentiel.

3.2.4. Expression de la pression interne

La démarche sera très similaire à celle pour la pression externe, hormis le fait que le domaine ici soit déjà borné. Pour chaque point $\mathbf{r}' \in C$, c'est-à-dire à l'intérieur du cylindre, on peut écrire¹⁰

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{r}') &= p(r', \theta', z') = \frac{-1}{4\pi} \int_C -4\pi p(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\
&= \frac{-1}{4\pi} \int_C \left[p(\mathbf{r}) \left(\Delta_{\mathbf{r}} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 0 \right] d\mathbf{r} \\
&= \frac{-1}{4\pi} \int_C \left[p(\mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{r}} G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\omega^2}{c_a^2} p(\mathbf{r}) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}} p(\mathbf{r}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega^2}{c_a^2} p(\mathbf{r}) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r} \\
&= \frac{-1}{4\pi} \int_C \left[p(\mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{r}} G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\omega^2}{c_a^2} p(\mathbf{r}) G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_C \left[p(\mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{r}} \left(\sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N g_{int}^{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N g_{int}^{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}} p(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

avec g_{int}^{mn} tel que $G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N g_{int}^{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Une fois de plus, c'est la topologie faible des distributions qui nous a permis d'obtenir la dernière ligne en toute légitimité. De surcroît, un petit coup d'oeil au système numéro **(3)** présenté à la section 3.1, nous permet de parachever cette expression :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{r}') &\stackrel{\text{Green}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\partial C} \left[p(\mathbf{r}_s) \partial_n \left(\sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N g_{int}^{mn}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}') \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N g_{int}^{mn}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}') \partial_n p(r_s) \right] dS \\
&= \int_{\partial C} \left[p(\mathbf{r}) \underbrace{\partial_n G_{int}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}')}_{=0 \text{ partout}} - G_{int}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}') \underbrace{\partial_z p(\mathbf{r})}_{=0 \text{ sauf en } z=L^-} \right] dS \\
&= \int_{D_a(0,0,L)} [-G_{int}(r, \theta, L, \mathbf{r}') (-\partial_z p(r, \theta, L^-))] dS
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

10. Soulignons une fois de plus que cette équation n'est potentiellement pas exacte lorsque $r' = 0$ ou $r' = a$, mais nous n'aurons finalement besoin que de l'égalité presque partout (voir l'annexe A).

$$\stackrel{(3.e)}{=} \int_{D_a(0,0,L)} [G_{int}(r,\theta,L,\mathbf{r}')\sigma_a\omega^2\eta(r,\theta,L)] dS,$$

avec $D_a(0,0,L)$ le disque dans le plan $z = L$, de rayon a et centré en $(0,0,L)$.

3.3. Recherche des fréquences propres et implémentation

En se servant des expressions de la pression interne et externe, on peut maintenant réécrire le seul système encore non exploré :

$$\left\{ \begin{array}{l} (T\Delta + \sigma_m\omega^2)\eta(r,\theta) = \frac{-1}{4\pi} \int_0^a r' \int_0^{2\pi} G_{ext}(r,\theta,L^+,r',\theta',L)\sigma_a\omega^2\eta(r,\theta,L)d\theta'dr' - \\ \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4\pi} \int_0^a r' \int_0^{2\pi} G_{int}(r,\theta,L^-,r',\theta',L)\sigma_a\omega^2\eta(r,\theta,L)d\theta'dr'; \\ \eta(a,\theta) = 0. \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

Désormais, afin de les distinguer, les modes normaux seront notés η_{ij} , les fréquences propres associées ω_{ij} et le spectre de la timbale

$$W := \{\omega_{ij} \in \mathbb{C}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}}.$$

Remarque 3.3.1. *On souligne qu'il importe d'indicer les fréquences et les modes propres à l'aide de deux listes indépendantes, d'abord parce que la peau de la timbale est un objet en deux dimensions, mais aussi en partie, car on observe en pratique, à l'aide d'un protocole de Chladni, que les motifs des modes normaux de la timbale et du tambour régulier sont très similaires (voir la figure 3.2). Une telle notation permet ainsi de comparer les fréquences propres des modes normaux analogues.*

Remarque 3.3.2. *Il a été soulevé plus tôt que nous ne savions pas montrer que le spectre était discret. Ainsi, il serait plus exact de dire que W est une partie seulement du spectre de la timbale. Nous justifions cet abus de langage par le fait qu'en pratique nous savons que cet ensemble est discret et qu'il peut être mis en correspondance avec le spectre du tambour régulier.*

Ultimement, pour chaque mode de vibration η_{ij} , nous ne nous intéressons pas réellement au mouvement de la peau lui-même et à la fonction qui le décrit, mais à la fréquence de vibration ω_{ij} . Ce qui nous amène à vouloir décomposer un η_{ij} que l'on cherche en une série judicieusement conçue, afin de la remplacer dans (3.3.1) et ainsi fragmenter la résolution de ce système en plusieurs équations plus simples. Nous prenons comme hypothèse de travail que chaque mode η_{ij} est au moins $C^2(D_a(0,0,L))$, ainsi on peut le décomposer en une série

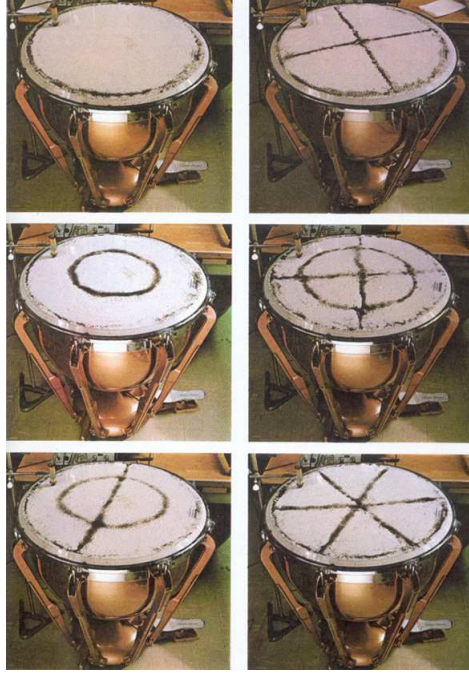


FIGURE 3.2. Expérience de Chladni sur une timbale

de la forme

$$\eta_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{ij} \eta_{mn}^{(0)}(r, \theta), \quad (3.3.2)$$

où les $\eta_{mn}^{(o)} = \frac{\sqrt{2}}{aJ_{m+1}(X_{mn})} J_m(X_{mn} \frac{r}{a}) \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}$ sont les modes normaux du tambour régulier. Nous rappelons au passage que l'utilisation de l'exponentielle complexe plutôt que du cosinus et du sinus permet d'alléger la notation des calculs sans toutefois altérer le sens réel de l'équation. Nous substituons¹¹ maintenant (3.3.2), (3.2.13) ainsi que (3.2.27) dans (3.3.1) et prenons le produit scalaire de chaque côté avec $\eta_{m'n'}^{(0)}$ afin de capturer le coefficient $b_{m'n'}^{ij}$ correspondant. Avec un peu d'encre, de papier et d'énergie, on trouve le système d'équations linéaires infini suivant pour les coefficients de (3.3.2) :

$$\left(\frac{c_p}{\omega_{ij} a} \right)^2 b_{m'}^{ij} = A_{m'}(\omega_{ij}) b_{m'}^{ij} \quad (3.3.3)$$

où $b_{m'}^{ij} := (b_{m'1}^{ij}, b_{m'2}^{ij}, \dots)^t$ est un vecteur propre de $A_{m'}(\omega_{ij}) := [A_{m'n'n}(\omega_{ij})]$,

$$A_{m'n'n}(\omega_{ij}) := \delta_{n,n'} \frac{1}{X_{m'n'}^2} + \frac{2\sigma_a X_{m'n}}{\sigma_m X_{m'n'}} (I_{m'n'}^n(\omega_{ij}) - 2G_{m'n'}^n(\omega_{ij})),$$

11. Cette démarche est présentée de façon plus détaillée à l'annexe A.

$$G_{m'n'}^n(\omega_{ij}) := \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{Y_{m'n}^2}{(Y_{m'n''}^2 - X_{m'n'}^2)(Y_{m'n''}^2 - X_{m'n'}^2)(Y_{m'n}^2 - m'^2) \gamma_{m'n''} \tan(\gamma_{m'n''}L)},$$

$$I_{mnn'} := \int_0^{\infty} \frac{a^2 \lambda J_{m'}^2(a\lambda)}{\gamma(\lambda)} \cdot \frac{1}{(X_{m'n'} - (a\lambda)^2)(X_{m'n''} - (a\lambda)^2)} d\lambda,$$

et où $\gamma_{mn}^{ij} := \gamma_{ij}\left(\frac{Y_{mn}}{a}\right)$ avec $\gamma(\lambda)$ définie comme le produit des branches principales suivantes :

$$\gamma_{ij}(\lambda) := i \sqrt{i \left(\frac{\omega_{ij}}{c_a} - \lambda \right)} \sqrt{-i \left(\frac{\omega_{ij}}{c_a} + \lambda \right)}.$$

Dès lors, nous voudrions résoudre le système (3.3.3) en fonction de $b_{m'}^{ij}$, afin de trouver aussi toutes les fréquences propres ω_{ij} de la timbale. Or, plusieurs petits obstacles nous séparent de notre dessein... D'abord, la matrice $A_{m'}$ dépend d'une fréquence inconnue et ce système est de dimension infinie. Aussi, nous réalisons qu'absolument rien dans celui-ci ne lie une fréquence propre à son rang, à l'instar des problèmes de la corde vibrante et du tambour régulier, où les fréquences sont explicitement données en fonction de l'indice :

$$\omega_n^{\text{corde}} = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{et} \quad \omega_{mn}^{\text{tambour}} = \frac{cX_{mn}}{a}.$$

Il devient donc difficile de se convaincre de l'exhaustivité d'un potentiel ensemble de fréquences trouvées et, par le fait même, de confirmer qu'une fréquence qu'on soupçonnerait fondamentale, le soit effectivement. Ces inconvénients sont pour nous un reflet de la difficulté que représente l'étude d'un opérateur inhomogène aussi particulier et inexploré que celui-ci :

$$\sigma_m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T \Delta \eta + p_- - p_+.$$

Ceci étant dit, nous ne sommes pas du tout dans une impasse puisque de fort bons logiciels de calcul symbolique et numérique nous permettent d'explorer un peu plus librement nos équations, sans toute la rigueur et l'intransigeance d'une preuve mathématique.

Suivant cette idée, nous avons implémenté le système (3.3.3) dans le langage Wolfram en utilisant (en premier lieu) les constantes proposées par [6] et partagées par [18] :

- Tension de la membrane : $T = 3990 \text{ N/m}$;
- Rayon de la membrane : $a = 0,328 \text{ m}$;

- Hauteur de la timbale : $L = 0,4142$ m ;
- Densité surfacique de la membrane : $\sigma_m = 0,2653$ kg/m² ;
- Densité de l'air : $\sigma_a = 1,21$ kg/m³ ;
- Vitesse du son dans l'air : $c_a = 344,0$ m/s ;
- Vitesse de l'onde sur la membrane : $c_p = 122,6$ m/s.

L'ensemble de ces constantes forment ce que nous appellerons le **modèle 1**.

La procédure du code (qui se retrouve en annexe B) est assez simple et intuitive : pour une fréquence ω_{ij} que nous aimerions trouver, nous nous dotons d'une fréquence de départ ω_0 , qui nous en sommes convaincu au préalable, approxime relativement bien ω_{ij} . Avec celle-ci, nous construisons une matrice $A_{m'}(\omega_{ij}^{(o)})$ de dimension finie, sachant que les coefficients b_{mn}^{ij} de (3.3.2) doivent décroître assez rapidement et donc que seuls les premiers termes de notre matrice sont d'une importance signifiante. De même pour les termes $G_{m'n'}^n$ et $I_{m'n'}^n$ qui font intervenir des sommes infinies, que nous pouvons allègrement couper¹². Une fois la matrice $A_{m'}(\omega_{ij}^{(o)})$ calculée, Mathematica trouve un vecteur de valeurs propres. Si nous avons déjà trouvé la bonne fréquence, il y aurait parmi ce vecteur une entrée égale à $\left(\frac{c_p}{\omega_{ij}a}\right)^2$. Or ce n'est pas le cas, ainsi nous retenons l'entrée qui se rapproche le plus de notre précédent essai et nous reprenons le processus à l'aide de la nouvelle fréquence. Nous itérons le processus en espérant que cela converge vers une solution assez rapidement et que celle-ci ne se soit pas trop éloignée de la fréquence de départ, dans le but de simplifier notre processus d'exhaustivité des fréquences propres.

- Remarques 3.3.3.**
- *Remarquons que pour cette méthode, l'information d'un seul m' est nécessaire pour isoler une fréquence. Il est alors naturel d'utiliser $m' = i$.*
 - *Comme $m' = i$ fait partie du calcul de $A_{m'}(\omega_{ij})$, il est important que notre estimé de départ ω_0 soit choisi en tenant compte de m' .*
 - *L'indice j n'a aucune influence sur le calcul de $A_{m'}(\omega_{ij})$, si ce n'est que dans le choix de ω_{ij} .*

12. Quatre termes sont suffisants pour une précision d'environ 4 chiffres significatifs.

Comme mentionné précédemment, il est naturel de s'appuyer sur notre connaissance du tambour régulier afin d'orienter notre recherche. En pratique, (voir [6]) on observe que l'ajout du socle sous la peau de la timbale agit un peu à titre d'accordeur, en ce sens qu'il vient ajuster la fréquence de certains modes normaux du tambour régulier afin que les rapports entre ceux-ci soient plus harmonieux qu'ils ne l'étaient. De ce fait, le choix pour ω_0 devient évident : il suffit de prendre $\omega_0 = \omega_{ij}^{(o)} = \sqrt{\frac{T}{\sigma_m} \frac{X_{ij}}{a}}$, la fréquence propre analogue du tambour régulier.

Pour certains cas, nous avons dû être encore plus précis dans le choix de notre point de départ. En particulier, lorsque a est grand, puisque les valeurs propres de la matrice sont plus proches les unes des autres et donc la méthode avait tendance à choisir la mauvaise valeur propre lors de la première itération. En observant de plus près toutes les valeurs propres calculées lors de cette itération, nous nous sommes rendu compte qu'à chaque coup, la première valeur propre était très proche de ω_{i1} , la seconde de ω_{i2} , et ainsi de suite jusqu'à ω_{id} , où d est la dimension de la matrice. Sans pouvoir justifier rigoureusement que ce serait toujours le cas, nous avons quand même fait l'hypothèse que la première valeur propre serait toujours plus proche de ω_{i1} . Pour les modes de cette forme, il s'est avéré qu'en forçant le code à choisir la toute première valeur propre durant la première itération plutôt que celle qui se rapproche le plus en norme du point de départ, nous avons convergé très rapidement et vers des résultats beaucoup plus réalistes.

Les modes de la forme η_{0j} , beaucoup plus récalcitrants à la convergence, ont nécessité la mise en place d'une deuxième méthode. Celle de rechange que nous avons utilisée est connue sous le nom d'itération Atkinson et est d'ordre 3. Elle est utile puisque nos équations ont une dépendance quadratique en ω . De plus, nous avons doté cette deuxième méthode d'un terme de relaxation.

Entre 5 et 35 itérations sont requises pour converger vers une fréquence ω_{ij} . Pour chaque itération, la fonction *ConvergeonsVersOmega* nous informe de la fréquence angulaire ω_{ij} (complexe) trouvée et à partir de laquelle elle déduit à la fois la fréquence ordinaire f_{ij} réelle (en Hz) et puis le temps de réverbération TR60. Ce TR60 correspond au temps que prend le son pour perdre 60db. Le nombre 60 est un standard relativement courant et il est assez élevé pour permettre de s'imaginer que le son aura presque totalement disparu, même en ne

connaissant pas l'amplitude de départ. Le calcul de cette durée se déduit¹³ à partir d'une simple équation de l'intensité sonore $I(t)$:

$$\begin{aligned}
60 \cdot 10^{-1} &= -\log_{10} \left(\left(\frac{I(TR60)}{I(0)} \right)^2 \right) \\
6 &= -2 \log_{10} \left(\frac{e^{-i \cdot \text{Im}\{\omega_{ij}\} \cdot TR60}}{e^0} \right) \\
3 &= -\text{Im}\{\omega_{ij}\} \cdot TR60 \log_{10} e \\
TR60 &= \frac{-3}{\text{Im}\{\omega_{ij}\} \log_{10} e}.
\end{aligned}$$

Avant de passer aux résultats, nous invitons le lecteur à s'attarder à l'annexe B pour plus de détails concernant l'implémentation des méthodes, la vitesse de convergence et la dimension de la matrice $A_{m'}(\omega_{ij})$.

3.4. Résultats

D'après les observations [6], les modes qui seraient le plus avantageusement affectés par la présence du fût de la timbale sont les premiers modes de la forme η_{i1} , avec $i > 0$, et en particulier η_{11} . En posant $f_{ij} := \frac{\text{Re}\{\omega_{ij}\}}{2\pi}$, nous devrions confirmer avec nos calculs que les rapports $f_{11} : f_{21} : f_{31} : f_{41} : f_{51}$ s'approchent de $2 : 3 : 4 : 5 : 6$. L'ajout de la caisse de résonance crée aussi un phénomène d'amortissement de la vibration qui est favorable puisqu'on constate que les modes qui participent moins à l'harmonie et plus à la dissonance de l'instrument s'étouffent plus rapidement que les modes η_{i1} . Ce sont ces deux phénomènes que nous tenterons de reconnaître numériquement.

En premier lieu, nous avons évalué la fonction de convergence sur le modèle 1 pour des ω_{ij} tels que i est compris entre 0 et 5 inclusivement, des j entre 1 et 4 et avons récolté ses résultats dans les tableaux 3.1 et 3.3. En comparant le tableau 3.1 avec les résultats homologues du tambour, rassemblés dans le tableau 3.2, on voit bien que la présence de la caisse de résonance permet de diminuer toutes les fréquences de vibration. Ce n'est en soi pas là qu'est l'avantage; ce que l'on désire avec cette diminution c'est un ajustement des fréquences propres, de sorte que leurs rapports se rapprochent d'une séquence harmonique.

13. Une erreur s'est glissée dans [18] : un coefficient 2π a été ajouté par erreur.

Par conséquent, nous avons regroupé les fréquences et les rapports des 9 premiers modes¹⁴ dans le tableau 3.4, afin de les comparer. On s’aperçoit rapidement en étudiant les colonnes 4 et 5 que les rapports avec la fondamentale sont loin d’être des entiers. Cependant, en comparant les fréquences avec $f_{11}/2$, on voit apparaître des rapports qui s’en rapprochent fortement, nommément, ceux de f_{21} , f_{31} , f_{41} . Celui de f_{51} n’est pas aussi bien accordé que les précédents, mais nous retenons tout de même η_{51} parmi les modes d’importance harmonique. La deuxième information notable de ce tableau est le fait que les modes qui se démarquent positivement pour leur rapport avec f_{11} sont aussi ceux qui perdurent le plus, c’est-à-dire ceux dont le temps de réverbération est nettement plus long. Que l’instrumentiste puisse donner ou non une grande amplitude aux modes $\eta_{0,1}$, $\eta_{0,2}$, $\eta_{1,2}$ ou $\eta_{2,2}$, ils seront toujours amortis très rapidement. Comme l’harmonicité d’un instrument de musique est un concept intéressant d’abord et avant tout parce que notre ouïe en fait l’expérience, on peut donc dire que c’est ce qui est perçu par l’oreille humaine qui importe dans l’analyse harmonique de la timbale. De ce fait, les modes qui sont amortis très rapidement ont, de notre point de vue, un poids nettement moindre par rapport aux autres. On retrouve en annexe C des tableaux relatant les 9 premières fréquences et leur temps de réverbération pour deux autres combinaisons de rayon, de hauteur et de tension. Celles-ci viennent appuyer ce que l’on remarque en pratique : les modes d’importance harmoniques, c’est-à-dire à la fois ceux qui offrent des rapports fréquentiels intéressants et ceux qui perdurent le plus dans le temps, sont les modes η_{11} , η_{21} , η_{31} , η_{41} et η_{51} . Autrement dit, cette propriété n’est pas propre à la configuration précédemment présentée.

TABLEAU 3.1. Fréquences f_{ij} (en Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale du modèle 1

i \ j	1	2	3	4
0	127.0249	253.6885	417.5372	624.1094
1	150.9470	351.4927	508.5754	719.3006
2	227.7482	412.305	601.8679	808.3257
3	300.2332	493.2493	679.6219	897.1961
4	370.7146	571.0497	764.4562	963.2285
5	439.9142	646.8589	844.2687	1046.2803

14. Il n’est guère nécessaire d’aller plus loin que le neuvième mode puisque les modes qui suivent sont en pratique très peu énergétiques.

TABLEAU 3.2. Fréquences $f_{ij}^{(o)}$ (Hz) associées aux modes $\eta_{ij}^{(o)}$ du tambour de rayon $a = 0,328$ m avec une tension de $T = 3990$ N

s \ t	1	2	3	4
0	143,1	328,5	515,0	701,7
1	228,0	417,5	605,4	792,8
2	305,6	500,9	691,5	880,5
3	379,7	580,8	774,5	965,4
4	451,6	658,4	855,3	1048
5	522,0	733,6	934,3	1129

TABLEAU 3.3. Temps de réverbération TR60 (s) des modes η_{ij} de la timbale du modèle 1

s \ t	1	2	3	4
0	0,127	0,216	0,814	0,409
1	1,45	0,222	10,2	0,387
2	4,46	0,995	0,800	0,296
3	16,1	1,69	1,94	0,200
4	61,5	3,82	1,23	3,10
5	240	9,84	1,96	1,76

Afin de quantifier la performance de la timbale cylindrique, nous avons eu besoin d'une mesure de la dissonance, c'est-à-dire une qui peut indiquer à quel point les fréquences de vibration sont loin d'être dans des rapports harmoniques. La mesure suivante est facile à interpréter et intègre la notion de temps de réverbération en ne considérant que les modes d'importance de la timbale :

$$\mu := \sum_{i=2}^5 \frac{|\frac{2f_{i1}}{f_{11}} - (i+1)|}{i+1}.$$

Elle mesure la distance entre les suites $f_{11} : f_{21} : f_{31} : f_{41} : f_{51}$ et $2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Elle attribue au modèle 1 une dissonance de 0,0569. On peut aisément comparer l'harmonicité du tambour régulier avec celle du tabla, cependant, il n'est pas possible de comparer rigoureusement celle de la timbale avec celle des deux précédents instruments puisque, contrairement à ses deux confrères, l'amortissement de certains modes est une propriété que ne possède seulement le modèle mathématique de la timbale et qui fait partie du calcul de sa dissonance. On pourrait

faire la moyenne de la dissonance sur les modes d'intérêts de chacun des instruments, mais ça ne traduirait pas ce que l'oreille perçoit. Si, par exemple, le tabla était plus dissonant selon cette moyenne, il serait possible que la répartition des temps de réverbération des modes de la timbale fasse conclure à l'oreille le résultat inverse. Autrement dit, on ne peut quantifier l'effet harmonique perçu de l'amortissement des modes. À titre indicatif, on peut quand même donner la mesure μ pour le tambour, afin de situer celle-ci pour un instrument que l'on sait très dissonant : $\mu(\text{tambour})=0,387952$.

TABLEAU 3.4. Temps de réverbération des premiers modes propres de la timbale du modèle 1 et comparaison de différents rapports fréquentiels de cette timbale avec ceux du tambour de rayon $a = 0,328$ m et avec une tension de $T = 3990$ N

(i,j)	$f_{ij}^{(o)}$	f_{ij}	$f_{ij}^{(o)}/f_{01}^{(o)}$	f_{ij}/f_{01}	$2f_{ij}^{(o)}/f_{11}^{(o)}$	$2f_{ij}/f_{11}$	TR60
(0,1)	143,1	127,0	1	1	-	-	0,170
(1,1)	228,0	150,9	1,593	1,188	2	2	1,51
(2,1)	305,6	227,7	2,136	1,793	2,681	3,018	4,97
(0,2)	328,5	253,7	2,295	1,998	2,881	3,362	0,141
(3,1)	379,7	300,2	2,653	2,364	3,330	3,979	19,1
(1,2)	417,5	351,5	2,917	2,768	3,662	4,659	0,202
(4,1)	451,6	370,7	3,155	2,919	3,961	4,913	77,3
(2,2)	500,9	412,2	3,500	3,246	4,393	5,463	0,755
(5,1)	522,0	439,9	3,647	3,464	4,578	5,830	319

En revanche, cette mesure est le parfait outil pour comparer différents modèles de timbale, en faisant varier certains de leurs paramètres. Pour tenter de trouver une combinaison qui optimise l'harmonicité, nous avons choisi de faire varier les paramètres reliés à la géométrie de l'instrument, soient le rayon (a) et la hauteur (L), mais aussi, puisque les instrumentistes peuvent eux-mêmes la modifier, la tension (T). Les graphiques de la figure 3.3 représentent la variation de la fréquence de vibration du mode η_{11} lorsque les trois paramètres (a, L, T) varient. Cette figure confirme l'intuition physique naturelle puisque la fréquence augmente avec la tension et lorsque le rayon diminue.

D'autre part, il est frappant de constater la stabilité de la fréquence lorsque la hauteur varie. Comme le fait remarquer Davis [6], ce n'est finalement pas si surprenant lorsqu'on étudie de plus près les équations du système A_m^{i1} . Le seul terme qui dépend de L est le

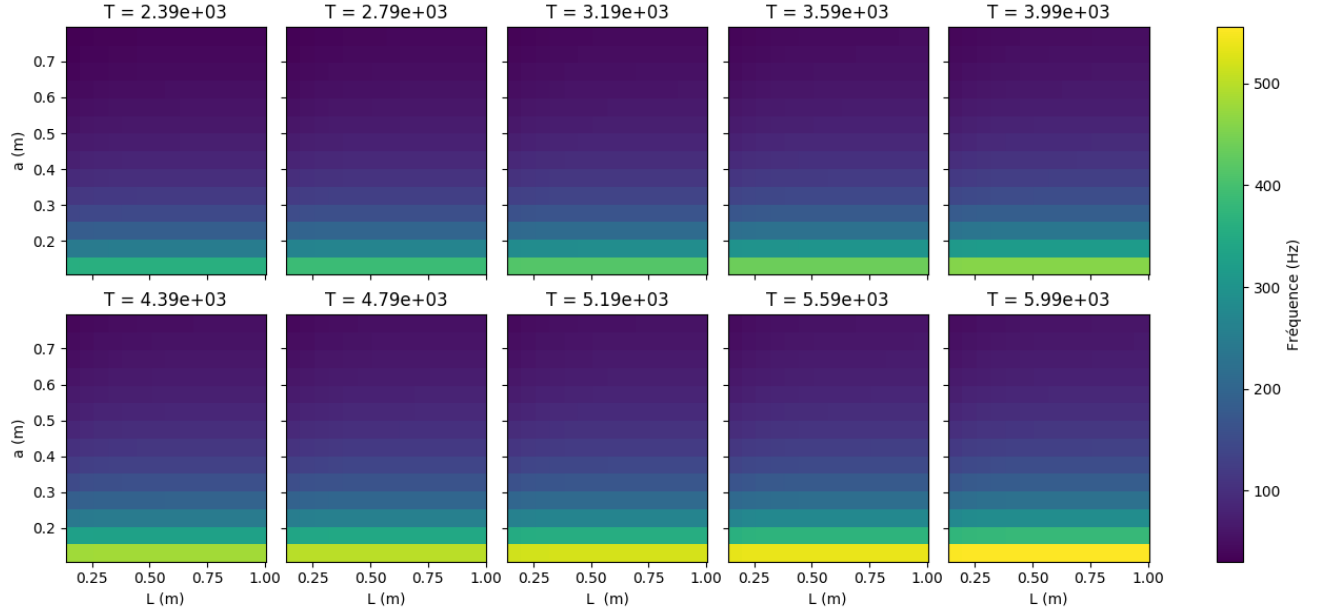


FIGURE 3.3. Fréquence f_{11} (Hz) associée au mode normal η_{11} pour des trios de paramètres (a , L , T) donnés

suivant :

$$\begin{aligned}
\gamma_{m'n''} \tanh(\gamma_{m'n''} L) &= \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \frac{\tanh\left(iLi\sqrt{i\left(\frac{\omega_{m'j}}{c_a} - \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\sqrt{-i\left(\frac{\omega_{m'j}}{c_a} + \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\right)}{i} \\
&= \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \tan\left(-L\sqrt{i\left(\frac{\omega_{m'j}}{c_a} - \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\sqrt{-i\left(\frac{\omega_{m'j}}{c_a} + \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\right) \\
&\approx \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \tanh\left(-L\sqrt{i\left(\frac{X_{m'j}c_p}{ac_a} - \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\sqrt{-i\left(\frac{X_{m'j}c_p}{ac_a} + \frac{Y_{m'n''}}{a}\right)}\right) \\
&= \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \tanh\left(\frac{-L}{a}\sqrt{i\left(\frac{X_{m'j}c_p}{c_a} - Y_{m'n''}\right)}\sqrt{-i\left(\frac{X_{m'j}c_p}{c_a} + Y_{m'n''}\right)}\right) \\
&\approx \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \tanh\left(\frac{-L}{a}\sqrt{-iY_{m'n''}}\sqrt{-iY_{m'n''}}\right)
\end{aligned}$$

si $\frac{X_{m'j}c_p}{c_a} \ll Y_{m'n''}$,

$$= \frac{\gamma_{m'n''}}{i} \cdot \tanh\left(\frac{-L}{a}Y_{m'n''}\right)$$

≈ 1

où la dernière ligne est vraie dès que $\frac{LY_{m'n''}}{a} > \pi$. Ainsi, pour L/a assez grand, les trois dernières approximations tiennent et on a que la fréquence est presque indépendante de la hauteur L . Les graphiques de la figure 3.4 font bien ressortir cette quasi-indépendance : la fréquence atteint rapidement un plateau lorsque L augmente. Tous les derniers constats par

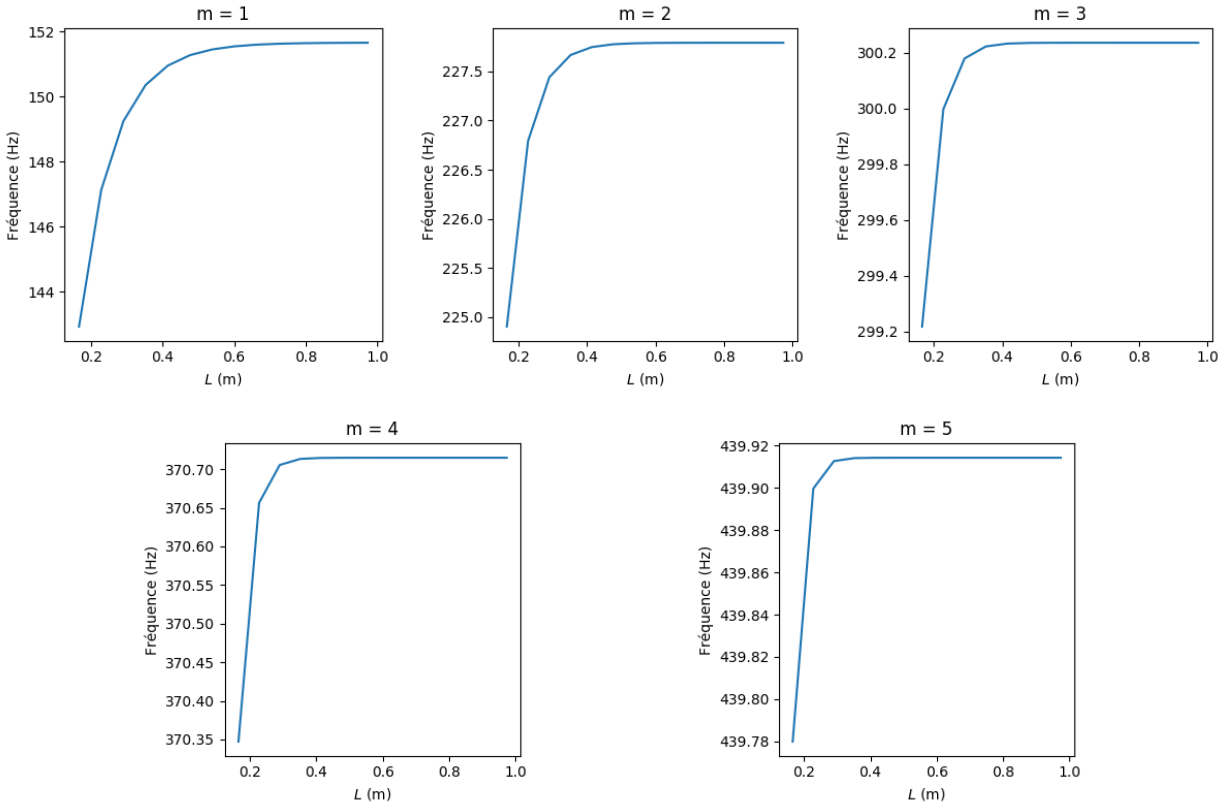


FIGURE 3.4. Variation de la fréquence propre f_{m1} (Hz) associée au mode η_{m1} , pour $1 \leq m \leq 5$, en fonction de la hauteur L de la timbale de rayon $a = 0.328$ m et de tension $T = 3990$ N fixés

rapport à la dépendance en a , L et T peuvent aussi être faits en étudiant les résultats des modes η_{21} , η_{31} , η_{41} et η_{51} qui se trouvent en annexe C.

À partir des fréquences trouvées pour les modes $\eta_{11}, \eta_{21}, \eta_{31}, \eta_{41}$ et η_{51} , on calcule facilement la mesure de dissonance pour chacun des trios de paramètres physiques, d'où l'on a les graphiques de la figure 3.5. Il est manifeste qu'une zone vers le centre de chacun des graphiques permet d'optimiser l'harmonicité de la timbale. Parmi nos données, le minimum de la mesure de dissonance μ se trouve en fait en

$$(a, L, T) = (0,4264, 0,9734, 2390),$$

mais il est intéressant de soulever l'importante ressemblance entre les 10 graphiques associés à des tensions différentes. L'harmonicité est donc très peu réactive aux changements de tensions et en pratique cette propriété est idéale puisqu'une musicienne ou un musicien souhaite pouvoir accorder sa timbale à différentes hauteurs de notes sans pour autant altérer la qualité du son. En lien avec cette remarque, nous avons rassemblé, dans le tableau 3.5, le minimum de la dissonance pour chacune des tensions. Il est à noter que n'ayant calculé la fréquence que pour un ensemble discret et fini de points (a, L, T) , les minimums que nous avons trouvés ne sont que des approximations des résultats exacts.

TABLEAU 3.5. Les mesures du rayon et de la hauteur de la timbale minimisant la mesure de dissonance μ pour chaque tension considérée

Tension T (N)	Coordonnées (a , L) du min.	min. de μ
2390	(0,4264 , 0,9734)	0,006100
2790	(0,4264 , 0,9734)	0,006682
3190	(0,4264 , 0,9734)	0,007175
3590	(0,4264 , 0,9734)	0,007654
3990	(0,4264 , 0,9734)	0,008121
4390	(0,3772 , 0,4763)	0,008125
4790	(0,3772 , 0,5385)	0,008746
5190	(0,3772 , 0,9734)	0,007553
5590	(0,3772 , 0,9734)	0,007258
5990	(0,3772 , 0,9734)	0,006974

Par ailleurs, il est intéressant de noter dans les graphiques de la figure 3.5 que la dépendance en L est un peu plus prononcée pour la dissonance que pour la fréquence.

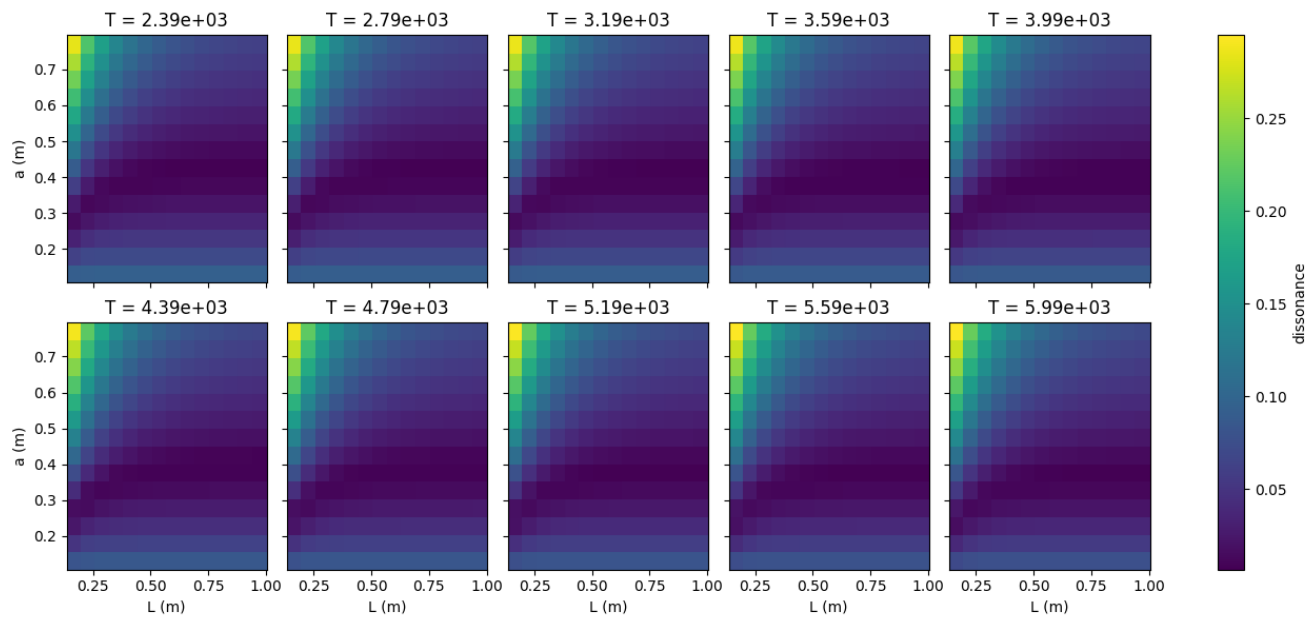


FIGURE 3.5. Mesures de dissonance μ de la timbale pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés

Chapitre 4

Conclusion

Pour faire l'analyse spectrale de la timbale cylindrique, nous avons d'abord élaboré un modèle physique nous ayant menés à l'obtention d'un système d'équations en trois parties : les équations concernant la vibration de la peau, la pression interne et la pression externe. Il a d'abord fallu trouver les expressions pour les pressions, ce que nous avons pu faire en utilisant la méthode des fonctions de Green. Nous avons ensuite exprimé chaque mode normal (inconnu au départ) comme une série de la forme

$$\eta_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{ij} \eta_{mn}^{(o)}(r, \theta),$$

où les $\eta_{mn}^{(o)}$ sont les modes propres du tambour régulier. En remplaçant cette expression et celles des pressions dans l'équation de la vibration de la peau

$$(T\Delta - \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2})\eta_{ij} = p_+ - p_-,$$

nous avons pu ramener la tâche de la recherche des fréquences propres à celle de la résolution d'un système matriciel infini :

$$\left(\frac{c_p}{\omega_{ij}a}\right)^2 b_{m'}^{ij} = A_{m'}(\omega_{ij})b_{m'}^{ij}. \quad (4.0.1)$$

À l'aide d'outils numériques, nous avons construit ce que nous soupçonnons être l'entièreté des neuf premières fréquences de vibration pour trois modèles physiques dont les tensions différaient. En comparant avec l'exemple du tambour régulier, il a rapidement été observé que la présence du fût de la timbale permet d'abaisser les fréquences propres ainsi que d'en accorder certaines afin qu'elles se rapprochent d'avoir entre elles les rapports harmoniques

2 : 3 : 4 : 5 : 6. D'autre part, nous avons vu que la condition d'irradiation de Sommerfeld à laquelle est contrainte la pression extérieure implique une perte locale d'énergie et par le fait même un amortissement de la vibration de la peau. Il a été constaté que les modes qui sont loin d'être en harmonie sont amortis beaucoup plus rapidement. Nous avons donc conçu une mesure de dissonance qui tient compte de cet aspect et avons trouvé en $(a, L, T) = (0,4264, 0,9734, 2390)$ une combinaison d'un rayon, d'une hauteur et d'une tension qui optimise l'harmonicité de la timbale. En outre, nous avons observé que cette harmonicité ne dépendait que très légèrement de la tension.

En terminant, si ce projet de maîtrise devait connaître une suite, nous pensons qu'il serait intéressant d'approfondir la question de la répartition du spectre sonore de la timbale, que nous avons dû supposer discret en nous basant sur des observations. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette difficulté est reliée à l'inhomogénéité de l'équation des ondes modifiée par la pression interne et externe. Aussi, on pourrait faire varier d'autres paramètres, comme par exemple les densités σ_m et σ_a , afin d'observer quels impacts ils ont sur la dissonance de l'instrument.

Bibliographie

- [1] D. J. BENSON : *Music : a mathematical offering*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2007.
- [2] V. BERGERON LAPERRIÈRE : Analyse du spectre de media à deux densités. Rapport de stage, Université de Montréal, août 2011.
- [3] J. W. BROWN et R. V. CHURCHILL : *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Science Engineering Math, 7e édition, 2003.
- [4] K. CAHILL : *Physical mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2013.
- [5] R. COURANT : *Methods of mathematical physics*. Interscience Publishers, New York, 1re édition, 1953. Édition anglaise traduite et révisée de l'allemand.
- [6] R. E. DAVIS : *Mathematical modeling of the orchestral timpani*. Thèse de doctorat, Purdue University, mai 1988.
- [7] G. B. FOLLAND : *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole mathematics series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, Calif., 1992.
- [8] S. GAUDET, C. GAUTHIER et S. LÉGER : The evolution of harmonic indian musical drums : A mathematical perspective. *Journal of Sound and Vibration*, 291:388–394, 03 2006.
- [9] C. GORDON, D. L. WEBB et S. WOLPERT : One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27(1):134–138, 1992.
- [10] L. HÖRMANDER : On the division of distributions by polynomials. *Arkiv för Matematik*, 3(6):555–568, décembre 1958.
- [11] M. KAC : Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4):1–23, 1966.
- [12] Y. KATZNELSON : *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge mathematical library. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 3e édition, 2004.
- [13] P. M. MORSE : *Theoretical acoustics*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, Toronto, 1968.
- [14] P. M. MORSE : *Vibration and sound*. Published by the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics, New York, [4th. ed.].. édition, 1981.

- [15] P. M. MORSE et H. FESHBACH : *Methods of theoretical physics*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, Boston, Mass, 1999.
- [16] A. NEELY : New horizons in music : Polyrhythms. <https://www.youtube.com/watch?v=JiNklhspdKg>, 2017.
- [17] B. S. RAMAKRISHNA et M. M. SONDHY : Vibrations of indian musical drums regarded as composite membranes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 26(4):523–529, 1954.
- [18] S.W. RIENSTRA : *The acoustics of a kettledrum*. IWDE report. Technische Universiteit Eindhoven, 1989.
- [19] T. D. ROSSING : The physics of kettledrums. *Scientific American*, 247(5):172–179, 1982.
- [20] Y. SAINT-AUBIN : *Analyse appliquée 1 : MAT 2466*. Université de Montréal, Montréal, 1996.
- [21] J. A. SCHMALZ, G. SCHMALZ, T. E. GUREYEV et K. M. PAVLOV : On the derivation of the Green's function for the Helmholtz equation using generalized functions. *American Journal of Physics*, 78(2): 181–186, février 2010.
- [22] M. SHUBIN : Invitation to partial differential equations. Manuel de cours.
- [23] E. M. STEIN et S. SHAKARCHI : *Fourier analysis : an introduction*. Princeton University Press, Princeton, N.J. : Woodstock, 2003.
- [24] V. S. (Vasilii Sergeevich) VLADIMIROV : *Equations of mathematical physics*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 3. M. Dekker, N.Y., 1971.
- [25] G. N. WATSON : *A treatise on the theory of Bessel functions*. University Press, Cambridge, 2e édition, 1958.

Crédits des images

- (1) Figure 0.1 : © CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=92721>;
- (2) Figure 0.2 : © CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_timpani_setup.jpg;
- (3) Figure 2.1 : tirée de [1], p.85;
- (4) Figure 2.2, tirée de [1], p.106;
- (5) Figure 3.2 : tirée de [19];

Annexe A

Calculs menant au système (3.3.3)

Cette annexe permet de développer les calculs qui nous ont fait aboutir au système 3.3.3. Nous avons les expressions suivantes, d'après les sections 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 :

- $\eta_{mn}^{(o)}(r, \theta) = \frac{J_m(X_{mn} \frac{r}{a})}{a J_{m+1}(X_{mn})} \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{\pi}}$;
- $\omega_{mn}^{(o)} = \frac{X_{mn} c_p}{a}$ avec $c_p = \sqrt{\frac{T}{\sigma_m}}$;
- $\eta_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}^{ij} \eta_{mn}^{(o)}(r, \theta)$;
- $G_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i \frac{\omega}{c_a} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2}}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2}} +$

$$+ \frac{e^{i \frac{\omega}{c_a} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z + z' - 2L)^2}}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z + z' - 2L)^2}} ;$$
- $G_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\theta - \theta')}}{2\pi} \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2 (1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}) J_m^2(Y_{mn})} \frac{\cos(\gamma_{mn} z_{<}) \cos(\gamma_{mn} (L - z_{>}))}{\gamma_{mn} \sin(\gamma_{mn} L)}$;
- $\gamma_{mn} = \gamma\left(\frac{Y_{mn}}{a}, \omega_{ij}\right)$ avec $\gamma(\lambda, \omega_{ij}) = i \sqrt{i \left(\frac{\omega_{ij}}{c_a} - \lambda\right)} \sqrt{-i \left(\frac{\omega_{ij}}{c_a} + \lambda\right)}$;
- $p(r, \theta, L^-) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a r' \int_0^{2\pi} G_{int}(r, \theta, L^-, r' \theta', L) \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, L^-) d\theta' dr'$;
- $p(r, \theta, L^+) = \frac{-1}{4\pi} \int_0^a r' \int_0^{2\pi} G_{ext}(r, \theta, L^+, r' \theta', L) \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, L^+) d\theta' dr'$;

où a , σ_m , T et c_a sont des constantes du modèle et où X_{mn} et Y_{mn} sont respectivement les n -ièmes zéros de la m -ième fonction de Bessel de premier ordre et de sa dérivée. Finalement, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma_m \omega_{ij}^2 \eta_{ij} = T \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \eta_{ij} + p(r, \theta, L^-) - p(r, \theta, L^+) \\ -\sigma_a \omega^2 \eta_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, L^\pm). \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

En rassemblant ces huit premières équations dans les deux dernières, et en prenant le produit scalaire avec $\eta_{m'n'}^{(o)}$ de chaque côté de la première partie de A.0.1 on obtient

$$\begin{aligned}
\langle p(r,\theta,L^+), \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle - \langle p(r,\theta,L^-), \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle &= \sigma_m \omega_{ij}^2 b_{m'n'}^{ij} + T \langle \Delta \eta_{ij}, \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle \\
&= \sigma_m \omega_{ij}^2 b_{m'n'}^{ij} + T \langle \Delta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{ij} \eta_{mn}^{(o)}, \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle \\
&= \sigma_m \omega_{ij}^2 b_{m'n'}^{ij} + T \langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{ij} \Delta \eta_{mn}^{(o)}, \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle \quad (\text{voir [25] p.605}) \\
&= \sigma_m b_{m'n'}^{ij} \omega_{ij}^2 - \sigma_m b_{m'n'}^{ij} \left(\omega_{m'n'}^{(o)} \right)^2
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\langle p(r,\theta,L^-), \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} (-4\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\theta-\theta')}}{2\pi} \cdot \frac{2J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a})}{a^2 \left(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}\right) J_m^2(Y_{mn})} \cdot \frac{\cos(\gamma_{mn} L^-)}{\gamma_{mn} \sin(\gamma_{mn} L)} \\
&\quad \cdot \frac{\partial p}{\partial z}(r', \theta', L^-) \cdot \frac{\sqrt{2}}{a J_{m'+1}(X_{m'n'})} \frac{J_{m'}(X_{m'n'} \frac{r}{a}) e^{-im'\theta'}}{\sqrt{2\pi}} r r' d\theta dr d\theta' dr' \\
&= \frac{-1}{a^3 \pi \sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta(m-m')-im\theta'} J_m(Y_{mn} \frac{r}{a}) J_m(Y_{mn} \frac{r'}{a}) J_{m'}(X_{m'n'} \frac{r}{a})}{J_{m'+1}(X_{m'n'}) \left(1 - \frac{m^2}{Y_{mn}^2}\right) J_m^2(Y_{mn}) \gamma_{mn} \tan(\gamma_{mn} L)} \\
&\quad \cdot \frac{\partial p}{\partial z}(r', \theta', L^-) r r' d\theta dr d\theta' dr',
\end{aligned}$$

par définition de la convergence en distribution. Puisque l'intégrande est continue sur le compact sur lequel il est intégré, on peut échanger l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2\pi}{a^3 \pi \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-im'\theta'} J_{m'}(Y_{m'n} \frac{r}{a}) J_m'(Y_{m'n} \frac{r'}{a}) J_{m'}(X_{m'n'} \frac{r}{a})}{J_{m'+1}(X_{m'n'}) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) J_m^2(Y_{m'n}) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n} L)} \\
&\quad \cdot \frac{\partial p}{\partial z}(r', \theta', L^-) r r' d\theta dr d\theta' dr' \\
&= \frac{-2}{a^3 \pi \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-im'\theta'} J_{m'}(Y_{m'n} \frac{r'}{a})}{J_{m'+1}(X_{m'n'}) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) J_m^2(Y_{m'n}) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n} L)} \cdot \left[\frac{a^2 X_{m'n'} (-J_{m'+1}(X_{m'n'})) J_{m'}(Y_{m'n})}{Y_{m'n}^2 - X_{m'n'}^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2 Y_{m'n'} J_{m'+1}(Y_{m'n}) J_{m'}(X_{m'n'})}{Y_{m'n}^2 - X_{m'n'}^2} \right] \frac{\partial p}{\partial z}(r', \theta', L^-) r' d\theta' dr' \\
&= \frac{2}{a^3 \pi \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-im'\theta'} J_{m'}(Y_{m'n} \frac{r'}{a})}{\left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) J_m^2(Y_{m'n}) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n} L)} \cdot \frac{a^2 X_{m'n'} J_{m'}(Y_{m'n})}{Y_{m'n}^2 - X_{m'n'}^2} \cdot \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} b_{m''n''}^{ij} \eta_{m''n''}^{(o)}(r', \theta') r' d\theta' dr' \\
&\stackrel{(1.2.3)}{=} \frac{2\sigma_a \omega_{ij}^2 X_{m'n'}}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{J_{m'}(Y_{m'n}) b_{m''n''}^{ij}}{Y_{m'n}^2 - X_{m'n'}^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\eta_{m''n''}^{(o)}(r', \theta') e^{-im'\theta'} J_{m'}(Y_{m'n} \frac{r'}{a})}{\left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) J_m^2(Y_{m'n}) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n} L)} r' d\theta' dr'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi\sigma_a\omega_{ij}^2 X_{m'n'}}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{J_{m'}(Y_{m'n})b_{m'n''}^{ij}}{Y_{m'n}^2 - X_{m'n''}^2} \int_0^a \frac{J_{m'}\left(X_{m'n''}\frac{r'}{a}\right)}{a\sqrt{\pi}J_{m'+1}(X_{m'n''})} \frac{J_{m'}\left(Y_{m'n}\frac{r'}{a}\right)}{\left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) J_{m'}^2(Y_{m'n})\gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n}L)} r' dr' \\
&= \frac{4\pi\sigma_a\omega_{ij}^2 X_{m'n'}}{a^2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{b_{m'n''}^{ij} J_{m'}^{-1}(Y_{m'n}) J_{m'+1}^{-1}(X_{m'n''})}{(Y_{m'n}^2 - X_{m'n''}^2) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n}L)} \int_0^a J_{m'}\left(X_{m'n''}\frac{r'}{a}\right) J_{m'}\left(Y_{m'n}\frac{r'}{a}\right) r' dr' \\
&= \frac{4\sigma_a\omega_{ij}^2 X_{m'n'}}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{b_{m'n''}^{ij} J_{m'}^{-1}(Y_{m'n}) J_{m'+1}^{-1}(X_{m'n''})}{(Y_{m'n}^2 - X_{m'n''}^2) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n}L)} \cdot \frac{a^2}{X_{m'n''}^2 - Y_{m'n}^2} \\
&\quad \cdot \left[-X_{m'n''} J_{m'+1}(X_{m'n''}) J_{m'}(Y_{m'n}) + \underbrace{Y_{m'n} J_{m'+1}(Y_{m'n}) J_{m'}(X_{m'n''})}_{=0} \right] \\
&= 4\sigma_a\omega_{ij}^2 X_{m'n'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{b_{m'n''}^{ij} X_{m'n''}}{(Y_{m'n}^2 - X_{m'n''}^2)(Y_{m'n}^2 - X_{m'n''}^2) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n}^2}\right) \gamma_{m'n} \tan(\gamma_{m'n}L)} \\
&= 4\sigma_a\omega_{ij}^2 X_{m'n'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{b_{m'n''}^{ij} X_{m'n''}}{(Y_{m'n''}^2 - X_{m'n''}^2)(Y_{m'n''}^2 - X_{m'n''}^2) \left(1 - \frac{m'^2}{Y_{m'n''}^2}\right) \gamma_{m'n''} \tan(\gamma_{m'n''}L)} \\
&=: 4\sigma_a\omega_{ij}^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{m'n''}^{ij} X_{m'n''} X_{m'n} G_{m'n''}^n(\omega_{ij}).
\end{aligned}$$

Des calculs très similaires, et l'identité tirée de [15] p.888

$$\frac{e^{i\omega\frac{R}{c_a}}}{R} = i \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \cos(m''(\theta - \theta')) \int_0^{\infty} \frac{\lambda J_{m''}(\lambda r) J_{m''}(\lambda r')}{\gamma(\lambda)} e^{i\sqrt{\frac{\omega_{ij}^2}{c_a^2} - \lambda^2}|z-z'|} d\lambda,$$

où $R^2 := r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2$ et où l'intégrale en est une de contour qui évite la branche de la racine carrée en $+\frac{\omega_{ij}}{c_a}$, nous permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned}
\langle p(r, \theta, L^-), \eta_{m'n'}^{(o)} \rangle &= \frac{-(-1)}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\omega_{ij}\frac{R}{c_a}}}{R} \frac{\partial p}{\partial z}(r', \theta', L^+) \overline{\eta_{m'n'}^{(o)}(r, \theta) r r' d\theta' dr' d\theta dr} \\
&= 2i\sigma_a\omega_{ij}^2 \sum_{n''=1}^{\infty} b_{m'n''}^{ij} X_{m'n''} X_{m'n''} \int_0^{\infty} \frac{a^2 \lambda J_{m'}^2(a\lambda)}{\gamma(\lambda)(X_{m'n''} - (a\lambda)^2)(X_{m'n''} - (a\lambda)^2)} d\lambda \\
&=: 2i\sigma_a\omega_{ij}^2 \sum_{n''=1}^{\infty} b_{m'n''}^{ij} X_{m'n''} X_{m'n''} I_{m'n''}^n(\omega_{ij}).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\sigma_m b_{m'n'}^{ij} \left((\omega_{m'n'}^{(o)})^2 - \omega_{ij}^2 \right) &= 2\sigma_a\omega_{ij}^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{m'n'}^{ij} X_{m'n'} X_{m'n} (iI_{m'n'}^n(\omega_{ij}) - 2G_{m'n'}^n(\omega_{ij})) \\
\Leftrightarrow b_{m'n'}^{ij} \left(\left(\frac{X_{m'n'} c_p}{\omega_{ij}^2 a} \right)^2 - 1 \right) &= \frac{2\sigma_a\omega_{ij}^2}{\omega_{ij}^2 \sigma_m} \sum_{n=1}^{\infty} b_{m'n'}^{ij} X_{m'n'} X_{m'n} (iI_{m'n'}^n(\omega_{ij}) - 2G_{m'n'}^n(\omega_{ij})) \\
\Leftrightarrow b_{m'n'}^{ij} \left(\frac{c_p}{\omega_{ij} a} \right)^2 &= \frac{b_{m'n'}^{ij}}{X_{m'n'}^2} + \frac{2\sigma_a}{\sigma_m X_{m'n'}} \sum_{n=1}^{\infty} b_{m'n'}^{ij} X_{m'n} (iI_{m'n'}^n(\omega_{ij}) - 2G_{m'n'}^n(\omega_{ij}))
\end{aligned}$$

qui peut se réécrire plus simplement comme un système linéaire de taille infini

$$\left(\frac{c_p}{\omega_{ij}a}\right)^2 b_{m'}^{ij} = A_{m'}(\omega_{ij})b_{m'}^{ij},$$

où $b_{m'}^{ij} = (b_{m'1}, b_{m'2}, \dots)^t$ et où $A_{m'}(\omega_{ij}) = [A_{m'n'n}(\omega_{ij})]$ avec

$$A_{m'n'n}(\omega_{ij}) := \delta_{n,n'} \frac{1}{X_{m'n'}^2} + \frac{2\sigma_a X_{m'n}}{\sigma_m X_{m'n'}} (iI_{m'n'}^n(\omega_{ij}) - 2G_{m'n'}^n(\omega_{ij})).$$

C'est le système qu'on retrouve dans le code Mathématique présenté en annexe B.

Annexe B

Code

Les prochaines pages font la liste des fonctions principales que nous avons utilisées pour converger vers les fréquences propres $\omega_{ij} = \omega_{m'j}$ pour un ensemble de constantes donné. Le code est écrit dans le langage Wolfram. Les commentaires sont de la forme « (* commentaire *) ».

```

(*On construit les matrices Xmn et Ymn
pour pouvoir ensuite aller chercher dans celles-ci le n-
ième zéro de la m-ième fonction de Bessel ou de sa dérivée.*)
Xmn = Table[N[BesselJZero[m, n]], {m, 0, 10}, {n, 10}];

BesselJPrimeZero[m_, n_] := Module[{left, right, z}, right = N[BesselJZero[m, n]];
Which[(n > 1), (left = N[BesselJZero[m, n - 1]);
Re[z /. Flatten[FindRoot[D[BesselJ[m, z], z] == 0, {z, left, right}]]], (n ==
1), (If[(m == 0), (0.0), (If[(m < 0.5), (left = Sqrt[m]), (left = 0.5 * right)]);
Re[z /. Flatten[FindRoot[D[BesselJ[m, z], z] == 0, {z, left, right}]]]]]]];

Ymn = Table[BesselJPrimeZero[m, n], {m, 0, 10}, {n, 10}];

(*Le choix de ce produit de branche principale remonte à (Morse, 1948, p.888).*)
γ[ω_, ca_, λ_] := I Sqrt[-I (λ + ω / ca)] Sqrt[I (λ - ω / ca)]

Gmpnnpn[mp_, np_, n_, Npp_, ω_, L_, ca_, a_] :=
If[mp == 0,
Sum[
1 / (-Xmn[[mp + 1, n]] ^ 2 + Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2) *
1 / (-Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 + Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2) *
1 / (γ[ω, ca, Ymn[[mp + 1, npp]] / a] * Tan[γ[ω, ca, Ymn[[mp + 1, npp]] / a] * L]),
{npp, 1, Npp}],
Sum[
Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2 / (-Xmn[[mp + 1, n]] ^ 2 + Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2) *
1 / (-Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 + Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2) *
(1) / (Ymn[[mp + 1, npp]] ^ 2 - (mp ^ 2)) *
1 / (γ[ω, ca, Ymn[[mp + 1, npp]] / a] * Tan[γ[ω, ca, Ymn[[mp + 1, npp]] / a] * L]),
{npp, Npp}]]

(*On contourne le point ω/ca.*)
Impnnpn[mp_, np_, n_, a_, ω_, ca_] := (
NIntegrate[
a ^ 2 * λ * BesselJ[mp, λ * a] ^ 2 / (γ[ω, ca, λ] * (Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2) *
(Xmn[[mp + 1, n]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2)), {λ, 0, ω / ca - I}]
+ NIntegrate[a ^ 2 * λ * BesselJ[mp, λ * a] ^ 2 /
(γ[ω, ca, λ] * (Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2) * (Xmn[[mp + 1, n]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2)),
{λ, ω / ca - I, Re[ω / ca + 50]}]
+ NIntegrate[a ^ 2 * λ * BesselJ[mp, λ * a] ^ 2 /
(γ[ω, ca, λ] * (Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2) * (Xmn[[mp + 1, n]] ^ 2 - (a * λ) ^ 2)),
{λ, Re[ω / ca + 50], Infinity}] )

Syst[mp_, N_, Npp_, a_, ca_, L_, T_, cp_, σm_, σa_, ω0_] :=
Table[KroneckerDelta[n, np] / Xmn[[mp + 1, np]] ^ 2 +

```

$$2 * \sigma a * Xmn[[mp + 1, n]] / (\sigma m * Xmn[[mp + 1, np]]) * (I * Impnnpn[mp, np, n, a, \omega\theta, ca] - 2 * Gmpnnpn[mp, np, n, Npp, \omega\theta, L, ca, a]), \{np, N\}, \{n, N\}]$$

$\sigma m = 0.2653;$

$ca = 344;$

(*Nous coupons les séries infinies après 4 termes. La décroissance des coefficients est assez prononcées pour que si peu soient suffisants. Une agmentation de quatre termes supplémentaires résulte en une multiplication par 4 de la durée du calcul, passant parfois d'environ 35 secondes à environ 160, et une amélioration du résultat de l'ordre de 10^{-2} .*)

$Np = 4;$

$Npp = 4;$

$\sigma a = 1.21;$

```

ConvergeonsVers0omega1[a_, L_, T_, mp_, \omega\theta_] := (
  cp = Sqrt[T/\sigma m];
  it = 1;
  resultats = {};
  A = Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp, \sigma m, \sigma a, \omega\theta];
  \mu = N[Eigenvalues[A]];
  vect\omega = cp / (a * Sqrt[\mu]); (*Ce sont les \omega potentiels*)
  normes = Table[Abs[\omega\theta - vect\omega[[s]]], {s, Length[vect\omega]};
  temporaire = {vect\omega[[1]], normes[[1]]};
  (*On prend celui qui est le plus proche de celui de départ. Cette
  procédure fonctionne très bien en général, surtout pour les modes (mp,1).*)
  For[s = 2, s <= Length[vect\omega], s++,
  If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect\omega[[s]], normes[[s]]}];
  \omega = temporaire[[1]];

  (*On calcul jusqu'à ce que la norme de la différence entre un \omega et le
  précédent soit assez petite ou jusqu'à ce qu'on ait fait 15 itérations. Dans
  le dernier cas, on essaie une nouvelle méthode pour converger.*)
  While[temporaire[[2]] > 10^(-5),
    A = N[Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp, \sigma m, \sigma a, \omega]];
    \mu = N[Eigenvalues[A]];
    vect\omega = cp / (a * Sqrt[\mu]);
    normes = Table[Abs[\omega - vect\omega[[s]]], {s, Length[vect\omega]};
    temporaire = {vect\omega[[1]], normes[[1]]};
    For[s = 2, s <= Length[vect\omega], s++,

  If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect\omega[[s]], normes[[s]]}];
  \omega = temporaire[[1]];

  (*Le vecteur resultats nous montre l'évolution des omega,
  des normes, de la fréquences en Hz et du temps de réverbération.*)

```

```

AppendTo[resultats, { $\omega$ , temporaire[[2]],
Re[ $\omega$ ] / (2 * Pi), -3 / (Im[ $\omega$ ] * Log[10, E])}];
it = it + 1;
If[it > 25, Break[]];
Return[resultats]

```

(*Deuxième méthode, utile pour les modes $m'=0*$)

(*La deuxième méthode a été utilisée par Rienstra et porte le nom d'itération Atkinson. Elle est utile puisque les équations ne sont pas linéaires en ω . Elle est d'ordre 3.*)

```

ConvergeonsVers0omega2[a_, L_, T_, mp_,  $\omega\theta_*$ ] :=
(
   $\eta$  = 0.5; (*Ceci est un paramètre de relaxation.*)
  cp = Sqrt[T/om];
  it = 1;
  resultats = {};
  A = Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp, om,  $\sigma a$ ,  $\omega\theta$ ];
   $\mu$  = N[Eigenvalues[A]];
  vect $\omega$  = cp / (a * Sqrt[ $\mu$ ]);
  normes = Table[Abs[ $\omega\theta$  - vect $\omega$ [[s]]], {s, Length[vect $\omega$ ]}];
  temporaire = {vect $\omega$ [[1]], normes[[1]]};

  For[s = 2, s <= Length[vect $\omega$ ], s++,
If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect $\omega$ [[s]], normes[[s]]}];
   $\omega$  = temporaire[[1]];
  A = Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp, om,  $\sigma a$ ,  $\omega$ ];
   $\mu$  = N[Eigenvalues[A]];
  vect $\omega$  = cp / (a * Sqrt[ $\mu$ ]);
  normes = Table[Abs[ $\omega$  - vect $\omega$ [[s]]], {s, Length[vect $\omega$ ]}];
  temporaire = {vect $\omega$ [[1]], normes[[1]]};
  For[s = 2, s <= Length[vect $\omega$ ], s++,
If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect $\omega$ [[s]], normes[[s]]}];
   $\omega_j$  = temporaire[[1]];
   $\omega_1$  =  $\eta \omega + (1 - \eta) \omega_j$ ;

  A = Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp, om,  $\sigma a$ ,  $\omega_1$ ];
   $\mu$  = N[Eigenvalues[A]];
  vect $\omega$  = cp / (a * Sqrt[ $\mu$ ]);
  normes = Table[Abs[ $\omega_1$  - vect $\omega$ [[s]]], {s, Length[vect $\omega$ ]}];
  temporaire = {vect $\omega$ [[1]], normes[[1]]};
  For[s = 2, s <= Length[vect $\omega$ ], s++,
If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect $\omega$ [[s]], normes[[s]]}];
   $\omega_j$  = temporaire[[1]];

```

```

 $\omega_2 = \eta \omega_1 + (1 - \eta) \omega_j;$ 
 $\omega_3 = \omega - (\omega_1 - \omega)^2 / (\omega_2 - 2 \omega_1 + \omega);$  (*Atkinson Iteration*)

AppendTo[resultats, { $\omega_3$ , Abs[ $\omega_3 - \omega_2$ ], Re[ $\omega_3$ ] / (2 * Pi), -3 / (Im[ $\omega_3$ ] * Log[10, E])}]];

(*On converge encore une fois lorsque la norme de
la différence entre un  $\omega$  et le précédent est assez petite.*)
While[Abs[ $\omega_3 - \omega_2$ ] > 10^(-5),
  A = Syst[mp, Np, Npp, a, ca, L, T, cp,  $\sigma$ ,  $\sigma_a$ ,  $\omega_3$ ];
   $\mu$  = N[Eigenvalues[A]];
  vect $\omega$  = cp / (a * Sqrt[ $\mu$ ]);
  normes = Table[Abs[ $\omega_3 - \text{vect}\omega[[s]]$ ], {s, Length[vect $\omega$ ]}];
  temporaire = {vect $\omega$ [[1]], normes[[1]]};
  For[s = 2, s <= Length[vect $\omega$ ], s++,
    If[normes[[s]] < temporaire[[2]], temporaire = {vect $\omega$ [[s]], normes[[s]]}]];
   $\omega_j$  = temporaire[[1]];
   $\omega$  =  $\omega_1$ ;
   $\omega_1$  =  $\omega_2$ ;
   $\omega_2 = \eta \omega_2 + (1 - \eta) \omega_j;$ 
   $\omega_3 = \omega - (\omega_1 - \omega)^2 / (\omega_2 - 2 \omega_1 + \omega);$ 
  AppendTo[resultats,
    { $\omega_3$ , Abs[ $\omega_3 - \omega_2$ ], Re[ $\omega_3$ ] / (2 * Pi), -3 / (Im[ $\omega_3$ ] * Log[10, E])}]];
  it = it + 1;
  If[it > 25, Break[]]];

Return[resultats] )

```


Annexe C

Tableaux et graphiques supplémentaires

TABLEAU C.1. Fréquences f_{ij} (Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale avec $T=3710$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m

$i \backslash j$	1	2	3	4
0	124,8	245,1	406,0	604,3
1	145,9	305,4	494,2	695,0
2	219,9	398,3	582,5	781,2
3	289,8	476,2	657,8	872,2
4	357,8	551,2	737,9	934,3
5	424,5	624,2	814,7	1011

TABLEAU C.2. Temps de réverbération TR_{60} (s) des modes η_{ij} de la timbale avec $T=3710$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m

$i \backslash j$	1	2	3	4
0	0,132	0,215	1,80	0,349
1	1,64	42,61	4,37	0,333
2	5,41	1,10	0,620	0,244
3	21,0	2,06	1,38	0,154
4	85,6	5,01	1,44	0,977
5	357	13,9	2,53	1,31

Parmi toutes les données que nous pouvons comparer avec [6], les deux résultats marqués en jaune dans les tableaux C.2 et C.1 ($f_{12} = 305,4$ Hz et $TR_{60} = 42,61$ s) sont les deux seuls qui ne coïncident pas du tout avec la référence. Davis obtient une fréquence ordinaire de 342 Hz numériquement et 303 Hz dans les observations. Nous sommes donc beaucoup plus près de la réalité que lui. D'ailleurs, toutes ses autres données numériques pour la fréquence sont très rarement distantes de plus de 5 Hz des observations. La donnée 342 Hz est donc

très surprenante. Toutefois, Davis obtient un TR60 de 0,2 seconde et en observe un de 0,5 seconde. Pour ce point, il se rapproche nettement plus de la réalité que notre valeur. Pour concorder avec la théorie, le temps de réverbération du mode η_{12} devrait être très petit. Nos 42,61 secondes sont nettement trop grandes.

TABLEAU C.3. Fréquences f_{ij} (Hz) associées aux modes η_{ij} de la timbale avec $T=5360$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m

m \ j	1	2	3	4
0	137,3	291,4	515,1	721,5
1	172,9	392,0	616,7	824,824
2	262,0	472,0	722,4	926,6
3	346,0	568,3	786,8	1027
4	427,7	658,8	875,9	1126,057
5	507,9	746,8	974,2	1225

TABLEAU C.4. Temps de réverbération TR60 (s) des modes η_{ij} de la timbale avec $T=5360$, $a=0,328$ m et $L=0,4142$ m

m \ j	1	2	3	4
0	0,107	0,240	0,091	0,493
1	0,906	0,234	0,109	0,700
2	2,08	0,970	0,102	0,958
3	5,71	0,845	1,35	0,670
4	16,6	1,39	2,64	0,375
5	49,3	2,68	0,926	0,244

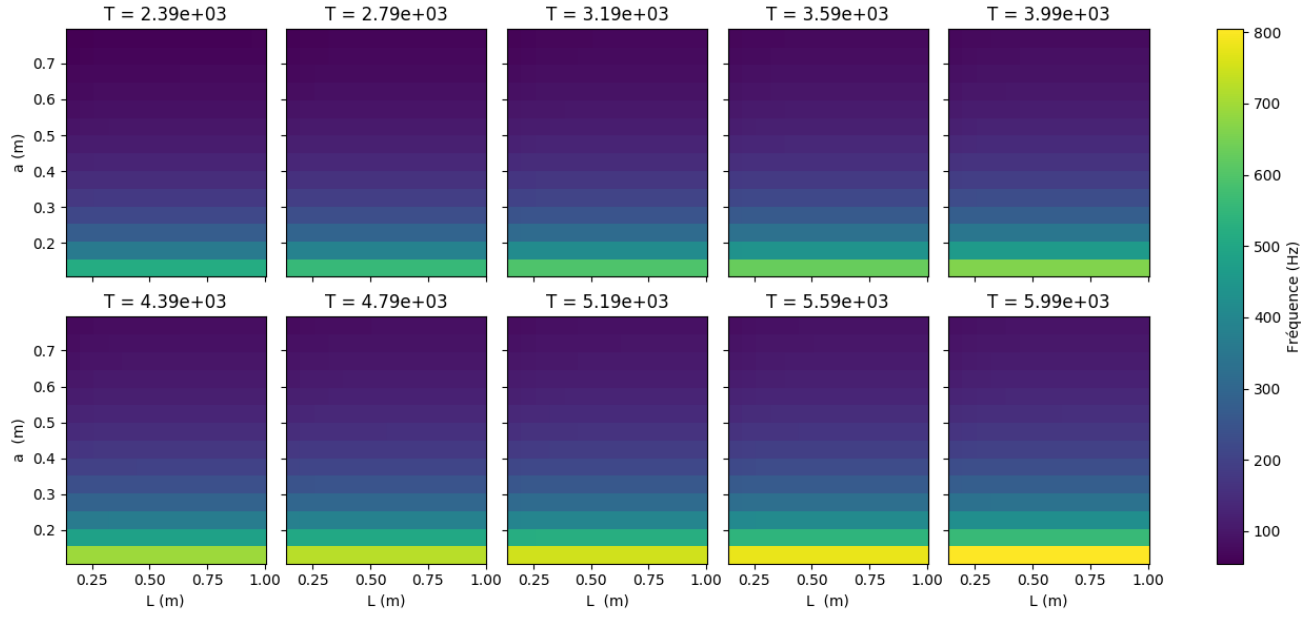


FIGURE C.1. Fréquence f_{21} (Hz) associée au mode normal η_{21} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés

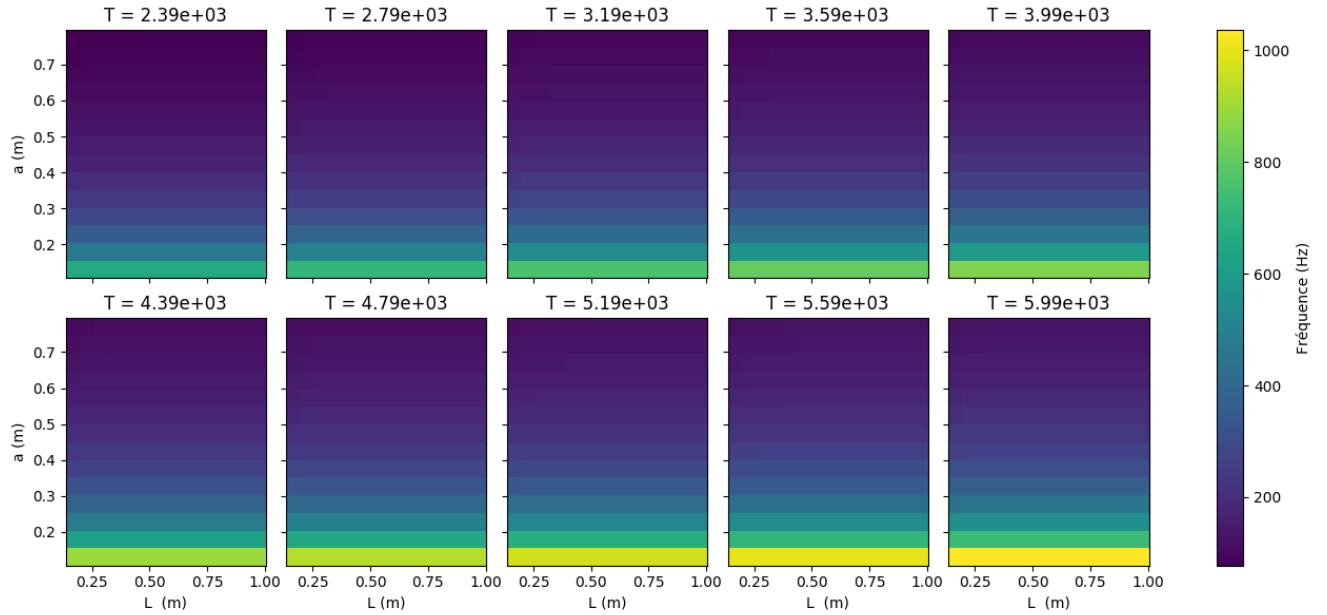


FIGURE C.2. Fréquence f_{31} (Hz) associée au mode normal η_{31} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés

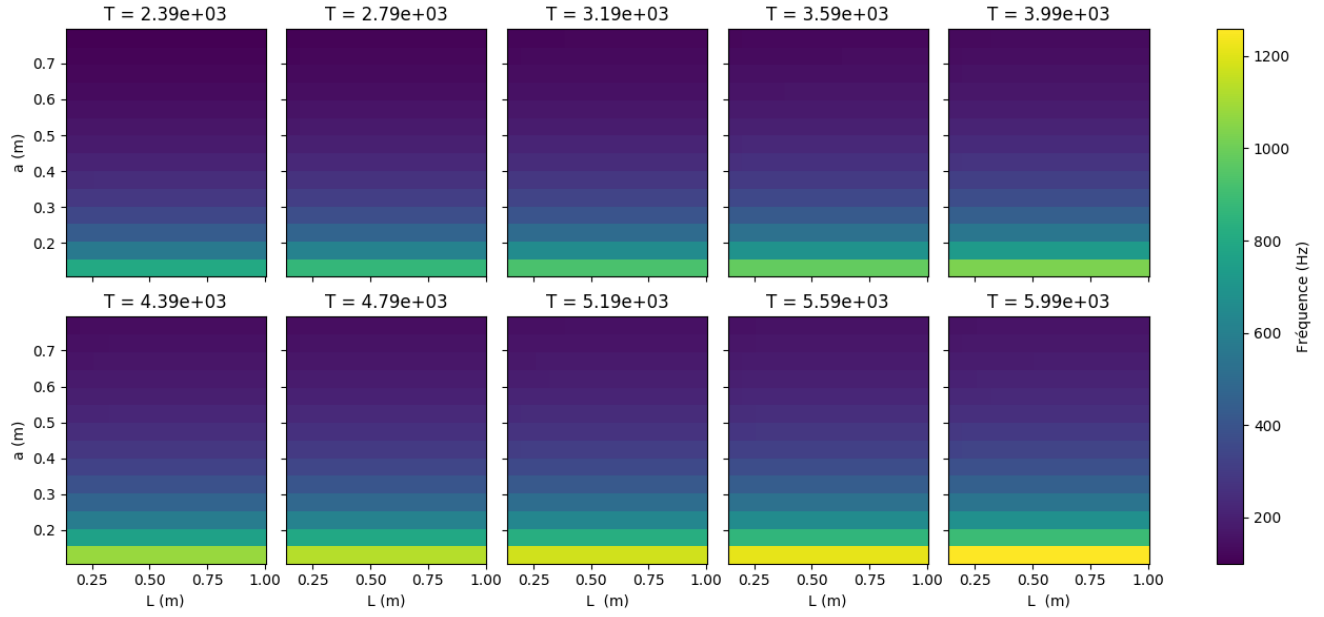


FIGURE C.3. Fréquence f_{41} (Hz) associée au mode normal η_{41} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés

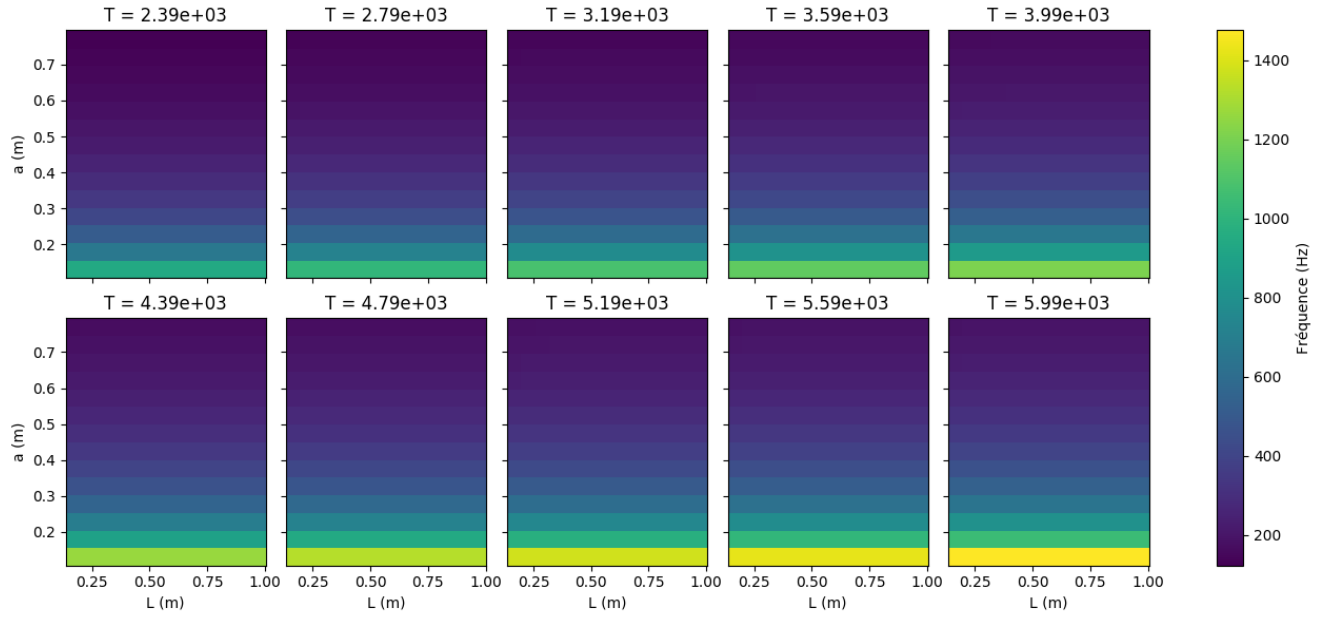


FIGURE C.4. Fréquence f_{51} (Hz) associée au mode normal η_{51} pour des trios de paramètres (a,L,T) donnés