Actualisation d'Actifs en Présence de Risque :

Le *Capital Asset Pricing Model*

Etienne Caissy

Août 2007

Université de Montréal

Rapport de recherche pour la maîtrise en sciences économiques

Sommaire

En partant du fait que la valeur actualisée nette est la meilleure méthode d'évaluer un projet. Dans ce cas, cette évaluation devient très sensible au taux d'actualisation choisi afin d'actualiser les flux monétaires composant le projet. Ce taux d'actualisation, aussi appelé le coût du capital, est déterminé selon le niveau de risque que représente ce projet. La première partie de cette recherche tente de définir intuitivement, mathématiquement et rigoureusement ce qu'est le risque d'un actif et comment sa volatilité et sa corrélation avec le risque systématique du marché l'influence. Ceci est fait principalement à partir du modèle *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). De plus, tel que Modigliani et Miller l'on déjà fait, cette recherche montre comment le risque d'un actif n'est pas influencé par sa méthode de financement sauf en situation de taxation. En deuxième temps, cette recherche critique et compare deux méthodes d'actualisation; le taux d'actualisation ajusté au risque et l'équivalent certain, tous deux basées sur le modèle CAPM. Dans certains cas, ces méthodes d'actualisation donnent des résultats différents entre elles et parfois même invraisemblables. Quelques mises en garde sont alors émissent. Toutefois, afin de déterminer la valeur présente d'un projet, ces méthodes d'actualisation demeurent des outils mathématiques rigoureux qui évitent la subjectivité des gestionnaires.

Mots clés

Risque, Capital Asset Pricing Model, Taux d'actualisation, Taux d'actualisation ajusté au risque, Équivalent certain.

Remerciements

Premièrement, je tiens à remercier fortement le Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), situé à Montréal, qui m'a fourni un support financier et logistique pour me permettre d'écrire cette recherche dans un environnement le plus stimulant possible. Ensuite, je remercie monsieur Marcel Boyer qui m'a encadré et dirigé lors de cette recherche, et qui a aussi fourni un environnement le plus stimulant possible lors de certaines journées de congé. Je remercie aussi mes collègues au CIRANO : Michael Benitah qui m'a aidé pour l'utilisation optimale du logiciel Word et de la langue française ainsi que David Jarry, Marc-André Lavoie, Christiane Moulot, Peuo Tuon et Jingmei Zhu qui m'ont suggéré des idées.

Table des Matières

Introduction

Le risque peut être un élément abstrait et subjectif pour certain. C'est pour cette raison que si l'on demande à un gestionnaire d'évaluer le niveau de risque sur un actif spécifique, celui-ci sera souvent tenté de donner une réponse arbitraire allant dans le sens de ces propres intérêts. De plus, en partant du fait que la valeur actualisée nette est la meilleure méthode d'évaluer un projet et d'obtenir une valeur permettant de le comparer à un autre projet, cette évaluation devient très sensible au taux d'actualisation choisi afin d'actualiser les flux monétaires composant le projet. Ce taux d'actualisation, aussi appelé le coût du capital, est déterminé selon le niveau de risque que représente ce projet. Cette recherche tentera d'établir une manière objective permettant de déterminer le niveau de risque d'un actif et par la suite d'actualiser sa valeur selon ce niveau de risque, sans aucune subjectivité du gestionnaire.

Cette recherche s'inscrit dans une monographie qui servira aux étudiants suivant le cours de Choix d'Investissements enseigné à l'Université de Montréal et à toutes personnes désirant améliorer ses connaissances en gestion par l'entremise des publications du Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO). Donc, un style d'écriture pédagogique est adopté au cours de cette recherche théorique faisant appelle qu'à des cas fictifs.

La première partie de cette recherche tentera de définir intuitivement, mathématiquement et rigoureusement ce qu'est le risque d'un actif et comment sa volatilité ainsi que sa corrélation avec le risque systématique du marché l'influence. Ceci sera fait principalement à partir du modèle *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). De plus, tel que Modigliani et Miller l'on déjà fait, cette recherche montrera comment le risque d'un actif n'est pas influencé par sa méthode de financement sauf en situation de taxation. En deuxième partie, cette recherche critiquera et comparera deux méthodes d'actualisation; le taux d'actualisation ajusté au risque et l'équivalent certain, tous deux basées sur le modèle CAPM. Dans certains cas, ces méthodes d'actualisation donnent des résultats différents entre elles et parfois même invraisemblables dans un monde pratique en présence d'imperfections et de distorsions. Nous allons donc émettre quelques mises en garde. Cependant, afin de déterminer la valeur présente d'un projet, ces méthodes d'actualisation demeurent des outils mathématiques rigoureux qui évitent la subjectivité des gestionnaires.

Le Coût du Capital en Présence de Risque

Partie 1

La première partie de cette recherche tente de définir intuitivement, mathématiquement et rigoureusement ce qu'est le risque d'un actif et comment sa volatilité ainsi que sa corrélation avec le risque systématique du marché l'influence. Ceci est fait principalement à partir du modèle *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). De plus, tel que Modigliani et Miller l'on déjà fait, cette recherche montre comment le risque d'un actif n'est pas influencé par sa méthode de financement sauf en situation de taxation.

THÉORIE DE L'UTILITÉ EN INCERTITUDE

Tout d'abord, établissons une hypothèse qui est fondamentale dans l'analyse de projet. Pendant tout ce document, nous ferons l'hypothèse que tous les agents sont averses au risque. Ainsi, un agent ayant le choix entre deux actifs ayant la même quantité espérée, il choisira toujours celui le moins risqué.

Par exemple, un agent a deux options, soit le choix de recevoir 100$ ou soit de tenter sa chance dans un jeu lui donnant 50% de probabilité de recevoir 200$ et 50% de probabilité de recevoir 0$, donc un gain espéré de 0,5*200$ + 0,5*0$= 100 $. Alors, nous faisons l'hypothèse que l'agent choisira toujours la première option lui donnant 100$ sans risque. De plus, même si la deuxième option lui aurait donné un gain espéré supérieur à 100$, il est fort possible que l'agent choisirait tout de même la première option du 100$ sans risque. En fait, si l'on simplifie la théorie à un stade très primaire, vous verrez que tout au long de ce document, par plusieurs différentes façons, on cherche simplement à savoir qu'elle devra être l'espérance de gain de la deuxième option pour que l'agent la choisisse. Si l'on vous donne le choix entre 100$ assuré ou l'option de jouer une seule fois un jeu de hasard avec 50% de chance d'obtenir 220$ et 50% de chance d'obtenir 0$, donc avec une espérance de gain de 0,5*220$ + 0,5*0$ = 110$. Alors, que choisiriez-vous? Le 100$ sans risque ou une espérance de gain de 110$ avec risque. La réponse n'est pas évidente et diffère d'une personne à l'autre.

Deuxièmement, nous faisons l'hypothèse que les agents ont une préférence intertemporelle pour le présent. Ainsi, pour un gain égal, un agent préférera toujours recevoir ce gain maintenant plutôt que dans le futur. Par exemple, si l'on donne encore deux options à un agent, soit de recevoir 100$ sans risque maintenant ou de recevoir 100$ sans risque dans le futur, peu importe l'intervalle de temps dans le futur, l'agent préférera toujours recevoir 100$ maintenant. Encore dans ce cas, il est intéressant de savoir de combien la deuxième option doit être supérieure à 100$ pour que l'agent décide d'attendre. Et encore une fois, ce montant, qui détermine le taux de préférence intertemporelle, peut différer d'une personne à l'autre. Cependant, il est très facile de déterminer le taux moyen pour l'ensemble des agents, c'est le taux d'emprunt ou de prêt sans risque dans une banque, par exemple le taux des bons du trésor. Ainsi, si ce taux est de 5%, un agent peut par l'entremise de cet outil financier prendre le 100$ maintenant et le prêter à la banque pour recevoir 105$ à l'année suivante. Il peut aussi emprunter 100$ maintenant et devoir rembourser 105% l'année suivante. Donc, dans ce cas, un agent sera indifférent entre les deux options de recevoir 100$ maintenant ou 105$ l'année suivante puisqu'en choisissant n'importe laquelle de ces options, il peut reconstituer l'autre par l'entremise d'un prêt ou d'un emprunt au taux sans risque à la banque. Bref, nous faisons l'hypothèse que le taux de préférence intertemporelle est positif, donc que pour le même gain, on préfère celui présent à celui futur. Et de plus, nous faisons l'hypothèse que ce taux est égal au taux de prêt ou d'emprunt sans risque par les banques.

Troisièmement, nous faisons l'hypothèse que les préférences des agents sont concaves. Donc, l'utilité marginal d'une unité supplémentaire est décroissante à mesure la quantité augmente.

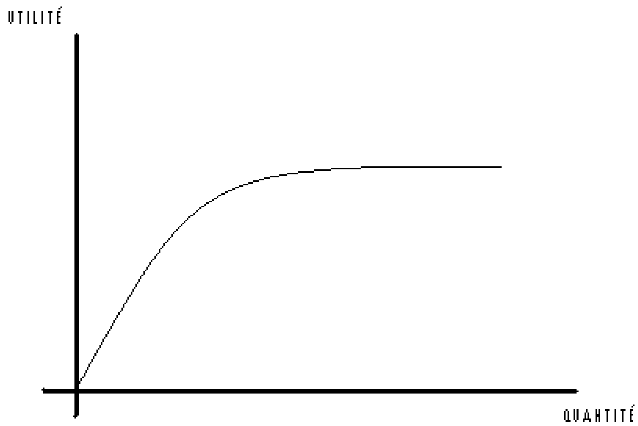

FIGURE 1.1 FONCTION D'UTILITÉ CONCAVE.

Cette hypothèse est moins cruciale que les deux premières. Toutefois, en la jumelant à l'hypothèse d'aversion pour le risque, elle est très importante pour démontrer le principe de l'équivalent certain que nous explorons en détails plus tard.

LA RELATION ENTRE LE RISQUE ET LE RENDEMENT

Intuition : Plus il y a de risque, plus le rendement est élevé

Intuitivement, un investisseur demande un rendement sur un actif proportionnel à la probabilité que l'émetteur de l'actif soit dans l'impossibilité de rembourser l'investissement initial et/ou de respecter les termes de l'entente sur les intérêts attendus sur l'actif. En d'autres termes un investisseur qui prête de l'argent à un émetteur d'obligations, d'actions ou autres, exigera un rendement plus élevé si la probabilité que l'émetteur tombe en faillite est grande. C'est ainsi que le rendement sur des obligations d'une compagnie est généralement plus élevé que sur des obligations gouvernementales, puisqu'il y a moins de chance que le gouvernement tombe en faillite. Aussi, le rendement sur des actions d'une compagnie est généralement plus élevé que sur des obligations de cette même compagnie puisque dans l'éventualité d'une faillite, la loi fait en sorte que les détenteurs d'obligations auront plus de chance de se faire rembourser alors que les détenteurs d'actions auront tout perdu l'investissement initial.

De manière plus précise, cette intuition de demander un rendement élevé s'il y a possibilité (risque) de perdre son investissement pourrait rentrer dans un concept plus général où l'on demande un rendement proportionnel à la volatilité de l'actif. La volatilité agit telle qu'une mesure statistique du risque. Pour chaque actif, en se basant sur son historique, on peut mesurer la volatilité comme étant l'écart-type du rendement de l'actif comparativement au rendement moyen de cet actif. Donc, la volatilité est établie statistiquement par l'écart-type et représente l'étendue de la dispersion attendue autour du rendement moyen de l'actif. Mais n'oublions pas que ce qui intéresse l'investisseur c'est la volatilité future et non pas celle du passé, donc l'investisseur peut baser ses anticipations de la volatilité future sur celle du passé, mais il y a un jugement final laissé à l'intuition de l'investisseur. C'est ainsi qu'un investisseur exigera un rendement moyen plus élevé sur un actif dont l'émetteur à de grande chance de faire faillite puisque dans ce cas le rendement sera très petit (voire négatif) et donc éloigné du rendement moyen et ainsi augmentera l'écart-type anticipé. De plus, même si la probabilité de faillite est nulle, la volatilité peut être tout de même élevé puisque par définition, elle ne mesure que l'écart-type du rendement face au rendement moyen, et non pas la probabilité de faillite.

Voyons mathématiquement comment ces principes sont appliqués :

Premièrement, prenons un petit échantillon du rendement de la compagnie A pour une semaine du lundi au vendredi, donc avec 5 observations (n=5).

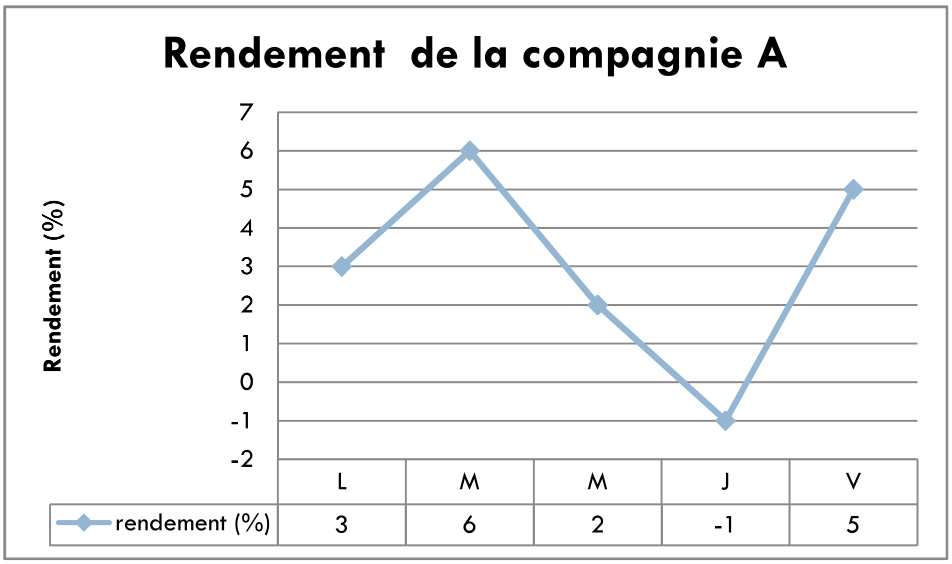

FIGURE 1.2 RENDEMENT DE LA COMPAGNIE A.

Comme vous savez sans doute, le rendement moyen de la compagnie A est simple à calculer et est donné par :

$$\overline{R_A} = \frac{3+6+2+(-1)+5}{5} = 3\% \quad (1.1)$$

L'écart-type est donné par :

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai} - \overline{R_A})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(3-3)^2 + (6-3)^2 + (2-3)^2 + (-1-3)^2 + (5-3)^2}{5}} = 2{,}45 \quad (1.2)$$

Donc, pour cet échantillon, le rendement moyen de la compagnie A est de 3% avec un écart-type de 2,45%. Donc typiquement, le rendement de l'actif est situé à une différence de 2,45% du rendement moyen de 3%.

Diminution du risque par diversification

On peut diminuer le risque d'un portefeuille d'actifs en acquérant des actifs ayant une corrélation négative entre eux. Ainsi, si l'on prend deux actifs ayant une forte volatilité et que leur rendement est corrélé négativement, c'est-à-dire que lorsque le rendement de l'un est élevé, celui de l'autre est petit et vice-versa. Donc, la combinaison des deux actifs donnera un rendement égal à la moyenne pondérée des rendements moyens des deux actifs mais la volatilité sera diminuée.

Pour l'illustrer, sur le même échantillon de temps que précédemment, prenons aussi le rendement de la compagnie B :

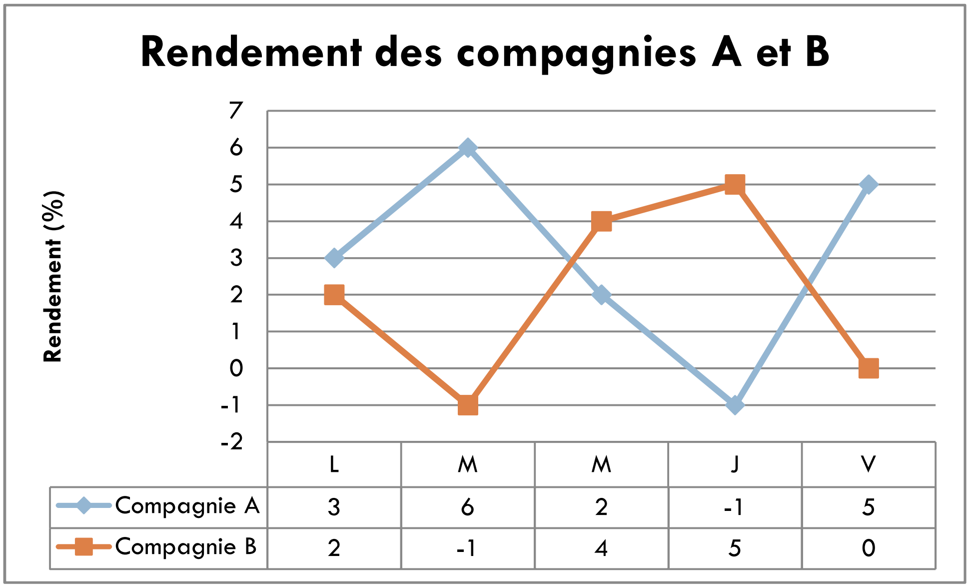

FIGURE 1.3 RENDEMENT DES COMPAGNIES A ET B.

Le rendement moyen de la compagnie B est de :

(1.3)
$$\overline{R_B} = \frac{2+(-1)+4+5+0}{5} = 2\%$$

Et l'écart-type de la compagnie B est de :

(1.4)
$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{Bi}-\overline{R_B})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(2-2)^2+(-1-2)^2+(4-2)^2+(5-2)^2+(0-2)^2}{5}} = 2{,}28$$

On peut alors calculer la covariance entre les rendements des compagnies A et B :

(1.5)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(R_A,R_B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai}-\overline{R_A})(R_{Bi}-\overline{R_B}) \\
&= \frac{1}{5}\left[(3-3)(2-2)+(6-3)(-1-2)+(2-3)(4-2)+(-1-3)(5-2)+(5-3)(0-2)\right] \\
&= -5{,}4
\end{aligned}$$

Et ensuite la corrélation entre les rendements des compagnies A et B :

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-5{,}4}{2{,}45 \times 2{,}28} = -0{,}97 \qquad (1.6)$$

La corrélation est toujours comprise entre -1 et 1. Une corrélation positive indique que les rendements des compagnies ont tendance à évoluer dans la même direction et l'inverse si la corrélation est négative.

Alors, voyons maintenant comment le risque d'un portefeuille contenant seulement des actifs de la compagnie A sera diminué si on lui ajoute des actifs d'une compagnie dont le rendement est corrélé négativement tel que la compagnie B. Prenons l'éventualité où le nouveau portefeuille sera composé de 60% d'actifs de la compagnie A (π=0,6) et 40% d'actifs de la compagnie B. Alors le rendement moyen de ce portefeuille sera :

$$\overline{R_{AB}} = \pi \overline{R_A} + (1-\pi)\overline{R_B} = 0{,}6 \times 3 + (1-0{,}6) \times 2 = 2{,}6\% \qquad (1.7)$$

Et ce qu'il y a d'intéressant, son écart-type sera de :

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \sqrt{\pi^2 \sigma_A^2 + (1-\pi)^2 \sigma_B^2 + 2\pi(1-\pi)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \\ &= \sqrt{0{,}6^2 \times 2{,}45^2 + (1-0{,}6)^2 \times 2{,}28^2 + 2 \times 0{,}6 \times (1-0{,}6) \times} (-0{,}97) \times 2{,}45 \times 2{,}28 \\ &= 0{,}63\% \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Donc pour un portefeuille diversifié composé de 60% d'actif de A et de 40% d'actif de B, le rendement moyen sera de 2,6% et l'écart-type sera de 0,63%, ce qui est moins que pour les compagnie A et B individuellement. On peut facilement observer que ce portefeuille est en effet moins volatile.

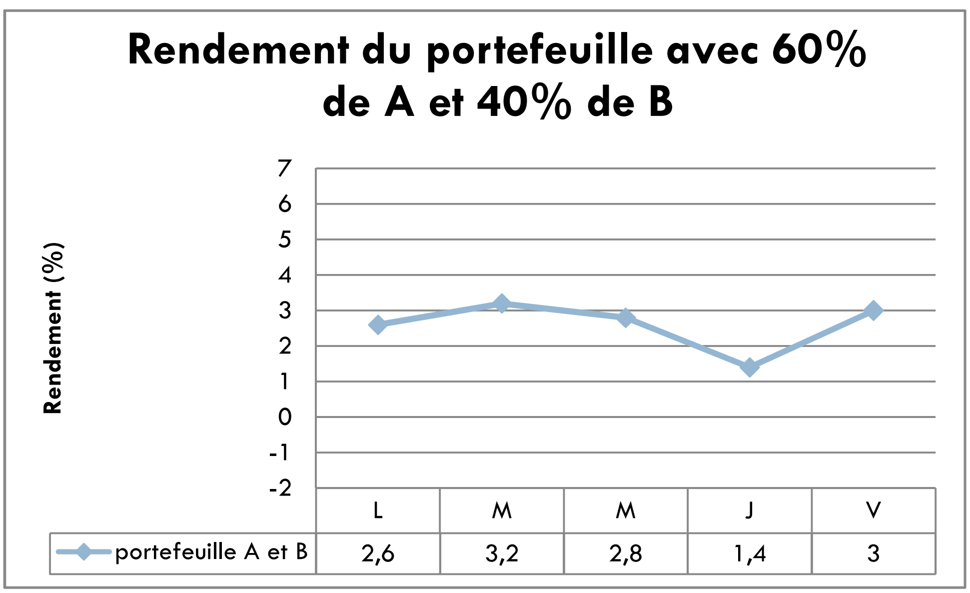

FIGURE 1.4 RENDEMENT DU PORTEFEUILLE AVEC 60% DE A ET 40% DE B.

Pour s'assurer que la formule utilisée pour déterminer l'écart-type du portefeuille est bonne, calculons l'écart-type de la manière initiale à partir des rendements du portefeuille.

$$(1.9)\quad \sigma_{AB} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{ABi} - \overline{R_{AB}})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(2{,}6-2{,}6)^2 + (3{,}2-2{,}6)^2 + (2{,}8-2{,}6)^2 + (1{,}4-2{,}6)^2 + (3-2{,}6)^2}{5}} = 0{,}63$$

Donc, pour ce portefeuille, on obtient un écart-type de 0,63%, tel que calculé précédemment lorsqu'on conserve toutes les décimales.

Cependant il faut faire attention, si l'on combine deux actifs ayant une corrélation positive, alors l'écart-type augmentera et ainsi le portefeuille deviendra plus risqué.

Dès que l'on se procure un deuxième actif corrélé négativement au premier, la diminution du risque est très grande, cependant la diminution du risque dû à l'achat d'un troisième actif corrélé négativement aux deux premiers réduit encore la volatilité de l'ensemble du portefeuille, mais de manière moins importante que l'effet dû à l'achat du deuxième actif. Ainsi, plus l'on possède d'actif corrélé négativement entre eux, plus la volatilité du portefeuille est diminuée, mais cependant la diminution marginale de la volatilité diminue à mesure que le nombre d'actifs augmente. Donc la relation entre l'écart-type d'un portefeuille avec le nombre d'actifs est représentée par une fonction inverse.

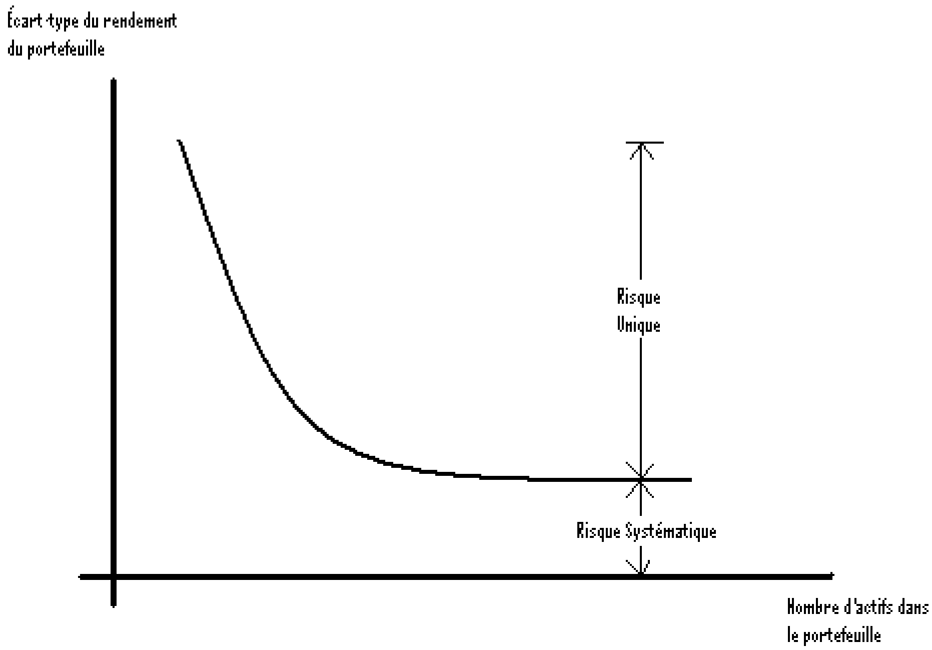

FIGURE 1.5 ÉCART-TYPE DU RENDEMENT DU PORTEFEUILLE EN LE DIVERSIFIANT.

Généralement, un portefeuille contenant 20 actifs bien diversifiés aura diminué la grande majorité du risque qui peut être potentiellement éliminé, c'est ce que l'on appelle le *risque unique*. C'est le risque qui s'applique à une compagnie directement et uniquement selon ses activités propres. Ainsi, ce risque peut être éliminé en se procurant des actifs d'une compagnie compétitrice produisant un substitut et/ou des actifs d'une compagnie qui profiterait de l'éventualité où la malchance frapperait la première compagnie. Par exemple, on peut diminuer le risque d'un portefeuille contenant des actions d'une compagnie aérienne faisant face à des difficultés financières dues à une mauvaise gestion interne en faisant l'acquisition des actions d'une compagnie aérienne compétitrice qui profiterait de la faillite de celle-ci. De plus, si l'on possède un portefeuille contenant ces actions de compagnies aériennes, il y a un risque unique dû à une possible augmentation du prix du pétrole qui ferait en sorte que les coûts en carburant des avions seraient plus élevés. On peut éliminer ce risque en ajoutant des actions de compagnies pétrolières à ce portefeuille qui eux, profiteraient de cette hausse des prix du pétrole. Donc, plus un portefeuille est diversifié, moins le risque unique sera élevé, jusqu'à son élimination complète.

Cependant, malgré une grande diversification, il est impossible d'éliminer complètement tout le risque d'un portefeuille. Ainsi, le risque du marché, aussi appelé le *risque systématique*, demeure. C'est le risque que des événements, généralement de nature macroéconomique, politique ou naturel, affectent le marché dans son ensemble et de la même façon. Par exemple, une hausse drastique et non-anticipée des taux d'intérêt, se faire attaquer par un pays ennemi ou une grande épidémie sont des exemples d'événements qui affecteraient négativement le marché dans son ensemble. Malgré quelques rares opportunistes qui pourraient en profiter, leur nombre restreint, mais surtout l'impossibilité de prévoir l'événement et qui en profitera, fait en sorte qu'il est impossible de se prémunir à l'avance contre ce genre de risque. Donc, une diversification ne pourra pas éliminer le risque de faire face à de tels événements.

Un composant du risque systématique est le *risque systémique*. C'est le risque d'un effondrement du marché dû à l'échec du système bancaire. Ainsi, la faillite d'une banque peut entraîner la détresse financière d'autres banques, mais aussi la perte de confiance des individus et des compagnies envers le système bancaire. Cela engendrera un cercle vicieux qui pourrait faire tomber les banques par effet de domino ainsi que la plupart des autres actifs. Le risque systémique ne peut pas être éliminé pas la diversification des actifs.

La frontière d'efficacité des portefeuilles

Un investisseur se préoccupe de deux éléments : le rendement et le risque. Pour le même rendement, il choisira l'actif le moins risqué, et pour le même risque, il choisira l'actif ayant le meilleur rendement. C'est ainsi que l'on définit l'efficacité d'un portefeuille, soit le meilleur rendement pour un niveau de risque donné ou le plus petit risque pour un rendement donné. Ainsi, dans un graphique du rendement en fonction du risque, tous les portefeuilles non efficaces seront inclus sous la frontière de tous les cas possibles de portefeuilles efficaces.

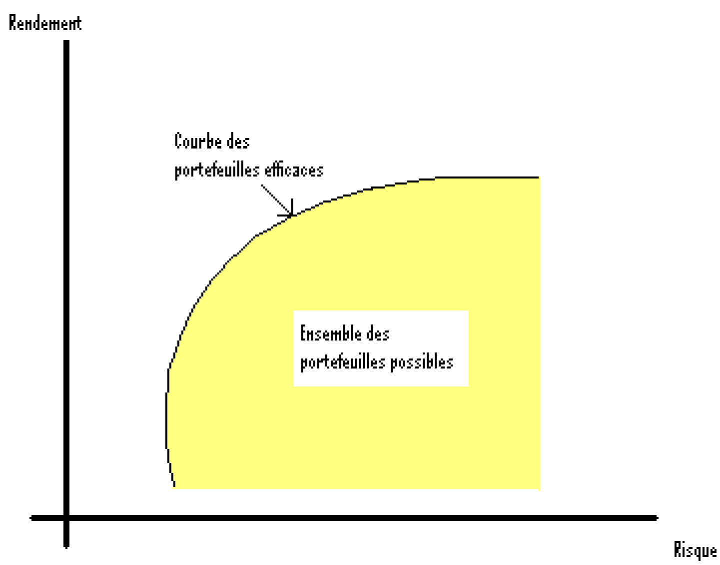

FIGURE 1.6 LA FRONTIÈRE D'ÉFFICACITÉ DES PORTEFEUILLES.

En introduisant la possibilité d'emprunt et de prêt nous pouvons dépasser cette frontière d'efficacité des portefeuilles. Premièrement, on peut déterminer le meilleur des portefeuilles parmi ceux situés sur la frontière d'efficacité. Ce sera celui tangent à la frontière d'efficacité dont la tangente passe par le taux de rendement pour un actif à risque nul, par exemple des obligations gouvernementales à court terme. Dans un cadre compétitif où l'information est complète et disponible, le meilleur portefeuille sera en fait celui du marché. Avec un montant d'argent à investir, on pourra ainsi décider de la combinaison désirée de deux actifs, soit prêt/emprunt d'obligations sans risque ou la part d'actions détenue dans un portefeuille tel que le marché. Ainsi, toutes les combinaisons possibles seront situées sur une droite. Alors le rendement devient directement proportionnel au risque.

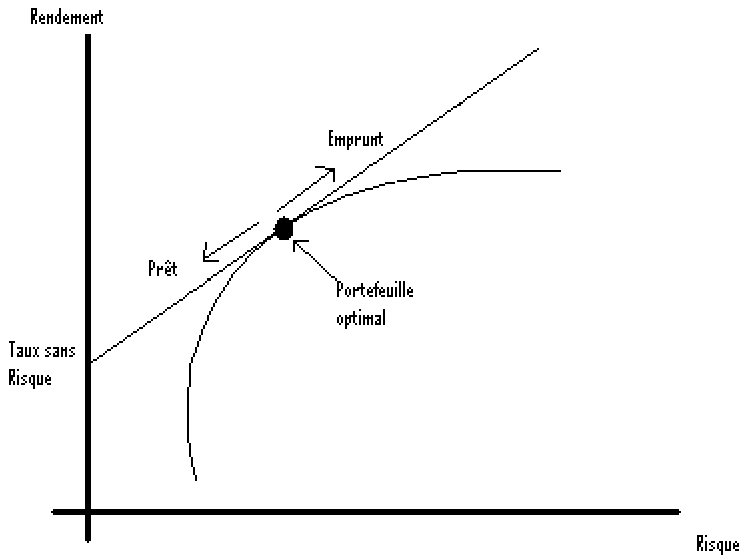

FIGURE 1.7 LE PORTEFEUILLE OPTIMAL AVEC POSSIBILITÉ DE PRÊT ET D'EMPRUNT.

MODÈLES POUR DÉTERMINER LE COÛT DU CAPITAL: CAPM ET APT

Arbitrage pricing theory (APT)

Développé premièrement par Stephen Ross en 1976, ce modèle n'est en fait qu'une régression linéaire du rendement d'un actif sur différents facteurs l'influençant. À partir de données historiques du rendement d'un actif et des données sur des facteurs souvent macroéconomiques tels que le taux d'inflation, la croissance du PIB, le prix du pétrole, le taux d'intérêt à court terme ou autres, on peut établir la relation entre le rendement de l'actif et chacun de ces facteurs. Par cette régression, pour chaque facteur, nous obtenons les paramètres (β) qui nous indiquent à partir des données historiques comment chaque facteur influence en moyenne le rendement de l'actif observé. Nous obtenons donc un modèle tel que,

(1.10) $$R_i = \alpha + \beta_1 \times \text{facteur}_1 + \beta_2 \times \text{facteur}_2 + \cdots + \beta_n \times \text{facteur}_n + \text{erreur}$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

α = ajustement lorsque tous les facteurs sont nuls

β = paramètre de sensibilité entre le facteur et le rendement de l'actif

erreur = variation du rendement de l'actif qui n'est pas dû aux facteurs observés

Une fois les paramètres (β) déterminés mathématiquement à partir des données historiques, on peut multiplier ces paramètres par la donné présente de leurs facteurs respectifs et ensuite additionner l'ajustement (α), déterminé aussi par l'historique, et nous obtenons ainsi le rendement moyen de l'actif que l'on pourrait s'attendre à partir des données présentes de chacun des facteurs. Ce rendement prédit comporte une possibilité d'erreur, cependant la valeur espérée de cette erreur est nulle. C'est-à-dire que parfois le rendement prédit peut être plus élevé que celui qui aura véritablement survenu et d'autres fois plus petit, mais en moyenne cette erreur sera nulle.

Une autre façon de voir le modèle APT est de régresser la prime de risque de l'actif, c'est-à-dire la différence entre le rendement de l'actif et le rendement sans risque, sur la prime de risque due à différents facteurs tel que précédemment. Ainsi,

(1.11) $$R_i - R_z = B_1 \times PR_1 + B_2 \times PR_2 + \cdots + B_n \times PR_n + \text{erreur}$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

R_z = rendement sans risque (obligation gouvernementale à court terme)

PR_n = Prime de risque dû au facteur n

B_n = paramètre de sensibilité entre PR_n et le rendement de l'actif

erreur = variation de la prime de risque de l'actif qui n'est pas dû aux facteurs observés

(L'espérance est nulle)

Notons premièrement que $B_n \neq \beta_n$. Donc, même si l'on régresse pour la prime de risque du même facteur sur lequel on régressait dans le modèle initial, cela ne résultera pas à des paramètres de sensibilité identiques puisque les unités utilisées sont différentes.

Deuxièmement, le modèle utilisant les primes de risque (PR_n) peut être très difficile à utiliser parce que celles-ci sont difficilement quantifiables. En effet, si l'on demande quelle est la prime de risque qu'une compagnie pétrolière fait face due à l'instabilité politique du Moyen Orient, on constate que plusieurs opinions divergent et qu'il n'existe peu de base de données historiques à ce sujet !

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Au début des années 60, trois économistes, William Sharpe, John Lintner et Jack Treynor, ont établi les fondements d'un modèle bien connu en finance sous le nom de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Bien que le modèle CAPM fût établi avant le modèle APT, on peut dire que le modèle CAPM n'est en fait qu'un cas particulier du modèle APT. En effet, à partir de données historiques, le modèle CAPM régresse la prime de risque d'un certain actif sur la prime de risque du marché. On cherche donc la relation historique, et donc celle anticipée à se poursuivre dans le futur, entre d'un côté la différence entre le rendement de l'actif et le rendement sans risque et de l'autre côté la différence entre le rendement du marché et le rendement sans risque. L'équation du modèle CAPM est donc :

(1.12) $$R_i - R_z = \beta_i(R_m - R_z) + \text{erreur}$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

R_z = rendement sans risque (obligation gouvernementale à court terme)

R_m = rendement du marché (exemple Indices Dow-Jones, S&P/TSX, ou autres)

β_i = paramètre de sensibilité entre la prime de risque de l'actif et celle du marché

$\text{erreur} =$ variation de la prime de risque de l'actif qui n'est pas dû au marché (L'espérance est nulle)

Le beta (β) d'un actif particulier est donc un paramètre de sensibilité entre le rendement de cet actif et le rendement du marché. Ainsi, d'une certaine façon le beta est une mesure de risque de l'actif. Plus le beta est élevé, plus le rendement de l'actif est élevé comparativement à celui du marché et ainsi plus l'on considère l'actif risqué.

Un actif que l'on considère sans risque tel que les obligations gouvernementales à court terme aura un beta de zéro. On peut voir dans l'équation que le côté gauche sera nul puisque que l'on prend la différence du rendement sans risque avec lui-même. Donc, il faut que le côté droit de l'équation soit aussi nul, et pour se faire, le beta doit être zéro puisque généralement la différence entre le rendement du marché et celui sans risque est positive. Un actif ayant un beta de zéro signifie donc que peu importe la prime de risque du marché, l'actif aura toujours en moyenne le même rendement que l'actif sans risque tel que les obligations gouvernementales.

Un beta situé entre zéro et un signifie que l'actif est moins risqué que le marché mais tout de même plus risqué que les obligations sans risque. Le rendement de l'actif se situe donc en moyenne entre celui des obligations sans risque et celui du marché.

Un béta égale à un signifie que l'actif à le même niveau de risque que le marché. Ainsi, le rendement de l'actif est en moyenne exactement le même que celui du marché.

Un béta plus grand que un signifie que l'actif est davantage risqué que le marché. Ainsi, le rendement de l'actif est en moyenne plus élevé que celui du marché.

Un béta négatif signifie que le rendement de l'actif est inverse à celui du marché. Le rendement de cet actif augmentera à mesure que le rendement du marché diminue.

Maintenant, essayons de comprendre exactement pourquoi le beta est une mesure de risque. De plus, essayons de comprendre plus en détails pourquoi la relation entre le rendement et le risque est directement proportionnelle lorsque l'on représente le risque par beta, comparativement à la frontière d'efficacité qui était courbée lorsque le risque était représenté par l'écart-type.

On a vu précédemment que l'investisseur va demander un rendement plus élevé si l'actif est risqué, ce que l'on représentait par une grande volatilité (écart-type). Cependant dans un marché concurrentiel, où l'on a la possibilité d'investir dans un portefeuille diversifié, représenté par le marché, et la possibilité de prêter ou emprunter à partir d'un actif sans risque, tel que des obligations gouvernementales à court terme, l'écart-type du rendement de l'actif n'est plus le seul élément influençant le risque, c'est-à-dire le beta dans ce modèle. Le risque de l'actif est aussi influencé par la corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché. Ainsi, un actif étant fortement corrélé avec le marché aura un beta plus élevé car on considère que cet actif comporte les mêmes risques systématiques que le marché. Alors qu'un actif étant moins corrélé avec le marché aura un beta plus petit puisque cet actif est moins soumis au risque systématique. De plus, un actif corrélé négativement avec le marché pourra même avoir un beta négatif, même si l'actif à une forte volatilité, puisque l'on considère que cet actif permet se couvrir (*hedging*) contre le risque systématique du marché. Alors, une manière d'interpréter le beta serait de dire qu'il est un multiplicateur du risque systématique du marché. Une autre interprétation équivalente serait de dire que le beta d'un actif est un indicateur du risque supplémentaire qu'engendrerait l'ajout de cet actif à un portefeuille typique du marché. Ainsi, si l'on prend ce portefeuille représenté par le marché, l'ajout d'un actif ayant un beta plus grand que un résultera en une augmentation de la volatilité (écart-type), et donc du risque de ce portefeuille. D'un autre côté, si l'on y ajoute un actif ayant un beta plus petit que un, la volatilité (écart-type), et donc le risque de ce portefeuille, sera diminuée.

Voyons ce raisonnement de façon mathématique. Le beta est égale à la covariance entre le rendement du marché et celui de l'actif, divisé par la variance du marché.

(1.13) $$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{var}(R_m)}$$

De plus, on sait que

$$\text{(1.14)} \qquad \operatorname{cov}(R_i, R_m) = \rho_{im}\sigma_i\sigma_m$$

Où ρ_{im} = Corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché

σ_i = Écart-type du rendement de l'actif

σ_m = Écart-type du rendement du marché

On sait aussi que

$$\text{(1.15)} \qquad \operatorname{var}[R_m] = \sigma_m^2 = (\text{Écart-type du rendement du marché})^2$$

Et donc,

$$\text{(1.16)} \qquad \beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i,R_m)}{\operatorname{var}(R_m)} = \frac{\rho_{im}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}$$

Alors pour un écart-type du marché (σ_m) constant et connu, on peut voir que le beta d'un actif dépend de deux éléments. Premièrement, de la corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché (ρ_{im}) et deuxièmement de la volatilité (écart-type) du rendement de l'actif (σ_i). Donc, dans un contexte plus généralisé où l'on compare l'actif par rapport au marché, le risque de l'actif, représenté par le beta, n'est plus uniquement relié à la volatilité du rendement de l'actif tel que supposé précédemment, mais il est aussi influencé par la corrélation entre son rendement et celui du marché.

De plus, cette relation entre le rendement d'un actif et son risque, représenté par beta, est directement proportionnelle. Alors, dans un graphique donnant le rendement en fonction du risque (beta), tous les actifs se retrouveront sur une ligne à pente positive appelé la *ligne des actifs du marché* (security market line) qui passe par le rendement de l'actif sans risque lorsque le beta est de zéro et par le rendement du marché lorsque le beta est de 1.

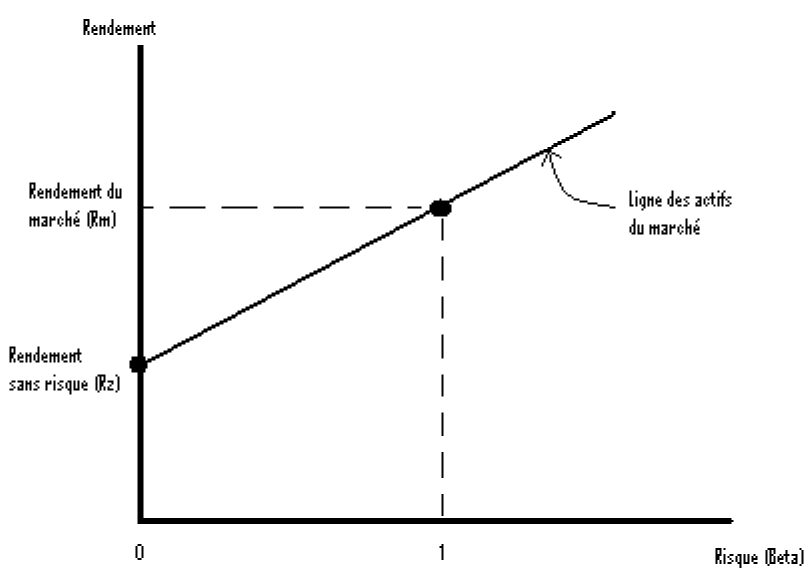

FIGURE 1.8 LIGNE DES ACTIFS DU MARCHÉ (SECURITY MARKET LINE).

En effet, un actif se retrouvant temporairement sous cette ligne, tel qu'au point A de la figure 1.9, donc donnant un rendement plus faible pour un même niveau de risque que les actifs sur la ligne, sera délaissé par les investisseurs parce que celui-ci peut facilement atteindre tous les points sur la ligne en combinant le portefeuille du marché à un prêt ou emprunt d'actif sans risque, tel que des obligations gouvernementales à court terme. Ainsi, puisque la demande pour cet actif observé est diminuée, le rendement augmentera pour rétablir l'équilibre entre l'offre et la demande et ainsi rejoindre la ligne. D'autre part, un actif se retrouvant temporairement au dessus de la ligne, tel que le point B, sera en forte demande puisqu'il donne un rendement plus élevé pour le même niveau de risque qui peut être atteint par une combinaison du portefeuille du marché à un prêt ou emprunt d'actif sans risque. Alors, le rendement s'ajustera pour rééquilibrer l'offre et la demande et revenir sur la ligne.

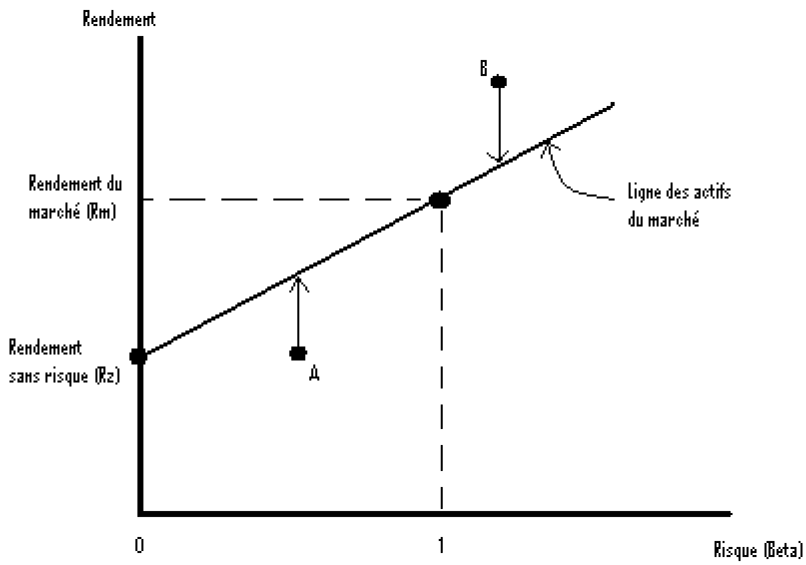

FIGURE 1.9 TOUS LES ACTIFS REJOIGNENT LA LIGNE DES ACTIFS DU MARCHÉ.

Critique du modèle CAPM

N'oublions toutefois pas que le beta est établi à partir des données historiques. Il est alors un outil adéquat pour prédire le rendement d'un actif seulement si l'intervalle de temps choisi pour les données historiques est représentative des anticipations futures. Ainsi, l'intervalle de temps choisi doit être suffisamment large pour inclure l'historique de toutes les possibilités de risque auxquelles l'actif a fait face dans le passé et que l'on croit qu'il pourra encore faire face dans le futur. D'un autre côté, on peut donc exclure de nos données historiques celles que l'on juge où le rendement de l'actif était dû à un risque qui est impossible de se reproduire dans le futur.

De plus, en observant l'équation mathématique du beta, on s'aperçoit que celui-ci dépend aussi de l'écart-type du rendement du marché. Auparavant, on a supposé qu'il était constant. Cependant, en réalité l'écart-type du marché peut varier à travers le temps. Cela ne signifie pas nécessairement que le modèle CAPM doit être complètement remis en question. Si l'on compare le beta de deux actifs différents auxquels on a utilisé le même intervalle de temps pour déterminer ces betas, cette façon de faire sera adéquate puisque l'écart-type du marché sera le même dans les deux cas. Cependant si l'on compare les betas d'une même compagnie ou de compagnies différentes à partir d'intervalles de temps différents, alors il faudra bien être conscient que les betas peuvent être affectés par des écart-types du rendement du marché différents à travers le temps, ce qui n'aurait rien à voir avec les causes fondamentales du risque de l'actif.

Une autre mise en garde est que, en théorie, le portefeuille du marché sur lequel on base le rendement du marché devrait inclure tous les actifs risqués possibles tels que les obligations, les options financières et réelles, les actions, l'immobilier, et autres. Souvent, pour simplifier le calcul, on représentera le rendement du marché par l'indice Dow-Jones ou S&P/TSX qui en fait ne regroupe qu'une partie de tous les actifs risqués possibles.

D'autre part, ce modèle ne prend pas en considération le risque dû à l'incertitude sur l'inflation future. D'ailleurs, il est souvent plus facile d'étudier les rendements nominaux plutôt que les rendements réels et en faisant cela on assume que l'inflation fût constante dans le passé et continuera à l'être au même niveau dans le futur.

LE NIVEAU DE RISQUE (BETA) ENDOGÈNE À LA FIRME

Résumé de l'article: "The value of real and financial risk management", (Boyer, Boyer, Garcia, 2004)

Nous avons vu précédemment que dans un marché concurrentiel, tous les actifs du marché se retrouveront sur la ligne des actifs du marché (security market line). En fait, une firme a la possibilité de choisir parmi les projets ou l'amalgame de projets mis à sa disposition qui se retrouvent sur ou sous la courbe d'efficacité. Une fois que la firme connait la pente de la ligne des actifs du marché, déterminée par le taux de rendement du marché et le rendement sans risque, la firme choisira lequel des amalgames de projets qu'elle exécutera afin d'optimiser la valeur de la firme. Cet amalgame de projets optimal sera le point sur la courbe d'efficacité qui est tangent à la ligne des actifs du marché. Donc, à l'optimum, tous les amalgames de projets finalement choisis par chacune des firmes seront sur la ligne des actifs du marché. On peut toutefois bien comprendre qu'un changement dans la pente de la ligne des actifs du marché changera l'amalgame de projets devant être choisi pour chaque firme.

Ensuite, la firme peut à l'aide de dérivés financiers se déplacer sur la ligne des actifs du marché et ainsi choisir le niveau de risque (son beta) qu'elle désire. Donc, la firme a la possibilité par l'entremise des dérivés financiers de choisir son niveau de risque. Son beta est donc endogène.

C'est dans cette perspective que l'article démontre, tout d'abord, comment il peut avoir des conflits parmi les gestionnaires qui pourraient empêcher la firme d'atteindre ce point optimal et ainsi de maximiser la valeur de l'entreprise. Par exemple, prenons une firme ayant deux gestionnaires, le premier se préoccupant uniquement de diminuer le niveau de risque de la firme (en gardant les flux monétaires constant), et le deuxième se préoccupant uniquement d'augmenter les flux monétaires (en gardant le niveau de risque constant). Donc, en principe, les deux gestionnaires essaient d'augmenter la valeur de l'entreprise. Cependant, ils deviendront souvent incompatibles pour atteindre le point optimal sur la courbe d'efficacité, tel qu'illustré dans le graphique suivant où A_0 représente le point optimisant la valeur de la firme :

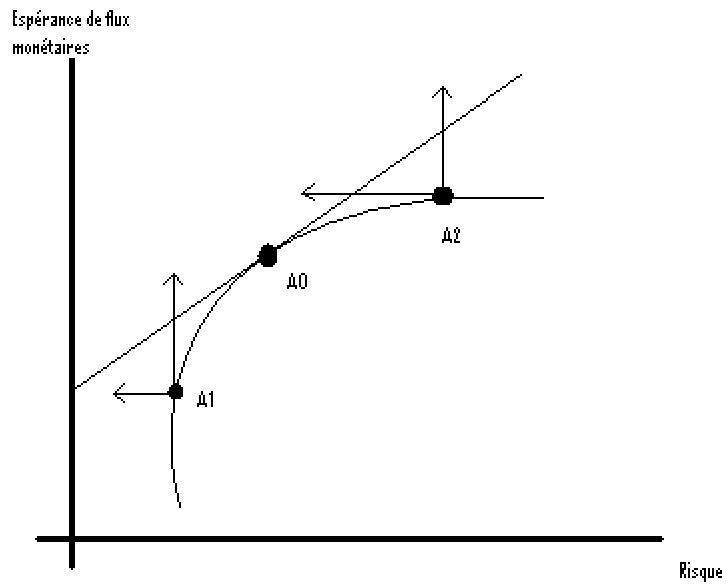

FIGURE 1.10 IMPOSSIBILITÉ DE REJOINDRE LE POINT OPTIMAL A0 DÛ AUX CONFLITS ENTRE GESTIONNAIRES.

Ainsi, si la firme se retrouve en A_1 et qu'elle s'aperçoit qu'elle optimiserait la valeur de la firme en se rendant au point A_0, alors, pour se faire, le gestionnaire se préoccupant de diminuer le niveau de risque devra aller à l'encontre de cet objectif et laisser l'entreprise augmenter le niveau de risque pour permettre à l'autre gestionnaire d'augmenter les flux monétaires et d'atteindre le point optimal A_0. De la même manière, si la firme est au point A_2, le gestionnaire se préoccupant d'augmenter le flux monétaire empêchera la firme d'atteindre le point optimal A_0 s'il maintient son objectif. Donc, on peut voir que lorsqu'une firme n'est pas à son point optimal sur la ligne des actifs du marché, cela se produisant particulièrement après le changement de la pente de la ligne, la firme doit s'assurer que tous ces gestionnaires se coordonnent pour établir la meilleure manière d'atteindre le point optimal sur la ligne des actifs du marché qui maximisera la valeur de la firme. Ce changement dans les objectifs des gestionnaires afin de se coordonner peut toutefois être très compliqué, l'article démontre alors que l'utilisation de dérivés financiers permet d'atteindre le point optimisant la valeur de la firme sans à avoir à changer les objectifs des gestionnaires. Voyons maintenant comment les auteurs s'y prennent pour le démontrer.

Tout d'abord, la courbature de la frontière d'efficacité peut être bien différente d'une firme à l'autre. Une firme ayant une frontière d'efficacité ayant une courbature très prononcée, donc très concave, sera peu influencée par un changement de la ligne des actifs du marché. En effet, cette firme changera peu son amalgame de projets choisis pour atteindre le nouveau point optimal de sa frontière d'efficacité. Par contre, une firme ayant une frontière d'efficacité moins courbée, donc faiblement concave, sera beaucoup plus influencée par un changement de la ligne des actifs du marché. Elle aura à se rendre à un nouveau point optimisant sa valeur plus éloigné de celui où elle était précédemment. Ainsi, son nouvel amalgame de projets choisis sera très différent de celui avant le changement du marché. En sachant cela, les auteurs cherchent à mesurer la concavité de la courbe d'efficacité de chaque firme. Donc, à partir d'une série de données temporelles des points optimaux choisis par plusieurs firmes, c'est-à-dire leurs flux monétaires et leur niveau de risque choisis à travers le temps, les auteurs de l'article établissent premièrement une mesure de variation de position du point optimal choisi par la firme. Ensuite, ils régressent cette variation de position sur la variation du prix du risque du marché. Le prix du risque du marché influence la pente de la ligne des actifs du marché, et il est donné par :

$$\text{(1.17)} \qquad \text{Variation du prix du risque du marché} = \frac{\text{rendement du marché} - \text{rendement d'un actif sans risque}}{\text{Écart-type du rendement du marché}}$$

On obtient alors un coefficient de régression positif, donc plus le prix du risque du marché varie, plus la position du point optimal de la firme variera aussi. Ce coefficient de régression est alors une mesure de flexibilité et par le fait même une mesure de concavité de la frontière d'efficacité de la firme. Alors, plus le lien positif est fort entre la variation de position de la firme et la variation du prix du risque du marché, plus la flexibilité de la firme est grande et moins la frontière d'efficacité est concave.

Ensuite, pour chaque firme, les auteurs prennent cette mesure de flexibilité et la régressent à son tour sur le nombre de dérivés financiers utilisés par la firme afin de se couvrir (*Hedging)* contre le risque. On trouve alors une relation positive entre ces deux éléments que l'on sépare d'ailleurs d'une industrie à l'autre. Ainsi, plus une firme est flexible, selon la définition donnée au préalable, et que sa frontière d'efficacité est faiblement concave, alors la firme aura tendance à utiliser davantage des dérivés financiers pour ce couvrir contre le risque. L'interprétation est qu'une firme ayant une frontière d'efficacité faiblement concave, sur laquelle son point optimisant sa valeur se déplace beaucoup lorsque le prix du risque du marché varie, aura tendance à faire face à davantage de conflits de coordination entre les gestionnaires, tel que l'exemple présenté plus haut. Alors, l'utilisation de dérivés financiers lui permettra d'éviter ces conflits entre gestionnaires. Pour le démontrer, prenons le graphique suivant :

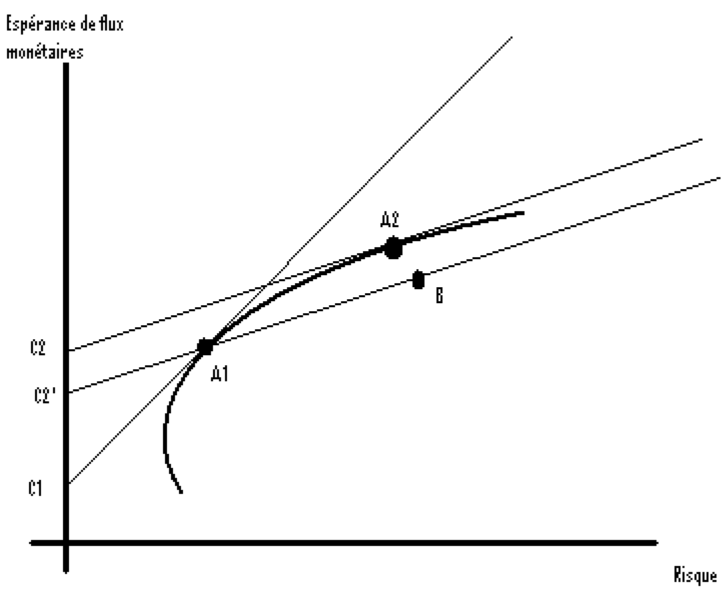

FIGURE 1.11 POUR REJOINDRE LE NOUVEAU POINT OPTIMAL A2, IL FAUT TOUT D'ABORD PASSER PAR LE POINT B AFIN D'ÉVITER LES CONFLITS ENTRE GESTIONNAIRES.

Initialement, la firme optimise sa valeur et se situe au point A1. Notons qu'à ce moment sa valeur est de C1 et ainsi la ligne des actifs du marché est en fait une ligne d'iso-valeur pour la firme. La firme pourrait utiliser des dérivés financiers pour se déplacer à tout endroit voulu sur cette ligne des actifs du marché sans affecter la valeur de la firme. Survient alors un changement du prix du risque du marché qui change la pente de la ligne des actifs du marché. Sans que la firme ne change quoi que ce soit et en demeurant au point A1, la valeur de la firme augmente à C2'. Cependant si la firme réussie à passer au point A2, la firme augmenterait sa valeur à C2. Cependant, passer directement de A1 vers A2 est impossible pour une firme ayant deux gestionnaires voulant maintenir leurs objectifs respectifs tels que précédemment et se diriger vers le nord-ouest du graphique. Alors, la firme utilisera des dérivés financiers lui permettant de se déplacer de A1 vers B, tout en demeurant sur la même ligne d'iso-valeur C2'. Une fois rendu au point B, la firme peut se rendre au point A2 et maximiser sa valeur, sans que les gestionnaires aient à changer leurs objectifs.

Donc, de cette manière, les auteurs concluent que particulièrement pour les firmes ayant une courbe d'efficacité faiblement concave, l'utilisation de dérivés financiers permet d'éviter des conflits de coordination des gestionnaires et ainsi d'optimiser la valeur de la firme beaucoup plus facilement et rapidement lorsque survient un changement dans le prix du risque du marché. Donc, indirectement, les dérivés financiers augmentent la valeur de la firme. Et bref, la firme détermine elle-même son niveau de risque qu'elle juge préférable afin d'optimiser la valeur de la firme le plus facilement possible.

STRUCTURE DU CAPITAL

Le coût du capital

Le coût du capital d'une firme est le rendement espéré de l'ensemble des actifs composant la firme. C'est un élément essentiel à l'évaluation de leurs projets puisque c'est aussi le taux d'actualisation moyen que la firme doit utiliser. Ainsi, une firme œuvrant dans un domaine risqué devra utiliser un taux d'actualisation plus élevé, ce qui fera en sorte que la firme investira principalement dans des projets à court terme, donnant de forts revenus dans un avenir rapproché. Donc, la valeur actualisée nette (VAN), qui est souvent le critère principal d'évaluation des projets, est très sensible au taux d'actualisation utilisé. Comme nous le verrons plus tard, il est souvent préférable d'utiliser un taux d'actualisation spécifique au projet et aussi spécifique aux différents flux monétaires composant le projet, c'est ce qui est appelé la valeur actualisée nette optimisée (VAN-O). Mais, premièrement, voyons comment l'on peut déterminer facilement et rapidement le taux d'actualisation moyen qu'une firme devrait utiliser pour évaluer un de ses projets typiques.

Lorsque demandé d'estimer rapidement le coût du capital de la firme, plusieurs répondront tout d'abord que c'est le coût d'opportunité. Donc, le coût du capital serait déterminé par la meilleure alternative possible. Cependant, cette définition, bien qu'intuitivement juste, est difficilement mesurable de façon rigoureuse. Alors, le modèle CAPM offre la meilleure manière de mesurer le coût du capital moyen pour l'ensemble des projets d'une firme. Donc, à partir des rendements historiques de la firme et du marché, on pourra trouver le beta de la firme. Comme vu précédemment, on multiplie ce beta par la prime de risque du marché et on additionne ce résultat au rendement sans risque. On trouve alors le rendement moyen que la firme aura à l'avenir à condition que l'échantillon historique choisi soit bien représentatif des anticipations futures. Ce rendement moyen est le coût du capital moyen. Donc, le beta de la firme est une mesure du coût du capital moyen. Si l'échantillon historique est trop petit ou non représentatif, on peut utiliser le beta de l'industrie à laquelle la firme appartient pour déterminer son coût du capital.

Une autre manière équivalente de déterminer le coût du capital d'une firme est la méthode de la somme pondérée des rendements de chaque élément composant la firme. Cette méthode est connue en anglais sous le nom de *Weighted average cost of capital* (WACC). Avec cette méthode, le coût du capital est le rendement exigé par les créanciers de la dette additionné au rendement attendu sur l'équité, où chacun des rendements est pondéré selon la proportion de la valeur de la firme que la dette et l'équité représentent respectivement. Notons que la valeur de la firme est égale à la dette additionnée à l'équité.

Par exemple, prenons une firme quelconque qui est financée avec 2000$ de dette (D) et avec 8000$ par l'émission d'actions, c'est-à-dire l'équité (E). Si la firme doit donner un rendement (R_d) de 5% aux créanciers de la dette et de 15% aux détenteurs d'actions (R_e), alors le coût moyen du capital sera de 13 % tel que calculé par la formule suivante :

$$(1.18)\quad WACC = \left(\frac{D}{D+E}\times R_d\right)+\left(\frac{E}{D+E}\times R_e\right)=\left(\frac{2000}{2000+8000}\times 5\%\right)+\left(\frac{8000}{2000+8000}\times 15\%\right)=13\%$$

Cette firme utilisera donc, en moyenne, un taux d'actualisation de 13% pour évaluer ses projets auxquels elle participe présentement. Notons tout d'abord qu'en théorie et dans un marché concurrentiel le résultat de 13%

donné par le WACC devrait être égal au rendement de l'actif calculé avec le CAPM par l'entremise du beta. Dans ce cas, on peut séparer le beta de la firme en deux nouveaux betas, celui de la dette et celui de l'équité, où chacun sera bien entendu situé sur la ligne des actifs du marché et respectera l'équation suivante :

(1.19) $$\beta_{firme} = \left(\frac{D}{D+E} \times \beta_d\right) + \left(\frac{E}{D+E} \times \beta_e\right)$$

Tout d'abord, si l'on sait que le rendement de la dette est de 5% et celui sur l'équité est de 15% tel que précédemment, et que de plus on donne que le rendement sans risque (R_z) est de 2% et que le rendement du marché (R_m) est de 10%, alors, par le modèle CAPM, on peut calculer β_d et β_e :

(1.20) $$\beta_d = \frac{(R_d - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{5-2}{10-2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

(1.21) $$\beta_e = \frac{(R_e - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{15-2}{10-2} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

Et ensuite, on peut calculer le β_{firme} :

(1.22) $$\beta_{firme} = \left(\frac{2000}{2000+8000} \times 0{,}375\right) + \left(\frac{8000}{2000+8000} \times 1{,}625\right) = 1{,}375$$

Et après, on calcule le rendement de la firme avec le modèle CAPM :

(1.23) $$R_{firme} = \beta_{firme} \times (R_m - R_z) + R_z = 1{,}375 \times (10\% - 2\%) + 2\% = 13\%$$

On trouve donc un rendement de la firme de 13%, tel que précédemment. Donc, le modèle WACC est compatible avec le modèle CAPM. Voici comment tous ces éléments sont situés sur la ligne des actifs du marché :

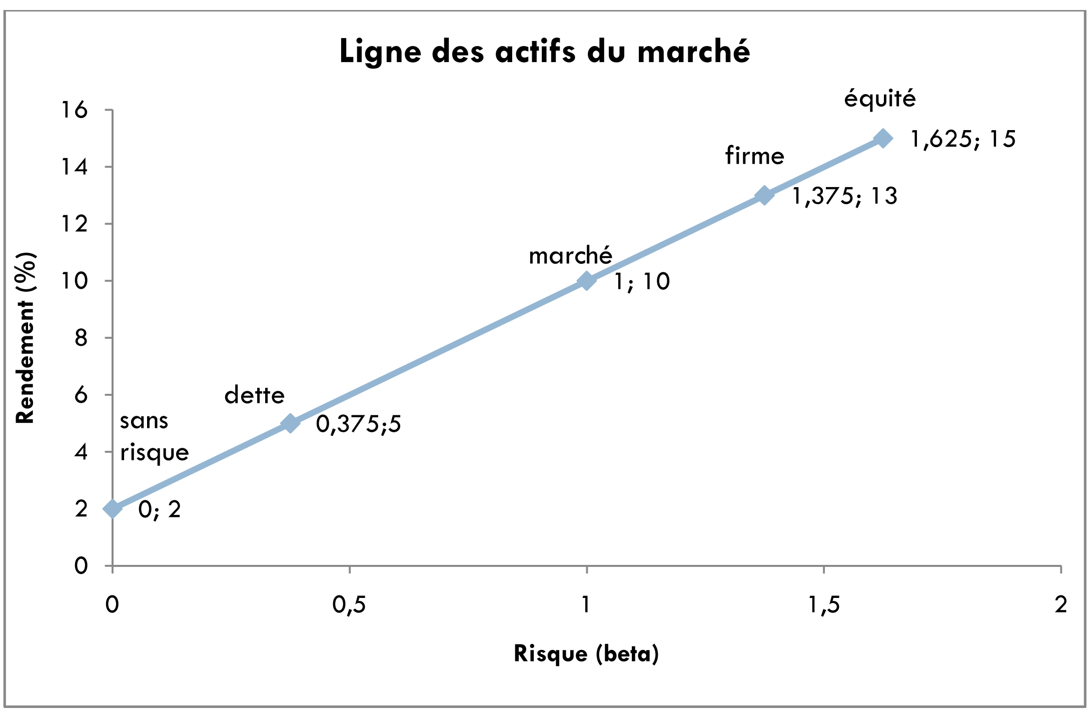

FIGURE 1.12 LIGNE DES ACTIFS DU MACHÉ

Alors, le beta de la firme est de 1,375 et son rendement est de 13%. Donc, son taux d'actualisation moyen utilisé pour les projets présentement en cours sera de 13%. Nous avons calculé ce taux d'actualisation dans l'éventualité où la firme est financée par 20% de dette et 80% en équité. Il est important de mentionner que dans un monde sans taxe, la détermination du taux d'actualisation n'est pas influencée par la méthode de financement de la firme. Donc, les trois synonymes que sont le taux d'actualisation moyen, le rendement de la firme et le coût du capital, demeureront inchangés à 13 % et avec un beta de 1,375 peu importe la méthode de financement de la firme. Voyons comment cela est possible.

Prenons la même firme qui décide d'emprunter 2000$ supplémentaires à une banque pour l'achat d'une machine. Sa dette est maintenant de 4000$ et son équité est inchangée à 8000$. Les créanciers de la dette exigeront maintenant un rendement plus élevé puisque la dette de la firme est plus grande et qu'ainsi la probabilité qu'elle ne puisse pas la rembourser augmente. Alors, par exemple le rendement demandé sur la dette pourrait augmenter de 5% à 7%. Ce chiffre peut sembler être déterminé de façon aléatoire, mais c'est en fait ce qui se produira afin que tous les actifs demeurent sur la ligne des actifs du marché comme nous le verrons. De leur côté, les détenteurs d'actions exigeront eux aussi un rendement plus élevé puisque la firme est maintenant plus endettée et que la probabilité de faire faillite est plus grande. Supposons alors que le rendement sur l'équité passe de 15% à 16%. Comme la dette et l'équité demeurent sur la même ligne des actifs du marché, nous pouvons déterminer leurs nouveaux betas respectifs avec le modèle CAPM.

(1.24) $$\beta_d' = \frac{(R_d - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{7-2}{10-2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

(1.25) $$\beta_e' = \frac{(R_e - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{16-2}{10-2} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Avec ces betas, on peut calculer le beta de la firme :

(1.26) $$\beta_{firme} = \left(\frac{D}{D+E} \times \beta_d'\right) + \left(\frac{E}{D+E} \times \beta_e'\right) = \left(\frac{4000}{4000+8000} \times 0{,}625\right) + \left(\frac{8000}{4000+8000} \times 1{,}75\right) = 1{,}375$$

Alors, le beta de la firme est de 1,375, ce qui est exactement le même qu'avant que la firme eut fait un emprunt supplémentaire. Et donc, avec le modèle CAPM, si le beta de la firme est inchangé, alors le rendement attendu de la firme sera aussi inchangé à 13%, ce qui prouve que l'endettement supplémentaire n'aura pas affecté le taux d'actualisation moyen utilisé par la firme. Cela est intuitif puisque le taux d'actualisation moyen dépend du risque moyen des projets dans lesquels la firme est impliquée et non pas de la manière que la firme est financée. Voyons comment cela se reflète sur le graphique de la ligne des actifs du marché :

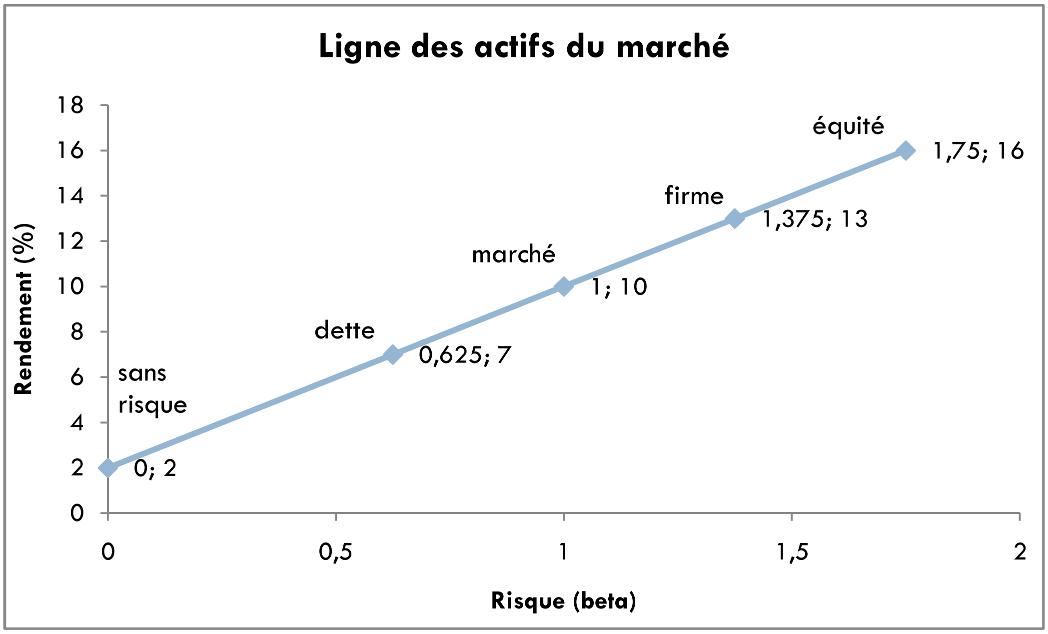

FIGURE 1.13 LIGNE DES ACTIFS DU MACHÉ APRÈS ENDETTEMENT SUPPLÉMENTAIRE

Donc, le risque et le rendement de la dette et de l'équité augmentent chacun, mais puisque la proportion de la dette est plus grande, le rendement et le risque de la firme demeurent inchangés. Ainsi, même si la firme déciderait d'émettre de nouvelles actions, afin de rembourser complètement sa dette, et donc d'augmenter son équité, alors les détenteurs des actions exigeront un rendement de 13% sur l'équité, c'est-à-dire le même rendement qu'auparavant pour la firme dans son ensemble. Alors, le coût du capital, ou le taux d'actualisation moyen, ne dépend aucunement de la proportion de la valeur de la firme provenant de l'endettement ou de l'émission d'action. Ce principe fut démontré par Franco Modigliani et Merton Miller en 1958 dans leur article *The cost of Capital, corporation finance and the theory of investment* disant principalement que, dans un marché concurrentiel et sans taxe, l'utilisation de différentes méthodes de financement de la firme ne changera rien à la valeur de celle-ci.

Cependant, en réalité le profit des firmes est taxé. Cela affecte le coût du capital de la firme. En effet, lorsqu'une firme paye les intérêts sur une dette, elle diminue son profit et donc paye moins de taxe. On dit alors que les intérêts sur la dette est une dépense déductible d'impôt. Alors, pour un dollar supplémentaire d'intérêt sur la dette que la firme doit payer, son profit après taxe sera en fait diminué que de (1- t), où (t) est le pourcentage de taxe payé sur le profit. Alors que si elle se finance en émettant de nouvelles actions, donc en augmentant son équité, le rendement que les actionnaires exigent provient des dividendes qui sont payés entièrement après les taxes sur le profit de la firme. Donc, le financement par la dette augmentera le coût du capital dans une proportion moindre que par l'émission d'actions. En incluant le pourcentage de taxe que le gouvernement impose sur les profits des firmes, la formule du WACC devient donc :

$$WACC = \left(\frac{D}{D+E} \times R_d\right)(1-t) + \left(\frac{E}{D+E} \times R_e\right) \quad (1.27)$$

Bien sûr, cette formule affecte seulement les firmes ayant des profits suffisants pour devoir payer des taxes. Mais comme une firme sans profits est vouée à disparaître, on peut conclure que cette formule s'applique à tous les firmes, mêmes si à l'occasion et temporairement ses profits sont nuls.

Alors, le principe de Modigliani et Miller disant que le coût du capital de la firme n'est pas affecté par la méthode de financement ne tient plus lorsque nous incluons les taxes. En fait, en prenant compte des taxes, une firme pourrait même diminuer son coût du capital en empruntant afin de racheter ses propres actions émises. Ceci est vrai, mais seulement jusqu'à un certain ratio de dette versus équité. Si la firme devient de plus en plus financé par la dette, alors le rendement sur la dette, ainsi que celui sur l'équité augmenteront, car la firme devient de plus en plus propice à faire faillite. Cependant, plus la firme s'endette, plus le taux d'intérêts augmentera rapidement et plus la firme devra faire face à des coûts administratifs d'une détresse financière. La firme cherche donc le niveau d'endettement optimal qui minimisera son coût du capital. Alors, elle continuera de se financer par la dette jusqu'à ce que le bénéfice marginal de la diminution du coût du capital due aux taxes soit égal au coût marginal de l'augmentation du coût du capital due aux coûts de détresse financière. Ceci est possible puisque l'augmentation des rendements sur la dette et sur l'équité, à mesure que la dette augmente, ne se fait pas de façon linéaire mais plutôt de manière exponentielle. Bref, si l'on part d'une firme étant financé entièrement par l'équité, elle pourra diminuer son coût du capital en s'endettant afin de racheter ses propres actions puisque les taxes font que l'effet de la dette sur le coût du capital est moindre que celui de l'équité. Cependant, plus la firme s'endette, plus l'augmentation marginale des rendements exigés sur la dette et l'équité croîtra rapidement, puisque la probabilité de faillite de la firme s'accroit aussi de plus en plus rapidement. Donc, la firme doit choisir le niveau de dette optimal afin de diminuer son coût du capital et de maximiser sa valeur. Voyons quelques graphiques afin de bien visualiser ces effets.

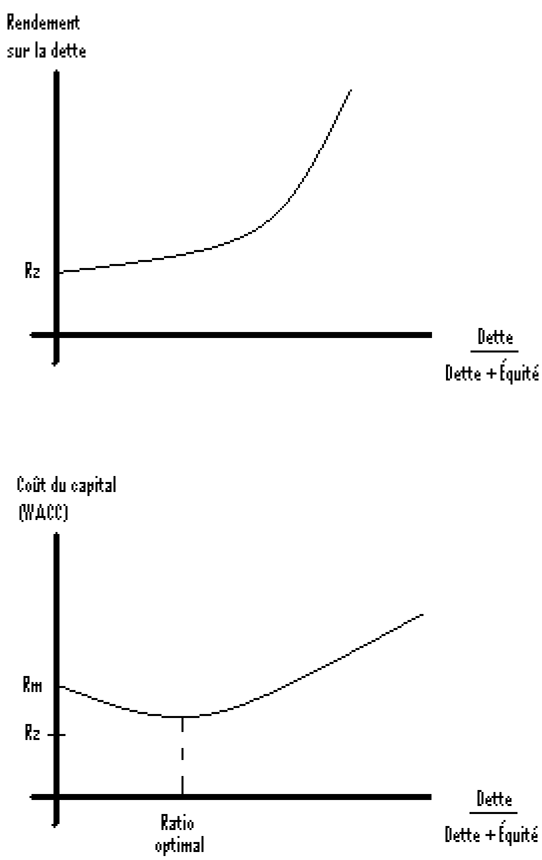

FIGURE 1.14 DIFFÉRENTS GRAPHIQUES AFIN DE VISUALISER LE RATIO OPTIMAL DE DETTE VERSUS ÉQUITÉ EN PRÉSENCE DE TAXE.

C'est pour ces raisons qu'une firme aura tendance à s'endetter afin de racheter ses actions lorsque l'économie dans son ensemble est vigoureuse et moins risquée ou s'il s'installe une plus grande tolérance au risque. De cette façon, un gestionnaire pourra aussi augmenter la valeur des actions de la firme.

Dans un monde imparfait avec de l'information asymétrique et des *Agency costs*, d'autres facteurs peuvent influencer la structure de capital d'une firme. Par exemple, la loi du moindre effort fera en sorte que souvent les gestionnaires décideront de se financer par la dette plutôt que par l'émission d'action puisqu'il en est beaucoup plus facile ainsi en termes de coût administratif. D'autre part, le niveau de dette pourra influencer les décisions d'un gestionnaire quant aux choix des projets à effectuer. Par exemple, si la firme est déjà très endettée, un gestionnaire aura tendance à choisir un projet plus risqué, même s'il peut avoir une valeur présente négative, parce que si le projet s'avère ne pas être rentable alors les créanciers de la dette absorberont presque tous les effets malheureux de ce projet non rentable alors que si le projet s'avère rentable, tous les effets positifs seront majoritairement absorbés par les détenteurs d'actions. En effet, puisque la firme est déjà très endettée, le prix de l'action est sûrement très bas, puisqu'il y a déjà une forte possibilité de faillite. Alors, si le projet s'avère déficitaire, cela pourrait causer la faillite de la firme. Ainsi, les créanciers de la dette perdront leur prêt tandis que les détenteurs d'actions ne perdront que très peu, puisque le prix de l'action était déjà très bas. D'un autre côté, si le projet s'avère rentable, les créanciers de la dette seront généralement indifférents mais les détenteurs d'actions seront contents puisque le prix de l'action augmentera face à cette sortie possible de détresse financière. Bref, un gestionnaire au service des actionnaires d'une firme fortement endettée aura tendance à jouer le *tout pour le tout* pour se sortir de ces difficultés.

Méthodes d'Actualisation en Présence de Risque

Partie 2

Dans cette deuxième partie, on comparera deux méthodes d'actualisation : le taux d'actualisation ajusté au risque et l'équivalent certain, tous deux basées sur le modèle CAPM. Nous allons aussi voir qu'il est préférable d'actualiser séparément tous les flux monétaires composant un projet selon leurs niveaux de risque respectif, c'est ce qui est appelé la valeur actualisée nette optimisée. De plus, dans certains cas, ces méthodes d'actualisation donnent des résultats différents entre elles et parfois même invraisemblables dans un monde pratique en présence d'imperfections et de distorsions. Nous allons donc émettre quelques mises en garde. Cependant, afin de déterminer la valeur présente d'un projet, ces méthodes d'actualisation demeurent des outils mathématiques rigoureux qui évitent la subjectivité des gestionnaires.

DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ACTUALISATION DE LA VALEUR D'UN PROJET

Jusqu'à présent, remarquez que lorsque l'on mentionnait le risque d'une firme, on parlait du risque moyen que représente l'ensemble des projets composant la firme. Ce taux, déterminé par les modèles CAPM et WACC, est en fait qu'une moyenne du risque de l'entreprise pondéré selon l'importance de chacun des projets composant la firme. Cependant, pour faire une évaluation adéquate d'un projet, celui-ci doit être actualisé à un taux spécifique selon le risque qu'il comporte. Plus le projet est risqué, plus le taux d'actualisation sera élevé et ainsi, les flux monétaires dans un avenir lointain n'auront que très peu d'importance. Alors, puisqu'il est facile de calculer le niveau de risque agrégé de la firme avec les modèles CAPM et WACC, alors nous trouvions le taux d'actualisation moyen utilisé pour les projets que la firme effectue présentement. Donc, si la firme désire évaluer un projet potentiel, le taux d'actualisation moyen est seulement recommandé si ce projet comportera le même niveau de risque que la moyenne des projets dont la firme effectue présentement. Nous voyons donc que déterminer le taux d'actualisation à partir des modèles CAPM et WACC n'est qu'un moyen rapide d'approximer le taux à utiliser. Cependant, afin de déterminer le taux d'actualisation adéquat pour le projet, où ce taux est détermin selon les caractéristiques propres au projet et non pas à l'ensemble de la firme, quelques méthodes s'offrent à nous. Premièrement, comme on l'a vue, à partir du modèle CAPM et si le projet comporte le même risque que ceux composant la firme, on peut utiliser le *taux d'actualisation ajusté au risque*, ou en anglais le *risk ajusted discount rate* (RADR). Deuxièmement, on peut pousser ce concept un peu plus loin et utiliser un taux d'actualisation ajusté selon le risque de chacun des flux monétaires du projet. Ce principe est en fait l'essentiel de ce que l'on appelle la *valeur actualisée nette optimisée* (VAN-O). De cette façon, en combinant les méthodes RADR et VAN-O, nous obtiendront un taux d'actualisation ajusté au risque *de chacun des flux monétaires*. Enfin, une autre méthode est le principe de *l'équivalent certain* (EC) dans lequel on remplace chacun des flux monétaires risqués du projet par un montant sans risque qui lui serait équivalent en termes de préférence, ensuite on actualise ce montant au taux de rendement sans risque. Voyons ces méthodes plus en détails.

TAUX D'ACTUALISATION AJUSTÉ AU RISQUE (RADR)

Cette méthode consiste simplement à actualiser les flux monétaires au taux de rendement de la firme tel que déterminé à partir du modèle CAPM. Bien entendu, cette méthode simpliste demande des hypothèses fortes pour demeurer adéquate. Il faut tout d'abord que le risque du projet que l'on désire évaluer soit le même que le risque moyen de la firme tel que déterminé par le modèle CAPM basé sur un échantillon des rendements passés. Ensuite, il faut que le risque des flux monétaires composant le projet soit aussi tous égaux au risque déterminé par le modèle CAPM. Autrement dit, il faut que les coûts comportent le même niveau de risque que les revenus et de plus que tous aient le même risque que la moyenne des projets présents et passés composant la firme. Comme vous pouvez imaginer, ces hypothèses sont rarement complètement respectées, cependant cette méthode demeure un moyen rapide d'estimer la valeur présente d'un projet, particulièrement à un stade initial où l'on ne connaît pas encore le risque approprié de chacun des flux monétaires. Voyons mathématiquement comment cette méthode fonctionne lorsqu'on utilise le modèle CAPM pour la déterminer.

Tout d'abord définissons le rendement du projet par :

$$R_{j,t} = \frac{V_{j,t}}{V_{j,t-1}} - 1 \tag{2.1}$$

Où V représente la valeur du projet définie par l'ensemble des flux monétaires du projet à travers le temps.

Souvenons-nous du modèle CAPM :

$$E[R_{j,t}] = R_z + \beta_j (R_m - R_z) = R_z + \frac{\text{cov}[R_{j,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} \times (R_m - R_z) \tag{2.2}$$

Alors, si l'on prend l'espérance de la valeur future du projet, on peut égaliser ces deux équations du rendement :

$$E[R_{j,t}] = \frac{E[V_{j,t}]}{V_{j,t-1}} - 1 = R_z + \beta_j (R_m - R_z) = R_z + \frac{\text{cov}[R_{j,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} \times (R_m - R_z) \tag{2.3}$$

Que l'on peut ensuite réarranger pour donner la valeur présente du projet à partir de l'espérance de la valeur future que l'on actualise au taux de risque déterminé par le modèle CAPM :

$$V_{j,t-1} = \frac{E[V_{j,t}]}{1 + R_z + \beta_j (R_m - R_z)} = \frac{E[V_{j,t}]}{1 + R_z + \frac{\text{cov}[R_{j,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2}(R_m - R_z)} \tag{2.4}$$

Et de la même façon, de manière générale si l'on désire l'évaluer à n périodes plus tôt :

$$V_{j,t-n} = E[V_{j,t}] \left[\frac{1}{(1 + E[R_{j,t}])(1 + E[R_{j,t-1}])(1 + E[R_{j,t-2}]) \ldots (1 + E[R_{j,t-n}])} \right] \tag{2.5}$$

Et si l'on assume que l'espérance du rendement du projet sera la même pour toute les périodes futures et donc, que le taux de rendement sans risque ainsi que la covariance entre le rendement de l'actif et celui du marché demeurent constants, alors:

(2.6) $$V_{j,t-n} = \frac{E\lfloor V_{j,t} \rfloor}{\left[1+E\left[R_{j,t}\right]\right]^n} = \frac{E\lfloor V_{j,t} \rfloor}{\left[1+R_z+\beta_j(R_m-R_z)\right]^n} = \frac{E\lfloor V_{j,t} \rfloor}{\left[1+R_z+\frac{\text{cov}[R_{j,t},R_{m,t}]}{\sigma_m^2}(R_m-R_z)\right]^n}$$

De façon littéraire, on pourrait réécrire cette équation de la méthode RADR par :

(2.7) $$\text{Valeur au temps t-n du projet}= \frac{\text{l'espérance de la somme des flux monétaires au temps } t}{(1+\text{taux sans risque}+\text{prime de risque de la firme})^n}$$

Donc, cette méthode actualise tous les flux monétaires composant le projet au taux de risque de la firme déterminé par le modèle CAPM.

Si l'hypothèse disant que le projet évalué doit avoir le même risque que l'ensemble des projets de la firme est trop forte et nous empêche d'évaluer de façon adéquate le projet, il existe une alternative. Afin de déterminer le risque plus représentatif du projet, on pourrait plutôt utiliser le modèle CAPM à partir d'un échantillon différent qui pourrait être par exemple, les rendements des projets semblables, même ceux d'autres firmes, si on les connait. Donc, le modèle RADR peut être une excellente méthode d'actualisation des flux monétaires du projet si le taux d'actualisation, tel que déterminé par le modèle CAPM, provient d'un échantillon de projets représentatifs à celui que l'on désire évaluer et si tous les flux monétaires comportent le même risque.

Une autre mise en garde très importante afin de bien utiliser la méthode RADR est par rapport à la covariance entre le rendement du projet et celui du marché. En théorie, cette covariance devrait être déterminée au même moment que les flux monétaires du projet que l'on veut actualiser. Alors, en théorie on devrait déterminer une covariance entre le rendement futur du projet et le rendement futur du marché. On peut alors estimer cette covariance en se basant sur nos prédictions de ces rendements futurs. Cependant, cela entraîne un problème de circularité dans la formule du RADR. En effet, si l'on cherche la covariance entre le rendement du projet et celui du marché, on doit connaître la valeur du projet maintenant afin d'estimer son rendement futur. Cependant, la valeur du projet maintenant est exactement ce que l'on cherche à déterminer par cette méthode.

Pour remédier à ce problème de circularité et à celui d'incertitude de nos prédictions futures, on peut utiliser plutôt la covariance entre les rendements passés du projet et les rendements passés du marché. Il peut être facile de déterminer cette covariance si le projet (ou le flux monétaire) est simplement le prix d'un bien, ainsi on connaîtra bien l'historique du prix de ce bien. Cependant, déterminer cette covariance des rendements passés peut être beaucoup plus difficile, voir impossible. Si l'on a un projet tout nouveau et jamais réalisé. À ce moment, si possible, on peut utiliser des projets lui ressemblant comme valeur proxy.

De plus, si le rendement du marché varie peu et/ou que le rendement du projet varie beaucoup, cela résultera en une prime de risque élevé pour ce projet. Ceci est tout-à-fait normal. Cependant, cette méthode de calcul du RADR, basée sur le modèle CAPM, pourra donner une prime de risque très élevée résultant à une valeur présente du projet très minime, qui en fait pourra même être beaucoup trop minime pour que celle-ci semble vraisemblable. Il faut donc être bien prudent dans ces cas.

Aussi, si la covariance entre le rendement du projet et le rendement du marché est négative, alors la prime de risque du projet sera négative, ce qui pourrait alors entraîner que la valeur actualisée d'un revenu soit plus grande que la valeur espérée future, ce qui semble absurde. En fait ces résultats aux allures douteuses, deviennent vraisemblables dans un contexte général du modèle CAPM, lorsque l'on a la possibilité de transiger, sans friction, tous les flux monétaires composant le projet tel qu'un actif individuel à la bourse. Ce principe n'est évidement pas observé de façon parfaite en réalité, mais il demeure tout de même préférable pour les firmes de détenir un projet ayant des revenus négativement corrélés au marché puisque ceux-ci permettront à la firme de diminuer son exposition au risque systématique et systémique.

Comme vous voyez, la méthode de calcul RADR à partir du modèle CAPM est truffée d'obstacles et d'inconvénients et donne parfois des résultats qui semblent invraisemblables en pratique. C'est pour ces raisons que plusieurs gestionnaires estimeront directement la prime de risque du projet plutôt que de tenter de la calculer par le modèle CAPM qui à son tour se base sur des prévisions de rendements futurs. Donc, pour actualiser les flux monétaires d'un projet, l'estimation directe de la prime de risque sera une méthode très rapide et souvent jugée plus adéquate que celle des calculs basés sur le modèle CAPM. Cependant, laisser aux gestionnaires le loisir d'estimer la prime de risque pourra entraîner des différences d'opinions, même minimes, qui pourraient avoir une grande influence sur la valeur présente du projet. Donc, certains gestionnaires seront tentés d'estimer une prime de risque qui sera dans leurs intérêts. C'est pour cette raison que malgré toutes les embûches possibles, la méthode RADR calculée à partir du modèle CAPM peut demeurer une façon rigoureuse de déterminer la valeur présente d'un projet.

ÉQUIVALENT CERTAIN (EC)

Une autre méthode d'évaluer et d'actualiser la valeur d'un projet est celle de l'équivalent certain. Le principe est de déterminer le montant sans risque qu'un agent serait prêt à accepter plutôt que de tenter sa chance entre diverses possibilités de gain et d'ensuite actualiser cet équivalent certain au taux sans risque. Ce principe assume que les agents ont une fonction d'utilité concave et qu'ils sont averses au risque. Donc, l'équivalent certain est le montant sans risque qu'un agent serait indifférent d'accepter plutôt que de l'espérance de gain comportant un risque.

Par exemple, avec l'aide de la Figure 2.1, prenons un agent ayant une fonction d'utilité concave telle que dessinée. Il vient de gagner à la loterie et on lui donne l'option de recevoir sans risque 13 millions$ ou d'encore tenter sa chance une seule fois dans un jeu lui donnant soit 10 millions$ ou 30 millions$ avec chacune une probabilité de 50%, donc une espérance de gain de 20millions$. L'agent ayant cette fonction d'utilité sera indifférent entre les deux options, puisque les 13 millions$ lui procurent la même utilité que l'utilité espérée qu'il aurait en jouant le jeu. On peut voir, sur l'axe vertical que l'utilité de 13 millions$ est exactement à mi-chemin entre l'utilité de 10 millions$ et de 30 millions$ puisque chacun a une probabilité de 50%. Sur l'axe horizontal, la différence entre le gain espéré et l'équivalent certain représente la prime de risque associée à ce jeu.

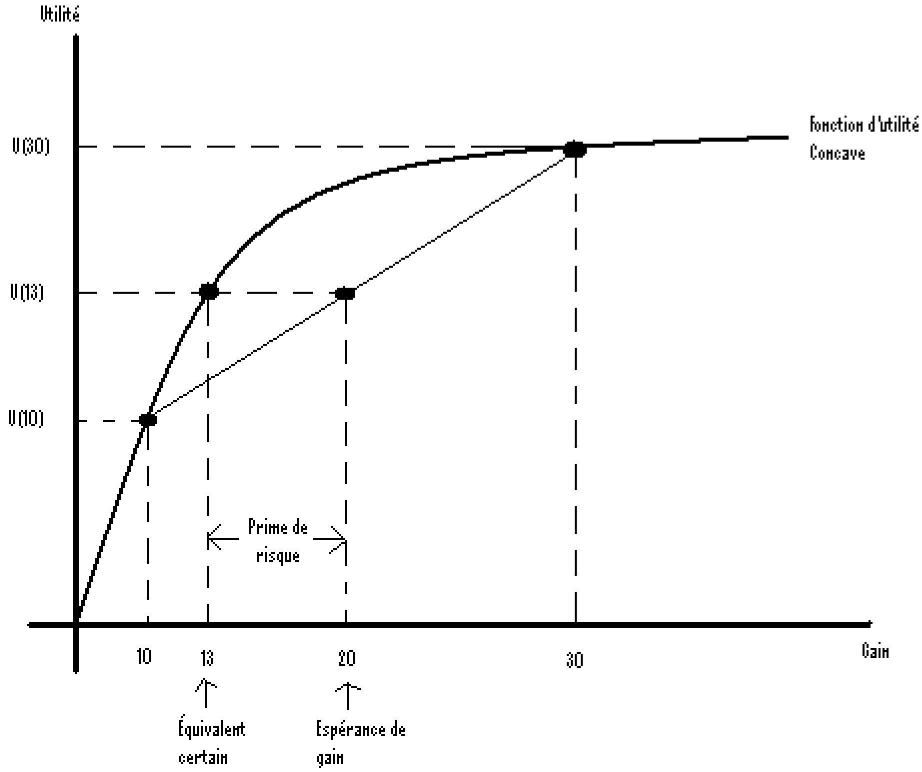

FIGURE 2.1 ÉQUIVALENT CERTAIN SUR GRAPHIQUE DE LA FONCTION D'UTILITÉ.

Si nous changeons les probabilités de gain à 75% de chance d'avoir 30 millions$ et 25% de chance d'obtenir 10 millions$, alors l'équivalent certain augmentera jusqu'à 17 millions$ dans ce cas, tel que l'on peut voir sur la Figure 2.2.

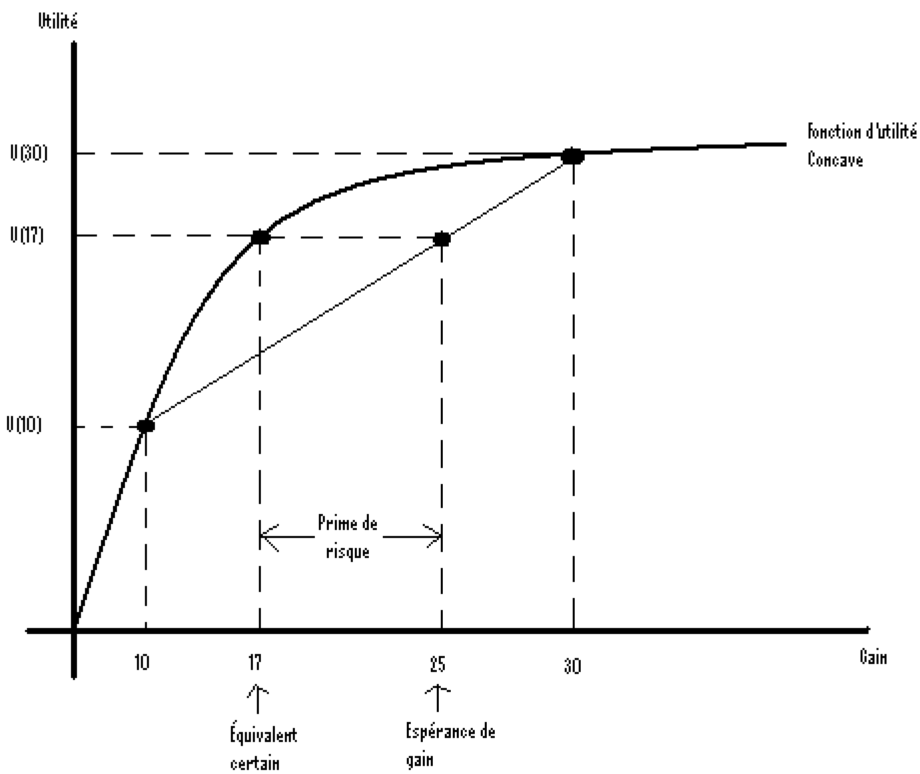

FIGURE 2.2 ÉQUIVALENT CERTAIN SUR GRAPHIQUE DE LA FONCTION D'UTILITÉ AVEC NOUVELLE PROBABILITÉ DE GAIN.

Puisque l'équivalent certain est un montant sans risque que l'on juge de préférence équivalente à une espérance de gain risqué, alors on peut actualiser l'équivalent certain au taux sans risque pour déterminer la valeur actuelle d'une espérance de gain futur. Bien entendu, cette méthode s'applique aussi aux pertes. Cependant, encore une fois, pour être appliqué à l'évaluation de projet, cette méthode demande premièrement une analyse rigoureuse des possibilités et des probabilités des flux monétaires afin de trouver son espérance et deuxièmement une façon adéquate de trouver l'équivalent certain selon les préférences des agents impliqués. Pour remédier à ces problèmes, le meilleur moyen d'y parvenir est lorsqu'il existe un marché pour les contrats à l'avance (*forward contract*). En effet, on peut, par exemple, payer aujourd'hui une quantité de pétrole que l'on se fera livrer à une date précise dans le futur. Alors, le prix de cette transaction sera l'équivalent certain actualisé du prix espéré à cette date de livraison en prenant en considération les dividendes de convenance (*convenience dividend*). Ceux-ci représentent tous les coûts et les avantages de ne pas avoir en sa possession ce pétrole dès maintenant, tel que l'entreposage ou l'opportunité de le raffiner. Aussi, il existe parfois un marché pour les contrats futurs (future contract) où par exemple, on s'entend maintenant pour une date de livraison future ainsi que le montant payé lors de la livraison. Nous obtenons ainsi l'équivalent certain que l'on peut actualiser au taux sans risque.

S'il n'existe pas de marché pour les contrats à l'avance ou futurs, ou si l'on ne connaît pas bien la courbe d'utilité de l'agent (ce qui est fort probable), on peut utiliser le modèle CAPM pour déterminer l'équivalent certain.

Continuons avec l'exemple du pétrole, en définissant tout d'abord le rendement du prix (P) du pétrole par :

$$R_{p,t} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{2.8}$$

Souvenons-nous que par le modèle CAPM, on peut trouver l'espérance de rendement:

$$E[R_{p,t}] = E[R_z]_t + \beta_p E[R_m - R_z]_t = E[R_z]_t + \frac{\operatorname{cov}[R_{p,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t \tag{2.9}$$

Alors, si l'on prend l'espérance du rendement du prix du pétrole, on peut égaliser ces deux équations du rendement :

$$E[R_{p,t}] = \frac{E[P_t]}{P_{t-1}} - 1 = E[R_z]_t + \frac{\operatorname{cov}[R_{p,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t \tag{2.10}$$

Puisque le prix du pétrole aujourd'hui ($t-1$) est connu, on peut utiliser les propriétés de la covariance pour obtenir :

$$\operatorname{cov}[R_{p,t}, R_{m,t}] = \operatorname{cov}\left[\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, R_{m,t}\right] = \operatorname{cov}\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}, R_{m,t}\right] = \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}]}{P_{t-1}} \tag{2.11}$$

Et ensuite l'insérer dans l'équation précédente :

$$\frac{E[P_t]}{P_{t-1}} = 1 + E[R_z]_t + \frac{\frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}]}{P_{t-1}}}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t \tag{2.12}$$

Que l'on peut réarranger pour donner :

$$E[P_t] = (1 + E[R_z]_t)P_{t-1} + \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t \tag{2.13}$$

Et encore réarranger pour obtenir l'équivalent certain de l'espérance du prix du pétrole (tout le numérateur) actualisé au taux sans risque :

$$P_{t-1} = \frac{E[P_t] - \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t}{1 + E[R_z]_t} \tag{2.14}$$

De façon littéraire et simple, on pourrait réécrire l'équation de l'équivalent certain par :

$$\text{Valeur d'un actif au temps } t-1 = \frac{\text{Espérance de la valeur de l'actif au temps } t - \text{prime de risque de l'actif}}{1 + \text{taux sans risque}} \tag{2.15}$$

Pour déterminer l'équivalent certain de l'espérance du prix du pétrole à plusieurs périodes dans le futur, alors il faudra soustraire une prime de risque basée sur la covariance du prix et du rendement du marché à chacune des périodes, ainsi pour 2 périodes, on aura :

$$P_{t-2} = \frac{E[P_t] - \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t - \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t-1}]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_{t-1}}{(1 + E[R_z]_t)(1 + E[R_z]_{t-1})} \tag{2.16}$$

Alors, dans un cas général, où l'on supposerait que la prime du rendement du marché se maintient constante :

$$E[R_m - R_z]_{t-1} = E[R_m - R_z]_t \qquad \forall t \tag{2.17}$$

Et que le taux sans risque demeure aussi constant :

$$E[R_z]_{t-1} = E[R_z]_t \qquad \forall t \tag{2.18}$$

Nous pourrions trouver l'équivalent certain actualisé de l'espérance du prix (P_t) à n périodes dans le futur de la façon suivante :

$$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - \left(\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t}] + \operatorname{cov}[P_t, R_{m,t-1}] + \ldots + \operatorname{cov}[P_t, R_{m,t-n}]\right)\frac{E[R_m - R_z]}{\sigma_m^2}}{(1 + E[R_z])^n} \tag{2.19}$$

Et si l'on assume que la covariance entre le prix et le rendement du marché est constante pendant toutes les périodes que l'on actualise, par exemple, si l'on prenait la covariance historique et que l'on assume qu'elle restera ainsi dans le futur, alors on peut actualiser notre espérance de prix de la manière suivante :

$$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - n \times \operatorname{cov}[P_t, R_m]\frac{E[R_m - R_z]}{\sigma_m^2}}{(1 + E[R_z])^n} \tag{2.20}$$

Comme pour la méthode RADR, notons qu'il peut être difficile de déterminer la covariance entre le prix futur et le rendement du marché futur. Alors, si possible, on pourra l'estimer à partir d'un échantillon historique représentatif ou de nos anticipations futures du prix et du rendement du marché.

Il est extrêmement important de noter que pour calculer l'équivalent certain d'un flux monétaire nous avons besoin de la covariance entre la valeur nominale de ce flux et le rendement du marché, tandis que pour la méthode RADR, nous prenions la covariance entre le rendement du flux monétaire et le rendement du marché. De cette façon, nous évitons le problème de circularité qui faisait défaut dans la méthode RADR.

De plus, pour donner des résultats potables, il faut que les prix dans l'échantillon déterminant la covariance soit de même magnitude que le prix espéré que l'on veut actualiser. Il faut donc utiliser les mêmes unités de mesures. Par exemple, on ne peut pas déterminer la covariance à partir du prix d'un baril de pétrole et ensuite vouloir actualiser le prix d'un cargo rempli de pétrole à partir de cette covariance. Il faut équivaloir les unités de mesures avant de faire ces calculs. On ne rencontrait pas ce problème dans la méthode RADR puisque l'on utilisait alors le rendement.

Souvent, on utilisera la méthode de l'équivalent certain de la façon suivante, premièrement on régressera le prix nominal d'un actif sur les rendements passés du marché.

(2.21) $$E[P_t] = \alpha + \gamma_0 R_{m,t} + \gamma_1 R_{m,t-1} + \gamma_2 R_{m,t-2} + \ldots + \gamma_n R_{m,t-n} \;:$$

Où

(2.22) $$\gamma_n = \frac{\operatorname{cov}[P_t, R_{m,t-n}]}{\sigma_m^2}$$

Alors, si l'on assume une prime de risque du marché constante, l'équivalent certain serait :

(2.23) $$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n) E[R_m - R_z]}{(1 + E[R_z])^n}$$

Notons que $E[P_t]$ est déterminé par la régression, tel que précédemment. Cependant, si l'on cherche à actualiser une espérance de prix plus éloigné dans le futur, on peut remplacer les rendements du marché dans le futur par leurs espérances. Par exemple, pour déterminer l'espérance du prix dans 3 périodes, nous aurions :

(2.24) $$E[P_{t+3}] = \alpha + \gamma_0 E[R_{m,t+3}] + \gamma_1 E[R_{m,t+2}] + \gamma_2 E[R_{m,t+1}] + \gamma_3 R_{m,t} + \gamma_4 R_{m,t-1} + \ldots + \gamma_n R_{m,t-n}$$

D'autre part, comme nous le verrons dans la section suivante, il est de loin préférable de déterminer l'équivalent certain séparément pour chacun des flux monétaires d'un projet en prenant soin d'appliquer la prime de risque spécifique à ce flux monétaire. Ensuite, on peut additionner ces équivalents certains pour déterminer celui de l'ensemble du projet. Si cela est impossible, on peut tout de même déterminer directement l'équivalent certain du projet à partir du risque moyen de projets semblables, cependant le résultat ne sera pas tout-à-fait exact si les flux monétaires n'ont pas tous ce même niveau de risque.

Encore ici, la méthode de l'équivalent certain basé sur le modèle CAPM n'est pas parfaite et peut parfois donner des résultats qui semblent invraisemblables. Cependant, si on laisse au gestionnaire la liberté d'estimer son équivalent certain, qui se fera souvent dans ses intérêts personnels, plusieurs opinions divergeront et entreront en conflits quant à savoir la nature de la fonction d'utilité de tous et chacun. Alors, la méthode de l'équivalent certain basé sur le modèle CAPM demeure une méthode rigoureuse d'actualisation afin de déterminer la valeur présente d'un projet.

VALEUR ACTUALISÉE NETTE OPTIMISÉE (VAN-O)

La VAN-O est l'application de la méthode RADR (ou de l'équivalent certain) à chacun des flux monétaires composant le projet que l'on désire évaluer. Ainsi, chaque coût et chaque revenu seront actualisés à un taux représentant spécifiquement le risque de chacun. Chacun des taux sera déterminé par le modèle CAPM à partir d'un échantillon spécifique pour chacun des flux monétaires. On peut donc réécrire la formule du RADR et l'appliquer à chacun des flux monétaires (FM) qui seront actualisés par la méthode suivante:

$$E\left[FM_{j,t-n}\right]=\frac{E\left[FM_{j,t}\right]}{\left[1+R_z+\frac{\operatorname{cov}[R_{FM\,j,t},R_{m,t}]}{\sigma_m^2}(R_m-R_z)\right]^n} \tag{2.25}$$

Notons qu'encore ici, il peut être difficile de déterminer la covariance entre le risque d'un flux monétaire futur et le rendement du marché futur. Alors, si possible, on pourra utiliser un échantillon historique représentatif. Ainsi, on utilisera l'historique du risque d'un flux monétaire spécifique afin de déterminer son risque moyen et ainsi pouvoir actualiser nos prévisions futures à ce taux. Si cela est impossible ou trop difficile, on peut simplement l'estimer à partir de nos anticipations futures.

De plus, à partir de nos estimations sur le comportement futur du flux monétaire où l'on connait la probabilité de chacune des possibilités, on peut déterminer le risque de ce flux monétaire sans passer par le modèle CAPM.

Par exemple, si l'un des flux monétaires du projet est les revenus de vente d'un bien non périssable tel que le pétrole. Alors, on sait que le prix présent du pétrole doit être égal à l'espérance du prix futur actualisé au taux ajusté pour le risque du pétrole. Donc, on peut estimer l'espérance du prix futur et en la comparant au prix présent, on pourra ainsi déterminer le taux d'actualisation ajusté pour le risque du pétrole. Prenons, un baril de pétrole se transigeant aujourd'hui à 70$. Après une analyse des facteurs économiques, géopolitiques ou autres, nous estimons qu'à la prochaine période, il y a 50% de chance que le pétrole soit à 80$, 30% de chance qu'il soit à 70$ et 20% des chance qu'il soit à 60$. Alors l'espérance du prix pour la prochaine période est de :

$$E\left[P_{t+1}\right]=80\times0{,}5+70\times0{,}3+60\times0{,}2=73\$ \tag{2.26}$$

Ensuite, on peut facilement déterminer le taux ajusté pour le risque du pétrole qui est en fait le rendement espéré du prix du pétrole:

$$R_p=\left[\frac{E\left[P_{t+n}\right]}{P_t}\right]^{1/n}-1=\left[\frac{73}{70}\right]^{1/1}-1=0{,}0429=4{,}29\% \tag{2.27}$$

Donc, dans ce cas on pourrait actualiser les revenus dus à la vente du pétrole au taux de 4,29% par période.

D'autre part, notons que plus la prime de risque associée à un coût est élevée, plus cela aura un effet bénéfique sur le projet lorsqu'on actualisera ce coût. En effet, avec un coût très risqué, nous aurons une prime de risque élevée et donc un taux d'actualisation élevé. Alors, lorsqu'on actualisera une valeur négative tel un coût, la valeur présente de ce coût se rapprochera de zéro à mesure que l'on augmente la prime de risque de ce coût, et donc augmentera la valeur présente de l'ensemble du projet.

En résumé, lorsqu'il est possible de le faire, il est de loin préférable d'actualiser chacun des flux monétaires selon un taux ajusté pour le risque spécifique à celui-ci ou de déterminer leurs équivalents certains et de les actualiser au taux sans risque. Cela demande toutefois des prédictions futures sur le risque de ces flux monétaires et entraîne tous les inconvénients et mises en garde possibles du modèle CAPM tel que discuté dans les sections précédentes.

COMPARAISON RADR VS EC

En général, plus les données s'éloignent d'un cas typique ou plus l'on cherche à actualiser une valeur lointaine, alors les résultats deviennent de moins en moins fiables en pratique, voir parfois invraisemblables, et aussi, de plus en plus divergeant entre les deux méthodes de calcul.

Pour mieux visualiser la façon de calculer ces deux méthodes et leurs résultats, nous avons préparé deux fichiers Excel. Dans le premier cas, nous avons l'historique fictif du prix d'un bien ainsi que du rendement du marché. À partir des ces données, nous pouvons actualiser l'espérance du prix futur de ce bien à différentes périodes avec les méthodes EC et RADR. Notez que vous pouvez changer les valeurs dans les cellules rosés, c'est-à-dire l'historique du prix du bien et du rendement du marché, l'espérance du prix que l'on veut actualiser ainsi que le rendement sans risque. En changeant ces valeurs, vous pourrez observer leur effet sur les deux méthodes EC et RADR. Vous pouvez aussi analyser la mathématique se cachant derrière chaque cellule. De plus, les calculs seraient les mêmes si nous avions l'espérance des prix futurs et des rendements futurs plutôt que leur historique. D'autre part, vous pouvez observer que si l'on multiplie tous les prix historiques ainsi que celui espéré par le même nombre, les deux méthodes donneront les mêmes montants qu'au préalable multipliés par ce nombre. Cependant, si l'on garde les prix historiques inchangés et que l'on multiplie seulement l'espérance du prix que l'on veut actualiser, alors la méthode RADR donnera des résultats qui auront été multipliés par ce nombre, mais la méthode EC donnera des résultats n'ayant pas de relation avec ceux au préalable. C'est ce qu'on expliquait au préalable à propos de l'utilisation des mêmes unités de mesure.

Consulter le fichier Excel 1 ainsi que l'annexe 1

Dans le deuxième cas, nous avons l'historique quotidien pour 124 jours du début de l'année 2007 pour le prix d'un baril de pétrole au New York Mercantile Exchange (NYME), le prix d'un baril de Brent au marché de Londres et l'indice du marché que l'on représente par le Dow Jones. Encore une fois, on peut voir la différence entre la méthode EC et RADR. Notez, que dans ce cas, vous pouvez changer les valeurs des cellules en roses, c'est-à-dire, le rendement sans risque et de l'espérance du prix à actualiser afin d'observer leurs effets.

Consulter le fichier Excel 2 ainsi que l'annexe 2

Alors, avec ces deux cas, vous pouvez remarquer que les méthodes EC et RADR ne donnent pas exactement les mêmes résultats, souvent ces résultats sont même très différents. Il semble difficile de rendre un jugement quant à savoir laquelle des méthodes est la meilleure. Chacune peuvent donner des résultats plausibles, mais peuvent aussi rendre des résultats moins fiables. Il faut donc analyser les résultats avec précaution. Par exemple, si la covariance entre le prix et le rendement du marché est négative, il sera alors fort possible que la méthode EC donne une valeur actualisée plus élevée que celles espérées dans le futur. Aussi, si la covariance entre le rendement du prix et le rendement du marché est négative, alors la méthode RADR donne une valeur actualisée plus élevée que celles espérées dans le futur, tel que pour le prix du baril de Brent dans le deuxième fichier Excel. Ces résultats, à première vue invraisemblables, sont dus au modèle CAPM qui dit que l'actif ayant une corrélation négative avec le rendement du marché est considéré moins risqué puisqu'il permet une diversification qui diminuera le risque total d'un portefeuille. C'est théorie est adéquate dans un cas général où toute diversification et toute utilisation de dérivés financiers est possible, mais elle demeure parfois difficile à accepter lorsqu'on veut calculer de façon unique la valeur d'un flux monétaire composant un projet. Cependant, mêmes avec leurs imperfections, ces méthodes demeurent tout de même une façon rigoureuse d'actualiser un flux monétaire. Pour contourner, toutes ces imperfections ou simplement accélérer le processus, plusieurs gestionnaires seront tentés d'établir eux-mêmes un équivalent certain et une prime de risque pour la méthode RADR, cependant cette façon de faire laisse une grande place à différentes interprétations de la fonction d'utilité et du niveau de risque, et donc à un jugement du gestionnaire dans ces propres intérêts.

EC ET RADR DANS LE CAS D'ARBRE BINOMIAL AVEC PROBABILITÉ

Les explications de cette section sont inspirées du chapitre 19 du livre *Valuation and Capital Budgeting* (2006) de Gordon Sick, cependant, nous allons privilégier la méthode RADR, qui est beaucoup plus intuitive et suggérer d'utiliser la méthode EC seulement dans des cas bien particuliers plutôt qu'en tout temps comme semble le vouloir Gordon Sick.

Un arbre binomial avec probabilité est simplement la représentation du prix futur d'un actif à travers plusieurs périodes avec la probabilité que le prix augmente ou baisse d'un certain pourcentage à chaque période. Pour le visualiser, prenons l'exercice #19.1 tiré du livre de Gordon Sick.

Une industrie tente de déterminer le moment idéal pour produire et vendre un seul bien. Elle peut le faire aujourd'hui (période 0) ou soit attendre une ou deux périodes. Après ces deux périodes, il sera impossible de le faire. Le coût de production, qui est payé à la même période que le bien est vendu, est de 100$ et demeure constant peu importe la période que l'on désire le produire. Le prix que l'industrie peut vendre ce bien est aujourd'hui de 110$ (P_0). À chaque période suivante, le prix peut soit augmenter de 15% (u) ou diminuer de 15% (d). De plus, à partir du modèle CAPM, on sait que le rendement du prix du bien sera en moyenne de 10% (RADR). Puisque le prix présent doit être égal à l'espérance du prix futur actualisé selon son niveau de risque, cela nous permet alors de déterminer la probabilité que le prix monte (π) à chaque période de la façon suivante :

(2.28)
$$P_0 = \frac{P_0\pi(1+u) + P_0(1-\pi)(1+d)}{1+RADR}$$

Que l'on peut réarranger pour donner :

(2.29)
$$\pi = \frac{RADR - d}{u - d}$$

Et ainsi obtenir :

(2.30)
$$\pi = \frac{0{,}10-(-0{,}15)}{0{,}15-(-0{,}15)} = \frac{0{,}25}{0{,}30} = 0{,}833$$

Notons, que si l'on avait connu cette probabilité de hausse, nous aurions pu calculer le RADR si nous ne le connaissions pas déjà.

Donc, à chaque période, il y a 83,3% de chance que le prix monte de 15% et 16,6% de chance que le prix baisse de 15%. Ainsi, voici l'arbre binomial du prix du bien selon leurs probabilités pour deux périodes futures.

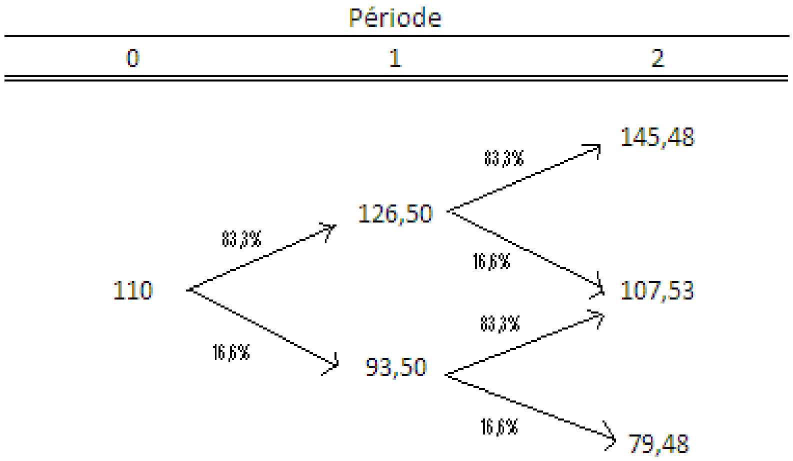

FIGURE 2.3 ARBRE BINOMIAL DU PRIX AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Notons que l'on peut actualiser au taux RADR les prix de la période t selon leur probabilité pour obtenir le prix de la période $t-1$. Ainsi :

$$110 = \frac{0{,}833 \times 126{,}50 + 0{,}166 \times 93{,}50}{1 + 0{,}10} \tag{2.31}$$

Et si l'on soustrait le coût de 100$, nous obtenons un arbre binomial de la valeur nette selon sa probabilité à chaque période :

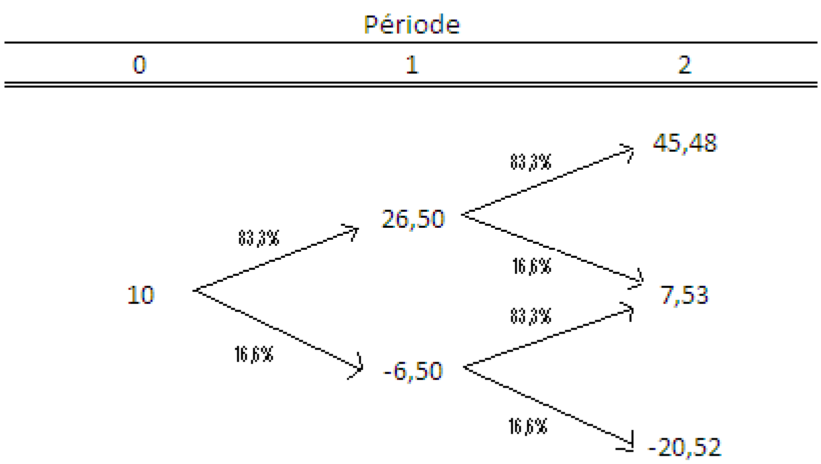

FIGURE 2.4 ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Cependant, nous ne pouvons pas actualiser ces valeurs nettes selon ces probabilités puisqu'elles incluent deux flux monétaires ayant un risque différent. Selon la méthode VAN-O, le revenu de la vente du bien devrait être actualisé au taux RADR de 10% et le coût de production au taux sans risque (R_z) que l'on assume être 2%. Alors, on peut construire un arbre binomial qui donne sur la ligne du haut la valeur présente à cette période si l'on produit et vent le bien et sur la ligne du bas la valeur espérée présente si l'on attend une période pour le produire et le vendre.

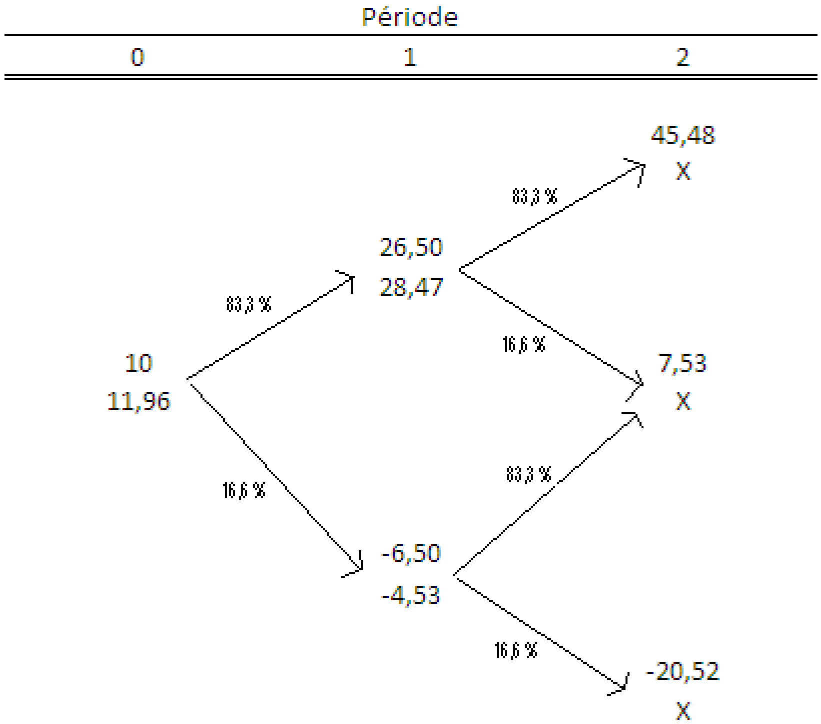

FIGURE 2.5 ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE ET DE VAN ESPÉRÉE AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Où

(2.32) $$11{,}96 = \frac{0{,}833 \times 126{,}50 + 0{,}166 \times 93{,}50}{1+0{,}10} - \frac{100}{1+0{,}02}$$

(2.33) $$28{,}47 = \frac{0{,}833 \times 145{,}48 + 0{,}166 \times 107{,}53}{1+0{,}10} - \frac{100}{1+0{,}02}$$

(2.34) $$-4{,}53 = \frac{0{,}833 \times 107{,}53 + 0{,}166 \times 79{,}48}{1+0{,}10} - \frac{100}{1+0{,}02}$$

Donc, puisque la valeur présente nette espérée (11,96) est plus grande que la valeur nette aujourd'hui (10), il serait préférable d'attendre. On peut faire ce choix à chaque période.

Cependant, cette méthode devient impraticable et inexacte lorsqu'on considère que la valeur nette est de zéro, si l'on décide de ne pas produire le bien, plutôt que négative. En effet, l'option de ne pas produire le bien si l'on a un prix plus petit que le coût est tout à fait légitime. Dans ce cas, cette méthode d'actualisation de chacun des flux monétaires selon leurs niveaux de risque ne fonctionnera pas. Il faut plutôt déterminer une nouvelle probabilité de hausse du prix que l'on appellera la probabilité neutre au risque (π') tel que :

(2.35) $$\pi' = \frac{R_z - d}{u - d} = \frac{0{,}02-(-0{,}15)}{0{,}15-(-0{,}15)} = \frac{0{,}17}{0{,}30} = 0{,}566$$

Ainsi, nous pourrons déterminer l'espérance de la valeur nette future que l'on actualisera au taux sans risque tout en remplaçant les valeurs nettes négatives par zéro. Ainsi, voici un arbre binomial plus véridique représentant sur la ligne du haut la valeur nette à cette période, sur la ligne du milieu la valeur nette espérée actualisée à cette période au taux sans risque et sur la ligne du bas la valeur optimale parmi les deux précédentes. Ainsi, à chaque période on peut soit décider de produire et vendre si la valeur de la ligne du haut est plus grande que celle espérée de la ligne du milieu. Notons, que pour valeur nette espéré que l'on actualise au taux sans risque, on prend la valeur optimale pour chacune des possibilités neutres au risque de la période suivante.

Alors,

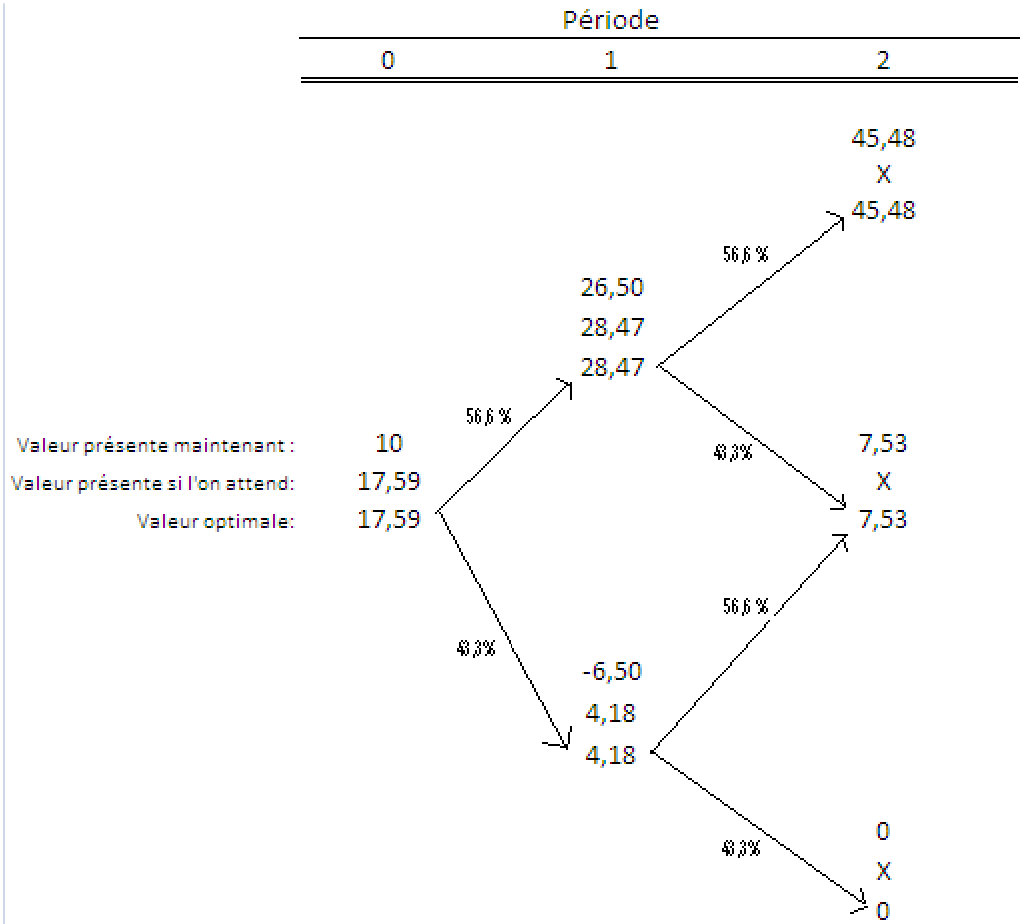

FIGURE 2.6 ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE ET VAN ESPÉRÉE AVEC LEURS PROBABILITÉS NEUTRES AU RISQUE PUISQU'ON A L'OPTION DE NE PAS PRODUIRE SI LA VALEUR NETTE EST NÉGATIVE.

Où

(2.36) $$17{,}59 = \frac{0{,}566 \times 28{,}47 + 0{,}433 \times 4{,}18}{1 + 0{,}02}$$

(2.37) $$28{,}47 = \frac{0{,}566 \times 45{,}48 + 0{,}433 \times 7{,}53}{1 + 0{,}02}$$

(2.38) $$4{,}18 = \frac{0{,}566 \times 7{,}53 + 0{,}433 \times 0}{1 + 0{,}02}$$

En résumé, il est préférable et plus intuitif de séparer chacun des flux monétaires et de les actualiser selon leurs niveaux de risque (RADR) propre et selon leurs probabilités réelles. Cependant, lorsqu'on a le choix de ne pas produire lorsque la valeur nette est négative, on peut remplacer celle-ci par zéro et alors il faut actualiser les valeurs présentes au taux sans risque selon les probabilités neutres au risque afin d'obtenir des valeurs présentes espérées exactes. Toutefois, cette dernière façon devient beaucoup plus compliquée voire même impraticable s'il existe plus d'un flux monétaire risqué.

Conclusion

Trop de gestionnaires ont une vision abstraite et subjective du risque. Il leur est alors difficile d'évaluer un projet sans porter un jugement dans leurs intérêts. Alors, dans cette recherche, présentée dans un format pédagogique, on a premièrement tenté de définir rigoureusement le risque d'un actif, qu'il soit financier ou réel. À partir du *Capital Asset Pricing Model*, on a observé que le risque d'un actif peut être influencé par la volatilité de son rendement ainsi que par la corrélation entre son rendement et celui du marché. On a établie les fondements intuitifs de ces influences ainsi que les manières mathématiques de les évaluer. Ensuite, on a démontré comment la méthode de financement d'une firme n'influence pas son niveau de risque, sauf en présence de taxe. De plus, on a vu comment le niveau de risque d'une firme est une décision endogène à celle-ci, et comment l'utilisation de dérivés financiers peut l'aider à augmenter sa valeur. Dans la deuxième partie de la recherche, nous avons définie intuitivement et mathématiquement les méthodes d'actualisation d'actifs en présence de risque. C'est-à-dire les méthodes du taux d'actualisation ajusté au risque et de l'équivalent certain. Nous avons aussi vu qu'il est préférable d'actualiser séparément tous les flux monétaires composant un projet selon leurs niveaux de risque respectif, c'est ce qui est appelé la valeur actualisée nette optimisée. De plus, dans certains cas, ces méthodes d'actualisation ont donné des résultats différents entre elles et parfois même invraisemblables dans un monde pratique en présence d'imperfections et de distorsions. Nous avons donc émis quelques mises en garde. Cependant, afin de déterminer la valeur présente d'un projet, ces méthodes d'évaluation du risque et d'actualisation en sa présence demeurent des outils mathématiques rigoureux qui évitent la subjectivité des gestionnaires.

Cependant, ces méthodes, basées sur le *Capital Asset Pricing Model,* accordent une grande importance à la corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché. Ainsi, on considéra qu'un actif est moins risqué lorsque cette corrélation est faible. Cette intuition peut être remise en question, puisque dans l'éventualité ou le marché donne un rendement de plus en plus croissant, il serait alors moins risqué de posséder un actif dont le rendement est de plus en plus décroissant. Même si l'on accepte cette intuition, je ne crois pas que plusieurs investisseurs préféreront l'actif à rendement décroissant dans ce cas!

Annexe

ANNEXE 1A

On peut changer les valeurs dans les cellules en rose,
et ainsi voir l'effet sur la valeur espérée actualisée
selon les deux méthodes, et cela pour différents nombres de périodes.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	9	0,125	0,12
-1	8	0,14285714	0,04
-2	7	-0,125	-0,05
-3	8	0,33333333	0,2
-4	6	-0,14285714	-0,02
-5	7	0,16666667	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	7,5	0,08333333	0,07333333
σ^2:	0,91666667	0,02821476	0,00818889
σ:	0,95742711	0,16797249	0,09049248

Cov(P,Rm):	0,04666667
Corr(P,Rm):	0,53862756
facteur EC:	0,24694708
Cov(Rp,Rm):	0,0141369
Corr(Rp,Rm):	0,93004439
facteur RADR:	0,07480859

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	9,46898341	9,05134167
2	8,96041647	8,1926786
3	8,4734419	7,41547332
10	5,60342093	3,69087714
100	-0,7646074	0,00046913
1000	-3,4469E-11	5,1637E-43

ANNEXE 1B

On peut voir l'effet de changer
un seul prix de l'échantillon.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	9	0,125	0,12
-1	8	0,14285714	0,04
-2	7	0,16666667	-0,05
-3	**6**	0	0,2
-4	6	-0,14285714	-0,02
-5	7	0,16666667	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	7,16666667	0,07638889	0,07333333
σ^2:	1,13888889	0,01283088	0,00818889
σ:	1,06718737	0,11327349	0,09049248

Cov(P,Rm):	0,00444444
Corr(P,Rm):	0,04602188
facteur EC:	0,02351877
Cov(Rp,Rm):	0,0011045
Corr(Rp,Rm):	0,10775164
facteur RADR:	0,00584469

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	9,68590411	9,65395687
2	9,3816217	9,31988832
3	9,08684758	8,99737999
10	7,26593741	7,03159002
100	0,39795356	0,29548498
1000	-1,9666E-12	5,074E-15

ANNEXE 1C

On peut voir que si le prix est plus volatile,
et surtout s'il est corrélé négativement avec le marché,
on obtient des résultats qui semblent invraisemblables.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	8	-0,2	0,12
-1	10	0,42857143	0,04
-2	7	0,4	-0,05
-3	5	-0,28571429	0,2
-4	7	0,75	-0,02
-5	4	-0,33333333	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	6,83333333	0,1265873	0,07333333
σ^2:	3,80555556	0,17379519	0,00818889
σ:	1,95078332	0,41688751	0,09049248

Cov(P,Rm):	-0,08944444
Corr(P,Rm):	-0,50667777
facteur EC:	-0,47331524
Cov(Rp,Rm):	-0,0341164
Corr(Rp,Rm):	-0,90434024
facteur RADR:	-0,18053456

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	10,1682672	11,7721092
2	10,3182491	13,8582556
3	10,4508681	16,3140899
10	10,9628491	51,1143494
100	2,98312202	121738620
1000	7,0308E-11	7,1496E+71

ANNEXE 2

À partir de 124 données journalières du prix du baril de pétrole
et de l'indice du marché Dow Jones,

On peut établir les calcul des méthodes EC et RADR afin d'actualiser
un prix espéré du baril de pétrole à différentes périodes.

On observe que la covariance entre le rendement du prix de Brent
et le rendement du marché est négative.
cela résulte en une valeur présentes plus grandes que le prix espéré futur,
lorsque calculé à partir du modèle RADR.

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
juil 03, 2007	71,41	0,00422	74,26	0,01866	13577,3	0,00309
juil 02, 2007	71,11	0,00908	72,9	0,00942	13535,43	0,00946
juin 29, 2007	70,47	0,01235	72,22	0,00361	13408,62	-0,00102
juin 28, 2007	69,61	0,00913	71,96	0,00167	13422,28	-0,00041
juin 27, 2007	68,98	0,01770	71,84	0,00602	13427,73	0,00675
juin 26, 2007	67,78	-0,01525	71,41	0,00070	13337,66	-0,00108
juin 25, 2007	68,83	-0,00029	71,36	-0,00944	13352,05	-0,00061
juin 22, 2007	68,85	0,00732	72,04	0,00320	13360,26	-0,01370
juin 21, 2007	68,35	-0,00219	71,81	0,01786	13545,84	0,00418
juin 20, 2007	68,5	-0,00940	70,55	-0,02245	13489,42	-0,01071
juin 19, 2007	69,15	0,00130	72,17	-0,00221	13635,42	0,00165
juin 18, 2007	69,06	0,01499	72,33	0,00977	13612,98	-0,00194
juin 15, 2007	68,04	0,00621	71,63	0,00632	13639,48	0,00633
juin 14, 2007	67,62	0,02191	71,18	0,02802	13553,72	0,00529
juin 13, 2007	66,17	0,01239	69,24	0,00992	13482,35	0,01409
juin 12, 2007	65,36	-0,00865	68,56	-0,00421	13295,01	-0,00968
juin 11, 2007	65,93	0,01775	68,85	-0,01699	13424,96	0,00004
juin 08, 2007	64,78	-0,03212	70,04	-0,03206	13424,39	0,01188
juin 07, 2007	66,93	0,01455	72,36	0,01203	13266,73	-0,01477
juin 06, 2007	65,97	0,00518	71,5	0,00196	13465,67	-0,00955
juin 05, 2007	65,63	-0,00816	71,36	0,00649	13595,46	-0,00591
juin 04, 2007	66,17	0,01659	70,9	0,03277	13676,32	0,00060
juin 01, 2007	65,09	0,01671	68,65	0,00689	13668,11	0,00297
mai 31, 2007	64,02	0,00867	68,18	0,00798	13627,64	-0,00040
mai 30, 2007	63,47	0,00443	67,64	-0,02409	13633,08	0,00826
mai 29, 2007	63,19	-0,02168	69,31	-0,01994	13521,34	0,00104
mai 25, 2007	64,59	0,01525	70,72	-0,01723	13507,28	0,00492
mai 24, 2007	63,62	-0,02273	71,96	0,01338	13441,13	-0,00625
mai 23, 2007	65,1	0,00293	71,01	0,01370	13525,65	-0,00106
mai 22, 2007	64,91	-0,02023	70,05	0,00777	13539,95	-0,00022
mai 21, 2007	66,25	0,02033	69,51	0,00361	13542,88	-0,00101
mai 18, 2007	64,93	0,00154	69,26	0,00261	13556,53	0,00592
mai 17, 2007	64,83	0,03612	69,08	0,03367	13476,72	-0,00080
mai 16, 2007	62,57	-0,00934	66,83	0,00135	13487,53	0,00775

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
mai 15, 2007	63,16	0,00975	66,74	0,01336	13383,84	0,00278
mai 14, 2007	62,55	0,00321	65,86	0,01043	13346,78	0,00154
mai 11, 2007	62,35	0,00808	65,18	0,00851	13326,22	0,00841
mai 10, 2007	61,85	0,00504	64,63	0,01780	13215,13	-0,01106
mai 09, 2007	61,54	-0,01156	63,5	-0,00079	13362,87	0,00404
mai 08, 2007	62,26	0,01269	63,55	0,01356	13309,07	-0,00029
mai 07, 2007	61,48	-0,00662	62,7	-0,03746	13312,97	0,00365
mai 04, 2007	61,89	-0,02119	65,14	0,00447	13264,62	0,00176
mai 03, 2007	63,23	-0,00862	64,85	-0,01098	13241,38	0,00223
mai 02, 2007	63,78	-0,01009	65,57	-0,02715	13211,88	0,00577
mai 01, 2007	64,43	-0,02052	67,4	0,00253	13136,14	0,00561
avr 30, 2007	65,78	-0,01008	67,23	-0,00074	13062,91	-0,00442
avr 27, 2007	66,45	0,02105	67,28	-0,00341	13120,94	0,00118
avr 26, 2007	65,08	-0,00383	67,51	0,00104	13105,5	0,00119
avr 25, 2007	65,33	0,01919	67,44	-0,00736	13089,89	0,01049
avr 24, 2007	64,1	-0,01883	67,94	0,01707	12953,94	0,00267
avr 23, 2007	65,33	0,02785	66,8	0,00693	12919,4	-0,00328
avr 20, 2007	63,56	0,02831	66,34	0,00257	12961,98	0,01197
avr 19, 2007	61,81	-0,02106	66,17	0,01659	12808,63	0,00037
avr 18, 2007	63,14	0,00000	65,09	-0,01884	12803,84	0,00241
avr 17, 2007	63,14	-0,00770	66,34	-0,01133	12773,04	0,00413
avr 16, 2007	63,63	0,00000	67,1	-0,02443	12720,46	0,00859
avr 13, 2007	63,63	-0,00376	68,78	0,01460	12612,13	0,00471
avr 12, 2007	63,87	0,03049	67,79	-0,01181	12552,96	0,00547
avr 11, 2007	61,98	0,00097	68,6	0,01419	12484,62	-0,00710
avr 10, 2007	61,92	-0,03641	67,64	-0,02184	12573,85	0,00109
avr 05, 2007	64,26	-0,00217	69,15	0,01557	12560,2	0,00241
avr 04, 2007	64,4	-0,00294	68,09	0,00132	12530,05	0,00158
avr 03, 2007	64,59	-0,02181	68	-0,01364	12510,3	0,01034
avr 02, 2007	66,03	0,00136	68,94	0,00686	12382,3	0,00226
mars 30, 2007	65,94	-0,00242	68,47	0,01905	12354,35	0,00045
mars 29, 2007	66,1	0,03104	67,19	0,01572	12348,75	0,00393
mars 28, 2007	64,11	0,01794	66,15	0,02957	12300,36	-0,00782
mars 27, 2007	62,98	0,01959	64,25	-0,00279	12397,29	-0,00576
mars 26, 2007	61,77	0,01146	64,43	0,02108	12469,07	-0,00096
mars 23, 2007	61,07	0,01428	63,1	0,02485	12481,01	0,00159
mars 22, 2007	60,21	0,05669	61,57	0,02310	12461,14	0,00109
mars 21, 2007	56,98	0,01010	60,18	0,00116	12447,52	0,01297
mars 20, 2007	56,41	-0,00424	60,11	-0,00628	12288,1	0,00507
mars 19, 2007	56,65	-0,00719	60,49	-0,00722	12226,17	0,00956
mars 16, 2007	57,06	-0,00800	60,93	0,00877	12110,41	-0,00405
mars 15, 2007	57,52	-0,01083	60,4	-0,00805	12159,68	0,00217
mars 14, 2007	58,15	0,00207	60,89	-0,01024	12133,4	0,00476
mars 13, 2007	58,03	-0,01544	61,52	0,01535	12075,96	-0,01970
mars 12, 2007	58,94	-0,01865	60,59	0,00564	12318,62	0,00345
mars 09, 2007	60,06	-0,02547	60,25	-0,01067	12276,32	0,00127

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
mars 08, 2007	61,63	-0,00356	60,9	-0,00376	12260,7	0,00560
mars 07, 2007	61,85	0,01962	61,13	0,02430	12192,45	-0,00124
mars 06, 2007	60,66	0,01016	59,68	-0,00167	12207,59	0,01304
mars 05, 2007	60,05	-0,02485	59,78	-0,03456	12050,41	-0,00526
mars 02, 2007	61,58	-0,00629	61,92	0,01210	12114,1	-0,00983
mars 01, 2007	61,97	0,00308	61,18	0,03014	12234,34	-0,00279
févr 28, 2007	61,78	0,00521	59,39	-0,01476	12268,63	0,00429
févr 27, 2007	61,46	0,00081	60,28	-0,00099	12216,24	-0,03293
févr 26, 2007	61,41	0,01875	60,34	-0,00066	12632,26	-0,00120
févr 23, 2007	60,28	0,00000	60,38	0,03002	12647,48	-0,00304
févr 22, 2007	60,28	0,01481	58,62	0,01524	12686,02	-0,00411
févr 21, 2007	59,4	0,01852	57,74	0,03273	12738,41	-0,00377
févr 20, 2007	58,32	-0,01785	55,91	-0,01532	12786,64	0,00149
févr 16, 2007	59,38	0,02521	56,78	0,04664	12767,57	0,00020
févr 15, 2007	57,92	-0,00138	54,25	-0,01453	12765,01	0,00182
févr 14, 2007	58	-0,01662	55,05	-0,01907	12741,86	0,00688
févr 13, 2007	58,98	0,02112	56,12	0,01081	12654,85	0,00815
févr 12, 2007	57,76	-0,03508	55,52	-0,02954	12552,55	-0,00225
févr 09, 2007	59,86	0,00167	57,21	-0,00052	12580,83	-0,00449
févr 08, 2007	59,76	0,03481	57,24	-0,01902	12637,63	-0,00231
févr 07, 2007	57,75	-0,01969	58,35	0,00534	12666,87	0,00004
févr 06, 2007	58,91	0,00375	58,04	-0,01074	12666,31	0,00036
févr 05, 2007	58,69	-0,00542	58,67	0,03056	12661,74	0,00065
févr 02, 2007	59,01	0,02895	56,93	0,00335	12653,49	-0,00159
févr 01, 2007	57,35	-0,01410	56,74	0,00389	12673,68	0,00412
janv 31, 2007	58,17	0,01999	56,52	0,03346	12621,69	0,00786
janv 30, 2007	57,03	0,05592	54,69	-0,00037	12523,31	0,00260
janv 29, 2007	54,01	-0,02474	54,71	-0,01049	12490,78	0,00030
janv 26, 2007	55,38	0,03533	55,29	-0,00683	12487,02	-0,00124
janv 25, 2007	53,49	-0,01383	55,67	0,01016	12502,56	-0,00944
janv 24, 2007	54,24	0,01175	55,11	0,02188	12621,77	0,00702
janv 23, 2007	53,61	0,04891	53,93	-0,00755	12533,8	0,00454
janv 22, 2007	51,11	-0,01674	54,34	0,03920	12477,16	-0,00703
janv 19, 2007	51,98	0,02910	52,29	0,02872	12565,53	-0,00019
janv 18, 2007	50,51	-0,03423	50,83	-0,00703	12567,93	-0,00073
janv 17, 2007	52,3	0,02089	51,19	-0,00176	12577,15	-0,00043
janv 16, 2007	51,23	-0,03267	51,28	0,02663	12582,59	0,00211
janv 12, 2007	52,96	0,02023	49,95	-0,03348	12556,08	0,00328
janv 11, 2007	51,91	-0,03781	51,68	-0,00825	12514,98	0,00585
janv 10, 2007	53,95	-0,03055	52,11	-0,00515	12442,16	0,00206
janv 09, 2007	55,65	-0,00767	52,38	-0,00833	12416,6	-0,00055
janv 08, 2007	56,08	-0,00373	52,82	0,00000	12423,49	0,00206
janv 05, 2007	56,29	0,01150	52,82	-0,03225	12398,01	-0,00662
janv 04, 2007	55,65	-0,04562	54,58	-0,03620	12480,69	0,00049
janv 03, 2007	58,31		56,63		12474,52	

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
moyenne	61,7096	0,00182274	63,42008	0,00233698	12862,8671	0,00070485
σ^2	22,3028281	0,00037826	41,9894331	0,00030044	238328,459	4,3046E-05
σ	4,72258701	0,01944892	6,47992539	0,01733321	488,188958	0,00656097
Cov with Rm	0,00027957	5,7815E-06	0,00069925	-1,704E-05		
Corr with Rm	0,0090787	0,04567696	0,01658821	-0,1510593		
facteur RADR		8,1238E-05		-0,00023944		
		8,1898E-05		-0,00024138		
facteur EC	0,00392835		0,00982531			
	0,00395262		0,00990949			

Rendement	journalier	annuel
sans risque	0,0001	0,02531384

Espérance du prix à actualiser:

72

	Valeur présente du prix espéré selon			
nombre de périodes	NYME		Brent	
	EC	RADR	EC	RADR
1	71,9849	71,9870	71,9830	72,0100
2	71,9738	71,9739	71,9660	72,0201
3	71,9666	71,9609	71,9489	72,0301
10	71,8888	71,8696	71,8299	72,1005
100	70,8947	70,7070	70,3109	73,0111
1000	61,5941	60,0660	56,2583	82,7739

Bibliographie

LIVRES

BREADLEY, RICHARD A. AND STEWART C. MYERS. *Principles of Corporate Finance*, 4th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1991.

SICK, GORDON, *Valuation and Capital Budgeting,* 2006.

ARTICLES

BOYER, MARCEL; MARTIN BOYER AND RENÉ GARCIA. "The value of real and financial risk management" *Scientific Series*, December 2005. Available at CIRANO: http://www.cirano.qc.ca/pdf/publication/2005s-38.pdf

LINTNER, JOHN. "The Valuation of Risk and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets" *The Review of Economics and Statistics*, February 1965, Vol. 47, pp. 13-37. Available at JSTOR: http://www.jstor.org/view/00346535/di952949/95p0121v/0

MODIGLIANI, FRANCO AND MERTON H. MILLER. "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment" *The American Economic Review*, Vol. 48, No. 3, June 1958, pp. 261-297. Available at JSTOR: http://www.jstor.org/view/00028282/di950353/95p05392/0

ROSS, S.A. "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" *Journal of Economic Theory*, December 1976, Vol. 13, pp. 341-360.

SHARPE, WILLIAM F. "The Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk" *Journal of Finance*, September 1964, Vol. 19, pp. 425-442. Available at JSTOR: http://www.jstor.org/view/00221082/di991897/99p05746/0

INTERNET

Photo en couverture :

Victor J. Stenger page at University of Colorado department of Philosophy, http://www.colorado.edu/philosophy/vstenger/relig.html

Données pour Annexe 2 :

Energy Information Administration, http://www.eia.doe.gov/

Yahoo finance, http://finance.yahoo.com/

Liste des figures