

**Université de Montréal**

**Égalités et inégalités géométriques pour les valeurs  
propres du laplacien et de Steklov**

par

**Antoine Métras**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

31 août 2018

# SOMMAIRE

---

Ce mémoire est composé de trois parties : dans la première, des inégalités spectrales en lien avec la constante de Cheeger et de Jammes-Cheeger, son équivalent pour le problème de Steklov, sont présentées. Une borne supérieure pour les valeurs propres du laplacien sur une variété compacte sans bord est obtenue en généralisant un résultat de Buser. Ensuite une borne inférieure pour la  $k$ -ième valeur propre de Steklov ne dépendant que de la  $k$ -ième constante de Jammes-Cheeger est démontrée en adaptant une preuve de Lee, Gharan et Trevisan.

Dans la deuxième partie, il est montré qu'étant donné une variété  $M$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , il n'existe pas de minimiseur des valeurs propres de Steklov parmi les variétés plongées dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ayant pour bord  $\partial M$ .

Finalement dans la troisième partie, inspiré par des résultats de Christianson sur les triangles et simplex, la masse de Neumann sur le bord d'un polytope des fonctions propres de Dirichlet est étudiée. Une formule explicite exprimant la valeur propre en fonction de la masse de Neumann sur les faces du polytope de la fonction propre correspondante est prouvée.

**Mots-clés** : géométrie spectrale, spectre du laplacien, problème de Dirichlet, problème de Steklov, constante de Cheeger, constante de Jammes-Cheeger, masse de Neumann.

# SUMMARY

---

This thesis is divided in three parts : in the first one, spectral inequalities based on the Cheeger constant and Jammes-Cheeger constant, its analogue for the Steklov problem, are introduced. An upper bound is obtained for the Laplace eigenvalues on a compact manifold without boundary by generalising a result from Buser. Then a lower bound for the  $k$ -th Steklov eigenvalue which depends only on the  $k$ -th Jammes-Cheeger constant is proved using a modified version of a proof by Lee, Gharan and Trevisan.

In the second part, it is shown that given a manifold  $M$  embedded in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , there does not exist a minimizer of the Steklov eigenvalues within the set of manifolds embedded in  $\mathbb{R}^{n+1}$  with boundary  $\partial M$ .

Finally, in the third part of this thesis, inspired by Christianson's results on triangles and simplices, the Neumann mass on the border of polytopes of a Dirichlet eigenfunction is studied. An explicit formula expressing the eigenvalue in terms of the Neumann mass on the faces of the polytope of the corresponding eigenfunction is proved.

**Keywords** : spectral geometry, Laplace spectrum, Dirichlet problem, Steklov problem, Cheeger constant, Jammes-Cheeger constant, Neumann mass.

# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	ii
<b>Summary</b> .....	iii
<b>Table des figures</b> .....	v
<b>Remerciements</b> .....	vi
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Valeurs propres et constantes de Cheeger et Jammes-Cheeger</b> .....	5
1.1. Introduction et définitions des constantes .....	5
1.2. Inégalités dépendantes de la géométrie de $M$ .....	6
1.2.1. Existence d'ensembles de Cheeger .....	6
1.2.2. Inégalité de Buser .....	9
1.3. Inégalités ne dépendant que de la constante de Jammes-Cheeger .....	12
1.3.1. Définitions et lemmes généraux .....	12
1.3.2. Valeurs propres de Steklov .....	16
<b>Chapitre 2. Minimisation des valeurs propres de Steklov des variétés plongées dans <math>\mathbb{R}^{n+1}</math> pour un bord fixé</b> .....	19
2.1. Minimisation des valeurs propres .....	19
<b>Chapitre 3. Masse de Neumann des fonctions propres de Dirichlet sur les polytopes</b> .....	26
3.1. Introduction .....	26
3.2. Masse de Neumann et polytopes .....	27
<b>Références</b> .....	31

## Table des figures

---

2.1	Division de $U$ en sous domaines $A, B$ et $C$ .....	23
2.2	L'ensemble nodal $\{x' \in U \mid f(x') = 0\}$ est représenté en gris. Un chemin entre un point $x \in \Omega$ arbitraire jusqu'à $\partial M'$ est montré en bleu et est de longueur bornée lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ .....	25
3.1	Les pyramides $C_1(p)$ et $C_3(p)$ d'un quadrilatère sont dessinées, avec ce choix spécifique du point $p$ rendant $\text{Vol}_2^*(C_1(p))$ positif et $\text{Vol}_2^*(C_3(p))$ négatif. ....	28
3.2	Exemple d'un quadrilatère $ABCD$ ayant sa diagonale $AC$ qui intersecte le segment $BD$ en son milieu. Les points utilisés dans la preuve sont illustrés sur cette figure .....	30

# REMERCIEMENTS

---

Je tiens à remercier mon directeur de recherche M. Iosif Polterovich pour m'avoir suggéré d'étudier les constantes de Cheeger et de Jammes-Cheeger d'ordre supérieure, et pour son aide, tant pédagogique que financière, qu'il m'a accordée.

Je remercie également M. Bruno Colbois et M. Alexandre Girouard avec lesquels j'ai collaboré et qui ont su poser les bonnes questions, tout d'abord avec un problème ouvert qu'ils avaient, puis tout au long de mon travail sur celui-ci.

Finalement, je remercie tout le groupe de théorie spectrale et en particulier Jean Lagacé pour les séminaires hebdomadaires de géométrie spectrale durant lesquels j'ai tant appris et eu l'occasion de découvrir l'article de Christianson qui a inspiré la dernière partie de ce mémoire.

# INTRODUCTION

---

Soit  $M$  un domaine compacte de  $\mathbb{R}^n$ . Le problème de Dirichlet sur  $M$  est de trouver les réels  $\lambda \in \mathbb{R}$  et les fonctions  $f \in H_0^1(M)$  solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 & \text{dans } M \\ f = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

où  $\partial M$  est le bord de  $M$  et  $\Delta$  est le laplacien,  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . Les  $\lambda$  et  $f$  solutions de ce problème sont appelées respectivement valeurs propres et fonctions propres. Comme le domaine est compacte, les valeurs propres sont discrètes et s'accroissent à l'infini ; il est standard de les énumérer en ordre croissant et en tenant compte de leur multiplicité  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ . Ces valeurs propres ont une caractérisation variationnelle

$$\lambda_k = \min_{\substack{E_k \subset H_0^1(M) \\ \dim E_k = k}} \max_{u \in E_k \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u)$$

où  $\mathcal{R}(u)$  est le quotient de Rayleigh de  $u$ , donné par

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2}.$$

L'ensemble des valeurs propres est le spectre du laplacien (de Dirichlet).

De nombreuses caractéristiques géométriques du domaine peuvent être retrouvées à partir d'une connaissance du spectre du laplacien, d'où la question classique posée par Kac : « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? » [14]. En effet, une interprétation physique du problème de Dirichlet est la vibration d'une membrane, les valeurs propres sont alors le carré des fréquences des modes normaux de vibrations. Cette question a été répondue par la négative avec la construction de domaines ayant le même spectre mais n'étant pas isométriques [9]. Néanmoins il est quand même possible en connaissant le spectre du laplacien de savoir le volume et, si le bord du domaine a suffisamment de régularité, l'aire du bord ainsi que l'intégrale de la courbure moyenne sur celui-ci [18].

Dans le premier chapitre nous abordons premièrement le lien entre les valeurs propres sur une variété riemannienne  $M$  sans bord et la constante de Cheeger. Dans ce contexte, les valeurs propres sont solutions de  $\Delta f = \lambda f$  avec  $\Delta$  l'opérateur de Laplace-Beltrami, la

généralisation aux variétés riemanniennes du laplacien. La caractérisation variationnelle des valeurs propres est légèrement différente de celle précédente du fait que la variété n'a pas de bord :

$$\lambda_k(M) = \min_{\substack{E_{k+1} \subset H^1(M) \\ \dim E_{k+1} = k+1}} \max_{u \in E_{k+1} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u)$$

La constante de Cheeger  $h(M)$  est une constante géométrique introduite par Cheeger afin de borner inférieurement la première valeur propre non nulle d'une variété [3]. Cette constante mesure d'une certaine façon si la variété peut être découpée en deux morceaux de grand volume mais avec chacun un bord de petit volume. Par exemple une paire d'haltère (i.e. deux sphères connectées par un fin cylindre) a une petite constante de Cheeger : pour s'en convaincre, prendre comme ensembles les deux sphères, elles ont un grand volume comparativement aux volumes de leur bord qui est proportionnel au rayon du cylindre et est donc petit. Nous nous intéressons à une généralisation  $h_k(M)$  d'ordre supérieure de cette constante qui quantifie si la variété est composée de  $k$  gros morceaux avec de petit bord. Une définition rigoureuse de  $h_k$  est donnée dans l'introduction du chapitre 1. Dans la première partie de ce chapitre, nous prouvons une inégalité entre cette constante  $h_k(M)$  et  $\lambda_k(M)$  :

**Théorème (1.2.2).** *Soit  $M$  une variété compacte sans bord et  $-(n-1)\kappa^2$ , ( $\kappa \geq 0$ ) une borne inférieure pour la courbure de Ricci sur  $M$ . Alors il existe une constante  $c$  indépendante de  $M$  tel que*

$$\lambda_k(M) \leq c \left( (n-1)\kappa h_{k+1}(M) + h_{k+1}(M)^2 \right)$$

Ce théorème est une généralisation aux valeurs propres supérieures de l'inégalité de Buser pour la première valeur propre [2].

Dans la deuxième partie du chapitre, le lien entre problème de Steklov et la constante de Jammes–Cheeger est étudié. Sur une variété  $\tilde{M}$  compacte à bord, le problème de Steklov consiste à trouver les valeurs propres  $\sigma$  solutions de

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } \tilde{M} \\ \partial_\nu f = \sigma f & \text{sur } \partial\tilde{M} \end{cases}$$

où  $\partial_\nu f$  est la dérivée normale de  $f$  sur le bord. Les valeurs propres sont caractérisées par

$$\sigma_k(\tilde{M}) = \min_{E_{k+1} \subset H^1(\tilde{M})} \max_{u \in E_{k+1} \setminus \{0\}} \tilde{\mathcal{R}}(u)$$

où les  $E_{k+1}$  sont des sous espaces de  $H^1(\tilde{M})$  tel que  $\{f|_{\partial\tilde{M}} \mid f \in E_{k+1}\}$  est de dimension  $k+1$ , et le quotient de Rayleigh pour le problème de Steklov est

$$\tilde{\mathcal{R}}(u) = \frac{\int_{\tilde{M}} |\nabla u|^2}{\int_{\partial\tilde{M}} u^2}.$$

La constante de Jammes–Cheeger  $\tilde{h}_k(M)$  est l’analogie de la constante de Cheeger pour ce problème introduite par Jammes dans [13], définie rigoureusement dans l’introduction du chapitre 1. Nous prouvons

**Théorème (1.3.3).** *Soit  $\tilde{M}$  une variété compacte à bord  $\partial\tilde{M} \neq \emptyset$  et de dimension  $n$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i(\tilde{M}) \geq C \frac{\tilde{h}_k(\tilde{M})^2}{k^5}$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\tilde{M}$ . En particulier, comme  $\sigma_k(\tilde{M}) \geq \sigma_i(\tilde{M})$  pour  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\sigma_k(\tilde{M}) \geq C \frac{\tilde{h}_k(\tilde{M})^2}{k^6}$$

Récemment, Hassannezhad et Miclo [10] ont démontré le même résultat. Leur preuve et celle de ce mémoire sont toutes les deux basées initialement sur celle de Lee, Gharan et Trevisan pour le laplacien discret sur un graphe [15], mais la leur utilise ce résultat pour prouver une inégalité similaire pour les valeurs propres de Neumann sur une variété avec densité puis utilise la convergence de ses valeurs propres vers celles de Steklov lorsque la densité se concentre sur le bord de la variété afin d’obtenir l’inégalité pour les valeurs propres de Steklov. Dans notre cas, la preuve de Lee, Gharan et Trevisan est directement adaptée au problème de Steklov.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l’influence de la géométrie du bord d’une variété sur ses valeurs propres de Steklov. En effet pour une variété  $M$ , le problème de Steklov est lié à l’opérateur de Dirichlet-à-Neumann  $\mathcal{D} : H^{1/2}(\partial M) \rightarrow H^{-1/2}(\partial M)$  qui à une fonction  $f$  fait correspondre la fonction  $\partial_\nu \mathcal{H}f$  où  $\mathcal{H}f$  est le prolongement harmonique de  $f$  à  $M$  et  $\partial_\nu$  la dérivée normale au bord  $\partial M$ . En particulier les valeurs propres de  $\mathcal{D}$  sont celle du problème de Steklov. Il est donc raisonnable de s’intéresser au rôle du bord  $\partial M$  dans le problème de Steklov, en particulier, si le bord est gardé fixe est-il possible de maximiser/minimiser les valeurs propres de Steklov? Dans le cas général, non : pour une variété de dimension  $n \geq 3$ , il est possible d’avoir des valeurs propres de Steklov arbitrairement grandes/petites en modifiant la métrique d’une variété conformalement tout en la gardant fixe sur le bord [6].

Par contre, pour une variété  $M$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , il existe une borne supérieure ne dépendant que de la géométrie de  $\partial M$  et du volume de  $M$  [7]. Dans cet article, les auteurs prouvent aussi une borne inférieure pour la première valeur propre de Steklov pour certaines hypersurfaces de révolution ne dépendant que du bord de l’hypersurface. Il est donc raisonnable de se demander si, étant donné une variété  $M$  de dimension  $n$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , il est possible de minimiser les valeurs propres de Steklov parmi l’ensemble des variétés plongées dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ayant pour bord  $\partial M$ . Nous montrons dans ce chapitre que ce n’est pas possible avec le théorème suivant

**Théorème (2.1.1).** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\partial M \neq \emptyset$ . Supposons qu'il existe un point  $p \in \partial M$  ayant un voisinage plat, c'est à dire qu'il existe un ouvert  $U$  tel que  $p \in U$  et  $U \cap M$ ,  $U \cap \partial M$  sont respectivement inclus dans des sous espaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensions  $n$  et  $n - 1$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon > 0$ , il existe une variété  $M'$  tel que  $\partial M' = \partial M$ ,  $M \cap U^c = M' \cap U^c$  et  $\sigma_i(M') < \epsilon$ .*

Ce théorème a été trouvé en collaboration avec Bruno Colbois et Alexandre Girouard qui m'ont aidé à en simplifier la preuve et nous travaillons actuellement à sa généralisation, où la nécessité d'un voisinage plat est enlevée (voir remarque 2.1.1).

Dans le troisième chapitre, nous étudions le problème de Dirichlet sur des polygones et polytopes. En particulier, soit  $f$  une solution du problème de Dirichlet sur le polytope  $P$  :  $\Delta f + \lambda f = 0$  et  $f = 0$  sur  $\partial P$ . Nous regardons le lien géométrique entre  $\lambda$  et la masse de Neumann de  $f$  sur les faces du polytope, c'est à dire l'intégrale sur les faces du polytope de la dérivé normale au carré de  $f$  :

**Théorème (3.2.1).** *Soit  $P$  un polytope de dimension  $n$  de faces  $F_1, \dots, F_k$  et soit  $p \in \mathbb{R}^k$  un point arbitraire. Alors*

$$\sum_{i=1}^k \text{dist}^*(p, F_i) \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = 2\lambda$$

ou de manière équivalente,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\text{Vol}_n^*(C_i(p))}{\text{Vol}_{n-1}(F_i)} \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{2\lambda}{n}$$

où dans ce théorème,  $\text{dist}^*$  et  $\text{Vol}^*$  sont la distance et volume signés, définis au chapitre 2, et  $C_i$  est la pyramide de base  $F_i$  et de sommet  $p$ . Pour certaines classes de polytopes, cette formule prend des formes particulièrement simples dans lesquelles la longueur des faces et le volume du polytope jouent un rôle explicite. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'un article [21].

# Chapitre 1

---

## VALEURS PROPRES ET CONSTANTES DE CHEEGER ET JAMMES-CHEEGER

### 1.1. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS DES CONSTANTES

Soit  $M$  une variété différentielle compacte de dimension  $n$ . Nous sommes intéressé par la  $k$ -ième constante de Cheeger

$$h_k(M) = \inf \max_{i=1, \dots, k} H(A_i) \quad (1.1.1)$$

$$= \inf \max_{i=1, \dots, k} h_1(A_i) \quad (1.1.2)$$

où  $H$  est défini pour un ensemble  $E$  par  $H(E) = \frac{\text{Vol}_{n-1} \partial E}{\text{Vol}_n E}$  et où l'infimum est pris sur tous les sous-ensembles ouverts  $A_1, \dots, A_k$  de  $M$  de volume non nul et disjoints deux à deux. Une inégalité sera étudiée entre cette constante géométrique et les valeurs propres  $0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots$  de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$ , solutions du problème

$$\Delta f_i + \lambda_i f_i = 0$$

avec sa fonction propre associée  $f_i$  dans l'espace de Sobolev  $H^1(M)$ .

Soit une constante  $\kappa > 0$  tel que la courbure de Ricci sur  $M$  soit bornée inférieurement par  $-(n-1)\kappa^2$  (comme  $M$  est compacte, une telle constante existe). Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons que pour tout  $k$ ,

$$\lambda_k(M) \leq C((n-1)\kappa h_{k+1}(M) + h_{k+1}^2(M)) \quad (1.1.3)$$

où  $C$  dépend uniquement de la dimension de  $M$ . Cette borne supérieur est une généralisation aux valeurs propres supérieures du résultat de Buser [2] pour la première valeur propre.

Dans la deuxième partie, afin d'obtenir une borne inférieure pour les valeurs propres de Steklov ne dépendant que de la constante de Jammes-Cheeger, nous adaptons une preuve de Lee, Gharan et Trevisan pour les graphes [15] au cas des variétés riemanniennes. Nous commençons par prouver des lemmes généraux puis nous prouvons l'inégalité (1.3.7) pour

les valeurs propres  $0 = \sigma_1(\tilde{M}) \leq \sigma_1(\tilde{M}) \leq \dots$  du problème de Steklov pour une variété  $\tilde{M}$  a bord. Cette inégalité utilise la constante de Jammes–Cheeger

$$\tilde{h}_k(\tilde{M}) = \sqrt{\inf_{i=1,\dots,k} \max(\tilde{H}(A_i)) \inf_{i=1,\dots,k} \max(\tilde{H}'(A_i))} \quad (1.1.4)$$

où l'infimum est pris sur tous les sous-ensembles ouverts  $A_1, \dots, A_k$  de  $\tilde{M}$  de volume non nul et disjoint deux à deux, et

$$\begin{aligned} \tilde{H}(A) &= \frac{\text{Vol } \partial_I A}{\text{Vol } A} \\ \tilde{H}'(A) &= \frac{\text{Vol } \partial_I A}{\text{Vol } \partial_E A} \end{aligned}$$

avec  $\partial_I A = \partial A \cap \text{Int } M$  le bord intérieur de  $A$  et  $\partial_E A = \bar{A} \cap \partial M$  le bord extérieur de  $A$ . Avec cette constante, nous prouvons une borne inférieure pour les valeurs propres de Steklov

$$\sigma_k(M) \geq C \frac{\tilde{h}_k^2(\tilde{M})}{k^6} \quad (1.1.5)$$

où  $C$  ne dépend pas de la variété  $M$ .

## 1.2. INÉGALITÉS DÉPENDANTES DE LA GÉOMÉTRIE DE $M$

### 1.2.1. Existence d'ensembles de Cheeger

Nous commençons cette section avec une preuve d'existence d'ensembles  $S_1, \dots, S_k$  tel que

$$h_k(M) = \max_{i=1,\dots,k} H(S_i).$$

avec  $H(S) = \frac{|\partial S|}{|S|}$ . Pour se faire, nous utiliserons les courants et quelques résultats classiques de la théorie géométrique de la mesure, provenant de [8] (voir aussi [20] pour une approche plus pédagogique). Dans le cas d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , la question de l'existence et de la régularité d'ensembles réalisant  $h_k(\Omega)$  a été traitée dans [22, 1]. L'existence de ces ensembles n'est pas nécessaire à la preuve de l'inégalité de Buser, puisque la preuve élémentaire de Buser [2] peut aussi s'appliquer dans le cas des valeurs propres supérieures. Mais la preuve utilisant ces ensembles permet d'obtenir une constante explicite et est plus naturelle.

Tout d'abord, quelques définitions :

**Définition 1.2.1.** *Un ensemble  $R$  est dit  $m$ -réctifiable s'il existe un nombre dénombrable de fonctions lipschitziennes  $f_i : B_i \rightarrow M$  où  $B_i$  sont des ensembles bornés de  $\mathbb{R}^m$ , tel que presque tout  $R$  soit dans  $\cup_i f_i(B_i)$ .*

**Définition 1.2.2.** *L'espace des courants de dimensions  $m$  est le dual de celui des  $m$ -formes différentielles à support compacte et le support  $\text{spt } T$  d'un courant  $T$  de dimension  $m$  est le plus petit ensemble fermé  $F$  tel que  $T(\phi) = 0$  pour toute  $m$ -forme  $\phi$  supportée en dehors de  $F$ .*

Pour un courant  $T$  de dimension  $m$ , son bord  $\partial T$  est aussi un courant, de dimension  $m-1$ , et est défini par dualité :  $\partial T(\phi) = T(d\phi)$  pour toute  $m$ -forme  $\phi$ . Dans notre contexte, les courants servent de généralisation de la notion de domaine et de leur bord, et nous n'utiliserons que des courants de multiplicité un. Un courant  $T$  est dit rectifiable s'il peut être associé à une intégrale sur un ensemble réctifiable. On dénote par  $\mathcal{R}_m M$  l'ensemble des courants rectifiables de dimension  $m$  dans  $M$  et par  $\mathbf{I}_m M = \{T \in \mathcal{R}_m M \mid \partial T \in \mathcal{R}_{m-1} M\}$  l'ensemble des courants intégrables de dimension  $m$  dans  $M$ . Deux semi-normes sont définies sur ces ensembles :

- la masse  $\mathbf{M}$  qui pour  $T \in \mathcal{R}_m M$  est égale au volume de Hausdorff de dimension  $m$  de l'ensemble rectifiable associé à  $T$ ,
- la norme plate  $\mathcal{F}(T) = \inf\{\mathbf{M}(A) + \mathbf{M}(B) \mid T = A + \partial B, A \in \mathcal{R}_m M, B \in \mathcal{R}_{m+1} M\}$ .

Nous utiliserons un théorème de compacité des courants intégrables [8, 4.2.17], [20, 5.5]

**Théorème 1.2.1.** *Pour  $M$  compact et  $c < \infty$ , l'ensemble  $\{T \in \mathbf{I}_m M \mid \mathbf{M}(T) < c, \mathbf{M}(\partial T) < c\}$  est compact avec la norme  $\mathcal{F}$ .*

Dans la définition de  $h_k(M)$  donnée jusqu'à présent, l'infimum est pris sur les ensembles ouverts. Nous étendons maintenant cet infimum aux courants intégrables et utilisons la masse au lieu du volume. Cette extension de la définition de  $h_k(M)$  ne change pas sa valeur car, par le lemme qui suit, l'infimum est réalisé par des courants intégrables  $T_1, \dots, T_k$  d'où

$$h_k(M) = \max_{j=1, \dots, k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j)}{\mathbf{M}(T_j)} = \max_{j=1, \dots, k} \frac{|\text{spt } \partial T_j|}{|\text{spt } T_j|}$$

et par la régularité prouvée dans le lemme 1.2.2, il est possible de choisir ces courants  $T_1, \dots, T_k$  tel que  $\text{spt } \partial T_j$  soit une sous-variété lisse presque partout donc  $\text{spt } \partial T_j = \partial(\text{spt } T_j)$ . Comme  $\text{spt } T_j$  peut être approximé par des ensembles ouverts cela montre que la constante  $h_k(M)$  ne diminue pas en étendant sa définition aux courants intégrables.

**Lemme 1.2.1.** *Il existe des courants intégrables  $T_1, \dots, T_k$  de support disjoint et de masse non nulle tel que*

$$h_k(M) = \max_{j=1, \dots, k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j)}{\mathbf{M}(T_j)} \tag{1.2.1}$$

**DÉMONSTRATION.** Soit une suite  $\{T^i\}_{i=1}^\infty$  où  $T^i = (T_1^i, \dots, T_k^i) \in (\mathbf{I}_n M)^k$  avec pour chaque  $i$ , les  $T_j^i$  de supports disjoints et  $\mathbf{M}(T_j^i) > 0$ , tel que

$$h_k(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \max_{j=1, \dots, k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j^i)}{\mathbf{M}(T_j^i)}. \tag{1.2.2}$$

Comme  $M$  est compacte,  $\mathbf{M}(T_j^i) \leq \text{Vol}_n M < \infty$  pour tout  $i, j$ . Donc il est possible de choisir une sous-suite  $\{T^{i_k}\}$  de  $\{T^i\}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j^{i_k})$  existe pour tout  $j$  et nous notons  $v_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j^{i_k}) \geq 0$ . Pour alléger la notation, nous supposons que  $\{T^i\}$  a déjà cette propriété.

En prenant  $k$  balles de support disjoint dans  $M$ , il est clair que  $h_k(M) < \infty$ . Or par construction, pour  $i$  suffisamment grand, et pour  $j = 1, \dots, k$ ,

$$\frac{\mathbf{M}(\partial T_j^i)}{\mathbf{M}(T_j^i)} \leq h_k(M) + 1$$

d'où

$$\mathbf{M}(\partial T_j^i) \leq (h_k(M) + 1)\mathbf{M}(T_j^i) \leq (h_k(M) + 1)\text{Vol}_n M \quad (1.2.3)$$

Donc en prenant  $c = \max\{(h_k(M) + 1)\text{Vol}_n M, \text{Vol}_n M\}$  dans le théorème 1.2.1, on peut trouver une sous suite de  $\{T^i\}$  convergant à  $(T_1, \dots, T_k) \in (\mathbf{I}_n M)^k$ . Il reste encore à montrer que chaque  $v_j > 0$  et que  $h_k(M) = \max_{j=1, \dots, k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j^i)}{\mathbf{M}(T_j^i)}$ .

Pour prouver que les  $T_j$  sont de masse non nulle, nous suivons le raisonnement de Buser [2, Lemme 3.4] : supposons au contraire que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_1^i) = 0$ . La variété  $M$  est découpée en domaines disjoints  $M_1, \dots, M_m$  tel que leur union est  $M$  et pour chaque  $M_j$ , il existe une quasi-isométrie  $\phi_j : M_j \rightarrow \mathbb{B}^n$ . Pour  $i$  suffisamment grand,  $\text{Vol}_n(\phi_j(\text{spt } T_1^i \cap M_j)) \leq \frac{1}{2} \text{Vol}_n \mathbb{B}^n$  pour tout  $j$  puisqu'il est supposé que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_1^i) = 0$  et que les  $\phi_j$  sont des quasi-isométries. D'où par l'inégalité isopérimétrique dans  $\mathbb{R}^n$  relative à la balle  $\mathbb{B}^n$  (voir par exemple la Proposition 12.37 dans [17]) :

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{n-1}(\phi_j(\text{Int } M_j \cap \partial T_1^i)) &\geq c_n \text{Vol}_n(\phi_j(\text{spt } T_1^i \cap M_j))^{1-1/n} \\ &\geq c \text{Vol}_n(\phi_j(\text{spt } T_1^i \cap M_j))\mathbf{M}(T_1^i)^{-1/n} \end{aligned}$$

où  $c_n > 0$  est une constante dépendante de la dimension  $n$ , et  $c$  dépendent de  $c_n$  ainsi que des constantes de distorsion des  $\phi_j$ . La deuxième inégalité est du au fait que  $\phi_j$  est une quasi-isométrie et  $\text{Vol}(\text{spt } T_1^i \cap M_j) \leq \text{Vol}(\text{spt } T_1^i)$ . Puis en sommant sur  $j$

$$\sum_j \text{Vol}_{n-1}(\phi_j(\text{Int } M_j \cap \partial T_1^i)) \geq c\mathbf{M}(T_1^i)^{-1/n} \sum_j \text{Vol}_n(\phi_j(\text{spt } T_1^i \cap M_j))$$

Or les  $\phi_j$  sont des quasi-isométries donc il existe des constantes  $c', c''$  tel que

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Vol}_{n-1}(\phi_j(\text{Int } M_j \cap \partial T_1^i)) &\leq c'\mathbf{M}(\partial T_1^i) \\ \sum_j \text{Vol}_n(\phi_j(\text{spt } T_1^i \cap M_j)) &\geq c''\mathbf{M}(T_1^i) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathbf{M}(\partial T_1^i)}{\mathbf{M}(T_1^i)} \geq \frac{c}{\mathbf{M}(T_1^i)^{1/n}}$$

où  $c > 0$  est une constante dépendante de la dimension et des constantes de distorsion des  $\phi_j$ . Mais comme  $\mathbf{M}(T_1^i) \rightarrow 0$  alors que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{M}(\partial T_1^i)}{\mathbf{M}(T_1^i)} \leq h_k(M) < \infty$ , on obtient une contradiction.

Finalement, on obtient en utilisant la semi-continuité inférieure de la masse et la définition de  $h_k(M)$ ,

$$h_k(M) \leq \max_{j=1,\dots,k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j)}{\mathbf{M}(T_j)} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \max_{j=1,\dots,k} \frac{\mathbf{M}(\partial T_j^i)}{\mathbf{M}(T_j^i)} = h_k(M) \quad (1.2.4)$$

□

On note  $F_{i,j} = \text{spt } \partial T_i \cap \text{spt } \partial T_j$  la frontière entre  $T_i$  et  $T_j$ . On a le lemme de régularité suivant

**Lemme 1.2.2.** *Les courants  $T_1, \dots, T_k$  du lemme précédent peuvent être choisis tel que*

1. *pour chaque  $i$ ,  $\text{spt } \partial T_i$  est lisse par partie sauf pour un ensemble de volume  $n$ -dimensionnel nul,*
2. *pour chaque  $i, j$  avec  $i \neq j$ , la courbure moyenne de l'ensemble des points réguliers de  $F_{i,j}$  est constante.*

DÉMONSTRATION. Par un résultat sur les ensembles de Cheeger de Bobkov et Parini [1, Théorème 2.1], il est possible de choisir les  $T_1, \dots, T_k$  tel que chaque  $T_i$  soit un ensemble de Cheeger de  $M_i = M \setminus \bigcup_{l \neq i} \text{spt } T_l$  et que chaque paire  $T_i, T_j$  soit des ensembles de Cheeger de  $M_{i,j} = M \setminus \bigcup_{l \neq i,j} \text{spt } T_l$ .

Pour chaque  $i = 1, \dots, k$ , comme  $T_i$  est un ensemble de Cheeger de  $M_j$ , il est clair que  $T_i$  minimise, parmi les courants supportés dans  $M_j$ , l'aire de son bord avec une contrainte de volume. Donc par des résultats de régularité sur ces minimiseurs [19, 24],  $\text{spt } \partial T_i \cap \text{Int } M_i$  est lisse sauf pour un ensemble de volume  $n$  dimensionnel nul et est de courbure moyenne constante.

Pour la régularité des  $F_{i,j}$ , on remarque que comme  $T_i$  et  $T_j$  sont des ensembles de Cheeger de  $M_{i,j}$ ,  $F_{i,j}$  est un minimiseur de l'aire parmi les ensembles obtenus avec des perturbations compactes supportées dans  $\text{spt } T_i \cup \text{spt } T_j$ . Donc de nouveau par la régularité des minimiseurs [19, 24],  $F_{i,j}$  est lisse sauf pour un ensemble de volume  $n$  dimensionnel nul et est de courbure moyenne constante. □

À partir de maintenant, parmi les courants minimisant  $h_k(M)$ , nous les choisirons toujours satisfaisant le lemme précédent. Aussi nous oublions les courants et considérons seulement leur support, que nous appellerons  $k$ -ensembles de Cheeger de  $M$ . Par leur régularité, ces supports sont des sous-variétés de  $M$  et leur bord correspond au bord des courants.

### 1.2.2. Inégalité de Buser

Avec l'existence et régularité de  $k$ -ensembles de Cheeger, nous pouvons maintenant prouver la borne supérieure de Buser sur les valeurs propres du laplacien

**Théorème 1.2.2.** *Soit  $-(n-1)\kappa^2$  ( $\kappa \geq 0$ ) une borne inférieure pour la courbure de Ricci sur  $M$ . Alors il existe une constante  $c$ , indépendante de  $M$ , tel que*

$$\lambda_k(M) \leq c((n-1)\kappa h_{k+1}(M) + h_{k+1}^2(M)) \quad (1.2.5)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est une application de la preuve de Buser [2, 3] pour les valeurs propres supérieures et consiste à construire  $k+1$  fonctions de support disjoint dont le quotient de Rayleigh approxime  $h_{k+1}(M)$  et utiliser la caractérisation variationnelle de  $\lambda_k(M)$  pour conclure.

Soit  $T_1, \dots, T_{k+1}$  des ensembles de Cheeger pour  $h_{k+1}(M)$  et pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , dont la valeur sera fixée ultérieurement, soit  $T_i(t) = \{x \in T_i \mid d(x, \partial T_i) < t\}$ . Pour chaque  $i$ , soit  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in T_i \setminus T_i(t) \\ \frac{d(x, \partial T_i)}{t} & \text{si } x \in T_i(t) \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus T_i \end{cases}$$

Par la caractérisation variationnelle de  $\lambda_k(M)$  et le fait que les  $f_i$  sont de support disjoint (et donc sont orthogonales),

$$\lambda_k(M) \leq \max_{i=1, \dots, k+1} \mathcal{R}(f_i) \quad (1.2.6)$$

mais

$$\mathcal{R}(f_i) \leq \frac{\frac{1}{t^2} \text{Vol}_n T_i(t)}{\text{Vol}_n T_i - \text{Vol}_n T_i(t)} \quad (1.2.7)$$

Par Heintze-Karcher [12, Théorème 2.1], le volume du voisinage  $T_i(t)$  peut être estimé

$$\text{Vol}_n T_i(t) \leq \text{Vol}_{n-1}(\partial T_i) f_\kappa(t, \eta_i) \quad (1.2.8)$$

où  $f_\kappa(t, \eta_i) = \int_0^t \max\{(\cosh(\kappa\tau) - \eta_i \kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1}, 0\} d\tau$  et  $\eta_i$  est le minimum de la courbure moyenne sur  $\partial T_i$  et  $\kappa$  provient de la borne inférieure sur la courbure de Ricci de  $M$ . En notant  $\Lambda$  le maximum de la valeur absolue des  $\eta_i$ , on a par construction

$$h_{k+1}(M) \geq \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial T_i)}{\text{Vol}_n T_i} \geq \frac{1}{\int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda \kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau} \quad (1.2.9)$$

et par définition de  $h_{k+1}(M)$ ,

$$\text{Vol}_{n-1}(\partial T_i) \leq h_{k+1}(M) \text{Vol}_n(T_i) \quad (1.2.10)$$

d'où

$$\lambda_k(M) \leq \frac{h_{k+1}(M)}{t^2} \frac{\int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda \kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau}{1 - h_{k+1}(M) \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda \kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau} \quad (1.2.11)$$

qui est vrai tant que le dénominateur est positif.

Si  $\Lambda > \kappa$ , on note  $\Lambda = \kappa(1 + \epsilon)$  et  $f_\kappa(\infty, \Lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_\kappa(t, \Lambda)$ . Alors

$$f_\kappa(\infty, \Lambda) \leq \int_0^{1/(\kappa\epsilon)} (1 - \epsilon\tau)^{n-1} d\tau = \frac{1}{\epsilon\kappa n}$$

mais

$$h_{k+1}(M) \geq \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial T_i)}{\text{Vol}_n T_i} \geq \frac{1}{f_\kappa(t, \eta_i)} \geq \frac{1}{f_\kappa(\infty, \Lambda)}$$

donc

$$\Lambda = \kappa + \kappa\epsilon \leq \kappa + \frac{h_{k+1}(M)}{n}. \quad (1.2.12)$$

On a aussi

$$f_\kappa(\infty, \Lambda) \leq \int_0^\infty e^{-\kappa(n-1)\tau} d\tau = \frac{1}{\kappa(n-1)}$$

d'où

$$h_{k+1}(M) \geq \kappa(n-1) \quad (1.2.13)$$

Pour utiliser l'inégalité 1.2.11 afin de conclure la preuve, il est nécessaire d'avoir un dénominateur positif. Pour ce faire nous traitons de plusieurs cas selon les valeurs de  $h_{k+1}(M)$  :

- Si  $0 < h_{k+1}(M) \leq \frac{\kappa(n-1)}{2}$  : alors comme l'inégalité (1.2.13) est contredite, cela implique  $\Lambda < \kappa$  et

$$\begin{aligned} \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda\kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau &\leq \int_0^t e^{\kappa(n-1)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\kappa(n-1)} (e^{\kappa(n-1)t} - 1). \end{aligned}$$

En prenant  $t = \frac{3}{4\kappa(n-1)}$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda\kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau &\leq \frac{1}{\kappa(n-1)} (e^{3/4} - 1) \leq \frac{1}{\kappa(n-1)} \frac{6}{5} \\ 1 - h_{k+1}(m) \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda\kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau &\geq 1 - \frac{\kappa(n-1)}{2} \frac{1}{\kappa(n-1)} \frac{6}{5} = \frac{2}{5} > 0. \end{aligned}$$

Il est donc possible d'utiliser (1.2.11) pour obtenir

$$\lambda_k(M) \leq \frac{16}{3} \kappa(n-1) h_{k+1}(M). \quad (1.2.14)$$

- Si  $\frac{\kappa(n-1)}{2} < h_{k+1}(M) \leq \kappa(n-1)$  alors de nouveau  $\Lambda \leq \kappa$  et en prenant  $t = \frac{1}{2\kappa(n-1)}$  on obtient

$$\lambda_k(M) \leq 8\kappa(n-1) h_{k+1}(M). \quad (1.2.15)$$

- Si  $h_{k+1}(M) > \kappa(n-1)$  : dans ce cas, on a seulement  $\Lambda \leq \kappa + \frac{h_{k+1}(M)}{n}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda\kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau &\leq \int_0^t (e^{\kappa\tau} + \frac{h_{k+1}(M)}{\kappa n} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau \\ &\leq \int_0^t (1 + (\kappa e^{\kappa t} + \frac{h_{k+1}(M)}{n} \sinh(\kappa t))\tau)^{n-1} d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{A} ((1 + At)^n - 1)$$

où  $A = \kappa e^{\kappa t} + \frac{h_{k+1}(M)}{n} \sinh(\kappa t)$ . En prenant  $t = \frac{1}{5h_{k+1}(M)}$  on a  $At \leq \frac{1}{3} < 1$  donc  $((1 + At)^n - 1) \leq (n + 1)At$  et

$$\begin{aligned} h_{k+1}(M) \int_0^t (\cosh(\kappa\tau) + \Lambda\kappa^{-1} \sinh(\kappa\tau))^{n-1} d\tau &\leq \frac{h_{k+1}(M)}{nA} (n + 1)At \\ &\leq \frac{n + 1}{n} \frac{1}{5} < 1. \end{aligned}$$

Le dénominateur dans (1.2.11) est alors positif et

$$\lambda_k(M) \leq \frac{25}{4} h_{k+1}^2(M). \quad (1.2.16)$$

En combinant ces trois possibilités, le résultat voulu est obtenu.  $\square$

### 1.3. INÉGALITÉS NE DÉPENDANT QUE DE LA CONSTANTE DE JAMMES-CHEEGER

Dans cette partie, nous prouvons une borne inférieure dépendant seulement de  $\tilde{h}_k(\tilde{M})$  pour les valeurs propres de Steklov  $\sigma_k(\tilde{M})$ . Ce résultat est basé sur [15], où une telle borne est prouvée pour le laplacien discret sur un graphe et suit le raisonnement suivant : à partir d'une fonction  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  dont le quotient de Rayleigh est exprimé en terme des valeurs propres,  $k$  fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_k$  au support disjoint sont construites sur  $\tilde{M}$  avec un contrôle sur leur masse (l'intégrale de  $\phi_i^2$ ) et de leur énergie de Dirichlet (l'intégrale de  $|\nabla \phi_i^2|$ ) en fonction de celles de  $F$ . Par le principe variationnel et l'inégalité de Jammes–Cheeger [13] pour la première valeur propre une borne inférieure est obtenue sur leur quotient de Rayleigh en fonction de  $\tilde{h}_k(M)$  ce qui par construction donne les inégalités voulues.

Nous commençons par plusieurs lemmes généraux.

#### 1.3.1. Définitions et lemmes généraux

Soit  $f_1, \dots, f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions orthogonales entre elles et normalisées  $\|f_i\|_{L^2} = 1$ . On note  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  la fonction  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ . Dans la prochaine partie, les fonctions  $f_i$  seront explicitement les fonctions propres du problème de Steklov. La preuve de la borne inférieure consiste à construire des restrictions de  $F$  sur des ensembles disjoints tout en estimant l'énergie de Dirichlet et la masse de ces restrictions.

On définit une pseudo-métrique  $g_F$  sur  $M$  par : pour  $x \in M$ ,  $v, w \in T_x M$ ,

$$g_F(v, w) = \left\langle d \left( \frac{F}{\|F(\cdot)\|} \right) (x)v, d \left( \frac{F}{\|F(\cdot)\|} \right) (x)w \right\rangle \quad (1.3.1)$$

où  $\|\cdot\|$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sont respectivement la norme et le produit scalaire euclidiens. Si  $F(x) = 0$ , on définit formellement  $g_F(v, v) = 0$  si  $v = 0$  et  $g_F(v, v) = \infty$  autrement. À priori,  $g_F(v, w) \geq 0$

et il pourrait exister  $v \in T_x M, v \neq 0$  tel que  $g_F(v, v) = 0$ . Nous notons  $d_F$  la fonction de pseudo-distance sur  $M$  induite par  $g_F$ . Nous définissons aussi la distance “euclidienne”  $\hat{d}_F$  sur  $M$  par

$$\hat{d}_F(x, y) = \left\| \frac{F(x)}{\|F(x)\|} - \frac{F(y)}{\|F(y)\|} \right\|,$$

avec, si  $F(x) = 0$  ou  $F(y) = 0$ ,  $\hat{d}_F(x, y) = 0$  si  $x = y$ ,  $\hat{d}_F(x, y) = \infty$  si  $x \neq y$ . Cette distance est celle obtenue à partir de la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^k$  en considérant  $\frac{F}{\|F(\cdot)\|}(M)$  comme un sous ensemble de  $\mathbb{R}^k$ .

Étant donné un ensemble  $S \subset M$ , la pseudo-métrique  $g_F$  permet de facilement réduire le support de la fonction  $F$  à un voisinage  $S_t = \{x \in M \mid d_F(x, S) < t\}$  tout en gardant un contrôle sur sa dérivée. Plus précisément,

**Lemme 1.3.1** (Lee et al. [15, Lemme 3.3]). *Soit  $S \subset M$  et  $t > 0$ . Il existe  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tel que*

1.  $\psi$  est supportée dans  $S_t$ ,
2.  $\psi|_S = F|_S$ ,
3. pour tout  $x \in M$ ,  $\|\mathrm{d}\psi(x)\|_{HS} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right) \|\mathrm{d}F(x)\|_{HS}$

où  $\|\cdot\|_{HS}$  est la norme de Hilbert-Schmidt.

DÉMONSTRATION. Soit  $\theta(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{d_F(x, S)}{t}\right\}$  et  $\psi = \theta F$ . Il est clair que les deux premiers points sont vrais. Pour le troisième, soit  $x \in M$  et  $v \in T_x M$

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\psi(x)(v)\| &\leq \|\mathrm{d}F(x)(v)\| + |\mathrm{d}\theta(x)(v)| \|F(x)\| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{t}\right) \|\mathrm{d}F(x)(v)\| \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\|\mathrm{d}\psi(x)\|_{HS} \leq (1 + 1/t) \|\mathrm{d}F(x)\|_{HS}$  puisque pour une base orthonormée  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_x M$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\psi(x)\|_{HS}^2 &= \sum_{i=1}^n \|\mathrm{d}\psi(x)e_i\|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \sum_{i=1}^n \|\mathrm{d}F(x)e_i\|^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \|\mathrm{d}F(x)\|_{HS}^2 \end{aligned}$$

□

Pour que ce lemme soit utile dans l'estimation de la  $k$ -ième valeur propre il faut pouvoir l'utiliser sur  $k$  sous-ensembles suffisamment éloignés entre eux (puisque les fonctions obtenus en appliquant ce lemme aux ensembles doivent être de support disjoint) et tel que la masse de la fonction  $F$  sur chaque ensemble soit suffisamment grande. Pour trouver ces ensembles, les partitions aléatoires sont utilisées, définies de la manière suivante :

- Une partition  $P$  de  $M$  est une division de  $M$  en sous-ensembles de Borel disjoints  $S_1, \dots, S_m$  avec  $M = \bigcup_i S_i$ . Par abus de notation, nous considérons aussi une partition comme la fonction  $P : M \rightarrow 2^M$  qui à  $x \in M$  associe  $S_i$  tel que  $x \in S_i$ .
- Une partition aléatoire  $\mathcal{P}$  de  $M$  est une loi de probabilité sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  des partitions de  $M$ .
- Une partition aléatoire  $\mathcal{P}$  est dite  $(\delta, \alpha, \beta)$ -rembourrée (par rapport à  $\hat{d}_F$ ) si, avec probabilité 1, le diamètre (mesuré avec  $\hat{d}_F$ ) des ensembles de la partition est borné par  $\delta$ , et si pour tout  $x \in M$ ,

$$\mathbb{P}[B_{\hat{d}_F}(x, \frac{\delta}{\alpha}) \subset \mathcal{P}(x)] := \int_{\mathcal{E}} \chi_{B_{\hat{d}_F}(x, \delta/\alpha) \subset P(x)}(x) \mathcal{P}(dP) \geq \beta. \quad (1.3.2)$$

où  $\mathbb{P}(A)$  dénote la probabilité de l'évènement  $A$  et  $B_{\hat{d}_F}(x, r)$  la boule  $\{y \in M \mid \hat{d}_F(x, y) < r\}$ . Par la suite, la fonction de pseudo-distance  $\hat{d}_F$  sera implicite sauf mention contraire.

Un résultat d'existence de partition aléatoire remboursée, dans  $\mathbb{R}^m$ , est nécessaire.

**Théorème 1.3.1** ([15, Théorème 2.3], [16, Théorème 3.11]). *Pour  $\delta > 0$  et  $\beta > 0$ , il existe une partition aléatoire  $(\delta, \mathcal{O}(m/\beta), 1 - \beta)$ -rembourrée de  $\mathbb{R}^m$  avec la distance euclidienne  $d(x, y) = \|x - y\|$ .*

Pour un ensemble  $S \subset M$ , on note  $S(t) = \{x \in S \mid B_{\hat{d}_F}(x, t) \subset S\}$ . Avec ces définitions, nous avons le lemme suivant

**Lemme 1.3.2.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $0 < \delta < \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{\frac{8k}{8k+1}}\right)}$ , il existe des sous-ensembles  $S_1, \dots, S_k \subset M$  tel que*

1.  $\hat{d}_F(S_i, S_j) \geq \frac{C\delta}{k^2}$  pour  $i \neq j$ ,
2. pour tout  $i$ ,  $\int_{S_i} \|F(x)\|^2 dx \geq \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx$

où  $C$  est une constante ne dépendant pas de  $M$ .

**DÉMONSTRATION.** Ce lemme est essentiellement la combinaison des lemmes 3.2 et 3.5 de [15], adaptés au cas du problème de Steklov. La preuve est en trois parties.

Par le théorème précédent 1.3.1, il existe une partition aléatoire  $(\delta, \alpha, 1 - \frac{1}{4k})$ -rembourrée de  $\mathbb{R}^k$  avec  $\alpha = \mathcal{O}(4k^2)$ . Cette partition aléatoire induit une partition aléatoire  $\mathcal{P}(\delta, \alpha, 1 - \frac{1}{4k})$ -rembourrée avec la distance  $\hat{d}_F$  sur  $M$  puisque  $\hat{d}_F$  est la distance euclidienne sur  $\frac{F}{\|F(\cdot)\|}(M) \subset \mathbb{R}^k$  et qu'une partition aléatoire remboursée reste une partition aléatoire remboursée avec les mêmes paramètres lorsqu'elle est restreinte à un sous ensemble. À partir de cette partition aléatoire  $\mathcal{P}$ , nous construisons les ensembles  $S_1, \dots, S_k$ .

Premièrement on montre qu'il existe une partition  $P$  de  $M$  dont les ensembles ont un diamètre (mesuré avec  $\hat{d}_f$ ) borné par  $\delta$  et la masse de  $F$  est suffisamment grande sur l'union des  $S(\delta/\alpha)$  pour  $S \in P$ . En effet

$$\int_{\mathcal{E}} \sum_{S \in P} \int_{S(\delta/\alpha)} \|F(x)\|^2 dx \mathcal{P}(dP) = \int_{\mathcal{E}} \int_M \sum_{S \in P} \chi_{S(\delta/\alpha)}(x) \|F(x)\|^2 dx \mathcal{P}(dP)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \int_{\mathcal{E}} \sum_{S \in P} \chi_{S(\delta/\alpha)}(x) \mathcal{P}(dP) \|F(x)\|^2 dx \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{4k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx
\end{aligned}$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique et l'inégalité est une conséquence de la propriété de rembourrage (1.3.2) de  $\mathcal{P}$ . Or comme la première intégrale n'est rien d'autre que l'espérance de  $\sum_{S \in P} \int_{S(\delta/\alpha)} \|F(x)\| dx$ , on en déduit qu'il existe une partition  $P$  tel que pour  $S \in P$ , le diamètre de  $S$  est inférieur à  $\delta$  et

$$\sum_{S \in P} \int_{S(\delta/\alpha)} \|F(x)\|^2 dx \geq \left(1 - \frac{1}{4k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx \quad (1.3.3)$$

Deuxièmement on montre qu'un petit sous-ensemble ne peut pas contenir trop de la masse de  $F$ . Soit  $S \in P$  alors pour  $x \in M$ ,

$$\int_M \left\langle F(y), \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \right\rangle^2 dy = \frac{1}{\|F(x)\|^2} \int_M \sum_{i=1}^k f_i^2(y) f_i^2(x) dy = 1$$

puisque les  $f_i$  sont normalisées. Mais pour tout  $y \in S$ ,

$$\begin{aligned}
\left\langle F(y), \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \right\rangle &= \left(1 - \frac{1}{2} \left\| \frac{F(x)}{\|F(x)\|} - \frac{F(y)}{\|F(y)\|} \right\|^2\right) \|F(y)\| \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \hat{d}_F(x, y)^2\right) \|F(y)\| \geq \left(1 - \frac{1}{2} \delta^2\right) \|F(y)\|
\end{aligned}$$

où l'inégalité vient du fait que  $S$  a un diamètre (mesuré avec  $\hat{d}_F$ ) borné par  $\delta$ . Donc

$$\begin{aligned}
\int_S \|F(y)\|^2 dy &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} \int_S \left\langle F(y), \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \right\rangle^2 dy \\
&\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} \int_M \left\langle F(y), \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \right\rangle^2 dy \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} \frac{1}{k} \int_M \|F(y)\|^2 dy
\end{aligned}$$

où le fait que les  $f_i$  sont orthonormales permet d'obtenir la dernière égalité. Puis comme  $\delta \leq \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{\frac{8k}{8k+1}}\right)}$ ,

$$\int_S \|F(x)\|^2 dx \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{8k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx \quad (1.3.4)$$

Finalement on montre par récurrence qu'il est possible de trouver des ensembles  $S_1, \dots, S_k$  satisfaisant les conditions du lemme en prenant des unions d'ensembles  $S(\delta/\alpha)$ ,  $S \in P$ . Soit

$E_1, E_2, \dots$  les ensembles de la partition  $P$ , trouvée à la première partie de la preuve, et  $A_i = E_i(\delta/\alpha)$  pour  $i = 1, \dots$ , énumérés tel que

$$\int_{A_i} \|F(x)\|^2 dx \geq \int_{A_{i+1}} \|F(x)\|^2 dx$$

et soit  $j$  le plus petit indice tel que

$$\int_{A_j} \|F(x)\|^2 dx < \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx.$$

Si  $j \geq k$ , la preuve est finie en prenant  $S_i = A_i(\delta/\alpha)$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Si  $j < k$ , soit  $A' = \cup_{i=0}^l A_{j+i}$  où  $l$  est le plus petit entier tel que

$$\int_{\cup_{i=0}^l A_{j+i}} \|F(x)\|^2 dx \geq \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx.$$

L'existence d'un tel  $l$  découle des inégalités (1.3.3) et (1.3.4) puisque

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{i \geq j} A_i} \|F(x)\|^2 dx &\geq \sum_{i \geq 1} \int_{A_i} \|F(x)\|^2 dx - \sum_{i=1}^j \int_{A_i} \|F(x)\|^2 dx \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{4k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx - \frac{j}{k} \left(1 + \frac{1}{8k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx \\ &> \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx. \end{aligned}$$

On considère maintenant la nouvelle énumération d'ensembles  $A_1, \dots, A_{j-1}, A', A_{j+l+1}, \dots$ . Clairement l'inégalité (1.3.3) est encore vraie pour ces ensembles. De plus, l'inégalité (1.3.4) est vraie pour  $A'$  par la minimalité de  $l$  qui implique

$$\begin{aligned} \int_{A'} \|F(x)\|^2 &= \int_{\cup_{i=0}^{l-1} A_{j+i}} \|F(x)\|^2 dx + \int_{A_{j+l}} \|F(x)\|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx + \frac{1}{2k} \int_M \|F(x)\|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{8k}\right) \int_M \|F(x)\|^2 dx. \end{aligned}$$

Il est donc possible de recommencer la récurrence avec les ensembles  $A_1, \dots, A_{j-1}, A', A_{j+l+1}, \dots$ , l'indice minimum  $j$  devenant maintenant  $j + 1$ . Donc la preuve se finit après un maximum de  $k$  itérations.  $\square$

### 1.3.2. Valeurs propres de Steklov

Dans cette section,  $\tilde{M}$  est une variété compacte à bord  $\partial\tilde{M}$ , les fonctions  $f_1, \dots, f_k$  sont les fonctions propres pour les  $k$  premières valeurs propres non nulles de Steklov, normalisées pour que  $\int_{\partial\tilde{M}} f_i(x)^2 dx = 1$  pour tout  $i$ . Le quotient de Rayleigh de  $F = (f_1, \dots, f_k)$  est une

généralisation du quotient de Rayleigh associé au problème de Steklov :

$$\tilde{\mathcal{R}}(F) = \frac{\int_{\tilde{M}} \|dF(x)\|_{HS}^2 dx}{\int_{\partial\tilde{M}} \|F(x)\|^2 dx} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i(\tilde{M}) \leq \sigma_k(\tilde{M}) \quad (1.3.5)$$

La borne inférieure de cette partie est basée sur l'inégalité de Jammes–Cheeger dans le cas du problème mixte de Dirichlet–Steklov : pour une variété  $S$  compacte à bord  $\partial S = \Omega_S \sqcup \Omega_D$ , soit  $\sigma_1^D(S)$  la première valeur propre du problème mixte de Dirichlet–Steklov sur  $S$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } S \\ \partial_\nu u = \sigma^D u & \text{sur } \Omega_S \\ u = 0 & \text{sur } \Omega_D. \end{cases}$$

Cette valeur propre existe et est positive.

La constante de Jammes–Cheeger dans le cas du problème mixte est encore donnée par  $\tilde{h}_1(S)$  (voir 1.1.4), mais avec les infimums pris sur tous les sous-ensembles  $A$  de  $S$  avec  $\partial A \cap \Omega_D = \emptyset$ . L'inégalité de Jammes pour le problème de Steklov est aussi vraie pour le problème mixte

**Théorème 1.3.2** ([10, Lemme 31]).

$$\sigma_1^D(S) \geq \frac{1}{4} \tilde{h}_1(S)^2 \quad (1.3.6)$$

Il est possible de généraliser cette inégalité aux valeurs propres de Steklov supérieures

**Théorème 1.3.3.** *Soit  $\tilde{M}$  une variété compacte à bord  $\partial\tilde{M} \neq \emptyset$  et de dimension  $n$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i(\tilde{M}) \geq C \frac{\tilde{h}_k(\tilde{M})^2}{k^5} \quad (1.3.7)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\tilde{M}$ . En particulier, comme  $\sigma_k(\tilde{M}) \geq \sigma_i(\tilde{M})$  pour  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\sigma_k(\tilde{M}) \geq C \frac{\tilde{h}_k(\tilde{M})^2}{k^6} \quad (1.3.8)$$

DÉMONSTRATION. On applique le lemme 1.3.2 sur  $\partial\tilde{M}$  avec  $\delta = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{\frac{8k}{8k+1}}\right)}$  pour obtenir  $k$  sous ensemble  $S_1, \dots, S_k \subset \partial\tilde{M}$  avec  $\hat{d}_F(S_i, S_j) \geq C \frac{\delta}{k^2}$  pour  $i \neq j$  et pour tout  $i$ ,

$$\int_{S_i} \|F(x)\|^2 dx \geq \frac{1}{2k} \int_{\partial\tilde{M}} \|F(x)\|^2 dx \quad (1.3.9)$$

Soit  $\psi_1, \dots, \psi_k$  les fonctions obtenues en appliquant le lemme 1.3.1 avec  $t = \frac{C\delta}{2k^2}$  aux ensembles  $S_1, \dots, S_k$  respectivement, cette fois, considérés comme des sous-ensembles de  $\tilde{M}$ . On note  $S'_i = (S_i)_t$  pour  $i = 1, \dots, k$  et les ensembles  $S'_1, \dots, S'_k$  sont disjoints étant donné que pour tout  $x, y \in \tilde{M}$ ,  $\hat{d}_F(x, y) \leq d_F(x, y)$  et que  $\hat{d}_F(S_i, S_j) \geq C \frac{\delta}{k^2}$ . Alors par construction

et l'inégalité (1.3.9), pour  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}(\psi_i) &= \frac{\int_{S'_i} |\nabla \psi_i|^2 dx}{\int_{\partial S'_i} \psi_i^2 dx} \\ &\leq \frac{\int_M |\nabla \psi_i|^2 dx}{\int_{\partial S_i} \psi_i^2 dx} \\ &\leq 2k \left(1 + \frac{2k^2}{C\delta}\right)^2 \tilde{\mathcal{R}}(F) = \mathcal{O}(k^6) \tilde{\mathcal{R}}(F)\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

Pour chaque  $\psi_i$ , il existe  $\phi_i : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\text{supp } \phi_i \subset \text{supp } \psi_i$  et  $\tilde{\mathcal{R}}(\phi_i) \leq \tilde{\mathcal{R}}(\psi_i)$ . En effet, soit  $\psi_i^{(j)}$  la projection de  $\psi_i$  sur la  $j$ -ième coordonnée. Alors

$$\min_{j=1, \dots, k} \tilde{\mathcal{R}}(\psi_i^{(j)}) \leq \frac{\sum_{j=1, \dots, k} \int_{\tilde{M}} |\nabla \psi_i^{(j)}|^2 dx}{\sum_{j=1, \dots, k} \int_{\partial \tilde{M}} (\psi_i^{(j)})^2 dx} = \tilde{\mathcal{R}}(\psi_i)$$

et il suffit de prendre  $\phi_i$  égale à la projection  $\psi_i^{(j)}$  ayant le plus petit quotient de Rayleigh.

Chacune des fonctions  $\phi_i$  est par construction nulle sur le bord intérieure  $\partial S'_i \cap \text{Int } \tilde{M}$  donc  $\phi_i$  peut servir de fonction teste pour le problème Steklov-Dirichlet avec la condition de Dirichlet sur  $\partial S'_i \cap \text{Int } \tilde{M}$ . Par l'inégalité de Jammes-Cheeger et la caractérisation variationnelle,

$$\tilde{\mathcal{R}}(\phi_i) \geq \sigma_1^D(S'_i) \geq \frac{1}{4} \tilde{h}_1(S'_i)^2$$

d'où

$$\max_{i=1, \dots, k} \tilde{\mathcal{R}}(\phi_i) \geq \max_{i=1, \dots, k} \frac{1}{4} \tilde{h}_1(S'_i)^2 \geq \frac{1}{4} \tilde{h}_k(\tilde{M})^2$$

où le fait que les  $S'_i$  sont disjoints à été utilisé pour avoir la deuxième inégalité. Combiné avec l'inégalité (1.3.10), nous obtenons

$$\frac{1}{4} \tilde{h}_k(\tilde{M})^2 \leq \max_{i=1, \dots, k} \tilde{\mathcal{R}}(\phi_i) \leq C' k^6 \tilde{\mathcal{R}}(F) \leq C' k^6 \sum_{i=1}^k \sigma_i(\tilde{M})$$

□

# Chapitre 2

---

## MINIMISATION DES VALEURS PROPRES DE STEKLOV DES VARIÉTÉS PLONGÉES DANS $\mathbb{R}^{n+1}$ POUR UN BORD FIXÉ

### 2.1. MINIMISATION DES VALEURS PROPRES

Dans ce chapitre nous considérons une variété  $M$  de dimension  $n$ , compacte et à bord, plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En gardant le bord  $\partial M$  fixe dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , est-il possible de trouver une variété  $M'$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\partial M' = \partial M$  et  $M'$  minimise les valeurs propres de Steklov parmi toutes les variétés plongées dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ayant pour bord  $\partial M$ ? Cette question a une réponse négative avec le théorème suivant

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n \geq 2$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\partial M \neq \emptyset$ . Supposons qu'il existe un point  $p \in \partial M$  ayant un voisinage plat, c'est à dire qu'il existe un ouvert  $U$  tel que  $p \in U$  et  $U \cap M$ ,  $U \cap \partial M$  sont respectivement inclus dans des sous espaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensions  $n$  et  $n - 1$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon > 0$ , il existe une variété  $M'$  tel que  $\partial M' = \partial M$ ,  $M \cap U^c = M' \cap U^c$  et  $\sigma_i(M') < \epsilon$ .*

**Remarque 2.1.1.** *La restriction dans ce théorème aux variétés ayant un voisinage du bord plat est artificielle et permet d'en simplifier la preuve. Le cas général pour toute variété  $M$  compacte à bord plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  peut s'obtenir de la manière suivante : pour un point  $p \in \partial M$ , il existe une boule  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  centrée sur  $p$  et un difféomorphisme  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\phi(B \cap M) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$  et  $\phi(B \cap \partial M) \subset \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . La preuve qui suit est alors appliquée à  $\phi(B \cap M)$  et comme  $\phi$  induit une quasi-isométrie entre  $B$  et  $\phi(B)$ , les inégalités trouvées restent vrais sur  $B$  mais multipliées par une constante, ne changeant pas le résultat final. Cette démarche fait l'objet d'un travail en cours avec Bruno Colbois et Alexandre Girouard.*

La preuve du théorème est basée sur la construction d'une fonction teste  $u$  supportée sur un voisinage de  $p$ . Puis la modification de  $M$  dans ce voisinage afin de réduire le quotient de Rayleigh de  $u$ . Comme le bord de  $M$  et  $u$  sont fixes, cela revient à réduire l'énergie de

Dirichlet  $\int_M |\nabla u|^2 dV$ . Nous illustrons le raisonnement utilisé pour réduire cette énergie avec un exemple simple : soit le demi-plan supérieure  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$  et  $p = (0, 0)$ , la fonction teste  $u(r, \theta) = \max\{0, 1 - r\}$  est radiale et est supportée sur la balle unité  $B(0, 1)$ . Pour réduire son énergie de Dirichlet, la métrique sur la balle unité est étirée radialement par  $R$  pour obtenir une nouvelle variété  $M_R$  avec la métrique plate en dehors de  $B(0, 1)$  et la métrique  $g_R = R^2 dr^2 + r^2 g_{Sphère}$  sur  $B(0, 1)$  où  $g_{Sphère}$  est la métrique sur la sphère. Avec cette nouvelle métrique, le gradient de  $u$  devient  $|\nabla u| = \frac{1}{R}$  tandis que le volume du support de  $u$  est multiplié par  $R$  (puisque'il n'est étiré que dans une seule dimension). Donc l'énergie de Dirichlet de  $u$  est

$$\int_{M_R} |\nabla u|^2 dV = \pi \int_0^1 \frac{1}{R^2} R r dr = \frac{\pi}{R}$$

et en prenant  $R$  grand, il est possible d'obtenir une énergie arbitrairement petite pour  $u$ . Pour le preuve du théorème, la métrique étirée radialement de cet exemple n'est pas directement utilisable pour deux raisons : premièrement la métrique sur  $M'$  est la métrique induite par le plongement de  $M'$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et ne peut pas être choisi arbitrairement ; deuxièmement car la métrique de l'exemple n'est pas fixe sur le bord. La preuve est à la place basée sur une construction explicite de la variété  $M'$  comme une perturbation de  $M$ .

**DÉMONSTRATION.** Sans perte de généralité, on suppose le point  $p = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $U \cap M \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$  et  $U \cap \partial M \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Pour une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , nous notons  $U_f$  le graphe de  $f$  sur  $U$ ,  $U_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$ . La variété  $M'$  sera obtenue à partir de  $M$  et de  $U_f$  par  $M' = (M \cap U^c) \cup U_f$  ce qui impose sur  $f$  la condition  $f = 0$  sur  $\partial U$ , puisque nous voulons que  $\partial M = \partial M'$  et qu'il n'y ait pas de discontinuité au niveau du rattachement de  $U_f$  à  $M \cap U^c$ .

À partir d'une fonction teste  $u$  sur  $U$ , on obtient une nouvelle fonction teste  $u_f$  sur  $U_f$  par  $u_f(x, f(x)) = u(x)$ . Pour des fonctions  $u$  et  $f$  arbitraires, nous commençons par trouver une formule explicite pour l'énergie de Dirichlet de  $u_f$  sur  $U_f$ .

Tout d'abord nous calculons le terme  $|\nabla_f u_f|^2$  où  $\nabla_f$  correspond au gradient sur l'hyper-surface  $U_f$ . Comme  $\nabla_f u_f$  est la projection de  $\nabla u_f$  sur  $U_f$ ,

$$\nabla_f u_f = \nabla u_f - \langle \nabla u_f, N_f \rangle N_f$$

où  $N_f$  est un vecteur normal à  $U_f$ , normalisé avec  $\|N_f\| = 1$ . Or

$$\nabla u_f = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, 0 \right) = (\nabla u, 0).$$

Le vecteur normal  $N_f$  est obtenu en le prenant orthogonal à l'espace tangent de  $U_f$ , engendré par les vecteurs

$$v_1 = \left( 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= \left( 0, 1, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \\
&\vdots \\
v_n &= \left( 0, 0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)
\end{aligned}$$

puis le normalisant

$$N_f = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1)$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\nabla_f u_f|^2 &= |\nabla u|^2 + \frac{\langle \nabla u, \nabla f \rangle^2 |\nabla f|^2}{(1 + |\nabla f|^2)^2} - \frac{2 \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2}{1 + |\nabla f|^2} \\
&= \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2}{1 + |\nabla f|^2}.
\end{aligned}$$

Le terme  $|\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2$  est toujours positif par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et est nul si et seulement si  $\nabla u = c \nabla f$  pour une constante  $c \neq 0$ .

Pour calculer l'énergie de  $u_f$ , il reste à trouver l'élément de volume  $dV$  sur  $U_f$ , donné par le volume du parallélotope engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  et  $N_f$  (puisque  $N_f$  est normalisé et orthogonal aux autres vecteurs) :

$$dV = \det(v_1, \dots, v_n, N_f) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant en mineur le long de la première colonne,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n \frac{\partial f}{\partial x_1} \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Le deuxième terme de la somme se calcule aussi par un développement le long de la première ligne afin d'obtenir

$$(-1)^n \frac{\partial f}{\partial x_1} \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en continuant de développer en mineurs le long de la première colonne les déterminants.

Au final,

$$dV = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (1 + |\nabla f|^2) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

et l'énergie de Dirichlet de  $u_f$  est

$$\int_{U_f} |\nabla_f u_f|^2 dV = \int_U \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 |\nabla f|^2 - \langle \nabla u, \nabla f \rangle^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx \quad (2.1.1)$$

Cette formule pour l'énergie de Dirichlet de  $u_f$  permet de voir que pour la minimiser, il suffit de choisir  $u$  et  $f$  tel que  $\nabla u = c \nabla f$  pour  $c \neq 0$  et avec  $|\nabla f|$  grand, le numérateur ne dépendant plus de  $|\nabla f|$ . Due à la condition  $f = 0$  sur  $\partial U$  et au fait que  $u$  ne peut pas être identiquement nulle sur  $\partial M \cap \partial U$ , il ne semble pas possible d'avoir  $\nabla u = c \nabla f$  en tout points de  $U$  et nous devons donc considérer plusieurs sous domaines de  $U$  pour définir  $u$  et  $f$ .

Nous construisons maintenant  $u$  et  $f$ . Pour commencer, nous définissons trois sous ensembles de  $U$  : pour  $\epsilon, \delta, \rho > 0$  suffisamment petits (pour que les ensembles soient contenus dans  $U$ ), soit  $p' = (\delta, 0, \dots, 0)$  et

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq \delta, \|x - p'\| \leq \epsilon\} \\ B &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq \delta, \|\pi x\| \leq \epsilon\} \\ C &= \{x \in U \setminus (A \cup B \cup C) \mid d(x, A \cup B \cup C) \leq \rho\} \end{aligned}$$

où  $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$  est la projection sur le bord de  $M$ . On note  $\Omega = A \cup B$  (voir figure 2.1).

Soit  $\omega$  une constante (grande) que l'on fixera à la fin. La fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \eta \left( \frac{d(x, \Omega)}{\rho} \right) x_1 F(\omega \|\pi x\|) & \text{si } x_1 \leq \delta \\ \eta \left( \frac{d(x, \Omega)}{\rho} \right) \delta F(\omega \|x - p'\|) & \text{si } x_1 \geq \delta \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où  $x_1$  est la première coordonnée de  $x$  et  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction servant à localiser  $f$  dans  $\Omega \cup C$ , par exemple :

$$\eta(x) = \max\{0, 1 - x\}$$

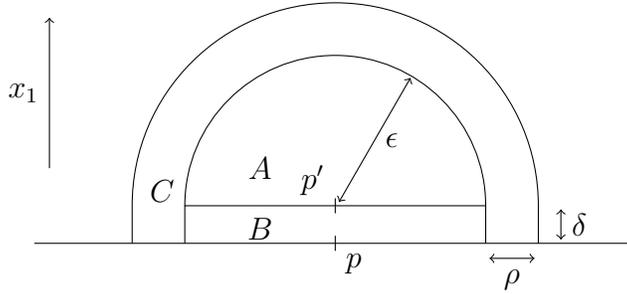


FIGURE 2.1. Division de  $U$  en sous domaines  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

La fonction  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction périodique de période 4, donnée sur la période  $[0, 4]$  par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in [0, 2] \\ x - 3 & \text{si } x \in [2, 4] \end{cases}$$

Il est important de remarquer que  $F$  est différentiable presque partout et  $|F'(x)| = 1$  aux points où  $F$  est différentiable. Aussi lorsque  $\omega$  augmente,  $U_f$  devient de plus en plus plissé (puisque le nombre de périodes de  $F$  sur  $U$  augmente) ce qui conduit à un “étirement” radial de la métrique de  $U_f$  comme dans l'exemple donné au début du chapitre. Une dernière remarque : l'hypersurface  $U_f$  obtenue à partir de cette fonction  $f$  n'est pas  $C^1$  mais il est possible de lisser  $f$  de façon à avoir une hypersurface  $C^\infty$  tout en ayant un impacte négligeable sur les résultats finaux. Nous travaillons donc comme si  $U_f$  est  $C^\infty$ .

La fonction  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\pi x\|}{\epsilon} & \text{si } x \in B \\ 1 - \frac{\|x-p\|}{\epsilon} & \text{si } x \in A \end{cases} \quad (2.1.3)$$

est dans  $H^1(M)$  et n'est pas identiquement nulle sur  $\partial M$ , ce qui permet de l'utiliser comme fonction test pour la caractérisation variationnelle des valeurs propres de Steklov. De plus  $u$  est supportée sur  $\Omega$ .

Sur  $A$ , l'énergie de Dirichlet de  $u_f$  est contrôlée par  $\omega$  : lorsque  $\omega$  est grand, l'énergie est petite, suivant l'idée illustrée au début du chapitre. En effet pour presque tout  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \pm \delta \omega \frac{x}{\|x\|} \\ \nabla u &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

et comme  $\nabla u = c \nabla f$ , l'énergie de Dirichlet est

$$\int_A |\nabla_f u_f|^2 dV = \int_A \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx_1 \dots dx_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 \omega^2}} \text{Vol } A \\
&= \frac{c_1 \epsilon^{n-2}}{\sqrt{1 + \delta^2 \omega^2}}
\end{aligned}$$

où  $c_1$  est une constante dépendante de la dimension.

Sur  $B$ ,  $\nabla u \neq c \nabla f$  mais les gradients sont suffisamment proche d'être parallèles que la méthode précédente fonctionne encore : pour presque tout  $x \in B$  :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) &= F(\omega \|\pi x\|) e_1 \pm x_1 \omega \frac{\pi x}{\|\pi x\|} \\
\nabla u(x) &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\pi x}{\|\pi x\|}
\end{aligned}$$

où  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Comme  $e_1$  et  $\pi x$  sont orthogonaux,

$$|\nabla f(x)|^2 = F(\omega \|\pi x\|)^2 + x_1^2 \omega^2.$$

L'énergie de Dirichlet de  $u_f$  sur  $B$  est alors

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla_f u_f|^2 dV &= \int_B \frac{\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon^2} F(\omega \|\pi x\|)^2}{\sqrt{1 + F(\omega \|\pi x\|)^2 + x_1^2 \omega^2}} dx_1 \dots dx_n \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_B \frac{2}{\sqrt{1 + x_1^2 \omega^2}} dx_1 \dots dx_n \\
&= c_2 \epsilon^{n-3} \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 \omega^2}} dx_1 \\
&= c_2 \epsilon^{n-3} \frac{\ln(\delta \omega + \sqrt{1 + \delta^2 \omega^2})}{\omega}
\end{aligned}$$

Au final, le quotient de Rayleigh de  $u_f$  est

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}(u_f) &\leq \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \left( c_1 \frac{\epsilon^{n-2}}{\sqrt{1 + \delta^2 \omega^2}} + c_2 \frac{\epsilon^{n-3} \ln(\delta \omega + \sqrt{1 + \delta^2 \omega^2})}{\omega} \right) \\
&= c_1 \frac{\epsilon^{-1}}{\sqrt{1 + \delta^2 \omega^2}} + c_2 \frac{\epsilon^{-2} \ln(\delta \omega + \sqrt{1 + \delta^2 \omega^2})}{\omega}
\end{aligned}$$

et en prenant  $\delta = \epsilon$  et  $\omega = \epsilon^{-3}$ ,

$$\tilde{\mathcal{R}}(u_f) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0 \tag{2.1.4}$$

Comme les constructions de  $f$  et de  $u$  sont locales, il est possible de choisir  $k + 1$  points  $p_1, \dots, p_{k+1}$  différents sur  $\partial M$  et dans  $U$ , et pour chacun de ses points, refaire cette construction avec  $\epsilon$  suffisamment petit pour obtenir des fonctions  $f_1, \dots, f_{k+1}$  et  $u_1, \dots, u_{k+1}$  de support disjoint. En prenant  $f = f_1 + \dots + f_{k+1}$  et  $M' = (M \cap U^c) \cup U_f$ , on obtient  $k + 1$

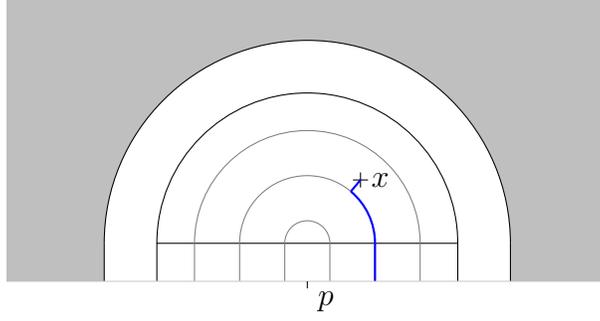


FIGURE 2.2. L'ensemble nodal  $\{x' \in U \mid f(x') = 0\}$  est représenté en gris. Un chemin entre un point  $x \in \Omega$  arbitraire jusqu'à  $\partial M'$  est montré en bleu et est de longueur bornée lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

fonctions testes  $(u_1)_f, \dots, (u_{k+1})_f$  avec pour tout  $i$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}((u_i)_f) = \mathcal{O}(\epsilon)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Par la caractérisation variationnelle des valeurs propres de Steklov, comme les  $u_1, \dots, u_{k+1}$  sont orthogonales sur  $\partial M$ , étant de support disjoint,

$$\sigma_k(M') = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.1.5)$$

□

La construction de la variété  $M'$  donnée dans cette preuve est aussi intéressante du fait que la différence de volume et de diamètre entre  $M$  et  $M'$  est bornée, et cela pour  $\epsilon \rightarrow 0$  (comme  $M'$  dépend de  $\epsilon$ ). En effet le volume de  $U_f$  est borné : en prenant  $\rho = \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(f(\Omega \cup C)) &= \int_{\Omega \cup D} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \sqrt{1 + \delta^2 \omega^2} \text{Vol}(\Omega \cup D) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\delta(\epsilon + \rho)^{n-2} + (\epsilon + \rho)^n)) \\ &= \mathcal{O}(\epsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

Pour le diamètre, soit  $x \in \Omega$  et un point  $y \in M'$ . Pour montrer que le diamètre de  $M'$  est borné quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , il suffit de trouver un chemin entre  $x$  et  $y$  de longueur bornée quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Comme le bord  $\partial M' = \partial M$  est fixé, cela revient donc à trouver un chemin de longueur bornée entre  $x$  et  $\partial M'$ , le reste du chemin se faisant le long de  $\partial M'$  puis de  $\partial M'$  jusqu'à  $y$  (cas soit trivial si  $y \in M \cap U^c$  ou déjà traité en considérant le cas de  $x$  sinon). Or pour joindre  $x$  à  $\partial M'$ , il suffit de d'abord prendre le chemin le plus court entre  $x$  et l'ensemble nodal  $\{x' \in U \mid f(x') = 0\}$  puis le chemin le plus court à l'intérieur de l'ensemble nodal jusqu'à  $\partial M$  (voir figure 2.2). La première partie de ce chemin à une longueur inférieure à  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta^2 + \frac{1}{\omega^2}}) = \mathcal{O}(\epsilon^3)$ , tandis que la seconde partie est de longueur inférieure à  $\delta + \frac{\pi}{2}\epsilon$ . Le diamètre de  $M'$  est donc borné lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

# Chapitre 3

---

## MASSE DE NEUMANN DES FONCTIONS PROPRES DE DIRICHLET SUR LES POLYTOPES

### 3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous traitons du problème de Dirichlet sur un polytope  $P$  de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce contexte, nous définissons un polytope  $P$  de dimension  $n$  comme une variété différentielle de dimension  $n$  compacte avec des coins et plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , dont chacune des faces (c'est à dire les composantes connexes de l'ensemble des points réguliers de  $\partial P$ ) est plate, i.e. comprise dans un hyperplan.

Soit  $f$  une solution normalisée  $\|f\|_{L^2} = 1$  du problème de Dirichlet dont la valeur propre est  $\lambda$  :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)f = 0 & \text{dans } P \\ f = 0 & \text{sur } \partial P \end{cases}.$$

Nous sommes intéressés par la masse de Neumann de  $f$  sur chaque face du polytope, définie sur une face  $F_i$  par

$$\int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV$$

où  $\partial_\nu$  est la dérivée normale sur  $F_i$ .

Dans le cas d'une variété différentielle compacte dans  $\mathbb{R}^n$ , des bornes inférieures et supérieures pour la masse de Neumann d'une solution au problème de Dirichlet sur la frontière de la variété au complet sont connues [11]. Pour le cas plus spécifique d'un simplexe  $T$  de dimension  $n$ , Christianson a montré une équidistribution de la masse de Neumann sur chacune des faces [4] :

$$\int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{2 \text{Vol}_{n-1}(F_i)}{n \text{Vol}_n(T)} \lambda \quad (3.1.1)$$

où  $\text{Vol}_n$  et  $\text{Vol}_{n-1}$  sont les volumes de dimension  $n$  et  $n - 1$  respectivement.

### 3.2. MASSE DE NEUMANN ET POLYTOPES

Dans cette section, nous cherchons à étendre les résultats de Christianson à des polytopes plus généraux que les simplexes. Comme l'a montré Christianson dans [5] avec l'exemple d'un carré  $C = [0, 2\pi]^2$ , l'égalité précédente est fautive en générale. En effet, dans ce cas on peut considérer les fonctions propres  $f_{kl}(x, y) = \frac{1}{\pi} \sin(kx) \sin(ly)$  avec comme valeur propre  $\lambda_{kl} = k^2 + l^2$ , où  $k$  et  $l$  sont des entiers. On a alors, pour la masse de Neumann sur la face  $[0, 2\pi] \times \{0\}$ ,

$$\int_0^{2\pi} |\partial_\nu f_{kl}(x, 0)|^2 dx = \frac{l^2}{\pi}.$$

Ce résultat ne dépendant pas de  $k$ , il est clair qu'il n'est pas possible d'avoir une égalité similaire à (3.1.1). Par contre, on peut remarquer que la somme sur toutes les faces donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |\partial_\nu f_{kl}(x, 0)|^2 dx + \int_0^{2\pi} |\partial_\nu f_{kl}(1, y)|^2 dy \\ & + \int_0^{2\pi} |\partial_\nu f_{kl}(x, 1)|^2 dx + \int_0^{2\pi} |\partial_\nu f_{kl}(0, y)|^2 dy \\ & = \frac{2}{\pi}(k^2 + l^2) = \frac{\text{Vol}_1(\partial C)}{\text{Vol}_2(C)} \lambda_{kl}. \end{aligned}$$

Cet exemple montre que, en général, une équidistribution de la masse de Neumann sur chacune des faces d'un polytope n'est pas envisageable mais en considérant la somme sur l'ensemble des faces il semble être possible d'obtenir une relation simple entre la masse de Neumann d'une fonction propre et sa valeur propre associée.

Nous définissons d'abord quelques notations pour la suite de ce chapitre. Pour un polytope  $P$  dans  $\mathbb{R}^n$  ayant comme faces  $F_1, \dots, F_k$ , et un point  $p \in \mathbb{R}^n$ , on écrit  $C_i(p)$  pour la pyramide de base la face  $F_i$  et de sommet  $p$ . Le volume avec signe de  $C_i(p)$  est dénoté  $\text{Vol}_n^*(C_i(p))$  et correspond au volume de  $C_i(p)$  avec le signe donné par le signe de  $-\langle \nu, w \rangle$  où  $\nu$  est le vecteur normal à  $F_i$  pointant vers l'extérieure de  $P$  et  $w$  est n'importe quel vecteur correspondant à une translation d'un point de la base  $F_i$  au sommet  $p$ . Ce signe est choisi pour que si le polytope est convexe et que  $p$  est à l'intérieur de  $P$  alors tous les  $\text{Vol}_n^*(C_i(p))$  sont positifs, tandis que certains volumes seront négatifs si  $p$  est en dehors du polytope. Se référer à la figure (3.1) pour un exemple. De même, on dénote par  $\text{dist}^*(p, F_i)$  la distance avec signe entre  $p$  et  $F_i$ , son signe étant le même que celui de  $\text{Vol}_n^*(C_i(p))$ .

Avec cette notation, notre résultat principal est

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $P$  un polytope de dimension  $n$  de faces  $F_1, \dots, F_k$  et soit  $p \in \mathbb{R}^n$  un point arbitraire. Alors*

$$\sum_{i=1}^k \text{dist}^*(p, F_i) \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = 2\lambda \quad (3.2.1)$$

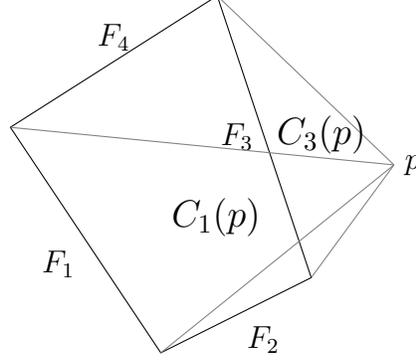


FIGURE 3.1. Les pyramides  $C_1(p)$  et  $C_3(p)$  d'un quadrilatère sont dessinées, avec ce choix spécifique du point  $p$  rendant  $\text{Vol}_2^*(C_1(p))$  positif et  $\text{Vol}_2^*(C_3(p))$  négatif.

ou de manière équivalente

$$\sum_{i=1}^k \frac{\text{Vol}_n^*(C_i(p))}{\text{Vol}_{n-1}(F_i)} \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{2\lambda}{n} \quad (3.2.2)$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, après une translation dans  $\mathbb{R}^n$ , on suppose  $p$  fixé à l'origine. Soit  $p_i$  le point d'intersection de l'hyperplan contenant la face  $F_i$  et sa ligne normale passant par  $p$ . Par la suite, par abus de notation, les points de  $\mathbb{R}^n$  sont aussi considérés comme des vecteurs de l'origine jusqu'à ces points.

Nous considérons l'égalité de Rellich pour les valeurs propres de Dirichlet [23] (voir aussi [11, 2] pour une preuve simple) :

$$2\lambda = \int_{\partial P} \langle \nu, q \rangle |\partial_\nu f|^2 dV(q) \quad (3.2.3)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien et  $dV$  l'élément de volume sur  $\partial P$  induit par la métrique euclidienne. On calcule cette intégrale sur chaque face  $F_i$  séparément, en notant  $\nu_i$  le vecteur normal à  $F_i$ . On remarque que  $F_i \subset p_i + p_i^\perp$  où  $p_i^\perp$  est l'hyperplan orthogonal à  $p_i$ , et par construction,  $p_i$  et  $\nu_i$  sont colinéaire d'où  $\langle \nu_i, q \rangle = \langle \nu_i, p_i \rangle$  pour tout  $q \in F_i$ . Donc

$$\int_{F_i} \langle \nu_i, q \rangle |\partial_\nu f|^2 dV(q) = \langle \nu_i, p_i \rangle \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV.$$

Après avoir additionné l'intégrale de chaque face, la première égalité du théorème est obtenue

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \int_{\partial P} \langle \nu, q \rangle |\partial_\nu f|^2 dV(q) = \sum_{i=1}^k \langle \nu_i, p_i \rangle \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV \\ &= \sum_{i=1}^k |p_i| \langle \nu_i, p_i / |p_i| \rangle \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV \\ &= \sum_{i=1}^k \text{dist}^*(p, F_i) \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV. \end{aligned}$$

Ici on a utilisé le fait que  $\text{dist}^*(p, F_i) = \text{dist}(p, F_i) \langle \nu, p_i/|p_i| \rangle = |p_i| \langle \nu_i, p_i/|p_i| \rangle$ .

Finalement, en utilisant la formule pour le volume d'une pyramide,  $\text{Vol}_n(C_i(p)) = \frac{1}{n} \text{dist}(p, F_i) \text{Vol}_{n-1}(F_i)$ , on obtient

$$\frac{2\lambda}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{\text{Vol}_n^*(C_i(p))}{\text{Vol}_{n-1}^*(F_i)} \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV$$

□

**Remarque 3.2.1.** *Le résultat de Christianson pour les simplexes est un cas particulier de (3.2.2), où le point  $p$  est choisi comme un des sommets du simplexe  $T$ . Toutes les pyramides  $C_i(p)$  sont alors de volumes nuls sauf celle correspondant à la face opposée au sommet  $p$ , qui est elle de volume  $\text{Vol}_n(T)$ .*

On remarque que s'il existe un point  $p$  tel que toutes les pyramides  $C_1(p), \dots, C_k(p)$  aient le même volume signé, alors l'égalité (3.2.2) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^k \frac{\int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV}{\text{Vol}_{n-1}(F_i)} = \frac{2k\lambda}{n \text{Vol}_n(P)}. \quad (3.2.4)$$

Un tel point n'existe pas pour tout polytope. En effet, pour que chaque  $C_i(p)$  ait le même volume signé, il est nécessaire que  $\text{Vol}_n^*(C_i(p)) = \frac{\text{Vol}_n(P)}{k}$ . Donc pour un coté  $F_i$  fixé, il faut que le point  $p$  se trouve sur l'hyperplan  $H_i$  parallèle à  $F_i$  située à une distance  $\frac{n \text{Vol}_n(P)}{k \text{Vol}_{n-1}(F_i)}$  de  $F_i$  (parmi les deux hyperplans possible,  $H_i$  est choisi pour que  $\text{Vol}_n^*(C_i(p))$  soit positif). Donc pour qu'il existe un point  $p$  tel que  $\text{Vol}_n^*(C_1(p)) = \dots = \text{Vol}_n^*(C_k(p))$  il est nécessaire que l'intersection de tous les hyperplans  $H_i$  soit non nulle. Or en considérant le cas simple d'un trapèze, il est clair que cette condition n'est pas toujours réalisée. Par contre, il est possible de trouver des conditions géométriques impliquant l'égalité des volumes signés  $\text{Vol}_n(C_1(p)), \dots, \text{Vol}_n(C_k(p))$ , par exemple

**Corollaire 3.2.1.** *Si  $Q$  est un quadrilatère dont l'une des diagonales intersecte l'autre en son milieu, alors il existe  $p$  tel que les  $\text{Vol}_2^*(C_i(p))$  sont égaux et*

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV}{\text{Vol}_1(F_i)} = \frac{4\lambda}{\text{Vol}_2(Q)}. \quad (3.2.5)$$

**Remarque 3.2.2.** *Ce corollaire s'applique en particulier aux parallélogrammes.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A, B, C, D$  les sommets du quadrilatère et sans perte de généralité, la diagonale  $AC$  intersecte  $BD$  en son milieu que l'on nomme  $E$  (voir figure 3.2).

Nous allons montrer qu'en prenant  $p$  au milieu du segment  $AC$ , les triangles  $ABp, BCp, Cdp$  et  $Dap$  ont la même aire, nous permettant alors d'utiliser l'égalité (3.2.4).

Soit  $B'$  et  $D'$  la projection orthogonale sur la droite  $AC$  de  $B$  et  $D$  respectivement. Les angles  $\widehat{B'EB}$  et  $\widehat{DED'}$  sont égaux et de même  $\widehat{BB'E} = \widehat{DD'E}$ . Donc les triangles  $B'BE$  et

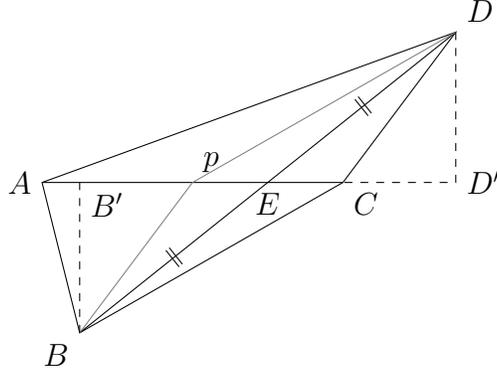


FIGURE 3.2. Exemple d'un quadrilatère  $ABCD$  ayant sa diagonale  $AC$  qui intersecte le segment  $BD$  en son milieu. Les points utilisés dans la preuve sont illustrés sur cette figure

$DD'E$  sont semblables. Mais comme  $E$  est le milieu du segment  $BD$ , les côtés  $BE$  et  $ED$  ont la même longueur ce qui implique que les triangles  $B'BE$  et  $DD'E$  sont isométriques. Les longueurs de  $BB'$  et  $DD'$  sont donc égales.

En prenant  $p$  au milieu du segment  $AC$ , on obtient que les segments  $Ap$  et  $Cp$  sont de même longueur. Alors les triangles  $ABp$ ,  $BCp$ ,  $CDp$  et  $DAp$  ont la même aire. L'égalité (3.2.4) donne alors le résultat désiré.  $\square$

Les égalités du théorème 3.2.1 peuvent aussi être simplifiées en considérant une classe de polytopes plus restreinte

**Corollaire 3.2.2.** *Si  $P$  est un polytope tangent, c'est à dire qu'il existe une sphère inscrite tangente à toutes ses faces, alors*

$$\int_{\partial P} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial P) 2\lambda}{\text{Vol}_n(P) n} \quad (3.2.6)$$

DÉMONSTRATION. Pour un polytope tangent  $P$ , on choisi le point  $p$  au centre de la sphère inscrite. Les distances  $\text{dist}^*(p, F_i)$  sont alors toutes égales au rayon  $r$  de la sphère inscrite. Par la première égalité du théorème 3.2.1

$$\sum_{i=1}^k \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{2\lambda}{r}$$

Le volume de la frontière  $\partial P$  est

$$\text{Vol}_{n-1}(\partial P) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}_{n-1}(F_i) = \sum_{i=1}^k \frac{n \text{Vol}_n(C_i(p))}{r} = \frac{n}{r} \text{Vol}_n(P)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^k \int_{F_i} |\partial_\nu f|^2 dV = \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial P) 2\lambda}{\text{Vol}_n(P) n}$$

$\square$

## Références

---

- [1] Vladimir BOBKOV et Enea PARINI : On the higher Cheeger problem. *arXiv preprint arXiv :1706.07282*, 2017.
- [2] Peter BUSER : A note on the isoperimetric constant. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 15(2):213–230, 1982.
- [3] Jeff CHEEGER : A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. *Problems in analysis*, pages 195–199, 1970.
- [4] Hans CHRISTIANSON : Equidistribution of Neumann data mass on simplices and a simple inverse problem. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [5] Hans CHRISTIANSON : Equidistribution of Neumann data mass on triangles. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [6] Bruno COLBOID, Ahmad El SOUFI et Alexandre GIROUARD : Compact manifolds with fixed boundary and large Steklov eigenvalues. *arXiv preprint arXiv :1701.04125*, 2017.
- [7] Bruno COLBOIS, Alexandre GIROUARD et Katie GITTINS : Steklov eigenvalues of submanifolds with prescribed boundary in Euclidean space. *arXiv preprint arXiv :1711.06458*, 2017.
- [8] Herbert FEDERER : *Geometric measure theory*. Springer–Verlag, 1969.
- [9] Carolyn GORDON, David WEBB et Scott WOLPERT : Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110(1):1–22, 1992.
- [10] Asma HASSANNEZHAD et Laurent MICLO : Higher order Cheeger inequalities for Steklov eigenvalues. *arXiv preprint arXiv :1705.08643*, 2017.
- [11] Andrew HASSELL et Terence TAO : Upper and lower bounds for normal derivatives of Dirichlet eigenfunctions. *Mathematical Research Letters*, 9(3):289–305, 2002.
- [12] Ernst HEINTZE et Hermann KARCHER : A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*, 11(4):451–470, 1978.
- [13] Pierre JAMMES : Une inégalité de Cheeger pour le spectre de Steklov. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(3):1381–1385, 2015.
- [14] Mark KAC : Can one hear the shape of a drum ? *The American Mathematical Monthly*, 73(4):1–23, 1966.
- [15] James R LEE, Shayan Oveis GHARAN et Luca TREVISAN : Multiway spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities. *Journal of the ACM (JACM)*, 61(6):37, 2014.

- [16] James R LEE et Assaf NAOR : Extending Lipschitz functions via random metric partitions. *Inventiones mathematicae*, 160(1):59–95, 2005.
- [17] Francesco MAGGI : *Sets of finite perimeter and geometric variational problems : an introduction to Geometric Measure Theory*. Cambridge University Press, 2012.
- [18] Henry P MCKEAN et Isadore M SINGER : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 1(1):43–69, 1967.
- [19] Frank MORGAN : Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(12):5041–5052, 2003.
- [20] Frank MORGAN : *Geometric measure theory : a beginner's guide*. Academic press, 2009.
- [21] Antoine MÉTRAS : Rellich–Christianson type identities for the Neumann data mass of Dirichlet eigenfunctions on polytopes. *Annales mathématiques du Québec*, 42(1):95–99, 2018.
- [22] Enea PARINI : *Asymptotic behaviour of higher eigenfunctions of the  $p$ -Laplacian as  $p$  goes to 1*. Thèse de doctorat, Universität zu Köln, 2009.
- [23] Franz RELICH : Darstellung der Eigenwerte von  $\Delta u + \lambda u = 0$  durch ein Randintegral. *Mathematische Zeitschrift*, pages 635–636, 1940.
- [24] Antonio ROS : The isoperimetric problem. *Global theory of minimal surfaces*, 2:175–209, 2001.