Université de Montréal

SUR LE H-PRINCIPE POUR LES IMMERSIONS COISOTROPES ET LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES ASSOCIÉES

par

Jean-Philippe Chassé

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques pures

août 2018

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

SUR LE H-PRINCIPE POUR LES IMMERSIONS COISOTROPES ET LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES ASSOCIÉES

présenté par

Jean-Philippe Chassé

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea

(président-rapporteur)

François Lalonde

(directeur de recherche)

Vestislav Apostolov

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

25 septembre 2018

Sommaire

Ce mémoire porte sur l'étude des fibrés vectoriels symplectiques et de leurs sous-fibrés spéciaux. Au premier chapitre, nous rappellerons la définition de ces fibrés et démontrerons un résultat fondamental permettant de réduire l'étude des fibrés symplectiques à celle des fibrés complexes. Ce résultat sera également essentiel à l'exploration de la topologie symplectique faite au second chapitre. De par son but expositoire, ledit chapitre est assez indépendant des autres, quoiqu'il aide grandement à placer les résultats à suivre dans l'ensemble de la topologie symplectique. Au troisième chapitre, nous rappellerons quelques notions nécessaires à la compréhension des h-principes et énoncerons la famille de h-principes qui nous sera d'importance pour la suite des choses. Le quatrième chapitre révisera les travaux de Lalonde dans [**17**] et [**16**] sur les classes caractéristiques isotropes. Ces classes de cohomologie apparaissent dans l'étude des immersions isotropes dans l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ grâce à une forme du h-principe introduit au chapitre précédent. Finalement, le cinquième et dernier chapitre reprendra les idées du chapitre précédent pour définir des classes caractéristiques coisotropes qui apparaissent dans l'étude des immersions coisotropes grâce à un autre h-principe de la même famille. Ces classes s'avéreront cependant être identique à leur analogue isotrope, ne détectant pas les différences existant pourtant entre les h-principes isotrope et coisotrope, malgré leurs similitudes, dont la dernière section du mémoire est dédiée à l'exposition.

Mots clefs: fibrés vectoriels symplectiques, topologie symplectique, classes caractéristiques, h-principe, immersions isotropes, immersions coisotropes.

Summary

This master's thesis is concerned with symplectic vector bundles and their special subbundles. In the first chapter, we will recall the definition of those bundles and will show a fundamental result which reduces the study of symplectic vector bundles to the one of complex vector bundles. This result will also be crucial for the exposition of symplectic topology in the next chapter. The second chapter serves as a broad exposition of symplectic topology for those unfamiliar with the subject and thus, is fairly independent from the others. However, the chapter greatly helps to understand how the results of the subsequent chapters fit in the whole of symplectic topology. In the third chapter, we will recall some notions necessary to the understanding of h-principles and enunciate the theorem that will be important to us for the rest of the thesis. The fourth chapter will revisit the work of Lalonde in [**17**] and [**16**] on isotropic characteristic classes. Those cohomology classes appear in the study of isotropic immersions into the standard symplectic space $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ thanks to a form of the previously introduced h-principle. Finally, the fifth and last chapter of this master's thesis will use the ideas of the previous chapter in order to define coisotropic characteristic classes, which will appear in the study of coisotropic immersions thanks to another h-principle in the same family. Those classes will turn out to be the same as their isotropic counterpart and thus, will not detect the differences that exist between the isotropic and coisotropic h-principles. A discussion of these differences will serve as a closer to the chapter.

Keywords: symplectic vector bundle, symplectic topology, caracteristic classes, h-principle, isotropic immersions, coisotropic immersions.

Table des matières

Remerciements

Comme toute autre entreprise supposément individuelle, ce mémoire n'aurait pas été possible sans les conseils et le support de maintes personnes. Je tâcherai ici d'en faire une liste plus ou moins exhaustive et de leur donner les remerciements qui leur sont dus.

Je veux tout d'abord remercier mon directeur de recherche François Lalonde. Son dynamisme inébranlable et sa passion enivrante pour les mathématiques ont été des ingrédients essentiels à ma propre motivation de poursuivre des études en mathématiques. Je lui suis également infiniment reconnaissant de m'avoir accordé le temps et les moyens monétaires pour apprendre les rudiments de la topologie lorsque j'étais au baccalauréat.

Je veux également remercier mon codirecteur officieux Octav Cornea. Nos rencontres quasi-hebdomadaires m'ont aidé à me calmer lors des demandes de bourse et m'ont forcé à pousser davantage ma compréhension. Je ne saurais exprimer ma gratitude pour l'aide qu'il m'a offert alors que je ne lui étais qu'un étudiant inconnu à l'époque.

Le soutien du reste de l'équipe de symplectique a été des plus appréciés. Je ne saurais assez souligner le rôle clef qu'a joué les commentaires de Jordan Payette dans mon développement mathématique et plus précisément, dans le développement de ce mémoire; la fin de celui-ci serait beaucoup moins fournie sans ses observations. Nos longs échanges de courriel seront toujours appréciés. Je tiens également à remercier Alex Perrier pour avoir éclairci mes incompréhensions dans plusieurs cours et pour savoir animer les discussions. Les bons échanges que j'ai eu avec Noé Aubin-Cadot, Dominique Rathel-Fournier et Dustin Connery-Grigg sont également à souligner. À cette liste, je me dois d'adjoindre Jean Lagacé, qui m'a essentiellement appris l'analyse.

Je tiens à remercier le professeur Luc Vinet pour m'avoir pris comme stagiaire après une seule année de baccalauréat et pour avoir accepté de remplir toutes ces demandes de bourse par la suite. De plus, c'est grâce à son cours de compléments de mécanique quantique et des discussions autour que j'ai appris le plus de physique.

Malgré une bureaucratie parfois opaque, je remercie les organismes subventionnaires CRSNG et FRQNT pour leur financement soutenu tout au long de cette maîtrise.

Je tiens à remercier les trois membres du jury de ce mémoire, à savoir François Lalonde, Octav Cornea et Vestislav Apostolov, pour leur lecture de ces quelques cent pages et pour leurs commentaires.

Je veux remercier les nombreux amis, amies et autres acolytes pas encore mentionnés que je me suis fait au cours de mes études en physique et en mathématiques, et sans qui celles-ci auraient été terribles. Tout d'abord, l'impact de la joie de vivre et de la gentillesse de l'intrépide Pascale Dinel sur mon moral ne pourrait pas être assez relevé; ses mots ailés ont su me soulever lorsqu'il le fallait. Je me dois également de souligner sa patience sans faille lorsque je me lance dans une tirade sur les mathématiques. Je remercie la sagace Camille Claing pour m'avoir appris à me laisser aller par moment et pour son support dans les temps durs. Ses idées et sa force de caractère m'impressionnent perpétuellement et mènent toujours à quelque chose d'intéressant. L'amicalité contagieuse et l'impressionnant savoir seuls du pensif Alexis Langlois-Rémillard lui accorderaient une place dans ces remerciements. Cependant, il se trouve qu'il est également un homme attendrissant avec qui je ne cesse d'avoir les plus intéressantes discussions. Je remercie également le divin Jean-Pascal Guévin qui a su cohabiter avec moi pendant deux ans. Nos débats et mauvaises blagues ont illuminé cette caverne qui nous servait d'appartement.

Je tiens également à remercier mes autres illustres compagnons de mathématiques et physique: le discret Antoine Savard, un homme qu'il ne faut pas sous-estimer et mon camarade de dîner à l'assiduité défaillante, l'honnête Pierre-Alexandre Mailhot, qui plus que quiconque apporte la joie au coeur des gens, et l'absent Lucas Iannitello, un véritable réservoir à bonnes discussions. Je me dois également de remercier le curieux Guillaume Laplante-Anfossi pour ses bonnes questions et sa présence. Du côté du département de physique, je veux d'abord remercier la courageuse Amélie Desmarais pour m'avoir poussé à faire du sport et, plus généralement, pour sa bienveillance. Je tiens également à remercier mes partenaires de festoiement: la décontractée Sophie Berthelette, qui est toujours de bonne compagnie, et l'inébranlable Patrice Béchard, qui sait toujours allumer la soirée. Cette section ne serait pas complète sans la mention de l'adorable Eli Martel, qui sait réchauffer mon coeur à chaque fois que nous nous rencontrons. Du côté du département des mathématiques et de la statistique, je tiens à remercier mes camarades de pause-café qui ont permis d'éliminer l'isolement des bureaux. En ce sens, un remerciement spécial doit aller au bienheureux Jonathan Godin, source inépuisable de café et de ludiques discussions.

Je n'oublie pas non plus les amies et amis que je me suis fait en périphérie de ma maîtrise et de mon baccalauréat. Je tiens à remercier particulièrement l'inénarrable Nina Parenteau pour nos longues discussions dans un parc et la romanesque Juliette Palardy-Proulx pour ces amusantes soirées passées ensemble. Toutes deux sont des modèles d'acceptation de soi qui rayonnent de par leurs propos francs.

Je ne saurais oublier l'influence qu'ont eu sur moi mes amis et amies de ma ville natale de Trois-Rivières. Plus particulièrement, je tiens à remercier le frétillant Ludovic Champagne et l'imposant Guillaume Veillet pour toutes ces discutions et tous ces bons moments que nous avons partagés aux cours des années, trop pour que je puisse même commencer à les énumérer ici. Il me faut également souligner l'apport fondamental de la sensible Rose Marie à la réalisation de plusieurs de ces moments. Je tiens à remercier aussi le furtif Philippe Chiasson, ami depuis la tendre enfance avec qui je partage encore ma grande passion pour le cinéma et la musique.

Finalement, je veux remercier ma mère Nathalie Vallières, mon père Jean-François Chassé, ma soeur Enrika Chassé et ma grand-mère Fleurette Larocque pour leur support à travers ces longues études que j'ai décidé d'entreprendre et leur acceptation de mon choix de carrière peu orthodoxe.

Introduction

Les sujets abordés dans ce mémoire prennent leur origine dans l'étude des immersions et plongements de variétés abstraites dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$. Cette étude avait été entamée par Whitney vers la moitié du XX^e siècle avec ses célèbres théorèmes d'immersion et de plongement [**27**], mais c'est vraiment dans les travaux de Smale [**23**] et Hirsch [**12**] qu'elle a pris sa saveur moderne, pour être finalement cristallisée dans les fameux h-principes de Gromov [**9**]. Au coeur des résultats de Smale et Hirsch se trouve un concept clef à cette investigation, celui des classes caractéristiques.

L'idée générale d'une classe caractéristique est simple: associer à chaque fibré vectoriel sur un espace topologique donné X un élément non-homogène de son anneau de cohomologie $H^*(X; A)$ dans un certain anneau de coefficients A. Pratiquement, ces classes doivent respecter certaines propriétés quant au rang des fibrés, aux rappels par une application continue et à la somme de Whitney de fibrés vectoriels. Ces propriétés font en sorte que si c est une classe caractéristique, elle admet un inverse multiplicatif $\bar{c}$, et l'existence d'une immersion $f : M \to \mathbb{R}^{m+k}$ pour une variété M de dimension m force que

$$\bar{c}_i(TM) = 0$$

pour tout $i > k$, où $\bar{c}_i$ est la composante homogène de degré i de $\bar{c}$. Ainsi, le problème subtil de topologie différentielle sur l'existence d'une immersion dans l'espace euclidien a des conséquences algébriques simples à vérifier, puisqu'elles ne dépendent que de la topologie de M. Par exemple, c'est avec ce genre d'idée que nous pouvons démontrer que $\mathbb{R}P^{2^r}$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{2^r+k}$ si $k < 2^r - 1$. Ceci démontre que la borne obtenue par Whitney dans son théorème d'immersion est optimale.

Entre alors en jeu le théorème de Smale-Hirsch: l'existence d'une immersion d'une variété M de dimension m dans une variété N de dimension $n > m$ est équivalente à l'existence d'un monomorphisme de fibrés $TM \to TN$. Ceci permet de démontrer que dans plusieurs contextes, l'annulation de certaines classes caractéristiques du fibré tangent n'est pas seulement une condition nécessaire à l'existence d'une immersion, mais elle est également suffisante. Par exemple, Hirsch a pu ainsi démontrer qu'il existe une immersion $M \to \mathbb{R}^{2m-2}$ lorsque M est une variété fermée de dimension $m \equiv 1 \mod 4$, puisqu'alors la classe caractéristique de Stiefel-Whitney duale $\bar{w}_{m-1}(TM)$ s'annule.

Autour du théorème de Smale-Hirsch apparurent plusieurs autres théorèmes à la même saveur, comme le célèbre théorème de plongement de Nash. Ceci mena Gromov à formuler une idéologie plaçant tous ces théorèmes dans la même famille: les h-principes. Essentiellement, un h-principe permet de relier la topologie d'un espace d'immersions ou de submersions qui a les propriétés nous intéressant à un espace de morphismes de fibrés *a priori* plus simple. Cette idée s'est avérée être particulièrement puissante et a permis, entre autres, à Haefliger de classifier les feuilletages d'une variété ouverte [**10**]. Les h-principes ont également été particulièrement utiles en topologie symplectique, sujet dans lequel réside ce mémoire.

En fait, les h-principes forment l'épine dorsale du camp de la flexibilité en topologie symplectique. L'autre camp, celui de la rigidité, se trouve à l'opposé des objectifs de ce mémoire et, de ce fait, ne sera pas abordé ici. Néanmoins, il est primordial de souligner le rôle central des résultats de rigidité dans la topologie symplectique moderne. Dans les deux camps, l'objet qui s'est avéré jouer le rôle le plus important aux développements au cours des trente dernières années est la sous-variété lagrangienne. Ce type de sous-variétés est essentiel à la théorie puisqu'il permet d'interpréter géométriquement plusieurs problèmes de divers domaines des mathématiques et de la physique et se comporte assez bien pour obtenir des résultats explicites.

Cependant, dans les dernières années, il s'est révélé que les sous-variétés coisotropes pourraient également jouer un rôle d'importance. Par exemple, Kerman et Lalonde ont utilisé dans [**15**] la géométrie de ces objets pour obtenir une condition naturelle pour que l'isotopie hamiltonienne minimise la partie positive de la norme de Hofer. La généralisation de la théorie des intersections de sous-variétés lagrangiennes au cas coisotrope par Ginzburg dans [**6**] a mené à plusieurs développements intéressants, que nous ne citerons pas tous ici par concision. De plus, les déformations lisses de ces sous-variétés ont été étudiées par Oh et Park dans [**21**]. Finalement, Kapustin et Orlov ont argumenté dans [**14**] en faveur de l'extension de la catégorie de Fukaya avec des sous-variétés coisotropes dans le cadre de l'étude de la symétrie miroir homologique.

Motivé par ces divers développements, le but de ce mémoire sera d'explorer les phénomènes de flexibilité apparaissant dans l'étude des immersions coisotropes. Plus précisément, nous étudierons les conséquences du h-principe coisotrope et son lien avec des classes caractéristiques coisotropes.

Au premier chapitre, nous donnerons la définition d'un fibré symplectique et discuterons des sous-fibrés qui seront d'importance pour la suite. Ceci nous mènera à l'étude des structures complexes compatibles avec une structure symplectique et à la démonstration de leur existence. Après quelques travaux sur les groupes structuraux des fibrés symplectiques et complexes, nous en découlerons l'équivalence entre les deux notions. Nous terminerons le chapitre par une brève exposition des classes caractéristiques de Chern, décrivant les fibrés complexes, et de la classe de Maslov, décrivant les sous-fibrés lagrangiens.

Le deuxième chapitre développera les notions de base de la topologie symplectique et se voudra une exposition assez large du sujet. Après les définitions et quelques résultats de base, nous étudierons les voisinages des sous-variétés d'intérêt et la structure du groupe des difféomorphismes hamiltoniens sur une variété symplectique fermée dans le groupe des symplectomorphismes. À travers toutes ces explorations, le résultat sur l'existence d'une structure presque complexe compatible du chapitre précédent jouera un rôle central. Néanmoins, une bonne partie de ce chapitre est indépendant du reste du mémoire et sert surtout à cerner ce qu'est la topologie symplectique. La seule partie importante de la théorie qui sera omise sera celle sur les courbes J-holomorphes, puisqu'elle réside entièrement dans le camp de la rigidité et demande beaucoup de temps à introduire.

Au troisième chapitre, nous introduirons finalement formellement les h-principes. Ceci demande cependant l'introduction de la notion de jets d'une application et donc, la première partie du chapitre sera dédiée à cela. Le chapitre se terminera avec l'énonciation de la famille de h-principes qui sera à la base des résultats des deux derniers chapitres.

Le quatrième chapitre revisitera les travaux de Lalonde dans **[17]** et **[16]** sur les classes caractéristiques isotropes. Nous y introduirons une nouvelle notion de fibrés isotropes, que nous appellerons abstraits, classifiés par la grassmannienne isotrope. Ceci mènera à la définition des classes caractéristiques appropriées, puis à l'étude de leur lien avec les immersions isotropes dans l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ en utilisant le h-principe isotrope introduit au chapitre précédent. Nous clorons le chapitre avec un calcul de l'anneau de cohomologie de la grassmannienne isotrope, terminant ainsi l'étude de ces classes.

Finalement, le dernier chapitre suivra les idées du chapitre précédent pour définir des classes caractéristiques coisotropes et étudier leur lien avec les immersions coisotropes dans $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Ces classes s'avéreront cependant être identique à leur analogue isotrope, ne détectant pas les différences existant pourtant entre les h-principes isotrope et coisotrope. La dernière section du mémoire sera dédiée à une discussion autour desdites différences et à des spéculations sur un possible h-principe coisotrope plus général sur la base de ces différences.

Comme la lecture de cette introduction le laisse deviner, plusieurs notions seront assumées dans ce mémoire. Ainsi, nous assumerons que les lecteurs et lectrices ont une connaissance en topologie algébrique et géométrie différentielle équivalente à un premier cours sur le sujet. Pour ceux et celles n'ayant pas eu la chance d'avoir de tel cours, nous conseillons le livre gratuit de topologie algébrique de Hatcher [**11**], quoique l'aspect plus en profondeur du livre de Spanier [**24**] puisse être apprécié, et le détaillé livre de géométrie différentielle de Lee [**18**]. Pour les physiciennes et physiciens, l'introduction de la géométrie différentielle par la mécanique classique de Arnol'd dans [**3**] sera appréciée. De plus, plusieurs notions sur les fibrés vectoriels seront nécessaires; l'excellent livre de Milnor et Stasheff [**20**] donne une bonne introduction au sujet et à celui des classes caractéristiques, mais il faut aller aux classiques livres de Husemoller [**13**] ou de Steenrod [**25**] pour tout ce qui a trait aux groupes structuraux. Bref, il y a un océan de savoirs sur le sujet et nous espérons que la lectrice ou le lecteur n'hésitera pas à s'y saucer avant de débuter la lecture de ce mémoire.

Chapitre 1

Fibrés symplectiques

Dans ce chapitre, nous établissons quelques faits fondamentaux sur les fibrés vectoriels équippés d'une forme symplectique qui s'avèront essentiels lorsque aborderons les variétés symplectiques. Ces faits permettront également de mieux comprendre les résultats concernant les fibrés coisotropes présentés à la fin de ce mémoire. Nous suivrons principalement le chapitre 2 de [**19**] en adaptant certaines preuves sur les espaces vectoriels aux cas des fibrés.

1.1. Notions de base

Définition 1.1.1. *Un **fibré symplectique** sur un CW-complexe X est une paire (η,Ω), où η est un fibré vectoriel réel sur X et Ω est une section continue de $\eta^* \wedge \eta^*$ telle que pour tout $x \in X$, $\Omega_x := \Omega|_{\pi_\eta^{-1}(x)}$ soit non-dégénérée comme forme bilinéaire. Deux fibrés symplectiques (η_i,Ω_i) seront dits **isomorphes au sens symplectique** s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $\phi : \eta_1 \to \eta_2$ tel que $\phi^*\Omega_2 = \Omega_1$.*

Remarque 1.1.2. *Dans le cas où le CW-complexe X est en réalité une variété lisse, nous allons également demander que le fibré et la section soient tous deux lisses. Puisque cela ne change strictement rien aux preuves qui vont suivre, nous allons uniquement démontrer les résultats dans le cas continu, mais cette demande supplémentaire que les structures soient lisses lorsque la base l'est sera toujours sous-entendue.*

Autrement dit, sur chaque fibre $F_x := \pi_\eta^{-1}(x)$ de η, Ω_x est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée, c'est-à-dire (F_x,Ω_x) est un espace vectoriel symplectique, et Ω dépend continuement de x. En particulier, le petit lemme d'algèbre linéaire élémentaire suivant, que nous allons nous permettre d'uniquement citer, nous assure que η est un fibré de rang pair:

Lemme 1.1.3. *Soient E, un espace vectoriel réel, et β, une forme bilinéaire antisymétrique sur E. Alors, il existe une base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_p\}$ telle que si $b, b' \in \mathcal{B}$,*

$$\beta(b,b') = \begin{cases} 1 & \text{si } b = u_i,\ b' = v_i \text{ pour un } i \in \{1, \ldots, n\} \\ -1 & \text{si } b = v_i,\ b' = u_i \text{ pour un } i \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, si β est non-dégénérée, il faut que $p = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y aie pas de w_i). En particulier, $\phi : E \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\phi(u_i) = p_i$ et $\phi(v_i) = q_i$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels tel que $\phi^*\omega_0 = \beta$, où ω_0 est la forme symplectique standard.

Exemple 1.1.4. *Nous pouvons associer canoniquement à tout fibré ξ sur un CW-complexe X un fibré symplectique $(\eta = \xi \oplus \xi^*, \Omega_0)$, où*

$$(\Omega_0)_x\left((v,v^*),(w,w^*)\right) := v^*(w) - w^*(v) \qquad \forall (v,v^*),(w,w^*) \in F_x \oplus F_x^*,\ \forall x \in X.$$

Clairement, ceci dépend continuement du point de base tout en étant bilinéaire antisymétrique sur chaque fibre. Pour voir que la forme est non-dégénérée, il suffit de noter que si nous fixons une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de F_x et une base duale $\{u^1, \ldots, u^n\}$ de F_x^*, alors $(\Omega_0)_x$ est représentée par la matrice

$$J_0 := \left(\begin{array}{c|c} 0_{n\times n} & -\mathbb{1}_{n\times n} \\ \hline \mathbb{1}_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{array}\right)$$

qui est une matrice inversible avec $J_0^{-1} = -J_0$. En particulier lorsque $X = \{x_0\}$, l'espace total de η est $E(\xi) = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^{2n}$ et la forme $\omega_0 = (\Omega_0)_{x_0}$ est la forme symplectique standard.

Comme il est usuel avec des fibrés vectoriels, il faut vérifier quelles constructions sur les espaces vectoriels se transportent à cette situation. Dans le contexte présent, il faut s'assurer que le complément symplectique définit bien un sous-fibré. Cela deviendra apparent lorsque nous aborderons les structures complexes et les métriques compatibles et donc, nous nous permettons d'assumer le lemme suivant jusqu'à la prochaine section.

Lemme 1.1.5. *Soit ξ, un sous-fibré d'un fibré symplectique (η,Ω) sur X. Alors, ξ^Ω définit par*

$$F(\xi^\Omega)_x := F(\xi)_x^{\Omega_x} = \{v \in F(\eta)_x \mid \Omega_x(v,w) = 0\ \forall w \in F(\xi)_x\}$$

est un sous-fibré de η.

Ceci étant établit, nous pouvons définir certains sous-fibrés des fibrés symplectiques qui nous serons particulièrement d'intérêt:

Définition 1.1.6. *Un sous-fibré ξ d'un fibré symplectique (η,Ω) est dit*

- ***isotrope*** *si* $E(\xi) \subseteq E(\xi^{\Omega})$ *;*
- ***coisotrope*** *si* $E(\xi^{\Omega}) \subseteq E(\xi)$ *;*
- ***lagrangien*** *si* $E(\xi^{\Omega}) = E(\xi)$ *;*
- ***symplectique*** *si* $E(\xi) \cap E(\xi^{\Omega}) = 0_\eta$ *,*

où 0_η dénote l'image de la section nulle de η.

Ces divers types de sous-fibrés apparaîtront naturellement dans plusieurs contextes comme nous le verrons plus tard. Pour l'instant, nous nous contenterons d'énoncer une situation simple dans laquelle des fibrés isotropes et coisotropes apparaissent:

Lemme 1.1.7. *Tout sous-fibré de dimension 1 (respectivement de codimension 1) ξ d'un fibré symplectique (η,Ω) est isotrope (respectivement coisotrope).*

Démonstration. Tout d'abord, notons que puisque être isotrope ou coisotrope est ultimement un énoncé sur chaque fibre, il suffit de démontrer que tout sous-espace de dimension 1 (respectivement de codimension 1) F d'un espace vectoriel symplectique (E,ω) est isotrope (respectivement coisotrope). De plus, puisque pour tout sous-espace vectoriel F de E nous avons

$$\dim F + \dim F^{\omega} = \dim E \quad \text{et} \quad (F^{\omega})^{\omega} = F$$

(voir **[19]** pour référence sur ce résultat), F est de codimension 1 si et seulement si F^{ω} est de dimension 1. De même, F est coisotrope si et seulement si F^{ω} est isotrope. Ainsi, il suffit de démontrer l'énoncé dans le cas isotrope.

Or, ce dernier découle trivialement du fait que ω est antisymétrique: si $v,w \in F$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$ puisque $\dim F = 1$. Ainsi, $\omega(v,w) = \lambda\omega(v,v) = 0$; il faut donc que $F \subseteq F^{\omega}$. □

1.2. Structures complexes compatibles

1.2.1. Triplets compatibles

Rappelons brièvement qu'une structure complexe sur un fibré réel η sur X est un automorphisme $J : \eta \to \eta$ tel que $J^2 = -\mathbb{1}$. Il est alors facile de voir que l'action de $\mathbb{C}$ sur $F(\xi)_x$

donnée par

$$(a+ib)\cdot v := av + bJ(v) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall v \in F(\eta)_x$$

fait de $F(\eta)_x$ un espace vectoriel complexe. En particulier, η doit avoir rang réel pair pour admettre une telle structure.

De même, une métrique riemannienne sur η est une section continue g de $\eta^* \odot \eta^*$ telle que g_x soit définie positive pour tout $x \in X$, où $\odot$ dénote ici le produit symétrique. Autrement dit, g donne un produit scalaire sur chaque fibre et ce, de façon continue. Que tous fibrés vectoriels sur une base paracompacte (et donc, en particulier, sur un CW-complexe) admettent une métrique riemannienne est une application élémentaire des partitions de l'unité. Ainsi, l'espace $\mathfrak{Met}(\eta)$ des métriques riemanniennes sur η est non-vide.

Définition 1.2.1. *Soient (η,Ω), un fibré symplectique sur un CW-complexe X, et g, une métrique riemannienne sur η.*

- *Une structure complexe J sur η est dite **compatible avec $\mathbf{\Omega}$** si*

  $$\Omega_x(J_x v, J_x w) = \Omega_x(v,w) \quad \text{et} \quad \Omega_x(J_x v, v) > 0 \qquad \forall v,w \in F(\eta)_x, v \neq 0,\ \forall x \in X.$$

  Nous dénoterons $\mathcal{J}(\eta,\Omega)$ l'espace de ces structures complexes.

- *Une structure complexe J sur η est dite **compatible avec g** si*

  $$g_x(J_x v, J_x w) = g_x(v,w) \qquad \forall v,w \in F(\eta)_x,\ \forall x \in X.$$

  Nous dénoterons $\mathcal{J}(\eta,g)$ l'espace de ces structures complexes.

- *Finalement, une forme symplectique $\widetilde{\Omega}$ sur η est dite **compatible avec g** si $\widetilde{\Omega} = g(\cdot, J\cdot)$ pour un certain $J \in \mathcal{J}(\eta,g)$. L'espace formé par ces formes symplectiques sera noté $\Omega(\eta,g)$.*

Remarquons que si $J \in \mathcal{J}(\eta,\Omega)$, alors $g_J := \Omega(J\cdot,\cdot)$ est une métrique riemannienne sur η et J, Ω sont tous deux compatibles avec g_J. Nous appellerons alors (Ω,J,g_J) un triplet compatible.

De même, nous avons une application

$$\begin{aligned} \mathfrak{Met}(\eta) \times \mathcal{J}(\eta) &\longrightarrow \Omega(\eta) \\ (g,J) &\longmapsto \Omega_{g,J} := \tfrac{1}{2}\left(g(\cdot,J\cdot) - g(J\cdot,\cdot)\right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{J}(\eta)$ et $\Omega(\eta)$ sont respectivement l'espace des structures complexes et l'espace des structures symplectiques sur η. Clairement, $\Omega_{g,J}$ est une section continue de $\eta^* \wedge \eta^*$; pour voir qu'elle est non-dégénérée en tout point, prenons $x \in X$ et $w \in F(\eta)_x$ tel que $(\Omega_{g,J})_x(v,w) = 0$ pour tout $v \in F(\eta)_x$. Alors,

$$0 = (\Omega_{g,J})_x(Jw,w) = \frac{1}{2}\left(||Jw||^2_{g_x} + ||w||^2_{g_x}\right)$$

qui ne peut être le cas que si $w = 0$. En fait, cela démontre que $J \in \mathcal{J}(\eta,\Omega_{g,J})$ puisqu'il est clair de la définition que $\Omega_{g,J}(J\,\cdot\,,J\cdot) = \Omega_{g,J}$. De plus, l'application est clairement continue et équivariante sous l'action du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\eta)$ de η, c'est-à-dire que si ϕ est une telle application,

$$\phi^*\Omega_{g,J} = \Omega_{\phi^*g,\phi^*J}$$

avec les actions naturelles $\phi^*\Omega := \Omega(\phi\,\cdot\,,\phi\cdot)$, $\phi^*g := g(\phi\,\cdot\,,\phi\cdot)$ et $\phi^*J := \phi^{-1}J\phi$.

En fixant une métrique riemannienne g sur η, nous obtenons donc une application de $\mathcal{J}(\eta)$ à $\Omega(\eta)$ définie par $f_g(J) := \Omega_{g,J}$. Alors, si J est compatible avec g,

$$\begin{aligned}\Omega_{g,J} &= \frac{1}{2}\left(g(\cdot,J\cdot) - g(J\,\cdot\,,\cdot)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(g(\cdot,J\cdot) + g(\cdot,J\cdot)\right)\\ &= g(\cdot,J\cdot),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\Omega_{g,J} \in \Omega(\eta,g)$. Ceci est nécessairement une bijection continue puisque tous éléments de $\Omega(\eta,g)$ prennent la forme $g(\cdot,J\cdot)$ pour un unique $J \in \mathcal{J}(\eta,g)$, par définition, et que $g(\cdot,J\cdot)$ dépend continuement de J. Autrement dit, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J}(\eta,g) \arrow[r, "f_g"] \arrow[d] & \Omega(\eta,g) \arrow[d] \\ \mathcal{J}(\eta) \arrow[r, "f_g"] & \Omega(\eta) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes. Ceci est à la base du prochain théorème, qui démontre qu'en réalité, toutes ces flèches sont des équivalences d'homotopie.

Théorème 1.2.2. *Soit η, un fibré vectoriel sur un CW-complexe X de rang pair. Alors, il existe une application continue, équivariante sous l'action de* $\mathrm{Aut}(\eta)$*,*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Met}(\eta) \times \Omega(\eta) &\to \mathcal{J}(\eta)\\ (g,\Omega) &\longmapsto J_{g,\Omega}\end{aligned}$$

telle que

(i) Pour tous choix de métrique g et de forme symplectique Ω, $J_{g,\Omega}$ appartient à $\mathcal{J}(\eta,\Omega)\cap\mathcal{J}(\eta,g)$. De plus, si $g = g_J$ pour un certain $J \in \mathcal{J}(\eta,\Omega)$, alors $J_{g,\Omega} = J$. En particulier, cette application est l'inverse continue de f_g.

(ii) Pour tout choix de métrique g, l'application $h_g : \Omega(\eta) \to \mathcal{J}(\eta)$ définie par $h_g(\Omega) := J_{g,\Omega}$ est une équivalence d'homotopie dont l'inverse homotopique est donné par f_g.

(iii) Pour tout choix de métrique g, les inclusions du diagramme ci-haut sont des équivalences d'homotopie, leur inverse homotopique étant donné par $J \mapsto J_{g,\Omega_{g,J}}$ pour les structures complexes et par $\Omega \mapsto \Omega_{g,J_{g,\Omega}}$ pour les structures symplectiques.

Démonstration. Tout d'abord, nous construisons l'application en question. Soient $g \in \mathfrak{Met}(\eta)$ et $\Omega \in \Omega(\eta)$. Par non-dégénérescence de g_x et Ω_x en tout $x \in X$, les applications $(\flat_g)_x(v) := g_x(v,\cdot)$ et $(\flat_\Omega)_x(v) := \Omega_x(v,\cdot)$, pour tout $v \in F(\eta)_x$, définissent des isomorphismes de η à η^*. Nous obtenons donc un automorphisme de η en prenant

$$\phi := \sharp_g \circ \flat_\Omega$$

où $\sharp$ est l'inverse de $\flat$. Autrement dit,

$$g_x(\phi_x v,w) = (\flat_g \circ \phi)_x(v)(w) = (\flat_\Omega)_x(v)(w) = \Omega_x(v,w),$$

pour tous $v,w \in F(\xi)_x$ et $x \in X$.

Ainsi, si nous dénotons par ϕ^T la transformation adjointe à ϕ, prise selon la métrique g, nous obtenons

$$g_x(\phi_x^T v,w) = g_x(v,\phi_x w) = \Omega_x(w,v) = -\Omega_x(v,w) = -g_x(\phi_x v,w)$$

c'est-à-dire $\phi^T = -\phi$. De ce fait, $-\phi^2 = \phi^T\phi$ est définie positive et autoadjointe par rapport à g, ce qui veut dire qu'il doit exister un unique $\psi \in \mathrm{Aut}(\xi)$ défini positif et autoadjoint par rapport à g tel que $\psi^2 = -\phi^2$. Cet automorphisme est bien lisse puisque la racine carrée définie un difféomorphisme lisse sur l'espace des matrices symétriques définies positives. De plus, sur une fibre fixée de ξ, ϕ peut être représenté par une matrice inversible antisymétrique A et ψ par une matrice définie positive symétrique S respectant $S^2 = -A^2$. Autrement dit, il existe des matrices inversibles P et D, où $D = (d_{ij})$ est diagonale et définie positive, telles que $-A^2 = PDP^{-1}$, et alors $S = P\sqrt{D}P^{-1}$. Puisque le rang de ξ est fini, il existe un polynôme réel f tel que $f(d_{ii}) = \sqrt{d_{ii}}$ pour tout i. Ainsi,

$$S = P\left(f(d_{ii})\right)P^{-1} = Pf(D)P^{-1} = f\left(PDP^{-1}\right) = f\left(-A^2\right),$$

et S peut s'écrire comme une combinaison polynomiale de $-A^2$. En particulier, S commute avec A. Puisque commuter est une propriété sur chaque fibre ultimement, il suit que ψ commute avec ϕ.

Ainsi, si $J_{g,\Omega} := \phi^{-1}\psi$, nous avons bien une structure complexe sur η:

$$J_{g,\Omega}^2 = (\phi^{-1}\psi)^2 = \phi^{-2}\psi^2 = -\mathbb{1}.$$

Puisque ϕ est anti-autoadjointe, ψ est autoadjointe et que les deux applications commutent, $J_{g,\Omega}$ est anti-autoadjointe. Il en suit donc que $J_{g,\Omega}^* g = g(J_{g,\Omega}^T J_{g,\Omega} \cdot\,,\cdot) = -g(J_{g,\Omega}^2 \cdot\,,\cdot) = g$, c'est-à-dire $J_{g,\Omega} \in \mathcal{J}(\xi,g)$. De même, $\Omega(J_{g,\Omega} \cdot\,,\cdot) = g(\psi \cdot\,,\cdot) = g(\psi^{1/2} \cdot\,,\psi^{1/2}\cdot)$, qui est une métrique riemannienne puisque ψ est autoadjointe et définie positive par rapport à g, et $J_{g,\Omega}^*\Omega = (J_{g,\Omega}^* g)(\phi \cdot\,,\cdot) = g(\phi \cdot\,,\cdot) = \Omega$. Ainsi, $J \in \mathcal{J}(\eta,\Omega)$. Finalement, si $\Omega(J \cdot\,,\cdot) = g$, alors $\phi = J^{-1}$ et $\psi = \mathbb{1}$, d'où $J_{g,\Omega} = J$.

Que l'application que nous venons de définir est bien continue découle directement du fait que ϕ dépend continuement de g et de Ω et que les opérations matricielles comme l'inversion et la racine carrée sont continues. Elle est même $\mathrm{Aut}(\eta)$-équivariante tel que annoncé: si $\chi \in \mathrm{Aut}(\eta)$, alors

$$(\chi^* g)(\chi^*\phi \cdot\,,\cdot) = g(\phi\chi \cdot\,,\chi\cdot) = \Omega(\chi \cdot\,,\chi\cdot) = \chi^*\Omega$$

c'est-à-dire $\phi_{\chi^* g,\chi^*\Omega} = \chi^*\phi$. Il suit donc directement de la définition de ψ que $\psi_{\chi^* g,\chi^*\Omega} = \chi^*\psi$. Ainsi, $J_{\chi^* g,\chi^*\Omega} = (\chi^*\phi)^{-1}(\chi^*\psi) = \chi^{-1}\phi^{-1}\psi\chi = \chi^* J_{g,\Omega}$. Ceci finit de démontrer l'existence de l'application annoncée et donc, de démontrer le point *(i)* de l'énoncé.

Pour ce qui est du point *(ii)*, notons que $(f_g \circ h_g)(\Omega) = \Omega_{g,J_{g,\Omega}}$. Pour voir que c'est homotope à l'identité, nous définissons

$$H_t(\Omega) := (1-t)\Omega + t\Omega_{g,J_{g,\Omega}}$$

qui prend bien valeur dans $\Omega(\xi)$ puisque $J_{g,\Omega} \in \mathcal{J}(\eta,\Omega) \cap \mathcal{J}(\eta,\Omega_{g,J_{g,\Omega}})$ et donc, pour tous $t \in [0,1]$, $v \in F(\eta)_x$ et $x \in X$,

$$H_t(\Omega)(J_{g,\Omega}v,v) = (1-t)\Omega(J_{g,\Omega}v,v) + t\Omega_{g,J_{g,\Omega}}(J_{g,\Omega}v,v) > 0.$$

Ainsi, $H_t(\Omega)$ est toujours non-dégénérée, c'est donc l'homotopie recherchée.

Similairement, $(h_g \circ f_g)(J) = J_{g,\Omega_{g,J}}$ et nous pouvons définir une homotopie $H'_t(J) := J_{g_t,\Omega_{g_t,J}}$, où

$$g_t = \frac{1+t}{2} g + \frac{1-t}{2} J^* g.$$

L'homotopie relie bien à l'identité puisque $g_0 := (g + J^*g)/2$ est clairement compatible avec J et donc, comme noté précédemment, avec $\Omega_{g_0,J}$. Or,

$$\Omega_{g_0,J} = g_0(\cdot,J\cdot) = \frac{1}{2}\left(g(\cdot,J\cdot) - g(J\cdot,\cdot)\right) = \Omega_{g,J}.$$

D'où $(\Omega_{g_0,J},J,g_0)$ est un triplet compatible et $H'_0(J) = J_{g_0,\Omega_{g_0,J}} = J$.

Finalement, l'énoncé *(iii)* sur les inclusions découle du fait que si $J \in \mathcal{J}(\eta,g)$, alors $\Omega_{g,J}(J\cdot,\cdot) = g$, ou de façon équivalente, $g = g_J$. Ainsi, par le *(i)*, $J_{g,\Omega_{g,J}} = J$ et la composition de l'inclusion suivie de $J \mapsto J_{g,\Omega_{g,J}}$ est l'identité. L'autre sens de compositon donne H'_1, que nous vennons de démontrer être homotope à l'identité. Similairement, si $\Omega \in \Omega(\eta,g)$, alors il existe $J \in \mathcal{J}(\eta)$ tel que $g = \Omega(J\cdot,\cdot)$. Ainsi, $J_{g,\Omega} = J$ et $\Omega_{g,J} = \Omega$. La composition de l'inclusion suivie de $\Omega \mapsto \Omega_{g,J_{g,\Omega}}$ est donc l'identité; l'autre sens est l'application homotope à l'identité H_1. □

Cette longue preuve terminée, nous obtenons finalement le résultat le plus important de cette section:

Corollaire 1.2.3. *Pour tout fibré symplectique (η,Ω), l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\eta,\Omega) &\to \mathfrak{Met}(\eta) \\ J &\longmapsto g_J \end{aligned}$$

est une équivalence d'homotopie; son inverse homotopique est donné par

$$\begin{aligned} \mathfrak{Met}(\eta) &\to \mathcal{J}(\eta,\Omega) \\ g &\longmapsto J_{g,\Omega}. \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{J}(\eta,\Omega)$ est non-vide et contractile.

Démonstration. La composition $J \mapsto g_J \mapsto J_{g_J,\Omega}$ est l'identité par le théorème précédent. Le fait que $g \mapsto J_{g,\Omega} \mapsto g_{J_{g,\Omega}}$ soit homotope à l'identité et la remarque sur la contractilité découlent directement du fait que $\mathfrak{Met}(\eta)$ est convexe. □

Ainsi, nous savons finalement que pour un fibré symplectique (η,Ω), il existe toujours un triplet compatible (Ω,J,g_J). Notons alors que $h := g_J + i\Omega$ définie une métrique hermitienne sur η, où la $\mathbb{C}$-bilinéarité de h est bien sûr par rapport à l'action naturelle définie plus haut: $(a+ib)\cdot v = av + bJ(v)$. Ceci s'avérera assez important pour la suite des choses.

Cela nous permet entre autres de facilement démontrer le lemme 1.1.5. Effectivement, si nous avons un sous-fibré ξ d'un fibré symplectique (η,Ω) sur X, alors nous pouvons prendre un J compatible avec Ω de sorte à ce que pour un $x \in X$ fixé, $v \in F(\eta)_x$ a la propriété que $\Omega_x(v,w) = 0$ pour tout $w \in F(\xi)_x$ si et seulement si $(g_J)_x(v,J_x w) = 0$ pour tout $w \in F(\xi)_x$. Autrement dit, $F(\xi)_x^{\Omega_x} = (J_x F(\xi)_x)^\perp$, où le complément orthogonal $\perp$ est pris selon $(g_J)_x$. Ainsi, $\xi^\Omega = (J\xi)^\perp$, qui est définitivement un fibré vectoriel puisque J est un automorphisme de η et que le complément orthogonal d'un fibré vectoriel en est également un (voir **[13]** ou **[25]** au besoin pour un rappel de ces résultats).

En particulier, notons que si η admet un sous-fibré lagrangien ξ, $\xi = \xi^\Omega = (J\xi)^\perp$. Ainsi, $\eta = \xi \oplus J\xi \cong \xi \otimes \mathbb{C}$. Cela met des contraintes assez strictes sur l'existence de sous-fibrés lagrangiens dans un fibré symplectique, puisque les classes de Chern de fibrés complexes apparaissant comme complexifié d'un fibré réel doivent respectées certaines propriétés assez spécifiques comme nous le verrons sous peu.

1.2.2. Réduction du groupe structurel et espaces classifiants

Nous venons tout juste de voir que tout fibré symplectique donne lieu à un fibré complexe et vice-versa. De plus, les deux structures sont compatibles au sens défini précédemment. La question naturelle est alors la suivante: est-ce qu'un isomorphisme entre fibrés complexes donne un isomorphisme entre les fibrés symplectiques associés et vice-versa? Afin de répondre à cette question, il sera nécessaire de faire un léger détour par la théorie des groupes structuraux et des espaces classifiants; **[13]** et **[25]** sont de bonnes sources pour apprendre les rudiments de cette théorie.

Tout d'abord, notons qu'il découle directement du lemme 1.1.3 que tout fibré trivial possédant une forme symplectique est trivial au sens symplectique, c'est-à-dire que nous pouvons prendre la trivialisation ϕ de sorte à ce que $\phi^*\Omega_0 = \Omega$. Ainsi, dans un fibré symplectique général (η,Ω), nous pouvons toujours prendre les trivialisations locales $\phi : \pi_\eta^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{2n}$ de sorte à ce que $\phi^*\Omega_0 = \Omega$. Autrement dit, les applications de transition d'un fibré symplectique prennent valeur dans le groupe des transformations linéaires préservant la forme symplectique standard. Ce groupe est nul autre que

$$\mathrm{Sp}(2n) := \left\{ A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \;\middle|\; A^T J_0 A = J_0 \right\},$$

puisque, comme nous l'avons vu dans un exemple précédent, $\omega_0(v,w) = v^T J_0 w$. Au contraire, si les applications de transition d'un fibré vectoriel réel η sur X prennent valeur dans $\mathrm{Sp}(2n)$, alors $\Omega_x(v,w) := \omega_0(\phi_x(v),\phi_x(w))$, où ϕ est une trivialisation locale de ξ autour de x, donne une structure symplectique bien définie à ξ. Ainsi, les fibrés symplectiques sont classifiés par les classes d'homotopie d'applications $X \to \mathrm{BSp}(2n)$. Il nous sera donc utile d'étudier $\mathrm{Sp}(2n)$.

Tout d'abord, notons qu'une matrice A de taille $2n \times 2n$ respecte $A^T J_0 A = J_0$ si et seulement si A est inversible et $A^{-1} = -J_0 A^T J_0$. En écrivant A par bloc $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} X & V \\ Y & W \end{pmatrix}$$

cela veut dire que $A \in \mathrm{Sp}(2n)$ si et seulement si

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ V^T & W^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^T & -V^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $A \in \mathrm{O}(2n)$ si et seulement si A est inversible et

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ V^T & W^T \end{pmatrix}.$$

Si nous adjoignons ces deux faits ensemble, nous obtenons que $A \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ si et seulement si $V = -Y$, $W = X$ et

$$\mathbb{1} = A^T A = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T X + Y^T Y & Y^T X - X^T Y \\ X^T Y - Y^T X & X^T X + Y^T Y \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$ et $X^T Y = Y^T X$. Or, ce sont précisément les conditions pour que $U := X + iY$ soit unitaire. Ainsi, on fait l'identification $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$; un calcul direct permet de vérifier que c'est un isomorphisme de groupes de Lie. Du côté des fibrés, ce fait s'interprète comme suit: les automorphismes préservant à la fois une forme symplectique Ω et une métrique riemannienne compatible g sont précisément ceux préservant la métrique hermitienne associée $h = g + i\Omega$.

Cela est déjà un pas dans la bonne direction, mais il faudrait pouvoir relier la topologie de $\mathrm{U}(n)$ à celle de $\mathrm{Sp}(2n)$ pour pouvoir en conclure quelque chose sur les espaces classifiants correspondants. C'est le but de la prochaine proposition, mais avant, démontrons ce petit lemme utile.

Lemme 1.2.4. *Si P est une matrice symplectique, définie positive et symétrique, alors $P^s \in \mathrm{Sp}(2n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Puisque P est symétrique et définie positive, nous avons une décomposition $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{i=1}^{k} E_i$, où $E_i = \ker(P - \lambda_i \mathbb{1})$ pour une valeur propre $\lambda_i > 0$ de P. Alors, pour $v,w \in \mathbb{R}^{2n}$, il y a une unique décomposition $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ et $w = \sum_{i=1}^{k} w_i$, où $v_i,w_i \in E_i$. Or, puisque P est symplectique

$$\omega_0(v_i,w_j) = \omega_0(Pv_i,Pw_j) = \lambda_i\lambda_j\omega_0(v_i,w_j) \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,k\},$$

soit $\omega_0(v_i,w_j) = 0$, soit $\lambda_i\lambda_j = 1$. Ainsi, puisque nous savons que $P^s|_{E_i} = \lambda_i^s \mathbb{1}_{E_i}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\omega_0(P^s v_i,P^s w_j) = (\lambda_i\lambda_j)^s\omega_0(v_i,w_j) = \omega_0(v_i,w_j) \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,k\}$$

où la dernière égalité découle du fait que soit $\lambda_i\lambda_j = 1$, soit $\omega_0(v_i,w_j) = 0$ comme nous venons de le démontrer. Alors, nous obtenons le résultat désiré:

$$\omega_0(P^s v,P^s w) = \sum_{i,j=1}^{k} \omega_0(P^s v_i,P^s w_j) = \sum_{i,j=1}^{k} \omega_0(v_i,w_j) = \omega(v,w).$$

□

Proposition 1.2.5. *Le groupe symplectique* $\mathrm{Sp}(2n)$ *se rétracte par déformation sur le groupe unitaire* $\mathrm{U}(n)$*.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \in \mathrm{Sp}(2n)$. Alors, $(A^T)^{-1}J_0A^{-1} = J_0$ et donc, en prenant l'inverse des deux côtés, nous obtenons $-AJ_0A^T = -J_0$, c'est-à-dire A^T est symplectique. Ainsi, A^TA est une matrice symplectique, symétrique et définie positive; par le lemme précédent, il en va de même pour $(A^TA)^s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. De ce fait, l'application

$$\begin{aligned} h\colon \mathrm{Sp}(2n) \times [0,1] &\longrightarrow \mathrm{Sp}(2n) \\ (A,t) &\longmapsto A(A^TA)^{-t/2} \end{aligned}$$

donne une rétraction par déformation de $\mathrm{Sp}(2n)$ dans $\mathrm{U}(n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ puisque, par la décomposition polaire, $A(A^TA)^{-1/2}$ est une matrice orthogonale pour toute matrice inversible A, et si A est déjà une matrice orthogonale, $A(A^TA)^{-t/2} = A$ pour tout $t \in [0,1]$. □

Du point de vue des espaces classifiants, cela veut dire que $\mathrm{BSp}(2n)$ est homotopiquement équivalent à $\mathrm{BU}(n)$, l'espace classifiant des fibrés hermitiens. Ainsi, deux fibrés symplectiques sont symplectomorphes si et seulement s'ils sont isomorphes comme fibrés hermitiens pour une certaine métrique hermitienne provenant d'une structure complexe compatible. Or, c'est un fait connu que $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ se rétracte par déformation sur $\mathrm{U}(n)$. Alors, par la même logique, deux fibrés vectoriels complexes sont isomorphes si et seulement si ils sont isomorphes comme fibrés hermitiens. Nous obtenons donc le résultat désiré: la notion d'isomorphisme de fibrés symplectiques correspond exactement à la notion d'isomorphisme de fibrés complexes. Ainsi, tout invariant que nous pourrions associer à un fibré symplectique serait équivalent à un invariant du fibré complexe pour une structure complexe compatible.

1.3. Classes caractéristiques d'un fibré symplectique

1.3.1. Classes de Chern

Les invariants les plus importants pour les fibrés complexes sont fort probablement les classes de Chern. Cependant, le but de ce mémoire n'est pas d'exposer le riche sujet qu'elles forment, nous allons donc se contenter d'une définition axiomatique et d'un survol rapide des principaux résultats pour ceux et celles n'ayant pas nécessairement toute la familiarité avec le sujet. Pour les personnes désirant en apprendre davantage sur le sujet, l'excellent livre de Milnor [**20**] est la référence sur le sujet.

Théorème 1.3.1. *Pour tout fibrés vectoriel complexe η sur un CW-complexe X, il existe une unique classe de cohomologie $c(\eta) \in H^*(X;\mathbb{Z})$, appelée la* ***classe de Chern totale*** *de η, telle que*

(i) ***(Forme générale)*** *il y a une décomposition $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + \cdots + c_n(\eta)$, où $c_i(\eta) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ est la* ***i-ième classe de Chern*** *pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $n = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \eta$;*

(ii) ***(Naturalité)*** *des fibrés isomorphes ont les mêmes classes de Chern et si nous avons une application continue $f : Y \to X$, alors $c(f^*\eta) = f^*c(\eta)$;*

(iii) ***(Formule du produit de Whitney)*** *s'il y a un second fibré vectoriel complexe ζ sur X, alors $c(\eta \oplus \zeta) = c(\eta)c(\zeta)$, c'est-à-dire*

$$c_i(\eta \oplus \zeta) = \sum_{k=0}^{i} c_k(\eta)c_{i-k}(\zeta)$$

avec la convention $c_0 \equiv 1$ et $c_k(\eta) = 0$ si $k > \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \xi$;

(iv) ***(Normalisation)*** *si* δ_1^1 *est le fibré tautologique sur* $\mathbb{C}P^1$*, alors* $c_1(\delta_1^1)$ *est le générateur de* $H^2(\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ *selon l'orientation canonique de* $\mathbb{C}P^1$*.*

Nous n'entreprendrons pas ici la longue tâche de construire explicitement les classes de Chern. Cependant, une fois quelques faits découlant des axiomes établis, l'unicité sera démontrée. Tout d'abord, rappelons que l'inclusion $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ dans les n premières coordonnées induit une inclusion dans les grassmanniennes complexes $G_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}^{n+1})$. Alors, nous obtenons la grassmannienne infinie des k-plans par la limite inductive:

$$G_k(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim G_k(\mathbb{C}^n).$$

C'est un fait non-trivial, mais hautement intéressant, que cette grassmannienne est en fait l'espace classifiant des fibrés complexes de rang k, c'est-à-dire $G_k(\mathbb{C}^\infty) = \mathrm{BU}(k)$. En particulier, $\mathbb{C}P^\infty = \mathrm{BU}(1)$.

Théorème 1.3.2. *L'anneau de cohomologie avec coefficients entiers de* $BU(k)$ *est*

$$H^*(\mathrm{BU}(k);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1(\delta^k),\ldots,c_k(\delta^k)]$$

où δ^k *est le fibré tautologique sur* $\mathrm{BU}(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$*. De plus, l'application* $f : \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathrm{BU}(k)$ *classifiant le fibré* $\delta^1 \times \cdots \times \delta^1$ *induit un monomorphisme sur la cohomologie, où le produit cartésien est pris* k *fois.*

Encore une fois, nous allons assumer ce résultat, mais notons qu'il découle uniquement des axiomes des classes de Chern et de la structure cellulaire sur $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ donnée par les symboles de Schubert (voir encore une fois **[20]** pour une démonstration explicite du résultat analogue dans le cas réel). Ce résultat est d'une importance capitale pour la théorie des classes caractéristiques puisqu'il indique que, dans le cas complexe, elles seront toujours un polynôme des classes de Chern.

Par l'axiome de naturalité, les classes de Chern d'un fibré symplectique ne dépendent pas du choix de structure presque complexe compatible. Effectivement, les notions d'isomorphismes symplectiques et complexes correspondent, et un fibré symplectique est assurément isomorphe à lui-me au sens symplectique.

Lemme 1.3.3. *Si* ϵ_X^n *dénote le fibré trivial de rang* n *sur* X*, alors* $c(\epsilon_X^n) = 1$*.*

Démonstration. Pour le fibré trivial $\epsilon_X^n \cong p^*\epsilon_*^n$, où $p : X \to *$ est la projection sur un point. Or, $H^i(*;\mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 0$. Ainsi, $c_i(\epsilon_X^n) = p^*c_i(\epsilon_*^n) = p^*(0) = 0$ pour $i > 0$. □

Lemme 1.3.4. *Soit η, un fibré vectoriel complexe sur un CW-complexe X. Alors, $c(\eta\oplus\epsilon_X^k) = c(\eta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.*

Démonstration. Par la formule du produit de Whitney,

$$c_i(\eta \oplus \epsilon_X^k) = \sum_{j=0}^{i} c_k(\eta)c_{i-j}(\epsilon_X^k) = c_i(\eta)$$

pour tout i, car $c_{i-j}(\epsilon_X^k)$ est non-nul uniquement lorsque $i-j = 0$ par le lemme précédent. $\square$

Remarque 1.3.5. *Le lemme précédent est intéressant puisqu'il démontre que les classes de Chern sont des invariants des classes d'isomorphismes stables. Ainsi, nous pouvons voir ces dernières comme des transformations naturelles $c : \widetilde{K} \to H^*(-;\mathbb{Z})$, ou de façon équivalente $c : [-;\mathrm{BU}] \to H^*(-;\mathbb{Z})$, où $\widetilde{K}(X)$ est le groupe de K-théorie réduit de X, que nous savons être isomorphe aux classes d'isomorphismes stables de fibrés vectoriels complexes avec comme opération la somme de Whitney, qui lui-même est isomorphe à* $[X,\mathrm{BU}]$. *Bien sûr,* BU *dénote la limite inductive induite par l'inclusion naturelle* $\mathrm{BU}(k) \hookrightarrow \mathrm{BU}(k+1)$, *qui peut être vue comme une conséquence de l'inclusion évidente* $\mathrm{U}(k) \hookrightarrow \mathrm{U}(k+1)$ *ou comme une conséquence de l'inclusion des grassmanniennes $G_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow G_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ obtenue en envoyant V sur $V\oplus\mathbb{C}$.*

Nous pouvons donc finalement démontrer l'unicité des classes de Chern. Considérons $\tilde{c}$ respectant les mêmes axiomes. Alors, par l'axiome de normalisation, $c(\delta_1^1) = \tilde{c}(\delta_1^1) = 1 + x$, où x dénote le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z})$ selon l'orientation canonique de l'espace. En plongeant γ_1^1 dans γ^1, nous obtenons donc que $c(\gamma^1) = \tilde{c}(\gamma^1) = 1+x$, où nous avons identifié le générateur pour $\mathbb{C}P^1$ avec celui de $\mathbb{C}P^\infty$ (que nous puissions faire cela découle directement de la structure cellulaire de ce dernier espace). Alors, si π_i dénote la projection du produit cartésien de k copies de $\mathbb{C}P^\infty$ sur la i-ième copie, nous voyons sans problème que

$$\eta := \delta^1 \times \cdots \times \delta^1 \cong \pi_1^*\delta^1 \oplus \cdots \oplus \pi_n^*\delta^1.$$

Ainsi, nous obtenons

$$c(\eta) = \tilde{c}(\eta) = (1 + x_1)\dots(1 + x_n),$$

où $x_i := \pi_i^* x$, par naturalité et la formule du produit de Whitney. Donc, si f est l'application classifiant η, nous avons $f^*c(\delta^k) = f^*\tilde{c}(\delta^k)$ encore par naturalité. Or, comme nous l'avons noté dans le théorème 1.3.2, f^* est un monomorphisme; il faut donc que $c(\delta^k) = \tilde{c}(\delta^k)$. Ceci conclut la preuve puisque tout fibré vectoriel complexe sur un CW-complexe est isomorphe à $g^*\delta^k$ pour un certain k et une certaine application continue g.

Terminons cette section en énonçant quelques propriétés des classes de Chern qui demande d'avoir la construction explicite de celles-ci pour les démontrer, mais qui aide à mieux cerner ce qu'elles mesurent.

Tout d'abord, si η est un fibré vectoriel de rang complexe n, alors $c_n(\eta)$ est la classe d'Euler du fibré réel sous-jacent avec l'orientation induite par la structure complexe. En particulier, si $\eta = TM$ pour une certaine variété M, alors l'évaluation de la classe de Chern de plus haut degré sur la classe fondamentale d'orientation de M est la caractéristique d'Euler de M.

Ensuite, si $\bar{\eta}$ dénote le fibré conjugué de η, c'est-à-dire le même fibré au sens réel, mais auquel nous avons donné la structure complexe $-J$ au lieu de J, alors nous avons la relation

$$c_i(\bar{\eta}) = (-1)^i c_i(\eta).$$

Notons que le fibré conjugué est isomorphe au fibré dual η^*, puisque toute métrique hermitienne h sur η induit un isomorphisme de fibrés $(x,v) \mapsto (x,h(v,-))$.

Finalement, si η est la complexification d'un fibré réel ξ, alors $c_{2i+1}(\eta) = c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C})$ est un élément de 2-torsion pour tout $i \in \mathbb{N}_0$. En particulier, si la cohomologie de la base X en degré impair est libre, $c_{2i+1}(\xi) = 0$. Cela est intéressant puisque nous pouvons montrer que sur une surface orientable fermée, qui a cette propriété sur sa cohomologie, η est trivial si et seulement si $c_1(\eta) = 0$. Ainsi, sur une telle variété, un fibré symplectique admettant un sous-fibré lagrangien est nécessairement trivial.

1.3.2. Classe de Maslov

Nous terminons ce chapitre avec une classe de cohomologie qui joue un rôle important dans l'étude des sous-fibrés lagrangiens et qui réapparaîtra lorsque nous calculerons l'anneau de cohomologie de la grassmannienne isotrope au chapitre 4, mais qui n'est pas une classe caractéristique des fibrés symplectiques à proprement parler.

La grassmannienne lagrangienne, notée $\mathcal{L}(n)$, consiste en l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, c'est-à-dire $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ si et seulement si $\Lambda^{\omega_0} = \Lambda$. Puisque $\dim \Lambda + \dim \Lambda^{\omega_0} = 2n$, comme vu précédemment, il faut nécessairement que $\dim \Lambda = n$ et donc, $\mathcal{L}(n) \subseteq G_n(\mathbb{R}^{2n})$.

La façon la plus simple de voir que $\mathcal{L}(n)$ est une variété lisse avec la topologie induite par $G_n(\mathbb{R}^{2n})$ est de noter que c'est un espace homogène. Effectivement, si nous remontons dans le fibré des n-repères sur $G_n(\mathbb{R}^{2n})$, nous voyons qu'un n-repère de $\mathbb{R}^{2n}$, noté ici

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2n \times n)$$

correspond à un sous-espace lagrangien si et seulement si

$$0 = \omega_0(Z\,\cdot\,, Z\cdot) = \begin{pmatrix} X^T & Y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^T Y - Y^T X.$$

Or, ceci est précisément la condition pour que $U := X + iY$ soit unitaire. De plus, une matrice unitaire U représente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \oplus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire si c'est une matrice orthogonale. Ainsi, nous pouvons identifier $\mathcal{L}(n)$ à $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ puisque quotienter par $\mathrm{O}(n)$ correspond à prendre la topologie quotient usuelle sur la grassmannienne. En particulier,

$$\dim \mathcal{L}(n) = \dim \mathrm{U}(n) - \dim \mathrm{O}(n) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Avec cette identification, le déterminant au carré $\det^2 : \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \to S^1$ nous donne un fibré dont la fibre s'identifie aux matrices unitaires ayant déterminant ± 1 modulo $\mathrm{O}(n)$. Or, une matrice unitaire ayant déterminant -1 peut toujours être multipliée par une réflexion, qui est bien sûr dans $\mathrm{O}(n)$, pour obtenir une matrice de déterminant 1. Ainsi, la fibre associée à $\det^2$ s'identifie à $\mathrm{S}\mathcal{L}(n) := \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$. De plus, $\mathrm{S}\mathcal{L}(n)$ étant lui-même un espace homogène, nous avons un fibré $\mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{SU}(n) \twoheadrightarrow \mathrm{S}\mathcal{L}(n)$.

Ces deux fibrés nous donne donc deux suites longues exactes sur les groupes d'homotopie:

$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathrm{S}\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{SO}(n)) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{S}\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathrm{SO}(n)) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(S^1) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{S}\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_i(S^1) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathrm{S}\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \ldots$$

Alors, en prenant $i = 1$ dans la première suite, nous obtenons que $\mathrm{S}\mathcal{L}(n)$ est simplement connexe puisque $\mathrm{SU}(n)$ l'est et que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe. Sachant cela, prendre $i = 1$ dans la seconde suite nous donne que $\det^2$ induit un isomorphisme entre le groupe fondamental de $\mathcal{L}(n)$ et celui de S^1, qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Définition 1.3.6. *L'**indice de Maslov** d'un lacet $\Lambda : S^1 \to \mathcal{L}(n)$ est donné par*

$$\mu(\Lambda) := \deg\left(\det^2 \circ \Lambda : S^1 \to S^1\right).$$

Puisque $\det^2$ induit un isomorphisme sur le groupe fondamental et que le degré détermine totalement la classe d'homotopie d'une application du cercle en lui-même, deux lacets dans $\mathcal{L}(n)$ sont homotopes si et seulement si ils ont le même indice de Maslov. Ainsi, puisque le degré est un morphisme sur le groupe fondamental du cercle, nous pouvons voir l'indice de Maslov comme un morphisme du groupe fondamental de $\mathcal{L}(n)$ à $\mathbb{Z}$. Or, nous avons des isomorphismes naturels

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\pi_1(-),\mathbb{Z}\right) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H_1(-;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}\right) \cong H^1(-;\mathbb{Z})$$

où le premier isomorphisme découle du fait que H_1 soit l'abélianisation de π_1 et le second, du théorème des coefficients universels pour la cohomologie. Ainsi, μ définit canoniquement une classe dans le premier groupe de cohomologie entière de $\mathcal{L}(n)$: la **classe de Maslov**.

Chapitre 2

Variétés symplectiques

Dans ce chapitre, nous établissons les bases de la topologie symplectique. Pour ce faire, nous suivons principalement le chapitre 3 de [**19**] avec quelques excursions ailleurs. De par l'objectif d'exposition au sujet relativement large de ce chapitre, certains des résultats ici présentés ne sont pas essentiels à la compréhension des prochains chapitres (par exemple une lectrice ou un lecteur peut sans crainte sauter la section 2.3). Cependant, ces bases aident à situer les résultats des prochains chapitres dans l'ensemble du sujet.

2.1. Généralités

2.1.1. Définition et exemples

Définition 2.1.1. *Une **variété symplectique** est un couple* (M,ω)*, où* M *est une variété lisse connexe et* ω *est une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée sur* M*.*

Autrement dit, une variété symplectique est une variété dont le fibré tangent possède une structure symplectique donnée par ω, avec la condition supplémentaire que $d\omega = 0$. Cette condition est essentielle puisqu'elle donne hautement plus de structure à la variété sous-jacente que ne le ferait une simple structure symplectique sur le fibré tangent sans condition d'intégrabilité. De ce fait, elle est nécessairement plus restrictive: par exemple, l'identification de S^6 avec les octonions de norme 1 purement imaginaires donne une structure presque complexe à la variété (c'est-à-dire une structure complexe sur le fibré tangent), et donc une structure presque symplectique (c'est-à-dire une structure symplectique sur le fibré tangent) comme l'indique le théorème 1.2.2. Cependant, nous verrons sous peu que S^6 ne peut pas être une variété symplectique pour des raisons topologiques élémentaires. En fait, la différence existant entre variétés presque symplectiques et symplectiques est très comparable à celle entre variétés presque complexes et complexes, quoiqu'il est important de noter qu'une structure presque complexe compatible avec une forme symplectique n'a aucune raison d'être elle-même intégrable et en général, ne le sera pas.

Par ailleurs, la non-dégénérescence de ω nous assure que $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ soit nulle part nulle, où le produit extérieur est bien sûr pris $n = (\dim M)/2$ fois (la dimension de M doit être paire, car TM est un fibré symplectique). Ainsi, par connexité de M, la forme ω^n est soit strictement positive, soit strictement négative; en particulier, M est orientée.

Exemple 2.1.2. *L'exemple le plus simple d'une variété symplectique est assurément* $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$*, où* ω_0 *est la forme symplectique standard introduite plus tôt. Nous avons déjà vu qu'elle est non-dégénérée; pour voir qu'elle est fermée, il suffit de noter que dans la base standard* $\{q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n\}$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$*,*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Alors, nous obtenons directement le résultat recherché: si $\lambda_0 := \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$*, alors* $\omega_0 = d\lambda_0$ *et notre forme est exacte, donc fermée. Il suit directement que tous les tores de dimension paire* $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ *sont des variétés symplectiques en utilisant la même forme, qui est bien définie puisqu'elle est invariante sous translation. Notons cependant que* λ_0 *ne possède pas cette invariance et donc, n'est pas définie sur le tore. Ainsi, même si* $\omega_0 = d\lambda_0$ *localement, ce n'est pas le cas globalement; c'est le lot de toutes les variétés symplectiques compactes comme nous le verrons sous peu.*

Exemple 2.1.3. *Toute surface lisse sans bord orientée* Σ *de* $\mathbb{R}^3$*, et donc en particulier toute surface lisse fermée orientable, est une variété symplectique. Effectivement, prenons l'application de Gauss* $\nu : \Sigma \to S^2$*, alors la forme d'aire donnée par*

$$\omega_x(v,w) := \langle \nu(x), v \times w \rangle = \det(\nu(x),v,w) \qquad \forall v,w \in T_x\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \Sigma$$

où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *dénote le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^3$*, est une forme symplectique: elle est lisse, car* $\det$ *et* ν *le sont, bilinéaire, car le produit vectoriel l'est et le produit scalaire est linéaire, non-dégénérée, par ce que nous savons du produit mixte, et fermée, car toute 3-forme sur une surface est identiquement nulle.*

Donc, en dimension 2, la seule condition pour qu'une variété fermée admette une forme symplectique est l'orientabilité. Cependant, en dimension supérieure, d'autres obstructions topologiques entrent en jeu comme l'illustre le lemme suivant:

Lemme 2.1.4. *Sur une variété fermée, une forme symplectique n'est jamais exacte.*

DÉMONSTRATION. Soit (M,ω), une variété symplectique fermée. Supposons que $\omega = d\lambda$ pour une 1-forme λ sur M. Nous avons déjà remarqué que $\omega^n \neq 0$; sans perte de généralité supposons que $\omega^n > 0$. Ainsi, par le théorème de Stokes,

$$0 < \int_M \omega^n = \int_M d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \lambda \wedge \omega^{n-1} = 0$$

car $\partial M = \emptyset$. Ceci est bien sûr une contradiction. $\square$

Ainsi, toute variété fermée M telle que $H^2(M;\mathbb{R}) = 0$ ne peut pas admettre de forme symplectique. En particulier, cela veut dire que S^{2n} n'admet pas de structure symplectique pour $n \geq 2$, comme nous l'avions annoncé précédemment.

2.1.1.1. *Le fibré cotangent*

On termine cette sous-section avec probablement l'exemple le plus important d'une variété symplectique: le fibré cotangent T^*Q d'une variété lisse sans bord quelconque Q. Son importance provient principalement du fait que si Q est l'espace des configurations d'un système physique classique sur lequel la mécanique hamiltonienne s'applique, alors T^*Q est l'espace de phase associé. Autrement dit, T^*Q est l'ensemble des couples (q,p), où q est la position dans des coordonnées généralisées et p est le moment conjugué.

Un fait exceptionnel à propos du fibré cotangent est qu'il vient naturellement équippé d'une 1-forme, appelée **forme de Liouville**, définie par

$$(\lambda_0)_{(q,p)} := \pi^* p,$$

où $\pi : T^*Q \to Q$ est la projection standard du fibré cotangent. Rappelons que p est un covecteur, c'est-à-dire une application linéaire $p : T_qQ \to \mathbb{R}$, et donc, la notation a un sens.

Lemme 2.1.5. *En coordonnées locales, avec* $\dim Q = n$*,*

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i.$$

Démonstration. Prenons des coordonnées locales $\{q_1, \ldots, q_n\}$ sur un ouvert U de Q. Alors, $\{dq_i, \ldots, dq_n\}$ forme une base dans les fibres de T^*U. Ainsi, sur U, toute 1-forme α prend la forme $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ pour certaines fonctions $p_i = p_i(q,\alpha)$ qui sont linéaire en α. Nous obtenons donc des coordonnée locales de T^*U:

$$\begin{aligned} T^*U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^{2n} \\ (q,p) &\mapsto (q_1(q), \ldots, q_n(q), p_1(q,p), \ldots, p_n(q,p)). \end{aligned}$$

Alors, sur T^*U, il faut que $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n (f_i dq_i + g_i dp_i)$ pour certaines fonctions $f_i, g_i : T^*U \to \mathbb{R}$. Or, si $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\lambda_0)_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \right) = \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i \right) \left(\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \right) \right) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \right) = p_k$$

et

$$(\lambda_0)_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \right) = \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i \right) \left(\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \right) \right) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i(0) = 0,$$

d'où $f_i = p_i$ et $g_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Alors, si nous prennons comme définition $\omega_0 := d\lambda_0$, nous voyons directement que ω_0 est une forme symplectique sur T^*Q puisque localement, $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ qui, comme nous l'avons déjà vu, a les propriétés nécessaires. Finalement, nous ajoutons que la forme de Liouville est souvent appelée la 1-forme canonique; le lemme suivant justifie ce nom.

Lemme 2.1.6. *La forme différentielle λ_0 est l'unique 1-forme sur T^*Q telle que*

$$\alpha^* \lambda_0 = \alpha$$

pour toute 1-forme α sur Q; que nous voyons ici comme une application $\alpha : Q \to T^*Q$.

Démonstration. Localement, une 1-forme α sur Q prend la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dq_i$$

pour certaines fonctions a_i. Vue comme une application $Q \to T^*Q$, la forme α prend donc la forme en coordonnées locales $(q_1, \ldots, q_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_n, a_1, \ldots, a_n)$. Ainsi, pour une 1-forme β

sur T^*Q, nous avons $\alpha^*\beta = \alpha$ si et seulement si

$$\begin{aligned}(\alpha^*\beta)_q &= \alpha^*\left(\sum_{i=1}^n (b_i dq_i + b_i' dp_i)\right)_q \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i(\alpha(q))dq_i + b_i'(\alpha(q))(\alpha^* dp_i)_q) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(b_i(\alpha(q))dq_i + b_i'(\alpha(q))\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial q_j}(q)dq_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(b_i(\alpha(q)) + b_i'(\alpha(q))\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial q_i}(q)\right)dq_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(q)dq_i\end{aligned}$$

pour tout $q \in Q$, qui ne peut être vraie que si les deux dernières sommes sont égales terme à terme.

Pour que cela tienne pour tout α, il faut que $b_i' \equiv 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Effectivement, si nous avons l'égalité pour un certain α en $q \in Q$, alors nous pouvons clairement produire un α' tel que $\alpha(q) = \alpha'(q)$, mais avec des dérivées différentes en ce point. Alors, l'égalité tient seulement si les b_i' sont tous nuls en $\alpha(q)$. Puisque cela doit tenir pour tout q, ces coefficients doivent être identiquement nuls. Ainsi, il faut que $b_i(\alpha(q)) = a_i(q)$ pour toute 1-forme α et pour tout point $q \in Q$. Ceci revient exactement à dire que b_i est la composante en p_i de α, c'est-à-dire $b_i = p_i$ et $\beta = \lambda_0$. Finalement, du calcul que nous venons de faire, il est clair que λ_0 a la propriété désirée. $\square$

2.1.2. Symplectomorphismes et difféomorphismes hamiltoniens

Définition 2.1.7. *Un* ***symplectomorphisme*** ψ *d'une variété symplectique* (M,ω) *est un difféomorphisme tel que* $\psi^*\omega = \omega$. *Dénotons le groupe formé par ces applications par* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$.

Un champ de vecteurs X *sur* M *est dit* ***symplectique*** *si* $\iota_X\omega = \omega(X,\cdot)$ *est fermée. Dénotons par* $\mathfrak{X}(M,\omega)$ *l'algèbre de Lie formée par ces champs de vecteurs.*

Le fait que $\mathfrak{X}(M,\omega)$ soit une algèbre de Lie (de dimension infinie) sous le crochet de Lie, et non seulement un espace vectoriel, découle de l'identité de Cartan:

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X(d\omega) + d(\iota_X\omega) = d(\iota_X\omega),$$

car ω est fermée par définition. Ainsi, si $X,Y \in \mathfrak{X}(M,\omega)$,

$$d(\iota_{[X,Y]}\omega) = \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X\left(\mathcal{L}_Y\omega\right) - \mathcal{L}_Y\left(\mathcal{L}_X\omega\right) = 0,$$

car $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$, d'où $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M,\omega)$.

Exemple 2.1.8. *Soient Q, une variété quelconque, et $\psi \in \mathrm{Diff}(Q)$. Alors, ψ induit un difféomorphisme Ψ sur T^*Q donné par*

$$\Psi(q,p) := (\psi(q),\psi_* p),$$

où $\psi_* p := (\psi^{-1})^* p$. Remarquons qu'en fait, Ψ est un symplectomorphisme, puisqu'il préserve la forme de Liouville:

$$\begin{aligned}
(\Psi^*\lambda_0)_{(q,p)} &= (\lambda_0)_{(\psi(q),\psi_* p)} \circ (d\Psi)_{(q,p)} \\
&= p \circ (d\psi^{-1})_{\psi(q)} \circ (d\pi)_{(\psi(q),\psi_* p)} \circ (d\Psi)_{(q,p)} \\
&= p \circ (d\pi)_{(q,p)} \circ (d\Psi^{-1})_{(\psi(q),\psi_* p)} \circ (d\Psi)_{(q,p)} \\
&= p \circ (d\pi)_{(q,p)} \\
&= (\lambda_0)_{(q,p)}
\end{aligned}$$

car $\pi \circ \Psi = \psi \circ \pi$.

Proposition 2.1.9. *Soient (M,ω), une variété symplectique, et $t \mapsto \psi_t$, une isotopie sur M engendrée par un champ vectoriel X_t, c'est-à-dire*

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t \quad et \quad \psi_0 = \mathbb{1}.$$

Alors, ψ_t est un symplectomorphisme pour tout t pour lequel ψ_t est défini si et seulement si X_t est symplectique pour ces mêmes temps t.

Remarque 2.1.10. *Autrement dit, lorsque M est fermée et donc, que ψ_t est définie pour tout temps, $\mathfrak{X}(M,\omega)$ est l'algèbre de Lie du groupe des symplectomorphismes de M.*

Démonstration. Ceci découle directement du fait que

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega\right) = \psi_t^*\left(d(\iota_{X_t}\omega)\right).$$

Effectivement, si ψ_t est un symplectomorphisme, $\psi_t^*\omega = \omega$ par défintion et le membre de gauche est nul. Or, $\psi_t^*\alpha = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$, car ψ_t est un difféomorphisme. Ainsi, il faut que $d(\iota_{X_t}\omega) = 0$, c'est-à-dire que X_t soit symplectique. Au contraire, si X_t est symplectique, le membre de droite est nul. Alors, $\psi_t^*\omega$ est constante en t. Or, $\psi_0^*\omega = \mathbb{1}^*\omega = \omega$ et donc, il faut que $\psi_t^*\omega = \omega$, c'est-à-dire il faut que ψ_t soit un symplectomorphisme. $\square$

Parmi le groupe des symplectomorphismes, un sous-groupe est particulièrement d'intérêt en topologie symplectique: celui des difféomorphismes hamiltoniens, également appelés symplectomorphismes hamiltoniens.

Définition 2.1.11. *Soient (M,ω), une variété symplectique, et $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une famille lisse à 1 paramètre de fonctions lisses sur M. Le **champ vectoriel hamiltonien** associé à H est l'unique champ de vecteurs dépendant du temps X_{H_t} sur M tel que*

$$\iota_{X_{H_t}}\omega = -dH_t,$$

où $H_t := H(\cdot,t)$.

*Un symplectomorphisme ψ est un **difféomorphisme hamiltonien** s'il existe un $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse tel que ψ soit le flot au temps 1 de X_{H_t}, c'est-à-dire $\psi = \phi_1$ et*

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_{H_t} \circ \phi_t \quad et \quad \phi_0 = \mathbb{1}.$$

Dénotons le sous-espace de $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ *formé par les difféomorphismes hamiltoniens sur M par* $\mathrm{Ham}(M,\omega)$.

Le fait que le champ X_{H_t} soit défini de façon unique découle de la non-dégénérescence de ω. De même, le fait que les difféomorphismes hamiltoniens soient des symplectomorphismes découle de l'observation que les formes exactes sont fermées. Les liens algébriques et topologiques entre $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ et $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ seront davantage explorés dans la section suivante. Nous terminons cette sous-section par un petit résultat amusant.

Lemme 2.1.12. *Soient (M,ω), une variété symplectique, et $F,G \in C^\infty(M)$. Si X_F et X_G sont les champs hamiltoniens associés à F et G respectivement, alors*

$$[X_F,X_G] = X_{\{F,G\}},$$

*où $\{F,G\} := \omega(X_F,X_G) = dG(X_F) = -dF(X_G)$ est le **crochet de Poisson** de F et G. En particulier, les champs vectoriels hamiltoniens indépendants du temps sur M forment une algèbre de Lie.*

Démonstration. Dénotons par ϕ_t^F et ϕ_t^G les flots de X_F et X_G respectivement. Alors,

$$[X_F,X_G] = \mathcal{L}_{X_F}X_G := \frac{d}{dt}(\phi_t^F)^*X_G.$$

Or, puisque ϕ_t^F est un symplectomorphisme,

$$\iota_{(\phi_t^F)^* X_G}\omega = (\phi_t^F)^* \left(\iota_{X_G}\omega\right) = -(\phi_t^F)^* dG = -d(G \circ \phi_t^F) = \iota_{X_{G\circ\phi_t^F}}\omega,$$

d'où $(\phi_t^F)^* X_G = X_{G\circ\phi_t^F}$.

Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\iota_{[X_F,X_G]}\omega &= \iota_{\frac{d}{dt}X_{G\circ\phi_t^F}}\omega \\
&= -\frac{d}{dt}d(G\circ\phi_t^F) \\
&= -d\left(\frac{d}{dt}(\phi_t^F)^* G\right) \\
&= -d\left(\mathcal{L}_{X_F} G\right) \\
&= -d\left(dG(X_F)\right) \\
&= -d\left\{F,G\right\},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $[X_F,X_G] = X_{\{F,G\}}$. □

Il est assez clair que le crochet de Poison est bilinéaire. De plus, en prenant des coordonnées de Darboux (dont l'existence est démontrée plus bas au corollaire 2.2.4), nous obtenons que

$$\{F,G\} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

où $\dim M = 2m$. À partir de cette expression locale, c'est un calcul long mais direct que de vérifier que

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0.$$

Ainsi, le crochet de Poisson donne une structure d'algèbre de Lie à $C^\infty(M)$ et, par le lemme précédent, $C^\infty(M)/\mathbb{R}$ est isomorphe aux champs vectoriels hamiltoniens indépendants du temps sur M.

2.1.3. Sous-variétés d'intérêt

Définition 2.1.13. *Une sous-variété Q d'une variété symplectique (M,ω) est dite* ***symplectique*** *(ou* ***isotrope****,* ***coisotrope****,* ***lagrangienne****) si TQ est un sous-fibré symplectique (ou isotrope, coisotrope, lagrangien) du fibré symplectique (TM,ω).*

Exemple 2.1.14. *Il suit directement de la définition invariante de la forme de Liouville qu'elle s'annule sur l'image de la section nulle du cotangent d'une variété Q, correspondant aux points de la forme $(q,0) \in T^*Q$. Ainsi, si X et Y dénotent des champs de vecteurs dans l'espace tangent de l'image de la section nulle, alors*

$$\omega_0(X,Y) = (d\lambda_0)(X,Y) = \lambda_0(Y) - \lambda_0(X) - \lambda_0([X,Y]) = 0,$$

car $[X,Y]$ est toujours dans l'espace tangent de la section nulle; l'espace tangent d'une sous-variété est par définition intégrable et donc, involutif. Il suit donc que l'image de la section nulle est une sous-variété lagrangienne du cotangent.

Exemple 2.1.15. *Par le lemme 1.1.7, toute courbe dans une variété symplectique est isotrope et toute hypersurface est coisotrope.*

Les sous-variétés lagrangiennes jouent un rôle fondamental en topologie symplectique puisqu'elles permettent d'interpréter géométriquement plusieurs questions d'ordre algébrique. De ce fait, elles sont à la base d'une grande partie des innovations dans le sujet au cours des trente dernières années. Ce n'en est pas le but de ce mémoire que d'explorer en profondeur ce sujet, mais les deux propositions suivantes offrent des exemples simples de cette correspondance entre l'algèbre et la géométrie.

Proposition 2.1.16. *Le graphe $\Gamma_\alpha \subseteq T^*Q$ d'une 1-forme $\alpha : Q \to T^*Q$ est une sous-variété lagrangienne si et seulement si α est fermée.*

Démonstration. On voit ici le graphe Γ_α comme l'image de α dans T^*Q. Alors, puisque $\alpha : Q \to T^*Q$ est un plongement, Γ_α est une sous-variété de T^*Q et $T\Gamma_\alpha = \alpha_* TQ$. Ainsi, Γ_α est lagrangienne si et seulement si

$$0 = (d\lambda_0)(\alpha_* \cdot, \alpha_* \cdot) = \alpha^*(d\lambda_0) = d(\alpha^*\lambda_0) = d\alpha.$$

□

Proposition 2.1.17. *Soient (M,ω), une variété symplectique, et $\psi : M \to M$, un difféomorphisme. Alors, ψ est un symplectomorphisme si et seulement si son graphe est une sous-variété lagrangienne de $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$.*

Démonstration. On note que

$$T_{(x,\psi(x))}\,(\text{graphe}(\psi)) = \left\{ (v,(d\psi)_x(v)) \in T_{(x,\psi(x))}(M \times M) \;\middle|\; v \in T_xM \right\}.$$

Or, si $v,w \in T_xM$ et $x \in M$, alors

$$\begin{aligned}(\omega \oplus (-\omega))_{(x,\psi(x))}\left((v,(d\psi)_x(v)),(w,(d\psi)_x(w))\right) &= \omega_x(v,w) - \omega_{\psi(x)}\left((d\psi)_x(v),(d\psi)_x(w)\right) \\ &= \omega_x(v,w) - (\psi^*\omega)_x(v,w)\end{aligned}$$

qui s'annule pour tous choix de v,w,x si et seulement si $\psi^*\omega = \omega$, c'est-à-dire graphe(ψ) est lagrangien si et seulement si ψ est un symplectomorphisme. □

Le rôle des sous-variétés coisotropes non-lagrangiennes en topologie symplectique n'est cependant pas encore parfaitement clair. Cependant, elles semblent offrir une richesse de structure qui ne demande qu'à être étudiée. Toutefois, une application très connue et utile des sous-variétés coisotropes est dans les quotients de Marsden-Weinstein. Ces quotients, qui apparaissent naturellement en physique lorsqu'un groupe de Lie agit sur un système hamiltonien par symétries, s'avèrent jouer un rôle essentiel autant en mathématiques pures qu'en physique. Sans entrer dans les détails de ces quotients, nous allons rapidement exposer ici le rôle de la topologie des sous-variétés coisotropes dans ceux-ci.

Tout d'abord, notons que si Q est une sous-variété coisotrope d'une variété symplectique (M,ω), alors $TQ^\omega \subseteq TQ$ est une distribution isotrope sur Q (c'est-à-dire un sous-fibré du fibré tangent de Q sur lequel la forme symplectique s'annule).

Lemme 2.1.18. *La distribution TQ^ω est involutive.*

Démonstration. Soient X et Y, des champs de vecteurs sur Q ayant valeur dans TQ^ω. Si Z est un champ de vecteurs quelconque sur Q, alors

$$\begin{aligned}0 &= (d\omega)(X,Y,Z) \\ &= \omega(Y,Z) - \omega(X,Z) + \omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X) \\ &= -\omega([X,Y],Z)\end{aligned}$$

puisque ω est fermée et que $\iota_X\omega = \iota_Y\omega = 0$. Pour que cela tienne pour tout champ de vecteurs Z sur Q, il faut nécessairement que $[X,Y] \in TQ^\omega$. □

Ainsi, par le théorème de Frobenius, TQ^ω est complètement intégrable et Q est feuilletée par des sous-variétés isotropes, dont la dimension correspond exactement celle de $\ker \omega|_{TQ}$. Par exemple, dans les cas limites, les feuilles sont les points de Q lorsque $Q = M$ et lorsque

Q est lagrangienne, les composantes connexes de Q. Alors, Q possède naturellement une relation d'équivalence: $x \sim y$ si et seulement si x et y sont sur la même feuille.

Définition 2.1.19. *Une sous-variété coisotrope Q d'une variété symplectique (M,ω) est dite **régulière** si*

*(i) en tout $x \in Q$, il existe une sous-variété S de Q contenant x, appelée une **tranche locale** en x, croisant chaque feuille isotrope au plus une fois et telle que $T_yQ = T_yS \oplus T_yQ^\omega$ pour tout $y \in S$;*

(ii) $\bar{Q} := Q/\sim$ est Hausdorff.

Si Q est régulière, alors c'est un fait classique sur les feuilletages que chaque feuille est bien une sous-variété (plongée, pas seulement immergée) et que $\bar{Q}$ possède une unique structure de variété lisse faisant de la projection $p : Q \to \bar{Q}$ une submersion; les cartes locales de $\bar{Q}$ sont bien sûr obtenues à partir des tranches locales. Notons cependant que même si toutes les feuilles sont des vraies sous-variétés de Q (par exemple, si elles sont fermées comme sous-ensemble), il se peut que Q ne soit tout de même pas régulière.

Proposition 2.1.20. *Si Q est une sous-variété coisotrope régulière d'une variété symplectique (M,ω), alors $\bar{Q}$ possède une unique forme symplectique $\bar{\omega}$ telle que $p^*\bar{\omega} = \omega|_{TQ}$.*

Démonstration. Prenons $\dim M = 2m$ et codim $Q = k \in \{0,\dots,m\}$. Fixons $x_0 \in Q$ et une tranche locale S_0 de Q passant par x_0. Par le théorème de Frobenius, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une carte locale $\phi : U \to \mathbb{R}^{2m-2k} \times \mathbb{R}^k$ telle que $\phi(x_0) = 0$, $\phi(U) \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^k$ soit connexe pour tout $y \in \phi(U) \cap \mathbb{R}^{2m-2k}$ et

$$v \in T_xQ^\omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\phi_x(v) \in \{0\} \times \mathbb{R}^k \qquad \forall x \in U.$$

De plus, en prenant U plus petit au besoin, nous pouvons supposer qu'il existe $\epsilon,\delta > 0$ tels que

$$\phi(U) = B_\delta^{2m-2k} \times B_\epsilon^k$$

et que $\phi(U \cap S_0)$ est le graphe d'une application lisse $f_0 : B_\delta^{2m-2k} \to B_\epsilon^k$ telle que $f_0(0) = 0$.

Alors, si L_x est la feuille de TQ^ω passant par $x \in U$, il suit que $U \cap L_x = \phi^{-1}(\phi(U) \cap (\{\phi(x)\} \times \mathbb{R}^k))$ est connexe. De plus, $\tau := \phi_*\omega|_U$ est fermée. De même, pour $y \in \phi(U)$, nous avons $\tau_y(v,\cdot) = 0$ si et seulement si v est dans $\{0\} \times \mathbb{R}^k$. Ainsi, $\tau|_{\phi(U)\cap(\{y\}\times\mathbb{R}^k} \equiv 0$ pour tout $y \in B_\delta^{2n-2k}$ et $\tau|_{\phi(U\cap S_0)}$ est symplectique, car $T_{x_0}Q = T_{x_0}S_0 \oplus T_{x_0}Q^\omega$.

Considérons maintenant une autre tranche locale S_1 en $x_1 \in U$, où $p(x_1) = p(x_0)$. Comme précédemment, au prix de potentiellement diminuer davantage U, nous pouvons supposer que $\phi(U \cap S_1)$ est le graphe d'une application lisse $f_1 : B_\delta^{2m-2k} \to B_\delta^k$. Par ailleurs, il existe un unique difféomorphisme $\phi : U \cap S_0 \to U \cap S_1$ préservant les feuilles isotropes. Ainsi, si $y \in B_\delta^{2n-2k} \times B_\epsilon^k$,

$$\left(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}\right)(y,f_0(y)) = (y,f_1(y))$$

d'où

$$\left(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}\right)^* \tau|_{\phi(U \cap S_1)} = \tau|_{\phi(U \cap S_0)},$$

car $T_{(y,f_i(y))}\phi(U \cap S_i) = \{(v,(df_i)_y(v)) \mid v \in \mathbb{R}^{2m-2k}\}$. Ainsi, $\psi^*\omega|_{U\cap S_1} = \omega|_{U \cap S_0}$ et les applications de transitions entre tranches locales proches sont des symplectomorphismes. Par connexité des feuilles, les applications de transition entre n'importe quelles deux tranches locales passant par la même feuille sont des symplectomorphismes.

Définissons $\bar{\omega}|_{\bar{S}}$ comme l'unique 2-forme telle que $\omega|_S = (p|_S)^*(\bar{\omega}|_{\bar{S}})$, où $\bar{S} := p(S)$ est un ouvert de carte de $\bar{Q}$. Ce que nous venons de démontrer dit alors précisément que $\bar{\omega}|_{\bar{S}}$ est non-dégénérée et que cette définition est invariante sous changements de carte. Donc, $\bar{\omega}$ est bien définie et uniquement déterminée par $p^*\bar{\omega} = \omega|_Q$. Ceci démontre également que c'est une forme fermée, puisque $p^*d\bar{\omega} = d\omega|_Q = 0$ et donc, $d\bar{\omega} \in \ker p^* = \{0\}$ par surjectivité de dp. □

2.2. Comportement local dans les variétés symplectiques

2.2.1. L'argument de Moser et le théorème de Darboux

Maintenant que la notion de symplectomorphisme pour une variété symplectique est définie, la question naturelle est la suivante: pour une variété donnée, quelles formes symplectiques induisent des structures symplectiques symplectomorphes? Ici, un symplectomorphisme prend un sens un peu plus élargi où nous admettons que la forme symplectique ne soit pas la même au domaine qu'au codomaine. Cette question s'avère être extrêmement difficile à répondre en toute généralité, mais le prochain théorème donne une condition suffisante surprenamment faible pour des variétés fermées:

Théorème 2.2.1 (Théorème de stabilité de Moser)**.** *Soient M, une variété fermée, et $\{\omega_t\}_{t\in[0,1]}$, une famille lisse de formes symplectiques cohomologues sur M. Alors, il existe une famille de difféomorphismes $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ sur M telle que*

$$\psi_0 = \mathbb{1} \quad et \quad \psi_t^*\omega_t = \omega_0,$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration. Puisque les ω_t sont cohomologues, $\omega_t - \omega_0$ est exacte pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, il en va de même pour

$$\tau_t := \frac{d}{dt}(\omega_t - \omega_0) = \frac{d}{dt}\omega_t.$$

Donc, pour tout $t \in [0,1]$, il existe une 1-forme σ_t sur M telle que $d\sigma_t = \tau_t$. La difficulté alors est de démontrer que nous pouvons prendre σ_t de façon lisse.

Il y a bien des façons de démontrer cela, mais la plus facile passe probablement par la théorie de Hodge. Pour ce faire, fixons une métrique g sur M (pas nécessairement compatible avec ω). Dénotons alors par $\delta : \Omega^2(M) \to \Omega^1(M)$, l'opérateur adjoint à la dérivée extérieure $d : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$ par rapport à la norme L^2 induite par g sur l'espace vectoriel$\Omega^k(M)$ des k-formes différentielles sur M. Puisque M est fermée, nous avons la décomposition de Hodge sur $\Omega^k(M)$ et $d|_{\mathrm{im}\ \delta}$ est un isomorphisme avec les formes exactes. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, il existe une unique 1-forme $\sigma_t \in \mathrm{im}\ \delta$ telle que $d\sigma_t = \tau_t$. Que σ_t dépende de façon lisse de t découle alors directement de la régularité elliptique.

C'est à partir de ce point que nous utilisons l'« argument de Moser »: supposons qu'il existe un ψ_t ayant les propriétés désirées et dénotons alors par X_t son champ de vitesse associé. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t \\ &= \psi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right) \\ &= \psi_t^* d\left(\sigma_t + \iota_{X_t}\omega_t\right), \end{aligned}$$

où le passage de la première à la seconde ligne est démontré dans tout bon manuel d'introduction à la géométrie différentielle (voir **[18]** par exemple) et le passage de la deuxième à la troisième ligne découle de l'égalité $(d\omega_t)/(dt) = d\sigma_t$, de l'identité de Cartan et du fait que

ω_t soit fermée. Notons que l'égalité est respectée lorsque

$$\sigma_t + \iota_{X_t}\omega_t = 0.$$

Or, il y a un unique champ de vecteurs dépendant du temps X_t respectant cette égalité puisque ω_t est non-dégénérée. Ce dernier est lisse, car σ_t l'est. Ainsi, nous pouvons remonter la preuve en commençant avec le X_t respectant cette équation; son flot ψ_t, qui est défini en tout temps, car M est compacte, sera alors exactement le difféomorphisme recherché. □

Remarque 2.2.2. *Notons que l'hypothèse que M soit fermée est absolument nécessaire pour que ce théorème tienne, ce n'est pas simplement un résidu du fait que nous utilisions la décomposition de Hodge. Effectivement, des contre-exemples sont connus pour des variétés symplectiques ouvertes.*

Comme nous le voyons ce théorème porte sur le comportement global d'une forme symplectique. Est-il possible d'obtenir une version locale de ce théorème qui pourrait permettre de relier deux formes symplectiques qui soient « proches » en un certain sens local? Le prochain théorème répond de façon satisfaisante à cette question.

Théorème 2.2.3 (Théorème d'isotopie de Moser)**.** *Soient M, une variété lisse de dimension $2m$ (pas nécessairement fermée), et Q, une sous-variété compacte. Supposons que nous ayons deux 2-formes fermées ω_0 et ω_1 telles que $(\omega_0)_q = (\omega_1)_q \in \Omega^2(T_qM)$ est non-dégénérée pour tout $q \in Q$. Alors, il existe des voisinages $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_1$ de Q et un difféomorphisme $\psi : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}_1$ tels que*

$$\psi|_Q = \mathbb{1} \quad et \quad \psi^*\omega_1 = \omega_0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'il existe une 1-forme σ sur un voisinage $\mathcal{N}_0$ de M telle que

$$\sigma|_{T_QM} = 0 \quad \text{et} \quad d\sigma = \omega_1 - \omega_0$$

puisque nous pourrons alors utiliser l'argument de Moser pour

$$\omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + td\sigma.$$

Au prix de potentiellement rapetisser $\mathcal{N}_0$, nous aurons que ω_t est non-dégénérée et que ψ_t est bien définie pour tout $t \in [0,1]$ sur ce voisinage, car être non-dégénérée est une condition ouverte et Q est compacte,. Alors, il suffira de prendre $\phi = \psi_1$ et $\mathcal{N}_1 := \phi(\mathcal{N}_0)$.

Fixons une métrique g sur M et considérons $\exp : TQ^{\perp} \to M$, la restriction de l'exponentielle associée à g au fibré normal (par rapport à g encore) de Q dans M. Alors, pour ϵ suffisamment petit, $\exp|_{U_\epsilon}$ est un difféomorphisme, où

$$U_\epsilon := \left\{(q,v) \in TQ^{\perp} \;\middle|\; |v|_g < \epsilon\right\}.$$

Définissons $\mathcal{N}_0 := \exp(U_\epsilon)$ et

$$\begin{aligned} \phi_t \colon \mathcal{N}_0 &\longrightarrow \mathcal{N}_0 \\ \exp(q,v) &\mapsto \exp(q,tv) \end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$, qui est clairement un difféomorphisme lorsque $t > 0$. De plus, $\phi_0(\mathcal{N}_0) = Q$, $\phi_1 = \mathbb{1}$ et $\phi_t|_Q = \mathbb{1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Ainsi, pour $\tau := \omega_1 - \omega_0$, nous avons $\phi_0^*\tau = 0$ et $\phi_1^*\tau = \tau$, car $\omega_0|_{T_QM} = \omega_1|_{T_QM}$. De plus, puisque ϕ_t est un difféomorphisme pour $t > 0$, nous pouvons définir le champ de vitesse

$$X_t := \left(\frac{d}{dt}\phi_t\right) \circ \phi_t^{-1} \qquad \forall t \in (0,1]$$

qui ne s'étend malheureusement pas en $t = 0$. Néanmoins, nous avons

$$\begin{aligned} \tau &= \phi_1^*\tau - \phi_0^*\tau \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\phi_t^*\tau\right) \\ &= \int_0^1 \phi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\tau\right) \\ &= d\int_0^1 \phi_t^*(\iota_{X_t}\tau), \end{aligned}$$

où le passage à la dernière ligne découle de l'identité de Cartan et du fait que le rappel par une application commute avec la dérivée extérieure. Ainsi,

$$\sigma := \int_0^1 \phi_t^*(\iota_{X_t}\tau)$$

a les propriétés désirées. □

Ceci démontre donc qu'il n'y a pas de comportement particulier du point de vue symplectique autour des sous-variétés compactes d'une variété symplectique. Il en suit qu'il ne peut pas exister d'invariants locaux d'origine symplectique:

Corollaire 2.2.4 (Théorème de Darboux)**.** *Soient (M,ω), une variété symplectique de dimension $2m$, et $x \in M$. Alors, il existe un voisinage U de x, un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^{2m}$ et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que*

$$\phi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \phi^*\omega_0 = \omega.$$

On appelle un tel ϕ une ***carte de Darboux*** *de M centrée en x.*

Démonstration. Soit $\psi : U \to V$, un carte de M centrée en x. Par le lemme 1.1.3, au prix de post-composer par une transformation linéaire inversible de $\mathbb{R}^{2m}$, nous pouvons supposer que $\omega_x = (\psi^*\omega_0)_x$. Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent au cas $Q = \{x\}$. □

2.2.2. Voisinages

L'argument de Moser, plus précisément le théorème d'isotopie de Moser, peut encore être exploiter pour étudier le comportement local autour des sous-variétés d'intérêt introduites précédemment.

Tout d'abord, notons que si nous avons une variété symplectique (M,ω) avec une sous-variété symplectique Q, nous pouvons fixer une structure presque complexe J compatible avec ω de sorte à ce que le fibré normal de Q s'identifie à $TQ^\perp = J(TQ^\omega) = TQ^\omega$, où $\perp$ dénote bien sûr le complément orthogonal par rapport à la métrique riemannienne g_J et où la dernière égalité découle du fait que TQ^ω soit un fibré symplectique puisque TQ l'est. Ainsi, le fibré normal de Q a naturellement une structure symplectique et de ce fait, notons-le $\mathrm{SN}(Q)$. Le prochain théorème, dû à Weinstein, démontre que cette structure détermine totalement le comportement local autour de Q lorsqu'elle est compacte.

Théorème 2.2.5 (Théorème de voisinage symplectique)**.** *Pour $i \in \{0,1\}$, soit (M_i,ω_i), une variété symplectique avec une sous-variété symplectique compacte Q_i. Supposons qu'il existe un isomorphisme de fibrés symplectiques $\Phi : \mathrm{SN}(Q_0) \to \mathrm{SN}(Q_1)$ induisant un symplectomorphisme sur la base $\phi : (Q_0,\omega_0|_{TQ_0}) \to (Q_1,\omega_1|_{TQ_1})$. Alors, ϕ s'étend en un symplectomorphisme $\psi : (\mathcal{N}_0,\omega_0|_{\mathcal{N}_0}) \to (\mathcal{N}_1,\omega_1|_{\mathcal{N}_1})$ tel que $d\psi|_{\mathrm{SN}(Q_0)} = \Phi$, pour des voisinages $\mathcal{N}_i$ de Q_i.*

Démonstration. Fixons d'abord une structure presque complexe J_i compatible avec ω_i. Dénotons par $\exp_i$ la restriction de l'application exponentielle induite par g_{J_i} à un voisinage $\mathcal{N}_i$ de la section nulle dans $TQ_i^\perp$. Ce voisinage peut être pris suffisamment petit pour que l'application soit un difféomorphisme. Alors,

$$\phi' := \exp_1 \circ \Phi \circ \exp_0^{-1}$$

est un difféomorphisme sur son image $\mathcal{N}_1$, qui est un voisinage de Q_1. De plus, $\phi'|_{Q_0} = \phi$ et $d\phi'|_{TQ_0^\perp} = \Phi$. Nous pouvons étendre ω_0 et $(\phi')^*\omega_1$ sur tout M_0 de façon triviale. Alors, ces formes sont égales et non-dégénérées sur $T_{Q_0}M_0$ puisque

$$((\phi')^*\omega_1)\,|_{Q_0} = \phi^*\left(\omega_1|_{TQ_1}\right) \oplus \Phi^*\left(\omega_1|_{TQ_1^\perp}\right) = \omega_0|_{TQ_0} \oplus \omega_0|_{TQ_0^\perp} = \omega_0$$

par ce qu'on vient de dire sur la restriction de ϕ' à Q_0 et sur sa différentielle. Au prix de potentiellement diminuer les $\mathcal{N}_i$, le théorème découle alors de théorème d'isotopie de Moser. □

Notons que nulle part dans la preuve précédente, nous avons utilisé le fait que les $\omega_i|_{TQ_i}$ soient non-dégénérées, ce qui laisse espérer une généralisation de l'argument à une plus grande classe de sous-variétés. Dans cette optique, pour une sous-variété Q d'une variété symplectique (M,ω) telle que $\omega|_{TQ}$ ait rang constant, définissons son fibré normal symplectique par

$$\mathrm{SN}(Q) := (TQ + J(TQ))^\omega$$

pour une structure presque complexe ω-compatible J. Pour voir que cette définition est indépendante de la structure presque complexe utilisée, il suffit de noter que

$$TQ + J(TQ) = H \oplus (TQ^\omega \cap TQ) \oplus J(TQ^\omega \cap TQ) \cong H \oplus (TQ^\omega \cap TQ) \oplus (TQ^\omega \cap TQ)^*,$$

où $TQ = H \oplus (TQ^\omega \cap TQ)$ et l'isomorphisme est donné sur la dernière composante par $Jv \mapsto \omega(Jv,-)$. Ce dernier est alors symplectique si nous équipons le dernier fibré de la forme symplectique $\omega|_H \oplus \Omega_0$, où Ω_0 est la forme symplectique canonique de $(TQ^\omega \cap TQ) \oplus (TQ^\omega \cap TQ)^*$ introduite au chapitre précédent. Ainsi, des choix différents de structures presque complexes donnent lieu à des fibrés isomorphes au sens symplectique.

Par le même genre de calcul, nous obtenons que le fibré normal de Q dans M prend la forme $TQ^\perp = J(TQ^\omega \cap TQ) \oplus SN(Q)$. Nous retrouvons ainsi le résultat précédent sur le fibré normal des sous-variétés symplectiques lorsque $TQ^\omega \cap TQ = 0_Q$. Ceci nous permet donc d'énoncer une version généralisée du théorème précédent.

Théorème 2.2.6. *Pour $i \in \{0,1\}$, soit (M_i,ω_i), une variété symplectique avec une sous-variété compacte Q_i telle que $\omega_i|_{TQ_i}$ ait rang constant. Supposons qu'il existe un isomorphisme de fibrés symplectiques $\Phi : \mathrm{SN}(Q_0) \to \mathrm{SN}(Q_1)$ induisant un difféomorphisme sur la base $\phi : Q_0 \to Q_1$ tel que $\phi^*(\omega_1|_{TQ_1}) = \omega_0|_{TQ_0}$. Alors, ϕ s'étend en un symplectomorphisme $\psi : (\mathcal{N}_0,\omega_0|_{\mathcal{N}_0}) \to (\mathcal{N}_1,\omega_1|_{\mathcal{N}_1})$ tel que $d\psi|_{\mathrm{SN}(Q_0)} = \Phi$ pour des voisinages $\mathcal{N}_i$ de Q_i.*

Démonstration. La preuve est exactement la même qu'en 2.2.5, excepté que nous prenons plutôt comme difféomorphisme

$$\phi' := \exp_1 \circ \left(-J_1 \circ d\phi|_{TQ_0^\omega \cap TQ_0} \circ J_0 \oplus \Phi\right) \circ \exp_0^{-1}$$

suivant ainsi le scindement $TQ_i^\perp = J_i(TQ_i^\omega \cap TQ_i) \oplus \mathrm{SN}(Q_i)$. □

Ceci nous donne tous les théorèmes de voisinage pour les sous-variétés d'intérêt précédemment introduites. Dans le cas isotrope, la condition sur le rappel de la forme symplectique par ϕ est automatiquement respectée et donc, localement, une sous-variété isotrope est totalement classifiée par son type de difféomorphisme et la classe d'isomorphisme de son fibré normal symplectique. Au contraire, dans le cas coisotrope, le fibré normal symplectique est toujours de rang zéro et la condition sur Φ est trivialement respectée. Ainsi, le voisinage d'une sous-variété coisotrope est entièrement déterminé par la sous-variété elle-même, et non la variété ambiante.

Remarque 2.2.7. *La dualité entre les conditions de voisinages isotrope et coisotrope ne devrait pas être une surprise. Lorsqu'une sous-variété isotrope Q est une feuille provenant de l'intégration de TP^ω pour une variété coisotrope P, $\mathrm{SN}(Q)$ est le complément de TP^ω dans TP, c'est-à-dire la partie de TP sur laquelle la forme symplectique ne s'annule pas. Alors, la condition que Φ soit un isomorphisme symplectique entre les fibrés normaux symplectiques dans l'énoncé isotrope se traduit par la condition que ϕ respecte $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ dans l'énoncé coisotrope. Cette situation est générale: c'est une conséquence relativement directe de 2.2.6 est qu'il est toujours possible réaliser une sous-variété isotrope comme une telle feuille, avec P ouverte.*

Puisque les sous-variétés lagrangiennes sont à la fois isotropes et coisotropes, les conditions symplectiques sur ϕ et Φ sont automatiquement respectées, d'où le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.8 (Théorème de voisinage lagrangien)**.** *Soient (M,ω), une variété symplectique, et L, une sous-variété lagrangienne compacte. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de la* *section nulle de T^*L, un voisinage $\mathcal{O}$ de L dans M et un difféomorphisme $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ tels que*

$$\psi^* \left(\omega|_{\mathcal{O}}\right) = d\lambda_0|_{\mathcal{N}} \quad \textit{et} \quad \psi|_L = \mathbb{1}$$

où nous avons encore identifié L à son image par la section nulle.

Il se trouve que cet énoncé a une conséquence surprenante sur le comportement local du groupe des symplectomorphismes. Notons d'abord que si $g : M \to T^*M$ est un plongement C^1-près de la section nulle de T^*M, alors $g(M)$ est le graphe d'une 1-forme. Ceci découle du fait qu'alors, $\pi \circ g$ est C^1-près de l'identité et donc, inversible. Ainsi, nous pouvons définir

$$\sigma := g \circ (\pi \circ g)^{-1}$$

qui a la même image que g, de par l'inversibilité de $\pi \circ g$, et qui est une 1-forme puisque $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}$ par définition. Pour les personnes n'étant pas totalement à l'aise avec la notion intuitive de « C^k-près », la section 3.1.2 au prochain chapitre introduit rigoureusement les topologies C^k de Whitney. Alors, de notre petit résultat, nous obtenons

Corollaire 2.2.9. *Soit (M,ω), une variété symplectique fermée. Alors, un voisinage de l'identité dans* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ *peut être identifié à un voisinage de l'origine de l'espace vectoriel des 1-formes fermées sur M.*

Démonstration. Notons par Δ la diagonale dans $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$; c'est une sous-variété lagrangienne par la proposition 2.1.17, car c'est le graphe de l'identité. Par le théorème 2.2.8, il existe donc un voisinage $\mathcal{N}$ de Δ dans $M \times M$, un voisinage $\mathcal{M}$ de M dans T^*M (nous avons ici identifié le cotangent de la diagonale avec celui de T^*M, comme il est toujours possible de faire canoniquement) et un difféomorphisme $\Psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ tel que

$$\Psi(q,q) = (q,0) \quad \text{et} \quad \Psi^* d\lambda_0 = \omega \oplus (-\omega)$$

pour tout $q \in M$.

Considérons donc $\phi \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$ suffisamment C^1-près de l'identité pour que son graphe soit dans $\mathcal{N}$. Encore une fois, puisque c'est un symplectomorphisme, son graphe est une sous-variété lagrangienne; il en va donc de même pour $L := \Psi(\mathrm{graphe}(\phi))$. Mais alors, L est l'image du plongement

$$\begin{aligned} g\colon M &\longrightarrow T^*M \\ q &\longmapsto \Psi(q,\, \phi(q)), \end{aligned}$$

qui est C^1-près de la section nulle, puisque ϕ est C^1-près de l'identité et Ψ envoie la diagonale sur l'image de la section nulle. Ainsi, par le paragraphe précédent ce corollaire, L est le graphe d'une 1-forme, qui doit être fermée par la proposition 2.1.16. Nous pouvons ainsi associer à chaque symplectomorphisme C^1-près de l'identité une 1-forme fermée, qui sera nécessairement elle-même C^1-près de la 1-forme nulle. Cette association va clairement dans l'autre sens également, d'où l'identification. $\square$

2.3. Structure de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ dans $\mathrm{Symp}(M,\omega)$

2.3.1. Quelques propriétés topologiques et algébriques

Afin d'alléger cette section de certaines considérations techniques, nous allons supposer que M est fermée, mais notons que la plupart des résultats sont généralisables au cas où M est non-compacte en considérant des symplectomorphismes à support compact.

Théorème 2.3.1. *Soit (M,ω), une variété symplectique fermée. Alors,* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ *est localement connexe par arcs dans la topologie C^1 de Whitney.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'énoncé près de l'identité, puisque si U est un voisinage connexe par arcs de l'identité, alors $L_\psi(U)$ est un voisinage connexe par arcs de ψ, où L_ψ dénote la multiplication à gauche par ψ.

Ceci dit, le résultat près de l'identité découle directement du corollaire 2.2.9, puisqu'il suffit de prendre le voisinage $\mathcal{M}$ de M dans T^*M convexe sur chaque fibre. Alors, si σ est une 1-forme ayant son graphe dans $\mathcal{M}$, il en va de même pour $t\sigma$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors, pour tout voisinage de $\mathbb{1}$ dans $\mathrm{Symp}(M,\omega)$, nous pouvons prendre un sous-voisinage identifié à un voisinage étoilé, et donc connexe par arcs, de l'origine de $\mathcal{Z}^1_{dR}(M)$. $\square$

En particulier, il suit que la composante connexe à l'identité $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ est connexe par arcs. De plus, de la définition même de $\mathrm{Ham}(M,\omega)$, ce sous-groupe est connexe par arcs et donc, $\mathrm{Ham}(M,\omega) \subseteq \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$.

Proposition 2.3.2. $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *est un sous-groupe abstrait normal de* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$.

Démonstration. On montre d'abord que c'est un sous-groupe abstrait. Soient ψ_1 et ϕ_1, des difféomorphismes hamiltoniens engendrés par F_t et G_t avec champ de vitesse X_t et Y_t respectivement. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\psi_t \circ \phi_t) &= d\psi_t \circ \frac{d\phi_t}{dt} + \frac{d\psi_t}{dt} \circ \phi_t \\ &= d\psi_t \circ Y_t \circ \phi_t + X_t \circ \psi_t \circ \phi_t \\ &= \left(d\psi_t \circ Y_t \circ \psi_t^{-1} + X_t\right) \circ \psi_t \circ \phi_t.\end{aligned}$$

Ainsi, le champ de vitesse de l'isotopie $\psi_t \circ \phi_t$ est $d\psi_t \circ Y_t \circ \psi_t^{-1} + X_t$. Or, pour $x \in M$,

$$\begin{aligned}\omega_x\left(\left(d\psi_t\right)_{\psi_t^{-1}(x)}\left(Y(\psi_t^{-1}(x))\right),\cdot\right) &= \left((\psi_t^{-1})^*\omega\right)_x\left(\left(d\psi_t\right)_{\psi_t^{-1}(x)}\left(Y(\psi_t^{-1}(x))\right),\cdot\right) \\ &= \omega_{\psi_t^{-1}(x)}\left(Y_t(\psi_t^{-1}(x)),(d\psi_t^{-1})_x(\cdot)\right) \\ &= (dG_t)_{\psi^{-1}(x)} \circ (d\psi_t^{-1})_x \\ &= d(G_t \circ \psi_t^{-1})_x\end{aligned}$$

et donc, $\psi_1 \circ \phi_1$ est un difféomorphisme hamiltonien engendré par $F_t + G_t \circ \psi_t^{-1}$.

De même, si Z_t dénote le champ de vitesse de ψ_t^{-1}, ce que nous venons de démontrer donne que $Z_t = -d\psi_t^{-1} \circ Y_t \circ \psi_t$ en utilisant le fait que $\psi_t \circ \psi_t^{-1} = \mathbb{1}$. Donc, par un calcul similaire au précédent, ψ_1^{-1} est un difféomorphisme hamiltonien engendré par $F_t \circ \psi_t$. Ainsi, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est fermé sous la composition et l'inverse; ce doit donc être un sous-groupe.

Finalement, pour ce qui est de la normalité, considérons un symplectomorphisme χ. Pour montrer que $\chi^{-1} \circ \psi_1 \circ \chi$ est toujours un difféomorphisme hamiltonien, il suffit de montrer que $\chi^{-1} \circ \psi_t \circ \chi$ est une isotopie engendrée par une fonction sur M. Or, en reprenant le calcul sur la dérivée temporelle de la composition de deux isotopies, nous trouvons que le champ de vitesse de $\chi^{-1} \circ \psi_t \circ \chi$ est $d\chi^{-1} \circ X_t \circ \chi$. Encore par le calcul ci-haut, nous voyons directement que ce champ est engendré par la fonction $F_t \circ \chi$. Ainsi, $\chi^{-1} \circ \psi_1 \circ \chi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$. □

Remarque 2.3.3. *En réalité, c'est un théorème dû à Ono que lorsque M est fermée,* $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *est une sous-variété fermée (dans la topologie C^1 de Whitney) de* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$*. Ainsi,* $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *est bien un sous-groupe de Lie plongé de* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$*.*

2.3.2. L'homomorphisme de flux

On dénotera par $\widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega)$, le revêtement universel de $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$. Ainsi, un point de $\widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega)$ est une classe d'homotopie relativement aux extrémités de chemins lisses de $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$, c'est-à-dire d'isotopies de symplectomorphismes ψ_t de (M,ω) telles que $\psi_0 = \mathbb{1}$. Notons le point correspondant à un chemin ψ_t par $[\psi_t]$.

La structure de groupe de $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ se relève naturellement à son revêtement universel en prenant $[\psi_t][\phi_t] := [\psi_t \circ \phi_t]$. Il y a cependant une autre structure de groupe sur $\widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega)$ induite par la concaténation:

$$(\psi\|\phi)_t := \begin{cases} \phi_{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \psi_{2t-1} \circ \phi_1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Heureusement pour nous, les structures sont égales puisque

$$H(t,s) := \begin{cases} \phi_{\frac{2t}{1+s}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}; \\ \psi_{\frac{2t-(1-s)}{1+s}} \circ \phi_{\frac{2t}{1+s}} & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}; \\ \psi_{\frac{2t-(1-s)}{1+s}} \circ \phi_1 & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

donne une homotopie fixant les extrémités de $(\psi\|\phi)_t$ à $\psi_t \circ \phi_t$. En fait, nous voyons qu'en inversant l'ordre de ψ_t et ϕ_t dans le terme du centre, lorsque $\phi_1 = \mathbb{1}$, cela donne une homotopie de $(\psi\|\phi)_t$ à $\phi_t \circ \psi_t$. Ainsi, lorsque $\phi_1 = \mathbb{1}$ ou $\psi_1 = \mathbb{1}$, $[\phi_t \circ \psi_t] = [\psi_t \circ \phi_t]$; nous retrouvons ainsi le résultat que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien.

Définition 2.3.4. *L'**homomorphisme de flux** est donné par*

$$\begin{aligned} \mathrm{Flux}\colon \widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega) &\longrightarrow H^1(M;\mathbb{R}) \\ [\psi_t] &\longmapsto \left[\int_0^1 \iota_{X_t}\omega dt\right], \end{aligned}$$

où X_t est le champ de vitesse de ψ_t.

Tout d'abord, nous avons bien que $\mathrm{Flux}[\psi_t]$ définie une classe de cohomologie (de De Rham) puisque $\iota_{X_t}\omega$ est fermée par la proposition 2.1.9. Pour voir que la valeur du flux ne dépend réellement que de la classe d'homotopie du chemin ψ_t, il suffit de noter qu'avec l'identification $H^1(M;\mathbb{R}) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(M),\mathbb{R})$ donnée par le théorème des coefficients universels,

$\mathrm{Flux}[\psi_t]$ définit une application sur $\pi_1(M)$ donnée par

$$\mathrm{Flux}[\psi_t][\gamma] = \int_0^1 \int_0^1 \omega_{\gamma(s)} \left(X_t(\gamma(s)),\dot\gamma(s)\right) dsdt$$

où γ est un lacet lisse; qu'il existe toujours un tel représentant est un théorème classique de Whitney.

Lemme 2.3.5. *L'application définie par* $\mathrm{Flux}[\psi_t]$ *ne dépend que de la classe d'homotopie de* γ *et de* ψ_t *par rapport à leurs extrémités.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, notons que la 1-forme $\iota_{X_t}\omega$ est fermée en tout temps puisque ψ_t est symplectique. Ainsi, son intégrale sur un lacet ne dépend que de la classe d'homotopie dudit lacet. Il reste donc à démontrer que la classe de cohomologie de De Rham de $\iota_{X_t}\omega$ ne dépend que de la classe d'homotopie relativement à ses extrémités de ψ_t. Il suffit de démontrer que l'intégrale ci-haut ne dépend que de cette classe pour un lacet fixé.

Définissons $\beta(s,t) := \psi_t^{-1}(\gamma(s))$ de sorte à ce que $\psi_t(\beta(s,t)) = \gamma(s)$. En différenciant cette propriété, nous obtenons

$$d\psi_t(\beta)\frac{\partial\beta}{\partial s} = \dot\gamma(s) \quad \text{et} \quad d\psi_t(\beta)\frac{\partial\beta}{\partial t} + X_t(\gamma(s)) = 0$$

où X_t est bien sûr le champ de vitesse de ψ_t. Ainsi, puisque ψ_t est un symplectomorphisme en tout temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{Flux}[\psi_t][\gamma] &= \int_0^1 \int_0^1 \omega_{\gamma(s)} \left(-d\psi_t(\beta)\frac{\partial\beta}{\partial t},d\psi_t(\beta)\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) dsdt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \omega_{\beta(s,t)} \left(\frac{\partial\beta}{\partial s},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) dsdt \\ &= \int_{S^1\times[0,1]} \beta^*\omega,\end{aligned}$$

qui ne dépend que de la classe d'homotopie de β relativement aux extrémités $S^1\times\{0,1\}$. Or, pour γ fixé, cette classe d'homotopie est entièrement déterminée par celle de ψ_t relativement à $\psi_0 = \mathbb{1}$ et ψ_1. $\square$

Remarque 2.3.6. *Dans la preuve, nous aurions tout aussi bien pu utiliser* $\tilde\beta(s,t) := \psi_t(\gamma(s))$ *puisque* $(\psi_{1-\lambda t}\circ\psi^{-1}_{(1-\lambda)t}\circ\gamma)(s)$ *donne une homotopie fixant les bords de* $\psi_1\circ\beta(s,t)$ *à* $\tilde\beta(s,1-t)$ *et, bien sûr,* $\psi_1\circ\beta$ *a la même aire symplectique que* β *puisque* ψ_1 *est un symplectomorphisme.*

Ainsi, nous pouvons interpréter $\mathrm{Flux}[\psi_t]$ *comme l'application assignant à chaque lacet l'aire symplectique qu'il balaie sous l'isotopie* ψ_t.

Lemme 2.3.7. *L'application* Flux *est un homomorphisme surjectif sur* $H^1(M;\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour voir que c'est un homomorphisme, il suffit de se rappeler que $[\psi_t][\psi_t] = [(\psi\|\phi)_t]$. Effectivement, le champ de vitesse de $(\psi\|\phi)_t$ est $2Y_{2t}$ pour $0 \le t \le 1/2$ et $2X_{2t-1} \circ \phi_1$ pour $1/2 \le t \le 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Flux}[(\psi\|\phi)_t] &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} [\iota_{Y_{2t}}\omega]dt + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 [\iota_{X_{2t-1}\circ\phi_1}\omega]dt \\
&= \int_0^1 [\iota_{X_u}\omega]du + \int_0^1 [\iota_{Y_v}\omega]dv \\
&= \mathrm{Flux}[\psi_t] + \mathrm{Flux}[\phi_t].
\end{aligned}$$

Soit α, une 1-forme fermée sur M. Alors, il existe un unique champ de vecteur X sur M tel que $\iota_X\omega = \alpha$. De plus, puisque α est fermée, X est symplectique et donc, $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Ainsi, son flot ψ_t est un symplectomorphisme, car $\mathcal{L}_X\omega = d(\psi_t^*\omega)/dt$. De plus, il est clair que $\mathrm{Flux}[\psi_t] = [\alpha]$ par définition de l'homomorphisme de flux. Ainsi, ce dernier est bien surjectif. □

On peut ainsi finalement obtenir des résultats sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens à l'aide de l'homomorphisme de flux!

Théorème 2.3.8. *Soient* (M,ω), *une variété symplectique fermée, et* $\psi \in \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$. *Alors,* $\psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ *si et seulement s'il existe une isotopie* ψ_t *telle que* $\psi_1 = \psi$ *et* $\mathrm{Flux}[\psi_t] = 0$.
De plus, si $\mathrm{Flux}[\psi_t] = 0$, *alors* ψ_t *est homotope relativement à ses extrémités à une isotopie engendrée par une fonction lisse* $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

Démonstration. Si ψ_t est une isotopie provenant d'une famille à 1 paramètre de fonctions lisses $H_t : M \to \mathbb{R}$ telle que $\psi_1 = \psi$, alors

$$\mathrm{Flux}[\psi_t] = -\left[\int_0^1 dH_t dt\right] = -\left[d\int_0^1 H_t dt\right] = 0.$$

Au contraire, si ψ provient d'une isotopie ψ_t telle que $\mathrm{Flux}[\psi_t] = 0$, alors nous savons que $\int_0^1 \iota_{X_t}\omega dt$, où X_t est le champ de vitesse de ψ_t, est exacte. Ainsi, il existe $F : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^1 \iota_{X_t}\omega dt = -dF.$$

Dénotons par ϕ_t le flot hamiltonien de F. Alors, il suffit de démontrer le théorème pour $\phi_1^{-1} \circ \psi$ puisque la composition et l'inverse d'une isotopie engendrée par une fonction est de même nature. Or, ce symplectomorphisme est l'extrémité de l'isotopie $\phi_{1-2t} \| \psi_t$ (on utilise ici implicitement le fait que M soit fermée pour s'assurer que le flot de F soit en tout temps défini) qui a la propriété que son champ de vitesse X'_t est de moyenne nulle. Effectivement,

$$\int_0^1 X'_t dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} X_{2t} dt - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 X_s ds dt = 0,$$

car le champ de vitesse de $\phi_{1-2t} \circ \psi_1$ est -2 fois celui de ϕ_t, qui est celui engendré par F, et $\iota_{\int_0^1 X_s ds} \omega = \int_0^1 \iota_{X_s} \omega ds = -dF$.

Ainsi, nous assumerons pour la suite que ψ est l'extrémité d'une isotopie ψ_t dont le champ de vitesse X_t est de moyenne nulle. Considérons alors θ_t^s définie par

$$\frac{\partial}{\partial s} \theta_t^s = Y_t \circ \theta_t^s, \quad \theta_t^0 = \mathbb{1} \qquad \text{où } Y_t := -\int_0^t X_r dr.$$

Alors $Y_0 = Y_1 = 0$, d'où $\theta_0^s = \theta_1^s = \mathbb{1}$ pour tout s. Ainsi, $\chi_t := \theta_t^1 \circ \psi_t$ respecte $\chi_0 = \mathbb{1}$, $\chi_1 = \phi_1 = \psi$ et est homotope relativement à ses extrémités à ψ_t. Pour un $T \in [0,1]$, notons que, puisque Flux est un homomorphisme de groupes,

$$\begin{aligned} \operatorname{Flux}\left[\{\chi_t\}_{t=0}^T\right] &= \operatorname{Flux}\left[\{\theta_t^1\}_{t=0}^T\right] + \operatorname{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^T\right] \\ &= \operatorname{Flux}\left[\{\theta_T^s\}_{s=0}^1\right] + \operatorname{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^T\right] \\ &= [\iota_{Y_T}\omega] + \left[\int_0^T \iota_{X_t}\omega dt\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\{\theta_t^1\}_{t=0}^T$ et $\{\theta_T^s\}_{s=0}^1$ soient homotopes relativement à leurs extrémités (de la façon évidente) pour passer de la première à la seconde ligne. Ainsi, si Z_t dénote le champ de vitesse de χ_t, $\int_0^T \iota_{Z_t}\omega dt$ est exacte pour tout $T \in [0,1]$, ce qui revient à dire que $\iota_{Z_t}\omega$ est toujours exacte, et complète la démonstration. $\square$

Ainsi, $\operatorname{Ham}(M,\omega)$ est entièrement caractérisé par l'homomorphisme de flux. Nous pouvons maintenant utiliser cela pour obtenir davantage d'information sur le lien existant entre ce groupe et $\operatorname{Symp}_0(M,\omega)$.

Lemme 2.3.9. *Si ψ_t est une isotopie de symplectomorphismes dans un voisinage C^1-petit de l'identité, alors*

$$\mathrm{Flux}[\psi_t] = -[\sigma_1],$$

où σ_t est la 1-forme fermée associée à ψ_t lorsqu'on identifie un voisinage de l'identité dans $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ *avec un voisinage de l'origine dans $\mathcal{Z}^1_{dR}(M)$. En particulier, l'isotopie est hamiltonienne si et seulement si les σ_t sont exactes.*

Démonstration. Considérons l'isotopie symplectique $\Psi \circ (\mathbb{1} \times \psi_t) \circ \Psi^{-1}$, où Ψ est un symplectomorphisme allant d'un voisinage $\mathcal{N}$ de la diagonale dans $M \times M$ vers un voisinage $\mathcal{O}$ de l'image de la section nulle de T^*M, dont l'existence est assurée par le corollaire 2.2.8. Alors, si $s : M \to T^*M$ dénote la section nulle, il existe une famille à un paramètre de difféomorphismes $f_t : M \to M$ telle que

$$\Phi_t \circ s = \sigma_t \circ f_t \qquad \forall t \in [0,1].$$

De plus, si X_t est le champ de vitesse de ψ_t, comme nous l'avons vu précédemment, le champ de vitesse de $\mathbb{1} \times \psi_t$ est $0 \times X_t$ et celui de Φ_t est $d\Psi \circ (0 \times X_t) \circ \Psi^{-1}$. Ainsi,

$$\mathrm{Flux}[\psi_t] = -\Delta^*\mathrm{Flux}[\mathbb{1} \times \psi_t] = -\Delta^*\Psi^*\mathrm{Flux}[\Phi_t] = -s^*\mathrm{Flux}[\Phi_t],$$

où $\Delta = \Psi^{-1} \circ s : M \to M \times M$ est l'application diagonale.

Or, si λ_0 dénote la forme de Liouville sur T^*M, puisque Φ_t est un symplectomorphisme de T^*M, nous voyons que

$$[\iota_{d\Psi\circ(0\times X_t)\circ\Psi^{-1}} d\lambda_0] = \left[\Phi_t^*\mathcal{L}_{d\Psi\circ(0\times X_t)\circ\Psi^{-1}}\lambda_0\right] = \frac{d}{dt}[\Phi_t^*\lambda_0]$$

par l'identité de Cartan. Ainsi,

$$\mathrm{Flux}[\Phi_t] = \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi_t^*\lambda_0 dt\right] = \left[\Phi_1^*\lambda_0 - \lambda_0\right],$$

d'où

$$\mathrm{Flux}[\psi_t] = -\left[s^*\Phi_1^*\lambda_0\right] = -\left[f_1^*\sigma_1^*\lambda_0\right] = -[\sigma_1]$$

puisque $[s^*\lambda_0] = [s] = 0$ et $\sigma_1^*\lambda_0 = \sigma_1$, par le lemme 2.1.6, et que f_1 est isotope à l'identité par définition, d'où $f_1^* = \mathbb{1}$. $\square$

Remarque 2.3.10. *Nous avons techniquement uniquement défini l'homomorphisme de flux pour des isotropies symplectiques d'une variété symplectique fermée, alors qu'on l'utilise ici sur l'isotopie Φ_t de T^*M, qui n'est définitivement pas fermée. Cependant, il est facile de voir qu'ici tout est bien défini et que nous n'avons rien fait d'interdit.*

Notons cependant que si ψ_t est engendrée par une fonction lisse sur M, mais l'isotopie n'est pas toujours suffisamment C^1-près de l'identité malgré que ϕ_1 le soit, il se peut très bien que σ_1 ne soit pas exacte. Pour décrire la nature de $[\sigma_1]$ dans cette situation, introduisons le **groupe de flux**.

$$\Gamma_\omega := \mathrm{Flux}\left(\pi_1\left(\mathrm{Symp}_0(M,\omega)\right)\right)$$

où $\pi_1(\mathrm{Symp}_0(M,\omega)) \subseteq \widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega)$. Bref, ce sont les points $[\psi_t]$ tels que $\psi_1 = \mathbb{1}$. C'est une conséquence du théorème d'Ono mentionné plus haut que Γ_ω est discret.

Lemme 2.3.11. *Si $\psi \in \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ est suffisamment C^1-près de l'identité, alors $\psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ si et seulement si la 1-forme associée σ respecte $[\sigma] \in \Gamma_\omega$.*

Démonstration. Supposons que $\psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ et considérons l'isotopie ψ_t associée au chemin $t\sigma$ dans $\mathcal{Z}^1_{dR}(M)$. Par le lemme précédent, $\mathrm{Flux}[\psi_t] = -[\sigma]$. Alors, ψ_t s'étend sur $[1,2]$ en prenant l'isotopie de $\mathbb{1}$ à ψ engendrée par une fonction lisse dans le sens inverse. Ainsi, nous avons un lacet et

$$\mathrm{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^2\right] = \mathrm{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^1\right] = -[\sigma],$$

car Flux est un homomorphisme et $\{\psi_t\}_{t=1}^2$ est hamiltonienne. Nous avons de ce fait $[\sigma] \in \Gamma_\omega$.

Supposons que $[\sigma] \in \Gamma_\omega$ et prenons un lacet de symplectomorphismes tel que $\mathrm{Flux}[\psi_t] = [\sigma]$. Nous pouvons étendre ψ_t sur $[1,2]$ en prenant sur cet intervalle le symplectomorphisme associé à $(1-t)\sigma$. Alors,

$$\mathrm{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^2\right] = \mathrm{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=0}^1\right] + \mathrm{Flux}\left[\{\psi_t\}_{t=1}^2\right] = [\sigma] - [\sigma] = 0.$$

Ainsi, par le théorème 2.3.8, $\{\psi_t\}_{t=0}^2$ peut être déformée en une isotopie engendrée par une fonction sur M et $\psi = \psi_2$ est un difféomorphisme hamiltonien. □

Proposition 2.3.12. *Tout chemin lisse ψ_t dans $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ tel que $\psi_0 = \mathbb{1}$ est engendré par un champ vectoriel hamiltonien.*

Démonstration. Soit ψ_t, un tel chemin. Alors, par le lemme précédent, pour t suffisamment petit, nous pouvons associer à ψ_t une 1-forme σ_t et $[\sigma_t] \in \Gamma_\omega$. Or, Γ_ω est discret et donc, il faut que $t \mapsto [\sigma_t]$ soit constant. Puisque $\sigma_0 = 0$, nous avons donc que σ_t est exacte, et donc $\mathrm{Flux}[\{\psi_t\}_{t=0}^{\epsilon}] = 0$ par le lemme 2.3.9, pour ϵ suffisamment petit. Ainsi, $\{\psi_t\}_{t=0}^{\epsilon}$ est engendrée par une fonction. Nous répétons alors pour $\psi_\epsilon^{-1} \circ \psi_t$, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous obtenions une fonction qui engendre tout ψ_t. □

Nous pouvons donc finaliser de caractériser $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ dans $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$:

Théorème 2.3.13. *Soit (M,ω), une variété symplectique fermée. Alors, il y a*

(i) une suite courte exacte de groupes de Lie

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Symp}}_0(M,\omega) \xrightarrow{\mathrm{Flux}} H^1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow 0;$$

(ii) une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega) \longrightarrow H^1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow 0,$$

où les troisième et quatrième applications sont respectivement $H \mapsto X_H$ et $X \mapsto [\iota_X \omega]$;

(iii) une suite courte exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \pi_1\left(\mathrm{Ham}(M,\omega)\right) \longrightarrow \pi_1\left(\mathrm{Symp}_0(M,\omega)\right) \xrightarrow{\mathrm{Flux}} \Gamma_\omega \longrightarrow 0;$$

(iv) une suite courte exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ham}(M,\omega) \longrightarrow \mathrm{Symp}_0(M,\omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega \longrightarrow 0,$$

où ρ est l'application induite par l'homomorphisme de flux.

Démonstration. Par la proposition précédente, tout chemin lisse débutant à l'identité dans $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est engendré par une fonction et a donc flux nul. Au contraire, si $\mathrm{Flux}[\psi_t] = 0$, alors, par le théorème 2.3.8, $[\psi_t]$ peut être représentée par une isotopie hamiltonienne. Ainsi, $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) = \ker \mathrm{Flux}$. La suite en *(i)* suit donc alors de la surjectivité de l'homomorphisme de flux, démontrée dans le lemme 2.3.7.

La suite en *(ii)* suit directement de ce qui a été démontré dans la première section de ce chapitre et de la preuve du lemme 2.3.7 pour la surjectivité de la dernière application non-triviale.

Par ce que nous savons de l'homotomorphisme de flux, la seule chose qu'il faut vérifier en *(iii)* est l'injectivité de l'application induite par l'inclusion sur le groupe fondamental. Il suffit de démontrer que tout chemin $[0,1] \to \widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M,\omega)$ avec extrémités dans $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ est homotope relativement à ses extrémités à un chemin dans $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$. Or, cela découle directement du fait que l'inclusion des revêtements universels est une équivalence d'homotopie, qui lui découle de *(i)* et de la contractibilité de $H^1(M;\mathbb{R})$.

Finalement, la suite en *(iv)* est le quotient des suites *(i)* et *(iii)*. $\square$

Corollaire 2.3.14. *L'inclusion* $\iota : \mathrm{Ham}(M,\omega) \hookrightarrow \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$ *induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie* π_k *lorsque* $k > 1$.

Démonstration. Nous avons, par la fonctorialité du revêtement universel, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\omega) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M,\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ham}(M,\omega) & \longrightarrow & \mathrm{Symp}_0(M,\omega) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les inclusions et les flèches verticales sont les projections de revêtement universel. Or, par la première suite exacte du théorème précédent, puisque $H^1(M;\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel (et donc est contractile), l'inclusion des revêtements universels est une équivalence d'homotopie. De plus, il est bien connu que les projections de revêtement universel induisent un isomorphisme sur π_k lorsque $k > 1$. Le résultat découle alors directement de la commutativité du diagramme ci-haut. $\square$

Chapitre 3

Les h-principes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires à la compréhension des h-principes et leurs implications en suivant principalement [**5**]. Par la suite, nous énonçons le théorème justifiant la plupart des démarches des deux prochains chapitres. Cependant, nous ne le démontrerons pas vu la taille de la tâche que cela impliquerait.

3.1. Jets de sections

3.1.1. Définition d'un jet

Considérons d'abord un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ et V de $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'une application lisse $f : U \to V$. Alors, nous obtenons une application $J_f^k : U \to U \times V \times \mathbb{R}^{nN_k}$, appelée le **k-jet** de f, définie par

$$J_f^k(x) := \left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)\right),$$

où

$$f^{(i)}(x) := \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_m} x_m}(x)\right)_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=i}$$

et N_k est le nombre de dérivées partielles d'ordre de 1 à k. En particulier, le 0-jet d'une application n'est que son graphe. Pour un k quelconque, $J_f^k(x)$ peut être vu comme une troncation de la série de Taylor de f en ce point. La différence essentielle ici est cependant que c'est le point à partir duquel nous développons la série, et donc les coefficients de la série, que nous faisons varier et non la variable dans la série entière associée.

Dans ce contexte, nous allons dénoter $U \times V \times \mathbb{R}^{nN_k}$ par $J^k(U,V)$ de sorte à ce que toute application lisse $f : U \to V$ donne lieu à une section du fibré trivial $p^k : J^k(U,V) \to U$.

Cette façon de voir est très pratique puisqu'elle permet directement de généraliser la notion de jets à des variétés lisses quelconques.

Définition 3.1.1. *Soit $\pi : P^{m+n} \to M^m$, un fibré lisse. Alors, deux sections $f,g : M \to P$ sont dites **k-tangentes** en $x \in M$ s'il existe un voisinage ouvert U de x, un ouvert $\widetilde{U}$ contenant $f(U)$ et $g(U)$, ainsi qu'une carte locale $\phi : \tilde{U} \to \bar{\phi}(U) \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, où $\bar{\phi}$ est une carte locale de M en x, tels que*

$$J^k_{\phi\circ f\circ\bar{\phi}^{-1}}(\bar{\phi}(x)) = J^k_{\phi\circ g\circ\bar{\phi}^{-1}}(\bar{\phi}(x)),$$

*Alors, nous dénoterons par $J^k_f(x)$ la classe de k-tangence de f en x, que nous appellerons encore le **k-jet** de f en x, et par $P^{(k)}$ le fibré formé par l'union des classes de k-tangence en chaque point.*

Notons que la règle de dérivée en chaînes implique directement que la classe de k-tangence ne dépend pas du choix de carte locale. En particulier, si U et V sont respectivement des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ comme précédemment, nos deux notions de k-jets coïncident puisqu'il suffit alors de prendre ϕ comme étant l'identité, et nous avons $(U \times V)^{(k)} = J^k(U,V)$. De ce fait, lorsque $P = M \times N$, nous allons noter par $J^k(M,N)$ l'espace des k-jets des applications $f : M \to N$.

De plus, l'invariance sous choix de carte locale de M nous assure que toute telle application induit une carte locale de $P^{(k)}$. Ainsi, $P^{(k)}$ est une variété lisse et $p^k : P^{(k)} \to M$ est un fibré lisse. Plus généralement, nous avons des fibrés lisses $p^k_\ell : P^{(k)} \to P^{(\ell)}$ lorsque $k > \ell$, puisque la k-tangence implique la ℓ-tangence.

3.1.2. Intermède: les topologies C^k de Whitney

Pour la suite, nous nous intéresserons à l'espace $\operatorname{Sec} P^{(k)}$ des sections lisses de $p^k : P^{(k)} \to M$ et aux liens entre ces dernières pour diverses valeurs de k. Pour ce faire, il nous sera utile d'équipper $\operatorname{Sec} P^{(k)}$ d'une topologie appropriée.

Définition 3.1.2. *Soit $\pi : P \to M$, un fibré lisse.*

(i) Soient $k \in \mathbb{N}_0$ et U, un ouvert de $P^{(k)}$. Alors, nous définissons

$$S^k(U) := \left\{ f \in \operatorname{Sec} P \;\middle|\; J^k_f(M) \subseteq U \right\},$$

*(ii) Notons que si V est un autre ouvert de $P^{(k)}$, $S^k(U) \cap S^k(V) = S^k(U \cap V)$. Ainsi, $\{S^k(U) | U \subseteq P^{(k)}$ ouvert$\}$ forme la base d'une topologie sur $\operatorname{Sec} P$: la **topologie $\mathbf{C^k}$ de Whitney**.*

*(iii) Notons également que si $\ell \leq k$, $S^\ell(U) = S^k((p^k_\ell)^{-1}(U))$. Ainsi, la topologie C^ℓ est incluse dans celle C^k et nous pouvons prendre la topologie induite par l'union de celles-ci, ce que nous appellerons la **topologie $\mathbf{C^\infty}$ de Whitney**.*

Remarquons que l'identification naturelle $C^\infty(M,N) = \operatorname{Sec}(M \times N \to M)$ induit toutes les topologies C^k sur l'espace des applications entre deux variétés. Cela pourrait mener à une certaine confusion dans la mesure qu'il y a maintenant deux possibles « topologies C^k de Whitney » sur $\operatorname{Sec} P^{(\ell)}$: celle comme sous-espace de $C^\infty(M,P^{(\ell)})$ et celle découlant directement de la définition pour le fibré $p^\ell : P^{(\ell)} \to M$. Heureusement pour nous, les deux correspondent. Cela découle du fait que nous puissions voir $(P^{(\ell)})^{(k)}$ comme un sous-espace de $J^k(M,P^{(\ell)})$. Alors, tout ouvert U de $(P^{(\ell)})^{(k)}$ prend la forme $\widetilde{U} \cap (P^{(\ell)})^{(k)}$ pour un ouvert $\widetilde{U}$ de $J^k(M,P^{(\ell)})$. Ainsi, en gardant la convention que le tilde réfère aux ouverts associés à $C^\infty(M,P^{(\ell)})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^k(\widetilde{U}) \cap \operatorname{Sec} P^{(\ell)} &:= \left\{ f \in \operatorname{Sec} P^{(\ell)} \;\middle|\; J^k_f(M) \subseteq \widetilde{U} \right\} \\ &= \left\{ f \in \operatorname{Sec} P^{(\ell)} \;\middle|\; J^k_f(M) \subseteq \widetilde{U} \cap (P^{(\ell)})^{(k)} = U \right\} \\ &= S^k(U) \end{aligned}$$

puisque le k-jet d'une section de $P^{(\ell)}$ doit être dans $(P^{(\ell)})^{(k)}$, et que la topologie C^k induite par $C^\infty(M,P^{(\ell)})$ est celle de la définition.

Tout cela est bien beau, mais il serait intéressant d'interpréter quelque peu ce que signifie cette topologie en terme que nous connaissons mieux. Pour ce faire, nous allons démontrer quelques lemmes certes quelque peu techniques, mais qui aideront en ce sens. Tout d'abord, nous fixons une distance d sur $P^{(k)}$ compatible avec la topologie. Alors, pour une fonction continue $\delta : M \to \mathbb{R}_{>0}$ et $f \in \operatorname{Sec} P$, nous définissons

$$B^k_\delta(f) := \left\{ g \in \operatorname{Sec} P \;\middle|\; d\left(J^k_f(x), J^k_g(x)\right) < \delta(x),\ \forall x \in M \right\},$$

Lemme 3.1.3. *L'ensemble $\{B^k_\delta(f) \mid \delta : M \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}_{>0}\}$ forme une base de voisinages ouverts de f dans la topologie C^k de Whitney. Autrement dit, deux sections sont C^k-près si et seulement si, localement, leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k prennent des valeurs proches.*

Démonstration. Considérons la fonction continue

$$\begin{aligned}\Delta\colon P^{(k)} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ J^k_g(x) &\mapsto \delta(x) - d\left(J^k_f(x), J^k_g(x)\right),\end{aligned}$$

Alors, $U := \Delta^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ est un ouvert de $P^{(k)}$ et $B^k_\delta(f) = S^k(U)$; c'est donc un ouvert dans la topologie C^k.

Soit W, un voisinage ouvert de f dans la topologie C^k de Whitney. Par définition, il existe un ouvert V de $P^{(k)}$ tel que $f \in S^k(V) \subseteq W$. Nous définissons

$$\mu(x) := \inf\left\{d\left(J^k_f(x), J^k_g(x)\right) \;\middle|\; g \in \operatorname{Sec} P,\ J^k_g(x) \notin V\right\} \qquad \forall x \in M$$

avec la convention $\mu(x) = +\infty$ si l'ensemble est vide, c'est-à-dire si V contient tous les jets basés en x. Par continuité de d, μ est strictement plus grand que 0 sur tout compact de M. Ainsi, pour chaque compact, nous pouvons prendre un δ continu tel que $\delta(x) \in (0, \mu(x))$ pour tout x sur ledit compact. En prenant un recouvrement d'ouverts précompacts de $P^{(k)}$ que nous pouvons supposer localement fini par paracompacité et une partition de l'unité subordonnée, nous pouvons sommer ces constructions locales pour obtenir un $\delta : M \to \mathbb{R}_{>0}$ continu qui est strictement plus petit que μ en tout point. Nous avons alors $B^k_\delta(f) \subseteq S^k(V) \subseteq W$ par construction.

Finalement, si nous avons deux fonctions continues δ_1, $\delta_2 : M \to \mathbb{R}_{>0}$, alors $\delta(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ définit une fonction continue stritement positive sur M et

$$B^k_\delta(f) = B^k_{\delta_1}(f) \cap B^k_{\delta_2}(f)$$

ce qui termine la preuve que l'ensemble forme une base des voisinages ouverts de f. $\square$

Notons que lorsque M est compact, toute fonction $\delta : M \to \mathbb{R}_{>0}$ continue est bornée inférieurement par une constante strictement positive. Alors, il suit directement que $\{B^k_{1/i}(f) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages ouverts de f dans la topologie C^k. En particulier, $\operatorname{Sec} P$ respecte alors le premier axiome de dénombrabilité. Cependant, dans le cas non-compact, cela n'a aucune raison d'être vrai. En fait, le lemme suivant montre la différence fondamentale entre les cas.

Lemme 3.1.4. *Soit* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Sec} P$.

(i) Lorsque l'espace de base M est compact, la suite converge vers une section f dans la topologie C^k si et seulement si $J^k_{f_i}$ converge uniformément vers J^k_f.

(ii) Lorsque M n'est pas compact, la suite converge vers une section f dans la topologie C^k si et seulement si il existe un compact $K \subseteq M$ tel que $J^k_{f_i}$ converge uniformément vers J^k_f sur K et que $J^k_{f_i} = J^k_f$ sur $M - K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ sauf en un nombre fini.

En particulier, la topologie C^0 de Whitney, la topologie compact-ouvert et la topologie de la convergence uniforme coïncident sur $C^\infty(M,N)$ si et seulement si M est compact.

DÉMONSTRATION. Dans le cas compact, puisque $\{B^k_{1/j}(f) \mid j \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinages, f_i converge vers f si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$

$$d\left(J^k_{f_i}(x), J^k_f(x)\right) < \frac{1}{j} \qquad \forall x \in M$$

qui est bien sûr équivalent à la convergence uniforme de $\{J^k_{f_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ vers J^k_f.

Dans le cas non-compact, notons que la condition sur l'existence du compact K est suffisante par ce que nous venons de démontrer sur la topologie C^k sur un compact. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, supposons que $f_i \to f$, mais qu'il n'existe pas de tel compact. Considérons alors une suite d'ensembles compacts $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tels que $K_j \subsetneq \operatorname{int} K_{j+1}$ et $M = \cup_{j=1}^\infty K_j$. Nous savons qu'il doit exister f_{i_1} tel que $f_{i_1} \neq f$, sinon la condition sur l'existence d'un compact serait trivialement respectée. Donc, il doit exister $x_1 \in M$ tel que

$$d\left(J^k_{f_{i_1}}(x_1), J^k_f(x_1)\right) = a_1 > 0$$

et nous pouvons prendre $j_1 \in \mathbb{N}$ tel $x_1 \in K_{j_1}$. Nous définissons alors $\delta|_{K_{j_1}} \equiv a_1$.

Supposons que nous ayons trouvé $f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}$ avec $i_1 < \cdots < i_r$, des points $x_1, \ldots, x_r$ tels que $x_s \in K_{j_s}$ pour un certain $j_s \in \mathbb{N}$, ainsi qu'une fonction continue strictement positive δ sur K_{j_r} telle que

$$d\left(J^k_{f_{i_1}}(x_s), J^k_f(x_s)\right) > \delta(x_s) > 0 \qquad \forall s \in \{1, \ldots, r\},$$

Alors, puisque l'hypothèse sur l'existence d'un compact n'est pas respectée, il doit exister $i_{r+1} > i_r$ tel que $f_{i_{r+1}}|_{M-K_{j_r+1}} \neq f|_{M-K_{j_r+1}}$, c'est-à-dire qu'il existe $x_{r+1} \in M - K_{j_r+1}$ tel que

$$d\left(J^k_{f_{i_{r+1}}}(x_{r+1}), J^k_f(x_{r+1})\right) = a_{r+1} > 0,$$

Alors, nous pouvons étendre δ de façon continue sur un $K_{j_{r+1}} \ni x_{r+1}$ de sorte à ce que $\delta|_{K_{j_{r+1}} - K_{j_r+1}} \equiv a_{r+1}$. En continuant ainsi, nous obtenons une sous-suite $\{f_{i_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

et une fonction continue $\delta : M \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $f_{i_s} \notin B^k_\delta(f)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, ce qui est bien sûr en contradiction avec le lemme précédent.

Finalement, la remarque sur les topologies compact-ouvert et de convergence uniforme découle directement de ce que nous venons de démontrer et du fait bien connu qu'une suite converge dans la topologie compact-ouvert si et seulement si elle converge uniformément sur tout compact. $\square$

3.1.3. Sections holonomes de l'espace de jets

Par définition, une classe de k-tangence $\tilde{x} \in P^{(k)}$ en un point donné $x \in M$ doit être réalisée par une section locale $f : U \subseteq M \to P$, c'est-à-dire $\tilde{x} = J^k_f(x)$. Cependant, il n'y a aucune raison pour laquelle une section (même locale) $F : M \to P^{(k)}$ devrait être le k-jet d'une section de P. Pour un contre-exemple facile, il suffit de considérer la section $x \mapsto (x,x,e^{\sin x}/(1+x^2))$ de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et le fait, que nous allons assumer sans preuve, que

$$\frac{d}{dx}x \neq \frac{e^{\sin x}}{1+x^2},$$

Cependant, comme nous pourrions nous en douter, les sections $F : M \to P^{(k)}$ telles qu'il existe $f : M \to P$ avec $F = J^k_f$ nous seront d'importance sous peu. De ce fait, elles portent un nom: les sections **holonomes** de $P^{(k)}$. De façon thématique, nous noterons l'ensemble formé par ces sections par $\operatorname{Hol} P^{(k)}$, qui est contenu dans l'ensemble des sections $\operatorname{Sec} P^{(k)}$.

Essentiellement par définition, nous avons une bijection

$$\begin{aligned} J^k \colon \operatorname{Sec} P &\to \operatorname{Hol} P^{(k)} \\ f &\longmapsto J^k_f \end{aligned}$$

qui induit clairement la topologie C^k sur $\operatorname{Sec} X$ si nous équipons $\operatorname{Sec} P^{(k)}$ de la topologie C^0.

3.2. Relations différentielles et h-principes

3.2.1. Relations différentielles: définition et exemples

Définition 3.2.1. *Une **relation différentielle** d'ordre k sur les sections d'un fibré lisse $\pi : P \to M$ est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $P^{(k)}$.*

Exemple 3.2.2. *Un système d'équations différentielles, que nous pouvons écrire sous la forme $\Psi\left(x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(k)}(x)\right) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, sur des fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*

définie une région de $J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ et donc, une relation différentielle d'ordre k sur les sections du fibré trivial $J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$.

En fait, dès que Ψ est continue, la région qu'elle décrit est fermée. Cependant, il n'y a aucune raison pour laquelle cela devrait être le cas pour une relation différentielle quelconque. L'exemple suivant montre qu'en fait, plusieurs cas pertinents correspondent à des régions ouvertes.

Exemple 3.2.3. *Soient M^m et N^n, des variétés lisses avec $m < n$. Alors, nous définissons la relation d'immersion $\mathcal{R}_{\text{imm}} \subseteq J^1(M,N)$ comme suit: en tout point $x \in M$, la fibre $(\mathcal{R}_{\text{imm}})_x \subseteq J^1(M,N)_x$ au-dessus de x consiste en l'ensemble des 1-jets $J^1_f(x)$ d'applications lisses $f : M \to N$ telles que df_x soit injective. Ainsi, une application $f : M \to N$ est une **solution** de $\mathcal{R}_{\text{imm}}$, c'est-à-dire $J^1_f(M) \subseteq \mathcal{R}_{\text{imm}}$, si et seulement si c'est une immersion.*

En coordonnées locales, les points de $\mathcal{R}_{\text{imm}}$ sont précisément de la forme (x,y,M), où $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ et M est une matrice $n \times m$ de rang m. Puisque la condition d'avoir rang maximal est ouverte, nous voyons bien que $\mathcal{R}_{\text{imm}}$ est effectivement un ouvert de $J^1(M,N)$.

Ainsi, l'étude des immersions s'inscrit dans l'étude des relations différentielles (ouvertes). Cependant, nous voyons que l'étude des plongements ne s'inscrit pas directement dans ce contexte puisque la condition d'être un homéomorphisme sur son image ne peut pas s'écrire comme une condition sur les dérivées d'une immersion. Néanmoins, notons qu'il existe des formes de h-principes pour les plongements dans certaines situations précises. Malheureusement, nous ne sommes pas dans une de ces situations pour les applications qui nous intéressent.

3.2.2. Solutions formelles et authentiques

On note l'espace des solutions d'une relation différentielle $\mathcal{R}$ d'ordre k sur un fibré lisse $\pi : P \to M$ par $\operatorname{Sol}\mathcal{R}$. Dans le cas d'un système d'équations différentielles, cela correspond bien à l'espace des solutions.

Cependant, $\mathcal{R}$ réside dans $P^{(k)}$ et nous avons déjà noté qu'il y a plusieurs sections $F : M \to P^{(k)}$ qui ne sont pas holonomes et donc, qui n'appartiennent pas à $J^r(\operatorname{Sol}\mathcal{R}) =: \operatorname{Hol}\mathcal{R}$. Nous appellerons ses sections des **solutions formelles**; elles consistent en l'espace $\operatorname{Sec}\mathcal{R} := \operatorname{Sec} P^{(k)} \cap \mathcal{R}$.

Par exemple, pour $\mathcal{R}_{\text{imm}}$, les solutions formelles consistent précisément aux monomorphismes de fibrés $TM \to TN$, tandis que les solutions authentiques sont les immersions comme noté précédemment.

Nous voudrions alors savoir de quelle façon $\operatorname{Hol}\mathcal{R}$ et $\operatorname{Sec}\mathcal{R}$ sont reliés dans la topologie C^0 (et donc, C^r dans $\operatorname{Sol}\mathcal{R}$ par une remarque précédente). Comprendre ces liens est de la plus haute importance afin de répondre aux questions naturelles: « est-ce que toute solution formelle est homotope à une vraie solution » et « est-ce que toute solution formelle est près d'une vraie solution ». Effectivement, ces questions se traduisent en langage purement topologique: la première revient à demander si l'inclusion des solutions authentiques induit une surjection sur le π_0; la deuxième, si l'espace des solutions authentiques est dense dans l'espace des solutions formelles. Savoir ce genre de chose permet de réduire significativement la difficulté de résolution de certains problèmes, puisque les espaces de solutions formelles sont souvent plus simples.

Bien que ce genre d'énoncé semble généralement faux dès que les relations sont moindrement non-triviales, et c'est effectivement ce qui arrive pour les solutions d'un système d'équations différentielles déterminé ou surdéterminé, il y a plusieurs contextes géométriques dans lesquels les relations sont assez peu rigides pour assurer la véracité de ce type d'énoncé. Par exemple, c'est le cas pour la relation des immersions que nous venons de voir.

3.2.3. Différentes saveurs du h-principe

Définition 3.2.4. *On dit qu'une relation différentielle $\mathcal{R}$* ***respecte le h-principe*** *si toute solution formelle de $\mathcal{R}$ est homotope à une solution authentique.*

Comme nous l'avons noté précédemment, cela revient à demander à ce que $\iota_* : \pi_0(\operatorname{Hol}\mathcal{R}) \to \pi_0(\operatorname{Sec}\mathcal{R})$ soit une surjection. Il est alors naturel de généraliser.

Définition 3.2.5. *Une relation différentielle $\mathcal{R}$ respecte le* ***h-principe paramétrique*** *si l'inclusion $\iota : \operatorname{Hol}\mathcal{R} \to \operatorname{Sec}\mathcal{R}$ est une équivalence d'homotopie.*

Remarque 3.2.6. *Il est possible de démontrer que $\operatorname{Sec}\mathcal{R}$ et $\operatorname{Hol}\mathcal{R}$ sont des variétés de Fréchet métrisables. Or, toutes ces variétés ont le même type d'homotopie qu'un complexe simplicial. Alors, par le théorème de Whitehead, toute équivalence d'homotopie faible entre ses espaces est en fait une équivalence d'homotopie. Donc, en pratique, il suffit de démontrer que $\iota_* : \pi_k(\operatorname{Hol}\mathcal{R}) \to \pi_k(\operatorname{Sec}\mathcal{R})$ est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.*

C'est principalement cette version du h-principe qui nous sera d'intérêt, mais à des fins de complétude, nous allons énoncer une dernière version de par son importance historique.

Définition 3.2.7. *Une relation différentielle $\mathcal{R}$ respecte le* ***h-principe* $\mathbf{C^0}$*-dense*** *si elle respecte le h-principe habituel et si pour toute solution formelle $F : M \to P^{(k)}$, tout voisinage U de $f := p_0^k \circ F$ contient une solution authentique $g : M \to P$ telle qu'il existe une homotopie F_t de F à J_g^k avec $p_0^k(F_t(M)) \subseteq U$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Cette version est d'importance puisque le fameux théorème de Nash-Kuiper est équivalent au h-principe C^0-dense pour la relation d'immersion isométrique.

3.3. Applications en topologie symplectique

Les applications du h-principe en topologie symplectique (et de contact) sont nombreuses et jouent un rôle essentiel dans l'étude de la dualité rigidité-flexibilité dans le sujet. Pour les utilisations qui nous intéressent, nous allons nous concentrer sur les h-principes associés aux immersions isotropes, lagrangiennes et coisotropes dans une variété symplectique sans hypothèse supplémentaire sur cette dernière.

Tout d'abord, rappelons que si $f,g : M \to N$ sont des applications lisses homotopes, alors $f^*\alpha$ et $g^*\alpha$ sont cohomologues pour toute forme différentielle α sur N. Ainsi, si nous voulons qu'un morphisme $F : TQ \to (TM,\omega)$ soit homotope à la différentielle d'une immersion isotrope, il faut que l'application induite sur la base $f : Q \to M$ respecte $f^*[\omega] = 0$, où $[\omega]$ dénote la classe de cohomologie de De Rham de la forme symplectique ω. De même, dans le cas coisotrope, il faut a priori fixer une classe de cohomologie sur Q avant de pouvoir poser un h-principe.

Pour mettre tous ces cas dans le même panier, fixons une 2-forme fermée, possiblement dégénérée, σ sur Q. Alors, une immersion $f : (Q,\sigma) \to (M,\omega)$ sera dite **isosymplectique** si $f^*\omega = \sigma$. Dans le cas $\sigma = 0$, nous retrouvons les immersions isotropes, et dans le cas où σ est non-nulle mais dégénérée de rang constant avec les bonnes dimensions, nous retrouvons les immersions coisotropes. Nous retrouvons même les immersions symplectiques lorsque σ est une forme symplectique! Notons l'espace de ces applications $\mathrm{Iso}(Q,\sigma; M,\omega)$. De même, nous dirons qu'un monomorphisme de fibrés $F : TQ \to TM$ est **isosymplectique** si $F^*\omega = \sigma$ et $f^*[\omega] = [\sigma]$, où $f : Q \to M$ est l'application induite sur la base par F. Localement, la condition cohomologique peut s'écrire sous la forme matricielle $(\mathrm{Jac}\ f)^T J (\mathrm{Jac}\ f) - I \in d(\Omega^1(U))$, où I et J sont les matrices représentant respectivement σ et ω en coordonnées locales et U est un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Ainsi, l'espace des monomorphismes que nous venons de décrire, notons le $\mathrm{iso}(Q,\sigma;M,\omega)$, correspond aux solutions formelles d'une relation différentielles $\mathcal{R}_{\text{isosymp}} \subseteq J^1(Q,M)$.

Théorème 3.3.1 (16.5.1 dans [**5**])**.** *Si* $\dim Q < \dim M$*, alors l'inclusion naturelle induite par la différentielle*

$$\mathrm{Iso}(Q,\sigma;M,\omega) \hookrightarrow \mathrm{iso}(Q,\sigma;M,\omega)$$

est une équivalence d'homotopie, c'est-à-dire le h-principe tient pour les immersions isosymplectiques.

Chapitre 4

Fibrés isotropes

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion abstraite de fibré isotrope, ainsi que leur espace classifiant en suivant la démarche de [**17**]. Toujours suivant cette source, nous introduisons les classes caractéristiques isotropes, qui donnent des obstructions à la transversalité d'une paire (ξ,ζ), où ξ est un fibré isotrope au sens concret et ζ est un fibré coisotrope, généralisant ainsi les idées de [**4**]. Finalement, nous utilisons les calculs de [**16**] pour obtenir l'anneau de cohomologie de l'espace classifiant, déterminant ainsi entièrement les classes caractéristiques isotropes. Cette dernière section utilisera davantage de techniques propres à la théorie des classes caractéristiques et des fibrations, mais peut être omise par les lecteurs et lectrices moins habituées avec le sujet.

Ce chapitre est d'un intérêt particulier pour ce mémoire, puisqu'il introduit des notions et résultats analogues à ceux qui apparaîtront dans l'étude des fibrés coisotropes dans le chapitre suivant.

4.1. Fibrés isotropes abstraits

4.1.1. Grassmannienne isotrope

Puisque nous nous intéressons aux fibrés isotropes, il nous sera utile de d'abord étudier la grassmannienne des sous-espaces isotropes de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, c'est-à-dire

$$\mathscr{I}G_k\left(\mathbb{R}^{2n}\right) := \left\{ I \in G_{n-k}\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \;\middle|\; I \subseteq I^\omega \right\}.$$

Grâce à l'identification $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, nous savons que $iI^\omega = I^\perp$. Ainsi, nous avons $I \subseteq I^\omega$ si et seulement si $I \cap iI = \{0\}$. Un élément $I \in \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ donne donc une scission

$$\mathbb{C}^n = V \oplus I \oplus iI$$

pour un espace vectoriel complexe V de rang k.

Lemme 4.1.1. *La grassmannienne $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ est l'espace homogène*

$$\frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)}.$$

Démonstration. Soit $I \in \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. Par ce que nous venons de dire, nous pouvons prendre une base unitaire telle que les k premiers vecteurs engendrent V, les $n-k$ derniers soient dans I et $\mathbb{C}^n = V \oplus (I \oplus iI)$. Il existe alors une unique matrice unitaire A envoyant la base standard de $\mathbb{C}^n$ sur cette base. Ainsi, $\mathrm{U}(n)$ agit transitivement sur $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, l'action est continue (en fait lisse), puisqu'elle l'est sur $V_n(\mathbb{C}^n)$ et que $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ a la topologie quotient par rapport à un sous-espace de cette variété de Stiefel.

Considérons l'isotrope standard $I = \mathbb{R}\langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle$. Nous pouvons alors prendre $V = \mathbb{C}\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$. Ainsi, notre choix de base est unique à un élément de $\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)$ fixant $\mathbb{R}\langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle$ près. Or, un tel élément correspond précisément à un élément de $\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$, d'où le résultat désiré. □

Remarque 4.1.2. *Lorsque $k = 0$, la grassmannienne isotrope $\mathscr{I}G_0(\mathbb{R}^{2n})$ est simplement la grassmannienne lagrangienne $\mathcal{L}(n)$ introduite au chapitre 1. Nous retrouvons donc le résultat déjà démontré que $\mathcal{L}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$.*

L'inclusion naturelle $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}) \hookrightarrow \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2(n+1)})$ donnée par $I \mapsto I \oplus \mathbb{C}\langle e_{n+1}\rangle$ correspond simplement à l'inclusion

$$\frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)} \hookrightarrow \frac{\mathrm{U}(n+1)}{\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k+1)}$$

induite par $A \mapsto A \oplus \mathbb{1}$. Ainsi, la grassmannienne isotrope stable est donnée par

$$\mathscr{I}G(k) := \varinjlim \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}) = \frac{U}{U(k) \times O}.$$

4.1.2. Fibrés classifiés par la grassmannienne isotrope

Cela fait partie de la théorie classique des fibrés vectoriels que l'espace classifiant de ceux-ci est la grassmannienne infinie $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ dans le cas réel de rang k et $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ dans le cas complexe de rang k. Ainsi, il serait logique que $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ et sa limite $\mathscr{I}G(k)$ jouent un rôle similaire pour les fibrés isotropes.

Cependant, si $\gamma_I^{k,n}$ dénote le fibré tautologique sur $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$, remarquons que

$$(\gamma_I^{k,n} \otimes \mathbb{C}) \oplus \delta_I^{k,n} \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^n,$$

où $F(\delta_I^{k,n})_I := (I \otimes \mathbb{C})^\perp$ et $\epsilon_{\mathbb{C}}^n$ est le fibré trivial complexe de rang n sur $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. Ainsi, tout fibré classifié par cet espace devra avoir une propriété similaire. Ceci nous mène donc à définir une notion de fibré isotrope légèrement différente de celle introduite auparavant:

Définition 4.1.3. *Un fibré vectoriel réel ξ de rang $n-k$ est appelé un **fibré isotrope abstrait d'indice k**, ou un **fibré k-isotrope**, s'il existe un fibré complexe η de rang k tel que*

$$\eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^n,$$

où l'isomorphisme est bien sûr pris au sens complexe.

Il suit directement de la définition que tout fibré k-isotrope est un sous-fibré isotrope du fibré symplectique trivial ($\epsilon_{\mathbb{R}}^{2n}$,$\omega_0$). Cependant, il n'est pas clair *a priori* qu'un sous-fibré isotrope ξ de rang $n-k$ d'un fibré symplectique (η,Ω) de rang $2n$ sur une base X est un fibré isotrope d'indice k au sens abstrait lorsque le fibré symplectique η n'est pas trivial. En fait, ce ne sera pas le cas en général. Néanmoins, lorsque la base X a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension finie (par exemple lorsque X est une variété de dimension finie), il est connu que tout fibré vectoriel admet un fibré complémentaire. Ainsi, dans ce cas, il existe ν_ξ et $\nu_\perp$, des fibrés vectoriels sur X réel de rang n' et complexe de rang k' respectivement, tels que

$$\xi \oplus \nu_\xi \cong \epsilon_{\mathbb{R}}^{n+n'-k} \quad \text{et} \quad (\xi \otimes \mathbb{C})^\perp \oplus \nu_\perp \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^{k+k'},$$

où $\perp$ est le complément orthogonal pris selon une métrique riemannienne provenant d'une structure complexe ω-compatible. Alors,

$$\begin{aligned}\eta' &:= \eta \oplus (\nu_\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus \nu_\perp \\ &\cong (\xi \oplus \nu_\xi) \otimes \mathbb{C} \oplus (\xi \otimes \mathbb{C})^\perp \oplus \nu_\perp \\ &\cong \epsilon_{\mathbb{C}}^{n+n'+k'}\end{aligned}$$

et ξ est $(k+k'+n')$-isotrope.

Proposition 4.1.4. *Le fibré $\gamma_I^{k,n}$ est universel pour les fibrés k-isotropes de rang $n-k$.*

Démonstration. Soient ξ, un tel fibré sur un CW-complexe X, et η^k tel que

$$\eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^n.$$

Nous pouvons alors considérer son application classifiante comme $\mathbb{R}^{n-k}$-fibré $\alpha : X \to \mathrm{BO}(n-k)$. Nous cherchons alors un relèvement $\tilde{\alpha}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & V_n\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right) \arrow[dl, "p"'] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\tilde{\alpha}"] & \mathrm{BO}(n-k) & \mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

commute, où p est la composition des projections évidentes, δ^k et γ^{n-k} sont les fibrés tautologiques sur $\mathrm{BU}(k)$ et $\mathrm{BO}(n-k)$ respectivement et $V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ est l'espace des n-repères unitaires du fibré $\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})$. Si un tel relèvement existe, $p^*\gamma^{n-k}$ sera universel pour les fibrés k-isotropes et $\tilde{\alpha}$ sera l'application classifiante de ξ pour ce nouveau fibré.

Considérons l'application classifiante β de η. Alors,

$$(\beta,\alpha)^* \left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right) \cong \eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^n$$

et nous pouvons prendre une section s de $(\beta,\alpha)^* V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$. Or, par définition du rappel d'un fibré, une telle section associe à tout $x \in X$ un n-repère $r(x)$ de $\beta(x) \oplus (\alpha(x) \otimes \mathbb{C})$, d'où $p(r(x)) = \alpha(x)$. Ainsi, il suffit de prendre $\tilde{\alpha}(x) := r(x)$ comme relevé.

Le but de démontrer ce relèvement était d'utiliser le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
p^*\gamma^{n-k} \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & \gamma_I^{k,n} \arrow[d] \\
V_n\left(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})\right) \arrow[rr, "\bar{f}"] & & \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}),
\end{tikzcd}$$

où $\bar{f}(X^k, Y^{n-k}, r : \mathbb{C}^n \to X \oplus (Y \otimes \mathbb{C})) := r^{-1}(Y)$ est une fibration de Serre de fibre faiblement contractile (voir prochain lemme) et f est le relevé évident qui fait commuter le diagramme. Ainsi, par la suite longue exacte d'homotopie d'une fibration, $\bar{f}$ est une équivalence d'homotopie faible et les classes d'homotopies d'application de X vers chaque espace sont en bijection. Nous avons donc bien le résultat désiré puisque, par le diagramme ci-haut, $\bar{f}^*p^*\gamma^{n-k} \cong \gamma_I^{k,n}$ et $\bar{f} \circ \tilde{\alpha}$ classifie ξ comme fibré k-isotrope. □

Remarque 4.1.5. *Clairement, les applications α et $\bar{f} \circ \tilde{\alpha}$ sont homotopes dans* $\mathrm{BO}(n-k)$ *puisqu'elles induisent des fibrés isomorphes. Cependant, elles n'ont pas de raison de l'être dans $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. En fait, les classes d'homotopies d'applications $X \to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ correspondent aux classes d'homotopies de plongement $\xi \hookrightarrow \epsilon^n_{\mathbb{C}}$ qui sont équivariantes sous l'action naturelle de* $\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$.

Lemme 4.1.6. *L'application $\bar{f} : V_n\left(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})\right) \to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ est une fibration de Serre de fibre type $V_k(\delta^k) \times V_{n-k}(\gamma^{n-k})$ faiblement contractile.*

Démonstration. Démontrons d'abord que c'est une fibration de Serre, c'est-à-dire que $\bar{f}$ a la propriété de relèvement d'homotopie par rapport aux disques. Pour ce faire, considérons une homotopie $\Phi : D^\ell \times [0,1] \to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ et un relèvement $\tilde{\phi}_0 : D^\ell \to V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ de $\phi_0 = \Phi(-,0)$ pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$. Puisque $D^\ell \times [0,1]$ est contractile, le rappel du fibré principal $\mathrm{U}(n) \to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ par Φ est trivial et donc, nous pouvons en prendre une section Ψ sans problème. Autrement dit, nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{U}(n) \arrow[d] \\
D^\ell \times [0,1] \arrow[ur, dotted, "\Psi"] \arrow[r, "\Phi"] & \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})
\end{tikzcd}.$$

Ainsi, si $\tilde{\phi}_0(x) = (X_{\tilde{\phi}_0(x)}, Y_{\tilde{\phi}_0(x)}, r_{\tilde{\phi}_0(x)})$, définissons

$$\tilde{\Phi}(x,t) := \left(X_{\tilde{\phi}_0(x)}, Y_{\tilde{\phi}_0(x)}, r_{\tilde{\phi}_0(x)} \circ \psi_0(x) \circ \Psi(x,t)^{-1}\right)$$

de sorte à ce que nous ayons bien $\tilde{\Phi}(x,0) = \tilde{\phi}_0$ et

$$\begin{aligned}\left(\bar{f} \circ \tilde{\Phi}\right)(x,t) &= \left(\Psi(x,t) \circ \psi_0(x)^{-1} \circ r^{-1}_{\tilde{\phi}_0(x)}\right)\left(Y_{\tilde{\phi}_0(x)}\right) \\ &= \Psi(x,t)\left(\psi_0(x)^{-1}(\phi_0(x))\right) \\ &= \Psi(x,t)(\mathbb{R}\langle e_{n-k+1}, \ldots, e_n\rangle) \\ &= \Phi(x,t),\end{aligned}$$

par la définition de l'action de $\mathrm{U}(n)$ sur $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. Nous avons donc bien un relevé de Φ et $\bar{f}$ est une fibration de Serre.

La fibre standard F de $\bar{f}$ est donnée par le rappel de l'isotrope standard, c'est-à-dire

$$F = \left\{(X,Y,r) \in V_n\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right) \;\middle|\; r^{-1}(Y) = \mathbb{R}\langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle\right\}.$$

Ainsi, si $(X,Y,r) \in F$, il faut que $r^{-1}(X) = (r^{-1}(Y) \otimes \mathbb{C})^{\perp} = \mathbb{C}\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ par unitarité et nous avons un homéomorphisme évident $F \cong V_k(\delta^k) \times V_{n-k}(\gamma^{n-k})$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $V_k(\delta^k) \times V_{n-k}(\gamma^{n-k})$ est faiblement contractile. Or, c'est un résultat classique que tous les groupes d'homotopie de $V_k(\delta^k)$ et $V_n(\gamma^n)$ sont triviaux pour tous n et k (voir le chapitre 8 de **[13]** au besoin), d'où le résultat escompté. $\square$

De même, il suit des argument usuels que, dans le régime stable, $\mathscr{I}G(k)$ est l'espace classifiant des fibrés k-isotropes de tous rangs.

4.1.3. Opération sur la grassmannienne isotrope stable

Un élément de $\mathscr{I}G(k)$ représente une classe d'espaces vectoriels réels dont le fibré normal stable du complexifié est représentable par un espace vectoriel complexe de rang k. Ainsi, nous avons le produit fibré homotopique

$$\begin{tikzcd} \mathscr{I}G(k) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{BO} \arrow[d, "\otimes\mathbb{C}"] \\ & \mathrm{BU} \arrow[d, "\nu"] \\ \mathrm{BU}(k) \arrow[r, hook] & \mathrm{BU}, \end{tikzcd}$$

où ν est l'application associant à un espace vectoriel son fibré normal stable. De même, nous avons un produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{I}G(k) \times \mathscr{I}G(k') & \longrightarrow & \mathrm{BO} \times \mathrm{BO} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\otimes\mathbb{C})\times(\otimes\mathbb{C})} \\
 & & \mathrm{BU} \times \mathrm{BU} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nu\times\nu} \\
\mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BU}(k') & \hookrightarrow & \mathrm{BU} \times \mathrm{BU}.
\end{array}$$

Alors, la somme de Whitney sur les grassmanniennes réelle et complexe induit une application $w : \mathscr{I}G(k)\times\mathscr{I}G(k') \to \mathscr{I}G(k+k')$ unique à homotopie près et donc, nous avons une unique application

$$\begin{aligned}
[X,\mathscr{I}G(k)] \times [X,\mathscr{I}G(k')] &\to [X,\mathscr{I}G(k+k')] \\
(f,g) &\longmapsto w_* \left(\Delta^*(f \times g)\right),
\end{aligned}$$

qui correspond simplement à prendre la somme de Whitney des représentants d'une classe stable, pour tout CW-complexe X. En particulier, l'opération est associative. Elle possède également un neutre clair: le fibré trivial dans $\mathscr{I}G(0)$.

Lorsque $k = 0$ et que la dimension de X est finie, cela fait de $[X,\mathscr{I}G(k)] =: K\mathcal{L}(X)$ un groupe. Effectivement, un élément de $K\mathcal{L}(X)$ est représentée par un couple (ξ,Φ), où ξ est un fibré réel de rang n sur X et Φ est une trivialisation de $\xi \otimes \mathbb{C}$. Il doit exister un fibré vectoriel réel ν_ξ de rang m sur X et une trivialisation Ξ de $\xi \oplus \nu_\xi$. Dénotons par Ψ la composition d'isomorphismes de fibrés

$$(\epsilon^n_{\mathbb{R}} \oplus \nu_\xi) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \epsilon^n_{\mathbb{C}} \oplus (\nu_\xi \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi^{-1}\oplus\mathbb{1}} (\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus (\nu_\xi \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow (\xi \oplus \nu_\xi) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\Xi\otimes\mathbb{C}} \epsilon^{n+m}_{\mathbb{C}},$$

de sorte à ce que $(\epsilon^n_{\mathbb{R}} \oplus \nu_\xi,\Psi)$ représente la classe inverse de celle de (ξ,Φ) dans $K\mathcal{L}(X)$ par définition de ν_ξ. Notons que la classe $\mathrm{O}(n+m)$-équivariante de $(\epsilon^n_{\mathbb{R}} \oplus \nu_\xi,\Psi)$ ne dépend pas du choix de trivialisation Ξ, puisque deux choix de telles trivialisation divergent justement d'une application $X \to \mathrm{O}(n+m)$.

4.2. Classes caractéristiques isotropes

4.2.1. Obstructions à la transversalité

Revenons maintenant à la situation où nous avons un fibré symplectique (η^{2n},Ω) sur un CW-complexe X et un sous-fibré isotrope ξ de rang $n-k$. Nous voudrions utiliser les outils que nous venons de développer pour savoir, pour un sous-fibré coisotrope donné ζ de dimension complémentaire, s'il y a des obstructions topologiques à la transversalité de

ξ et ζ. Pour ce faire, nous aurons d'abord besoin de définir la **différence** des deux fibrés $d(\xi,\zeta) : X \to \mathscr{I}G_{k'}(\mathbb{R}^{2n'})$.

Dans le cas instable, fixons une structure complexe J compatible avec ω et supposons que η est muni d'une trivialisation unitaire Φ envoyant ξ sur l'isotrope standard de $\mathbb{C}^n$. Nous obtenons alors une application continue $d(\xi,\zeta) : X \to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ associant à $x \in X$ l'espace isotrope $\Phi(F(\zeta)_x^{\perp})$, où le complément orthogonal est pris selon g_J. Cette définition ne dépend pas du choix de trivialisation unitaire envoyant ξ sur l'isotrope standard puisque deux choix de telles trivialisations diffèrent d'une application $X \to \mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ qui est dans le quotient de $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. De même, puisque l'espace $\mathcal{J}(\eta,\Omega)$ est contractile, deux choix de $J \in \mathcal{J}(\eta,\Omega)$ donnent des applications homotopes. Ainsi, $d(\xi,\zeta) \in [X,\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})]$ est bien définie.

Dans le cas stable, nous pouvons définir $d(\xi,\zeta)$ en toute généralité. Tout d'abord, prenons une structure complexe J compatible avec ω. Alors, en reprenant la notation précédemment utilisée, choisissons ν_ξ et $\nu_\perp$, des représentants des fibrés normaux stables de ξ et $(\xi \oplus \mathbb{C})^\perp$ respectivement. Nous pouvons définir

$$\xi' := \xi \oplus \nu_\xi, \quad \zeta' := \zeta \oplus i\nu_\xi \oplus \nu_\perp \quad \text{et} \quad \eta' := \eta \oplus (\nu_\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus \nu_\perp \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^{n+n'+k'},$$

où la trivialisation de η' est celle utilisée au début de la sous-section 4.1.2. Il suit de la description dudit isomorphisme que ξ' est $(k+k')$-isotrope et que ξ' est envoyé sur l'isotrope standard. De plus, notons que ξ est transverse à ζ si et seulement si ξ' l'est à ζ'. Alors, la construction dans le cas instable donne une classe d'homotopie d'applications $X \to \mathscr{I}G_{k+k'}(\mathbb{R}^{2(n+n'+k')})$ indépendante des choix. Nous prenons donc $d(\xi,\zeta) \in [X,\mathscr{I}G(k+k')]$ comme étant l'image de cette l'application sous l'application induite par l'inclusion naturelle $\mathscr{I}G_{k+k'}(\mathbb{R}^{2(n+n'+k')}) \hookrightarrow \mathscr{I}G(k+k')$ sur les classes d'homotopie.

Définition 4.2.1. *Les rappels des générateurs de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathscr{I}G(k+k');R)$, pour un anneau R, sont appelés les **classes caractéristiques isotropes** du triplet (ξ,ζ,η).*

Remarque 4.2.2. *Nous aurions tout autant pu choisir de prendre une trivialisation Φ' de sorte à ce que ζ soit envoyé sur la coisotrope standard et alors définir $d(\xi,\zeta) := i\Phi'(F(\xi)_x)$. Cependant, le résultat ne différerait que d'un automorphisme de $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ et donc, cela ne changerait rien du point de vue des classes caractéristiques.*

Ceci est analogue au fait que pour un fibré complexe η, les classes caractéristiques de Chern sont précisément le rappel des générateurs de $H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z})$ par l'application f classifiant η. Ce fait étant lui-même une conséquence de la naturalité des classes de Chern et du théorème 1.3.2.

Le lemme suivant nous permet de conclure que $d(\xi,\zeta)$ mesure bien l'obstruction à la transversalité de ξ et ζ.

Lemme 4.2.3. *L'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension $n-k$ transverses à un sous-espace coisotrope fixé de dimension $n+k$ de $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ est contractile.*

Démonstration. Fixons un sous-espace coisotrope C_0 de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension $n+k$ et notons $I_0 := C_0^\perp$. Alors, un sous-espace isotrope I est transverse à C_0 si et seulement s'il existe une transformation linéaire $T : I_0 \to C_0$ telle que $I = \text{graphe}(T)$. Or, $C_0 = (I_0 \oplus iI_0)^\perp \oplus iI_0$ et donc, nous obtenons la décomposition $T = T_1 \oplus iT_2$, où $T_1 : I_0 \to (I_0 \oplus iI_0)^\perp$ et $T_2 : I_0 \to I_0$. Ainsi, le graphe de T est isotrope si et seulement si

$$\omega_0\left(v + T(v), w + T(w)\right) = 0 \qquad \forall v,w \in I_0$$

c'est-à-dire

$$\langle T_2(v), w\rangle - \langle v, T_2(w)\rangle + \omega_0(T_1(v),T_1(w)) = 0 \qquad \forall v,w \in I_0.$$

Alors, $(T_1,T_2,t) \mapsto ((1-t)T_1,(1-t)^2T_2)$ donne une contraction de l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension $n-k$ transverses à C_0 au point $\{I_0\}$. $\square$

Corollaire 4.2.4. *Si ξ et ζ sont transverses, alors $d(\xi,\zeta) = 0$.*

Démonstration. Dans ce cas, $\Phi(F(\zeta)_x^\perp)$ est transverse à la coisotrope standard pour tout $x \in X$. Ainsi, $d(\xi,\zeta)$ prend valeur dans un sous-espace contractile de $\mathscr{I}G_{k+k'}(\mathbb{R}^{2(n+n'+k')})$, et donc de $\mathscr{I}G(k+k')$. La classe d'homotopie $d(\xi,\zeta)$ est alors triviale. $\square$

Exemple 4.2.5. *On termine cette section en énonçant deux exemples dans lesquels un triplet (ξ,ζ,η) apparaît.*

- *Supposons qu'une variété symplectique (M,ω) possède deux feuillages de dimensions complémentaires, l'un isotrope et l'autre coisotrope (ou, lorsque $k=0$, tous deux lagrangiens). Alors, chaque feuilletage donne un sous-fibré de sorte à ce que la transversalité des feuilletages est équivalente à la transversalité de ces sous-fibrés.*

- *Supposons que nous ayons une immersion isotrope dans une variété symplectique $f : Q \to (M,\omega)$. Alors, tout sous-fibré coisotrope ζ de TM donne lieu à un triplet isotrope $(TQ,f^*\zeta,f^*TM)$. De plus, la transversalité de TQ et $f^*\zeta$ correspond à la transversalité de f par rapport à ζ.*

4.2.2. Les conséquences du h-principe

Le jumelage de l'exemple précédent avec le h-principe présenté au théorème 3.3.1 lorsque $\sigma = 0$ et $(M,\omega) = (\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ a des conséquences des plus intéressantes. Effectivement, dans ce cas, la condition cohomologique $f^*[d\lambda_0] = 0$ est automatiquement respectée et l'espace tangent en chaque point s'identifie canoniquement à $M = \mathbb{R}^{2n}$. Ainsi, le h-principe dans ce cas revient à dire que l'application de Gauss induit une équivalence d'homotopie entre l'espace des immersions isotropes $Q \to \mathbb{R}^{2n}$ et l'espace des monomorphismes de fibrés $TQ \to \gamma_I^{k,n}$, puisque la condition $F^*\omega_0 = 0$ devient précisément d'avoir valeur dans $\gamma_I^{k,n}$ sous l'application de Gauss. En particulier, il existe une immersion isotrope $Q \to \mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si le fibré normal stable de $TQ \otimes \mathbb{C}$ est représentable par un fibré complexe de rang $k = n - \dim Q$.

Dénotons par ρ le fibré $V_{n-k}(TQ)[\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)]$ de fibre type $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)$ associé au $\mathrm{O}(n-k)$-fibré principal $V_{n-k}(TQ)$. L'action de $\mathrm{O}(n-k)$ sur $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)$ est celle induite par son action naturelle sur $\{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k} \subseteq \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{n-k} = \mathbb{C}^n$. Ainsi, une section de ρ correspond à une application $\mathrm{O}(n-k)$-équivariante $\phi : V_{n-k}(TQ) \to \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)$. Nous avons donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V_{n-k}(TQ) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k) \cong V_{n-k}(\gamma_I^{k,n}) \arrow[d] \\ TQ \arrow[r, "\bar{\phi}"] & \gamma_I^{k,n}, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont le quotient par l'action de $\mathrm{O}(n-k)$ et $\bar{\phi}$ est l'application induite sur ces quotients, qui est bien définie par équivariance de ϕ. Le difféomorphisme $\mathrm{O}(n-k)$-équivariant du coin supérieur droit est obtenu en remarquant que tout repère orthogonal r dans une isotrope I donne un repère unitaire de $I \otimes \mathbb{C}$ que nous pouvons compléter en repère unitaire de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, $\mathrm{U}(n)$ agit transitivement sur $V_{n-k}(\gamma_I^{k,n})$ et clairement, le stabilisateur du repère $\{e_{k+1},\ldots,e_n\}$ est $\mathrm{U}(k) \oplus \mathbb{1}_{(n-k)\times(n-k)}$, d'où le résultat désiré. Finalement, $\bar{\phi}$ est un monomorphisme puisqu'il envoie des $(n-k)$-repères sur des $(n-k)$-repères, étant induit par ϕ.

Au contraire, si nous débutons avec un monomorphisme $\bar{\phi} : TQ \to \gamma_I^{k,n}$, nous avons une application ϕ faisant commuter le diagramme ci-haut en prenant

$$\phi(\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}) := \{\bar{\phi}(v_1), \ldots, \bar{\phi}(v_{n-k})\}$$

qui est $\mathrm{O}(n-k)$-équivariante puisque $\bar{\phi}$ est un morphisme de fibré. Clairement, les deux opérations sont inverses l'une de l'autre et dépendent continuement de ϕ et $\bar{\phi}$ par le diagramme ci-haut. Ainsi, nous avons un homéomorphisme entre l'espace des monomorphismes $TQ \to \gamma_I^{k,n}$ et celui des sections de ρ, d'où $\mathrm{Iso}(Q,0;\mathbb{R}^{2n},d\lambda_0) \approx \mathrm{Sec}\,\rho$.

Dans le cas lagrangien ($k = 0$), ρ est un $\mathrm{U}(n)$-fibré principal et donc, l'existence d'une seule section implique la trivialité de ce fibré. L'espace des immersions lagrangiennes est ainsi soit vide, soit homotopiquement équivalent à $[V,\mathrm{U}(n)]$. Nous retrouvons donc la classification des immersions lagrangiennes dans $\mathbb{C}^n$ due à Gromov.

Cependant, dans le cas $k > 0$, le fibré ρ a pour fibre type un espace homogène et le calcul des groupes d'homotopie de l'espace des sections est beaucoup plus difficile. Pour cette raison, il est attrayant de considérer les classes de cohomologie obtenues en rappelant les générateurs de $H^*(\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}); R)$ par l'application de Gauss d'une immersion isotrope $f : V \to \mathbb{R}^{2n}$. Or, cette application ne diffère que d'un automorphisme de $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ de notre application $d(TQ,f^*C_0)$ associée au triplet $(TQ,f^*C_0,f^*\epsilon^n_{\mathbb{C}})$, où C_0 est la coisotrope standard de $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Ainsi, nous retrouvons l'exemple énoncé à la sous-section précédente. Bien sûr, ces invariants ne classifient pas totalement les immersions isotropes, quoique le h-principe démontre qu'ils sont particulièrement fins. En fait, même dans le cas $k = 0$, les classes caractéristiques lagrangiennes mènent à des questions intéressantes, comme le montre [**4**].

4.3. Calcul des classes caractéristiques

Puisque l'espace homogène $\mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{O}(n-k))$ n'est pas symétrique, nous ne pouvons pas facilement calculer l'anneau de cohomologie de cet espace. L'astuce sera plutôt de calculer l'anneau de cohomologie de $V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k}\otimes\mathbb{C}))$ qui est faiblement homotopiquement équivalent à notre grassmannienne, comme nous l'avons vu au lemme 4.1.6. Le but de cette section sera donc de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *L'anneau de cohomologie avec coefficients entiers de* $V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ *ne contient ni torsion impaire, ni 4-torsion. De plus, si* A *est un anneau principal contenant* $1/2$ *et que* $n-k = 2m+1$*, nous avons un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H^*\left(V_n\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right); A\right) \cong \Big(A\left[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m\right] \otimes_A \Lambda\left[x_{4\ell+1}, y_{4m+2k+1}\right]_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq \ell \leq m+k-1}\Big) / \left(I+J\right),$$

où p_i *est la i-ième classe de Pontryagin de* $\gamma_I^{k,n}$*,* c_i *est la i-ième classe de Chern de* $\delta_I^{k,n}$*,* x_i *et* y_i *sont des classes définies par après pour la concision,* I *est l'idéal engendré par* $(cp-1)$ *et* J *est un idéal engendré par des polynômes homogènes de degré au moins* $\max(4m,2k)$ *dont chaque monôme contient à la fois des éléments de* $\{c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m\}$ *et des éléments de* $\{x_{4\ell+1}\}$*, mais pas de* y*. Si nous avons plutôt* $n-k = 2m$*, nous obtenons le même résultat, mais sans la classe* $y_{4m+2k+1}$*.*
Finalement, peu importe la parité de $n-k$*, nous avons l'isomorphisme*

$$H^*\left(V_n\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right); \mathbb{Z}_2\right) \cong \mathbb{Z}_2\left[c_1, \ldots, c_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\right] / (w^2 c - 1),$$

où w_i *est la i-ième classe de Stiefel-Whitney de* $\gamma_I^{k,n}$*.*

Remarque 4.3.2. *Puisque l'anneau de cohomologie avec coefficients entiers de notre espace ne contient ni torsion impaire, ni 4-torsion, ces deux isomorphismes nous donnent tout ce que nous voudrions savoir sur la cohomologie de* $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$*.*

Remarque 4.3.3. *Lorsque* $k = 0$*,* x_1 *et* w_1 *sont à une unité près respectivement la réduction dans* A *et dans* $\mathbb{Z}_2$ *de la classe de Maslov* $\mu \in H^1(\mathscr{I}G_0(\mathbb{R}^{2n}) = \mathcal{L}(n); \mathbb{Z})$ *introduite au chapitre 1. Effectivement, ces deux classes engendrent* $H^1(\mathcal{L}(n); A)$ *et* $H^1(\mathcal{L}(n); \mathbb{Z}_2)$ *respectivement.*

On procède par induction sur s de $V_s = V_s(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ en commençant avec $n-k = 2m+1$ et A contenant $1/2$, par exemple $A = \mathbb{Z}[1/2]$. Nous démontrerons que $H^*(V_s; A)$ prend la forme

$$A\left[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m\right] \otimes_A \Lambda\left[x_{4\ell+1}, y_{4m+2k+1}\right]_{m+k-\frac{s}{2}+1 \leq \ell \leq m+k-1} \Big/ \left(I_s + J_s\right)$$

si $s \geq 2$ est pair, et

$$A\left[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m\right] \otimes_A \Lambda\left[x_{4\ell+1}, y_{4m+2k+1}\right]_{m+k-\frac{s-1}{2} \leq \ell \leq m+k-1} \Big/ \left(I_s + J_s\right)$$

si s est impair. Ici I_s dénote l'idéal engendré par les $s-1$ éléments homogènes de plus haut degré de la relation $cp = 1$, c'est-à-dire $I_s = (c_k p_m, c_{k-1} p_m, c_{k-2} p_m + c_k p_{m-1}, \dots)$. De plus, J_s a les mêmes propriétés que J, excepté que les générateurs homogènes peuvent être pris comme des monômes en $x_{4\ell+1}$ et que si $Q_1, \dots, Q_r$ dénotent leur composante en $A[c_1, \dots, p_m]$ respective, alors

$$PC_{n-s} + P_1 Q_1 + \cdots + P_r Q_r = 0$$

pour des $P, P_1, \dots, P_r \in A[c_1, \dots, p_m]$ seulement si P est une combinaison linéaire en $A[c_1, \dots, p_m]$ des Q_i. Ici, C_{n-s} dénote le s-ième terme de plus haut degré de la relation $cp = 1$ et r dépend de s.

On peut d'abord regarder le cas $s = 0$ pour se donner une idée de ce qui se passe. Dans ce cas, $V_0 = \mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k)$. Or, c'est un résultat classique (voir **[20]** au besoin) que

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{BU}(k); \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}\left[c_1(\delta^k), \dots, c_k(\delta^k)\right] \\ H^*(\mathrm{BO}(k); \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2\left[w_1(\gamma^k), \dots, w_k(\gamma^k)\right] \\ H^*(\mathrm{BO}(k); A) &= A\left[p_1(\tilde{\gamma}^k), \dots, p_{\lfloor k/2 \rfloor}(\tilde{\gamma}^k)\right], \end{aligned}$$

où A est un anneau intègre contenant $1/2$, $c_i(\delta^k)$ est la i-ième classe de Chern du fibré tautologique sur $\mathrm{BU}(k)$, $w_i(\gamma^k)$ est la i-ième classe de Stiefel-Whitney du fibré tautologique sur $\mathrm{BO}(k)$ et $p_i(\tilde{\gamma}^k)$ est l'unique classe telle que son relevé dans $\mathrm{BSO}(k)$ est la i-ième classe de Pontryagin du fibré tautologique sur $\mathrm{BSO}(k)$. Alors, puisqu'aucun des H^i a de la torsion comme module, le théorème de Künneth avec le théorème des coefficients universels pour la cohomologie nous dictent que

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k); A) &= A\left[c_1(\delta^k), \dots, c_k(\delta^k), p_1(\tilde{\gamma}^{n-k}), \dots, p_m(\tilde{\gamma}^{n-k})\right] \\ H^*(\mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k); \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2\left[c_1(\delta^k), \dots, c_k(\delta^k), w_1(\gamma^{n-k}), \dots, w_{n-k}(\gamma^{n-k})\right], \end{aligned}$$

ce qui a presque la forme de l'induction, aux quotients près. Heureusement que cette induction ne commence qu'à $s = 1$!

L'observation clef pour l'induction est la suivante: si $q : V_{s-1} \to \mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k)$ dénote la projection naturelle, alors $q^*(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ possède $s-1$ sections linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Celles-ci sont données par l'inclusion du point de base de V_{s-1} dans la fibre. Dénotons alors par ξ le complément du fibré trivial engendré par ces $s-1$ sections, qui est alors de rang $n-s+1$, et p sa projection. Ainsi, V_s s'identifie canoniquement à l'espace total du fibré en sphères de ξ avec la projection évidente $V_s \to V_{s-1}$. De plus, puisque $\xi^{n-s+1} \oplus \epsilon_{\mathbb{C}}^{s-1} = q^*(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$, par la formule de produit de Whitney, nous avons l'identification

$$
\begin{aligned}
e = c_{n-s+1}(\xi) = q^* c_{n-s+1}\left(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})\right) \\
= \begin{cases} 0 & \text{si } s = 1; \\ c_{k-s+2}p_m + \cdots + c_k p_{m-\frac{s}{2}+1} & \text{si } s \geq 2 \text{ est pair;} \\ c_{k-s+2}p_m + \cdots + c_{k-1} p_{m-\frac{s-3}{2}} & \text{si } s \geq 2 \text{ est impair,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

qui est précisément le $(s-1)$-ième terme de la relation $cp = 1$, où $e = e(\xi^{n-s+1})$ dénote la classe d'Euler de ξ. Effectivement, les classes de Chern de la complexification d'un fibré réel sont les classes de Pontryagin en degrés multiples de 4 par définition et des éléments de 2-torsion sinon. Ainsi, elles n'apparaissent pas dans la cohomologie avec coefficients dans $A \ni 1/2$.

Or, cela nous est utile puisque nous avons une suite longue exacte reliant la cohomologie de l'espace total d'un fibré en sphères avec la cohomologie de sa base et utilisant la classe d'Euler: la suite de Gysin-Thom. Ici, elle donne

$$
\cdots \to H^{j-2(n-s+1)}(V_{s-1}) \xrightarrow{\cup e} H^j(V_{s-1}) \xrightarrow{p^*} H^j(V_s) \xrightarrow{p_*} H^{j-2(n-s+1)+1}(V_{s-1}) \xrightarrow{\cup e} H^{j+1}(V_{s-1}) \to \cdots,
$$

où la cohomologie prend bien sûr coefficients dans A. Ainsi, il nous sera utile de connaître $\ker(\cup e)$ comme nous pouvons nous en douter. Pour trouver ce noyau, notons que les seules relations existant entre les $c_i(\delta^k)$, $c_i(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})$ et $c_i(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$ proviennent du fait que

$$
\overline{\delta^k} \oplus \left(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})\right) \cong \left(\delta^k_{\mathbb{R}} \oplus \gamma^{n-k}\right) \otimes \mathbb{C},
$$

où $\overline{\delta^k}$ est le fibré conjugué de δ^k et $\delta^k_{\mathbb{R}}$ est son fibré réel sous-jacent. Ainsi, il faut que les classes de Chern impaires de ce fibré soient nulles puisque $1/2 \in A$, d'où

$$
\sum_{j=0}^{\min(k,2\ell+1)} (-1)^j c_j(\delta^k) c_{2\ell+1-j}(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})) = 0 \tag{$*$}
$$

pour tout $\ell \in \mathbb{N}_0$. Nous avons utilisé le fait que $c_j(\bar{\eta}) = (-1)^j c_j(\eta)$ pour tout fibré complexe η.

Lorsque $s = 1$, la suite de Gysin-Thom se divise en suites courtes exactes puisque $e = 0$. Nous avons donc

$$0 \longrightarrow H^j(V_0) \xrightarrow{p^*} H^j(V_1) \xrightarrow{p_*} H^{j-2n+1}(V_0) \longrightarrow 0.$$

En particulier, il existe $y \in H^{2n-1}(V_1)$ tel que $p_*(y) = 1 \in H^0(V_0)$. Nous pouvons alors prendre

$$\begin{aligned} s\colon H^{j-2n+1}(V_0) &\longrightarrow H^j(V_1) \\ u &\longmapsto y \cdot u := y \cup p^*(u) \end{aligned}$$

de sorte à ce que $p_*(s(u)) = p_*(y \cup p^*(u)) = p_*(y) \cup u = 1 \cup u = u$. Ainsi, s est une section de p_* et la suite se scinde. Nous avons donc l'isomorphisme de modules gradués $H^*(V_1) \cong H^*(V_0) \oplus y \cdot H^*(V_0)$, ce qui induit l'isomorphisme d'algèbres graduées $H^*(V_1) \cong A[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m] \otimes_A \Lambda[y]$ puisque y^2 est nul étant un élément de degré impair dans une cohomologie ayant coefficients dans un anneau contenant $1/2$. Ceci est l'isomorphisme recherché puisque $2n - 1 = 4m + 2k + 1$ et que $I_0 = J_0 = \{0\}$, car il ne peut pas exister de $x_{4\ell+1}$ tel que $m + k \leq \ell \leq m + k - 1$!

Le cas de base pour s pair est lorsque $s = 2$. Alors, $e = p_m c_k$ et $\cup e$ est injectif par le calcul que nous venons de faire de la cohomologie de V_1,. Ainsi, la suite de Gysin-Thom donne l'isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(V_2) \cong H^*(V_1)/eH^*(V_1) \cong A[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m] \otimes_A \Lambda[y]/(p_m c_k)$$

qui, pour des raisons analogues à ce qui a été dit précédemment, est l'isomorphisme recherché.

Démontrons maintenant que nous obtenons le résultat désiré en s lorsque $s - 1$ est impair. Le but est de déterminer le noyau de $\cup e$, puis d'utiliser la suite de Gysin-Thom avec l'hypothèse d'induction pour obtenir le résultat recherché. Par la description de e donnée précédemment, nous voyons bien que la sous-algèbre $A_1 := A[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m]/(I_{s-1} \cap A[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m])$ de $H^*(V_{s-1})$ est invariante sous $\cup e$. De plus,

$$\begin{aligned} \ker\left(\cup e|_{A_1}\right) = \Big\{ P + I_{s-1} \in A_1 \;\Big|\; &\exists P_0, \ldots, P_{s-2} \in A[c_1, \ldots, p_m] \text{ tels que} \\ &C_{n-(s-1)} P + C_{n-(s-2)} P_{s-2} + \cdots + C_n P_0 = 0 \Big\}, \end{aligned}$$

car C_i est la i-ième classe de Chern de $\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})$, c'est-à-dire la classe d'Euler de ξ^i sur V_{n-i}. Or, comme nous l'avons noté précédemment, si une relation comme dans la seconde ligne existe, elle doit être un multiple d'une relation de la forme $(*)$. Il faudrait donc que

$n+k-(s-1)$ soit impair ou que $n = s-1$. Cependant, nous pouvons supposer que $s \leq n$, puisque nous nous intéressons à la cohomologie de V_n. De même, $n+k-(s-1)$ ne peut pas être impair puisque nous avons supposé $n-k$ et $s-1$ impairs. Ainsi, $\cup e|_{A_1}$ doit être injective.

Pour conclure que $\cup e$ est injective, il faut vérifier que $P'C_{n-(s-1)} \in J_{s-1}$ seulement si $P' \in I_{s-1} + J_{s-1}$. Or, dire que $P'C_{n-(s-1)}$ est dans J_{s-1} est équivalent à ce qu'il existe des polynômes $P'_1,\ldots,P'_r \in A[c_1,\ldots,p_m] \otimes \Lambda[x_{4\ell+1},y]$ tels que

$$PC_{n-(s-1)} + P'_1Q'_1 + \cdots + P'_rQ'_r = 0,$$

où les Q'_i sont les générateurs homogènes de J_{s-1}. Si P' et les P'_i dépendent de y, nous obtenons deux équations semblables à celle ci-haut en comparant le terme sans y et celui avec y des deux côtés. Dans la même logique, si P' et les P'_i dépendent des x_i, nous pouvons comparer termes à termes et obtenir une suite d'équations de la forme

$$PC_{n-(s-1)} + P_1Q_1 + \cdots + P_rQ_r = 0$$

pour $P,P_1,\ldots,P_r \in A[c_1,\ldots,p_m]$. Nous avons ici utilisé l'hypothèse d'induction afin de nous assurer que nous pouvions prendre Q'_i tel que $Q'_i = Q_i x_{4\ell_{i,1}+1} \ldots x_{4\ell_{i,r_i}+1}$ pour certains $\ell_{i,1},\ldots,\ell_{i,r_i} \in \{m+k-(s-2)/2,\ldots,m+k-1\}$ et $Q_i \in A[c_1,\ldots,p_m]$. Nous utilisons alors l'autre partie de l'hypothèse d'induction pour conclure que P est un polynôme des Q_i, ce qui revient à dire que $P' \in J_{s-1}$. Ainsi, nous avons l'injectivité de $\cup e$ et la suite de Gysin-Thom se scinde. Nous obtenons

$$0 \longrightarrow H^{j-2(n-s+1)}(V_{s-1}) \xrightarrow{\cup e} H^j(V_{s-1}) \xrightarrow{p^*} H^j(V_s) \longrightarrow 0,$$

d'où l'isomorphisme d'algèbres graduées $H^*(V_s) \cong H^*(V_{s-1})/(C_{n+k-s+1})$. C'est bien l'isomorphisme recherché, puisque $C_{n+k-s+1}$ est le terme de $(s-1)$-ième plus haut degré de la relation $cp = 1$ et $J_s = J_{s-1}$ a nécessairement les propriétés désirées par induction.

Démontrons finalement que nous obtenons la bonne chose en s lorsque $s-1$ est pair. Dans cette situation, la seule relation de la forme $(*)$ qui est réalisée est celle lorsque $2\ell+1 = n+k-(s-1)$. Ainsi, $\ker(\cup e|_{A_1}) = (c_k + I_{s-1})$ par l'argumentaire que nous avons déjà fait. Pour les mêmes raisons que précédemment, nous obtenons donc que $\ker(\cup e) = (c_k + I_{s-1} + J_{s-1})$. Alors, la suite de Gysin-Thom induit la suite courte exacte

$$0 \longrightarrow \frac{H^j(V_{s-1})}{\left(C_{n-(s-1)}+I_{s-1}+J_{s-1}\right)} \longrightarrow H^j(V_s) \longrightarrow \frac{H^{j-2(n-s)-1}(V_{s-1})}{\ker(\cup c_k)} \longrightarrow 0,$$

où nous avons utilisé les isomorphismes

$$\ker p_* = \text{im } p^* \cong \frac{H^j(V_{s-1})}{\ker p^*} = \frac{H^j(V_{s-1})}{\text{im } (\cup e)} = \frac{H^j(V_{s-1})}{\big(C_{n-(s-1)} + I_{s-1} + J_{s-1}\big)}$$

et

$$\text{im } p_* = \ker(\cup e) = (c_k + I_{s-1} + J_{s-1}) \cong \frac{H^{j-2(n-s)-1}(V_{s-1})}{\ker(\cup c_k)}.$$

Or, par exactitude de la suite de Gysin-Thom, il doit exister $x \in H^{4(m+k-(s-1)/2)+1}(V_s)$ tel que $p_*(x) = c_k$. Ainsi, comme dans le cas $s = 1$, $x^2 = 0$ et le morphisme $u \mapsto x \cdot u$ donne une section de l'application de droite dans la suite exacte ci-haut. Ainsi, elle se scinde et nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
H^*(V_{s+1}) &\cong \frac{H^*(V_{s-1})}{\big(C_{n-(s-1)}\big)} \oplus x\frac{H^*(V_{s-1})}{\ker(\cup c_k)} \\
&\cong \frac{H^*(V_{s-1})}{\big(C_{n-(s-1)}\big)} \oplus x\frac{H^*(V_{s-1})/(C_{n-(s-1)})}{\ker(\cup c_k)/(C_{n-(s-1)})} \\
&\cong \left(\frac{H^*(V_{s-1})}{\big(C_{n-(s-1)}\big)} \oplus x\frac{H^*(V_{s-1})}{\big(C_{n-(s-1)}\big)}\right) \Big/ x\frac{\ker(\cup c_k)}{\big(C_{n-(s-1)}\big)} \\
&\cong \frac{A\,[c_1, \ldots, c_k, p_1, \ldots, p_m] \otimes_A \Lambda\,[x_{4\ell+1}, y_{4m+2k+1}]_{m+k-\frac{s-1}{2} \leq \ell \leq m+k-1}}{I_s + J_{s-1} + K}
\end{aligned}$$

par l'hypothèse d'induction, car $I_s = I_{s-1} + C_{n-(s-1)}$ par définition. Ici, $x = x_{4(m+k-(s-1)/2)+1}$ et $K = x(\cup c_k)^{-1}(I_{s-1} + J_{s-1})$. Nous définissons alors $J_s := J_{s-1} + K$.

Supposons que nous ayons $z \in K$ de degré cohomologique $i < \max(4m,2k)$. Pour vérifier l'hypothèse d'induction, il faut s'assurer que $z \in I_s$. Or, $z = xz'$ avec $z' \in (\cup c_k)^{-1}(I_{s-1} + J_{s-1})$ de degré $j < \max(4m,2k) - 2k$, car le degré de x est au moins $2k$. Si $2k \geq 4m$, il faut nécessairement que $z' = 0$ et donc, $z = 0$. Supposons donc que $4m > 2k$, de sorte à ce que $j < 4m - 2k$. Ainsi, $c_k z' \in I_{s-1} + J_{s-1}$ a degré cohomologique inférieur à $4m$ et doit donc être dans I_{s-1}, car les éléments de J_{s-1} ont degré au moins $4m$ par hypothèse d'induction. Puisque $4m = 2n - 2k - 2$, l'élément $c_k z'$ ne peut pas avoir de composantes en $C_{n-k-1}, \ldots, C_n$. Il doit de ce fait s'écrire sous la forme

$$c_k z' = P_1 C_{n-k-2} + \cdots + P_{s-k-4} C_{n-s+3}.$$

En particulier, si $s \leq k + 4$, il n'y a rien a démontrer. De plus, nous pouvons supposer qu'aucun des X_i n'a de composante en c_k, car sinon nous pourrions simplement redéfinir z'. Il faut nécessairement que la relation ci-haute soit un multiple d'une relation de la forme $(*)$

puisque ce sont les seules relations entre les générateurs de A_1. Or, lorsque $i \leq n-k-2$ est pair, C_i possède un terme qui est une classe de Pontryagin non multipliée par une classe de Chern et donc, la seconde option est impossible dès que $s > k+5$. Pour le cas précis $s = k+5$, c'est-à-dire lorsque la relation ci-haut a précisément un terme à droite, nous avons

$$C_{n-k-2} = c_1 p_{m-1} + c_2 p_{m-2} + \cdots + c_{2m-3} p_1 + c_{2m-1}$$

qui n'est pas davantage divisible par c_k. Ainsi, il faut que $z' = QC_j$ pour un certain polynôme $Q \in A[c_1, \ldots, p_m]$ et $n-s+2 \leq j \leq n-k-2$, d'où $xz' = xQC_j \in I_s$.

Finalement, notons que les générateurs de K ne sont que le rappel par c_k des générateurs de I_{s-1} et J_{s-1} multipliés par x, car $\cup c_k$ est un morphisme injectif sur $A[c_1, \ldots, p_m] \otimes \Lambda[x_{4\ell+1}, y]$. Ainsi, par hypothèse d'induction sur I_{s-1} et J_{s-1}, les générateurs de $J_s = J_{s-1} + K$ ont bien les propriétés demandées par l'induction.

Lorsque $n - k = 2m$, nous avons plutôt

$$C_{n-s+1} = \begin{cases} c_{k-s+1} p_m + \cdots + c_k p_{m-\frac{s-1}{2}} & \text{si } s \geq 1 \text{ est impair;} \\ c_{k-s+1} p_m + \cdots + c_{k-1} p_{m-\frac{s}{2}+1} & \text{si } s \geq 1 \text{ est pair,} \end{cases}$$

ce qui fait en sorte que la classe y n'apparaît pas à l'étape $s = 1$. Le reste de la preuve reste la même, excepté que les étapes « $s-1$ pair » et « $s-1$ impair » de l'induction sont interverties. Nous obtenons donc bien le résultat annoncé lorsque $1/2 \in A$.

Lorsque nous calculons la cohomologie avec coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, nous utilisons la même astuce d'induction. Dans ce cas, la réduction modulo 2 de $e(\xi^{n-s+1}) = c_{n-s+1}(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C})$ est la classe de degré $2(n-s+1)$ de $w^2 c$, où w est la classe de Stiefel-Whitney totale de $\gamma_I^{k,n}$ et c est la réduction modulo 2 de la classe de Chern totale de $\delta_I^{k,n}$. Cela vient du fait que la réduction modulo 2 de la classe de Chern est la classe de Stiefel-Whitney et que, du point de vue réel, $\gamma_I^{k,n} \otimes \mathbb{C} = \gamma_I^{k,n} \oplus \gamma_I^{k,n}$. Ainsi, nous n'avons plus à nous soucier de la parité de $n-k$. En fait, nous voyons sans problème que $\cup e$ est dans ce cas injectif et donc, que

$$H^*(V_s; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(V_{s-1}; \mathbb{Z}_2) / \left([w^2 c]_{2(n-s+1)} \right),$$

où $[w^2 c]_{2(n-s+1)}$ dénote l'élément homogène de degré $2(n-s+1)$ de $w^2 c$. Ainsi, nous obtenons bien le résultat annoncé dans le théorème 4.3.1.

Ainsi, il ne reste plus qu'à démontrer la partie de l'énoncé sur les torsions de $H^*(\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}); \mathbb{Z})$. Pour ce qui est de la torsion impaire, il suffit de noter que notre calcul de l'anneau de cohomologie avec coefficients dans A donne les mêmes nombres de Betti pour $A = \mathbb{Q}$ et pour $A = \mathbb{Z}_p$ lorsque p un nombre premier impair. Ainsi, par le théorème des coefficients universels, il ne peut pas avoir de p-torsion dans la cohomologie entière. Pour ce qui est de la 4-torsion, il faut plutôt suivre la preuve que nous venons de faire, mais dans des coefficients entiers et en s'intéressant uniquement à la 4-torsion. Il est connu que $H^*(\mathrm{BU}(k);\mathbb{Z})$ et $H^*(\mathrm{BO}(n-k);\mathbb{Z})$ n'ont pas de 4-torsion. Alors, le résultat découle en notant que nous obtenons $H^*(V_s)$ de $H^*(V_{s-1})$ en ajoutant des générateurs qui ne sont pas de la 4-torsion puisqu'ils proviennent de $H^*(V_{s-1})$ ou en quotientant par des idéaux qui sont engendrés par des éléments qui ne sont pas des multiples de 4, ce qui se voit bien de la défintion de I_s et K.

Maintenant le théorème 4.3.1 démontré, nous pouvons étudier ce qui se passe lorsque nous stabilisons selon n. Tout d'abord, dans le cas $A \ni 1/2$, l'idéal J disparaît de par la condition sur le degré cohomologique de ses éléments. De plus, la relation $cp = 1$ donne alors

$$\begin{aligned}1 = 1 &+ c_1 + (p_1 + c_2) + (p_1 c_1 + c_3) + \dots \\ &+ (p_m + p_{m-1}c_2 + \cdots + p_1 c_{2m-2} + c_{2m}) \\ &+ (p_m c_1 + p_{m-1}c_3 + \cdots + p_1 c_{2m-1} + c_{2m+1}) + \dots .\end{aligned}$$

Ainsi, dans la limite, le quotient par $I = (cp - 1)$ envoie toutes les classes de Chern impaires à 0 et réécrit toutes les classes de Pontryagin comme des polynômes des classes de Chern paires. Finalement, la classe y est instable et donc, disparaît dans la limite. Ainsi, nous obtenons

Corollaire 4.3.4. *L'anneau de cohomologie de la grassmannienne isotrope stable est donné par*

$$H^*(\mathscr{I}G(k);R) = \begin{cases} R\left[c_2,\dots,c_{2\lfloor \frac{k}{2}\rfloor}\right] \otimes_R \Lambda[x_{4\ell+1}]_{\ell \geq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} & \text{si } R \ni \frac{1}{2} \\ \mathbb{Z}_2\left[c_1,\dots,c_k,w_1,w_2,\dots\right] \big/ (w^2c - 1) & \text{si } R = \mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Chapitre 5

Fibrés coisotropes

Nous terminons ce mémoire en appliquant une méthode analogue à celle utilisée au chapitre précédent pour définir des classes caractéristiques coisotropes, afin d'étudier les immersions coisotropes dans $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Les nouveaux résultats que nous obtenons ainsi sont en un certain sens surprenants: les nouvelles classes caractéristiques ne détectent pas la différence entre un fibré coisotrope et son complément symplectique, qui est isotrope. Finalement, nous clorons le chapitre avec une discussion sur les différences entre le h-principe isotrope et celui coisotrope que nos classes caractéristiques ne semblent pas apte à détecter.

5.1. Fibrés coisotropes abstraits

5.1.1. Grassmannienne coisotrope

Parallèlement au cas isotrope, nous étudions la grassmannienne des sous-espaces coisotropes de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}G_k\left(\mathbb{R}^{2n}\right) := \left\{C \in G_{n+k}\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \;\middle|\; C^{\omega_0} \subseteq C\right\}.$$

Or, avec l'identification $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $iC^{\omega_0} = C^{\perp}$. Ainsi, un élément $C \in \mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ induit une scission

$$\mathbb{C}^n = C \oplus iC^{\omega_0} = V \oplus (C^{\omega_0} \oplus iC^{\omega_0})$$

pour $V = (C^{\omega_0} \oplus iC^{\omega_0})^{\perp}$ de rang complexe k. La scission dépend clairement continuement de C puisque les compléments symplectique et orthogonal ont cette propriété. Nous avons donc un homéomorphisme

$$\mathscr{C}G_k\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \cong \left\{(V,I) \in G_k\left(\mathbb{C}^n\right) \times \mathscr{I}G_k\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \;\middle|\; V = (I \oplus iI)^{\perp}\right\}.$$

Alors, nous voyons bien que le complément symplectique induit un homéomorphisme de $\mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ à $\mathscr{I}G_k\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$: c'est simplement l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n}) &\to \mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n}) \\ (V,I) &\longmapsto I. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous aurions également pu noter que, pour un espace coisotrope C, nous pouvons prendre une base unitaire d'un espace vectoriel complexe V tel que $C = V \oplus C^{\omega_0}$ et une base orthonormale de C^{ω_0}, de sorte à ce que leur union soit une base unitaire de $\mathbb{C}^n = V \oplus (C^{\omega_0} \otimes \mathbb{C})$. Alors, la preuve du lemme 4.1.1 s'adapte directement pour donner que la grassmannienne $\mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n})$ est l'espace homogène $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$. Ainsi, les grassmanniennes isotrope et coisotrope forment le même espace homogène. Cette approche est particulièrement utile puisqu'elle permet de voir que l'inclusion naturelle $\mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n}) \hookrightarrow \mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2(n+1)})$ correspond à la même chose que dans le cas isotrope, c'est-à-dire à l'inclusion $\mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \hookrightarrow \mathrm{U}(n+1)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{O}(n-k+1))$ induite par $A \mapsto A \oplus \mathbb{1}$. Ainsi, les grassmanniennes isotrope et coisotrope stables sont homéomorphes, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}G(k) := \varinjlim \mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathscr{I}G(k).$$

5.1.2. Fibrés classifiés par la grassmannienne coisotrope

Nous voulons maintenant développer une théorie des fibrés coisotropes abstraits parallèle à celle des fibrés isotropes abstraits. Tout d'abord, notons que si $\beta_C^{k,n}$ dénote le fibré tautologique sur $\mathscr{C}G_k(\mathbb{R}^{2n})$, remarquons que $\beta_C^{k,n} = \delta_I^{k,n} \oplus \gamma_I^{k,n}$ et que bien sûr

$$\delta_I^{k,n} \oplus (\gamma_I^{k,n} \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon_{\mathbb{C}}^n,$$

où nous nous permettons l'abus de langage d'identifier $\gamma_I^{k,n}$ et $\delta_I^{k,n}$ à leur rappel par l'homéomorphisme $C \mapsto C^{\omega_0}$. Ainsi, tout fibré classifié par cet espace devra avoir une propriété similaire, ce qui nous mène à la définition suivante.

Définition 5.1.1. *Un fibré vectoriel réel ζ de rang $n+k$ est appelé un **fibré coisotrope abstrait d'indice k**, ou un **fibré k-coisotrope**, s'il existe un isomorphisme de fibrés $\Phi : \zeta \to \eta \oplus \xi$, où η est un fibré vectoriel complexe de rang k et ξ est un fibré vectoriel réel de* *rang $n-k$ tels que*

$$\eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon^n_{\mathbb{C}}.$$

Il suit directement de la définition que tout fibré k-coisotrope est un sous-fibré isotrope du fibré symplectique trivial $(\epsilon^{2n}_{\mathbb{R}},\omega_0)$. De l'autre côté, dans le cas stable, si ζ est un sous-fibré coisotrope d'un fibré symplectique, il existe des fibrés vectoriels sur X réel $\nu_{\zeta^{\omega_0}}$ de rang n' et complexe ν_η de rang k' tels que

$$\zeta^{\omega_0} \oplus \nu_{\zeta^{\omega_0}} \cong \epsilon^{n+n'-k}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \eta \oplus \nu_{\perp} \cong \epsilon^{k+k'}_{\mathbb{C}},$$

où $\zeta \cong \eta \oplus \zeta^{\omega_0}$. Alors, le fibré symplectique total augmenté de $\nu_{\zeta^\omega} \otimes \mathbb{C}$ et ν_η est trivial de rang $n+n'+k'$. Ainsi, $\zeta \oplus \nu_{\zeta^\omega} \oplus \nu_\eta$ est $(k+k')$-coisotrope. Notons que contrairement à la situation isotrope analogue, ζ n'est peut-être pas lui-même coisotrope au sens abstrait à cause de la partie complexe qu'il faut potentiellement lui ajouter pour le stabiliser.

Proposition 5.1.2. *Le fibré $\beta^{k,n}_C$ est universel pour les fibrés k-coisotropes de rang $n+k$.*

Démonstration. La preuve suit essentiellement la même idée que celle de la proposition analogue 4.1.4. Soient ζ, un tel fibré sur un CW-complexe X, et un isomorphisme $\Phi : \zeta \to \eta^k \oplus \xi^{n-k}$ avec

$$\eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon^n_{\mathbb{C}}.$$

Nous pouvons alors considérer son application classifiante comme $(\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^{n-k})$-fibré $\alpha : X \to \mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k)$. Comme auparavant, nous cherchons un relèvement $\tilde{\alpha}$ tel que

$$\begin{tikzcd}
 & V_n\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\alpha}"] & \mathrm{BU}(k) \times \mathrm{BO}(n-k)
\end{tikzcd}$$

commute, où p est la projection évidente. Alors, $p^*(\delta^k \times \gamma^{n-k})$ sera universel pour les fibrés k-coisotropes et $\tilde{\alpha}$ sera l'application classifiante de ζ.

Puisque $\alpha^*(\delta^k \times \gamma^{n-k}) \cong \eta \oplus \xi$, nous avons

$$\alpha^*\left(\delta^k \times \left(\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}\right)\right) \cong \eta \oplus (\xi \otimes \mathbb{C}) \cong \epsilon^n_{\mathbb{C}}$$

et nous pouvons prendre une section s de $\alpha^* V_n(\delta^k \times (\gamma^{n-k} \otimes \mathbb{C}))$. Or, par définition du rappel d'un fibré, une telle section associe à tout $x \in X$ un n-repère $r(x)$ de $\alpha_1(x) \oplus (\alpha_2(x) \otimes \mathbb{C})$, où $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$. Ainsi, il suffit de prendre $\tilde{\alpha}(x) := r(x)$.

La fin de la preuve est exactement la même que pour les fibrés isotropes abstraits; nous avons même déjà démontré le lemme 4.1.6 sur $\bar{f}$! $\square$

De même, il suit des argument usuels que dans le régime stable, $\mathscr{C}G(k)$ est l'espace classifiant des fibrés k-coisotropes de tout rang.

Remarque 5.1.3. *Tout comme dans le cas isotrope, nous pourrions définir une opération sur la grassmannienne coisotrope stable. Cependant, l'homéomorphisme entre cet espace et sa contrepartie isotrope induira nécessairement un isomorphisme entre les deux opérations.*

5.2. Classes caractéristiques coisotropes et h-principes

5.2.1. L'approche coisotrope

La conclusion de la section précédente est la suivante: du point de vue de la théorie de l'homotopie, les fibrés k-isotropes et k-coisotropes sont la même chose, puisque ces deux types de fibrés admettent le même espace classifiant. Pour clore la démonstration de cette équivalence, nous pourrions définir des classes caractéristiques coisotropes mesurant l'obstruction à la transversalité d'une paire de fibrés isotrope-coisotrope. Cependant, il découle de la remarque 4.2.2 qu'une telle construction ne différerait de $d(\xi,\zeta)$ que d'un automorphisme de $\mathscr{I}G_k(\mathbb{R}^{2n})$. Ainsi, le calcul de la section 4.3 clôt totalement la question des classes caractéristiques coisotropes et de leur équivalence aux classes caractéristiques isotropes.

Tout comme au chapitre précédent, nous pouvons étudier les conséquences du h-principe pour les immersions coisotropes dans $(M,\omega) = (\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Ceci revient à étudier les éléments de $\mathrm{Iso}(Q,\sigma;\mathrm{R}^{2n},d\lambda_0)$ dans le théorème 3.3.1, où $\dim Q = n+k$ et $\operatorname{rang}\ker\sigma = n-k$. Puisque la forme symplectique standard est exacte, la condition cohomologique $f^*[d\lambda_0] = [\sigma]$ impose que σ soit également exacte. Contrairement au cas isotrope, cette condition n'est malheureusement pas trivialement respectée. Cependant, puisque le théorème 3.3.1 s'applique lorsque $\dim Q < \dim M$, c'est-à-dire $k < n$, ceci n'est pas une restriction sur la compacité de Q. Effectivement, dans ce cas la forme $\sigma = d\alpha$ est nécessairement dégénérée et la preuve du lemme 2.1.4 ne s'applique pas.

Outre cette restriction sur l'exactitude de la forme que nous devons fixer, le reste de l'argument suit comme celui pour les immersions isotropes. Il donne que l'espace des immersions coisotropes dans $\mathbb{R}^{2n}$ est homotopiquement équivalent à celui des monomorphismes de fibrés $TQ \to \beta_C^{k,n}$. En particulier, il existe une immersion coisotrope de (Q,σ) dans $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ précisément lorsque $\eta \oplus (\ker \sigma \otimes \mathbb{C})$ est trivial, où η est un fibré complémentaire à $\ker \sigma$ dans TQ. L'isomorphisme de fibrés complexes a un sens puisque $(\eta,\sigma|_\eta)$ est un fibré symplectique et donc, un fibré complexe. Donc, non seulement demande-t-on à ce que le fibré normal stable de $\ker \sigma \otimes \mathbb{C}$ admette un représentant de rang k, comme nous le faisons dans le cas isotrope, mais nous fixons ce réprésentant. Ceci souligne la rigidité qui existe dans le h-principe coisotrope qui n'est pas présente dans son équivalent isotrope.

De façon analogue au chapitre précédent, nous pouvons associer cet espace de monomorphismes à l'espace des sections du fibré ayant fibre type $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)$ associé au $\mathrm{U}(k)\times\mathrm{O}(n-k)$-fibré principal des repères orthoprésymplectiques de Q, c'est-à-dire les repères orthogonaux de la forme $\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_{n-k}\}$, où $\sigma(u_i,v_i) = 1$ et 0 pour les autres paires. Qu'un tel repère existe découle encore du lemme 1.1.3. Nous utilisons ici l'identification $\mathrm{Sp}(2k)\cap\mathrm{O}(2k) = \mathrm{U}(k)$ démontrée au second chapitre pour définir l'action de $\mathrm{U}(k)\times\mathrm{O}(n-k)$ sur les repères orthoprésymplectiques; celle sur $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k)$ est l'action évidente.

Lorsque $k = 0$, nous retrouvons bien le fait que l'espace des immersions lagrangiennes est homotopiquement équivalent à l'espace des sections du même $\mathrm{U}(n)$-fibré principal que précédemment. Lorsque $k > 0$, nous nous retrouvons avec le même problème que dans le cas isotrope. Nous pouvons donc espérer pour les mêmes raisons que les classes caractéristiques coisotropes nous donnent de l'information intéressante. Cependant, le fait que les classes caractéristiques isotropes et coisotropes soient les mêmes, alors que les conséquences des h-principes correspondants ne le soient pas, nous indique que ces dernières seront incapables de détecter la rigidité supplémentaire qui existe dans le cas coisotrope.

5.2.2. Différences entre les h-principes isotrope et coisotrope

La différence dans les conséquences des h-principes isotrope et coisotrope souligne une dissemblance entre l'espace des immersions isotropes et celui des immersions coisotropes qui n'est pas tout à fait évidente lorsque nous regardons le bel énoncé général.

Si Q est une feuille isotrope d'une variété présymplectique P, l'espace $\mathrm{Iso}(Q,0;M,\omega)$ contient toutes les immersions isotropes de Q dans M. Au contraire, si $i : Q \to P$ dénote l'inclusion de la feuille, alors $i^*\mathrm{Iso}(P,\sigma;M,\omega)$ ne contient que des immersions isotropes de Q dans M telles que la classe d'isomorphisme du fibré normal symplectique de Q dans i^*TP soit fixée. Effectivement, puisque tout élément $f \in \mathrm{Iso}(P,\sigma;M,\omega)$ respecte $f^*\omega = \sigma$, il faut que tout élément $g = f \circ i \in i^*\mathrm{Iso}(P,\sigma;M,\omega)$ induise la même structure symplectique que σ sur le fibré normal de Q. Nous avons un résultat analogue pour $\mathrm{iso}(Q,0;M,\omega)$ et $i^*\mathrm{iso}(P,\sigma;M,\omega)$.

En fait, si σ_1 et σ_2 sont deux formes présymplectiques sur P telles que $\ker\sigma_1 = \ker\sigma_2$, et qu'il existe un automorphisme Φ de TP tel que $\Phi^*\sigma_2 = \sigma_1$, alors la pré-composition par Φ induit un homéomorphisme entre $\mathrm{iso}(P,\sigma_1;M,\omega)$ et $\mathrm{iso}(P,\sigma_2;M,\omega)$. Ainsi, $i^*\mathrm{iso}(P,\sigma_1;M,\omega)$ et $i^*\mathrm{iso}(P,\sigma_2;M,\omega)$ sont homéomorphes et, par le h-principe coisotrope, $i^*\mathrm{Iso}(P,\sigma_1;M,\omega)$ et $i^*\mathrm{Iso}(P,\sigma_2;M,\omega)$ ont le même type d'homotopie. Or, un automorphisme comme Φ induit un isomorphisme de fibrés symplectiques sur les fibrés normaux symplectiques de chaque feuille. Donc, le type d'homotopie des espaces induits par la restriction à une feuille Q ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré normal symplectique de ladite feuille, dans la mesure où cet isomorphisme provient d'un automorphisme de TP.

Ceci laisse penser qu'il pourrait exister un h-principe coisotrope ne dépendant que de la distribution $\mathcal{D} = \ker\sigma$ et non de la forme σ la réalisant comme son noyau. Autrement dit, qu'il pourrait exister un h-principe dont la restriction des espaces coisotropes à une feuille isotrope Q serait l'ensemble des immersions isotropes dans M se factorisant par une immersion de P dans M et l'ensemble des monomorphismes isosymplectiques $TQ \to TM$ se factorisant par un monomorphisme $TP \to TM$ respectivement. Notons que nous n'avons pas besoin d'ajouter ici les conditions d'isosymplecticité aux applications de P dans M puisqu'elles sont directement respectées par les conditions des applications de Q dans M et la condition que Q soit une feuille de la distribution isotrope $\mathcal{D}$.

Le problème rencontré lorsque nous tentons de démontrer un tel h-principe est le suivant: les techniques utilisées pour démontrer le h-principe isosymplectique utilisent explicitement la classe de cohomologie σ, alors que celle-ci n'a aucun lien avec $\ker\sigma$. Effectivement, deux formes cohomologues peuvent avoir des noyaux totalement différents (pensons à la 2-forme nulle et à $d\lambda_0$ sur n'importe quel cotangent) et deux formes ayant le même noyau peuvent ne pas être cohomologues (pensons à n'importe quelle forme α et à $r\alpha$ pour $r > 1$). Pour espérer démontrer un h-principe du même style que celui proposé, il faudrait donc très bien connaître l'espace des 2-formes fermées de rang constant ayant un certain noyau fixé. Cependant, cette connaissance n'est aujourd'hui encore que partielle et est à la base de maintes recherches (voir **[22]** par exemple). Même lorsque $(Q,\mathcal{D})$ est régulière, le théorème 2.1.20 nous indique que la projection $p : Q \to \bar{Q}$ induit une bijection entre les formes symplectiques sur l'espace des feuilles $\bar{Q}$ et les formes présymplectiques sur Q ayant $\mathcal{D}$ comme noyau. Ainsi, connaître l'espace des formes présymplectiques sur Q revient à connaître l'espace des formes symplectiques sur $\bar{Q}$. Or, ce dernier espace est hautement mystérieux et peu de choses en sont connues.

De ce fait, nous allons ici terminer l'exploration du h-principe coisotrope et nous nous contenterons de nos résultats sur les classes caractéristiques coisotropes pour ce mémoire. Il ne faut pas trop s'en abattre puisque comme mentionné auparavant, ces dernières donnent tout de même des informations assez fines sur l'espace des immersions coisotropes.

Bibliographie

[1] Masahisa Adachi : *Embeddings and Immersions*, volume 124 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1991.

[2] Vladimir I. Arnol'd : Characteristic class entering in quantization condition. *Functional Analysis and Its Applications*, 1(1):1–13, 1967.

[3] Vladimir I. Arnol'd : *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Numéro 60 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2^e édition, 1989.

[4] Michèle Audin : Classes caractéristiques lagrangiennes. *In Algebraic Topology. Barcelona 1986*, pages 1–16. Springer.

[5] Yakov Eliashberg et Nikolai Mishachev : *Introduction to h-Principle*. Numéro 48 de Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2002.

[6] Viktor Ginzburg : Coisotropic intersections. *Duke Mathematical Journal*, 140(1):111–163, 2007.

[7] Martin Golubitsky et Victor Guillemin : *Stable Mappings and Their Singularities*. Numéro 14 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1974.

[8] Mark J. Gotay : On coisotropic imbeddings of presymplectic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 84(1):111–114, 1982.

[9] Misha Gromov : *Partial Differential Relations*, volume 9 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[10] André Haefliger : Feuilletages sur les variétés ouvertes. *Topology*, 9:183–194, 1970.

[11] Allen Hatcher : *Algebraic Topology*. 2001.

[12] Morris W. Hirsch : Immersions of manifold. *Translations of the American Mathematical Society*, 93(2):242–276, 1959.

[13] Dale Husemoller : *Fibre Bundles*. Numéro 20 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 3^e édition, 1994.

[14] Anton Kapustin et Dmitri Orlov : Remarks on a-branes, mirror symmetry, and the fukaya category. *Journal of Geometry and Physics*, 48(1):88–99, 2003.

[15] Ely Kerman et François Lalonde : Lenght minimizing hamiltonian paths for symplectically aspherical manifolds. *Annales de l'Institut Fourier*, 53:1503–1526, 2003.

[16] François LALONDE : Le h-principe pour les immersions isotropes et ses conséquences. *Rapport de recherche de l'Université du Québec à Montréal*, 51, 1988.

[17] François LALONDE : Classes caractéristiques isotropes. *Mathematische Annalen*, 285:343–351, 1989.

[18] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Numéro 218 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1^{re} édition, 2003.

[19] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON : *Introduction to Symplectic Topology*. Numéro 27 de Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 3^{e} édition, 2017.

[20] John W. MILNOR et James D. STASHEFF : *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

[21] Yong-Geun OH et Jae-Suk PARK : Deformations of coisotropic submanifolds and strong homotopy lie algebroids. *Inventiones mathematicae*, 161(2):287–360, 2005.

[22] Florian SCHÄTZ et Marco ZAMBON : Deformations of pre-symplectic structures and the koszul l_∞-algebra. *International Mathematics Research Notices*, 2018.

[23] Stephen SMALE : The classification of immersions of sphere in euclidean spaces. *Annals of Mathematics*, 69(2):327–344, 1959.

[24] Edwin H. SPANIER : *Algebraic Topology*. Springer-Verlag New York, 1966.

[25] Norman STEENROD : *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1951.

[26] Alan WEINSTEIN : *Lectures on Symplectic Manifolds*. Numéro 29 de Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, 1977.

[27] Hassler WHITNEY : The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space. *Annals of Mathematics*, 45(2):247–293, 1944.