

**Université de Montréal**

**Théorie de la représentation  
de l'algèbre de Temperley-Lieb  
à une frontière**

par

**Léonard Houde Therrien**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

30 avril 2018



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Théorie de la représentation  
de l'algèbre de Temperley-Lieb  
à une frontière**

présenté par

**Léonard Houde Therrien**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Matilde Lalin*

---

(président-rapporteur)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(directeur de recherche)

*Dimitris Koukoulopoulos*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

*28 juin 2018*

---



# Sommaire

---

Le but de ce mémoire est d'étudier la théorie de la représentation des algèbres de Temperley-Lieb à une frontière  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ , où  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  et  $\beta = q + q^{-1}$  avec  $q \in \mathbb{C}^*$ . Ces algèbres sont associatives, unifères et de dimensions finies. Elles généralisent les algèbres de Temperley-Lieb dites ordinaires, notées  $\mathbf{TL}_n(\beta)$ . Notre objectif sera de caractériser les représentations irréductibles et principales de  $\mathbf{TLb}_n$ . Pour des valeurs génériques des paramètres, ces algèbres sont semisimples. Or, pour certaines spécialisations des paramètres, l'algèbre n'est pas semisimple et les représentations irréductibles, principales et cellulaires sont, en général, distinctes.

Dans le chapitre 1, il est démontré que la présentation diagrammatique et celle en termes de générateurs et relations de  $\mathbf{TLb}_n$  sont isomorphes et quelques propriétés de base sont calculées. Dans le chapitre 2, la cellularité des algèbres  $\mathbf{TLb}_n$  est démontrée et les modules cellulaires sont calculés. Une forme bilinéaire est introduite sur ceux-ci. Les chapitres 3 et 4 étudient les radicaux des modules cellulaires et une description des modules irréductibles et principaux, pour  $q$  générique et  $\beta_1, \beta_2$  quelconques, est donnée. En particulier, notre analyse inclut le cas  $\beta_2 = 0$ .

Mots-clés : algèbre de Temperley-Lieb à une frontière ; algèbre de Blob ; algèbres cellulaires ; modules cellulaires ; modules principaux (projectifs indécomposables) ; matrices de Gram ; théorie de la représentation des algèbres associatives.



# Summary

---

The goal of this Master's thesis is to study the representation theory of the one boundary Temperley-Lieb algebras  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ , where  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  and  $\beta = q + q^{-1}$  with  $q \in \mathbb{C}^*$ . These are unitary associative algebras of finite dimensions which generalize the more familiar regular Temperley-Lieb algebras  $\mathrm{TL}_n(\beta)$ . Our aim is to classify their irreducible and principal representations. For generic values of the parameters,  $\mathrm{TLb}_n$  is semisimple. However, for certain specializations of the parameters  $q, \beta_1, \beta_2$ , the algebra is not semisimple and in that case, the irreducible, principal and cellular representations are distinct in general.

In chapter 1 it is shown that  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  admits a diagrammatic presentation which is isomorphic to the formulation in terms of generators and relations. In chapter 2, it is shown that the one boundary Temperley-Lieb algebras are cellular algebras and the associated cell modules are computed. An invariant bilinear form is defined on the cell modules. Chapters 3 and 4 study the radicals of the cell modules, leading to the identification of the irreducible and principal modules for any  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  and generic  $q$ . In particular, the  $\beta_2 = 0$  case is included in our analysis.

Keywords : one boundary Temperley-Lieb algebra ; blob algebra ; cellular algebras ; cell modules ; principal modules (projective indecomposable modules) ; Gram matrices ; representation theory of associative algebras.





# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Table des figures</b> .....	xi
<b>Remerciements</b> .....	xiii
<b>Introduction</b> .....	1
0.1. L’algèbre de Temperley-Lieb en mathématiques .....	1
0.2. Objectifs et structure du mémoire .....	2
<b>Chapitre 1. L’algèbre de Temperley-Lieb à une frontière</b> .....	5
1.1. Algèbre de Temperley-Lieb et $n$ -diagrammes .....	5
1.2. Algèbre de Temperley-Lieb à une frontière .....	7
1.3. Isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres pour $\text{TLb}_n$ .....	10
1.3.1. Isomorphisme entre $\text{TLb}_n$ et la représentation diagrammatique .....	10
1.3.2. Changements de bases .....	15
<b>Chapitre 2. Algèbres cellulaires</b> .....	19
2.1. Définitions et exemples .....	19
2.2. Cellularité de $\text{TLb}_n$ .....	26
2.3. Principaux résultats sur les algèbres cellulaires .....	31
<b>Chapitre 3. Modules cellulaires et matrices de Gram</b> .....	39
3.1. Un élément central .....	39
3.2. Restrictions et matrices de Gram .....	47
3.2.1. Restriction des modules cellulaires .....	47
3.2.2. Matrices de Gram .....	50

3.3. Induction des modules cellulaires.....	60
<b>Chapitre 4. Théorie de la représentation de TLb.....</b>	<b>67</b>
4.1. Semisimplicité de $TLb_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .....	67
4.2. Diagrammes de Bratelli.....	70
4.3. Représentations irréductibles et principales en dehors des racines de l'unité...	74
4.4. Représentations irréductibles et principales lorsque $\beta_2 = 0$ .....	83
<b>Conclusion.....</b>	<b>87</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>89</b>
<b>Annexe A. Résultats sur les algèbres associatives</b> utilisés dans ce mémoire.....	<b>A-i</b>
<b>Annexe B. Calculs sur les algèbres TL et TLb.....</b>	<b>B-i</b>

## Table des figures

---

1.1	Une $(4, 4)$ -trajectoire croissante .....	11
1.2	Un élément de $\epsilon_{1,4}^5$ .....	14
3.1	Diagramme de Bratteli .....	49
4.1	Ligne critique .....	71
4.2	Morphisme de $\mathcal{V}_{3,3}$ vers $\mathcal{V}_{3,1}$ .....	73
4.3	Zone de réductibilité des $\mathcal{V}_{n,k}$ .....	74
4.4	Les morphismes (tous injectifs) entre modules cellulaires pour $k_c = 2$ .....	82
4.5	Ligne critique et (iso)morphismes lorsque $k_c = 0$ .....	84



## Remerciements

---

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche : Yvan Saint-Aubin, qui a su me guider tout au long de ma maîtrise et m'apporter un support moral lorsque j'en ai eu besoin. Écrire un mémoire de maîtrise sur un sujet aussi abstrait est une entreprise qui peut être par moment éprouvante (bien que passionnante par moment aussi !). Mon directeur a su être patient dans les moments plus difficiles, tout comme il a su être encourageant dans les moments plus stimulants. Je lui en suis extrêmement reconnaissant. Bien entendu, je souhaite aussi dire un gros merci à mes parents qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de ma maîtrise. J'aimerais de plus remercier mes collègues de travail et de bureau : Alexis Langlois-Rémillard, Justin Le Sauter-Robitaille, Florence Véronneau-Veilleux, Francis Huot-Chantal et Marie-Christine Robitaille-Grou, qui sont devenus plus que de simples collègues de travail, mais de véritables amis. Sans oublier Alexi Morin-Duchesne, qui a eu la gentillesse de nous fournir quelques informations très utiles, sans quoi la rédaction de ce mémoire aurait sans aucun doute été plus ardue. Enfin, j'aimerais remercier la Faculté des études supérieures et le département de mathématiques pour les bourses qui m'ont été attribuées et qui m'ont permis de me concentrer sur la recherche sans avoir à trop me soucier de ma situation financière.



# Introduction

---

Les algèbres de Temperley-Lieb, notées  $TL_n(\beta)$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ , forment une famille d'algèbres associatives et unifères. Ces algèbres furent introduites par les physiciens-mathématiciens N. Temperley et E. Lieb en 1971 [7] dans le but d'étudier certains modèles de physique statistique sur réseau. Celles-ci peuvent être définies à l'aide de générateurs et relations, ou encore en terme d'une représentation diagrammatique (voir la section 1.1 pour la définition). Il est aussi possible d'obtenir ces algèbres comme quotients d'un certain type d'algèbres de Hecke (voir entre autres [2, 13]). Les algèbres de Temperley-Lieb furent redécouvertes par V. Jones ([11]) en 1984 dans le contexte de la construction d'un invariant topologique en théorie des noeuds, maintenant connu sous le nom de *polynôme de Jones*. Plusieurs généralisations ont depuis vu le jour, dont les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière, introduites en 1992 par P. Martin et H. Saleur [16] et qui feront l'objet d'étude de ce mémoire. Mentionnons aussi l'algèbre de Temperley-Lieb à deux frontières [2], les algèbres de Temperley-Lieb diluées [8], les algèbres à frontière soudée [1] et les algèbres de Temperley-Lieb affines [10].

## 0.1. L'algèbre de Temperley-Lieb en mathématiques

Les algèbres de Temperley-Lieb sont intimement liées à la théorie des noeuds et des enchevêtrements [19, 12]. Un  $(k,l)$ -diagramme  $D$ , avec  $k \equiv l \pmod{2}$ , est construit à partir de deux segments de droites verticales (non confondues) entre lesquelles précisément  $\frac{k+l}{2}$  courbes sont tracées. Sur la face gauche de  $D$  se trouvent  $k$  extrémités de ces courbes et sur la face droite s'en trouve  $l$ . Si  $D$  et  $D'$  sont deux diagrammes obtenus de cette manière, ils seront considérés comme identiques si ils sont équivalents à isotopie, fixée sur les deux droites verticales, près. Par exemple, les diagrammes suivants représentent le même  $(2,4)$ -diagramme (*a priori* les boucles intérieures sont permises) :

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right|. \quad (0.1.1)$$

Définissons le  $(k,l)$ -module d'enchevêtrement (*skein modules* en anglais)  $\mathcal{E}_{k,l}$  de la manière suivante. Si  $k \not\equiv l \pmod{2}$  alors  $\mathcal{E}_{k,l} = 0$ . Sinon,  $\mathcal{E}_{k,l}$  est donné par  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\{(k,l)\text{-diagrammes}\}$ ,

quotienté par la relation :

$$\bigcirc = q + q^{-1}. \quad (0.1.2)$$

Dans  $\mathcal{E}_{2,4}$  les éléments de l'équation (0.1.1) deviennent alors :

$$\left| \begin{array}{c} \text{blue} \\ \text{diagram} \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{c} \text{blue} \\ \text{diagram} \end{array} \right| \equiv (q + q^{-1}) \left| \begin{array}{c} \text{blue} \\ \text{diagram} \end{array} \right|.$$

L'algèbre de Temperley-Lieb  $\mathbf{TL}_n$  est donnée par l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_{n,n}$  muni d'une opération par concaténation de diagrammes satisfaisant à la condition (0.1.2) dans l'éventuel cas où des boucles sont formées (voir (1.1.2)). Soit maintenant  $\mathcal{L}$  un noeud dans  $\mathbb{R}^3$  (un plongement de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ ). Les « croisements » de  $\mathcal{L}$  sont « résolus » par la relation :

$$\times \equiv q^{\frac{1}{2}} \cup + q^{-\frac{1}{2}} \cap.$$

Cette relation sera utilisée au chapitre 3 lors de la construction d'un élément central. Il est possible de montrer que celle-ci induit une représentation du *groupe des tresses*  $B_n$  dans  $\mathbf{TL}_n$ . En construisant le noeud  $\mathcal{L}$  à partir de la *fermeture* d'un élément de  $B_n$ , il est donc possible d'associer à  $\mathcal{L}$  un élément de  $\mathbf{TL}_n$  [12].

Les algèbres de Temperley-Lieb ainsi que leurs généralisations apparaissent aussi dans plusieurs problèmes physiques. Certains modèles intégrables en physique statistique (voir [13]), comme par exemple les modèles de Potts, font intervenir ces algèbres. Un important cas particulier de modèle de Potts est le *modèle d'Ising* [13, 4]. Chacun des sites numérotés de 1 à  $n$  prend une des deux valeurs « + » ( $\uparrow$ ) ou « - » ( $\downarrow$ ). Chaque site interagit avec ses voisins immédiats et l'Hamiltonien du système en une dimension peut s'écrire sous la forme (voir [21]) :

$$\mathcal{H}_{XXZ}(q) = \sum_{j=1}^{n-1} E_j \quad (0.1.3)$$

où les matrices  $E_j$  forment une représentation de  $\mathbf{TL}_n(\beta)$ . Les algèbres de Temperley-Lieb possèdent aussi des liens intimes avec la catégorie des représentations du groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  aux racines de l'unité [19]. Les *groupes quantiques* sont des algèbres de Hopf sur  $\mathbb{C}$  obtenu par déformation des algèbres de Lie classiques.

## 0.2. Objectifs et structure du mémoire

Le but général de ce mémoire est d'étudier la théorie de la représentation de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . La théorie de la représentation de  $\mathbf{TL}_n$  est bien établie. Mentionnons à cet effet les ouvrages suivants : P. Martin [13], F. Goodman et H. Wenzl [6], B. Westbury [22] ainsi que D. Ridout et Y. Saint-Aubin [5]. Pour l'algèbre à une frontière  $\mathbf{TL}_n(\beta)$ , les principaux papiers sont celui de P. Martin et H. Saleur ([16], 1992), dans lequel l'algèbre est introduite, et celui de Martin et Woodcock ([17], 2000). Ce dernier article utilise toutefois un langage différent de celui qui



sera employé dans ce mémoire. En effet, l'article de Martin et Woodcock utilise le fait que les algèbres  $\mathbf{TLb}_n$  sont des *algèbres quasi-hériditaires* (voir [20]). Leur article exclut certains cas des spécialisations des paramètres dont les cas  $\beta = 0$  et  $\beta_2 = 0$ . Or, l'étude des algèbres à frontière soudée force l'étude des algèbres  $\mathbf{TLb}_n$  en  $\beta_2 = 0$ .

Une autre voie est possible, celle introduite par J. Graham et G. Lehrer dans [9] en 1996 sous le nom d'algèbre cellulaire. Plusieurs algèbres sont cellulaires : certaines algèbres de Iwaori-Hecke, les algèbres de Temperley-Lieb standards et plusieurs algèbres admettant des représentations diagrammatiques (par exemple, l'algèbre de Brauer) sont des algèbres cellulaires. Nous avons donc choisi de démontrer que  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est une algèbre cellulaire (chapitre 2) puisque la cellularité de  $\mathbf{TLb}_n$  reste vraie pour toute valeur des paramètres et donc, en particulier pour les cas  $\beta = 0$  et  $\beta_2 = 0$ . Ces algèbres possèdent une classe de modules, dits cellulaires, munis d'une forme bilinéaire invariante et symétrique dont la connaissance permet de déterminer exactement les conditions de semisimplicité de l'algèbre. Les représentations irréductibles s'obtiennent directement si l'on parvient à connaître le radical de cette forme. De plus, les facteurs de composition des modules cellulaires sont intimement reliés aux facteurs de composition des modules projectifs indécomposables.

Dans le chapitre 1, les algèbres de Temperley-Lieb et les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière sont définies, tout d'abord de manière algébrique. On montre ensuite que ces algèbres admettent une interprétation naturelle en termes de  $(n, n)$ -diagrammes (qui seront simplement nommés  $n$ -diagrammes). Les propriétés élémentaires des algèbres sont étudiées : la dimension des algèbres, une forme normale dans  $\mathbf{TLb}_n$  et un isomorphisme entre les deux présentations de l'algèbre sont donnés. Le chapitre 2 est consacré à l'étude des algèbres cellulaires. Celles-ci s'avèrent être un langage efficace pour la description des algèbres de Temperley-Lieb (à une frontière) ainsi que pour l'étude de leurs représentations. Les outils développés dans les chapitres 1 et 2 nous amèneront, au chapitre 3, à trois calculs fort importants : celui des valeurs propres d'un élément central sur les modules cellulaires, le déterminant des matrices de Gram et les inductions des modules cellulaires. Enfin, au chapitre 4 seront donnés les principaux théorèmes sur la structure de ces algèbres. Le résultat principal est la décomposition de la représentation régulière des algèbres lorsque le paramètre  $q \in \mathbb{C}^*$  n'est pas une racine de l'unité avec une attention particulière portée au cas  $\beta_2 = 0$ . Dans ce dernier cas, les résultats sont, à ma connaissance, nouveaux.

Afin de donner une idée des résultats importants de ce mémoire, la liste ci-bas énumère les principales étapes :

- l'isomorphisme entre les versions algébrique et diagrammatique est établi et les dimensions de  $\mathbf{TLb}_n$  sont calculées ;
- la cellularité de  $\mathbf{TLb}_n$  est établie ;

- une forme bilinéaire sur les modules cellulaires est introduite et sa matrice de Gram est étudiée ;
- l'induction des modules cellulaires liées à l'inclusion d'algèbres  $\mathbf{TLb}_n \subset \mathbf{TLb}_{n+1}$  sont obtenues ;
- les valeurs des paramètres pour lesquelles l'algèbre est semisimple sont obtenues ;
- une caractérisation des représentations irréductibles et principales (lorsque  $\mathbf{TLb}_n$  n'est pas semisimple) est donnée pour  $\beta_2$  quelconque et  $q$  *générique* ;

Le dernier point n'est que partiellement résolu. En effet, le terme *générique* signifie ici que le paramètre  $q$  ne peut pas être une racine de l'unité. Dans le cas où  $\beta, \beta_2 \neq 0$ , l'analyse du cas où  $q$  est une racine de l'unité a été faite dans [17].

# Chapitre 1

---

## L'algèbre de Temperley-Lieb à une frontière

Dans ce chapitre sont définies les algèbres de Temperley-Lieb et les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière. Les représentations diagrammatiques de ces deux familles d'algèbres sont introduites. Ces représentations diagrammatiques sont intimement reliées aux structures cellulaires des algèbres. Les définitions et propriétés de base sont données et les dimensions des algèbres sont calculées. Une forme normale (dite de Jones) est donnée et le chapitre se termine avec une preuve que la représentation diagrammatique de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  donne lieu à une algèbre isomorphe à  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

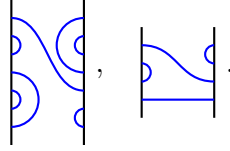
### 1.1. Algèbre de Temperley-Lieb et $n$ -diagrammes

L'algèbre de Temperley-Lieb  $\text{TL}_n(\beta)$ , avec  $\beta \in \mathbb{C}$ , est l'algèbre engendrée par les générateurs  $1, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  et satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_i^2 &= \beta u_i & 1 \leq i \leq n-1, \\ u_i u_j &= u_j u_i & |i-j| \geq 2, \\ u_i u_{i+1} u_i &= u_i & 1 \leq i \leq n-2, \\ u_i u_{i-1} u_i &= u_i & 2 \leq i \leq n-1. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Ici,  $n$  est un entier non négatif (avec  $\text{TL}_0 = \mathbb{C}$ ). Il est possible de montrer que  $\text{TL}_n$  admet une représentation diagrammatique très utile, exprimée en terme de  $n$ -diagrammes, à cet effet voir entre autres [5, 12] et [22]. Un  $n$ -diagramme est construit à partir de deux segments de droites verticales de mêmes longueurs sur chacune desquelles  $n$  points sont identifiés. Ces  $2n$  points sont reliés deux à deux par des courbes (comprises entre les deux segments verticaux) qui ne s'intersectent pas. Si  $D$  et  $D'$  sont deux diagrammes obtenus de cette manière, ils seront considérés comme identiques si ils sont équivalents à isotopie près. Les deux diagrammes ci-bas fournissent des exemples d'un 7-diagramme et d'un 4-diagramme,

respectivement :



Chaque paire de points sur un tel diagramme est donc reliée par un *lien* et, inversement, chaque lien est déterminé uniquement par les points joints par celui-ci. Les segments de droite contenant chacun  $n$  des  $2n$  points d'un diagramme  $D$  (c'est-à-dire les lignes verticales en noirs dans les diagrammes ci-haut) seront appelés les *faces* de  $D$ .

**Définition 1.1.1.** *Soit  $D$  un  $n$ -diagramme. Un lien sera dit transversal s'il relie deux points situés sur les faces opposées de  $D$ . On dira qu'il est un arc dans le cas contraire.*

Par exemple, dans l'exemple précédent, le 7-diagramme possède un lien transversal et six arcs (trois par côtés), alors que le 4-diagramme possède deux liens transversaux et 2 arcs.

**Remarque 1.1.2.** (1) *Le nombre de lien transversaux est toujours de la même parité que  $n$ .*

(2) *Pour tout diagramme  $D$ , le nombre d'arcs doit être le même sur les deux faces du diagramme.*

**Définition 1.1.3.** *Un arc sera dit extérieur s'il n'est pas lui-même à l'intérieur d'un arc. Un arc reliant deux sites adjacents sur un même côté d'un diagramme sera un arc simple.*

Soit  $D_n$  l'ensemble des  $n$ -diagrammes de Temperley-Lieb. Le  $\mathbb{C}$ -module libre sur l'ensemble  $D_n$  (autrement dit, le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ayant pour base les éléments de  $D_n$ ) est muni d'une opération interne de la manière suivante : pour  $D, D' \in D_n$ ,  $D \cdot D'$  est obtenue par la concaténation des diagrammes  $D$  et  $D'$ , avec  $D$  à gauche de  $D'$ . Les points sur la face droite de  $D$  et sur la face gauche de  $D'$  sont identifiés et les liens de  $D$  sont reliés à ceux de  $D'$ . Si  $k$  « boucles intérieures » sont ainsi formées, celles-ci sont effacées et sont remplacées par un facteur  $\beta^k$ .

**Exemple 1.1.4.**

$$\text{Diagram 1} \cdot \text{Diagram 2} = \beta^2 \text{Diagram 3} \quad (1.1.2)$$

**Remarque 1.1.5.** *Soit  $p$  le nombre d'arcs sur l'une des faces de  $D$  et  $p'$  le nombre d'arcs sur l'une des faces de  $D'$ . Alors, si  $p''$  dénote le nombre d'arcs dans la concaténation  $D \cdot D'$ ,  $p'' \geq \max\{p, p'\}$ .*

Il est facile de montrer que cette opération induit une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre associative et unifère sur l'espace vectoriel défini précédemment. L'identité est donnée par le diagramme

suivant :

$$1_{D_n} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} .$$

Notons  $U_i$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) le diagramme de  $D_n$  étant identique au diagramme identité en presque tout point mais possédant un arc simple reliant les sites  $i$  et  $i + 1$  sur chacune des faces (gauche *et* droite). Diagrammatiquement,

$$U_i = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

On remarque que les équations (1.1.1) sont satisfaites par les  $U_i$ , c'est-à-dire que les  $u_i$  peuvent être remplacés par les  $U_i$  dans ces équations. Par exemple, l'équation  $U_i U_{i+1} U_i = U_i$  se vérifie comme suit :

$$U_i U_{i+1} U_i = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = U_i .$$

Les trois autres équations se vérifient toutes aussi facilement. Ainsi, l'espace vectoriel engendré par les  $n$ -diagrammes, muni de l'opération de concaténation, forme une représentation diagrammatique de  $\mathbf{TL}_n$ , c'est-à-dire que l'application envoyant le générateur  $u_i$  de  $\mathbf{TL}_n$  sur le diagramme  $U_i$  est un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres. Il n'est cependant pas évident, *a priori*, que les diagrammes  $U_i$  engendrent l'ensemble de tous les  $n$ -diagrammes et que les relations des équations (1.1.1) sont les seules relations satisfaites par les  $U_i$ . Il est cependant possible de montrer que cette application est en fait un isomorphisme d'algèbres (voir [5]).

## 1.2. Algèbre de Temperley-Lieb à une frontière

Dans cette section l'algèbre de Temperley-Lieb à une frontière est introduite. La représentation diagrammatique correspondante est donnée, en accord avec la notation de [16] et de [17]. Une notation diagrammatique légèrement différente de celle présentée ici est aussi présente dans la littérature (voir entre autres [15]). Il faudra toutefois attendre la section 1.3 pour pouvoir montrer que les deux présentations données, c'est-à-dire la présentation algébrique et la présentation diagrammatique, sont équivalentes. *L'algèbre de Temperley-Lieb à une frontière*,  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  avec  $\beta, \beta_1$  et  $\beta_2 \in \mathbb{C}$ , est l'algèbre engendrée par les générateurs  $1, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  satisfaisant les relations suivantes :

$$u_i^2 = \beta u_i \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

$$\begin{aligned}
u_i u_j &= u_j u_i & |i - j| \geq 2, \text{ avec } 0 \leq i, j \leq n - 1, \\
u_i u_{i+1} u_i &= u_i & 1 \leq i \leq n - 2, \\
u_i u_{i-1} u_i &= u_i & 2 \leq i \leq n - 1, \\
u_0^2 &= \beta_2 u_0, \\
u_1 u_0 u_1 &= \beta_1 u_1.
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Les quatre premières relations sont celles de  $\mathbf{TL}_n$ . Ainsi, il est aisé de voir que  $\mathbf{TL}_n(\beta)$  est une sous  $\mathbb{C}$ -algèbre de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Il existe une forme normale pour les éléments de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  que nous introduisons maintenant. Un *mot* de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est un monôme dans les générateurs  $1, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ . Un mot est donc un élément de la forme  $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$  avec  $0 \leq i_l \leq n - 1$  pour  $0 \leq l \leq k$ . Un mot est dit *réduit* si l'on ne peut pas utiliser les relations (1.2.1) pour réduire le nombre total de générateurs apparaissant dans le mot en question. La proposition suivante donne une forme simple pour tous les éléments de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Il existe une forme normale similaire sur  $\mathbf{TL}_n(\beta)$  qui peut se trouver dans [5] et [11]. Cette dernière s'avère importante pour le calcul de la forme normale de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

**Lemme 1.2.1** (Forme de Jones pour  $\mathbf{TL}_n$ ). *Tout mot  $U$  dans  $\mathbf{TL}_n$  peut être mis sous la forme  $U = (u_{m_1} u_{m_1-1} \dots u_{l_1})(u_{m_2} u_{m_2-1} \dots u_{l_2}) \dots (u_{m_r} u_{m_k-1} \dots u_{l_r})$  où  $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r < n$  et  $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_r < n$ .*

**Remarque 1.2.2.** *Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur les paramètres, il sera convenable d'écrire  $\mathbf{TL}_n$  et  $\mathbf{TLb}_n$  à la place de  $\mathbf{TL}_n(\beta)$  et  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  respectivement.*

**Proposition 1.2.3** (Forme normale de Jones). *Tout mot réduit de  $\mathbf{TLb}_n$  s'écrit sous la forme :*

$$(u_{m_1} u_{m_1-1} \dots u_2 u_1 u_0) \dots (u_{m_2} u_{m_2-1} \dots u_2 u_1 u_0) \dots (u_{m_k} u_{m_k-1} \dots u_2 u_1 u_0) V \tag{1.2.2}$$

où  $k \leq n$  ( $k$  étant le nombre de  $u_0$  apparaissant dans la forme réduite du mot) et où  $V = (u_{m_{k+1}} u_{m_{k+1}-1} \dots u_{l_1}) \dots (u_{m_{k+r}} u_{m_{k+r}-1} \dots u_{l_r})$  est un mot de  $\mathbf{TL}_n$  écrit dans la forme de Jones de  $\mathbf{TL}_n$  et  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1}$ . Les cas où  $m_1 = 0$  représentent les cas où la première parenthèse de (1.2.2) est simplement  $(u_0)$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $V$  un mot réduit de  $\mathbf{TLb}_n$ . Si  $V \in \mathbf{TL}_n$  (c'est-à-dire si aucun générateur  $u_0$  n'apparaît dans  $V$ ) alors  $V$  peut être mis en forme de Jones de Temperley-Lieb. On peut donc supposer que  $V$  admet au moins un générateur  $u_0$ . Ainsi,  $V = V_1 u_0 V'$  où  $V_1 \in \mathbf{TL}_n$  et  $V' \in \mathbf{TLb}_n$  ( $V_1$  et  $V'$  pourraient être les mots vides). En vertu des équations (1.2.1), on peut permuter  $u_0$  avec les éléments à sa gauche tant que l'élément directement à gauche de  $u_0$  n'est pas  $u_1$  ; ainsi, sans perte de généralité  $V_1$  est vide ou  $V_1 = V_2 u_1, V_2 \in \mathbf{TL}_n$ . On a donc

que, soit

$$V = u_0 V', \text{ dans le cas où } V_1 \text{ est le mot vide,}$$

soit,

$$V = V_2 u_1 u_0 V'', \quad V_2 \in \text{TL}_n \quad V'' \in \text{TLb}_n.$$

Dans le deuxième cas, le morceau  $u_1 u_0$  peut à son tour être déplacé vers la gauche jusqu'à se bloquer sur un  $u_2$ , ensuite le morceau  $u_2 u_1 u_0$  vers la gauche jusqu'à se bloquer sur  $u_3$ , etc. En continuant ainsi, on trouve que

$$V = u_{m_1} u_{m_1-1} \cdots u_2 u_1 u_0 V''.$$

Si  $V'' \in \text{TL}_n$  alors on a terminé. Sinon, on peut appliquer le raisonnement qu'on vient d'appliquer sur  $V$  mais sur  $V''$  cette fois. On obtient donc, après un nombre fini d'étapes :

$$V = (u_{m_1} u_{m_1-1} \cdots u_2 u_1 u_0)(u_{m_2} u_{m_2-1} \cdots u_2 u_1 u_0) \cdots (u_{m_k} u_{m_k-1} \cdots u_2 u_1 u_0)W.$$

où  $W \in \text{TL}_n$  peut être mis en forme de Jones de Temperley-Lieb. Il est utile de remarquer que  $m_i \geq 1, \quad \forall i \geq 1$ . En effet, la relation  $u_0^2 = \beta_2 u_0$  impliquerait que le mot ne serait pas réduit si ce n'était pas le cas. Il ne reste plus qu'à montrer que  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1}$ . La condition  $0 \leq m_1$  est triviale. On suppose qu'il existe  $1 \leq i \leq k$  tel que  $m_i \geq m_{i+1}$ . Si  $m_{i+1} \neq 1$  on peut alors permuter le générateur  $u_{m_{i+1}}$  vers la gauche jusqu'à le «bloquer» sur  $u_{m_{i+1}} u_{m_{i+1}-1} u_{m_{i+1}}$ , qu'on peut remplacer par  $u_{m_{i+1}}$ . Ainsi, le mot original n'est pas réduit, ce qui est une contradiction. Si  $m_{i+1} = 1$ , alors, on peut utiliser l'identité  $u_1 u_0 u_1 = \beta_1 u_1$  pour réduire le mot  $V$  afin d'obtenir, encore une fois, une contradiction. Ainsi, on a bien que  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1}$ .  $\square$

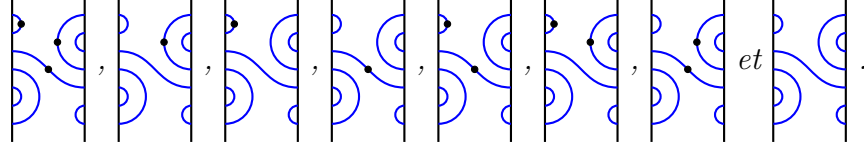
Soit maintenant  $D$  un  $n$ -diagramme de Temperley-Lieb. Un lien  $l$  est dit *décorable* si ce lien répond à l'une des deux conditions suivantes : (i)  $l$  est un arc extérieur supérieur à tout lien transversal ; (ii)  $l$  est le lien transversal supérieur de  $D$ . Autrement dit, un lien peut être décoré si et seulement celui-ci peut être déformé de manière continue de sorte à être en contact avec la face supérieure du diagramme. Par exemple, dans le diagramme suivant, seuls les liens en bleu pâle sont décorables :



Un  $n$ -diagramme décoré est un  $n$ -diagramme de Temperley-Lieb pouvant avoir une et une seule décoration  $\bullet$  sur chacun de ses liens décorables.

**Définition 1.2.4.** L'ensemble des  $n$ -diagrammes décorés sera dénoté par  $D_n^\bullet$ .

**Exemple 1.2.5.** Les diagrammes suivants sont tous les 7-diagrammes décorés provenant du diagramme (1.2.3).

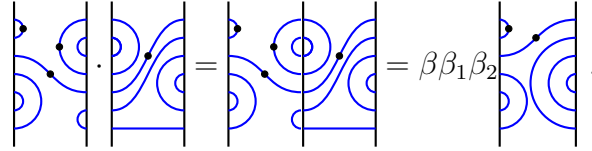


Comme on l'avait fait précédemment pour  $\text{TL}_n$ , on construit un espace vectoriel ayant pour base  $D_n^\bullet$ . On munit l'espace vectoriel ainsi formé d'une opération de concaténation similaire à celle définie à la section 1.1. Chaque fois que plus que  $k$  décorations  $\bullet$  se trouvent sur le même lien,  $k - 1$  d'entre elles sont effacées et un facteur  $\beta_2^{k-1}$  multiplie le diagramme. Si  $l$  boucles intérieures décorées sont produites, celles-ci sont effacées et remplacées par un facteur  $\beta_1^l$ .

**Définition 1.2.6.** L'espace vectoriel ayant pour base  $D_n^\bullet$  muni de l'opération discutée ci-haut sera noté  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

Il est facile de montrer que cette opération confère une structure d'algèbre associative, unifière à  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Voici un exemple pour illustrer comment multiplier deux diagrammes de  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

**Exemple 1.2.7.**



**Remarque 1.2.8.** Il est important de remarquer que l'opération ci-haut est bien définie, puisque seuls les liens décorables peuvent devenir décorés dans la concaténation de diagrammes.

Il a été mentionné plus haut que, dans le cas de l'algèbre de Temperley-Lieb, il existe un isomorphisme entre  $\text{TL}_n$  et l'algèbre des  $n$ -diagrammes. Ceci est équivalent à dire que les équations (1.1.1) sont toutes satisfaites par les diagrammes  $U_i$  et qu'aucune autre relation n'est satisfaite par les  $U_i$  et que ceux-ci forment un ensemble générateurs pour l'ensemble des  $n$ -diagrammes. Un résultat semblable existe pour  $\text{TLb}_n$ . C'est ce que la section suivante démontre; plus exactement, en tant que  $\mathbb{C}$ -algèbres,  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

### 1.3. Isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres pour $\text{TLb}_n$

#### 1.3.1. Isomorphisme entre $\text{TLb}_n$ et la représentation diagrammatique

En addition aux diagrammes  $U_i$  définies à la section 1.1, il est possible d'introduire un nouveau diagramme (qui sera ultérieurement associé au générateur  $u_0$  de  $\text{TLb}_n$ ) qui assure l'ajout possible d'une décoration sur les  $n$ -diagrammes :



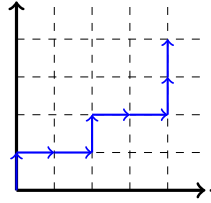
$$U_0 = \begin{array}{|c} \hline \bullet \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}$$

Les relations  $U_0^2 = \beta_2 U_0$  et  $U_1 U_0 U_1 = \beta_1 U_1$  sont facilement vérifiées. Il s'agit des deux dernières relations de (1.2.1). On veut maintenant s'assurer que les diagrammes  $U_i$  (pour  $0 \leq i \leq n-1$ ), engendrent l'algèbre  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  et que les relations (1.2.1) sont les seules relations auxquelles obéissent les  $U_i$ . Dans un premier temps, la dimension de  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  sera calculée à l'aide d'un argument combinatoire inspiré d'un argument similaire pour  $\text{TL}_n(\beta)$  (voir [5]). Dans un deuxième temps, on montrera que cette dimension coïncide avec celle de  $\text{TLb}_n$ . L'existence d'un épimorphisme  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \rightarrow D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  assurera alors l'existence de l'isomorphisme cherché.

**Définition 1.3.1.** Une  $(n, m)$ -trajectoire croissante est une marche sur  $\mathbb{Z}^2$  de  $(0, 0)$  à  $(n, m)$  sur laquelle chaque « pas » est soit vers la droite, soit vers le haut.

**Exemple 1.3.2.** Un exemple de  $(4, 4)$ -trajectoire croissante est illustré à la figure 1.1.

FIGURE 1.1. Une  $(4, 4)$ -trajectoire croissante



**Lemme 1.3.3.** Le nombre de  $(n, m)$ -trajectoires croissantes est  $\binom{n+m}{n}$ .

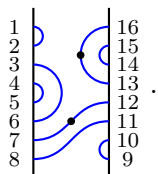
**DÉMONSTRATION.** Soit une  $(n, m)$ -trajectoire croissante. Le nombre total de « pas » est  $n + m$ . Or,  $n$  de ces  $n + m$  pas doivent être choisis vers la droite.  $\square$

**Définition 1.3.4.** Une portion de trajectoire reliant deux points situés sur la diagonale est une sous-trajectoire. Une sous-trajectoire sera dite simple si elle ne possède aucune sous-trajectoire.

**Proposition 1.3.5.** La dimension de  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est  $\binom{2n}{n}$ .

**DÉMONSTRATION.** L'idée de la démonstration est de montrer que les  $n$ -diagrammes décorés sont en bijection avec les  $(n, n)$ -trajectoires croissantes. Le nombre total de ces dernières étant  $\binom{2n}{n}$  en vertu du lemme précédent. Soit  $D$  un  $n$ -diagramme décoré. Il sera utile de numéroter

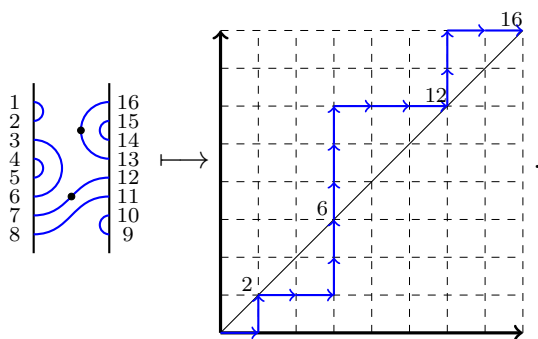
de 1 à  $2n$  les points sur  $D$  de la manière indiquée dans l'exemple suivant :



À chaque  $n$ -diagramme-décoré  $D$  est associée une  $(n,n)$ -trajectoire croissante de la manière suivante :

- (1) Si un lien (décorable) décoré est ouvert au site  $i$ , alors le  $i^e$  pas est vers le haut. Soit  $j$  le site où se referme ce lien. Alors, pour tout site  $k$  entre les sites  $i$  et  $j$ , si le site  $k$  ouvre un lien, le  $k^e$  pas est vers le haut, et vers la droite si  $k$  ferme un lien. Le  $j^e$  pas est vers la droite.
- (2) Si un lien *décorable* non décoré est ouvert au site  $i$ , alors la procédure précédente est renversée : les mouvements vers le haut deviennent des mouvements vers la droite et réciproquement.

Par exemple, avec le diagramme ci-haut, cette procédure donne :



Cette application, qui sera notée  $\phi$ , est bien définie car le nombre total de liens (décorés ou non) est  $n$ , le nombre d'ouvertures de lien est donc  $n$  et le nombre de fermetures de lien est aussi  $n$ . La trajectoire ainsi construite joint bel et bien les points  $(0,0)$  et  $(n,n)$ . De plus, la trajectoire est croissante par construction.

Afin de montrer que cette application est bijective, il suffit de trouver l'application inverse. Il importe tout d'abord de remarquer que les extrémités de chaque sous-trajectoire simple correspondent aux points délimitant un lien décorable via l'application  $\phi$ . Soit  $\psi$  définie de la manière suivante : donnée une  $(n,n)$ -trajectoire, on associe un  $n$ -diagramme décoré de la manière suivante :

- (1) Chaque sous-trajectoire simple supérieure à la diagonale est renversée sous la diagonale.
- (2) En suivant la trajectoire dans le sens inverse et en construisant le diagramme dans le sens inverse, c'est-à-dire de  $2n$  à 1, chaque pas vers le bas donne lieu à un lien qui s'ouvre, et chaque pas vers la gauche un lien qui se ferme.

- (3) Les portions de diagrammes correspondant à des sous-trajectoires initialement au-dessus de la diagonale sont décorées.

Il est clair que  $\psi$  et  $\phi$  sont des fonctions inverses. Ceci complète la démonstration que  $\dim D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2) = \binom{2n}{n}$ .  $\square$

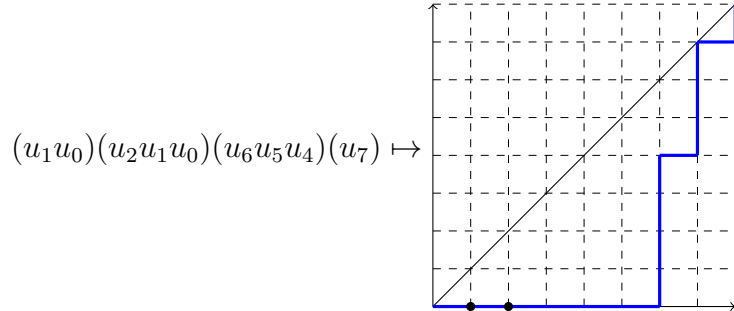
On va maintenant montrer que le même résultat tient pour la dimension de  $\text{TLb}_n$ . Pour ce faire, on utilise la forme de Jones (proposition 1.2.2), en comptant le nombre de mots de Jones différents pouvant être construits. Puisque ceux-ci constituent un ensemble générateur du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{TLb}_n$ , le nombre de mots de Jones donnera une borne supérieure pour  $\dim \text{TLb}_n$ .

**Proposition 1.3.6.** *La dimension de  $\text{TLb}_n$  est plus petite ou égale à  $\binom{2n}{n}$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons un mot de Jones de  $\text{TLb}_n$  de la forme  $(u_{m_1} u_{m_1-1} \cdots u_2 u_1 u_0) \cdots (u_{m_2} u_{m_2-1} \cdots u_2 u_1 u_0) \cdots (u_{m_k} u_{m_k-1} \cdots u_2 u_1 u_0) (u_{m_{k+1}} u_{m_{k+1}-1} \cdots u_{l_1}) \cdots (u_{m_{k+r}} u_{m_{k+r}-1} \cdots u_{l_r})$ . À un tel mot, il est possible d'associer la trajectoire croissante sous la diagonale possédant  $k+1$  arrêts sur l'axe horizontal :

$$(0,0) \rightarrow (m_1,0) \rightarrow (m_2,0) \rightarrow \cdots \rightarrow (m_k, 0) \rightarrow (u_{m_{k+1}}, 0) \rightarrow (m_{k+1}, l_1) \rightarrow (m_{k+2}, l_1) \rightarrow (m_{k+2}, l_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (m_{k+r}, l_r) \rightarrow (n, l_r) \rightarrow (n,n).$$

Chaque arrêt sur l'axe horizontal, à l'exception du dernier, sera identifié à un  $\bullet$  sur l'axe horizontale. Par exemple, dans  $\text{TLb}_8$  :



La trajectoire sera toujours sous la diagonale puisque dans une même parenthèse d'un mot de Jones, l'indice du  $u_i$  le plus à gauche est plus grand ou égal à l'indice du  $u_i$  le plus à droite. Réciproquement, à une telle trajectoire, il est possible d'associer un mot de Jones de  $\text{TLb}_n$  : en lisant le diagramme à partir de l'origine jusqu'au point  $(n,n)$ , on associe aux coordonnées  $(j,k)$  des bases de chaque flèche horizontale,  $j, k < n$ , ( $j \geq k$  car la trajectoire est sous la diagonale) une parenthèse  $(u_j u_{j-1} \dots u_k)$ . Cette procédure donnera toujours un mot de Jones de  $\text{TLb}_n$  et est bien l'inverse de la procédure illustrée ci-haut. Ceci établit alors une bijection entre les mots de Jones de  $\text{TLb}_n$  et les trajectoires croissantes, sous la diagonale, possédant entre 0 et  $n-1$  arrêts sur l'axe horizontal. Il suffit donc de compter le nombre de ces dernières.

Soit  $0 \leq l \leq n - 1$  un entier. Considérons maintenant des trajectoires légèrement différentes de celles étudiées jusqu'à présent : les trajectoires reliant le point  $(n - l, 0)$  au point  $(n, n)$ . Notons  $\epsilon_{k,l}^n$  le nombre de ces trajectoires croissantes sous la diagonale possédant *exactement*  $k$  décorations  $\bullet$  ( $0 \leq k \leq l$ ) sur l'axe horizontal. Un exemple d'une telle trajectoire est illustré à la figure 1.2. Le nombre  $\epsilon_{0,l}^n$  est égal au nombre de trajectoires croissantes inférieures ou égales à la diagonale reliant le point  $(n - l, 0)$  à  $(n, n)$  (sans décorations sur l'axe horizontal). En lisant la trajectoire « à l'envers » (c'est-à-dire en considérant le point  $(n, n)$  comme le point de départ), on voit que leur nombre est aussi égal à celui des  $(n, l)$ -trajectoires croissantes inférieures ou égales à la diagonale. Il est connu que ce nombre est  $\binom{n+l}{l} - \binom{n+l}{l-1}$  (voir [5, 1]).

On trouve la relation de récurrence suivante :

$$\epsilon_{k,l}^n = \epsilon_{k,l-1}^n + \epsilon_{k-1,l-1}^n \quad (1.3.1)$$

avec les conditions initiales  $\epsilon_{0,l}^n = \binom{n+l}{l} - \binom{n+l}{l-1}$  et  $\epsilon_{0,0}^n = 1$ . On trouve donc qu'une solution est donnée par  $\epsilon_{k,l}^n = \binom{n+l}{l-k} - \binom{n+l}{l-k-1}$ . Les conditions initiales sont faciles à vérifier et la récurrence se résout comme suit :

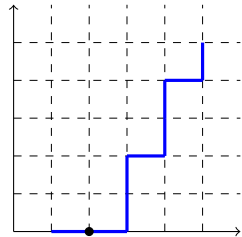
$$\begin{aligned} \epsilon_{k,l-1}^n + \epsilon_{k-1,l-1}^n &= \binom{n+l-1}{l-k-1} - \binom{n+l-1}{l-k-2} + \binom{n+l-1}{l-k} - \binom{n+l-1}{l-k-1} \\ &= \binom{n+l-1}{l-k} + \binom{n+l-1}{l-k-1} - \binom{n+l-1}{l-k-1} - \binom{n+l-1}{l-k-2} \\ &= \binom{n+l}{l-k} - \binom{n+l}{l-k-1}. \end{aligned}$$

On a donc bien  $\epsilon_{k,l}^n = \binom{n+l}{l-k} - \binom{n+l}{l-k-1}$ . Le nombre total de trajectoires est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \epsilon_{k,n}^n &= \sum_{k=0}^n \left( \binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-k-1} \right) \\ &= \binom{2n}{-1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Puisque la dimension de  $\text{TLb}_n$  est plus petite ou égale au nombre de mot de Jones, le résultat est prouvé.  $\square$

FIGURE 1.2. Un élément de  $\epsilon_{1,4}^5$



**Proposition 1.3.7.** *L'application  $\theta : \text{TLb}_n \rightarrow D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  définie par  $u_i \mapsto U_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , est un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres.*

DÉMONSTRATION. L'application  $\theta : u_i \mapsto U_i$  étant un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres (puisque les relations (1.2.1) sont toutes vérifiées par les diagrammes  $U_i$ ), il reste alors à montrer que  $\theta$  est surjectif. Dans ce cas, on aura forcément que  $\dim \text{TLb}_n \geq \dim D_n^\bullet = \binom{2n}{n}$ . Mais la proposition 1.3.6 a montré que  $\dim \text{TLb}_n \leq \binom{2n}{n}$ . La seule option est que  $\dim \text{TLb}_n = \binom{2n}{n}$ . La preuve de la surjectivité de  $\theta$  a été déplacée à l'annexe B.  $\square$

Ceci termine la preuve que  $D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n$ . Ainsi, les générateurs  $u_i$  de  $\text{TLb}_n$  s'identifient aux diagrammes  $U_i$ . Ce résultat permet de traiter l'algèbre  $\text{TLb}_n$  avec la méthode diagrammatique discutée ci-haut lorsque celle-ci facilite les calculs. Cette représentation diagrammatique s'avère extrêmement pratique pour parvenir à certains résultats, particulièrement dans le prochain chapitre où la cellularité des algèbres de Temperley-Lieb à une frontière est démontrée.

### 1.3.2. Changements de bases

Il existe un changement de base extrêmement pratique lorsque  $\beta_2 \neq 0$ . Tout d'abord, considérons la remarque suivante.

**Remarque 1.3.8.** *Dans [16] et [17], il est noté que l'introduction d'un générateur  $u'_0 = \beta_2 - u_0$  permet de donner une nouvelle caractérisation diagrammatique de  $\text{TLb}_n$ . En effet,*

$$u'_0{}^2 = \beta_2^2 - 2\beta_2 u_0 + u_0^2 = \beta_2^2 - \beta_2 u_0 = \beta_2 u'_0$$

et

$$u_1 u'_0 u_1 = u_1 (\beta_2 - u_0) u_1 = \beta_2 u_1^2 - u_1 u_0 u_1 = (\beta_2 \beta - \beta_1) u_1.$$

Les relations ci-haut sont les seules relations satisfaites par le générateur  $u'_0$ , et les  $u_i$  et  $u'_0$  engendrent l'algèbre  $\text{TLb}_n$ . Par symétrie, l'algèbre engendrée par les générateurs  $1, u'_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  admet alors elle aussi une présentation diagrammatique qu'il est possible de noter par l'ajout d'une boîte :

$$U'_0 = \left[ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \end{array} \right].$$

Il est donc possible de considérer les diagrammes de  $\text{TLb}_n$  tels que tout lien décorable est décoré, soit d'un  $\bullet$ , soit d'un  $\square$ .

**Définition 1.3.9.** *L'ensemble des  $n$ -diagrammes tels que tout lien décorable est décoré d'un  $\bullet$  ou d'un  $\square$  sera noté  $\mathcal{D}_n$ .*

**Exemple 1.3.10.**

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right\} \right\}.$$

Il est à noter que  $u'_0 u_0 = 0$  et que, si  $\beta_2 \neq 0$ ,  $\frac{1}{\beta_2}(u_0 + u'_0) = 1$ . Ces relations se représentent diagrammatiquement de la manière suivante : soient  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_n$ , alors,

- (1) si, dans la concaténation  $D_1 \cdot D_2$  un  $\bullet$  et un  $\square$  se touchent, alors  $D_1 \cdot D_2 = 0$  ;
- (2) si  $D_1$  et  $D_2$  sont identiques à l'exception qu'un des liens décorables de  $D_1$ , appelons-le  $l$  possède un  $\bullet$  et que le même lien  $l$  de  $D_2$  possède un  $\square$ , alors  $\frac{1}{\beta_2}(D_1 + D_2)$  donnera un diagramme identique à l'exception que le nouveau lien  $l$  ne sera pas décoré. Le résultat sera nul si  $\beta_2 = 0$ .

**Exemple 1.3.11.** (1)

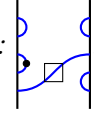
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = 0.$$

(2)

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} = \beta_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}.$$

**Définition 1.3.12.** Un pseudo-diagramme est un diagramme de  $D_n^\bullet$  auquel on a ajouté  $r \geq 0$  décorations  $\square$  sur certains de ses liens décorables non décorés, mais pas forcément tous.

**Exemple 1.3.13.** L'élément suivant est un pseudo-diagramme :



**Proposition 1.3.14.** Si  $\beta_2 \neq 0$ , alors l'ensemble  $\mathcal{D}_n$  est une base de  $\text{TLb}_n$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $D \in \mathcal{D}_n$  et considérons l'application qui consiste à enlever tous les  $\square$  présents dans  $D$ . Cette application entre  $\mathcal{D}_n$  et  $D_n^\bullet$  est bijective et donc  $\text{Card } \mathcal{D}_n = \text{Card } D_n^\bullet$ . Il s'ensuit que si on arrive à montrer qu'il est possible de construire n'importe quel diagramme de  $D_n^\bullet$  à partir de combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{D}_n$ , la proposition sera démontrée, car alors  $\mathcal{D}_n$  sera un ensemble générateur ayant la même cardinalité qu'une base de  $\text{TLb}_n$ . Pour voir que tout diagramme de  $D_n^\bullet$  s'obtient par une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{D}_n$  on procédera par induction sur  $k$ , le nombre de liens décorables non décorés sur un (pseudo)-diagramme. Il est vrai que tout pseudo-diagramme avec  $k = 1$  lien décorable non décoré s'écrit comme une telle combinaison linéaire, en vertu de la relation  $\begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \beta_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}$  (voir l'exemple 1.3.11). Soit  $D$  un pseudo-diagramme avec  $k$  liens décorables non décorés et supposons le résultat vrai pour  $k - 1$ . Le diagramme  $D$  s'écrit comme la somme de deux (pseudo)-diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  possédant chacun  $k - 1$  liens décorables non décorés, via l'identité  $\begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \end{array} = \beta_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}$ . Par induction,  $D_1$  et  $D_2$  s'écrivent comme une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{D}_n$ , il en va donc de même pour  $D$ . □

Le dernier résultat décrit l'existence d'isomorphismes entre (*a priori*) différentes algèbres  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Ces isomorphismes sont trivialement vrais en tant que  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, la partie non triviale venant de la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre induite par les équations (1.2.1).

**Proposition 1.3.15.** *Soit  $\beta, \beta_1$  et  $\beta_2 \in \mathbb{C}$ , alors il existe des isomorphismes de  $\mathbb{C}$ -algèbres :*

$$(1) \varphi_1 : \text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\sim} \text{TLb}_n(\beta, \beta\beta_2 - \beta_1, \beta_2) ;$$

$$(2) \varphi_2 : \text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\sim} \text{TLb}_n(\beta, \frac{\beta_1}{\beta_2}, 1) \text{ pour } \beta_2 \in \mathbb{C}^* .$$

DÉMONSTRATION. On définit  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\varphi_3$  comme suit :

(1) Dans les générateurs  $u_i$  (pour  $1 \leq i \leq n-1$ ) et  $u'_0$  de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ , un isomorphisme est donné par  $\varphi_1 : u_i \mapsto u_i$  et  $u'_0 \mapsto \bar{u}_0$  où  $\bar{u}_0$  représente l'élément de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta\beta_2 - \beta_1, \beta_2)$  qui est tel que  $\bar{u}_0^2 = (\beta\beta_2 - \beta_1)\bar{u}_0$ .

(2) De la même manière, pour  $1 \leq i \leq n-1$  gardons les mêmes générateurs  $u_i$ , mais considérons plutôt  $\frac{u_0}{\beta_2}$ . L'isomorphisme  $\varphi_2$  affirmé ci-haut est évident.

On vérifie aisément que ce sont des morphismes d'algèbres à l'aide des relations (1.2.1). Ces applications étant clairement bijectives, ce sont des isomorphismes.  $\square$

Lorsque  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  il existe aussi un automorphisme  $\psi : \text{TLb}_n(\beta, 0, 0) \rightarrow \text{TLb}_n(\beta, 0, 0)$  donné par :

$$\begin{cases} u_i & \mapsto u_{n-i} \text{ si } 1 \leq i \leq n-1 \\ u_0 & \mapsto u_0. \end{cases}$$

Il est important de remarquer que si  $\beta_2 = 0$ , alors  $\mathcal{D}_n$  n'est pas une base, puisque dans ce cas,  $u_0 = -u'_0$  et les deux types de décorations sont donc « linéairement dépendantes ». Pour cette raison, on choisira de travailler dans la base initiale  $D_n^\bullet$  dans ce cas. Les auteurs de [16] et [17] ont choisi de travailler sur  $\mathcal{D}_n$ , mais leur analyse ne comptait que le cas  $\beta_2 = 1$ . Cette symétrie dans la présentation diagrammatique de  $\text{TLb}_n$  s'avérera particulièrement utile dans les chapitres 3 et 4. L'analyse du cas  $\beta_2 = 0$  devra à ce moment être faite séparément.





# Chapitre 2

---

## Algèbres cellulaires

Dans ce chapitre est introduite une classe importante d'algèbres : les algèbres *cellulaires*. Plusieurs familles d'algèbres importantes en théorie de la représentation en sont des exemples. Entre autres, il est connu que certaines algèbres de Iwahori-Hecke (voir [9] et [14]), les algèbres de Brauer et les algèbres de Temperley-Lieb  $TL_n$ , définies à la section 1.1, sont des algèbres cellulaires, voir [9]. Une preuve de la cellularité de cette dernière classe d'algèbre est donnée à la section 2.1. La définition donnée ici est sur un corps, mais le cas général où les scalaires sont éléments d'un anneau est traité dans [9] et [14]. Pour le reste de la section,  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif ce qui assure, entre autres, que  $\mathcal{A}$  possède une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'avantage des algèbres cellulaires est l'existence d'une « base cellulaire » particulièrement bien adaptée à la théorie de la représentation de ces algèbres. Le chapitre se divise en trois sections. Dans la première, les définitions et propriétés élémentaires sont données. Dans la seconde il est démontré que  $TLb_n$  est une algèbre cellulaire et la structure des modules cellulaires est révélée. Enfin, la dernière section rassemble plusieurs propriétés structurelles des algèbres cellulaires : morphismes entre modules cellulaires, modules principaux et projectifs, modules irréductibles, conditions de semisimplicité, etc.

### 2.1. Définitions et exemples

Cette section débute avec la définition d'une algèbre cellulaire telle qu'introduite dans [9]. Quelques exemples suivront par la suite afin de rendre la définition plus transparente. Les modules cellulaires sont ensuite définis et une forme bilinéaire est introduite sur ceux-ci, le tout en suivant grossièrement la présentation de [9].

**Définition 2.1.1** (Algèbre cellulaire). *Une algèbre cellulaire sur  $\mathbb{K}$  est la donnée d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre associative et unifère  $\mathcal{A}$  et d'une structure cellulaire  $(\Lambda, \mathcal{M}(\cdot), \preceq, C(\cdot, \cdot), *)$  où :*

- (A1) *L'ensemble  $\Lambda$  est muni d'un ordre partiel  $\preceq$  et pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mathcal{M}(\lambda)$  est un ensemble fini. La fonction  $C$  est une fonction injective de  $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}(\lambda) \times \mathcal{M}(\lambda) \rightarrow \mathcal{A}$  telle que l'image de  $C$  est une base de  $\mathcal{A}$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour  $R, S \in \mathcal{M}(\lambda)$  on écrit  $C_{R,S}^\lambda$  pour l'image de  $(R, S)$  par  $C$ .*

(A2)  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est une fonction anti-involutive, c'est-à-dire  $(ab)^* = b^*a^*$ ,  $\mathbb{K}$ -linéaire telle que  $C_{R,S}^\lambda{}^* = C_{S,R}^\lambda$ , pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $S,R \in \mathcal{M}(\lambda)$ .

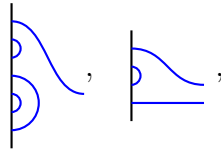
(A3) Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $R,S \in \mathcal{M}(\lambda)$  et  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$aC_{R,S}^\lambda \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(T,R)C_{T,S}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{<\lambda}}, \quad (2.1.1)$$

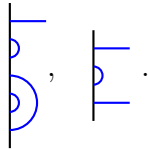
où  $\phi_a(T,R) \in \mathbb{K}$  ne dépend pas de  $S$  et  $\mathcal{A}^{<\lambda}$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\{C_{R',S'}^\mu \mid \mu \prec \lambda, R',S' \in \mathcal{M}(\mu)\}$ .

**Remarque 2.1.2.** Puisque les  $C_{R,S}^\lambda$  forment une base de  $\mathcal{A}$ , il est suffisant, par linéarité, de vérifier l'axiome (A3) sur ceux-ci, c'est-à-dire qu'il est suffisant de vérifier que  $C_{R,S}^\mu C_{U,V}^\lambda \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{C_{R,S}^\mu}(T,U)C_{T,V}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{<\lambda}}$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ ,  $\forall U,V \in \mathcal{M}(\lambda)$ , et  $\forall R,S \in \mathcal{M}(\mu)$ .

Un exemple naturel d'algèbre cellulaire est donné par la famille des algèbres de Temperley-Lieb. Pour montrer cela, quelques définitions seront nécessaires. Un  $(n,k)$ -demi-diagramme, avec  $n \geq k$  et  $n \equiv k \pmod{2}$ , est défini comme le côté gauche seulement d'un  $n$ -diagramme à  $k$  liens transversaux. De manière équivalente, un  $(n,k)$ -demi-diagramme est obtenu de la manière suivante : on trace une ligne verticale sur laquelle  $n$  points sont identifiés. Parmi ces points,  $k$  d'entre eux ne sont reliés à aucun autre point, et les  $\frac{n-k}{2}$  points restants sont reliés par des arcs, le tout sans former d'intersections. Par exemple, voici un  $(7,1)$ -demi-diagramme et un  $(4,2)$ -demi-diagramme (obtenus des 7 et 4-diagrammes de la section 1.1 respectivement) :



qu'on identifie aux deux demi-diagrammes suivants :



Les liens correspondant à des liens transversaux (par exemple, le lien supérieur dans le  $(7,1)$ -diagramme ci-haut) seront appelés des *défauts*, les autres resteront des *arcs*. Si  $d_1$  et  $d_2$  sont des  $(n,k)$ -demi-diagrammes, dénotons  $|d_1 \ d_2|$  l'unique  $n$ -diagramme obtenu en plaçant face à face  $d_1$  et le demi-diagramme « renversé » obtenu à partir de  $d_2$  et en reliant, sans former d'intersection, les défauts de  $d_1$  et  $d_2$  de manière à produire  $k$  liens transversaux. Par exemple,

$$\text{si } d_1 = \begin{array}{|c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{ et } d_2 = \begin{array}{|c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \text{ alors } |d_1 \ d_2| = \begin{array}{|c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}. \quad (2.1.2)$$

À la remarque 1.1.5 il a été noté que le nombre d'arcs ne pouvait pas augmenter sous l'opération de concaténation de  $n$ -diagrammes. Avec la notation précédente, il est possible de préciser cette observation.

**Remarque 2.1.3.** *Considérons des  $(n,k)$ -demi-diagrammes  $d_1$  et  $d_2$  ainsi que des  $(n,k')$ -demi-diagrammes  $d_3$  et  $d_4$ . Alors,  $|d_1 \ d_2| \cdot |d_3 \ d_4| = \beta^l |d'_1 \ d'_4|$  où  $l$  est le nombre de « boucles intérieures » produites dans la concaténation et où  $d'_1$  et  $d'_4$  sont obtenus de  $d_1$  et  $d_4$  respectivement en fermant, peut-être, en paires certains défauts de  $d_1$  et  $d_4$ .*

Tous les outils nécessaires pour montrer que  $\mathbb{T}\mathbb{L}_n$  est cellulaire ont maintenant été introduits.

**Proposition 2.1.4.** *L'algèbre  $\mathbb{T}\mathbb{L}_n$  est une algèbre cellulaire.*

**DÉMONSTRATION.** (A1) Soit l'ensemble  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{N} \mid 0 \leq \lambda \leq n \text{ et } \lambda \equiv n \pmod{2}\}$  muni de l'ordre usuel sur les entiers. Pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mathcal{M}(\lambda)$  est donné par l'ensemble des  $(n,\lambda)$ -demi-diagrammes. La fonction  $C$  est définie sur deux demi-diagrammes  $d_1$  et  $d_2$  de  $\mathcal{M}(\lambda)$  par  $C(d_1, d_2) = |d_1 \ d_2|$ . Il est évident que cette fonction est injective. Puisque tout diagramme de  $\mathbb{T}\mathbb{L}_n$  est de la forme  $|d_1 \ d_2|$ , avec  $d_1, d_2 \in \mathcal{M}(\lambda)$  pour un certain  $\lambda \in \Lambda$ ,  $C$  a comme image une base de  $\mathbb{T}\mathbb{L}_n$ .

(A2) La fonction  $*$  est définie de la manière suivante : soit  $D$  un  $n$ -diagramme et soient  $d_1, d_2$  les demi-diagrammes tels que  $D = |d_1 \ d_2|$ . Alors  $*(D) = |d_2 \ d_1|$  (c'est donc la réflexion autour de l'axe vertical situé au centre du diagramme). En pratique, il sera utile d'utiliser  $D^*$  au lieu de  $*(D)$ . La fonction  $*$  est ensuite étendue linéairement. La condition  $(ab)^* = b^*a^*$  se vérifie aisément pour  $a$  et  $b$  des  $n$ -diagrammes et le reste découle par linéarité.

(A3) D'après la remarque 2.1.2, il est suffisant de vérifier (A3) sur les éléments de base de  $\mathbb{T}\mathbb{L}_n$ , c'est-à-dire sur les  $n$ -diagrammes. Or, d'après la remarque 2.1.3, si  $D = |d_1 \ d_2| \in \mathcal{M}(\mu)$  et  $D' = |d_3 \ d_4| \in \mathcal{M}(\lambda)$ , alors  $D \cdot D' = \beta^l |d'_1 \ d'_4|$ . Il y a alors deux cas possibles :

- $d'_4$  possède moins de défauts que  $d_4$  (donc si certains défauts ont été fermés en paire), alors  $D \cdot D' \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}^{<\lambda}}$ ,
- sinon  $d'_4 = d_4$  et alors  $D \cdot D' = \beta^l |d'_1 \ d_4|$  avec  $d'_1 \in \mathcal{M}(\lambda)$ .

Dans les deux cas, l'équation (2.1.1) est vérifiée.

□

Soit maintenant  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire et  $\Sigma \subseteq \Lambda$ . L'ensemble  $\Sigma$  sera appelé un *idéal* de  $\Lambda$  si, pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , si  $\mu \in \Lambda$  est tel que  $\mu \preceq \sigma$ , alors  $\mu \in \Sigma$ . Ainsi, le sous-espace vectoriel  $\mathcal{A}^\Sigma = \text{Sp}_{\mathbb{K}}\{C_{R,S}^\sigma \mid \sigma \in \Sigma, R, S \in M(\sigma)\}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$  (au sens usuel de la théorie des algèbres) en vertu de (A3). Pour  $\lambda \in \Lambda$ , on notera l'idéal  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}\{\mu \in \Lambda \mid \mu \preceq \lambda\}$  de  $\mathcal{A}$  par

$\mathcal{A}^{\preceq \lambda}$ . Supposons que l'ordre  $\preceq$  sur  $\Lambda$  est total ; il existe alors une filtration par idéaux de  $\mathcal{A}$  :

$$0 \subset \mathcal{A}^{\preceq \lambda_1} \subset \mathcal{A}^{\preceq \lambda_2} \subset \dots \subset \mathcal{A}^{\preceq \lambda_n} = \mathcal{A}. \quad (2.1.3)$$

Les quotients successifs de 2.1.3 donnent une suite de  $\mathcal{A}$ -modules isomorphes à  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}\{C_{S,T}^\lambda \mid S, T \in \mathcal{M}(\lambda)\}$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Par exemple, si  $\mathcal{A} = \mathbb{T}L_n$ , la filtration  $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \dots \prec \lambda_n$  est remplacée par  $0 < 2 < \dots < n-2 < n$  si  $n$  est pair et par  $1 < 3 < \dots < n-2 < n$  si  $n$  est impair. Alors, pour  $\lambda \in \mathbb{N}$  entre 0 et  $n$ , les  $\mathcal{A}^{\preceq \lambda}$  dans (2.1.3) sont les sous-espaces engendrés par les diagrammes de Temperley-Lieb possédant  $\lambda$  liens transversaux ou moins.

Revenons maintenant aux axiomes de la définition 2.1.1. Les axiomes (A2) et (A3) entraînent les deux résultats élémentaires suivants :

**Lemme 2.1.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire,  $\lambda \in \Lambda$  et  $R, S, U, V \in \mathcal{M}(\lambda)$ . Alors,*

- (1)  $C_{R,S}^\lambda a \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{a^*}(T, S) C_{R,T}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}$  où  $\phi_{a^*}(T, S) \in \mathbb{K}$  ne dépend pas de  $R$ .
- (2)  $C_{R,S}^\lambda C_{U,V}^\lambda \equiv \phi(S, U) C_{R,V}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}$  où  $\phi(S, U) \in \mathbb{K}$  ne dépend ni de  $R$ , ni de  $V$ .

**DÉMONSTRATION.** (1) D'après l'équation (2.1.1),  $a^* C_{S,R}^\lambda \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{a^*}(T, S) C_{T,R}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}$ .

L'axiome (A2) donne alors  $C_{R,S}^\lambda a \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{a^*}(T, S) C_{R,T}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}$ .

- (2) Il suffit de combiner la démonstration précédente et l'axiome (A3). En effet, d'après (A3),

$$C_{R,S}^\lambda C_{U,V}^\lambda \equiv \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{C_{R,S}^\lambda}(T, U) C_{T,V}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}. \quad (2.1.4)$$

D'autre part, en vertu du résultat précédent,

$$C_{R,S}^\lambda C_{U,V}^\lambda \equiv \sum_{T' \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{C_{V,U}^\lambda}(T', S) C_{R,T'}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{\prec \lambda}}. \quad (2.1.5)$$

Comme aucun des  $C_{T,V}^\lambda$  et  $C_{R,T'}^\lambda$  apparaissant dans les côtés droits de (2.1.4) et (2.1.5) ne sont dans  $\mathcal{A}^{\prec \lambda}$ , on a l'égalité  $\sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{C_{R,S}^\lambda}(T, U) C_{T,V}^\lambda = \sum_{T' \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{C_{V,U}^\lambda}(T', S) C_{R,T'}^\lambda$ . De plus, l'ensemble  $\{C_{X,Y}^\lambda \mid X, Y \in \mathcal{M}(\lambda)\}$  est constitué de vecteurs linéairement indépendants en vertu de l'axiome (A1). Or, le seul élément de base se retrouvant à la fois dans (2.1.4) et (2.1.5) est  $C_{R,V}^\lambda$ . Il faut donc que tous les coefficients dans les équations (2.1.4) et (2.1.5) soient nuls, sauf ceux de  $C_{R,V}^\lambda$  qui seront égaux. Ainsi,  $\phi_{C_{V,U}^\lambda}(V, S) = \phi_{C_{R,S}^\lambda}(R, U) = \phi(S, U)$ . □

Le lemme suivant est aussi une conséquence des axiomes de la définition 2.1.1. Il s'avérera très utile par la suite.

**Lemme 2.1.6.** *Soit  $\lambda, \mu \in \Lambda$ ,  $S, T \in \mathcal{M}(\lambda)$  et  $R, V \in \mathcal{M}(\mu)$ . Alors,  $C_{S,T}^\lambda C_{R,V}^\mu \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{A}^{\prec \mu}} \Rightarrow \mu \preceq \lambda$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, d'après (A3)  $C_{S,T}^\lambda C_{R,V}^\mu \equiv \sum_{V' \in \mathcal{M}(\mu)} \phi_a(V', R) C_{V',V}^\mu \pmod{\mathcal{A}^{<\mu}}$  (où  $a = C_{S,T}^\lambda$ ). En utilisant le lemme 2.1.5, on trouve également que  $C_{S,T}^\lambda C_{R,V}^\mu \equiv \sum_{S' \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_{b^*}(S', T) C_{S',S'}^\lambda \pmod{\mathcal{A}^{<\lambda}}$  où  $b = C_{R,V}^\mu$ . Supposons alors que  $\mu \not\preceq \lambda$ . Si l'un des  $\phi_a(V', R)$  était non nul, alors l'équation en  $\lambda$  serait contredite puisque  $C_{S,T}^\lambda C_{R,V}^\mu$  doit tomber dans  $\mathcal{A}^{<\lambda}$ .  $\square$

La définition suivante concerne la structure de module cellulaire. L'existence des modules cellulaires découle directement des axiomes de la définition 2.1.1 et s'avère extrêmement utile pour l'étude des représentations irréductibles et projectives indécomposables d'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$ .

**Définition 2.1.7.** Soit  $\lambda \in \Lambda$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{V}_\lambda$  est défini comme le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant pour base  $\{C_S | S \in \mathcal{M}(\lambda)\}$ . L'espace  $\mathcal{V}_\lambda$  est muni d'une  $\mathcal{A}$ -action de la manière suivante :

$$aC_S = \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(T, S) C_T \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad (2.1.6)$$

où  $\phi_a(T, S)$  est définie à l'équation (2.1.1).

Cette action confère à  $\mathcal{V}_\lambda$  une structure de  $\mathcal{A}$ -module. Il suit de la définition du module cellulaire que pour  $S, T, R \in \mathcal{M}(\lambda)$  on a  $C_{S,T}^\lambda C_R = \phi(T, R) C_S$  d'après le lemme (2.1.5). De plus, si  $\lambda, \mu \in \Lambda$  et si  $S, T \in \mathcal{M}(\lambda)$  et  $R \in \mathcal{M}(\mu)$ , alors  $C_{S,T}^\lambda C_R \neq 0 \Rightarrow \mu \preceq \lambda$  d'après (2.1.6). Nous supposons pour la suite que  $\preceq$  est un ordre total sur  $\Lambda$ . Considérons les quotients successifs de (2.1.3) :

$$\mathcal{Q}_{\lambda_i} = \mathcal{A}^{\preceq \lambda_i} / \mathcal{A}^{\preceq \lambda_{i-1}}. \quad (2.1.7)$$

**Proposition 2.1.8.** Pour  $\lambda \in \Lambda$ , avec  $\Lambda$  totalement ordonné, en tant que  $\mathcal{A}$ -modules (à gauche) :

$$\mathcal{Q}_\lambda \simeq \bigoplus_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \mathcal{V}_\lambda, \quad (2.1.8)$$

où l'action de  $\mathcal{A}$  sur la somme directe est définie par composante.

DÉMONSTRATION. Il est clair que (2.1.8) est vrai en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, puisque les dimensions sont égales. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{Q}_\lambda &\rightarrow \bigoplus_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \mathcal{V}_\lambda \\ [C_{S,T}^\lambda] &\mapsto (C_S)_T, \end{aligned}$$

où  $(\cdot)_T$  désigne l'entrée indexée par  $T \in \mathcal{M}(\lambda)$  dans la somme directe et  $[C_{S,T}^\lambda]$  dénote la classe modulo  $\mathcal{A}^{<\lambda}$ , donne une bijection entre les bases de  $\mathcal{Q}(\lambda)$  et de  $\bigoplus_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} \mathcal{V}_\lambda$ . Soit  $a \in \mathcal{A}$ ; d'après (2.1.1) on a que  $aC_{S,T}^\lambda = \sum_{R \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(R, S) C_{R,T} + \alpha$  où  $\alpha \in \mathcal{A}^{<\lambda}$ . Il s'ensuit que :

$$\psi([aC_{S,T}^\lambda]) = \psi\left(\sum_{R \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(R, S) C_{R,T}\right) = \sum_{R \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(R, S) \psi(C_{R,T})$$

$$= \sum_{R \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(R, S)(C_R)_T.$$

D'autre part,  $a\psi([C_{S,T}]) = a(C_S)_T = (aC_S)_T$ . Or, d'après (2.1.6), on a que  $aC_S = \sum_{R \in \mathcal{M}(\lambda)} \phi_a(R, S)C_R$ . Cette application définit donc bien un isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules.  $\square$

**Remarque 2.1.9.** *En vertu de la proposition 2.1.8, les modules cellulaires associés à un  $\lambda \in \Lambda$  donné sont les modules donnés par  $\mathcal{V}_\lambda \simeq \text{Sp}_{\mathbb{K}}\{C_{S,T}^\lambda \mid S \in \mathcal{M}(\lambda)\}$  pour un  $T \in \mathcal{M}(\lambda)$  fixé. La structure du module  $\mathcal{V}_\lambda$  est indépendante du choix de  $T$  et celui-ci peut donc être ignoré. On retrouve alors les  $\mathcal{V}_\lambda$  de la définition 2.1.7.*

L'une des propriétés importantes des modules cellulaires est l'existence d'une forme bilinéaire naturelle sur ceux-ci. Cette forme bilinéaire (plus précisément son radical) s'avérera cruciale pour la suite de ce mémoire. L'étude détaillée de cette forme fera l'objet du chapitre 3 ce qui rendra possible, au chapitre 4, le calcul des modules irréductibles de l'algèbre  $\text{TLb}_n$ .

**Définition 2.1.10.** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire et soit  $\lambda \in \Lambda$ . La forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}_\lambda \times \mathcal{V}_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$  est définie linéairement sur  $\mathcal{V}_\lambda$  par  $\langle C_S, C_T \rangle = \phi(S, T)$ , où  $\phi(S, T)$  est le scalaire introduit au 2.1.5.*

**Remarque 2.1.11.** *Soit  $R, S$  et  $T \in \mathcal{M}(\lambda)$ . Alors,  $C_{S,T}^\lambda C_R = \phi(T, R)C_S = \langle C_T, C_R \rangle C_S$ .*

Afin d'illustrer plus clairement les définitions 2.1.7 et 2.1.10 un exemple sera utile. Soit  $\mathcal{A} = \text{TL}_n$  et considérons les espaces vectoriels  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\{(n, \lambda)\text{-demi-diagrammes}\}$ , pour  $\lambda \equiv n \pmod{2}$ . On en fait un  $\mathcal{A}$ -module de la manière suivante : la multiplication par un élément de  $\text{TL}_n$  est donnée par concaténation, en suivant la même règle que pour  $\text{TL}_n$ , à la différence près que lorsque la concaténation diminue le nombre de défauts, alors le résultat est nul (on vérifie facilement que cette action induit bien une structure de  $\mathcal{A}$ -module sur l'espace vectoriel  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}\{(n, \lambda)\text{-demi-diagrammes}\}$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ).

**Exemple 2.1.12.** (1) Soient  $D = \text{diagramme} \in \text{TL}_7$  et  $d_1 = \text{diagramme}$ ,  $d_2 = \text{diagramme}$  et  $d_3 = \text{diagramme}$  des  $(7,1)$ -demi-diagrammes. Alors, dans le module  $\mathcal{V}_3$  de  $\text{TL}_n$  :

$$D \cdot (d_1 + d_2) = \text{diagramme} + \text{diagramme} = \beta \text{diagramme} + \beta \text{diagramme} = 2\beta d_3.$$

(2) Mais,

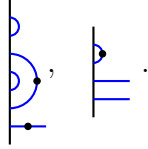
$$\text{diagramme} \cdot \text{diagramme} = \text{diagramme} = 0.$$



Les propriétés structurelles élémentaires des algèbres cellulaires (modules irréductibles, modules projectifs indécomposables, etc.) seront données à la section 2.3 et seront essentielles pour la suite. La section suivante montre que les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière  $\text{TLb}_n$  possèdent, à l'instar de  $\text{TL}_n$ , une structure naturelle d'algèbre cellulaire.

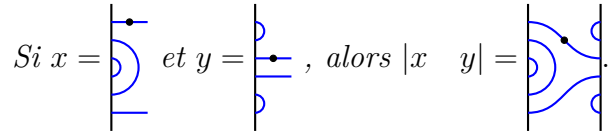
## 2.2. Cellularité de $\text{TLb}_n$

De manière similaire aux algèbres de Temperley-Lieb originales, les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière possèdent aussi des demi-diagrammes associés. Ceux-ci sont définis de la même manière que pour Temperley-Lieb. Plus précisément, un  $(n,k)$ -demi-diagramme décoré est le côté gauche d'un  $n$ -diagramme décoré possédant  $k$  liens transversaux. Par exemple, voici un  $(7,1)$ -demi-diagramme décoré et un  $(4,2)$ -demi-diagramme décoré, respectivement :



Soit  $d$  un  $(n,k)$ -demi-diagramme décoré. Si  $k \geq 1$ , il y a deux cas possibles : (i) le défaut supérieur de  $d$  est décoré (comme dans le  $(7,1)$ -demi-diagramme ci-haut); (ii) le défaut supérieur de  $d$  n'est pas décoré (comme dans le  $(4,2)$ -demi-diagramme ci-haut). Il sera utile de noter provisoirement l'ensemble de tous les  $(n,k)$ -demi-diagrammes tombant dans le cas (i) ci-haut par  $M_k^-$  et l'ensemble de ceux tombant dans le cas (ii) par  $M_k^+$ . Les raisons de ce choix « + » et « - » deviendront claires par la suite. Pour  $d_1$  et  $d_2$  des demi-diagrammes de  $M_k^+$  on définit  $|d_1 \ d_2|$  de la même manière que pour  $\text{TL}_n$ . Si  $d_1, d_2 \in M_k^-$  alors  $|d_1 \ d_2|$  est le diagramme possédant un  $\bullet$  sur le lien transversal supérieur tel qu'illustré dans l'exemple suivant :

**Exemple 2.2.1.**



Il est utile de remarquer que si  $D$  est un  $n$ -diagramme décoré possédant  $k$  liens transversaux, alors il est toujours possible d'écrire  $D$  sous la forme  $|d_1 \ d_2|$  où  $d_1$  et  $d_2$  appartiennent au même ensemble  $M_k^+$  ou  $M_k^-$ . Ici, on impose que le signe soit négatif si et seulement si  $D$  admet (au moins) un lien transversal et que le lien transversal supérieur possède un  $\bullet$ . Le signe est positif dans tous les autres cas. De plus, la décomposition de  $D$  en une paire de demi-diagrammes  $(d_1, d_2)$ , appartenant au même ensemble  $M_k^+$  ou  $M_k^-$ , est unique. Il existe alors une bijection :

$$D_n^\bullet \leftrightarrow \{|d_1 \ d_2| \mid d_1, d_2 \in M_k^+ \text{ ou } M_k^- \text{ pour } k \equiv n \pmod{2} \text{ et } 0 \leq k \leq n\}. \quad (2.2.1)$$



La condition que  $d_1$  et  $d_2$  appartiennent au même ensemble  $M_k^+$  ou  $M_k^-$  est cruciale pour préserver l'unicité des deux demi-diagrammes. Dans le cas contraire, l'unicité affirmée ci-haut ne tient plus. En effet, dans l'exemple 2.3.1, en retirant l'un des  $\bullet$ , soit celui sur le demi-diagramme  $x$ , soit celui sur le demi-diagramme  $y$ , l'unicité est perdue. Comme la remarque 2.1.3 était très utile pour démontrer la cellularité de  $\mathbf{TL}_n$ , il serait convenable de la généraliser à  $\mathbf{TLb}_n$ . Évidemment, par le même argument que pour  $\mathbf{TL}_n$ , le nombre de liens transversaux ne peut pas augmenter lors de la concaténation d'éléments de  $D_n^\bullet$ . De plus, un lien transversal décoré ne peut pas devenir un lien transversal non décoré par concaténation de diagrammes. La remarque 2.2.2 précise ces observations.

**Remarque 2.2.2.** *Soit  $d_1, d_2$  des  $(n, k)$ -demi-diagrammes décorés, et  $d_3, d_4$  des  $(n, l)$ -demi-diagrammes décorés. Alors,  $|d_1 \ d_2| \cdot |d_3 \ d_4| = \beta^p \beta_1^q \beta_2^r |d'_1 \ d'_4|$  où  $d'_1$  et  $d'_4$  sont obtenus de  $d_1$  et  $d_4$  respectivement en fermant, peut-être, en paires certains défauts de  $d_1$  et  $d_4$  et en ajoutant, peut-être, des  $\bullet$  sur certains des liens qui étaient initialement des défauts de  $d_1$  et  $d_4$ .*

On comprendra que dans la remarque précédente,  $p, q$  et  $r$  sont des entiers non négatifs. Il est maintenant possible de démontrer que  $\mathbf{TLb}_n$  possède une structure naturelle d'algèbre cellulaire.

**Proposition 2.2.3.** *L'algèbre  $\mathbf{TLb}_n$  est une algèbre cellulaire avec  $\Lambda = \{-n, -n + 2, -n + 4, \dots, n - 4, n - 2, n\}$ .*

DÉMONSTRATION. (A1) Soit  $k \in \Lambda$  tel que  $k > 0$ , alors  $\mathcal{M}(k) = M_k^+$  et  $\mathcal{M}(-k) = M_k^-$ .

Évidemment, dans le cas où  $n$  est pair, il y a le cas  $k = 0$  à considérer. Dans ce cas,  $\mathcal{M}(0)$  est l'ensemble des  $(n, 0)$ -demi-diagrammes. La fonction  $C$  est définie comme pour  $\mathbf{TL}_n$  : pour  $d_1, d_2 \in \mathcal{M}(k)$ , alors  $C_{d_1, d_2}^k = |d_1 \ d_2|$ . Puisque, d'après l'équation (2.2.1), tout diagramme décoré  $D$  s'écrit sous la forme  $D = |d_1 \ d_2|$ ,  $d_1$  et  $d_2 \in \mathcal{M}(k)$  pour un certain  $k \in \Lambda$ , l'image de la fonction  $C$  est bien une base de  $\mathbf{TLb}_n$ . Il suit aussi de (2.2.1) que  $C$  est injective. La relation  $\prec$  est définie sur  $\Lambda$  par :  $k \prec l$  si et seulement si  $|k| < |l|$  ou ( $|k| = |l|$  et  $k < 0$ ). La relation  $\preceq$  est alors un ordre *total* sur  $\Lambda$  :

$$\begin{cases} 0 \prec -2 \prec 2 \prec -4 \prec \dots \prec n + 2 \prec -n \prec n \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -1 \prec 1 \prec -3 \prec 3 \prec \dots \prec n + 2 \prec -n \prec n \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

(A2) La fonction  $*$  est définie de manière analogue à  $\mathbf{TL}_n$ , c'est-à-dire, si  $D = |d_1 \ d_2|$ , alors  $D^* = |d_2 \ d_1|$ . Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une anti-involution sur les éléments de base (le reste découle par linéarité) : si  $a = |d_1 \ d_2| \in D_n^\bullet$  et  $b = |d_3 \ d_4| \in D_n^\bullet$ , alors  $(ab)^* = (|d_1 \ d_2| \cdot |d_3 \ d_4|)^* = \beta^p \beta_1^q \beta_2^r |d'_1 \ d'_4|^* = \beta^p \beta_1^q \beta_2^r |d'_4 \ d'_1| = |d_4 \ d_3| \cdot |d_2 \ d_1| = b^* a^*$ .

(A3) D'après la remarque 2.1.2, il est suffisant de vérifier (A3) sur les éléments de base de  $\text{TLb}_n$ , c'est-à-dire sur les  $n$ -diagrammes décorés. Or, pour  $d_1, d_2 \in \mathcal{M}(l)$  et  $d_3, d_4 \in \mathcal{M}(k)$  des demi-diagrammes décorés, si  $D = |d_1 \ d_2|$  et  $D' = |d_3 \ d_4|$ , alors  $D \cdot D' = \beta^p \beta_1^q \beta_2^r |d'_1 \ d'_4|$  comme dans la remarque 2.2.2. Il y a alors trois cas possibles pour  $D \cdot D'$  :

- la concaténation diminue le nombre de défauts de  $d_4$ , dans ce cas  $d'_4$  possède moins de défauts que  $d_4$  et  $D \cdot D' \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}^{-k}}$  ;
- la concaténation conserve le nombre de défauts de  $d_4$  mais ajoute un  $\bullet$  sur le défaut supérieur de  $d_4$  (qui était initialement non décoré), ainsi  $D \cdot D' \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}^{-k}}$  ;
- la concaténation laisse fixe le nombre de défauts de  $d_4$  et n'ajoute pas de  $\bullet$  sur les liens de  $d_4$ . Alors,  $D \cdot D' = \beta^p \beta_1^q \beta_2^r |d'_1 \ d'_4|$ .

Dans tous les cas, (A3) est satisfait. □

**Définition 2.2.4.** Soit  $\mathcal{A} = \text{TLb}_n$ ,

- (1) l'ensemble  $\mathcal{M}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , sera noté  $\mathcal{M}_{n,\lambda}$  ;
- (2) le module cellulaire  $\mathcal{V}_{n,\lambda}$ , avec  $\lambda \in \Lambda$ , est donné par  $\text{Sp}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{n,\lambda}$  avec l'action induite de la multiplication dans  $\mathcal{A}$ .

La preuve de la proposition 2.1.8 montre que les modules cellulaires d'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$  sont isomorphes aux sous-modules  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}\{C_{S,T}^\lambda \mid S \in \mathcal{M}(\lambda)\} \simeq \mathcal{V}_\lambda$  de  $\mathcal{Q}_\lambda$ , avec  $T \in \mathcal{M}(\lambda)$  fixé. Lorsque  $\mathcal{A} = \text{TLb}_n$ , ces derniers modules obéissent aux mêmes lois de concaténation que les éléments de l'algèbre  $\text{TLb}_n$ , sauf qu'une diminution du nombre de défauts entraîne un résultat nul. Soit  $D \in \text{TLb}_n$ , alors l'action de  $D$  sur un demi-diagramme  $d \in \mathcal{M}_{n,\lambda}$  par un élément  $D \in D_n^\bullet$  est calculée comme suit :

- (1) tout d'abord, la concaténation de  $D$  et de  $d$  est effectuée, ensuite ;
- (2) si  $D \cdot d$  diminue le nombre de défauts de  $d$ , alors  $D \cdot d = 0$  ;
- (3) si  $D \cdot d$  ajoute un  $\bullet$  sur un défaut (décorable) initialement non décoré, alors  $D \cdot d = 0$  ;
- (4) sinon, le résultat sera donné par la même règle de concaténation de diagrammes que  $\text{TLb}_n$ .

**Exemple 2.2.5.** Soient  $D = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \text{TLb}_7$ ,  $d_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \mathcal{V}_{7,-1}$ ,  $d_2 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \mathcal{V}_{7,+3}$  et  $d_3 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \mathcal{V}_{7,+1}$ . Alors,

(1)

$$D \cdot d_1 = \left[ \text{diagram} \right] = \beta \beta_2^2 \left[ \text{diagram} \right],$$

(2)

$$D \cdot d_2 = \left[ \text{diagram} \right] = 0,$$

(3)

$$D \cdot d_3 = \left[ \text{diagram} \right] = 0.$$

Avec ces définitions, il est maintenant possible de calculer d'une manière simple la forme bilinéaire sur les modules cellulaires de  $\text{TLb}_n$ . Pour  $x, y \in \mathcal{M}_{n,\lambda}$ ,  $\langle x, y \rangle_{n,\lambda}$  est calculée de la manière suivante :

- (1) tout d'abord, on effectue la concaténation de  $x$  « renversée » et de  $y$  ;
- (2) ensuite, si deux défauts de  $x$  (ou de  $y$ ) sont reliés en paire, alors  $\langle x, y \rangle = 0$  ;
- (3) si l'un des défauts (décorables) non décorés de  $x$  ou  $y$  devient décoré, alors  $\langle x, y \rangle = 0$  ;
- (4) dans le cas contraire, chaque fois que deux  $\bullet$  se touchent, la relation  $\bullet\bullet = \beta_2 \bullet$  est utilisée ;
- (5) si  $j$  boucles intérieures *non décorées* sont formées, alors un facteur  $\beta^j$  apparaîtra dans l'opération  $\langle x, y \rangle$  ;
- (6) si  $j$  boucles intérieures *décorées* sont formées, alors elles sont remplacées par un facteur  $\beta_1^j$ .

**Exemple 2.2.6.** Si  $x = \left[ \text{diagram} \right]$  et  $y = \left[ \text{diagram} \right] \in \mathcal{V}_{5,\lambda}$ , où  $\lambda = \pm 1$  et le  $*$  indique que le défaut est

$$\text{décoré si } \lambda = -1 \text{ et ne l'est pas si } \lambda = 1, \text{ alors } \langle x, y \rangle = \left[ \text{diagram} \right] = \begin{cases} \beta_2 & \text{si } \lambda = -1 ; \\ 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

L'étape (2) dans les règles pour le calcul de la forme bilinéaire ci-haut a pour conséquence la remarque suivante.

**Remarque 2.2.7.** Soient  $k \neq 0$  et  $x, y \in \mathcal{M}_{n,k}$ , alors  $\langle x, y \rangle = 0$  sauf si tous les défauts de  $x$  sont reliés (peut-être par l'entremise d'un ou plusieurs arcs) à un défaut de  $y$  (et

réciroquement), en particulier, le défaut supérieur de  $x$  doit être relié au défaut supérieur de  $y$ .

D'après la remarque 1.3.8, l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est engendrée par  $u'_0, u_1, \dots, u_n$ . En agissant avec les générateurs  $u'_0, u_1, \dots, u_n$  sur les éléments de  $\mathcal{M}_{n,k}$ ,  $-n \leq k \leq n$ , il est donc possible de considérer les  $(n,k)$ -demi-diagrammes ayant tous leurs arcs décorables décorés, soit d'un  $\bullet$ , soit d'un  $\square$ . Rappelons que  $\curvearrowright + \curvearrowleft = \beta_2 \curvearrowright$ .

**Définition 2.2.8.** L'ensemble des  $(n,k)$ -demi-diagrammes,  $-n \leq k \leq n$ , tels que tout arc décorable est décoré sera noté  $\mathfrak{M}_{n,k}$ .

**Exemple 2.2.9.** Avec les notations précédentes,

$$\mathfrak{M}_{3,1} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \end{array} \right\}, \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \square \end{array} \right\} \text{ et } \mathfrak{M}_{3,-1} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \right\}, \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \end{array} \right\}.$$

**Proposition 2.2.10.** Si  $\beta_2 \neq 0$ , les ensembles  $\mathfrak{M}_{n,k}$ ,  $-n \leq k \leq n$ , sont des bases des modules cellulaires  $\mathcal{V}_{n,k}$ .

DÉMONSTRATION. L'argument est identique à la preuve de 1.3.14.  $\square$

Remarquons que dans  $\mathcal{V}_{n,k}$  (pour  $k \geq 1$ ) un défaut muni d'un  $\square$  ne fait qu'ajouter un facteur multiplicatif  $\beta_2$ . En effet, si  $n = 3$  et  $k = 1$ , par exemple, on voit que :

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \end{array} = \beta_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} = \beta_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array}.$$

De sorte que dans  $\mathcal{V}_{n,k}$  avec  $k \geq 1$ , les défauts obéissent à la règle :

$$\frac{1}{\beta_2} \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \end{array} = \text{---}. \quad (2.2.3)$$

Il est donc possible de réécrire la base  $\mathfrak{M}_{3,1}$  ci-haut de la manière suivante :

$$\mathfrak{M}_{3,1} = \left\{ \frac{1}{\beta_2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \end{array}, \frac{1}{\beta_2} \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \end{array}, \frac{1}{\beta_2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \square \end{array} \right\}.$$

Lorsque  $\beta_2 = 0$ , alors  $u'_0 = -u_0$ , et les constructions précédentes sont inutiles. Mais dans ce cas, on a la proposition suivante.

**Proposition 2.2.11.** Si  $\beta_2 = 0$ , alors  $\mathcal{V}_{n,+k} \simeq \mathcal{V}_{n,-k}$  pour tout  $k \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons l'application  $\xi : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,-k}$  définie par  $d \mapsto d^\bullet$  où  $d^\bullet$  est le diagramme  $d$  sur lequel on a ajouté un  $\bullet$  sur le défaut supérieur. Par exemple, si  $d = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \end{array}$ , alors  $d^\bullet = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array}$  (en fait l'image de  $\mathfrak{M}_{3,1}$  par  $\xi$  est  $\mathfrak{M}_{3,-1}$ ). Supposons que  $d$  admet son défaut supérieur en position  $l$ . Pour  $i \geq 1$ , il est clair que  $\xi(u_i d) = u_i \xi(d)$ . En effet, l'action de  $u_i$  sur  $d$  est identique à l'action de  $u_i$  sur  $d^\bullet$  à l'exception du  $\bullet$  supplémentaire apparaissant dans  $d^\bullet$ . Or, faire l'ajout du  $\bullet$  avant ou après d'avoir agité avec  $u_i$  ne change rien au résultat final. Finalement,  $\xi(u_0 d) = u_0 \xi(d)$  si  $l \geq 2$ , puisque dans ce cas  $u_0$  agira comme l'identité sur  $d$  et sur  $d^\bullet$  mais en décorant l'arc en position 1 (tant sur  $d$  que sur  $d^\bullet$ ). Si  $l = 1$ , alors  $u_0 d = 0$  puisque le défaut supérieur devient alors décoré, mais  $u_0 d^\bullet = \beta_2 d^\bullet = 0$ .  $\square$

Il est important de remarquer que cette application ne définit pas un morphisme de  $\text{TLb}_n$ -modules pour  $\beta_2 \neq 0$ . Par exemple, le module  $\mathcal{V}_{n,n}$  est engendré par un seul élément  $v$  (l'unique  $(n,n)$ -demi-diagramme). Or,  $u_i v = 0$  pour  $0 \leq i \leq n-1$ , car pour  $1 \leq i \leq n-1$  deux défauts sont fermés en paire et pour  $i = 0$  un  $\bullet$  est ajouté sur le défaut supérieur. Mais si  $\beta_2 \neq 0$ , alors  $u_0 v' \neq 0$ , où  $v'$  est l'unique  $(n, -n)$ -demi-diagramme, ainsi  $\mathcal{V}_{n,n}$  et  $\mathcal{V}_{n,-n}$  ne peuvent pas être isomorphes. La forme bilinéaire sur  $\mathcal{V}_{n,k}$  sera dorénavant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$ . Terminons la section avec un lemme sur les conditions de dégénérescence de la forme bilinéaire.

**Lemme 2.2.12.** *La forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$  est identiquement nulle si et seulement si l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

- (1)  $\beta_2 = 0$  et  $k \leq -1$  ;
- (2)  $\beta = \beta_1 = k = 0$ .

DÉMONSTRATION. Si  $k \neq 0$  alors en appliquant la méthode illustrée à exemple 2.2.6, on montre qu'il existe  $x, y \in \mathcal{V}_{n,k}$  tels que  $\langle x, y \rangle = \begin{cases} \beta_2 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k > 0 \end{cases}$ . Le résultat est nul si et seulement si  $k < 0$  et  $\beta_2 = 0$ . Dans ce cas, pour tout  $x, y \in \mathcal{M}_{n,k}$  tels que le défaut supérieur de  $x$  est relié au défaut supérieur de  $y$ ,  $\langle x, y \rangle = \beta_2^r \beta_1^s \beta_1^t = 0$ , puisque  $r \geq 1$ . Si  $k = 0$ , alors pour tout  $x, y \in \mathcal{M}_{n,k}$ ,  $\langle x, y \rangle = \beta^k \beta_1^l \beta_2^m$ , où au moins un des deux entiers  $k$  ou  $l$  est  $\geq 1$ , ainsi,  $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv 0$  si  $\beta = \beta_1 = 0$ . D'autre part, il est toujours possible de trouver  $x, y, x', y' \in \mathcal{V}_{n,0}$  tels que  $\langle x, y \rangle = \beta$  et  $\langle x', y' \rangle = \beta_1$ , ce qui montre que  $\langle \cdot, \cdot \rangle \not\equiv 0$  si  $\beta \neq 0$  ou  $\beta_1 \neq 0$ .  $\square$

### 2.3. Principaux résultats sur les algèbres cellulaires

Dans cette section sont d'abord donnés quelques résultats fondamentaux sur les algèbres cellulaires et leurs modules cellulaires associés. Tous ces résultats, à l'exception du corollaire 2.3.4 et la proposition 2.3.11 (ainsi que des résultats qui l'accompagnent) peuvent être trouvés dans [9] ou dans [14]. Les premiers résultats concernent la forme bilinéaire introduite à la définition 2.1.10, entre autres l'étude de son radical. Ensuite, quelques résultats généraux sur les modules cellulaires sont donnés. Le chapitre se termine avec quatre résultats très importants sur la structure des algèbres cellulaires, plus exactement les théorème 2.3.15 et 2.3.16, la proposition 2.3.18 et la proposition 2.3.19.

Il sera maintenant utile de considérer les  $\mathcal{A}$ -modules droits  $\mathcal{V}_\lambda^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\lambda, \mathbb{C})$  (voir annexe A). Soit  $\{C_T^* \mid T \in \mathcal{M}(\lambda)\}$  la base duale à celle des  $C_T$  de  $\mathcal{V}_\lambda$ . L'application linéaire  $\varphi_\lambda$  :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : \mathcal{V}_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\lambda^* &\rightarrow \mathcal{Q}_\lambda \\ C_S \otimes C_T^* &\mapsto [C_{S,T}^\lambda], \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où  $[\cdot]$  représente la classe modulo  $\mathcal{A}^{\leftarrow\lambda}$  d'un élément et  $\mathcal{Q}_\lambda$  est défini à l'équation (2.1.7), est un isomorphisme de  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -bimodules (voir [9]). Ainsi, il sera possible d'identifier l'élément  $C_{S,T}^\lambda$  de  $\mathcal{A}$  avec  $C_S \otimes C_T^*$ . Il va sans dire que cette application généralise la fonction  $C^\lambda$  des sections précédentes à toute combinaison linéaire d'éléments indexés par  $\mathcal{M}(\lambda)$ , pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

**Exemple 2.3.1.** Si  $\mathcal{A} = \text{TL}_n$ , alors

$$\text{Si } S = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} \text{ et } T = \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array}, \text{ alors } \varphi_\lambda(C_S \otimes C_T^*) = [C_{S,T}^\lambda] = \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} \right].$$

Si pour  $x \in \mathcal{V}_\lambda$  la fonctionnelle  $\langle x, \cdot \rangle$  est nulle sur  $\mathcal{V}_\lambda$ , alors on écrira  $\langle x, \cdot \rangle \equiv 0$ . De même, si pour tout  $x \in \mathcal{V}_\lambda$  on a  $\langle x, \cdot \rangle \equiv 0$ , alors on écrira  $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv 0$ .

**Définition 2.3.2.** L'ensemble  $\mathcal{R}_\lambda = \{x \in \mathcal{V}_\lambda \mid \langle x, \cdot \rangle \equiv 0\}$  est le radical de la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{V}_\lambda$ .

Il sera utile de remarquer que puisque la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est invariante,  $\mathcal{R}_\lambda$  est un  $\mathcal{A}$ -sous-module de  $\mathcal{V}_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Les propriétés de la fonction  $\varphi_\lambda$  ci-haut et la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{V}_\lambda$  entraînent une suite de résultats sur la structure des  $\mathcal{V}_\lambda$ .

**Proposition 2.3.3.** Soit  $\lambda \in \Lambda$ ,

- (1) si  $x, y, z \in \mathcal{V}_\lambda$ , alors  $\varphi_\lambda(x \otimes y^*)z = \langle y, z \rangle x$  ;
- (2) soit  $\lambda \in \Lambda$ , si  $\langle \cdot, \cdot \rangle \not\equiv 0$  sur  $\mathcal{V}_\lambda$ , alors  $\mathcal{V}_\lambda$  est cyclique avec comme générateur n'importe quel  $z \in \mathcal{V}_\lambda$  tel que  $z \notin \mathcal{R}_\lambda$ .

**DÉMONSTRATION.** (1) Puisque les deux côtés de l'équation affirmée ci-haut sont linéaires en  $x, y$  et  $z$ , il est suffisant de vérifier l'équation pour  $x = C_R, y = C_S$  et  $z = C_T$ . Mais alors, ceci découle de la remarque 2.1.11.

- (2) Soit un tel  $z \in \mathcal{V}_\lambda \setminus \mathcal{R}_\lambda$ . Alors il existe un  $y \in \mathcal{V}_\lambda$  tel que  $\langle y, z \rangle = 1$ . Donc, d'après (1),  $\varphi_\lambda(x \otimes y^*)z = \langle y, z \rangle x = x$  et ce,  $\forall x \in \mathcal{V}_\lambda$ . Donc,  $\forall x \in \mathcal{V}_\lambda$ , il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $az = x$ .

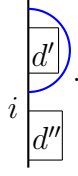
□

**Corollaire 2.3.4.** Si  $\mathcal{A} = \text{TLb}_n$ , les modules  $\mathcal{V}_{n,k}$  sont cycliques pour toutes valeurs des paramètres  $\beta, \beta_1$  et  $\beta_2$ .

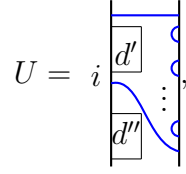
**DÉMONSTRATION.** Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k} \not\equiv 0$ , alors ceci découle de la proposition 2.3.3. Selon le lemme 2.2.12, il reste deux cas à considérer :

- (1) Si  $\beta_2 = 0$ , alors  $\mathcal{V}_{n,+k} \simeq \mathcal{V}_{n,-k}$  d'après la proposition 2.2.11, de sorte que  $\mathcal{V}_{n,-k}$  est cyclique puisque  $\mathcal{V}_{n,k}$  l'est, d'après 2.3.3.

- (2) Si  $k = 0$  (et  $\beta = \beta_1 = 0$ ), alors on montre que  $v = \begin{array}{c} \text{b} \\ \vdots \\ \text{b} \end{array}$  est un générateur de  $\mathcal{V}_{n,0}$ . Soit en effet  $d \in \mathcal{M}_{n,0}$  et supposons que  $d$  est de la forme :



où  $d'$  et  $d''$  sont des demi-diagrammes n'ayant que des arcs (non décorés dans le cas de  $d'$ ). Posons



il est alors aisé de voir que  $U \cdot v = d$ .

□

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire, posons maintenant  $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \cdot, \cdot \rangle \neq 0 \text{ sur } \mathcal{V}_\lambda\}$ .

**Corollaire 2.3.5.** *Soit  $\lambda \in \Lambda_0$ ,*

- (1)  $\mathcal{V}_\lambda$  est un  $\mathcal{A}$ -module indécomposable ;
- (2)  $\mathcal{V}_\lambda / \mathcal{R}_\lambda$  est un  $\mathcal{A}$ -module irréductible.

**DÉMONSTRATION.** (1) Supposons que  $\mathcal{V}_\lambda = M \oplus N$ . Supposons qu'il existe  $x \in M$  tel que  $x \notin \mathcal{R}_\lambda$ . Alors  $\mathcal{A}x = \mathcal{V}_\lambda$  d'après la proposition 2.3.3 et donc  $N = 0$ . Donc,  $\forall x \in M$ , on a que  $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{V}_\lambda$ . Mais alors, il existe  $y \in N$  tel que  $y \notin \mathcal{R}_\lambda$ . Ainsi, par le même argument,  $M = 0$ .

- (2) Dans ce cas, tout  $z + \mathcal{R}_\lambda$  non nul engendre  $\mathcal{V}_\lambda / \mathcal{R}_\lambda$  d'après la proposition 2.3.3.

□

Le résultat suivant peut se trouver dans [14]. Nous en fournissons toutefois un preuve vu l'étonnante simplicité de celle-ci :

**Proposition 2.3.6.** (1) *Soit  $\lambda \in \Lambda_0$ , alors tout sous-module propre de  $\mathcal{V}_\lambda$  est inclus dans  $\mathcal{R}_\lambda$ .*

- (2) *En particulier, pour  $\lambda \in \Lambda_0$ ,  $\mathcal{R}_\lambda$  est le radical de Jacobson de  $\mathcal{V}_\lambda$ .*

**DÉMONSTRATION.** (1) Soit  $N \subseteq \mathcal{V}_\lambda$  un sous-module et  $x \in N$  tel que  $x \notin \mathcal{R}_\lambda$ . Alors, d'après la proposition 2.3.3,  $x$  est un générateur de  $\mathcal{V}_\lambda$ . Il faut donc que  $N = \mathcal{V}_\lambda$ .

- (2) Puisque  $\mathcal{V}_\lambda/\mathcal{R}_\lambda$  est irréductible,  $\mathcal{R}_\lambda$  est maximal dans  $\mathcal{V}_\lambda$ . Mais le radical (de Jacobson) d'un module est l'intersection de tous ses sous-modules maximaux; or d'après (1),  $\mathcal{R}_\lambda$  est l'unique sous-module maximal de  $\mathcal{V}_\lambda$ .

□

Nous enchaînons maintenant avec trois importants résultats sur la nature des morphismes entre modules cellulaires.

**Proposition 2.3.7.** *Soient  $\mu, \lambda \in \Lambda$  et soit  $\theta : \mathcal{V}_\lambda \rightarrow \mathcal{V}_\mu/\mathcal{V}'$  où  $\mathcal{V}'$  est un sous-module de  $\mathcal{V}_\mu$ . Si  $\lambda \in \Lambda_0$ , alors  $\theta \neq 0 \Rightarrow \mu \preceq \lambda$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\theta : \mathcal{V}_\lambda \rightarrow \mathcal{V}_\mu/\mathcal{V}'$  un morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle \neq 0$  sur  $\mathcal{V}_\lambda$ , alors il est possible de choisir  $y, z \in \mathcal{V}_\lambda$  tels que  $\langle y, z \rangle = 1$  de sorte que  $\varphi_\lambda(x \otimes y^*)z = x$  pour tout  $x \in \mathcal{V}_\lambda$ . Alors,  $\theta(x) = \theta((x \otimes y^*)z) = (x \otimes y^*)\theta(z)$  (où  $\varphi_\lambda(x \otimes y^*)$  a été identifié à  $x \otimes y^*$  pour alléger l'écriture). Soit maintenant  $\pi : \mathcal{V}_\mu \rightarrow \mathcal{V}_\mu/\mathcal{V}'$  la projection canonique. Supposons que  $\theta \neq 0$ , alors il existe  $x \in \mathcal{V}_\lambda$  tel que  $\theta(x) = (x \otimes y^*)\theta(z) \neq 0$ . D'après le lemme 2.1.6, puisque  $\pi^{-1}(\theta(z)) \subset \mathcal{V}_\mu$ , on doit avoir  $\mu \preceq \lambda$ . □

**Corollaire 2.3.8.** *Supposons que  $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ . Les modules  $\mathcal{V}_\mu$  et  $\mathcal{V}_\lambda$  sont non isomorphes si  $\mu \neq \lambda$ .*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 2.3.7, il faut que  $\mu \preceq \lambda$  et que  $\lambda \preceq \mu$  pour que  $\mathcal{V}_\mu$  et  $\mathcal{V}_\lambda$  soient isomorphes. □

**Proposition 2.3.9.** *Si  $\lambda \in \Lambda_0$ , alors  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{V}_\lambda, \mathcal{V}_\lambda) \simeq \mathbb{K}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $y, z \in \mathcal{V}_\lambda$  tels que  $\langle y, z \rangle = 1$  et soit  $\theta$  un morphisme. Alors  $\theta(x) = \theta((x \otimes y^*)z) = (x \otimes y^*)\theta(z) = \langle y, \theta(z) \rangle x$ . Donc tout morphisme est un multiple de l'identité. □

Soit  $V$  un module d'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$  et considérons l'ensemble  $\mathcal{F}$  des formes bilinéaires sur  $V$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  est un espace vectoriel et l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et invariantes forme un sous espace vectoriel  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ . Soit  $\lambda \in \Lambda$  et  $V = \mathcal{V}_\lambda$ ; alors on sait que  $\dim \mathcal{E} \geq 1$ . La proposition suivante se propose de démontrer que  $\dim \mathcal{E} = 1$  si  $\mathcal{R}_\lambda = 0$ . Ce résultat ne figure ni dans [9], ni dans [14].

**Lemme 2.3.10.** *Si  $V$  est un module irréductible cellulaire alors le module droit  $V^*$  est irréductible.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe  $W \subset V^*$  un sous-module (droit) non trivial de  $V^*$ . Or, la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit une application linéaire de  $V$  vers son dual :

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \langle v, \cdot \rangle. \end{aligned}$$



Dans ce cas,  $\varphi^{-1}(W)$  serait alors un sous-module (gauche) non trivial de  $V$ . Ceci découle du fait que  $\varphi(a\varphi^{-1}(w)) = wa^* \in W$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $a\varphi^{-1}(w)$  est donc un élément de  $\varphi^{-1}(W)$ . Ceci entre en contradiction avec le fait que  $V$  soit irréductible.  $\square$

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire sur un corps  $\mathbb{K}$  algébriquement clos. Soit  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\mathcal{V}_\lambda$  est irréductible et tel que  $\langle \cdot, \cdot \rangle \not\equiv 0$ . Alors, l'espace des formes bilinéaires invariantes sur  $\mathcal{V}_\lambda$  est de dimension 1.*

DÉMONSTRATION. Soit  $V$  un tel module. Il importe de rappeler que  $V$  est un module gauche et  $V^*$  un module droit et que les hypothèses de la proposition impliquent que  $\mathcal{R}_\lambda = 0$ . L'application  $\varphi$  est telle que  $\varphi(av) = \varphi(v)a^*$  pour  $a \in A$ . En effet, soit  $w \in V$  alors  $\varphi(av)(w) = \langle av, w \rangle = \langle v, a^*w \rangle = \varphi(v)(a^*w) = (\varphi(v)a^*)w$  (pour l'action à droite de  $\mathcal{A}$  sur  $V^*$  voir annexe A). De plus,  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels puisque  $\mathcal{R}_\lambda = 0$  implique l'injectivité et que les dimensions de  $V$  et  $V^*$  sont égales. Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  une autre forme bilinéaire invariante et soit  $\psi$  l'application linéaire définie par  $\psi(v) = \langle v, \cdot \rangle'$ . Alors  $\varphi^{-1}\psi : V \rightarrow V$  définit un morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules (gauches). Le lemme de Schur assure que  $\varphi^{-1}\psi = \alpha I$  pour  $\alpha \in \mathbb{K}$  et donc que  $\psi = \alpha\varphi$ .  $\square$

Il suit maintenant de la proposition 2.3.11 que l'espace vectoriel des formes bilinéaires invariantes sur une somme directe de deux modules irréductibles cellulaires est de dimension deux.

**Lemme 2.3.12.** *Soient  $V$  et  $W$  deux modules cellulaires irréductibles non isomorphes d'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$  (sur un corps algébriquement clos) et soit  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  une forme bilinéaire invariante sur  $V \oplus W$ . Alors,  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = a\langle \cdot, \cdot \rangle_V + b\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  où  $a, b \in \mathbb{K}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et  $b\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  désignent, respectivement, des formes non nulles sur  $V$  et  $W$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $v, v' \in V$  et  $w, w' \in W$ . Alors,

$$\begin{aligned} \langle\langle v + w, v' + w' \rangle\rangle &= \langle\langle v, v' \rangle\rangle + \langle\langle w, w' \rangle\rangle + \langle\langle v, w' \rangle\rangle + \langle\langle w, v' \rangle\rangle \\ &= a\langle v, v' \rangle_V + b\langle w, w' \rangle_W + \langle\langle v, w' \rangle\rangle + \langle\langle w, v' \rangle\rangle \end{aligned}$$

où  $a, b \in \mathbb{C}$ . Mais il ne peut pas y avoir de forme bilinéaire invariante non-nulle entre deux modules irréductibles. Supposons le contraire, celle-ci induirait une fonction bijective  $\chi$  telle que  $\chi(ax) = \chi(x)a^*$  (la bijectivité découle du fait que  $V$  et  $W$  sont irréductibles et du lemme 2.3.10) :

$$\begin{aligned} \chi : W &\rightarrow V^* \\ x &\mapsto \langle\langle x, \cdot \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Or, en considérant la fonction  $\varphi^{-1} : V^* \rightarrow V$  (où  $\varphi$  est la fonction utilisée dans la proposition 2.3.11), la composition  $\varphi^{-1} \circ \chi$  est un isomorphisme entre  $V$  et  $W$ . On a donc une contradiction. On trouve donc bien que  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = a\langle \cdot, \cdot \rangle_M + b\langle \cdot, \cdot \rangle_N$  où  $a, b \in \mathbb{K}$  tel qu'affirmé.  $\square$

Il découle directement des résultats précédents que, dans la notation utilisée plus haut,  $\dim \mathcal{E} = 2$ , où  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ . Ce résultat sera utilisé de manière cruciale lors du chapitre 3. Nous nous intéresserons maintenant à l'étude des modules projectifs d'une algèbre cellulaire. Soit donc  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire et  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{A}$ -module projectif. Il est connu que si la suite de  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -bimodules

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0 \quad (2.3.2)$$

est exacte, alors la suite

$$0 \rightarrow L \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \rightarrow M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \rightarrow N \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \rightarrow 0 \quad (2.3.3)$$

est exacte, puisque tout module projectif est plat.

**Lemme 2.3.13.** *Considérons les suites (2.3.2) et (2.3.3).*

- (1) *Le foncteur  $\cdot \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$  préserve les inclusions ;*
- (2)  *$M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} / L \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \simeq (M / L) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ .*

DÉMONSTRATION. Découle directement de la propriété d'exactitude du foncteur  $\cdot \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ .  $\square$

**Définition 2.3.14.** *Posons  $\mathcal{P}^{\preceq \lambda} = \mathcal{A}^{\preceq \lambda} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^\lambda = \mathcal{Q}(\lambda) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$ .*

Ainsi, en appliquant  $\cdot \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$  à la filtration (2.1.3) on obtient une filtration de  $\mathcal{P}$  :

$$0 \subseteq \mathcal{P}^{\preceq \lambda_1} \subseteq \mathcal{P}^{\preceq \lambda_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}^{\preceq \lambda_n} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \simeq \mathcal{P}. \quad (2.3.4)$$

telle que chaque quotient est donné par  $\mathcal{P}^{\lambda_i}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Il est important de noter que certaines des inclusions strictes de (2.1.3) peuvent devenir des égalités dans (2.3.4). De manière équivalente, il est possible que  $\mathcal{P}^\lambda = 0$  pour  $\lambda \in \Lambda$ .

Les trois résultats suivants seront admis sans démonstrations, ils constituent les principaux résultats de la section 3 de [9]. Ces résultats structuraux donnent énormément d'information sur les représentations irréductibles et indécomposables d'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 2.3.15.** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire et posons  $\mathcal{I}_\lambda = \mathcal{V}_\lambda / \mathcal{R}_\lambda$ . Alors,*

- (1) *L'ensemble  $\{\mathcal{I}_\lambda | \lambda \in \Lambda_0\}$  est un ensemble complet d'irréductibles non isomorphes.*
- (2) *Soit  $\lambda \in \Lambda_0$  et  $\mathcal{P}_\lambda$  le module indécomposable projectif (principal) associé à  $\mathcal{I}_\lambda$ . Alors,  $\mathcal{P}_\lambda$  satisfait à  $\mathcal{P}_\lambda \simeq \mathcal{A}^{\preceq \lambda} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_\lambda$ .*

Le théorème suivant donne une série d'équivalences pour la semisimplicité d'une algèbre cellulaire.

**Théorème 2.3.16.** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) l'algèbre  $\mathcal{A}$  est semisimple ;
- (2)  $\mathcal{R}_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  ;
- (3) les modules cellulaires  $\mathcal{V}_\lambda$  forment un ensemble complet d'irréductibles non isomorphes deux à deux.

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire de dimension finie, et soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module de dimension finie. Supposons que  $V$  est de longueur de composition  $k$ , alors il existe une suite d'inclusion de modules :

$$0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^{k-1} \subset V^k = V, \quad (2.3.5)$$

telle que, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , il existe  $\mu_i \in \Lambda_0$  tel que  $V^i/V^{i-1} \simeq \mathcal{I}_{\mu_i}$ . Soit  $\lambda \in \Lambda$  et  $\mu \in \Lambda_0$  et soit  $d_{\lambda,\mu}$  la multiplicité de  $\mathcal{I}_\mu$  dans  $\mathcal{V}_\lambda$ , c'est-à-dire le nombre de facteurs de composition isomorphes à  $\mathcal{I}_\mu$  dans la décomposition de Jordan-Hölder. D'après le théorème de Jordan-Hölder,  $d_{\lambda,\mu}$  est bien défini.

**Définition 2.3.17.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre cellulaire et  $\lambda \in \Lambda$  et  $\mu \in \Lambda_0$ .

- (1) La matrice de décomposition de  $\mathcal{A}$  est définie comme  $\mathfrak{D} = (d_{\lambda,\mu})_{\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0}$  ;
- (2) Si  $c_{\lambda,\mu}$  dénote la multiplicité de  $\mathcal{I}_\mu$  dans  $\mathcal{P}_\lambda$  alors la matrice de Cartan de  $\mathcal{A}$  est  $\mathfrak{C} = (c_{\lambda,\mu})_{\lambda, \mu \in \Lambda_0}$  ;

Avec cette notation, on a les deux résultats suivants.

- Proposition 2.3.18.** (1) La matrice  $\mathfrak{D}$  est triangulaire supérieure (c'est-à-dire  $d_{\lambda,\mu} = 0$  sauf si  $\lambda \preceq \mu$ ) et  $d_{\lambda,\lambda} = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$  (voir aussi [14]) ;
- (2) Avec les matrices  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{D}$  définies comme précédemment,  $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}^T \mathfrak{D}$ .
- (3) De plus,  $d_{\lambda,\mu} = \dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_\mu, \mathcal{V}_\lambda)$  (voir annexe A).

Soit  $\sigma \in \Lambda_0$  avec  $\mathcal{V}_\sigma$  de longueur de composition  $k$ . Puisque dans la suite (2.3.5)  $\mathcal{V}_\sigma^{k-1}$  est maximal, on a que  $\mathcal{R}_\sigma \simeq \mathcal{V}_\sigma^{k-1}$  et donc que  $\mathcal{V}_\sigma^k/\mathcal{V}_\sigma^{k-1} \simeq \mathcal{I}_\sigma$ . L'irréductible  $\mathcal{I}_\sigma$  n'apparaissant qu'une seule fois dans  $\mathcal{V}_\sigma$ , en vertu de la proposition 2.3.18, il s'ensuit que pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $\mathcal{V}_\sigma^i/\mathcal{V}_\sigma^{i-1} \simeq \mathcal{I}_\tau$  où  $\tau \succ \sigma$ . Étudions maintenant un peu plus en détail les modules principaux de  $\mathcal{A}$ , plus particulièrement, l'application de la construction (2.3.4) aux  $\mathcal{P}_\mu$  pour  $\mu \in \Lambda_0$  :

$$0 \subseteq \mathcal{P}_\mu^{\preceq \lambda_1} \subseteq \mathcal{P}_\mu^{\preceq \lambda_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_\mu^{\preceq \lambda_n} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_\mu \simeq \mathcal{P}_\mu. \quad (2.3.6)$$

La proposition suivante provient de [14], bien que dans une forme différente.

**Proposition 2.3.19.** Soit  $\mu \in \Lambda_0$  et  $\lambda_i \in \Lambda$ , pour un certain  $1 \leq i \leq n$ . Alors,

$$\mathcal{P}_\mu^{\lambda_i} = \mathcal{P}_\mu^{\preceq \lambda_i} / \mathcal{P}_\mu^{\preceq \lambda_{i-1}} \simeq \begin{cases} \bigoplus_{1 \leq j \leq d_{\lambda_i, \mu}} \mathcal{V}_{\lambda_i} & \text{si } d_{\lambda_i, \mu} \neq 0; \\ 0 & \text{si } d_{\lambda_i, \mu} = 0. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

**DÉMONSTRATION.** D'après la proposition 2.3.18, on a que  $d_{\lambda_i, \mu} = \dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_\mu, \mathcal{V}_{\lambda_i})$ . Or, en tant que  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_\mu, \mathcal{V}_{\lambda_i}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_\mu, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\lambda_i}^*, \mathbb{K}))$$

$$\begin{aligned} &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\lambda_i}^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_{\mu}, \mathbb{K}) \\ &\simeq \mathcal{V}_{\lambda_i}^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_{\mu}. \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme découle du fait qu'en tant que  $\mathcal{A}$ -modules (à gauche),  $\mathcal{V}_{\lambda_i} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\lambda_i}^*, \mathbb{K})$  et le deuxième du théorème d'adjonction (voir annexe A). Or, en vertu de l'associativité du produit tensoriel et de l'existence de la fonction  $\varphi_{\lambda_i}$  (voir (2.3.1)) :

$$\mathcal{V}_{\lambda_i} \otimes_{\mathbb{K}} (\mathcal{V}_{\lambda_i}^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_{\mu}) \simeq (\mathcal{V}_{\lambda_i} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_{\lambda_i}^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_{\mu} \simeq \mathcal{P}_{\mu}^{\lambda_i}.$$

Si  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{V}_{\lambda_i}) \neq 0$ , alors en tant que  $\mathcal{A}$ -modules à gauche, on a un isomorphisme :

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\lambda_i} \simeq \mathcal{V}_{\lambda_i} \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_{\mu}, \mathcal{V}_{\lambda_i}) \simeq \bigoplus_{1 \leq j \leq d_{\lambda_i, \mu}} \mathcal{V}_{\lambda_i}. \quad (2.3.8)$$

□

Ceci termine l'étude générale des algèbres cellulaires ; les prochains chapitres se contenteront d'analyser la structure de l'algèbre  $\text{TLb}_n$ . L'élément le plus important du chapitre 2 fut sans doute l'introduction d'une forme bilinéaire sur les modules  $\mathcal{V}_{\lambda}$ . Tous les principaux résultats sur les modules cellulaires : irréductibilité, radical (au sens usuel de la théorie des algèbres et modules), coiffe, etc, découlent de l'existence de cette forme. La forme bilinéaire permet aussi de tracer un lien entre la théorie des algèbres cellulaires et celle des algèbres quasi-héréditaires (voir [20]). Il est connu qu'une algèbre cellulaire  $\mathcal{A}$  est quasi-héréditaire, si et seulement si  $\Lambda = \Lambda_0$  (voir [18] et [9]).



et

$$\triangleleft = (\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) \text{arc} + (1 - e^{-2i\lambda}) \text{dot-arc}. \quad (3.1.3)$$

L'élément  $F_n \in \mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_n$  est alors défini comme :

$$F_n = \begin{array}{c} \triangleleft \\ \text{grid} \end{array}. \quad (3.1.4)$$

Ainsi, on a que

$$F_n = (\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) \text{grid} + (1 - e^{-2i\lambda}) \text{dot-grid}. \quad (3.1.5)$$

Il sera utile d'utiliser la notation  $a = \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2$  et  $b = 1 - e^{-2i\lambda}$ . La notation diagrammatique ci-haut permet de représenter de manière extrêmement dense une combinaison linéaire de  $2^{2n+1}$  diagrammes. En effet, même dans  $\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_1$ , le calcul requiert l'expansion de  $8 = 2^3$  1-diagrammes. Dans ce cas, l'élément  $F_1$  se développe comme :

$$\begin{aligned} F_1 &= a \begin{array}{c} \text{grid} \\ \text{arc} \end{array} + b \begin{array}{c} \text{dot-grid} \\ \text{arc} \end{array} \\ &= a \left( \begin{array}{c} \text{arc} \\ \text{grid} \\ \text{arc} \end{array} - e^{i\lambda} \begin{array}{c} \text{arc} \\ \text{grid} \\ \text{arc} \end{array} - e^{-i\lambda} \begin{array}{c} \text{dot-arc} \\ \text{grid} \\ \text{dot-arc} \end{array} + \begin{array}{c} \text{arc} \\ \text{grid} \\ \text{arc} \end{array} \right) \\ &+ b \left( \begin{array}{c} \text{dot-arc} \\ \text{grid} \\ \text{dot-arc} \end{array} - e^{i\lambda} \begin{array}{c} \text{dot-arc} \\ \text{grid} \\ \text{dot-arc} \end{array} - e^{-i\lambda} \begin{array}{c} \text{dot-arc} \\ \text{grid} \\ \text{dot-arc} \end{array} + \begin{array}{c} \text{dot-arc} \\ \text{grid} \\ \text{dot-arc} \end{array} \right) \end{aligned}$$

qu'il est possible de simplifier sous la forme :

$$= a(2 - \beta e^{i\lambda} - \beta e^{-i\lambda}) 1_{\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_n} + b(2 - \beta e^{i\lambda} - \beta_1 e^{-i\lambda}) u_0.$$

Le reste de cette section sera consacrée à la démonstration que  $F_n \in Z(\text{TLb}_n)$  ainsi qu'au calcul des valeurs propres de  $F_n$  sur les modules cellulaires. Les deux identités suivantes sont obtenues en explicitant les quatres diagrammes :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} = - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} = - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite}. \quad (3.1.6)$$

En particulier, il en découle que,

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}. \quad (3.1.7)$$

**Proposition 3.1.1.** *L'élément  $F_n$  est central dans  $\text{TLb}_n$ .*

DÉMONSTRATION. L'élément analogue  $F'_n \in \text{TL}_n$  commute avec tout les  $u_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  (voir [5]). Or, cet élément n'est que la partie associée au coefficient  $a$  dans l'élément  $F_n$  ci-haut. Montrer que la partie du coefficient  $b$  commute avec les  $u_i$  se fait exactement de la même manière. L'idée est d'observer tout d'abord que  $F_n$  est autoadjoint par rapport à l'anti-involution  $*$  donnée en 2.2.3, et ensuite que  $u_i F_n = (u_i F_n)^*$ . Il s'ensuit que  $u_i F_n = (u_i F_n)^* = F_n^* u_i^* = F_n u_i$ . Il reste donc à montrer que  $F_n$  commute avec  $u_0$ . Or, en développant les deux cadres supérieurs de

$$u_0 F_n = u_0 \begin{array}{|c|} \hline \text{diagramme triangulaire} \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

le résultat est

$$\begin{aligned} & a u_0 \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} - e^{i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} - e^{-i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} \right) \\ & + b u_0 \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} - e^{i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} - e^{-i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite} \right). \end{aligned}$$

Évidemment, le reste du diagramme  $u_0$  (les cadres inférieurs) agit comme l'identité sur l'élément  $F_n$ . En multipliant maintenant la première ligne par  $u_0$  :

$$\begin{aligned} & = a \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche et une flèche} - e^{i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite et une flèche} - e^{-i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche et une flèche} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite et une flèche} \right) \\ & + b \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche et une flèche} - e^{i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite et une flèche} - e^{-i\lambda} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à gauche et une flèche} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ avec une boucle à droite et une flèche} \right) \end{aligned}$$





plus, le demi-cercle inférieur se propage vers le haut de sorte que  $F_n$  agit comme  $F_k$  sur les  $k$  défauts supérieurs. Il suffit donc de calculer l'action de  $F_k$  sur les  $k$  défauts supérieurs (donc l'action de  $F_k$  sur  $v_{k,k}$ ) :

$$F_k v_{k,k} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} = X_1 + X_2 \quad (3.1.8)$$

où

$$X_1 = ie^{-\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k (a \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} + b \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array}) \quad (3.1.9)$$

et

$$X_2 = -ie^{\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} = (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^k \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} = (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^k (a \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} + b \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array}). \quad (3.1.10)$$

Pour le terme  $X_1$ , la partie du coefficient  $a$  se développe comme suit :

$$-ie^{\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} + ie^{-\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram with } k \text{ horizontal lines and } k \text{ vertical lines, with a crossing at the top and arcs at the bottom.} \end{array} .$$

En développant le côté gauche du diagramme, les seuls termes qui ne s'annulent pas sont ceux qui ne forment aucun arc, ainsi aucun des blocs ne peut être remplacé par

un bloc possédant un demi-arc dans le coin supérieur gauche :

$$(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{k-1}(-ie^{\frac{i\lambda}{2}}) + (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k. \quad (3.1.11)$$

Tous les liens dans le diagramme ci-haut deviennent des défauts, ainsi le calcul précédent donne :

$$((ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{k-2} + \beta(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k)v_{k,k} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k(-e^{i\lambda} + \beta)v_{k,k} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k e^{-i\lambda}v_{k,k}.$$

Pour le calcul de la partie du coefficient  $b$ , le terme de gauche de l'équation (3.1.11) s'annule et le terme de droite donne  $\beta_1(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k v_{k,k}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} X_1 &= (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k (a(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k e^{-i\lambda} + b\beta_1(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k) v_{k,k} \\ &= (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{2k} (b\beta_1 + ae^{-i\lambda}) v_{k,k} \\ &= (-1)^k (e^{-i\lambda})^k (b\beta_1 + ae^{-i\lambda}) v_{k,k}. \end{aligned}$$

Pour le terme  $X_2$ , la partie en  $b$  s'annule. Pour la partie en  $a$  un calcul similaire à celui pour  $X_1$  donne :

$$= (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^k + (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^{k-2}.$$

Ainsi,  $X_2 = a(-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^{2k}(\beta - e^{-i\lambda}) = a(-1)^k (e^{i\lambda})^k (\beta - e^{-i\lambda}) v_{k,k}$ . Il en découle que :

$$\begin{aligned} F_k v_{k,k} &= X_1 + X_2 \\ &= (-1)^k ((e^{-i\lambda})^k (b\beta_1 + ae^{-i\lambda}) + (e^{i\lambda})^k a(\beta - e^{-i\lambda})) v_{k,k} \\ &= (-1)^k ((e^{-i\lambda})^k ((1 - e^{-2i\lambda})\beta_1 + (\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) e^{-i\lambda}) \\ &\quad + (e^{i\lambda})^k (\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) (e^{i\lambda})) v_{k,k} \\ &= (-1)^k ((e^{-ik\lambda} (\beta_1 - \beta_2 e^{-i\lambda})) + (e^{i\lambda})^k (\beta_1 - \beta_2 e^{i\lambda})) v_{k,k} \\ &= 2(-1)^k (\beta_1 \cos k\lambda - \beta_2 \cos (k+1)\lambda) v_{k,k}. \end{aligned}$$

- (2) Le calcul pour le module  $\mathcal{V}_{n,-k}$  (toujours avec  $k > 0$ ) se fait de manière similaire et a été mis en annexe (voir annexe B). On trouve que  $F_n v_{n,-k} = 2(-1)^k(\beta_1 \cos(-k\lambda) - \beta_2 \cos(-k+1)\lambda)v_{n,k}$ .
- (3) Finalement, si  $k = 0$ , alors  $v_{n,0}$  est un générateur de  $\mathcal{V}_{n,0}$  d'après 2.3.4 et d'après l'observation (3.1.7) la multiplication de  $v_{n,0}$  par  $F_n$  ne modifie l'élément  $v_{n,0}$  qu'à une constante près :

$$\begin{aligned}
F_n v_{n,0} &= (a\beta + b\beta_1)v_{n,0} \\
&= ((\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2)(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) + (1 - e^{-2i\lambda})\beta_1)v_{n,0} \\
&= (\beta_1 - \beta_2 e^{i\lambda} - \beta_2 e^{-i\lambda} + \beta_1 e^{-2i\lambda} + \beta_1 + \beta_1 e^{-2i\lambda})v_{n,0} \\
&= 2(\beta_1 - \beta_2 \cos \lambda)v_{n,0}.
\end{aligned}$$

□

Ceci termine donc le calcul des valeurs propres sur l'élément central  $F_n$ . Posons maintenant

$$[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \quad (3.1.12)$$

et

$$a_k = \beta_2[k+1]_q - \beta_1[k]_q \quad (3.1.13)$$

pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Remarquons que  $[-k]_q = -[k]_q$ . Comme il sera démontré à la section 3.2, la connaissance des valeurs propres  $\lambda_{n,k}$  sur les  $\mathcal{V}_{n,k}$  ci-haut permet d'exprimer les restrictions des modules  $\mathcal{V}_{n,k}$  en fonction des modules  $\mathcal{V}_{n-1,k-}$  et  $\mathcal{V}_{n-1,k+}$ . Il sera important pour cela de déterminer dans quels cas les valeurs propres  $\lambda_{n,k}$  et  $\lambda_{n,k'}$  sont distinctes. Or, comme pour un  $n \in \mathbb{N}$  donné les parités de deux entiers  $k$  et  $k'$  indexant le nombre de défauts est la même,  $\lambda_{n,k} = \lambda_{n,k'}$  si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \cos k\lambda - \beta_2 \cos(k+1)\lambda = \beta_1 \cos k'\lambda - \beta_2 \cos(k'+1)\lambda \\
\iff &\beta_1 \left( \sin \frac{(k'+k)\lambda}{2} \sin \frac{(k'-k)\lambda}{2} \right) - \beta_2 \left( \sin \frac{(k'+k+2)\lambda}{2} \sin \frac{(k'-k)\lambda}{2} \right) = 0 \\
\iff &\sin \frac{(k'-k)\lambda}{2} \left( \beta_1 \sin \frac{(k'+k)\lambda}{2} - \beta_2 \sin \frac{(k'+k+2)\lambda}{2} \right) = 0 \\
\iff &\left( e^{\frac{i(k'-k)\lambda}{2}} - e^{-\frac{i(k'-k)\lambda}{2}} \right) \left( \beta_1 \left( e^{\frac{i(k'+k)\lambda}{2}} - e^{-\frac{i(k'+k)\lambda}{2}} \right) - \beta_2 \left( e^{\frac{i(k'+k+2)\lambda}{2}} - e^{-\frac{i(k'+k+2)\lambda}{2}} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est valide si et seulement si (en multipliant par  $(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})^{-2}$ ) :

$$\left[ \frac{k'-k}{2} \right]_q a_{\frac{k'+k}{2}} = 0. \quad (3.1.14)$$

**Corollaire 3.1.3.** *Soit  $\varphi : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k'}$  un morphisme de  $\text{TLb}_n$ -modules. Alors  $\varphi \equiv 0$  sauf si  $\left[ \frac{k'-k}{2} \right]_q a_{\frac{k'+k}{2}} = 0$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $[\frac{k'-k}{2}]_q a_{\frac{k'+k}{2}} \neq 0$  et soit  $\varphi : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k'}$  un morphisme. Soit  $v \in \mathcal{V}_{n,k}$ , alors  $\varphi(F_n v) = \varphi(\lambda_{n,k} v) = \lambda_{n,k} \varphi(v)$ , or  $F_n \varphi(v) = \lambda_{n,k'} \varphi(v) \neq \lambda_{n,k} \varphi(v)$  si  $\varphi \neq 0$ . Ainsi,  $\varphi \equiv 0$ .  $\square$

**Définition 3.1.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $k \in \Lambda = \{m \mid -n \leq m \leq n\}$ . L'entier  $k_+$  est défini comme  $k + 1$  si  $k \geq 0$  et comme  $k - 1$  si  $k < 0$ . De même,  $k_-$  est défini comme  $k - 1$  si  $k \geq 0$  et comme  $k + 1$  si  $k < 0$ .

**Définition 3.1.5.** Le paramètre  $q \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\beta = q + q^{-1}$  sera dit générique si celui-ci n'est pas une racine de l'unité.

Ainsi, dans le cas  $q$  générique, il n'y a aucune solution  $k \in \mathbb{Z}$  à l'équation  $[k]_q = 0$ . Remarquons que l'élément central  $F_n$  prend des valeurs distinctes sur des  $\mathcal{V}_{n,k}$  et  $\mathcal{V}_{n,k'}$  avec  $k \neq k'$  dans « presque tout » les cas. Par exemple, pour des modules  $\mathcal{V}_{n,k}$  et  $\mathcal{V}_{n,k'}$  adjacents sur le diagramme de Bratteli :

**Corollaire 3.1.6.** L'élément  $F_n$  prend la même valeur propre sur les modules  $\mathcal{V}_{n,k_+}$  et  $\mathcal{V}_{n,k_-}$  si et seulement si  $a_k = 0$ .

DÉMONSTRATION. Dans ce cas,  $[\frac{k_+ - k_-}{2}]_q = [\pm 1]_q = \pm 1 \neq 0$ . Or,  $k_+ + k_- = 2k$ , ainsi, les valeurs propres sont égales si et seulement si  $a_k = 0$ .  $\square$

Le cas  $\mathcal{V}_{n,k}$  et  $\mathcal{V}_{n,k'}$  quelconques (pas forcément adjacents) est étudié en détails au chapitre 4 (voir le lemme 4.2.3). Terminons la section avec quelques remarques préliminaires sur les nombres  $a_k$  et  $[k]_q$  qui seront très utiles dans les sections subséquentes.

**Remarque 3.1.7.** (1) On rappelle que  $\beta = q + q^{-1}$ . On voit donc que  $\beta = \frac{(q+q^{-1})(q-q^{-1})}{q-q^{-1}} = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = [2]_q$ .

(2) Les  $q$ -nombres satisfont à la relation de récurrence

$$[k+1]_q = [2]_q [k]_q - [k-1]_q = \beta [k]_q - [k-1]_q. \quad (3.1.15)$$

En effet,  $[k+1]_q + [k-1]_q = \frac{q^{k+1} + q^{k-1} - q^{-k+1} - q^{-k-1}}{q - q^{-1}} = (q + q^{-1})[k]_q$ .

(3) Soit  $k \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} a_k &= \beta_2 [k+1]_q - \beta_1 [k]_q \\ &= \beta_2 (\beta [k]_q - [k-1]_q) - \beta_1 [k]_q \\ &= \beta'_1 [k]_q - \beta_2 [k-1]_q, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{-k} &= \beta_2 [-k+1]_q - \beta_1 [-k]_q \\ &= \beta_1 [k]_q - \beta_2 [k-1]_q. \end{aligned}$$

En particulier,  $a_0 = \beta_2$ ,  $a_{-1} = \beta_1$  et  $a_1 = \beta'_1$ .

(4) Les nombres  $a_k$  satisfont à la relation de récurrence  $a_{k+1} = \beta a_k - a_{k-1}$ , et donc à la relation  $a_{k+} = \beta a_k - a_{k-}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

La section suivante utilise les résultats de la présente section pour donner une caractérisation plus profonde des modules cellulaires. Le but ultime de ce chapitre est de donner les conditions pour la trivialité du radical de la forme bilinéaire. Pour ce faire, il faudra ramener l'étude des modules de l'algèbre  $\text{TLb}_n$  au niveau  $n - 1$ .

## 3.2. Restrictions et matrices de Gram

### 3.2.1. Restriction des modules cellulaires

Soit  $A$  une algèbre et  $B \subset A$  une sous-algèbre. Soit  $M$  un  $A$ -module, alors  $M$  est aussi un  $B$ -module, appelé la *restriction* de  $M$  à  $B$ . Comme  $\text{TLb}_{n-1} \subset \text{TLb}_n$  (pour construire cette inclusion, il suffit d'ajouter un lien transversal en position  $n$  à chaque diagramme de  $\text{TLb}_{n-1}$ ), les modules cellulaires  $\mathcal{V}_{n,k}$  se restreignent à  $\text{TLb}_{n-1}$ . Ces nouveaux  $\text{TLb}_{n-1}$ -modules seront notés  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow$ . Le premier résultat sur les modules restreints  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow$  concerne l'existence d'une suite exacte courte.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$ , alors il existe une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n-1,k_-} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k} \downarrow \rightarrow \mathcal{V}_{n-1,k_+} \rightarrow 0 \quad (3.2.1)$$

où  $\mathcal{V}_{n,n+1} = \mathcal{V}_{n,-(n+1)} = \{0\}$  et où  $k_+$  et  $k_-$  sont introduits à la définition 3.1.4.

**DÉMONSTRATION.** (1) Soit  $|k| \geq 1$ . La fonction  $\iota : \mathcal{V}_{n-1,k_-} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k} \downarrow$  est définie comme suit :

$$\iota : d \mapsto \bar{d} = \begin{array}{|c} \hline d \\ \hline \hline \hline \end{array}, \text{ pour } d \in \mathcal{M}_{n,k_-}. \quad (3.2.2)$$

Il est trivial que  $\iota$  est une transformation linéaire injective. De plus, comme l'action  $\text{TLb}_{n-1}$  est muette sur le dernier défaut des diagrammes dans l'image de  $\iota$ , il s'agit bien d'un monomorphisme de  $\text{TLb}_{n-1}$ -modules. Dans le cas où  $k = -1$ , alors le défaut ajouté doit porter un  $\bullet$ ; l'application  $\iota$  reste un monomorphisme de  $\text{TLb}_{n-1}$ -modules par le même argument. Considérons maintenant le module quotient  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow / \mathcal{V}_{n-1,k_-}$ . Une base (en tant qu'espace vectoriel) est donnée par  $\mathcal{B} = \{d + \mathcal{V}_{n-1,k_-} \mid d \in \mathcal{M}_{n,k} \setminus \iota(\mathcal{M}_{n-1,k_-})\}$ . Ainsi, les  $d + \mathcal{V}_{n-1,k_-} \in \mathcal{B}$  possèdent un arc en position  $n$  (tous les diagrammes possédant un défaut en position  $n$  tombent à zéro dans le quotient). Ainsi, l'application de  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow / \mathcal{V}_{n-1,k_-}$  vers  $\mathcal{V}_{n-1,k_+}$ ,

$$\pi : \begin{array}{|c} \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \end{array} + \mathcal{V}_{n-1,k_-} \mapsto \begin{array}{|c} \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline \hline \hline \end{array}, \quad (3.2.3)$$

où les trois points indiquent la présence de liens (les trois points inférieurs ne peuvent pas posséder de défauts), est linéaire en tant qu'application entre espaces vectoriels. De plus, l'arc tracé sur le diagramme ci-haut n'est pas décoré car  $|k| \geq 1$ . L'application  $\pi$  est donc bien définie. Par abus de notation, écrivons  $d$  pour la classe  $d + \mathcal{V}_{n-1, k}$  d'un élément du domaine de  $\pi$ . Pour être un morphisme de  $\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_{n-1}$ -modules, il suffit de vérifier que  $\pi(u_i d) = u_i \pi(d)$  pour  $0 \leq i \leq n-2$ . Or, si  $i \neq j-1, j$ , c'est trivial (si  $i = 0$  cela fonctionne aussi car  $j \neq 1$ ). Si  $i = j$ , alors l'arc simple de  $u_i$  vient connecter l'arc de  $d$  en position  $j$  avec celui en position  $j+1$ . Supposons que le nouvel arc ainsi produit se referme en position  $k$ . Alors  $\pi(u_i d)$  donnera un défaut en position  $k$  et un arc simple en position  $i$ , tout le reste n'aura pas bougé. Or,  $u_i \pi(d)$  donnera exactement le même diagramme. Si  $i = j-1$ , alors deux cas de figure sont possibles. Dans le premier cas, le lien en position  $j-1$  est un arc, et alors un argument de type similaire au précédent montre que  $\pi(u_i d) = u_i \pi(d)$ . Dans le second cas, le lien en position  $j-1$  est un défaut et  $u_i d \in \text{Im } \iota$ , c'est-à-dire  $\pi(u_i d) = 0$ . Or,  $u_i$  agissant sur  $\pi(d)$  relie deux défauts de  $\pi(d)$  et donc le résultat donne 0. Il est clair que  $\pi$  est surjective et que  $\text{Im } \iota = \ker \pi$ .

(2) Soit  $k = 0$ . Alors considérons  $\iota : \mathcal{V}_{n-1, -1} \rightarrow \mathcal{V}_{n, 0}$  donnée par

$$\iota : \begin{array}{c} \boxed{\vdots} \\ \boxed{j} \\ \boxed{\vdots} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \boxed{\vdots} \\ \boxed{j} \\ \boxed{\vdots} \end{array} \quad (3.2.4)$$

Il est clair que  $\iota$  ainsi définie est injective. De plus, la comparaison  $\iota(u_i d)$  avec  $u_i \iota(d)$  donne bien que c'est un morphisme de  $\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_{n-1}$ -modules. Soit maintenant la base de  $\mathcal{V}_{n, 0} \downarrow / \mathcal{V}_{n-1, -1}$  donnée par  $\mathcal{B} = \{d + \mathcal{V}_{n-1, -1} \mid d \in \mathcal{M}_{n, 0} \setminus \iota(\mathcal{M}_{n-1, -1})\}$ . Les (représentant des) éléments de  $\mathcal{B}$  sont donc des demi-diagrammes avec aucun défaut et tels que le dernier arc est non décoré. Soit  $\pi$  de  $\mathcal{V}_{n, 0} \downarrow$  vers  $\mathcal{V}_{n-1, 1}$  définie comme pour le cas  $k \neq 0$ . Alors, pour les mêmes raisons,  $\pi$  sera un épimorphisme de  $\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_{n-1}$ -modules. Le seul cas qui doit être traité différemment est celui du générateur  $u_0$  avec  $j = 1$ , mais dans ce cas  $\pi(u_0 d) = 0 = u_0 \pi(d)$ . □

**Remarque 3.2.2.** *Les modules cellulaires de  $\mathbb{T}\mathbb{L}\mathbb{b}_n$  sont au nombre de  $n+1$ . En augmentant progressivement  $n$ , ces modules peuvent alors être organisés de la manière illustrée à la figure 3.1.*

Cette organisation triangulaire des modules cellulaires sera appelée un *diagramme de Bratteli*. Celui-ci s'avérera très utile lors du chapitre 4. Pour l'instant, on se contentera de remarquer qu'en vertu du lemme 3.2.1, la dimension du module  $\mathcal{V}_{n, k}$  est donnée par la somme des

dimensions des deux modules directement en haut de celui-ci :

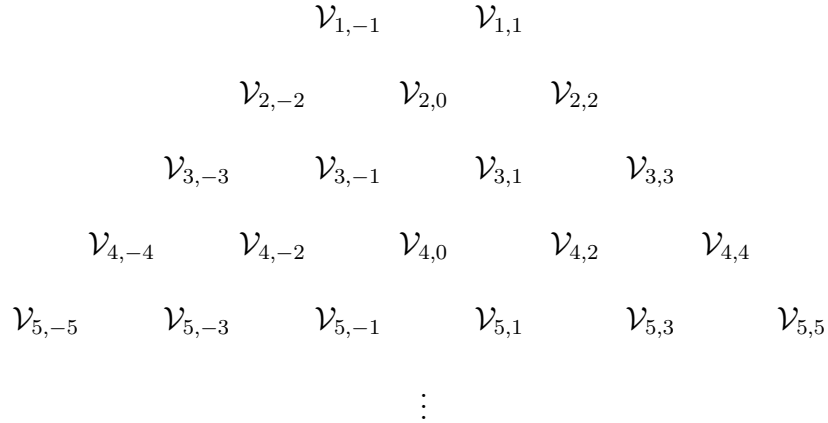
$$\dim \mathcal{V}_{n,k} = \dim \mathcal{V}_{n-1,k_-} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k_+}. \quad (3.2.5)$$

**Définition 3.2.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$ , avec  $k \equiv n \pmod{2}$ . Le nombre  $d_{n,k}$  est défini comme  $\binom{n}{\frac{n-|k|}{2}}$ .

**Proposition 3.2.4** (Triangle de Pascal). Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$  et soit  $p = \frac{n-|k|}{2}$  le nombre d'arcs sur les éléments de  $\mathcal{M}_{n,k}$ . Alors  $\dim \mathcal{V}_{n,k} = d_{n,k}$ .

DÉMONSTRATION. Les conditions initiales de la relation de récurrence (3.2.5) sont données par  $\text{Card } \mathcal{M}_{n,\pm n} = 1$ . La solution à cette relation de récurrence est  $\binom{n}{p}$ .  $\square$

FIGURE 3.1. Diagramme de Bratteli



La question est maintenant de savoir si la suite exacte (3.2.1) scinde. La réponse à cette question dépendra des valeurs de  $q, \beta_1$  et  $\beta_2$ . Remarquons que le sous-espace de  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow$  s'identifiant à  $\mathcal{V}_{n,k_+}$  dans la suite exacte n'est pas un sous-module. En effet, si  $n = 3$  et  $k = 1$ , alors,  $d = \begin{array}{|} \hline \hline \end{array}$  est identifié à l'unique diagramme de  $\mathcal{V}_{2,2}$  dans la suite exacte (3.2.1).

Or,  $u_1 d = \begin{array}{|} \hline \hline \end{array} \in \iota(\mathcal{V}_{2,0})$ , où  $\iota$  est définie dans le lemme 3.2.1.

**Proposition 3.2.5.** Si  $\beta_1, \beta_2$  et  $q$  sont tels que  $a_k \neq 0$ , alors la suite (3.2.1) scinde, ainsi  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow \simeq \mathcal{V}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_+}$ .

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 3.2.1, le sous-module  $N = \iota(\mathcal{V}_{n-1,k_-})$  est tel que  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow / N \simeq \mathcal{V}_{n-1,k_+}$ . Mais  $F_{n-1}$  agit comme un multiple de l'identité sur les modules  $\mathcal{V}_{n-1,k_-}$  et  $\mathcal{V}_{n-1,k_+} \simeq \mathcal{V}_{n,k} \downarrow / N$ . Donc, si  $|k| \neq n$ , il existe un vecteur non nul  $v \in \mathcal{V}_{n,k} \downarrow \setminus N$  tel que  $F_{n-1}v = \lambda_{n-1,k_+}v + \nu$  où  $\nu \in N$ . De plus, d'après le corollaire 3.1.6,  $\lambda_{n-1,k_-} \neq \lambda_{n-1,k_+}$ . Ainsi,  $v + (\lambda_{n-1,k_+} - \lambda_{n-1,k_-})^{-1}\nu$  est un vecteur propre de  $F_{n-1}$  de valeur propre  $\lambda_{n-1,k_+}$ . Ce vecteur est non nul puisque  $\nu \in N$  mais que  $v \notin N$ . De cette manière, on construit  $E_{\lambda_{n,k_+}}$  l'espace

propre associé à la valeur propre  $\lambda_{n,k_+}$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow = N \oplus E_{\lambda_{n-1,k_+}}$ , et en quotientant par  $N$  on trouve que  $\mathcal{V}_{n-1,k_+} \simeq E_{\lambda_{n-1,k_+}}$ . Ainsi,  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow \simeq \mathcal{V}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_+}$ .  $\square$

Ce résultat nous permettra de décomposer la forme bilinéaire introduite sur les modules cellulaires comme la somme de formes bilinéaires au niveau  $n - 1$  en utilisant le lemme 2.3.12 et la proposition 2.3.11. Cette décomposition nous permettra d'utiliser un processus d'induction afin de donner une formule de récurrence pour le déterminant des matrices de Gram.

### 3.2.2. Matrices de Gram

D'après le théorème 2.3.16, l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est semisimple si et seulement si la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$  introduite sur  $\mathcal{V}_{n,k}$  est non nulle, pour tout  $-n \leq k \leq n$ . Il est donc naturel d'étudier cette dernière. Pour ce faire, il sera utile de considérer les *matrices de Gram*. Celles-ci sont des matrices encodant l'information contenu dans la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$ . La semisimplicité de  $\text{TLb}_n$  se réduira alors à l'inversibilité de ces matrices.

**Définition 3.2.6.** Soit  $\mathcal{B}_{n,k} = \{v_1, v_2, \dots, v_{d_{n,k}}\}$  une base de  $\mathcal{V}_{n,k}$ . La matrice de Gram dans la base  $\mathcal{B}_{n,k}$  est la matrice donnée par  $(\langle v_i, v_j \rangle_{n,k})_{i,j}$  pour  $1 \leq i, j \leq d_{n,k}$ .

**Exemple 3.2.7.** Pour la base ordonnée  $\mathcal{M}_{3,1} = \left\{ \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \right\}$  de  $\mathcal{V}_{3,1}$  la matrice de Gram  $\mathcal{G}_{3,1}$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \beta_2\beta_1 & \beta_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad (3.2.6)$$

alors que dans la base  $\mathfrak{M}_{3,1} = \left\{ \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \beta_2 \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} \right\}$ , la matrice de Gram prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta_2\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2\beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_2 & \beta \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

On voit donc bien qu'avec cette définition, l'étude de la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$  se ramène naturellement à celle des matrices de Gram et l'irréductibilité du module  $\mathcal{V}_{n,k}$  se réduit à l'inversibilité de la matrice de Gram  $\mathfrak{G}_{n,k}$ . Lorsque  $\beta_2 \neq 0$ , nous utiliserons, pour le reste de cette section, les bases ordonnées  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$  suivantes :

$$\mathfrak{M}_{n,-1}^- = \left\{ \begin{array}{|c} \vdots \\ \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \bullet \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}, \quad (3.2.8)$$



$$\mathfrak{M}_{n,1}^+ = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right\}, \quad (3.2.9)$$

et, pour  $|k| \geq 2$ ,

$$\mathfrak{M}_{n,k}^- = \left\{ \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right\} \text{ si } k < 0; \quad (3.2.10)$$

et

$$\mathfrak{M}_{n,k}^+ = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right\} \text{ si } k > 0, \quad (3.2.11)$$

où le  $*$  dénote un éventuel  $\bullet$  dans le cas  $k = -2$  et un  $\square$  dans le cas  $k = 2$ . Remarquons que si  $k < 0$  alors  $\mathfrak{M}_{n,k}^- = \mathfrak{M}_{n,k}$  mais que, si  $k > 0$ ,  $\mathfrak{M}_{n,1}^+$  est la renormalisation de la base  $\mathfrak{M}_{n,1}$  telle que chaque élément de  $\mathfrak{M}_{n,1}$  est multiplié par un facteur  $\sqrt{\beta_2}$ , en vertu de la relation (2.2.3). Les raisons du choix de cette renormalisation découle de la remarque suivante :

**Remarque 3.2.8.** Dans  $\mathcal{V}_{1,+1}$  (par exemple),  $\langle \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array} \rangle = \beta_2^2 \langle \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \rangle = \beta_2^2$ , alors qu'en renormalisant :  $\langle \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array} \rangle = \frac{1}{\beta_2} \beta_2^2 \langle \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \rangle = \beta_2$ .

Dans la base renormalisée, le calcul dans  $\mathfrak{M}_{n,k}^+$  ( $k > 0$ ) devient alors parfaitement symétrique au calcul pour la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,-1}$  avec tous les  $\bullet$  et les  $\square$  échangés. Nous allons donc noter la matrice de Gram dans les bases (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10) et (3.2.11) par  $\mathfrak{G}_{n,k}$ .

**Proposition 3.2.9.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\beta_2 \neq 0$ . Alors, dans le module  $\mathcal{V}_{2n,0}$ , la matrice de Gram prend la forme :

$$\left( \begin{array}{c|c} \beta_1 \mathfrak{G}_{2n-1,-1} & 0 \\ \hline 0 & \beta_1' \mathfrak{G}_{2n-1,1} \end{array} \right) \quad (3.2.12)$$

dans la base ordonnée

$$\mathfrak{M}_{2n,0} = \left\{ \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}.$$

où  $\beta_1' = \beta_2 \beta - \beta_1$ .

**DÉMONSTRATION.** Il est clair que dans la base  $\mathfrak{M}_{2n,0}$ , la matrice est bloc-diagonale tel qu'affirmé ci-haut en vertu de la relation  $\begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \begin{array}{|c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \square \end{array} = 0$ . Considérons maintenant la bijection

entre les demi-diagrammes de la première forme de  $\mathfrak{M}_{2n,0}$  et ceux de  $\mathfrak{M}_{2n-1,-1}^-$  :

$$(3.2.13)$$

Avec ces identifications, il est clair que pour toute paire de demi-diagrammes  $(d_1, d_2)$ , la forme bilinéaire  $\langle d_1, d_2 \rangle_{2n,0}$  sur  $\mathcal{V}_{2n,0}$  (pour les  $n$  premiers diagrammes de  $\mathfrak{M}_{2n,0}$ ) est égale à  $\langle d_1, d_2 \rangle_{2n-1,-1}$  sur  $\mathcal{V}_{2n-1,-1}$  mais pondérée par un facteur  $\beta_1$ , correspondant à la boucle décorée supplémentaire. Un argument identique, mais avec tous les  $\bullet$  remplacés par des  $\square$  s'applique pour le deuxième bloc de la matrice.  $\square$

**Corollaire 3.2.10.** *Lorsque  $\beta_2 \neq 0$  et sous les hypothèses de la proposition 3.2.5, alors il existe une base telle que la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$  satisfait aux équations suivantes :*

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,k_-} + \gamma_{n,k} \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,k_+} & \text{si } |k| \geq 2 \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k} = \beta_2 \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,0} + \gamma_{n,\pm 1} \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,\pm 2} & \text{si } k = \pm 1 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

où  $\gamma_{n,k} \in \mathbb{C}$ .

**DÉMONSTRATION.** Il découle du lemme 2.3.12 et de la proposition 3.2.5 que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k} = \gamma'_{n,k} \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,k_-} + \gamma_{n,k} \langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,k_+}$  où  $\gamma'_{n,k}$  et  $\gamma_{n,k} \in \mathbb{C}$ . En comparant la restriction de la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k}$  à  $\iota(\mathcal{V}_{n-1,k_-})$  (dans la notation du lemme 3.2.1) et la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n-1,k_-}$  sur les éléments de base  $\mathfrak{M}_{n,k_-}^{sgn(k_-)}$ , on trouve les valeurs indiquées ci-haut pour  $\gamma'_{n,k}$ .  $\square$

La dimension des matrices de Gram croît rapidement puisqu'il s'agit de la dimension des modules cellulaires. Ainsi, le calcul du déterminant de Gram devient extrêmement compliqué pour des grandes valeurs de  $n$ . Le corollaire 3.2.10 nous permet toutefois de ramener le calcul de  $\det \mathfrak{G}_{n,k}$  au niveau  $n-1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$ , toujours sous les hypothèses de la proposition 3.2.5 :

$$\mathfrak{G}_{n,k} = U_{n,k}^T \left( \begin{array}{c|c} \gamma'_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_-} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+} \end{array} \right) U_{n,k}, \quad (3.2.15)$$

où  $U_{n,k}$  est la matrice encodant le changement de base effectué lors de la preuve de la proposition 3.2.5 et où  $\gamma_{n,k}, \gamma'_{n,k}$  sont comme à l'équation (3.2.14). Il est facile de vérifier que :

$$U_{n,k} = \left( \begin{array}{c|c} 1_{d_{n-1,k_-}} & V_{n,k} \\ \hline 0 & 1_{d_{n-1,k_+}} \end{array} \right),$$

où  $d_{m,l}$  est comme à la proposition 3.2.4 et  $V_{n,k}$  est une matrice  $d_{n-1,k_-} \times d_{n-1,k_+}$ . L'équation (3.2.15) conduit à la formule de récurrence :

$$\det \mathfrak{G}_{n,k} = \begin{cases} \gamma_{n,k}^{d_{n-1,k_+}} \det \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \times \det \mathfrak{G}_{n-1,k_+} & \text{si } |k| \geq 2; \\ \gamma_{n,k}^{d_{n-1,\pm 2}} \beta_2^{d_{n-1,0}} \det \mathfrak{G}_{n-1,0} \times \det \mathfrak{G}_{n-1,\pm 2} & \text{si } k = \pm 1. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

**Proposition 3.2.11.** *Supposons que  $a_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  (en particulier, cela signifie que  $a_0 = \beta_2 \neq 0$ ). Alors, pour  $k \neq 0$ , les matrices de Gram satisfont à la relation (3.2.16) et  $\gamma_{n,k}$  satisfait à :*

$$\gamma_{n,k} = \begin{cases} \beta - \frac{\beta_2}{\beta_1} & \text{si } k = -1 \\ \beta - \frac{\beta_2}{\beta'_1} & \text{si } k = 1 \\ \beta - \frac{1}{\gamma_{n-1,k_-}} & \text{si } |k| \geq 2 \end{cases}. \quad (3.2.17)$$

De plus,  $\gamma_{n,k} = \frac{a_{k_+}}{a_k}$ , en particulier,  $\gamma_{n,k} \neq 0$  et les matrices de Gram sont inversibles.

Avant de donner la preuve, l'exemple suivant explicite le calcul de la matrice de Gram  $\mathfrak{G}_{3,\pm 1}$  sur  $\mathfrak{M}_{3,\pm 1}^\pm$ . Les nombres  $\gamma_{3,\pm 1}$  y sont explicitement calculés.

**Exemple 3.2.12** (Calcul de  $\mathfrak{G}_{3,\pm 1}$ ). *Considérons les bases  $\mathfrak{M}_{3,\pm 1}^\pm$  (voir (3.2.8) et (3.2.9)). Dans ces bases, la matrice de Gram est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} a_0^2 a_{\pm 1} & 0 & a_0^2 \\ 0 & a_0^2 a_{\mp 1} & 0 \\ a_0^2 & 0 & a_0 [2]_q \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\det \mathfrak{G}_{3,\pm 1} = a_0^5 a_{\pm 1} a_{\mp 1} [2]_q - a_0^6 a_{\mp 1} = a_0^5 a_{\mp 1} \underbrace{(a_{\pm 1} [2]_q - a_0)}_{a_{\pm 2}}$ . Or, on vérifie facilement que

$\det \mathfrak{G}_{2,0} = a_0^2 a_1 a_{-1}$  et  $\det \mathfrak{G}_{2,\pm 2} = a_0$ . Ainsi, on trouve que :

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{G}_{3,\pm 1} &= a_0^5 a_{\mp 1} a_{\pm 2} \\ &= a_0^2 \times \frac{a_{\pm 2}}{a_{\pm 1}} \times a_0^2 a_1 a_{-1} \times a_0 \\ &= a_0^{d_{2,0}} \times \gamma_{3,\pm 1} \times \det \mathfrak{G}_{2,0} \times \det \mathfrak{G}_{2,\pm 2} \end{aligned}$$

avec  $d_{2,0} = 2$  et  $\gamma_{3,\pm 1} = \frac{a_{\pm 2}}{a_{\pm 1}}$ .

**DÉMONSTRATION.** Commençons par montrer la dernière affirmation de la proposition. Le calcul est fait pour  $k > 0$ , le calcul étant identique dans le cas  $k < 0$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{n,1} &= \beta - \frac{\beta_2}{\beta_1} \\ &= \frac{\beta \beta'_1 - \beta_2}{\beta'_1} \\ &= \frac{a_2}{a_1}. \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on suppose que le résultat est vrai pour  $\gamma_{n-1,k_-}$  :

$$\begin{aligned}\gamma_{n,k} &= \beta - \frac{a_{k_-}}{a_k} \\ &= \frac{\beta a_k - a_{k_-}}{a_k} \\ &= \frac{a_{k_+}}{a_k}.\end{aligned}$$

La reste de la démonstration se fait par induction sur  $n$ . Remarquons qu'il est trivial que  $\mathfrak{G}_{n,-n} = (\beta_2) = \mathfrak{G}_{n,n}$  sont inversibles pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $\det \mathfrak{G}_{2,0} = a_0^2 a_{-1} a_1 \neq 0$ . Donc les matrices de Gram sont inversibles pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . De plus, il n'y a pas de  $\gamma_{n,k}$  à calculer aux niveaux 1 et 2. La proposition est donc vraie pour  $n = 1, 2$ . À titre d'exemple de calcul non trivial,  $\gamma_{3,\pm 1}$  a été explicitement calculé juste avant cette preuve. Soit donc  $n \geq 3$ , deux situations distinctes sont à considérer, correspondant aux bases (3.2.8) et (3.2.9) (le premier cas) et aux bases (3.2.10) et (3.2.11) (correspondants au deuxième cas).

- (1) Pour le cas  $k = -1$ , c'est-à-dire, le calcul avec la matrice  $\mathfrak{G}_{n,-1}$ . En notant  $\mathfrak{G}_{n,-1} = \left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{n,-1}^{11} & \mathfrak{G}_{n,-1}^{12} \\ \mathfrak{G}_{n,-1}^{21} & \mathfrak{G}_{n,-1}^{22} \end{array} \right)$  (où le premier bloc représente la forme bilinéaire prise sur les deux premiers types d'éléments de  $\mathfrak{M}_{n,-1}^-$  et le second ceux des deux derniers types) et en utilisant l'équation (3.2.15), les relations suivantes sont facilement démontrées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_{n,-1}^{11} = \beta_2 \mathfrak{G}_{n-1,0} \\ \mathfrak{G}_{n,-1}^{12} = \beta_2 \mathfrak{G}_{n-1,0} V_{n,-1} \\ \mathfrak{G}_{n,-1}^{21} = \beta_2 V_{n,-1}^T \mathfrak{G}_{n-1,0}^T \\ \quad = \beta_2 V_{n,-1}^T \mathfrak{G}_{n-1,0} \\ \mathfrak{G}_{n,-1}^{22} = V_{n,-1}^T \beta_2 \mathfrak{G}_{n-1,0} V_{n,-1} + \gamma_{n,-1} \mathfrak{G}_{n-1,-2} \\ \quad = V_{n,-1}^T \mathfrak{G}_{n,-1}^{12} + \gamma_{n,-1} \mathfrak{G}_{n-1,-2} \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

D'autre part, dans la base (3.2.8), le calcul de la forme bilinéaire entre des éléments

de types 2 et 3 (c'est-à-dire ceux correspondant aux éléments des formes  et )

est nul, en vertu encore une fois de la relation  $\rightarrow \square = 0$ . De même, la forme prise entre des éléments de types 1 et 3 donne  $\beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1}$ . Ainsi, les équations

$$\mathfrak{G}_{n,-1}^{12} = \left( \begin{array}{c|c} \beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1} & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \text{ et donc, } \mathfrak{G}_{n,-1}^{21} = \left( \begin{array}{c|c} \beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1} & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right). \quad (3.2.19)$$

et

$$\mathfrak{G}_{n,-1}^{22} = \left( \begin{array}{c|c} \beta \mathfrak{G}_{n-2,-1} & * \\ \hline * & * \end{array} \right). \quad (3.2.20)$$

sont vérifiées. Ainsi, d'après la deuxième équation de (3.2.18) et (3.2.19),

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} \beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1} & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) &= \beta_2 \mathfrak{G}_{n-1,0} V_{n,-1} \\ &= \beta_2 \left( \begin{array}{c|c} \beta_1 \mathfrak{G}_{n-2,-1} & 0 \\ \hline 0 & \beta'_1 \mathfrak{G}_{n-2,1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} V_{n,-1}^{11} & V_{n,-1}^{12} \\ \hline V_{n,-1}^{21} & V_{n,-1}^{22} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ici la deuxième égalité découle de l'équation (3.2.12). Il s'ensuit que les équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \beta_2 \beta_1 \mathfrak{G}_{n-2,-1} V_{n,-1}^{11} &= \beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1} \\ \beta'_1 \mathfrak{G}_{n-2,1} V_{n,-1}^{21} &= 0 \end{cases}. \quad (3.2.21)$$

D'autre part, en substituant (la dernière équation de) (3.2.18) dans (3.2.19),

$$\left( \begin{array}{c|c} \beta \mathfrak{G}_{n-2,-1} & * \\ \hline * & * \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} (V_{n,-1}^{11})^T & (V_{n,-1}^{21})^T \\ \hline (V_{n,-1}^{12})^T & (V_{n,-1}^{22})^T \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \beta_2 \mathfrak{G}_{n-2,-1} & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) + \gamma_{n,-1} \left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{n-1,-2}^{11} & \mathfrak{G}_{n-1,-2}^{12} \\ \hline \mathfrak{G}_{n-1,-2}^{21} & \mathfrak{G}_{n-1,-2}^{22} \end{array} \right)$$

qui implique que,

$$\begin{aligned} \beta \mathfrak{G}_{n-2,-1} &= \beta_2 (V_{n,-1}^{11})^T \mathfrak{G}_{n-2,-1} + \gamma_{n,-1} \mathfrak{G}_{n-1,-2}^{11} \\ &= \beta_2 (V_{n,-1}^{11})^T \mathfrak{G}_{n-2,-1} + \gamma_{n,-1} \mathfrak{G}_{n-2,-1} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

où la dernière égalité découle du fait que  $\mathfrak{G}_{n-1,-2}^{11} = \mathfrak{G}_{n-2,-1}$  en identifiant les éléments de types 1 et 2 de  $\mathfrak{M}_{n,-2}^-$  avec  $\mathfrak{M}_{n,-1}^-$ , via la suppression du défaut en position  $n$  des éléments de  $\mathfrak{M}_{n,-2}^-$ . Par l'hypothèse d'induction, en supposant l'inversibilité de  $\mathfrak{G}_{n-2,-1}$ ,

$$(3.2.22) \Rightarrow \gamma_{n,-1} \cdot 1 = \beta \cdot 1 - \beta_2 (V_{n,-1}^{11})^T. \quad (3.2.23)$$

Remarquons que  $V_{n,\pm 1}^{11}$  est une matrice carrée d'ordre  $\dim \mathcal{V}_{n,\pm 1}$ , de sorte que les matrices dans les dernières équations sont bien compatibles. Il reste donc à calculer  $\beta_2 (V_{n,-1}^{11})^T$  ; or toujours en supposant l'inversibilité de  $\mathfrak{G}_{n-2,-1}$ , la première équation de (3.2.21) donne :

$$\begin{aligned} \beta_2 \beta_1 V_{n,-1}^{11} &= \beta_2 \cdot 1 \\ \Rightarrow V_{n,-1}^{11} &= \frac{1}{\beta_1} \cdot 1 \end{aligned}$$

En substituant ceci dans (3.2.23), il découle que :

$$\gamma_{n,-1} = \beta - \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

On montre de manière semblable que  $\gamma_{n,1} = \beta - \frac{\beta_2}{\beta'_1}$  en exploitant la symétrie entre  $\bullet$  et  $\square$ .

(2) Il faut maintenant montrer l'étape récursive, c'est-à-dire le passage de  $\mathfrak{G}_{n,k_-}$  à  $\mathfrak{G}_{n,k}$ . Le calcul qui suit est presque identique à celui fait dans [5] pour  $\text{TL}_n$  (il faudra cependant porter une attention particulière aux cas  $k = \pm 2$ ). Considérons la base (3.2.10) et posons,  $\mathfrak{G}_{n,k} = \left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{n,k}^{11} & \mathfrak{G}_{n,k}^{12} \\ \mathfrak{G}_{n,k}^{21} & \mathfrak{G}_{n,k}^{22} \end{array} \right)$ , en utilisant l'équation (3.2.15), les relations suivantes sont facilement démontrées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_{n,k}^{11} = \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \\ \mathfrak{G}_{n,k}^{12} = \mathfrak{G}_{n-1,k_-} V_{n,k} \\ \mathfrak{G}_{n,k}^{21} = V_{n,k}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^T \\ \quad = V_{n,k}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \\ \mathfrak{G}_{n,k}^{22} = V_{n,k}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-} V_{n,k} + \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+} \\ \quad = V_{n,k}^T \mathfrak{G}_{n,k}^{12} + \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+} \end{array} \right. . \quad (3.2.24)$$

On remarque que la dernière équation de (3.2.24) est la même que la dernière de (3.2.18). En étudiant plus en détails la forme bilinéaire sur les diagrammes de types 1 et 2 avec ceux de types 3 et 4, il découle aisément que :

$$\mathfrak{G}_{n,k}^{12} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \mathfrak{G}_{n-2,k} & * \end{array} \right) \text{ et donc, } \mathfrak{G}_{n,k}^{21} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathfrak{G}_{n-2,k} \\ * & * \end{array} \right). \quad (3.2.25)$$

De même,

$$\mathfrak{G}_{n,k}^{22} = \left( \begin{array}{c|c} \beta \mathfrak{G}_{n-2,k} & * \\ * & * \end{array} \right). \quad (3.2.26)$$

Il découle alors de (3.2.24) que

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \mathfrak{G}_{n-2,k} & * \end{array} \right) &= \mathfrak{G}_{n-1,k_-} V_{n,k} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{11} & \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} \\ \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{21} & \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} V_{n,k}^{11} & V_{n,k}^{12} \\ V_{n,k}^{21} & V_{n,k}^{22} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{11} V_{n,k}^{11} + \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} V_{n,k}^{21} = 0 \\ \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{21} V_{n,k}^{11} + \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{22} V_{n,k}^{21} = \mathfrak{G}_{n-2,k} \end{array} \right. \quad (3.2.27)$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} \beta \mathfrak{G}_{n-2,k} & * \\ * & * \end{array} \right) &= V_{n,k}^T \mathfrak{G}_{n,k}^{12} + \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} (V_{n,k}^{11})^T & (V_{n,k}^{21})^T \\ (V_{n,k}^{12})^T & (V_{n,k}^{22})^T \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \mathfrak{G}_{n-2,k} & * \end{array} \right) + \gamma_{n,k} \left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{11} & \mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{12} \\ \mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{21} & \mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{22} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\beta \mathfrak{G}_{n-2,k} = (V_{n,k}^{21})^T \mathfrak{G}_{n-2,k} + \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{11} \quad (3.2.28)$$

On vérifie facilement que  $V_{n,k}^{21}$  est bien une matrice carrée puisque, d'après le lemme 3.2.1, il y a une bijection entre les éléments de types 1 et 2 de  $\mathfrak{M}_{n,k}$  et ceux de types 3 et 4. Il s'ensuit donc, par l'hypothèse d'induction c'est-à-dire en supposant l'inversibilité de  $\mathfrak{G}_{n-2,k}$ , et puisque  $\mathfrak{G}_{n-1,k_+}^{11} = \mathfrak{G}_{n-2,k}$ , que :

$$\beta \cdot 1 = (V_{n,k}^{21})^T + \gamma_{n,k} \cdot 1. \quad (3.2.29)$$

Maintenant, d'après la deuxième équation de (3.2.27) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{n-2,k} &= \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{21} V_{n,k}^{11} + \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{22} V_{n,k}^{21} \\ &= \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{21} V_{n,k}^{11} + (V_{n-1,k_-}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} + \gamma_{n-1,k_-} \mathfrak{G}_{n-2,k}) V_{n,k}^{21} \\ &= V_{n-1,k_-}^T \mathfrak{G}_{n-2,k_-} V_{n,k}^{11} + (V_{n-1,k_-}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} + \gamma_{n-1,k_-} \mathfrak{G}_{n-2,k}) V_{n,k}^{21} \\ &= V_{n-1,k_-}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{11} V_{n,k}^{11} + (V_{n-1,k_-}^T \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} + \gamma_{n-1,k_-} \mathfrak{G}_{n-2,k}) V_{n,k}^{21} \\ &= V_{n-1,k_-}^T (\mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{11} V_{n,k}^{11} + \mathfrak{G}_{n-1,k_-}^{12} V_{n,k}^{21}) + \gamma_{n-1,k_-} \mathfrak{G}_{n-2,k} V_{n,k}^{21} \\ &= \gamma_{n-1,k_-} \mathfrak{G}_{n-2,-k} V_{n,k}^{21} \end{aligned}$$

où les deuxième, troisième et quatrième égalités découlent respectivement de la dernière, la troisième et la première équation de (3.2.24) au niveau  $n-1$ , sauf dans le cas  $k = \pm 2$ . Dans ce cas, il faut se référer aux équations (3.2.18) et la troisième égalité fait apparaître un facteur  $\beta_2$  que la quatrième ligne efface immédiatement. La dernière égalité découle de (la première équation de) (3.2.27). Ainsi, en supposant l'inversibilité de  $\mathfrak{G}_{n-2,k}$  :

$$V_{n,k}^{21} = \frac{1}{\gamma_{n-1,k_-}} \cdot 1. \quad (3.2.30)$$

En substituant dans (3.2.29) :

$$\gamma_{n,k} = \beta - \frac{1}{\gamma_{n-1,k_-}} \quad (3.2.31)$$

qui est la relation de récurrence énoncée dans proposition. Le calcul est exactement identique pour la base (3.2.11). □

La connaissance des  $\gamma_{n,k}$ , nous permet de calculer explicitement  $\det \mathfrak{G}_{n,k}$  pour les valeurs des paramètres qui font en sorte que  $a_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Corollaire 3.2.13** (Déterminant de Gram). *Pour  $-n \leq k \leq n$  :*

$$\begin{cases} \det \mathfrak{G}_{n,k} = \beta_2^{c_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{(k+j)}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} & \text{si } k \geq 0 \\ \det \mathfrak{G}_{n,k} = \beta_2^{c_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_{(k-j)}^{d_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_j^{d_{n,|k|+2j}} & \text{si } k < 0, \end{cases} \quad (3.2.32)$$

pour toutes valeurs des paramètres à l'exception de  $\beta_2 = 0$  et où  $c_{n,k}$  est le nombre total de

- ou de  $\square$  dans  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$ .

DÉMONSTRATION. (1) Rappelons que  $\det \mathfrak{G}_{n,\pm n} = \beta_2$  et  $\det \mathfrak{G}_{2,0} = \beta_2^2 a_1 a_{-1}$  ont déjà été calculé et ont la forme prescrite par (3.2.32). Montrons maintenant que les formules ci-haut satisfont aux relations de récurrence 3.2.14 et 3.2.12 pour  $q, \beta_1, \beta_2$  génériques. On suppose inductivement que le résultat est vrai pour  $1 \leq n' \leq n-1$  (on peut considérer seulement le cas  $k \geq 0$  par symétrie) :

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,k}^{d_{n-1,k+1}} \times \det \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \times \det \mathfrak{G}_{n-1,k_+} &= \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{d_{n-1,k+1}} \times \beta_2^{c_{n-1,k+1}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k-2}{2}} a_{k+1+j}^{d_{n-1,k+1+2j}} \times \\
&\prod_{j=1}^{\frac{n-k-2}{2}} a_{-j}^{d_{n-1,k+1+2j}} \times \beta_2^{c_{n-1,k-1}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{k-1+j}^{d_{n-1,k-1+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n-1,k-1+2j}} \\
&= \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{d_{n-1,k+1}} \times \beta_2^{c_{n-1,k+1} + c_{n-1,k-1}} \times a_k^{d_{n-1,k+1}} a_{k+1}^{d_{n-1,k+3}} \times \prod_{j=1}^{\frac{n-k-2}{2}} a_{k+1+j}^{d_{n-1,k+1+2j}} \prod_{j=3}^{\frac{n-k}{2}} a_{k-1+j}^{d_{n-1,k-1+2j}} \\
&\times \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n-1,k+1+2j} + d_{n-1,k-1+2j}} \\
&= \left( \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{d_{n-1,k+1}} \times \beta_2^{c_{n-1,k+1} + c_{n-1,k-1}} \times a_k^{d_{n-1,k+1}} a_{k+1}^{d_{n-1,k+3}} \prod_{j=2}^{\frac{n-k}{2}} a_{k+j}^{d_{n-1,k-1+2j} + d_{n-1,k+1+2j}} \\
&\times \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n-1,k+1+2j} + d_{n-1,k-1+2j}}.
\end{aligned}$$

Les termes  $a_{k+1}^{d_{n-1,k+1}}$  au dénominateur et au numérateur s'annulent. De plus, en vertu de la relation (3.2.5) et de (B.0.12) :

$$\begin{aligned}
&= \beta_2^{c_{n,k}} \times a_{k+1}^{d_{n-1,k+1} + d_{n-1,k+3}} \prod_{j=2}^{\frac{n-k}{2}} a_{k+j}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} \\
&= \beta_2^{c_{n,k}} \times \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{k+j}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}},
\end{aligned}$$

qui est la formule proposée. Il faut toutefois faire attention aux cas  $k = \pm 1$ , dans cette situation, un facteur  $\beta_2^{d_{n-1,0}}$  supplémentaire apparaîtra dans le produit. Mais ceci est toujours compatible avec l'équation (B.0.12). Le cas  $k = 0$  doit être fait séparément mais le calcul s'opère selon la même logique.

(2) Pour des valeurs fixées des paramètres, si l'équation  $a_k = 0$  n'admet aucune solution  $k \in \mathbb{Z}$ , alors on a montré que le calcul du déterminant est celui indiqué dans l'énoncé



puisqu'il satisfait à (3.2.16) et (3.2.12). Par continuité de  $\det \mathfrak{G}_{n,k} \in \mathbb{P}(q, q^{-1}, \beta_1, \beta_2)$  il s'ensuit que la formule est vérifiée pour toutes valeurs des paramètres.  $\square$

On remarque que la formule calculée à l'exemple 3.2.12 formule satisfait bien au corollaire 3.2.13. Soit  $\beta_2 \neq 0$ , étudions maintenant le changement de base :

$$\mathfrak{P}_{n,k} : \mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)} \rightarrow \mathcal{M}_{n,k}. \quad (3.2.33)$$

Il sera utile d'arranger les éléments de  $\mathcal{M}_{n,k}$  et  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$  en ordre décroissant de leur nombre d'arcs possédant un  $\bullet$ .

**Définition 3.2.14.** (1) La matrice carrée  $P_{n,k}$ , d'ordre  $\dim \mathcal{V}_{n,k}$ , est la matrice du changement de base  $\mathfrak{P}_{n,k}$  ;

(2) soit  $d \in \mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$ ,  $\#d$  est défini comme le nombre de décorations  $\square$  sur les arcs du diagramme  $d$ .

**Proposition 3.2.15.** Dans la base de  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$ , la matrice de changement de base  $P_{n,k}$  est triangulaire supérieure et

$$\det P_{n,k} = \begin{cases} \sqrt{\beta_2^{c_{n,k} - d_{n,k}}} & \text{si } k < 0; \\ \sqrt{\beta_2^{c_{n,k}}} & \text{si } k \geq 0. \end{cases}$$

**Remarque 3.2.16.** Dans les bases  $\mathfrak{M}_{n,k}$  et  $\mathcal{M}_{n,k}$  il n'y a pas de  $\square$  sur les défauts. Le nombre total de décorations est donc donné par  $c_{n,k} - d_{n,k}$ . Le nombre total de décorations d'un type précis, par exemple  $\square$ , est donc  $\frac{c_{n,k} - d_{n,k}}{2}$ .

**DÉMONSTRATION.** Considérons l'ordre discuté dans les lignes précédentes. Soit  $d \in \mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$ , écrivons  $d$  en fonction des éléments de  $\mathcal{M}_{n,k}$ . En vertu de la relation  $\lrcorner = \beta_2 \rceil - \lrcorner$ ,  $d$  est une combinaison linéaire de diagrammes lui étant *presque* identiques mais possédant des  $\bullet$  supplémentaires ainsi que du diagramme sur lequel tous les  $\lrcorner$  de  $d$  ont été remplacés par des  $\rceil$  (ceci montre que la matrice est triangulaire supérieure). Le coefficient de ce dernier diagramme est l'élément diagonal, correspondant à la la position de  $d$  dans l'ordre choisi pour la base  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$ , de la matrice. On le notera  $(P)_{d,d}$ . Il y a deux cas à considérer.

- (1) Si  $k < 0$ , alors le défaut supérieur possède un  $\bullet$ . Chaque arc initialement décoré d'un  $\square$  contribuera à un facteur  $\beta_2$ , de sorte que  $(P)_{d,d} = \beta_2^{\#d}$ . Ainsi,  $\det P_{n,k} = \beta_2^{\frac{c_{n,k} - d_{n,k}}{2}}$ .
- (2) Si  $k \geq 0$ , alors de la même manière, chaque arc initialement décoré d'un  $\square$  contribuera à un facteur  $\beta_2$ , mais le défaut initialement décoré d'un  $\square$  contribuera à un facteur  $\sqrt{\beta_2}$ . On trouve donc que  $\det P_{n,k} = \beta_2^{\frac{c_{n,k} - d_{n,k}}{2} + \frac{d_{n,k}}{2}} = \beta_2^{\frac{c_{n,k}}{2}}$ .

$\square$

**Corollaire 3.2.17** (Déterminant de Gram). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$  et  $\beta_2$  quelconque, alors, dans les bases  $\mathcal{M}_{n,k}$ ,*

$$\det \mathcal{G}_{n,k} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{(k+j)}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} & \text{si } k \geq 0 \\ \beta_2^{\dim \mathcal{V}_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_{(k-j)}^{d_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_j^{d_{n,|k|+2j}} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

En particulier,  $\det \mathcal{G}_{n,k} = 0$  si  $k < 0$  et  $\beta_2 = 0$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\beta_2 \neq 0$ , soit  $\mathfrak{P}_{n,k}$  le changement de base de  $\mathfrak{M}_{n,k}^{\text{sgn}(k)}$  vers  $\mathcal{M}_{n,k}$  (3.2.33) et  $P_{n,k}$  la matrice de cette transformation linéaire. On trouve donc que :

$$\det \mathcal{G}_{n,k} = (\det P_{n,k}^{-1})^2 \det \mathfrak{G}_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_2^{c_{n,k}}} \det \mathfrak{G}_{n,k} & \text{si } k \geq 0; \\ \frac{1}{\beta_2^{c_{n,k}-d_{n,k}}} \det \mathfrak{G}_{n,k} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

En utilisant le corollaire 3.2.13, on trouve alors le résultat affirmé ci-haut :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{G}_{n,k} &= \begin{cases} \frac{\beta_2^{c_{n,k}}}{\beta_2^{c_{n,k}}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{(k+j)}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{\beta_2^{c_{n,k}}}{\beta_2^{c_{n,k}-d_{n,k}}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_{-(|k|+j)}^{d_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_j^{d_{n,|k|+2j}} & \text{si } k < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{(k+j)}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} & \text{si } k \geq 0 \\ \beta_2^{d_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_{-(|k|+j)}^{d_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_j^{d_{n,|k|+2j}} & \text{si } k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\beta_2 = 0$ , alors, par continuité du déterminant en les variables  $\beta, \beta_1, \beta_2$  :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{G}_{n,k}(\beta, \beta_1, 0) &= \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \det \mathcal{G}_{n,k}(\beta, \beta_1, \beta_2) \\ &= \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{(k+j)}^{d_{n,k+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} a_{-j}^{d_{n,k+2j}} & \text{si } k \geq 0 \\ \beta_2^{d_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_{-(|k|+j)}^{d_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n+k}{2}} a_j^{d_{n,|k|+2j}} & \text{si } k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.  $\square$

### 3.3. Induction des modules cellulaires

Il est possible de construire des modules correspondant à la construction « réciproque » de celle des restrictions des modules cellulaires. Plus précisément, soit  $A$  une algèbre (associative et unifère) et  $B \subset A$  une sous-algèbre. Soit  $M$  un  $B$ -module. Le module induit est le module  $M \uparrow = A \otimes_B M$ . Les inductions et les restrictions sont des constructions « réciproques » au sens qu'elles satisfont à la réciprocité de Frobenius (voir Annexe A). L'inclusion d'algèbres  $\text{TLb}_n \subset \text{TLb}_{n+1}$  permet donc de donner la définition suivante.

**Définition 3.3.1.** *L'induction du module  $\mathcal{V}_{n,k}$  est notée  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow$  et est définie par  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow = \text{TLb}_{n+1} \otimes_{\text{TLb}_n} \mathcal{V}_{n,k}$ .*

Il est important de noter que l'ensemble générateur  $D_{n+1}^\bullet \otimes \mathcal{M}_{n,k}$  n'est pas une base de  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow$  en général, comme l'illustre l'exemple suivant.





$$\bar{d} = \boxed{d}$$

et où l'opération de concaténation  $\cdot$  est prise dans  $\mathcal{V}_{n+2,k}$ . Il n'est pas évident *a priori* que  $\varphi$  soit bien définie. Considérons le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{TLb}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{n,k}$ . Une base de  $\text{TLb}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{n,k}$  est donnée par  $\{u \otimes d \mid u \in D_n^\bullet \text{ et } d \in \mathcal{M}_{n,k}\}$ . Définissons l'application linéaire d'espaces vectoriels  $\varphi_{\mathbb{C}} : \text{TLb}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n+2,k} \downarrow$  calculée sur les éléments de base de  $\text{TLb}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{n,k}$  de la même manière que  $\varphi$ . Cette application est clairement bien définie. Ainsi, puisque  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow = (\text{TLb}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{n,k})/N$  où  $N$  est le sous-module engendré par  $\{ab \otimes c - a \otimes bc \mid a \in \text{TLb}_{n+1}, b \in \text{TLb}_n \text{ et } c \in \mathcal{V}_{n,k}\}$ , l'application  $\varphi$  sera bien définie si  $\varphi_{\mathbb{C}}(ab \otimes c) = \varphi_{\mathbb{C}}(a \otimes bc) \forall a \in \text{TLb}_{n+1}, b \in \text{TLb}_n \text{ et } c \in \mathcal{V}_{n,k}$ . Or,  $\varphi_{\mathbb{C}}(ab \otimes c) = (ab)\bar{c}$ , mais  $b \in \text{TLb}_n$  et donc  $b\bar{c} = \overline{bc}$ . Ainsi,  $(ab)\bar{c} = a(b\bar{c}) = a\overline{bc} = \varphi_{\mathbb{C}}(a \otimes bc)$ . Ici, il pourrait y avoir une apparente ambiguïté dû au fait que  $\bar{c} \in \mathcal{V}_{n+2,k}$  mais que  $a \in \text{TLb}_{n+1}$  et  $b \in \text{TLb}_n$ . Il faut comprendre que dans ces cas, on considère les inclusions d'algèbres  $\text{TLb}_n \subset \text{TLb}_{n+2}$  et  $\text{TLb}_{n+1} \subset \text{TLb}_{n+2}$  consistant à remplir les sites manquants par des liens transversaux. Soit maintenant  $d \in \mathcal{M}_{n,k}$  un  $(n,k)$ -demi-diagramme et considérons la notation suivante :

$$d = \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}$$

où la première boîte contient  $s$  sites et la seconde  $t = n - s$ . Un site de la première boîte peut toujours être connecté, par un arc, à un site de la deuxième boîte tant et aussi longtemps que cela n'entraîne aucune intersection. Sur l'illustration ci-haut, ceci est illustré par l'arc en pointillé bleu joignant les deux boîtes.

**Proposition 3.3.7.** *Soit  $n \geq 3$  et  $|k| < n$ . En tant que  $\text{TLb}_{n+1}$ -modules,  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{n+2,k} \downarrow$ .*

**Remarque 3.3.8.** *Il sera utile de commencer par remarquer que si  $d \in \mathcal{M}_{n,k}$ , alors,*

$$\varphi(u_j \dots u_n \otimes d) = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} ;$$

*c'est-à-dire que l'opération laisse  $d$  intacte mais ajoute un arc simple en position  $j$  et décale ainsi tous les liens inférieurs ou égaux à  $j$  vers le bas. Ici, encore une fois, le  $*$  indique la possibilité d'un  $\bullet$ , dans ce cas  $j = 0$  et il n'y a pas de lien transversal au-dessus de  $*$ . De plus, si  $d$  est  $j$ -admissible, alors  $\varphi(u_j \dots u_n \otimes d)$  possède son dernier arc simple non décoré en position  $j$  si  $j \neq 0$  et ne possède pas d'arc simple non décoré si  $j = 0$ .*



$j = l$ , en retirant les arcs simples en position  $j$  des demi-diagrammes  $u_j \dots u_n \bar{c}$  et  $u_l \dots u_n \bar{d}$  et en renumérotant les sites  $j + 2$  jusqu'à  $n + 2$  par  $j$  jusqu'à  $n$ , on obtient des demi-diagrammes égaux à  $c$  et  $d$ , respectivement. Or, comme  $u_j \dots u_n \bar{c} = u_l \dots u_n \bar{d}$  et puisque l'application de  $\mathcal{M}_{n+2,k} \rightarrow \mathcal{M}_{n,k}$  consistant à enlever le dernier arc simple non décoré est bien définie, on trouve que  $c = d$ . Il est à noter que cette démarche fonctionne aussi dans le cas où  $j = l = n + 1$ , c'est-à-dire, pour des éléments de la forme  $1_{\text{TLb}_n} \otimes c$  et  $1_{\text{TLb}_n} \otimes d$ .

- (b) Si  $j = 0$  ou  $l = 0$ . Sans perte de généralité, supposons que  $j = 0$ . Le demi-diagramme  $c$  est donc de la forme (3.3.2). Si  $l \neq 0$ , alors  $u_l \dots u_n \bar{d}$  possède un arc simple non décoré, contrairement à  $u_j \dots u_n \bar{c}$ . Ainsi,  $l = 0$  et  $d$  est aussi de la forme (3.3.2). □

Il faut maintenant s'assurer que  $\varphi$  est aussi un isomorphisme de  $\text{TLb}_{n+1}$ -modules lorsque  $k = \pm n$ .

**Proposition 3.3.9.** *En tant que  $\text{TLb}_{n+1}$ -modules,  $\mathcal{V}_{n,\pm n} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{n+2,\pm n} \downarrow$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons les  $n + 2$  éléments suivants de  $\mathcal{V}_{n,\pm n} \uparrow : u_0 u_1 u_2 \dots u_n \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}, u_1 u_2 \dots u_n \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}, \dots, u_n \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}, 1 \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}$ . Ces éléments engendrent  $\mathcal{V}_{n,\pm n} \uparrow$  puisqu'ils énumèrent toute les formes possibles de la proposition 3.3.5. De plus, il est clair que  $\varphi$  (telle que définie dans les paragraphes précédents) envoie chacun des éléments ci-haut sur  $n + 2$  éléments linéairement indépendants de  $\mathcal{V}_{n+2,n} \downarrow$  (l'indice  $j$  dans  $u_j \dots u_n \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}$  représentant la position de l'unique arc simple de  $\varphi(u_j \dots u_n \otimes \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array})$ ). Ces éléments forment donc une base de  $\mathcal{V}_{n,\pm n} \uparrow$ . Or,  $\dim \mathcal{V}_{n+2,\pm n} \downarrow = \binom{n+2}{1} = n + 2$  et  $\varphi$  est un morphisme de  $\text{TLb}_{n+1}$ -modules par le même argument que celui élaboré dans la proposition 3.3.7. Ainsi,  $\varphi$  est l'isomorphisme cherché. □

Les arguments des paragraphes précédents possèdent un léger inconvénient : lorsque  $n = 2$  et  $k = 0$ , la proposition 3.3.5 ne s'applique pas directement. En effet, la démonstration utilisait l'existence d'au moins un défaut sur les éléments du module cellulaire  $\mathcal{V}_{n,k}$ .

**Proposition 3.3.10.** *Pour  $n = 2$ , les isomorphismes de  $\text{TLb}_3$ -modules suivants tiennent :*

- (1) Si  $\beta \neq 0$ , alors,  $\mathcal{V}_{2,0} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{4,0} \downarrow$ .
- (2) Si  $\beta_1 \neq 0$ , alors,  $\mathcal{V}_{2,0} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{4,0} \downarrow$ .

DÉMONSTRATION. (1) Considérons les éléments suivants de  $\mathcal{V}_{2,0} \uparrow : u_0 u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b}, u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b}, u_2 \otimes \mathfrak{b}, 1 \otimes \mathfrak{b}, u_2 \otimes \mathfrak{b}, 1 \otimes \mathfrak{b}, u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b}$  et  $u_0 u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b}$ . D'après la remarque 3.3.3, ces éléments forment un ensemble générateur de  $\mathcal{V}_{2,0} \uparrow$ . Mais  $u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b} = \frac{1}{\beta}(u_1 u_2 \otimes u_1 \mathfrak{b}) = \frac{1}{\beta}(u_1 u_2 u_1 \otimes \mathfrak{b}) = \frac{1}{\beta}(u_1 \otimes \mathfrak{b}) = \frac{1}{\beta}(1 \otimes u_1 \mathfrak{b}) = 1 \otimes \mathfrak{b}$  et de la même manière,  $u_0 u_1 u_2 \otimes \mathfrak{b} = u_0 \otimes \mathfrak{b} = 1 \otimes \mathfrak{b}$ .

Le même argument que précédemment montre que  $\varphi$  envoie l'ensemble ci-haut sur la base  $\mathcal{M}_{4,0}$  de  $\mathcal{V}_{4,0}$  (ce dernier est de dimension  $\binom{4}{2} = 6$ ). Ainsi, les (6 premiers) éléments ci-haut sont linéairement indépendants.

- (2) La preuve est presque identique à la preuve pour le cas  $\beta \neq 0$  ci-haut. Les 6 premiers éléments sont linéairement indépendants et l'application  $\varphi$  est un morphisme de  $\text{TLb}_3$ -modules pour les mêmes raisons. Or,  $u_1u_2 \otimes \mathfrak{p} = \frac{1}{\beta_1}(u_1u_2 \otimes u_1u_0\mathfrak{p}) = \frac{1}{\beta_1}(u_1u_2u_1u_0 \otimes \mathfrak{p}) = \frac{1}{\beta_1}(u_1u_0 \otimes \mathfrak{p}) = \frac{1}{\beta_1}(1 \otimes u_1u_0\mathfrak{p}) = 1 \otimes \mathfrak{p}$  et de la même manière,  $u_0u_1u_2 \otimes \mathfrak{p} = u_0 \otimes \mathfrak{p} = 1 \otimes \mathfrak{p}$ .  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe des propositions précédentes et sera d'une importance cruciale lors du chapitre 4. De la même manière que les  $\mathcal{V}_{n,k} \downarrow$  donnaient lieu à une suite exacte faisant intervenir les modules cellulaires au niveau  $n-1$ , les inductions feront intervenir les modules cellulaires au niveau  $n+1$ .

**Corollaire 3.3.11.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$ , alors, il existe une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n+1,k_-} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k} \uparrow \rightarrow \mathcal{V}_{n+1,k_+} \rightarrow 0. \quad (3.3.3)$$

**Corollaire 3.3.12.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.5, le  $\text{TLb}_{n+1}$ -module  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow$  admet la décomposition en somme directe  $\mathcal{V}_{n,k} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{n+1,k_-} \oplus \mathcal{V}_{n+1,k_+}$ .*

La section se termine avec un exemple de calcul de tous les éléments de la base « canonique » du module  $\mathcal{V}_{3,1} \uparrow$ .

**Exemple 3.3.13.** *Il a déjà été démontré que  $\dim \mathcal{V}_{n,k} \downarrow = \binom{n}{p}$  (contrairement à l'induction, les dimensions des restrictions sont identiques à celles des modules initiaux). Donc il devrait y avoir exactement  $\binom{5}{2} = 10$  éléments dans une base de  $\mathcal{V}_{3,1} \uparrow$ . Or, les éléments suivants forment une liste complète de vecteurs linéairement indépendants de  $\mathcal{V}_{3,1} \uparrow$  :*

$$\begin{aligned} & u_0u_1u_2u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, u_1u_2u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, u_2u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, 1 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, \\ & u_2u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, 1 \otimes \mathfrak{p} \downarrow, u_3 \otimes \mathfrak{p} \downarrow \text{ et } 1 \otimes \mathfrak{p} \downarrow. \end{aligned}$$



# Chapitre 4

---

## Théorie de la représentation de $\mathbf{TLb}$

C'est dans ce chapitre que sera dévoilée la théorie des représentations irréductibles et principales de  $\mathbf{TLb}_n$ . Dans les trois premiers chapitres, les algèbres  $\mathbf{TLb}_n$  ont été définies (chapitre 1) et d'importants modules, dits *cellulaires*, ont été introduits (chapitre 2). Dans le chapitre 3, il a été démontré que ceux-ci sont irréductibles sous certaines conditions, grâce au déterminant des matrices de Gram. Le but de ce chapitre est d'étudier plus en détails les modules cellulaires et irréductibles de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  lorsqu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que l'équation  $a_k = 0$  est vérifiée. Rappelons qu'en vertu de (3.1.13), ceci est équivalent à dire que l'équation

$$a_k = \beta_2[k+1]_q - \beta_1[k]_q = 0 \tag{4.0.4}$$

admet une solution. Le chapitre se divise en quatre parties : tout d'abord, le calcul des solutions de l'équation  $a_k = 0$ , qui détermine les conditions de semisimplicité de l'algèbre, suivi de la construction explicite de certains morphismes entre certains éléments du diagramme de Bratteli des algèbres  $\mathbf{TLb}_n$  ; enfin, l'étude détaillée de la théorie de la représentation, d'abord dans le cas  $\beta_2 \neq 0$  et ensuite dans le cas  $\beta_2 = 0$ , sera effectuée.

### 4.1. Semisimplicité de $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$

Dans cette section, il sera souvent supposé que  $\beta_2 \neq 0$ . Dans ces cas, la condition  $\beta_2 \neq 0$  sera indiquée entre parenthèse juste avant l'énoncé du résultat en question. D'après le théorème 2.3.16 du chapitre 2,  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  sera semisimple si et seulement si  $\det \mathfrak{G}_{n,k} \neq 0$  pour tout  $-n \leq k \leq n$  ( $k \equiv n \pmod{2}$ ). Il est alors nécessaire de trouver les solutions de l'équation (4.0.4). Le corollaire 3.2.13 nous informe que si les paramètres  $q, \beta_1$  et  $\beta_2$  sont tels que l'équation n'admet aucune solution, alors l'algèbre est semisimple. Dans ce cas, d'après le théorème 2.3.16, on a la proposition suivante :

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{C}^*$  et  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  tels que l'équation  $a_k = 0$  n'admet aucune solution. Alors les  $\mathcal{V}_{n,k}$ ,  $-n \leq k \leq n$  forment un ensemble complet d'irréductibles non isomorphes deux à deux et l'algèbre  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est semisimple. De plus, le module*

régulier se décompose comme :

$$\mathrm{TLb}_n \mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \bigoplus_{-n \leq k \leq n} (\dim \mathcal{V}_{n,k}) \mathcal{V}_{n,k} \simeq \bigoplus_{-n \leq k \leq n} \binom{n}{p} \mathcal{V}_{n,k}. \quad (4.1.1)$$

Ici, l'isomorphisme est un isomorphisme de  $\mathrm{TLb}_n$ -modules et  $p = \frac{n-|k|}{2}$ .

Ainsi, si  $a_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , les modules cellulaires, irréductibles et principaux coïncident et la théorie de la représentation est complètement donnée par (4.1.1).

**Définition 4.1.2.** Un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$  sera dit critique.

Il sera utile de noter au passage que 0 est critique signifie  $\beta_2 = 0$  et que  $\pm 1$  est critique signifie que  $\beta_1 = 0$  ( $-1$ ) ou  $\beta'_1 = 0$  ( $+1$ ). Rappelons que  $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$  en vertu de (3.1.12). Pour  $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ , on cherche donc les entiers critiques, c'est-à-dire, les solutions de (4.0.4). Avant de s'attaquer à ce calcul, il sera utile de donner quelques résultats élémentaires sur les  $q$ -nombres  $[k]_q$ .

**Remarque 4.1.3.**  $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = \frac{(q - q^{-1})(q^{k-1} + q^{k-3} + \dots + q^{-k+3} + q^{-k+1})}{q - q^{-1}} = q^{k-1} + q^{k-3} + \dots + q^{-k+3} + q^{-k+1}$ . En particulier,  $[k]_1 = k$  et  $[k]_{-1} = (-1)^{k-1}k$ .

**Lemme 4.1.4** ( $\beta_2 \neq 0$ ). Soit  $k \in \mathbb{Z}$  critique, alors  $[k]_q \neq 0$  pour tout  $q \in \mathbb{C}^*$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$  (et  $\beta_2 \neq 0$ ). Considérons deux cas de figure :

- (1) Si  $q \neq \pm 1$ , alors  $[k]_q = 0$  est équivalent à  $q^{2k} = 1$ . Comme  $q \neq \pm 1$ ,  $q^{2k} = 1 \Rightarrow q^{2(k+1)} \neq 1$  et donc  $[k+1]_q \neq 0$ . Mais dans ce cas  $a_k = \beta_2[k+1]_q - \beta_1[k]_q = \beta_2[k+1]_q \neq 0$ , ce qui est une contradiction.
- (2) Si  $q = \pm 1$ , alors, en vertu de la remarque 4.1.3,  $[k]_q = \pm k$ .

Dans les deux cas, le  $q$ -nombre est non nul. □

Puisque pour toutes les valeurs possibles du paramètre  $q$  (on se rappelle que  $q \neq 0$  par définition) la criticalité d'un entier  $k \in \mathbb{Z}$  implique que  $[k]_q \neq 0$  et toujours sous l'hypothèse que  $\beta_2 \neq 0$ , il est maintenant possible de remarquer que l'égalité (4.0.4) ci-haut est vraie si et seulement si :

$$\frac{[k+1]_q}{[k]_q} = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (4.1.2)$$

Si  $q \neq \pm 1$ , cette formule est équivalente à :

$$\frac{q^{k+1} - q^{-(k+1)}}{q^k - q^{-k}} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Soit maintenant  $l$  un autre entier tel que  $a_l = 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{q^{k+1} - q^{-(k+1)}}{q^k - q^{-k}} &= \frac{q^{l+1} - q^{-(l+1)}}{q^l - q^{-l}} \\ \Leftrightarrow \frac{q^k - q^{-k}}{q^l - q^{-l}} &= \frac{q^{k+1} - q^{-(k+1)}}{q^{l+1} - q^{-(l+1)}} \\ \Leftrightarrow q^{l-k+1} + q^{k-l-1} &= q^{k-l+1} + q^{l-k-1} \end{aligned}$$

en posant  $\gamma = k - l$ ,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow q^{\gamma+1} - q^{-\gamma+1} &= q^{\gamma-1} - q^{-\gamma-1} \\ \Leftrightarrow q(q^\gamma - q^{-\gamma}) &= q^{-1}(q^\gamma - q^{-\gamma}) \\ \Leftrightarrow (q - q^{-1})(q^\gamma - q^{-\gamma}) &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie si et seulement si  $q^\gamma = \pm 1$  puisque  $q \neq \pm 1$ . En particulier,  $q$  est une racine de l'unité. Remarquons que si  $q = \pm 1$ , alors, dans ce cas aussi, la solution est unique. En effet, en vertu du lemme 4.1.4 :

$$\begin{aligned} \frac{[m-1]_q}{m} &= \frac{\beta_1}{\beta_2} \\ \Leftrightarrow \pm \frac{m-1}{m} &= \frac{\beta_1}{\beta_2}. \end{aligned}$$

Les arguments des lignes précédentes sont résumés dans la proposition suivante :

**Proposition 4.1.5** ( $\beta_2 \neq 0$ ). *Soit  $q, \beta_2 \in \mathbb{C}^*$  et  $\beta_1 \in \mathbb{C}$ . Supposons que  $k \in \mathbb{Z}$  est critique.*

- (1) *Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité ou si  $q = \pm 1$  alors l'entier  $k$  est le seul entier critique.*
- (2) *Si  $q$  est une racine de l'unité et si  $\gamma$  est le plus petit entier tel que  $q^{2\gamma} = 1$ , alors l'ensemble des solutions de (4.1.2) est donné par  $\{k + m\gamma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .*

Retournons maintenant au déterminant de Gram. La semisimplicité de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  dépend des valeurs des déterminants de Gram sur les  $\mathcal{V}_{n,k}$ , plus exactement, il doit être non nul sur chacun de ces modules, pour  $-n \leq k \leq n$ .

**Proposition 4.1.6** ( $\beta_2 \neq 0$ ). *Soit  $k_c$  l'entier critique le plus proche de 0. Alors  $\text{TLb}_n$  est semisimple si et seulement si  $n \leq |k_c|$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $k_c$  comme dans l'énoncé ci-haut et supposons que  $k_c > 0$  (le cas  $k_c < 0$  se fait de manière identique). D'après le corollaire 3.2.13, la matrice de Gram  $\mathfrak{G}_{n,k}$  sera inversible si  $a_l \neq 0$  pour tout  $0 \leq l \leq n$ . En effet, dans le produit, les indices  $k + j$  et  $j$  satisfont respectivement aux inégalités  $0 \leq k + j \leq k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} \leq n$  et  $0 \leq j \leq \frac{n-k}{2} < n$ . Ainsi,  $\text{TLb}_n$  est semisimple si  $n \leq k_c$ . Rappelons que, en vertu du corollaire 3.2.13 et en utilisant la notation  $p = \frac{n-k}{2}$  :

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{G}_{n,k} &\doteq \beta_2^{c_{n,k}} (a_{k+p} \dots a_{k+2} a_{k+1}) (a_{-p} \dots a_{-1}) \\ &= \beta_2^{c_{n,k}} (a_{\frac{n+k}{2}} \dots a_{k+2} a_{k+1}) (a_{-\frac{n-k}{2}} \dots a_{-1}) \end{aligned}$$

où  $\doteq$  signifie que les puissances des facteurs ont été omises. Cette omission n'affecte en aucun cas la singularité du déterminant. Supposons maintenant que  $n > k_c$ . Alors, deux cas sont à considérer.

(1) Si  $n \not\equiv k_c \pmod{2}$ , alors le module  $\mathcal{V}_{n,k_c-1}$  est bien défini. Posons  $l = k_c - 1$ ; alors

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{G}_{n,l} &\doteq \beta_2^{c_{n,l}} \left( a_{\frac{n+k_c-1}{2}} \dots a_{k_c+1} a_{k_c} \right) (a_{-p} \dots a_{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que  $n \geq k_c + 1$ , de sorte que  $n + k_c - 1 \geq 2k_c$ , le déterminant est donc bien nul.

(2) Si  $n \equiv k_c \pmod{2}$ , alors le module  $\mathcal{V}_{n,k_c-2}$  est bien défini. Posons  $l = k_c - 2$ ; alors

$$\begin{aligned} \det \mathfrak{G}_{n,l} &\doteq \beta_2^{c_{n,l}} \left( a_{\frac{n+k_c-2}{2}} \dots a_{k_c} a_{k_c-1} \right) (a_{-p} \dots a_{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que  $n \geq k_c + 2$ , de sorte que  $n + k_c - 2 \geq 2k_c$ , le déterminant est donc bien nul. □

Nous avons donc réussi à caractériser entièrement les conditions sous lesquelles l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est semisimple. De plus, en étudiant l'équation (4.1.2), une solution complète (pour  $\beta_2 \neq 0$ ) de l'équation  $a_k = 0$ , pour une solution initiale donnée, a été calculée. La section suivante étudie plus en détails les conséquences de la criticalité d'un entier  $k_c \in \mathbb{Z}$  sur la structure des modules cellulaires via la construction d'un morphisme entre deux modules cellulaires distincts au niveau  $k_c + 1$ .

## 4.2. Diagrammes de Bratelli

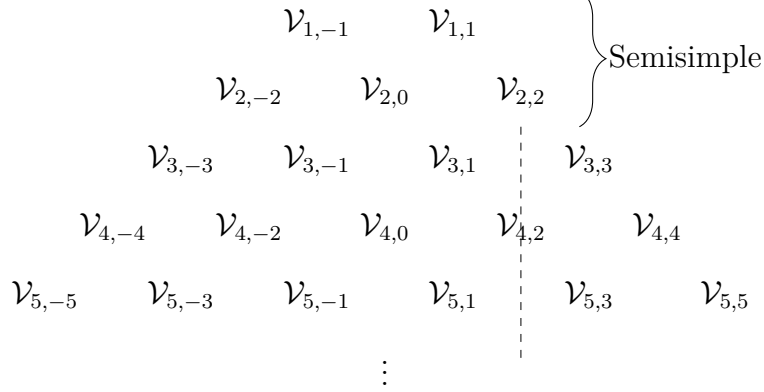
Dans cette section, nous retournons aux diagrammes de Bratelli, définis au chapitre 3; à titre d'exemple, le diagramme de Bratteli pour  $n \leq 5$  est illustré à la figure 3.1. Ces diagrammes triangulaires sont utilisés dans [5, 17, 16] et permettront de visualiser facilement plusieurs résultats sur les modules cellulaires. La criticalité d'un entier  $k_c \in \mathbb{Z}$  ne dépendant pas de  $n$ , il sera donc convenable de représenter un tel entier par une ligne verticale (en pointillé), qui sera nommée *ligne critique*, traversant le diagramme de haut en bas, en partant du module  $\mathcal{V}_{n,k_c}$  (voir le diagramme ci-dessous).

**Proposition 4.2.1** ( $\beta_2 \neq 0$ ). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  (et  $q \in \mathbb{C}^*$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ). Si  $\pm(n-1)$  est critique, alors  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,\pm n}, \mathcal{V}_{n,\pm(n-2)}) \simeq \mathbb{C}$ .*

Par exemple, si  $k_c = 2$ , alors dans le diagramme de Bratteli il y aura une ligne critique en  $x = 2$  pour indiquer la criticalité de 2 tel qu'indiquer à la figure 4.1, il existera alors un morphisme non trivial de  $\mathcal{V}_{4,-4}$  vers  $\mathcal{V}_{4,-2}$ . La proposition 4.2.1 affirme qu'une ligne critique indique l'existence d'un unique (à un scalaire près) morphisme non nul de  $\mathcal{V}_{n,\pm n}$  vers  $\mathcal{V}_{n,\pm(n-2)}$ . Dans la figure 4.2, les modules sur les niveaux 1 et 2 sont tous irréductibles et les algèbres sont donc semisimples pour  $n \leq 2$ . Le module  $\mathcal{V}_{3,1}$  possède un sous-module isomorphe à

$\mathcal{V}_{3,3}$ , ce qui est indiqué par la flèche joignant les deux modules, et l'algèbre  $\text{TLb}_3$  n'est pas semisimple puisqu'elle possède un module cellulaire réductible mais indécomposable. D'après la proposition 4.1.6, toutes les algèbres  $\text{TLb}_n$  avec  $n \geq 3$  possèdent aussi des modules cellulaires réductibles. De plus, par cellularité, tous les morphismes doivent aller vers le centre du diagramme de Bratteli (proposition 2.3.7). Pour prouver la proposition 4.2.1 il sera important de rappeler que les  $q$ -nombres satisfont à l'équation (3.1.15) :  $[k+1]_q = \beta[k]_q - [k-1]_q$ .

FIGURE 4.1. Ligne critique



DÉMONSTRATION. On peut exclure le cas  $n = 1$ , car alors la condition  $n - 1$  critique signifie que 0 est critique, c'est-à-dire que  $\beta_2 = 0$ . On peut donc supposer que  $n \geq 2$ . Le calcul est effectué ici pour  $\mathcal{V}_{n,-n}$ , le calcul pour  $\mathcal{V}_{n,n}$  se faisant de la même manière, avec  $\square$  à la place de  $\bullet$  et  $\beta'_1$  à la place de  $\beta_1$ . Soit  $\psi : \mathcal{V}_{n,-n} \rightarrow \mathcal{V}_{n,-n+2}$  défini par :

$$\begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \end{array} \mapsto R_n = (-1)^{n-1} [n-1]_q d_1 + \beta_2 \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} [n-i]_q d_i, \quad (4.2.1)$$

où

$$d_1 = \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \vdots \\ \hline \hline \end{array} \quad \text{et} \quad d_i = \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \vdots \\ \hline \bullet \\ \hline \hline \end{array}. \quad (4.2.2)$$

Il faut montrer que  $\psi$  est un morphisme de  $\text{TLb}_n$ -modules. Il est clair que  $\psi(u_0 \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \end{array}) = u_0 \psi(\begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \end{array})$ , puisque les deux côtés de l'équation ne font que produire un facteur  $\beta_2$ . Pour montrer que cela fonctionne aussi pour les  $u_i$  avec  $i \geq 1$ , il sera d'abord nécessaire de faire quelques observations. Tout d'abord, pour  $i \geq 2$ ,

- (1)  $u_i d_i = \beta d_i$ ,
- (2)  $u_{i-1} d_i = d_{i-1}$  si  $i \geq 3$  et  $d_1^*$  si  $i = 2$ , où  $d_1^*$  est semblable à  $d_1$  mais sans le  $\bullet$  sur l'arc simple,
- (3)  $u_{i+1} d_i = d_{i+1}$  ( $i \leq n - 2$ ),

(4) enfin,  $u_i d_j = 0$  si  $|i - j| \geq 2$ .

Si  $i = 1$ , alors

$$(1) u_1 d_1 = \beta_1 d_1^*,$$

$$(2) u_2 d_1 = \beta_2 d_2,$$

$$(3) u_i d_1 = 0 \text{ si } i \geq 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 R_n &= (-1)^{n-1} [n-1]_q u_1 d_1 + \beta_2 (-1)^{n-2} [n-2]_q u_1 d_2 \\ &= ((-1)^{n-1} [n-1]_q \beta_1 + (-1)^{n-2} \beta_2 [n-2]_q) d_1^* \\ &= (-1)^{n-1} ([n-1]_q \beta_1 - \beta_2 [n-2]_q) d_1^* \\ &= (-1)^{n-1} a_{-(n-1)} d_1^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que  $-(n-1)$  est critique. De même,

$$\begin{aligned} u_2 R_n &= (-1)^{n-1} [n-1]_q u_2 d_1 + \beta_2 (-1)^{n-2} [n-2]_q u_2 d_2 + \beta_2 (-1)^{n-3} [n-3]_q u_2 d_3 \\ &= (-1)^{n-1} \beta_2 ([n-1]_q - \beta [n-2]_q + [n-3]_q) d_2 \\ &= (-1)^{n-1} \beta_2 ([n-1]_q - [n-1]_q) d_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ici, l'avant-dernière égalité découle de l'équation (3.1.15) qui a été rappelé dans la discussion précédant la preuve. Enfin, si  $i \geq 3$  :

$$\begin{aligned} u_i R_n &= \beta_2 ((-1)^{n-i+1} [n-i]_q u_i d_{i-1} + (-1)^{n-i} [n-2]_q u_i d_i + (-1)^{n-i-1} [n-i-1]_q u_i d_{i+1}) \\ &= (-1)^{n-i+1} \beta_2 ([n-i+1]_q - \beta [n-i]_q + [n-i-1]_q) d_i \\ &= (-1)^{n-1} \beta_2 ([n-i+1]_q - [n-i+1]_q) d_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\psi$  est bien un morphisme de  $\mathbb{T}Lb_n$ -modules, puisque  $\psi(u_i \begin{smallmatrix} \vdots \\ \bullet \\ \vdots \end{smallmatrix}) = \psi(0) = 0$  pour  $i \geq 1$ . De plus, il est évident que  $R_n \neq 0$ , puisque les  $d_i$  sont tous linéairement indépendants et que le coefficient de  $d_{n-1}$  est non nul si  $\beta_2 \neq 0$ . Le module  $\mathcal{V}_{n,\pm n}$  est de dimension 1 et donc irréductible. Ainsi,  $\ker \psi = 0$ . Il faut maintenant montrer que  $\psi$  est, à une constante près, le seul morphisme possible. Or, d'après la proposition 2.3.6,  $\text{Im } \psi \subseteq \mathcal{R}_{n,-n+2}$ . Or, puisque  $n-2$  n'est pas critique, d'après l'équation (3.2.15) :

$$\mathfrak{G}_{n,-n+2} = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 \mathfrak{G}_{n-1,-n+3} & 0 \\ \hline 0 & \alpha_2 \mathfrak{G}_{n-1,-n+1} \end{array} \right) \quad (4.2.3)$$



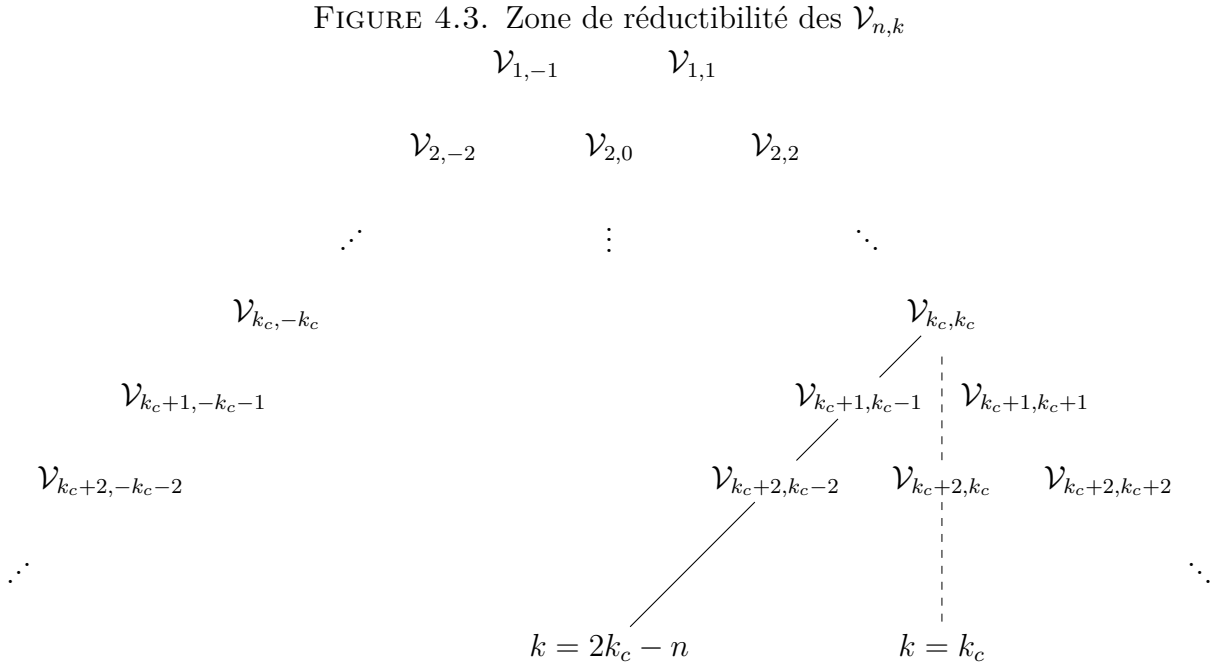
### 4.3. Représentations irréductibles et principales en dehors des racines de l'unité

Dans cette section l'étude des modules cellulaires est complètement dévoilée lorsque le paramètre  $q$  est différent d'une racine de l'unité. Il est montré que les diagrammes de Bratteli donnent une méthode permettant de déterminer si un module cellulaire est réductible ou irréductible. Lorsque le module  $\mathcal{V}_{n,k}$  est réductible, il sera démontré que (toujours lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité) son radical  $\mathcal{R}_{n,k}$  est l'image par morphisme d'un autre module cellulaire. Nous débutons avec le résultat suivant qui nous permet de déterminer dans quels cas les modules cellulaires  $\mathcal{V}_{n,k}$  sont réductibles. Remarquons avant tout la chose suivante :

**Remarque 4.3.1.** *En vertu de la proposition 1.3.15, il est possible de supposer que  $k_c \geq 0$ . Alors, si  $\beta_2 \neq 0$  on pourra supposer que  $k_c > 0$ .*

Soit maintenant  $k_c \in \mathbb{Z}$  un entier critique. Lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité, l'équation (4.1.2) admet une unique solution. Dans ce cas, le diagramme de Bratteli possède une seule ligne critique, passant par la droite  $x = k_c$  sur le diagramme.

**Proposition 4.3.2** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Soit  $k_c > 0$  critique et  $n > |k_c|$ . Alors,  $\mathcal{V}_{n,k}$  est réductible si et seulement si  $2k_c - n \leq k \leq k_c - 1$ .*



DÉMONSTRATION. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . D'après le corollaire 3.2.13, le déterminant de Gram a la forme suivante :

$$\det \mathfrak{G}_{n,k} \doteq \beta_2^{c_{n,k}} (a_{\frac{n+k}{2}} \dots a_{k+1}) (a_{-\frac{n-k}{2}} \dots a_{-1}), \quad (4.3.1)$$



où  $\doteq$  est comme à la proposition 4.1.6. Soit  $k_c > 0$ . Pour que  $\det \mathfrak{G}_{n,k}$  soit nul, il faut donc que  $k + 1 \leq k_c \leq \frac{k+n}{2}$  et donc que  $2k_c - n \leq k \leq k_c - 1$ . Pour que  $\det \mathfrak{G}_{n,-k}$  soit nul, il faut que  $1 \leq k_c \leq \frac{n-k}{2}$  et donc que  $k \leq n - 2k_c$ , c'est-à-dire que  $-k \geq 2k_c - n$ . Ainsi,  $\mathcal{V}_{n,k}$  est réductible si et seulement si  $2k_c - n \leq k \leq k_c - 1$ .  $\square$

En utilisant les diagrammes de Bratteli, ce résultat s'exprime d'une manière simple. Les modules cellulaires sont réductibles si et seulement si ils se retrouvent dans la zone entre les droites  $k = 2k_c - n$  et  $k = k_c$  (voir figure 4.3), cette dernière étant exclue du domaine de réductibilité. Les modules sur la ligne critique (pointillée) de la figure 4.3 sont irréductibles et ceux sur la ligne pleine sont réductibles.

**Lemme 4.3.3** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Soit  $k_c > 0$  critique. Remarquons que dans ce cas,  $\beta_1 = a_{-1} \neq 0$ . Les radicaux des modules cellulaires satisfont à :*

$$\begin{cases} \dim \mathcal{R}_{n,k} = \dim \mathcal{R}_{n-1,k_-} + \dim \mathcal{R}_{n-1,k_+} & \text{si } 2k_c - n \leq k < k_c - 1 \\ \dim \mathcal{R}_{n,k} = \dim \mathcal{R}_{n-1,k_-} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k_+} & \text{si } k = k_c - 1 \\ \dim \mathcal{R}_{n,k} = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

où  $k_+$  et  $k_-$  sont définis à la définition 3.1.4.

DÉMONSTRATION. Supposons que  $k \neq k_c, k_c + 1$  (dans ces deux cas on sait que  $\mathcal{V}_{n,k}$  est irréductible donc la proposition est trivialement vérifiée). Selon les équations (3.2.15) et (3.2.12), la matrice de Gram se décompose comme suit :

$$\mathfrak{G}_{n,k} = U_{n,k}^T \left( \begin{array}{c|c} \gamma'_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_-} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+} \end{array} \right) U_{n,k}, \quad (4.3.3)$$

où, comme à l'équation (3.2.15) ou (3.2.12),  $\gamma'_{n,k} = 1, \beta_1$  ou  $\beta_2$  et  $\gamma_{n,k} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$  ou  $\beta'_1$ . Donc  $\gamma'_{n,k} \neq 0$  (puisque  $a_0$  et  $\beta_1 = a_{-1}$  sont non nuls) et  $\gamma_{n,k} = 0$  si et seulement si  $k = k_c - 1$ . Dans ce dernier cas, le bloc  $\gamma_{n,k} \mathfrak{G}_{n-1,k_+}$  est nul. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \ker \mathfrak{G}_{n,k} = \ker \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \oplus \ker \mathfrak{G}_{n-1,k_+} & \text{si } 2k_c - n \leq k < k_c - 1 \\ \ker \mathfrak{G}_{n,k} = \ker \mathfrak{G}_{n-1,k_-} \oplus \mathbb{C}^{d_{n-1,k_+}} & \text{si } k = k_c - 1 \\ \ker \mathfrak{G}_{n,k} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\square$

D'après la proposition 4.2.1 et le corollaire 3.1.3, il existe un morphisme non nul (unique à une constante près) de  $\mathcal{V}_{n,\pm n}$  vers  $\mathcal{V}_{n,\pm(n-2)}$  si et seulement si  $k_c = \pm(n-1)$ . Il est possible de généraliser ce résultat aux modules cellulaires à des niveaux plus élevés.

**Proposition 4.3.4** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *En tant que  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont symétriques avec } k \geq k'. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

DÉMONSTRATION. Soient  $q, \beta_2 \in \mathbb{C}^*$  et  $\beta_1 \in \mathbb{C}$  (et  $q$  n'est pas une racine de l'unité) et soit  $k_c \in \mathbb{N}$  un entier positif critique. Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n = k_c + m$ . Alors, l'énoncé disant que les  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'})$  sont nuls lorsque  $k$  et  $k'$  ne sont pas symétriques ou lorsque  $k < k'$  découle directement du lemme 4.2.3. La preuve se fera par induction sur  $m$  où  $n = k_c + m$ . Le résultat étant trivialement vrai pour  $n \leq k_c$ . Pour  $m = 1$ , le résultat découle de la proposition 4.2.1 et du corollaire 3.1.3, comme il a été mentionné plus haut. Supposons que le résultat est vrai pour  $m - 1$ . Il faudra maintenant considérer  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l}, \mathcal{V}_{n,k_c-l})$  où  $1 \leq l \leq m$  (où  $l$  a la même parité que  $m$ ) et il y a alors deux cas à étudier :

(1) Si  $l \geq 2$ , alors puisque  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l-2}, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l}, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) &\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l-2}, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) \oplus \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l}, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+l} \oplus \mathcal{V}_{n,k_c+l-2}, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+l-1} \uparrow, \mathcal{V}_{n,k_c-l}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_{n-1}}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+l-1}, \mathcal{V}_{n,k_c-l} \downarrow) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_{n-1}}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+l-1}, \mathcal{V}_{n-1,k_c-l-1} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_c-l+1}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_{n-1}}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+l-1}, \mathcal{V}_{n-1,k_c-l+1}) \simeq \mathbb{C},
\end{aligned}$$

où le quatrième isomorphisme découle de la réciprocity de Frobenius, l'avant-dernier du deuxième isomorphisme (dans l'ordre inverse) et le dernier de l'hypothèse d'induction. Les passages des sommes directes aux inductions et restrictions découlent, respectivement, de la proposition 3.2.5 et des corollaires 3.3.11 et 3.3.12.

(2) Si  $l = 1$ , alors on ne sait pas si  $\mathcal{V}_{n,k_c} \uparrow \simeq \mathcal{V}_{n-1,k_c-1} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_c+1}$  puisque  $k_c$  est critique et l'argument ci-haut ne peut pas être appliqué directement. Or, dans ce cas, le module  $\mathcal{V}_{n,k_c+3}$  existe (comme il se doit,  $k_c + 3$  à la même parité que  $n$  et on peut supposer que  $n > k_c + 1$ ) et donc,

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+1}, \mathcal{V}_{n,k_c-1}) &\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k_c+1} \oplus \mathcal{V}_{n,k_c+3}, \mathcal{V}_{n,k_c-1}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+2} \uparrow, \mathcal{V}_{n,k_c-1}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+2}, \mathcal{V}_{n,k_c-1} \downarrow) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_{n-1}}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+2}, \mathcal{V}_{n-1,k_c-2} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_c}) \\
&\simeq \text{Hom}_{\text{TLb}_{n-1}}(\mathcal{V}_{n-1,k_c+2}, \mathcal{V}_{n-1,k_c-2}) \simeq \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Tous les isomorphismes sont vérifiés pour les mêmes raisons que pour le cas  $l \geq 2$ . Ainsi, la proposition est démontrée.  $\square$

Dans la notation de la proposition précédente, les modules  $\mathcal{V}_{n,k}$  sont irréductibles selon la proposition 4.3.2. Il découle de ceci que  $\mathcal{V}_{n,k} \subset \mathcal{V}_{n,k'}$  si et seulement si  $k$  et  $k'$  sont symétriques avec  $k \geq k'$ . En particulier, la multiplicité de  $\mathcal{V}_{n,k}$  dans  $\mathcal{V}_{n,k'}$  est  $\geq 1$  et  $\mathcal{V}_{n,k} \subseteq \mathcal{R}_{n,k'}$ . Il n'est pas évident *a priori* que cette dernière inclusion est en fait une égalité. Pour voir ceci, il faudra compter les dimensions des radicaux et vérifier que les dimensions des  $\mathcal{R}_{n,k'}$  sont égales aux dimensions des  $\mathcal{V}_{n,k}$ .

**Lemme 4.3.5** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Soit  $k_c \in \mathbb{N}$  critique et soit  $k'$  dans la zone réductible ( $2k_c - n \leq k' \leq k_c - 1$ ). Alors,  $\dim \mathcal{V}_{n,k} = \dim \mathcal{R}_{n,k'}$  où  $k \geq k'$  sont symétriques.*

DÉMONSTRATION. En utilisant la même notation que lors de la preuve de la proposition 4.3.4, posons  $n = k_c + m$ ,  $k' = k_c - l$  et  $k = k_c + l$ ,  $1 \leq l \leq m$ . Pour  $m = 1$  le résultat est vrai selon la proposition 4.2.1. En faisant une induction sur  $n$ , supposons que le résultat tienne pour  $m = 1, 2, \dots, m - 1$ . Comme lors de la preuve de la proposition 4.3.4, considérons deux cas, selon que  $l = 1$  ou  $l > 1$  :

(1) Si  $l > 1$ , alors, selon (4.3.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,k_c-l} &= \dim \mathcal{R}_{n-1,k_c-l-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1,k_c-l+1} \\ &= \dim \mathcal{V}_{n-1,k_c+l+1} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k_c+l-1} \\ &= \dim \mathcal{V}_{n,k_c+l}. \end{aligned}$$

(2) Si  $l = 1$ , alors, encore selon (4.3.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,k_c-l} &= \dim \mathcal{R}_{n-1,k-2} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k} \\ &= \dim \mathcal{V}_{n-1,k+2} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k} \\ &= \dim \mathcal{V}_{n,k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

**Corollaire 4.3.6** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Les modules cellulaires de  $\text{TLb}_n$  admettent la suite de composition suivante :*

$$\begin{cases} 0 \subset \mathcal{V}_{n,k} \subset \mathcal{V}_{n,k'} & \text{si } 2k_c - n \leq k' \leq k_c - 1 \text{ et } k \text{ et } k' \text{ symétriques ;} \\ 0 \subset \mathcal{V}_{n,k} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

De plus,  $\mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{R}_{n,k'}$  et donc  $\mathcal{V}_{n,k'} / \mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{I}_{n,k'}$ .

DÉMONSTRATION. Si  $k$  n'est pas dans la zone réductible, alors la proposition est évidente. Soit donc  $2k_c - n \leq k' \leq k_c - 1$ , en vertu de la proposition 4.3.4, si  $k > k'$  sont symétriques alors il existe un unique (à un scalaire près) morphisme  $\psi_{n,k} : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k'}$ . De plus, par irréductibilité,  $\psi_{n,k}$  est un monomorphisme. Il s'ensuit qu'il existe un sous-module  $M \subsetneq \mathcal{V}_{n,k'}$  tel que  $M \simeq \mathcal{V}_{n,k}$ . D'après la proposition 2.3.6,  $M \subseteq \mathcal{R}_{n,k'}$ . Le lemme 4.3.5 nous enseigne

toutefois que  $\dim M = \dim \mathcal{V}_{n,k'}$  et donc que  $\mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{R}_{n,k'}$ . Cela démontre aussi que  $\mathcal{R}_{n,k'}$  est irréductible, et donc la suite de composition affirmée ci-haut.  $\square$

**Corollaire 4.3.7** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Soit  $k_c$  un entier critique et  $-n \leq k \leq n$ . Alors,*

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{n,k} \downarrow = \text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k} \downarrow) \simeq \mathcal{R}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{R}_{n-1,k_+} & \text{si } 2k_c - n \leq k < k_c - 1; \\ \mathcal{R}_{n,k} \downarrow \simeq \mathcal{R}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_+} & \text{si } k = k_c - 1; \\ \mathcal{R}_{n,k} \downarrow = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

De plus,  $\text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k} \downarrow) \neq \mathcal{R}_{n,k} \downarrow$  si  $k = k_c - 1$ .

**DÉMONSTRATION.** Le dernier cas est trivial car  $\mathcal{V}_{n,k}$  est irréductible. Sinon, on considère les deux cas :

(1) si  $2k_c - n \leq k < k_c - 1$ , alors d'une part,

$$\begin{aligned} \text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k} \downarrow) &\simeq \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_+}) \\ &\simeq \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_-}) \oplus \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_+}) \\ &= \mathcal{R}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{R}_{n-1,k_+}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,k} &= \text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k}) \downarrow \simeq \mathcal{V}_{n,k'} \downarrow \\ &\simeq \mathcal{V}_{n-1,k'_-} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k'_+} \\ &= \mathcal{R}_{n-1,k_-} \oplus \mathcal{R}_{n-1,k_+}; \end{aligned}$$

(2) si  $k = k_c - 1$ , alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,k_c-1} \downarrow &= \text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k_c-1}) \downarrow \simeq \mathcal{V}_{n,k_c+1} \downarrow \\ &\simeq \mathcal{V}_{n-1,k_c} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_c+2} \\ &\simeq \mathcal{V}_{n-1,k_c} \oplus \mathcal{R}_{n-1,k_c-2}. \end{aligned}$$

On remarque enfin que :

$$\begin{aligned} \text{Rad}(\mathcal{V}_{n,k_c-1} \downarrow) &\simeq \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_c-2} \oplus \mathcal{V}_{n-1,k_c}) \\ &\simeq \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_c-2}) \oplus \text{Rad}(\mathcal{V}_{n-1,k_c}) \\ &\simeq \mathcal{R}_{n-1,k_c-2} \not\simeq \mathcal{R}_{n,k_c-1} \downarrow. \end{aligned}$$

$\square$

Considérons la matrice de décomposition  $\mathfrak{D}$  de la proposition 2.3.18 (voir aussi définition 2.3.17). Cette matrice possède des 1 sur sa diagonale et est triangulaire supérieure d'après cette dernière proposition. Soit  $\Sigma$  la matrice de permutation qui envoie l'ensemble ordonné  $\{0, -2, 2, \dots, n-2, -n, n\}$  si  $n$  est pair (ou  $\{-1, 1, -3, \dots, n-2, -n, n\}$  si  $n$  est impair) vers

l'ensemble ordonné  $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$ . Tout les modules cellulaires sont irréductibles à l'exception de ceux situés dans la zone réductible. Il suit alors de (4.3.5) que, si  $\mathfrak{B} = \Sigma \mathfrak{D} \Sigma^T$  :

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & * & & \\ & & & & & & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \dots & & & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Les entrées vides correspondent à des 0. Les lignes du premier (dernier) bloc de  $\mathfrak{B}$  correspondent aux modules cellulaires à gauche (droite) de la zone réductible. Celles du deuxième bloc, correspondent aux modules réductibles. Le bloc de dimension 1 contenant un \* existe si et seulement si  $n \equiv k_c \pmod{2}$ , correspondant alors au module situé sur la ligne critique et dans ce cas  $* = 1$ . Ainsi, selon la proposition 4.3.8, la matrice de Cartan est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4.3.8** ( $\beta_2 \neq 0$ ). *Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors à une permutation des modules cellulaires près, la matrice de Cartan de l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est donnée par :*

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & * & & \\ & & & 0 & \dots & 1 & & 2 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

où le bloc de dimension 1 contenant un \* existe si et seulement si  $n \equiv k_c \pmod{2}$  et dans ce cas  $* = 1$ .

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.3.18, on a que  $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}^T \mathfrak{D}$ . Or,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^T \mathfrak{D} &= \Sigma \mathfrak{B}^T \Sigma^T \Sigma \mathfrak{B} \Sigma^T \\ &= \Sigma \mathfrak{B}^T \mathfrak{B} \Sigma^T.\end{aligned}$$

Il suffit de calculer  $\mathfrak{B}^T \mathfrak{B}$  et on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 4.3.9** ( $\beta_2 \neq 0$  et  $q$  générique). *Soit  $q$  générique,  $\beta_1 \in \mathbb{C}$  et  $\beta_2 \in \mathbb{C}^*$ . Les modules principaux et cellulaires de  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  satisfont à la relation :*

$$\mathcal{V}_{n,k} \simeq \begin{cases} \mathcal{P}_{n,k} & \text{si } -n \leq k \leq k_c; \\ \mathcal{P}_{n,k} / \mathcal{V}_{n,k'} & \text{si } k_c + 1 \leq k \leq n; \end{cases} \quad (4.3.9)$$

De plus, si  $2k_c - n \leq k \leq k_c - 1$  ou  $k_c + 1 \leq k \leq n$ , alors,

$$\mathrm{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}. \quad (4.3.10)$$

Dans toutes les équations ci-haut,  $k$  et  $k'$  sont symétriques.

**Remarque 4.3.10.** *L'équation (4.3.10) signifie que  $\mathcal{P}_{n,k}$  est alors l'unique extension non triviale de  $\mathcal{V}_{n,k'}$  par  $\mathcal{I}_{n,k}$ .*

DÉMONSTRATION. Il faudra considérer trois cas séparément :

- (1) Si  $-n \leq k \leq 2k_c - n - 1$  ou  $k = k_c$ , alors la matrice (4.3.8) implique que la longueur de composition de  $\mathcal{P}_{n,k}$  est 1 et donc que  $\mathcal{P}_{n,k} \simeq \mathcal{V}_{n,k}$ . Or, comme  $k$  n'est pas dans la zone réductible,  $\mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{I}_{n,k}$ .
- (2) Si  $2k_c - n \leq k \leq k_c - 1$ , alors (4.3.8) nous indique que la longueur de composition de  $\mathcal{P}_{n,k}$  est 2. De plus, en écrivant  $k = k_c - l$  pour  $l \in \mathbb{N}$ , les facteurs de composition sont  $\mathcal{I}_{n,k_c-l}$  et  $\mathcal{I}_{n,k_c+l} = \mathcal{V}_{n,k_c+l}$ . Il y a donc une suite de composition de la forme :

$$0 \subset M \subset \mathcal{P}_{n,k_c-l}$$

avec  $M \simeq \mathcal{V}_{n,k_c \pm l}$ . Or,  $\mathcal{P}_{n,k_c-l} / M \simeq \mathcal{I}_{n,k_c-l}$ , ainsi,  $M \simeq \mathcal{V}_{n,k_c+l}$ . Il existe donc une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n,k'} \rightarrow \mathcal{P}_{n,k} \rightarrow \mathcal{I}_{n,k} \rightarrow 0 \quad (4.3.11)$$

où  $k' = k_c + l$ . En appliquant le foncteur contravariant  $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{V}_{n,k_c+l})$ , il en résulte une suite exacte longue :

$$\begin{aligned}0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{V}_{n,k'}, \mathcal{V}_{n,k'}) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow \mathrm{Ext}_1(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow \dots\end{aligned}$$

(voir annexe A). Or,  $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) = 0$ , car sinon il y aurait un quotient  $\mathcal{P}_{n,k} / N \simeq \mathcal{V}_{n,k'} \simeq \mathcal{I}_{n,k'}$ , ce qui est impossible puisque  $\mathcal{P}_{n,k}$  n'est pas le module principal associé à  $\mathcal{I}_{n,k'}$ . De plus,  $\mathrm{Hom}(\mathcal{V}_{n,k'}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}$  en vertu de 2.3.9 et  $\mathrm{Ext}_1(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) = 0$  par

projectivité. En découle une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et  $\text{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}$ . Il existe donc, à isomorphisme près, une unique extension non triviale (voir annexe A) de  $\mathcal{V}_{n,k'}$  par  $\mathcal{I}_{n,k}$ , plus exactement,  $\mathcal{V}_{n,k}$  en vertu du corollaire 4.3.5.

- (3) Pour  $k_c + 1 \leq k \leq n$ , posons  $k = k_c + l$  avec  $l \in \mathbb{N}$  et  $k' = k_c - l$ . La matrice de Cartan nous informe que l'on a une suite d'inclusion :

$$0 \subset N \subset M \subset \mathcal{P}_{n,k_c+l}.$$

De plus,  $\mathcal{P}_{n,k_c+l}/M \simeq \mathcal{I}_{n,k_c+l} \simeq \mathcal{V}_{n,k_c+l}$  selon la proposition A.0.9. D'autre part, considérons la suite de sous-modules :

$$0 \subseteq \mathcal{P}_{n,k_c+l}^{\leq 1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_{n,k_c+l}^{\leq n} = \mathcal{P}_{n,k_c+l}$$

où il pourra être utile de rappeler que  $\mathcal{P}^{\leq \lambda} = \mathcal{A}^{\leq \lambda} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{\lambda} = \mathcal{Q}(\lambda) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}$  (voir définition 2.3.14 et l'équation (2.1.7)). Selon la proposition 2.3.19 et la matrice (4.3.7) les deux seuls modules de  $\mathcal{P}_{n,k_c+l}^{\lambda}$  non nuls sont  $\mathcal{P}_{n,k_c+l}^{k_c \pm l} \simeq \mathcal{V}_{n,k_c \pm l}$ . Le module  $\mathcal{P}_{n,k_c+l}$  admet donc la filtration cellulaire (telle que chaque quotient est un module cellulaire) suivante :

$$0 \subset \mathcal{V}_{n,k_c-l} \subset \mathcal{P}_{n,k_c+l}$$

avec  $\mathcal{P}_{n,k_c+l} / \mathcal{V}_{n,k_c-l} \simeq \mathcal{V}_{n,k_c+l}$ . Il s'ensuit que

$$0 \subset \mathcal{V}_{n,k_c+l} \subset \mathcal{V}_{n,k_c-l} \subset \mathcal{P}_{n,k_c+l}$$

est une suite de composition pour  $\mathcal{P}_{n,k_c+l}$ . On a donc une suite exacte de la même forme que (4.3.11) :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n,k'} \rightarrow \mathcal{P}_{n,k} \rightarrow \mathcal{I}_{n,k} \rightarrow 0. \quad (4.3.12)$$

Remarquons que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}$  en vertu de 4.3.4 et que  $\dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) = d_{k',k} = 1$ . En appliquant le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{V}_{n,k_c-l})$  à la suite exacte courte ci-haut, il en résulte une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

La troisième flèche doit forcément être nulle, d'où la quatrième doit être injective. Mais elle doit aussi être surjective, donc  $\text{Ext}_1(\mathcal{I}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}$  et il existe bien une unique extension (non triviale) de  $\mathcal{V}_{n,k_c-l}$  par  $\mathcal{V}_{n,k_c+l}$ .

□

Il pourra être utile de reformuler l'énoncé de la proposition 4.3.9 comme suit. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $-n \leq k \leq n$ , alors :

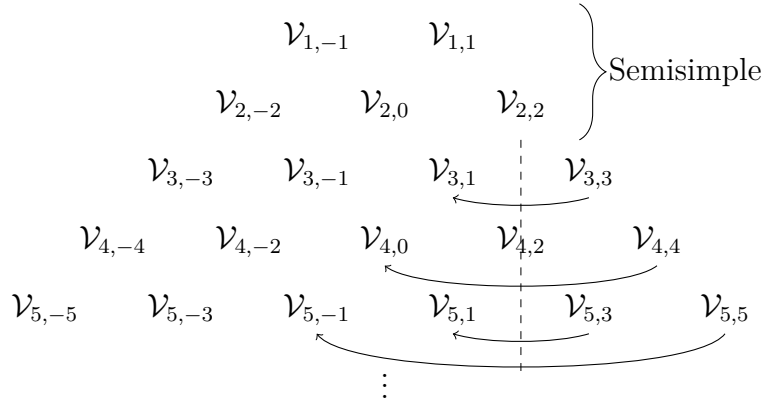
$$\mathcal{V}_{n,k} \simeq \begin{cases} \mathcal{P}_{n,k} \quad (\simeq \mathcal{I}_{n,k}) & \text{si } -n \leq k \leq 2k_c - n - 1 ; \\ \mathcal{P}_{n,k} \quad (\not\simeq \mathcal{I}_{n,k}) & \text{si } 2k_c - n \leq k \leq k_c - 1 ; \\ \mathcal{P}_{n,k} \quad (\simeq \mathcal{I}_{n,k}) & \text{si } k = k_c ; \\ \mathcal{P}_{n,k} / \mathcal{V}_{n,k'} \quad (\simeq \mathcal{I}_{n,k}) & \text{si } k_c + 1 \leq k \leq n . \end{cases} \quad (4.3.13)$$

Il est maintenant possible de donner la structure générale de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ , pour  $\beta_2 \neq 0$  et lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité. Remarquons avant d'énoncer le théorème final de cette section qu'en vertu de (4.3.5) les dimensions des modules irréductibles satisfont à :

$$\dim \mathcal{I}_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{p} - \binom{n}{p'} & \text{si } 2k_c - n \leq k \leq k_c - 1 ; \\ \binom{n}{p} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.3.14)$$

où  $p = \frac{n-|k|}{2}$  et  $p' = \frac{n-|k'|}{2}$ . Nous sommes enfin outillés pour énoncer le théorème final de

FIGURE 4.4. Les morphismes (tous injectifs) entre modules cellulaires pour  $k_c = 2$



cette section :

**Théorème 4.3.11** ( $\beta_2 \neq 0$ ). Soit  $\beta_2, q \in \mathbb{C}^*$  avec  $q$  qui n'est pas une racine de l'unité et  $\beta_1 \in \mathbb{C}$ , alors

$$\text{TLb}_n \text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \bigoplus_{-n \leq k \leq n} \delta_{n,k} \mathcal{P}_{n,k}, \quad (4.3.15)$$

où  $\mathcal{P}_{n,k}$  est le module principal associé à l'irréductible  $\mathcal{I}_{n,k}$  et  $\delta_{n,k}$  la dimension de  $\mathcal{I}_{n,k}$ . Les modules  $\mathcal{P}_{n,k}$  et les dimensions  $\delta_{n,k}$  satisfont :

- (1)  $\mathcal{P}_{n,k} \simeq \mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{I}_{n,k}$  si  $a_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas l'algèbre est semisimple et alors la décomposition (4.3.15) est la même que (4.1.1) et  $\delta_{n,k} = \dim \mathcal{I}_{n,k} = \binom{n}{p}$  ;
- (2) Si  $k_c$  est tel que  $a_{k_c} = 0$ , alors  $k_c$  est l'unique entier satisfaisant l'équation  $a_k = 0$  et  $\text{TLb}_n$  est semisimple pour tout  $n \leq |k_c|$ . Pour  $n \geq k_c + 1$ , alors les modules principaux  $\mathcal{P}_{n,k}$  sont donnés par (4.3.13) et  $\delta_{n,k} = \dim \mathcal{I}_{n,k}$  est donné par (4.3.14).



Dans le cas où l'algèbre est non semisimple avec  $k_c > 0$  (par exemple si  $k_c = 2$ ), alors l'information récoltée dans les sections précédentes peut être résumée dans un diagramme de Bratteli tel qu'illustré à la figure 4.4.

#### 4.4. Représentations irréductibles et principales lorsque $\beta_2 = 0$

Dans cette section, nous nous attaquons à la théorie de la représentation de  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  lorsque le paramètre  $\beta_2$  est nul. Cela signifie que  $0 \in \mathbb{Z}$  est critique. De plus, les nombres  $a_k$  deviennent :

$$a_k = \beta_1[k]_q. \quad (4.4.1)$$

**Remarque 4.4.1.** Lorsque  $\beta_2 = \beta_1 = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est critique pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

Lorsque  $\beta_1 \neq 0$ , on aura donc que l'équation 4.4.1 sera nulle si et seulement si  $[k]_q = 0$  et  $k \in \mathbb{Z}$  est critique si et seulement si  $q^{2k} = 1$ . On a donc la proposition suivante.

**Proposition 4.4.2** ( $\beta_2 = 0$ ). Soit  $\beta_1 \neq 0$ , et  $q \in \mathbb{C}^*$  quelconque, alors :

- (1) si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors  $0 \in \mathbb{Z}$  est l'unique entier critique ;
- (2) s'il existe  $\gamma \in \mathbb{N}$  tel que  $q^{2\gamma} = 1$ , alors l'ensemble des solutions de (4.4.1) est donné par  $\{m\gamma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .

Supposons pour le reste de cette section que  $q$  n'est pas une racine de l'unité. Dans ce cas, en vertu du résultat ci-dessous, le diagramme de Bratteli a la forme illustré à la figure 4.5.

**Proposition 4.4.3** ( $\beta_2 = 0$  et  $q$  générique).

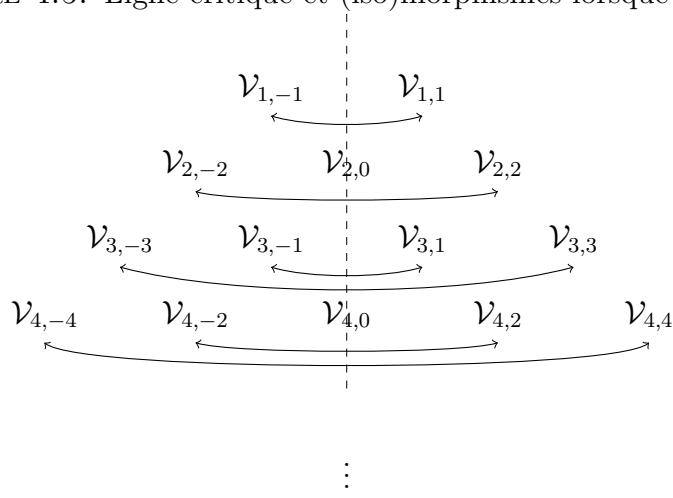
$$\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = \pm k' \text{ (symétriques ou identiques)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

**DÉMONSTRATION.** D'une part, d'après la proposition 2.2.11, on a des isomorphismes  $\psi_{n,k} : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,-k}$  pour tout  $-n \leq k \leq n$ . D'autre part, le lemme 4.2.3 nous informe qu'il n'y a pas de morphisme non nul entre  $\mathcal{V}_{n,k}$  et  $\mathcal{V}_{n,k'}$  lorsque  $k$  et  $k'$  ne sont pas symétriques (c'est-à-dire lorsque  $k \neq \pm k'$ ). Il reste à montrer que  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k'}) \simeq \mathbb{C}$  lorsque  $k = \pm k'$ . Or, d'après la proposition 2.3.9,  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \simeq \mathbb{C}$  si  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,k} \not\equiv 0$ . En prenant  $k > 0$ , on s'assure que cette condition est vérifiée. Puisque  $\mathcal{V}_{n,-k} \simeq \mathcal{V}_{n,k}$ , ceci termine la démonstration.  $\square$

Remarquons que lorsque  $\beta_2 = 0$ , on peut, sans perte de généralité, considérer seulement les  $\mathcal{V}_{n,|k|}$  en vertu de la proposition 2.2.11. De plus, avec  $\beta_1 \neq 0$  et  $q$  générique,  $a_k \neq 0$  pour tout entier  $k$ , le corollaire 3.2.17 implique alors que les déterminant de Gram sur les  $\mathcal{V}_{n,k}$  avec  $k > 0$  sont tous non nuls. La suite de composition des modules cellulaires sera donc donnée par :

$$0 \subset \mathcal{V}_{n,k}$$

FIGURE 4.5. Ligne critique et (iso)morphismes lorsque  $k_c = 0$ .



pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, la matrice de décomposition  $\mathfrak{D}$  (voir définition 2.3.17) devient :

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & & * & & \end{pmatrix},$$

où, comme précédemment, la ligne et la colonne contenant le  $*$  n'existent que si  $n$  est pair et  $*$  = 1 dans ce dernier cas.

**Proposition 4.4.4** ( $\beta_2 = 0$  et  $q$  générique). *La matrice de Cartan de  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est donnée par*

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 \\ & & & * \end{pmatrix}, \quad (4.4.3)$$

où la ligne et la colonne contenant le  $*$  n'existent que si  $n$  est pair et  $*$  = 1 dans ce dernier cas.

Tout comme lors de la section précédente il sera possible, à partir de la matrice de Cartan, d'exprimer les modules projectifs  $\mathcal{P}_{n,k}$  en fonction des irréductibles  $\mathcal{I}_{n,k}$  ( $\simeq \mathcal{V}_{n,k}$  dans ce cas). En découle alors le corollaire suivant.

**Corollaire 4.4.5.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$ . Les modules projectifs de  $\mathrm{TLb}_n$  satisfont à :*

$$\mathcal{V}_{n,k} \simeq \begin{cases} \mathcal{P}_{n,0} \quad (\simeq \mathcal{I}_{n,0}) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \text{ et } k = 0; \\ \mathcal{P}_{n,k} / \mathcal{V}_{n,k} \quad (\simeq \mathcal{I}_{n,k}) & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

De plus, dans le cas où  $k \neq 0$ , alors  $\mathcal{P}_{n,k}$  est l'unique extension de  $\mathcal{V}_{n,k}$  par  $\mathcal{V}_{n,k}$ .

DÉMONSTRATION. La matrice de Cartan nous informe que l'on a la suite de composition suivante pour  $\mathcal{P}_{n,k}$  :

$$0 \subset \mathcal{V}_{n,k} \subset \mathcal{P}_{n,k}$$

et que  $\mathcal{P}_{n,k} / \mathcal{V}_{n,k} \simeq \mathcal{V}_{n,k}$ , c'est-à-dire que l'on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow \mathcal{P}_{n,k} \rightarrow \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur contravariant  $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{V}_{n,k})$  on obtient une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ext}_1(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \rightarrow \text{Ext}_1(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \rightarrow \dots$$

où  $\text{Ext}_1(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) = 0$  par projectivité et  $\text{Hom}_{\text{TLb}_n}(\mathcal{P}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \simeq \mathbb{C}$  puisque  $d_{k,\pm k} = 1$ . De la même manière qu'à la proposition 4.3.9 on trouve donc que  $\text{Ext}_1(\mathcal{V}_{n,k}, \mathcal{V}_{n,k}) \simeq \mathbb{C}$ .  $\square$

Puisqu'ici,  $\mathcal{I}_{n,k} \simeq \mathcal{V}_{n,k}$ , la dimension des irréductibles est donnée directement par  $\binom{n}{p}$ . Il en découle donc le théorème final de structure suivant :

**Théorème 4.4.6.** *Soit  $\beta_2 = 0$  et  $\beta_1, \beta \in \mathbb{C}$ , alors si  $q$  n'est pas une racine de l'unité :*

$$\text{TLb}_n \text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \bigoplus_{-n \leq k \leq n} \binom{n}{\frac{n-|k|}{2}} \mathcal{P}_{n,k}, \quad (4.4.5)$$

où  $\mathcal{P}_{n,k}$  est le module principal associé à l'irréductible  $\mathcal{I}_{n,k}$  et est donné par (4.4.4).



# Conclusion

---

Ce mémoire a révélé partiellement la théorie de la représentation de l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ , avec une attention particulière portée sur le cas  $\beta_2 = 0$ . D'abord, il été démontré au chapitre 1 que l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n$ , définie algébriquement, est isomorphe à la représentation diagrammatique (propositions 1.3.5, 1.3.6 et 1.3.7). Au chapitre 2, la cellularité de  $\mathrm{TLb}_n$  a été démontrée et ce, pour toutes valeurs possibles des paramètres (proposition 2.2.3). Les modules cellulaires ont été étudiés au chapitre 3 à l'aide des matrices de Gram. En particulier, les déterminants de Gram ont été calculés (corollaires 3.2.13 et 3.2.17). Ceux-ci donnent les conditions sur l'irréductibilité des modules cellulaires. Au passage, un élément central  $F_n$  a été introduit et ses valeurs propres ont été calculées sur les modules cellulaires (proposition 3.1.2). Le chapitre s'est terminé avec le calcul des inductions des modules cellulaires (propositions 3.3.7 et 3.3.9). Enfin, le chapitre 4 a utilisé les résultats obtenus dans les sections précédentes afin d'identifier, lorsque  $q$  est générique, les radicaux des modules cellulaires (corollaire 4.3.6), les modules irréductibles et les modules principaux de  $\mathrm{TLb}_n$  (propositions 4.3.9 et 4.4.4). Les théorèmes 4.3.11 et 4.4.6 donnent la représentation régulière  ${}_{\mathrm{TLb}_n}\mathrm{TLb}_n$  lorsque  $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_2 = 0$  respectivement.

La suite logique de ce mémoire consisterait en l'étude de  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  avec  $q$  une racine de l'unité et  $\beta_1, \beta_2$  quelconques. Dans ce cas, certains des arguments de la section 4.3 ne s'appliquent pas, en particulier, le diagramme de Bratteli possède une infinité de lignes critiques et les morphismes, bien que toujours *vers l'intérieur* du diagramme, peuvent traverser plusieurs lignes critiques si  $n$  est assez grand. Les principales étapes d'une éventuelle suite de cette recherche, tous dans le cas  $q$  une racine de l'unité, peuvent être résumées par les points suivants :

- calculer les conditions de réductibilité pour les modules  $\mathcal{V}_{n,k}$  ;
- déterminer les morphismes entre les modules cellulaires et la dimension des groupes d'homomorphisme ;
- étudier l'injectivité des morphismes entre modules cellulaires et donner la structure du radical  $\mathcal{R}_{n,k}$  de  $\mathcal{V}_{n,k}$  ;
- décomposer la représentation régulière de  $\mathrm{TLb}_n$  en modules indécomposables ;

– classifier tous les modules indécomposables de  $\mathbf{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  à isomorphisme près.

Le travail menant aux trois premiers points ci-haut est avancé, mais l'étude des deux derniers points reste à compléter.

# Bibliographie

---

- [1] D. Ridout A. MORIN-DUCHESNE, J. Rasmussen : Boundary algebras and kac modules for logarithmic minimal models. *Nucl. Phys.*, B899:677–769, 2015.
- [2] J de Gier A. NICHOLS : The two boundary temperley-lieb algebra. *Journal of Algebra*, 321:1132–1167, 2009.
- [3] I. ASSEM : *Algèbres et modules*. Masson et Les Presses de l’Université d’Ottawa, 1997.
- [4] R.J. BAXTER : *Exactly solved models in statistical mechanics*. De Gruyter, 2010.
- [5] Y. Saint-Aubin D. RIDOUT : Standard modules, induction and the structure of the temperley-lieb algebra. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 18:957–1041, 2014.
- [6] H. Wenzl F. GOODMAN : The temperley-lieb algebra at roots of unity. *Pac. J. Math.*, 161:307–334, 1993.
- [7] E. Lieb H. N. TEMPERLEY : Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretic problems associated with regular plane lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem. . *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 322:251–280, 1971.
- [8] Y. Saint-Aubin J. BELLETÈTE, D. Ridout : Restriction and induction of indecomposable modules over the temperley–lieb algebras. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 51(4):045201, 2018.
- [9] G.I. Lehrer J.J. GRAHAM : Cellular algebras. *Invent. Math.*, 123:1–34, 1996.
- [10] G.I. Lehrer J.J. GRAHAM : The representation theory of affine temperley-lieb algebras. *Enseign. Math.*, 44:173–218, 1998.
- [11] V. JONES : Index of subfactors. *Invent. Math.*, 72:1–25, 1983.
- [12] S. L. Lins L. H. KAUFFMAN : *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants on 3-manifolds*. Princeton University Press, 1994.
- [13] P. MARTIN : *Potts models and related problems in statistical mechanics*. World Scientific, 1991.
- [14] A. MATHAS : *Iwahori-Hecke Algebras and Schur Algebras of the Symmetric Group*. volume 15 of University Lecture Series. AMS, 1998.
- [15] A. NICHOLS, V. RITTENBERG et J. de GIER : One-boundary temperley–lieb algebras in the xxz and loop models. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2005(03):P03003, 2005.
- [16] H. Saleur P. MARTIN : The blob algebra and the periodic temperley-lieb algebra. *Lett. Math. Phys.*, 30:189–206, 1994.
- [17] D. Woodcock P.P. MARTIN : On the structure of the blob algebra. *Journal of Algebra*, 225:957–988, 2000.

- [18] C. Xi S. KONIG : Cellular algebras and quasi-hereditary : A comparison. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 5:71–75, 1999.
- [19] V. TURAEV : *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. De Gruyter, 2010.
- [20] C.M. Ringel V. DLAB : Quasi-hereditary algebras. *Illinois Journal of Mathematics*, 33(2):280–291, 1989.
- [21] H. Saleur V. PASQUIER : Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups. *Nucl. Phys. B.*, 330:523–556, 1990.
- [22] B. WESTBURY : The representation theory of the temperley-lieb algebras. *Math. Zeit.*, 219:539–565, 1995.



# Annexe A

---

## Résultats sur les algèbres associatives utilisés dans ce mémoire

Dans cette annexe seront rappelés plusieurs définitions et résultats de base sur les  $\mathbb{K}$ -algèbres associatives unifères. La première définition concerne le module dual d'un  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $V$ .

**Définition A.0.7.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative et unifère sur un corps  $\mathbb{K}$  et soit  $V$  un  $\mathcal{A}$ -module (à gauche). Alors, le module dual de  $V$  est noté  $V^*$  et est donné par  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ .

Si  $V$  est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche, alors  $V^*$  est un  $\mathcal{A}$ -module à droite de la manière suivante : pour  $\varphi \in V^*$ ,  $(\varphi a)(v) = \varphi(av)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $v \in V$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et considérons le  $\mathcal{A}$ -module  ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ . La représentation associée sera appelée la *représentation régulière* de  $\mathcal{A}$ . Dans [14] et [3], on peut trouver les trois résultats suivants, concernant les modules apparaissant dans le module  ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ .

**Proposition A.0.8.** Une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  de dimension finie possède un nombre fini de modules projectifs indécomposables  $\mathcal{P}_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , dits principaux. Ceux-ci sont en bijection avec les modules irréductibles qui sont donnés par  $\mathcal{P}_j / \text{Rad}(\mathcal{P}_j) \simeq \mathcal{I}_j$ . De plus, il existe un isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules :

$${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{j=1}^r (\dim \mathcal{I}_j) \mathcal{P}_j.$$

**Proposition A.0.9.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre,  $\mathcal{P}$  un module principal de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{I}$  son irréductible associé. Si  $N \subseteq \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}/N$  est irréductible, alors  $\mathcal{P}/N \simeq \mathcal{I}$ .

Le résultat suivant peut être trouvé dans [14].

**Proposition A.0.10.** Soit  $M$  un module sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{P}$  un module projectif indécomposable. Soit  $\mathcal{I} = \mathcal{P} / \text{Rad}(\mathcal{P})$  son irréductible associé. Alors,

$$[M : \mathcal{I}] = \dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}, M),$$

où  $[M : \mathcal{I}]$  désigne la multiplicité de Jordan-Hölder de  $\mathcal{I}$  dans  $M$ .

Le théorème suivant, dit d'adjonction, est un résultat extrêmement important en théorie de la représentation des algèbres. Pour une preuve, se référer à [3].

**Théorème A.0.11** (Théorème d'adjonction). *Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbres,  ${}_A L$  un  $\mathcal{A}$ -module,  ${}_B M_A$  un  $(\mathcal{B} - \mathcal{A})$ -bimodule et  ${}_B N$  un  $\mathcal{B}$ -module. Alors, en tant que  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A L, N).$$

On dira donc que les foncteurs  $\mathrm{Hom}_B(\cdot, N)$  et  $\cdot \otimes_A L$  sont *adjoints*. Soit maintenant  $B \subset A$  une inclusion d'algèbres, alors la restriction  $\downarrow_B^A$  est un foncteur de la catégorie des  $A$ -modules vers la catégorie des  $B$ -modules. De même,  $\uparrow_A^B$  est un foncteur de la catégorie des  $B$ -modules vers la catégorie des  $A$ -modules.

**Proposition A.0.12** (Réciprocité de Frobenius). *Soit  $B \subset A$  deux algèbres associatives de dimension finies sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $M$  un  $B$ -module et  $N$  un  $A$ -module. Alors, les foncteurs  $\uparrow_A^B$  et  $\downarrow_B^A$  sont adjoints, c'est-à-dire qu'en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriels,*

$$\mathrm{Hom}_A(M \uparrow_A^B, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, N \downarrow_B^A). \quad (\text{A.0.6})$$

Nous terminons cette annexe avec la définition et quelques résultats sur les groupes d'extension. Soit  $M$  et  $N$  deux  $\mathcal{A}$ -modules. Considérons les foncteurs  $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \cdot)$  (covariant) et  $G = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, N)$  (contravariant). Soit  $F_n$  le  $n^e$  foncteur dérivé (à droite) de  $F$  et  $G_n$  le  $n^e$  foncteur dérivé (à droite) de  $G$ . On sait que  $F_n(N) = G_n(M)$  (voir [3]).

**Définition A.0.13** (Groupes d'extension). *On notera par  $\mathrm{Ext}_n(M, N)$  la valeur commune de  $F_n(N)$  et  $G_n(M)$ . En particulier,  $\mathrm{Ext}_n(M, N) = F_1(N) = G_1(M)$  sera appelé groupe d'extension de  $N$  par  $M$ .*

**Proposition A.0.14.** *Soit  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$  une suite exacte courte de  $A$ -modules et  $M'$  un  $\mathcal{A}$ -module. Alors il existe des suite exactes longues :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, M') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M') \rightarrow \mathrm{Ext}_1(N, M') \rightarrow \\ \mathrm{Ext}_1(M, M') \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Ext}_{n-1}(L, M') \rightarrow \mathrm{Ext}_n(N, M') \rightarrow \mathrm{Ext}_n(M, M') \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', L) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N) \rightarrow \mathrm{Ext}_1(M', L) \rightarrow \\ \mathrm{Ext}_1(M', M) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Ext}_{n-1}(M', N) \rightarrow \mathrm{Ext}_n(M', L) \rightarrow \mathrm{Ext}_n(M', M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Le premier groupe d'extension possède une propriété très utile :

**Proposition A.0.15.** (1) *Si  $\mathrm{Ext}_1(M, N) = 0$ , alors  $M \oplus N$  est l'unique extension (à isomorphisme près) de  $N$  par  $M$  ; celle-ci sera dite extension triviale.*

(2) *Si  $\mathrm{Ext}_1(M, N) \simeq \mathbb{C}$ , alors il existe, à isomorphisme près, une unique extension non triviale de  $N$  par  $M$ .*

# Annexe B

## Calculs sur les algèbres TL et TLb

Cet annexe donne les détails techniques de trois résultats utilisés dans le corps du texte : la surjectivité de la fonction  $\theta$  défini à la section 1.3, le cas  $k < 0$  de la proposition 3.1.2 et le calcul d'une relation de récurrence pour les nombres  $c_{n,k}$  introduits à la section 3.2.2. Nous débutons par la preuve de la surjectivité de l'application  $\theta$ . Pour ce faire, plusieurs lemmes techniques seront nécessaires.

**Lemme B.0.16.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors :*

(1) pour  $k \leq n + 1$  ( $k \equiv 1 \pmod{2}$ ), les diagrammes



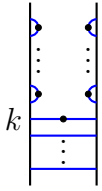
où le cercle vide signifie que le lien peut être décoré ou non, sont dans l'image de  $\theta : \text{TLb}_n \rightarrow D_n^\bullet$ . La cas  $k = n + 1$  représente le cas où le diagramme n'a que des arcs simples de 0 à  $n$  ( $n \equiv 0 \pmod{2}$ );

(2) pour  $k_g \leq k_d \leq n - 1$ , les diagrammes



sont dans l'image de  $\theta$ .

DÉMONSTRATION. (1) L'élément  $(U_0)(U_1U_0)(U_2U_1U_0)\dots(U_{k-1}U_{k-2}\dots U_1U_0)$  est exact-

tement le diagramme . En enlevant les  $U_0$  dans les parenthèses appropriées,

il est possible de former tout diagramme de la forme (B.0.7).

(2) On utilise l'observation suivante :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \circ \\ | \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \end{array} = U_j \begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \circ \\ | \\ \vdots \end{array} .$$

De sorte qu'en agissant avec les diagrammes élémentaires  $U_j$  sur (B.0.7), il est possible de faire remonter par bond de deux le lien transversal en position  $k_g$  de (B.0.7). Remarquons que  $k_g \equiv k_d \pmod{2}$  et donc après un nombre suffisant (fini) de multiplications par des diagrammes  $U_i$ , ce lien transversal sera déplacé en position  $k_d$ . On obtiendra alors le diagramme (B.0.8).

□

Soit  $D$  un diagramme de  $D_n^\bullet$  et supposons que les sites de la position  $i$  à la position  $j$  sont tous reliés par des arcs, que le site  $i$  ouvre un arc et que le site  $j$  ferme un arc. On dira alors que les arcs reliant les sites  $i$  à  $j$  forment *un patron de  $\frac{j-i+1}{2}$  arcs imbriqués*. Par exemple, si

$$D = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \vdots \\ | \\ \circ \\ | \\ \vdots \\ | \\ \bullet \end{array} \in \text{TLb}_{10},$$


alors  $D$  possède un patron de un arc imbriqué de 1 à 2 et un patron de trois arcs imbriqués de 4 à 9 sur sa face gauche. De même, il y a un patron de trois arcs imbriqués sur la face droite de 2 à 7 et enfin un patron de un arc de 9 à 10. On remarque qu'un patron d'arcs imbriqués correspond à l'image par la fonction  $\psi$  de 1.3.5 d'une sous-trajectoire.

**Remarque B.0.17.** *Il est utile d'observer que*

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \circ \\ | \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \end{array} = U_j \begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \circ \\ | \\ \vdots \end{array} .$$

*Cette observation peut être répétée pour construire d'autres imbrications d'arcs comme l'illustre*

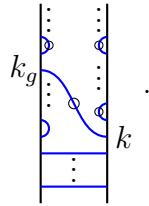
*l'identité suivante :  $U_{j+2}U_j \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \vdots \\ | \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \\ | \\ \vdots \end{array}$ . Ainsi,  $U_{j+1}U_{j+2}U_j \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \vdots \\ | \\ \circ \end{array}$  donne un diagramme avec trois*

arcs imbriqués de la forme :  . On voit donc bien que cette procédure permet de construire, à partir de  $p$  arcs simples, n'importe quel patron de  $p$  arcs imbriqués possibles.

Avec ces observations, la preuve de la proposition 1.3.7 devient alors aisée. Nous énonçons la proposition à titre de rappel.

**Proposition B.0.18.** *L'application  $\theta : \text{TLb}_n \rightarrow D_n^\bullet(\beta, \beta_1, \beta_2)$  définie par  $u_i \mapsto U_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , est un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres.*

PREUVE DE LA SURJECTIVITÉ DE  $\theta$  DANS 1.3.7. Soit  $D \in D_n^\bullet$  et soit  $p$  le nombre d'arcs sur un côté de  $D$  (donc le nombre d'arc total divisé par deux). Soit aussi  $k_g$  et  $k_d$  les positions, sur les faces gauche et droite de  $D$  respectivement, du lien transversal décorable (supérieur) comme dans le diagramme (B.0.8). D'après le lemme B.0.16, il est possible de former d'abord le diagramme (B.0.7) pour  $k = 2p + 1$ , où chaque côté possède  $p$  arcs simples, puis le diagramme (B.0.8) où  $k_g$  est lié au nombre  $p_g$  d'arcs au-dessus du lien transversal par  $p_g = \frac{k_g - 1}{2}$  :



Similairement, si  $p_d$  dénote le nombre d'arcs au-dessus du site  $k_d$  sur le côté droit du diagramme, une action par la droite similaire à celle du lemme B.0.16 (2) amène le point d'attache droit du lien transversal au point  $k_d = 2p_d + 1$ . Enfin, la remarque B.0.17 permet d'obtenir les patrons d'arcs imbriqués voulus sur les faces gauche et droite du diagramme.  $\square$

Nous enchaînons avec la partie  $k < 0$  de la preuve de la proposition 3.1.2.

CAS  $k < 0$  DE LA PROPOSITION 3.1.2. Soit  $k > 0$ , alors le module  $\mathcal{V}_{n,-k}$  est cyclique avec

$$v_{n,-k} = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}$$

comme générateur. De la même manière que pour le cas  $k > 0$ , tous les arcs traversent, de sorte que le calcul se réduit au calcul de  $F_k v_{k,-k}$ . Ainsi, le calcul est identique à l'exception

du défaut supérieur :  $F_k v_{k,-k} = X_1 + X_2$  où

$$X_1 = ie^{-\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \vdots \\ \text{Diagram 2} \end{array} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \vdots \\ \text{Diagram 4} \end{array} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k (a \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \vdots \\ \text{Diagram 6} \end{array} + b \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \vdots \\ \text{Diagram 8} \end{array}) \quad (\text{B.0.9})$$

et

$$X_2 = -ie^{\frac{i\lambda}{2}} \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \vdots \\ \text{Diagram 10} \end{array} = (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^k \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \vdots \\ \text{Diagram 12} \end{array} = (-ie^{\frac{i\lambda}{2}})^k (a \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \vdots \\ \text{Diagram 14} \end{array} + b \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ \vdots \\ \text{Diagram 16} \end{array}). \quad (\text{B.0.10})$$

Pour le terme  $X_1$ , la partie du coefficient  $a$  devient :

$$(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{k-1} (-ie^{\frac{i\lambda}{2}}) \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \vdots \\ \text{Diagram 18} \end{array} + (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \vdots \\ \text{Diagram 20} \end{array}. \quad (\text{B.0.11})$$

Tout les liens dans le diagramme ci-haut deviennent des défauts ; ainsi, le calcul précédent donne :

$$((ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{k-2} + \beta(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k) v_{k,-k} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k (-e^{i\lambda} + \beta) v_{k,-k} = (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k e^{-i\lambda} v_{k,-k}.$$

Pour le calcul de la partie du coefficient  $b$ , le terme de gauche de l'équation B.0.11 fait apparaître un facteur  $\beta_2$  et le terme de droite un facteur  $\beta_1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} X_1 &= (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k (a(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k e^{-i\lambda} + b(\beta_1 - \beta_2 e^{i\lambda})(ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^k) v_{k,-k} \\ &= (ie^{-\frac{i\lambda}{2}})^{2k} (b\beta_1 - b\beta_2 e^{i\lambda} + a e^{-i\lambda}) v_{k,-k} \\ &= (-1)^k (e^{-i\lambda})^k (b\beta_1 - b\beta_2 e^{i\lambda} + a e^{-i\lambda}) v_{k,-k}. \end{aligned}$$

Pour  $X_2$ , la partie en  $a$  se calcule de la même manière que pour le cas  $k > 0$ . La partie en  $b$  n'est plus nulle ; elle est identique à la partie en  $a$  mais à un facteur  $\beta_2$  près. On trouve alors

que :

$$\begin{aligned}
X_2 &= (-1)^k (e^{ik\lambda} (a(\beta - e^{-i\lambda}) + b\beta_2((\beta - e^{-i\lambda})))) v_{k,-k} \\
&= (-1)^k (e^{i\lambda})^k (ae^{i\lambda} + b\beta_2 e^{i\lambda}) v_{k,-k} \\
&= (-1)^k (e^{i\lambda})^{k+1} (a + b\beta_2) v_{k,-k}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
F_k v_{k,-k} &= X_1 + X_2 \\
&= (-1)^k ((e^{-i\lambda})^k (b\beta_1 - b\beta_2 e^{i\lambda} + ae^{-i\lambda}) + (e^{i\lambda})^k (ae^{i\lambda} + b\beta_2 e^{i\lambda})) v_{k,-k} \\
&= (-1)^k ((e^{-i\lambda})^k ((1 - e^{-2i\lambda})\beta_1 - (1 - e^{-2i\lambda})\beta_2 e^{i\lambda}) + (\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) e^{-i\lambda}) \\
&\quad + (e^{i\lambda})^k ((\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2) e^{i\lambda} + (1 - e^{-2i\lambda})\beta_2 e^{i\lambda}) v_{k,-k} \\
&= (-1)^k (e^{-ik\lambda} (\beta_1 - \beta_2 e^{i\lambda}) + e^{ik\lambda} (\beta_1 - \beta_2 e^{-i\lambda})) v_{k,-k} \\
&= 2(-1)^k (\beta_1 \cos k\lambda + \beta_2 \cos (k-1)\lambda) v_{k,-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
F_n v_{n,-k} &= 2(-1)^k (\beta_1 \cos k\lambda - \beta_2 \cos (k-1)\lambda) v_{n,-k} \\
&= 2(-1)^k (\beta_1 \cos (-k\lambda) - \beta_2 \cos (-k+1)\lambda) v_{n,-k}.
\end{aligned}$$

□

Il peut être utile de calculer le nombre total de décorations □ ou • dans  $\mathfrak{M}_{n,k}^{sgn(k)}$ . C'est ce que se propose de faire la proposition suivante.

**Proposition B.0.19.** *Soit  $c_{n,k}$  le nombre de décorations □ ou • dans  $\mathfrak{M}_{n,k}^{sgn(k)}$ , alors  $c_{n,k}$  satisfait à la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} c_{n,0} = c_{n-1,1} + c_{n-1,-1} = 2c_{n-1,\pm 1} \\ c_{n,\pm 1} = c_{n-1,0} + c_{n-1,\pm 2} + \dim \mathcal{V}_{n-1,0} \\ c_{n,k} = c_{n-1,k_-} + c_{n-1,k_+} \quad \text{si } |k| \geq 2, \end{cases} \quad (\text{B.0.12})$$

avec les conditions initiales  $c_{0,0} = c_{n,\pm n} = 1$  sur le diagramme de Bratteli.

**DÉMONSTRATION.** La relation  $c_{n,k} = c_{n-1,k_-} + c_{n-1,k_+}$  découle des fonctions  $\iota$  et  $\pi$  définies respectivement aux équations (3.2.2) et (3.2.3), elles-mêmes définies dans la preuve du lemme 3.2.1, mais adaptées aux bases  $\mathfrak{M}_{n,k}$  (les fonctions initiales étaient définies sur  $\mathcal{M}_{n,k}$ ) lorsque  $|k| \geq 2$ . Il reste deux cas à considérer :

- (1) Lorsque  $k = 0$  alors, toujours dans la preuve du lemme 3.2.1, on considère la fonction  $\iota$  du deuxième point. Celle-ci ne modifie pas le nombre de • (ou de □) en envoyant un élément de  $\mathfrak{M}_{n,-1}$  vers  $\mathfrak{M}_{n+1,0}$ . Par symétrie entre • et □, ceci termine le cas  $k = 0$ .

(2) Si  $k = -1$ , alors la fonction  $\iota$  ajoute exactement un  $\bullet$  sur chacun des diagrammes de  $\mathfrak{M}_{n-1,0}$ . D'où le  $\dim \mathcal{V}_{n,0}$ . Le cas  $k = 1$  est symétrique.

□