

Université de Montréal

Étude de la marche aléatoire biaisée en milieu aléatoire

par

Nicolas Laliberté

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

17 novembre 2017

SOMMAIRE

L'objectif de ce mémoire est de donner une introduction aux marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA). Le domaine des MAMA est vaste ; nous nous intéressons particulièrement aux modèles où la marche est transiente dans une direction afin d'y étudier les comportements asymptotiques.

Nous présenterons plusieurs modèles et les résultats principaux associés. Nous verrons également quelques techniques de base utilisées dans ce domaine. L'un des outils qui aura permis le plus de progrès dans l'étude des MAMA est la structure de renouvellement. Elle permet entre autres de répondre à des questions concernant la vitesse d'une marche aléatoire biaisée. Cette dernière constitue l'objet de ce mémoire. Nous traitons la question suivante : est-ce que la vitesse d'une marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson est monotone par rapport à son environnement ? Nous répondons par l'affirmative pour un biais assez élevé.

Mots clés : Marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA), arbre de Galton-Watson, Vitesse de la marche aléatoire biaisée, Structure de renouvellement.

SUMMARY

The main goal of this Master thesis is to provide an introduction to the random walks in random environments (RWRE). This is a vast domain, our interest will be on models where the walk is directionnally transient in order to study asymptotical behavior.

We will present severals models and associated mains results. We will see some basic techniques used in this field. One of the tools that has made the most progress is the renewal structure which allows us to answer questions about the speed of the biased random walk. This is the subject of this thesis, we deal with the following question : Is the speed of the biased random walk on a Galton-Watson tree monotonous with respect to the environnement ? We answer in the affirmative for a high bias.

Keywords : Random walk in random environment (RWRE), Galton-Watson tree, Velocity of the biased random walk in random environment, Renewal structure.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	v
Liste des figures	ix
Introduction	1
Marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)	2
Lois annealed et quenched	4
Vitesse de la marche aléatoire en milieu aléatoire	5
Organisation du mémoire	6
Chapitre 1. Modèles importants et résultats principaux	7
1.1. Marche aléatoire en milieu aléatoire unidimensionnel	8
1.1.1. Résultats	9
1.2. Marche aléatoire en milieu aléatoire sur des arbres	14
1.2.1. Arbre de Galton-Watson	14
1.2.2. Marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson	15
1.2.3. Résultats	16
1.3. Marche aléatoire en milieu aléatoire sur \mathbb{Z}^d	20
1.3.1. Probabilités de transition i.i.d.	21
1.3.2. Conductances aléatoires	23
1.4. Marche aléatoire sur des clusters de percolation	26
1.4.1. Résultats	28
Chapitre 2. Structure de renouvellement	31
2.1. Modèle i.i.d.	31
2.2. Construction des temps de régénération	32

2.3. Structure de renouvellement	43
2.4. Loi des grands nombres	48
2.4.1. Condition de Kalikow	50
2.5. Modèle réversible	53
2.5.1. Structure de renouvellement	54
2.6. Un couplage général	57
2.6.1. Structure de renouvellement commune	59
Chapitre 3. La vitesse d'une marche aléatoire biaisée sur un Galton- Watson sans feuille	61
3.1. Résultats connus	62
3.2. Résultat principal	63
3.3. Un couplage et une structure de renouvellement commune	63
3.4. Démonstration	65
3.4.1. La distance des marches au temps τ_1	67
3.4.2. Réduire le problème à une marche β -biaisée sur \mathbb{Z}	68
3.4.3. Estimé sur une marche aléatoire β -biaisée sur \mathbb{Z}	72
Bibliographie	75

LISTE DES FIGURES

0.1	Exemple d'environnement sur \mathbb{Z}^2	3
0.2	Exemple d'environnement aléatoire i.i.d. sur \mathbb{Z}	3
0.3	Exemple d'environnement aléatoire avec conductances sur \mathbb{Z}	4
1.1	Probabilités de transition de la MAMA sur \mathbb{Z}	8
1.2	L'arbre de Galton-Watson où les feuilles sont illustrées par un cercle.....	16
1.3	Les fonctions génératrices g et h de la décomposition de Harris.....	18
1.4	Illustration des pièges dans l'arbre de Galton-Watson.....	19
1.5	Les deux régimes.....	25
1.6	Vitesse d'une marche aléatoire biaisée sous les conditions du théorème 1.3.6.....	26
1.7	Exemple de percolation surcritique sur \mathbb{Z}^2 où les arêtes du cluster infini sont en noir et les autres composantes en rouge.....	28
1.8	Exemple de piège pour une percolation sur \mathbb{Z}^2	30
2.1	Exemple de trajectoire et des temps d'arrêts S_k et R_k pour $k \geq 1$	38
2.2	Exemple de temps de régénération τ_k pour $k \geq 1$	43
2.3	Problématique liée à une conductance anormalement élevée à un niveau record.....	55
3.1	Le déplacement effectué des trois marches couplées selon les réalisations de $(U_n)_{n \geq 0}$	65

INTRODUCTION

La marche aléatoire est un modèle simple qui pourtant permet de modéliser des phénomènes complexes retrouvés en nature. Qu'est-ce qu'une marche aléatoire ? De façon informelle, il s'agit d'un déplacement aléatoire d'un objet mobile dans un milieu quelconque. Un des exemples les plus connus sur de tels déplacements remonte à Robert Brown, botaniste écossais. En 1827, celui-ci a observé de petites particules situées dans le fluide à l'intérieur des grains de pollen caractérisées par un mouvement en apparence chaotique. La marche aléatoire permet de modéliser un tel phénomène. Cet objet porte le nom de *mouvement brownien*. Ce mouvement fut énormément étudié au cours des dix-neuvième et vingtième siècles. Plusieurs scientifiques ont tenté de donner diverses explications à ce phénomène, mais sans arriver à des explications rigoureuses. Malgré ce manque théorique, les scientifiques l'ont utilisé notamment pour des applications dans le domaine de la finance, citons par exemple Louis Bachelier qui en 1900 dans sa thèse *Théorie de la spéculation* a introduit le mouvement brownien à des fins financières. Il a fallu attendre les travaux d'Albert Einstein en 1905 pour obtenir une théorie complète du mouvement brownien en physique.

Le modèle le plus élémentaire que nous pouvons considérer est, comme son nom l'indique, la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d . Il s'agit d'étudier le comportement d'un marcheur partant de l'origine et se déplaçant de façon uniforme (probabilité $1/(2d)$) à chaque unité de temps sur l'un des $2d$ voisins du réseau. L'intérêt porté par les mathématiciens à ce modèle depuis le début du vingtième siècle est considérable. Le cas le plus simple est le cas unidimensionnel, il décrit entre autres la fortune d'un joueur misant un dollar sur une partie de pile ou face où le gain est de deux dollars. Plusieurs questions naturelles en surgissent, par exemple :

- (1) À quelle distance de l'origine se situe le marcheur après n pas ?
- (2) Comment se comporte la marche globalement ?
- (3) Combien de fois le marcheur revient-il sur ses pas ?

Ces questions ont des réponses satisfaisantes. Les deux premières requièrent plus de détails à formuler mathématiquement. Pour l'instant, nous pouvons mentionner que la marche se trouve, en un certain sens, à une distance \sqrt{n} après n pas. De plus, vue «de plus en plus loin», il a été montré que son comportement est celui du mouvement brownien. La réponse

à la dernière question considérée nous vient d'un théorème que George Polya démontra en 1927. Résumé de façon informelle, le théorème est comme suit : en dimension $d \leq 2$, le marcheur reviendra infiniment souvent sur ses pas, la marche est dite *récurrente* dans ce cas, tandis qu'en dimension $d \geq 3$, le marcheur revient qu'un nombre fini de fois sur ses pas. Ce résultat se présente souvent de manière cocasse : un homme ivre se déplaçant à pied finira par revenir au bar, alors qu'un homme ivre se déplaçant à l'aide d'un hélicoptère finira par se perdre et ne jamais revenir au bar.

La marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est bien décrite et de nombreuses propriétés ont été démontrées. Si ce modèle illustre bien le portrait d'un mouvement en milieu régulier et déterministe, il est néanmoins insuffisant pour décrire le déplacement d'un mobile dans un environnement inconnu ou irrégulier. Pour les physiciens, il est absurde dans des cas concrets de chercher à décrire parfaitement un milieu. Imaginons, par exemple, décrire complètement la structure d'un fluide dans un contenant pour ensuite y étudier le mouvement d'une particule baignant dans celui-ci. Ces considérations sont irréalistes. Il serait plus approprié d'attribuer des caractéristiques statistiques à ces milieux, et d'ensuite étudier le mouvement en choisissant au hasard un environnement respectant ces caractéristiques parmi l'ensemble de ces environnements. Ceci nous amène à considérer le modèle de marches aléatoires en milieux aléatoires, l'acronyme MAMA est souvent utilisé pour désigner ces processus.

MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE (MAMA)

La marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est un processus markovien, nous désignons le vecteur $\omega(x) = (1/2d, 1/2d, \dots, 1/2d)$ qui représente les probabilités de transition aux plus proches voisins pour un site $x \in \mathbb{Z}^d$. Cet environnement offre donc une grande homogénéité spatiale. Ce qui nous intéresse ici est de considérer des environnements hétérogènes et aléatoires. Dans cette optique, nous considérons l'ensemble des vecteurs de transition aléatoire $(\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ où les composantes somment à 1 et suivent la loi \mathbb{P} . Notons que nous ne donnerons pas une formulation générale des MAMA sur des graphes généraux, nous nous contenterons du graphe \mathbb{Z}^d avec des transitions aux plus proches voisins.

Une marche aléatoire en milieu aléatoire est alors gouvernée par deux aléas, le premier étant la réalisation de l'environnement (ou milieu) décrit par $(\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ et le second par la trajectoire du marcheur dans cet environnement. L'élément ω sera souvent appelé environnement ou milieu dans lequel la marche se déplacera. Soyons plus précis, notons

$$\mathcal{P} := \{p_i \in [0,1], 1 \leq i \leq 2d \text{ et } \sum_{i=1}^{2d} p_i = 1\}$$

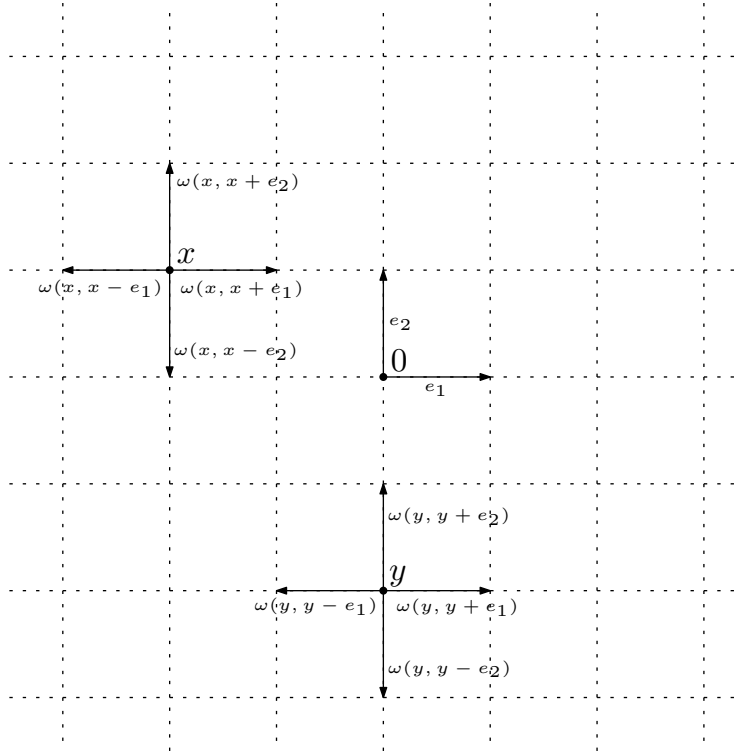


FIGURE 0.1. Exemple d'environnement sur \mathbb{Z}^2 .

et posons $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$. Notons également les composantes du vecteur de transition pour $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}^d$ par $\omega(x) = \{\omega(x, x + e)\}_{e \in \mathbb{Z}^d, |e|=1}$. Imaginons qu'en chacun des sites x du graphe, nous associons aux arêtes adjacentes un *poids* $\omega(x, x + e)$ représentant la probabilité de transition sur cette arête. Voir la figure 0.1 pour un exemple d'environnement.

Il existe plusieurs manières d'introduire de l'aléa dans un milieu où un déplacement est effectué par un mobile. Voici deux exemples souvent utilisés :

(1) Transitions aléatoires

Nous choisissons de manière i.i.d. des variables $p_\omega(x)$ ($q_\omega(x) = 1 - p_\omega(x)$) pour $x \in \mathbb{Z}$ à valeur dans $[0,1]$. Ces variables représentent la probabilité de transition du marcheur.

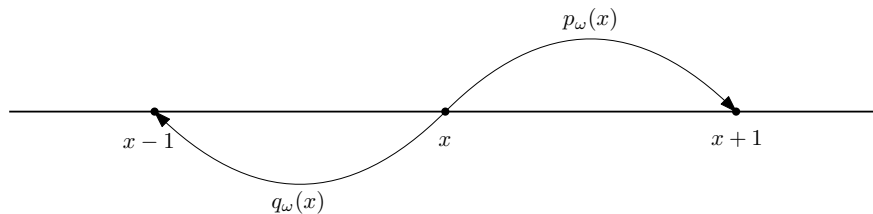


FIGURE 0.2. Exemple d'environnement aléatoire i.i.d. sur \mathbb{Z} .

Nous considérons ensuite une chaîne de Markov sur cet environnement muni de ces probabilités de transitions. Ce modèle est souvent nommé **modèle i.i.d.**.

(2) Conductances aléatoires

Nous choisissons maintenant des *poids* $c_\omega(x, x+1)$ de manière i.i.d. pour $(x, x+1) \in E(\mathbb{Z})$ à valeur dans $(0, +\infty)$, où $E(\mathbb{Z})$ sont les arêtes du graphe \mathbb{Z} . Les probabilités de transition sur une arête sont définies comme la proportion du poids associé à cette arête parmi les poids des arêtes adjacentes au marcheur (voir la figure 0.3).

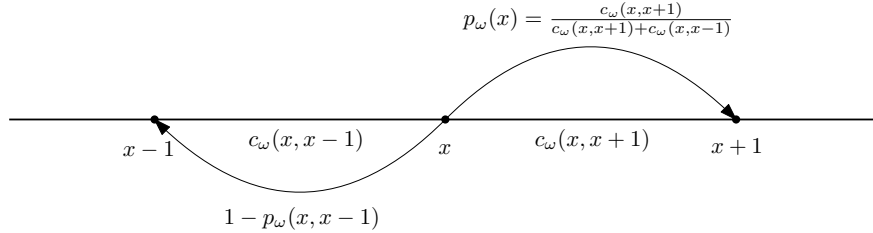


FIGURE 0.3. Exemple d'environnement aléatoire avec conductances sur \mathbb{Z} .

Nous considérons par la suite une chaîne de Markov avec ces probabilités de transition. Ce modèle porte le nom de **Modèle réversible**. Ce modèle est nommé ainsi puisqu'il permet de définir des marches réversibles en milieu aléatoire. De ce fait, ce modèle est fortement relié à la théorie des réseaux électriques, c'est pour cette raison que les poids considérés ici sont nommés *conductances*.

Les deux modèles présentés ci-haut sont facilement généralisés aux dimensions supérieures, ils seront définis au chapitre 1. Quoique ces modèles semblent présenter peu de distinctions, ils exposent des comportements disparates. Pour l'instant notons ceci : le modèle i.i.d. offre une indépendance entre les probabilités de transition contrairement au modèle réversible. En effet, les sites partageant une arête ont des corrélations entre les probabilités de transition.

LOIS ANNEALED ET QUENCHED

Les marches aléatoires en milieux aléatoires font survenir naturellement deux lois importantes. Étant donné un environnement ω et un site $x \in \mathbb{Z}^d$ fixé, nous introduisons la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ où

$$P_{x,\omega}[X_0 = x] = 1, \quad P_{x,\omega}[X_{n+1} = y + e \mid X_n = y] = \omega(y, y + e) \quad \text{pour } e \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1, y \in \mathbb{Z}^d$$

Pour le cas où $x = 0$, nous abrégeons cette loi par $P_{0,\omega} = P_\omega$. La loi P_ω est appelée la loi *quenched*. Ce terme provient de la métallurgie, où quenched signifie *trempe*. Ce terme est également utilisé en physique statistique pour désigner un système à désordre fixé, par exemple le déplacement d'une charge dans un cristal. L'environnement étant fixé, cette loi

a l'avantage d'être markovienne. Elle est hétérogène spatialement, elle n'est pas invariante par translation. Rappelons que nous notons \mathbb{P} pour la loi de l'environnement, c'est-à-dire la mesure de probabilité \mathbb{P} sur l'espace Ω . Nous nous intéressons également à la loi tenant compte de l'aléa de l'environnement, nous introduisons la loi P_x de la marche aléatoire moyennée sur l'environnement défini par le produit semi-direct de \mathbb{P} et $P_{x,\omega}$

$$P_x(\cdot) = \mathbb{P} \times P_{x,\omega} = \int P_{x,\omega}(\cdot) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\cdot)] \quad (0.0.1)$$

Cette loi P_x est nommée la *loi annelead*. Encore une fois, ce terme provient de la métallurgie et signifie *recuite*. Dans ce cas-ci, les physiciens l'utilisent pour désigner une moyenne sur le désordre. Si l'environnement est réellement aléatoire alors la loi annelead n'est pas markovienne. Toutefois, elle présente une forte homogénéité spatiale due à la réalisation d'une moyenne sur l'environnement. Si l'environnement est invariant par translation, ce qui sera le cas dans les milieux considérés dans ce mémoire, alors la loi annelead est invariante par translation. Remarquons que l'équation (0.0.1) implique que si une certaine propriété d'une MAMA tient presque sûrement sous la loi quenched $P_{x,\omega}$ pour presque tous les environnements (c.-à-d. pour tout $\omega \in \Omega'$ tel que $\mathbb{P}[\Omega'] = 1$), alors cette propriété tient également avec probabilité 1 sous la loi annelead P_x .

Les deux formes d'aléa qui apparaissent dans la loi annelead ne peuvent être traitées comme un seul aléa auquel cas nous retrouverions la théorie des marches aléatoires classiques comportant un seul aléa. La principale difficulté dans l'étude de la marche sous la loi annelead est son aspect non markovien. Le marcheur découvre l'environnement avec le temps, gagnant de ce fait de l'information sur les sites visités. Il s'ensuit, au moment d'une seconde visite, que la loi de l'environnement est modifiée par l'information acquise.

Nous tentons souvent, dans l'étude des MAMA, de comparer le comportement de la MAMA à la marche aléatoire classique. Nous cherchons à savoir si la marche est «affectée» par l'environnement aléatoire ou si celle-ci est «insensible» au milieu et se comporte comme la marche usuelle.

VITESSE DE LA MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE

L'objet principal de ce mémoire est la vitesse de la MAMA sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles. Au sens physique, la vitesse est considérée comme la vitesse moyenne d'une particule. Nous la définissons de la manière suivante :

$$v := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n}$$

Plusieurs questions se posent. Par exemple, dans quels cas la vitesse est-elle nulle?, de quelle manière faudrait-il renormaliser si elle est nulle?, existe-t-il plusieurs phases de transition entre une vitesse positive et une vitesse nulle ou est-elle unique?, etc. La question qui nous concerne ici porte sur la monotonie de la vitesse. Entre autres, si une marche est forcée dans une direction par un biais, alors la vitesse est-elle monotone par rapport à ce biais? Notre intuition liée à la marche aléatoire classique serait de répondre par l'affirmative à cette question. Or, nous verrons que ce n'est pas forcément le cas, l'environnement aléatoire peut mener à la formation d'impasse où le marcheur perdra un temps considérable avant de s'y échapper. Nous discuterons de ce ralentissement dans divers modèles.

ORGANISATION DU MÉMOIRE

Nous terminons l'introduction avec une brève description de l'organisation du mémoire. Le chapitre 1 sera consacré à une présentation des différents modèles de MAMA souvent considérés ainsi que les résultats principaux associés. Comme il a été mentionné dans la section précédente, le modèle qui nous intéresse ici est la marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles. Nous traiterons la question de monotonie de la vitesse par rapport à la loi des progénitures dans le chapitre 3. L'outil principal utilisé pour la démonstration de ce résultat est la structure de renouvellement introduite par Sznitman et Zerner dans [23]. Cela dit, nous lui accorderons un chapitre complet (chapitre 2) où nous verrons la construction classique dans le modèle i.i.d. ainsi qu'une adaptation de cette structure pour d'autres modèles. Nous avons essayé de garder une indépendance entre chacun des chapitres pour permettre au lecteur de cibler certaines parties qui l'intéressent. Ceci entraîne possiblement une répétition des définitions pour celui qui effectuera une lecture complète du manuscrit. Pour finir, notons que nous utilisons les symboles avec double barre (\mathbb{P} et \mathbb{E}) lorsque nous étudions la loi de l'environnement, les symboles avec indice x, ω se rapportent à la loi conditionnelle à un environnement et un point d'origine x donnés ($P_{x,\omega}$ et $E_{x,\omega}$) et finalement, nous utilisons P_x pour représenter la loi annealed. Il est important de préciser que ces notations diffèrent dans la littérature.

Chapitre 1

MODÈLES IMPORTANTS ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

Nous présenterons dans ce chapitre les principaux modèles et les résultats associés. Il ne s'agit pas de présenter toute la théorie pour chacun des modèles, des manuscrits complets pourraient être écrits pour chacun des modèles présentés ici. Nous nous contenterons d'introduire les notations et les informations minimales requises afin de comprendre les théorèmes importants. Nous voulons présenter les récents progrès ainsi que certains des problèmes non résolus dans le domaine. Nous avons également pour objectif de donner au lecteur une intuition concernant les nouveaux phénomènes qui apparaissent dans les modèles de MAMA. Ces phénomènes présentent de nouvelles difficultés, ce qui nous amène à discuter de certains outils permettant de surmonter partiellement ces difficultés.

Le chapitre est présenté dans l'ordre suivant :

- La marche aléatoire en milieu aléatoire sur \mathbb{Z} sera notre premier sujet, il a été introduit dans les années 1960. Ce modèle est essentiellement bien compris, mais présente néanmoins de nouveaux phénomènes contre-intuitifs à première vue. Il est donc idéal pour introduire les MAMA.
- La marche aléatoire β -biaisée sur l'arbre de Galton-Watson. Ce modèle est essentiellement étudié afin de comprendre les modèles de MAMA \mathbb{Z}^d qui présentent beaucoup de difficultés. Il est donc en quelque sorte un modèle intermédiaire. Malgré que ce modèle soit considéré moins complexe, plusieurs questions restent encore ouvertes.
- Nous terminons avec les MAMA sur \mathbb{Z}^d .

Les sections présentent des formats similaires : nous définissons le modèle, nous présentons les critères de transience-réurrence et finalement nous traitons les marches en régime transient avec une description de leurs comportements asymptotiques (en majeure partie, nous discutons de la vitesse de la marche).

1.1. MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE UNIDIMENSIONNEL

Le rôle de la dimension joue un rôle important dans l'étude des MAMA. Si nous devons classifier ces modèles, la dimension serait sans doute une variable importante. La dimension $d = 1$ présente des caractéristiques propres qui permettent une étude approfondie des MAMA. En effet, dans le cas de dimension $d = 1$:

- (1) Il existe un unique chemin reliant x et y pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $x < y$ (Graphe acyclique). De plus, ce chemin constitue les sites appartenant à $[x, y]$.
- (2) Du premier fait, les marches sur \mathbb{Z} sont réversibles.
- (3) Dans le cas transient, il n'y a qu'une seule façon de s'échapper à l'infini.

Les premiers résultats mathématiques à propos des MAMA remontent à Solomon [18] en 1975. Il obtient un critère de récurrence-transience pour la MAMA unidimensionnelle. De plus, il caractérise les MAMA balistiques (c.-à-d. les marches à vitesse positive) unidimensionnelles avec une loi des grands nombres. En milieu déterministe, l'élément important est la dérive (ou biais) de la marche. Ce n'est pas le cas ici. Introduisons rapidement le modèle et posons $(\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $(0, 1)$. L'aléa de l'environnement est créé en ajoutant à chacun des sommets $x \in \mathbb{Z}$ une variable ω_x représentant une probabilité de transition. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ sur un environnement donné ω , de telle sorte que les probabilités de transition de la MAMA au site $x \in \mathbb{Z}$ sont données par

$$P_\omega[X_{n+1} = x + 1 \mid X_n = x] = \omega_x,$$

$$P_\omega[X_{n+1} = x - 1 \mid X_n = x] = 1 - \omega_x, \quad P_\omega[X_0 = 0] = 1.$$

Voir la figure 1.1 pour une illustration des probabilités de transition de la MAMA.

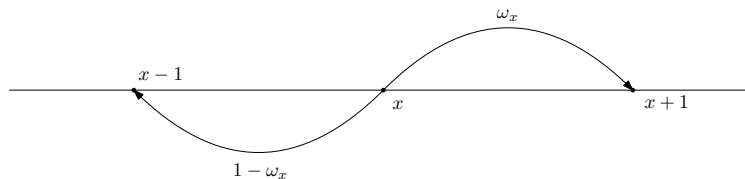


FIGURE 1.1. Probabilités de transition de la MAMA sur \mathbb{Z} .

Déjà, en dimension $d = 1$, le modèle se distingue énormément du cas classique et présente de nouveaux phénomènes. Ceci a sans doute contribué fortement au grand intérêt porté par les mathématiciens pour les MAMA.

1.1.1. Résultats

La première intuition en abordant le problème serait de penser que nous obtiendrions le même comportement limite que celui de la marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} . En effet, nous pourrions penser que la marche découvrirait un grande étendue de l'environnement à long terme et qu'en moyennant le milieu, nous obtiendrions le même comportement limite, soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = \mathbb{E}[\omega_0] - \mathbb{E}[1 - \omega_0] = \mathbb{E}[2\omega_0 - 1] = d(0, \omega)$$

où $d(0, \omega)$ est nommée la dérive de la marche. Cette intuition naïve se révèle fausse. C'est plutôt la variable aléatoire

$$\rho_0 = \frac{1 - \omega_0}{\omega_0}$$

qui joue un rôle important dans la description de cette MAMA. La loi de ρ_0 caractérise la transience-réurrence de la marche ainsi que le régime balistique de celle-ci. Nous verrons en quelle manière cette variable est importante. Nous avons le critère suivant pour la transience-réurrence de la marche :

Théorème 1.1.1. (*Solomon 1975*)

(1) Si $\mathbb{E}[\ln[\rho_0]] < 0$, alors la marche est transiente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty \quad P_0\text{-p.s.}$$

(2) De même, si $\mathbb{E}[\ln[\rho_0]] > 0$, alors la marche est transiente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty \quad P_0\text{-p.s.}$$

(3) Si $\mathbb{E}[\ln[\rho_0]] = 0$, alors la marche est récurrente et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty \quad P_0\text{-p.s.}$$

Nous donnons les éléments importants de la preuve faite dans [18] afin de rendre compte l'importance de la variable ρ_0 . Considérons le temps d'arrêt $T_x := \min\{n \geq 0; X_n = x\}$ et notons avec les notations usuelles $f_{x,y}$ la probabilité quenched d'un passage à y partant de x

$$f_{x,y} := P_{x,\omega}[1 \leq T_y < +\infty]$$

Si $f_{0,0} = 1$ alors la marche est récurrente. Dans l'autre cas, si $f_{0,0} < 1$ alors la marche est transiente. Nous cherchons les conditions pour ces deux régimes. Le caractère markovien de la loi quenched nous permet d'établir la relation suivante

$$f_{0,0} = \omega_0 f_{1,0} + (1 - \omega_0) f_{-1,0}.$$

Nous avons

$$f_{1,0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{1,\omega}[T_0 < T_x]. \quad (1.1.1)$$

Dans cette optique, afin d'évaluer $f_{1,0}$ nous posons $u_{i,x} := P_{i,\omega}[T_0 < T_x]$ pour $0 \leq i \leq x$ la probabilité d'atteindre 0 avant x partant de i . Les conditions aux bords sont $u_{0,x} = 1$ et $u_{x,x} = 0$. Encore une fois, nous avons la décomposition suivante

$$u_{i,x} = \omega_i u_{i+1,x} + (1 - \omega_i) u_{i-1,x}.$$

Après quelques manipulations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega_i u_{i,x} + (1 - \omega_i) u_{i,x} &= \omega_i u_{i+1,x} + (1 - \omega_i) u_{i-1,x} \\ \omega_i u_{i+1,x} - \omega_i u_{i,x} &= (1 - \omega_i) u_{i,x} - (1 - \omega_i) u_{i-1,x} \\ u_{i+1,x} - u_{i,x} &= \rho_i (u_{i,x} - u_{i-1,x}) \quad \text{avec } \rho_i = \frac{1 - \omega_i}{\omega_i}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit par itération que

$$u_{i+1,x} - u_{i,x} = (u_{1,x} - u_{0,x}) \prod_{k=1}^i \rho_k$$

avec la convention que le produit dans le terme à droite est égal à 1 si $i = 0$. Laissons de côté l'indice x par simplicité ($u_{i,x} = u_i$), nous obtenons alors

$$u_{x+1} - u_x = (u_1 - u_0) \prod_{k=1}^x \rho_k.$$

En sommant sur les valeurs de x , nous obtenons

$$u_n - u_0 = (u_1 - u_0) \sum_{x=0}^{n-1} \prod_{k=1}^x \rho_k$$

en remarquant que le terme de gauche est une somme télescopique. Ce qui nous amène, sachant $u_0 = 1$ et $u_n = 0$, à

$$1 - u_1 = \left(\sum_{x=0}^{n-1} \prod_{k=1}^x \rho_k \right)^{-1}. \quad (1.1.2)$$

Rappelons que u_1 dépend de x . Afin de conclure (voir 1.1.1), nous devons calculer la limite. Le produit peut s'écrire

$$\exp \left(\ln \left(\prod_{k=1}^x \rho_k \right) \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^x \ln \rho_k \right) =: Z_x.$$

Alors par (1.1.2), nous avons $f_{1,0} = 1$ si, et seulement si,

$$\sum_{x=0}^{+\infty} Z_x = +\infty. \quad (1.1.3)$$

Les variables aléatoires ρ_i sont i.i.d., nous avons donc par la loi des grands nombres que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^x \ln \rho_k}{x} = \mathbb{E}[\ln \rho_0], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Les variables aléatoires ρ_i sont définies sur l'environnement, elles sont donc mesurable par rapport à \mathbb{P} . Finalement, il suffit d'argumenter que Z_x se comporte comme $\exp(x\mathbb{E}[\ln \rho_0])$ pour conclure. L'exercice est similaire pour évaluer $f_{-1,0}$. L'objectif n'était pas de donner les détails, mais de montrer que le paramètre critique dans les critères est $\mathbb{E}[\ln \rho_0]$.

Rappelons rapidement que dans le cas classique, l'espérance de la dérive ($d(x, \omega) = \omega_x - (1 - \omega_x) = 2\omega_x - 1$) caractérise la transience-réurrence de la marche. En effet, si la dérive force la marche dans une direction, alors celle-ci s'échappe à l'infini dans cette même direction. Notons immédiatement les différences avec le cas qui nous intéresse ici par un exemple : supposons que notre environnement est construit avec la loi suivante

$$\omega_x = \frac{3}{4} \quad \text{avec probabilité } \frac{3}{4}$$

$$\omega_x = \epsilon \quad \text{avec probabilité } \frac{1}{4}$$

pour $\epsilon > 0$ petit. Alors nous avons que $\mathbb{E}[\omega_0] = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\epsilon > \frac{1}{2}$, ce qui implique que $\mathbb{E}[d(0,\omega)] = 2\mathbb{E}[\omega_0] - 1 > 0$. Or, nous avons

$$\mathbb{E}[\ln(\rho_0)] = \frac{3}{4} \ln\left(\frac{1-3/4}{3/4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right) > 0$$

en choisissant ϵ assez petit. Il est donc possible d'avoir une dérive moyenne vers la droite, mais $X_n \rightarrow -\infty$ P_0 -p.s. (quoique la marche ait une vitesse nulle dans ce cas).

Le théorème suivant nous donne la vitesse de la marche.

Théorème 1.1.2. (*Solomon 1975*) *Nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = v \quad P_0\text{-p.s.}$$

avec

$$1) \quad v = \frac{1 - \mathbb{E}[\rho_0]}{1 + \mathbb{E}[\rho_0]} > 0 \quad \text{si } \mathbb{E}[\rho_0] < 1,$$

$$2) \quad v = \frac{\mathbb{E}[1/\rho_0] - 1}{\mathbb{E}[1/\rho_0] + 1} < 0 \quad \text{si } \mathbb{E}[1/\rho_0] < 1,$$

$$3) \quad v = 0 \quad \text{sinon.}$$

Nous voyons déjà de ces résultats apparaître un phénomène qui est inconnu dans le cas classique. Il existe un régime de MAMA à vitesse nulle où la marche est transiente dans une direction. L'aspect intéressant de ce théorème est que l'environnement aléatoire ralentit le marcheur. En effet, si nous remplaçons, pour un environnement donné ω , chaque ω_x par $\mathbb{E}[\omega_x]$ alors nous obtenons par la loi des grands nombres que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - X_{k-1}}{n} = \mathbb{E}[d(0,\omega)].$$

Or, notons que l'inégalité de Jensen implique que

$$\mathbb{E}[\rho_0] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\omega_0} - 1\right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}[\omega_0]} - 1.$$

Cela nous amène dans le cas 1) où $v > 0$ à

$$0 \leq v = \frac{1 - \mathbb{E}[\rho_0]}{1 + \mathbb{E}[\rho_0]} \leq \frac{2 - \frac{1}{\mathbb{E}[\omega_0]}}{\frac{1}{\mathbb{E}[\omega_0]}} = 2\mathbb{E}[\omega_0] - 1 = d(0, \omega)$$

De la même façon, en remarquant que la fonction $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est décroissante pour $x \geq 0$ et par l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E} \left[\frac{\omega_0}{1 - \omega_0} \right] \geq \frac{\mathbb{E}[\omega_0]}{1 - \mathbb{E}[\omega_0]}$$

nous avons dans le cas 2) où $v < 0$ que

$$0 \geq v = \frac{\mathbb{E}[1/\rho_0] - 1}{\mathbb{E}[1/\rho_0] + 1} = \frac{\mathbb{E}[\frac{\omega_0}{1-\omega_0}] - 1}{\mathbb{E}[\frac{\omega_0}{1-\omega_0}] + 1} \geq \frac{\frac{\mathbb{E}[\omega_0]}{1-\mathbb{E}[\omega_0]} - 1}{\frac{\mathbb{E}[\omega_0]}{1-\mathbb{E}[\omega_0]} + 1} = 2\mathbb{E}[\omega_0] - 1 = d(0, \omega)$$

Alors, la limite de la distance parcourue par unité de temps est moindre dans un environnement aléatoire ω que dans environnement fixé avec $\omega_x = \mathbb{E}[\omega_0]$ pour tout x . Nous avons donc une vitesse inférieure à la marche en milieu homogène. Nous observons également ce ralentissement dans le régime à vitesse nulle (le troisième cas du théorème) dans le sens suivant :

Théorème 1.1.3. (*Sinai 1982*) *Supposons que l'environnement est uniformément elliptique (c.-à-d. $\mathbb{P}[\omega_0 \in [\epsilon, 1 - \epsilon]] = 1$ pour $\epsilon > 0$) et que $\mathbb{E}[\ln \rho_0] = 0$ (régime récurrent) alors pour tout $\delta > 0$*

$$P_0 \left[\left| \frac{X_n}{\ln^2(n)} - b_\infty \right| \leq \delta \right] \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

où b_∞ est non-dégénérée et non gaussienne qui ne dépend que de l'environnement.

Rappelons que le déplacement de la marche aléatoire simple est d'ordre \sqrt{n} . Sinai montre dans [17], dans le cas récurrent, que la MAMA unidimensionnelle X_n prend des valeurs d'ordre $\ln^2(n)$ globalement. Il fournit donc un exemple où le marcheur se déplace très lentement en contraste avec le cas de la marche aléatoire classique.

Nous avons donné l'exemple dans le cas unidimensionnel avec environnement i.i.d.. Notons qu'il existe des régimes similaires pour les marches aléatoires en conductances aléatoire, sur les arbres et en dimensions supérieures.

1.2. MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR DES ARBRES

Nous avons vu brièvement que l'étude de la MAMA unidimensionnelle était bien comprise, les critères de transience-réurrence et la caractérisation des marches balistiques étant donnés. Les mathématiciens se sont alors tournés vers des modèles plus complexes à analyser. Comme nous l'avons mentionné au début de cette section, l'analyse du cas unidimensionnel est simplifiée par les spécificités de l'environnement. Ces propriétés étant perdues en dimension $d \geq 2$, les outils développés ne pouvant s'appliquer à ce cas, les mathématiciens se sont donc attaqués à un modèle intermédiaire. Il s'agit des marches aléatoires sur les arbres. Les arbres sont par définition acycliques, et il existe un unique chemin reliant deux sites du graphe. Ceci nous permet, comme dans le cas de \mathbb{Z} , d'obtenir une description précise du chemin reliant les deux sites (nous connaissons les sites appartenant au chemin). La seule propriété que nous perdons dans ce modèle en comparaison avec \mathbb{Z} est qu'il existe plusieurs façons de s'échapper à l'infini.

1.2.1. Arbre de Galton-Watson

Définissons le modèle. Il est commun de considérer des marches aléatoires sur des arbres aléatoires appelés *arbre de Galton-Watson*. Afin de définir cet arbre, posons une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. avec $p_k = \mathbb{P}[Z_1 = k]$ et fixons r_0 la racine de l'arbre. Nous introduisons la fonction génératrice $f(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$. Pour x un sommet de l'arbre, nous notons $|x|$ la distance de x à la racine (le nombre d'arêtes contenu dans l'unique chemin à la racine r_0), et nous disons que x est à la génération n si $|x| = n$. De plus, posons $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ la suite de variables aléatoires représentant le nombre de sommets à la génération n . Nous définissons maintenant le Galton-Watson de manière récursive :

- (1) Nous associons à la racine r_0 appartenant à la génération 0 ($\gamma_0 = 1$) Z_0 sommets en les reliant par des arêtes. Notons ces sommets x_1, \dots, x_k appartenant à la génération 1 ($\gamma_1 = k$).
- (2) Pour les sommets x_i , nous répétons le processus en lui associant Z_i sommets et ce indépendamment des autres variables utilisées précédemment.

Voir la figure 1.2 pour une illustration de l'arbre. Dû à son histoire, l'arbre de Galton-Watson hérite d'un vocabulaire provenant de la généalogie. Il porte le nom des scientifiques britanniques F.Galton et H.W Watson qui au dix-neuvième siècle ont décidé d'utiliser ce modèle pour étudier l'évolution d'une population. Les variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 0}$ sont souvent nommées *progénitures* et l'unique sommet commun relié à un ensemble de progénitures le *parent*. Nous utiliserons désormais ce vocabulaire. Nous notons x^* le parent de x .

Énonçons maintenant un résultat élémentaire sur les arbres de Galton-Watson. Posons $m = \mathbb{E}[Z] = f'(1)$.

Théorème 1.2.1. *Nous avons les deux régimes suivants :*

- (1) *Régime sous-critique : Si $m < 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_N = 0$ p.s.*
- (2) *Régime surcritique : Si $m > 1$, alors la probabilité de non-extinction de l'arbre est positive, c.-à-d. $\mathbb{P}[\sum_{n \geq 0} \gamma_n = +\infty] > 0$.*

Encore une fois, dans le but d'étudier les comportements asymptotiques de la marche aléatoire, nous allons nous restreindre au régime surcritique. La probabilité de non-extinction étant positive, nous pouvons conditionner sur cet évènement.

1.2.2. Marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson

Nous pouvons également ajouter un environnement aléatoire sur l'arbre de Galton-Watson. Posons $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ les réels positifs. En construisant l'arbre de Galton-Watson récursivement, à chaque étape nous associons à chaque progéniture une valeur A indépendamment de toutes les autres variables utilisées précédemment. Nous notons $A(x_i)$ le poids associé au sommet x_i . Cette construction nous fournit un arbre de Galton-Watson où les sommets sont marqués par un poids. Nous noterons cet arbre $GW(P,A)$ où P représente la loi des progénitures et A la loi des poids associés à chacun des sommets. Si A est déterministe, ça sera le cas dans notre étude, alors nous notons l'arbre $GW(P)$.

Étant donné un arbre $\omega = GW(P,A)$ conditionné à être infini et sommet x ayant comme progéniture x_1, \dots, x_k et x^* son parent, la marche aléatoire est définie de la façon suivante :

- (1) $P_{\omega, r_0}[X_0 = r_0] = 1$
- (2) $P_{\omega, r_0}[X_{n+1} = x_i | X_n = x] = \frac{A(x_i)}{1 + \sum_{j=1}^k A(x_j)}$ pour $1 \leq j \leq k$.
- (3) $P_{\omega, r_0}[X_{n+1} = x^* | X_n = x] = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^k A(x_j)}$

Ce modèle de MAMA présente deux cas bien distincts. Dans un cas, l'arbre peut présenter des sous-arbres finis si la loi des progénitures admet $p_0 > 0$. Il est donc possible qu'un individu n'ait pas d'enfant auquel cas nous appelons cet individu *feuille*. Voir la figure 1.2 pour une illustration d'un Galton-Watson avec feuilles. Dans l'autre cas, si $p_0 = 0$, alors tous les individus ont une descendance infinie.

Le cas où nous supposons $p_0 > 0$ s'avère plus difficile à étudier. Notons pour le moment que nous perdons l'invariance par translation de la loi annealed. En effet, dans le cas où $p_0 > 0$, l'arbre comporte des sites où la descendance n'est pas infinie. Cette inhomogénéité spatiale complique l'analyse du modèle. En particulier, lorsque nous étudions la vitesse d'une

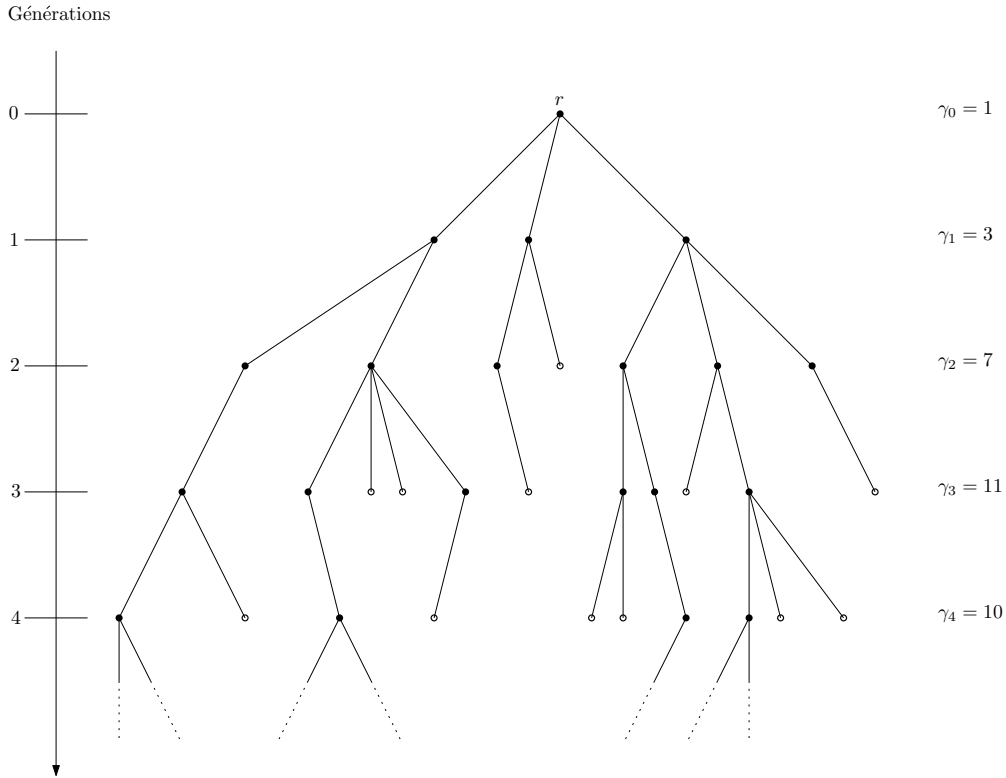


FIGURE 1.2. L'arbre de Galton-Watson où les feuilles sont illustrées par un cercle.

marche aléatoire, ces sous-arbres finis agissent comme *pièges* et ralentissent la marche. Nous verrons plus bas une technique permettant d'étudier ce ralentissement.

1.2.3. Résultats

Présentons maintenant les résultats sur la question de transience-réurrence concernant ce modèle. Lyons et Pemantle ont démontré dans [12] (voir théorème 1) ce qui suit :

Théorème 1.2.2. (Lyons-Pemantle 1992) *Posons $p = \inf_{0 \leq x \leq 1} \mathbb{E}[A^x]$ et $M_n = |\{x \in GW(P,A); |x| = n\}|$. Soit $m = \mathbb{E}[Z]$ l'espérance du nombre de progénitures. Nous avons :*

- (1) *Si $pm > 1$, alors X_n est transiente P_{r_0} -p-s.*
- (2) *Si $pm < 1$, alors X_n est récurrente P_{r_0} -p-s.*
- (3) *Si $p \limsup_{n \rightarrow +\infty} M_n^{1/n} < 1$, alors X_n est récurrente positive P_{r_0} -p-s.*

La loi P_{r_0} est la loi annealed partant de la racine r_0 . Dans ce mémoire, nous nous intéressons au régime transient. De ce fait, nous ne donnerons pas de détails concernant les résultats sur le régime récurrent.

Dans le cas transient, l'objectif premier est de démontrer une loi des grands nombres. Nous cherchons à savoir si la marche s'échappe à l'infini à une vitesse strictement positive.

Les premiers cas traités touchant à cette question sont les cas où le Galton-Watson est déterministe et où A est déterministe. Le modèle qui nous intéresse ici est la marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson, c'est-à-dire le cas où nous considérons $A = \beta$ p-s. déterministe. Posons $f(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$ la fonction génératrice associée à la distribution des progénitures. Alors, le premier résultat concernant la vitesse dans ce cas est

Théorème 1.2.3. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson conditionné à survivre telle que X_n est transiente alors*

- (1) *Si $p_0 = 0$, alors X_n a une vitesse positive $v > 0$ P_{r_0} -p-s.*
- (2) *Si $p_0 > 0$, alors X_n a une vitesse positive P_{r_0} -p-s. si, et seulement si, $\beta < 1/f'(q)$ où q est la probabilité d'extinction de l'arbre.*

Il est bien connu que la probabilité d'extinction de l'arbre est donnée par l'unique point fixe différent de 1 de la fonction génératrice $f(x)$.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le deuxième phénomène s'explique par un ralentissement de la marche dans les pièges que sont les sous-arbres finis. La dépendance du biais pour la condition du deuxième cas s'explique intuitivement de la façon suivante : un biais trop élevé force le marcheur à être piégé davantage de temps dans un sous-arbre fini, voir la figure 1.4. C'est là un point clé du modèle de marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson avec feuilles. L'objectif est de bien comprendre le ralentissement de la marche, il est important de savoir combien de temps passe le marcheur dans ces impasses avant d'y échapper. Or, nous n'avons pas une description précise des pièges dans l'arbre. Afin de surmonter cette difficulté, nous avons besoin de décomposer l'arbre en deux parties. Cette décomposition est nommée la décomposition de Harris. Nous définissons

$$g(s) := \frac{f((1-q)s + q) - q}{1-q} \quad \text{et} \quad h(s) := \frac{f(qs)}{q}$$

deux fonctions génératrices d'un processus de Galton-Watson (voir la figure 1.3 pour une représentation graphique de ces fonctions génératrices). Les processus de Galton-Watson définis par g et h sont sans morts ($p_0 = 0$) et avec une extinction presque sûre respectivement.

Il est connu (voir [11]) qu'un arbre de f -Galton-Watson avec feuilles conditionné à survivre où la distribution des progénitures est définie par la fonction génératrice f peut être généré de la manière suivante :

- (1) Nous construisons un arbre g -Galton-Watson GW_g , nommé le *tronc*.
- (2) Nous attachons ensuite à chacun des sommets $x \in GW_g$ un nombre aléatoire N_x d'arbre h -Galton-Watson sous-critique GW_h agissant comme piège pour la marche

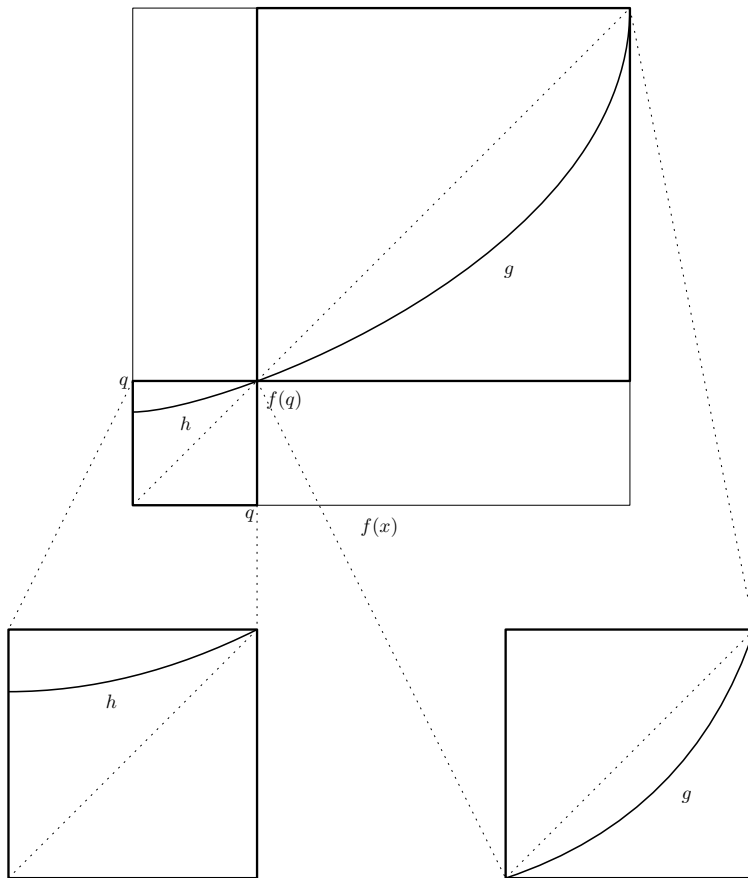


FIGURE 1.3. Les fonctions génératrices g et h de la décomposition de Harris.

aléatoire biaisée où N_x dépend du nombre d'enfants au site x (aussi noté $deg_{GW_g}(x)$). Étant donné GW_g et N_x , les pièges sont i.i.d.. Cet ensemble d'arbres attaché aux sommets est nommé *branche*.

Voir la figure 1.4 pour une illustration de la décomposition. Intuitivement, la décomposition sépare chaque sommet en deux groupes : les individus ayant une descendance infinie et ceux ayant un nombre fini de descendants. Cette décomposition a l'avantage que nous avons maintenant une description précise des pièges contrairement au processus de Galton-Watson original. Elle permet donc d'étudier le temps des excursions du marcheur dans les branches. En effet, la décomposition de Harris nous fournit un candidat pour étudier les pièges : l'arbre h -Galton-Watson qui est finie. Étant donné un tel arbre, nous pouvons, en particulier, estimer le temps de retour à la racine du marcheur. Ce temps correspondra donc au temps d'attente à chaque fois que le marcheur visite un piège dans notre modèle. Cette décomposition s'avère essentielle dans l'étude des comportements asymptotiques d'une marche aléatoire biaisée sur un tel arbre. Citons par exemple Bowditch qui en 2017 a montré dans [5] avec cette décomposition (ainsi que d'autres outils) un théorème central limite quenched.

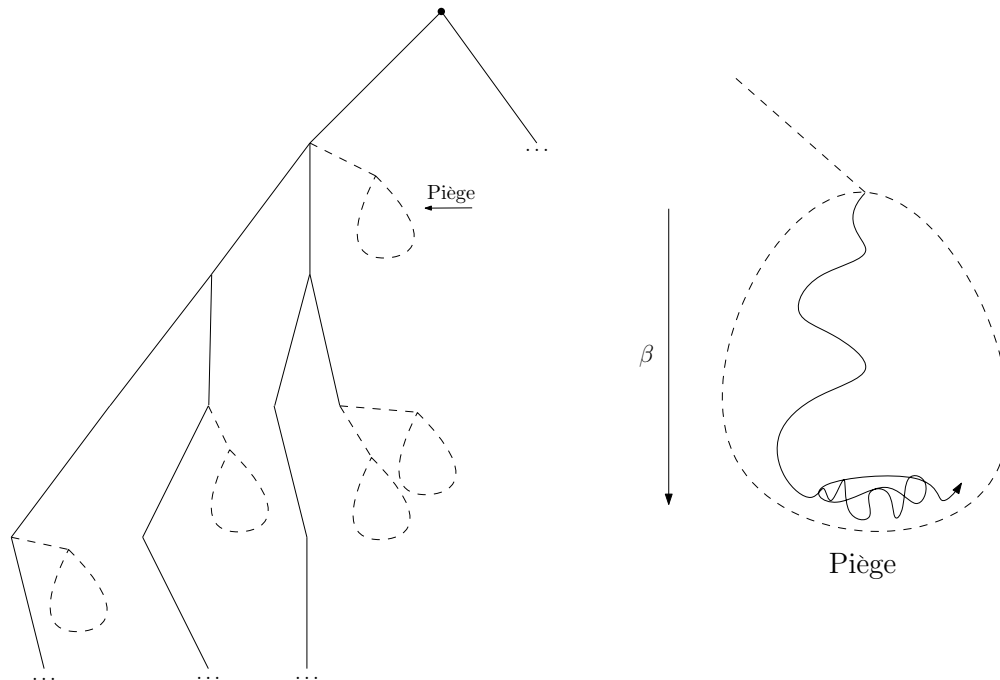


FIGURE 1.4. Illustration des pièges dans l'arbre de Galton-Watson.

Théorème 1.2.4. *Supposons que $p_0 > 0$, $m > 1$, $\beta \in (1/m, 1/\sqrt{f'(q)})$ et qu'il existe $\lambda > 1$ tel que*

$$\sum_{k \geq 0} \lambda^k p_k < +\infty$$

Alors il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout ω \mathbb{P} -p.s. (pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}[\Omega] = 1$), le processus $(B_t^n)_{t \geq 0}$ converge sous la loi quenched vers un mouvement Brownien standard sur l'espace $D([0, +\infty), \mathbb{R})$ muni de la topologie J_1 de Skorohod.

Les questions qui nous intéressent concernant la vitesse de la marche aléatoire biaisée se situent dans le cas $p_0 = 0$ où la vitesse est positive indépendamment du biais. Certaines questions plus précises se posent sur la vitesse du marcheur. Il est naturel de penser que la vitesse est une fonction croissante du biais β . En effet, sans la présence de pièges, à mesure que le biais augmente (la marche étant davantage forcée vers le bas de l'arbre), nous devrions nous attendre à obtenir une vitesse de plus en plus grande. Cette question paraît, intuitivement, très simple. Toutefois, malgré l'étonnante simplicité de l'énoncé, cette question fût ouverte pour plus de dix ans. Elle a été conjecturée par Lyons, Peres et Pemantle en 1997 dans [14] et résolue partiellement par Arous, Fribergh et Sidoravicius en 2011 dans [2] pour $\beta \geq 1160$.

La même question se pose par rapport à l’environnement : pour un biais β fixé, est-ce que la vitesse croît avec la distribution des progénitures ? Soyons plus précis, et introduisons la *dominance stochastique*. La dominance stochastique est un ordre partiel entre les variables aléatoires et elle est définie de la façon suivante :

Définition 1.2.1. *Soit A une variable aléatoire et P_1, P_2 deux lois de A . Alors, nous disons que P_1 **domine stochastiquement** P_2 si pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $P_1[A \geq x] \geq P_2[A \geq x]$.*

Supposons une marche aléatoire β -biaisée sur deux arbres de Galton-Watson sans feuille $GW(P_1)$ et $GW(P_2)$. De plus, supposons que P_1 domine stochastiquement P_2 . Alors la question se traduit comme suit : Est-ce que la vitesse de la marche sur $GW(P_1)$ est supérieure à celle sur $GW(P_2)$? Les outils qui ont permis de démontrer la première question s’appliquent également pour celle-ci, ce qui n’est pas surprenant considérant les similarités des deux problèmes. Nous traiterons cette question au chapitre 3.

Un théorème central limite a également été établi pour l’arbre de Galton-Watson sans feuilles. En effet, Yuval et Peres ont montré dans [16] un théorème central limite quenched pour la marche aléatoire biaisée.

1.3. MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE SUR \mathbb{Z}^d

Notre discussion se poursuit ensuite avec un cas plus général, soit la MAMA sur \mathbb{Z}^d où $d \geq 2$. Il existe plusieurs modèles de MAMA étudiés sur \mathbb{Z}^d . Nous considérons le modèle i.i.d. et le modèle réversible qui ont été les plus étudiés à ce jour. Nous avons déjà présenté le cas unidimensionnel pour le modèle i.i.d.. Rappelons que ce modèle offre des caractéristiques propres, c’est-à-dire

- (1) Il existe un unique chemin reliant x et y pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $x < y$ (Graphe acyclique). De plus, ce chemin constitue les sites appartenant à $[x, y]$.
- (2) Du premier fait, les marches sur \mathbb{Z} sont réversibles.
- (3) Dans le cas transient, il n’y a qu’une seule façon de s’échapper à l’infini.

Bien sûr, dans le cas multidimensionnel, ces propriétés ne tiennent plus. Les réseaux en dimension supérieure sont cycliques, ce qui engendre la non-réversibilité de la loi quenched pour de nombreux modèles notamment le modèle i.i.d. De plus, nous n’avons pas une description des chemins allant à y partant d’un site x puisqu’il existe une infinité de chemins reliant ces deux sites, ce qui complique l’étude de la marche. Ces difficultés sont illustrées par le fait que nous n’avons pas à ce jour un équivalent du théorème de Solomon au cas multidimensionnel pour le modèle i.i.d.. Comme nous l’avons vu, les méthodes utilisées dans le cas unidimensionnel requièrent les spécificités énoncées plus haut. Ces techniques ne pouvant

être appliquées pour le cas multidimensionnel, il faut donc développer de nouveaux outils. La structure de renouvellement en est un exemple, ce que nous verrons en détails dans le chapitre 2.

1.3.1. Probabilités de transition i.i.d.

Présentons le modèle à nouveau afin de rappeler les notations. Soit

$$\mathcal{P} := \{p_i \in [0,1], 1 \leq i \leq 2d \text{ et } \sum_{i=1}^{2d} p_i = 1\},$$

l'espace des environnements est noté $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$. Étant donné $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, nous construisons la marche $(X_n)_{n \geq 0}$ de loi $P_{\omega,x}$ défini par

$$P_{\omega,x}[X_0 = x] = 1, \quad P_{\omega,x}[X_{n+1} = X_n + e | X_n] = \omega(X_n, X_n + e) \quad e \in \mathbb{Z}, |e| = 1.$$

Nous tirons maintenant un environnement aléatoirement sur Ω . Pour ce faire, nous choisissons une loi μ sur \mathcal{P} et nous considérons la mesure produit $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ sur Ω . Avant de poursuivre, donnons deux définitions qui seront forts utiles.

Définition 1.3.1. (*Ellipticité stricte*) La mesure μ est dite elliptique stricte si $\mu(\omega(x, x+e) > 0) = 1$, pour $x, e \in \mathbb{Z}^d$ et $|e| = 1$.

Définition 1.3.2. (*Ellipticité uniforme*) La mesure μ est dite elliptique uniforme s'il existe $\kappa(\mu) \in (0,1)$ tel que $\mu(\omega(x, x+e) \geq \kappa) = 1$, pour $x, e \in \mathbb{Z}^d$ et $|e| = 1$.

Ces conditions assurent une certaine «connexité» de l'environnement au sens où la marche peut atteindre tous les sites à partir de $x \in \mathbb{Z}^d$. Sous ces conditions, nous avons que la chaîne considérée est irréductible. Nous supposons ici que μ vérifie la condition d'ellipticité uniforme. Les premiers résultats sur la question de transience-réurrence pour les MAMA en dimensions supérieures remontent à Kalikow dans [10]. Pour $l \in \mathbb{R}^d$, nous définissons

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l = +\infty \right\}$$

l'événement où la marche est transiente dans la direction l . Nous parlons de *transience directionnelle*. Il prouve une loi 0 – 1 pour l'événement $A_l \cup A_{-l}$, soit :

Théorème 1.3.1. (*Kalikow 1981*) $P_0[A_l \cup A_{-l}] = 0$ ou 1.

Il pose également la question suivante : L'événement A_l satisfait-il $P(A_l) = 0$ ou 1 ? Cette question n'a toujours pas de réponse dans le cadre général. De plus, il est à ce jour inconnu si l'occurrence simultanée de $P_0(A_l) > 0$ et $P_0(A_{-l}) > 0$ est possible en dimension $d \geq 3$. Le cas unidimensionnel est bien connu et celui en dimension $d = 2$ a été traité par Merkl et Zerner dans [22]. Cette question embarrassante reflète bien la difficulté de l'étude des MAMA multidimensionnelles, comme il a été mentionné plus haut.

Pour l'instant, concernant la question de transience-réurrence, nous devons nous contenter du théorème suivant qui assure que le problème est bien posé :

Théorème 1.3.2. *(Kalikow 1981) $P_{0,\omega}\{(X_n)_{n \geq 0} \text{ est récurrente}\} = 0 \text{ ou } 1$.*

Ce résultat est une conséquence de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov. De plus, Kalikow fournit un critère de transience directionnelle. Il s'agit d'un critère suffisant, mais non nécessaire. La démonstration de ce critère fait appel à un outil important qui permet de comparer les comportements annealed d'une MAMA à ceux d'une chaîne de Markov. Rappelons que la loi annealed n'est pas markovienne. Cet outil porte le nom de chaîne ou environnement de Kalikow. Nous donnerons plus de détails concernant cet objet dans le chapitre 2. Le critère étant technique et peu intuitif, nous reportons les détails au prochain chapitre et notons ce critère K' pour l'instant afin de présenter les résultats. La condition K' de Kalikow nous donne la transience directionnelle :

Théorème 1.3.3. *(Kalikow 1981) Supposons $(X_n)_{n \geq 0}$ une MAMA sur \mathbb{Z}^d avec des probabilités de transition i.i.d. vérifiant la condition d'ellipticité uniforme ($\mathbb{P}[\omega(x,y) \geq \epsilon] = 1$ pour une certaine constante d'ellipticité $\epsilon > 0$). Si que la MAMA vérifie le critère de Kalikow K' relatif à l , alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l = +\infty \quad P_0\text{-p.s.}$$

Le critère de Kalikow s'avère beaucoup plus fort. En effet, dans [23] Sznitman et Zerner montre une loi des grands nombres pour ces MAMA vérifiant le critère de Kalikow.

Théorème 1.3.4. *(Sznitman et Zerner 1999) Supposons $(X_n)_{n \geq 0}$ une MAMA sur \mathbb{Z}^d avec des probabilités de transition i.i.d. vérifiant la condition d'ellipticité uniforme ($\mathbb{P}[\omega(x,y) > \epsilon] = 1$ pour un certaine constante d'ellipticité $\epsilon > 0$). Si la MAMA vérifie le critère de Kalikow relatif à l , alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = v \quad P_0\text{-p.s.}$$

où $v \cdot l > 0$.

Alors, Kalikow a fourni un critère pour les marches balistiques. Notons, cependant, qu'il ne s'agit pas d'une caractérisation complète des marches balistiques (mis à part celle en dimension $d = 1$), car le critère est une condition suffisante mais non nécessaire. Finissons cette partie en mentionnant qu'il n'existe pas à ce jour une caractérisation des marches balistiques sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$. La condition de Kalikow a été raffinée à plusieurs reprises par Sznitman dans une série d'articles (notamment dans [20] et [19]) sans toutefois arriver à obtenir une caractérisation complète (quoiqu'il n'est pas montré que ces conditions ne caractérisent pas en fait les marches balistiques). Il donne un exemple dans [20] d'une marche aléatoire en environnement aléatoire sur \mathbb{Z}^d balistique vérifiant la condition de Sznitman sans satisfaire celle de Kalikow.

1.3.2. Conductances aléatoires

Le second modèle souvent considéré est le modèle réversible. L'environnement se construit en associant à chaque arête du graphe \mathbb{Z}^d un poids $c(e)$ de manière i.i.d., ces poids sont nommés *conductances*. Pour un environnement ω donné, nous notons les conductances de ce milieu $c_\omega(e)$ pour e une arête du graphe ($e \in E(\mathbb{Z}^d)$). Nous notons $c_\omega(x, x+e)$ pour le poids de l'arête adjacente à x et $x+e$ pour $|e| = 1$ et $e \in \mathbb{Z}^d$. Définissons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur ce graphe. Étant donné un environnement ω , les probabilités de transition sont définies pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$ de la manière suivante

$$P_\omega[X_{n+1} = X_n + e \mid X_n = x] = P_\omega(x, e) = \frac{c_\omega(x, x+e)}{\sum_{y \sim x} c_\omega(x, y)}$$

Ici, $y \sim x$ signifie que y est voisin à x dans \mathbb{Z}^d . Le modèle est dit réversible puisque la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est réversible avec la mesure invariante

$$\pi_{x, \omega} := \sum_{y \sim x} c_\omega(x, y)$$

au sens où

$$\pi_{x, \omega} P_\omega(x, y) = \pi_{y, \omega} P_\omega(y, x)$$

La probabilité de transition sur une arête est alors donnée par la proportion de sa conductance par rapport à toutes les conductances des arêtes adjacentes. Cet aspect est important et rend

plus facile l'étude de la marche réversible sous la loi quenched, car la perte de l'invariance par translation est comblée par réversibilité de la marche. Notons que les conditions d'ellipticité énoncées plus haut ce traduisent de la manière suivante pour le cas présent :

Définition 1.3.3. (*Ellipticité stricte*) Les conductances respectent la condition d'ellipticité stricte si $\mathbb{P}[c(e) > 0] = 1$ pour $e \in E(\mathbb{Z}^d)$.

Définition 1.3.4. (*Ellipticité uniforme*) Les conductances respectent la condition d'ellipticité uniforme s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}[c(e) \geq \epsilon] = 1$ pour $e \in E(\mathbb{Z}^d)$.

Nous pouvons maintenant définir la marche aléatoire biaisée sur ce graphe. Le biais est construit à partir des conductances i.i.d. énoncées ci-haut. Étant donné une direction $l \in \mathbb{R}^d$ et un biais β , plus une arête a une orientation proche de l , plus nous augmentons son poids. Plus précisément, étant donné un environnement ω , pour une marche aléatoire β -biaisée $(X_n)_{n \geq 0}$, nous définissons les probabilités de transition de cette façon

$$P_\omega[X_{n+1} = X_n + e \mid X_n = x] = P_\omega(x, e) = \frac{c_\omega(x, x + e)e^{\beta(e \cdot l)}}{\sum_{y \sim x} c_\omega(x, y)e^{\beta((y-x) \cdot l)}}$$

en utilisant la même notation introduite plus haut. À proprement parler, le modèle de marche aléatoire biaisée sur les conductances aléatoires i.i.d. n'est pas un modèle à conductance aléatoire i.i.d., car les conductances dans ce cas-ci comme nous venons de le voir ne sont pas i.i.d.. La marche considérée ici est réversible avec la mesure

$$\pi_{x, \omega} \sum_{y \sim x} c_\omega(x, y)e^{\beta((y-x) \cdot l)}$$

Nous avons vu qu'il n'existe pas jusqu'à aujourd'hui de caractérisation des marches balistiques sur un environnement avec des probabilités de transition i.i.d.. Or, pour les marches qui nous intéressent ici, nous avons une caractérisation des marches balistiques. Effectivement, Fribergh montre dans [7] en 2013 que la marche aléatoire biaisée sur des conductances aléatoires de \mathbb{Z}^d est transiente dans la direction du biais et qu'elle est balistique (elle a une vitesse positive) si, et seulement si, $\mathbb{E}[c(e)] < +\infty$, c'est-à-dire si l'espérance des conductances est finie. Ce fait illustre bien la différence entre ces deux modèles, bien qu'à première vue nous pourrions croire que ces modèles sont similaires.

Dans le régime balistique, plus précisément sur des conductances uniformément elliptiques, il est intéressant de se questionner sur la monotonie de la vitesse par rapport au biais. Berger, Gantert et Nagel montre dans [4] en 2017 que la vitesse est croissante par

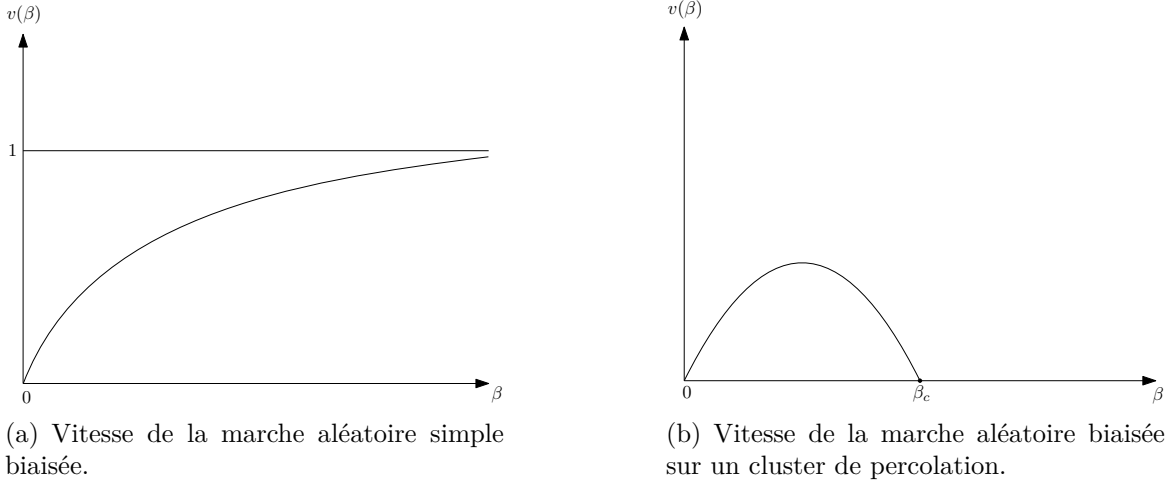


FIGURE 1.5. Les deux régimes.

rapport au biais pour un biais assez élevé. Jusqu'à maintenant, nous avons vu deux régimes concernant la vitesse par rapport au biais. En effet, nous avons présenté (voir théorème 1.2.3.) dans le cas de la marche β -biaisée sur l'arbre de Galton-Watson deux régimes. Le premier cas étant illustré dans la figure 1.5(a) était la marche aléatoire biaisée sur un arbre sans feuilles. Notons qu'il s'agit, malgré les récents progrès [2], encore d'une conjecture, alors la figure ne montre que le comportement conjecturé de la vitesse par rapport au biais. Le second régime est illustré sur la figure 1.5(b). Nous avons vu pour le cas de la marche aléatoire biaisée sur un arbre avec feuilles que pour un certain biais critique β_c , la vitesse s'annulait. Dans l'article présenté ici [4], Berger, Gantert et Nagel montrent un nouveau régime concernant la vitesse à l'aide d'un exemple. Présentons les résultats.

Ils montrent dans cet article que si les conductances sont assez «proches» les unes des autres, alors nous avons que la vitesse est toujours strictement croissante en fonction du biais (le cas (a) dans la figure 1.5). Plus précisément, ils montrent :

Théorème 1.3.5. (Berger, Gantert et Nagel 2017) *Assumons que les conductances sont uniformément elliptiques. Il existe $\delta_0 \in (0,1)$ tel que si $1 - \delta_0 \leq \omega(x,y) \leq 1 + \delta_0$ lorsque $x \sim y$, alors $v(\beta)$ est strictement croissante.*

Cependant, de façon générale, dans le cas de la marche sur des conductances aléatoires uniformément elliptiques, la vitesse n'est pas monotone. En effet, ils construisent un exemple où ce n'est pas le cas. Définissons l'environnement comme

$$\mathbb{P}[\omega(0,e) = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[\omega(0,e) = \kappa].$$

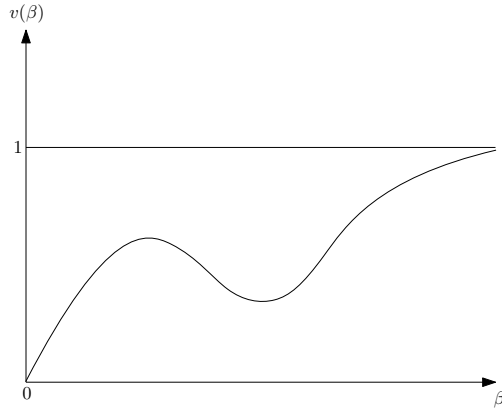


FIGURE 1.6. Vitesse d'une marche aléatoire biaisée sous les conditions du théorème 1.3.6

Ils montrent pour p assez près de 1 et κ assez près de 0 que la vitesse n'est pas toujours croissante.

Théorème 1.3.6. (*Berger, Gantert et Nagel 2017*) *Assumons que les conductances sont uniformément elliptiques. Si l'environnement est défini comme ci-haut pour $p \in (0,1)$ et $\kappa > 0$, alors pour p assez près de 1 et κ assez près de 0, il existe $\beta_1 \geq \beta_2$ tels que*

$$v(\beta_1) \leq v(\beta_2)$$

Sous les conditions du théorème 1.3.6, ils observent une fonction de la vitesse par rapport au biais comme dans la figure 1.6. La technique utilisée dans la démonstration de ces résultats fait appel à une structure de régénération particulière construite à partir de temps de régénération nommés *super-temps de régénération*. Elle a été introduite dans [1] sur les arbres de Galton-Watson. Ils décrivent cette structure dans un environnement offrant plus de généralité sur \mathbb{Z}^d . Cette structure est un élément clé dans la démonstration du résultat principal à ce mémoire. Rappelons que ce chapitre a pour but d'introduire les modèles importants ainsi que les résultats principaux associés. Nous reportons donc les détails concernant cette structure au chapitre 2.

1.4. MARCHE ALÉATOIRE SUR DES CLUSTERS DE PERCOLATION

Nous considérons ici des MAMA où le milieu est construit à partir d'une percolation sur \mathbb{Z}^d . La percolation par arêtes est un cas particulier du modèle réversible où l'on considère les conductances $c(e) \in \{0,1\}$. En mots, nous voulons étudier l'environnement aléatoire obtenu en enlevant une arête du graphe avec probabilité p indépendamment des autres arêtes. Plus précisément, fixons un paramètre $p \in [0,1]$ et notons $\Omega = \{0,1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ où $E(\mathbb{Z}^d)$ représente les

arêtes du graphe \mathbb{Z}^d . Dans la littérature, il est dit d'une arête qu'elle est *ouverte* si $c(e) = 1$ et *fermée* si $c(e) = 0$. Nous munissons l'espace Ω de la mesure de probabilité

$$\mathbb{P}_p = (\text{Ber}(p))^{\otimes E(\mathbb{Z}^d)}$$

où $\text{Ber}(p)$ est une Bernoulli de paramètre p . Voir la figure 1.7 pour un exemple d'un tel environnement. Dans ce modèle d'environnement, la notion de connexité apparaît naturellement. Les composantes connexes du graphe aléatoire obtenues des réalisations sont nommées *clusters*. Énonçons immédiatement un résultat fondamental de la théorie de percolation.

Théorème 1.4.1. *Pour $d \geq 2$, il existe $p_c(d) \in (0,1)$ tel que*

- (1) *Pour $p < p_c(d)$, tous les clusters sont finis \mathbb{P}_p -p.s.*
- (2) *Pour $p > p_c(d)$, il existe un unique cluster infini \mathbb{P}_p -p.s.*

Le premier cas est appelé percolation *sous-critique* et le second cas *surcritique*. Il faut donc se situer dans le cas surcritique pour conditionner la marche à se déplacer sur un graphe infini et étudier les comportements asymptotiques de celle-ci. Cela dit, dans le cadre de ce mémoire, nous allons nous restreindre à ce régime.

Remarque 1.4.1. *Notons que nous avons seulement défini la percolation par arêtes. Nous pouvons également construire un milieu en considérant la percolation par sites sur \mathbb{Z}^d .*

La marche aléatoire simple et la marche aléatoire biaisée sont définies de la même manière sur les conductances aléatoires. Comme il a été mentionné plus haut, nous assumons que $p > p_c(d)$, ce qui implique qu'il existe un unique cluster infini \mathbb{P}_p -p.s. Posons $C(x)$ le cluster contenant $x \in \mathbb{Z}^d$. Alors le théorème implique que

$$\mathbb{P}_p[|C(0)| = +\infty] > 0$$

où $|C(0)|$ désigne la taille du cluster. Ainsi, ceci nous permet de considérer la mesure conditionnelle à l'événement $|C(0)| = +\infty$ que 0 appartient au cluster infini. Nous définissons cette mesure de la façon suivante

$$\mathbb{P}_{0,p}[\cdot] := \mathbb{P}_p[\cdot \mid |C(0)| = +\infty]$$

Afin de simplifier les notations, nous omettrons l'indice p dans les mesures ci-haut. Nous noterons donc \mathbb{P}_0 la mesure de probabilité conditionnelle à ce que 0 appartienne au cluster

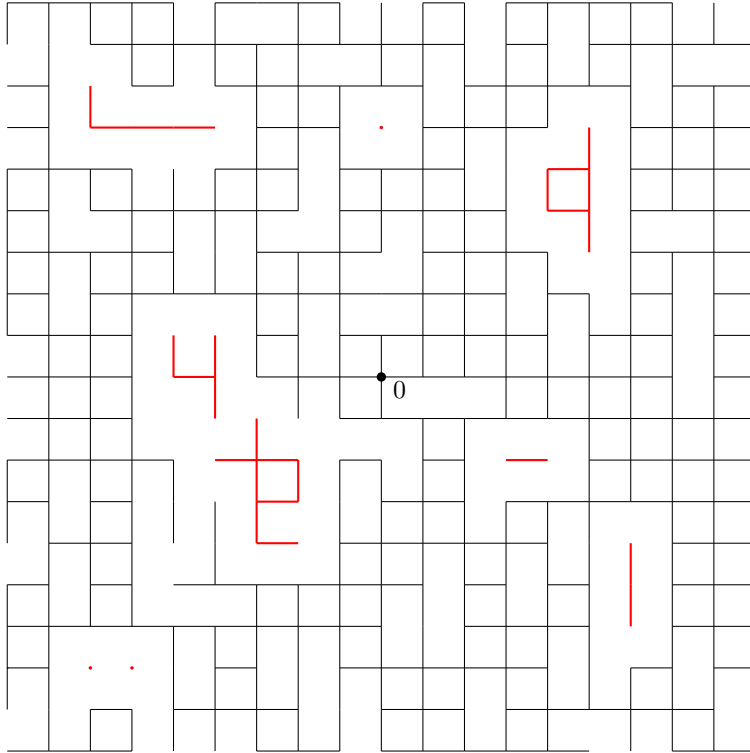


FIGURE 1.7. Exemple de percolation surcritique sur \mathbb{Z}^2 où les arêtes du cluster infini sont en noir et les autres composantes en rouge.

infini. L'environnement ω est donc tiré de la mesure \mathbb{P}_0 . Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur $C(0)$. Les probabilités de transition sont données par

$$P_\omega[X_{n+1} = x + e \mid X_n = x] = \frac{c_\omega(x, x + e)}{\sum_{y \sim x} c_\omega(x, y)}$$

Les transitions sont bien définies puisque, conditionnellement à ce que 0 appartienne au cluster infini, $x \in C(0)$ a toujours au moins une arête adjacente ouverte. Comme nous l'avons indiqué, la marche aléatoire biaisée se définit de la même façon que sur les conductances aléatoires présentées à la section précédente.

1.4.1. Résultats

La marche aléatoire simple sur un cluster de percolation se comporte, à plusieurs égards, comme la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d . Entre autres, en utilisant l'analogie des marches réversibles et les réseaux électriques, il est possible de montrer que la marche aléatoire simple sur un cluster est récurrente en dimension $d \leq 2$. Ceci n'est pas surprenant en comparant le cas de la marche classique sur \mathbb{Z}^2 . Le cluster étant un sous-graphe de \mathbb{Z}^2 , il y a moins de façons pour le marcheur de s'échapper à l'infini. Cette intuition est confirmée par le principe

de monotonie de Rayleigh (voir [15] p.35). Ce raisonnement ne s'applique pas dans le cas de dimension $d \geq 3$, pour lequel il n'est pas aussi clair que la marche reste transiente. Pourtant, c'est le cas. Il fût démontré dans [9] en 1993 que la marche aléatoire simple sur un cluster de percolation est transiente en dimension $d \geq 3$.

Théorème 1.4.2. (*Grimmet, Kesten et Zhang 1992*) *La marche aléatoire simple sur le cluster de percolation surcritique est transiente si, et seulement si, $d \geq 3$.*

De façon générale, la percolation surcritique ne change pas la nature transiente d'une marche (voir [3] pour les détails).

Du côté de la marche aléatoire biaisée, Sznitman montre dans [21] une loi des grands nombres à l'aide d'une structure de renouvellement.

Théorème 1.4.3. (*Sznitman 2003*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = v > 0 \quad P_0\text{-p.s.}$$

Des conjectures concernant le comportement de la marche peuvent être trouvées dans la littérature de la physique théorique. Ces conjectures prédisent une transition de phase d'un comportement balistique à un comportement sous-balistique lorsque le biais augmente.

Théorème 1.4.4. (*Sznitman 2003*) *Nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot \beta = +\infty \quad P_0\text{-p.s.}$$

De plus, il existe $0 < \lambda_m \leq \lambda_M$ tels que :

(1) *Si $\lambda < \lambda_m$ alors $v \cdot \beta > 0$.*

(2) *Si $\lambda > \lambda_M$ alors $v = 0$.*

Ce théorème confirme en partie les prédictions des physiciens. Intuitivement, le régime sous-balistique s'explique par la présence de sections finies sur le cluster infini qui, dépendamment de leur direction, peuvent agir comme pièges où le marcheur, à mesure que le biais augmente, passe un temps considérable. Voir la figure 1.8 pour un exemple de piège.

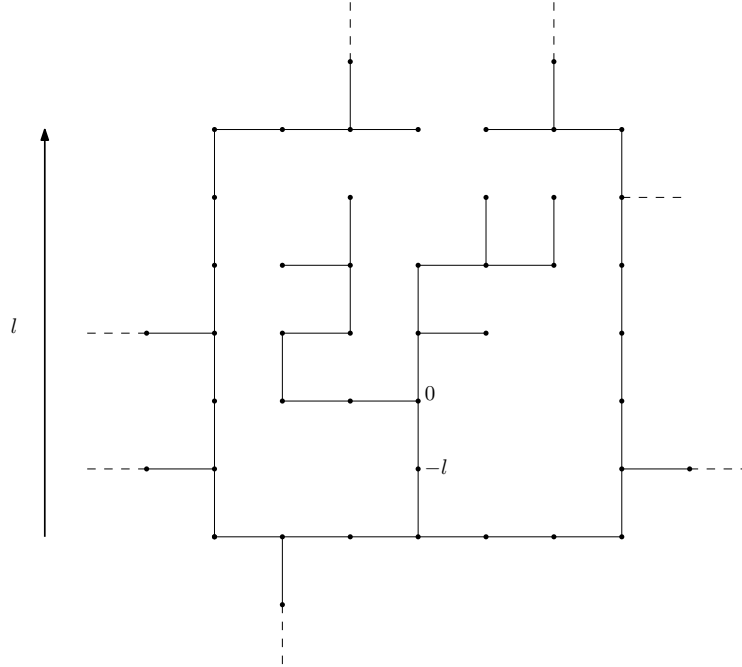


FIGURE 1.8. Exemple de piège pour une percolation sur \mathbb{Z}^2 .

Dans la configuration illustrée dans cette figure, le marcheur aurait tendance à rester piégé dans cette section du graphe. Le biais a tendance à favoriser le déplacement dans une direction précise qui dans le cas ici présent est celle qui retourne au point 0. Ce «cul-de-sac» force le marcheur à aller en contre sens du biais à plusieurs reprises, ce qui ralentit la marche. Finalement, notons qu'il faudra attendre Fribergh et Hammond qui dans [8] énoncent le théorème avec $\lambda_m = \lambda_M$ pour compléter cette conjecture. Ceci termine notre présentation des principaux modèles ainsi que des résultats associés.

Chapitre 2

STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT

Nous décrivons dans cette section la structure de renouvellement introduite par Sznitman et Zerner en 1999 afin d'obtenir la loi des grands nombres pour une certaine classe de marches aléatoires en milieu aléatoire. Cette structure est un élément clé dans les démonstrations des résultats présentés dans ce mémoire. Elle est un outil important dans l'étude des MAMA transientes dans une direction l . Ce chapitre est essentiellement bibliographique. Il cible les résultats importants qui nous intéressent concernant cette structure de renouvellement.

Nous présentons, dans la première section, la construction classique de cette structure. Les propriétés considérées dans ce modèle sont fortes (ellipticité uniforme) et simplifient la construction. Il s'agit du candidat idéal pour introduire l'outil qu'est la structure de renouvellement. Les preuves des résultats importants sont données. Par la suite, nous montrons les limites de cette construction pour d'autres modèles souvent considérés. Nous modifions la construction initiale, en nous situant dans un cadre plus général (sans la condition d'ellipticité uniforme), afin de l'adapter à ces modèles tout en indiquant les éléments qui diffèrent des deux constructions. Finalement, nous traitons le cas particulier qui est central à ce mémoire, l'arbre de Galton-Watson sans feuilles, en introduisant l'outil clé de la démonstration.

2.1. MODÈLE I.I.D.

Décrivons le modèle considéré ici. Un processus markovien discret est caractérisé par un point d'origine, qui est déterministe dans le cas présent, ainsi que par un vecteur de transition pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$, noté $\omega(x)$. Nous nous intéressons à des marches au plus proche voisin. L'environnement aléatoire est donc donné par ces vecteurs de transition $\omega(x)$ de dimension $2d$ où les composantes sont positives et sommant à 1. Dans ce chapitre, nous supposons $d \geq 1$ et la condition d'ellipticité uniforme définie au chapitre 1 (voir définition 1.3.2).

L'espace des environnements est alors donné par $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$. Étant donné $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \Omega$, nous pouvons définir la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec la loi «quenched», qui a été introduite dans le chapitre 1 de la façon suivante

$$P_{x,\omega}[X_0 = x] = 1, \quad P_{x,\omega}\text{-p.s.}$$

$$P_{x,\omega}[X_{n+1} = X_n + e \mid X_0, \dots, X_n] = \omega(X_n, e), \quad P_{x,\omega}\text{-p.s.}$$

où $\omega(x, e)$ représente la probabilité de transition au voisin e , avec $|e| = 1, e \in \mathbb{Z}^d$. Nous voulons maintenant tirer un environnement de façon aléatoire. Pour cela, nous munissons \mathcal{P}_κ de sa tribu canonique et Ω de la tribu produit associée. Nous définissons la mesure de probabilité sur les environnements $\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. Sous cette mesure, $(\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ forment une famille de variables aléatoires i.i.d. et de loi μ . Nous pouvons maintenant définir la loi «annealed» P_x comme le produit semi-direct sur $\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$

$$P_x(\cdot) := \mathbb{P} \times P_{x,\omega} = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\cdot)], \quad x \in \mathbb{Z}^d$$

Le principal objectif de ce chapitre est de découper la trajectoire d'une chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orientée dans une direction l de sorte que les différents trajets ne s'intersectent pas afin d'obtenir l'indépendance entre ces trajets. La structure de renouvellement présentée dans la prochaine section nous offre un tel résultat. Nous allons décrire la construction des temps de régénération et présenter les résultats ainsi que leurs preuves.

2.2. CONSTRUCTION DES TEMPS DE RÉGÉNÉRATION

L'objectif est de construire une suite de temps aléatoires où la marche atteint une *distance record* dans la direction l par rapport aux temps précédents et que par la suite, elle continue à s'éloigner de l'origine dans cette direction. De façon informelle, nous cherchons à créer une séquence de temps τ_k par rapport à une direction l telle que

$$\begin{aligned} X_n \cdot l &\leq X_{\tau_k} \cdot l, & \text{pour } n \leq \tau_k \\ X_n \cdot l &> X_{\tau_k} \cdot l, & \text{pour } n > \tau_k \end{aligned}$$

Ces temps sont appelés des temps de régénération. Ici, nous avons spécifié une direction l . Afin d'obtenir un telle structure de renouvellement, il faut exiger que la marche soit transiente dans la direction l . Nous notons cette condition

$$A_l := \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l = +\infty \right\} \tag{2.2.1}$$

L'idée est que, puisque $X_n \cdot l \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, la marche $X_n \cdot l$ atteint des distances records par rapport à l'origine infiniment souvent et qu'à chaque fois qu'elle atteint ce niveau, elle a une probabilité strictement positive p de ne jamais revenir derrière ce niveau atteint. Puisqu'on requiert la transience directionnelle de la marche, il est important de traiter les questions liées à cette condition. Les questions de transience-réurrence des MAMA en dimensions supérieures remontent à Kalikow durant son travail de doctorat [10]. Nous présentons certains résultats importants de Kalikow. Pour cela nous rappelons que nous supposons l'hypothèse d'ellipticité uniforme présentée ci-haut (définition 2.1.1) pour ce chapitre. Les résultats qui suivent peuvent être démontrés sous une condition plus faible qui est l'ellipticité stricte définie au chapitre 1 (voir définition 1.3.1). Cependant, nous supposons pour le reste du chapitre l'hypothèse d'ellipticité uniforme. Kalikow démontre une loi du 0-1.

Théorème 2.2.1. *(Kalikow 1981) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche en milieu aléatoire elliptique stricte. Alors*

$$P_0[A_l \cup A_{-l}] = 0 \text{ ou } 1 \quad (2.2.2)$$

Afin de démontrer ce théorème, nous devons d'abord introduire quelques notations supplémentaires. Soit \mathcal{F}_n la filtration canonique de X_n , soit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 0$, et θ_n l'opérateur de translation canonique dans le temps. Nous définissons les \mathcal{F}_n -temps d'arrêt suivants pour $U \subset \mathbb{Z}^d$:

$$T_U := \inf\{n \geq 0 : X_n \in U\}, \quad S_U := \inf\{n \geq 0 : X_n \notin U\} \quad (2.2.3)$$

Pour $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, nous définissons l'événement

$$C_l = \{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N, X_n \cdot l > 0 \text{ ou } X_n \cdot l < 0\} \quad (2.2.4)$$

Cet événement signifie simplement que la marche reste de même signe dans la direction l pour un grand N . Selon le théorème 3 p.764 de [10], nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. *(Kalikow 1981) Supposons la condition l'ellipticité uniforme, alors nous avons*

$$P_0[X_n \cdot l = 0 \text{ i.s.}] = 0 \text{ ou } 1$$

Notons que Kalikow montre ce résultat en dimension $d \geq 1$, mais la preuve fonctionne de la même façon dans le cadre général. En supposant ce résultat, nous démontrons la loi 0-1 énoncée plus haut. La preuve est faite dans [23].

DÉMONSTRATION. Ce théorème est équivalent à $P_0[C_l] = 0$ ou 1. En effet, si $P_0[X_n \cdot l = 0 \text{ i.s.}] = 1$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $X_n \cdot l = 0$ P_0 -p.s., ce qui implique $P_0[C_l] = 0$. De plus, si $P_0[X_n \cdot l = 0 \text{ i.s.}] = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $X_n \cdot l \neq 0$ P_0 -p.s. ce qui implique que soit $X_n \cdot l > 0$, soit $X_n \cdot l < 0$ P_0 -p.s., ce qui est équivalent à $P_0[C_l] = 1$. Il faut noter que $B_l \subset C_l$, et nous avons donc que $P_0[C_l] = 0$ implique $P_0[B_l] = 0$. Il suffit donc de montrer que $P_0[C_l] = 1$ qui implique $P_0[B_l] = 1$ pour conclure. Nous montrons d'abord pour $M > 0$ que

$$\{X_n \cdot l \in [0, M] \text{ i.s.}\} \subset \{X_n \cdot l < 0 \text{ i.s.}\} \text{ } P_0\text{-p.s.} \quad (2.2.5)$$

Nous posons

$$U_{<0} := \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l < 0\}, \quad U_{[0,M]} := \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l \in [0, M]\}$$

Avec l'hypothèse d'ellipticité uniforme, nous pouvons choisir N assez grand et $c > 0$ tels que

$$P_{x,\omega}[T_{U_{<0}} \leq N] \geq c \text{ pour tous } \omega \in \Omega \text{ et } x \in U_{[0,M]}. \quad (2.2.6)$$

Il suffit de choisir $N > \text{dist}(x, U_{<0}) = L$, la distance associée à la norme $|\cdot|_1$, ou encore la distance Manhattan. Pour $X = (x_1, \dots, x_d)$ et $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$, la distance est définie comme suit :

$$d(X, Y) = \sum_{k=1}^d |x_k - y_k|$$

Nous avons que $P_{x,\omega}[T_{U_{<0}} \leq N] \geq \kappa^L > 0$ puisque les probabilités de transition sont bornées inférieurement à κ (condition d'ellipticité uniforme). Nous définissons les \mathcal{F}_n -temps de retour successifs sur $U_{[0,M]}$ dans différents intervalles de temps de longueur N de la manière suivante

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = T_{U_{[0,M]}}, \text{ et par induction sur } k \geq 1$$

$$V_{k+1} = V_1 \circ \theta_{V_k+N} + V_k + N$$

Nous introduisons maintenant les événements

$$G_k := \{V_k < +\infty\}, \quad T_k := \{T_{U_{<0}} \leq N\} \circ \theta_{V_k}$$

Rappelons que θ_n est l'opérateur de translation canonique dans le temps. Par exemple,

$$T_U \circ \theta_x = \inf\{n \geq 0 : X_n \in U\} \circ \theta_x = \inf\{n \geq x : X_n \in U\}.$$

Ici, $G_k \in \mathcal{F}_{V_k}$ et $T_k \in \mathcal{F}_{V_{k+1}}$. Il faut noter que $P_{x,\omega}[G_k^c, T_k] = 0$. Nous rappelons que sous la loi quenched, le processus est markovien. Nous obtenons donc avec la propriété forte de Markov que

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}[T_k | \mathcal{F}_{V_k}] &= P_{x,\omega}[T_k \mathbb{1}_{G_k} | \mathcal{F}_{V_k}] + P_{x,\omega}[T_k \mathbb{1}_{G_k^c} | \mathcal{F}_{V_k}] \\ &= P_{x,\omega}[T_k \mathbb{1}_{G_k} | \mathcal{F}_{V_k}] \\ &= P_{x_k,\omega}[T_k] \mathbb{1}_{G_k}, \quad \text{où } X_{V_k} = x_k \in U_{[0,M]} \\ &\geq c \mathbb{1}_{G_k}, \quad \text{pour tous } \omega \in \Omega \text{ et } x \in \mathbb{Z}^d, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

L'inégalité est obtenue en utilisant la condition d'ellipticité uniforme, (voir (2.2.7)). Ceci implique donc que

$$P_0[T_k | \mathcal{F}_{V_k}] \geq c \mathbb{1}_{G_k}, \quad k \geq 1.$$

Nous obtenons donc que

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{G_k} = +\infty \text{ implique } \sum_{k \geq 1} P_0[T_k | \mathcal{F}_{V_k}] = +\infty \text{ } P_0\text{-p.s.}$$

Il s'ensuit par le second Lemme de Borel-Cantelli (voir [6] p.218) que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{T_k}}{\sum_{k=1}^n P_0[T_k | \mathcal{F}_{V_k}]} \rightarrow 1 \quad P_0\text{-p.s. sur } \left\{ \sum_{k \geq 1} P_0[T_k | \mathcal{F}_{V_k}] = +\infty \right\}.$$

Nous concluons que

$$\{X_n \cdot l \in [0, M] \text{ i.s.}\} = \left\{ \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{G_k} = +\infty \right\} \subseteq \left\{ \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{T_k} = +\infty \right\} = \{X_n \cdot l < 0 \text{ i.s.}\}.$$

Cela montre (2.2.6). Nous montrons maintenant le théorème. Assumons que $P_0[C_l] = 1$. Nous avons alors par (2.2.6) que

$$\begin{aligned} & P_0[\{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N, X_n \cdot l > 0\} \cap \{X_n \cdot l \in [-M, M] \text{ i.s.}\}] \\ & \leq P_0[\{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N, X_n \cdot l > 0\} \cap \{X_n \cdot l < 0 \text{ i.s.}\}] \\ & = 0 \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que le théorème s'énonce également en considérant le signe négatif plutôt que positif. Dans cette optique, nous obtenons

$$P_0[C_l \cap \{X_n \cdot l \in [-M, M], \text{ i.s.}\}] = 0$$

Puisque $P_0[C_l] = 1$ par supposition, cela implique que

$$P_0[X_n \cdot l \in [-M, M], \text{ i.s.}] = 0$$

Ayant choisi $M > 0$ arbitrairement, nous obtenons

$$P_0[A_l \cup A_{-l}] = 1 \tag{2.2.7}$$

Cela montre le résultat. □

Nous pouvons maintenant définir la l -transience directionnelle pour une marche aléatoire en milieu aléatoire comme la condition (2.2.8). Pour le reste du chapitre, nous supposons (2.2.8) pour $l \in \mathbb{R}^d$, et

$$P_0[A_l] = P_0[\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l = +\infty] > 0 \tag{2.2.8}$$

Ici, nous considérons $P_0[A_l] > 0$, mais nous pourrions également considérer l'autre cas en remplaçant l par $-l$.

Décrivons maintenant les temps de régénération. L'hypothèse nous permet de définir la mesure de probabilité

$$Q_0[\cdot] := P_0[\cdot \mid A_l] \tag{2.2.9}$$

Nous définissons le \mathcal{F}_n -temps d'arrêt T_k qui correspond au premier temps où la marche atteint le niveau k (plus précisément, l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot l = k\}$), ainsi que D le temps où la marche atteint un niveau inférieur ou égal à son niveau initial. Nous les définissons donc de la manière suivante

$$\begin{aligned} T_k &:= \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l \geq k\} \\ D &:= \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l < X_0 \cdot l\} \end{aligned}$$

Introduisons également deux suites de \mathcal{F}_n -temps d'arrêt, S_k et R_k pour $k \geq 1$, ainsi qu'une suite de maximums successifs M_k pour $k \geq 0$

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \quad M_0 = X_0 \cdot l \\ S_1 &= T_{M_0}, \quad R_1 = S_1 + D \circ \theta_{S_1} \\ M_1 &= \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_1\} \end{aligned}$$

puis récursivement pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_k &= T_{M_{k-1}} \\ R_k &= S_k + D \circ \theta_{S_k} \\ M_k &= \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_k\} \end{aligned}$$

Le temps S_k représente le temps où la marche atteint la «distance record» M_{k-1} établie avant le retour R_{k-1} au dernier record M_{k-2} établie précédemment. Nous remarquons que

$$0 = S_0 \leq S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq \dots \leq +\infty$$

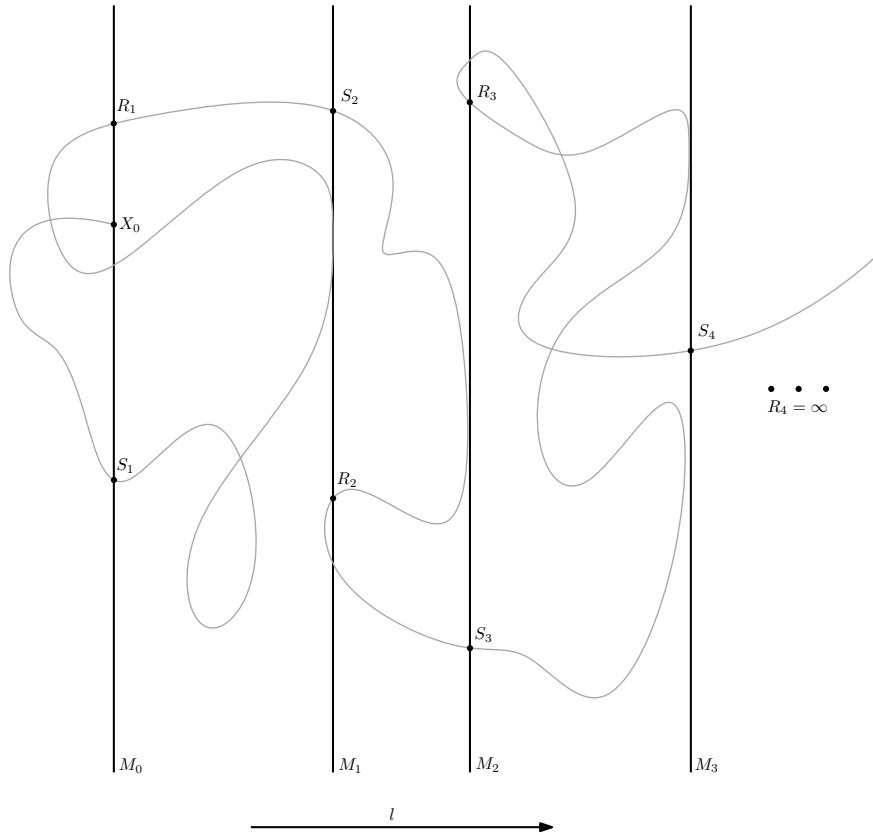


FIGURE 2.1. Exemple de trajectoire et des temps d'arrêts S_k et R_k pour $k \geq 1$.

La figure 2.1 donne un exemple de la trajectoire d'une marche orientée vers l et des temps S_k et R_k associés pour $k \geq 1$. Il est important de noter que cette figure ne représente pas une simulation, mais un dessin, car une trajectoire lisse permet de mieux illustrer ces temps d'arrêt.

Notons que sur l'événement $\{S_k < +\infty, R_k = +\infty\}$, la marche ne peut revenir derrière le niveau de X_{S_k} une fois atteint. Dans cette optique, définissons le premier temps où cela se produit, soit

$$K = \inf\{n \geq 0 : S_n < +\infty \text{ et } R_n = +\infty\}$$

Nous pouvons maintenant définir le premier temps de renouvellement τ_1 , où la marche atteint une distance record par rapport au temps passé et qu'elle ne revienne jamais derrière ce niveau atteint, soit

$$\tau_1 = S_K \leq +\infty$$

Le résultat suivant est un point crucial pour la structure de renouvellement. Nous montrons que l'indice K est fini Q_0 -p.s. sous l'hypothèse $P_0[A_l] > 0$ (2.2.9). Nous rappelons que $Q_0 = P_0[\cdot | A_l]$, où A_l est la transience dans la direction l de la marche.

Proposition 2.2.1. *Sous l'hypothèse (2.2.9), nous avons*

$$P_0[D = +\infty] > 0 \quad (2.2.10)$$

$$A_l = \{K < +\infty\} = \{\tau_1 < +\infty\} \quad P_0\text{-p.s.} \quad (2.2.11)$$

DÉMONSTRATION. Nous esquissons les grandes lignes de la preuve. Nous montrons d'abord (2.1.11). Supposons au contraire que $P_0[D = +\infty] = 0$. Puisque l'environnement est i.i.d., la loi annealed est invariante par translation. Alors $P_0[D = +\infty] = 0$ implique que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $P_x[D = +\infty] = 0$, et donc que

$$P_x[D = +\infty] = \int_{\Omega} P_{x,\omega}[D = +\infty] d\mathbb{P}(\omega) = 0$$

Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$P_{x,\omega}[D < +\infty] = 1 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En utilisant le caractère markovien de la loi quenched, la propriété forte de Markov entraîne qu'il existe une infinité de temps n pour lesquels $X_n \cdot l \leq 0$. Cela implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l \leq 0 \quad P_0\text{-p.s.}$$

Nous concluons donc que $P_0[A_l] = 0$, ce qui contredit l'hypothèse (2.2.9). Ceci montre (2.2.11).

Nous montrons maintenant que

$$A_l = \{K < +\infty\}$$

Montrons d'abord que $A_l \subset \{K < +\infty\}$. Pour cela, calculons la probabilité de $\{R_k < +\infty\}$ sous la loi annealed. Il faut noter que l'événement $\{R_k < +\infty\} = \{S_k < +\infty, D \circ \theta_{S_k} < +\infty\}$ par définition de R_k . On a donc

$$\begin{aligned}
P_0[R_k < +\infty] &= \mathbb{E}[P_{0,\omega}[R_k < +\infty]] \\
&= \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty, D \circ \theta_{S_k} < +\infty]] \\
&= \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty]P_{0,\omega}[D \circ \theta_{S_k} < +\infty \mid S_k < +\infty]] \\
&= \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty]P_{X_{S_k},\omega}[D < +\infty]]
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par la propriété de Markov sous la loi quenched. Nous obtenons par la suite

$$\mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty]P_{X_{S_k},\omega}[D < +\infty]] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty, X_{S_k} = x]P_{x,\omega}[D < +\infty]]$$

Il suffit maintenant de remarquer que $P_{0,\omega}[S_k, X_{S_k} = x]$ et $P_{x,\omega}[D < +\infty]$ sont $\sigma(\omega(y, e); y \cdot l < x \cdot l)$ - et $\sigma(\omega(y, e); y \cdot l \geq x \cdot l)$ -mesurables respectivement. Alors elles sont \mathbb{P} -indépendantes puisque les $\omega(x, y)$ sont choisies de manière i.i.d.. Nous rappelons que \mathbb{P} est la loi de l'environnement. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty, X_{S_k} = x]P_{x,\omega}[D < +\infty]] &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[P_{0,\omega}[S_k < +\infty, X_{S_k} = x]]\mathbb{E}[P_{x,\omega}[D < +\infty]] \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_0[S_k < +\infty, X_{S_k} = x]P_x[D < +\infty]
\end{aligned}$$

Encore une fois, puisque l'environnement est i.i.d., il est invariant par translation. Nous avons alors que $P_x[D < +\infty] = P_0[D < +\infty]$. Il s'ensuit que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_0[S_k < +\infty, X_{S_k} = x]P_x[D < +\infty] = P_0[S_k < +\infty]P_0[D < +\infty]$$

Maintenant, il suffit de remarquer que $\{S_k < +\infty\} \subset \{R_{k-1} < +\infty\}$. Nous obtenons

$$P_0[R_k < +\infty] \leq P_0[S_k < +\infty]P_0[D < +\infty] \leq P_0[R_{k-1} < +\infty]P_0[D < +\infty]$$

Enfin, par induction, on a

$$P_0[R_k < +\infty] \leq P_0[D < +\infty]^k, \quad k \geq 1$$

Cela implique avec (2.2.11) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_0[R_k = +\infty] = 1$$

Il en résulte que

$$\inf\{k \geq 1, : R_k = +\infty\} < +\infty \text{ } P_0\text{-p.s.}$$

De plus, on a

$$\{A_l, R_k < +\infty\} \subseteq \{A_l, S_{k+1} < +\infty\} \text{ } P_0\text{-p.s.} \quad (2.2.12)$$

En effet, la transience de la marche dans la direction l sachant que la marche a atteint X_{R_k} implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n \cdot l > M$ où $M = \sup\{X_n \cdot l : 0 \leq n \leq R_k\}$, car sinon cela contredit la transience de la marche dans la direction l . Posons maintenant

$$m = \inf\{k \geq 1 : R_k = +\infty\} < +\infty \text{ } P_0\text{-p.s.}$$

Alors pour tout $k < m$, on a $R_k < +\infty$ P_0 -p.s. ce qui implique sur A_l , dans l'optique de (2.2.14), que $S_{k+1} < +\infty$ P_0 -p.s. Nous obtenons donc que sur A_l , on a

$$\inf\{k \geq 1 : R_k = +\infty\} = \inf\{k \geq 1 : S_k < +\infty, R_k = +\infty\} = K < +\infty \text{ } P_0\text{-p.s.}$$

Cela montre que $A_l \subseteq \{K < +\infty\}$. Nous montrons maintenant l'inclusion inverse. Nous rappelons que nous assumons ici la condition $P_0[A_l \cup A_{-l}] = 1$. Nous avons donc

$$\{K < +\infty\} \subseteq \{A_l \cup A_{-l}\} \text{ } P_0\text{-p.s.} \quad (2.2.13)$$

Or, sur $\{K < +\infty\}$, la réalisation de A_{-l} n'est pas possible puisque pour tout $n \geq K$, on a $X_n \cdot l > X_K \cdot l$. Il s'ensuit que

$$\{K < +\infty\} \subseteq A_{-l}^c \text{ } P_0\text{-p.s.}$$

Cela implique avec (2.2.14) que

$$\{K < +\infty\} \subseteq A_l \quad P_0\text{-p.s.} \quad (2.2.14)$$

Ayant montré les deux inclusions, cela conclut la preuve de (2.2.12). □

Finalement, nous avons construit un temps τ_1 appelé temps de régénération tel que P_0 -p.s.

$$\begin{aligned} X_n \cdot l &< X_{\tau_1} \cdot l, & n < \tau_1 \\ X_n \cdot l &\geq X_{\tau_1} \cdot l, & n \geq \tau_1 \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une structure de renouvellement, il suffit donc de répéter la procédure. Nous définissons $\tau_k(X_n)$ comme le k -ième temps de régénération du processus X_n . De manière récursive sur les temps de régénération, nous posons

$$\tau_{k+1}(X_n) := \tau_k(X_n) + \tau_1(X_{\tau_k(X_n)+n}), \quad k \geq 1, n \geq 0 \quad (2.2.15)$$

La figure 2.2 montre un exemple d'une trajectoire avec des temps de régénération. Les temps de régénérations dépendent de la trajectoire complète de la marche, nous supposons à certain niveau que la marche ne revient jamais à un niveau inférieur ou égal à celui-ci pour donner un exemple de temps de régénération.

Notons que le premier temps de régénération τ_1 est à distinguer car 0 n'a aucune raison d'être le temps de régénération initial « τ_0 ». Il l'est uniquement sur l'événement $\{D = +\infty\}$. Ces temps permettent de découper la trajectoire de la marche en différentes sections où les trajets de chacune de ces sections ne s'intersectent pas (voir figure 2.2). Intuitivement, nous pourrions nous attendre à avoir une certaine indépendance entre ces trajets. En effet, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'information acquise par le marcheur en visitant des sites donne de l'information sur le milieu et doit être prise en compte lorsqu'on considère la moyenne par rapport à l'environnement. Or, si nous coupons la trajectoire de sorte à obtenir des sections disjointes, nous devrions nous attendre à obtenir une indépendance entre ces sections. L'intérêt principal de cette structure réside dans cette intuition. Nous allons voir dans la prochaine section le résultat principal de ce chapitre.

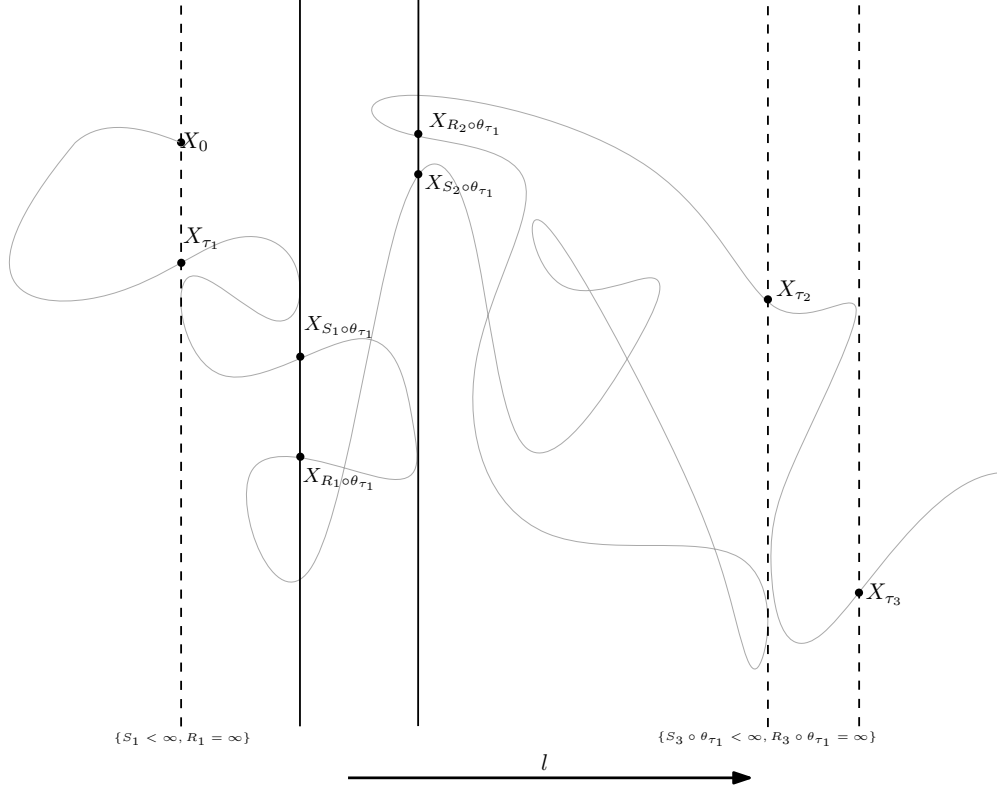


FIGURE 2.2. Exemple de temps de régénération τ_k pour $k \geq 1$.

2.3. STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT

Nous présentons dans cette section les résultats tirés de [23] ainsi que leurs preuves. Nous avons besoin de quelques notations supplémentaires avant de présenter le résultat. Définissons la tribu \mathfrak{F}_k de la façon suivante

$$\mathfrak{F}_k := \sigma((\tau_1, \dots, \tau_k), (X_{n \wedge \tau_k})_{n \geq 0}, \omega(y, e)_{y \cdot l < X_{\tau_k}}) \quad (2.3.1)$$

Plus précisément, dans le cas \mathfrak{F}_1 , la tribu est générée par les ensembles $\{\tau_1 = k\} \cap \{X_{\tau_1} = x\} \cap A$, où $A \in \sigma((X_1, X_2, \dots, X_k), \omega(y, e)_{y \cdot l < x \cdot l})$ pour $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. En mots, cette tribu constitue l'information spatiale et temporelle de la marche avant d'atteindre le k -ième temps de régénération ainsi que l'environnement faisant partie de l'hyperplan gauche de $X_{\tau_k} \cdot l$. Selon (2.2.13), nous posons

$$Q_0[\cdot] := P_0[\cdot | A_l] = P_0[\cdot | \tau_1 < +\infty]$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat.

Théorème 2.3.1. (*Sznitman-Zerner 1999*) Soient f, g, h , des fonctions bornées qui sont $\sigma((X_n) : n \geq 0)$ -, $\sigma(\omega(y, e) : y \cdot l \geq 0)$ - et \mathfrak{F}_1 -mesurables respectivement. Alors

$$E^{Q_0}[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h] = E_0[fg \mid D = +\infty]E^{Q_0}[h] \quad (2.3.2)$$

où t_x est l'opérateur de translation spatiale canonique sur \mathbb{Z}^d . Ici, $E_0[\cdot]$ et $E^{Q_0}[\cdot]$ sont l'espérance par rapport à la mesure P_0 et Q_0 respectivement.

Il s'agit du théorème central à la structure de renouvellement. Puisque la notation est lourde, nous croyons qu'il est utile de donner la signification de ce résultat avant de présenter la preuve. Les fonctions $f \circ \theta_{\tau_1}$ et $g \circ t_{X_{\tau_1}}$ sont des fonctions mesurables par rapport à la marche partant de τ_1 et l'environnement de l'hyperplan droit de $X_{\tau_1} \cdot l$ respectivement. Ce résultat justifie le terme «régénération» qu'on associe aux temps τ_k où le processus se renouvelle au sens de la distribution. Notons que $\{D = +\infty\} = \{\tau_0 = 0\}$, et alors ce résultat montre en particulier que la marche à partir de τ_1 est distribuée sous Q_0 comme P_0 conditionné à ce que la marche ne revienne jamais derrière son état initial ($D = +\infty$). En effet, en choisissant les fonctions indicatrices appropriées, nous avons à partir de ce résultat que

$$Q_0[(X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega(X_{\tau_1} + y, e))_{y \cdot l \geq 0} \in \cdot \mid \mathfrak{F}_1] = P_0[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega(y, e))_{y \cdot l \geq 0} \in \cdot \mid D = +\infty]$$

où le terme de droite est la distribution jointe de la marche aléatoire partant de X_0 et de l'environnement dans l'hyperplan positif ($\{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l \geq X_0 \cdot l\}$) conditionnellement à ce que la marche ne revienne jamais derrière son état initial.

Nous avons donc créé une séquence de temps où le processus, de manière intuitive, «re-commence». Nous pouvons donner des exemples classiques de renouvellement de processus stochastiques. Le premier est le processus C_n (avec certaines suppositions afin d'avoir un modèle approprié à la discussion) déterminant au temps n le nombre de clients dans une file d'attente d'un magasin. Un renouvellement du processus dans ce cas serait un moment où un client se présente au magasin alors qu'il n'y a aucun client en file. De plus, sachant que la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} est récurrente, le second exemple serait simplement chaque retour au point initial (X_0) de cette marche.

La preuve repose essentiellement sur l'indépendance de l'environnement entre les différentes sections déterminées par les temps de régénération. En effet, si nous posons

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{x \in \mathbb{Z}^d : x < X_{\tau_1} \cdot l\} \\
S_1 &= \{x \in \mathbb{Z}^d : X_{\tau_1} \cdot l \leq x < X_{\tau_2} \cdot l\} \\
S_k &= \{x \in \mathbb{Z}^d : X_{\tau_k} \cdot l \leq x < X_{\tau_{k+1}} \cdot l\} \text{ pour } k \geq 2
\end{aligned}$$

alors nous avons que les tribus $(\sigma(\omega(x,e), x \in S_k))_{k \geq 0}$ sont indépendantes par construction. L'autre aspect important est le caractère markovien de la loi quenched. Donnons maintenant la preuve de ce résultat.

DÉMONSTRATION. Nous posons f, g, h , des fonctions bornées qui sont $\sigma((X_n) : n \geq 0)$ -, $\sigma(\omega(y,e); y \cdot l \geq 0)$ - et \mathfrak{F}_1 -mesurables respectivement. Nous avons

$$P_0[\tau_1 < +\infty] E^{Q_0}[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h] = E_0[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h, A_l]$$

Rappelons que, selon la proposition 2.2.1, on a $A_l = \{K < +\infty\} = \{\tau_1 < +\infty\}$ P_0 -p.s. ou encore que $A_l = \{S_k < +\infty, R_k = +\infty\}$ P_0 -p.s. pour un certain $k \geq 0$. Nous avons avec (2.1.19) que

$$\begin{aligned}
E_0[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h, A_l] &= \sum_{k \geq 1} E_0[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h, S_k < +\infty, R_k = +\infty] \\
&= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_x)h, X_{S_k} = x, S_k < +\infty, R_k = +\infty]
\end{aligned}$$

Rappelons que sur $\{S_k < +\infty, R_k = +\infty\}$, nous avons $\{\tau_1 = S_k\}$. Nous posons la fonction $h_{x,k}$ bornée $\sigma(S_k, (X_{n \wedge S_k})_{n \geq 0}, \omega(y,e)_{y \cdot l < x \cdot l})$ -mesurable. Cette fonction coïncide avec h sur l'événement $\{\tau_1 = S_k, X_{\tau_1} = x\}$. Pour vérifier cela, il suffit de voir la définition de \mathfrak{F}_1 (voir (2.2.1)). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_x)h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty, R_k = +\infty] \\
&= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_x)h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty, R_k = +\infty]] \\
&= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[(f \circ \theta_{\tau_1})h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty, D \circ \theta_{S_k} = +\infty]g \circ t_x]
\end{aligned}$$

La première égalité est tout simplement due à la définition de la mesure annealed, la seconde vient du fait que g est $\sigma(\omega(y,e) : y \cdot l \geq 0)$ -mesurable, soit une fonction de l'environnement.

Ensuite, il faut noter que sur $\{S_k < +\infty\}$, nous avons $\{D \circ \theta_{S_k} = +\infty\} = \{R_k = +\infty\}$. Maintenant, en utilisant le caractère markovien de la loi quenched, nous pouvons utiliser la propriété forte de Markov et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_x)h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty, D \circ \theta_{S_k} = +\infty]] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]E_{x,\omega}[fg, D = +\infty]] \end{aligned}$$

Nous remarquons que $E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]$ est $\sigma(\omega(y,e) : y \cdot l < x \cdot l)$ -mesurable et $E_{x,\omega}[fg, D = +\infty]$ est $\sigma(\omega(y,e) : y \cdot l \geq x \cdot l)$ -mesurable. Il s'ensuit, sachant que l'environnement est i.i.d., que $E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]$ et $E_{x,\omega}[fg, D = +\infty]$ sont \mathbb{P} -indépendantes. Cela implique que

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty]E_{x,\omega}[fg, D = +\infty]] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]]\mathbb{E}[E_{x,\omega}[fg, D = +\infty]] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]E_x[fg, D = +\infty] \\ &= E_0[fg | D = +\infty] \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]P_0[D = +\infty] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

en rappelant que la mesure annealed est invariante par translation, et donc que $E_x[fg, D = +\infty] = E_0[fg, D = +\infty]$. Nous avons montré que

$$\begin{aligned} & P_0[\tau_1 < +\infty]E^{Q_0}[(f \circ \theta_{\tau_1})(g \circ t_{X_{\tau_1}})h] \\ &= E_0[fg | D = +\infty] \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]P_0[D = +\infty] \end{aligned}$$

En posant $f = g = 1$, nous obtenons

$$P_0[\tau_1 < +\infty]E^{Q_0}[h] = \sum_{k \geq 1, x \cdot l \geq 0} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < +\infty]P_0[D = +\infty]$$

Alors, nous avons que (2.3.3) est égale à

$$E_0[fg \mid D = +\infty]P_0[\tau_1 < +\infty]E^{Q_0}[h]$$

Rappelons que nous supposons $P_0[\tau_1 < +\infty] = P_0[A_l] > 0$. Alors, cela montre (2.3.2) et conclut la preuve. \square

Avec l'hypothèse que $P_0[A_l \cup A_{-l}] = 1$, nous avons que

$$\{D = +\infty\} \subset A_l \cup A_{-l} \quad P_0\text{-p.s.}$$

Avec la définition de D , nous remarquons que $\{D = +\infty\} \subset A_{-l}^c$ ce qui implique que

$$\{D = +\infty\} \subset A_l = \{\tau_1 < +\infty\} \quad P_0\text{-p.s.}$$

De plus, il est facile de voir que

$$\{D = +\infty\} = \{D \geq \tau_1\} \quad P_0\text{-p.s.}$$

ce qui implique que $\{D = +\infty\} \in \mathfrak{F}_1$. Cette remarque sera utile dans la preuve du prochain théorème. Nous rappelons la définition récursive des temps de régénération τ_k (2.2.16). Nous avons montré, dans un certain sens, que la trajectoire de la marche à partir de τ_1 est indépendante du passé. D'ailleurs elle est distribuée comme la marche partant de 0 conditionnée à ce que le premier temps soit en quelque sorte un temps de régénération ($\{D = +\infty\}$). L'objectif dans le prochain théorème est de réitérer l'idée sur la marche partant de τ_1 et d'obtenir le même résultat. Le théorème suivant est présenté par Sznitman-Zerner en 1999 dans [23].

Théorème 2.3.2. (*Structure de renouvellement*) *Sous la mesure Q_0 , les variables aléatoires $Y_k := (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k)$ pour $k \geq 1$ sont indépendantes. De plus, elles sont distribuées sous Q_0 comme Y_0 sous $P_0[\cdot \mid D = +\infty]$.*

DÉMONSTRATION. Posons \mathcal{G}_{n+1} comme la tribu naturelle de $(Y_k)_{0 \leq k \leq n}$. Il est suffisant, afin de prouver le théorème, de montrer que

$$E^{Q_0}[h, Y_{n+1} \in \cdot] = E^{Q_0}[h]P_0[Y_0 \in \cdot \mid D = +\infty] \quad (2.3.4)$$

pour toute fonction h bornée et \mathcal{G}_{n+1} -mesurable. Nous montrons cela par induction. Remarquons d'abord que $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{F}_1$. Pour le cas $n = 0$, il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1 en posant $f = \mathbb{1}_{\{Y_0 \in \cdot\}}$. Assumons que le résultat tient pour $n \geq 0$ et montrons que c'est alors le cas pour $n + 1$. Nous posons \mathfrak{F}_n^+ comme dans la définition (2.3.1) mais en ajoutant la contrainte supplémentaire que $0 \leq y \cdot l$. De plus, notons que \mathfrak{F}_{n+1} est générée par \mathfrak{F}_1 et $\theta_{\tau_1}^{-1}(\mathfrak{F}_n^+)$. Alors, sans perte de généralité, nous posons $h = h_1 \cdot h_n \circ \theta_{\tau_1}$, avec $h_1 \in \mathfrak{F}_1$ et $h_n \in \mathfrak{F}_n^+$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} E^{Q_0}[h \mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in \cdot\}}] &= E^{Q_0}[h_1 \cdot h_n \circ \theta_{\tau_1} \mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in \cdot\}}] \\ &= E^{Q_0}[(h_n \mathbb{1}_{\{Y_n \in \cdot\}}) \circ \theta_{\tau_1} \cdot h_1] \end{aligned}$$

En appliquant le théorème (2.3.1), nous obtenons l'égalité de ce qui précède avec

$$E_0[h_n \mathbb{1}_{\{Y_n \in \cdot\}} | D = +\infty] E^{Q_0}[h_1] = E_0[h_n \mathbb{1}_{\{Y_n \in \cdot\}}, D = +\infty] \frac{E^{Q_0}[h_1]}{P_0[D = +\infty]}$$

Rappelons que $\{D = +\infty\} \in \mathfrak{F}_1$, et alors $h_n \mathbb{1}_{\{D = +\infty\}}$ est \mathfrak{F}_n -mesurable. Le côté droit de la dernière expression peut être réécrit de la façon suivante

$$E_0[h_n \mathbb{1}_{\{D = +\infty\}}, Y_n \in \cdot] \frac{E^{Q_0}[h_1]}{P_0[D = +\infty]}$$

Rappelons également que $\{D = \infty\} \subset A_l$. Il s'ensuit par l'hypothèse d'induction que ce qui précède est égal à

$$\begin{aligned} &E^{Q_0}[h_n \mathbb{1}_{\{D = +\infty\}}] P_0[Y_0 \in \cdot | D = +\infty] \frac{E^{Q_0}[h_1]}{P_0[D = +\infty]} \\ &= E^{Q_0}[h] P_0[Y_0 \in \cdot | D = +\infty] \end{aligned}$$

Cela montre (2.3.4) et conclut la preuve. □

2.4. LOI DES GRANDS NOMBRES

Nous présentons maintenant le loi des grands pour une classe de marche aléatoire en milieu aléatoire sur \mathbb{Z}^d vérifiant

$$E_0[\tau_1 | D = +\infty] < +\infty$$

Notons que cela implique, puisque $|X_{\tau_1}| \leq \tau_1$, que $E_0[|X_{\tau_1}| \mid D = \infty] < \infty$. Il s'ensuit en utilisant le théorème 2.3.2 (l'indépendance entre les trajets appartenant à différentes sections de renouvellement) et la loi forte des grands nombres que

$$\frac{X_{\tau_n}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{X_{\tau_k} - X_{\tau_{k-1}}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_0[X_{\tau_1} \mid D = +\infty] \quad Q_0\text{-p.s.} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\tau_n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_0[\tau_1 \mid D = +\infty] \quad Q_0\text{-p.s.} \quad (2.4.2)$$

Définissons une séquence non décroissante k_n pour $n \geq 0$ telle que $k_n \rightarrow +\infty$ Q_0 -p.s. et

$$\tau_{k_n} \leq n < \tau_{k_n+1}$$

avec la convention que $\tau_0 = 0$. Cela nous amène en divisant l'inégalité ci-dessus par k_n à

$$\frac{n}{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_0[\tau_1 \mid D = +\infty] \quad Q_0\text{-p.s.} \quad (2.4.3)$$

en utilisant (2.4.2) avec k_n au lieu de n . Notons que

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} + \frac{X_n - X_{\tau_{k_n}}}{n}$$

En utilisant (2.4.3) et (2.4.1), la limite du premier terme de la dernière égalité nous donne

$$\frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{E_0[X_{\tau_1} \mid D = +\infty]}{E_0[\tau_1 \mid D = +\infty]} \quad Q_0\text{-p.s.}$$

Nous pouvons ensuite facilement contrôler le temps entre les temps de régénération et nous obtenons la loi des grands nombres. En effet, notons que $X_{\tau_{k_n}} \leq X_n < X_{\tau_{k_n+1}}$ par construction de la suite k_n et la propriété des temps de régénération. De plus, rappelons que $|X_{\tau_n}| \leq \tau_n$. De ces faits, nous avons

$$\frac{|X_n - X_{\tau_{k_n}}|}{n} \leq \frac{\tau_{k_n+1} - \tau_{k_n}}{n} = \frac{\tau_{k_n+1}}{k_n+1} \frac{k_n+1}{n} - \frac{\tau_{k_n}}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad Q_0\text{-p.s.}$$

en utilisant encore une fois (2.4.2) et (2.4.3). Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. (*Sznitman-Zerner 1999*) *Assumons $E_0[\tau_1 | D = +\infty] < +\infty$ et $P_0(A_l) > 0$ pour un certain $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Alors*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v = \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = +\infty]}{E_0[\tau_1 | D = +\infty]} \quad Q_0\text{-p.s.}$$

De plus,

$$v \cdot l > 0$$

L'inconvénient dans l'hypothèse de ce théorème, soit $E_0[\tau_1 | D = +\infty] < +\infty$, est de faire intervenir le temps τ_1 . Notons que ce temps n'est pas un temps d'arrêt. Il dépend de la trajectoire complète du marcheur, et de ce fait il est souvent difficile de montrer l'intégrabilité de celui-ci.

Les marches aléatoires ayant une vitesse asymptotique positive sont dites des **marches balistiques**. Pour la suite, nous énoncerons certaines conditions qui assurent un comportement balistique, soit des conditions explicites qui impliquent l'intégrabilité du temps τ_1 . Il est important de noter que les marches balistiques n'ont jamais été complètement caractérisées en dimension $d \geq 2$, malgré les nombreux travaux sur le sujet.

2.4.1. Condition de Kalikow

Nous présentons dans cette section une condition donnée par Kalikow dans [10] pour assurer un comportement balistique de la marche. Il s'agit ici d'une brève présentation de la condition et de la chaîne de Markov auxiliaire (aussi nommée la chaîne de Kalikow). Nous donnons suffisamment de détails pour compléter l'étude de la loi des grands nombres, mais sans plus. Nous définissons les marches balistiques de la façon suivante :

Définition 2.4.1. *Une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ est dite balistique s'il existe $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ déterministe tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = v \quad P_0\text{-p.s.}$$

L'idée de Kalikow est de construire une chaîne de Markov qui, pour $U \subset \mathbb{Z}^d$ un sous-graphe connexe contenant 0, de loi $P_{x,U}^K$ dont la distribution de sortie de U , X_{S_U} (voir définition (2.1.4)), est la même que celle de $(X_n)_{n \geq 0}$ sous P_0 . Pour ce faire, Kalikow définit les probabilités de transition de $P_{x,U}^K$ à l'aide de la fonction de Green G_U définie de la façon suivante :

$$G_{U,\omega}(x) := E_{0,\omega} \left[\sum_{k=0}^{S_U} \mathbb{1}_{X_k=x} \right], \quad \omega \in \Omega$$

La fonction de Green représente le nombre moyen de fois que le marcheur atteint x avant de quitter U partant de 0. Nous notons δU la frontière de U , défini par $\delta U := \{x \in \mathbb{Z}^d : x \notin U, \exists y \in U, |x - y| = 1\}$. Nous définissons maintenant les probabilités de transition de cette chaîne de Markov pour $x \in U \cup \delta U$:

$$\begin{aligned} p_{0,U}^K(x, x+e) &= \frac{\mathbb{E}[G_{U,\omega}(x)\omega(x, e)]}{\mathbb{E}[G_{U,\omega}(x)]}, \quad e \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1, x \in U \\ p_{0,U}^K(x, x) &= 1, \quad x \in \delta U \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Il est important de remarquer qu'avec l'hypothèse d'ellipticité uniforme sur l'environnement et le fait que U soit connexe, les espérances ci-dessus sont positives et finies. En d'autres termes, les probabilités de transition données ci-dessus peuvent être vues comme la moyenne de transitions effectuées sur une arête par la marche avant de quitter U . L'intérêt porté à cet objet vient de la proposition suivante (voir la proposition 1, p.757 dans, [10]) :

Proposition 2.4.1. *Si $P_{0,U}^K[\tau_1 < +\infty] = 1$, alors $P_0[\tau_1 < +\infty] = 1$. De plus, X_{S_U} a la même distribution sous $P_{0,U}^K$ que sous P_0 .*

Nous pouvons maintenant énoncer la condition de Kalikow relative à une direction $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Définition 2.4.2. *(Condition de Kalikow) Il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\inf_{U, x \in U} \sum_{|e|=1} (e \cdot l) P_{0,U}^K(x, x+e) > \epsilon \tag{2.4.5}$$

où l'infimum se fait sur $U \subset \mathbb{Z}^d$ pour U connexe contenant 0.

Un résultat important que Kalikow a montré est que cette condition implique que $P_0[A_l] = 1$. Nous rappelons que $A_l = \{\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \cdot l = +\infty\}$. De plus, si la condition est respectée, P_0 et Q_0 coïncident. Cette condition est difficile à vérifier. Kalikow a toutefois montré que la condition (2.4.2) par rapport à l est vérifiée si, en supposant la condition d'ellipticité uniforme, nous avons

$$\inf_{f \in F} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{|e|=1} \omega(0,e) e \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(0,e) f(e)} \right] \middle/ \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sum_{|e|=1} \omega(0,e) f(e)} \right] \right\} \geq \epsilon, \quad \text{pour un } \epsilon > 0 \quad (2.4.6)$$

où F dénote l'ensemble des $f = (f(e))_{e \in \mathbb{Z}^d, |e|=1}$ avec $f(e) \in [0,1]$ pour tout e et $f \neq 0$. Cette condition peut se vérifier sans calculer la chaîne de Kalikow. Elle ne dépend que de la loi de l'environnement en un site et permet des applications concrètes. Sznitman et Zerner ont montré que cette condition assure un comportement balistique.

Proposition 2.4.2. *Supposons la condition (2.4.2) dite de Kalikow. Alors $E_0[\tau_1 | D = +\infty] < +\infty$ et donc*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v = \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = +\infty]}{E_0[\tau_1 | D = +\infty]} \quad P_0\text{-p.s.}$$

où $v \cdot l > 0$.

Il est important de mentionner que cette condition n'offre pas une caractérisation des marches balistiques (du moins en dimension $d \geq 2$). En effet, Sznitman a donné dans [20] en 2003 un exemple d'une marche aléatoire balistique en milieu aléatoire qui ne vérifie pas la condition de Kalikow. Finalement, bien que Sznitman a amélioré les conditions suffisantes pour un comportement balistique (voir [20], [19]), il n'existe toujours pas de condition nécessaire et suffisante pour cette classe de MAMA.

Pour conclure cette section, nous nous penchons sur le cas unidimensionnel. Nous montrons que la condition de Kalikow caractérise les MAMA balistiques en dimension $d = 1$. Un résultat classique de Solomon (voir [18]) montre qu'en dimension $d = 1$, si la condition d'ellipticité uniforme tient, alors nous obtenons un comportement balistique de la MAMA. Plus particulièrement, la vitesse est non-nulle si et seulement si

$$\mathbb{E} \left[\frac{\omega(0, -1)}{\omega(0,1)} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{q}{p} \right] < 1 \quad (2.4.7)$$

en posant $p = \omega(0,1)$ et $q = \omega(0, -1)$. Nous voyons que la condition explicite de Kalikow (voir (2.4.3)) est équivalente à (2.4.4) dans le cas où $d = 1$ et $l = 1$. En effet,

$$\inf_{a,b>0} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{p-q}{ap+bq} \right] \middle/ \mathbb{E} \left[\frac{1}{ap+bq} \right] \right\} > \epsilon, \quad \text{pour un } \epsilon > 0$$

Cette condition implique, en posant $a = 1$ et en laissant tendre b vers 0, que

$$\mathbb{E} \left[\frac{p-q}{p} \right] > \mathbb{E} \left[\frac{p-q}{p} \right] / \mathbb{E} \left[\frac{1}{p} \right] > 0$$

ce qui implique (2.4.4). La converse est montrée dans [23].

2.5. MODÈLE RÉVERSIBLE

Nous offrons dans cette section plus de généralité. Le modèle considéré ici n'est pas a proprement parler plus général. Il s'agit d'un exemple expliquant comment adapter la méthode décrite plus haut à des cas plus généraux. La construction de la structure de renouvellement présentée plus haut est classique. Elle échoue à fournir l'indépendance entre les sections de renouvellement de la marche dans d'autres modèles de MAMA souvent considérés. Nous présentons dans cette section, de façon non formelle, une construction des temps de régénération qui nous permet de retrouver cette indépendance entre les différents blocs de renouvellement pour le modèle réversible. L'astuce se trouve dans la construction de la structure de renouvellement. Les démonstrations une fois celle-ci construite sont similaires à celles présentées à la première partie du chapitre. La première section fournit déjà les outils nécessaires à la démonstration de notre résultat principal. De ce fait, les démonstrations rigoureuses sont omises dans cette section, et nous présentons seulement la construction.

Définissons d'abord le modèle considéré ici. Encore une fois, nous ne donnons pas une définition générale et nous considérons le graphe \mathbb{Z}^d . Nous notons $E(\mathbb{Z}^d)$ les arêtes du graphe. En mots, nous associons à chaque arête $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ un *poids* positif. Cela entraîne une dépendance au niveau de l'environnement puisqu'une arête est partagée par deux sommets de \mathbb{Z}^d (il y a une corrélation entre les probabilités de transition entre voisins dans \mathbb{Z}^d). Il s'ensuit que la structure de renouvellement présentée ci-haut échoue à fournir l'indépendance entre les différents blocs de renouvellement. Nous voulons ensuite définir une marche aléatoire biaisée sur ce graphe. En termes précis, le modèle de marche aléatoire biaisée n'est pas un modèle de conductances aléatoires, car les conductances dans ce cas-ci ne sont pas identiquement distribuées. Elles sont construites à partir des conductances i.i.d. en augmentant les poids dans une direction l .

Plus précisément, pour P la loi d'une variable aléatoire positive $c(e) \in (0, +\infty)$ avec $e \in E(\mathbb{Z}^d)$, nous définissons la loi de l'environnement comme $\mathbb{P} := P^{\otimes E(\mathbb{Z}^d)}$. Dans le but de définir la marche aléatoire biaisée, nous posons $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ le biais de la marche. En utilisant les mêmes notations qu'à la première section, et en considérant un environnement donné ω , la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est de loi $P_{x,\omega}$ où $X_0 = x$ $P_{x,\omega}$ -p.s. Nous notons $[x,y]$ l'arête de $E(\mathbb{Z}^d)$ reliant x et y . Les probabilités de transition sont définies de la façon suivante :

$$p_\omega(x, x + e) = \frac{c([x, x + e])e^{e \cdot \beta}}{\sum_{y \sim x} c([x, y])e^{(y-x) \cdot \beta}} \quad \text{pour } e \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1$$

où $y \sim x$ signifie que y est adjacent à x dans \mathbb{Z}^d . La chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est réversible avec la mesure invariante

$$\pi_{x, \omega} := \sum_{y \sim x} c([x, y])e^{(y+x) \cdot \beta}$$

au sens où

$$\pi_{x, \omega} p_\omega(x, y) = \pi_{y, \omega} p_\omega(y, x)$$

Les conductances considérées ici sont donc $c([x, y])e^{(x+y) \cdot \beta}$. Il est important de noter que dans le modèle défini ici, nous avons laissé tomber la condition d'ellipticité uniforme ($c([x, y]) \in (\frac{1}{\kappa}, \kappa)$ pour un certain $\kappa > 0$) pour plus de généralité.

2.5.1. Structure de renouvellement

La méthode classique pour la construction d'une structure de renouvellement présentée à la première section consiste à considérer les temps où la marche atteint un niveau record dans la direction l et d'argumenter qu'il y ait à chacun de ces moments une probabilité positive de ne jamais revenir derrière ce niveau atteint. Ces temps de régénération où la marche ne revient pas en arrière séparent la trajectoire. Cette coupure mène à des propriétés d'indépendance intéressantes.

Le modèle réversible pose un problème à cette construction. Nous avons deux difficultés. La première est que sans la condition d'ellipticité uniforme, la conductance de l'arête menant à un niveau record dans la direction l pourrait être anormalement grande et ainsi contraindre fortement la marche à revenir en arrière au prochain pas, ne créant donc pas un temps de régénération. Cette problématique est illustrée dans la figure 2.3. Le seconde s'explique par le fait que l'arête menant à un niveau record est reliée au passé ainsi qu'au futur du marcheur, ce qui crée une dépendance vis-à-vis l'environnement futur et passé du marcheur. En effet, la conductance associée à cette arête est aléatoire. Les probabilités de transition au niveau record en X_n dépendent de cette conductance au même titre que celles en X_{n-1} .

Suivant ces remarques, dans le but d'adapter la construction classique au cas présent, nous devons montrer que l'environnement du marcheur à ces niveaux records est relativement normal et exiger du marcheur d'avancer davantage dans la direction du biais lorsqu'il atteint

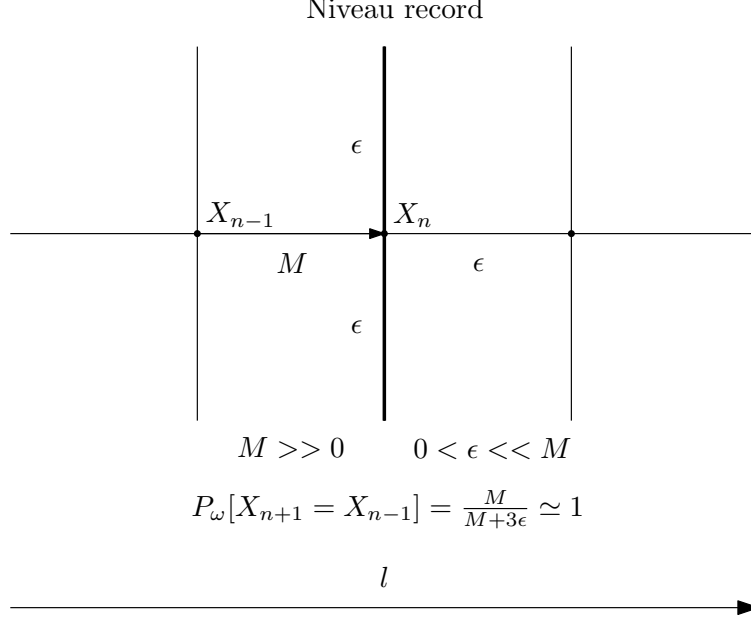


FIGURE 2.3. Problématique reliée à une conductance anormalement élevée à un niveau record.

un niveau record. Pour la suite, nous suivons les idées de [7] pour la construction de la structure de renouvellement. La construction d'une structure de renouvellement pour traiter le cas de marche aléatoire en percolation surcritique présente des idées semblables (voir [21] section 2). Précisons maintenant ce qu'est un environnement dit *normal*. Nous posons

$$e_0 := \max_{e \in \mathbb{Z}^d, |e|=1} \{e \cdot l\} \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (2.5.1)$$

Et maintenant nous définissons :

- (1) Une arête $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ est dite K -normale si $c(e) \in [1/K, K]$. Une arête qui n'est pas K -normale est dite K -anormale.
- (2) Pour un sommet $x \in \mathbb{Z}^d$, nous disons que x est K -ouvert si $c([x, x+e])$ est K -normal pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|e| = 1$. Un sommet x qui n'est pas K -ouvert est dit K -fermé.
- (3) Finalement, nous définissons un sommet x comme étant K -simple s'il existe une chaîne infinie $\{x, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ partant de x telle que x_i est K -ouvert pour tout x_i de la chaîne et $x_{2i+1} - x_{2i} = e_0$ pour tout i .

Nous définissons la variable aléatoire

$$\mathcal{M}^{(K)} := \inf\{n \geq 0 : \text{pour } i < n - 2, X_i \cdot l < X_{n-2} \cdot l, X_n \text{ est } K\text{-ouvert}, \quad (2.5.2)$$

$$X_n = X_{n-1} + e_0 = X_{n-2} + 2e_0\}$$

Cette variable représente le temps où la marche atteint un niveau record en X_{n-2} (dans la direction l). Nous exigeons également que la marche fasse deux pas dans la direction e_0 (la direction la plus orientée vers l) et qu'à ce niveau, l'environnement soit relativement normal. Remarquons que cette variable est similaire à S_1 présenté dans la première section qui indiquait le temps où la marche atteint un niveau record dans la direction l . Nous imposons ces conditions supplémentaires afin de résoudre les difficultés énoncées plus haut. Les pas exigés dans la direction e_0 ont pour but de réduire les corrélations qui apparaissent entre le futur et le passé de la marche à un niveau record. La deuxième restriction fait en sorte que la marche ait plus de facilité à s'échapper à l'infini une fois le niveau record atteint, ce qui est nécessaire afin de créer un temps de régénération une fois ce niveau atteint.

Nous rappelons que $T_U := \inf\{n \geq 0 : X_n \in U\}$. De la même façon que dans le cas du modèle i.i.d., nous définissons deux suites de temps d'arrêt, S_k et R_k pour $k \geq 1$, ainsi qu'une suite de maximums successifs M_k pour $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \quad M_0 = X_0 \cdot l \\ S_1 &= \mathcal{M}^{(K)}, \quad R_1 = S_1 + D \circ \theta_{S_1} \end{aligned}$$

avec

$$M_k = \sup\{X_n \cdot l, 0 \leq n \leq R_k\} \tag{2.5.3}$$

puis récursivement les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} S_k &= \mathcal{M}^{(K)} \circ \theta_{T_{M_{k-1}}} + T_{M_{k-1}}, \\ R_k &= S_k + D \circ \theta_{S_k} \end{aligned}$$

Nous définissons finalement de la même façon qu'à la première section le premier temps de régénération $\tau_1 = S_K$ où $K = \inf\{k \geq 1 : S_k < +\infty \text{ et } R_k = +\infty\}$. Il reste beaucoup de travail avant d'arriver à une structure de renouvellement. L'objectif était seulement de présenter une idée des modifications à apporter pour adapter la structure classique à ce qui nous intéressait.

2.6. UN COUPLAGE GÉNÉRAL

Le modèle principal étudié dans ce mémoire est la marche aléatoire β -biaisée sur l'arbre de Galton-Watson sans feuille. Cette marche est intimement reliée à la marche biaisée sur \mathbb{Z} . En effet, si nous considérons seulement la distance de l'origine du marcheur, il s'agit d'une marche sur \mathbb{Z} . Nous rappelons, de façon informelle, le résultat établi que la vitesse de la marche aléatoire β -biaisée sur l'arbre de Galton-Watson sans feuille est monotone par rapport à la distribution des progénitures. Plus précisément, si la loi des progénitures d'un arbre domine stochastiquement la loi des progénitures d'un autre arbre, alors la vitesse du marcheur sur le premier arbre est plus grande que celle du marcheur sur le deuxième arbre.

Dans l'optique des résultats montrés dans ce chapitre, l'existence d'une structure de renouvellement commune aux deux marches nous permettrait de comparer les vitesses. En effet, si $(\tau_n)_{n \geq 0}$ est une structure de renouvellement commune aux deux marches $(X_n^{(1)})$ et $(X_n^{(2)})$, il suffit alors de comparer $E_0[X_{\tau_1}^{(1)}]$ et $E_0[X_{\tau_1}^{(2)}]$ afin de conclure en appliquant le théorème 2.4.1. Un couplage de ces marches permettrait de construire une telle structure de renouvellement. Or, la difficulté est que nous sommes incapable de coupler les deux marches évoluant sur ces deux environnements distincts. L'astuce pour remédier au problème est de coupler les marches à l'aide d'une troisième marche sur \mathbb{Z} pour ensuite y extraire une structure de renouvellement commune. Ce couplage est présenté dans [2] et s'est avérée utile tout récemment dans [4] (voir la section 1.3.2 pour une discussion des résultats).

Dans cette section, nous décrivons ce couplage avec plus de généralité en considérant les marches avec des conductances i.i.d. uniformément elliptiques sur \mathbb{Z}^d en suivant [4]. Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de \mathbb{Z}^d . Nous considérons ici les marches biaisées dans la direction $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Posons $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. Nous construisons un couplage de loi quenched pour deux environnements $(\omega_1$ et $\omega_2)$ et différentes valeurs du biais. Les variables U_n déterminent, aux temps $n \geq 0$, les mouvements effectués par les marches dépendamment du biais β et de l'environnement ω . Pour une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}^{\beta, \omega}$ β -biaisée sur l'environnement ω orientée vers e_1 , nous notons les probabilités de transition

$$p_{\beta, \omega}(x, x + e) := P_{\beta, \omega}[X_{n+1} = x + e \mid X_n = x]$$

Elles sont définies de la même manière que (2.5.1). Nous laissons U_n déterminer le mouvement des marches au temps n de la manière suivante : nous coupons $[0, 1]$ en $2d$ (le nombre de pas possibles pour chacune des marches) intervalles de longueur $p_{\beta, \omega}(x, x + e_k)$, ensuite pour chaque réalisation de U_n , le résultat étant situé dans l'intervalle associé à la direction e_k forcera les marches à se déplacer dans cette même direction. Plus précisément, notons $e_{d+i} = -e_i$ pour $1 \leq i \leq d$, $q_{\beta, \omega}(x, 0) = 0$ et

$$q_{\beta,\omega}(x,k) := \sum_{i=1}^k p_{\beta,\omega}(x, x + e_i), \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 2d$$

Remarquons que $q_{\beta,\omega}(x,k) - q_{\beta,\omega}(x,k-1) = p_{\beta,\omega}(x, e_k)$. Nous pouvons maintenant définir les deux processus orientés vers e_1 . Soient $(X_n)_{n \geq 0}^{\beta_1, \omega_1}$ et $(X_n)_{n \geq 0}^{\beta_2, \omega_2}$ deux marches aléatoires β_i -biaisées sur ω_i . Les transitions sont définies selon U_n pour $1 \leq k \leq 2d$ par

$$X_{n+1}^{\beta_i, \omega_i} = X_n^{\beta_i, \omega_i} + e_k \quad \text{si et seulement si} \quad q_{\beta_i, \omega_i}(X_n, k-1) \leq U_n \leq q_{\beta_i, \omega_i}(X_n, k)$$

pour $i = 1, 2$.

Nous avons en particulier que sur $U_n \leq q_{\beta_i, \omega_i}(x, 1)$, la marche se déplace dans la direction du biais. Notons que pour le cas unidimensionnel, ce couplage montre la monotonie de la vitesse par rapport au biais indépendamment de la constante d'ellipticité (δ dans notre cas). Effectivement, pour $\beta_1 \geq \beta_2$, nous avons $p_{\beta_1, \omega}(x, x+1) \geq p_{\beta_2, \omega}(x, x+1)$. Cela implique que si $U_n \leq q_{\beta_2, \omega}(X_n, 1)$ alors $U_n \leq q_{\beta_1, \omega}(X_n, 1)$, et de ce fait $X_n^{\beta_1, \omega} \geq X_n^{\beta_2, \omega}$.

Nous rappelons que nous considérons un environnement uniformément elliptique, ce qui implique qu'il existe $\delta \in (0, 1)$ tel que

$$1 - \delta \leq c(e) \leq 1 + \delta, \quad e \in E(\mathbb{Z}^d)$$

Nous insistons sur cette condition. Elle permet d'établir une borne inférieure par rapport au biais (indépendamment de l'environnement tiré) sur la probabilité que le marcheur se déplace dans la direction du biais ($q_{\beta_i, \omega_i}(x, 1)$). C'est la raison pour laquelle le couplage présenté ici fonctionne. Expliquons. Notons cette borne $\mu(\beta)$. Pour l'instant, il n'est pas difficile de se convaincre que $\mu(\beta) \leq \mu(\beta + \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ (un biais élevé force davantage le marcheur dans cette direction). Étant donné deux marches β et $\beta + \epsilon$ biaisées, nous savons qu'à chaque réalisation de $U_n \leq \mu(\beta + \epsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, les deux marches se déplacent dans la direction du biais. De ce fait, en introduisant une marche Y_n $\mu(\beta + \epsilon)$ -biaisée sur \mathbb{Z} que nous couplons aux deux marches sur \mathbb{Z}^d , chaque fois que cette marche se déplace vers la droite, les deux marches sur \mathbb{Z}^d se déplacent dans la direction du biais. Il s'ensuit que la structure de renouvellement de la marche Y forme également une structure de renouvellement commune aux deux marches sur \mathbb{Z}^d . Ayant présenté l'idée du couplage, donnons maintenant les détails.

Nous pouvons facilement calculer la borne inférieure $\mu(\beta)$ présentée ci-dessus. Il suffit de considérer le cas où cette probabilité sera la plus faible, c'est-à-dire le cas où $c(e_i) = 1 + \delta$ pour tout $2 \leq i \leq 2d$ et $c(e_1) = 1 - \delta$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} P_{\beta,\omega}[X_{n+1} = x + e_1 \mid X_n = x] &= \frac{c([x, x + e_1])e^\beta}{\sum_{y \sim x} c([x, y])e^{\beta((y-x) \cdot e_1)}} \\ &\geq \frac{(1 - \delta)e^\beta}{(1 - \delta)e^\beta + (2d - 1)(1 + \delta)} \\ &= \frac{e^\beta}{e^\beta + (2d - 1)\gamma} \\ &:= \mu(\beta) \end{aligned}$$

où $\gamma = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}$.

Sachant cela, nous pouvons maintenant introduire la marche sur \mathbb{Z}

$$Y_n^\beta := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbb{1}_{U_k \leq \mu(\beta)} - \mathbb{1}_{U_k > \mu(\beta)} \right)$$

Nous assumons que $\mu(\beta) > 1/2$, c'est-à-dire que pour $\beta > \log(\gamma) + \log(2d - 1)$, Y_n^β est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} avec un biais pour la droite. Rappelons que la borne inférieure établie plus haut assure que lorsque que Y_n fait un pas vers la droite alors $X_n^{\beta', \omega}$ se déplace également vers la droite, (direction e_1) pour $\beta' \geq \beta$. Ce processus unidimensionnel nous permet d'introduire une structure de renouvellement commune aux deux marches couplées.

2.6.1. Structure de renouvellement commune

La structure de renouvellement commune est constituée de temps qui sont dits des *super-temps de régénération*. Ces temps ont été introduits dans [1]. Nous définissons les super-temps de régénération de la façon suivante :

Définition 2.6.1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire β -biaisée sur \mathbb{Z}^d . Nous disons que τ est un super-temps de régénération pour $(X_n)_{n \geq 0}$ si τ est un temps de régénération pour la marche aléatoire $(Y_n)_{n \geq 0}$ β -biaisée associée sur \mathbb{Z} où

$$Y_0 = 0, \quad P[Y_n = Y_{n-1} + 1] = \mu(\beta)$$

Ce couplage permet donc de montrer un résultat de [4] que nous avons présenté dans le chapitre 1 concernant la monotonie de la marche. Cette structure de renouvellement étant commune aux deux marches sur \mathbb{Z}^d , nous pouvons maintenant comparer les termes $E_0[X_{\tau_1}^{\beta+\epsilon,\omega}]$ et $E_0[X_{\tau_1}^{\beta,\omega}]$. Nous rappelons qu'avec les résultats montrés au début du chapitre, nous avons

$$v(\beta) = \frac{E_0[X_{\tau_1}^{(\beta+\epsilon,\omega)} | D = +\infty]}{E_0[\tau_1 | D = +\infty]}$$

Alors nous pouvons montrer que

$$E_0[(X_{\tau_1}^{\beta+\epsilon,\omega} - X_{\tau_1}^{\beta,\omega}) \cdot e_1 | D = +\infty] > 0$$

où τ_1 est le premier super-temps de régénération et $D = \inf\{n \geq 1 : Y_n = 0\}$ (en utilisant la même notation qu'à la première section). Nous ne donnons pas plus de détails ici, car la preuve faite dans le prochain chapitre est essentiellement la même.

Chapitre 3

LA VITESSE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE BIAISÉE SUR UN GALTON-WATSON SANS FEUILLE

Nous présentons dans cette section le résultat sur la monotonie de la marche par rapport à l'environnement. La notation utilisée est la même que celle introduite au chapitre 1. Pour garder une indépendance entre les chapitres, nous rappelons rapidement les notations. Nous introduisons formellement la marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles. L'arbre de Galton-Watson est un arbre avec une racine r_0 où les progénitures pour tout individu sont des copies i.i.d. d'une variable aléatoire Z à support dans \mathbb{N} . Cet arbre est dit sans feuilles si $p_0 = \mathbb{P}[Z = 0] = 0$. L'espace de probabilité associé est (Ω, \mathbb{P}) où \mathbb{P} est la loi de l'arbre. Pour un individu x de l'arbre autre que la racine, nous utiliserons x^* pour noter le parent de x . De plus, nous utiliserons $|x|$ pour dénoter la distance de l'individu x à la racine. Finalement, nous notons $GW(\mathbb{P})$ un arbre de Galton-Watson où les progénitures sont distribuées selon \mathbb{P} .

Étant donné un arbre de Galton-Watson sans feuilles $GW(\mathbb{P})$, nous définissons une marche aléatoire β -biaisée sur $GW(\mathbb{P})$ pour $\beta > 0$ de la façon suivante. Les transitions à partir de la racine r_0 sont équiprobables parmi les progénitures. Il s'agit d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les individus de $GW(\mathbb{P})$, telle que pour x un individu de $GW(\mathbb{P})$ autre que la racine et x_1, x_2, \dots, x_k ses progénitures, nous avons

$$P[X_{n+1} = x^* | X_n = x] = \frac{1}{1 + \beta k}$$
$$P[X_{n+1} = x_i | X_n = x] = \frac{\beta}{1 + \beta k}, \quad 1 \leq i \leq k$$

La marche commence à la racine et P_ω est la loi quenched associée. De plus, nous notons $P_0 = \mathbb{P} \times P_\omega$ la loi annealed.

3.1. RÉSULTATS CONNUS

Nous présentons maintenant les résultats connus concernant la vitesse de la marche sur l'arbre de Galton-Watson sans feuilles. Lyons et al. ont montré dans [13] que la vitesse

$$v(\beta, \mathbb{P}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|X_n|}{n} \quad P_0\text{-p.s.}$$

existe et est une constante non-aléatoire \mathbb{P} -presque sûrement. Lyons, Pemantle et Peres ont conjecturé en 1996 dans [13] que la vitesse est croissante sur $(\frac{1}{E[Z]}, +\infty)$ sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles. Cette conjecture a été prouvée par Arous, Fribergh et Sidoravicius dans [2] pour un grand biais β .

Théorème 3.1.1. *La vitesse $\nu(\beta, \mathbb{P})$ d'une marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson sans feuilles est croissante pour $\beta > \beta_c$ pour un β_c assez grand.*

Dans ce même article, les auteurs ont soulevé la question suivante : si P_1 domine stochastiquement P_2 , est-ce que ça implique que $\nu(\beta, P_1) \geq \nu(\beta, P_2)$? Nous répondons à cette question dans ce mémoire par l'affirmative. Cette question a déjà été traitée par Mehrdad, Sen et Zhu en 2015 dans [24]. Ils obtiennent le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Soient deux mesures de probabilité P_1 et P_2 sur les entiers positifs telles que P_1 domine stochastiquement P_2 . Considérons deux marches aléatoires β -biaisées sur $GW(P_1)$ et $GW(P_2)$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\beta_c := \beta_c(P_1, P_2, \delta) > 0$ telle que pour tout $\beta > \beta_c$, nous avons $\nu(\beta, P_1) \geq \nu(\beta, P_2)$. La constante β_c est égale à $\max(\beta_1, \frac{23}{4} + \delta)$ où*

$$\beta_1 := c_\delta \cdot \min \left\{ \frac{E \left[\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) \mathbb{1}_{Z_1 < Z_2} \right]}{E \left[\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right]}, \frac{E \left[\left(\frac{1}{Z'_1} - \frac{1}{Z'_2} \right) Z'_2 \right]}{E \left[\frac{1}{Z'_1} - \frac{1}{Z'_2} \right]} \right\}$$

et c_δ est une constante universelle dépendant seulement de δ . Ici, Z_1 et Z_2 sont indépendantes et distribuées selon P_1 et P_2 respectivement, alors que Z'_1 et Z'_2 ont une distribution jointe telle que $Z'_1 \geq Z'_2$ presque sûrement avec comme distributions marginales P_1 et P_2 respectivement.

Remarque 3.1.1. *Il est important de noter que ce résultat indique que pour deux marches aléatoires biaisées fixées et un biais assez élevé nous avons la monotonie de la vitesse par rapport à l'environnement. Or, nous aimerions avoir un résultat qui exige seulement un biais élevé.*

3.2. RÉSULTAT PRINCIPAL

Nous présentons maintenant le résultat et sa preuve. La technique employée afin de démontrer ce résultat est la même que celle utilisée pour la preuve de la monotonie de la vitesse par rapport au biais dans [2]. Le résultat est le suivant.

Proposition 3.2.1. *Soient deux mesures de probabilité P_1 et P_2 sur les entiers positifs telles que P_1 domine stochastiquement P_2 . Considérons deux marches aléatoires β -biaisées sur $GW(P_1)$ et $GW(P_2)$. Alors, pour tout $\beta > \beta_c$ pour $\beta_c \geq 1160$, $\nu(\beta, P_1) \geq \nu(\beta, P_2)$.*

Ce résultat est légèrement plus général que le théorème 3.1.2. énoncé plus haut. Nous montrons que la vitesse est monotone à partir d'un certain biais β_c pour toutes paires de lois P_1 et P_2 telles que P_1 domine stochastiquement P_2 . Or, dans le théorème 3.1.2, le biais critique diffère selon le choix des lois P_1 et P_2 . Nous allons montrer le résultat en présentant d'abord les outils nécessaires.

3.3. UN COUPLAGE ET UNE STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT COMMUNE

Soient $GW(P_1)$ et $GW(P_2)$ deux arbres de Galton-Watson sans feuilles avec une racine r_0 où les progénitures de tous les individus sont des copies i.i.d. distribuées selon P_1 et P_2 respectivement. Ici, les lois sont à support dans \mathbb{N} et P_1 domine stochastiquement P_2 . Soient $(Z_{1,k})_{k \geq 1}$ et $(Z_{2,k})_{k \geq 1}$ deux collections de variables aléatoires i.i.d. ayant comme lois P_1 et P_2 respectivement. Avant de poursuivre, notons que :

Lemme 3.3.1. *Si P_1 domine stochastiquement P_2 , alors il existe $Z_k = (Z'_{1,k}, Z'_{2,k})$ i.i.d. pour $k \geq 1$ telles que $Z'_{1,k} \geq Z'_{2,k}$ p.s. où $Z'_{1,k} \sim P_1$ et $Z'_{2,k} \sim P_2$ pour tout $k \geq 1$.*

Posons $Z_k = \{Z'_{1,k}, Z'_{2,k}\}$ de la même façon que dans l'énoncé du lemme et \mathbb{P}_Z la loi associée à Z_k (\mathbb{E}_Z l'espérance). Soient $(X_n^1)_{n \geq 1}$ et $(X_n^2)_{n \geq 1}$ deux marches β -biaisées sur $GW(P_1)$ et $GW(P_2)$ respectivement commençant à la racine. Soit $\{U_k\}_{k \geq 1}$ une collection de variables aléatoires i.i.d. distribuées uniformément sur $[0,1]$. La loi associée à ces variables aléatoires est notée P . Les collections $(Z_{1,k})_{k \geq 1}$, $(Z_{2,k})_{k \geq 1}$, $(U_k)_{k \geq 1}$ et $(Z'_{1,k}, Z'_{2,k})_{k \geq 1}$ sont toutes indépendantes l'une de l'autre. Nous construisons les arbres de façon dynamique, c'est-à-dire que nous attribuons aux sommets un nombre de progéniture au fur et à mesure que les marches se déplacent dans l'arbre. Si au temps $n \geq 0$, $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ visitent toutes les deux de nouveaux sites $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$, alors nous assignons $Z'_{1,n}$ et $Z'_{2,n}$ enfants à $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ respectivement. Ensuite, si $X_n^{(1)}$ est à un site déjà visité et que $X_n^{(2)}$ est à un nouveau site $x^{(2)}$ alors nous attribuons $Z_{2,n}$ enfants à ce site. Finalement, si $X_n^{(2)}$ est à un site déjà visité et que $X_n^{(1)}$ est à un nouveau site $x^{(1)}$, alors nous assignons $Z_{1,n}$ enfants à $x^{(1)}$.

Nous décrivons maintenant le couplage utilisé dans la preuve. Pour simplifier la notation, nous laissons de côté l'indice de temps n . Nous notons le nombre d'enfants du site $x^{(i)}$ par Z_i et le k -ième enfant de ce site par $x_k^{(i)}$. Nous décrivons seulement le cas où $Z_1 \geq Z_2$, l'autre cas se traite exactement de la même façon en inversant Z_1 et Z_2 . Soient

$$\zeta_i := \frac{Z_i \beta}{Z_i \beta + 1}, \quad \eta_i := 1 - \zeta_i, \quad \gamma := \eta_2 - \eta_1$$

Les règles de transition des marches sont les suivantes :

- (1) Si $U_{n+1} \in (\gamma, \eta_2]$ alors $X_{n+1}^{(1)} = x^*$.
- (2) Si $U_{n+1} \in \left(\eta_2 + (k-1) \frac{\zeta_2}{Z_1}, \eta_2 + k \frac{\zeta_2}{Z_1} \right]$ alors $X_{n+1}^{(1)} = x_k^{(1)}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, Z_1\}$.
- (3) Si $U_{n+1} \in \left[(k-1) \frac{\gamma}{Z_1}, k \frac{\gamma}{Z_1} \right]$ alors $X_{n+1}^{(1)} = x_k^{(1)}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, Z_1\}$.
- (4) Si $U_{n+1} \leq \eta_2$ alors $X_{n+1}^{(2)} = x^*$.
- (5) Si $U_{n+1} \in \left(\eta_2 + (k-1) \frac{\zeta_2}{Z_2}, \eta_2 + k \frac{\zeta_2}{Z_2} \right]$ alors $X_{n+1}^{(2)} = x_k^{(2)}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, Z_2\}$.

Nous introduisons maintenant la troisième marche se déplaçant sur \mathbb{Z}

$$Y_n := \sum_{i=1}^n \{ \mathbb{1}_{U_i > \frac{1}{\beta+1}} - \mathbb{1}_{U_i \leq \frac{1}{\beta+1}} \} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Le déplacement des trois marches couplées est représenté dans la figure 3.1. Les flèches orientées vers le bas indiquent que si la réalisation de U_n se trouve dans cet intervalle, alors la marche s'éloigne de l'origine. De l'autre côté, les flèches vers le haut indiquent un déplacement à l'opposé de l'origine. Nous avons supposé dans cette illustration que la marche $X_n^{(1)}$ a, à cet instant, un plus grand nombre de progénitures que $X_n^{(2)}$ afin d'être consistant avec la description des règles de transition ci-haut. La notation pouvant être lourde, expliquons les règles de transition décrites plus haut. Supposons qu'à cet instant, $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ ont k et l progénitures, respectivement. Il suffit donc de découper les intervalles où se situe une flèche orientée vers le bas (la marche se déplace sur un des enfants) en k et l sous-intervalles de même longueur pour $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$, respectivement. Ensuite, si la réalisation de U_{n+1} se trouve dans un de ces sous-intervalles, la marche se déplacera vers l'enfant associé à ce sous-intervalle.

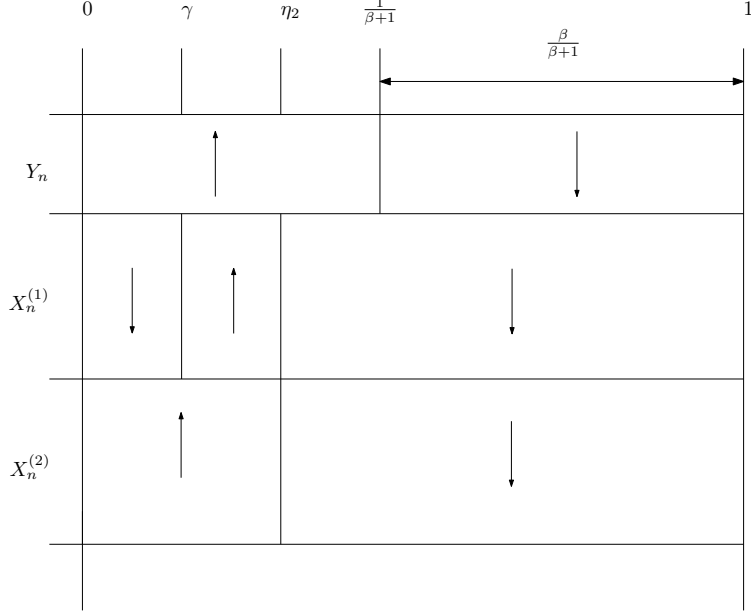


FIGURE 3.1. Le déplacement effectué des trois marches couplées selon les réalisations de $(U_n)_{n \geq 0}$.

Il est important de préciser que les temps de régénération de la marche (Y_n) forment également des temps de régénération pour les marches $(X_n^{(1)})$ et $(X_n^{(2)})$. En effet, remarquons que si la marche (Y_n) s'éloigne de l'origine, le couplage force les deux autres marches à faire de même puisque $\eta_i \leq \frac{1}{\beta+1}$ (comme nous pouvons le voir dans l'illustration 3.1). De ce fait, si $|Y_n| > |Y_m|$, alors $|X_n^{(i)}| > |X_m^{(i)}|$ pour $i = 1, 2$. Par ailleurs, le couplage implique que $|X_n^{(i)}| \geq |Y_n|$ pour $i = 1, 2$. Il s'ensuit que pour un temps de régénération τ_k de la marche (Y_n) nous avons $|Y_n| > |Y_{\tau_k}|$ pour tout $n > \tau_k$ ce qui implique par les faits énoncés ci-haut que $|X_n^{(i)}| > |X_{\tau_k}^{(i)}|$ pour tout $n > \tau_k$ et $i = 1, 2$. L'avantage de cette structure de renouvellement commune, en contraste avec la structure de renouvellement classique, est qu'elle ne dépend pas de l'environnement, mais seulement de la séquence de $(U_n)_{n \geq 0}$.

3.4. DÉMONSTRATION

Décrivons la preuve. Soit $(\tau_n)_{n \geq 1}$ la structure de renouvellement de la marche (Y_n) . Ces temps de régénération forment une structure de renouvellement commune aux deux marches. Dans l'optique des résultats présentés au chapitre 2, nous utilisons cette structure commune et cherchons à démontrer que $E[|X_{\tau_1}^{(1)}|] > E[|X_{\tau_1}^{(2)}|]$. Par le couplage présenté ci-haut, nous avons les points importants suivants :

- (1) Lorsque Y_n se déplace vers la droite, alors les deux marches s'éloignent de l'origine (comme nous pouvons le voir dans la figure 3.1).

(2) Lorsque Y_n se déplace vers la gauche pour la première fois, alors $|X_n^{(1)}| \geq |X_n^{(2)}|$. De plus, avec une probabilité positive, nous avons en fait $|X_n^{(1)}| > |X_n^{(2)}|$.

(3) Si les incréments des deux marches diffèrent au plus k fois jusqu'au temps n , alors

$$|X_n^{(1)}| - |X_n^{(2)}| > -2(k-1)$$

(4) Si Y_n fait k pas vers la gauche jusqu'au temps τ_1 et que pour un certain temps $n \geq \tau_1$ $|X_n^{(1)}| - |X_n^{(2)}| \neq 0$, ce qui représente l'évènement D_k , alors

$$E[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}| \mid \tau_0 = 0] \geq 2P[D_1 \mid \tau_0 = 0] - 2(k-1) \sum_{k \geq 2} P[D_k \mid \tau_0 = 0]$$

Pour un biais assez grand, nous montrons que le terme de droite est positif, ce qui terminera la preuve.

Posons $(\tau_k)_{k \geq 1}$ les temps de régénération de la marche (Y_n) . Considérons l'évènement que 0 est un temps de régénération de (Y_n) . Dénotons cet évènement par $\{0 - SR\}$, qui est mesurable par rapport à $\sigma(U_n, n \geq 1)$. La P -probabilité de cet évènement est

$$p_\infty := P(0 - SR) = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}.$$

C'est en fait la probabilité pour une marche aléatoire β -biaisée sur \mathbb{Z} de ne jamais revenir à l'origine. Cela nous permet de définir la mesure de probabilité

$$\tilde{P}(\cdot) := P(\cdot \mid 0 - SR)$$

Étant donné la réalisation de cet évènement, le premier temps de régénération de (Y_n) est $\tau_0 = 0$. Alors, $(|X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}|, \tau_{i+1} - \tau_i)_{i \geq 1}$ est une séquence de vecteurs aléatoires i.i.d. avec la même distribution que $(|X_{\tau_1}|, \tau_1)$ sous la mesure \tilde{P} pour tout $\beta > 1$. Cela nous permet de montrer que

$$v(\beta, P_1) = \frac{\tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}|]}{\tilde{E}[\tau_1]}, \quad v(\beta, P_2) = \frac{\tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(2)}|]}{\tilde{E}[\tau_1]}$$

(Voir le chapitre 2 pour les détails). Alors, $v(\beta, P_1) > v(\beta, P_2)$ est équivalent à $\tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}|] > \tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(2)}|]$.

3.4.1. La distance des marches au temps τ_1

Nous posons B l'ensemble des temps où la marche (Y_n) fait un pas en arrière avant τ_1 , c'est-à-dire $B := \{j < \tau_1 \mid U_j \leq 1/(\beta + 1)\}$. Avant de continuer, montrons un lien simple entre B et τ_1 .

Lemme 3.4.1. *Si $\{|B| = k\}$, alors $\{\tau_1 \leq 3k + 2\}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que sur $\{|B| = k\}$, nous avons $Y_{\tau_1} \leq k + 2$. Supposons que ce n'est pas le cas, et donc que $Y_{\tau_1} > k + 2$. Il existe alors seulement k moments où la marche fait un pas en arrière et, puisque $Y_{\tau_1} > k + 1$, il existe par la principe du nid de pigeon un sommet $2 \leq x \leq k + 2$ tel que la marche ne fait aucun pas en arrière de x à $x - 1$. Soit $T_x = \inf\{n \geq 0 \mid Y_n = x\}$ le temps lorsqu'on atteint x . Alors, par supposition nous avons $T_x < \tau_1$. Or, puisque la marche ne fait pas de pas en arrière au sommet x avant τ_1 et qu'une fois à τ_1 la marche ne revient jamais en arrière, nous avons $|Y_n| > |Y_{T_x}|$ pour tout $n > T_x$. Nous en concluons que T_x est en fait un temps de régénération différent de 0, ce qui contredit la définition de τ_1 . Nous avons donc $Y_{\tau_1} \leq k + 2$.

Ensuite, par la définition du temps de régénération, nous avons sur $\{|B| = k\}$ que $Y_i \leq k + 2$ pour tout $i \leq \tau_1$. De plus, sachant $\{|B| = k\}$, nous avons $Y_i \geq i - 2k$. En effet, en un temps i la marche peut avoir reculé au plus k fois sur $\{|B| = k\}$ et donc avoir avancé $i - k$ fois. Nous obtenons donc que la distance minimale parcourue est $(i - k) - k = i - 2k$. Il s'ensuit que $i \leq Y_i + 2k \leq (k + 2) + 2k = 3k + 2$ pour tout $i \leq \tau_1$, ce qui implique que $\tau_1 \leq 3k + 2$. \square

Nous définissons l'événement où les marches $(X_n^{(1)})$ et $(X_n^{(2)})$ se découpent de la manière suivante :

$$C := \{\exists i \leq \tau_1; |X_i^{(1)}| \neq |X_i^{(2)}|\}$$

Ensuite, nous introduisons l'événement d'un découplage avec k retours en arrière de la marche Y_n :

$$D_k := C \cap \{|B| = k\}$$

Comme il a été discuté plus haut, les marches peuvent seulement se découpler au moment où Y_n fait un pas en arrière. Suivant cette remarque, l'événement C implique que $\{|B| \geq 1\}$. Cela nous amène à constater que C peut être décomposé en une union disjointe des D_k . Poursuivons avec deux remarques :

$$(1) \quad |X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}| = 2 \text{ sur } D_1.$$

(2) $|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}| \geq 2 - 2(k-1)$ pour $k \geq 2$ sur l'événement D_k .

Justifions le premier point. Sur l'événement D_1 , la marche (Y_n) fait seulement un pas en arrière et les marches se découplent. Au moment n où cela se produit, nous rappelons que $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ ont $Z'_{1,n}$ et $Z'_{2,n}$ progénitures respectivement avec $Z'_{1,n} > Z'_{2,n}$, ce qui implique (revoir le couplage plus haut) que si un découplage a lieu au temps $n \geq 1$, $X_n^{(1)}$ se déplace sur un des enfants et $X_n^{(2)}$ se déplace sur son parent, auquel cas nous avons $|X_n^{(1)}| - |X_n^{(2)}| = 2$. Étant le seul pas en arrière effectué par Y_n , les marches $(X_n^{(1)})$ et $(X_n^{(2)})$ gardent cette même distance jusqu'au temps τ_1 . Le second point se justifie de manière semblable. Nous tentons de minimiser $|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|$ sur l'événement D_k . Comme nous venons de le voir, au moment $n \geq 1$ où les marches se découplent, nous avons $|X_n^{(1)}| - |X_n^{(2)}| = 2$. Pour les $k-1$ autres pas en arrière effectués par (Y_n) , il est possible que la deuxième marche effectue une descente et que la première se déplace vers l'origine. Nous considérons ce cas pour chacun des $k-1$ pas en arrière afin de minimiser la distance et nous obtenons $|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}| \geq 2 - 2(k-1)$ sur D_k . Finalement, il faut noter que sur l'événement D_k^c , les marches ne se découplent pas, ce qui nous amène à $|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}| = 0$. Suivant ces remarques, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|] &= \sum_{k \geq 1} \tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|; D_k^c] \tilde{\mathbb{P}}[D_k^c] + \tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|; D_k] \tilde{P}[D_k] \\ &= \sum_{k \geq 1} \tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|; D_k] \tilde{P}[D_k] \\ &\geq 2\tilde{P}[D_1] - 2\sum_{k \geq 2} (k-2)\tilde{P}[D_k] \end{aligned}$$

3.4.2. Réduire le problème à une marche β -biaisée sur \mathbb{Z}

L'objectif est d'établir

$$\tilde{P}[D_1] \geq \sum_{k \geq 2} (k-2)\tilde{P}[D_k]$$

Pour ce faire, nous déduisons des bornes supérieure et inférieure pour les premier et second termes, respectivement, dépendant seulement de (Y_n) . À ce stade, nous aurons réduit le problème à une question sur la marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} . Pour le premier terme, nous trouvons une borne inférieure en choisissant un événement particulier impliquant un temps où les marches se séparent et $|B| = 1$ sur $\{0 - SR\}$ (c.-à-d., $D_1 \cap \{0 - SR\}$). Soit cet événement $A = \{1, 2, 4 \notin B, 3 \in B \text{ et } |X_2^{(1)}| - |X_2^{(2)}| = 2, \tau_1 = 4\}$. Nous obtenons alors la borne inférieure suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{P}[D_1] \geq \tilde{P}[A] &= p_\infty^{-1} P[A \cap \{0 - SR\}] \\
&= p_\infty^{-1} \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^3 p_\infty P \left[U_3 \leq \frac{1}{(Z'_2)^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_1)^{\beta+1}} \right] \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^3 \mathbb{E}_Z[\gamma']
\end{aligned}$$

où $\gamma' = \frac{1}{(Z'_2)^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_1)^{\beta+1}}$.

Ces égalités s'obtiennent facilement par la définition de l'événement A : la marche (Y_n) fait trois pas en avant au total où chacun de ces pas a une probabilité $\frac{\beta}{\beta+1}$ alors qu'au temps 2, les marches se découplent avec une probabilité $\mathbb{E}_Z[\gamma']$ (voir figure 3.1) et puis finalement $\tau_1 = 4$, ce qui a une probabilité p_∞ . Rappelons que $Z'_{1,n} \geq Z'_{2,n}$ \mathbb{P}_Z -p.s. par construction, ce qui implique que $\mathbb{E}_Z[\gamma'] > 0$ ($\mathbb{E}_Z[\gamma']$ pourrait être nulle, mais nous ne considérons pas le cas où $Z'_{1,n} = Z'_{2,n}$ P -p.s. auquel cas la question à laquelle nous tentons de répondre serait triviale).

Pour le deuxième terme, nous considérons pour chaque $\tau_1 = n$ et D_k , tous les cas où la marche (Y_n) fait k pas en arrière et nous obtenons

$$\tilde{P}[D_k] = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset [n]} \tilde{P}[C, B = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, \tau_n = n]$$

Nous définissons $\delta := \inf\{i \leq \tau_1 : |X_i^{(1)}| \neq |X_i^{(2)}|\}$ le premier temps où les marches se séparent. Nous remarquons que l'événement C est un sous-ensemble de $\cup_{k \leq \tau_1} \{\delta = k\}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\tilde{P}[C, B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n] &= p_\infty^{-1} P[C, B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n, \{0 - SR\}] \\
&\leq p_\infty^{-1} P[C, B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n] \\
&\leq p_\infty^{-1} \sum_{j=1}^k P[\delta = i_j, B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n]
\end{aligned}$$

Nous définissons $\tau_1(\theta)$ comme le premier temps de régénération du processus θ . Alors, nous définissons

$$\tau_1^{(i_l)} = \tau_1(Y^{(i_l)}) \quad \text{où} \quad Y_n^{(i_l)} = \sum_{i=1}^{i_l-1} \{\mathbb{1}_{U_i > \frac{1}{\beta+1}} - \mathbb{1}_{U_i \leq \frac{1}{\beta+1}}\} + \sum_{i=i_l+1}^n \{\mathbb{1}_{U_i > \frac{1}{\beta+1}} - \mathbb{1}_{U_i \leq \frac{1}{\beta+1}}\} - 1$$

pour $n \geq i_l$ (avec la convention que la deuxième somme est nulle si $n = i_l$) et $Y_n^{(i_l)}$ coïncide avec Y_n pour $n < i_l$. De plus, nous définissons

$$B^{(i_l)} := B \cup \{i_l\}$$

Ces variables aléatoires sont $\left(\mathbb{1}_{\{U_i \leq \frac{1}{\beta+1}\}}\right)_{i \neq i_l}$ -mesurables et coïncident avec τ_1 et B , respectivement, quand $\{U_{i_l} \leq \frac{1}{\beta+1}\}$. Si l'événement $\{\delta = i_l\}$ se réalise, nous avons forcément $U_{i_l} \leq \frac{1}{\beta+1}$ puisque les marches se découplent, ce qui implique que $\tau_1^{(i_l)} = \tau_1$ et $B^{(i_l)} = B$. Nous avons donc

$$P[\delta = i_l, B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n] = P[\delta = i_l, B^{(i_l)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_l)} = n]$$

Plus précisément, si l'événement $\{\delta = i_l\}$ se réalise, nous avons

$$U_{i_l} \leq \left(\frac{1}{(Z'_{2,i_l})\beta + 1} - \frac{1}{(Z'_{1,i_l})\beta + 1} \right)$$

sachant que $i_l < n$ dans le cas où $\tau_1 = n$. Nous avons en outre que se les événements $\{\delta = i_l\}$ et $\{\tau_1 = n\} \cap \{|B| \leq k\}$ se réalisent, alors

$$U_{i_l} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})\beta + 1} - \frac{1}{(Z'_{1,j})\beta + 1} \right) \leq \max_{1 \leq j \leq 3k+1} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})\beta + 1} - \frac{1}{(Z'_{1,j})\beta + 1} \right)$$

Nous avons utilisé pour la dernière inégalité le Lemme 4.3.1 qui dit que si $\{|B| = k\}$, alors $\tau_1 \leq 3k + 2$ ce qui implique dans ce cas-ci que $n \leq 3k + 2$. Cela nous amène à

$$\begin{aligned} & P[\delta = i_l, B^{(i_l)} = \{i_1 < \dots < i_k\}, \tau_1^{(i_l)} = n] \\ & \leq P \left[U_{i_l} \leq \max_{1 \leq j \leq 3k+2} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})\beta + 1} - \frac{1}{(Z'_{1,j})\beta + 1} \right), B^{(i_l)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_l)} = n \right] \end{aligned}$$

$$= P \left[U_{i_i} \leq \max_{1 \leq j \leq 3k+2} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_{1,j})^{\beta+1}} \right) \right] P \left[B^{(i_i)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_i)} = n \right]$$

Ici, nous utilisons la P -indépendance entre $\{B^{(i_i)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_i)} = n\}$ et U_{i_i} . Cela nous permet également d'obtenir

$$\begin{aligned} P[B^{(i_i)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_i)} = n] &= \frac{1}{P[U_{i_i} \leq \frac{1}{\beta+1}]} P[U_{i_i} \leq \frac{1}{\beta+1}, B^{(i_i)} = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1^{(i_i)} = n] \\ &= (\beta+1) P[B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n] \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en utilisant les définitions de $B^{(i_i)}$ et $\tau_1^{(i_i)}$ qui, nous le rappelons, coïncident avec B et τ_1 , respectivement, sur $U_{i_i} \leq \frac{1}{\beta+1}$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} P \left[U_{i_i} \leq \max_{1 \leq j \leq 3k+2} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_{1,j})^{\beta+1}} \right) \right] &= \mathbb{E}_Z \left[\max_{1 \leq j \leq 3k+2} \left(\frac{1}{(Z'_{2,j})^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_{1,j})^{\beta+1}} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E}_Z \left[\sum_{j=1}^{3k+2} \frac{1}{(Z'_{2,j})^{\beta+1}} - \frac{1}{(Z'_{1,j})^{\beta+1}} \right] \\ &= (3k+2) \mathbb{E}_Z[\gamma'] \end{aligned}$$

Ici, nous rappelons que l'espérance \mathbb{E}_Z est par rapport à la loi de $Z_k = (Z'_{1,k}, Z'_{2,k})$. Résumons ce que nous avons montré jusqu'à maintenant. Revenons à notre inégalité du départ,

$$\tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|] \geq 2\tilde{P}[D_1] - \sum_{k \geq 2} 2(k-2)\tilde{P}[D_k]$$

Nous avons borné inférieurement le premier terme par

$$\tilde{P}[D_1] \geq \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^3 \mathbb{E}_Z[\gamma']$$

et borné supérieurement le second terme par

$$\begin{aligned}\tilde{P}[D_k] &\leq p_\infty^{-1} \mathbb{E}_Z[\gamma'] (\beta + 1) k (3k + 2) \sum_{n \geq 1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset [n]} P[B = \{i_1 < \dots < i_m\}, \tau_1 = n] \\ &= p_\infty^{-1} \mathbb{E}_Z[\gamma'] (\beta + 1) k (3k + 2) P[|B| = k]\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\tilde{E}[|X_{\tau_1}^{(1)}| - |X_{\tau_1}^{(2)}|] &\geq 2 \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^3 \mathbb{E}_Z[\gamma'] - 2p_\infty^{-1} \mathbb{E}_Z[\gamma'] (\beta + 1) \sum_{k \geq 2} k(k-2)(3k+2) P[|B| = k] \\ &= 2 \mathbb{E}_Z[\gamma'] \left(\left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^3 - p_\infty^{-1} (\beta + 1) \sum_{k \geq 2} k(k-2)(3k+2) P[|B| = k] \right)\end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné $\mathbb{E}_Z[\gamma']$ est positif. De ce fait, afin de conclure, il nous reste plus qu'à prouver :

Proposition 3.4.1. *Si*

$$\left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^3 \geq p_\infty^{-1} (\beta + 1) \sum_{k \geq 2} k(k-2)(3k+2) P[|B| = k]$$

alors $v(\beta, P_1) > v(\beta, P_2)$.

Notons ici que $|B|$ dépend seulement de la marche (Y_n) , notre tâche est donc de calculer des estimés sur une marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} .

3.4.3. Estimé sur une marche aléatoire β -biaisée sur \mathbb{Z}

Nous appliquons les mêmes calculs faits par Arous, Fribergh et Sidoravicius dans [2] pour conclure.

Nous donnons une borne supérieure pour $P[|B| = k]$ pour $k \geq 2$. Le Lemme 4.3.1 implique que sur $\{|B| = k\}$, la marche Y fait au moins k pas en arrière dans les $3k + 2$ premiers pas (la marche pourrait faire plus de k pas en arrière si $\tau_1 < 3k + 2$) puisque $\tau_1 \leq 3k + 2$. Il y a un total de $\binom{3k+2}{k}$ séquences de pas pour que la marche (Y_n) fasse k pas en arrière dans les $3k + 2$ premiers pas. Bien sûr, certaines de ces séquences n'aboutissent pas à un temps de régénération. Nous obtenons donc

$$P[|B| = k] \leq \binom{3k+2}{k} \left(\frac{1}{\beta + 1} \right)^k$$

$$\leq \frac{3k+1}{2k+1} \frac{3k+2}{2k+2} \binom{3k}{k} \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^k$$

En utilisant l'inégalité $e^{11/12} \sqrt{n} (n/e)^n < n! < e \sqrt{n} (n/e)^n$, qui peut être trouvée dans [15], nous obtenons le majorant

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{e \sqrt{3k} (3k/e)^{3k}}{(e^{11/12} \sqrt{k} (k/e)^k) (e^{11/12} \sqrt{2k} (2k/e)^{2k})} \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^k \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{27^k e}{4^k e^{22/12}} \left(\frac{1}{\beta+1} \right)^k = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{e}{e^{22/12}} \left(\frac{27}{4(\beta+1)} \right)^k \end{aligned}$$

En utilisant cet estimé sur $P[|B| = k]$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} k(k-2)(3k+2)P[|B| = k] &\leq \frac{11}{2} \sum_{k \geq 2} k(k-1)(k-2) \frac{3}{2} \left(\frac{27}{4(\beta+1)} \right)^k \\ &= \frac{99}{4} \left(\frac{27}{4(\beta+1)} \right)^2 \left(1 - \frac{27}{4(\beta+1)} \right)^{-4} \\ &=: C(\beta) \end{aligned}$$

Par la proposition 3.4.1., nous avons $v(\beta, P_1) > v(\beta, P_2)$ si

$$\left(\frac{1}{\beta+1} \right)^{-3} p_{\infty}^{-1}(\beta+1) C(\beta) < 1$$

Or, cette inégalité est respectée pour $\beta \geq 1160$, ce qui montre le résultat.

Bibliographie

- [1] Gérard Ben Arous, Alexander Fribergh, Nina Gantert, Alan Hammond, et al. Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves. *The Annals of Probability*, 40(1) :280–338, 2012.
- [2] Gérard Ben Arous, Alexander Fribergh, and Vladas Sidoravicius. Lyons-Pemantle-Peres monotonicity problem for high biases. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 67(4) :519–530, 2014.
- [3] Noam Berger, Itai Benjamini, Omer Angel, and Yuval Peres. Transience of percolation clusters on wedges. *Electron. J. Probab.*, 11 :655–669, 2006.
- [4] Noam Berger, Nina Gantert, and Jan Nagel. The speed of biased random walk among random conductances, 2017.
- [5] Adam Bowditch. A quenched central limit theorem for biased random walks on supercritical galton-watson trees. 2017.
- [6] Rick Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.
- [7] Alexander Fribergh. Biased random walk in positive random conductances on \mathbb{Z}^d . *Ann. Probab.*, 41(6) :3910–3972, 2013.
- [8] Alexander Fribergh et al. The speed of a biased random walk on a percolation cluster at high density. *The Annals of Probability*, 38(5) :1717–1782, 2010.
- [9] Geoffrey Grimmett, Harry Kesten., and Yu Zhang. Random walk on the infinite cluster of the percolation model. *Probability Theory and Related Fields*, 96(1) :33–44, 1993.
- [10] Steven A. Kalikow. Generalized random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 9(5) :753–768, 1981.
- [11] Russell Lyons. Random walks, capacity and percolation on trees. 20(4) :2043–2088, 1992.
- [12] Russell Lyons and Robin Pemantle. Random walk in a random environment and first-passage percolation on trees. *Ann. Probab.*, 20(1) :125–136, 1992.
- [13] Russell Lyons, Robin Pemantle, and Yuval Peres. Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probability Theory and Related Fields*, 106 :249–264, 1996.
- [14] Russell Lyons, Robin Pemantle, and Yuval Peres. Unsolved problems concerning random walks on trees. In *Classical and modern branching processes*, pages 223–237. Springer, 1997.

- [15] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on Trees and Networks*, volume 42 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, New York, 2016. Available at <http://pages.iu.edu/~rdlyons/>.
- [16] Yuval Peres and Ofer Zeitouni. A central limit theorem for biased random walks on galton-watson trees. *Probability Theory and Related Fields*, 140(3) :595–629, 2008.
- [17] Yakov Sinai. The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory of Probability & Its Applications*, 27(2) :256–268, 1983.
- [18] Fred Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Probab.*, 3(1) :1–31, 1975.
- [19] Alain-Sol Sznitman. An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment. *Probability Theory and Related Fields*, 122(4) :509–544, 2002.
- [20] Alain-Sol Sznitman. On new examples of ballistic random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 31(1) :285–322, 2003.
- [21] Alain-Sol Sznitman. On the anisotropic walk on the supercritical percolation cluster. *Communications in Mathematical Physics*, 240(1) :123–148, 2003.
- [22] Martin Zerner and Franz Merkl. A zero-one law for planar random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(4) :1716–1732, 2001.
- [23] Martin Zerner and Alain-Sol Sznitman. A law of large numbers for random walks in random environment. *The Annals of Probability*, 27(4) :1851–1869, 1999.
- [24] Lingjiong Zhu, Sanchayan Sen, and Behzad Mehrdad. The speed of a biased walk on a Galton–Watson tree without leaves is monotonic with respect to progeny distributions for high values of bias. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 51(1) :304–318, 2015.