Université de Montréal

Superintégrabilité quantique avec une intégrale de mouvement de cinquième ordre

par

Ismail Abouamal

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

1er octobre 2017

SOMMAIRE

Le projet de ce mémoire s'inscrit dans un programme global ayant pour but d'obtenir et classifier tous les systèmes superintégrables en deux dimensions et admettant des intégrales de mouvement polynomiales et d'ordre arbitraire N en p_1 et p_2, les deux moments conjugués associés à E_2.

Dans notre étude, présentée sous forme d'un article, on s'intéresse spécifiquement à la coexistence de l'hamiltonien avec une intégrale de mouvement de cinquième ordre. On obtient les équations à dérivées partielles nécessaires pour qu'une telle intégrale existe et on les simplifie ensuite en supposant que les potentiels recherchés $V(x,y)$ sont séparables c'est-à-dire $V(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$. Avec l'existence de l'intérgrale de cinquième ordre, cette supposition garantit aussi la superintégrabilité du système. On réussit à montrer que lorsque les deux composantes $V_1(x)$ et $V_2(y)$ ne satisfont aucune EDO linéaire, ils sont toujours solutions d'une EDO non linéaire qui possède la propriété de Painlevé. Dans la majorité des cas, on exprime toutes les solutions en terme de transcendantes déjà connues, incluant les fonctions elliptiques et les six fonctions transcendantales de Painlevé. Les équations non linéraires reliées aux cas non résolus peuvent définir de nouvelles transcendantes.

Mots clés : Intégrabilité, superintégrabilité, équations différentielles non linéaires, propriété de Painlevé, mécanique quantique.

SUMMARY

The present thesis is part of a general program whose purpose is to obtain and classify all superintegrable systems in two dimensions with integrals of motion that are polynomials of arbitrary order (degree) N in p_1 and p_2, the two components of the linear momentum.
In this study, presented in a single article, we investigate the coexistence of the Hamiltonian with a fifth-order quantum integral of motion. We derive the determining equations that guarantee the existence of this integral and we simplify them by assuming that the potentials $V(x,y)$ are separable in Cartesian coordinates, i.e. $V(x,y) = V_1(x)+V_2(y)$, a supposition which, together with the existence of an independent fifth order integral, also guarantees the superintegrablity of the system. We show that when both $V_1(x)$ and $V_2(y)$ do not satisfy any linear ODE, they are always solutions of nonlinear ODEs. These equations are found to have the Painlevé property. Most of them are solved in terms of known Painlevé transcendents or elliptic functions. The others may define new higher order Painlevé trenscendents.

Mots clés : Integrability, superintegrablity, nonlinear differential equations, Painlevé property, quantum mechanics

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE

À maman

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à remercier mon directeur Monsieur Pavel Winternitz pour sa patience, ses encouragements et le savoir-faire qu'il m'a transmis implicitement durant nos fructueuses discussions. Il y a eu des moments où j'ai cessé d'être optimiste quant aux résultats à quoi on s'attendait, mais ses généreux conseils m'ont à plusieurs reprises remis sur la bonne piste à prendre. Les moments où la gloire fait défaut ont aussi trouvé ma mère à mes côtés, une combattante de la vie qui n'a jamais cessé de me supporter dans la poursuite de mes rêves académiques.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs que j'ai eu l'honneur de côtoyer tout le long de mes études au département. Je suis très reconnaissant à certains d'entre eux pour le temps et l'énergie qu'ils ont alloués à mes lettres de recommandation et aux conseils académiques qui m'ont été d'une grande utilité. Ces professeurs incluent Monsieur Yvan Saint-Aubin, Iosif Polterovitch, Marlène Frigon, Abraham Broer, Khalid Benabdalah ainsi que Sabin Lessard. J'ai eu le privilège de connaître personnellement tous ces professeurs et ils continueront sans aucun doute à m'inspirer pour bien longtemps.

Finalement, je veux remercier tous les étudiants du département de mathématiques à qui je me suis lié d'amitié. Mes discussions avec eux m'ont été d'une grande source d'inspiration. Je dois aussi un grand merci à Masoumeh Sadjedi pour son aide précieuse au début de ce projet ainsi qu'à Chu Pheuil Liou pour ses précieux conseils.

Chapitre 1

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES SUPERINTÉGRABLES

La mécanique classique est sans doute la plus ancienne théorie physique totalement inscrite dans un cadre purement mathématique et formel. Elle a vu le jour grâce à des observations empiriques et a été finalement résumée par Isaac Newton dans son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica en de très célèbres lois dites les lois du mouvement de Newton. Mais la mécanique newtonienne avait le désavantage d'être formulée à l'aide d'un formalisme vectoriel, ce qui menait dans plusieurs cas à un grand nombre d'équations à résoudre. En 1788, le célèbre mathématicien Joseph-Louis Lagrange publie son livre de mécanique analytique où il reformule la mécanique newtonienne en une théorie purement analytique. Ses travaux ont introduit des idées importantes, comme le principe du moindre action, qui vont plus tard servir à théoriser toute la mécanique classique. Mais la reformulation de Lagrange n'était qu'une étape intermédiaire menant à une autre reformulation plus simple et totalement symétrique. En se basant sur les travaux de Lagrange, le mathématicien Hamilton réussit à faire le lien entre ses travaux en optique et les équations de la mécanique Lagrangienne. Il donne naissance à une nouvelle théorie de la mécanique formulée avec une symétrie et une élégance inégalées. La mécanique d'Hamilton servira, vers le début du vingtième siècle, de cadre théorique naturel à la physique quantique, la physique de l'infiniment petit qui a vu le jour aussi grâce à des observations expérimentales qui ne s'expliquaient pas par les lois de la physique classique.

1.1. Mécaniques lagrangienne et hamiltonienne

Dans le formalisme lagrangien, un système physique en n dimensions est décrit par les paramètres de positions q_i (coordonnées généralisées) ainsi que leur taux de variation $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. La reformulation lagrangienne de la mécanique classique se base sur le concept de lagrangien. Il est généralement interprété comme étant la différence entre l'énergie cinétique totale du système $E_c = T$ et son énergie potentielle $E_p = V$:

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = T - V. \tag{1.1.1}$$

Le lagrangien est donc une fonctionnelle des paramètres t, q_i et $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. Les équations de mouvement du système sont données par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \tag{1.1.2}$$

où p_i est le moment conjugué (ou bien quantité de mouvement généralisée) de la i-ème particule définit par :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.1.3}$$

Une des preuves classiques menant à ces équations s'obtient à partir du principe de d'Alembert. Toutefois, ces équations peuvent être obtenues à partir d'un autre principe connu sous le nom du principe de moindre action. Selon ce dernier, les paramètres d'un système donnée s'obtiennent en optimisant, entre deux instants donnés t_1 et t_2, une unique grandeur appelée action et définie par :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t,q_i,\dot{q}_i)dt. \tag{1.1.4}$$

Formellement, le principe du moindre action s'écrit :

$$\delta\mathcal{S} = 0, \tag{1.1.5}$$

pour toute perturbation $\delta q_i(t)$ de la trajectoire $q_i(t)$. Ici, $\delta\mathcal{S}$ correspond à la variation de l'action S.

La mécanique hamiltonienne se base quant à elle sur le concept de l'hamiltonien. Il est défini comme étant la transformée de Legendre du lagrangien :

$$\mathcal{H}(q_i,p_i,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}(t,q_i,\dot{q}_i). \tag{1.1.6}$$

Sous ce formalisme, le système est décrit par son espace de phase lui-même décrit par les points (q_i,p_i). Les équations de mouvement dites *équations canoniques de Hamilton* prennent la forme simple :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{d\mathcal{L}}{dt} \tag{1.1.7}$$

Dans plusieurs situations, il arrive que le moment conjugué p_i coïncide avec la quantité de mouvement usuelle, i.e. $\dot{q}_i = p_i/m_i$. Dans ce cas, on obtient que $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i} p_i^2$ et l'hamiltonien prend alors la forme $H = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2m_k} p_k^2 + V = E$, ce qui correspond à l'énergie totale du système. En effet, plus généralement, si les équations qui définissent les coordonnées généralisées sont indépendantes du temps, on peut montrer que l'hamiltonien d'un système correspond à son énergie totale E.

Définition 1.1.1. *Le **crochet de Poisson** de deux fonctions $\mathcal{R}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}), \mathcal{X}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ définit sur l'espace de phase est la fonction*

$$\{\mathcal{R},\mathcal{X}\}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_k}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial q_k} - \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_k}\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial p_k}). \tag{1.1.8}$$

À l'aide du crochet de Poisson, les équations de mouvement s'écrivent comme

$$\frac{dq_i}{dt} = \{\mathcal{H}, q_i\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{\mathcal{H}, p_i\}. \tag{1.1.9}$$

Pour toute fonction $\mathcal{R}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, sa dynamique tout le long de la trajectoire $\mathbf{q}(t)$,$\mathbf{p}(t)$ est donnée par

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{R}\}. \tag{1.1.10}$$

Ainsi, $\mathcal{R}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ sera constante tout le long de la trajectoire si et seulement si $\{\mathcal{H}, \mathcal{R}\} = 0$.

Définition 1.1.2. *Si $\{\mathcal{H}, \mathcal{X}\} = 0$, alors $\mathcal{X}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ est une **constante de mouvement**.*

Il est clair par la définition du crochet de Poisson que l'ensemble des constantes de mouvement est fermé sous cette opération.

Définition 1.1.3. *Soit $\mathcal{F} = (f_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),..., f_N(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}))$ un ensemble de N fonctions définies sur une région Ω d'un espace de phase à $2n$ dimensions. On dit que $\mathcal{F}$ est **fonctionnellement indépendant** si la $N \times 2n$ matrice $a_{lk} = (\frac{\partial f_l}{\partial q_k}, \frac{\partial f_l}{\partial p_k})$ est de rang N dans la région Ω. L'ensemble est **fonctionnellement dépendant** si le rang est strictement inférieur à N dans la région Ω.*

Définition 1.1.4. *Un système Hamiltonien $\mathcal{H}$ ayant n degrés de liberté est **intégrable** s'il admet n constantes de mouvement $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}, \mathcal{P}_2,...,\mathcal{P}_n$ qui sont en involution :*

$$\{\mathcal{P}_j,\mathcal{P}_k\} = 0, \quad 1 \leqslant j,k \leqslant n \tag{1.1.11}$$

et sont fonctionnellement indépendantes.

La notion d'intégrabilité est centrale en mécanique hamiltonienne. C'est un résultat standard que cette propriété permet d'intégrer les équations d'Hamilton par quadrature (i.e par un nombre fini d'opérations algébriques et d'intégrations de fonctions connues)[1]. Ce résultat porte le nom de théorème de Liouville en géométrie symplectique.
Dans certains cas, il arrive qu'un système à n degrés de liberté possède plus que n intégrales de mouvement. On parle alors de superintégrabilité.

Définition 1.1.5. *Un système hamiltonien classique à n dimensions est dit **superintégrable** s'il est intégrable et possède en plus k, avec $k = 1,...,n-1$, constantes de mouvement* *tel que les $n+k$ intégrales de mouvement soient fonctionnellement indépendantes. Le système est minimalement superintégrable si $k=1$ et maximalement superintégrable si $k=n-1$.*

En principe, la superintégrabilité offre la possibilité de calculer toutes les trajectoires sans aucune résolution analytique des équations différentielles en jeu. Il existe en géométrie symplectique un résultat similaire au théorème de Liouville pour les systèmes superintégrables, il est connu sous le nom du théorème de Mishchenko-Fomenko [10]. Les plus connus des systèmes superintégrables sont l'oscillateur harmonique ($V(r)=\alpha r$) et le système de Couloumb-Kepler ($V(r)=\frac{\alpha}{r}$). Le théorème de Bertrand [12] stipule que ce sont les seuls potentiels à symétrie sphérique pour lesquels toutes les trajectoires bornées sont fermées. Afin d'illustrer l'utilité de la superintégrabilité, on montrera dans la prochaine section comment, sans avoir recours aux solutions des équations de Hamilton, la superintégrabilité du système de Couloumb-Kepler implique les lois de Kepler énoncées il y a plus que 400 ans par l'astronome Johannes Kepler.

1.2. Exemple de superintégrabilité classique : le potentiel de Couloumb-Kepler

Le problème de Kepler, qui est un cas particulier du problème à 2 corps, consiste à étudier le mouvement d'un corps autour d'un autre supposé stationnaire et exerçant une force centrale dont le module dépend de l'inverse du carré de la distance séparant les deux corps. La solution de ce problème est une bonne approximation au problème à 2 corps si la masse de l'un d'entre eux est négligeable par rapport à l'autre. En se servant des observations très précises de l'astronome Tycho Brahe, Kepler a énoncé trois lois régissant le mouvement des planètes : (1) Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. (2) Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment [SM] entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale à la durée qui sépare les positions E et F. (3) Le carré de la période sidérale d'une planète (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète.
Nous allons voir que la formulation mathématique de ces lois peut être obtenue simplement par l'analyse de la superintégrabilité. Puisque les orbites planétaires sont planaires (c'est un résultat standard des interactions centrales), on considère le mouvement dans un l'espace euclidien en $2D$. En posant, pour simplifier les calculs, la masse de la particule en mouvement égale à 1, le lagrangien s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)}}, \quad \alpha > 0. \tag{1.2.1}$$

Puisque $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{q_i}} = \dot{q_i}$, l'hamiltonien prend la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{X}_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)}}. \tag{1.2.2}$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\dot{q_1} = p_1, \quad \dot{q_2} = p_2, \quad \dot{p_1} = \frac{\alpha q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \quad \dot{p_2} = \frac{\alpha q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \tag{1.2.3}$$

qui donnent bel et bien les équations de Newton $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\alpha \mathbf{q}}{(\mathbf{q}.\mathbf{q})3/2}$. Nous allons montrer comment la superintégrabilité permet de trouver la trajectoire sans obtenir l'évolution temporelle de ce système (qui s'obtient en résolvant les équations (1.2.3)). Dans le cas du problème de Kepler en $2D$, on a que $n = 2$ et $2n - 1 = 3$. Ainsi, pour que le système soit maximalement superintégrable, trois constantes de mouvement sont nécessaires. La seconde loi de Kepler est une conséquence de la conservation du moment angulaire. La quantité conservée est $\mathcal{X}_2 = q_1 p_2 - q_2 p_1$. Un simple calcul montre bien que $\{\mathcal{H}, \mathcal{X}_2\} = 0$. Le potentiel gravitationnel possède la particularité d'avoir une troisième constante de mouvement. Considérons le vecteur

$$e = (\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4) = \left(\mathcal{X}_2 p_2 - \frac{\alpha q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, -\mathcal{X}_2 p_1 - \frac{\alpha q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}\right) \tag{1.2.4}$$

dans le plan $q_1 - q_2$. On peut vérifier que $\{\mathcal{H}, \mathcal{X}_3\} = \{\mathcal{H}, \mathcal{X}_4\} = 0$, ainsi les composantes de $\mathbf{e}$ sont conservées et donc le système est superintégrable. La quantité $\mathbf{e}$ porte le nom du vecteur de Laplace-Runge-Lenz. On verra plus tard que ce vecteur est parallèle à l'axe formé par l'origine $(q_1, q_2) = (0,0)$ et le périhélie (le point de la trajectoire le plus proche de l'objet central) de la trajectoire par rapport à l'origine. On peut utiliser les $\mathcal{X}_1, ... \mathcal{X}_4$ pour générer l'algèbre associée aux constantes de mouvement. Les crochets de Poisson non triviaux sont

$$\{\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3\} = -\mathcal{X}_4, \quad \{\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_4\} = \mathcal{X}_3, \quad \{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4\} = 2\mathcal{X}_2 \mathcal{H}. \tag{1.2.5}$$

Ces équations de structure ne définissent pas une algèbre de Lie en raison du terme quadratique $\mathcal{X}_2 \mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ est restreint à l'énergie totale (qui sera alors une constante arbitraire), ces équations définissent une algèbre de Lie avec avec comme opérateur Casimir la norme du vecteur de Laplace-Runge-Lenz : $\mathbf{e}.\mathbf{e} = 2\mathcal{X}_2^2 \mathcal{H} + \alpha^2$.

Supposons qu'on a une solution aux équations de Hamilton avec un moment angulaire $\mathcal{X}_2 = l$ et une énergie totale $\mathcal{H} = E$. Par la symétrie radiale, on est libre de choisir la direction des axes de coordonnées. On choisit le système d'axe où le vecteur de Laplace correspondant à la solution se confond avec la direction de l'axe q_1 dans le sens positif. Dans ce système de coordonnées, on a que $\mathcal{X}_4 = 0$, $\mathcal{X}_3 = e_1 > 0$ et $e_1^2 = 2l^2 E + \alpha^2$. En substituant dans la définition originale de $\mathcal{X}_3$ et $\mathcal{X}_4$, on trouve que $p_1 = \frac{-\alpha q_2}{l\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$ et $p_2 = \frac{e_1}{l} + \frac{\alpha q_2}{l\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$. Ainsi, l'expression initiale de $\mathcal{X}_2$ nous permet d'écrire :

$$l = \frac{q_1 e_1}{l} + \frac{\alpha q_1^2}{l\sqrt{q_1^2+q_2^2}} + \frac{\alpha q_2^2}{l\sqrt{q_1^2+q_2^2}} = \frac{q_1 e_1}{l} + \frac{\alpha\sqrt{q_1^2+q_2^2}}{l}, \tag{1.2.6}$$

qui devient après simplification

$$(1-\frac{e_1^2}{\alpha^2})q_1^2 + \frac{2l^2 e_1}{\alpha^2}q_1 + q_2^2 = \frac{l^4}{\alpha^2}. \tag{1.2.7}$$

Cette équation définit une conique dans le plan $q_1 - q_2$; dépendamment des paramètres e_1,l et E, les trajectoires sont soit des ellipses, des paraboles ou des hyperboles. La première loi de Kepler est maintenant évidente, les seules orbites fermées possibles sont les ellipses.
La deuxième loi de Kepler est, comme déjà mentionné, une conséquence de la conservation du moment angulaire $\mathcal{X}_2$. En effet, dans les coordonnées polaires, on peut écrire $q_1 = r(\phi)cos\phi$ et $q_2 = r(\phi)sin\phi$, ainsi

$$l = \mathcal{X}_2 = q_1(t)p_2(t) - q_2(t)p_1(t) = q_1\frac{dq_2}{dt} - q_2\frac{dq_1}{dt} = r^2(\phi)\frac{d\phi}{dt}. \tag{1.2.8}$$

L'aire balayée entre l'instant 0 et l'instant t vaut $A(t) = \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} r^2(\phi)d\phi$. On a alors que $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{2}$, ainsi le taux de variation est constant d'où la seconde loi de Kepler. Supposons que les paramètres e_1,l et E sont tels que la trajectoire est une ellipse de période T. En posant $\phi(0) = 0$ et $\phi(T) = 2\pi$, on obtient que l'aire totale de l'ellipse est donnée par $A(T) = \frac{Tl}{2}$. En égalant cette expression avec la formule d'aire de l'ellipse donnée par (1.2.7), on obtient directement la troisième loi de Kepler.

1.3. Mécanique quantique

En mécanique quantique, les états physiques liés sont vus comme des sous-espaces vectoriels d'un espace d'Hilbert. Un modèle standard consiste à représenter chaque état physique lié à n degrés de liberté par une fonction complexe et carré intégrable $\Phi(x,t)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Contrairement à la physique classique, on ne peut que calculer la probabilité qu'un système quantique donné passe d'un état $\Phi(x,t)$ à un nouvel état $\Psi(x,t)$. Cette quantité, interprétée pour la première fois par le physicien Max Born, est donnée par le produit scalaire $\langle\Phi,\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)\overline{\Phi(x,t)}$. Usuellement, les états sont normalisés : $\|\Psi\|^2 = \langle\Psi,\Psi\rangle = 1$. En 1923, Niels Bohr propose un principe de correspondance permettant d'obtenir les lois de la mécanique quantique en se servant du cadre théorique procuré par la mécanique hamiltonienne. Ce principe stipule qu'on peut passer des lois en physique classique à leurs équivalents en physique quantique en :

- Remplaçant les variables dynamiques $v(t)$ du système par des opérateurs $A(t)$ agissant sur la fonction d'état du système : $q_i \to X_i = x_i, E \to i\hbar\partial_t, p_i \to P_i = -i\hbar\partial_{x_i}$

($\hbar$ étant la constante de Planck réduite). Ainsi, en analogie avec l'hamiltonien classique $H = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + V(\mathbf{q},t)$, on a l'hamiltonien quantique dans un espace euclidien à n dimensions,

$$\mathcal{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2 + V(\mathbf{x},t) \tag{1.3.1}$$

- Remplaçant $\frac{dv(t)}{dt}$ par le commutateur $\frac{1}{i\hbar}[\mathcal{H},A(t)] = \frac{1}{i\hbar}(\mathcal{H}A(t) - A(t)\mathcal{H})$, $A(t)$ étant l'opérateur (aussi appelé observable) associé à la variable $v(t)$ et $\mathcal{H}$ l'hamiltonien quantique.

L'importance de ce principe est qu'il permet, à partir de la mécanique quantique, de retrouver toutes les lois de mécanique quantique lorsque $\hbar$ est négligeable. En mécanique quantique, les observables correspondent à des quantités physiques qui peuvent être mesurées. Pour cette raison, tous les opérateurs qui définissent une observable sont autoadjoints et donc possèdent un spectre réel. Pour un opérateur A correspondant à une certaine observable, la probabilité qu'un état arbitraire Φ soit mesuré avec une valeur propre λ est donné par $|\langle\Psi_\lambda, \Phi\rangle|$, où Ψ_λ est la projection de Φ sur l'espace propre correspondant à la valeur propre λc. On peut définir un produit bilinéaire sur l'ensemble des opérateurs par le commutateur $[A,B] = AB - BA$. Ce produit satisfait les mêmes relations que le crochet de Poisson, y compris l'identité de Jacobi. Les opérateurs de position et de quantité de mouvement satisfont les relations :

$$[X_j,X_k] = [P_j,P_k] = 0, \quad [X_j,P_k] = i\hbar\delta_{jk}. \tag{1.3.2}$$

Ces équations définissent une algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_n$ dans un espace à n dimensions. L'évolution temporelle des états quantiques est déterminée par l'hamiltonien $\mathcal{H}$: la dynamique du système est donnée par l'équation de **Schrödinger dépendante du temps**,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Phi(t) = \mathcal{H}\Phi(t). \tag{1.3.3}$$

En utilisant l'opérateur hamiltonien, on peut définir l'opérateur $U(t) = exp(i\mathcal{H}t/\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\mathcal{H}t/\hbar)^n}{n!}$. Ainsi, l'état du système à l'instant t est donné par $\Phi(t) = U(t)\Phi(0)$, où $\Phi(0)$ est la fonction d'onde du système à l'instant 0 vérifiant le problème à valeur propre suivant :

$$\mathcal{H}\Phi(0) = E\Phi(0). \tag{1.3.4}$$

La quantité E correspond à l'énergie du système à l'état $\Phi(0)$. Ce problème est aussi appelé l'équation de **Schrödinger indépendante du temps**. Si on peut trouver une base à l'espace propre de l'hamiltonien $\mathcal{H}$, on peut exprimer un vecteur arbitraire (état arbitraire) à l'aide de cette base et obtenir l'évolution temporelle grâce à l'opérateur $U(t)$. Trouver les valeurs et vecteurs propres des hamiltoniens est une tâche fondamentale en mécanique quantique. Comme pour le cas des matrices, si k observables $O_1 = \mathcal{H}, O_2,...,O_k$ commutent entre eux, $[O_i,O_k] = 0$, on peut trouver une base $v_1, v_2,...,v_n$ de l'espace de Hilbert où chaque vecteur v_i vérifie $O_pv_i = \lambda_pv_i$ pour $p = 1,...,k$ [**11**]. Il est important de trouver un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC), puisqu'on peut caractériser l'état d'un système par l'ensemble des valeurs propres qui correspondent à chaque observable. Ceci mène naturellement à la notion de l'intégrabilité quantique.

Définition 1.3.1. *Soient $L_1, L_2,..., L_l$ un ensemble d'opérateurs qui ne commutent pas. Un polynôme $P(L_1,...,L_l)$ est dit* ***symétrique*** *en $L_1, L_2,...L_l$ si pour chaque $1 \leqslant k \leqslant l$, les monômes $\alpha L_{j_1} L_{j_2}...L_{j_k}$ apparaissent sous la forme symétrique $\alpha \sum_{\sigma_m \in S_k} L_{\sigma_m(j_1)} L_{\sigma_m(j_2)}...L_{\sigma_m(j_k)}$.*

Définition 1.3.2. *Soient $L_1, L_2,..., L_l$ un ensemble d'opérateurs. Ils sont dits* ***algébriquement indépendants*** *si pour tout polynôme $P(L_1,...,L_l)$ symétrique en $L_1, L_2,..., L_l$, l'équation $P(L_1,...,L_l) = 0$ est trivialement satisfaite (les coefficients des monômes sont nuls).*

Définition 1.3.3. *En mécanique quantique, un système en n dimensions est* ***intégrable*** *s'il existe n intégrales de mouvement, L_l avec $l = 1,...,n$ qui satisfont les conditions suivantes :*

- *Les opérateurs L_l sont soit des opérateurs hermitiens bien définis dans l'algèbre de Heisenberg enveloppante $\mathcal{H}_n$ soit des séries convergentes dans la base formée par les opérateurs X_j,P_j, $j = 1,...,n$.*
- *Les opérateurs L_l sont algébriquement indépendants.*
- *Les intégrales L_l commutent par paires.*

En analogie avec la mécanique classique, les systèmes quantiques à n dimensions sont dits superintégrables s'ils possèdent plus que n intégrales de mouvement.

Définition 1.3.4. *Un système quantique en n dimensions est* ***superintégrable*** *s'il est intégrable et possède en plus k, avec $k = 1,...,n-1$, intégrales de mouvement tel que les $n+k$ intégrales soient algébriquement indépendantes. Le système est minimalement superintégrable si $k = 1$ et maximalement superintégrables si $k = n-1$.*

Dans plusieurs cas, la superintégrabilité quantique offre aussi la possibilité de résoudre l'équation de Schrödinger de façon complètement algébrique. Toutefois, et contrairement à la mécanique classique, on ne connaît pas de preuve que ceci est vrai en général. Il est conjecturé que tous les systèmes maximalement superintégrables sont exactement résolubles, c'est-à-dire que les niveaux d'énergie (les valeurs propres du problème (1.3.4)) peuvent être calculés algébriquement comme illustré dans la prochaine section.

1.4. Exemple de superintégrabilité quantique : l'atome d'hydrogène en 2D

L'équivalent quantique du système de Coulomb est l'atome d'hydrogène en $3D$. Ce système superintégrable est décrit par des fonctions d'ondes à trois variables. L'analyse de sa superintégrabilité permet bel et bien de trouver les niveaux d'énergie de façon complètement algébrique, mais la démarche fait appel à la théorie de représentation des algèbres de Lie, ce qui déborde du cadre de ce mémoire. Nous allons nous restreindre au cas où le mouvement autour du noyau est confiné à un espace $2D$. Ceci nous permettra aussi de faire le lien avec le cas classique. Nous allons donc appliquer le principe de correspondance de Bohr au système de Coulomb-Kepler afin de trouver les trois constantes de mouvement nécessaires pour la superintégrabilité. L'hamiltonien quantique de ce système est donné par (on pose toujours m=1)

$$\mathcal{H} = \frac{-\hbar^2}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1.4.1}$$

avec β une constante.
La quantification du moment angulaire classique nous donne une deuxième intégrale de mouvement :

$$\mathcal{X} = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x). \tag{1.4.2}$$

On peut vérifier que cet opérateur est hermitien et commute avec l'hamiltonien. Toutefois, si on essaie de quantifier de la même façon le vecteur de Laplace, on obtient l'opérateur $-i\hbar\mathcal{X}\partial_y - \frac{x\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$ qui n'est pas hermitien (et ne commute pas avec $\mathcal{H}$). Une façon de contourner ce problème consiste à symétriser cet opérateur en le remplaçant par son anti-commutateur $-i\hbar\{\mathcal{X},\partial_y\} - \{1,\frac{x\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}\} = -i\hbar(\mathcal{X}\partial_y + \partial_y\mathcal{X}) - \frac{2x\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On obtient ainsi l'équivalent quantique du vecteur de Laplace :

$$\mathbf{e} = (\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = (-i\hbar(\mathcal{X}\partial_y + \partial_y\mathcal{X}) - \frac{2x\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}, +i\hbar(\mathcal{X}\partial_x + \partial_x\mathcal{X}) - \frac{2y\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}). \tag{1.4.3}$$

On peut vérifier que $[\mathcal{L}_1,\mathcal{H}] = [\mathcal{L}_2,\mathcal{H}] = 0$. Ces opérateurs génèrent une algèbre quadratique et vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[\mathcal{X},\mathcal{L}_1] = i\hbar\mathcal{L}_2, \quad [\mathcal{X},\mathcal{L}_2] = -i\hbar\mathcal{L}_1, \quad [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2] = -8i\hbar\mathcal{H}\mathcal{X}, \tag{1.4.4}$$

$$\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 - 4\beta^2 - 2\hbar^2\mathcal{H} - 8\mathcal{H}\mathcal{X}^2 = 0. \tag{1.4.5}$$

On définit une nouvelle base de cette algèbre :

$$L_0 = -\mathcal{X}, \quad L^+ = \mathcal{L}_1 - i\mathcal{L}_2, \quad L^- = \mathcal{L}_1 + i\mathcal{L}_2. \tag{1.4.6}$$

Les relations de structure deviennent alors :

$$[L_0,L^\pm] = \pm\hbar L^\pm, \quad [L^+,L^-] = -16\hbar\mathcal{H}L_0, \tag{1.4.7}$$

$$L^+L^- = 4\beta^2 + 2\hbar^2\mathcal{H} - 8\hbar\mathcal{H}L_0 + 8\mathcal{H}L_0^2. \tag{1.4.8}$$

De façon équivalente, on peut écrire l'équation (1.4.8) comme

$$L^-L^+ = 4\beta^2 + 2\hbar^2\mathcal{H} + 8\hbar\mathcal{H}L_0 + 8\mathcal{H}L_0^2. \tag{1.4.9}$$

Soit V_E l'espace propre des vecteurs Φ ayant une valeur propre E et donc vérifiant l'équation de Schrödinger $\mathcal{H}\Phi = E\Phi$. On suppose que V_E est de dimension finie m. Des indications sont données dans [7] pour montrer que V_E doit nécessairement être de dimension finie, on omet de les présenter ici par souci d'uniformité. Puisque tous les opérateurs L_0, L^+,L^- commutent avec $\mathcal{H}$, chacun d'entre eux envoie V_E sur lui-même. Pour L_0 par exemple, on a que $[\mathcal{H},L_0] = 0$. Si $\psi \in V_E$, alors $\mathcal{H}(L_0\psi) = L_0\mathcal{H}\psi = EL_0\psi$, donc $L_0\psi \in V_E$. Puisque V_E est invariant sous L_0 et que celui-ci est un opérateur hermitien, par le théorème spectral, L_0 est diagonalisable dans une base orthonormale.

Lemme 1.4.1. *Soit $\Psi \in V_E$ un vecteur propre de L_0 avec valeur propre λ. Alors, soit $L^+\Psi = \boldsymbol{0}$ (le vecteur nul) soit $L^+\Psi$ est un vecteur propre de L_0 avec valeur propre $\lambda + \hbar$. D'autre part, soit $L^-\Psi = \boldsymbol{0}$ soit $L^-\Psi$ est un vecteur propre de L_0 avec valeur propre $\lambda - \hbar$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe des relations $[L_0,L^\pm] = \pm\hbar L^\pm$. □

Donné $\Psi \in V_E$ un vecteur propre de L_0, on définit une action sur Ψ par $(L^+)^k\Psi$, $k = 0,1,2,\ldots$. Puisque V_E est de dimension finie, L_0 restreint à V_E possède un nombre fini de valeurs propres, ainsi il existe un entier k tel que $(L^+)^{k+1}\Psi = \mathbf{0}$. Soit k_0 le plus petit entier vérifiant cette égalité et définissons $\Phi_0 = (L^+)^{k_0}\Psi$. Par le lemme (1.4.1), Φ_0 est un vecteur propre de L_0 avec $L_0\Phi_0 = \mu\Phi_0$, où $\mu = \lambda + k_0\hbar$. On appelle Φ_0 le vecteur de plus haut poids. En appliquant l'opérateur L^- sur Φ_0, on génère des vecteurs propres de L_0 : $\Phi_j = (L^-)^j\Phi_0$. Par le même argument qu'avant, il existe un plus petit entier n pour lequel $(L^-)\Phi_n = \mathbf{0}$. Ainsi

$$L_0\Phi_j = (\mu - j\hbar)\Phi_j, \quad j = 0,1,\ldots,n, \quad L^-\Phi_j = \Phi_{j+1}, \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \tag{1.4.10}$$

On applique maintenant les deux bords de l'équation (1.4.8) sur le vecteur Φ_j :

$$L^+(\Phi_{j+1}) = (4\beta^2 + 2\hbar^2 E - 8\hbar E(\mu - j) + 8E(\mu - j)^2)\Phi_j. \tag{1.4.11}$$

Pour le cas spécial $j = n$, on obtient

$$4\beta^2 + 2\hbar^2 E - 8\hbar E(\mu - n) + 8E(\mu - n)^2 = 0. \tag{1.4.12}$$

Ensuite, en appliquant les deux bords de l'équation (1.4.9) sur le vecteur Φ_0, on obtient $4\beta^2 + 2\hbar^2 E + 8\hbar E\mu + 8E\mu^2 = 0$. En résolvant cette équation pour E, on trouve

$$E = \frac{-2\beta^2}{(\hbar + 2\mu)^2}. \tag{1.4.13}$$

En substituant cette équation dans (1.4.12), on obtient

$$-\frac{16\beta^2 h(n+1)(hn-2\mu)}{(h+2\mu)^2}=0. \tag{1.4.14}$$

Ainsi, $\mu = n\hbar/2$ et les niveaux d'énergie sont donnés par

$$E=\frac{-2\beta^2}{\hbar^2(1+n)^2}, \tag{1.4.15}$$

qui donne le spectre d'énergie d'un atome d'hydrogène confiné à un plan.

Chapitre 2

LA SUPERINTÉGRABILITÉ QUANTIQUE DE CINQUIÈME ORDRE

2.1. Description de l'article

Le suivant chapitre est un article coécrit avec P. Winternitz et dont je suis le principal auteur. On y présente les conditions nécessaires pour qu'un système quantique possède une intégrale de mouvement de cinquième ordre. Ensuite, en supposant la séparabilité en coordonnées cartésiennes du potentiel $V(x,y)$, on trouve plusieurs systèmes superintégrables qu'on exprime en fonction de transcendantes connues.

Dans cet article, on adopte la convention selon laquelle le facteur $\frac{1}{2}$ n'apparait pas dans l'hamiltonien. Une version de cet article a été soumise aux archives ArXiv et au Journal of Mathematical Physics.

Fifth-order superintergrable quantum systems separating in Cartesian coordinates. Doubly exotic potentials

Ismail Abouamal[a)] and Pavel Winternitz[b)]

Département de Mathématiques et de Statistiques and Centre de Recherche Mathématiques, Université de Montréal, C.P.6128, Succursale Centre-Ville, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

(Dated: 1 October 2017)

We consider a two dimensional quantum Hamiltonian separable in Cartesian coordinates and allowing a fifth-order integral of motion. We impose the superintegrablity condition and find all doubly exotic superintegrable potentials(i.e potentials $V(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$ where neither $V_1(x)$ nor $V_2(y)$ satisfy a linear ODE) allowing the existence of such an integral. All of these potentials are found to have the Painlevé property. Most of them are expressed in terms of known Painlevé transcendents or elliptic functions but some may represent new higher order Painlevé transcendents.

[a)]abouamali@dms.umontreal.ca

[b)]wintern@crm.umontreal.ca

I. Introduction

We consider a quantum superintegrable Hamiltonian system in two-dimensional space E_2 with two integrals of motion (in addition to the Hamiltonian), namely

$$\mathcal{H} = p_1^2 + p_2^2 + V(x,y), \quad p_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

$$Y = p_1^2 - p_2^2 + g(x,y), \tag{2}$$

$$X = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{[\frac{N}{2}]}\sum_{j=0}^{N-2l}\{f_{j,2l}(x,y), p_1^j p_2^{N-2l-j}\}. \tag{3}$$

Above the notation is $\{A,B\} = AB + BA$ and in this article we take $N = 5$. The functions $V(x,y), g(x,y)$ and $f_{j,2l}(x,y)$ are to be determined from the conditions

$$[\mathcal{H}, X] = 0, \quad [\mathcal{H}, Y] = 0. \tag{4}$$

The existence of the second order integral Y implies that the system is integrable and separable in Cartesian coordinates. This imposes severe restrictions on the potential $V(x,y)$ and the function $g(x,y)$, namely[1]

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(y), \tag{5}$$

$$g(x,y) = V_1(x) - V_2(y). \tag{6}$$

The operators X and Y do not commute but generate a non-Abelian polynomial algebra.The Hamiltonian system (1),(2),(3) is superintegrable, since it has more integrals of motion($n = 3$) than degrees of freedom($n = 2$). For precise definitions, properties of superintegrable systems and reasons why they are of physical and mathematical interest, see the review article[2].

In writing the integral X in (3) we use the general formalism introduced in Ref. 3 for N-th order quantum integrals in E_2.

The concept of "exotic superintegrable systems" was introduced and studied in several recent articles[4–11]. These are superintegrable systems with H as in (1), X as in (3) separating in Cartesian or polar coordinates. They are "exotic" because of an additional requirement, namely that *the potential $V(x,y)$ should not be the solution of any linear differential equation.* For potentials of the form (5) this implies that $V_1(x)$, $V_2(y)$ or possibly both $V_1(x)$ and $V_2(y)$

satisfy only nonlinear ODEs. It was observed in Ref. 4, 5, 8, and 10 that for $N = 3$ and $N = 4$ all of these nonlinear equations have the Painlevé property. This means that their solutions have no movable singularities other than poles[12–17].

The results for $N = 3$ and $N = 4$ suggest the following conjecture: superintegrable potentials in quantum mechanics that allow the separation of variables in the Schrödinger equation in Cartesian or polar coordinates in E_2 satisfy ODEs that have the Painlevé property.

The purpose of the present article is to verify this "Painlevé conjecture" for $N = 5$. In the process we observed that for $N = 5$ the potential can be "doubly exotic". By this we mean that *both* $V_1(x)$ *and* $V_2(y)$ *satisfy nonlinear equations with the Painlevé property.* This was also the case[4,5] for $N = 3$, not however for $N = 4$, where either $V_1(x)$ or $V_2(y)$ had to satisfy a linear equation. In this article we concentrate on doubly exotic potentials. "Singly exotic" ones are left for a future study.

The structure of the article is the following. In section 2 we derive the determining equations governing the existence and form of the $N = 5$ integral X of eq.(3). The expression for the commutator $[\mathcal{H}, X]$ is a 6-th order operator of the form

$$[\mathcal{H}, X] = \sum_{0 \leq i+j \leq 6} M_{i,j}(x,y)\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j = 0. \tag{7}$$

All coefficients $M_{i,j}$ must vanish. Some of the obtained determining equations depend explicitly on the Planck constant $\hbar$. The classical determining equations are obtained for $\hbar \to 0$. We obtain a linear PDE as the compatibility condition for the $V(x,y)$. For exotic potentials this equation must be satisfied identically. In Section 3 we restrict to separable potentials of the form (5) and obtain linear ODEs for $V_1(x)$ and $V_2(y)$. In Section 4 we restrict further, namely to doubly exotic potentials and obtain an expression for the general integral of motion X in terms of the potentials $V_1(x)$ and $V_2(y)$ and of some constants to be specified later. In section 5 we solve the nonlinear ODEs for the potentials $V_1(x)$ and $V_2(y)$. The results are summed up and analyzed in Section 6. Section 7 is devoted to conclusions and future outlook.

II. Conditions for the existence of a fifth order integral in quantum mechanics

Setting $M_{i,j}(x,y) = 0$, we find a set of 28 differential equations, 12 of which are consequences of the other 16. More specifically, it is sufficient to set $M_{i,j}(x,y) = 0$ with $i+j = 2k, k = 0,1,2,3$, in order to satisfy (7) . Alternatively, we can use Theorem 2 in Ref. 3 which gives directly the determining equations for the coefficients $f_{j,2l}$ in (3). The first seven equations are given by setting $M_{i,j} = 0$ with $i+j = 6$. This gives the well known *Killing-equations*:

$$\frac{\partial f_{j-1,0}}{\partial x} + \frac{\partial f_{j,0}}{\partial y} = 0, \quad 0 \le j \le 6, \tag{8}$$

with $f_{-1,0} = f_{6,0} = 0$. Equations (8) are the conditions for the highest order terms of X to commute with the free Hamiltonian $\mathcal{H}_0 = p_1^2 + p_2^2$. They can be solved directly to give:

$$f_{j,0} = \sum_{n=0}^{5-j} \sum_{m=0}^{j} \binom{5-n-m}{j-m} A_{5-n-m,m,n} x^{5-j-n} (-y)^{j-m}. \tag{9}$$

That is:

$$f_{50} = A_{050} - yA_{140} + y^2A_{230} - y^3A_{320} + y^4A_{410} - y^5A_{500}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_{40} = {} & A_{041} - yA_{131} + xA_{140} + y^2A_{221} - 2xyA_{230} - y^3A_{311} + 3xy^2A_{320} + y^4A_{401} \\ & -4xy^3A_{410} + 5xy^4A_{500}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f_{30} = {} & A_{032} - yA_{122} + xA_{131} + y^2A_{212} - 2xyA_{221} + x^2A_{230} - y^3A_{302} + 3xy^2A_{311} \\ & -3x^2yA_{320} - 4xy^3A_{401} + 6x^2y^2A_{410} - 10x^2y^3A_{500}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_{20} = {} & A_{023} - yA_{113} + xA_{122} + y^2A_{203} - 2xyA_{212} + x^2A_{221} + 3xy^2A_{302} - 3x^2yA_{311} \\ & +x^3A_{320} + 6x^2y^2A_{401} - 4x^3yA_{410} + 10x^3y^2A_{500}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_{10} = {} & A_{014} - yA_{104} + xA_{113} - 2xyA_{203} + x^2A_{212} - 3x^2yA_{302} + x^3A_{311} - 4x^3yA_{401} \\ & +x^4A_{410} - 5x^4yA_{500}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$f_{00} = A_{005} + xA_{104} + x^2A_{203} + x^3A_{302} + x^4A_{401} + x^5A_{500}. \tag{15}$$

where A_{ijk} are constants.

Remark 1 *At this point, the specific form of the functions $f_{j,0}$ allows us to rewrite the* *integral (3) in a different symmetrized form, namely:*

$$X = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{5}\sum_{n=0}^{5-m} A_{5-m-n,m,n}\left\{L_3^{5-m-n}, p_1^m p_2^n\right\} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=0}^{5-2l}\{g_{j,2l}, p_1^j p_2^{5-2l-j}\},$$
$$L = xp_2 - yp_1. \tag{16}$$

The form in (16) *introduced in Ref. 3 for arbitrary N was the starting point in previous articles (for $2 \leqslant N \leqslant 4$)*[5,6,10,18]*. It is important to notice that this choice of symmetrization affects the form of the functions $f_{j,2l}$ with $j \neq 0$ in the original form of the integral. Thus, the functions $g_{j,2l}$ with $j \neq 0$ must satisfy a different, though equivalent, set of differential equations in order to satisfy the commutation relation (7). Despite the fact that separable third and fourth order superintegrable systems have been studied using a form analogous to (16), we will continue here assuming that the integral has the form in (3) (with $N = 5$) in order to use and verify the general results obtained in Ref. 3.*

The next five independent determining equations are given by setting $M_{i,j}(x,y) = 0$ with $i + j = 4$. After some simplifications, these are (we use the notation ${f_{j,k}}^{(n,m)} := \partial_x^n \partial_y^m f_{j,k}$):

$$\begin{aligned}
{f_{02}}^{(0,1)} =& \frac{5}{2} f_{00} V_y + \frac{1}{2} f_{10} V_x + \hbar^2 \left(\frac{-3}{2} A_{311} + 6yA_{401} - 6xA_{410} + 30xyA_{500}\right), && (17)\\
{f_{12}}^{(0,1)} + {f_{02}}^{(1,0)} =& 2f_{10}V_y + f_{20}V_x + \hbar^2 \left(3A_{302} - 3A_{320} + 12xA_{401} + 12yA_{410}\right.\\
&\left. + 30x^2 A_{500} - 30y^2 A_{500}\right), && (18)\\
{f_{22}}^{(0,1)} + {f_{12}}^{(1,0)} =& \frac{3}{2} f_{20} V_y + \frac{3}{2} f_{30} V_x, && (19)\\
{f_{32}}^{(0,1)} + {f_{22}}^{(1,0)} =& f_{30}V_y + 2f_{40}V_x + \hbar^2 \left(3A_{302} - 3A_{320} + 12xA_{401} + 12yA_{410}\right.\\
&\left. + 30x^2 A_{500} - 30y^2 A_{500}\right), && (20)\\
{f_{32}}^{(1,0)} =& \frac{1}{2} f_{40} V_y + \frac{5}{2} f_{50} V_x + \hbar^2 \left(\frac{3}{2} A_{311} - 6yA_{401} + 6xA_{410} - 30xyA_{500}\right). && (21)
\end{aligned}$$

Eq.(17)- (21) are linear PDEs for $f_{a,2}$ and V since $f_{j,0}$ ($j = 0, 1, ...5$) are known from (9). We shall use their compatibility to obtain a linear partial differential equation satisfied by the potential $V(x,y)$. Next, setting $M_{i,j}(x,y) = 0$, with $i + j = 2$, gives us three more determining equations. After some simplifications using (17)-(21), these are

$$
\begin{aligned}
(f_{04})^{(0,1)} =& \frac{3}{2}f_{02}V_y + \frac{1}{2}f_{12}V_x + \hbar^2\Bigg[\left(\frac{5}{8}f_{00} - \frac{1}{8}f_{40}\right)V_{yyy} + \left(\frac{15}{4}f_{00} - \frac{1}{4}f_{40} + f_{10}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{4}{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{yy} + \left(\frac{7}{4}{f_{10}}^{(0,1)} + \frac{1}{4}{f_{30}}^{(0,1)} - \frac{5}{4}{f_{50}}^{(0,1)} - \frac{5}{2}{f_{00}}^{(1,0)}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2}{f_{20}}^{(1,0)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xy} + \left(\frac{5}{8}f_{10} + \frac{1}{4}f_{30} - \frac{5}{8}f_{50}\right)V_{xyy}\\
&+ \left(\frac{1}{2}{f_{20}}^{(0,1)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(0,1)} - \frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,0)}\right)V_{xx} + \left(\frac{-15}{8}{f_{00}}^{(0,2)} - \frac{1}{8}{f_{40}}^{(0,2)}\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,1)} + \frac{1}{4}{f_{30}}^{(1,1)} - \frac{5}{4}{f_{00}}^{(2,0)} - \frac{3}{8}{f_{20}}^{(2,0)}\right)V_y + \left(\frac{-3}{8}{f_{10}}^{(0,2)}\right.\\
&- \left.\frac{5}{8}{f_{50}}^{(0,2)} - \frac{1}{4}{f_{20}}^{(1,1)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,1)} - \frac{1}{4}{f_{10}}^{(2,0)} - \frac{3}{8}{f_{30}}^{(2,0)}\right)V_x\\
&+ \left(\frac{-5}{4}f_{00} + \frac{1}{8}f_{20} + \frac{1}{2}f_{40}\right)V_{xxy} + \left(-\frac{1}{4}f_{10} - \frac{1}{8}f_{30}\right)V_{xxx}\Bigg], \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{f_{14}}^{(0,1)} + {f_{04}}^{(1,0)} =& f_{12}V_y + f_{22}V_x + \hbar^2\Bigg[\left(\frac{5}{4}f_{00} + \frac{1}{4}f_{20} + \frac{1}{4}f_{40}\right)V_{xyy} + \left(\frac{1}{4}f_{10} + \frac{1}{4}f_{30}\right.\\
&+ \left.\frac{5}{4}f_{50}\right)V_{xxy} + \left({f_{10}}^{(0,1)} + \frac{5}{4}{f_{00}}^{(1,0)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,0)} + \frac{1}{4}{f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{yy}\\
&+ \left(\frac{1}{4}{f_{10}}^{(0,1)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(0,1)} + \frac{5}{4}{f_{50}}^{(0,1)} + {f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xx} + \left(\frac{5}{4}{f_{00}}^{(0,1)}\right.\\
&+ \left.\frac{5}{4}{f_{20}}^{(0,1)} + \frac{1}{4}{f_{40}}^{(0,1)} + \frac{1}{4}{f_{10}}^{(1,0)} + \frac{5}{4}{f_{30}}^{(1,0)} + \frac{5}{4}{f_{50}}^{(1,0)}\right)V_{xy}\\
&+ \left(-{f_{10}}^{(0,2)} + \frac{5}{4}{f_{00}}^{(1,1)} - \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,1)} + \frac{1}{4}{f_{40}}^{(1,1)} - \frac{1}{2}{f_{30}}^{(2,0)}\right)V_y\\
&+ \left(-\frac{1}{2}{f_{20}}^{(0,2)} + \frac{1}{4}{f_{10}}^{(1,1)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(1,1)} + \frac{5}{4}{f_{50}}^{(1,1)} - {f_{40}}^{(2,0)}\right)V_x\Bigg], \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{f_{14}}^{(1,0)} =& \frac{1}{2}f_{22}V_y + \frac{3}{2}f_{32}V_x + \hbar^2\Bigg[\left(-\frac{1}{8}f_{20} - \frac{1}{4}f_{40}\right)V_{yyy} + \left(-\frac{1}{2}{f_{40}}^{(0,1)}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,0)} + \frac{1}{2}{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{yy} + \left(\frac{1}{2}{f_{10}}^{(0,1)} + \frac{1}{2}{f_{30}}^{(0,1)} - \frac{5}{2}{f_{50}}^{(0,1)}\right.\\
&- \left.\frac{5}{4}{f_{00}}^{(1,0)} + \frac{1}{4}{f_{20}}^{(1,0)} + \frac{7}{4}{f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xy} + \left(\frac{1}{2}f_{10} + \frac{1}{8}f_{30} - \frac{5}{4}f_{50}\right)V_{xyy}\\
&+ \left(\frac{1}{4}{f_{20}}^{(0,1)} + {f_{40}}^{(0,1)} - \frac{1}{4}{f_{10}}^{(1,0)} + \frac{15}{4}{f_{50}}^{(1,0)}\right)V_{xx} + \left(\frac{-3}{8}{f_{20}}^{(0,2)}\right.\\
&- \left.\frac{1}{4}{f_{40}}^{(0,2)} + \frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,1)} - \frac{1}{4}{f_{30}}^{(1,1)} - \frac{5}{8}{f_{00}}^{(2,0)} - \frac{3}{8}{f_{40}}^{(2,0)}\right)V_y\\
&+ \left(\frac{-3}{8}{f_{30}}^{(0,2)} - \frac{5}{4}{f_{50}}^{(0,2)} + \frac{1}{4}{f_{20}}^{(1,1)} - \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,1)} - \frac{1}{8}{f_{10}}^{(2,0)}\right.\\
&- \left.\frac{15}{8}{f_{50}}^{(2,0)}\right)V_x + \left(\frac{-5}{8}f_{00} + \frac{1}{4}f_{20} + \frac{5}{8}f_{40}\right)V_{xxy} + \left(-\frac{1}{8}f_{10} + \frac{5}{8}f_{50}\right)V_{xxx}.\Bigg]. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

The compatibility of these equations can be used to obtain a *nonlinear* partial differential equation satisfied by the potential $V(x,y)$ and the undetermined coefficients $f_{j,2}$.
Finally, setting $M_{0,0}(x,y)=0$ gives us the last determining equation relating all functions $f_{i,j}$ and the potential. After some simplifications using (17)-(21), this equation reads

$$
\begin{aligned}
0 =& 2f_{04}V_y + 2f_{14}V_x + \hbar^2\left[-\frac{1}{2}f_{02}V_{yyy} - \frac{1}{2}f_{12}V_{xyy} + V_y\left(\frac{-3}{2}f_{02}{}^{(0,2)} - f_{12}{}^{(1,1)} - \frac{1}{2}f_{22}{}^{(2,0)}\right)\right.\\
&\left. + V_x\left(-\frac{1}{2}f_{12}{}^{(0,2)} - f_{22}{}^{(1,1)} - \frac{3}{2}f_{32}{}^{(2,0)}\right) - \frac{1}{2}f_{22}V_{xxy} - \frac{1}{2}f_{32}V_{xxx}\right] + \hbar^4\left[\left(\frac{1}{8}f_{00}\right.\right.\\
&\left. - \frac{1}{8}f_{40}\right)V_{yyyyy} + \left(-\frac{1}{8}f_{10} + \frac{1}{8}f_{50}\right)V_{xxxxx} + \left(\frac{1}{8}f_{10} + \frac{1}{4}f_{30} - \frac{5}{8}f_{50}\right)V_{xyyyy}\\
& + \left(\frac{-5}{8}f_{00} + \frac{1}{4}f_{20} + \frac{1}{8}f_{40}\right)V_{xxxxy} + \left(-\frac{1}{4}f_{20} + \frac{1}{2}f_{40}\right)V_{xxyyy} + \left(\frac{1}{2}f_{10} - \frac{1}{4}f_{30}\right)V_{xxxyy}\\
& + \left(-\frac{1}{2}f_{40}{}^{(0,1)} + \frac{1}{4}f_{30}{}^{(1,0)}\right)V_{yyyy} + \left(\frac{1}{4}f_{20}{}^{(0,1)} - \frac{1}{2}f_{10}{}^{(1,0)}\right)V_{xxxx} + \left(\frac{3}{4}f_{30}{}^{(0,1)}\right.\\
&\left. - \frac{5}{2}f_{50}{}^{(0,1)} - \frac{3}{4}f_{20}{}^{(1,0)} + \frac{1}{2}f_{40}{}^{(1,0)}\right)V_{xyyy} + \left(\frac{1}{2}f_{10}{}^{(0,1)} - \frac{3}{4}f_{30}{}^{(0,1)} - \frac{5}{2}f_{00}{}^{(1,0)}\right.\\
&\left. + \frac{3}{4}f_{20}{}^{(1,0)}\right)V_{xxxy} + \left(\frac{-3}{4}f_{20}{}^{(0,1)} + \frac{3}{2}f_{40}{}^{(0,1)} + \frac{3}{2}f_{10}{}^{(1,0)} - \frac{3}{4}f_{30}{}^{(1,0)}\right)V_{xxyy}\\
& + \left(\frac{5}{4}f_{00}{}^{(0,2)} - \frac{3}{4}f_{40}{}^{(0,2)} + \frac{1}{2}f_{10}{}^{(1,1)} + \frac{3}{4}f_{30}{}^{(1,1)} - \frac{1}{4}f_{20}{}^{(2,0)}\right)V_{yyy} + \left(-\frac{1}{4}f_{30}{}^{(0,2)}\right.\\
&\left. + \frac{3}{4}f_{20}{}^{(1,1)} + \frac{1}{2}f_{40}{}^{(1,1)} - \frac{3}{4}f_{10}{}^{(2,0)} + \frac{5}{4}f_{50}{}^{(2,0)}\right)V_{xxx} + \left(\frac{3}{4}f_{10}{}^{(0,2)} + \frac{3}{4}f_{30}{}^{(0,2)}\right.\\
&\left. - \frac{15}{4}f_{50}{}^{(0,2)} - \frac{3}{4}f_{20}{}^{(1,1)} + \frac{3}{2}f_{40}{}^{(1,1)} + \frac{3}{2}f_{10}{}^{(2,0)}\right)V_{xyy} + \left(\frac{3}{2}f_{40}{}^{(0,2)} + \frac{3}{2}f_{10}{}^{(1,1)}\right.\\
&\left. - \frac{3}{4}f_{30}{}^{(1,1)} - \frac{15}{4}f_{00}{}^{(2,0)} + \frac{3}{4}f_{20}{}^{(2,0)} + \frac{3}{4}f_{40}{}^{(2,0)}\right)V_{xxy} + \left(\frac{1}{2}f_{40}{}^{(0,3)} - \frac{3}{4}f_{30}{}^{(1,2)}\right.\\
&\left. + \frac{3}{4}f_{20}{}^{(2,1)} - \frac{1}{2}f_{10}{}^{(3,0)}\right)V_{xx} + \left(-\frac{1}{2}f_{40}{}^{(0,3)} + \frac{3}{4}f_{30}{}^{(1,2)} - \frac{3}{4}f_{20}{}^{(2,1)} + \frac{1}{2}f_{10}{}^{(3,0)}\right)V_{yy}\\
& + \left(\frac{1}{4}f_{30}{}^{(0,3)} - \frac{5}{2}f_{50}{}^{(0,3)} - \frac{3}{4}f_{20}{}^{(1,2)} + \frac{3}{2}f_{40}{}^{(1,2)} + \frac{3}{2}f_{10}{}^{(2,1)} - \frac{3}{4}f_{30}{}^{(2,1)}\right.\\
&\left. - \frac{5}{2}f_{00}{}^{(3,0)}(x,y) + \frac{1}{4}f_{20}{}^{(3,0)}\right)V_{xy} + \left(\frac{5}{8}f_{00}{}^{(0,4)} - \frac{1}{8}f_{40}{}^{(0,4)} + \frac{1}{2}f_{10}{}^{(1,3)} + \frac{1}{4}f_{30}{}^{(1,3)}\right.\\
&\left. + \frac{1}{2}f_{10}{}^{(3,1)} + \frac{1}{4}f_{30}{}^{(3,1)} - \frac{5}{8}f_{00}{}^{(4,0)} + \frac{1}{8}f_{40}{}^{(4,0)}\right)V_y + \left(\frac{1}{8}f_{10}{}^{(0,4)} - \frac{5}{8}f_{50}{}^{(0,4)} + \frac{1}{4}f_{20}{}^{(1,3)}\right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{2}f_{40}{}^{(1,3)} + \frac{1}{4}f_{20}{}^{(3,1)} + \frac{1}{2}f_{40}{}^{(3,1)} - \frac{1}{8}f_{10}{}^{(4,0)} + \frac{5}{8}f_{50}{}^{(4,0)}\right)V_x\right]. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Remark 2 *In their original form, equations (22)-(25) were polynomials of degree six in $\hbar$.*

However, the terms proportional to $\hbar^6$ vanished because of the polynomial form (9) of the functions $f_{j,0}$.

As noted above, equations (17)-(21) must be compatible, that is:

$$\partial_{xxxx}({f_{02}}^{(0,1)}) - \partial_{xxxy}({f_{12}}^{(0,1)} + {f_{02}}^{(1,0)}) + \partial_{xxyy}({f_{22}}^{(0,1)} + {f_{12}}^{(1,0)}) \\ - \partial_{xyyy}({f_{32}}^{(0,1)} + {f_{22}}^{(1,0)}) + \partial_{yyyy}({f_{32}}^{(1,0)}) = 0. \tag{26}$$

Substituting the expressions of $f_{j,2}$ in (26), we obtain a fifth-order linear PDE for the potential $V(x,y)$, namely

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f_{40}V_{yyyyy} + \frac{1}{2}f_{10}V_{xxxxx} + \left(-f_{30} + \frac{5}{2}f_{50}\right)V_{xyyyy} + \left(\frac{5}{2}f_{00} - f_{20}\right)V_{xxxxy} + \left(\frac{3}{2}f_{20}\right. \\
&\left. - 2f_{40}\right)V_{xxyyy} + \left(-2f_{10} + \frac{3}{2}f_{30}\right)V_{xxxyy} + \left(2{f_{40}}^{(0,1)} - {f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{yyyy} + \left(-{f_{20}}^{(0,1)}\right. \\
&\left. + 2{f_{10}}^{(1,0)}\right)V_{xxxx} + \left(-3{f_{30}}^{(0,1)} + 10{f_{50}}^{(0,1)} + 3{f_{20}}^{(1,0)} - 2{f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xyyy} + \left(-2{f_{10}}^{(0,1)}\right. \\
&\left. + 3{f_{30}}^{(0,1)} + 10{f_{00}}^{(1,0)} - 3{f_{20}}^{(1,0)}\right)V_{xxxy} + \left(3{f_{40}}^{(0,2)} - 3{f_{30}}^{(1,1)} + \frac{3}{2}{f_{20}}^{(2,0)}\right)V_{yyy} \\
&+ \left(\frac{3}{2}{f_{30}}^{(0,2)} - 3{f_{20}}^{(1,1)} + 3{f_{10}}^{(2,0)}\right)V_{xxx} + \left(-3{f_{30}}^{(0,2)} + 15{f_{50}}^{(0,2)} + 6{f_{20}}^{(1,1)}\right. \\
&\left. - 6{f_{40}}^{(1,1)} - 6{f_{10}}^{(2,0)} + \frac{3}{2}{f_{30}}^{(2,0)}\right)V_{xyy} + \left(\frac{3}{2}{f_{20}}^{(0,2)} - 6{f_{40}}^{(0,2)} - 6{f_{10}}^{(1,1)} + 6{f_{30}}^{(1,1)}\right. \\
&\left. + 15{f_{00}}^{(2,0)} - 3{f_{20}}^{(2,0)}\right)V_{xxy} + \left(3{f_{20}}^{(0,1)} - 6{f_{40}}^{(0,1)} - 6{f_{10}}^{(1,0)} + 3{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{xxyy} \\
&+ \left(2{f_{40}}^{(0,3)} - 3{f_{30}}^{(1,2)} + 3{f_{20}}^{(2,1)} - 2{f_{10}}^{(3,0)}\right)V_{yy} + \left(-2{f_{40}}^{(0,3)} + 3{f_{30}}^{(1,2)} - 3{f_{20}}^{(2,1)}\right. \\
&\left. + 2{f_{10}}^{(3,0)}\right)V_{xx} + \left(-{f_{30}}^{(0,3)} + 10{f_{50}}^{(0,3)} + 3{f_{20}}^{(1,2)} - 6{f_{40}}^{(1,2)} - 6{f_{10}}^{(2,1)} + 3{f_{30}}^{(2,1)}\right. \\
&\left. + 10{f_{00}}^{(3,0)} - {f_{20}}^{(3,0)}\right)V_{xy} + \left(\frac{1}{2}{f_{40}}^{(0,4)} - {f_{30}}^{(1,3)} + \frac{3}{2}{f_{20}}^{(2,2)} - 2{f_{10}}^{(3,1)} + \frac{5}{2}{f_{00}}^{(4,0)}\right)V_{y} \\
&+ \left(\frac{5}{2}{f_{50}}^{(0,4)} - 2{f_{40}}^{(1,3)} + \frac{3}{2}{f_{30}}^{(2,2)} - {f_{20}}^{(3,1)} + \frac{1}{2}{f_{10}}^{(4,0)}\right)V_{x} = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Note that equation (27) does not depend on $\hbar$ and is thus valid both in classical and quantum mechanics. Indeed, this is true for an arbitrary Nth-order integral of motion[3] with $N \geq 2$. Using (22)-(24) and their compatibility condition

$$\partial_{xx}({f_{04}}^{(0,1)}) - \partial_{xy}({f_{14}}^{(0,1)} + {f_{04}}^{(1,0)}) + \partial_{yy}({f_{14}}^{(1,0)}) = 0, \tag{28}$$

we find a fifth-order nonlinear PDE for $V(x,y)$ and f_{j2} ($j = 0, ..., 3$) which *does* depend on $\hbar$. Equations (22)-(24) involve 5 unknown functions of 2 variables namely $V(x,y)$ and

$f_{a2}(x,y), a=0,1,2,3$. These equations are compatible under condition (28). This condition, given expliciitly in Appendix A, is nonlinear and at this stage we do not use it. We list it in this article because it will be useful in any study of 5th order integrability

We now pass over to the question of superintegrability. Thus we can assume that we have two further second order integrals $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ in (29) and that $V(x,y)$ separates as in (5). The linear and nonlinear compatibility conditions are used (see e.g. (55) below) after the variables are separated.

III. Potentials separable in Cartesian coordinates

Equations (17)-(25) together with (8) assure the integrablity of the system, with two integrals of motion (1) and (3). In general, it is difficult to solve the PDEs we encountered previously. However, by assuming that the potential in the Hamiltonian (1) has the form (5), we can greatly simplify the determining equations. In addition, this assumption gives a sufficient condition for the system to be maximally superintegrable, for we have now three integrals of motion, namely

$$\mathcal{H}_1 = p_1^2 + V_1(x), \quad \mathcal{H}_2 = p_2^2 + V_2(y), \quad X = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{2}\sum_{j=0}^{5-2l}\{f_{j,2l}, p_1^j p_2^{5-2l-j}\}. \tag{29}$$

Substituting (5) and the polynomial functions $f_{j,0}$ into the linear compatibility (27), we obtain

$$\begin{aligned}
&(720A_{410} - 3600yA_{500})V_1'(x) + (240A_{311} - 960yA_{401} + 960xA_{410} - 4800xyA_{500})\, V_1''(x) \\
&+ \left(60A_{212} - 180yA_{302} + 180xA_{311} - 720xyA_{401} + 360x^2A_{410} - 1800x^2yA_{500}\right) V_1{}^{(3)}(x) \\
&+ \left(12A_{113} - 24yA_{203} + 24xA_{212} - 72xyA_{302} + 36x^2A_{311} - 144x^2yA_{401} + 48x^3A_{410}\right. \\
&\left. - 240x^3yA_{500}\right) V_1{}^{(4)}(x) + \left(2A_{014} - 2yA_{104} + 2xA_{113} - 4xyA_{203} + 2x^2A_{212} - 6x^2yA_{302}\right. \\
&\left. + 2x^3A_{311} - 8x^3yA_{401} + 2x^4A_{410} - 10x^4yA_{500}\right) V_1{}^{(5)}(x) + (720A_{401} + 3600xA_{500})\, V_2'(y) \\
&+ (-240A_{311} + 960yA_{401} - 960xA_{410} + 4800xyA_{500})\, V_2''(y) + (60A_{221} - 180yA_{311} \\
&+ 180xA_{320} + 360y^2A_{401} - 720xyA_{410} + 1800xy^2A_{500})\, V_2{}^{(3)}(y) + (-12A_{131} + 24yA_{221} \\
&- 24xA_{230} - 36y^2A_{311} + 72xyA_{320} + 48y^3A_{401} - 144xy^2A_{410} + 240xy^3A_{500})\, V_2{}^{(4)}(y) \\
&+ \left(2A_{041} - 2yA_{131} + 2xA_{140} + 2y^2A_{221} - 4xyA_{230} - 2y^3A_{311} + 6xy^2A_{320} + 2y^4A_{401}\right. \\
&\left. - 8xy^3A_{410} + 10xy^4A_{500}\right) V_2{}^{(5)}(y) = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Equation (30) amounts to a system of ODEs since they involve two functions of one variable each and the coefficients depend on the powers $x^a y^b$. We differentiate (30) twice with respect to x and collect the terms involving the same powers of y. The resulting equation is a polynomial of degree one in y with coefficients that are functions of x. As each of these two coefficients must vanish, we obtain two linear seventh order ODEs for $V_1(x)$, namely

$$\begin{aligned}
&3360 A_{410} V_1{}^{(3)}(x) + (672 A_{311} + 2688 x A_{410})\, V_1{}^{(4)}(x) + (112 A_{212} + 336 x A_{311} \\
&+ 672 x^2 A_{410})\, V_1{}^{(5)}(x) + \left(16 A_{113} + 32 x A_{212} + 48 x^2 A_{311} + 64 x^3 A_{410}\right) V_1{}^{(6)}(x) \\
&+ \left(2 A_{014} + 2 x A_{113} + 2 x^2 A_{212} + 2 x^3 A_{311} + 2 x^4 A_{410}\right) V_1{}^{(7)}(x) = 0,
\end{aligned} \tag{31a}$$

$$\begin{aligned}
&- 16800 A_{500} V_1{}^{(3)}(x) - (2688 A_{401} + 13440 x A_{500})\, V_1{}^{(4)}(x) + (-336 A_{302} - 1344 x A_{401} \\
&- 3360 x^2 A_{500})\, V_1{}^{(5)}(x) + \left(-32 A_{203} - 96 x A_{302} - 192 x^2 A_{401} - 320 x^3 A_{500}\right) V_1{}^{(6)}(x) \\
&+ \left(-2 A_{104} - 4 x A_{203} - 6 x^2 A_{302} - 8 x^3 A_{401} - 10 x^4 A_{500}\right) V_1{}^{(7)}(x) = 0.
\end{aligned} \tag{31b}$$

Similarly, differentiating (30) twice with respect to y and collecting the terms involving the same powers of x, we obtain two seventh order ODEs for $V_2(y)$, namely

$$\begin{aligned}
&3360 A_{401} V_2{}^{(3)}(y) + (-672 A_{311} + 2688 y A_{401})\, V_2{}^{(4)}(y) + (112 A_{221} - 336 y A_{311} \\
&+ 672 y^2 A_{401})\, V_2{}^{(5)}(y) + \left(-16 A_{131} + 32 y A_{221} - 48 y^2 A_{311} + 64 y^3 A_{401}\right) V_2{}^{(6)}(y) \\
&+ \left(2 A_{041} - 2 y A_{131} + 2 y^2 A_{221} - 2 y^3 A_{311} + 2 y^4 A_{401}\right) V_2{}^{(7)}(y) = 0,
\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}
&16800 A_{500} V_2{}^{(3)}(y) + (-2688 A_{410} + 13440 y A_{500})\, V_2{}^{(4)}(y) + (336 A_{320} - 1344 y A_{410} \\
&+ 3360 y^2 A_{500})\, V_2{}^{(5)}(y) + \left(-32 A_{230} + 96 y A_{320} - 192 y^2 A_{410} + 320 y^3 A_{500}\right) V_2{}^{(6)}(y) \\
&+ \left(2 A_{140} - 4 y A_{230} + 6 y^2 A_{320} - 8 y^3 A_{410} + 10 y^4 A_{500}\right) V_2{}^{(7)}(y) = 0.
\end{aligned} \tag{32b}$$

IV. Doubly exotic superintegrable potentials

In this study, our task is to find and classify all doubly exotic potentials separating in Cartesian coordinates, that is all separable potentials that *do not* satisfy any linear ODE. Consequently, we will request that all linear ODEs satisfied by $V_1(x)$ or $V_2(y)$ must vanish trivially (i.e their coefficients must be set to 0). Thus, all four linear equations (31a)-(32b) must be trivially satisfied, that is

$$A_{500} = A_{401} = A_{410} = A_{311} = A_{302} = A_{212} = A_{203} = A_{113} = A_{104} = A_{014} = 0, \tag{33}$$

$$A_{500} = A_{401} = A_{410} = A_{311} = A_{320} = A_{221} = A_{230} = A_{131} = A_{140} = A_{041} = 0, \tag{34}$$

for (31a),(31b) and (32a),(32b) respectively.

With these constraints, the integral of motion X reads

$$\begin{aligned} X =& \frac{1}{2}\left(\left\{p_1^5, A_{050}\right\} + \left\{p_1^3 p_2^2, A_{032} - yA_{122}\right\} + \left\{p_1^2 p_2^3, A_{023} + xA_{122}\right\} + \left\{p_2^5, A_{005}\right\} + \left\{p_1^3, f_{32}\right\}\right. \\ &+ \left.\left\{p_2 p_1^2, f_{22}\right\} + \left\{p_2^2 p_1, f_{12}\right\} + \left\{p_2^3, f_{02}\right\} + \{p_1, f_{1,4}\} + \{p_2, f_{04}\}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

and the determining equations (17)-(25) take a much simpler form. For f_{j2} we obtain

$$\begin{aligned} f_{02}{}^{(0,1)} =& \frac{5}{2} A_{005} V_2'(y), & (36)\\ f_{12}{}^{(0,1)} + f_{02}{}^{(1,0)} =& \left(A_{023} + xA_{122}\right) V_1'(x), & (37)\\ f_{22}{}^{(0,1)} + f_{12}{}^{(1,0)} =& \frac{3}{2}\left(A_{032} - yA_{122}\right) V_1'(x) + \frac{3}{2}\left(A_{023} + xA_{122}\right) V_2'(y), & (38)\\ f_{32}{}^{(0,1)} + f_{22}{}^{(1,0)} =& \left(A_{032} - yA_{122}\right) V_2'(y), & (39)\\ f_{32}{}^{(1,0)} =& \frac{5}{2} A_{050} V_1'(x). & (40) \end{aligned}$$

For f_{j4} the determining equations reduce to

$$\begin{aligned} f_{04}{}^{(0,1)} =& \frac{1}{2} f_{12} V_1'(x) + \frac{3}{2} f_{02} V_2'(y) \\ &+ \frac{\hbar^2}{8}\left(5A_{005} V_2{}^{(3)}(y) - \left(A_{032} - yA_{122}\right) V_1{}^{(3)}(x)\right), & (41)\\ f_{14}{}^{(0,1)} + f_{04}{}^{(1,0)} =& f_{22} V_1'(x) + f_{12} V_2'(y) + \frac{3\hbar^2 A_{122}}{4}\left(-V_1''(x) + V_2''(y)\right), & (42)\\ f_{14}{}^{(1,0)} =& \frac{1}{2} f_{22} V_2'(y) + \frac{3}{2} f_{32} V_1'(x) \\ &+ \frac{\hbar^2}{8}\left(5A_{050} V_1{}^{(3)}(x) - \left(A_{023} + xA_{122}\right) V_2{}^{(3)}(y)\right), & (43)\\ 0 =& 2f_{14} V_1'(x) + 2f_{04} V_2'(y) - \frac{\hbar^2}{2}\left(f_{32} V_1{}^{(3)}(x) + f_{02} V_2{}^{(3)}(y) + 3V_2'(y) f_{02}{}^{(0,2)}\right. \\ &+ V_1'(x) f_{12}{}^{(0,2)} + 2V_2'(y) f_{12}{}^{(1,1)} + 2V_1'(x) f_{22}{}^{(1,1)} + V_2'(y) f_{22}{}^{(2,0)} \\ &+ \left.3V_1'(x) f_{32}{}^{(2,0)}\right) + \frac{\hbar^4}{8}\left(A_{050} V_1{}^{(5)}(x) + A_{005} V_2{}^{(5)}(y)\right). & (44) \end{aligned}$$

If we integrate directly (36)-(38) and (40), we find

$$f_{02} = \alpha_1(x) + \frac{5}{2} A_{005} V_2(y), \tag{45}$$

$$f_{12} = \alpha_2(x) + y \left(A_{023} V_1'(x) + x A_{122} V_1'(x) - \alpha_1'(x) \right), \tag{46}$$

$$\begin{aligned} f_{22} = {} & \alpha_3(x) + \frac{3}{2} A_{023} V_2(y) + \frac{3}{2} x A_{122} V_2(y) + \frac{3}{2} y A_{032} V_1'(x) - \frac{5}{4} y^2 A_{122} V_1'(x) - y \alpha_2'(x) \\ & - \frac{1}{2} y^2 A_{023} V_1''(x) - \frac{1}{2} x y^2 A_{122} V_1''(x) + \frac{1}{2} y^2 \alpha_1''(x), \end{aligned} \tag{47}$$

$$f_{32} = \alpha_4(y) + \frac{5}{2} A_{050} V_1(x), \tag{48}$$

where $\alpha_i(x), i = 1, 2, 3$ and $\alpha_4(y)$ are four unknown functions.
When we substitute (45)-(48) into (39), we find

$$\begin{aligned} & - 3A_{122} V_2(y) + 2A_{032} V_2'(y) - 2y A_{122} V_2'(y) - 2\alpha_3'(x) - 2\alpha_4'(y) - 3y A_{032} V_1''(x) + \frac{7}{2} y^2 A_{122} V_1''(x) \\ & + 2y \alpha_2''(x) + y^2 A_{023} {V_1}^{(3)}(x) + x y^2 A_{122} {V_1}^{(3)}(x) - y^2 {\alpha_1}^{(3)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

We differentiate (49) twice with respect to y and once with respect to x. When we integrate the resulting equation, we obtain

$$\alpha_1(x) = C_1 + x C_2 + x^2 C_3 + x^3 C_4 + \frac{1}{2} W_1(x) A_{122} + A_{023} W_1(x)' + x A_{122} W_1(x)', \tag{50}$$

where C_i are arbitrary constants of integration and $W_1(x)$,$W_2(y)$ are two auxiliary functions verifying

$$W_1'(x) = V_1(x), \quad W_2'(y) = V_2(y). \tag{51}$$

Proceeding in this way for the other mixed derivatives of (49), we find

$$\alpha_2(x) = C_5 + x C_6 + x^2 C_7 + \frac{3}{2} A_{032} V_1(x), \tag{52a}$$

$$\alpha_3(x) = C_8 + x C_9, \tag{52b}$$

$$\alpha_4(y) = C_{10} - y^3 C_4 + y^2 C_7 - y C_9 - \frac{1}{2} W_2(y) A_{122} + \left(A_{032} - y A_{122} \right) W_2'(y). \tag{52c}$$

Thus the coefficients f_{j2} are known in terms of $W_1(x)$,$W_2(y)$ and the constants $C_1, C_2, ..., C_{10}$. Next, we integrate (41) and (43) in order to determine f_{j4} $(j = 0, 1)$:

$$\begin{aligned}
f_{04} =& \frac{15}{8} A_{005} W_2(y)'^2 + W_2'(y) \left(\frac{3C_1}{2} + \frac{3xC_2}{2} + \frac{3x^2C_3}{2} + \frac{3x^3C_4}{2} + \left(\frac{3}{2} A_{023} + \frac{3}{2} x A_{122} \right) W_1'(x) \right.\\
&\left. + \frac{3}{4} A_{122} W_1(x) \right) + \beta_1(x) + \left(-\frac{1}{4} y^2 C_2 - \frac{1}{2} x y^2 C_3 - \frac{3}{4} x^2 y^2 C_4 + \frac{yC_5}{2} + \frac{1}{2} x y C_6 \right.\\
&\left. + \frac{1}{2} x^2 y C_7 \right) W_1''(x) + \left(\frac{3}{4} y A_{032} - \frac{3}{8} y^2 A_{122} \right) W_1(x)' W_1''(x) + \frac{5}{8} \hbar^2 A_{005} W_2^{(3)}(y)\\
&+ \left(-\frac{1}{8} \hbar^2 y A_{032} + \frac{1}{16} \hbar^2 y^2 A_{122} \right) W_1^{(4)}(x), \qquad (53)\\
f_{14} =& \frac{15}{8} A_{050} W_1'(x)^2 + W_1'(x) \left(\frac{-3y^3C_4}{2} + \frac{3y^2C_7}{2} - \frac{3yC_9}{2} + \frac{3C_{10}}{2} + \left(\frac{3}{2} A_{032} - \frac{3}{2} y A_{122} \right) W_2'(y) \right.\\
&\left. - \frac{3}{4} A_{122} W_2(y) \right) + \beta_2(y) + \left(\frac{1}{2} x y^2 C_3 + \frac{3}{4} x^2 y^2 C_4 - \frac{1}{2} x y C_6 - \frac{1}{2} x^2 y C_7 + \frac{xC_8}{2} \right.\\
&\left. + + \frac{x^2 C_9}{4} \right) W_2''(y) + \left(\frac{3}{4} x A_{023} + \frac{3}{8} x^2 A_{122} \right) W_2'(y) W_2''(y) + \frac{5}{8} \hbar^2 A_{050} W_1^{(3)}(x)\\
&+ \left(-\frac{1}{8} \hbar^2 x A_{023} - \frac{1}{16} \hbar^2 x^2 A_{122} \right) W_2{}^{(4)}(y), \qquad (54)
\end{aligned}$$

where $\beta_1(x)$ and $\beta_2(y)$ are two unknown functions. They must be determined by substituting f_{04} and f_{14} into the remaining determining equation (42).
The nonlinear compatibility (28) of (41)-(43) gives

$$\begin{aligned}
&(-18yC_4 + 6C_7) V_1'(x) + (6C_3 + 18xC_4) V_2'(y) + (-4yC_3 - 12xyC_4 + 2C_6 + 4xC_7) V_1''(x)\\
&+ (4yC_3 + 12xyC_4 - 2C_6 - 4xC_7) V_2''(y) + \left(\frac{9}{4} A_{032} - \frac{9}{4} y A_{122} \right) V_1'(x) V_1''(x) + \left(\frac{9}{4} A_{023} \right.\\
&\left. + \frac{9}{4} x A_{122} \right) V_2'(y) V_2''(y) + \left(-\frac{1}{2} (yC_2) - xyC_3 - \frac{3}{2} x^2 y C_4 + \frac{C_5}{2} + \frac{xC_6}{2} + \frac{x^2 C_7}{2} \right) V_1{}^{(3)}(x)\\
&+ \left(\frac{y^2 C_3}{2} + \frac{3}{2} x y^2 C_4 - \frac{yC_6}{2} - xyC_7 + \frac{C_8}{2} + \frac{xC_9}{2} \right) V_2{}^{(3)}(y) + \left(\frac{3}{4} A_{032} - \frac{3}{4} y A_{122} \right) V_1(x) V_1{}^{(3)}(x)\\
&+ \left(\frac{3}{4} A_{023} + \frac{3}{4} x A_{122} \right) V_2(y) V_2{}^{(3)}(y) + \left(-\frac{1}{8} \hbar^2 A_{032} + \frac{1}{8} \hbar^2 y A_{122} \right) V_1{}^{(5)}(x)\\
&+ \left(-\frac{1}{8} \hbar^2 A_{023} - \frac{1}{8} \hbar^2 x A_{122} \right) V_2{}^{(5)}(y) = 0. \qquad (55)
\end{aligned}$$

As in (30), we differentiate (55) twice with respect to x and collect the terms involving the same powers of y. The resulting equation gives us two nonlinear ODEs for $V_1(x)$ that can be integrated and we obtain two fourth order ODEs:

$$\begin{aligned}\hat{K}_1 + x\hat{K}_2 + x^2\hat{K}_3 =& 3C_7V_1(x) + \frac{3}{2}C_6V_1'(x) + \frac{1}{2}xC_6V_1''(x) + 3xC_7V_1'(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1'(x)^2\\ &+ \frac{1}{2}C_5V_1''(x) + \frac{1}{2}x^2C_7V_1''(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1(x)V_1''(x) - \frac{1}{8}\hbar^2A_{032}V_1{}^{(4)}(x),\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}K_1 + xK_2 + x^2K_3 =& -9C_4V_1(x) - 9xC_4V_1'(x) - 3C_3V_1'(x) - \frac{3}{4}A_{122}V_1'(x)^2 - \frac{1}{2}C_2V_1''(x)\\ &- xC_3V_1''(x) - \frac{3}{2}x^2C_4V_1''(x) - \frac{3}{4}A_{122}V_1(x)V_1''(x) + \frac{1}{8}\hbar^2A_{122}V_1{}^{(4)}(x),\end{aligned} \tag{57}$$

where K_i and $\hat{K}_i$ are arbitrary constants of integration.

Similarly, we obtain two nonlinear ODEs for $V_2(y)$:

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 + y\hat{D}_2 + y^2\hat{D}_3 =& 3C_3V_2(y) + 3yC_3V_2'(y) - \frac{3}{2}C_6V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2'(y)^2 + \frac{1}{2}y^2C_3V_2''(y)\\ &- \frac{1}{2}yC_6V_2''(y) + \frac{1}{2}C_8V_2''(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2(y)V_2''(y) - \frac{1}{8}\hbar^2A_{023}V_2{}^{(4)}(y),\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}D_1 + yD_2 + y^2D_3 =& 9C_4V_2(y) + 9yC_4V_2'(y) - 3C_7V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{122}V_2'(y)^2 + \frac{3}{2}y^2C_4V_2''(y)\\ &- yC_7V_2''(y) + \frac{1}{2}C_9V_2''(y) + \frac{3}{4}A_{122}V_2(y)V_2''(y) - \frac{1}{8}\hbar^2A_{122}V_2{}^{(4)}(y),\end{aligned} \tag{59}$$

where D_i and $\hat{D}_i$ are arbitrary integration constants.

Using (56)-(59) and the expressions of f_{j2} and f_{j4} already found, equation (42) reads

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-3}{2}C_9V_1(x) - C_8V_1'(x) - xC_9V_1'(x) + \beta_1'(x) + \frac{3}{4}h^2A_{122}V_1''(x)\right) + \left(\frac{3}{2}C_2V_2(y) - C_5V_2'(y)\right.\\ &\left.+ C_2yV_2'(y) + \beta_2'(y) - \frac{3}{4}h^2A_{122}V_2''(y)\right) + \frac{1}{2}x^2y^2\left(D_3 + K_3\right) + \frac{1}{2}x^2y\left(D_2 + 2\hat{K}_3\right)\\ &+ \frac{1}{2}xy^2\left(K_2 + 2\hat{D}_3\right) + xy\left(\hat{D}_2 + \hat{K}_2\right) + x\hat{D}_1 + y\hat{K}_1 + \frac{x^2D_1}{2} + \frac{y^2K_1}{2} = 0.\end{aligned} \tag{60}$$

By differentiating this equation three times with respect to x, we can integrate the resulting equation to obtain an expression for $\beta_1(x)$ in terms of the function $W_1(x)$. A similar calculation gives $\beta_2(y)$ in terms of $W_2(y)$:

$$\beta_1(x) = +\frac{1}{2}W_1(x)C_9 + C_{11} + xC_{12} + x^2C_{13} + x^3C_{14} + C_8W_1'(x) + xC_9W_1'(x) - \frac{3}{4}\hbar^2A_{122}W_1''(x), \tag{61a}$$

$$\beta_2(y) = -\frac{1}{2}W_2(y)C_2 + C_{15} + yC_{16} + y^2C_{17} + y^3C_{18} - yC_2W_2'(y) + C_5W_2'(y) + \frac{3}{4}\hbar^2A_{122}W_2''(y), \tag{61b}$$

where C_i are arbitrary constants of integration.

With $\beta_1(x)$ and $\beta_2(y)$ given by (61a) and (61b), equation (60) is now a second order polynomial in x and y, since the functions $V_1(x)$ and $V_2(y)$ have all been canceled out. Setting its coefficients to zero, we find

$$D_3 = -K_3, D_2 = -2\hat{K}_3, D_1 = -6C_{14}, K_2 = -2\hat{D}_3, \hat{D}_2 = -\hat{K}_2, \hat{D}_1 = -2C_{13}, K_1 = -6C_{18},$$
$$\hat{K}_1 = -2C_{17}, C_{16} = -C_{12}. \tag{62}$$

We have now solved (with (56)-(59) satisfied) the system (36)-(43). Substituting the expressions of f_{j2} and f_{j4} into the last equation (44), we obtain

$$\begin{aligned}
0 =&\frac{1}{8}\hbar^4 A_{050} {W_1}^{(6)}(x) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{050} W_1'(x) {W_1}^{(4)}(x) - \frac{5}{2}\hbar^2 A_{050} W_1''(x) {W_1}^{(3)}(x) \\
&+ \frac{15}{4} A_{050} W_1'(x)^2 W_1''(x) + \frac{1}{8}\hbar^4 A_{005} {W_2}^{(6)}(y) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{005} W_2'(y) {W_2}^{(4)}(y) \\
&- \frac{5}{2}\hbar^2 A_{005} W_2''(y) {W_2}^{(3)}(y) + \frac{15}{4} A_{005} W_2'(y)^2 W_2''(y) + W_1''(x) \left(-6\hbar^2 y C_4 + 2\hbar^2 C_7 - 2yC_{12}\right. \\
&\left.+ 2C_{15} + 2y^2 C_{17} + 2y^3 C_{18} - 2yC_2 W_2'(y) + 2C_5 W_2'(y) + yC_5 W_2''(y) - \frac{1}{2} y^2 C_2 W_2''(y)\right) \\
&+ W_2''(y) \left(6\hbar^2 x C_4 + 2\hbar^2 C_3 + 2xC_{12} + 2C_{11} + 2x^2 C_{13} + 2x^3 C_{14} + 2xC_9 W_1'(x) + 2C_8 W_1'(x)\right. \\
&\left.+ xC_8 W_1''(x) + \frac{1}{2} x^2 C_9 W_1''(x)\right) + W_2'(y) W_2''(y) \left(3x^3 C_4 + 3C_1 + 3xC_2 + 3x^2 C_3 + 3A_{023} W_1'(x)\right. \\
&\left.+ 3xA_{122} W_1'(x) + \frac{3}{2} x A_{023} W_1''(x) + \frac{3}{4} x^2 A_{122} W_1''(x)\right) + W_1'(x) W_1''(x) \left(-3y^3 C_4 + 3C_{10}\right. \\
&\left.- 3yC_9 + 3y^2 C_7 + 3A_{032} W_2'(y) - 3yA_{122} W_2'(y) + \frac{3}{2} y A_{032} W_2''(y) - \frac{3}{4} y^2 A_{122} W_2''(y)\right) \\
&+ W_1(x) \left(C_9 W_2''(y) + \frac{3}{2} A_{122} W_2'(y) W_2''(y) - \frac{1}{4}\hbar^2 A_{122} {W_2}^{(4)}(y)\right) + W_2(y) \left(-C_2 W_1''(x)\right. \\
&\left.- \frac{3}{2} A_{122} W_1'(x) W_1''(x) + \frac{1}{4}\hbar^2 A_{122} {W_1}^{(4)}(x)\right) + {W_1}^{(4)}(x) \left(\frac{1}{2}\hbar^2 y^3 C_4 - \frac{1}{2}\hbar^2 y^2 C_7 + \frac{1}{2}\hbar^2 y C_9\right. \\
&\left.- \frac{\hbar^2 C_{10}}{2} - \frac{1}{2} h^2 A_{032} W_2'(y) + \frac{1}{2}\hbar^2 y A_{122} W_2'(y) - \frac{1}{4}\hbar^2 y A_{032} W_2''(y) + \frac{1}{8}\hbar^2 y^2 A_{122} W_2''(y)\right) \\
&+ {W_2}^{(4)}(y) \left(-\frac{1}{2}\hbar^2 x^3 C_4 - \frac{1}{2}\hbar^2 x^2 C_3 - \frac{1}{2}\hbar^2 x C_2 - \frac{\hbar^2 C_1}{2} - \frac{1}{2}\hbar^2 A_{023} W_1'(x) - \frac{1}{2}\hbar^2 x A_{122} W_1'(x)\right. \\
&\left.- \frac{1}{4}\hbar^2 x A_{023} W_1''(x) - \frac{1}{8}\hbar^2 x^2 A_{122} W_1''(x)\right).
\end{aligned} \tag{63}$$

We can now write the integral in (35) in terms of the constants C_i, A_{ijk} and the functions $W_1(x)$ and $W_2(y)$. Its general but by no means final form is

$$
\begin{aligned}
X =&A_{122}\bigg(-\frac{1}{2}\left\{p_1^3p_2^2,y\right\}+\frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2,xW_2'(y)\right\}-\frac{1}{2}W_2(y)p_1^3-yW_2'(y)p_1^3\\
&-\frac{3}{8}\left\{p_1,W_2(y)W_1'(x)\right\}-\frac{3}{4}\left\{p_1,yW_1'(x)W_2'(y)\right\}+\frac{3}{4}\hbar^2W_2''(y)p_1+\frac{3}{16}\left\{p_1,x^2W_2'(y)W_2''(y)\right\}\\
&-\frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_1,x^2{W_2}^{(4)}(y)\right\}+\frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2^3,x\right\}-\frac{3}{4}\left\{p_1p_2^2,yW_1'(x)\right\}+\frac{1}{2}W_1(x)p_2^3+xW_1'(x)p_2^3\\
&+\frac{3}{8}\left\{p_2,W_1(x)W_2'(y)\right\}+\frac{3}{4}\left\{p_2,xW_1'(x)W_2'(y)\right\}-\frac{3}{4}\hbar^2W_1''(x)p_2-\frac{3}{16}\left\{p_2,y^2W_1'(x)W_1''(x)\right\}\\
&+\frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_2,y^2{W_1}^{(4)}(x)\right\}\bigg)\\
&+A_{032}\bigg(p_1^3p_2^2+\frac{3}{4}\left\{p_1p_2^2,W_1'(x)\right\}+W_2'(y)p_1^3+\frac{3}{4}\left\{p_1,W_1'(x)W_2'(y)\right\}\\
&+\frac{3}{8}\left\{p_2,yW_1'(x)W_1''(x)\right\}-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_2,y{W_1}^{(4)}(x)\right\}\bigg)\\
&+A_{023}\bigg(p_1^2p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2,W_2'(y)\right\}+W_1'(x)p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,W_1'(x)W_2'(y)\right\}\\
&+\frac{3}{8}\left\{p_1,xW_2'(y)W_2''(y)\right\}-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_1,x{W_2}^{(4)}(y)\right\}\bigg)\\
&+A_{050}\bigg(p_1^5+\frac{5}{4}\left\{p_1^3,W_1'(x)\right\}+\frac{15}{16}\left\{p_1,W_1'(x)^2\right\}+\frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_1,{W_1}^{(3)}(x)\right\}\bigg)\\
&+A_{005}\bigg(p_2^5+\frac{5}{4}\left\{p_2^3,W_2'(y)\right\}+\frac{15}{16}\left\{p_2,W_2'(y)^2\right\}+\frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_2,{W_2}^{(3)}(y)\right\}\bigg)\\
&+C_1\bigg(p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,W_2'(y)\right\}\bigg)+C_2\bigg(xp_2^3-\frac{1}{2}\left\{p_1p_2^2,y\right\}-\frac{1}{2}W_2(y)p_1-yW_2'(y)p_1\\
&+\frac{3}{4}\left\{p_2,xW_2'(y)\right\}-\frac{1}{8}\left\{p_2,y^2W_1''(x)\right\}\bigg)+C_3\bigg(\frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2,y^2\right\}-\left\{p_1p_2^2,xy\right\}+x^2p_2^3\\
&+\frac{3}{4}\left\{p_2,x^2W_2'(y)\right\}-\frac{1}{4}\left\{p_2,xy^2W_1''(x)\right\}+\frac{1}{4}\left\{p_1,xy^2W_2''(y)\right\}\bigg)+C_4\big(-y^3p_1^3\\
&+\frac{3}{2}\left\{p_1^2p_2,xy^2\right\}-\frac{3}{2}\left\{p_1p_2^2,x^2y\right\}+\frac{1}{2}x^3p_2^3-\frac{3}{4}\left\{p_1,y^3W_1'(x)\right\}+\frac{3}{4}\left\{p_2,x^3W_2'(y)\right\}\\
&-\frac{3}{8}\left\{p_2,x^2y^2W_1''(x)\right\}+\frac{3}{8}\left\{p_1,x^2y^2W_2''(y)\right\}\bigg)+C_5\bigg(p_1p_2^2+p_1W_2'(y)+\frac{1}{4}\left\{p_2,yW_1''(x)\right\}\bigg)\\
&+C_6\bigg(-\frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2,y\right\}+\frac{1}{2}\left\{p_1p_2^2,x\right\}+\frac{1}{4}\left\{p_2,xyW_1''(x)\right\}-\frac{1}{4}\left\{p_1,xyW_2''(y)\right\}\bigg)\\
&+C_7\bigg(\frac{1}{2}\left\{p_1p_2^2,x^2\right\}-\left\{p_1^2p_2,xy\right\}+y^2p_1^3+\frac{3}{4}\left\{p_1,y^2W_1'(x)\right\}+\frac{1}{4}\left\{p_2,x^2yW_1''(x)\right\}\\
&-\frac{1}{4}\left\{p_1,x^2yW_2''(y)\right\}\bigg)+C_8\bigg(p_1^2p_2+p_2W_1'(x)+\frac{1}{4}\left\{p_1,xW_2''(y)\right\}\bigg)+C_9\bigg(-yp_1^3+\frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2,x\right\}\\
&+\frac{1}{2}W_1(x)p_2+xW_1'(x)p_2-\frac{3}{4}\left\{p_1,yW_1'(x)\right\}+\frac{1}{8}\left\{p_1,x^2W_2''(y)\right\}\bigg)+C_{10}\bigg(p_1^3+\frac{3}{4}\left\{p_1,W_1'(x)\right\}\bigg)\\
&+C_{11}p_2+C_{12}\left(-yp_1+xp_2\right)+x^2C_{13}p_2+x^3C_{14}p_2+C_{15}p_1+y^2C_{17}p_1+y^3C_{18}p_1.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Further constraints on the coefficients A_{ijk} and C_i will be obtained below. We still have to solve eq. (56),...,(59) for $V_1(x)$ and $V_2(y)$ and assure compatibility with (63). This will be done in Section 5. The procedure will depend very much on the constants A_{ijk} and

C_a in the integral (64). Notice that each A_{ijk} that remains free (i.e is not contained in the potential) provides an integral of order 5. The constants $C_1, ...C_{10}$ provide third order integrals, $C_{11}, ...C_{18}$ first order ones. We shall see that none of the order 1 integrals survive. Some third order ones do, but are already known from earlier work[4,5,10].

V. Calculation of the doubly exotic potentials

A. $A_{122} \neq 0, A_{032} = 0, A_{023} = 0.$

If $A_{122} \neq 0$ in the integral (35), we can assume that $A_{023} = A_{032} = 0$ since we can get rid of these terms by two appropriate translations along x and y without affecting the separability of $V(x, y)$. In this case, the two ODEs (56) and (58) are no longer nonlinear and must be satisfied identically. Setting their coefficients to zero and using (62), we find

$$\begin{aligned} C_6 &= 0, \\ C_7 = C_5 = C_{17} = \hat{K}_1 &= \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = 0, \\ C_3 = C_8 = C_{13} = \hat{D}_1 &= \hat{D}_2 = \hat{D}_3 = 0, \\ D_2 = K_2 = C_{17} &= C_{13} = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

In view of (62) and (65), the remaining two nonlinear ODEs (57) ans (59) for $V_1(x)$ and $V_2(y)$ reduce to

$$\begin{aligned} 6C_{18} - x^2K_3 - 9C_4V_1(x) - 9xC_4V_1'(x) - \frac{3}{4}A_{122}V_1'(x)^2 - \frac{1}{2}C_2V_1''(x) - \frac{3}{2}x^2C_4V_1''(x) \\ -\frac{3}{4}A_{122}V_1(x)V_1''(x) + \frac{1}{8}\hbar^2A_{122}V_1{}^{(4)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} 6C_{14} + y^2K_3 + 9C_4V_2(y) + 9yC_4V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{122}V_2'(y)^2 + \frac{3}{2}y^2C_4V_2''(y) + \frac{1}{2}C_9V_2''(y) \\ +\frac{3}{4}A_{122}V_2(y)V_2''(y) - \frac{1}{8}\hbar^2A_{122}V_2{}^{(4)}(y) = 0. \end{aligned} \tag{67}$$

At this point, equations (66) and (67) do not have the Painlevé property, for they do not pass the Painlevé test[19]. Using the functions $W_1(x)$ and $W_2(y)$, we see that equations (66) and (67) admit two first integrals, namely

$$6xC_{18}-\frac{x^3K_3}{3}-3C_4W_1(x)-6xC_4W_1'(x)-\frac{1}{2}C_2W_1''(x)-\frac{3}{2}x^2C_4W_1''(x)$$
$$-\frac{3}{4}A_{122}W_1'(x)W_1''(x)+\frac{1}{8}\hbar^2A_{122}W_1{}^{(4)}(x)-C_{19}=0, \tag{68}$$
$$6yC_{14}+\frac{y^3K_3}{3}+3C_4W_2(y)+6yC_4W_2'(y)+\frac{3}{2}y^2C_4W_2''(y)+\frac{1}{2}C_9W_2''(y)$$
$$+\frac{3}{4}A_{122}W_2'(y)W_2''(y)-\frac{1}{8}\hbar^2A_{122}W_2{}^{(4)}(y)-C_{20}=0, \tag{69}$$

where C_{19} and C_{20} are two integration constants. Next, the following combination

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}-\Big(x^2V_1''(x)+6xV_1'(x)+6V_1(x)\Big)E2-\Big(y^2V_2''(y)+6yV_2'(y)+6V_2(y)\Big)E1$$
$$-\left(\frac{4C_9}{A_{122}}+\frac{12y^2C_4}{A_{122}}\right)E1-\left(\frac{12x^2C_4}{A_{122}}+\frac{4C_2,}{A_{122}}\right)E2=0, \tag{70}$$

where F, $E1$ and $E2$ correspond to (63), (66) and (67) respectively, gives a linear equation in $V_1(x)$ and $V_2(y)$, namely

$$-\frac{24C_2C_{14}}{A_{122}}-\frac{72x^2C_4C_{14}}{A_{122}}-\frac{72y^2C_4C_{18}}{A_{122}}-\frac{24C_9C_{18}}{A_{122}}-\frac{4y^2C_2K_3}{A_{122}}+\frac{4x^2C_9K_3}{A_{122}}+\Big(-36C_{14}$$
$$-6y^2K_3+\frac{108y^2C_4^2}{A_{122}}+\frac{36C_4C_9}{A_{122}}\Big)V_1(x)+\left(-36C_{18}+6x^2K_3-\frac{36C_2C_4}{A_{122}}-\frac{108x^2C_4^2}{A_{122}}\right)V_2(y)$$
$$+\left(-36xC_{14}-6xy^2K_3+\frac{108xy^2C_4^2}{A_{122}}+\frac{36xC_4C_9}{A_{122}}\right)V_1'(x)+\Big(-36yC_{18}+6x^2yK_3-\frac{36yC_2C_4}{A_{122}}$$
$$-\frac{108x^2yC_4^2}{A_{122}}\Big)V_2'(y)+\Big(-6\hbar^2C_4-2C_{12}-6x^2C_{14}+6y^2C_{18}-x^2y^2K_3+\frac{6y^2C_2C_4}{A_{122}}$$
$$+\frac{18x^2y^2C_4^2}{A_{122}}+\frac{2C_2C_9}{A_{122}}+\frac{6x^2C_4C_9}{A_{122}}\Big)V_1''(x)+\Big(6\hbar^2C_4+2C_{12}+6x^2C_{14}-6y^2C_{18}+x^2y^2K_3$$
$$-\frac{6y^2C_2C_4}{A_{122}}-\frac{18x^2y^2C_4^2}{A_{122}}-\frac{2C_2C_9}{A_{122}}-\frac{6x^2C_4C_9}{A_{122}}\Big)V_2''(y)=0. \tag{71}$$

We use the derivatives of this equation to obtain linear ODEs for $V_1(x)$ and $V_2(y)$. Setting their coefficients to zero, we obtain further contraints on the constants, namely

$$K_3=\frac{18C_4^2}{A_{122}},C_{18}=-\frac{C_2C_4}{A_{122}},C_{14}=\frac{C_4C_9}{A_{122}},C_{12}=\frac{C_2C_9-3\hbar^2C_4A_{122}}{A_{122}}. \tag{72}$$

With the relations (72) verified, we find that the two ODEs (66) and (67) *do* pass the Painlevé test. Indeed, we will see later that these two equations have the Painlevé property. Next, we take the following combination:

$$F-x^2W_1''(x)E4-y^2W_2''(y)E3-4xW_1'(x)E4-4yW_2'(y)E3=0, \tag{73}$$

where F, $E3$ and $E4$ correspond to (63), (68) and (69) respectively. After a straightforward calculation, we obtain (after simplification using again (68) and (69))

$$\frac{4xC_2C_{20}}{A_{122}}+\frac{4x^3C_4C_{20}}{A_{122}}+4xC_{20}W_1'(x)+2C_{20}W_1(x)+2C_{15}W_1''(x)+x^2C_{20}W_1''(x)$$
$$+3C_{10}W_1'(x)W_1''(x)+\frac{15}{4}A_{050}W_1(x)'^2W_1''(x)-\frac{5}{2}\hbar^2A_{050}W_1'(x)W_1{}^{(3)}(x)-\frac{1}{2}\hbar^2C_{10}W_1{}^{(4)}(x)$$
$$-\frac{5}{4}\hbar^2A_{050}W_1'(x)W_1{}^{(4)}(x)+\frac{1}{8}\hbar^4A_{050}W_1{}^{(6)}(x)+\frac{4y^3C_4C_{19}}{A_{122}}+\frac{4yC_9C_{19}}{A_{122}}+4yC_{19}W_2'(y)$$
$$+2C_{19}W_2(y)+2C_{11}W_2''(y)+y^2C_{19}W_2''(y)+3C_1W_2'(y)W_2''(y)+\frac{15}{4}A_{005}W_2'(y)^2W_2''(y)$$
$$-\frac{5}{2}\hbar^2A_{005}W_2''(y)W_2'''(y)-\frac{1}{2}\hbar^2C_1W_2{}^{(4)}(y)-\frac{5}{4}\hbar^2A_{005}W_2'(y)W_2{}^{(4)}(y)+\frac{1}{8}\hbar^4A_{005}W_2{}^{(6)}(y)=0. \tag{74}$$

Terms depending on x and those depending on y can be separated. We set the x dependent terms equal to a constant $-\kappa$ and the y dependent ones equal to $+\kappa$. Thus the function $W_1(x)$ must satisfy the equation

$$\frac{4C_4C_{20}x^3}{A_{122}}+\frac{4C_2C_{20}x}{A_{122}}+\frac{1}{8}\hbar^4A_{050}W_1{}^{(6)}(x)-\frac{5}{4}\hbar^2A_{050}W_1{}^{(4)}(x)W_1'(x)$$
$$-\frac{5}{2}\hbar^2A_{050}W_1{}^{(3)}(x)W_1''(x)+\frac{15}{4}A_{050}W_1'(x)^2W_1''(x)-\frac{1}{2}C_{10}\hbar^2W_1{}^{(4)}(x)+C_{20}x^2W_1''(x)$$
$$+3C_{10}W_1'(x)W_1''(x)+4C_{20}xW_1'(x)+2C_{15}W_1''(x)+2C_{20}W_1(x)=-\kappa, \tag{75}$$

where κ is a constant. It must also satisfy (68) with (72) taken into account:

$$-\frac{6C_4^2x^3}{A_{122}}-\frac{6C_2C_4x}{A_{122}}+\frac{1}{8}\hbar^2A_{122}W_1{}^{(4)}(x)-\frac{3}{4}A_{122}W_1'(x)W_1''(x)-\frac{3}{2}C_4x^2W_1''(x)-6C_4xW_1'(x)$$
$$-\frac{1}{2}C_2W_1''(x)-3C_4W_1(x)-C_{19}=0. \tag{76}$$

A similar system must hold for $V_2(y)$, namely

$$\frac{4C_4C_{19}y^3}{A_{122}}+\frac{4C_9C_{19}y}{A_{122}}+\frac{1}{8}\hbar^4A_{005}W_2{}^{(6)}(y)-\frac{5}{4}\hbar^2A_{005}W_2{}^{(4)}(y)W_2'(y)$$
$$-\frac{5}{2}\hbar^2A_{005}W_2{}^{(3)}(y)W_2''(y)+\frac{15}{4}A_{005}W_2'(y)^2W_2''(y)-\frac{1}{2}C_1\hbar^2W_2{}^{(4)}(y)+C_{19}y^2W_2''(y)$$
$$+3C_1W_2'(y)W_2''(y)+4C_{19}yW_2'(y)+2C_{11}W_2''(y)+2C_{19}W_2(y)=\kappa, \tag{77}$$

$$\frac{6C_4^2y^3}{A_{122}}+\frac{6C_4C_9y}{A_{122}}-\frac{1}{8}\hbar^2A_{122}W_2{}^{(4)}(y)+\frac{3}{4}A_{122}W_2'(y)W_2''(y)+\frac{3}{2}C_4y^2W_2''(y)+6C_4yW_2'(y)$$
$$+\frac{1}{2}C_9W_2''(y)+3C_4W_2(y)-C_{20}=0. \tag{78}$$

We will solve these ODEs by distinguishing two sub-cases. We restrict ourselves to the ODEs satisfied by $V_1(x)$, for each solution satisfying (75) and (76) can be converted to a solution of the equations (77) and (78) by the following correspondence between the constants C_i and $A_{i,j,k}$:

$$\begin{gathered}\Big(V_1(x), A_{122}, A_{050}, C_{10}, C_2, C_4, C_{15}, C_{19}, C_{20}, \kappa\Big)\\ \downarrow \\ \Big(V_2(y), -A_{122}, A_{005}, C_1, -C_9, -C_4, C_{11}, C_{20}, C_{19}, -\kappa\Big)\end{gathered} \tag{79}$$

1. *Case A-1:* $A_{050} = 0$

In this case, the two ODEs that we need to solve are

$$-\frac{6C_4^2x^3}{A_{122}} - \frac{6C_2C_4x}{A_{122}} + \frac{1}{8}\hbar^2A_{122}{W_1}^{(4)}(x) - \frac{3}{4}A_{122}W_1'(x)W_1''(x) - \frac{3}{2}C_4x^2W_1''(x) - 6C_4xW_1'(x) \\ -\frac{1}{2}C_2W_1''(x) - 3C_4W_1(x) - C_{19} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{4C_4C_{20}x^3}{A_{122}} + \frac{4C_2C_{20}x}{A_{122}} - \frac{1}{2}C_{10}\hbar^2{W_1}^{(4)}(x) + C_{20}x^2W_1''(x) + 3C_{10}W_1'(x)W_1''(x) + 4C_{20}xW_1'(x) \\ +2C_{15}W_1''(x) + 2C_{20}W_1(x) + \kappa = 0. \tag{81}$$

Taking a linear combination of (80) and (81), we obtain a linear ODE for $W_1(x)$, namely

$$\begin{aligned}&\kappa - \frac{24xC_2C_4C_{10}}{A_{122}^2} - \frac{24x^3C_4^2C_{10}}{A_{122}^2} - \frac{4C_{10}C_{19}}{A_{122}} + \frac{4xC_2C_{20}}{A_{122}} + \frac{4x^3C_4C_{20}}{A_{122}}\\ &+\left(2C_{20} - \frac{12C_4C_{10}}{A_{122}}\right)W_1(x) + \left(4xC_{20} - \frac{24xC_4C_{10}}{A_{122}}\right)W_1'(x)\\ &+\left(2C_{15} + x^2C_{20} - \frac{2C_2C_{10}}{A_{122}} - \frac{6x^2C_4C_{10}}{A_{122}}\right)W_1''(x) = 0.\end{aligned} \tag{82}$$

As usual the linear ODE (82) must be satisfied identically and we must impose the following constraints

$$C_{20} = \frac{6C_4C_{10}}{A_{122}}, \quad C_{15} = \frac{C_2C_{10}}{A_{122}}, \quad \kappa = \frac{4C_{10}C_{19}}{A_{122}}. \tag{83}$$

The two nonlinear equations are now compatible, so we only need to solve (80). We again distinguish 2 subcases.

a. $C_4 = 0$

If $C_4 = 0$, eq.(80) can be integrated once:

$$\frac{1}{8}\hbar^2 A_{122} W_1{}^{(3)}(x) - \frac{3}{8} A_{122} W_1'(x)^2 - \frac{1}{2} C_2 W_1'(x) - C_{19} x + K = 0, \tag{84}$$

where K is an integration constant. Setting $W_1'(x) = V_1(x) = 2h^2 U_1(x) - \frac{2C_2}{3A_{122}}$, this equation is transformed to

$$U_1''(x) = 6U_1(x)^2 + \frac{4C_{19}}{\hbar^4 A_{122}} x - \left(\frac{2C_2^2}{3h^4 A_{122}^2} + \frac{4K}{\hbar^4 A_{122}} \right). \tag{85}$$

The solution of (85) is given by

$$U_1(x) = P_1(x, B_1, B_2), \tag{86}$$

where $B_1 = \frac{4C_{19}}{\hbar^4 A_{122}}$, $B_2 = -\left(\frac{2C_2^2}{3\hbar^4 A_{122}^2} + \frac{4K}{\hbar^4 A_{122}} \right)$ and $P_1(x, B_1, B_2)$ satisfies the Painlevé-I equation

$$P_1''(x, B_1, B_2) = 6P_1(x, B_1, B_2)^2 + B_1 x + B_2. \tag{87}$$

The potential reads

$$V_1(x) = 2\hbar^2 P_1(x, B_1, B_2) - \frac{2C_2}{3A_{122}}. \tag{88}$$

Note that if $B_1 = 0$, the solution of (87) corresponds to the elliptic function of Weierstrass $\wp(x - x_0, g_1, g_2)$, with $g_1 = -2B_1$ and x_0, g_2 are two arbitrary constants of integration. Otherwise, it is given by the first Painlevé transcendent function (B_1 can be scaled to $B_1 = 1$ and we can set $B_2 = 0$ by a translation).

b. $C_4 \neq 0$

When $C_4 \neq 0$, we differentiate (80) once and set

$$V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x) - \frac{2C_4 x^2}{A_{122}} - \frac{2C_2}{3A_{122}}. \tag{89}$$

Then $U_1(x)$ must satisfy the following fourth order nonlinear equation of the polynomial type

$$U_1{}^{(4)}(x) = 12U_1'(x)^2 + 12U_1(x)U_1''(x) + \alpha U_1'(x) + 2\alpha U_1(x) - \frac{\alpha^2 x^2}{6}, \tag{90}$$

where $\alpha = \frac{24C_4}{\hbar^2 A_{122}} \neq 0$. This ODE is well known, it has the Painlevé property and was derived from the point of view of Painlevé classification by Cosgrove in Ref. 16 (Eqs. (2.87) with $\beta = 0$). It can also be obtained by a nonclassical reduction of the Boussinesq equation[20] and the Kadomtsev-Petviashvili equation[21].

We multiply (90) by the factor x and integrate once to give a member of Chazy Class XIII[15]. It can be integrated again to give the second order second degree equation (19.7) in Ref. 17. Its solution[15] may be written in terms of the fourth Painlevé transcendent function, namely

$$U_1(x) = \frac{1}{2}\alpha_1 P_4'(x,\alpha) - \frac{1}{2}\alpha P_4(x,\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha x P_4(x,\alpha) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + K_1 - \alpha_1\right), \tag{91}$$

where $\alpha_1 = \pm\sqrt{-\alpha}$ and $P_4(x,\alpha) = P_4(x,\alpha,K_1,K_2)$ satisfies the Painlevé-IV equation

$$P_4(x,\alpha)'' = \frac{(P_4(x,\alpha)')^{\,2}}{2P_4(x,\alpha)} - \frac{3}{2}\alpha P_4(x,\alpha)^3 - 2\alpha x P_4(x,\alpha)^2 - (\frac{1}{2}\alpha x^2 + K_1)P_4(x,\alpha) + \frac{K_2}{P_4(x,\alpha)}, \tag{92}$$

with K_1 and K_2 two integration constants. The potential $V_1(x)$ reads

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{12}\left(-3x^2\alpha - 4K_1 + 4\alpha_1 - 12x\alpha P_4(x) - 12\alpha P_4(x)^2 + 12\alpha_1 P_4'(x)\right) - \frac{2C_2}{3A_{122}}. \tag{93}$$

2. ***Case A-2:*** $A_{050} \neq 0$

In this case we have to set $C_4 = 0$ in order to solve the system (75)-(76). Indeed, if $C_4 \neq 0$, $V_1(x)$ is given by (93). Therefore, by a straightforward but long calculation using Mathematica, we can use the second order Painlevé equation (92) to convert the derivative of (75) into a first-order ODE for the fourth Painlevé transcendent function of the form

$$x^2 C_4 P_4(x,\alpha)^2 P_4'(x,\alpha) = F(P_4(x,\alpha), P_4'(x,\alpha)), \tag{94}$$

where F is rational in $P_4(x,\alpha)$ and $P_4'(x,\alpha)$. But this is impossible since $P_4(x,\alpha)$ does not satisfy any first order ODE (in other words (75) and (76) are incompatible for $C_4 \neq 0$).

We set $C_4 = 0$ and use (84) and its derivatives to remove all the nonlinear terms from (75). The linear ODE obtained reads

$$\begin{aligned}&\frac{4C_2C_{20}}{A_{122}} + 6C_{20}V_1(x) + \left(6xC_{20} - \frac{3}{4}B_1\hbar^2 A_{050}\right)V_1'(x)\\ &+ \left(2C_{15} + x^2C_{20} - \frac{1}{4}B_2\hbar^2 A_{050} - \frac{1}{4}B_1\hbar^2 x A_{050} + \frac{2C_2^2 A_{050}}{A_{122}^2} - \frac{2C_2C_{10}}{A_{122}}\right)V_1''(x) = 0.\end{aligned} \tag{95}$$

Therefore, we must impose the following relations

$$\kappa = C_{20} = C_{19} = 0, \quad C_{15} = -\frac{C_2^2 A_{050}}{A_{122}^2} + \frac{C_2 C_{10}}{A_{122}} - \frac{K A_{050}}{A_{122}}, \tag{96}$$

and the solution in this case is again given by (88) with $B_1 = 0$.

B. $A_{122} = 0$.

We shall now repeat a similar analysis as in the previous case. When $A_{122} = 0$, equations (57) and (59) become linear in $V_1(x)$ and $V_2(y)$, so we must set

$$\begin{aligned} C_4 &= 0, \\ K_1 = K_2 = K_3 = \hat{D}_3 &= C_3 = C_2 = 0, \\ D_1 = D_2 = D_3 = \hat{K}_3 &= C_7 = C_9 = 0. \end{aligned} \tag{97}$$

The remaining two nonlinear ODEs (56) and (58) read (after using (62))

$$\begin{aligned} 2C_{17} - x\hat{K}_2 + \frac{3}{2}C_6V_1'(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1'(x)^2 + \frac{1}{2}C_5V_1''(x) + \frac{1}{2}xC_6V_1''(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1(x)V_1''(x) \\ -\frac{1}{8}\hbar^2A_{032}{V_1}^{(4)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} 2C_{13} + y\hat{K}_2 - \frac{3}{2}C_6V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2'(y)^2 - \frac{1}{2}yC_6V_2''(y) + \frac{1}{2}C_8V_2''(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2(y)V_2''(y) \\ -\frac{1}{8}\hbar^2A_{023}{V_2}^{(4)}(y) = 0. \end{aligned} \tag{99}$$

Unlike the case where A_{122} did not vanish, these two equations can be integrated without any use of the auxiliary functions $W_1(x)$ and $W_2(y)$:

$$\begin{aligned} 2xC_{17} - \frac{1}{2}x^2\hat{K}_2 + C_6V_1(x) + \frac{1}{2}C_5V_1'(x) + \frac{1}{2}xC_6V_1'(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1(x)V_1'(x) \\ -\frac{1}{8}\hbar^2A_{032}{V_1}^{(3)}(x) - C_{21} = 0, \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} 2yC_{13} + \frac{1}{2}y^2\hat{K}_2 - C_6V_2(y) - \frac{1}{2}yC_6V_2'(y) + \frac{1}{2}C_8V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2(y)V_2'(y) \\ -\frac{1}{8}\hbar^2A_{023}{V_2}^{(3)}(y) - C_{22} = 0, \end{aligned} \tag{101}$$

where C_{21} and C_{22} are integration constants. Next, we use the combination

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - 2xV_1''(x)\hat{E}2 - 6V_1'(x)\hat{E}2 - 2yV_2''(y)\hat{E}1 - 6V_2'(y)\hat{E}1 = 0, \tag{102}$$

where F,$\hat{E}1$ and $\hat{E}2$ correspond to (63), (98) and (99) respectively to obtain the following linear equation

$$\begin{aligned} &(-12C_{13}V_1'(x) - 4xC_{13}V_1''(x) - 2C_{12}V_1''(x)) - 12C_{17}V_2'(y) - 4yC_{17}V_2''(y) + 2C_{12}V_2''(y) \\ &+ x\left(6\hat{K}_2V_2'(y) + 4C_{13}V_2''(y) + 2y\hat{K}_2V_2''(y)\right) - y\left(6\hat{K}_2V_1'(x) - 4C_{17}V_1''(x) + 2x\hat{K}_2V_1''(x)\right) = 0. \end{aligned} \tag{103}$$

We use the derivatives of (103) to obtain linear ODEs for $V_1(x)$ and $V_2(y)$. Setting their coefficients to zero, we obtain

$$\hat{K}_2 = C_{17} = C_{12} = C_{13} = 0. \tag{104}$$

We use again the combination

$$F - 2xV_1'(x)\hat{E}3 - 4V_1(x)\hat{E}3 - 2yV_2'(y)\hat{E}4 - 4V_2(y)\hat{E}4 = 0, \tag{105}$$

where F,$\hat{E}1$ and $\hat{E}2$ correspond to (63), (100) and (101) to obtain the following separable equation (in this case we can express F in terms of $V_1(x)$ and $V_2(y)$)

$$\begin{aligned}
&4C_{22}V_1(x) + 2C_{15}V_1'(x) + 2xC_{22}V_1'(x) + 3C_{10}V_1(x)V_1'(x) + \frac{15}{4}A_{050}V_1(x)^2V_1'(x)\\
&- \frac{5}{2}\hbar^2 A_{050}V_1'(x)V_1''(x) - \frac{1}{2}\hbar^2 C_{10}V_1{}^{(3)}(x) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{050}V_1(x)V_1{}^{(3)}(x) + \frac{1}{8}\hbar^4 A_{050}V_1{}^{(5)}(x)\\
&+ 4C_{21}V_2(y) + 2C_{11}V_2'(y) + 2yC_{21}V_2'(y) + 3C_1V_2(y)V_2'(y) + \frac{15}{4}A_{005}V_2(y)^2V_2'(y)\\
&- \frac{5}{2}\hbar^2 A_{005}V_2'(y)V_2''(y) - \frac{1}{2}\hbar^2 C_1V_2{}^{(3)}(y) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{005}V_2(y)V_2{}^{(3)}(y) + \frac{1}{8}\hbar^4 A_{005}V_2{}^{(5)}(y) = 0.
\end{aligned} \tag{106}$$

Thus, $V_1(x)$ must satisfy the system

$$\begin{aligned}
&4C_{22}V_1(x) + 2C_{15}V_1'(x) + 2xC_{22}V_1'(x) + 3C_{10}V_1(x)V_1'(x) + \frac{15}{4}A_{050}V_1(x)^2V_1'(x)\\
&- \frac{5}{2}\hbar^2 A_{050}V_1'(x)V_1''(x) - \frac{1}{2}\hbar^2 C_{10}V_1{}^{(3)}(x) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{050}V_1(x)V_1{}^{(3)}(x) + \frac{1}{8}\hbar^4 A_{050}V_1{}^{(5)}(x) = \kappa,
\end{aligned} \tag{107}$$

$$- C_{21} + C_6V_1(x) + \frac{1}{2}C_5V_1'(x) + \frac{1}{2}xC_6V_1'(x) + \frac{3}{4}A_{032}V_1(x)V_1'(x) - \frac{1}{8}\hbar^2 A_{032}V_1{}^{(3)}(x) = 0. \tag{108}$$

Eq. (107) is obtained by taking the derivative $\frac{\partial}{\partial x}$ of (106), (108) is a consequence of (100). Similarly, $V_2(y)$ must satisfy

$$\begin{aligned}
&4C_{21}V_2(y) + 2C_{11}V_2'(y) + 2yC_{21}V_2'(y) + 3C_1V_2(y)V_2'(y) + \frac{15}{4}A_{005}V_2(y)^2V_2'(y)\\
&- \frac{5}{2}\hbar^2 A_{005}V_2'(y)V_2''(y) - \frac{1}{2}\hbar^2 C_1V_2{}^{(3)}(y) - \frac{5}{4}\hbar^2 A_{005}V_2(y)V_2{}^{(3)}(y) + \frac{1}{8}\hbar^4 A_{005}V_2{}^{(5)}(y) = -\kappa,
\end{aligned} \tag{109}$$

$$- C_{22} - C_6V_2(y) + \frac{1}{2}C_8V_2'(y) - \frac{1}{2}yC_6V_2'(y) + \frac{3}{4}A_{023}V_2(y)V_2'(y) - \frac{1}{8}\hbar^2 A_{023}V_2{}^{(3)}(y) = 0. \tag{110}$$

We shall again restrict ourselves to the solutions of (107) and (108). To obtain the corresponding solutions of $V_2(y)$, we set

$$\begin{gathered}\left(V_1(x), A_{050}, C_5, C_6, C_{10}, C_{15}, C_{21}, C_{22}, \kappa\right)\\ \downarrow \\ \left(V_2(y), A_{005}, C_8, -C_6, C_1, C_{11}, C_{22}, C_{21}, -\kappa\right)\end{gathered} \tag{111}$$

1. *Case B-1:* $A_{050} = 0$, $A_{032} \neq 0$

Since $A_{032} \neq 0$, we use equation (108) to eliminate the nonlinear terms from (107). The constraints on the resulting linear equation guarantee the compatibility of the system and we only need to solve (108). Indeed, we obtain

$$C_{22} = \frac{C_6 C_{10}}{A_{032}}, C_{15} = \frac{C_5 C_{10}}{A_{032}}, \kappa = \frac{4C_{10}C_{21}}{A_{032}}. \tag{112}$$

If we set

$$V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x) - \frac{2C_6 x}{3A_{032}} - \frac{2C_5}{3A_{032}}, \tag{113}$$

the function $U_1(x)$ must satisfy

$$U_1{}^{(3)}(x) = 12U_1(x)U_1'(x) - \frac{\beta^2 x}{6} + \beta U_1(x) + \mu, \tag{114}$$

where $\beta = \frac{4C_6}{\hbar^2 A_{032}}$ and $\mu = -\frac{8C_5C_6}{3\hbar^4 A_{032}^2} - \frac{4C_{21}}{\hbar^4 A_{032}}$.
Equation (114) appears in Ref. 15 (eq.Chazy-XIII.b) as a member of the Chazy equations in the third-order polynomial class. It has the Painlevé property and can be obtained by each of the three group-invariant reductions of the KdV equation. When $\beta \neq 0$, its solution is given by

$$U_1(x) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_1 P_2'(x,\beta) + P_2(x,\beta)^2\right) + \frac{1}{12}\left(\beta x + \gamma\right), \tag{115}$$

where $\epsilon_1 = \pm 1$ and $P_2(x,\beta) = P_2(x,\beta,\gamma,\delta)$ satisfies the Painlevé-II equation

$$P_2''(x,\beta) = 2P_2(x,\beta)^3 + (\beta x + \gamma)\,P_2(x,\beta) + \delta, \tag{116}$$

where δ is a constant of integration and $\gamma := -6\mu/\beta$.
In this case, $V_1(x)$ reads

$$V_1(x) = -\frac{2C_5}{3A_{032}} + \hbar^2\left(P_2(x,\beta)^2 + \epsilon_1 P_2'(x,\beta) - \frac{\mu}{\beta}\right). \tag{117}$$

If $\beta = 0$, $U_1(x)$ is given by

$$U_1(x) = P_1(x, \mu, K), \tag{118}$$

K being an integration constant.

2. *Case B-2:* $A_{050} \neq 0$, $A_{032} = 0$

In this case, the linearity of equation (108) implies $C_5 = C_6 = C_{21} = 0$. Consequently, $V_1(x)$ must only satisfy (107) which, by setting $V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x) - \frac{2C_{10}}{5A_{050}}$, we transform to

$$U_1{}^{(5)}(x) = 20U_1(x)U_1{}^{(3)}(x) + 40U_1'(x)U_1''(x) - 120U_1(x)^2U_1'(x) + (\lambda x + \alpha)U_1'(x) + 2\lambda U_1(x) + \omega, \tag{119}$$

where

$$\lambda = -\frac{16C_{22}}{\hbar^4 A_{050}}, \quad \alpha = \frac{24C_{10}^2}{5\hbar^4 A_{050}^2} - \frac{16C_{15}}{\hbar^4 A_{050}}, \quad \omega = \frac{32C_{10}C_{22}}{5\hbar^6 A_{050}^2} + \frac{4\kappa}{\hbar^6 A_{050}}. \tag{120}$$

This equation passes the Painlevé test and appears in the list of fifth-order Painlevé type equations of polynomial class in Ref. 16 as the equation Fif-III. We do not know the general solution of this ODE, but we shall see that it admits a special solution in terms of the first Painlevé transcendent.

If $\lambda = 0$, equation (119) admits the first integral,

$$U_1{}^{(4)}(x) = 20U_1(x)U_1''(x) + 10U_1'(x)^2 - 40U_1(x)^3 + x\omega + \alpha U_1(x) + \gamma. \tag{121}$$

This equation has the Painlevé property and appears also in the list of fourth-order Painlevé type equations of polynomial class in Ref. 16. If $\omega \neq 0$, we do not know any exact solutions of this equation either. It is possible that, in this case, it defines a new transcendent, that is it has no elementary solution expressible in terms of known transcendents (including the six Painlevé transcendents). The case $\omega = 0$ can be solved in terms of hyperelliptic functions. We refer the reader to Ref. 16 for the details. If we set $\alpha = \gamma = 0$ in (121), we find the special case obtained in Ref. 22.

When $\lambda \neq 0$, equation (119) admits the first integral

$$2HH'' - (H')^2 - (8U_1(x) + 4\omega/\lambda)H^2 + \tilde{K} = 0, \tag{122}$$

where H is the auxiliary variable

$$H := U_1''(x) - 6U_1(x)^2 + 4(\omega/\lambda)U_1(x) + \frac{1}{4}(\lambda x + \alpha) - 4(\omega/\lambda)^2. \tag{123}$$

When $\tilde{K} = 0$, a particular solution can be obtained by setting $H = 0$. Therefore, this solution may be written in terms of the first Painlevé transcendent, namely

$$U_1(x) = P_1(x, B_1, B_2) - \frac{1}{3}(\omega/\lambda), \tag{124}$$

where $B_1 = -\frac{\lambda}{4}$ and $B_2 = -\frac{\alpha}{4} + \frac{10}{3}(\omega/\lambda)$. The potential $V_1(x)$ reads

$$V_1(x) = 2\hbar^2 P_1(x, B_1, B_2) - \frac{2\hbar^2}{3}(\omega/\lambda) - \frac{2C_{10}}{5A_{050}}. \tag{125}$$

3. ***Case B-3:*** $A_{050} \neq 0$***,*** $A_{032} \neq 0$

In this case, if we assume that $C_6 \neq 0$, we can substitute $V_1(x)$ given in (117) into (107) and then reduce the order of the resulting equation using (116) and its derivatives. We obtain a first order ODE for $P_2(x)$ of the form

$$x^2 C_6 P_2(x,\beta) P_2'(x,\beta) = F(P_2'(x,\beta), P_2(x,\beta)), \tag{126}$$

where $P_2(x)$ is the second Painlevé transcendent and F is polynomial in $P_2(x)$ and $P_2'(x)$. Since this is impossible, we must set $C_6 = 0$. Consequently, we integrate (108) to

$$C_{23} - xC_{21} + \frac{1}{2}C_5 V_1(x) + \frac{3}{8}A_{032}V_1(x)^2 - \frac{1}{8}\hbar^2 A_{032}V_1''(x) = 0. \tag{127}$$

We use this equation to reduce the order of (107) and obtain the linear ODE,

$$\begin{aligned}
&-\kappa + \frac{4C_{10}C_{21}}{A_{032}} - \frac{4C_5C_{21}A_{050}}{A_{032}^2} + \left(4C_{22} + \frac{4C_{21}A_{050}}{A_{032}}\right)V_1(x) \\
&+ \left(2C_{15} + 2xC_{22} - \frac{2C_5C_{10}}{A_{032}} + \frac{2C_5^2A_{050}}{A_{032}^2} + \frac{2xC_{21}A_{050}}{A_{032}} - \frac{2C_{23}A_{050}}{A_{032}}\right)V_1'(x) = 0.
\end{aligned} \tag{128}$$

As usual, we must set

$$C_{22} = -\frac{C_{21}A_{050}}{A_{032}}, \quad C_{15} = \frac{C_5C_{10}}{A_{032}} - \frac{C_5^2A_{050}}{A_{032}^2} + \frac{C_{23}A_{050}}{A_{032}}, \quad \kappa = \frac{4C_{10}C_{21}}{A_{032}} - \frac{4C_5C_{21}A_{050}}{A_{032}^2}. \tag{129}$$

$V_1(x)$ is then given by

$$V_1(x) = 2\hbar^2 P_1(x, B_1, B_2) - \frac{2C_5}{3A_{032}}, \tag{130}$$

where $B_1 = -\frac{4C_{21}}{\hbar^4 A_{032}}$ and $B_2 = -\frac{1}{\hbar^4 A_{032}}(\frac{2C_5^2}{3A_{032}} - 4C_{23})$.

4. *Case B-4:* $A_{050}=0$, $A_{032}=0$

From equation (108), we must set

$$C_5 = C_6 = 0, \tag{131}$$

and the only ODE that we need to solve reads

$$4C_{22}V_1(x) + 2C_{15}V_1'(x) + 2xC_{22}V_1'(x) + 3C_{10}V_1(x)V_1'(x) - \frac{1}{2}\hbar^2 C_{10}{V_1}^{(3)}(x) = \kappa. \tag{132}$$

If C_{10}=0, (132) is linear and we must have $C_{15}=C_{22}=\kappa=0$.
For $C_{10}\neq 0$, we set

$$V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x) - \frac{2C_{22}x + 2C_{15}}{3C_{10}}, \tag{133}$$

and $U_1(x)$ must satisfy

$${U_1}^{(3)}(x) = 12U_1(x)U_1'(x) - \frac{\beta^2 x}{6} + \beta U_1(x) + \mu, \tag{134}$$

where

$$\beta = \frac{4C_{22}}{\hbar^2 C_{10}}, \quad \mu = -\frac{\kappa}{\hbar^4 C_{10}} - \frac{8C_{15}C_{22}}{3\hbar^4 C_{10}^2}. \tag{135}$$

This case is similar to the case B-1 and the solution is given by (115).

VI. Summary of the results

In Section 5 the results are ordered by the form of the integral of motion (64) and we specified all the constants in the integral and in the potentials $V_1(x)$ and $V_2(y)$. We found all exotic potentials $V_1(x)$ and by symmetry (see e.g. (79)) also $V_2(y)$. Certain potentials $V = V_1(x) + V_2(y)$ appeared more than once with different integrals of motion. In this section we will order the results according to the form of the potentials and for each of the 9 classes of potentials list all integrals. In each class we have the integrals $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ of (29) and at least one integral of order 5 and hence of the form X of eq. (64). The question of their algebraic independence was not yet discussed. In classical mechanics at most 3 such integrals in E_2 can be functionally independent (in E_n the number is $2n-1$). In quantum mechanics no such theorems are available. We can however make use of the results of Burchnall-Chaundy theory concerning commutative ordinary differential operators[23,24]. A relevant result is:

Theorem 1 (Burchnall-Chaundy) *Consider two operators*

$$X_1 = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x)\partial_x^i, \quad X_2 = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x)\partial_x^i. \tag{136}$$

Then $[X_1, X_2] = 0$ implies that there exists a nonzero polynomial P such that $P(X_1, X_2) = 0$. In other words, X_1 and X_2 are not polynomially independent.

In our case the role of X_1 in (136) is played by $\mathcal{H}_1 = -\partial_x^2 + V_1(x)$ (or $\mathcal{H}_2$) and X_2 by one of the operators commuting with $\mathcal{H}$ found in section 5.

Let us run through all potentials found above: they are candidates for being superintegrable.

Q_1 :

$$\boxed{V_1(x) = 2\hbar^2\wp(x, g_1, g_2), \quad V_2(y) = 2\hbar^2\wp(y, \hat{g}_1, \hat{g}_2).} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
X_{122} = &-\frac{1}{2}\left\{p_1^3p_2^2, y\right\} + \frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2, xW_2'(y)\right\} - \frac{1}{2}W_2(y)p_1^3 - yW_2'(y)p_1^3 - \frac{3}{8}\left\{p_1, W_2(y)W_1'(x)\right\} \\
&- \frac{3}{4}\left\{p_1, yW_1'(x)W_2'(y)\right\} + \frac{3}{4}\hbar^2 p_1 W_2''(y) + \frac{3}{16}\left\{p_1, x^2W_2'(y)W_2''(y)\right\} \\
&- \frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_1, x^2{W_2}^{(4)}(y)\right\} + \frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2^3, x\right\} - \frac{3}{4}\left\{p_1p_2^2, yW_1'(x)\right\} + \frac{1}{2}W_1(x)p_2^3 + xW_1'(x)p_2^3 \\
&+ \frac{3}{8}\left\{p_2, W_1(x)W_2'(y)\right\} + \frac{3}{4}\left\{p_2, xW_1'(x)W_2'(y)\right\} - \frac{3}{4}\hbar^2 W_1''(x)p_2 \\
&- \frac{3}{16}\left\{p_2, y^2W_1'(x)W_1''(x)\right\} + \frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_2, y^2{W_1}^{(4)}(x)\right\}, \\
X_{032} = &\left(p_2^2 + W_2'(y)\right)\left(p_1^3 + \frac{3}{4}\left\{p_1, W_1'(x)\right\}\right) = \mathcal{H}_2 X_A, \\
X_{023} = &\left(p_1^2 + W_1'(x)\right)\left(p_2^3 + \frac{3}{4}\left\{p_2, W_2'(y)\right\}\right) = \mathcal{H}_1 X_B, \\
X_{050} = &p_1^5 + \frac{5}{4}\left\{p_1^3, W_1'(x)\right\} + \frac{15}{16}\left\{p_1, W_1'(x)^2\right\} + \frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_1, {W_1}^{(3)}(x)\right\} - \frac{g_1\hbar^2}{16}, \\
X_{005} = &p_2^5 + \frac{5}{4}\left\{p_2^3, W_2'(y)\right\} + \frac{15}{16}\left\{p_2, W_2'(y)^2\right\} + \frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_2, {W_2}^{(3)}(y)\right\} - \frac{1}{16}\hat{g}_1\hbar^2, \\
X_A = &p_1^3 + \frac{3}{4}\left\{p_1, W_1'(x)\right\}, \\
X_B = &p_2^3 + \frac{3}{4}\left\{p_2, W_2'(y)\right\}.
\end{aligned} \tag{138}$$

We have 7 linearly independent operators commuting with $\mathcal{H}$, given in (138). By Theorem 1 we see that X_A and X_{050} are polynomially related with $\mathcal{H}_1$, X_B and X_{005} with $\mathcal{H}_2$. The integrals X_{032} and X_{023} are simply products of lower order integrals.

The 3 polynomially independent integrals are $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ and X_{122} so the system Q_1 involving two Weierstrass elliptic functions is superintegrable.

Remark 3 *the notations used here and below are that e.g X_{005} corresponds to setting $A_{005} = 1$, all other $A_{ijk} = 0$ except those that are proportional to A_{005}. Lower order integrals are listed separately (e.g. X_A).*

Q_2 :

$$\boxed{\begin{aligned} V_1(x) =&\hbar^2\bigg(\alpha_1 P_4'(x,\alpha) - x\alpha P_4(x,\alpha) - \alpha P_4(x,\alpha)^2 - \frac{\alpha x^2}{4}\bigg), \\ V_2(y) =&\hbar^2\bigg(\alpha_1 P_4'(y,\alpha) - y\alpha P_4(y,\alpha) - \alpha P_4(y,\alpha)^2 - \frac{\alpha y^2}{4}\bigg). \end{aligned}} \tag{139}$$

where $\alpha_1 = \pm\sqrt{\alpha} \neq 0$ and $P_4(x,\alpha) = P_4(x,\alpha,K_1,K_2)$, $P_4(y,\alpha) = P_4(y,\alpha,\hat{K}_1,\hat{K}_2)$ are the fourth Painlevé transcendents given by (92).

$$\begin{aligned} X_{122} = &-\frac{1}{2}\left\{p_1^3p_2^2, y\right\} + \frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2, xW_2'(y)\right\} - \frac{1}{2}W_2(y)p_1^3 - yW_2'(y)p_1^3 - \frac{3}{8}\left\{p_1, W_2(y)W_1'(x)\right\} \\ &- \frac{3}{4}\left\{p_1, yW_1'(x)W_2'(y)\right\} + \frac{3}{4}\hbar^2 p_1 W_2''(y) + \frac{3}{16}\left\{p_1, x^2W_2'(y)W_2''(y)\right\} \\ &- \frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_1, x^2{W_2}^{(4)}(y)\right\} + \frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2^3, x\right\} - \frac{3}{4}\left\{p_1p_2^2, yW_1'(x)\right\} + \frac{1}{2}W_1(x)p_2^3 + xW_1'(x)p_2^3 \\ &+ \frac{3}{8}\left\{p_2, W_1(x)W_2'(y)\right\} + \frac{3}{4}\left\{p_2, xW_1'(x)W_2'(y)\right\} - \frac{3}{4}\hbar^2 W_1''(x)p_2 \\ &- \frac{3}{16}\left\{p_2, y^2W_1'(x)W_1''(x)\right\} + \frac{1}{32}\hbar^2\left\{p_2, y^2{W_1}^{(4)}(x)\right\} \\ &+ \frac{1}{24}\alpha\hbar^2\left(-y^3p_1^3 + \frac{3}{2}\left\{p_1^2p_2, xy^2\right\} - \frac{3}{4}\left\{p_1, y^3W_1'(x)\right\} + \frac{3}{8}\left\{p_1, x^2y^2W_2''(y)\right\}\right. \\ &\left.+\ 3\hbar^2 yp_1 + x^3p_2^3 - \frac{3}{2}\left\{p_1p_2^2, x^2y\right\} + \frac{3}{4}\left\{p_2, x^3W_2'(y)\right\} - \frac{3}{8}\left\{p_2, x^2y^2W_1''(x)\right\} - 3\hbar^2 xp_2\right) \\ &+ \frac{1}{2}\hbar^2\left(\hat{K}_1 - \alpha_1\right)\left(-yp_1^3 + \frac{1}{2}\left\{p_1^2p_2, x\right\} + \frac{1}{2}W_1(x)p_2 + xW_1'(x)p_2 - \frac{3}{4}\left\{p_1, yW_1'(x)\right\}\right. \\ &\left.+\ \frac{1}{8}\left\{p_1, x^2W_2''(y)\right\} + \frac{1}{2}\hbar^2 yp_1\left(K_1 - \alpha_1\right) + \frac{1}{24}x^3\alpha \mathrm{h}^2 p_2\right) \\ &- \frac{1}{2}\hbar^2\left(K_1 - \alpha_1\right)\left(xp_2^3 - \frac{1}{2}\left\{p_1p_2^2, y\right\} - \frac{1}{2}W_2(y)p_1 - yW_2'(y)p_1 + \frac{3}{4}\left\{p_2, xW_2'(y)\right\}\right. \\ &\left.-\ \frac{1}{8}\left\{p_2, y^2W_1''(x)\right\} - \frac{1}{2}\hbar^2 xp_2\left(\hat{K}_1 - \alpha_1\right) + \frac{1}{24}y^3\alpha\hbar^2 p_1\right). \end{aligned} \tag{140}$$

There is just one higher order integral X_{122}. It is algebraically independent of $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$. Thus the system Q_2 with two functions P_4 functions is superintegrable. The coefficients $\alpha \neq 0$ and can be scaled to $\alpha = -1$ to obtain the standard form of P_4 equation. However the value of α is physically significant. The potential $V(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$ includes a harmonic oscillator term $-\frac{1}{4}\alpha(x^2+y^2)$ and hence allows a discrete spectrum (for $\alpha < 0$).

Q_3 :

$$\boxed{V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x), \quad V_2(y) = \wp(y, \hat{g}_1, \hat{g}_2).} \tag{141}$$

where $U_1(x)$ is given by (121):

$$U_1{}^{(4)}(x) = 20U_1(x)U_1''(x) + 10U_1'(x)^2 - 40U_1(x)^3 + \alpha U_1(x) + \gamma.$$

This equation is a candidate for providing *new* transcendents[16]. The linearly independent integrals are

$$\begin{aligned}
X_{023} &= \left(p_1^2 + V_1(x)\right)\left(p_2^3 + \frac{3}{4}\{p_2, V_2(y)\}\right) = \mathcal{H}_1 X_B, \\
X_{050} &= p_1^5 + \frac{5}{4}\{p_1^3, V_1(x)\} + \frac{15}{16}\{p_1, V_1(x)^2\} + \frac{5}{16}\hbar^2\{p_1, V_1''(x)\} - \frac{1}{16}\hbar^4 \alpha p_1 , \\
X_{005} &= p_2^5 + \frac{5}{4}\{p_2^3, V_2(y)\} + \frac{15}{16}\{p_2, V_2(y)^2\} + \frac{5}{16}\hbar^2\{p_2, V_2''(y)\} - \frac{1}{16}\hbar^2 \hat{g}_1 p_2 , \\
X_B &= p_2^3 + \frac{3}{4}\{p_2, V_2(y)\} .
\end{aligned}$$

This case is *not* superintegrable. By Theorem 1 X_{050} and $\mathcal{H}_1$ are polynomially related, as are X_B and X_{005} with $\mathcal{H}_2$. Furthermore, X_{023} is a product of X_B and $\mathcal{H}_1$.

Q_4 :

$$\boxed{V_1(x) : \text{arbitrary}, \quad V_1(y) = 2\hbar^2 \wp(y, \hat{g}_1, \hat{g}_2).} \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
X_{023} &= \left(p_1^2 + V_1(x)\right)\left(p_2^3 + \frac{3}{4}\{p_2, V_2(y)\}\right) , \\
X_{005} &= p_2^5 + \frac{5}{4}\{p_2^3, V_2(y)\} + \frac{15}{16}\{p_2, V_2(y)^2\} + \frac{5}{16}\hbar^2\{p_2, V_2''(y)\} - \frac{1}{16}\hbar^4 \hat{g}_1 p_2 , \\
X_B &= p_2^3 + \frac{3}{4}\{p_2, V_2(y)\} .
\end{aligned}$$

This case is "suspect" from the beginning since $V_1(x)$ is arbitrary. It is indeed *not* superintegrable in view of Theorem 1. Specifically X_B, X_{005} are algebraically dependent on $\mathcal{H}_2$ and X_{023} is the product of $\mathcal{H}_1$ and X_B.

The remaining systems $Q_5, ..., Q_9$ are all superintegable and each allows just one fifth order integral. However, none of them is confining (no bound states).

Q_5 :

$$\boxed{V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x), \quad V_2(y) = 2\hbar^2 P_1\left(y, \hat{B}_1, \hat{B}_2\right), \quad \hat{B}_1 \neq 0} \tag{143}$$

where $U_1(x)$ satisfies (See eq.(119))

$$\begin{aligned}{U_1}^{(5)}(x) =&20U_1(x){U_1}^{(3)}(x)+40U_1'(x)U_1''(x)-120U_1(x)^2U_1'(x)+(\alpha+x\lambda)U_1'(x)\\&+2\lambda U_1(x)+\omega, \quad \lambda\neq 0.\end{aligned}$$

Cosgrove showed[16] that this ODE has the Painlevé property and may define a new transcendent, not reducible to one of the classical ones.

$$\begin{aligned}X_{023} =& p_1^2p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2,V_2(y)\right\}+V_1(x)p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,V_1(x)V_2(y)\right\}+\frac{3}{8}\left\{p_1,xV_2(y)V_2'(y)\right\}\\&-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_1,x{V_2}^{(3)}(y)\right\}\\&+\frac{4\hat{B}_1}{\lambda}\Bigg(p_1^5+\frac{5}{4}\left\{p_1^3,V_1(x)\right\}+\frac{15}{16}\left\{p_1,V_1(x)^2\right\}+\frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_1,V_1''(x)\right\}\\&-\frac{1}{16}\hbar^4\alpha p_1\Bigg)+\frac{\hbar^2\omega}{\lambda}\left(p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,V_2(y)\right\}\right).\end{aligned}$$

Q_6 :

$$\boxed{\begin{aligned}V_1(x) =&\hbar^2\Bigg(P_2(x,\beta)^2+\epsilon_1P_2'(x,\beta)\Bigg), \quad \epsilon_1=\pm1\\V_2(y) =&\hbar^2\Bigg(P_2(y,\hat{\beta})^2+\epsilon_2P_2'(y,\hat{\beta})\Bigg), \quad \epsilon_2=\pm1\end{aligned}} \tag{144}$$

with $\beta\neq0,\hat{\beta}\neq0$ and $P_2(x,\beta)=P_2(x,\beta,\mu,\delta)$, $P_2(y,\hat{\beta})=P_2(y,\hat{\beta},\hat{\mu},\hat{\delta})$ are given by (116).

$$\begin{aligned}X_{032} =& p_1^3p_2^2+\frac{3}{4}\left\{p_1p_2^2,V_1(x)\right\}+V_2(y)p_1^3+\frac{3}{4}\left\{p_1,V_1(x)V_2(y)\right\}+\frac{3}{8}\left\{p_2,yV_1(x)V_1'(x)\right\}\\&-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_2,y{V_1}^{(3)}(x)\right\}+\frac{1}{8}\beta\hbar^2\left\{p_1p_2^2,x\right\}-\frac{1}{16}\beta\hbar^2\left\{p_1,xyV_2'(y)\right\}-\frac{3\hbar^2\mu}{2\beta}\Big(p_1p_2^2+p_1V_2(y)\\&+\frac{1}{4}\left\{p_2,yV_1'(x)\right\}\Big)-\frac{\beta}{\hat{\beta}}\Bigg[p_1^2p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2,V_2(y)\right\}+V_1(x)p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,V_1(x)V_2(y)\right\}\\&+\frac{3}{8}\left\{p_1,xV_2(y)V_2'(y)\right\}-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_1,x{V_2}^{(3)}(y)\right\}+\frac{1}{8}\hat{\beta}\hbar^2\left\{p_1^2p_2,y\right\}-\frac{1}{16}\hat{\beta}\hbar^2\left\{p_2,xyV_1'(x)\right\}\\&-\frac{3\hbar^2\hat{\mu}}{2\hat{\beta}}\left(p_1^2p_2+p_2V_1(x)+\frac{1}{4}\left\{p_1,xV_2'(y)\right\}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Q_7 :

$$\boxed{\begin{aligned}V_1(x) =&\hbar^2\Bigg(P_2(x,\beta,\mu,\delta)^2+\epsilon_1P_2'(x,\beta,\mu,\delta)\Bigg), \quad \beta\neq0, \quad \epsilon_1=\pm1\\V_2(y) =&2\hbar^2P_1(y,\hat{B}_1,\hat{B}_2), \quad B_1\neq0.\end{aligned}} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}X_{023} =& p_1^2p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_1^2p_2,V_2(y)\right\}+V_1(x)p_2^3+\frac{3}{4}\left\{p_2,V_1(x)V_2(y)\right\}+\frac{3}{8}\left\{p_1,xV_2(y)V_2'(y)\right\}\\&-\frac{1}{16}\hbar^2\left\{p_1,x{V_2}^{(3)}(y)\right\}-\frac{\hbar^2\hat{B}_1}{\beta}\left(p_1^3+\frac{3}{4}\left\{p_1,V_1(x)\right\}-\frac{3\hbar^2\mu}{2\beta}p_1\right).\end{aligned}$$

Q_8 :

$$\boxed{V_1(x) = 2\hbar^2 U_1(x), \quad V_2(y) = 2\hbar^2 U_2(y),} \tag{146}$$

where

$$\begin{aligned} {U_1}^{(4)}(x) =& 20U_1(x)U_1''(x) + 10U_1'(x)^2 - 40U_1(x)^3 + \alpha U_1(x) + \omega x + \gamma, \quad \omega \neq 0 \\ {U_2}^{(4)}(y) =& 20U_2(y)U_2''(y) + 10U_2'(y)^2 - 40U_2(y)^3 + \hat{\alpha} U_2(y) + \hat{\omega} y + \hat{\gamma}, \quad \hat{\omega} \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{050} =& p_1^5 + \frac{5}{4}\left\{p_1^3, V_1(x)\right\} + \frac{15}{16}\left\{p_1, V_1(x)^2\right\} + \frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_1, V_1''(x)\right\} - \frac{1}{16}\hbar^4 \alpha p_1 \\ &+ \frac{\omega}{\hat{\omega}}\left(p_2^5 + \frac{5}{4}\left\{p_2^3, V_2(y)\right\} + \frac{15}{16}\left\{p_2, V_2(y)^2\right\} + \frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_2, V_2''(y)\right\} - \frac{1}{16}\hbar^4 \hat{\alpha} p_2\right). \end{aligned}$$

Q_9 :

$$\boxed{V_1(x) = 2\hbar^2 P_1(x, B_1, B_2) \quad V_2(y) = 2\hbar^2 U_2(y), \quad B_1 \neq 0} \tag{147}$$

where $U_2(y)$ satisfies

$${U_2}^{(4)}(y) = 20U_2(y)U_2''(y) + 10U_2'(y)^2 - 40U_2(y)^3 + \hat{\alpha} U_2(y) + \hat{\omega} y + \hat{\gamma}.$$

$$\begin{aligned} X_{005} =& p_2^5 + \frac{5}{4}\left\{p_2^3, V_2(y)\right\} + \frac{15}{16}\left\{p_2, V_2(y)^2\right\} + \frac{5}{16}\hbar^2\left\{p_2, V_2''(y)\right\} - \frac{1}{16}\hbar^4 \hat{\alpha} p_2 \\ &+ \frac{\hat{\omega}\hbar^2}{4B_1}\left(p_1^3 + \frac{3}{4}\left\{p_1, V_1(x)\right\}\right). \end{aligned}$$

VII. Conclusion and future outlook

We have found all doubly exotic quantum superintegrable potentials that, in addition to the Hamiltonian, allow one second and at least one fifth-order integral of motion and are separable in Cartesian coordinates. All of these potentials are found as solutions of equations having the Painlevé property. In most cases, they are expressed in terms of known transcendental functions including the six Painlevé transcendents. These results support the conjecture which states that all superintegrable potentials that do not satisfy any linear equation satisfy nonlinear equations having the Painlevé property.

The main result of this paper is that we have determined that among the doubly exotic systems $Q_1, ..., Q_9$ of section 6, all except Q_3 and Q_4 are superintegrable. The most interesting one is Q_2 that is the only one that is confining, i.e. sufficiently attractive to allow bound states. In this case we plan to use the polynomial algebra of the integrals of motion generated by $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ and X_{122} to calculate the energy spectrum and the wave functions[8,25,26]. We also plan to construct all "singly exotic" potentials (e.g. when only $V_1(x)$ is exotic and $V_2(y)$ is a solution of a linear equation), specially those that are also confining. The final aim of this program is to prove the conjecture that all exotic separable superintegrable potentials have the Painlevé property (for arbitrary order N of the additional integral).

Acknowledgments

The authors thank I. Polterovich for very helpful discussions of Burchnall-Chaundy theory, Y. Saint Aubin for many helpful comments on the manuscript and M. Sajedi for many discussions of higher order equations with the Painlevé property.
The research of P.W. was partially supported by an NSERC discovery grant. I.A. acknowledges a graduate fellowship from the Faculté des études supérieures de l'Université de Montréal.

A. Nonlinear compatibility condition for equations (22)-(24)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f_{12}V_{xxx} + \left(\frac{3}{2}f_{02} - f_{22}\right)V_{xxy} + \left(-f_{12} + \frac{3}{2}f_{32}\right)V_{xyy} + \frac{1}{2}f_{22}V_{yyy} + \left(-{f_{22}}^{(0,1)} + {f_{12}}^{(1,0)}\right)V_{xx} \\
&+ \left(-{f_{12}}^{(0,1)} + 3{f_{32}}^{(0,1)} + 3{f_{02}}^{(1,0)} - {f_{22}}^{(1,0)}\right)V_{xy} + \left({f_{22}}^{(0,1)} - {f_{12}}^{(1,0)}\right)V_{yy} \\
&+ \left(\frac{3}{2}{f_{32}}^{(0,2)} - {f_{22}}^{(1,1)} + \frac{1}{2}{f_{12}}^{(2,0)}\right)V_x + \left(\frac{1}{2}{f_{22}}^{(0,2)} - {f_{12}}^{(1,1)} + \frac{3}{2}{f_{02}}^{(2,0)}\right)V_y \\
&+ h^2\left[\left(-\frac{1}{4}f_{10} - \frac{1}{8}f_{30}\right)V_{xxxxx} + \left(\frac{-5}{4}f_{00} + \frac{1}{8}f_{20} + \frac{1}{2}f_{40}\right)V_{xxxxy} + \left(\frac{1}{4}f_{10} - \frac{5}{4}f_{50}\right)V_{xxxyy}\right. \\
&+ \left(\frac{-5}{4}f_{00} + \frac{1}{4}f_{40}\right)V_{xxyyy} + \left(\frac{1}{2}f_{10} + \frac{1}{8}f_{30} - \frac{5}{4}f_{50}\right)V_{xyyyy} + \left(-\frac{1}{8}f_{20} - \frac{1}{4}f_{40}\right)V_{yyyyy} \\
&+ \left(\frac{1}{2}{f_{20}}^{(0,1)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(0,1)} - {f_{10}}^{(1,0)} - \frac{1}{4}{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{xxxx} \\
&+ \left({f_{10}}^{(0,1)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(0,1)} - \frac{5}{2}{f_{50}}^{(0,1)} - 5{f_{00}}^{(1,0)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,0)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xxxy} \\
&+ \left(\frac{-3}{4}{f_{20}}^{(0,1)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(0,1)} + \frac{3}{2}{f_{10}}^{(1,0)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{xxyy} \\
&+ \left(\frac{1}{2}{f_{10}}^{(0,1)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(0,1)} - 5{f_{50}}^{(0,1)} - \frac{5}{2}{f_{00}}^{(1,0)} - \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,0)} + {f_{40}}^{(1,0)}\right)V_{xyyy} \\
&+ \left(-\frac{1}{4}{f_{20}}^{(0,1)} - {f_{40}}^{(0,1)} + \frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,0)} + \frac{1}{2}{f_{30}}^{(1,0)}\right)V_{yyyy} \\
&+ \left(\frac{-3}{4}{f_{10}}^{(0,2)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(0,2)} - \frac{5}{4}{f_{50}}^{(0,2)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,1)} + \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,1)} - \frac{3}{2}{f_{10}}^{(2,0)} - \frac{1}{2}{f_{30}}^{(2,0)}\right)V_{xxx} \\
&+ \left(\frac{-15}{4}{f_{00}}^{(0,2)} + \frac{9}{4}{f_{40}}^{(0,2)} + \frac{3}{2}{f_{10}}^{(1,1)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(1,1)} - \frac{15}{2}{f_{00}}^{(2,0)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(2,0)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(2,0)}\right)V_{xxy} \\
&+ \left(\frac{3}{2}{f_{10}}^{(0,2)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(0,2)} - \frac{15}{2}{f_{50}}^{(0,2)} - \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,1)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(1,1)} + \frac{9}{4}{f_{10}}^{(2,0)} - \frac{15}{4}{f_{50}}^{(2,0)}\right)V_{xyy} \\
&+ \left(-\frac{1}{2}{f_{20}}^{(0,2)} - \frac{3}{2}{f_{40}}^{(0,2)} + \frac{1}{2}{f_{10}}^{(1,1)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(1,1)} - \frac{5}{4}{f_{00}}^{(2,0)} - \frac{3}{4}{f_{20}}^{(2,0)} - \frac{3}{4}{f_{40}}^{(2,0)}\right)V_{yyy} \\
&+ \left(\frac{3}{4}{f_{20}}^{(0,3)} + {f_{40}}^{(0,3)} - \frac{3}{2}{f_{10}}^{(1,2)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(2,1)} - {f_{10}}^{(3,0)} - \frac{3}{4}{f_{30}}^{(3,0)}\right)V_{xx} \\
&+ \left(\frac{3}{2}{f_{10}}^{(0,3)} - \frac{1}{4}{f_{30}}^{(0,3)} - 5{f_{50}}^{(0,3)} - \frac{15}{2}{f_{00}}^{(1,2)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,2)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(2,1)} - \frac{15}{2}{f_{50}}^{(2,1)} - 5{f_{00}}^{(3,0)}\right. \\
&+ \left.-\frac{1}{4}{f_{20}}^{(3,0)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(3,0)}\right)V_{xy} + \left(\frac{-3}{4}{f_{20}}^{(0,3)} - {f_{40}}^{(0,3)} + \frac{3}{2}{f_{10}}^{(1,2)} - \frac{3}{2}{f_{40}}^{(2,1)} + {f_{10}}^{(3,0)}\right. \\
&+ \left.\frac{3}{4}{f_{30}}^{(3,0)}\right)V_{yy} + \left(\frac{-3}{8}{f_{30}}^{(0,4)} - \frac{5}{4}{f_{50}}^{(0,4)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(1,3)} - \frac{1}{2}{f_{40}}^{(1,3)} - \frac{3}{4}{f_{10}}^{(2,2)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(2,2)}\right. \\
&- \left.\frac{15}{4}{f_{50}}^{(2,2)} - \frac{1}{4}{f_{20}}^{(3,1)} + \frac{3}{2}{f_{40}}^{(3,1)}\right)V_x + \left(\frac{-3}{8}{f_{20}}^{(0,4)} - \frac{1}{4}{f_{40}}^{(0,4)} + \frac{3}{2}{f_{10}}^{(1,3)} - \frac{1}{4}{f_{30}}^{(1,3)}\right. \\
&- \left.\frac{15}{4}{f_{00}}^{(2,2)} + \frac{3}{4}{f_{20}}^{(2,2)} - \frac{3}{4}{f_{40}}^{(2,2)} - \frac{1}{2}{f_{10}}^{(3,1)} + \frac{3}{4}{f_{30}}^{(3,1)} - \frac{5}{4}{f_{00}}^{(4,0)} - \frac{3}{8}{f_{20}}^{(4,0)}\right)V_y \\
&\left.- \frac{1}{4}{f_{10}}^{(4,0)} - \frac{3}{8}{f_{30}}^{(4,0)}\right] = 0. \qquad \text{(A1)}
\end{aligned}
$$

References

[1] J. Friš, V. Mandrosov, Y. A. Smorodinsky, M. Uhlíř, and P. Winternitz, "On higher symmetries in quantum mechanics," Physics Letters **16**, 354–356 (1965).

[2] W. Miller Jr, S. Post, and P. Winternitz, "Classical and quantum superintegrability with applications," Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, 423001 (2013).

[3] S. Post and P. Winternitz, "General Nth order integrals of motion in the Euclidean plane," Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**, 405201 (2015).

[4] S. Gravel and P. Winternitz, "Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics," Journal of Mathematical Physics **43**, 5902–5912 (2002).

[5] S. Gravel, "Hamiltonians separable in cartesian coordinates and third-order integrals of motion," Journal of Mathematical Physics **45**, 1003–1019 (2004).

[6] F. Tremblay and P. Winternitz, "Third-order superintegrable systems separating in polar coordinates," Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43**, 175206 (2010).

[7] I. Marquette and P. Winternitz, "Polynomial Poisson algebras for classical superintegrable systems with a third-order integral of motion," Journal of Mathematical Physics **48**, 012902 (2007).

[8] I. Marquette, "Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras, and supersymmetric quantum mechanics. II. Painlevé transcendent potentials," Journal of Mathematical Physics **50**, 095202 (2009).

[9] I. Marquette and C. Quesne, "Connection between quantum systems involving the fourth Painlevé transcendent and k-step rational extensions of the harmonic oscillator related to Hermite exceptional orthogonal polynomial," Journal of Mathematical Physics **57**, 052101 (2016).

[10] I. Marquette, M. Sajedi, and P. Winternitz, "Fourth order Superintegrable systems separating in Cartesian coordinates I. Exotic quantum potentials," Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**, 315201 (2017).

[11] A. M. Escobar-Ruiz, J. Vieyra, and P. Winternitz, "Fourth order superintegrable systems separating in Polar Coordinates. I. Exotic Potentials," preprint arXiv:1706.08655 (2017).

[12] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1956).

[13] R. M. Conte and M. Musette, *The Painlevé Handbook* (Springer Science & Business Media, 2008).

[14] R. Conte, ed., *The Painlevé Property: One Century Later* (Springer, New York, 1999) pp. 77–180.

[15] C. M. Cosgrove, "Chazy Classes IX–XI Of Third-Order Differential Equations," Studies in Applied Mathematics **104**, 171–228 (2000).

[16] C. M. Cosgrove, "Higher-order Painlevé Equations in the Polynomial Class I. Bureau Symbol P2," Studies in Applied Mathematics **104**, 1–65 (2000).

[17] F. Bureau, "Équations différentielles du second ordre en y et du second degré en ÿ dont l'intégrale générale est à points critiques fixes," Annali di Matematica pura ed applicata **91**, 163–281 (1971).

[18] A. Makarov, J. A. Smorodinsky, K. Valiev, and P. Winternitz, "A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries," Il Nuovo Cimento A **52**, 1061–1084 (1967).

[19] M. Ablowitz, A. Ramani, and H. Segur, "Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type," Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985) **23**, 333–338 (1978).

[20] D. Levi and P. Winternitz, "Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation," Journal of Physics A: Mathematical and General **22**, 2915 (1989).

[21] P. Clarkson and P. Winternitz, "Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation," Physica D: Nonlinear Phenomena **49**, 257–272 (1991).

[22] F. Güngör, Ş. Kuru, J. Negro, and L. M. Nieto, "Heisenberg-type higher order symmetries of superintegrable systems separable in cartesian coordinates," Nonlinearity **30**, 1788 (2017).

[23] J. Burchnall and T. Chaundy, "Commutative ordinary differential operators," Proceedings of the London Mathematical Society **2**, 420–440 (1923).

[24] A. E. Mironov, "Commuting higher rank ordinary differential operators," preprint arXiv:1204.2092 (2012).

[25] C. Daskaloyannis, "Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras," Journal of Physics A: Mathematical and General **24**, L789 (1991).

[26] C. Daskaloyannis, "Quadratic Poisson algebras of two-dimensional classical superintegrable systems and quadratic associative algebras of quantum superintegrable systems," Journal of Mathematical Physics **42**, 1100–1119 (2001).

Chapitre 3

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a rappelé certaines notions relatives à la mécanique hamiltonienne afin de définir formellement le concept de superintégrabilité. Grâce à deux importants systèmes superintégrables en physique, soit le système de Coulomb-Kepler en mécanique classique et l'atome d'hydrogène en mécanique quantique, on a montré l'importance de la superintégrabilité en illustrant comment cette propriété permet d'éviter la résolution analytique des équations différentielles tout en offrant de l'information non-triviale sur le système en question. Dans la partie principale de ce mémoire, on a construit un système quantique superintégrable en $2D$ admettant une intégrale de mouvement de cinquième ordre. La superintégrabilité de ce système a été garantie par la séparabilité du potentiel $V(x,y)$ en cordonnées cartésiennes. On a résolu toutes les équations déterminantes obtenues en supposant que le potentiel $V(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$ est doublement exotique, c'est-à-dire que $V_1(x)$ et $V_2(y)$ ne satisfont aucune EDO linéaire. Les équations non-linéaires obtenues se sont tous avérées des EDO possédant la propriété de Painlevé. Ces équations ont été trouvées et classifiées par Cosgrove [**2, 3**] à partir d'autres considérations purement mathématiques, à savoir la question de définir de nouvelles fonctions transcendantes grâce à un type particule d'EDO non-linéaires. Dans la majorité des cas, on a exprimé toutes les solutions en termes de transcendantes déjà connues, incluant les six fonctions transcendantes de Painlevé. Il est conjecturé que l'équation reliée au cas non résolu définit une nouvelle fonction transcendante.

Les résultats de ce mémoire rejoignent ceux obtenus dans les cas où des intégrales de troisième et quatrième ordre ont été considérées [**4, 5, 6, 8, 9, 13**]. La résolution systématique des équations déterminantes a permis d'imposer des contraintes qui s'avèrent être les conditions suffisantes pour que ces EDO passent le test de Painlevé et possèdent la propriété de Painlevé. On pense que ce fait n'est pas accidentel et que la conjecture voulant qu'il soit vrai en général est fort probablement valide. Ce mémoire se veut donc aussi une nouvelle évidence appuyant cette conjecture.

Bibliographie

[1] Olivier Babelon, Denis Bernard et Michel Talon : *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press, 2003.

[2] Christopher M Cosgrove : Chazy Classes IX–XI Of Third-Order Differential Equations. *Studies in applied mathematics*, 104(3):171–228, 2000.

[3] Christopher M Cosgrove : Higher-order Painlevé Equations in the Polynomial Class I. Bureau Symbol P2. *Studies in applied mathematics*, 104(1):1–65, 2000.

[4] Adrian M Escobar-Ruiz, JC Vieyra et P Winternitz : Fourth order superintegrable systems separating in Polar Coordinates. I. Exotic Potentials. *preprint arXiv :1706.08655*, 2017.

[5] Simon Gravel : Hamiltonians separable in Cartesian coordinates and third-order integrals of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 45(3):1003–1019, 2004.

[6] Simon Gravel et Pavel Winternitz : Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 43(12):5902–5912, 2002.

[7] Brian C Hall : *Quantum theory for mathematicians*. Springer, 2013.

[8] Ian Marquette : Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras, and supersymmetric quantum mechanics. II. Painlevé transcendent potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 50(9):095202, 2009.

[9] Ian Marquette, Masoumeh Sajedi et Pavel Winternitz : Fourth order Superintegrable systems separating in Cartesian coordinates I. Exotic quantum potentials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 50:315201, 2017.

[10] Alexandr Sergeevich Mishchenko et Anatoly Timofeevich Fomenko : Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems. *Functional analysis and its applications*, 12(2): 113–121, 1978.

[11] John Neumann et Robert T Beyer : *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton university press, 1955.

[12] Yoel Tikochinsky : A simplified proof of Bertrand's theorem. *American Journal of Physics*, 56(12):1073–1075, 1988.

[13] Frédérick Tremblay et Pavel Winternitz : Third-order superintegrable systems separating in polar coordinates. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(17):175206, 2010.