

Université de Montréal

**Désintégration de vortex métastables couplés à la gravité**

par  
Éric Dupuis

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

Avril, 2017

© Éric Dupuis, 2017.

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Désintégration de vortex métastables couplés à la gravité**

présenté par:

Éric Dupuis

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Luc Vinet,	président-rapporteur
Richard MacKenzie,	directeur de recherche
Manu Paranjape,	codirecteur
Véronique Hussin,	membre du jury

Mémoire accepté le: 27 juillet 2017

## RÉSUMÉ

Une étude analytique et numérique de vortex métastables couplés gravitationnellement et formés dans un modèle abélien de Higgs modifié est menée. Les concepts de désintégration du faux vide et de solitons topologiques sont revus. Le modèle à l'étude est comparé à d'autres modèles dans lesquels sont aussi formés des vortex. Les solutions classiques correspondant au vortex sont trouvées numériquement. Leur sensibilité au couplage gravitationnel est mise en évidence. Les zones de stabilité dans l'espace des paramètres sont également définies. Un profil dit *thin-wall* du vortex survient dans la limite d'un grand champ magnétique dans le coeur du vortex. La désintégration du vortex, possible en raison du vrai vide à l'intérieur de celui-ci, est dans ce cas analysée analytiquement. Dans cette limite, l'exposant lié au taux de désintégration du vortex,  $\Gamma \sim e^{-B}$ , vaut la moitié de celui associé à la désintégration du faux vide sans vortex. Ce résultat tient peu importe la force du couplage gravitationnel. Ainsi, même une faible densité de vortex pouvant induire la désintégration du faux vide accélère grandement le processus de transition de phase et détermine le temps de vie du faux vide. Quelques commentaires concernant la limite faible gravité de l'action en théorie des champs sont ajoutés pour compléter l'étude.

**Mots clés:** Solitons topologiques, Vortex, Instantons, Gravitation, Désintégration du faux vide.

## ABSTRACT

Metastable vortices formed in a modified abelian Higgs model with gravity are studied both analytically and numerically. Concepts of false vacuum decay and topological solitons are reviewed. The model studied is compared to other models in which vortices are also formed. Classical solutions corresponding to a vortex are found numerically. Their sensitivity to gravitational coupling is highlighted. Zones of stability in parameter space are shown. A so-called “thin-wall” limit of the vortex is obtained for high magnetic flux within the vortex’s core. In that case, vortex disintegration, possible because of the true vacuum present inside the vortex, can be studied analytically. In this limit, the exponent associated to vortex tunneling decay rate,  $\Gamma \sim e^{-B}$ , is half the one associated with ordinary false vacuum decay. This results holds regardless of the gravitational coupling strength. Then, even a small density of vortices accelerates importantly the phase transition from false to true vacuum and determine the false vacuum lifetime. Comments on weak gravity limit of the action in field theory are made to complete this study.

**Keywords :** Topological solitons, Vortex, Instantons, Gravitation, False vacuum decay.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>NOTATION</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Brisure spontanée de symétrie . . . . .	1
1.2 Métastabilité . . . . .	3
1.3 Plan du mémoire . . . . .	4
<b>CHAPITRE 2 : INSTANTONS ET SOLITONS</b> . . . . .	<b>6</b>
2.1 Instantons — Métastabilité et taux de désintégration . . . . .	6
2.1.1 Effet tunnel en mécanique quantique . . . . .	6
2.1.2 Champs et instantons . . . . .	9
2.1.3 <i>Bounce</i> . . . . .	11
2.1.4 Fluctuations autour du <i>bounce</i> . . . . .	15
2.1.5 Modes zéro du <i>bounce</i> . . . . .	18
2.1.6 <i>Multibounce</i> . . . . .	20
2.1.7 Mode négatif . . . . .	22
2.2 Solitons topologiques . . . . .	29

2.2.1	Homotopie et configurations topologiques non triviales . . . . .	29
2.2.2	Brisure spontanée de symétrie et solitons topologiques . . . . .	32
2.2.3	Théorème de non-existence pour les solitons . . . . .	36
<b>CHAPITRE 3 : MODÈLE ABÉLIEN DE HIGGS, VORTEX ET GRAVITÉ</b>		<b>40</b>
3.1	Électrodynamique scalaire minimalement couplée à la gravité . . . . .	40
3.2	Modèle abélien de Higgs et vortex . . . . .	41
3.3	Modèle abélien de Higgs modifié et vortex . . . . .	45
3.3.1	Métastabilité et restauration de symétrie . . . . .	45
3.3.2	Limites du modèle $\phi^6$ en trois dimensions d'espace-temps . . . . .	47
<b>CHAPITRE 4 : DÉSINTÉGRATION D'UN FAUX VORTEX COUPLÉ GRAVITATIONNELLEMENT</b>		<b>48</b>
4.1	Introduction . . . . .	52
4.2	Vortex solutions . . . . .	53
4.3	Junction conditions on the vortex wall . . . . .	58
4.4	Decay rate . . . . .	68
4.4.1	Ordinary false vacuum decay . . . . .	68
4.4.2	False vortex disintegration . . . . .	73
4.4.3	Tunneling rates . . . . .	79
4.5	Summary and Discussion . . . . .	80
<b>CHAPITRE 5 : FAIBLE GRAVITÉ ET ACTION</b>		<b>84</b>
5.1	Terme de Gibbons-Hawking-York . . . . .	84
5.2	Faible gravité . . . . .	89
5.3	Effets absents en espace-temps plat . . . . .	91
<b>CHAPITRE 6 : CONCLUSION</b>		<b>94</b>

## LISTE DES TABLEAUX

2.I	Trois solitons topologiques typiques. . . . .	35
2.II	Signe des contributions à l'énergie statique du soliton en fonction de la dimension de l'espace. . . . .	39

## LISTE DES FIGURES

1.1	Transitions de phase pour la valeur d'attente du champ $\phi$ à une température critique $T_c$ . . . . .	3
1.2	Transition d'un potentiel quartique à un potentiel sextique. . . . .	4
2.1	Exemple de potentiel avec présence d'un minimum relatif, non global, en $\phi = \phi_+$ . . . . .	7
2.2	Chemins pouvant lier deux positions $q$ et $q'$ en un temps fixe $T$ (tiré de [1]). . . . .	9
2.3	Analogie de mécanique classique avec la position initiale du <i>bounce</i> donnée par une bille au repos aux positions $\{A, B, C\}$ . . . . .	12
2.4	Comportement approximatif du <i>bounce</i> dans la limite <i>thin-wall</i> . Le champ passe brusquement, près de $\bar{\rho}$ , de $\phi \approx \phi_-$ à $\phi = \phi_+$ . . . . .	14
2.5	Le <i>bounce</i> dans un axe particulier et le mode zéro associé à l'axe. . . . .	23
2.6	Action du <i>bounce</i> $S_E[\phi_B]$ en fonction de $\bar{\rho} = R$ pour $d = 3$ . . . . .	24
2.7	Déformation de l'intégrale définie en (2.56) dans le plan complexe $R$ . . . . .	25
2.8	Continuation analytique de l'intégrale définie en (2.56) sur le chemin permettant l'approximation du col pour $d = 3$ . . . . .	28
3.1	Potentiel de Higgs quartique $\phi^4$ . . . . .	42
3.2	Vortex du modèle abélien de Higgs (3.5), avec un ansatz donné par (3.7) et $n = e = 1$ . Les lignes (—, —) représentent respectivement les champs $f(r)$ et $a(r)$ . . . . .	44
3.3	Potentiel de Higgs sextique $\phi^6$ . . . . .	45
4.1	Potential energy density. . . . .	54
4.2	Thick-wall solutions of $f(r)$ , $a(r)$ , $A(r)$ and $D(r)$ respectively. $n = e/\sqrt{4\pi} = 1$ , $\varepsilon = 0.1$ . The line patterns (—, —, —, —) correspond to $\kappa = (0.00, 0.25, 0.50, 1.00)$ , respectively. . . . .	59

4.3	Thin-wall solutions of $f(r)$ , $a(r)$ , $A(r)$ , and $D(r)$ respectively. $n = 50$ , $e/\sqrt{4\pi} = 1$ , $\varepsilon = 0.005$ . The line patterns (—, — —, — — —, — — — —) correspond to $\kappa = (0.00, 0.01, 0.02, 0.04)$ , respectively.	60
4.4	The line patterns (—, — —, — — —, — — — —) represent the critical value $\varepsilon_c$ as a function of $e$ for $\kappa = (0.00, 0.25, 0.50, 1.00)$ , respectively. For $\varepsilon \geq \varepsilon_c$ , no metastable vortex solutions were found.	61
4.5	Effective potential for $\Phi = 100$ , $\varepsilon = 0.005$ and several values of the gravitational coupling constant $\kappa$ .	66
4.6	Tunneling exponent for vacuum decay as a function of gravitational coupling $\kappa$ .	72
4.7	Full line : analytical approximation of $B_{\text{vort}}$ as a function of $\kappa$ , (4.103). Circles : Numerical solution with $Q_m \neq 0$ ( $\Phi = 100$ and $\varepsilon = 0.01$ ).	78
4.8	Géométrie du champ scalaire associée aux différents types de bounce. L'intérieur de ces objets dénote la phase de vrai vide, l'extérieur le faux vide.	83
5.1	A : Instanton de Coleman- de Luccia. B : Instanton de Hawking-Moss.	93

## **LISTE DES ANNEXES**

**Annexe I : Corrections d'ordre supérieur en  $\hbar$  à l'intégrale de chemin. xiii**

## NOTATION

$(-+++)$	Signature de la métrique
$d$	Nombre de dimensions d'espace-temps
$D$	Nombre de dimensions d'espace
Indices grecs	Composantes d'espace-temps, numérotées de 0 (temps) jusqu'à $d - 1$
Indices latins	Composantes d'espace, numérotées de 1 jusqu'à $D$
Unités	$c = 1$ partout ; $\hbar = 1$ à partir du chapitre 3

## REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mes directeurs de recherche Richard MacKenzie et Manu Paranjape. Ils m'ont bien soutenu tout en me laissant une grande liberté. Ils m'ont aussi appris beaucoup. Je retiens de Richard l'importance de comprendre les problèmes simples avant d'entreprendre les problèmes complexes (ça peut paraître évident dit ainsi, mais Richard m'a souvent pris à défaut) ! Quant à Manu, il m'a inspiré avec sa fougue en recherche et sa façon de choisir les problèmes physiques auxquels s'attaquer : « Whatever's fun ! »

Je remercie de plus Véronique Hussin et Luc Vinet d'avoir accepté de siéger sur le jury d'évaluation de mon mémoire.

J'aimerais aussi remercier Marie-Lou Gendron-Marsolais. Elle a d'abord été un *Obiwan* bienveillant lors de mon stage à l'été 2014 avec Richard. Puis, c'est à partir d'une modification d'un de ses codes que j'ai obtenu plusieurs des résultats numériques présentés dans ce mémoire.

Je remercie également mes compagnons de bureau Jérôme Claude et Benjamin Freund pour les discussions intéressantes sur les particules et autres sujets variés. Étant donné qu'elle est, *elle aussi*, membre des *Pirates de la mer de Dirac* et du club social de thé, j'aimerais remercier Marie Lafrance.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis qui m'ont soutenu dans mes efforts.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.

---

Samuel Beckett

### 1.1 Brisure spontanée de symétrie

La théorie des champs est un puissant formalisme permettant de tisser des liens révélateurs entre différentes branches de la physique. Par exemple, le modèle de Ginzburg-Landau décrivant la supraconductivité dans certains matériaux a certainement inspiré la physique des particules. Le concept important tiré de la physique de la matière est le phénomène de brisure spontanée de symétrie : l'état d'énergie minimale d'un système physique peut violer certaines symétries de la théorie physique qui le décrit. En matière condensée, on explique l'état supraconducteur dans un matériau par un condensat de paires d'électrons. L'état fondamental est dégénéré, car l'énergie du système est indépendante de la phase de la fonction d'onde du condensat. En physique des particules, il existe aussi plusieurs phases du vide distinctes par leur valeur d'attente du champ de Higgs. Cette brisure spontanée de symétrie est au coeur du mécanisme de Higgs qui explique comment les bosons de jauge acquièrent une masse dans le cadre du modèle standard des particules.

Le phénomène de brisure spontanée de symétrie est aussi d'intérêt cosmologique. L'Univers évolue vers un état stable ; le vide décrivant l'état actuel de l'Univers est atteint suite à une transition de phase survenant lors du refroidissement de l'Univers suivant le Big Bang. Or, que ce soit par le biais du champ de Higgs ou un autre champ scalaire hypothétique, la présence de plusieurs états d'énergie minimale pouvant être atteints aurait un effet macroscopique observable. En effet, lors de la transition de phase, deux régions de l'espace-temps causalement déconnectées vont généralement acquérir des phases différentes du vide. Le champ scalaire étant continu dans l'espace-temps, il doit

alors exister une configuration non triviale de champ joignant les deux régions. Ces liens entre les différentes phases de l'espace-temps forment des solitons topologiques. Ce phénomène de formation de défauts topologiques lors d'une transition de phase est nommé mécanisme de Kibble [2].

Les solitons topologiques désignent des configurations de champ classiques ayant une topologie distincte d'un état de vide uniforme. La nature des solitons pouvant être formés dépend de la symétrie interne considérée et la façon dont elle est brisée spontanément par le vide. Par exemple, on associe des murs de domaines à une brisure d'une symétrie discrète  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow I$ , des monopôles magnétiques à une brisure partielle d'une symétrie sphérique  $SO(3) \rightarrow SO(2)$ , et des vortex à la brisure complète d'une symétrie cylindrique  $U(1) \rightarrow I$  [3].

C'est le vortex qui sera considéré dans l'étude présentée. Dans un matériau supraconducteur, le vortex permet de décrire des tubes de flux magnétiques localisés et pénétrant le supraconducteur autrement imperméable au champ magnétique ; dans un contexte cosmologique, on associera le vortex à des cordes cosmiques. À ce jour encore jamais observées, les cordes cosmiques continuent d'attirer l'attention en cosmologie. Par exemple, l'énergie par unité de longueur de telles cordes peut être contrainte par l'anisotropie dans les données provenant du fond de radiation cosmique [4]. La tension d'une corde cosmique peut aussi être sondée grâce à son spectre de radiation gravitationnelle [5]. Cette méthode sera certainement mise de l'avant dans les années à venir avec la récente détection directe d'ondes gravitationnelles [6] et les améliorations prévues dans le domaine de l'interférométrie gravitationnelle.

Comme mentionné ci-haut, c'est par une brisure spontanée de symétrie dans l'Univers primordial que pourraient s'être formées des cordes cosmiques. Cette brisure se manifesterait lorsque la température diminue et atteint un point critique  $T_c$  changeant la structure de vides d'un champ scalaire considéré. La valeur d'attente du champ scalaire dans le vide, alors non nulle, est le paramètre d'ordre apparaissant lors d'une transition de phase de second ordre [7]. Ce type de transition est caractérisé par sa continuité, se distinguant des transitions de phase du premier ordre qui sont quant à elles discontinues [8]. Les figures 1.1(a) et 1.1(b) montrent comment une modification du potentiel effectif du champ

scalaire peut mener à une transition de phase du premier ordre et du deuxième ordre, respectivement. La transition de premier ordre est également intéressante à considérer en cosmologie, étant liée au concept de métastabilité du vide.

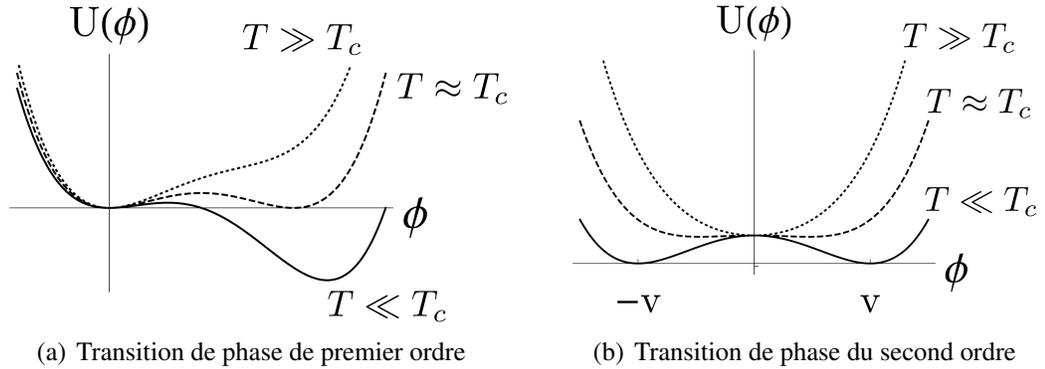


Figure 1.1 – Transitions de phase pour la valeur d’attente du champ  $\phi$  à une température critique  $T_c$ .

## 1.2 Métastabilité

Tel que suggéré à la fig. 1.1(a), un minimum global du potentiel effectif peut devenir relatif lors du refroidissement. Autrement dit, un vrai vide, complètement stable, peut devenir un faux vide métastable. D’autre part, la présence d’une phase d’énergie supérieure dans l’Univers primordial donne une constante cosmologique pouvant expliquer une période inflationnaire à l’origine de l’expansion rapide après le Big Bang.

La situation où l’Univers occupe un faux vide et fait une transition vers un vrai vide a été analysée dans une série de publications fondatrices par Sidney Coleman et ses associés [9, 10, 11]. La désintégration du faux vide est médiée, dans une approximation semi-classique, par des instantons.

La brisure spontanée de symétrie et la présence de vides métastables sont donc deux phénomènes importants en cosmologie. On propose d’incorporer ces deux caractéristiques dans un modèle jouet dont le potentiel est présenté à la figure 1.2. Le potentiel à haute température présente déjà une brisure spontanée de symétrie cylindrique permettant de

former des vortex topologiquement stables ; l'abaissement de la température fait apparaître un vrai vide. Dans ce cas, le vortex est plutôt bâti sur une surface de faux vides. On verra que le vortex est alors métastable et peut lui aussi provoquer une transition de phase, à même titre que la désintégration *régulière* du faux vide, celle qui est possible sans vortex. Ce scénario a notamment été décrit dans [12].

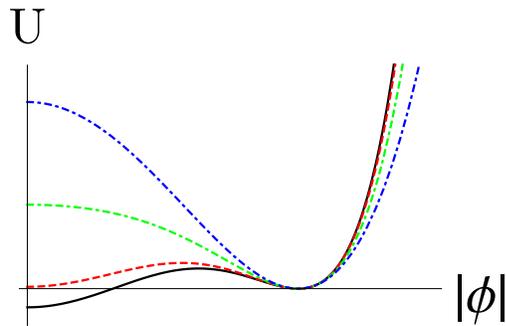


Figure 1.2 – Transition d'un potentiel quartique à un potentiel sextique.

Si le taux de désintégration des vortex est beaucoup plus important que celui de la désintégration du faux vide sans vortex, ces objets deviennent cruciaux pour la cosmologie ; les vortex déterminent alors largement le temps de vie du faux vide. La présence de vortex pourrait alors être contestée si ces derniers influencent l'évolution de l'Univers d'une façon incompatible avec les données cosmologiques connues. L'objectif des présents travaux est de réévaluer cette possibilité dans un modèle plus complet incorporant les effets gravitationnels. Les équations du mouvement dans une théorie d'Einstein-Hilbert-Higgs-Maxwell seront résolues numériquement pour montrer l'existence des vortex. Leur désintégration sera étudiée analytiquement, ce qui est possible lorsque le flux magnétique au coeur des vortex est grand.

### 1.3 Plan du mémoire

Les instantons et solitons en théorie des champs sont présentés au prochain chapitre. Les différences entre le modèle considéré et la version habituelle du modèle abélien de Higgs en électrodynamique scalaire sont mises de l'avant dans le chapitre suivant ; la

modification de la densité d'énergie potentielle et l'ajout de la gravité sont abordés. Par la suite, les résultats principaux de l'étude, soient l'existence des vortex et leur stabilité relative à celle du faux vide sont montrés. Cette section prend la forme d'un article indépendant étant donné que les résultats de l'étude seront soumis pour publication sous peu. Dans le dernier chapitre sont incluses des remarques supplémentaires sur la limite de faible gravité permettant de revenir au problème sans gravité [12].

## CHAPITRE 2

### INSTANTONS ET SOLITONS

Il y a de certains défauts qui, bien mis en oeuvre, brillent plus que la vertu même.

---

François de La Rochefoucauld

Les instantons et les solitons représentent un sujet d'étude important en théorie des champs non perturbative. Ce sont des solutions non triviales aux équations du mouvement classiques. Concrètement, ces objets sont des configurations de champs étendues. Un instanton est un soliton *statique* qui vit dans un espace dont l'une des dimensions correspond à un temps imaginaire. Les instantons et les solitons partagent plusieurs propriétés avec les particules, dont celle d'avoir une énergie localisée [13].

L'instanton décrivant la désintégration d'un faux vide dans une théorie comprenant un champ scalaire réel est étudié en détail dans la première section. Par la suite, une présentation plus générale des solitons est faite dans la deuxième section. L'accent est mis sur les solitons *topologiques*.

#### 2.1 Instantons — Métastabilité et taux de désintégration

Les concepts présentés dans cette section sont grandement inspirés de [9, 10]. Les résultats importants sont redérivés. L'exposition des calculs nécessaires pour arriver au taux désintégration d'un état homogène et métastable de champ scalaire est assez détaillée ; l'objectif était de clarifier certains détails de la preuve, notamment les concepts traités aux sections 2.1.5 et 2.1.7.

##### 2.1.1 Effet tunnel en mécanique quantique

L'effet tunnel en mécanique quantique permet à une particule de franchir une barrière d'énergie plus élevée que son énergie totale, ce qui est impossible classiquement. Consi-

dérons une particule classique située dans le puits à la position  $\phi = \phi_+$  dans le potentiel montré à la fig. 2.1(exceptionnellement dans cette sous-section, la variable  $\phi$  désigne une position). Étant initialement au repos en  $\phi = \phi_+$ , la particule classique extrémise

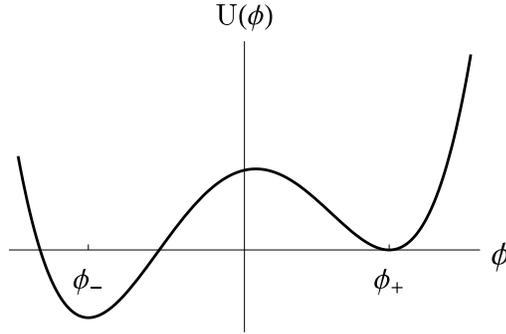


Figure 2.1 – Exemple de potentiel avec présence d’un minimum relatif, non global, en  $\phi = \phi_+$ .

trivialement l’action en restant stationnaire. Dans ce cas précis, on peut aussi argumenter que c’est la seule configuration continue qui conserve l’énergie étant donné la condition initiale.

En mécanique quantique, les fluctuations quantiques permettent l’effet tunnel ; une particule localisée autour du minimum relatif en  $\phi_+$  peut traverser la barrière de l’autre côté, où son énergie totale peut être conservée. Pour connaître la probabilité de s’échapper du puits en  $\phi_+$ , l’amplitude associée au processus conservant l’état initial,  $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_0\rangle$ , est calculée. Celle-ci est donnée par

$$\mathcal{A} = \langle \psi_0 | e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \psi_0 \rangle. \quad (2.1)$$

Un développement perturbatif autour du minimum  $\phi_+$  donne au premier ordre non nul l’hamiltonien de l’oscillateur harmonique,

$$H \approx \frac{p_\phi^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\phi - \phi_+)^2 \equiv H_{\text{osc.}}. \quad (2.2)$$

L’état  $|\psi_0\rangle$  d’une particule localisée au minimum  $\phi_+$  peut alors être choisi comme une

superposition des états propres de l'oscillateur quantique, de telle sorte que

$$\langle \psi_0 | \hat{\phi} | \psi_0 \rangle = \phi_+. \quad (2.3)$$

Si un état propre spécifique est choisi, son évolution est donnée par  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |\psi_0\rangle$ ; l'état évolue trivialement vers lui-même,

$$|\langle \psi_0 | e^{-i\frac{H_{\text{osc}}t}{\hbar}} | \psi_0 \rangle|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Ce point de vue est cependant incomplet. Les états de l'oscillateur harmonique sont seulement approximativement des états propres. Il existe des effets non perturbatifs médiés par des objets nommés instantons qui tiennent compte de l'effet tunnel possible. La contribution précise de ces objets sera étudiée plus en détail dans ce qui suit. Pour l'instant, on peut comprendre qu'ils modifient l'évolution temporelle d'un état propre approximatif en lui conférant une composante d'énergie imaginaire. Spécifiquement, la norme de l'amplitude au carré devient

$$|\langle \psi_0 | e^{-i\frac{Et}{\hbar}} | \psi_0 \rangle|^2 = e^{-\frac{2E_I}{\hbar}t} \equiv e^{-\Gamma t} \quad (2.5)$$

où  $\Gamma \equiv -\frac{2}{\hbar}\mathcal{I}\text{m}\{E\}$  est le taux de désintégration. C'est d'ailleurs la quantité la plus importante dans l'étude présentée. Le calcul de  $\Gamma$  sera mené avec le formalisme des intégrales de chemin.

L'intégrale de chemin de Feynman donne un point de vue alternatif sur les fluctuations quantiques et le calcul des amplitudes en mécanique quantique. Étant donné un état initial et final de position, elle indique que l'évolution de la particule se fait selon une superposition de tous les chemins classiques liant ces deux positions. Un échantillon de chemins classiques entre deux conditions frontières est schématisé à la figure 2.2.

La superposition d'une infinité de chemins est représentée par une intégrale fonctionnelle, c'est-à-dire une intégrale dont le domaine est défini par un espace de fonctions. Les différents chemins sont pondérés par une exponentielle imaginaire dont l'argument est

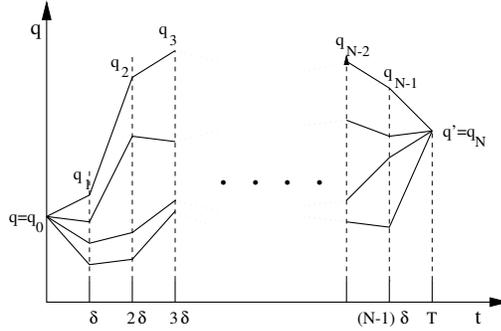


Figure 2.2 – Chemins pouvant lier deux positions  $q$  et  $q'$  en un temps fixe  $T$  (tiré de [1]).

l'action. L'amplitude après un temps  $t$  est donnée par

$$\langle \phi_f | e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \phi_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}. \quad (2.6)$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation et  $\mathcal{D}\phi$  est la mesure sur l'espace de fonctions  $\phi(t, \vec{x})$ .

Comme pour l'expérience des fentes de Young, les phases associées à différents chemins interfèrent. Dans la limite où  $\hbar \rightarrow 0$ , l'oscillation de l'exponentielle devient extrêmement rapide. Une interférence destructive se produit entre la plupart des chemins qui sont voisins dans l'espace de phase. Seuls les chemins qui extrémisent l'action, donc définis par  $\delta S / \delta \phi = 0$ , échappent à cette interférence. Donc, ce sont seulement les chemins classiques qui contribuent pour  $\hbar \rightarrow 0$ , ce qui définit la limite classique, tel qu'attendu.

### 2.1.2 Champs et instantons

La situation discutée dans la sous-section précédente concerne la mécanique quantique où  $\phi$  est une position. Ce choix a été fait pour simplifier la discussion. Dans ce qui suit,  $\phi$  représente un champ scalaire. L'expression (2.6) prend la même forme en théorie des champs. Les états  $|\phi_i\rangle$  et  $|\phi_f\rangle$  représentent les configurations de champ initiale,  $\phi(\vec{x}, t_i)$ , et finale,  $\phi(\vec{x}, t_f)$ . La situation où  $\phi(\vec{x}, t_i) = \phi(\vec{x}, t_f) = \phi_+$  est encore étudiée. Ce sont des configurations homogènes de champ à la valeur  $\phi_+$ , soit le minimum de la densité

d'énergie potentielle présentée à la figure 2.1. Une configuration de champ homogène correspondant à un minimum de la densité d'énergie potentielle est appelée *vide*. En présence de multiples vides d'énergies différentes, le minimum global est un *vrai vide* et les minimums relatifs sont des *faux vides*. L'amplitude (2.6) est donc liée à la probabilité pour une configuration du champ correspondant initialement au faux vide d'y rester. Comme pour la position d'une particule, l'intégrale de chemin impose de considérer toutes les configurations de champs possibles pouvant lier le faux vide initial et final.

Pour comprendre la source de la métastabilité du faux vide, il vaut mieux reformuler la relation entre l'amplitude et l'intégrale de chemin 2.6 en temps euclidien. Le temps imaginaire est défini par la rotation de Wick

$$\tau = it. \quad (2.7)$$

Sous ce changement, la relation 2.6 devient

$$\langle \phi_f | e^{-\frac{H\tau}{\hbar}} | \phi_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S_E[\phi]}{\hbar}}. \quad (2.8)$$

Le changement dans le membre de gauche suit de la définition (2.7). Dans le membre de droite, il faut définir l'action euclidienne  $S_E$ . Considérons un exemple, soit la théorie d'un champ scalaire réel avec densité d'énergie potentielle  $U(\phi)$  telle que montrée à la figure 2.2. La théorie est définie par la densité lagrangienne.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi). \quad (2.9)$$

Un espace-temps plat avec une métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  est pour l'instant supposé. Le terme cinétique peut être écrit en termes du temps euclidien

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 = (\partial_\tau \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 = \partial_{\mu_E} \phi \partial^{\mu_E} \phi \quad (2.10)$$

où une métrique euclidienne,  $\eta_{\mu_E \nu_E} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ , a été introduite. Le facteur oscil-

lant dans l'intégrale de chemin (2.6) peut également être décrit en espace-temps euclidien

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\} &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int(-id\tau)\mathrm{d}^{d-1}x\left(-\frac{1}{2}\partial_{\mu E}\phi\partial^{\mu E}\phi-U(\phi)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{S_E[\phi]}{\hbar}\right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace-temps, et l'action euclidienne est définie par

$$S_E \equiv \int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^{d-1}x \mathcal{L}_E[\phi] = \int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^{d-1}x \left[ \frac{1}{2}\partial_{\mu E}\phi\partial^{\mu E}\phi + U(\phi) \right]. \quad (2.12)$$

(L'indice  $E$  sera dorénavant implicite). Ceci montre la provenance du membre de droite dans (2.8).

Dans une approximation semi-classique où  $\hbar \ll 1$ , les solutions classiques dominent l'intégrale de chemin. Une solution classique triviale est celle d'un faux vide invariant dans le temps. Les solutions non triviales aux équations du mouvement euclidiennes sont nommées instantons. Ces objets donnent les premières corrections quantiques à l'amplitude et expliquent l'effet tunnel à cet ordre. Un instanton particulier, souvent nommé *bounce*, est considéré dans ce qui suit.

### 2.1.3 *Bounce*

Les équations euclidiennes du mouvement du champ scalaire sont trouvées en obtenant une variation nulle  $\delta S_E = 0$  de l'action euclidienne définie à l'éq. (2.12)

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi}. \quad (2.13)$$

Soit le *bounce*, la solution non triviale et d'action minimale à cette équation. En espace-temps plat, cette configuration a une symétrie  $O(d)$  [14] et dépend donc uniquement du rayon euclidien  $\rho \equiv \sqrt{\tau^2 + |\vec{x}|^2}$ . L'équation du mouvement devient alors

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{d-1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi}. \quad (2.14)$$

Cette équation doit être respectée pour les mêmes conditions aux frontières que celles imposées en espace-temps plat : le *bounce* est une configuration de champ qui occupe le faux vide aux temps initial et final. Pour justifier l'existence de cette solution, une analogie en mécanique classique est employée.

En interprétant  $\rho$  comme une coordonnée de temps et  $\phi$  comme une position, cette équation décrit simplement la dynamique d'une particule dans un potentiel  $-U$  et soumise à un frottement de coefficient  $\gamma = (d - 1)/\rho$  diminuant avec le temps  $\rho$ . La figure 2.3 schématise la situation de mécanique classique. Dans cette analogie, la particule doit occuper la position  $\phi_+$  au temps  $\tau$  initial et final qu'on note respectivement  $-T$  et  $T$ . Pour une grande valeur de  $T$ , on peut supposer que le *bounce*, soit l'éloignement du champ par rapport au faux vide, se produit autour de  $\tau = 0$ . On peut également centrer le *bounce* à  $|\vec{x}| = 0$  sans perte de généralité. Comme le *bounce* a une symétrie  $O(d)$  relativement au point  $\rho = 0$ , la dérivée du champ doit être nulle en ce point,  $\phi'|_{\rho=0} = 0$ , pour que la dérivée de la configuration  $y$  soit continue. Le mouvement de cette particule est donc soumis aux conditions frontières

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(\infty) = \phi_+. \quad (2.15)$$

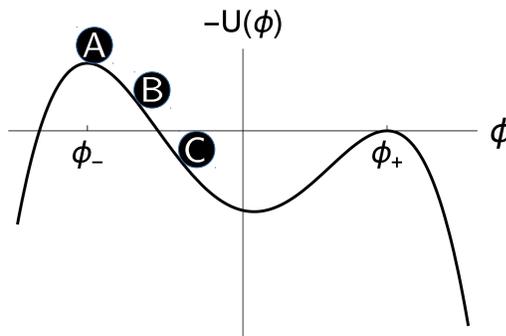


Figure 2.3 – Analogie de mécanique classique avec la position initiale du *bounce* donnée par une bille au repos aux positions  $\{A, B, C\}$ .

Il doit exister une position initiale  $\phi_*$  donnant une solution à ces conditions aux

frontières. Avec une position trop près du maximum  $\phi_-$  (le cas « A » dans la fig. 2.3), la bille prend un long moment avant de bouger significativement. Lorsqu'elle débute un mouvement notable, la friction est devenue négligeable et la bille a trop d'énergie pour s'arrêter à  $\phi_+$ . En revanche, si la position initiale est trop éloignée de  $\phi_-$  (le cas « C »), la bille n'a pas l'énergie nécessaire, sans même considérer les pertes en friction, pour atteindre la position  $\phi_+$ . Tel qu'argumenté par Coleman [9], il doit exister par continuité une position initiale intermédiaire qui donne le mouvement souhaité (le cas « B »).

### 2.1.3.1 Approximation *thin-wall*

Dans la limite où  $U(\phi_+) - U(\phi_-) = \varepsilon \ll 1$ , le choix convenable de position initiale du *bounce* est

$$\phi \Big|_{\rho=0} \approx \phi_-. \quad (2.16)$$

La particule initialement près du sommet y passe un long moment. Elle entreprend plus tard un mouvement essentiellement sans friction (puisque la puissance de la friction est inversement proportionnelle à  $\rho$ ) jusqu'à l'autre sommet, qui lui confère une énergie potentielle seulement un peu plus faible ; la faible perte d'énergie en friction doit correspondre à la différence d'énergie  $\varepsilon$  entre les deux sommets.

La transition de l'état initial vers l'état final se fait alors sur une échelle spatiale relativement courte. Il s'agit d'une limite dite du « mur mince » qu'on appellera *thin-wall* pour garder la terminologie introduite par Coleman. Un schéma du *bounce* dans la limite *thin-wall* est montré à la fig. 2.4. Si la transition est centrée en  $\rho = \bar{\rho}$  et s'étend sur un

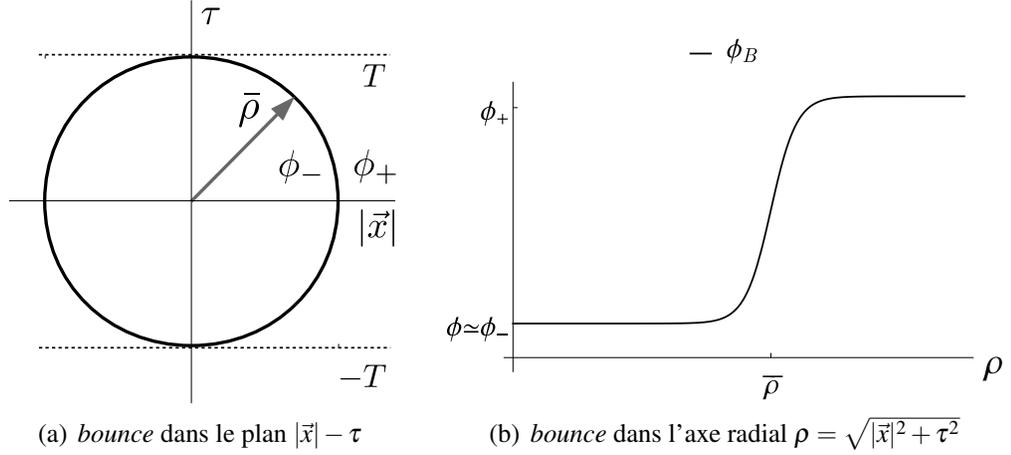


Figure 2.4 – Comportement approximatif du *bounce* dans la limite *thin-wall*. Le champ passe brusquement, près de  $\bar{\rho}$ , de  $\phi \approx \phi_-$  à  $\phi = \phi_+$ .

intervalle  $2\delta$ , l'action du *bounce*  $\phi_B$  s'écrit

$$\begin{aligned}
S_B &= \int d^d x \left( \frac{1}{2} \phi_B'^2 + U(\phi_B) \right) \\
&= \int d^{d-1} \Omega \left[ \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \rho^{d-1} U(\phi_-) + \int_{\bar{\rho}-\delta}^{\bar{\rho}+\delta} d\rho \rho^{d-1} \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) \right] \\
&\approx \int d^{d-1} \Omega \left[ -\frac{\varepsilon}{d} \bar{\rho}^d + \bar{\rho}^{d-1} \int_{\bar{\rho}-\delta}^{\bar{\rho}+\delta} d\rho \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) \right] \\
&\equiv \int d^{d-1} \Omega \left[ -\frac{\varepsilon}{d} \bar{\rho}^d + \sigma \bar{\rho}^{d-1} \right] \tag{2.17}
\end{aligned}$$

où on a supposé  $\delta \ll \bar{\rho}$  pour estimer  $\rho^{d-1} \approx \bar{\rho}^{d-1}$  près du mur et sortir ce facteur de l'intégration correspondante. La densité d'énergie surfacique sur le mur  $\sigma$  a été définie comme

$$\sigma \equiv \int_{\bar{\rho}-\delta}^{\bar{\rho}+\delta} d\rho \left[ \frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right]. \tag{2.18}$$

Le *bounce* extrémise l'action,

$$\frac{dS_B}{d\bar{\rho}} = 0, \tag{2.19}$$

ce qui est respecté pour  $\bar{\rho} = (d-1)\sigma/\varepsilon$ .

### 2.1.4 Fluctuations autour du *bounce*

Le *bounce* donne la première correction à l'amplitude. En effet, au plus bas ordre en  $\hbar$ , l'intégrale de chemin se décompose comme une somme sur les point-selles de l'action

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S_E[\phi]}{\hbar}} = \sum_{\text{point-selles}^{\text{"n"}}} e^{-\frac{S_E[\phi_n]}{\hbar}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (2.20)$$

Par exemple,  $\phi_0$  est une configuration homogène de faux vide,  $\phi_1$  est le *bounce*  $\phi_B$ , soit la configuration trouvée à la section précédente. La possibilité d'autres configurations non triviales sera considérée en détail plus tard. Pour l'instant, il est important de comprendre l'effet du *bounce* sur l'amplitude et expliciter les premières corrections quantiques qui sont responsables de l'effet tunnel. Pour ce faire, l'action euclidienne est développée autour de la solution du *bounce*  $\phi = \phi_B + \eta$

$$\begin{aligned} S_E[\phi_B + \eta] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \frac{\delta^n S_E[\phi]}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta(x_1) \dots \eta(x_n) \\ &= S_E[\phi_B] + \frac{1}{2} \int d^d x' d^d x'' \frac{\delta^2 S_E[\phi]}{\delta\phi(x') \delta\phi(x'')} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta(x') \eta(x'') + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

où les équations de Euler-Lagrange, respectées pour la solution classique  $\phi_B$ , sont utilisées pour justifier l'absence du deuxième terme dans le développement

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_E[\phi]}{\delta\phi(x')} \Big|_{\phi=\phi_B} &= \frac{\delta}{\delta\phi(x')} \int d^d x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \delta(\partial_\mu\phi) \right] \Big|_{\phi=\phi_B} \\ &= \frac{\delta}{\delta\phi(x')} \int d^d x \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \right]}_0 \Big|_{\phi=\phi_B} \delta\phi + (\text{surface}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où les équations d'Euler-Lagrange, respectées par la solution classique  $\phi_B$ , ont été utilisées. Les termes de surface sont nuls puisque le *bounce*  $\phi_B$  est une configuration de champ

localisée. De la même façon, la seconde variation est développée

$$\begin{aligned}
& \int d^d x' d^d x'' \frac{\delta^2 S_E[\phi]}{\delta\phi(x')\delta\phi(x'')} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta(x')\eta(x'') \\
&= \int d^d x' d^d x'' \frac{\delta^2}{\delta\phi(x')\delta\phi(x'')} \\
&\quad \times \int d^d x \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_B} (\delta\phi)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi} \Big|_{\phi=\phi_B} \delta(\partial_\mu\phi)\delta(\partial_\nu\phi) \right] \eta(x')\eta(x'') \\
&= \int d^d x' d^d x'' \frac{\delta^2}{\delta\phi(x')\delta\phi(x'')} \\
&\quad \times \int d^d x \left[ U''(\phi_B)(\delta\phi)^2 + \eta^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu\phi)\delta(\partial_\nu\phi) \right] \eta(x')\eta(x'') \\
&= 2 \int d^d x'' \frac{\delta}{\delta\phi(x'')} \int d^d x' \left[ U''(\phi_B(x'))(\delta\phi(x')) - \eta^{\mu'\nu'} \delta(\partial_{\mu'}\partial_{\nu'}\phi(x')) \right] \eta(x')\eta(x'') \\
&= 2 \int d^d x'' \eta(x'') \left[ U''(\phi_B(x'')) - \eta^{\mu''\nu''} \partial_{\mu''}\partial_{\nu''} \right] \eta(x'') \tag{2.23}
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\phi\partial_\mu\phi} = 0, \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x')} \int d^d x F[\phi(x)] \delta(\partial_\mu\phi(x)) = -\partial_{\mu'} F[\phi(x')] + (\text{surface}), \tag{2.25}$$

pour une fonctionnelle  $F[\phi]$  quelconque.

Ce développement de l'action au deuxième ordre est utilisé pour réécrire l'intégrale de chemin associée à l'amplitude

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S_E[\phi]}{\hbar}} &= e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ - \int d^d x \frac{\eta(x) \left[ -\partial^2 + U''(\phi_B(x)) \right] \eta(x)}{\hbar} \right\} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ - \int d^d x \frac{\eta(x) \mathbb{O}_B \eta(x)}{\hbar} \right\} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \tag{2.26}
\end{aligned}$$

où l'opérateur  $\mathbb{O}_B$  est défini comme

$$\mathbb{O}_B \equiv -\partial^2 + U''(\phi_B(x)). \quad (2.27)$$

L'excitation du champ  $\eta(x)$  est décomposée en modes propres de l'opérateur  $\mathbb{O}_B$

$$\eta(x) = \sum_n c_n \psi_n(x), \quad \mathcal{D}\eta = \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} dc_n, \quad (2.28)$$

$$\mathbb{O}_B \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \int d^d x \psi_m \psi_n = \delta_{mn}. \quad (2.29)$$

Dans ces conditions, l'intégration fonctionnelle devient un produit d'intégrations gaussiennes sur tous les coefficients

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ - \int d^d x \frac{\eta(x) \mathbb{O}_B \eta(x)}{\hbar} \right\} &= \prod_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left\{ \frac{-\lambda_n c_n^2}{\hbar} \right\} \\ &= \prod_n \lambda_n^{-1/2} \\ &\equiv [\det \mathbb{O}_B]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ainsi, l'intégrale de chemin prend la forme simple

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S_E[\phi]}{\hbar}} = \mathcal{N} e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} [\det \mathbb{O}_B]^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (2.31)$$

L'argument justifiant une correction d'ordre  $\hbar$ , précisément, est montré à l'annexe I. Pour extraire l'information sur la métastabilité de l'amplitude à partir de cette intégrale de chemin, il faut prêter une attention particulière aux modes d'excitation d'énergie nulle et d'énergie négative. C'est ce qui est fait dans les prochaines sections.

### 2.1.5 Modes zéro du *bounce*

Par définition, le *bounce*  $\phi_B(x)$  est une solution classique des équations du mouvement, c'est-à-dire

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi_B + \left. \frac{\partial U}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_B} = 0. \quad (2.32)$$

En appliquant une dérivée  $\partial_\nu$  à cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left( -\partial_\mu \partial^\mu \phi_B + \left. \frac{\partial U}{\partial \phi} \right|_{\phi_B} \right) &= \left( -\partial_\mu \partial^\mu + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_B} \right) \partial_\nu \phi_B \\ &\equiv \mathbb{O}_B(\partial_\nu \phi_B) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Cette reformulation montre que  $\partial_\nu \phi_B$  est un état propre de l'opérateur  $\mathbb{O}_B$ , et que sa valeur propre est nulle.  $d$  modes propres nuls y sont associés ; chaque état  $\partial_\nu \phi_B$  exprime l'invariance de l'action sous une translation dans la direction  $x^\nu$ . Ceci est seulement valide pour les coordonnées cartésiennes.

Les valeurs propres nulles associées à ces modes apparaissent dans le déterminant fonctionnel (2.30) et le rendent singulier. Ces modes doivent être traités avec plus de précautions. Pour traiter leur contribution *avant* d'en arriver à la formulation du déterminant fonctionnel, le fait que le *bounce* extrémise l'action est exploité. Sous une déformation infinitésimale quelconque, le *bounce* doit être une configuration extrémale. Par exemple, un changement d'échelle est paramétré par une famille  $\lambda$  de transformations  $\phi_\lambda = \phi_B(x/\lambda) = \phi_B(x')$  [15]. L'action associée à cette nouvelle configuration  $\phi_\lambda$  est

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\lambda \partial^\mu \phi_\lambda + U(\phi_\lambda) \right] \\ &= \lambda^{d-2} \int d^d x' \frac{1}{2} \partial_{\mu'} \phi_B(x') \partial^{\mu'} \phi_B(x') + \lambda^d \int d^d x' U(\phi_B(x')) \\ &\equiv \lambda^{d-2} I_C + \lambda^d I_U. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pour  $\lambda = 1$ , on retrouve l'action du *bounce* que l'on définit  $S_B$ ,

$$S_\lambda \Big|_{\lambda=1} = S_E[\phi_B] \equiv S_B. \quad (2.35)$$

La variation de l'action par rapport à  $\lambda$  à cette valeur du paramètre doit s'annuler, car  $\phi_B$  est un extremum de l'action

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = (d-2)I_C + dI_U = 0. \quad (2.36)$$

Ce résultat est utilisé pour réexprimer l'action

$$S_B = I_C + I_U = \frac{2}{d}I_C = \frac{1}{d} \int d^d x (\partial_\mu \phi_B \partial^\mu \phi_B). \quad (2.37)$$

De plus, le *bounce* étudié a une invariance sous rotations  $O(d)$ . Dans chaque direction cartésienne, la contribution du terme cinétique à l'action est la même

$$\int d^d x (\partial_\mu \phi_B \partial^\mu \phi_B) = S_B, \quad \forall \mu \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \text{ pas de somme implicite.} \quad (2.38)$$

Avec ce résultat, on constate que le mode nul  $\partial_\mu \phi_B$  n'est pas normalisé. Il doit exister un tel mode normalisé  $(\psi_0)_\mu$ ,

$$\int d^d x (\psi_0)_\mu^2 = 1, \quad \forall \mu \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \text{ pas de somme implicite.} \quad (2.39)$$

$\partial_\mu \phi_B$  et  $(\psi_0)_\mu$  sont comparés grâce aux deux équations précédentes

$$(\psi_0)_\mu = S_B^{-1/2} \partial_\mu \phi_B. \quad (2.40)$$

D'autre part, une translation du centre *bounce* dans la direction  $x^\mu$  peut être formulée de deux façons :

$$\delta \phi \Big|_{\text{Translation en } x^\mu} = (dc_0)^\mu (\psi_0)_\mu = \frac{\partial \phi_B}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad \text{pas de somme implicite} \quad (2.41)$$

où le coefficient  $(dc_0)_\mu$  donne l'amplitude de la déformation de  $\phi$  par le mode  $(\psi_0)_\mu$ . En insérant le résultat (2.40) dans la dernière relation, la mesure  $(dc_0)_\mu$  est réexprimée par

$$(dc_0)^\mu = \frac{\frac{\partial \phi_B}{\partial x^\mu}}{(\psi_0)_\mu} dx^\mu = \sqrt{S_B} dx^\mu, \quad \text{pas de somme implicite} \quad (2.42)$$

Ce résultat permet d'extraire la contribution des modes nuls dans l'amplitude et de les exclure du calcul du déterminant. Les fluctuations dans la direction des modes zéros sont intégrées séparément

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E/\hbar} &= \int \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dc_n e^{-S_E/\hbar} \\ &= (2\pi\hbar)^{-d/2} \int (dc_0)^0 \dots \int (dc_0)^{d-1} \prod_{\substack{n \\ \{\text{modes zéro}\}}} \int (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dc_n e^{-S_E/\hbar} \\ &= \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} \int d^d x_R \int \prod_{\substack{n \\ \{\text{modes zéro}\}}} (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dc_n e^{-S_E/\hbar} \end{aligned} \quad (2.43)$$

où le résultat (2.42) a servi pour remplacer l'intégration sur les coefficients des modes nuls par une intégrale la position du centre du *bounce*  $x_R$ . L'amplitude devient enfin

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E/\hbar} = \mathcal{N} \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} VT \det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2} e^{-B/\hbar}, \quad (2.44)$$

où on a utilisé  $\int d^d x_R = VT$  et où  $\det'$  exclut maintenant les modes nuls.

### 2.1.6 *Multibounce*

Mise à part la configuration du faux vide homogène, le *bounce* est le point-selle dominant l'amplitude dans la limite semi-classique ; il s'agit de l'infimum d'action parmi les solutions classiques euclidiennes non triviales, du moins en espace-temps plat [14]. Des point-selles plus compliqués et d'action plus élevée peuvent être bâtis à partir du *bounce*. Spécifiquement, une succession d'un nombre  $n$  et  $n - 1$  de *bounces* et d'*anti-bounces* satisfait également les conditions frontières imposées au *bounce* (un *anti-bounce* fait un mouvement opposé au *bounce* :  $\phi_{\text{anti-B}} = \phi_+ + \phi_- - \phi_B$ ). De plus, comme chaque

sous-segment respecte les équations du mouvement, la solution globale les respecte également. Cette solution approximée est valide pour une séparation suffisante de chaque *bounce*, soit la limitée d'un gaz dilué d'instantons (un *bounce* correspond à un instanton). En principe, d'autres solutions classiques différentes pourraient être trouvées et contribuer à l'amplitude, mais l'étude sera limitée à cette configuration qu'on nommera le *n-bounce*.

Trouver la contribution d'un *n-bounce* général nécessite des ajustements mineurs par rapport au cas du 1-*bounce*. D'abord, une translation relative d'un sous-*bounce* laisse invariante l'action et constitue aussi un mode nul. Généralisant le résultat obtenu précédemment, cela signifie qu'il faut intégrer sur la position de chaque sous-*bounce*. Pour éviter le double comptage, les *bounces* sont ordonnés  $x_{R_1} < x_{R_2} < \dots < x_{R_n}$ . Cela correspond au facteur suivant [16]

$$\int d^d x_{R_1} \int d^d x_{R_2} \dots \int d^d x_{R_n} = \frac{V^n T^n}{n!}. \quad (2.45)$$

D'autre part, dans un gaz dilué, la faible interaction entre chaque segment assure que l'action d'un *n-bounce*  $\phi_{B;n}$  est simplement *n* fois l'action d'un 1-*bounce*

$$S_E[\phi_{B;n}] = nS_E[\phi_{B;1}] \equiv nS_B. \quad (2.46)$$

Avec ces ajustements, l'amplitude d'un *n-bounce* est donnée par

$$\mathcal{A}_{\phi_{B;n}} \sim \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{nd/2} \det'[-\partial^2 + U''(\phi_{B;n})]^{-1/2} e^{-nS_B/\hbar} \quad (2.47)$$

où un facteur de normalisation est omis. Le déterminant fonctionnel du *n-bounce* peut être exprimé en fonction de celui du 1-*bounce* ainsi que celui de la solution triviale du faux vide [17]

$$\frac{\det'[-\partial^2 + U''(\phi_{B;n})]}{\det[-\partial^2 + U''(\phi_{FV})]} = \left[ \frac{\det'[-\partial^2 + U''(\phi_B)]}{\det[-\partial^2 + U''(\phi_{FV})]} \right]^n \equiv \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{FV}]} \right]^n. \quad (2.48)$$

Enfin, l'amplitude du  $n$ -bounce s'écrit

$$\mathcal{A}_{\phi_{B;n}} \sim \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{nd/2} \det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{FV}]} \right]^{-n/2} e^{-nS_B/\hbar}. \quad (2.49)$$

L'amplitude totale, une fois toutes les configurations  $n$ -bounce prises en compte (en incluant le faux vide trivial qui est un 0-bounce)

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E/\hbar} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n T^n}{n!} \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{nd/2} \det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{FV}]} \right]^{-n/2} e^{-nS_B/\hbar} \\ &= \det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( VT \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{FV}]} \right]^{-1/2} e^{-S_B/\hbar} \right)^n \\ &= \det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2} \exp \left\{ VT \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{FV}]} \right]^{-1/2} e^{-S_B/\hbar} \right\}, \quad (2.50) \end{aligned}$$

où un facteur  $[1 + \mathcal{O}(\hbar)]$  est sous-entendu. À cette étape, on peut déjà isoler quelle composante de ce résultat fournit l'information sur le taux de désintégration qui se trouve dans l'existence d'un mode négatif.

### 2.1.7 Mode négatif

Cette section suit de près la réf. [10], mais beaucoup de détails concernant la continuation analytique à effectuer sont ajoutés.

Le déterminant fonctionnel n'est plus singulier suite au traitement adéquat des modes nuls. Il reste toutefois, dans le spectre de l'opérateur réduit, une valeur propre négative. L'existence du mode négatif est argumentée par inspection du mode zéro. La figure 2.5 montre que le mode zéro  $\partial_\mu \phi_B$  comporte un noeud ; un mode propre sans noeud et donc d'énergie moindre doit alors exister [18]. Il est à noter que la question de présence d'un mode négatif n'a toujours pas été traitée de façon rigoureuse en présence de gravitation. Pour de récentes avancées concernant la question, voir par exemple [19].

Un mode négatif est associé à une instabilité qui cause la désintégration du vide ; la relation entre la valeur propre négative et le taux de désintégration est trouvée en

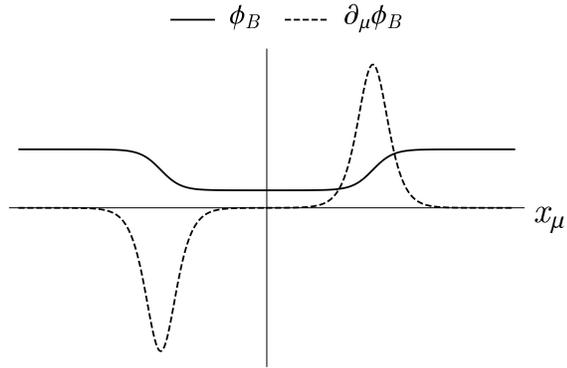


Figure 2.5 – Le *bounce* dans un axe particulier et le mode zéro associé à l'axe.

combinant (2.5) et (2.50)

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{\text{FV}} | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | \phi_{\text{FV}} \rangle &= e^{-E_0 T - i\Gamma T/2} \\
 &= \mathcal{N} \exp \left\{ VT \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{\text{FV}}]} \right]^{-1/2} e^{-S_B/\hbar} \right\}. \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Il suit que le taux de désintégration est donné par

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= -\frac{2}{T} \Im \left[ \log \left( \mathcal{N} \exp \left\{ VT \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} \left[ \frac{\det'[\mathbb{O}_B]}{\det[\mathbb{O}_{\text{FV}}]} \right]^{-1/2} e^{-S_B/\hbar} \right\} \right) \right] \\
 &= -\frac{2}{T} \left( \frac{VT \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} e^{-S_B/\hbar}}{\det[\mathbb{O}_{\text{FV}}]^{-1/2}} \Im \left\{ \det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2} \right\} \right) \\
 &= 2V \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} e^{-S_B/\hbar} \frac{|\det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2}|}{\det[\mathbb{O}_{\text{FV}}]^{-1/2}}. \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

L'unique valeur propre négative du déterminant fonctionnel a permis d'écrire

$$\det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2} = -i \left| \det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2} \right|. \quad (2.53)$$

Ce traitement illustre le lien entre le mode négatif et le taux de désintégration. En réalité, le schéma proposé n'est pas tout à fait juste, puisqu'un état métastable ne peut

être décrit comme état propre de l'hamiltonien. Pour bien traiter l'effet d'un mode négatif, il faut faire une continuation analytique de l'intégrale de chemin originale. La procédure est expliquée à la prochaine section.

### 2.1.7.1 Action du *bounce* et continuation analytique

L'action du *bounce* en fonction du rayon  $\bar{\rho} \equiv R$  a été trouvée en (2.6) :

$$S_B = \int d\Omega \left( -\frac{\varepsilon}{d} R^d + \sigma R^{d-1} \right). \quad (2.54)$$

Un exemple de l'action pour  $d = 3$  est montré à la figure 2.6. La configuration du *bounce* se trouve à  $R = R_0$  où l'action est maximale. La figure 2.6 montre qu'une fluctuation positive ou négative du rayon de la configuration par rapport à  $R_0$  diminue son action. Par-dessus tout, l'action n'est pas bornée inférieurement dans le domaine  $R > R_0$ . Ainsi, si ce genre de fluctuations étaient incluses dans le calcul de l'intégrale de chemin, leur contribution ferait diverger l'intégrale de chemin donnant l'amplitude

$$\int \mathcal{D}\eta e^{-S_E/\hbar} \sim \int_0^\infty dR e^{\int d\Omega (\frac{\varepsilon}{d} R^d - \sigma R^{d-1})/\hbar} \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

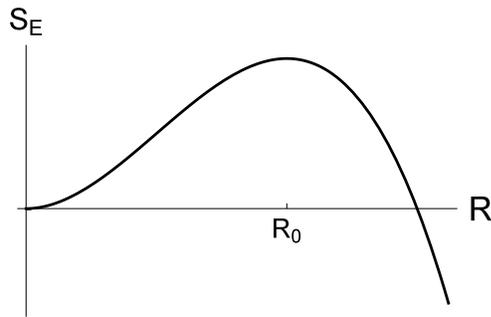


Figure 2.6 – Action du *bounce*  $S_E[\phi_B]$  en fonction de  $\bar{\rho} = R$  pour  $d = 3$ .

Le problème de départ est donc mal posé. On peut néanmoins trouver une version adéquate du problème en redéfinissant l'intégrale de chemin à l'aide d'une continuation

analytique. Considérons le problème plus général où il faut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} dR e^{-(\alpha R^d + \beta R^{d-1})}, \quad (2.56)$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Pour que l'intégrale soit convergente, l'argument de l'exponentielle doit minimalement respecter

$$\alpha R^d > 0, \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

Avec  $\alpha > 0$ , l'exponentielle tend vers 0 pour  $R \rightarrow \infty$  et l'intégrale est convergente. Avec  $\alpha < 0$  (le cas pertinent pour la désintégration du faux vide), l'intégrale diverge. L'intégrale avec  $\alpha > 0$  peut être déformée dans le plan complexe afin de trouver une définition alternative qui conviendra également pour  $\alpha < 0$ . La figure 2.7 montre un tel changement du chemin d'intégration qui est tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe réel. En ajoutant un arc de cercle qui ramène le chemin à l'axe des réels, ce chemin et celui sur l'axe réel forment un contour fermé. L'absence de singularités dans l'intégrand assure alors l'équivalence des deux chemins par le théorème des résidus. Pour certaines valeurs de l'angle  $\theta$ , l'intégrand demeure nul à l'infini et l'intégration sur l'arc de cercle est nulle. Les deux segments droits séparés seulement par un angle  $\theta$  donnent alors le même résultat.

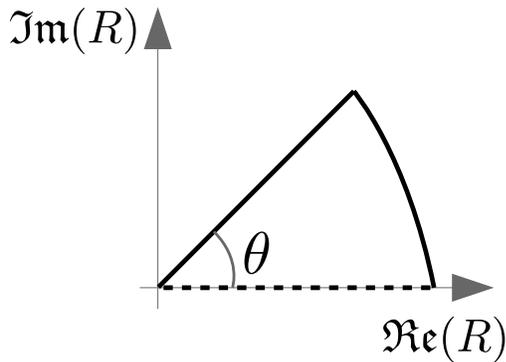


Figure 2.7 – Déformation de l'intégrale définie en (2.56) dans le plan complexe  $R$ .

Seulement un certain intervalle de valeurs de  $\theta$  définit une déformation adéquate où

l'intégrale (2.56) converge toujours pour  $\alpha > 0$ . À l'extérieur de cet intervalle, l'intégrale converge plutôt pour  $\alpha < 0$ . Ainsi, bien que l'intégration soit mal définie sur l'axe des réels pour  $\alpha < 0$ , une continuation analytique bien définie consiste à dévier suffisamment le contour d'intégration original.

L'effet de  $\theta$  sur la convergence de l'intégrale est précisé avec un critère de convergence généralisé qui traite  $R \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas, la condition (2.57) devient

$$\operatorname{sgn}\left(\Re\left\{\alpha R^d\right\}\right) > 0, \quad \Re\{R\} > 0. \quad (2.58)$$

En fait, cette contrainte pourrait être exigée seulement à l'infini, mais le signe  $\alpha R^d$  ne change pas le long du contour. En supposant toujours  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il suit que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\Re\left\{\alpha R^d\right\}\right) &= \operatorname{sgn}\left(\alpha \Re\left\{R^d\right\}\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(\alpha |R^d| \cos(d\theta)\right) \\ &= (\operatorname{sgn} \alpha) (\operatorname{sgn} \cos(d\theta)) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Pour  $\alpha < 0$ , la condition de convergence (2.58) devient

$$\cos(d\theta) < 0. \quad (2.60)$$

Pour remplir cette condition, l'angle de déviation minimal, restreint au premier quadrant  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , se situe dans l'intervalle

$$\frac{\pi}{2d} < \theta < \inf\left\{\frac{3\pi}{2d}, \frac{\pi}{2}\right\}. \quad (2.61)$$

Dans ce cas, l'intégrale déviée dans le plan complexe pour  $\alpha < 0$  (le cas d'intérêt pour la désintégration du faux vide) converge. La continuation analytique consiste donc à déformer l'intégration originale en faisant passer  $\theta$  de 0 à  $(\pi/2d)^+$ , par exemple.

On peut penser à la continuation analytique en imaginant une transformation étape par étape de l'intégrale bien définie pour  $\alpha > 0$ . Le point de départ serait la définition plus naturelle, soit l'intégration sur l'axe des réels, correspondant à  $\theta = 0$ . Le chemin

d'intégration peut être déformé continument jusqu'à une déviation maximale de  $\theta \rightarrow (\frac{\pi}{2d})^-$  pour laquelle l'intégrale est encore bien définie. Par la suite, il ne suffit pas changer le signe de  $\alpha$ , puisque  $\theta$  serait tout juste hors de l'intervalle défini à l'éq. 2.61. Cependant, en conférant une petite partie imaginaire  $\alpha$ , on peut se convaincre que la partie réelle de l'argument de l'exponentielle peut garder son signe alors que  $\alpha$  change de signe, ce qui laisse l'intégrale convergente.

### 2.1.7.2 Méthode du col et résultat final

Il a été argumenté que l'intégrale (2.55) avec domaine  $R \in \mathbb{R}^+$  est mal définie ; il faut considérer sa continuation analytique, qui consiste en un chemin d'intégration pivoté par un angle  $\theta \rightarrow (\frac{\pi}{2d})^+$  dans le plan complexe. Pour réaliser l'intégration, il est utile de déformer le contour une fois de plus. Le nouveau contour proposé est montré à la figure 2.8. Le premier segment longe l'axe réel jusqu'au point critique  $R_0$ . Cette partie est strictement réelle et peut être omise pour le reste de la discussion. L'intérêt d'intégrer jusqu'au point  $R_0$  est qu'il s'agit d'un minimum de  $S_E$  dans la direction imaginaire. Pour être plus précis, on peut suivre à partir de ce point, un chemin où la partie réelle de l'action connaît la plus forte croissance. Les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique sont constantes sur des lignes qui se coupent perpendiculairement [18]. Donc, il faut choisir le chemin où la partie imaginaire est constante à partir de  $R_0$  puisqu'il s'agit de la direction du gradient de la partie réelle. Le chemin tracé à la figure 2.8 respecte cette contrainte pour l'action (2.54) dans le cas  $d = 3$ . Ainsi, tout le long du chemin d'intégration, l'intégrand est strictement réel ; la contribution imaginaire à l'intégrale vient seulement de la mesure qui devient complexe au moment où le chemin d'intégration dévie dans la partie supérieure du plan complexe.

Avec  $\hbar \ll 1$ , l'exponentielle  $e^{-S_E/\hbar}$  devient rapidement négligeable en s'éloignant du minimum  $S_E(R_0)$  par le chemin proposé. L'approximation peut être appliquée ; il suffit de garder une petite portion de l'intégration près du point critique. Avec ce raisonnement, un

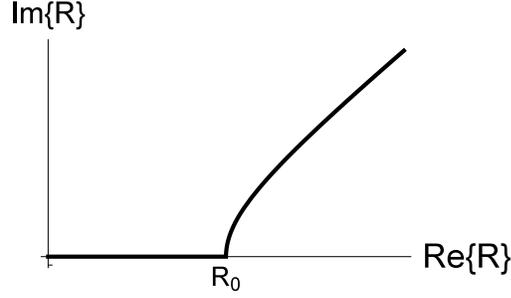


Figure 2.8 – Continuation analytique de l'intégrale définie en (2.56) sur le chemin permettant l'approximation du col pour  $d = 3$ .

développement limité de l'action est réalisé pour écrire la partie imaginaire de l'amplitude

$$\begin{aligned}
\Im(A) &\approx \Im \left( \int_{R_0}^{R_0+i\delta} dR (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{S_E(R_0)}{\hbar}} e^{-\frac{1}{2} \frac{S_E''(R_0)}{\hbar} (R-R_0)^2} \right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&\approx (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{S_E(R_0)}{\hbar}} \Im \left( \int_0^{i\infty} dR e^{-\frac{1}{2} \frac{S_E''(R_0)}{\hbar} R^2} \right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{S_E(R_0)}{\hbar}} \Im \left( \int_0^{\infty} idR e^{\frac{1}{2} \frac{S_E''(R_0)}{\hbar} R^2} \right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{S_E(R_0)}{\hbar}} \left( \int_0^{\infty} dR e^{-\frac{1}{2} \frac{|S_E''(R_0)|}{\hbar} R^2} \right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= \frac{1}{2} e^{-\frac{S_E(R_0)}{\hbar}} |S_E''(R_0)|^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Par rapport au résultat (2.52), il y a donc un facteur  $1/2$  supplémentaire.  $S_E(R_0)$  correspond simplement à l'action du *bounce*  $S_B$ . Quant à la dérivée seconde, il s'agit de la valeur propre du mode négatif

$$S_E''(R_0) = \left. \frac{\partial^2 S_E}{\partial R^2} \right|_{R=R_0} \equiv \lambda_{-1}. \tag{2.63}$$

La bonne expression pour le taux de désintégration par unité de volume est ainsi donnée par

$$\Gamma/V = \left( \frac{S_B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} e^{-S_B/\hbar} |\lambda_{-1}|^{-1/2} \frac{\det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2}}{\det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2}}. \tag{2.64}$$

où  $\det'$  exclut maintenant les modes zéro et le mode négatif.

Pour finir l'analyse, il est important de dire un mot sur la normalisation de l'énergie. Tel que présenté à la figure 2.1, le faux vide a une densité d'énergie nulle. Dans un tel cas, notre démarche ci-haut est bien définie : le *bounce* tend asymptotiquement vers le faux vide qui donne une contribution nulle à l'action. Par contre, pour une densité d'énergie non nulle du faux vide, l'action du *bounce* deviendrait infinie. Il est attendu que l'amplitude soit finie. Il est plus convenable d'utiliser la différence d'action entre le *bounce* et la configuration d'arrière-plan, le faux vide

$$B = S_B - S_{FV}. \quad (2.65)$$

Le taux de désintégration par unité de volume devrait donc s'écrire en toute généralité (en particulier si  $S_{FV} \neq 0$ ) [10]

$$\Gamma/V = \left( \frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{d/2} e^{-B/\hbar} |\lambda_{-1}|^{-1/2} \frac{\det'[\mathbb{O}_B]^{-1/2}}{\det[\mathbb{O}_{FV}]^{-1/2}}. \quad (2.66)$$

## 2.2 Solitons topologiques

Dans un autre ordre d'idées, les concepts de topologie nécessaires pour comprendre l'apparition de défauts topologiques dans une théorie des champs sont introduits. Un théorème de non-existence pour certaines classes de solitons est également démontré.

### 2.2.1 Homotopie et configurations topologiques non triviales

La théorie d'homotopie est un outil mathématique utile pour classer et caractériser des configurations de champs. Elle repose sur la notion d'espaces topologiques. Un ensemble  $E$  est un espace topologique s'il est possible d'y définir des ouverts, tel que : l'intersection d'un nombre fini d'ouvert est un ouvert ; l'union d'un nombre quelconque d'ouvert est un ouvert. Avec ces objets, on arrive à définir le concept plus familier de voisinage et de limite dans les espaces métriques où la notion de distance est introduite [20]. Les systèmes physiques respectent généralement ces conditions.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Soit  $f$  une fonction donnant une carte entre ces espaces

$$f: X \rightarrow Y, \quad (2.67)$$

$$x \mapsto y = f(x). \quad (2.68)$$

Deux telles fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont dites homotopiques si on peut passer d'une fonction à l'autre par des transformations continues. Il faut être en mesure de définir une famille continue de fonctions reliant  $f_1$  et  $f_2$ . Dans ce cas, on dit que  $f_1$  et  $f_2$  qu'ils ont la même topologie. De plus, pour une troisième fonction  $f_3$  homotopique à  $f_2$ ,  $f_1$  et  $f_3$  sont aussi homotopiques. Une transformation continue existe forcément entre ces deux fonctions : il suffit de transformer continument  $f_1$  vers  $f_2$  puis  $f_2$  vers  $f_3$ . L'homotopie est donc une relation d'équivalence, ce qui permet de regrouper les différentes fonctions en classes d'équivalence  $\mathcal{C}$ .

Étant donné un ensemble de classes homotopiques  $\{\mathcal{C}\}$ , on peut montrer qu'elles forment un groupe  $C$ . Le produit de groupe de deux éléments  $\mathcal{C}_1 \star \mathcal{C}_2$  peut être réalisé en identifiant la classe d'homotopie d'une carte  $f_3$  résultant de la jonction de deux cartes  $f_1, f_2$  dans les classes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  respectivement. Pour mieux définir ce qui est sous-entendu par « jonction de deux cartes », considérons un exemple. Soit l'ensemble des fonctions  $\{f\}$  appliquant le cercle vers lui-même,

$$f: S^1 \rightarrow S^1, \quad (2.69)$$

$$t \mapsto y = f(t). \quad (2.70)$$

Une paramétrisation possible du cercle de départ est donnée par  $t \in [0, 1]$  où  $t = 0$  et  $t = 1$  sont identifiés. Il sera donc exigé que l'image respecte  $y|_{t=0} = y|_{t=1} = y_0$ . Étant donné que les extrémités de l'image sont fixées au même point, on peut se convaincre que l'image va réaliser un nombre entier de fois le tour du cercle d'arrivée. C'est ce nombre d'enroulements qui définit la classe d'homotopie de la carte et qui constitue un invariant topologique. Il est possible d'adjoindre deux cartes  $f_1$  et  $f_2$  «bout-à-bout»

puisqu'elles ont le même point initial et final,  $f_1(1) = f_2(0) = y_0$ . Leur produit donne donc une troisième carte  $f_3$  que l'on peut définir comme

$$f_3(t) = (f_1 \star f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 < t < 1/2, \\ f_2(2t - 1), & 1/2 < t < 1. \end{cases} \quad (2.71)$$

$f_3$  est donc une fonction continue. Étant donné que les cartes sont jointes au point de base  $y_0$ , il est aisé de se convaincre que le nombre d'enroulements de  $f_3$  est simplement  $n_3 = n_1 + n_2$ . La topologie de  $f_3$  est définie, cette carte fait partie d'une classe d'homotopie et la fermeture du produit  $\star$  est observée.

De la relation  $n_3 = n_1 + n_2$  trouvée de la jonction de cartes  $f_3 = f_1 \star f_2$ , l'existence d'un neutre est facile à montrer ; une carte  $f_1$  dont le nombre d'enroulements est nul adjointe à une deuxième carte  $f_2$  ne change pas le nombre d'enroulements de cette dernière :  $n_3 = 0 + n_2 = n_2$ . Dans ce cas,  $f_3$  et  $f_2$  font partie d'une même classe homotopique. On dit d'une telle carte  $f_1$  qu'elle fait partie d'une classe topologique triviale. Par exemple, la carte qui envoie tous les éléments de  $S^1$  vers un seul point de  $S^1$  fait partie de cette classe. Cette classe a la propriété du neutre

$$\mathcal{E} \star \mathcal{C} = \mathcal{C} \star \mathcal{E} = \mathcal{C}. \quad (2.72)$$

Quant à l'existence d'un inverse, elle peut se voir aisément avec le produit de cartes suivantes

$$f_0(t) = (f_1 \star f_1^{-1})(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 < t < 1/2, \\ f_1(1 - 2t), & 1/2 < t < 1. \end{cases} \quad (2.73)$$

Le deuxième segment fait le parcours opposé du premier segment ; la carte dans son ensemble a forcément une topologie triviale, donc revient à l'élément neutre

$$\mathcal{C} \star \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^{-1} \star \mathcal{C} = \mathcal{E} \quad (2.74)$$

Bien que les arguments montrant la structure de groupe aient été considérés à l'aide

de cartes spécifiques, les arguments employés font référence à la topologie et s'appliquent à toutes les cartes dans une classe donnée. Le produit de carte a de plus été défini pour un cas spécifique ( $S^1 \rightarrow S^1$ , qui est le cas pertinent dans l'étude présentée), mais une généralisation est possible.

Dans les applications d'intérêt en théorie des champs, l'espace topologique  $X$  représente l'espace-temps, ou du moins un de ses sous-espaces. Un champ agit à titre de fonction  $f$  et envoie les points de l'espace-temps  $X$  vers un ensemble d'arrivée  $Y$ . Par exemple, l'ensemble d'arrivée d'un champ scalaire réel est l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ . La notion d'homotopie devient utile en théorie des champs s'il existe des classes d'homotopie non triviales, ce qui peut être le cas d'une théorie physique qui présente une brisure spontanée de symétrie. Ce phénomène est expliqué à la prochaine section.

### 2.2.2 Brisure spontanée de symétrie et solitons topologiques

Soit  $G$  le groupe de symétrie interne associé à une théorie physique. Une brisure spontanée de symétrie survient lorsque le vide de la théorie en question présente une symétrie  $H_i$  moins grande que  $G$ . La symétrie du vide peut changer dans le temps suite à des transitions de phase

$$G \rightarrow H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_N \equiv H. \quad (2.75)$$

Soit  $\Phi_0^I$  un vide de la théorie, où  $\Phi^I$  définit un ensemble général de champ : à priori un champ scalaire sera supposé pour réaliser la brisure de symétrie, mais d'autres types de champs peuvent être considérés en plus. L'indice latin majuscule fait référence à tous les champs présents, en incluant chaque composante des champs vectoriels et ainsi de suite. Le vide est une solution triviale aux équations du mouvement de la théorie. Soient  $T_g$  et  $T_h$ , des représentations des éléments  $g \in G$  et  $h \in H$ , respectivement. Alors

$$T_g E[\Phi_0^I] = E[\Phi_0^I], \quad T_h \Phi_0^I = \Phi_0^I. \quad (2.76)$$

L'action du groupe  $G$  préserve nécessairement l'énergie du vide (et de toutes configurations) ; l'action du groupe  $H$  impose une condition plus forte, soit l'invariance du vide.

Un élément faisant partie de  $G$  mais pas de  $H$  fait partie du groupe quotient  $G/H$  (à condition que  $H$  soit un sous-groupe de  $G$  [7]). L'action successive  $T_g$  sur  $\Phi_0^I$  pour tous les  $g \in G/H$  génère une surface de vides  $\mathcal{V}$ . On note, plus simplement,

$$\mathcal{V} = G/H. \quad (2.77)$$

Une brisure spontanée de symétrie peut dans certains cas se faire en l'absence d'un champ scalaire, par exemple voir [21]. Néanmoins, une façon assez courante de réaliser ce phénomène se fait avec un champ scalaire dont la valeur d'attente devient non-nulle. C'est possible dans la mesure où une auto-interaction du champ scalaire est considérée. Cette interaction est encodée dans une densité d'énergie potentielle  $U(\phi)$ . Le vide  $\Phi_0^I$ , en particulier le champ scalaire  $\phi_0$  associé, minimise cette fonction  $U(\phi)$ . Une surface de vides dégénérés est alors présente s'il existe plusieurs valeurs du champ scalaire minimisant l'énergie.

Le lien avec la théorie d'homotopie survient précisément si le champ scalaire est contraint à occuper cette surface de vides à l'infini. Considérons, pour motiver cette contrainte, une configuration classique  $\Phi_S^I(x^\mu)$ , une solution des équations de mouvement distincte du vide. La configuration s'éloigne à certains endroits du vide ambiant  $\Phi_0^I$ . S'il est imposé que  $\Phi_S^I$  ait une énergie finie relativement à celle du vide, l'intégrale sur la différence en densité d'énergie entre ces configurations doit converger. Cela implique que la différence d'énergie potentielle doit respecter

$$\int d^d x [U(\phi_S) - U(\phi_0)] < \infty, \quad [U(\Phi_S^I) - U(\Phi_0^I)] \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.78)$$

L'intégrale converge si l'intégrant tend asymptotiquement vers 0. Il faut donc que  $\Phi_S^I$  atteigne la surface de vides à l'infini spatial

$$\Phi_S^I \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \in \mathcal{V}. \quad (2.79)$$

Cette dernière contrainte revient à poser une carte entre deux espaces topologiques,

en l'occurrence une carte entre la sphère à l'infini spatial et la surface des vides de la densité d'énergie potentielle,

$$X = S_{\infty}^{d-1} \rightarrow Y = \mathcal{V}. \quad (2.80)$$

Les théories permettant la formation de solitons topologiques sont celles munies de classes homotopiques non triviales ; il doit exister des cartes  $S_{\infty}^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}$  dont la topologie est différente de celle du vide. Pour passer d'un soliton topologique au vide, il faudrait déformer la valeur asymptotique du champ pour passer d'un secteur topologique à l'autre. Puisqu'il n'existe pas, par définition, de transformation continue entre ces deux secteurs, la déformation demande une densité d'énergie non nulle à l'infini, qui se traduit par un coût infini en énergie. Les solitons topologiques sont donc protégés du vide par une barrière énergétique.

Les classes homotopiques non triviales sont répertoriées par le groupe d'homotopie. Dans le cas particulier où l'espace topologique de départ est une sphère  $S^N$  qu'on veut envoyer vers  $\mathcal{V} = G/H$ , on note  $\pi_N(\mathcal{V})$  le groupe d'homotopie associé. Par exemple, le vortex est un défaut topologique de dimension deux qui provient de la brisure de la symétrie  $U(1)$ , le groupe d'homotopie est donné par  $\pi_1(U(1)/I) = \mathbb{Z}$  [15]. Un indice topologique entier caractérise ainsi le vortex. De même, l'indice topologique du monopôle est aussi entier en vertu d'une relation correspondante adaptée au cas du monopôle  $\pi_2(SO(3)/SO(2)) = \mathbb{Z}$ .

Il existe aussi des solitons topologiques qui sont bâtis à partir de la brisure d'une symétrie discrète. Par exemple, le *kink*, localisé en une dimension, brise la symétrie  $\mathbb{Z}_2$ . Dans ce cas, l'infini spatial et la surface de vides sont des espaces discrets. Il est aussi possible de définir les notions de topologie et d'homotopie sur de tels espaces. L'invariant topologique est alors classé par  $\pi_0(\mathbb{Z}_2) \times \pi_0(\mathbb{Z}_2)$  (les deux points à l'infini sont deux 0-sphères) [3]. Il y a quatre éléments dans cet ensemble, deux pour les deux vides différents, deux pour le *kink* et l'*anti-kink*.

Le *kink*, le vortex et le monopôle sont trois solitons topologiques prototypes. Leur dimension et leur surface de vides associées sont montrées au tableau 2.I.

Dimension du soliton	Surface de vides $\mathcal{V} = G/H$	Soliton topologique associé
1	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{I}$	Mur de domaine
2	$U(1)/\mathbb{I}$	Vortex
3	$SO(3)/SO(2)$	Monopôle

Tableau 2.I – Trois solitons topologiques typiques.

Des structures de vide  $\mathcal{V}$  différentes permettent la formation d'autres types de solitons topologiques. Dans tous les cas, le groupe d'homotopie associé  $\pi_N(\mathcal{V})$  peut être non trivial seulement si  $G$  est un groupe de Lie simple et compact [22] (en excluant le cas particulier des groupes discrets).

D'autre part, on peut formuler une brisure spontanée de symétrie autrement que par l'entremise d'une densité d'énergie potentielle  $U(\phi)$  explicite. Une contrainte non linéaire peut être imposée sur les champs de la théorie. Par exemple, dans le modèle sigma non linéaire en  $2 + 1$  dimensions défini par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{n} \cdot \partial^\mu \hat{n}, \quad \hat{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad (2.81)$$

le champ  $\hat{n}$  satisfait la contrainte

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1. \quad (2.82)$$

Un soliton statique peut être formé. D'abord,  $\hat{n}$  doit atteindre une valeur constante à l'infini, sans quoi une densité d'énergie non nulle y est observée et l'énergie diverge. Dès lors, l'infini spatial est identifié, le plan  $\mathbb{R}^2$  est compactifié en  $S^2$ . Les points de l'espace doivent être envoyés sur la deux-sphère  $S^2$  décrite par  $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ ,

$$S^2 \rightarrow S^2. \quad (2.83)$$

Les classes d'homotopie sont alors décrites par le même groupe d'homotopie que celui du monopôle puisque  $S^2 \cong SO(3)/SO(2)$  [3], donc

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (2.84)$$

### 2.2.3 Théorème de non-existence pour les solitons

Il a été argumenté que des configurations de champs étendues à la topologie non triviale peuvent en principe être formées dans certaines théories montrant une brisure spontanée de symétrie. L'existence de ces dernières solutions n'est cependant pas garantie ; elles doivent satisfaire les équations de mouvement classiques de la théorie physique. Il existe des théorèmes de non-existence démontrant qu'au-delà d'une certaine dimension maximale d'espace, il est impossible de former une configuration étendue statique. Le théorème présenté par Goddard et Mansfield dans [23] concerne certaines classes de théories des champs comprenant un champ scalaire et un champ de jauge ; il est reproduit dans ce qui suit.

Soit un modèle physique dans un espace-temps de Minkowski en  $D + 1$  dimensions comportant un champ scalaire (au sens spatio-temporel) complexe  $\phi^a$  et un champ de jauge  $A_\mu^a$ . Le modèle est défini par une densité lagrangienne  $\mathcal{L}[\phi^a, \partial_\mu \phi^a, A_\mu^a, \partial_\mu A_\nu^a]$ . Une configuration statique dans la jauge  $A_0^a = 0$  est considérée. Son énergie est donnée par

$$E[\phi, \partial\phi, A, \partial A] = T_\phi[\phi, \partial\phi, A] + T_A[\partial A] + V[\phi] \quad (2.85)$$

où

$$T_\phi[\phi, \partial\phi, A] = \int d^D x (D_i \phi^a)^\dagger D_i \phi^a, \quad (2.86)$$

$$T_A[A] = \frac{1}{4} \int d^D x F_{ij}^a F_{ij}^a, \quad (2.87)$$

$$V[\phi] = \int d^D x U[\phi^a]. \quad (2.88)$$

$U$  est une fonction positive de  $\phi^a$  qui s'annule dans le vide. Le terme cinétique du champ scalaire fait intervenir une dérivée covariante  $D_\mu \phi^a = \left( \delta^{ac} \partial_\mu + ig A_\mu^b (t^b)_{ac} \right) \phi^c$ , où  $g$  est la charge,  $t^b$  est une représentation hermitienne d'un générateur de l'algèbre de Lie considérée. La courbure du champ de jauge est donnée par  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , où  $f^{abc}$  sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie. Ainsi, tous les sous-termes de l'énergie sont définis positifs. Pour que l'énergie reste finie, il faut que

tous les termes soient finis.

Soit une configuration de champs étendue définie par  $\Phi^a(x^\mu), \mathcal{A}_\mu^a(x^\mu)$ . Il est question dans ce qui suit de déterminer si cette configuration peut être une solution classique. Une transformation sous laquelle la configuration en question n'extrémise pas l'action suffit pour montrer qu'elle n'est pas une solution classique. Une grande classe de configurations étendues peuvent être exclues par ce principe en considérant un changement d'échelle  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu$  où les champs se transforment comme

$$\Phi_\lambda^a(x^\mu) = \Phi^a(\lambda x^\mu) = \Phi^a(x'^\mu) \quad (2.89)$$

$$(\mathcal{A}_\lambda)_\mu^a(x^\mu) = \mathcal{A}_\mu^a(\lambda x^\mu) = \lambda (\mathcal{A}'_\mu)^a(x'^\mu). \quad (2.90)$$

Pour  $\lambda = 1$ , on retrouve la configuration initiale. Lors du passage de  $\mathcal{A}_\mu^a$  vers  $\mathcal{A}'_\mu^a$ , un changement de variable  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu$  a été effectué. Plus formellement, sous changement de coordonnées, un tenseur  $t_\mu$  se transforme comme

$$t_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} t'_\nu = \lambda \delta_\mu^\nu t'_\nu = \lambda t'_\mu. \quad (2.91)$$

Le terme cinétique dépend aussi d'une dérivée partielle  $\partial_\mu = \lambda \partial'_\mu$  qui a les mêmes propriétés de transformation. Ainsi, la dérivée covariante et le tenseur de force du champ de jauge gagnent également des facteurs de  $\lambda$  sous la transformation

$$D_\mu \Phi_\lambda(x^\mu) = \lambda D'_\mu \Phi(x'^\mu), \quad (2.92)$$

$$(\mathcal{F}_\lambda)_{\mu\nu}^a(x^\mu) = \lambda^2 \mathcal{F}'_{\mu\nu}{}^a(x'^\mu). \quad (2.93)$$

Étant donné l'invariance du champ scalaire sous la transformation, la densité d'énergie potentielle  $U(\Phi^a)$  est également invariante.

On souhaite calculer l'énergie statique suite à ce changement d'échelle. Il est utile de changer la variable d'intégration impliquée dans ce calcul. Par exemple, pour l'intégrale

sur la densité d'énergie potentielle,

$$V[\Phi_\lambda^a] = \int d^D x U[\Phi^a(\lambda x^\mu)] = \lambda^{-D} \int d^D x' U[\Phi^a(x'^\mu)] = \lambda^{-D} V[\Phi^a]. \quad (2.94)$$

Pour les autres composantes de l'énergie, le même raisonnement s'applique, mais il faut aussi prendre en considération la propriété de transformation des tenseurs qui inclut des facteurs de  $\lambda$ . L'énergie statique d'une déformation  $\Phi_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  (en omettant les indices de jauge et d'espace-temps) est alors donnée par

$$\begin{aligned} E[\Phi_\lambda, \mathcal{A}_\lambda] &= T_\phi[\Phi_\lambda, \partial\Phi_\lambda, \mathcal{A}_\lambda] + T_A[\partial\mathcal{A}_\lambda] + V[\Phi_\lambda] \\ &= \lambda^{2-D} T_\phi[\Phi, \partial\Phi, \mathcal{A}] + \lambda^{4-D} T_A[\partial\mathcal{A}] + \lambda^{-D} V[\Phi] \end{aligned} \quad (2.95)$$

À même titre que l'action, l'énergie statique est extrémisée à  $\lambda = 1$  si la configuration étendue est une solution statique, c'est-à-dire

$$\left. \frac{dE[\Phi_\lambda, \mathcal{A}_\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-D)T_\phi[\Phi, \partial\Phi, \mathcal{A}] + (4-D)T_A[\partial\mathcal{A}] - DV[\Phi] = 0. \quad (2.96)$$

Étant donné que  $T_\phi, T_A$  et  $V$  sont tous positifs, seulement certaines valeurs de  $D$  peuvent respecter cette dernière condition. Le tableau 2.II montre le signe des contributions dans l'équation ci-haut en fonction de la dimension  $D$ . Pour  $D = 1$ , il est possible d'avoir seulement un champ scalaire ( $T_A = 0$ ) puisque  $(2-D)T_\phi$  et  $(-D)V$  ont des signes opposés et peuvent s'annuler pour respecter la condition (2.96). Ce n'est pas le cas pour  $D > 1$ ; un soliton formé uniquement d'un champ scalaire est donc limité à une dimension de 1. Il s'agit du théorème de Derrick [24]. Le modèle d'un potentiel quartique présentant un double puits permet de former un *kink*. Une solution semblable est aussi trouvée dans la théorie de sine-Gordon, un modèle jouet introduit en [25] pour simplifier le modèle des mésons et baryons de Skryme.

L'ajout d'un champ de jauge permet toutefois d'obtenir des solitons d'une dimension comprise entre deux et quatre. Pour  $D = 2$ , une théorie d'électrodynamique scalaire avec une symétrie de jauge  $U(1)$  brisée spontanément permet de former un vortex [26]. De

même, pour  $D = 3$ , on peut former un monopôle magnétique [27, 28, 29]. Pour  $D = 4$ , la seule façon de respecter l'égalité est de prendre  $T_\phi = V = 0$ , donc retirer le champ scalaire et conserver seulement un champ de jauge (sans masse). La 4<sup>e</sup> dimension spatiale correspond au temps euclidien utilisé pour décrire un instanton. Ainsi, le théorème n'exclut pas des instantons dans les théories de jauge pure. On retrouve effectivement des instantons dans la théorie de Yang-Mills [30].

Pour  $D \geq 5$ , même l'ajout d'un champ de jauge ne peut stabiliser une configuration étendue devant les déformations par changement d'échelle. Ainsi, des solitons avec une dimension supérieure ou égale à cinq (qu'on considérerait seulement dans les théories prédisant des dimensions supplémentaires) n'existent pas dans le modèle considéré.

$D$	$(2-D)T_\phi$	$(4-D)T_A$	$(-D)V$
1	+	+	-
2	0	+	-
3	-	+	-
4	-	0	-
$D \geq 5$	-	-	-

Tableau 2.II – Signe des contributions à l'énergie statique du soliton en fonction de la dimension de l'espace.

Ce diagnostic s'applique seulement aux solitons statiques définis par l'énergie (2.85). Dans certains cas, il est aussi utile d'inclure des termes non renormalisables qui sortent du cadre de cette description. De tels termes peuvent décrire une théorie effective. C'est le cas du modèle de Skyrme, qui s'inscrit dans la famille des modèles sigma non linéaires. Il s'agit d'une approximation de la chromodynamique quantique à basse énergie où les degrés de liberté sont les pions. Dans ce cas, un terme cinétique d'ordre supérieur permet de stabiliser les skyrmions : ce sont des solitons topologiques candidats pour une description effective des baryons, soient des états liés de quarks.

## CHAPITRE 3

### MODÈLE ABÉLIEN DE HIGGS, VORTEX ET GRAVITÉ

Les idées de désintégration du faux vide et de solitons topologiques introduites au dernier chapitre seront essentielles dans l'étude de vortex métastables. Avant d'ajouter l'effet de la gravitation sur de tels objets, le vortex obtenu dans le modèle abélien de Higgs, d'abord trouvé par Nielsen et Olesen [26], est revisité. La généralisation gravitationnelle obtenue dans [31, 32] est aussi revue. D'autre part, le modèle abélien de Higgs modifié qui a été étudié dans [12] et abritant des vortex métastables est introduit. L'action la plus générale d'électrodynamique scalaire en espace-temps courbe est d'abord présentée.

#### 3.1 Électrodynamique scalaire minimalement couplée à la gravité

L'action de l'électrodynamique scalaire en  $d = D + 1$  dimensions et couplée minimalement à la gravité est donnée par

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \right] \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - U(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ici,  $g = \det g_{\mu\nu}$ ;  $c$  est le jacobien  $\sqrt{-g}$  qui assure un couplage minimal entre la métrique  $g_{\mu\nu}$  de l'espace-temps  $\mathcal{M}$  et les champs de matière. La masse de Planck est donnée par  $M_p^2 = \kappa^{-1} \equiv (8\pi G)^{-1}$ .  $R = R^\mu{}_\mu$  dénote la courbure de Ricci de l'espace-temps.  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est le tenseur de Faraday associé au champ de jauge  $A_\mu$  associé à la symétrie locale et abélienne  $U(1)$ . Le terme cinétique du champ scalaire complexe  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  est une dérivée covariante,  $D_\mu \phi = (\nabla_\mu + ieA_\mu)\phi$ , où  $e$  est la charge électrique. Enfin, la densité d'énergie potentielle  $U(\phi)$  donne la masse et l'auto-interaction du champ  $\phi$ . Si elle dépend seulement de la norme du champ  $\phi$ , elle est invariante sous une transformation locale du groupe  $U(1)$  qui change la phase du champ  $\phi$ . Dans ce cas,  $c$  est toute la densité

lagrangienne qui est invariante sous  $U(1)$  si les champs  $\phi$  et  $A_\mu$  se transforment comme

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi, \quad (3.2)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu e^{i\alpha(x)}, \quad (3.3)$$

sous l'action d'un élément  $g = e^{i\alpha(x)} \in U(1)$ . De ces deux transformations, il peut aussi être montré que

$$D^\mu \phi \rightarrow (D^\mu \phi)' = e^{i\alpha(x)}D^\mu \phi. \quad (3.4)$$

De plus, une composante gravitationnelle de surface, le terme de Gibbons-Hawking-York [33, 34], est parfois ajoutée à l'action. Ce terme n'est pas nécessaire pour la discussion présente, mais il sera introduit plus tard.

Le cas sans gravité est retrouvé pour une masse de Planck infinie,  $G \rightarrow 0$ . La contribution gravitationnelle est alors découplée du reste de l'action. L'équation d'Einstein devient simplement  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} = 0$ . L'espace-temps de Minkowski est ainsi une solution aux équations d'Einstein, et la partie matière de l'action est donnée par

$$S_M = \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M = \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - U(|\phi|) \right]. \quad (3.5)$$

Bien que la métrique soit dans ce cas la métrique de Minkowski, le facteur  $\sqrt{-g}$  reste non trivial pour des systèmes de coordonnées non cartésiens.

### 3.2 Modèle abélien de Higgs et vortex

Dans le modèle abélien de Higgs, la densité d'énergie potentielle est

$$U(|\phi|) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (3.6)$$

où  $\lambda$  est la constante d'auto-couplage du champ  $\phi$ ,  $v$  est la valeur d'attente du vide. Le minimum de  $U(|\phi|)$  est effectivement obtenu pour une configuration homogène  $|\phi| = v$ ,

indépendamment de la phase du champ complexe ; le vide est dégénéré. Le choix d'un vide particulier, par exemple  $\phi_0 e^{i\alpha_0}$ , brise la symétrie  $U(1)$ . Sous l'action de ce groupe, le vide est effectivement changé,  $\phi_0 e^{i\alpha_0} \rightarrow \phi_0 e^{i(\alpha_0 + \alpha(x))}$ . Tel qu'argumenté à la section 2.2.2, cela permet en théorie la formation d'un soliton topologique statique de dimension deux étant donné la non-trivialité du groupe d'homotopie  $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ . D'après le théorème de non-existence présenté à la section suivante, 2.2.3, il faut de plus un champ de jauge  $A_\mu$  non trivial. Malgré ces prescriptions, la preuve de l'existence de la solution, le vortex, doit être faite.

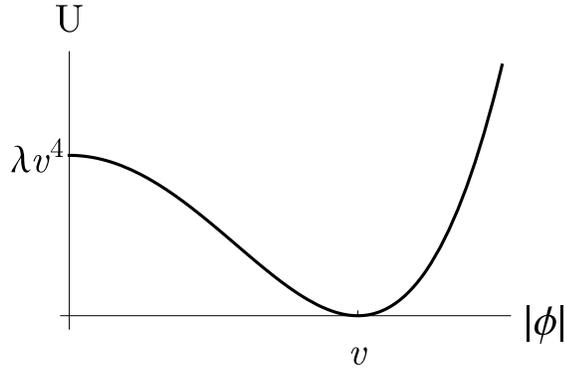


Figure 3.1 – Potentiel de Higgs quartique  $\phi^4$ .

Le vortex dans ce modèle est trouvé en prenant l'ansatz

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= f(r)e^{in\theta}, & f(0) &= 0, f(\infty) = 1, \\ A_\mu &= [0, 0, \frac{n}{e}(a(r) - 1)], & a(0) &= 1, a(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $n \in \mathbb{Z}$  est le nombre d'enroulements du vortex. Pour un tour antihoraire dans le plan spatial  $x - y$ , la phase du champ scalaire du vortex fait  $n$  tours antihoraires dans le plan  $\phi_1 - \phi_2$ . Cette tendance à tourner selon un axe donné justifie le nom intuitif de vortex. À l'origine,  $r = 0$ , le champ scalaire s'annule. Ceci permet d'éviter une discontinuité due à la dépendance angulaire. L'autre condition frontière,  $f(\infty) = 1$ , assure que la surface de vides  $\mathcal{V}$  est atteinte asymptotiquement, tel que souhaité. Ceci justifie l'ansatz du champ

scalaire. Quant au champ de jauge  $A_\mu$ , il est choisi de telle sorte que

$$A_\mu \rightarrow -\frac{n}{e} \partial_\mu \theta, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Cette condition contrebalance l'énergie de gradient  $\partial_\mu \phi = in\delta_\mu^\theta \phi$  présente à l'infini spatial. De cette façon,  $D_\mu \phi$  tend suffisamment rapidement vers 0, et l'énergie du vortex est finie.

De telles solutions topologiquement non triviales ont d'abord été considérées par Nielsen et Olesen [26]. À l'aide de l'ansatz (3.7), deux équations différentielles du deuxième ordre pour les champs  $f(r)$  et  $a(r)$  peuvent être obtenues des équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right) - 2e^2 v^2 \frac{f^2}{r} a = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) - \frac{\partial U}{\partial f} - \frac{f}{r} a^2 = 0. \quad (3.10)$$

Les équations du mouvement, non linéaires et couplées, ne permettent pas de trouver une solution analytique, sauf dans certains cas spéciaux ; il faut recourir à une approche numérique. Pour toutes les équations différentielles résolues numériquement dans le présent mémoire, un algorithme de relaxation a été employé [35]. En exigeant le respect des conditions frontières (3.7) et des équations différentielles (3.10), le résultat numérique présenté à la figure 3.2 est obtenu. Il s'agit du vortex d'enroulement  $n = 1$  dans le modèle abélien de Higgs en  $2 + 1$  dimensions.

Il s'agit d'une solution non perturbative retrouvée dans divers domaines de la physique. Dans le contexte cosmologique proposé, le vortex serait la version deux dimensions d'une corde cosmique, un défaut topologique formé dans l'Univers primordial. On retrouve le même genre de considérations dans le modèle de Ginzburg-Landau donnant une description en physique statistique des transitions de phase de second degré. Dans ce cas, l'énergie libre est décrite par un paramètre d'ordre, soit l'équivalent de la valeur d'attente du champ complexe  $\langle \phi \rangle$  dans le modèle considéré ci-haut. Il s'agit par exemple de la magnétisation dans un ferroaimant d'Heisenberg ou de la phase de la fonction d'onde

d'un condensat des paires de Cooper dans un supraconducteur. Les défauts associés sont les murs de domaines dans le ferroaimant ou les tubes de flux magnétique dans le supraconducteur.

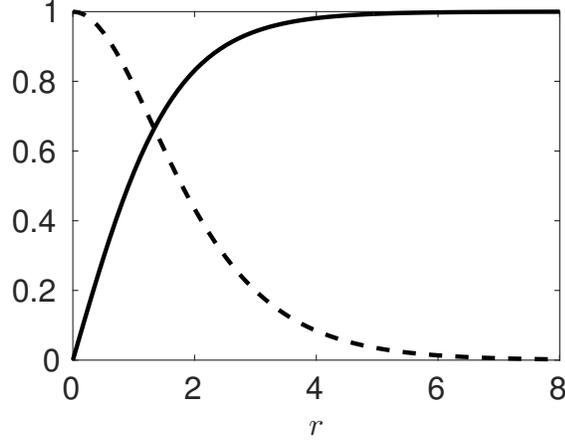


Figure 3.2 – Vortex du modèle abélien de Higgs (3.5), avec un ansatz donné par (3.7) et  $n = e = 1$ . Les lignes (—, — —) représentent respectivement les champs  $f(r)$  et  $a(r)$ .

Plus tard, un couplage gravitationnel a été ajouté au modèle en  $3 + 1$  dimensions [31]; une étude numérique des solutions de ce modèle a aussi été menée [32]. Lorsque la gravité est ajoutée, la symétrie axiale d'une solution statique comme le vortex ( $d = 2 + 1$ ) ou la corde cosmique ( $d = 3 + 1$ ) justifie une métrique de l'espace-temps dépendant seulement de la coordonnée radiale cylindrique. Étant donné cette dépendance, il existe un choix de jauge pour lequel la composante  $g_{rr}$  vaut 1. La métrique peut donc être écrite, pour  $d = 3 + 1$ , comme

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + A^2(r)dz^2 + dr^2 + D^2(r)d\theta^2, \quad \begin{aligned} A(0) = 1, A'(0) = 0, \\ D(0) = 0, D'(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les conditions à l'origine donnent localement l'espace-temps de Minkowski à l'origine. L'ansatz (3.7) et (3.11) est l'élément important à retenir de ces travaux pour tenter de trouver les vortex dans un modèle modifié. Les solutions numériques du modèle abélien de Higgs trouvées en [32] ne sont pas abordées en détail, mais elles ont servi à titre de

comparatif avec les solutions trouvées dans le modèle modifié.

### 3.3 Modèle abélien de Higgs modifié et vortex

#### 3.3.1 Métastabilité et restauration de symétrie

Dans le modèle abélien de Higgs modifié, le potentiel est une fonction sextique de la norme du champ scalaire,  $|\phi|$ , qui prend la forme

$$U(|\phi|) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2(|\phi|^2 - \epsilon v^2). \quad (3.12)$$

Cette fonction est montrée à la figure 3.3. Cette densité d'énergie potentielle donne donc

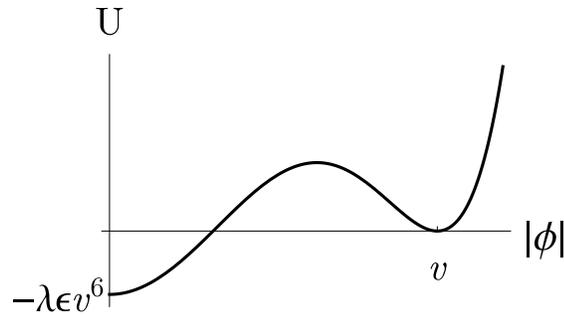


Figure 3.3 – Potentiel de Higgs sextique  $\phi^6$ .

toujours une dégénérescence associée à une surface de vide. Par contre, dans ce cas, les vides brisant la symétrie  $U(1)$  ne sont pas des minimums globaux du potentiel ; ce sont des faux vides. Le vrai vide se trouve au centre du potentiel minimal global.

Le mécanisme cosmologique permettant l'apparition d'un tel potentiel effectif a été décrit dans l'introduction au chapitre 1. Dans l'Univers primordial, le potentiel de Higgs aurait eu une courbure strictement positive avec un seul minimum se trouvant à  $\phi = 0$ . La forme du potentiel effectif est modifiée lors du refroidissement, jusqu'à ce que la phase  $\phi = 0$  devienne instable et qu'une nouvelle surface de vides  $|\phi| = v$  apparaisse. L'état de l'Univers doit faire une transition vers le nouveau vide ; des vortex sont ainsi formés. La forme effective du potentiel peut continuer à se transformer, jusqu'à la formation d'un

vrai vide qui lui restaure la symétrie axiale. Cette transformation en deux étapes peut être représentée par les figures 1.1(a) et 1.2. À ce moment, le potentiel effectif peut prendre la forme proposée (3.12). Dans ce contexte, les solitons formés sont nommés *faux* vortex ; ce sont des solutions non triviales et d'énergie finie relativement à un *faux* vide.

Les faux vortex peuvent être métastables en raison de l'apparition du vrai vide, d'énergie inférieure. Il faut dans ce cas vérifier si un instanton peut fournir un canal de désintégration pour le soliton. Plus de détails à cet égard sont donnés dans le prochain chapitre.

Étudier l'impact de tels solitons métastables sur l'évolution de l'Univers est la motivation principale du projet. L'intérêt d'étudier ces objets réside dans la force prédictive de la cosmologie des particules. Les principes généraux régissant les solitons sont donnés par un modèle en physique des particules dont la portée se répercute à une échelle cosmologique. Donc, on peut utiliser des données cosmologiques pour évaluer la viabilité de ce modèle en physique des particules. Une telle idée a été explorée dans l'article de Steinhardt [36] où une transition de phase se produit en deux étapes

$$SU(5) \rightarrow SU(4) \times U(1) \rightarrow S(3) \times U(2) \times U(1).$$

Des défauts topologiques seraient formés lors de la première transition de phase. Ces défauts ainsi que le vide sur lequel ils sont bâtis deviennent métastables suite à la deuxième transition de phase. Une réalisation précise de ce principe a été étudiée dans des modèles où sont formés des *kinks* [37, 38], des vortex [12] et des monopôles [39]. En particulier, le cas des vortex métastables précédemment décrit s'inscrit dans ce schéma avec les transitions

$$U(1) \rightarrow I \rightarrow U(1). \tag{3.13}$$

Il importe de mentionner que la restauration d'une symétrie lors d'une transition de phase est plus rare qu'une brisure, mais ce phénomène existe dans certaines théories. Par exemple, Steven Weinberg a construit un modèle où, lors d'une transition de phase

contrôlée par la température, la symétrie est augmentée de la façon suivante [40]

$$O(n-1) \times O(n-1) \rightarrow O(n) \times O(n-1). \quad (3.14)$$

### 3.3.2 Limites du modèle $\phi^6$ en trois dimensions d'espace-temps

Avant de commencer une étude élaborée des vortex, une critique des limites du projet est de mise. Le problème complet serait celui d'une corde cosmique dans le contexte  $d = 3 + 1$ . Le vortex en  $d = 2 + 1$  est un bon modèle jouet pour étudier la corde cosmique, il s'agit d'une section de corde.

L'interaction  $\phi^6$  n'est toutefois pas renormalisable pour  $d = 3 + 1$ . Effectivement, une analyse dimensionnelle révèle que  $\lambda$  a une dimension de masse négative. Posant  $\hbar = 1$ , il faut que l'action soit sans dimension,  $S \sim [1]$ . Alors, il est nécessaire que  $\int d^4x (\lambda \phi^6) \sim [1]$ . On sait de plus que  $dx \sim [M]^{-1}$  et  $\phi \sim [M]^1$ . Il suit que  $\lambda \sim [M]^{-2}$ . Une constante de couplage avec une dimension de masse négative indique que l'interaction sera non renormalisable de façon perturbative. C'est d'ailleurs pourquoi une théorie de la gravité quantique ne peut être obtenue simplement : la relativité générale n'est pas renormalisable (perturbativement), la constante de Newton respectant  $G \sim M_p^{-2}$ .

Bien que  $\phi^6$  ne puisse représenter une interaction fondamentale, elle peut faire partie d'une théorie effective. Par exemple, le modèle de Fermi fait intervenir un terme quartique de champs fermioniques  $(\bar{\psi}\psi)^2$ , ce qui n'est pas renormalisable. Dans la limite de faible énergie, cette interaction approxime bien la diffusion de deux fermions par un boson de jauge faible,  $\bar{\psi}W\psi$ . Donc, certains degrés de liberté sont intégrés.

## CHAPITRE 4

### DÉSINTÉGRATION D'UN FAUX VORTEX COUPLÉ GRAVITATIONNELLEMENT

Science is a way of trying not to fool yourself. The first principle is that you must not fool yourself, and you are the easiest person to fool. So you have to be very careful about that. After you've not fooled yourself, it's easy not to fool other scientists. You just have to be honest in a conventional way after that.

---

Richard Feynman

## Avant-propos

Le vortex de Nielsen-Olesen est une solution non triviale du modèle abélien de Higgs en électrodynamique scalaire. C'est une solution statique localisée en deux dimensions. Il s'agit d'un soliton topologique muni d'une charge topologique entière, ce qui suit du groupe d'homotopie de la surface de vides  $\pi_1(U(1)/\mathbb{I}) = \mathbb{Z}$ . Une première généralisation gravitationnelle de ce soliton topologique a été réalisée par Garfinkle [31]. Le couplage gravitationnel minimal du vortex rend les équations du mouvement du système plus nombreuses ; on doit maintenant décrire la dynamique de la métrique de l'espace-temps qui constitue en soi un champ. Cette démarche a également été appliquée à de multiples défauts topologiques, par exemple le monopôle de t'Hooft [41] ou le skyrmion [42]. Dans le même ordre d'idée, l'instanton de Coleman et Callan [9], [10] donnant le taux de désintégration d'un faux vide a aussi été considéré en présence de gravitation, donnant le célèbre instanton de Coleman-de Luccia [11]. L'objectif d'une telle entreprise était à la fois de trouver une correction gravitationnelle au taux de désintégration et de décrire comment l'évolution de la bulle de vrai vide est influencée suite à sa nucléation.

Dans ce contexte, l'intérêt d'une généralisation gravitationnelle de l'étude concernant les vortex métastables [12] est double. D'une part, la modification des solutions classiquement stables est intéressante intrinsèquement. D'autre part, la modification des instantons provoquant leur désintégration est importante pour évaluer de façon plus réaliste la viabilité cosmologique de ces objets.

Un article traitant de la désintégration de faux vortex couplés à la gravité a été réalisé lors des présents travaux de maîtrise. Avec l'accord des coauteurs, il est reproduit dans ce qui suit. Il sera soumis pour publication à la revue *Journal of High Energy Physics*.

L'idée originale du projet a été proposée par les autres auteurs. Ma contribution au projet comprend la rédaction d'un peu plus que la moitié de l'article ; les sections 4.2 et 4.3 ont été écrites conjointement avec les autres auteurs. Elle comprend également tous les calculs numériques, les calculs analytiques de la section 4.4, une réalisation conjointe des autres calculs et la production de toutes les figures.

Article en préparation

## Tunneling decay of false vortices with gravitation

Éric Dupuis<sup>¶</sup>, Yan Gobeil<sup>¶‡</sup>, Bum – Hoon Lee<sup>§†</sup>, Wonwoo Lee<sup>§</sup>,

Richard MacKenzie<sup>¶</sup>, M. B. Paranjape<sup>¶</sup>, U. A. Yajnik<sup>\*</sup>, Dong – han Yeom<sup>℞e</sup>

<sup>¶</sup>*Groupe de Physique des Particules, Département de physique, Université de Montréal,  
C. P. 6128, Succursale Centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7*

<sup>‡</sup>*Department of Physics, Ernest Rutherford Physics Building, McGill University, 3600 rue  
University, Montréal, Québec, Canada H3A 2T8*

<sup>§</sup>*Center for Quantum Spacetime, Sogang University, Seoul 121-742, Korea*

<sup>†</sup>*Department of Physics, Sogang University, Seoul 121-742, Korea*

<sup>\*</sup>*Department of Physics, Indian Institute of Technology Bombay, Mumbai 400076, India*

<sup>℞e</sup>*Leung Center for Cosmology and Particle Astrophysics, National Taiwan University, Taipei  
10617, Taiwan*

### ABSTRACT

We study the effect of vortices on the decay rate of a symmetry-breaking false vacuum in a 2+1 dimensional model with gravity. The model is scalar electrodynamics with a potential whose global minimum is symmetry-preserving. We present the numerical solutions for the gauge field, scalar field, and metric functions. In the thin-wall limit, we use the Israel junction conditions between a patch of Welch-Hirschmann spacetime inside the vortex and Minkowski spacetime with a conical defect outside the vortex to describe the dynamics of the false vortex solution. In particular, an instanton solution is built on the vortex. In this case, we find the vortex tunneling exponent  $B_{\text{vort}}$  is half the tunneling exponent  $B_{\text{vac}}$  for Coleman-de Luccia bubbles for all values of the gravitational coupling constant. The tunneling rate  $\Gamma \sim e^{-B}$  then favors vortex disintegration, which can be cosmologically significant even for small vortex densities. In the limit of vanishing

gravitational coupling we smoothly retrieve our earlier results for the decay of false vortex in a model without gravity.

## 4.1 Introduction

A Nielsen-Olesen vortex is a soliton in scalar electrodynamics in three spacetime dimensions. The energy of the vortex is finite and consists of three parts as follows. The contribution from the magnetic flux prevents collapse of the configuration, while the contributions from the scalar field potential and gradient energy stabilize the configuration against expansion.

In earlier work, [12], a metastable analog of the Nielsen-Olesen vortex dubbed a false vortex was considered. It owes its name to the vacuum structure permitting its formation. Namely, the *false* vortex is a topologically non-trivial solution built from a *false* vacuum which corresponds to the spontaneously broken sector of a modified abelian Higgs model. The presence of a symmetry-restoring true vacuum for scalar field  $\phi = 0$  explains the vortex metastability : This lower-energy phase of the scalar field is contained within the vortex core and spoils protection from expansion. For this reason, the vortex leads to interesting consequences for the cosmological history of this model.

We extend this work by considering the gravitational effect on the tunneling decay of false vortices in  $2 + 1$  dimensions. This implies a modification of the spacetime. First, we must specify the normalization of the energy which becomes important in presence of gravity. We choose the energy density of the false vacuum to vanish, while the energy density in the symmetry-restoring true vacuum is negative. Then, with a vortex confined within a finite radius, the exterior spacetime is locally Minkowski with a conical defect [43]. The conical defect is the analog of the Schwarzschild mass parameter that is familiar in the  $3+1$  dimensional context. Inside the vortex the situation is more complex with a varying magnetic flux, negative energy density and scalar field gradient energy.

Nevertheless, an analytical understanding is possible in the limit of a large topological winding number, which implies a large magnetic flux inside the vortex. In this case, the scalar field makes a sharp transition from the core where  $\phi = 0$  (giving a negative cosmo-

logical constant) to its asymptotic value. Were it not for the magnetic flux, the interior of the vortex would then be exactly anti-deSitter (AdS) spacetime. Instead, the exact solution of the 2+1 dimensional Einstein-Maxwell equations with a circularly symmetric, covariantly constant magnetic field in asymptotically AdS spacetime corresponds to the Welch-Hirschmann [44] solution.

This large magnetic flux case is reminiscent of the thin-wall limit of false vacuum decay treated in seminal papers of Coleman [9], Coleman and Callan [10], and Coleman and de Luccia [11]. In the thin-wall limit of the vortex, we consider a circular disc of Welch-Hirschmann spacetime separated by a thin circular transition region (the wall), from Minkowski spacetime with a conical defect on the outside. Conservation of energy and momentum at the junction gives rise to the Israel junction conditions [45].

The paper is organized as follows : In section 2 we set up the basic framework with the equations of motion and appropriate boundary conditions. We also present the numerical solution of the vortex coupled to Einstein gravity. In section 3, we specialize our study to thin-wall vortex. Israel's junction conditions [45] are used to see if the vortex can expand dynamically after tunneling. In the core of the soliton, we employ the magnetic solution in AdS spacetime obtained in [44]. In section 4, we compute tunneling rates for thin-wall vacuum decay and vortex disintegration. In the final section, we summarize our results and discuss possible future applications.

## 4.2 Vortex solutions

We consider the action for Einstein gravity coupled to a  $U(1)$  gauge field and complex scalar field :

$$S = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} d^3x \left[ \frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - U(\phi^* \phi) \right] + \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{h} \frac{K}{\kappa}, \quad (4.1)$$

where  $g$  and  $h$  are respectively the determinant of the metric  $g_{\mu\nu}$  on spacetime  $\mathcal{M}$  and the determinant of the induced metric  $h_{\mu\nu}$  on spacetime boundary,  $\partial\mathcal{M}$ .  $R$  denotes the scalar curvature of  $\mathcal{M}$ , while  $K$  is the extrinsic curvature on  $\partial\mathcal{M}$ . Einstein's constant is

defined as  $\kappa = 8\pi G$ . The second term in the action (4.1) is a surface term known as the Gibbons-Hawking-York term which we shall note as  $S^{GHY}$ . We adopt the sign conventions in [46]. The field strength tensor is  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ , where  $A_\mu$  is the electromagnetic potential. The covariant derivative of a complex field is given by  $D_\mu \phi = (\nabla_\mu + ieA_\mu)\phi$ ,  $e$  is the coupling constant between gauge and complex scalar fields. The potential energy density, shown in fig. 4.1, is given by

$$U(\phi^* \phi) = \lambda(|\phi|^2 - \epsilon v^2)(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (4.2)$$

where  $\lambda$  is the self-coupling constant of the scalar field. The value of  $\epsilon$  determines the shape of the potential [12, 39]. We are interested in the case where there are false vacua at  $|\phi| = v$  and the true vacuum state located at  $\phi = 0$ . Thus, we set  $\epsilon \in ]0, 1[$ . The geometry for the true vacuum state corresponds to the AdS spacetime with an effective cosmological constant  $\Lambda = \kappa U(0) = -\kappa\lambda\epsilon v^6$ .

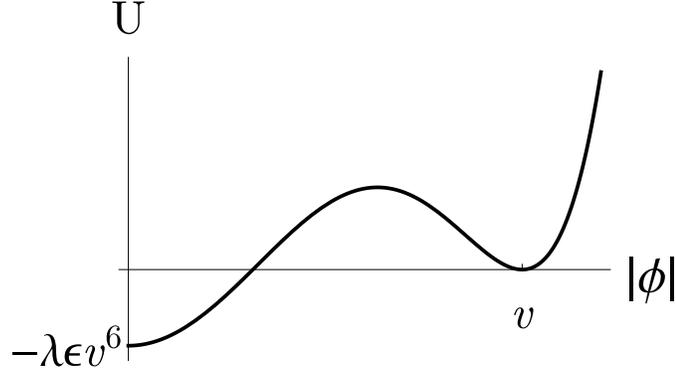


Figure 4.1 – Potential energy density.

The Einstein equations are obtained by varying the action with respect to the metric :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

where the energy-momentum tensor has the form

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) + (D_{\mu}\phi)^*(D_{\nu}\phi) + (D_{\mu}\phi)(D_{\nu}\phi)^* \\
&- g_{\mu\nu}[(D_{\alpha}\phi)^*(D^{\alpha}\phi) + U(\phi^*\phi)].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

We use the following ansatz for the metric

$$ds^2 = -A^2(t,r)dt^2 + B^{-2}(t,r)dr^2 + D^2(t,r)d\theta^2, \tag{4.5}$$

where  $A(t,r)$ ,  $B(t,r)$ , and  $D(t,r)$  are unknown functions independent of the variable  $\theta$ , following the invariance of the vortex system under rotation.

The gauge field and scalar field equations of motion are respectively

$$\nabla_{\nu}F_{\mu}^{\nu} = 4\pi[ie(\phi\nabla_{\mu}\phi^* - \phi^*\nabla_{\mu}\phi) + 2e^2A_{\mu}\phi^*\phi], \tag{4.6}$$

$$D_{\mu}D^{\mu}\phi = \frac{\partial U(\phi^*\phi)}{\partial\phi^*}. \tag{4.7}$$

The parameters  $\lambda$  and  $\nu$  can be eliminated by defining judiciously-chosen dimensionless variables

$$\frac{\phi}{\nu} = \tilde{\phi}, \quad \frac{A_{\mu}}{\nu} = \tilde{A}_{\mu}, \quad \frac{e}{\sqrt{\lambda\nu}} = \tilde{e}, \quad \kappa\nu^2 = \tilde{\kappa} \text{ and } r\sqrt{\lambda\nu^2} = \tilde{r}. \tag{4.8}$$

In what follows, we use these dimensionless variables ; we drop the tildes for notational simplicity.

We look for solutions for  $\phi$  and  $A_{\mu}$  in the coordinates  $(r, \theta)$ . The fields ansatz are chosen as

$$\phi(t,r,\theta) = f(t,r)e^{in\theta}, \quad A_{\mu}(t,r,\theta) = \left[0, 0, \frac{n}{e}(a(t,r) - 1)\right]. \tag{4.9}$$

where  $n$ , an integer, is the winding number. Using this ansatz, different terms appearing

in the action may be rewritten as follows :

$$D_\mu \phi = (\nabla_\mu + ieA_\mu)\phi = (\dot{f}, f', inaf),$$

$$(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) = \left( -\frac{\dot{f}^2}{A^2} + f'^2 B^2 + \frac{n^2 f^2 a^2}{D^2} \right), \quad (4.10)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{n}{e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{a} \\ 0 & 0 & a' \\ -\dot{a} & -a' & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{2n^2}{e^2 D^2} \left( -\frac{\dot{a}^2}{A^2} + a'^2 B^2 \right), \quad (4.11)$$

where the prime denotes differentiation with respect to  $r$ .

Using these results, equations of motion are written out as a function of  $f, a, A, B, D$  fields. First, the  $(tt)$ ,  $(tr)$ ,  $(rr)$ , and  $(\theta\theta)$  components of the Einstein equations are

$$-\frac{A^2 B^2 (B'D' + BD'') + \dot{B}\dot{D}}{BD} = \kappa \left[ \frac{n^2 \dot{a}^2}{8\pi e^2 D^2} + \dot{f}^2 + \frac{A^2 n^2}{8\pi e^2 D^2} a'^2 B^2 + A^2 \left( f'^2 B^2 + \frac{n^2 a^2 f^2}{D^2} + U \right) \right] \quad (4.12)$$

$$-\frac{1}{D} \left( \frac{D'\dot{B}}{B} - \frac{A'\dot{D}}{A} + \frac{\dot{D}'}{A} \right) = \kappa \left[ \frac{n^2 \dot{a} a'}{4\pi e^2 D^2} + 2\dot{f} f' \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{A^2 B^2 A'D' + \dot{A}\dot{D} - A\ddot{D}}{A^3 B^2 D} = \kappa \left[ \frac{1}{A^2 B^2} \left( \dot{f}^2 + \frac{n^2 \dot{a}^2}{8\pi e^2 D^2} \right) + \frac{n^2 a'^2}{8\pi e^2 D^2} + f'^2 - \frac{n^2 f^2 a^2}{B^2 D^2} - \frac{U}{B^2} \right] \quad (4.14)$$

$$\frac{D^2 [A^2 B^3 (A'B' + BA'') - B\dot{A}\dot{B} + A(-2\dot{B}^2 + B\ddot{B})]}{A^3 B^2}$$

$$= \kappa \left[ \frac{1}{A^2} \left( \dot{f}^2 D^2 - \frac{n^2 \dot{a}^2}{8\pi e^2} \right) + \frac{n^2 a'^2 B^2}{8\pi e^2} + n^2 a^2 f^2 - f'^2 B^2 D^2 - U D^2 \right] \quad (4.15)$$

As for the matter, the scalar field equation has the form

$$\frac{1}{A^2} \left[ -\ddot{f} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{D}}{D} \right) \dot{f} \right] + B^2 \left[ f'' + \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{D'}{D} \right) f' \right] - \frac{n^2 a^2}{D^2} f = \frac{dU}{df}, \quad (4.16)$$

while the gauge field equation has the form

$$\frac{1}{A^2} \left[ -\ddot{a} + \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{D}}{D} \right) \dot{a} \right] + B^2 \left[ a'' + \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{D'}{D} \right) a' \right] = 8\pi e^2 f^2 a. \quad (4.17)$$

We will only solve the static equations of motion. Even in this case, exact analytic solutions have not been found, with or without gravitation. We will use numerical methods to solve for  $f(r)$ ,  $a(r)$ ,  $A(r)$ ,  $B(r)$ , and  $D(r)$ . Because the metric functions only depend on  $r$ , we are free to choose a gauge in which  $B(r) = 1$  everywhere. This was the approach of Refs. [31, 32]. We simultaneously solve the coupled Einstein, gauge, and scalar field equations with the following boundary conditions :

$$f(r) \rightarrow 0, \quad a(r) \rightarrow 1, \quad A'(r) \rightarrow 0, \quad D(r) \rightarrow 0, \quad D'(r) \rightarrow 1, \quad \text{as } r \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

$$f(r) \rightarrow 1, \quad a(r) \rightarrow 0, \quad A(r) \rightarrow 1, \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

The first conditions arise from the requirement that the solution be nonsingular at the origin and the second conditions are required for a solution of finite energy. In the absence of gravitation, the behavior for small  $r$  can be analyzed by linearizing the matter field equations, so that  $f(r) \sim r^n$  and  $a(r) \sim r^2$  as  $r \rightarrow 0$ . For large  $r$ , we write  $f(r) = 1 - \xi(r)$  and linearize in  $\xi(r)$  and  $a(r)$ , resulting in modified Bessel equations [47]. As for the field  $A(r) = \sqrt{g_{tt}}$ , multiple boundary conditions are possible with simple rescaling of time since the metric is time independent.  $A(\infty)$  is fixed to 1 so that time is properly normalised for asymptotic observers. In any case, this is simply a matter of time rescaling, as the metric is time independent.

Numerical solutions for  $f(r)$ ,  $a(r)$ ,  $A(r)$  and  $D(r)$  are shown in Fig. 4.2 and 4.3. The profile of  $f(r)$  is used to categorize two general types of vortex solutions. For small value of  $n$ , near 1, solutions are dubbed "thick" : The transition from true vacuum to false

vacuum shown by  $f(r)$  happens on a relatively large scale. Such solutions are shown for  $n = 1$  in Fig. 4.2. On the other hand, for  $n \neq 1$  the solutions transition rapidly giving the thin-wall behaviour described earlier, as can be seen from Fig. 4.3 for  $n = 50$ . In both cases, solutions obtained with different values of the gravitational coupling constant are plotted. The vortex profile for  $\kappa = 0$  is in accordance with the previous study [12]. As gravity is added, matter fields don't change much compared to metric fields. For a conical spacetime, it is expected that  $D(r) = \sqrt{g_{\theta\theta}} = (1 - 4G\mu)r$  where  $\mu$  is the energy of the localised source. This behaviour is indeed observed : Outside the vortex,  $D(r)$  is linear, with a slope which decreases as  $\kappa$  increases. As for  $A(r)$ , it departs further from 1 at the origin for increasing values of  $\kappa$ . The actual behaviour of  $A(r)$ , getting smaller or bigger compared to its flat spacetime value of 1, should depend on the scalar field/gauge field mass ratio, as was observed in [32].

In the previous paper [12], it was shown that  $\varepsilon$  is crucial for the vortices' metastability, for they become unstable above a certain critical value  $\varepsilon_c$ . This defines a region in parameter space in which vortex solutions cannot be found. Fig. 4.4 shows a scan of the parameter space for  $n = 1$  and different values of  $\kappa$ . As the gravitational coupling gets bigger, the allowed region for the formation of metastable vortex ( $\varepsilon < \varepsilon_c$ ) is also expanded. The equivalent behaviour for thin-wall solutions is studied in details in the next section where we adopt Israel's junction condition [45] to understand if the vortex can expand dynamically.

### 4.3 Junction conditions on the vortex wall

The existence of static vortex solutions with gravity has been established. We now investigate more closely the metastability of thin-wall vortices. We thus consider a thin wall partitioning bulk spacetime into two distinct three-dimensional manifolds,  $\mathcal{M}^+$  and  $\mathcal{M}^-$ , with boundaries  $\Sigma^+$  and  $\Sigma^-$ , respectively. To obtain the single glued manifold  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^-$ , we demand that the boundaries are identified as follows :

$$\Sigma^+ = \Sigma^- = \Sigma \tag{4.20}$$

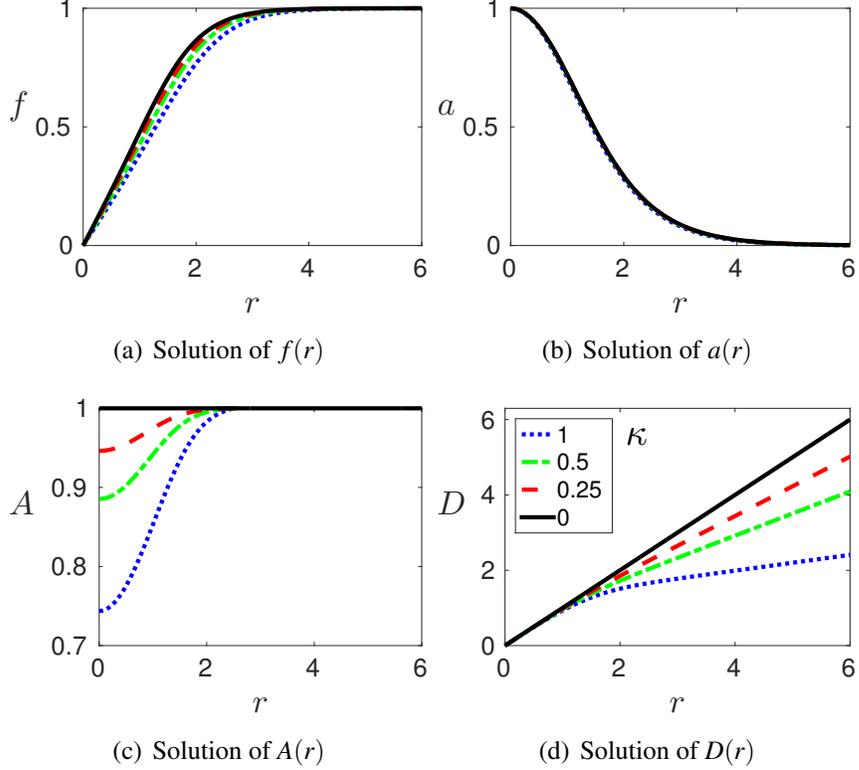


Figure 4.2 – Thick-wall solutions of  $f(r)$ ,  $a(r)$ ,  $A(r)$  and  $D(r)$  respectively.  $n = e/\sqrt{4\pi} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . The line patterns (—, — —, — —, - -) correspond to  $\kappa = (0.00, 0.25, 0.50, 1.00)$ , respectively.

where the thin-wall boundary  $\Sigma$  is a timelike hypersurface with unit normal  $n^\mu$ .

The bulk spacetime geometry inside ( $-$ ) and outside ( $+$ ) the vortex, like in Eq. (4.5), is described by the metric

$$ds_{\pm}^2 = -A_{\pm}^2(r)dt^2 + B_{\pm}^{-2}(r)dr^2 + D_{\pm}^2(r)d\theta^2. \quad (4.21)$$

The energy-momentum tensor  $T^{\mu\nu}$  has a singular component on the wall

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} \delta(\eta) + \text{regular term} \quad (4.22)$$

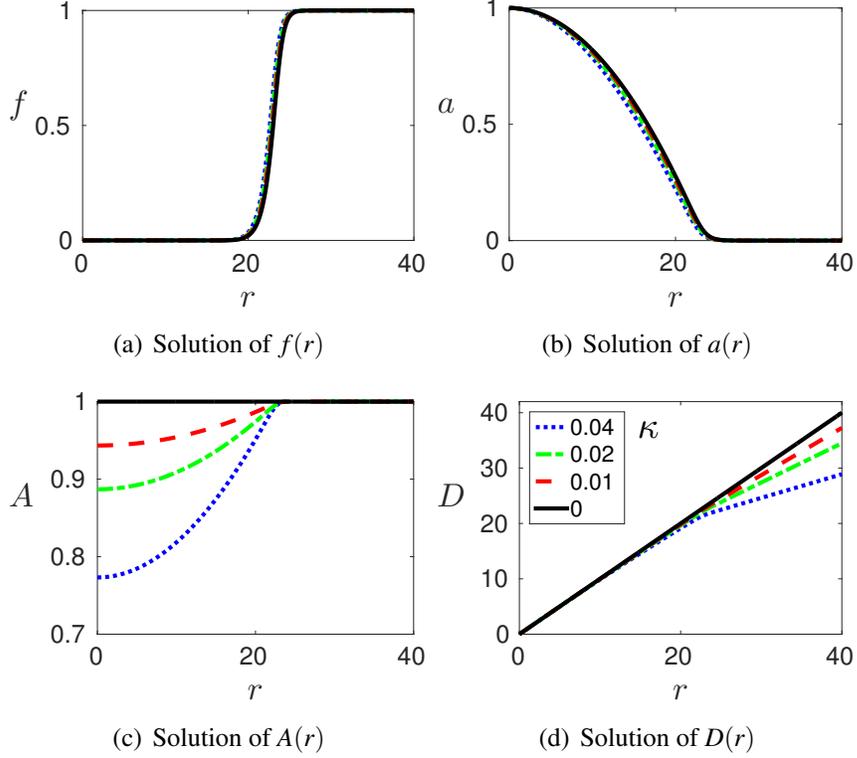


Figure 4.3 – Thin-wall solutions of  $f(r)$ ,  $a(r)$ ,  $A(r)$ , and  $D(r)$  respectively.  $n = 50$ ,  $e/\sqrt{4\pi} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.005$ . The line patterns (—, — —, — —, — —) correspond to  $\kappa = (0.00, 0.01, 0.02, 0.04)$ , respectively.

where  $S^{\mu\nu}(x^i, \eta = \bar{\eta})$  is the surface stress-energy tensor of the wall

$$S_{\mu\nu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\eta}-\delta}^{\bar{\eta}+\delta} T_{\mu\nu} d\eta. \quad (4.23)$$

where  $\delta \ll \bar{\eta}$ . The extrinsic curvature has only two components,  $k_{\theta}^{\theta}$  and  $k_{\tau}^{\tau}$ . The form of the stress-energy tensor on the wall could be obtained by the covariant conservation.

We introduce the Gaussian normal coordinate system near the wall

$$dS^2 = -d\tau^2 + d\eta^2 + \bar{R}^2(\tau, \eta) d\theta^2, \quad (4.24)$$

where  $g_{\tau\tau} = -1$  and  $\bar{R}(\tau, \bar{\eta}) = R(\tau)$ . It must agree with the coordinate  $R$  on both sides of

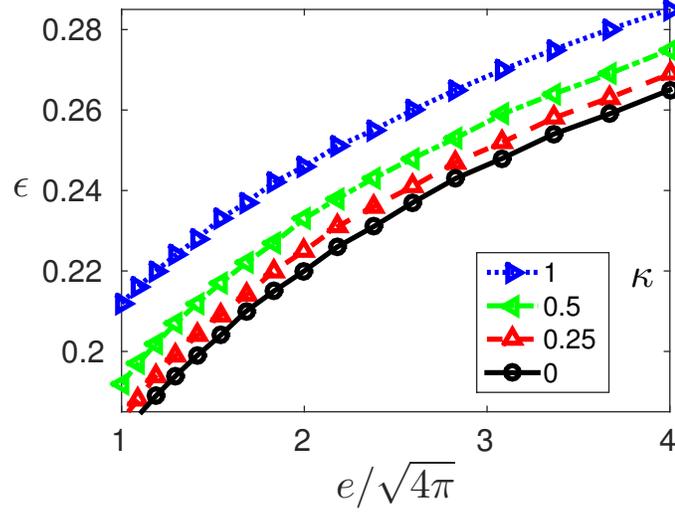


Figure 4.4 – The line patterns (—, — —, — —, — —) represent the critical value  $\epsilon_c$  as a function of  $e$  for  $\kappa = (0.00, 0.25, 0.50, 1.00)$ , respectively. For  $\epsilon \geq \epsilon_c$ , no metastable vortex solutions were found.

coordinate systems. In this coordinate system the induced metric on the hypersurface is

$$ds_{(\Sigma)}^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 d\theta^2, \quad (4.25)$$

where  $\tau$  is the proper time measured on the wall and  $R(\tau)$  is the proper radius of  $\Sigma$ . Given the metric defined in (4.21), the following relation is satisfied

$$-d\tau^2 = -A^2 dt^2 + B^{-2} dr^2 \Rightarrow (-A^2 \dot{t}^2 + B^{-2} \dot{r}^2 = -1), \quad (4.26)$$

where  $\cdot$  denotes the differentiation with respect to  $\tau$ .

The induced metric of the hypersurface is given by

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (4.27)$$

where the tangent vectors are taken to be

$$e_\tau^\alpha = (\dot{t}, \dot{r}, 0), \quad e_\theta^\alpha = (0, 0, rD^{-1}). \quad (4.28)$$

The three-velocity of any point on the wall is

$$u^\alpha = (\dot{t}, \dot{r}, 0), \quad u_\alpha = (-A^2\dot{t}, B^{-2}\dot{r}, 0), \quad (4.29)$$

which satisfies the relation  $u_\alpha u^\alpha = -1$ . The normal vectors are chosen

$$n^\alpha = B^{-1}A(A^{-2}\dot{r}, B^2\dot{t}, 0), \quad n_\alpha = B^{-1}A(-\dot{r}, \dot{t}, 0), \quad (4.30)$$

where we take the factor  $B^{-1}A$  to normalize the vectors, so that  $n_\alpha n^\alpha = 1$ . The extrinsic curvature then becomes

$$k_\theta^\theta = \partial_\theta n^\theta + \Gamma_{\theta\mu}^\theta n^\mu = \frac{D'}{D} \sqrt{B^2 + \dot{R}^2} \quad (4.31)$$

where  $\Gamma_{\theta r}^\theta = D'/D$ .

The relevant junction condition is given by

$$k_\theta^\theta(\text{inside}) - k_\theta^\theta(\text{outside}) = \kappa\sigma, \quad (4.32)$$

where  $\sigma$  is the surface tension on the wall. There is only a contribution from the scalar field to the tension. We ignore the contribution from the negligible magnetic flux on the wall.

We take the outside geometry as the flat Minkowski spacetime minus a wedge related to the deficit angle

$$ds_{(+)}^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - \Delta)r^2 d\theta^2. \quad (4.33)$$

In the vortex core, we employ the geometry given by the magnetic solution in the AdS spacetime [44] In the vortex core, we employ the geometry as the magnetic solution in AdS spacetime [44]

$$ds_{(-)}^2 = -N(r)dt^2 + \frac{Ldr^2}{N(r)J(r)} + \frac{r^2 J(r)}{L} d\theta^2, \quad (4.34)$$

where

$$N(r) \equiv (1 + L\Lambda r^2), \quad J(r) \equiv [1 + (\kappa Q_m^2 / (8\pi L r^2)) \ln(1 + L\Lambda r^2)], \quad L \equiv (1 + \Lambda \kappa Q_m^2 / (8\pi)). \quad (4.35)$$

where  $Q_m$  represents the magnetic charge [44]. The cosmological constant  $\Lambda$  is equal to  $\kappa\epsilon$ . The form of the metric as presented here is in fact a bit different from the one in [44]: We have rescaled variables in such a way that  $\lim_{r \rightarrow 0} g_{\theta\theta} = r^2$ , therefore avoiding the conical singularity at the origin. This geometry corresponds to a one-parameter family of solutions with a magnetic charge in three-dimensional anti-de Sitter spacetime. For  $Q_m = 0$ , the metric reduces to AdS spacetime. The magnetic field measured in an orthonormal basis is given by  $\mathcal{B} = Q_m \Lambda / \sqrt{(1 + L\Lambda r^2)}$ . The field has the maximum value at the origin and decreases to the minimum value at the boundary.

We change the metric into the following since the two geometries do not have the proper circumferential radius. The outside geometry takes the form

$$ds_{(+)}^2 = -dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{(1 - \Delta)} + \tilde{r}^2 d\theta^2, \quad (4.36)$$

and the inside geometry takes the form

$$ds_{(-)}^2 = -F^2(\tilde{r}) dt^2 + \frac{(dr/d\tilde{r})^2}{E^2(\tilde{r})} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2. \quad (4.37)$$

Comparing this to (4.34), we see  $\tilde{r}$  is

$$\tilde{r} = r \sqrt{\frac{J(r)}{L}}, \quad d\tilde{r} = \frac{\sqrt{H(r)}}{\sqrt{L}\sqrt{J(r)}} dr, \quad H(r) \equiv \left(1 + \frac{\kappa Q_m^2 \Lambda / (8\pi)}{1 + L\Lambda r^2}\right)^2 \quad (4.38)$$

Then we can make the junction condition determining the motion of the thin wall which is located at position  $r = R$  (or  $\tilde{R} = \tilde{r}|_{r=R}$ )

$$k_{\theta}^{\theta}(\text{inside}) - k_{\theta}^{\theta}(\text{outside}) = \sqrt{E^2(\tilde{R}) \left(d\tilde{r}/dr\right)^2 \Big|_{r=R} + \dot{\tilde{R}}^2} - \sqrt{(1 - \Delta) + \dot{\tilde{R}}^2} = \kappa \sigma \tilde{R}. \quad (4.39)$$

After squaring twice, we obtain

$$\frac{1}{2}\dot{\tilde{R}}^2 + V_{\text{eff}}(\tilde{R}) = 0, \quad (4.40)$$

where the effective potential takes the form

$$V_{\text{eff}}(\tilde{R}) = \frac{(1-\Delta)}{2} - \frac{(E(\tilde{R})^2(d\tilde{R}/dR)^2 - (1-\Delta) - \kappa^2\sigma^2\tilde{R}^2)^2}{8\kappa^2\sigma^2\tilde{R}^2}. \quad (4.41)$$

The right hand side contains both  $\tilde{r}$  and  $r$ . The transformation (4.38) gives no closed form for  $r$  as a function of  $\tilde{r}$ . Thus, we express everything as a function of  $r$  instead of  $\tilde{r}$

$$d\tilde{R} = \frac{\sqrt{H(R)}dR}{\sqrt{L(R)}\sqrt{J(R)}}, \quad H(R) \equiv \left(1 + \frac{\kappa Q_m^2 \Lambda / (8\pi)}{1 + L(R)\Lambda R^2}\right)^2. \quad (4.42)$$

The reason why  $L$  is expressed as a function of  $R$  shall be explained shortly. First, (4.40) can then expressed in terms of  $R$

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + V_{\text{eff}}(R) = 0. \quad (4.43)$$

The effective potential turns out to be

$$V_{\text{eff}}(R) = \frac{L(R)J(R)}{H(R)} \times \left\{ \frac{(1-\Delta)}{2} - \frac{\left[ \frac{N(R)H(R)}{L^2(R)} - (1-\Delta) - \frac{\kappa^2\sigma^2 R^2 J(R)}{L(R)} \right]^2}{8\kappa^2\sigma^2 R^2 J(R)/L(R)} \right\}. \quad (4.44)$$

where we used  $E^2(\tilde{R}) = N(R)J(R)/L(R)$ . Now,  $L(R)$ , defined in (4.35) depends on  $Q_m$  which in turn is related to  $R$ . The magnetic flux  $\Phi$  is a constant because of its topological origin ; as the vortex radius may change by quantum fluctuations, the following relation between  $Q_m$  to  $R$  is respected

$$\Phi \equiv \int_0^R \int_0^{2\pi} d^2x \sqrt{\det g_{ij}} \mathcal{B} = \frac{Q_m \pi}{L} \ln(1 + L\Lambda R^2). \quad (4.45)$$

This transcendental equation cannot be solved exactly for  $Q_m$ . Making an expansion in  $\kappa$ ,

the first-order quantity is  $Q_m \simeq \Phi/\pi\Lambda R^2$ .  $Q_m$  should then be expressed as a function of  $Q_m(\Phi, \varepsilon, \kappa, R)$  to replace  $L(R)$  in (4.44).

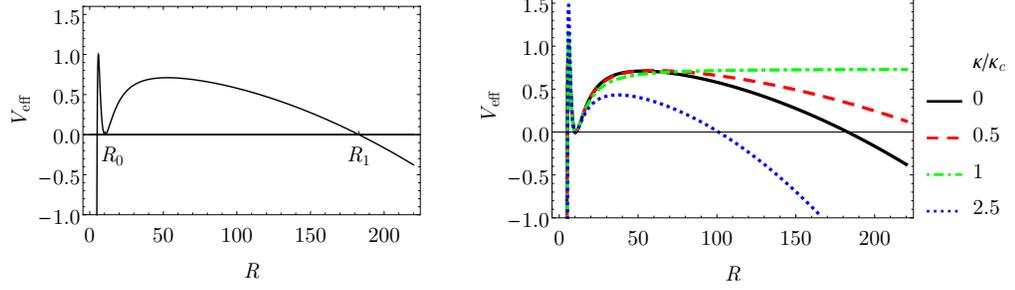
Fig. 4.5 shows the shape of the effective potential with parameters  $\Phi = 100$ ,  $\varepsilon = 0.005$  and varying gravitational coupling constant. The main feature of this potential is the presence of an energy-vanishing minimum, which is located at  $R_0$  in Fig. 4.5(a). According to (4.43), this can correspond to a classical static state of the radius of the wall. An energy barrier prevents the vortex from classically expanding to the escape radius  $R_1$  for which it would explode ; the static vortex is metastable. We note the vortex can also shrink through quantum fluctuations and collapse. We shall however concentrate on the expansion metastability as we wish to compare this process to vacuum decay.

Fig. 4.5(b) shows what happens to the potential as gravity is turned on. The radius  $R_0$  of the vortex wall is barely affected. This is a pleasing confirmation of the observation in Fig. 4.3 that matter fields of the classical thin-wall solutions are mostly unaffected by gravity. Meanwhile, tunneling considerations do change with gravity. With increasing gravitational coupling, the tunneling barrier gets bigger and the escape point's location ( $R_1$  in fig. 4.5(a)) gets further away from  $R_0$ . The strength of the gravitational coupling is expressed as a fraction of  $\kappa_c \equiv \varepsilon/\sigma^2$ . This a critical value of  $\kappa$  for which the vortex becomes stable, just like a Coleman-de Luccia instanton is said to be “quenched” for strong gravity [11]. Beyond this value, the tunneling barrier starts to reduce again, but we will study this point more carefully later on.

The effective potential (4.44) contains five parameters. Three of them,  $\Phi$ ,  $\varepsilon$  and  $\kappa$ , are inputs. Parameters  $\Delta$ , the conical defect, and  $\sigma$ , the surface energy density on the wall, are determined by the first three parameters. We will show the relation between them in the remainder of this section. Dependencies on  $R$  are not shown explicitly to improve readability.

We first find  $\Delta$  using Eq. (4.43) in the same way we found  $V_{\text{eff}}$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 + 2\kappa\sigma\tilde{R}(d\tilde{R}/dR)\sqrt{E^2 + \dot{R}^2} - E^2(d\tilde{R}/dR)^2 - \kappa^2\sigma^2\tilde{R}^2 \\ &= 1 + 2\kappa\sigma R\frac{\sqrt{H}}{L}\sqrt{\frac{NJ}{L} + \dot{R}^2} - \frac{NK}{L^2} - \kappa^2\sigma^2 R^2\frac{J}{L} \end{aligned} \quad (4.46)$$



(a) Potential turning points  $R_0$  and  $R_1$  for  $\kappa = 0$ ,  $\varepsilon = 0.005$ . (b) The line patterns (solid line, dashed line, dash-dotted line, dotted line) respectively represent  $\kappa = (0.0, 0.5, 1.0, 2.5)\kappa_c$  and  $\varepsilon = 0.005$ . The critical value of  $\kappa$  is  $\kappa_c \equiv \varepsilon/\sigma^2$ .

Figure 4.5 – Effective potential for  $\Phi = 100$ ,  $\varepsilon = 0.005$  and several values of the gravitational coupling constant  $\kappa$ .

Expanding everything to first order in  $\kappa$ , we find

$$\frac{\sqrt{H}}{L} = 1 - \frac{\kappa\Phi^2}{8\pi^3 R^2} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (4.47)$$

$$\frac{NJ}{L} = 1 + \kappa\varepsilon R^2 + \frac{\kappa\Phi^2}{16\pi^3 R^2} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (4.48)$$

$$\frac{NH}{L^2} = 1 + \kappa\varepsilon R^2 - \frac{\kappa\Phi^2}{8\pi^3 R^2} + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (4.49)$$

Using this,  $\Delta$  can be approximated by

$$\Delta \equiv 8G\mu = 8G \left( \frac{\Phi^2}{8\pi^2 R^2} + 2\pi\sigma R \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \varepsilon\pi R^2} \right) + \mathcal{O}(G^2), \quad (4.50)$$

where  $\mu$  is the energy of the vortex configuration. As the conical defect should be conserved throughout the tunneling process by energy conservation, we can simply evaluate it at the static vortex. Moreover, this energy of the static vortex should be minimized

$$\left. \frac{d\Delta}{dR} \right|_{R=0} = 0. \quad (4.51)$$

Neglecting terms of order  $\varepsilon$ , one finds

$$R_0 = \left( \frac{\Phi^2}{8\pi^3\sigma} \right)^{1/3}, \quad \Delta_0 = 8G(3\pi\sigma R_0). \quad (4.52)$$

In the non-relativistic limit, the energy is

$$\mu \simeq \frac{\Phi^2}{8\pi^2 R^2} + 2\pi\sigma R \left( 1 + \frac{1}{2}\dot{R}^2 \right) - \varepsilon\pi R^2, \quad (4.53)$$

where the quantized magnetic flux  $\Phi^2/4\pi = 4\pi^2 n^2/e^2$ . The factor  $4\pi$  in the denominator is due to the convention of the field strength tensor in the action. This is almost the energy obtained in flat spacetime in [12] except for a missing kinetic term in the electromagnetic contribution. The reason for this discrepancy is that the interior metric written in (4.34) was intended to be static. As we let spacetime change with varying radius, the functional form should also be changed. As we will see later, the electromagnetic contribution plays a very small role in tunneling considerations, so that this issue is unimportant.

We now examine the energy density  $\sigma$  on the surface of the wall. We ignore the contribution from the negligible magnetic flux on the wall. In flat spacetime, a static wall simply has energy density

$$\sigma = \frac{1}{2\pi R} \int d\theta \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr \sqrt{h} (f'^2 + U) \approx \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr (f'^2 + U). \quad (4.54)$$

where  $h$  is the induced metric on the surface of the wall. We supposed a large wall so that the integration is on a relatively small scale. Given this, the Jacobian is approximately constant,  $\sqrt{h} \approx R$ . Furthermore, a large wall means the equation of motion for the scalar field is approximately

$$f'' = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial f} \Rightarrow f'^2 = U - U_{\text{FV}} = U. \quad (4.55)$$

Hence,  $\sigma$  reduces to

$$\begin{aligned}\sigma &= 2 \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr f'^2 = 2 \int_0^1 df \sqrt{(f^2 - \varepsilon)(f^2 - 1)^2} \\ &\simeq 1/2 + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}\tag{4.56}$$

As the wall expands, there is also a kinetic energy. We must also account for a curved spacetime. These two complications are easily treated by working in the Gaussian coordinate frame defined by (4.25). The contribution of the scalar field to the wall Euclidean action will be

$$\int d^3x_E \sqrt{g} [(\partial_\mu f)^2 + U] = 2\pi \int d\tau_E \tilde{R} \int d\eta [(\partial_\eta f)^2 + U] = 2\pi \int d\tau_E \sigma \tilde{R}.\tag{4.57}$$

We used the fact that the wall is in fact immobile in the Gaussian coordinates such that  $\partial_\mu f = \partial_\eta f$ . This is the natural way to define the energy density  $\sigma$  as the junction conditions are defined in this frame.

#### 4.4 Decay rate

To lowest order in  $\hbar$ , the decay rate of a metastable state is suppressed by the Euclidean action of an instanton  $\Gamma \sim e^{-S_E/\hbar}$ . Decay of a translationally invariant vacuum is known to be controlled by a bubble-like instanton, the bounce. In presence of a vortex, a similar process exists. As can be deduced in the collective coordinate approximation suggested in Fig. 4.5, quantum fluctuations of the vortex radius can also lead to a phase transition. In this case, the relevant instanton describes the expansion of the wall. To understand the cosmological relevance of the vortex, we will compare the false vacuum lifetime in presence and absence of a vortex. We first proceed to compute the Euclidean action of the relevant instantons in both cases.

##### 4.4.1 Ordinary false vacuum decay

We imagine the Universe is in a state of false vacuum, say  $\phi = 1$  for definiteness. Ordinary false vacuum decay happens when a critical true vacuum bubble nucleates and

triggers a phase transition. This bubble is the non-trivial extremal path in configuration space which minimises the Euclidean action, the so-called bounce. We compute the bounce action à la Coleman-de Luccia [11] in a 2 + 1 dimensional spacetime.

$$S_E = \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{g} \left[ -\mathcal{L} - \frac{R}{2\kappa} \right] - \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{h} \frac{K}{\kappa}, \quad (4.58)$$

where

$$\mathcal{L} = -(\nabla_\mu \phi)^* (\nabla^\mu \phi) - U(\phi^* \phi), \quad (4.59)$$

We assume the minimizing-action non-trivial solution has  $O(3)$  symmetry (as is the case in flat spacetime [14]), which means  $\phi = \phi(\rho(\xi))$  where  $\xi = \sqrt{\tau^2 + x^2}$  is the Euclidean radial coordinate,  $\rho(\xi)$  is the physical radius. Also, for simplicity, we assume a real scalar field. With these assumptions, the equation of motion for the scalar field are

$$\phi'' + \frac{2\rho'}{\rho} \phi' = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (4.60)$$

where  $\phi'$  signifies differentiation of  $\phi$  with respect to  $\rho$ . The metric associated with the bounce solution also shares this  $O(3)$  symmetry

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 d\Omega^2. \quad (4.61)$$

$R$  and  $K$  are easily found from this metric,

$$R = -\frac{2(2\rho(\xi)\rho''(\xi) + \rho'(\xi)^2 - 1)}{\rho(\xi)^2}, \quad K = \frac{2\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} \Big|_{\xi=\infty}. \quad (4.62)$$

The action is then given by

$$S_{\text{vac}} = 4\pi \int d\xi \left[ \rho^2(\xi)(\phi'^2 + U) + \frac{1}{\kappa} (2\rho(\xi)\rho''(\xi) + \rho'(\xi)^2 - 1) \right] - 8\pi\rho'(\xi)\rho(\xi) \Big|_{\xi=\infty} \quad (4.63)$$

$$= 4\pi \int d\xi \left[ \rho^2(\xi)(\phi'^2 + U) - \frac{1}{\kappa} (\rho'(\xi)^2 + 1) \right], \quad (4.64)$$

where we used integration by parts to cancel the boundary term. The action can be

simplified further by using Einstein's equation  $G_{\xi\xi} = \kappa T_{\xi\xi}$  to obtain

$$\rho'(\xi)^2 = 1 + \kappa\rho^2(\xi)(\phi'^2 - U), \quad (4.65)$$

The on-shell action can then be expressed as

$$S_{\text{vac}} = 8\pi \int d\xi \left[ \rho^2(\xi)U - \frac{1}{\kappa} \right]. \quad (4.66)$$

Now, the tunneling exponent is obtained by subtracting the background from the action of the bounce,  $B \equiv S_B - S_{FV}$ . This gives

$$B = 8\pi \left[ \int_{\text{bounce}} d\xi \left( \rho^2(\xi)U - \frac{1}{\kappa} \right) + \int_{FV} d\xi \frac{1}{\kappa} \right] \quad (4.67)$$

because  $U_{FV} = 0$ . We now employ the thin-wall approximation,  $\varepsilon \ll 1$ . In this limit, the bounce solution describes a bubble of true vacuum, centered on the origin  $\rho = 0$ , which is surrounded by false vacuum. The region of transition from true to false vacuum is an  $O(3)$ -spherical wall. Its large radius  $\bar{\rho}$  when  $\varepsilon$  is small explains why its radial profile is dubbed ‘‘thin’’.

Outside the bubble, the bounce coincides with false-vacuum background, hence  $B_{\text{out}} = 0$ . For the other parts of the spacetime, it is useful to rewrite (4.65) as

$$d\xi = [1 + \kappa\rho^2(\xi)(\phi'^2 - U)]^{-1/2} d\rho \quad (4.68)$$

On the wall,  $\rho' \neq 0$  and the damping term can be neglected in the equation of motion (4.60). We then find the first integral of motion

$$\phi'^2 - U = -U_{FV} = 0. \quad (4.69)$$

This means  $d\xi = d\rho$  for the bounce in the wall region like in the false vacuum background, and only the potential term contributes to the tunneling exponent. As the wall is thin, the

radius doesn't vary much in the wall region,  $\rho \approx \bar{\rho}$ , and

$$B_{\text{wall}} = 4\pi\bar{\rho}^2\sigma, \quad \sigma \equiv \int_{\text{wall}} d\rho (\phi'^2 + U). \quad (4.70)$$

The on-shell action (4.66) inside the bounce is computed with (4.68) and using  $U_{TV} = -\varepsilon$ ,  $\phi' = 0$

$$S_{B;\text{in}} = -8\pi \int_0^{\bar{\rho}} d\rho [1 + \varepsilon\kappa\rho^2]^{-1/2} \left( \varepsilon\rho^2 + \frac{1}{\kappa} \right) \quad (4.71)$$

$$= -\frac{8\pi}{\kappa} \left( \frac{1}{2}\bar{\rho}\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}^2 + 1} + \frac{\text{arcsinh}(\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}})}{2\sqrt{\kappa\varepsilon}} \right) \quad (4.72)$$

As for the inner contribution coming from background, taking  $U = U_{TV} = 0$  in (4.66) yields

$$S_{FV;\text{in}} = -8\pi \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \frac{1}{\kappa} = -\frac{8\pi\bar{\rho}}{\kappa} \quad (4.73)$$

Subtracting this background from the bounce action, we find

$$B_{\text{in}} = -\frac{8\pi}{\kappa} \left( \frac{1}{2}\bar{\rho}\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}^2 + 1} + \frac{\text{arcsinh}(\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}})}{2\sqrt{\kappa\varepsilon}} - \bar{\rho} \right). \quad (4.74)$$

Putting contributions (4.70) and (4.74) together, we find the tunneling exponent dependence the radius  $\bar{\rho}$ .

$$B = 4\pi \left( \bar{\rho}^2\sigma + \frac{1}{\kappa} \left[ -\bar{\rho}\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}^2 + 1} - \frac{\text{arcsinh}(\sqrt{\kappa\varepsilon\bar{\rho}})}{\sqrt{\kappa\varepsilon}} + 2\bar{\rho} \right] \right). \quad (4.75)$$

Taking the  $\kappa \rightarrow 0$  gives the flat spacetime limit we expect

$$B = \left( 4\pi\sigma\bar{\rho}^2 - \frac{4}{3}\pi\varepsilon\bar{\rho}^3 \right) + \mathcal{O}(\kappa) = (\sigma\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{V}) + \mathcal{O}(\kappa), \quad (4.76)$$

where  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{V}$  are the flat Euclidean volume and area in three dimensions. The on-shell radius and action of the flat spacetime bounce are found by extremizing this tunneling

exponent

$$\bar{\rho}_0 = \frac{2\sigma}{\varepsilon}, \quad B_0 = \frac{16\pi\sigma^3}{3\varepsilon^2}. \quad (4.77)$$

The same quantities can be computed in curved spacetime using the full tunneling exponent in (4.75)

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 - \kappa/\kappa_c}, \quad \kappa_c \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma^2}, \quad (4.78)$$

$$B \equiv B_{\text{vac}} = B_0 \left( \frac{3 \left[ 1 - \frac{(1 - \kappa/\kappa_c)}{2\sqrt{\kappa/\kappa_c}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2\sqrt{\kappa/\kappa_c}}{(1 - \kappa/\kappa_c)} \right) \right]}{2(\kappa/\kappa_c)(1 - \kappa/\kappa_c)} \right) = B_0(1 + \mathcal{O}(\kappa)). \quad (4.79)$$

We denote by  $\kappa_c$  a critical value of  $\kappa$ . At this value, the bounce radius is infinite, as is the tunneling exponent. Beyond  $\kappa_c$ ,  $\bar{\rho}$  would be negative, which is unphysical, so the bounce doesn't exist for such strong gravity. The vacuum thus becomes completely stable for  $\kappa > \kappa_c$ . It is easily seen that  $\bar{\rho}$  falls back on  $\rho_0$  as gravity is turned off. This is also true for  $B$  and  $B_0$ , although it is somewhat less obvious.

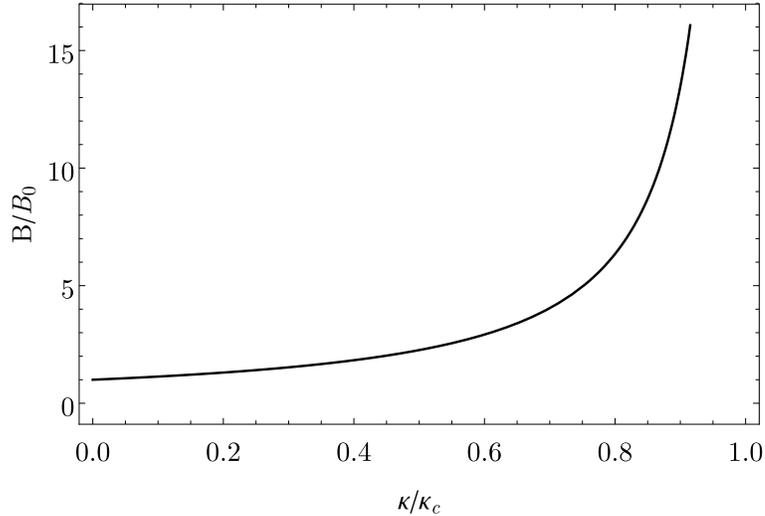


Figure 4.6 – Tunneling exponent for vacuum decay as a function of gravitational coupling  $\kappa$ .

#### 4.4.2 False vortex disintegration

According to [12], we adopt the ansatz for the configurations representing a vortex of radius  $R$ , treating  $R$  as a variational parameter. For thick-wall vortices

$$f(r) = \begin{cases} r/R & r < R \\ 1 & r > R \end{cases}, \quad a(r) = \begin{cases} (r/R)^2 & r < R \\ 1 & r > R \end{cases}, \quad (4.80)$$

while for thin-wall vortices

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r < R - R_o \\ \frac{r - (R - R_o)}{R_o} & R - R_o < r < R \\ 1 & r > R \end{cases}, \quad a(r) = \begin{cases} (r/R)^2 & r < R \\ 1 & r > R \end{cases}. \quad (4.81)$$

In the following, we focus on the thin-wall solution for which an analytical tunneling exponent can be obtained. The Euclidean action takes the form

$$S_{\text{vort}} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^3 x_E \left[ -\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + U(\phi^* \phi) \right] + S_E^{GHY}. \quad (4.82)$$

The Ricci scalar can be reexpressed by using the trace of the Einstein equations. In  $2 + 1$  dimensions,

$$-\frac{R}{2\kappa} = T = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - 3U(\phi^* \phi), \quad (4.83)$$

where we took the trace of (4.4). Inserting this in (4.82) we obtain the vortex's on-shell action

$$S_{\text{vort}} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^3 x_E \left[ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2U(\phi^* \phi) \right] + S_E^{GHY}. \quad (4.84)$$

The Gibbons-Hawking-York term is related to the conical defect, as

$$\mathcal{L}_E^{GHY} = \sqrt{h} K = 1 - \Delta = (1 - 4G\mu)^2, \quad (4.85)$$

where  $\mu$  is the vortex energy. This surface term is not important for tunneling considera-

tions, as it is the same for the background vortex and the expanding vortex. Indeed, the conical defect is expressed by the energy which is conserved in the Euclidean evolution. Energy considerations are not so obvious once gravity is taken into account, but it makes sense at least for an asymptotic quantity like the surface term. Thus, as we move on and compute the tunnelling exponent, the boundary term does not contribute

$$B^{GHY} = S_{\text{vortex bounce}}^{GHY} - S_{\text{vortex bckg.}}^{GHY} = 0. \quad (4.86)$$

We therefore evaluate only the bulk contribution to the action. For simplicity, we write  $(S_E)_{\text{bulk}} = S_E$ . Given the nature of the thin-wall solution, it is better to separate the integral in two parts, that is, the core and the wall of the vortex. The exterior of the vortex does not contribute to the action.

$$S_{\text{vort}} = \int_{\mathcal{M}^-} d^3x_E \sqrt{g} \left[ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2U \right] - 2 \int_{\Sigma} d^3x_E \sqrt{g} U \quad (4.87)$$

$$= 2\pi \int_{\mathcal{M}^-} dt_E dr r \left[ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2U \right] - 4\pi \int d\tau_E \tilde{R} \left( \int_{\Sigma} d\eta U \right) \quad (4.88)$$

$$= 2\pi \int d\tau_E \left[ \frac{d\tau_E}{d\tau_E} \left( \int_0^R dr r \left[ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2U \right] \right) - \sigma \tilde{R} \right], \quad (4.89)$$

For the interior integral, we used the fact that the interior metric respects  $\det(g_{\mu\nu}) = r^2$ . As for the integral on the wall, we performed it in Gaussian normal coordinates defined by (4.25). The interior of the vortex is in true vacuum phase,  $U = -\varepsilon$ , so

$$\int_0^R dr r U = -\frac{\varepsilon R^2}{2}. \quad (4.90)$$

Furthermore, the bounce solution is determined by the equation  $\dot{R}^2/2 + V(R) = 0$ , as the radius expands between turning points  $R_0$  and  $R_1$  as shown in Fig. 4.5(a). The integration over Euclidean time can be parametrized with the radius  $R(\tau_E)$ .

$$S_{\text{vort}} = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} dR \frac{1}{\dot{R}} \left[ \frac{d\tau_E}{d\tau_E} \left( \int_0^R dr r \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \varepsilon R^2 \right) - \sigma \tilde{R} \right]. \quad (4.91)$$

The proper time is related to the coordinate time through

$$d\tau_E^2 = g_{00}dt_E^2 + g_{11}d\tilde{R}^2 \Rightarrow \frac{dt_E}{d\tau_E} = \left[ \frac{1 - g_{11}\dot{\tilde{R}}^2 \left( \frac{d\tilde{R}}{dR} \right)^2}{g_{00}} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 - \dot{R}^2 \left( \frac{K}{NJ^2} \right)}{N} \right]^{1/2}. \quad (4.92)$$

The action then reads

$$S_{\text{vort}} = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} dR \frac{1}{\dot{R}} \left[ \left[ \frac{1 - \dot{R}^2 \left( \frac{K}{NJ^2} \right)}{N} \right]^{1/2} \left( \int_0^R dr r \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \varepsilon R^2 \right) - \sigma R \sqrt{J/L} \right]. \quad (4.93)$$

To evaluate  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , we first compute the value of the gauge field with a computation analogous to the definition of the magnetic flux calculated in (4.45)

$$\frac{1}{2\pi} \oint A_\mu dx^\mu = A_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} d^2x \sqrt{\det g_{ij}} \mathcal{B} = \frac{Q_m}{2L} \ln(1 + L\Lambda r^2) \quad (4.94)$$

The radial integral over the field strength then becomes

$$\begin{aligned} \int_0^R dr r \frac{F_{\mu\nu}^2}{8\pi} &= \int_0^R dr \frac{r}{4\pi} \left( g^{tt} g^{\theta\theta} (\partial_r A_\theta)^2 + g^{rr} g^{\theta\theta} (\partial_r A_\theta)^2 \right) \\ &= \int_0^R dr r \left( \frac{\pi \dot{R}^2 (Q'_m)^2 \left( \log(N) \left[ -\frac{\kappa^2 \Lambda^3 r^2 Q_m^4}{64\pi^2} - \frac{\kappa \Lambda Q_m^2}{8\pi} + \Lambda r^2 + 1 \right] + \frac{\kappa \Lambda^2 L r^2 Q_m^2}{4\pi} \right)^2}{16L^2 N^3 \left( \frac{\kappa Q_m^2}{8\pi} \log(N) + Lr^2 \right)} + \frac{\Lambda^2 Q_m^2}{4\pi N} \right), \end{aligned} \quad (4.95)$$

where the time dependence originated from  $Q_m$  which is a function of  $R(t)$ . This integral is quite complicated and cannot be done analytically. Fortunately, we can simply neglect this contribution from the action. The general idea is that the action is of the form

$$S_E = \int_{R_0}^{R_1} dR \text{ (function of } R \text{)}. \quad (4.96)$$

Since  $R_1 \sim 1/\varepsilon$  is very large (and gets bigger as gravity is added), only the highest powers of  $R$  in the integrand will have significant contributions in the large  $R$  part of the integration. Terms with smaller powers of  $R$  will be negligible. Based on this criterion, it

was argued in [12] that the vortex action (in flat spacetime) is

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^{R_1} dR \left[ \int dr r \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 + U \right] &= \int dR \left[ \frac{\Phi^2}{8\pi^2 R^2} \left( 1 + \frac{\dot{R}^2}{2} \right) + 2\pi\sigma R \sqrt{1 + \dot{R}^2} - \varepsilon\pi R^2 \right] \\ &\approx \int dR \left[ 2\pi\sigma R \sqrt{1 + \dot{R}^2} - \varepsilon\pi R^2 \right]. \end{aligned}$$

We should verify if this approximation is still valid in the presence of gravitational corrections. For simplicity, we restrict our demonstration to the static contribution to the curved spacetime integration of the electromagnetic field strength. We expand this expression in powers of  $\kappa$  :

$$\begin{aligned} \int_0^R dr 2r (F_{12} F^{12}) &= \int_0^R dr 2r \frac{\Lambda^2 Q_m^2}{N} \\ &= \int_0^R dr 2r \left( \frac{\Phi^2}{\pi^2 R^4} + \frac{\Phi^2 (R^2 - r^2) (8\pi^3 R^4 \varepsilon + \Phi^2)}{8\pi^5 R^8} \kappa + \mathcal{O}(\kappa^2) \right) \\ &= \frac{\Phi^2}{\pi^2 R^2} + \frac{\Phi^2 (8\pi^3 R^4 \varepsilon + \Phi^2)}{16\pi^5 R^4} \kappa + \mathcal{O}(\kappa^2), \end{aligned} \quad (4.97)$$

All these terms are either inverse powers of  $R$  or are constant with respect to  $R$  and will contribute only weakly to the value of the action. To fully justify this approximation, we would also need to determine gravitational corrections for the kinetic analog of this quantity, and then compare them to the scalar field contribution. We will first compute the action completely ignoring the electromagnetic part. We will later verify our approximation with a numerical, non-perturbative, computation.

With all this,  $B_{\text{vort}}$  is reduced to

$$B_{\text{vort}} \approx 2\pi \int_{R_0}^{R_1} dR \frac{1}{\dot{R}} \left[ \left[ \frac{1 - \dot{R}^2 \left( \frac{\kappa}{NJ^2} \right)}{N} \right]^{1/2} \varepsilon R^2 - \sigma R \sqrt{J/L} \right]. \quad (4.98)$$

We apply the same approximation, keeping only highest powers of  $R$ . Note that for our purpose we consider  $\varepsilon \sim R^{-1}$ . The effective potential (4.44) related to the wall velocity  $\dot{R}$

is simplified to

$$\dot{R}^2 = 2V_{\text{eff.}}(R) \approx \left(1 - R^2 \frac{(1 - \kappa/\kappa_c)^2}{4\sigma^2/\varepsilon^2}\right) = (1 - R^2/R_1^2), \quad R_1 \equiv \frac{2\sigma/\varepsilon}{|1 - \kappa/\kappa_c|}. \quad (4.99)$$

Note that for  $\kappa < \kappa_c$ , the turning point  $R_1$  is exactly the radius of the Coleman-De Luccia bounce defined in (4.78). It is convenient to introduce a variable for the ratio  $R/R_1$ , such that

$$\dot{R} = \sqrt{1 - R^2/R_1^2} = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \equiv R/R_1. \quad (4.100)$$

Finally, approximating  $Q_m$  to 0 also yields  $J \approx H \approx L \approx 1$ . In its final form, the tunneling exponent then reads

$$B_{\text{vort}} \approx 2\pi\sigma \int_{R_0}^{R_1} dR \frac{1}{\dot{R}} \left[ \frac{1}{N} [N - \dot{R}^2]^{1/2} \frac{\varepsilon}{\sigma} R^2 - R \right] \quad (4.101)$$

$$= 2\pi\sigma R_1^2 \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ \frac{(\varepsilon/\sigma)R_1 x^3}{1 + \kappa\varepsilon R_1^2 x^2} \sqrt{1 + \kappa\varepsilon R_1^2} - x \right] \quad (4.102)$$

where we used  $R_0 \ll R_1$  to set  $x \in [0, 1]$ , and we used  $N = 1 + \kappa\varepsilon R^2$  from (4.34). Integrating this and replacing  $R_1$  by its value defined in (4.99), we get, eventually,

$$B_{\text{vort}} = \frac{B_0}{2} \left( \frac{3 \left( 1 + \frac{(1-\kappa/\kappa_c)}{2\sqrt{\kappa/\kappa_c}} \log \left( \frac{1-\sqrt{\kappa/\kappa_c}}{1+\sqrt{\kappa/\kappa_c}} \right) \right)}{2(\kappa/\kappa_c)(1-\kappa/\kappa_c)} \right) = \frac{B_{\text{vac}}}{2}, \quad (4.103)$$

where we have assumed  $\kappa < \kappa_c$ . The relation to  $B_{\text{vac}}$  is due to the fact that

$$\log \left( \frac{1 - \sqrt{\kappa/\kappa_c}}{1 + \sqrt{\kappa/\kappa_c}} \right) = -\text{arcsinh} \left( \frac{2\sqrt{\kappa/\kappa_c}}{1 - \kappa/\kappa_c} \right), \quad \kappa/\kappa_c < 1. \quad (4.104)$$

We thus have an analytic expression for false vortex decay. For  $\kappa > \kappa_c$ , a similar calculation would reveal that  $B_{\text{vort}} < 0$ . We should not take this result too seriously because numerical solutions of the vortex could not be found for such values of  $\kappa_c$ .

We numerically verify the approximation scheme used to obtain (4.103). The numerical value of the action is obtained by inserting (4.35, 4.38, 4.43, 4.96) in the full

bounce action (4.93). Parameters  $Q_m$  and  $\Delta$  must also be replaced by minimizing (4.45) and solving (4.50), respectively. The result of the integration is shown in Fig. 4.7 ; there is an excellent agreement between analytical and numerical computations.

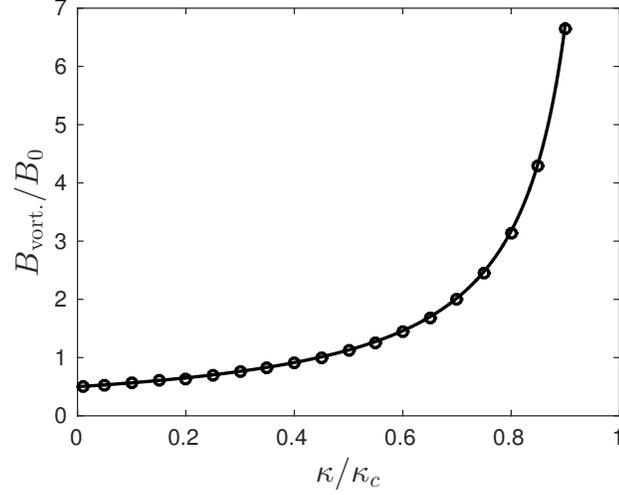


Figure 4.7 – Full line : analytical approximation of  $B_{\text{vort}}$  as a function of  $\kappa$ , (4.103). Circles : Numerical solution with  $Q_m \neq 0$  ( $\Phi = 100$  and  $\varepsilon = 0.01$ ).

It may seem suspicious that the vortex tunneling exponent is independent of the magnetic flux  $\Phi$ . This is because this quantity only comes into play in the contributions we argued were negligibly small. Put another way, the vortex disintegration is essentially controlled by the wall surface tension and the vortex vacuum volume energy. In our approximation scheme, we really just computed the tunneling exponent of an  $O(2)$ -symmetric bubble which starts from approximately null radius and grows to the escape radius in Euclidean time. Now, this  $O(2)$ -invariant tunneling event with lower action than the  $O(3)$ -invariant tunneling event does not contradict what we know from regular vacuum decay. In the absence of magnetic flux, the former is not a proper decay channel since it does not extremize the action. By breaking translational invariance, the vortex basically enables this mode. The magnetic flux is thus necessary for the existence of this event, but has a minor influence on its occurrence.

### 4.4.3 Tunneling rates

For a dilute gas of instantons, the tunneling rate in the semi-classical approximation is given by

$$\Gamma = Ae^{-B} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (4.105)$$

The coefficient  $A$  comes from the determinant arising in the saddle-point evaluation of the path integral. This determinant factor must exclude the integration over the zero modes. The Coleman-De Luccia bounce has translation invariance in all direction, giving three zero modes. The vortex only has time translation invariance, giving one zero mode. The position of the vortex is fixed once and for all. These modes are removed. Instead, the corresponding degrees of freedom (either the center of the vacuum bounce in spacetime or the center of the vortex bounce in time) are integrated over. This change of variables gives rise to a Jacobian factor which is evaluated in [9] and yields the decay rate

$$\Gamma = A' L^{(\#\text{zero modes}-1)} \left( \frac{B}{2\pi} \right)^{(\#\text{zero modes})/2} e^{-B} \quad (4.106)$$

where  $A'$  is the determinant excluding the zero mode and  $L$  denotes dimensions of space or time. We compare the decay rate for vortex disintegration and regular vacuum decay. The vortex tunneling rate has to be multiplied by the number  $N$  vortex. It is assumed vortices are sufficiently separated such that intervortex interactions can be ignored. We thus write tunneling rates ratio

$$\frac{\Gamma^{\text{vac}}}{N\Gamma^{\text{vort}}} = \frac{VA'^{\text{vac}} \left( \frac{B_{\text{vac}}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\{-B_{\text{vac}}\}}{NA'^{\text{vort}} \left( \frac{B_{\text{vort}}}{2\pi} \right)^{1/2} \exp\{-B_{\text{vort}}\}} = \frac{A'^{\text{vac}}}{(N/V)A'^{\text{vort}}} \frac{\sqrt{2}B_{\text{vac}}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{B_{\text{vac}}}{2}\right\}. \quad (4.107)$$

where we used  $B_{\text{vort}} = B_{\text{vac}}/2$ .  $N/V$  indicates the vortices density. Of course, let us recall that we assumed from the outset that  $\varepsilon \ll 1$  and that the vortex has a large winding number  $n$ . Since  $B_{\text{vac}}$  is very large, and more so as  $\varepsilon \rightarrow 0$  and/or  $\kappa \rightarrow \kappa_c$ , this means the phase transition is largely dominated by vortex disintegration. Calculating the determinant factors  $A'^{\text{vac}}$  and  $A'^{\text{vort}}$ . is beyond the scope of this paper

## 4.5 Summary and Discussion

We have extended the work [12] based on a modified Higgs model in which vortices can be formed in a  $U(1)$  breaking false vacuum. We found how gravitational effects can alter the formation and decay rate of vortices trapped in the false vacuum. As gravity is turned on, the spacetime becomes asymptotically conical, with a deficit angle clearly seen in numerical solutions. Matter configurations are also changed, albeit to a lesser degree. As for the decay rate, it decreases, both for conventional vacuum decay and for vortex desintegration, as gravitational coupling is increased. Neglecting the magnetic contribution in the vortex case, we find the vortex tunneling exponent is precisely half that for vacuum decay for any value of  $\kappa$ . Both events get more and more suppressed, up to a critical point, with increasing gravitational coupling. Nevertheless, we are more interested in relative tunneling amplitudes. We found out that, as gravity is turned on, vortices remain the dominant factor determining the false vacuum's stability.

Thus, in some cases, vortices may very well render a theory incompatible with our Universe's cosmological history. Of course, the model in question has to appear in physical situations in the first place. The sextic abelian Higgs model is somewhat unusual. Our motivation was to study the interplay of symmetry breaking and false vacuum in a toy model for which analytical and numerical calculations are possible. These features are of general relevance in many theories. One can think of scalar potential false vacua appearing in string cosmology, or the existence of supersymmetry-broken phases.

It would be interesting to also consider monopoles which are one dimension bigger than vortices. Here again, the problem studied in flat spacetime [39] would be better understood and might lead to new important effects as gravity is added. Investigations along these lines are ongoing.

## Acknowledgements

We thank Cliff Burgess and Misao Sasaki for useful discussions. ÉD thanks Marie-Lou Gendron Marsolais for her help with numerical computations. This work was financially supported in part by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada

and the Fonds de recherche du Québec — Nature et technologies. RM, MP and UY thank the Ministère des Relations internationales et de la Francophonie du Gouvernement du Québec under the Cooperation Québec-Maharashtra for continuing financial support. BHL is supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2017R1D1A1B03028310). WL is supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2016R1D1A1B01010234). DY is supported by the Leung Center for Cosmology and Particle Astrophysics (LeCosPA) of National Taiwan University (103R4000).

## Après-propos

Les vortex métastables présentés en [12] développent, tel que prévu et montré par les solutions numériques, un défaut conique dans l'espace-temps lorsqu'ils sont couplés gravitationnellement. D'autre part, ils existent dans une plus grande région de l'espace des paramètres lorsque la gravité est incorporée. L'explosion d'un vortex reste, dans la limite *thin-wall*, un canal de désintégration plus efficace que le *bounce* de Coleman-de Luccia. Dans ce contexte, même une faible densité de vortex métastables pourrait altérer de façon importante les données cosmologiques. Par exemple, la présence de vortex peut influencer la durée du temps passé dans une ère cosmologique antérieure.

Les approximations utilisées pour arriver à une forme analytique du taux de désintégration négligent complètement le flux magnétique contenu dans le vortex. Dans ce contexte, on peut se représenter l'explosion du vortex par le grossissement d'une simple bulle de vrai vide contenue par la tension d'un champ scalaire et qui s'accroît dans le temps euclidien. Cette bulle a donc une symétrie  $O(d-1)$  en raison de la symétrie sphérique brisée dans la direction du temps euclidien, contrairement à l'instanton de Coleman-de Luccia avec la symétrie  $O(d)$ . À cet égard, la figure 4.8 aide à visualiser la géométrie du *bounce* dans ces deux cas : les symétries  $O(d-1)$  et  $O(d)$  s'apparentent à un ellipsoïde et une sphère. La troncation représente le moment de la nucléation où il faut revenir au point de vue *minkowskien* pour décrire l'expansion du vortex ou de la bulle de vrai vide critique.

Dans la discussion précédente, la dimension  $d$  de l'espace-temps est  $d = 3$  dans le cas d'un vortex. Le même type de raisonnement peut aussi s'appliquer dans le cas du monopôle avec  $d = 4$ . Une limite *thin-wall* est aussi possible pour une grande charge topologique [48], et ce même pour les monopôles métastables [39]. Dans ce cas, la désintégration est aussi contrôlée par une bulle de symétrie  $O(d-1) = O(3)$ , tant en espace-temps plat qu'en espace-temps courbe. D'ailleurs, ce sont des investigations dans le cas du monopôle, plus simple à traiter que le vortex, qui ont pu élucider ce mécanisme. Un article traitant de cette question est en préparation. Il est probable que cette analyse puisse aussi s'appliquer au cas des skyrmions. Particulièrement, l'étude d'une étoile de

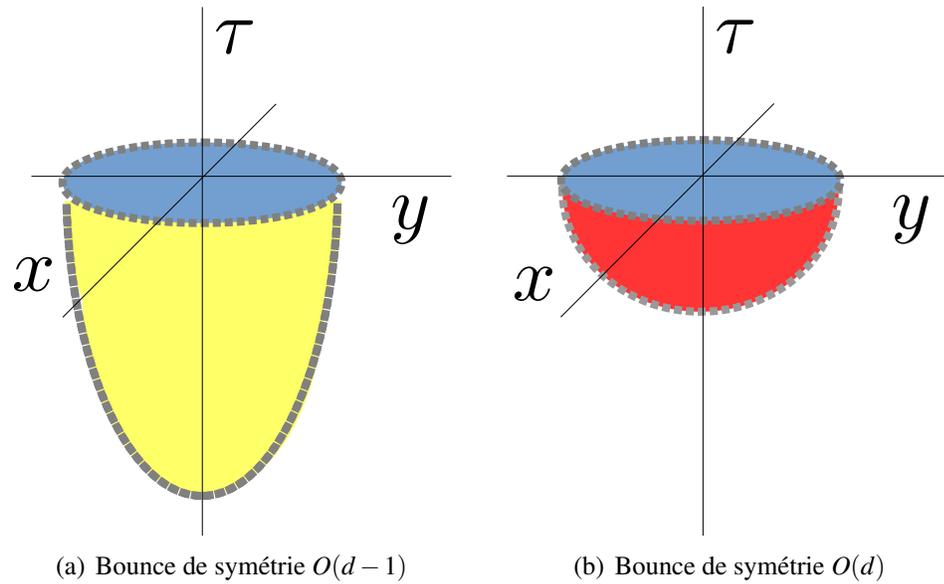


Figure 4.8 – Géométrie du champ scalaire associée aux différents types de bounce. L'intérieur de ces objets dénote la phase de vrai vide, l'extérieur le faux vide.

skymion [49] où la charge topologique (le nombre baryonique) est très élevée, pourrait être revisitée en ajoutant un terme de masse avec un faux vide dans le lagrangien de Skyrme.

## CHAPITRE 5

### FAIBLE GRAVITÉ ET ACTION

L'article présenté à la dernière section consistait à ajouter la gravitation dans le modèle considéré dans [12]. Les résultats de cet article devraient être retrouvés pour  $G \rightarrow 0$ , soit l'absence de gravitation. L'exposant donnant le taux de transition provoqué par la désintégration régulière du faux vide (4.79) et l'explosion du vortex (4.103) montrent l'adéquation espérée et ainsi le bon fonctionnement de cette limite.

Il demeure que la question d'une limite faible gravité de l'action est rarement abordée dans la littérature. C'est peut-être en partie dû au fait que l'action est toujours définie à une constante près qui ne change pas les équations du mouvement. Or, en parlant d'un taux de désintégration, une signification physique est attribuée à la valeur de l'action (ou plutôt à une différence d'action). Pour observer une continuité dans le taux de désintégration lorsqu'un couplage gravitationnel marginal est activé, il faut que la limite faible gravité de l'action soit bien définie.

La présence d'un terme de Gibbons-Hawking-York dans l'action est motivée. Une dérivation partielle de la forme du terme est menée. La limite faible gravité de l'action est ensuite calculée. Enfin, des effets n'ayant pas une limite faible gravité bien définie sont présentés.

#### 5.1 Terme de Gibbons-Hawking-York

Le terme de Gibbons-Hawking-York est un terme de surface dans l'action gravitationnelle d'une théorie physique. Il est nommé d'après ceux qui l'ont proposé dans [33, 34]. L'action totale incluant ce terme prend la forme

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathcal{M}} + S_{GHY} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_M \right] + \oint_{\partial \mathcal{M}} d^{d-1} x \sqrt{|\gamma|} \frac{K - K_0}{\kappa}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $K$  et  $\gamma_{\mu\nu}$  sont respectivement la courbure extrinsèque et la métrique induite sur  $\partial\mathcal{M}$ , soit la surface dans la région asymptotique  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  de l'espace-temps  $\mathcal{M}$ .  $K_0$  est la courbure extrinsèque obtenue en imbriquant une frontière  $\partial\mathcal{M}$  de type Minkowski dans l'espace-temps  $\mathcal{M}$  étudié. Ce terme est une constante qui diverge généralement pour  $\kappa \rightarrow 0$ . La retirer ne change pas la dynamique, mais elle assure que le terme  $K - K_0$  est bien d'ordre  $\kappa$ , c'est-à-dire que ce terme de courbure est nul sans gravitation.

Il sera montré que le terme de Gibbons-Hawking-York est nécessaire pour que l'action soit stationnaire sur les configurations physiques. On peut le constater en variant l'action par la métrique  $g_{\mu\nu}$  dans une théorie de gravité pure. Soit l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{\text{EH}} = \int d^d x \frac{R}{2\kappa}. \quad (5.2)$$

Sa variation est donnée par

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EH}} &= \frac{1}{2\kappa} \delta \left( \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La variation du jacobien a été utilisée pour exprimer le deuxième terme multipliant  $\delta g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ce résultat suit de l'identité suivante matricielle [50],

$$\delta(\det M) = \det(M) \text{Tr}(M^{-1} \delta M), \quad (5.5)$$

ainsi que de la relation

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\pi}g_{\nu\sigma}\delta g^{\pi\sigma}. \quad (5.6)$$

Cette dernière identité est facilement montrée sachant que  $\delta(g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}) = \delta(\delta_{\mu}^{\rho}) = 0$ .

Une condition pour que la variation de l'action  $\delta S_{\text{EH}}$  soit nulle est l'annulation du facteur devant  $\delta g^{\mu\nu}$  dans (5.3) qui donne les équations d'Einstein dans le vide

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu} = 0. \quad (5.7)$$

Le deuxième terme dans (5.3), quant à lui, est généralement laissé tombé, l'argument étant qu'il s'agit d'un terme de surface. Effectivement, ce terme serait nul s'il était proportionnel à la variation du champ à la surface  $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}}$  qui est fixée à zéro dans le traitement variationnel standard. Or, il est montré dans ce qui suit que  $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$  est plutôt proportionnel à la variation de la *dérivée* de la métrique,  $\delta(\partial g)$ ;  $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$  n'est pas forcément nul et implique éventuellement la nécessité du terme de Gibbons-Hawking-York.

La variation de  $R_{\mu\nu}$  est calculée dans ce qui suit en terme des symboles de Christoffel (les conventions de Hartle [51] sont utilisées dans cette section)

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta \left( \Gamma_{\mu\nu,\pi}^{\pi} - \Gamma_{\mu\pi,\nu}^{\pi} + \Gamma_{\pi\sigma}^{\pi} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\pi} \Gamma_{\mu\pi}^{\sigma} \right) \\ &= \left( \delta \Gamma_{\mu\nu,\pi}^{\pi} + \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\pi\sigma}^{\pi} - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\pi} \Gamma_{\mu\pi}^{\sigma} \right) \\ &\quad - \left( \delta \Gamma_{\mu\pi,\nu}^{\pi} + \delta \Gamma_{\mu\pi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\pi} - \delta \Gamma_{\pi\sigma}^{\pi} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \right). \end{aligned}$$

La règle du produit a simplement été appliquée à tous les termes. L'ordonnement particulier est choisi pour mettre en évidence les dérivées covariantes qui apparaissent. En effet,

si  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$  est un tenseur, alors on peut réécrire  $\delta R_{\mu\nu}$  comme

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \left[ \left( \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi} \right)_{;\pi} + \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\pi} \Gamma_{\nu\pi}^{\sigma} \right] - \left[ \left( \delta\Gamma_{\mu\pi}^{\pi} \right)_{;\nu} + \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\pi} \Gamma_{\nu\pi}^{\sigma} \right] \\
&= \left( \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi} \right)_{;\pi} - \left( \delta\Gamma_{\mu\pi}^{\pi} \right)_{;\nu} \\
&= \left( \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi} - \delta_{\nu}^{\pi} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \right)_{;\pi}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$  est calculé explicitement pour montrer qu'il s'agit en effet d'un tenseur

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi} &= \delta \left( \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{\pi\alpha} g^{\sigma\beta} \delta g_{\alpha\beta} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} \left[ (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) \right. \\
&\quad \left. - g^{\alpha\beta} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \delta g_{\sigma\beta} \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} \left[ (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) - 2\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta g_{\sigma\beta} \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} \left[ (\delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} \delta g_{\mu\beta}) \right. \\
&\quad \left. + (\delta g_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\beta} \delta g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\beta} \delta g_{\nu\beta}) \right. \\
&\quad \left. - (\delta g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta} \delta g_{\nu\beta} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} \delta g_{\mu\beta}) \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\pi\sigma} (\delta g_{\mu\sigma;\nu} + \delta g_{\nu\sigma;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

où la symétrie de  $\delta g_{\mu\nu}$  et  $\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$  sous échange de  $\mu$  et  $\nu$  a été utilisée. Ainsi,  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$  a une forme très semblable à  $\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$ . Par contre, dans le terme  $\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$ , des dérivées partielles normales sont appliquées aux termes de métrique. Ici, ce sont des dérivées covariantes qui sont appliquées aux variations de la métrique. Pour cette raison,  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\pi}$  est effectivement

un tenseur. Enfin, le terme  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  est réexprimé à l'aide de (5.8)

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\pi} - g^{\mu\pi} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \right)_{;\pi}. \quad (5.10)$$

Il s'agit d'un terme de surface

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] &= \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} \nabla_{\pi} \left( g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\pi} - g^{\mu\pi} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} d^{d-1} x \sqrt{|\gamma|} n_{\pi} \left( g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\pi} - g^{\mu\pi} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

où  $n_{\pi}$  est la normale à la frontière  $\partial \mathcal{M}$ . Une version généralisée du théorème de Stokes a été utilisée pour réexprimer cette intégration de volume d'une dérivée totale par une intégrale de surface [50]

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega \Rightarrow \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \omega^{\mu} = \int d^{d-1} x \sqrt{|\gamma|} n_{\mu} \omega^{\mu}. \quad (5.12)$$

Les équations (5.9) et (5.11) montrent donc que le terme de surface dans la variation de l'action d'Einstein-Hilbert contient des termes du type  $\delta(\partial g)$  qui ne sont pas forcément nuls,

$$\delta S_{\text{EH}} = (\text{surface}) \neq 0. \quad (5.13)$$

Le terme de Gibbons-Hawking-York est choisi précisément pour annuler cette contribution, de telle sorte que

$$\delta (S_{\text{EH}} + S_{\text{GHY}}) = 0. \quad (5.14)$$

En étudiant la forme du terme de surface donné à l'équation (5.11), il est possible de déduire une forme convenable pour le terme de Gibbons-Hawking-York [50]

$$S_{\text{GHY}} = \oint_{\partial \mathcal{M}} d^{d-1} x \sqrt{|\gamma|} \text{sgn}(n_{\nu} n^{\nu}) \frac{K - K_0}{\kappa}, \quad K \equiv -\nabla_{\mu} n^{\mu}. \quad (5.15)$$

où une normale de type espace avec  $\text{sgn}(n_\nu n^\nu) = 1$  sera supposée dans ce qui suit. Les détails de cette dérivation de ce terme ne sont pas nécessaires ici. L'idée de la précédente dérivation était d'exposer le lien entre le terme de Gibbons-Hawking-York et le scalaire de Ricci. Ce lien sera utile pour comprendre la limite de faible de gravité de l'action.

Il reste que le terme de Gibbons-Hawking-York ne change rien aux équations d'Einstein ni aux équations de mouvement des champs de matière. Pour cette raison, il est parfois omis. Toutefois, comme la valeur de l'action euclidienne d'un instanton détermine le taux de désintégration d'un objet métastable  $\Gamma \sim \exp\{-(S_B - S_{\text{bckg.}})\}$ , il est important d'inclure toutes les contributions, dont celle du terme de surface.

## 5.2 Faible gravité

Pour faire une comparaison adéquate de la stabilité de la théorie à l'étude en présence et en absence de gravité, il importe que la limite faible gravité de l'exposant de pénétration de barrière soit bien définie

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} B = B_{\text{Minkowski}} \quad (5.16)$$

Pour ce faire, l'action est développée en puissances de  $\kappa$ ,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \kappa^n. \quad (5.17)$$

Le plus bas ordre  $S^{(0)}$  doit redonner l'action des champs de matière sans contribution gravitationnelle. Chacune des fonctions entrant dans l'action peut être développée en

puissances de  $\kappa$ ,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)} \kappa^n, \\
R &= \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)} \kappa^n, \\
\tilde{K} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}^{(n)} \kappa^n, \quad \tilde{K} \equiv K - K_0 \\
\mathcal{L}_M &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_M^{(n)} \kappa^n.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Pour  $\kappa \rightarrow 0$ , les courbures  $R$  et  $\tilde{K}$  doivent être nulles, ce qui explique l'absence d'une composante d'ordre 0 dans leur développement. Pour le reste, il suffit de développer l'action  $S$  en termes de ces quantités et de garder le plus bas ordre possible

$$S^{(0)} = \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g^{(0)}} \mathcal{L}_M^{(0)} + \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g^{(0)}} \frac{R^{(1)}}{2} + \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1} x \sqrt{|\gamma^{(0)}|} \tilde{K}^{(1)}. \tag{5.19}$$

Le premier terme est l'action habituelle du vortex en espace-temps plat. Les autres termes ne devraient pas contribuer au taux de désintégration sans gravitation et devraient donc s'annuler

$$\int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g^{(0)}} \frac{R^{(1)}}{2} + \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1} x \sqrt{|\gamma^{(0)}|} \tilde{K}^{(1)} = 0. \tag{5.20}$$

En fait, cette condition est trop stricte ; pour respecter la condition (5.16), il faut seulement que  $B^{(0)}$  n'ait pas de contribution gravitationnelle. Cependant, la condition plus stricte (5.20) s'applique également. Cette condition est plausible puisque le premier ordre du scalaire de Ricci est un terme de surface [52]

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \partial_\pi \partial^\pi h_{\mu\nu} - \partial_\pi \partial_\mu h_\nu^\pi - \partial_\pi \partial_\nu h_\mu^\pi + \partial_\mu \partial_\nu h \right) \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
R^{(1)} &= \partial_\pi \partial^\pi h - \partial_\pi \partial^\mu h_\mu^\pi \\
&= \partial_\pi \partial_\mu (\eta^{\pi\mu} h - h^{\pi\mu}).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

où  $h_{\mu\nu}$  est la déviation au plus bas ordre de la métrique par rapport à l'espace-temps de Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ . En principe, on pourrait maintenant intégrer cette contribution du scalaire de Ricci et la comparer au terme de surface venant du terme de Gibbons-Hawking-York. Or, un résultat plus général trouvé par Padmanabhan peut être employé. Dans [53], Padmanabhan montre que l'action d'Einstein-Hilbert peut être décomposée en un terme de volume et un terme de surface. Dans [54], il est de plus montré que cette partie de surface s'annule exactement avec le terme de Gibbons-Hawking. Or, comme  $\int d^d x \frac{R^{(1)}}{2}$  est uniquement un terme de surface d'après (5.22) et qu'il doit s'annuler avec le terme de Gibbons-Hawking-York selon les résultats de Padmanabhan, on conclut que la condition (5.20) est respectée.

Autrement dit, le terme du scalaire de Ricci comporte une partie de surface qui s'annule avec le terme de Gibbons-Hawking-York. Au plus bas ordre en couplage gravitationnel, l'action d'Einstein-Hilbert comporte uniquement un terme de surface. L'action d'Einstein-Hilbert et le terme de Gibbons-Hawking-York s'annulent donc, tel que voulu, au plus bas ordre en couplage gravitationnel.

### 5.3 Effets absents en espace-temps plat

La discussion d'une limite de faible gravité a du sens dans la mesure où l'objet étudié dans une théorie avec gravitation a une contrepartie dans un espace-temps plat. Il existe toutefois des effets non perturbatifs qui n'ont pas lieu sans gravitation.

Lorsqu'un horizon est impliqué dans l'espace-temps à l'étude, la limite faible gravité est plus ambiguë. En particulier, dans un espace-temps de Sitter, il existe un horizon externe auquel on peut faire correspondre une température [55]. L'Univers étant plongé dans un bain thermique, de nouveaux effets apparaissent. Par exemple, considérons le potentiel montré à la figure 2.1, mais cette fois avec une densité d'énergie non nulle et positive dans le faux vide. Une configuration homogène de faux vide a alors comme tenseur d'énergie-impulsion

$$(T_{\mu\nu})_{\text{FV}} = -g_{\mu\nu}U(\phi_{\text{FV}}) \quad (5.23)$$

Dans l'équation d'Einstein, cela se traduit par

$$G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 0, \quad \Lambda \equiv \kappa U(\phi_{\text{FV}}). \quad (5.24)$$

La densité d'énergie positive dans le faux vide correspond à une constante cosmologique positive, un espace-temps de Sitter.

Pour revenir à la figure 2.1, imaginons que l'Univers se trouve dans le vide de plus basse énergie,  $\phi_{\text{VY}}$ . Dans un tel contexte, il existe un instanton qui permet de créer une bulle de *faux vide* si la densité d'énergie y est positive. C'est d'ailleurs la prémisse de [56]. Cet effet défie l'intuition, puisqu'il semble violer une loi de conservation, soit celle de l'énergie. Cependant, en espace-temps courbe, la conservation du tenseur énergie-impulsion est covariante

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.25)$$

ce qui ne mène pas forcément à la conservation de l'énergie au sens usuel.

Dans le même ordre d'idée, un nouveau canal, l'instanton de Hawking-Moss [57], peut aussi contribuer à la désintégration du faux vide. La figure 5.1 montre une comparaison qualitative des instantons de Coleman-de Luccia et de Hawking-Moss. Comme pour l'apparition d'une bulle de faux vide dans un vide homogène, la première étape de l'instanton de Hawking-Moss est grossièrement marquée par l'apparition d'une phase instable du champ scalaire. Le reste de la transition peut être réalisée de façon classique par « roulement ». Ces effets n'étaient pas présents dans l'étude au chapitre 4 puisque la densité d'énergie du faux vide a été choisie nulle.

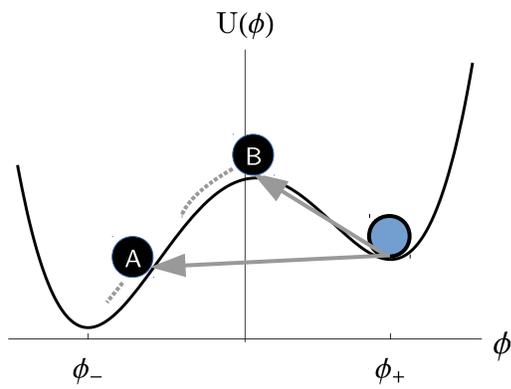


Figure 5.1 – A : Instanton de Coleman- de Luccia. B : Instanton de Hawking-Moss.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSION

Physics is very muddled again at the moment ; it is much too hard for me anyway, and I wish I were a movie comedian or something like that and had never heard anything about physics !

---

Wolfgang Pauli

L'étude des vortex métastables dans un modèle de Higgs en électrodynamique scalaire réalisée dans [12] a été étendue par l'ajout d'un couplage gravitationnel minimal. Les concepts clés liés au modèle original, soient la métastabilité associée au faux vide et la brisure spontanée permettant la formation de solitons topologiques, ont été revus. Le vortex de Nielsen-Olesen est un soliton topologique formé lorsqu'une symétrie  $U(1)$  est brisée. Si la brisure est réalisée par une surface de faux vides alors qu'un vrai vide restaure la symétrie, l'intérieur d'un vortex contient ce vrai vide, ce qui le rend susceptible d'exploser par fluctuations quantiques. Cette explosion du vortex médie une transition de phase du faux vers le vrai vide à même titre que la nucléation de bulles de vrai vide dans un faux vide homogène. Ces deux événements sont décrits par des instantons, des solutions classiques des équations euclidiennes du mouvement. Ces solutions déterminent le taux de désintégration. L'objectif principal de l'étude était de caractériser l'influence de la gravité sur les instantons.

L'existence de vortex statiques avec gravité a d'abord été établie en résolvant numériquement les équations du mouvement du modèle. L'allure des solutions en fonction du couplage gravitationnel change principalement la métrique de l'espace-temps. La zone de stabilité dans l'espace des paramètres est plus grande avec l'ajout de la gravitation. L'instanton bâti sur le vortex a été traité analytiquement dans la limite *thin-wall* obtenue pour un grand flux magnétique ; le rayon du vortex est alors une coordonnée collective.

Dans ce cas, les métriques à l'intérieur et à l'extérieur du vortex sont connues. Elles sont jointes par les conditions d'Israël qui imposent le respect des équations d'Einstein sur le mur du vortex. Une équation de mouvement pour le rayon est alors trouvée de ces conditions et donne la dynamique du vortex lors de son grossissement. Pour les valeurs suffisamment faibles du couplage gravitationnel permettant la formation d'instantons, il a été montré que l'instanton lié à l'explosion du vortex a une valeur d'action deux fois plus faible que l'instanton lié aux bulles de vide apparaissant dans un faux vide homogène. Il a alors été conclu que dans certaines régions de l'espace des paramètres ( $n \gg 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ ), les vortex dominent la transition de phase d'un faux vide vers un vrai vide.

L'idée de solitons topologiques métastables a été étudiée spécifiquement pour des *kinks* [37], des vortex [12], et des monopôles [39] par le passé. L'ajout de gravitation au cas des vortex rend les résultats plus réalistes dans un contexte cosmologique. Le cas du monopôle avec gravitation se généralise de façon semblable ; ce cas est présentement à l'étude. Il est important de considérer la stabilité de tels objets, puisque la réunion d'une brisure spontanée de symétrie et d'une structure de faux vides peut survenir dans certains modèles cosmologiques.

Dans un autre ordre d'idées, les études sans gravitation trouvent une application importante en matière condensée. Tel qu'argumenté dans [12], le désaccord entre la prédiction théorique et expérimentale du temps d'une phase métastable du superfluide  ${}^3\text{He}$  noté dans [58] pourrait être corrigé en considérant la désintégration de vortex métastables. D'autre part, le skyrmion magnétique, aussi important en matière condensée, est un autre défaut topologique encore inexploré dans la série sur les solitons topologiques métastables qu'il serait intéressant d'étudier.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. MacKenzie, “Path integral methods and applications,” in *6th Vietnam International School on Physics Vung-Tau, Vietnam, 27 December 1999 - 9 January 2000*, 1999.
- [2] T. W. B. Kibble, “Topology of Cosmic Domains and Strings,” *J. Phys.*, vol. A9, pp. 1387–1398, 1976.
- [3] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2004.
- [4] T. Charnock, A. Avgoustidis, E. J. Copeland, and A. Moss, “CMB constraints on cosmic strings and superstrings,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 12, p. 123503, 2016.
- [5] J. Aasi *et al.*, “Constraints on cosmic strings from the LIGO-Virgo gravitational-wave detectors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 131101, 2014.
- [6] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [7] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. 1995.
- [8] L. Kadanoff, *Statistical Physics : Statics, Dynamics and Renormalization*. World scientific, 2000.
- [9] S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,” *Phys. Rev.*, vol. D15, pp. 2929–2936, 1977. [Erratum : *Phys. Rev.*D16,1248(1977)].
- [10] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections,” *Phys. Rev.*, vol. D16, pp. 1762–1768, 1977.
- [11] S. R. Coleman and F. De Luccia, “Gravitational Effects on and of Vacuum Decay,” *Phys. Rev.*, vol. D21, p. 3305, 1980.

- [12] B.-H. Lee, W. Lee, R. MacKenzie, M. B. Paranjape, U. A. Yajnik, and D.-h. Yeom, “Tunneling decay of false vortices,” *Phys. Rev.*, vol. D88, p. 085031, 2013.
- [13] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland personal library, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [14] S. R. Coleman, V. Glaser, and A. Martin, “Action Minima Among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 58, p. 211, 1978.
- [15] S. Coleman, *Aspects of Symmetry : Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, Aug 1985.
- [16] R. H. Brandenberger, “Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universe Models,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 57, p. 1, 1985.
- [17] E. J. Weinberg, *Classical solutions in quantum field theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2015.
- [18] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. International series in pure and applied physics, McGraw-Hill, 1970.
- [19] M. Koehn, G. Lavrelashvili, and J.-L. Lehners, “Towards a Solution of the Negative Mode Problem in Quantum Tunnelling with Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 2, p. 023506, 2015.
- [20] E. Yankowsky, A. Schwarz, and S. Levy, *Quantum Field Theory and Topology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [21] J. M. Cornwall and R. E. Norton, “Spontaneous Symmetry Breaking Without Scalar Mesons,” *Phys. Rev.*, vol. D8, pp. 3338–3346, 1973.
- [22] S. Coleman, *Aspects of Symmetry : Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1988.

- [23] P. Goddard and D. I. Olive, “Magnetic monopoles in gauge field theories,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 41, no. 9, p. 1357, 1978.
- [24] G. H. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *J. Math. Phys.*, vol. 5, pp. 1252–1254, 1964.
- [25] J. K. Perring and T. H. R. Skyrme, “A Model unified field equation,” *Nucl. Phys.*, vol. 31, pp. 550–555, 1962.
- [26] H. B. Nielsen and P. Olesen, “Vortex Line Models for Dual Strings,” *Nucl. Phys.*, vol. B61, pp. 45–61, 1973.
- [27] G. ’t Hooft, “Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories,” *Nucl. Phys.*, vol. B79, pp. 276–284, 1974.
- [28] A. M. Polyakov, “Particle Spectrum in the Quantum Field Theory,” *JETP Lett.*, vol. 20, pp. 194–195, 1974. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.20,430(1974)].
- [29] Y. M. Cho and D. Maison, “Monopoles in Weinberg-Salam model,” *Phys. Lett.*, vol. B391, pp. 360–365, 1997.
- [30] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, “Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations,” *Phys. Lett.*, vol. B59, pp. 85–87, 1975.
- [31] D. Garfinkle, “General Relativistic Strings,” *Phys. Rev.*, vol. D32, pp. 1323–1329, 1985.
- [32] P. Laguna-Castillo and R. A. Matzner, “Coupled Field Solutions for U(1) Gauge Cosmic Strings,” *Phys. Rev.*, vol. D36, pp. 3663–3673, 1987.
- [33] J. W. York, Jr., “Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 1082–1085, 1972.
- [34] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D15, pp. 2752–2756, 1977.

- [35] W. Press, *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [36] P. J. Steinhardt, “Monopole and Vortex Dissociation and Decay of the False Vacuum,” *Nucl. Phys.*, vol. B190, pp. 583–616, 1981.
- [37] E. Dupuis, Y. Gobeil, R. MacKenzie, L. Marleau, M. B. Paranjape, and Y. Ung, “Tunneling decay of false kinks,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 2, p. 025031, 2015.
- [38] J. Ashcroft, M. Eto, M. Haberichter, M. Nitta, and M. B. Paranjape, “Head butting sheep : Kink Collisions in the Presence of False Vacua,” *J. Phys.*, vol. A49, no. 36, p. 365203, 2016.
- [39] B. Kumar, M. B. Paranjape, and U. A. Yajnik, “Fate of the false monopoles : Induced vacuum decay,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 025022, 2010.
- [40] S. Weinberg, “Gauge and Global Symmetries at High Temperature,” *Phys. Rev.*, vol. D9, pp. 3357–3378, 1974.
- [41] P. van Nieuwenhuizen, D. Wilkinson, and M. J. Perry, “Regular solution of ’t hooft’s magnetic monopole model in curved space,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, pp. 778–784, Feb 1976.
- [42] P. Bizon and T. Chmaj, “Gravitating skyrmions,” *Physics Letters B*, vol. 297, no. 1, pp. 55 – 62, 1992.
- [43] E. Ayon-Beato, C. Martinez, and J. Zanelli, “Birkhoff’s theorem for three-dimensional AdS gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D70, p. 044027, 2004.
- [44] E. W. Hirschmann and D. L. Welch, “Magnetic solutions to (2+1) gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D53, pp. 5579–5582, 1996.
- [45] W. Israel, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,” *Nuovo Cim.*, vol. B44S10, p. 1, 1966. [Nuovo Cim.B44,1(1966)].

- [46] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco : W. H. Freeman, 1973.
- [47] V. A. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2002.
- [48] S. Bolognesi, “Multi-monopoles and magnetic bags,” *Nucl. Phys.*, vol. B752, pp. 93–123, 2006.
- [49] B. M. A. G. Piette and G. I. Probert, “Towards skyrmion stars : Large baryon configurations in the Einstein-Skyrme model,” *Phys. Rev.*, vol. D75, p. 125023, 2007.
- [50] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry : An introduction to general relativity*. 2004.
- [51] J. Hartle, *Gravity : An Introduction to Einstein’s General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [52] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [53] T. Padmanabhan, “Holographic gravity and the surface term in the Einstein-Hilbert action,” *Braz. J. Phys.*, vol. 35, pp. 362–372, 2005.
- [54] T. Padmanabhan, “Gravity and the thermodynamics of horizons,” *Phys. Rept.*, vol. 406, pp. 49–125, 2005.
- [55] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation,” *Phys. Rev.*, vol. D15, pp. 2738–2751, 1977.
- [56] S. K. Blau, E. I. Guendelman, and A. H. Guth, “The Dynamics of False Vacuum Bubbles,” *Phys. Rev.*, vol. D35, p. 1747, 1987.
- [57] S. W. Hawking and I. G. Moss, “Supercooled Phase Transitions in the Very Early Universe,” *Phys. Lett.*, vol. B110, pp. 35–38, 1982.
- [58] A. J. Leggett, “A theoretical description of the new phases of liquid  $^3\text{He}$ ,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 47, pp. 331–414, Apr 1975.

## Annexe I

### Corrections d'ordre supérieur en $\hbar$ à l'intégrale de chemin.

Le facteur de correction  $[1 + \mathcal{O}(\hbar)]$  montré à l'équation (2.31) est dû à la troncation dans le développement limité de l'action euclidienne. Dans l'approximation semi-classique, ces corrections sont faibles. Il est aisé de comprendre pourquoi de telles corrections sont d'ordre  $\hbar$  en introduisant dans le lagrangien une source  $J$  qu'on pose plus tard à 0,

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \hbar J(x)\eta(x). \quad (\text{I.1})$$

Refaisant le calcul au même ordre que dans la section 2.1.4 pour arriver à (2.26), seule l'intégration gaussienne se voit modifiée

$$\int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ \int d^D x \frac{-\eta \mathbb{O}_B \eta}{\hbar} \right\} \rightarrow \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ \int d^D x \left( \frac{-\eta \mathbb{O}_B \eta}{\hbar} + J\eta \right) \right\}. \quad (\text{I.2})$$

En introduisant la variable

$$\eta' = \eta - \hbar \mathbb{O}_B^{-1} \frac{J}{2}, \quad (\text{I.3})$$

l'argument de l'exponentielle ci-haut est reformulé

$$\begin{aligned} \left( \frac{-\eta \mathbb{O}_B \eta}{\hbar} + J\eta \right) &= \left( \frac{-(\eta' + \hbar \mathbb{O}_B^{-1} \frac{J}{2}) \mathbb{O}_B (\eta' + \hbar \mathbb{O}_B^{-1} \frac{J}{2})}{\hbar} + J \left( \eta' + \hbar \mathbb{O}_B^{-1} \frac{J}{2} \right) \right) \\ &= \left( \frac{-\eta' \mathbb{O}_B \eta'}{\hbar} + \frac{J \hbar \mathbb{O}_B^{-1} J}{4} \right). \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Puisque  $\mathcal{D}\eta = \mathcal{D}\eta'$ , l'intégration gaussienne fonctionnelle devient simplement

$$\int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ \int d^D x \left( \frac{-\eta \mathbb{O}_B \eta}{\hbar} + J\eta \right) \right\} = \det[\mathbb{O}_B]^{-1/2} e^{\frac{J \hbar \mathbb{O}_B^{-1} J}{4}}. \quad (\text{I.5})$$

On obtient ainsi la fonctionnelle génératrice de l'amplitude [7]

$$Z_E[J] = \det[\mathbb{O}_B]^{-1/2} e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} e^{\frac{J\hbar\mathbb{O}_B^{-1}J}{4}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{I.6})$$

Dans ce formalisme, il est alors aisé d'obtenir les corrections provenant du développement complet de l'action. Par exemple, le premier ordre supérieur dans l'action est

$$\iiint d^Dx d^Dy d^Dz \frac{\delta^3 S_E}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta(x)\eta(y)\eta(z) \equiv \left\langle \frac{\delta^3 S_E}{\delta\phi_x\delta\phi_y\delta\phi_z} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta_x\eta_y\eta_z \right\rangle_{x,y,z}. \quad (\text{I.7})$$

Dans l'intégrale de chemin, cela prend la forme de

$$\begin{aligned} S_E[J] &= e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left\langle \frac{\delta^3 S_E}{\delta\phi_x\delta\phi_y\delta\phi_z} \Big|_{\phi=\phi_B} \eta_x\eta_y\eta_z \right\rangle_{x,y,z} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \left\langle \frac{-\eta_x\mathbb{O}_B\eta_x}{\hbar} + J_x\eta_x \right\rangle_x \right\} \\ &= e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left\langle \frac{\delta^3 S_E}{\delta\phi_x\delta\phi_y\delta\phi_z} \Big|_{\phi=\phi_B} \frac{\delta^3}{\delta J_x\delta J_y\delta J_z} \right\rangle_{x,y,z} \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ \left\langle \frac{-\eta_x\mathbb{O}_B\eta_x}{\hbar} + J_x\eta_x \right\rangle_x \right\} \\ &= \det[\mathbb{O}_B]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_E[\phi_B]}{\hbar}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left\langle \frac{\delta^3 S_E}{\delta\phi_x\delta\phi_y\delta\phi_z} \Big|_{\phi=\phi_B} \frac{\delta^3}{\delta J_x\delta J_y\delta J_z} \right\rangle_{x,y,z} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{J\hbar\mathbb{O}_B^{-1}J}{4} \right\}. \quad (\text{I.8}) \end{aligned}$$

La propriété des dérivées fonctionnelles a été employée ici

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^d y J(y)\eta(y) = \eta(x). \quad (\text{I.9})$$

Pour le reste, il suffit d'imaginer le développement en série des deux dernières exponentielles dans (I.8). On obtiendrait des termes du genre

$$\left(\frac{1}{\hbar} \frac{\delta^3}{\delta J^3}\right)^n (\hbar J \mathbb{O}_B^{-1} J)^m. \quad (\text{I.10})$$

En posant  $J = 0$  pour retrouver l'action originale à la fin du calcul, seuls les termes respectant  $3n = 2m$  sont non nuls. C'est donc dire que des puissances  $\hbar^{n/2}$  sont dues au terme d'interaction auparavant négligé. Pour  $n = 0$ , on retrouve l'approximation semi-classique. Le prochain terme non nul se produit à  $n = 2$  et implique une correction d'ordre  $\hbar$  à l'équation (2.31).