

**Université de Montréal**

**Test d'adéquation à la loi de Poisson bivariée au  
moyen de la fonction caractéristique**

par

**Fangahagnian Koné**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en statistique

1<sup>er</sup> septembre 2016



# Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

## Test d'adéquation à la loi de Poisson bivariée au moyen de la fonction caractéristique

présenté par

**Fangahagnian Koné**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*David Haziza*

---

(président-rapporteur)

*Martin Bilodeau*

---

(directeur de recherche)

*Christian Léger*

---

(codirecteur)

*François Perron*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le

*04 novembre 2016*

---



## RÉSUMÉ

---

Les tests d'adéquation font partie des pratiques qu'ont les statisticiens pour prendre une décision concernant l'hypothèse de l'utilisation d'une distribution paramétrique pour un échantillon. Dans ce mémoire, une application du test d'adéquation basé sur la fonction caractéristique proposé par Jiménez-Gamero *et al.* (2009) est faite dans le cas de la loi de Poisson bivariée. Dans un premier temps, le test est élaboré dans le cas de l'adéquation à une loi de Poisson univariée et nous avons trouvé son niveau bon. Ensuite cette élaboration est étendue au cas de la loi de Poisson bivariée et la puissance du test est calculée et comparée à celle des tests de l'indice de dispersion, du Quick test de Crockett et des deux familles de tests proposés par Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014). Les résultats de la simulation ont permis de constater que le test avait un bon niveau comparativement aux tests de l'indice de dispersion et au Quick test de Crockett et qu'il était généralement moins puissant que les autres tests. Nous avons également découvert que le test de l'indice de dispersion devrait être bilatéral alors qu'il ne rejette que pour de grandes valeurs de la statistique de test. Finalement, la valeur- $p$  de tous ces tests a été calculée sur un jeu de données de soccer et les conclusions comparées. Avec une valeur- $p$  de 0,009, le test a rejeté l'hypothèse que les données provenaient d'une loi de Poisson bivariée alors que les tests proposés par Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014) donnaient une conclusion différente.

**Mots-clés** : Distribution de Poisson bivariée ; fonction caractéristique ; fonction génératrice de probabilité ; test d'adéquation.



## SUMMARY

---

Our aim in this thesis is to conduct the goodness-of-fit test based on empirical characteristic functions proposed by Jiménez-Gamero *et al.* (2009) in the case of the bivariate Poisson distribution. We first evaluate the test's behaviour in the case of the univariate Poisson distribution and find that the estimated type I error probabilities are close to the nominal values. Next, we extend it to the bivariate case and calculate and compare its power with the dispersion index test for the bivariate Poisson, Crockett's Quick test for the bivariate Poisson and the two test families proposed by Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014). Simulation results show that the probability of type I error is close to the claimed level and that it is generally less powerful than other tests. We also discovered that the dispersion index test should be bilateral whereas it rejects for large values only. Finally, the  $p$ -value of all these tests is calculated on a real dataset from soccer. The  $p$ -value of the test is 0,009 and we reject the hypothesis that the data come from a Poisson bivariate while the tests proposed by Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014) leads to a different conclusion.

**Key words** : Bivariate Poisson distribution ; characteristic function ; probability generating function ; goodness-of-fit test.





# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Résumé</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xi
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiii
<b>Notations</b> .....	xv
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>Chapitre 1. Test d'adéquation au moyen de la fonction caractéristique</b>	
7	
1.1. Introduction .....	7
1.1.1. La loi normale univariée .....	7
1.1.2. La loi multinormale .....	8
1.2. L'approche générale .....	9
1.2.1. Les expressions de la statistique de test .....	9
1.2.2. Comportement asymptotique de la statistique de test .....	12
1.2.3. La fonction de poids .....	17
1.2.4. Le bootstrap paramétrique .....	18
1.3. Le test dans le cas de la loi de Poisson univariée .....	20
<b>Chapitre 2. La loi de Poisson bivariée</b> .....	25
2.1. Définition et quelques propriétés .....	25
2.1.1. Définition .....	25
2.1.2. Quelques propriétés .....	25
2.2. L'estimation des paramètres .....	32

2.2.1. La méthode du maximum de vraisemblance.....	33
Étape E.....	34
Étape M.....	34
2.2.2. La méthode des moments.....	35
2.2.3. La méthode du double zéro.....	36
<b>Chapitre 3. tests d'adéquation à la loi de Poisson bivariée ..</b>	<b>39</b>
3.1. test basé sur la fonction caractéristique.....	39
La statistique de test.....	39
3.2. Tests basés sur la fonction génératrice des probabilités.....	41
3.3. quick test de Crockett.....	44
3.4. test de l'indice de dispersion.....	45
<b>Chapitre 4. Simulations et Application.....</b>	<b>47</b>
4.1. Simulations.....	47
4.1.1. Méthodologie.....	47
4.1.1.1. L'estimation des paramètres.....	47
4.1.1.2. L'estimation de l'erreur de type I.....	47
4.1.1.3. La puissance du test.....	48
La loi binomiale bivariée.....	49
La loi binomiale négative bivariée.....	49
La loi Hermite bivariée.....	50
4.1.2. Résultats.....	50
4.1.2.1. Erreurs de type I.....	50
4.1.2.2. Calcul de puissance.....	52
4.2. Application.....	57
4.2.1. Présentation des données.....	57
4.2.2. Résultats.....	58
4.2.2.1. Estimation des paramètres.....	58
4.2.2.2. Valeurs- $p$ sur le jeu de données.....	58
<b>Conclusion.....</b>	<b>63</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>67</b>

<b>Annexe</b> .....	71
vérification des conditions .....	71



## LISTE DES FIGURES

---

1.1	Fonctions de masse, fonctions de poids et fonctions caractéristiques de la loi de Poisson de paramètre ( $\theta = 1$ ) et la binomiale négative de paramètre ( $r = 2; p = 0,3$ ) . . . . .	23
4.1	Histogramme des 1000 valeurs de la statistique $I_B^*$ lorsqu'on simule la $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$ et la borne de la région de rejet . . . . .	54
4.2	Fonctions génératrices des probabilités expérimentale et estimée en $t_2 = 0,01$ et $t_2 = 0,12$ . . . . .	60
4.3	Fonctions caractéristiques expérimentale et estimée en $t_2 = -1 \dots$	61



## LISTE DES TABLEAUX

---

1.1	Niveau de significativité et puissance du test d'adéquation à une loi de Poisson. ....	22
2.1	Répartition d'une population selon deux caractéristiques $X$ et $Y$ .	31
4.1	Niveaux des tests obtenus pour $n = 50$ par simulation en fonction des paramètres et des seuils. ....	51
4.2	Statistique $Z$ de comparaison des deux proportions selon le test, le paramètre $\lambda$ et le seuil $\alpha$ . ....	52
4.3	Estimations de la puissance des tests selon les alternatives. ....	56
4.4	Répartition des matchs selon les scores. ....	57
4.5	Statistiques descriptives du nombre de buts comptés par les équipes à domicile et à l'extérieur. ....	58
4.6	Estimations des valeurs- $p$ selon les tests. ....	58





## NOTATIONS

---

$BB(m, p_1, p_2, p_3)$  : Loi Binomiale bivariée de paramètres  $m, p_1, p_2, p_3$

$BNB(k, a_1, a_2, a_3)$  : Loi Binomiale négative bivariée de paramètres  $k, a_1, a_2, a_3$

$BP(a_1, a_2, a_3)$  : Loi de Poisson bivariée de paramètres  $a_1, a_2, a_3$

$HB(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  : Loi Hermite bivariée de paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

$N(\mu, \sigma^2)$  : Loi Normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$

$g$  : fonction de poids

$c_0$  : fonction caractéristique estimée

$c_n$  : fonction caractéristique expérimentale

$L$  : fonction de vraisemblance

$\pi$  : fonction génératrice de probabilité théorique

$\pi_n$  : fonction génératrice de probabilité expérimentale

$Cov$  : Covariance

$E$  : Espérance

$Var$  : Variance

$\sim$  : suit

$\longrightarrow$  : converge vers

## REMERCIEMENTS

---

Par ces lignes, je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux personnes grâce auxquelles je suis parvenu à la rédaction de ce mémoire et au terme de mon programme de maîtrise de statistique.

La première d'entre elles est mon directeur de recherche, le Professeur Martin BILODEAU qui m'a proposé ce sujet et m'a soutenu tout le long de mon programme de maîtrise de statistique. Il a su, comme un guide, m'orienter, me conseiller et m'indiquer les pistes à suivre aux moments opportuns.

Il en est de même pour le professeur Christian LEGER en sa qualité de Co-Directeur. Je lui exprime également ma gratitude, pour sa sollicitude, ses orientations et ses conseils. Il s'est toujours montré attentif, disponible et patient.

Le fait d'avoir côtoyé ces deux personnes m'a donné goût à la recherche.

Je tiens également à remercier les différents professeurs que j'ai eus au cours de ce programme, pour tous les concepts et notions que j'ai appris. Ce fut enrichissant et j'ai beaucoup appris.

Je dis également un grand merci aux professeurs qui m'ont accepté dans ce programme de maîtrise. Et au delà d'eux, se trouve l'entité qui leur permet de dispenser leur savoir, c'est-à-dire l'Université de Montréal dont je remercie les dirigeants.

Enfin, merci à mon épouse qui a su me soutenir et me remplacer auprès des enfants au besoin.

Merci à mes enfants qui me rappellent chaque fois que je dois être un modèle pour eux en persévérant dans mes entreprises, leur montrant ainsi le chemin à suivre.

# INTRODUCTION

---

Le problème que nous abordons dans ce mémoire est d'une grande importance pratique en statistique : "Etant donné un échantillon observé  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , constitué d'une suite numérique de mesures indépendantes et identiquement distribuées d'un phénomène aléatoire dont la loi de probabilité n'est pas connue précisément, on veut tester si cet échantillon provient d'une famille paramétrique de lois  $F_\theta$ , où le vecteur de paramètres  $\theta$  est inconnu". Un recours est alors fait aux tests d'hypothèses et dans notre cas, il s'agira de tests d'adéquation où l'on procédera à la mesure de l'écart entre deux estimateurs d'une fonction caractérisant une loi de probabilité. Différentes fonctions caractérisent de façon unique une distribution de probabilité, notamment la fonction de densité, la fonction de répartition, la fonction génératrice des probabilités ou la fonction caractéristique.

Romano (1988), Stute *et al.* (1993) et Jogesh Babu et Rao (2004) ont déjà effectué des travaux sur les tests d'adéquation basés sur la fonction caractéristique. Jiménez-Gamero *et al.* (2009) proposent, dans un cadre général, un test basé sur la fonction caractéristique qui unifie et étend les tests existants. Ce test mesure les écarts quadratiques entre la fonction caractéristique (paramétrique) estimée et la fonction caractéristique expérimentale. Il fait aussi intervenir une fonction de poids qui, si elle est judicieusement choisie, facilite le calcul de la statistique de test et affecte la puissance et la convergence du test. Cependant la distribution de sa statistique de test sous l'hypothèse nulle est très compliquée à obtenir et sous des conditions bien précises, on peut utiliser le bootstrap pour faire l'approximation de la valeur- $p$  ou la valeur critique.

Nous nous proposons dans ce mémoire de mettre en œuvre le test introduit par Jiménez-Gamero *et al.* (2009) dans le cas d'une distribution bivariée discrète, soit la loi de Poisson bivariée, et de le comparer à d'autres tests spécifiques pour cette distribution du point de vue du niveau et de la puissance.

Ces autres tests se basent sur des propriétés particulières de la loi de Poisson bivariée. Deux d’entre eux se basent sur l’écart entre la moyenne et la variance. Ce sont le test de l’indice de dispersion et le Quick test de Crockett. En effet, les moyennes, variances et covariance d’une distribution de Poisson bivariée satisfont certaines propriétés dont notamment le fait que les moyennes et variances marginales sont égales. Sous l’hypothèse nulle, ces deux statistiques de test ont une loi khi-deux comme distribution asymptotique et c’est cette loi qui sera utilisée pour calculer une valeur- $p$  approximative.

Les deux autres sont en fait deux familles de tests et ont été introduites par [Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero \(2014\)](#). Elles sont basées sur la fonction génératrice des probabilités et font intervenir toutes les deux une fonction de poids. Les distributions nulles de leurs statistiques de test ne sont pas aisées à obtenir. Elles sont donc approchées en utilisant un bootstrap paramétrique. L’une de ces familles de tests utilise les écarts quadratiques entre la fonction génératrice des probabilités estimée et la fonction génératrice expérimentale. La fonction génératrice des probabilités estimée est la fonction génératrice des probabilités théorique dont les paramètres ont été estimés, alors que la fonction génératrice des probabilités expérimentale est une estimation non paramétrique. L’autre utilise un système d’équations différentielles dont la fonction génératrice des probabilités de la loi de Poisson bivariée est la seule solution et remplace celle-ci par la fonction génératrice expérimentale dans le système d’équations afin de mesurer l’écart.

Pour atteindre notre but, ce mémoire s’articule autour de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons la méthodologie de [Jiménez-Gamero \*et al.\* \(2009\)](#) puis élaborons ce test dans le cas de la loi de Poisson univariée. Par la suite, à l’aide d’une simulation nous évaluons le niveau et la puissance du test.

Dans le second chapitre, nous présentons la loi de Poisson bivariée en abordant sa définition, ses propriétés et les méthodes d’estimation de ses paramètres.

Dans le troisième chapitre, nous traitons des tests d’adéquation à la loi de Poisson bivariée. Nous commençons par le test de [Jiménez-Gamero \*et al.\* \(2009\)](#) dans le cas de la loi de Poisson bivariée en déterminant les différents composants permettant le calcul de sa statistique de test. Nous présentons ensuite le test de l’indice de dispersion et le Quick test de Crockett. Enfin, nous abordons les deux familles de tests basés sur la fonction génératrice des probabilités.

Dans le dernier chapitre, des simulations sont effectuées pour apprécier le niveau et la puissance des différents tests du chapitre 3. Les résultats de ces simulations nous ont fait réaliser que bien que la littérature présente le test d'indice de dispersion comme étant un test unilatéral, c'est-à-dire, rejetant  $H_0$  lorsque la statistique de test est élevée, on devrait en fait utiliser un test bilatéral puisque si les données ne proviennent pas d'une loi de Poisson bivariée, la statistique de test pourrait soit prendre de grandes ou de petites valeurs. Par la suite, les valeurs- $p$  de ces tests sont calculées sur des données réelles provenant du championnat italien de soccer en 1991-92.

Enfin, nous vérifions dans l'annexe que les conditions nécessaires à la validité de l'approximation bootstrap pour le test de Jiménez-Gamero *et al.* (2009) sont bel et bien satisfaites pour la distribution de Poisson bivariée.





# Chapitre 1

---

## TEST D'ADÉQUATION AU MOYEN DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE

### 1.1. INTRODUCTION

Le test d'adéquation basé sur la fonction caractéristique mesure les écarts quadratiques entre la fonction caractéristique estimée et la fonction caractéristique expérimentale. La fonction caractéristique estimée est la fonction caractéristique théorique dont les paramètres ont été estimés, alors que la fonction caractéristique expérimentale est une estimation non paramétrique. Jiménez-Gamero *et al.* (2009) proposent un tel test dans un cadre général. Dans leur approche, ils unifient et étendent des tests existants dont voici deux exemples.

#### 1.1.1. La loi normale univariée

Le test d'Eppe et Pulley (1983) est un test d'ajustement pour la loi normale univariée. La fonction caractéristique de la loi  $N(\mu, \sigma^2)$  est

$$c_0(t; \mu, \sigma^2) = e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}.$$

Rappelons que les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont, respectivement

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \\ \hat{\sigma}_X^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2.\end{aligned}$$

La fonction caractéristique expérimentale des observations indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  est

$$c_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j}. \quad (1.1.1)$$

Le test proposé par Epps et Pulley (1983) est

$$T_n = n \int |c_n(t) - c_0(t; \bar{X}_n, \hat{\sigma}_X^2)|^2 dG(t),$$

où  $dG(t) = g(t)dt$  est la densité de la loi  $N(0, 1/(\alpha\hat{\sigma}_X)^2)$  qui agit comme une fonction de poids. La constante  $\alpha$  affecte la puissance du test.

### 1.1.2. La loi multinormale

Baringhaus et Henze (1988) proposent un test similaire dans le cas multivarié. Pour ce faire, on dénote la fonction caractéristique de la loi multinormale  $Z \sim N_d(0, I)$ , définie pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$  par

$$c_0(t) = e^{-\frac{1}{2}t^\top t}.$$

La fonction caractéristique expérimentale des résidus normalisés  $Y_j = S_n^{-1/2}(X_j - \bar{X}_n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , où

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)(X_j - \bar{X}_n)^\top$$

est la matrice de covariance, sera notée

$$\hat{c}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{it^\top S_n^{-1/2}(X_j - \bar{X}_n)}.$$

La statistique de test proposée est

$$T_n = n \int |\hat{c}_n(t) - c_0(t)|^2 g(t) dt, \quad (1.1.2)$$

où

$$g(t) = (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2}t^\top t}$$

est la densité de la loi  $N_d(0, I)$  agissant comme fonction de poids. Ce test est invariant aux transformations affines et convergent pour tester l'hypothèse composée  $H_0 : X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  contre toute alternative fixe.

Henze et Zirkler (1990) proposent un test avec une fonction de poids plus générale. Ils proposent la statistique de test

$$T_{n,\beta} = n \int |\hat{c}_n(t) - c_0(t)|^2 g_\beta(t) dt,$$

où  $g_\beta(t)$  est la densité de la loi  $N_d(0, \beta^2 I)$ . Cette statistique de test est définie seulement lorsque  $S_n$  est non singulière. Dans ce cas, la valeur maximale de  $T_{n,\beta}$  est  $4n$ . Si  $S_n$  est singulière, ils définissent  $T_{n,\beta} = 4n$  et le test rejette la multinormalité. La statistique  $T_{n,\beta}$  se calcule facilement avec l'expression

$$T_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \|Y_j - Y_k\|^2\right) -$$

$$2(1 + \beta^2)^{-\frac{d}{2}} \sum_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(1 + \beta^2)} \|Y_j\|^2\right) + n(1 + 2\beta^2)^{-\frac{d}{2}}.$$

Le test de Henze et Zirkler (1990) est disponible dans le package `MVN` du logiciel R (<http://www.cran.r-project.org>) au moyen de la fonction `HZ.test`.

Nous présentons à présent l'approche générale de Jiménez-Gamero *et al.* (2009). Nous utiliserons ces résultats au chapitre 3 afin d'obtenir un test d'adéquation à une distribution de Poisson bivariable.

## 1.2. L'APPROCHE GÉNÉRALE

Cette section présente l'approche générale de Jiménez-Gamero *et al.* (2009). Ces auteurs introduisent une classe de tests d'ajustement basée sur la fonction caractéristique expérimentale. Les tests sont applicables pour des distributions continues ou discrètes en dimension fixe mais arbitraire. Ils sont convergents pour toute alternative fixe pour un choix convenable de la fonction de poids entrant dans la définition de la statistique de test. Ils démontrent que le bootstrap est convergent et peut être employé pour estimer la distribution nulle de la statistique de test.

### 1.2.1. Les expressions de la statistique de test

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) de distribution  $F$ . Le problème de test consiste à confronter les hypothèses  $H_0$  : “la loi de  $X$  appartient à  $\mathcal{F}$ ”, où

$$\mathcal{F} = \{F(x; \theta), x \in \mathbb{R}^d, \theta \in \Theta\},$$

et  $H_a$  : “la loi de  $X$  n'appartient pas à  $\mathcal{F}$ ”. Considérons alors, par analogie, la statistique de test

$$T_{n,G}(\hat{\theta}) = n \int |c_n(t) - c_0(t; \hat{\theta})|^2 dG(t),$$

où  $c_0(t; \theta)$  est la fonction caractéristique de la distribution  $F(x; \theta)$ ,  $\hat{\theta}$  est un estimateur convergent de  $\theta$  et la fonction  $c_n(t)$  est la fonction caractéristique expérimentale telle que définie dans l'équation (1.1.1). Ce test prend une forme simple décrite dans le lemme suivant. Nous présentons la preuve pour le lecteur intéressé puisqu'elle n'apparaît pas dans Jiménez-Gamero *et al.* (2009).

**Lemme 1.2.1.** *Une expression équivalente de la statistique de test est*

$$T_{n,G}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h(X_j, X_k; \hat{\theta}),$$

où

$$\begin{aligned} h(x,y;\theta) &= u(x-y) - u_0(x;\theta) - u_0(y;\theta) + u_{00}(\theta) \\ u_0(x;\theta) &= \int u(x-y)dF(y;\theta) \\ u_{00}(\theta) &= \iint u(x-y)dF(x;\theta)dF(y;\theta) \end{aligned}$$

et où  $u(t) = \int \cos(t^\top x)dG(x)$  est la partie réelle de la fonction caractéristique de la distribution  $G$ .

**Preuve :** On remplace les expressions

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{it^\top X_j} \\ c_0(t;\theta) &= \int e^{it^\top x}dF(x;\theta) \end{aligned}$$

dans  $T_{n,G}(\hat{\theta})$ . Le carré de la norme dans l'intégrale est calculé par la formule  $|z|^2 = z\bar{z}$ , où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} T_{n,G}(\hat{\theta}) &= n \int \left\{ \frac{1}{n} \sum_j e^{it^\top X_j} - \int e^{it^\top X}dF(X;\hat{\theta}) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{n} \sum_k e^{-it^\top X_k} - \int e^{-it^\top Y}dF(Y;\hat{\theta}) \right\} dG(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_j \sum_k \int e^{it^\top (X_j - X_k)} dG(t) - \sum_k \iint e^{it^\top (X - X_k)} dF(X;\hat{\theta}) dG(t) \\ &\quad - \sum_j \iint e^{it^\top (X_j - Y)} dF(Y;\hat{\theta}) dG(t) \\ &\quad + n \iiint e^{it^\top (X - Y)} dF(X;\hat{\theta}) dF(Y;\hat{\theta}) dG(t). \end{aligned}$$

Puisque  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  est un nombre réel, alors il suffira de ne calculer que la partie réelle de chacune des quatre intégrales ci-dessus. La partie réelle de

$$\int e^{it^\top X} dG(t)$$

étant notée  $u(X)$ , alors la partie réelle de la première intégrale est simplement  $u(X_j - X_k)$ . Pour la deuxième intégrale double, si on interchange l'ordre d'intégration on obtient

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Re} \left[ \int e^{it^\top (X - X_k)} dG(t) \right] dF(X;\hat{\theta}) &= \int u(X - X_k) dF(X;\hat{\theta}) \\ &= u_0(X_k;\hat{\theta}). \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales se calculent de la même façon et le résultat final découle.  $\square$

Jiménez-Gamero *et al.* (2009) permettent aussi une fonction de poids  $G$  dépendante de  $\hat{\theta}$ . La statistique prend alors la forme

$$T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) = n \int |c_n(t) - c_0(t; \hat{\theta})|^2 dG(t; \hat{\theta})$$

qui peut également être réécrite grâce au lemme 1.2.1.

Si la famille paramétrique décrite dans  $H_0$  est une famille dite de localisation-échelle, alors le lemme suivant donne une expression pour  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$  sous certaines conditions sur  $G(t; \hat{\theta})$ . Soit une distribution donnée  $F_1$  de matrice de covariance  $\Sigma_1$  définie positive et soit  $Z$  un vecteur aléatoire de distribution  $F_1$ . Soit la famille de localisation-échelle

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{F(x; v, V) = P(X \leq x), \text{ avec } X = VZ + v, V \text{ définie positive}\},$$

où le paramètre est  $\theta = (v, V)$ .

**Lemme 1.2.2.** *Si  $F \in \mathcal{F}_1$  et  $G(t; v, V) = G(t; V)$  satisfait*

$$dG(t; V) = \det(V) dG_0(Vt)$$

*pour une distribution donnée  $G_0$ , alors*

$$T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) = n \int |\hat{c}_n(t) - c_0(t)|^2 dG_0(t),$$

*où  $c_0(t)$  est la fonction caractéristique de  $F_1$ ,  $\hat{c}_n(t)$  est la fonction caractéristique expérimentale de  $Z_1, \dots, Z_n$ , où  $Z_j = \hat{V}^{-1}(X_j - \hat{v})$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\hat{v} = \hat{v}(X_1, \dots, X_n)$  est un estimateur de  $v$  et  $\hat{V} = \hat{V}(X_1, \dots, X_n)$  est un estimateur de  $V$  tel que  $\det(\hat{V}) \neq 0$  avec probabilité 1.*

**Preuve :** Puisque  $X_j = \hat{V}Z_j + \hat{v}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  et  $c(t; v, V) = e^{it^\top v} c_0(Vt)$ ,  $c$  étant la fonction caractéristique de  $F$ , alors

$$\begin{aligned} n^{-1}T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) &= \int \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(it^\top X_j) - c(t; \hat{v}, \hat{V}) \right|^2 dG(t; \hat{V}) \\ &= \int \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(it^\top \hat{v}) \exp(it^\top \hat{V}Z_j) - \exp(it^\top \hat{v}) c_0(\hat{V}t) \right|^2 \det(\hat{V}) dG_0(\hat{V}t) \\ &= \int \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(it^\top \hat{V}Z_j) - c_0(\hat{V}t) \right|^2 \det(\hat{V}) dG_0(\hat{V}t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\omega^\top Z_j) - c_0(\omega) \right|^2 \det(\hat{V}) dG_0(\omega) \cdot \det(\hat{V})^{-1} \\
&= \int \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\omega^\top Z_j) - c_0(\omega) \right|^2 dG_0(\omega),
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable  $\omega = \hat{V}t$  de jacobien  $\det(\hat{V})^{-1}$ .  $\square$

Au moyen du lemme 1.2.2, le test de Baringhaus et Henze (1988) en (1.1.2) peut aussi s'exprimer comme dans Jiménez-Gamero *et al.* (2009) sous la forme

$$T_n = n \int |c_n(t) - c_0(t; \hat{\mu}, \hat{\Sigma})|^2 dG(t),$$

où  $c_n(t)$  est la fonction caractéristique expérimentale des observations indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  et  $c_0(t; \mu, \Sigma)$  est la fonction caractéristique de la loi  $N_d(\mu, \Sigma)$ .

Pour le test de normalité dans Epps et Pulley (1983), de multinormalité dans Baringhaus et Henze (1988), ou d'adéquation à  $\{F_1((\cdot - \theta_1)/\theta_2), \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 > 0\}$  dans Epps (2005), où  $F_1$  est une distribution univariée continue, ces auteurs ont exprimé les statistiques comme dans le lemme 1.2.2, avec  $dG_0(t) \propto |c_0(t)|^2$ , où  $c_0(t)$  est la fonction caractéristique de  $F_1$ . La distribution nulle de tous ces tests ne dépend pas de  $\theta$ . On peut donc supposer que l'échantillon provient de la distribution  $F_1$  pour obtenir la distribution nulle de  $T_{n, \hat{G}}(\hat{\theta})$ .

### 1.2.2. Comportement asymptotique de la statistique de test

L'article fait ressortir les propriétés asymptotiques de ces statistiques de test sous certaines conditions qui sont maintenant énoncées. Les preuves se trouvent dans Jiménez-Gamero *et al.* (2009) et ne sont pas reproduites ici.

**Condition A.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des observations indépendantes et identiquement distribuées de dimension  $d$  d'une distribution  $F$  et  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Alors, il existe  $\theta \in \Theta$ , où  $\theta = \theta_0$  si  $F(\cdot) = F(\cdot; \theta_0)$ , tel que

$$\hat{\theta} = \theta + n^{-1} \sum_{j=1}^n l(X_j; \theta) + o_p(n^{-\frac{1}{2}})$$

et les composantes de  $l(x; \theta) = (l_1(x; \theta), l_2(x; \theta), \dots, l_p(x; \theta))^\top$  satisfont

$$\begin{aligned}
\int l_r(x; \theta) dF(x) &= 0, & 1 \leq r \leq p, \\
\int l_r(x; \theta) l_v(x; \theta) dF(x) &< \infty, & 1 \leq r, v \leq p.
\end{aligned}$$

La condition A dit que  $\hat{\theta}$  est convergent et asymptotiquement normal pour un certain  $\theta \in \Theta$ , où  $\theta$  est le vrai paramètre si  $H_0$  est vraie.

Les conditions B et C qui suivent sont des conditions de régularité sur  $c(t; \theta)$  comme fonction de  $\theta$ . Avant d'énoncer ces conditions, introduisons certaines notations. Pour toute fonction  $f(t; \theta)$  dérivable en  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ , on définit les dérivées partielles

$$\begin{aligned} f_{(r)}(t; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_r} f(t; \theta), \\ f_{(r,s)}(t; \theta) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} f(t; \theta), \quad 1 \leq r, s \leq p, \end{aligned}$$

et le gradient

$$\nabla f(t; \theta) = (f_{(1)}(t; \theta), f_{(2)}(t; \theta), \dots, f_{(p)}(t; \theta))^\top.$$

Pour toute distribution dans la famille  $\{F(x; \theta), x \in \mathbb{R}^d, \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ , on note, respectivement, les parties réelles et imaginaires de la fonction caractéristique  $c(t; \theta)$  par

$$\begin{aligned} R(t; \theta) &= \int \cos(t^\top x) dF(x; \theta), \\ I(t; \theta) &= \int \sin(t^\top x) dF(x; \theta). \end{aligned}$$

**Condition B(-s).** Il existe  $K(\theta)$ , un voisinage de  $\theta$  tel que pour tout  $\gamma \in K(\theta)$ ,  $R_{(r)}(t; \gamma)$  et  $I_{(r)}(t; \gamma)$  existent et

$$\begin{aligned} |R_{(r)}(t; \gamma)| &\leq \rho_r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \text{avec } \int \rho_r^s(t) dG(t) < \infty, \quad 1 \leq r \leq p \\ |I_{(r)}(t; \gamma)| &\leq \iota_r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \text{avec } \int \iota_r^s(t) dG(t) < \infty, \quad 1 \leq r \leq p. \end{aligned}$$

**Condition C.** Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une boule bornée  $C$  de  $\mathbb{R}^p$  centrée en  $\theta$  telle que si  $\gamma \in C$ , alors  $R_{(r)}(t; \gamma)$  et  $I_{(r)}(t; \gamma)$  existent pour  $1 \leq r \leq p$  et

$$\begin{aligned} \|\nabla R(t; \gamma) - \nabla R(t; \theta)\| &\leq \rho(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \text{avec } \int \rho^2(t) dG(t) < \epsilon, \\ \|\nabla I(t; \gamma) - \nabla I(t; \theta)\| &\leq \iota(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \text{avec } \int \iota^2(t) dG(t) < \epsilon. \end{aligned}$$

Le théorème suivant énonce la distribution asymptotique nulle de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$ .

**Théorème 1.2.1.** *Supposons que les conditions A, B-2 et C sont vérifiées et que  $H_0$  est vraie, c'est-à-dire  $F(\cdot) = F(\cdot; \theta)$ , pour un certain  $\theta \in \Theta$ . Alors,  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  converge en loi vers  $\sum_{j \geq 1} \lambda_j \chi_{1j}^2$ , où  $\chi_{11}^2, \chi_{12}^2, \dots$  sont des variables indépendantes suivant une loi khi-deux à un degré de liberté, les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres d'un opérateur  $A(\theta)$  défini sur  $L_2(\mathbb{R}, F(\cdot; \theta))$  par*

$$A(\theta)w(x) = \int h^c(x, y; \theta)w(y)dF(y; \theta)$$

avec

$$\begin{aligned} h^c(x, y; \theta) &= h(x, y; \theta) - l(x; \theta)^\top m(y; \theta) - l(y; \theta)^\top m(x; \theta) \\ &\quad + m(x; \theta)^\top M(\theta)m(y; \theta), \\ m(x; \theta) &= \int \{\cos(t^\top x) - R(t; \theta)\} \nabla R(t; \theta) dG(t) \\ &\quad + \int \{\sin(t^\top x) - I(t; \theta)\} \nabla I(t; \theta) dG(t), \\ M(\theta) &= \int \{\nabla R(t; \theta) \nabla R(t; \theta)^\top + \nabla I(t; \theta) \nabla I(t; \theta)^\top\} dG(t), \end{aligned}$$

et  $h(x, y; \theta)$  est définie comme dans le lemme 1.2.1.

En général, la limite de la distribution nulle de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  dépend de l'estimateur  $\hat{\theta}$  du paramètre  $\theta$  utilisé, de la vraie valeur  $\theta$  du paramètre, de  $F(x; \theta)$  et de  $G$ , puisque les valeurs propres de l'opérateur  $A(\theta)$  en dépendent. Il s'ensuit que la statistique  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  n'est pas asymptotiquement libre.

Le résultat suivant donne le comportement de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  sous des alternatives fixes.

**Théorème 1.2.2.** *Si  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  presque sûrement pour un certain  $\theta \in \Theta$ , la Condition B-1 est vérifiée et  $G$  est telle que*

$$\eta(F; \theta) = \int |c(t) - c(t; \theta)|^2 dG(t) > 0, \quad \forall F \notin \mathcal{F}, \quad (1.2.1)$$

alors  $T_{n,G}(\hat{\theta}) \rightarrow \infty$  presque sûrement quand  $H_0$  n'est pas vérifiée.

Par conséquent, avec probabilité 1, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , le test  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  rejette  $H_0$  pour chaque hypothèse alternative fixe. On dit alors que le test est fortement convergent.

Le prochain résultat donne le comportement de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  sous des alternatives contiguës. Il montre que le test est capable de détecter des alternatives convergentes vers une certaine distribution  $F \in \mathcal{F}$  à la vitesse  $n^{-1/2}$ , quelle que soit la



dimension  $d$ . On supposera que la suite  $F_n$  est dominée par la mesure de probabilité induite par  $F_0$ , où  $F_0(\cdot) = F(\cdot; \theta)$ , avec une dérivée de Radon-Nikodym satisfaisant

$$dF_n/dF_0 = 1 + n^{-1/2}a_n, \quad (1.2.2)$$

pour une certaine suite de fonctions  $\{a_n\} \in L_2(\mathbb{R}^d; F_0)$  convergente dans  $L_2(\mathbb{R}^d; F_0)$  vers  $a \in L_2(\mathbb{R}^d; F_0)$ .

On sait du théorème 1.2.1 que, sous l'hypothèse nulle  $H_0$ ,  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  converge en loi vers une combinaison linéaire de variables khi-deux, où les poids sont les valeurs propres d'un opérateur. Soit l'ensemble  $\{f_j\}$  des fonctions propres orthonormales correspondantes aux valeurs propres  $\{\lambda_j\}$  de l'opérateur  $A(\theta)$  du théorème 1.2.1.

**Théorème 1.2.3.** *Supposons que les conditions A, B-2 et C sont vérifiées et que F satisfait (1.2.2). Alors,  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  converge en loi vers  $\sum_{j \geq 1} \lambda_j (Z_j + c_j)^2$ , où*

$$c_j = \int a(x) f_j(x) dF_0(x)$$

et  $Z_1, Z_2, \dots$  sont des variables indépendantes  $N(0,1)$ .

Les théorèmes concernant  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  ont été établis en supposant que  $c(t; \theta)$  est une fonction lisse de  $\theta$ . Dans le cas où la fonction de poids dépend aussi de  $\theta$ , on devra supposer que cette dernière est aussi une fonction lisse de  $\theta$ . Ceci s'exprime par la condition suivante.

**Condition D.** Pour tout  $\gamma$  dans un voisinage  $N(\theta)$  de  $\theta$ ,  $G(t; \gamma)$  a une densité  $g(t; \gamma)$  par rapport à  $\tau$ , où  $\tau$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$  et  $\mathcal{B}$  est la classe des Boréliens de  $\mathbb{R}^d$ . De plus,  $g$  satisfait

$$|g(t; \theta) - g(t; \gamma)| \leq g_0(t; \theta) \|\theta - \gamma\|, \text{ pour tout } \gamma \in N(\theta),$$

où  $g_0(t; \theta)$  satisfait  $\int g_0(t; \theta) dt < \infty$ .

Le résultat suivant montre que si la Condition D est vérifiée, alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$  et

$$T_{n,G}^1(\hat{\theta}) = n \int |c_n(t) - c(t; \hat{\theta})|^2 dG(t; \theta)$$

ont le même comportement asymptotique.

**Théorème 1.2.4.** *Supposons que  $\hat{\theta} = \theta + r_n$ , pour un certain  $\theta \in \Theta$ , et la condition  $D$  soit satisfaite. On a alors les résultats suivants :*

- (a): *Si  $r_n = o_p(1)$  et  $H_0$  est vraie, alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) = T_{n,G}^1(\hat{\theta}) + o_p(1)$ .*
- (b): *Si  $r_n \rightarrow 0$  presque sûrement puis que la condition B-1 est vérifiée et  $G(t) = G(t; \theta)$  satisfait (1.2.1), alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) \rightarrow \infty$  presque sûrement si  $H_0$  n'est pas satisfaite.*
- (c): *Si  $r_n = o_p(1)$  et  $F$  satisfait (1.2.2), alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) = T_{n,G}^1(\hat{\theta}) + o_p(1)$ .*

La fonction de poids dans la variable  $T_{n,G}^1(\hat{\theta})$  est la fonction  $G(t; \theta)$ , où  $\theta$  est une valeur fixe représentant la limite de  $\hat{\theta}$ . Ainsi, les théorèmes 1.2.1 et 1.2.3 s'appliquent aussi à  $T_{n,G}^1(\hat{\theta})$ , et par conséquent, par le théorème 1.2.4, à  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$ . On énonce à présent les résultats pour la statistique de test  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$  dans le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.1.** *Supposons les conditions A, B-2, C et D satisfaites.*

- (a): *Si  $H_0$  est vraie, alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$  converge en loi vers  $\sum_{j \geq 1} \lambda_{1j} \chi_{1j}^2$ , où  $\chi_{11}^2, \chi_{12}^2, \dots$  sont des variables indépendantes khi-deux à un degré de liberté et les  $\lambda_{1j}$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $A_1(\theta)$  défini sur  $L_2(\mathbb{R}, F(\cdot; \theta))$  comme l'opérateur  $A(\theta)$  du théorème 1.2.1 mais en remplaçant  $G(t)$  par  $G(t; \theta)$ .*
- (b): *Si  $F$  satisfait (1.2.2), alors  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$  converge en loi vers  $\sum_{j \geq 1} \lambda_{1j} (Z_j + c_{1j})^2$ , où  $c_{1j} = \int a(x) f_{1j}(x) dF_0(x)$  et  $Z_1, Z_2, \dots$  sont des variables indépendantes  $N(0,1)$  et les  $f_{1j}$  sont les fonctions propres orthonormées correspondantes aux valeurs propres  $\lambda_{1j}$  de l'opérateur  $A_1(\theta)$  en (a).*

Il s'ensuit, des théorèmes 1.2.2-1.2.4 et du corollaire 1.2.1, que si  $G$  satisfait (1.2.1), alors le test

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{si } T \geq t_{n,\alpha} \text{ ou } p = P_0(T \geq T_{obs}) \leq \alpha, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour un certain niveau  $0 < \alpha < 1$ ,

où  $T = T_{n,G}(\hat{\theta})$  ou  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$ ,  $t_{n,\alpha} = \inf\{t : P_0(T \geq t) \leq \alpha\}$  et  $T_{obs}$  est la valeur observée de la statistique,

est convergent contre toute alternative fixe et détecte aussi les alternatives qui diffèrent de l'hypothèse nulle par  $O(n^{-1/2})$ .

Le calcul de la valeur critique  $t_{n,\alpha}$  ou de la valeur- $p$  nécessite la connaissance de la distribution nulle de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  ou  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$ . Cette distribution nulle étant trop compliquée, on peut penser à utiliser la distribution asymptotique comme approximation. Cette avenue est cependant jonchée de la très difficile tâche de calculer les valeurs propres d'un opérateur. Pour cette raison, les auteurs proposent d'utiliser le bootstrap paramétrique comme approximation.

On discute maintenant du rôle de la fonction de poids  $G$  dans la statistique de test avant d'aborder le bootstrap paramétrique.

### 1.2.3. La fonction de poids

La présence de  $dG(t)$  (resp.  $dG(t; \theta)$ ) dans l'expression de  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  (resp.  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$ ) rend l'intégrale finie. Elle donne aussi une forme facilement calculable de la statistique de test lorsque  $G$  est bien choisie. La fonction  $G$  affecte également la convergence et la puissance du test.

Feller (1971, p. 479) nous apprend que deux fonctions caractéristiques distinctes peuvent être égales sur un intervalle fini. Une façon d'assurer la condition (1.2.1) est de choisir un  $G$  dont la densité est positive pour presque tous les points  $t$ , c'est-à-dire  $dG(t) = g(t)dt$  avec  $g(t) > 0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^d - S$ , où  $\int_S dt = 0$ .

Epps et Pulley (1983) suggèrent l'utilisation d'une fonction  $G(t)$  donnant un poids plus important lorsque  $c_n(t)$  est un estimateur relativement précis de  $c(t)$ . Ainsi, en tenant compte du fait que

$$E\{|c_n(t) - c(t)|^2\} = \frac{1}{n}\{1 - |c(t)|^2\},$$

alors  $G(t)$  assignera un poids plus important à  $|c_n(t) - c(t; \hat{\theta})|^2$  si  $c(t; \hat{\theta})$  est proche de 1 et un faible poids si  $c(t; \hat{\theta})$  est proche de 0. On peut alors prendre  $dG(t) = \nu\{|c(t; \hat{\theta})|\}dt$ , où  $\nu$  est une fonction croissante non négative satisfaisant  $\int \nu\{|c(t; \theta)|\}dt = 1$ , pour tout  $\theta \in \Theta$ . En particulier si  $|c(t; \theta)| \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , on peut prendre  $dG(t)$  proportionnelle à  $|c(t; \hat{\theta})|^r dt$ , pour un certain  $r \geq 1$ . Si on prend  $dG(t) = \frac{|c(t; \hat{\theta})|^2 dt}{\int |c(x; \hat{\theta})|^2 dx}$ , on obtient de la formule d'inversion

$$\begin{aligned} T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{f_{X-Y}(0; \hat{\theta})} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n f_{X-Y}(X_i - Y_j; \hat{\theta}) - 2 \sum_{j=1}^n f_{X-Y+Z}(X_i; \hat{\theta}) \right. \\ &\quad \left. + n f_{X-Y+Z-W}(0; \hat{\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où  $X, Y, Z$  et  $W$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction caractéristique  $c(t; \theta)$  et  $f_U(x; \theta)$  est la fonction de densité de  $U$ . On pourrait, par exemple, utiliser la formule (1.2.3) pour la famille de distributions continues asymétriques multinormales (“skew-normal”), voir Azzalini et Dalla Valle (1996), puisqu’on connaît la densité d’une somme de telles variables, voir González-Farías *et al.* (2004).

En pratique, la distribution nulle de la statistique de test est évaluée par bootstrap paramétrique. La statistique devra donc être évaluée un grand nombre de fois, disons entre 500 et 2000 fois. Il convient donc de choisir  $G$  afin d’obtenir une statistique dont la forme est simple. Par exemple, pour la famille de loi de Poisson,  $c(t; \theta) = \exp[\theta(e^{it} - 1)]$ . Dans ce cas,  $|c(t; \theta)| \notin L_1(\mathbb{R}^d)$  et la formule (1.2.3) ne s’applique pas. Le choix possiblement le plus simple est la densité

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos t}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.4)$$

Dans ce cas, la fonction  $u(x)$ , la partie réelle de la fonction caractéristique de la densité  $g$ , est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

On obtient ensuite les fonctions  $u_0$  et  $u_{00}$  du lemme 1.2.1

$$\begin{aligned} u_0(x; \theta) &= e^{-\theta} \theta^x / x!, \\ u_{00}(x) &= e^{-2\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k} / k!^2. \end{aligned}$$

Deux autres densités  $g$  sont proposées par Jiménez-Gamero *et al.* (2009), mais elles donnent lieu à une statistique plus compliquée. Notre choix de fonction  $g$  pour la loi bivariable de Poisson sera un produit de deux densités de la forme (1.2.4).

#### 1.2.4. Le bootstrap paramétrique

La distribution nulle de la statistique de test  $T = T_{n,G}(\hat{\theta})$  (ou  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\theta})$ ) dépend de la vraie valeur du paramètre  $\theta$ . Ceci vaut aussi pour la distribution asymptotique. La méthode du bootstrap paramétrique va nous permettre d’approcher une valeur critique  $t_{n,\alpha}$  ou une valeur- $p$  de la statistique de test. Les conditions pour la validité du bootstrap sont les suivantes :

**Condition E.**  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  presque sûrement, pour  $\theta \in \text{int } \Theta$ , où  $\theta = \theta_0$  et où  $\text{int}$  désigne l'intérieur, si  $F(\cdot) = F(\cdot; \theta_0)$ .

Cette condition implique que pour une suite de variables aléatoires donnée, il existe  $N$  tel que pour  $n > N$ ,  $\hat{\theta} \in \text{int } \Theta$  et  $F(\cdot; \hat{\theta}) \in \mathcal{F}$ . Soit  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  un échantillon i.i.d. provenant de  $F(\cdot; \hat{\theta})$ , étant donné  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Considérons la version bootstrap  $T_{n,G}^*(\hat{\theta}^*)$  de la statistique  $T_{n,G}(\hat{\theta})$ , c'est-à-dire

$$T_{n,G}^*(\hat{\theta}^*) = n \int |c_n^*(t) - c(t; \hat{\theta}^*)|^2 dG(t),$$

où  $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$  et  $c_n^*(t)$  est la fonction caractéristique expérimentale de  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ .

Les auteurs montrent que  $T_{n,G}^*(\hat{\theta}^*)$ , étant donné  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , a un comportement asymptotique comme celui décrit au théorème 1.2.1. Pour montrer que le bootstrap estime la distribution nulle, il suffit que les poids (valeurs propres) de la population et les poids bootstrap soient proches. Ces poids dépendent de  $c(t; \theta)$ ,  $\hat{\theta}$  et  $F(x; \theta)$ . En plus des conditions A à C,  $F(x; \theta)$  doit être lisse comme fonction de  $\theta$ , d'où la condition suivante.

**Condition F.** Chaque distribution  $F(x; \theta) \in \mathcal{F}$  a une densité  $f(x; \theta)$  par rapport à une mesure  $\sigma$ -finie  $\tau$  sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$  telle que  $f_{(r)}(x; \theta)$  existe et satisfait

$$E_\theta \left[ \left\{ \frac{f_{(r)}(X; \theta)}{f(X; \theta)} \right\}^2 \right] < \infty, \quad 1 \leq r \leq p,$$

et il existe un voisinage  $K(\theta)$  de  $\theta$  tel que si  $\gamma \in K(\theta)$ , alors

$$E_\theta \left[ \left\{ \frac{f_{(r)}(X; \theta) - f_{(r)}(X; \gamma)}{f(X; \theta)} \right\}^2 \right] < \infty, \quad 1 \leq r \leq p.$$

On a aussi besoin d'une autre condition sur  $\hat{\theta}$ .

**Condition G.**  $\Sigma_l(\gamma)$  est continue en  $\gamma = \theta$ , où  $\Sigma_l(\gamma) = \int l(x; \gamma) l(x; \gamma)^\top dF(x; \gamma)$  et  $l(x; \gamma)$  est définie dans la condition A.

**Théorème 1.2.5.** *Supposons les conditions A, B-2, C, E, F et G satisfaites. Alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_*(T_{n,G}^*(\hat{\theta}^*) \leq x) - P(W \leq x)| \rightarrow 0$$

presque sûrement, où  $W = \sum_{j \geq 1} \lambda_j \chi_{1j}^2, \chi_{11}^2, \chi_{12}^2, \dots$  sont des variables indépendantes suivant une loi khi-deux à un degré de liberté et les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $A(\theta)$ .

Un résultat similaire est obtenu pour  $T_{n, \hat{G}^*}(\hat{\theta}^*)$ .

**Théorème 1.2.6.** *Supposons que les conditions du théorème 1.2.5 sont satisfaites lorsque  $G(t) = G(t; \theta)$  et que  $G(t; \theta)$  satisfait la condition D. Alors,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_*(T_{n, \hat{G}^*}(\hat{\theta}^*) \leq x) - P(W_1 \leq x)| \rightarrow 0$$

presque sûrement, où  $W_1 = \sum_{j \geq 1} \lambda_{1j} \chi_{1j}^2, \chi_{11}^2, \chi_{12}^2, \dots$  sont des variables indépendantes suivant une loi khi-deux à un degré de liberté et les  $\lambda_{1j}$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $A_1(\theta)$ .

On dénote par  $T^*$  la version bootstrap de  $T_{n, G}(\hat{\theta})$  ou  $T_{n, \hat{G}}(\hat{\theta})$ . Les théorèmes 1.2.1, 1.2.5, 1.2.6 et le corollaire 1.2.1(a) justifient l'approximation de la valeur- $p$  par le bootstrap comme dans l'algorithme suivant.

- (1) Calculer  $T_{obs}$ , la valeur de  $T$  pour l'échantillon original  $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ .
- (2) Générer  $B$  échantillons bootstrap,  $X_1^{*b}, X_2^{*b}, \dots, X_n^{*b}$ , de  $F(\cdot; \hat{\theta})$  pour  $b = 1, \dots, B$ .
- (3) Calculer  $T$  pour chaque échantillon bootstrap et dénoter par  $T_b^*$ ,  $b = 1, \dots, B$ , les valeurs obtenues.
- (4) Approcher la valeur- $p$  par

$$\hat{p} = \frac{\text{card}\{b : T_b^* \geq T_{obs}\}}{B}$$

ou approcher la valeur critique par  $T_{a:B}^*$ , où  $a = [(1 - \alpha)B] + 1$ ,  $[x]$  est la partie entière de  $x$  et  $T_{1:B}^* \leq T_{2:B}^* \leq \dots \leq T_{B:B}^*$  sont les valeurs ordonnées de  $T_b^*$ ,  $b = 1, \dots, B$ .

### 1.3. LE TEST DANS LE CAS DE LA LOI DE POISSON UNIVARIÉE

Avant de mettre en œuvre le test qui nous intéresse dans le cas de la loi de Poisson bivariée, nous le faisons d'abord pour l'adéquation à une loi de Poisson univariée. Comme mentionné à la section 1.2.3, dans le cas d'une adéquation à la loi de Poisson univariée, plusieurs choix de la fonction de poids sont possibles dont seulement trois seront considérés, à savoir :

$$g_1(t) = 1/2, \quad -1 < t < 1,$$

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, & t \in \mathbb{R}, \\
g_3(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos t}{t^2}, & t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En outre, nous rappelons que la fonction de masse d'une variable aléatoire  $X$  d'une loi de Poisson de paramètre  $\theta$  est

$$P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Les fonctions  $u(x)$ ,  $u_0(x; \theta)$  et  $u_{00}(\theta)$  se définissent alors comme suit selon la fonction de poids.

(1) Pour la fonction de poids  $g_1(t)$ ,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}; \\
u_0(x; \theta) &= \sum_{k \geq 0} \frac{\sin(x-k)}{(x-k)} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}; \\
u_{00}(\theta) &= \sum_{i \geq 0} u_0(i; \theta) e^{-\theta} \frac{\theta^i}{i!}.
\end{aligned}$$

(2) Pour la fonction de poids  $g_2(t)$ ,

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R}; \\
u_0(x; \theta) &= e^{-\theta} \sum_{0 \leq k < x} \frac{\theta^k (e^{-x+k} - e^{x-k})}{k!} + \exp [x + \theta(e^{-1} - 1)]; \\
u_{00}(\theta) &= \sum_{i \geq 0} u_0^2(i; \theta).
\end{aligned}$$

(3) Pour la fonction de poids  $g_3(t)$ ,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases} \\
u_0(x; \theta) &= e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}; \\
u_{00}(\theta) &= \sum_{i \geq 0} u_0^2(i; \theta).
\end{aligned}$$

En pratique, les séries convergentes ci-dessus sont évaluées en prenant pour valeur de  $\theta$ , l'estimateur  $\hat{\theta}$ . On utilise évidemment un nombre fini de termes, mais suffisamment grand afin que le reste soit négligeable. Ce nombre de termes dépend de la valeur de  $\hat{\theta}$ . Nous le choisissons de sorte que la variation relative de la

somme des termes entre deux termes consécutifs soit plus petite que  $10^{-7}$ .

Dans la simulation qui suit, le test d'adéquation à une loi de Poisson univariée est mis en œuvre. L'estimateur  $\hat{\theta}$  utilisé est la moyenne et les fonctions de poids seront les fonctions  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  présentées en début de cette section.

Pour évaluer le niveau de significativité du test, nous avons simulé 1000 échantillons aléatoires de taille 50 d'une loi de Poisson de paramètre  $\theta = 1$ . Pour chaque échantillon, la valeur- $p$  est estimée au moyen de 1000 échantillons bootstrap d'une loi de Poisson de paramètre  $\hat{\theta}$  de même taille, soit 50.

Pour l'estimation de la puissance, nous avons refait la même simulation, mais cette fois les 1000 échantillons originaux provenaient d'une distribution alternative correspondant à la loi binomiale négative de paramètres  $r = 2$  et  $p = 0,3$ , représentant le nombre d'échecs avant  $r$  succès, de fonction de masse

$$f(x; r, p) = \frac{(x + r - 1)!}{x!(r - 1)!} p^r (1 - p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Sa moyenne est 4,67 et sa fonction caractéristique est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \left( \frac{0,3}{1 - 0,7e^{it}} \right)^2 \\ &= \frac{0,09}{1,49 - 1,4 \cos t} [(1 - 1,4 \cos t + 0,49 \cos 2t) + i(1,4 \sin t + 0,49 \sin 2t)]. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la loi de Poisson de paramètre 1, la moyenne est 1 et la fonction caractéristique est

$$\varphi_X(t) = \exp(e^{it} - 1) = \exp(\cos t - 1)[\cos(\sin t) - i \sin(\sin t)].$$

Les résultats de la simulation figurent au tableau 1.1.

TABLEAU 1.1. Niveau de significativité et puissance du test d'adéquation à une loi de Poisson.

fonction de poids	niveau		puissance		temps requis (sec.)
	0,05	0,10	0,05	0,10	
$g_1(t)$	0,049	0,100	0,934	0,961	222 704
$g_2(t)$	0,045	0,094	0,973	0,985	10 629
$g_3(t)$	0,047	0,087	0,843	0,920	243

Ce tableau permet de remarquer que les taux d'erreurs de type I trouvés sont pratiquement égaux à ceux que l'on attendait, à savoir 0,05 ou 0,10, traduisant le fait que le test bootstrap respecte le niveau visé. En effet, pour une simulation de



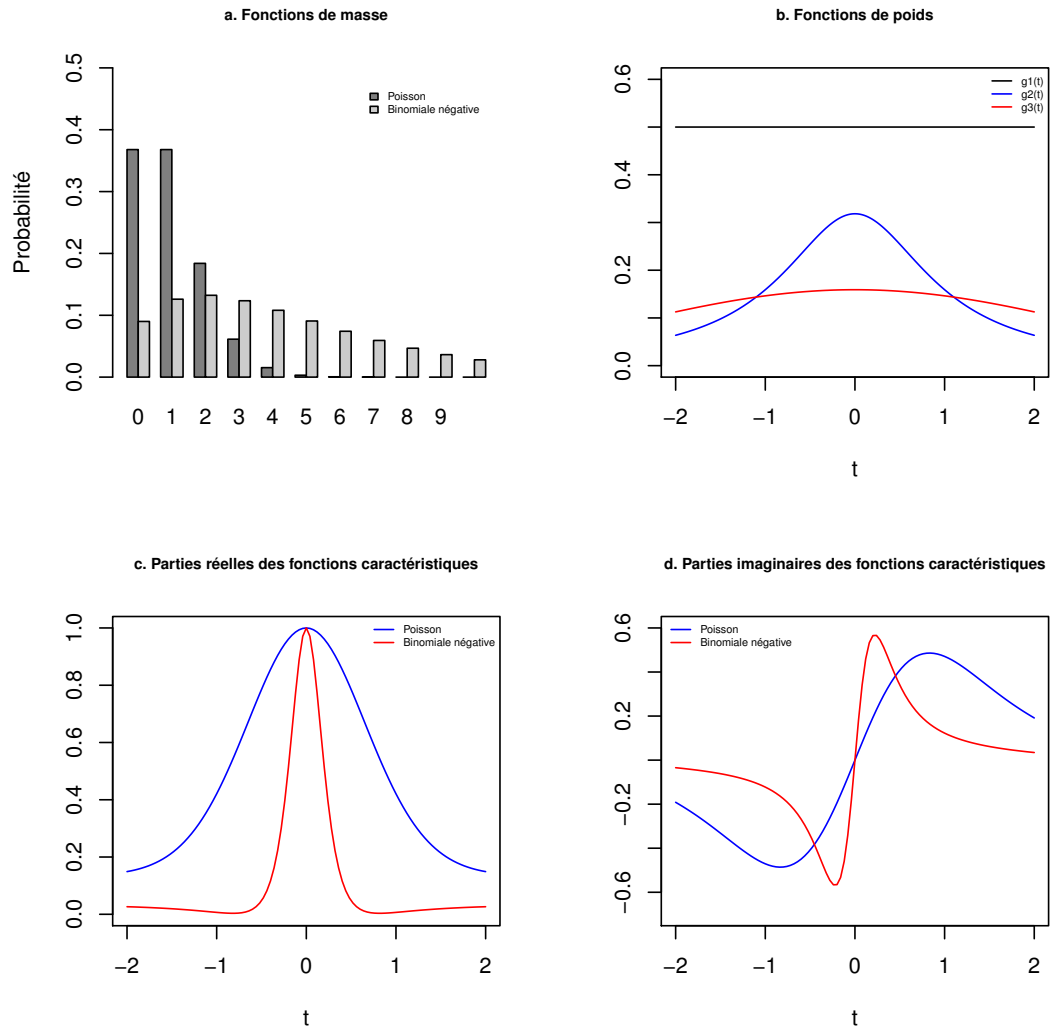
1000 échantillons, la marge d'erreur d'un intervalle de confiance de niveau 95% pour le niveau estimé d'un test de niveau  $\alpha$  est  $1,96 * \sqrt{\alpha(1 - \alpha)/1000}$ , soit des marges respectives de 1,4% et 1,19% pour les niveaux 5% et 10%. Par conséquent, tout niveau situé entre 0,036 et 0,064 n'est pas statistiquement différent de 5%. Pour le niveau 10%, tout niveau situé entre 0,0881 et 0,1119 n'est pas statistiquement différent de 10%.

En outre, pour chacun des seuils, de fortes puissances (supérieures à 0,80) sont obtenues quelque soit la fonction de poids. Ce résultat non surprenant traduit non seulement le fait que les deux distributions sont parfaitement distinctes comme l'indiquent les graphiques a, c et d de la figure 1.1, mais surtout, corrobore le fait que le test de Jiménez-Gamero *et al.* (2009) détecte suffisamment cette alternative.

Par ailleurs, l'on remarque que la puissance obtenue avec la fonction de poids  $g_3(t)$  est la plus petite alors que celle obtenue avec  $g_2(t)$  est la plus grande. Cela corrobore bien le fait que la fonction de poids a une incidence sur la puissance du test comme signifié dans Jiménez-Gamero *et al.* (2009). Toutefois, le temps requis pour le calcul des estimations de niveau de signification est beaucoup moindre pour  $g_3(t)$  que pour les deux autres fonctions de poids.

Pour cette raison, dans le cas de la loi bivariée de Poisson, nous utiliserons la fonction de poids  $g_3(t)$ .

FIGURE 1.1. Fonctions de masse, fonctions de poids et fonctions caractéristiques de la loi de Poisson de paramètre ( $\theta = 1$ ) et la binomiale négative de paramètre ( $r = 2; p = 0,3$ )



# Chapitre 2

---

## LA LOI DE POISSON BIVARIÉE

Dans ce chapitre, nous définissons la loi de Poisson bivariée et présentons ses propriétés, puis nous traitons de l'estimation de ses paramètres. Pour ce faire, nous utiliserons souvent la fonction génératrice des probabilités qui identifie de façon unique une loi de probabilité, tout comme la fonction de masse.

### 2.1. DÉFINITION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS

#### 2.1.1. Définition

Soient  $X_1, X_2$  et  $X_3$ , trois variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Posant  $X = X_1 + X_3$  et  $Y = X_2 + X_3$ , alors la densité conjointe de  $(X, Y)$  est une loi de Poisson bivariée de paramètres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ . On la notera  $BP(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

#### 2.1.2. Quelques propriétés

##### La fonction de masse

Elle est donnée par :

$$Prob(X = k, Y = l) = f(k, l; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{i=0}^{\min(k, l)} \frac{\lambda_1^{k-i} \lambda_2^{l-i} \lambda_3^i}{(k-i)!(l-i)!i!}. \quad (2.1.1)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} f(k, l; \lambda) &= Prob(X = k, Y = l) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(k, l)} Prob(X = k, Y = l \mid X_3 = i) Prob(X_3 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(k, l)} Prob(X_1 + i = k, X_2 + i = l) Prob(X_3 = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\min(k,l)} \text{Prob}(X_1 = k - i) \text{Prob}(X_2 = l - i) \text{Prob}(X_3 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\min(k,l)} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{l-i}}{(l-i)!} e^{-\lambda_3} \frac{\lambda_3^i}{i!}
\end{aligned}$$

La borne de sommation se justifie par le fait que  $k - i \geq 0$  et  $l - i \geq 0$ , d'où le résultat.  $\square$

Les relations de récurrence suivantes permettent de calculer les  $f(k, l; \lambda)$ , voir Teicher (1954) :

Pour  $k, l \geq 0$  :

$$\begin{cases} kf(k, l; \lambda) = \lambda_1 f(k-1, l; \lambda) + \lambda_3 f(k-1, l-1; \lambda), \\ lf(k, l; \lambda) = \lambda_2 f(k, l-1; \lambda) + \lambda_3 f(k-1, l-1; \lambda). \end{cases}$$

Pour  $k$  ou  $l$  négatif,  $f(k, l; \lambda) = 0$ .

### Les moyennes, variances et covariances du vecteur

Les espérances de  $X$  et  $Y$ , de même que leurs variances sont données par  $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda_1 + \lambda_3$  et  $E(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda_2 + \lambda_3$ , où  $\text{Var}()$  désigne la variance et  $E()$  l'espérance.

La covariance de  $(X, Y)$  notée  $\text{Cov}(X, Y)$  est égale à  $\lambda_3$ .

**Preuve :**

$$E(X) = E(X_1 + X_3) = E(X_1) + E(X_3) = \lambda_1 + \lambda_3,$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + X_3) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_3) = \lambda_1 + \lambda_3.$$

La deuxième ligne se justifie par le fait que les variables  $X_i, i = 1, 2, 3$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres  $\lambda_i$ .

De la même façon, on montre que  $E(Y) = \lambda_2 + \lambda_3$  et  $\text{Var}(Y) = \lambda_2 + \lambda_3$ .

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X_3^2) - E^2(X_3) = \text{Var}(X_3) = \lambda_3
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtenant en remplaçant  $X$  et  $Y$  par leurs valeurs et en développant.  $\square$

### La fonction génératrice des probabilités

La fonction génératrice des probabilités se définit, pour une paire de variables  $(X,Y)$  ayant une fonction de masse  $f(x,y)$  et prenant des valeurs entières positives, comme étant  $E [t_1^X t_2^Y]$ . On la notera  $\pi(t_1, t_2; \lambda)$  et par définition,

$$\pi(t_1, t_2; \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} t_1^x t_2^y f(x, y).$$

Dans le cas de la distribution de Poisson bivariée,

$$\begin{aligned} \pi(t_1, t_2; \lambda) &= E [t_1^X t_2^Y] \\ &= E [t_1^{X_1+X_3} t_2^{X_2+X_3}] \\ &= E [t_1^{X_1} t_2^{X_2} (t_1 t_2)^{X_3}] \\ &= E [t_1^{X_1}] E [t_2^{X_2}] E [(t_1 t_2)^{X_3}] \end{aligned}$$

La dernière ligne se justifiant par le fait que les variables  $X_i, i = 1, 2, 3$  sont indépendantes.

En remarquant d'une part que si la variable  $X$  suit une distribution de Poisson univariée de paramètre  $\lambda$ , alors  $E [t^X] = \exp[\lambda(t-1)]$ , et d'autre part que  $t_1 t_2 - 1 = (t_1 - 1)(t_2 - 1) + (t_1 - 1) + (t_2 - 1)$ , l'on obtient :

$$\pi(t_1, t_2; \lambda) = \exp[(\lambda_1 + \lambda_3)(t_1 - 1) + (\lambda_2 + \lambda_3)(t_2 - 1) + \lambda_3(t_1 - 1)(t_2 - 1)]. \quad (2.1.2)$$

### La fonction caractéristique

Soient  $Z = (X, Y)$ , alors la fonction caractéristique est donnée par :

$$C_Z(t_1, t_2; \lambda) = C_{X_1}(t_1; \lambda_1) C_{X_2}(t_2; \lambda_2) C_{X_3}(t_1 + t_2; \lambda_3),$$

où  $C_X(t; \lambda)$  est la fonction caractéristique de la distribution de Poisson univariée de paramètre  $\lambda$ ; c'est-à-dire

$$C_X(t; \lambda) = E\{\exp(itX)\} = \exp[\lambda(e^{it} - 1)].$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
C_Z(t_1, t_2; \lambda) &= E[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}] \\
&= E[e^{i(t_1 X_1 + t_1 X_3 + t_2 X_2 + t_2 X_3)}] \\
&= E[e^{i[t_1 X_1 + t_2 X_2 + (t_1 + t_2) X_3]}] \\
&= E[e^{it_1 X_1} \cdot e^{it_2 X_2} \cdot e^{i(t_1 + t_2) X_3}] \\
&= E[e^{it_1 X_1}] \cdot E[e^{it_2 X_2}] \cdot E[e^{i(t_1 + t_2) X_3}] \\
&= C_{X_1}(t_1; \lambda_1) \cdot C_{X_2}(t_2; \lambda_2) \cdot C_{X_3}(t_1 + t_2; \lambda_3) \\
&= \exp\{\lambda_1 e^{it_1} + \lambda_2 e^{it_2} + \lambda_3 e^{i(t_1 + t_2)} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\}
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne 4 à la ligne 5 se justifiant par le fait que les variables  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes.  $\square$

### Les distributions marginales et conditionnelles

Les distributions marginales de  $(X, Y)$  sont des distributions de Poisson univariées. La variable  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $(\lambda_1 + \lambda_3)$  et la variable  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $(\lambda_2 + \lambda_3)$ .

Les distributions conditionnelles sont des convolutions. Pour la distribution de  $X$  sachant  $Y = y$ , il s'agit de la convolution de  $Z_1$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1$  et  $Z_2$  suivant une loi binomiale de paramètres  $\left(y, \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right)$ . L'espérance conditionnelle est alors :

$$E[X | y; \lambda] = \lambda_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} y$$

et la variance conditionnelle :

$$Var[X | y; \lambda] = Var[Z_1] + Var[Z_2] = \lambda_1 + \left[\frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right] \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}\right] y.$$

De la même manière, la distribution de  $Y$  sachant  $X = x$  est la convolution de  $Y_1$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_2$  et de  $Y_2$  suivant une loi binomiale de paramètres  $\left(x, \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}\right)$ . L'espérance conditionnelle est :

$$E[Y | x; \lambda] = \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} x,$$

et la variance conditionnelle

$$Var[Y | x; \lambda] = \lambda_2 + \left[ \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} \right] \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \right] x.$$

**Preuve :**

Soit  $f_X$  la loi marginale de  $X$ . Elle se déduit de la fonction de masse conjointe par :  $f_X(r; \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} f(r, s; \lambda)$ .

La fonction génératrice des probabilités est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_X(t; \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} f_X(r; \lambda) t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f(r, s; \lambda) t^r \\ &= \pi(r, 1; \lambda) \quad \text{selon l'équation (2.1.2)} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_3)(t - 1)\}. \end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, on reconnaît l'expression de la fonction génératrice des probabilités d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_3$ . La variable  $X$  suit donc une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_3$ .

De la même manière, on montre que la variable  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_2 + \lambda_3$ .

La fonction génératrice des probabilités de la distribution conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$  est par définition :

$$\pi_Y(t | x; \lambda) = \sum_{y=0}^{\infty} f_Y(y | x; \lambda) t^y = \frac{\sum_{y=0}^{\infty} f(x, y; \lambda) t^y}{\sum_{y=0}^{\infty} f(x, y; \lambda)}.$$

Le théorème 1.3.1 de Kocherlakota et Kocherlakota (1992) montre que :

$$\pi_Y(t | x; \lambda) = \frac{\pi^{(x,0)}(0, t; \lambda)}{\pi^{(x,0)}(0, 1; \lambda)}.$$

où

$$\pi^{(x,y)}(u, v; \lambda) = \frac{\partial^{x+y} \pi(t_1, t_2; \lambda)}{\partial t_1^x \partial t_2^y} \Big|_{t_1=u, t_2=v}.$$

Selon l'équation (2.1.2), l'on montre que :

$$\pi^{(x,0)}(t_1, t_2; \lambda) = (\lambda_1 + \lambda_3 t_2)^x \pi(t_1, t_2; \lambda).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \pi^{(x,0)}(0, t; \lambda) &= (\lambda_1 + \lambda_3 t)^x \exp(-\lambda_1 + \lambda_2 t - \lambda_3) \\ \pi^{(x,0)}(0, 1; \lambda) &= (\lambda_1 + \lambda_3)^x \exp(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\pi_Y(t \mid x; \lambda) = \exp\{\lambda_2(t-1)\} \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_3 t}{\lambda_1 + \lambda_3} \right\}^x.$$

Cette dernière équation est celle de la fonction génératrice des probabilités de la convolution de  $Y_1$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_2$  et de  $Y_2$  suivant une loi binomiale de paramètres  $\left(x, \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}\right)$ .

Un raisonnement analogue montre le résultat pour la distribution conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = y$ .  $\square$

Pour l'estimation, il peut être avantageux d'utiliser une paramétrisation alternative pour la loi de Poisson bivariée en remplaçant les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  par  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , où  $\theta_1 = \lambda_1 + \lambda_3$ ,  $\theta_2 = \lambda_2 + \lambda_3$  et  $\theta_3 = \lambda_3$ . Ainsi,  $\theta_1 \geq \theta_3$  et  $\theta_2 \geq \theta_3$ .

Avec cette paramétrisation, la fonction de masse, la fonction génératrice des probabilités et la fonction caractéristique deviennent respectivement :

$$f(k, l; \theta) = e^{-(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)} \sum_{i=0}^{\min(k, l)} \frac{(\theta_1 - \theta_3)^{k-i} (\theta_2 - \theta_3)^{l-i} \theta_3^i}{(k-i)! (l-i)! i!}, \quad (2.1.3)$$

$$\pi(t_1, t_2; \theta) = \exp[\theta_1(t_1 - 1) + \theta_2(t_2 - 1) + \theta_3(t_1 - 1)(t_2 - 1)], \quad (2.1.4)$$

$$C_Z(t_1, t_2; \theta) = \exp\{\theta_1 e^{it_1} + \theta_2 e^{it_2} - (\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)\}.$$

Les moments non centrés de la loi de Poisson bivariée se définissent comme suit :

$$\begin{aligned} m'_{u,v} &= E(X^u Y^v) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} r^u s^v f(r, s; \lambda) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} r^u s^v e^{-(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)} \sum_{i=0}^{\min(r, s)} \frac{(\theta_1 - \theta_3)^{r-i} (\theta_2 - \theta_3)^{s-i} \theta_3^i}{(k-i)! (l-i)! i!}. \end{aligned}$$

### Autres manières d'obtenir des observations de Poisson bivariées

Campbell (1934) obtient la loi de Poisson bivariée comme limite d'une loi binomiale bivariée. Soit une population de taille  $n$  sur laquelle on veut étudier deux caractères  $X$  et  $Y$ . Un individu de la population a donc soit le caractère  $X$



(1) ou non (0) et il en est de même pour  $Y$ . La répartition des  $n$  individus de la population selon les deux caractéristiques se fait comme suit, voir tableau 2.1.

TABLEAU 2.1. Répartition d'une population selon deux caractéristiques  $X$  et  $Y$ .

X	Y		Total
	1	0	
1	$n_{11}$	$n_{10}$	$n_{1+}$
0	$n_{01}$	$n_{00}$	$n_{0+}$
Total	$n_{+1}$	$n_{+0}$	$n$

Soient :

$$p_{ij} = \text{Prob}(X = i, Y = j), \quad i, j = 0, 1,$$

$$p_{1+} = p_{10} + p_{11} \quad \text{et}$$

$$p_{+1} = p_{01} + p_{11}.$$

Alors  $(n_{1+}, n_{+1})$  suit une loi binomiale bivariable de paramètres  $(p_{1+}, p_{+1}, p_{11})$ . Sa fonction de masse est :

$$\begin{aligned} P_{k,l} &= \text{Prob}(n_{1+} = k, n_{+1} = l) \\ &= \sum_{i=\max(0, k+l-n)}^{\min(k,l)} \frac{n!}{i!(k-i)!(l-i)!(n-k-l+i)!} p_{11}^i p_{10}^{k-i} p_{01}^{l-i} p_{00}^{n-k-l+i}. \end{aligned}$$

Sa fonction génératrice de probabilité se définit comme suit :

$$\pi_1(t_1, t_2; p) = [1 + p_{1+}(t_1 - 1) + p_{+1}(t_2 - 1) + p_{11}(t_1 - 1)(t_2 - 1)]^n,$$

où  $p = (p_{1+}, p_{+1}, p_{11})$ .

Soient  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  des constantes positives indépendantes de  $n$  et posons que lorsque  $n$  devient grand, les probabilités tendent vers 0 comme suit

$$p_{1+} = \frac{\theta_1}{n}, \quad p_{+1} = \frac{\theta_2}{n}, \quad p_{11} = \frac{\theta_3}{n}.$$

Alors, étant donné que  $p_{1+} = p_{11} + p_{10}$  et que  $p_{+1} = p_{11} + p_{01}$ , nécessairement  $\theta_1 \geq \theta_3$ , et  $\theta_2 \geq \theta_3$ .

En posant :

$$\pi_n(t_1, t_2; \theta) = \left[ 1 + \frac{\theta_1}{n}(t_1 - 1) + \frac{\theta_2}{n}(t_2 - 1) + \frac{\theta_3}{n}(t_1 - 1)(t_2 - 1) \right]^n$$

puis en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a :

$$\pi(t_1, t_2; \theta) = \exp[\theta_1(t_1 - 1) + \theta_2(t_2 - 1) + \theta_3(t_1 - 1)(t_2 - 1)]$$

qui est la fonction génératrice des probabilités de la loi de Poisson bivariée de paramètres  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$ , voir équation (2.1.2). Ainsi, comme on peut obtenir la loi de Poisson comme la limite d'une loi binomiale dont la probabilité de succès tend vers 0, la loi de Poisson bivariée peut être obtenue à partir de la loi binomiale bivariée.

Une autre approche est celle de Kocherlakota et Kocherlakota (1992) et elle consiste à composer une loi binomiale bivariée et une loi de Poisson. Soient alors  $N$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $(X, Y | N)$  suivant une loi binomiale bivariée de paramètres  $(p_{1+}, p_{+1}, p_{11})$ . Alors, la fonction génératrice des probabilités jointe de  $(X, Y | N)$  est :

$$\pi(t_1, t_2 | N; p) = [1 + p_{1+}(t_1 - 1) + p_{+1}(t_2 - 1) + p_{11}(t_1 - 1)(t_2 - 1)]^N$$

On en déduit ainsi que

$$\pi(t_1, t_2; (\lambda_1, p)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \pi(t_1, t_2 | N = n; p)$$

En effectuant cette somme, nous obtenons

$$\pi(t_1, t_2; (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) = \exp[\lambda_1(t_1 - 1) + \lambda_2(t_2 - 1) + \lambda_3(t_1 - 1)(t_2 - 1)]$$

où  $\lambda_1 = \lambda p_{1+}$ ,  $\lambda_2 = \lambda p_{+1}$  et  $\lambda_3 = \lambda p_{11}$ .

## 2.2. L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Soit  $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  un échantillon de taille  $n$  de distribution de Poisson bivariée de paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , de fonction de masse  $f(x, y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Ainsi, nous pouvons par définition poser pour chaque observation  $(X_i, Y_i)$ ,  $X_i = X_{1i} + X_{3i}$  et  $Y_i = X_{2i} + X_{3i}$  où  $X_i$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_i$ . Les variables  $X_1, X_2$ , et  $X_3$  ne sont pas observées, elles sont latentes. Pour l'estimation des paramètres, plusieurs techniques sont suggérées. Dans le cadre de ce mémoire nous allons utiliser la méthode du maximum de vraisemblance. Toutefois, d'autres méthodes seront succinctement présentées.

Posons :

$$\begin{aligned} U &= (X_1, X_2, X_3), \text{ les données complètes,} \\ V &= (X, Y), \text{ les données observées,} \\ \lambda &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \text{ les paramètres.} \end{aligned}$$

### 2.2.1. La méthode du maximum de vraisemblance

Elle consiste en l'estimation des paramètres en maximisant la fonction de vraisemblance de l'échantillon. Pour ce faire, la fonction de vraisemblance est dérivée par rapport aux différents paramètres et les estimations des paramètres sont alors les valeurs qui annulent chacune des dérivées.

L'estimation des paramètres de la loi de Poisson bivariée se fera en utilisant l'algorithme EM qui a été proposé par [Dempster \*et al.\* \(1977\)](#). Il permet de trouver les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres lorsque, par exemple, le modèle dépend de variables latentes non observables, voir [Bilmes \(1998\)](#). Il se décompose en deux étapes. Une étape E (Expectation) où l'on calcule l'espérance de la log-vraisemblance conditionnelle des données complètes et une autre étape M (Maximization) où l'on estime le maximum de vraisemblance en maximisant la vraisemblance trouvée à l'étape E. On utilise ensuite de façon itérative les résultats obtenus à l'étape M pour une nouvelle étape E et ainsi de suite.

Plus précisément supposons qu'à la  $p^{\text{ième}}$  itération, nous avons obtenu les estimations  $\lambda_1^{(p)}$ ,  $\lambda_2^{(p)}$  et  $\lambda_3^{(p)}$  pour les paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  respectivement. Alors à l'étape E, il est question de calculer

$$Q(\lambda \mid \lambda^{(p)}) = E\{\log(f(U \mid \lambda^{(p)} \mid V, \lambda))\},$$

puis à l'étape M de trouver  $\lambda^{(p+1)}$  qui maximise  $Q(\lambda \mid \lambda^{(p)})$ .

Dans le cadre de la loi de Poisson bivariée, la vraisemblance des données complètes est le produit des vraisemblances des 3 lois de Poisson de paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Elle s'écrit donc :

$$L(U; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\} \exp\{x_1 \log(\lambda_1) + x_2 \log(\lambda_2) + x_3 \log(\lambda_3)\} \frac{1}{x_1! x_2! x_3!}$$

et appartient à la famille exponentielle dont la forme générale de la vraisemblance est :

$$L(X; \theta) = b(X) \exp(\theta^T t(X)) / a(\theta).$$

Par conséquent, à l'étape E on se limitera au calcul des espérances conditionnelles de la vraisemblance de chacune des composantes  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , voir [Dempster et al. \(1977\)](#). La vraisemblance des données complètes ainsi obtenue sera maximisée à l'étape M pour obtenir  $\lambda^{(p+1)}$ . [Karlis et Ntzoufras \(2003\)](#) ont déjà utilisé cet algorithme pour l'estimation des paramètres pour différents modèles de loi de Poisson bivariée. Nous nous inspirons de leur travail et proposons de voir chacune de ces deux étapes telles qu'ils les présentent.

### *Étape E*

À la  $p^{\text{ième}}$  itération, pour chacune des observations  $(X_i, Y_i)$ , l'espérance conditionnelle est calculée. Étant donné que  $X_{1i} + X_{3i} = X_i$  et  $X_{2i} + X_{3i} = Y_i$ , puisque  $X_i$  et  $Y_i$  sont connues, il suffit de connaître  $X_{3i}$  et alors  $X_{1i} = X_i - X_{3i}$  et  $X_{2i} = Y_i - X_{3i}$ .

On montre que pour le calcul de l'espérance conditionnelle de  $X_{3i}$  :

$$E(X_{3i} | V_i, \lambda^{(p)}) = \exp\{\log(\lambda_3) + \log[f(x_i - 1, y_i - 1; \lambda^{(p)})] - \log[f(x_i, y_i; \lambda^{(p)})]\}.$$

$X_3$  est donc estimée par

$$X_3^{(p)} = \exp\{\log(\lambda_3) + \log[f(x - 1, y - 1; \lambda^{(p)})] - \log[f(x, y; \lambda^{(p)})]\}.$$

Nous en déduisons celles de  $X_1^{(p)}$  et  $X_2^{(p)}$  par les relations :

$$\begin{aligned} X_1^{(p)} &= X - X_3^{(p)}, \\ X_2^{(p)} &= Y - X_3^{(p)}. \end{aligned}$$

### *Étape M*

À cette étape, on cherche à estimer les paramètres pour la  $(p+1)^{\text{ième}}$  itération. La vraisemblance des données complètes  $(X_1^{(p)}, X_2^{(p)}, X_3^{(p)})$  est alors maximisée. Comme chacune des variables  $X_i$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_i$  et que les  $X_i, i = 1, 2, 3$  sont indépendantes, alors la vraisemblance des données complètes est obtenue comme produit des vraisemblances des différentes variables. Ensuite, la moyenne de chacune des variables est alors un estimateur de son paramètre. Nous aurons donc :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(p+1)} &= \overline{X_1^{(p)}} \\ \lambda_2^{(p+1)} &= \overline{X_2^{(p)}} \\ \lambda_3^{(p+1)} &= \overline{X_3^{(p)}}. \end{aligned}$$

Ce processus itératif continue jusqu'à ce que la variation relative de la vraisemblance et le nombre d'itérations soient inférieurs à des seuils donnés. On choisit un seuil de  $10^{-8}$  pour la variation relative de la vraisemblance et un seuil de 300 pour les itérations. Les valeurs initiales suivantes sont choisies également à l'entame des itérations :

$$\begin{aligned}\lambda_3^0 &= 1, \\ X_1^0 &= X, \\ X_2^0 &= Y, \\ X_3^0 &= 0 \\ \text{difflike} &= 1000 \\ \text{loglike0} &= 1000\end{aligned}$$

où *difflike* correspond à la différence des log-vraisemblances et *loglike0*, la log-vraisemblance à l'étape initiale.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons maintenant la paramétrisation  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  pour les estimations.

### 2.2.2. La méthode des moments

La méthode des moments consiste à estimer les paramètres en exprimant les moments de la distribution en fonction des paramètres, en inversant la relation dans le but d'exprimer les paramètres en fonction des moments et en remplaçant les moments de la distribution par les moments de l'échantillon. Le choix des moments est alors arbitraire. Toutefois, les moments d'ordre inférieur sont préférés car s'exprimant par des fonctions simples des paramètres et ayant des variances plus petites.

Les moments non centrés de l'échantillon sont de la forme

$$\hat{m}'_{r,s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^r j^s X_i^r Y_j^s$$

et ceux de la distribution sont :

$$m'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^r j^s p_{ij},$$

où  $p_{ij} = \text{Prob}(X = i, Y = j)$ . On remarque bien que  $\bar{X} = \hat{m}'_{1,0}$  et  $\bar{Y} = \hat{m}'_{0,1}$  et que les moments de la distribution sont quant à eux dépendants des paramètres.

L'estimation des paramètres par la méthode des moments se fait donc comme suit :

$$\begin{cases} m'_{1,0} = E(X) = \theta_1 \\ m'_{0,1} = E(Y) = \theta_2 \\ m'_{1,1} = E(XY) = \theta_3 + \theta_1\theta_2 \end{cases}$$

de telle sorte que

$$\begin{cases} \theta_1 = m'_{1,0} \\ \theta_2 = m'_{0,1} \\ \theta_3 = m'_{1,1} - m'_{1,0}m'_{0,1} \end{cases}$$

En remplaçant les moments de la distribution  $m'_{i,j}$  par les moments de l'échantillon  $\hat{m}'_{i,j}$ , et en simplifiant, on obtient les estimateurs par la méthode des moments

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \bar{X} \\ \tilde{\theta}_2 = \bar{Y} \\ \tilde{\theta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \end{cases}$$

### 2.2.3. La méthode du double zéro

Elle s'apparente à la méthode des moments qui fournit les deux moyennes marginales et la covariance comme estimateurs des paramètres. Toutefois, dans cette méthode, la troisième équation exprimant le moment  $m'_{1,1}$  en fonction des paramètres est remplacée par la probabilité d'obtenir un double zéro. En utilisant l'équation (2.1.3), on note que la probabilité d'obtenir un double zéro est

$$p_{00} = \exp(-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)$$

de telle sorte que

$$\theta_3 = \log(p_{00}) + \theta_1 + \theta_2. \quad (2.2.1)$$

Soient  $n_{00}$  et  $n$  tels que définis dans le tableau 2.1, alors  $p_{00}$  est remplacée dans l'équation (2.2.1) par la proportion dans l'échantillon  $\frac{n_{00}}{n}$  pour l'estimation de  $\theta_3$ .

Nous obtenons donc comme estimateurs par la méthode du double zéro :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \bar{X} \\ \tilde{\theta}_2 = \bar{Y} \\ \tilde{\theta}_3 = \log \left[ \frac{n_{00}}{n} \right] + \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2. \end{cases}$$

Il existe d'autres méthodes comme la méthode de l'estimation des valeurs paires (*even point estimation*) que l'on peut trouver dans Kocherlakota et Kocherlakota (1992) (chapitre 4, pp. 101 – 108).





# Chapitre 3

---

## TESTS D'ADÉQUATION À LA LOI DE POISSON BIVARIÉE

Dans ce chapitre, nous présentons cinq tests d'adéquation à la loi de Poisson bivariée. Le premier test est l'application à la loi de Poisson bivariée du test basé sur la fonction caractéristique introduit au chapitre 1. Les deux suivants utilisent plutôt la fonction génératrice des probabilités. La valeur critique ou une valeur- $p$  pour ces trois tests sera obtenue à partir du bootstrap paramétrique. Les deux derniers tests sont basés sur la dispersion attendue dans un vecteur provenant d'une loi de Poisson bivariée. Dans ces deux cas, la distribution asymptotique est utilisée pour déterminer une valeur critique ou une valeur- $p$ .

Soit  $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  un échantillon de taille  $n$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de distribution  $F(x, y)$ . Le problème de test consiste à confronter les hypothèses  $H_0$  : “la loi de  $(X, Y)$  est une loi de Poisson bivariée”, et  $H_a$  : “la loi de  $(X, Y)$  n'est pas une loi de Poisson bivariée”.

### 3.1. TEST BASÉ SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Dans cette section, nous utilisons les différents résultats de l'article de Jiménez-Gamero *et al.* (2009) décrit au chapitre 1 pour établir la statistique de test pour la loi de Poisson bivariée. Pour ce faire, nous partons des résultats obtenus dans le cas de la loi de Poisson univariée que nous étendons au cas de la loi de Poisson bivariée.

#### La statistique de test

Soient  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , le vecteur de paramètres et  $G$  la fonction de poids admettant une densité de probabilité  $g$  presque partout sur  $\mathbb{R}^2$ . La statistique de

test est

$$T_{n,G}(\hat{\lambda}) = n \int |c_n(t) - c_0(t; \hat{\lambda})|^2 dG(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h((X_j, Y_j), (X_k, Y_k); \hat{\lambda})$$

où :

$$\begin{aligned} h((x,y),(s,t); \lambda) &= u(x-s, y-t) - u_0(x,y; \lambda) - u_0(s,t; \lambda) + u_{00}(\lambda), \\ u_0(x,y; \lambda) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} u(x-s, y-t) f(s,t; \lambda), \\ u_{00}(\lambda) &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} u(x-s, y-t) f(x,y; \lambda) f(s,t; \lambda), \\ u(t_1, t_2) &= \int \int \cos(t_1 x + t_2 y) g(x,y) dx dy, \end{aligned}$$

$f$  est la fonction de masse de  $(X,Y)$  et  $u$  est la partie réelle de la fonction caractéristique de la distribution  $G$ .

Nous étendons les résultats de la section 1.3 lorsque la fonction de poids est  $g_3(t)$  au cas de l'adéquation à la loi de Poisson bivariée en prenant la fonction de poids

$$g(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi^2} \frac{[1 - \cos(t_1)][1 - \cos(t_2)]}{t_1^2 t_2^2}, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction  $u$  correspondante est alors

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 - |x_1|)(1 - |x_2|), & |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction ne sera évaluée que sur les entiers  $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  et nous avons  $u(0,0) = 1$  et  $u(x_1, x_2) = 0$  si  $x_1 \neq 0$  ou  $x_2 \neq 0$ . Il en résulte que  $u_0(x_1, x_2; \lambda) = f(x_1, x_2; \lambda)$ , où  $f(x_1, x_2; \lambda)$  est la fonction de masse de la Poisson bivariée et la quadruple somme définissant  $u_{00}(\lambda)$  se simplifie en

$$u_{00}(\lambda) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} u_0^2(x_1, x_2; \lambda).$$

Les théorèmes 1.2.5 ou 1.2.6 peuvent nous permettre alors d'affirmer que la distribution nulle de la version bootstrap de chacune des deux statistiques  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  ou  $T_{n,\hat{G}}(\hat{\lambda})$  converge presque sûrement vers celle de la statistique considérée si  $H_0$  est vraie. Toutefois, l'application de ces théorèmes nécessite que certaines conditions soient remplies. Plus précisément, il s'agit de vérifier que les conditions A,

B-2, C, D, E, F et G sont remplies. Cette vérification est faite en annexe.

Pour le calcul de la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$ , il faut préalablement calculer  $u_{00}(\lambda)$  en prenant pour valeur de  $\lambda$ , l'estimateur  $\hat{\lambda}$  obtenu en utilisant l'algorithme EM. Tout comme dans la section 1.3, cette double série est évaluée en prenant un nombre fini de termes pour chacune des séries, mais suffisamment grand afin que le reste soit négligeable. Ce nombre de termes dépend de la valeur de  $\hat{\lambda}$ . Nous le choisissons identique pour chacune des deux sommes et arrêtons la sommation lorsque la variation relative de  $u_{00}$  entre deux termes consécutifs est plus petite que  $10^{-7}$ .

La valeur- $p$  du test est estimée par la méthode du bootstrap décrite dans la section 1.2.4 et  $H_0$  est rejetée si la valeur- $p$  est inférieure au seuil prescrit.

### 3.2. TESTS BASÉS SUR LA FONCTION GÉNÉRATRICE DES PROBABILITÉS

Deux familles de tests sont proposées par Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014). Elles font également intervenir une fonction de poids tout comme le test proposé par Jiménez-Gamero *et al.* (2009) et sont convergents contre toute alternative fixe lorsque le choix de la fonction de poids est adéquat. La paramétrisation choisie pour l'élaboration de ces tests est la paramétrisation alternative basée sur le vecteur de paramètres  $\theta$  donnée dans l'équation (2.1.3). Ces tests détectent également des alternatives locales convergeant vers la distribution nulle à un certain taux et le bootstrap peut toujours être utilisé pour estimer leurs distributions nulles. Les deux familles de statistiques de tests proposées se basent sur la fonction génératrice des probabilités expérimentale, qui elle-même, est un estimateur convergent de la fonction génératrice des probabilités. Les statistiques de test de la première famille sont de la forme  $R_{n,w}(\hat{\theta}_n)$  et ont l'expression suivante :

$$R_{n,w}(\hat{\theta}_n) = \int_0^1 \int_0^1 G_n^2(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) g(u_1, u_2) du_1 du_2$$

où  $G_n(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) = \sqrt{n} \{ \pi_n(u_1, u_2) - \pi(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) \}$ ,  $\pi_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_1^{X_i} u_2^{Y_i}$  est la fonction génératrice des probabilités expérimentale,  $\pi$  est la fonction génératrice des probabilités de la loi de Poisson bivariee donnée dans l'équation (2.1.4),  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = (\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n}, \hat{\theta}_{3n})$  est un estimateur convergent de  $\theta$ ,  $g(u_1, u_2)$  est une fonction de poids mesurable telle que  $g(u_1, u_2) \geq 0, \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$  et  $\int_0^1 \int_0^1 g(u_1, u_2) du_1 du_2 < \infty$ .

En ce qui concerne la deuxième famille de tests, les auteurs partent du fait que la distribution univariée de Poisson est la seule dont la fonction génératrice des probabilités  $\pi$  satisfait l'équation  $\pi'(u; \theta) = \theta\pi(u; \theta)$  et étendent le test proposé par Baringhaus et Henze (1992), basé sur la contrepartie expérimentale de cette équation, au cas de la loi de Poisson bivariée. Pour ce faire, ils recherchent d'abord un système d'équations dont l'unique solution est la fonction génératrice des probabilités de la loi de Poisson bivariée. Ils trouvent alors le système suivant :

$$E_i(u_1, u_2; \theta) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

où :

$$E_1(u_1, u_2; \theta) = \frac{\partial \pi(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} - \{\theta_1 + \theta_3(u_2 - 1)\} \pi(u_1, u_2; \theta),$$

$$E_2(u_1, u_2; \theta) = \frac{\partial \pi(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_2} - \{\theta_2 + \theta_3(u_1 - 1)\} \pi(u_1, u_2; \theta).$$

Ils montrent ensuite que la fonction génératrice des probabilités expérimentale et ses dérivées sont convergentes vers  $\pi(u_1, u_2; \theta)$  et ses dérivées partielles. Par conséquent, si  $H_0$  est vraie et que  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur convergent de  $\theta$ , les équations :

$$E_{1n}(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) = \frac{\partial \pi_n(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \{\hat{\theta}_{1n} + \hat{\theta}_{3n}(u_2 - 1)\} \pi_n(u_1, u_2),$$

$$E_{2n}(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) = \frac{\partial \pi_n(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \{\hat{\theta}_{2n} + \hat{\theta}_{3n}(u_1 - 1)\} \pi_n(u_1, u_2).$$

sont proches de 0. Ainsi, la statistique de test

$$S_{n,w}(\hat{\theta}_n) = n \int_0^1 \int_0^1 \{E_{1n}^2(u_1, u_2; \hat{\theta}_n) + E_{2n}^2(u_1, u_2; \hat{\theta}_n)\} g(u_1, u_2) du_1 du_2$$

où  $g(u_1, u_2)$  est telle que définie précédemment, est bien indiquée pour tester  $H_0$ .

Les distributions nulles de ces deux familles de statistiques de test peuvent être approchées par une combinaison linéaire de variables indépendantes suivant une khi-deux à un degré de liberté. Par exemple,

$$R_{n,w}(\hat{\theta}_n) \underset{L}{\rightsquigarrow} \sum_{j \geq 1} \alpha_j \chi_{1j}^2.$$

Toutefois, elles dépendent de paramètres inconnus  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  qui pourraient être remplacés par leur estimé, mais leur estimation est très ardue ; pour les détails,

voir Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014). Par conséquent, l'approximation de la distribution nulle de ces statistiques de tests s'effectue en utilisant un bootstrap paramétrique.

La fonction de poids utilisée pour calculer ces statistiques de test est

$$g(u_1, u_2; a_1, a_2) = u_1^{a_1} u_2^{a_2}$$

où les  $a_k$ ,  $k = 1, 2$ , sont des réels tels que  $a_k > -1$ .

Les formules de calcul de ces deux familles de statistiques se trouvent dans l'annexe de l'article de Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014). Pour la famille de statistiques  $R_{n,w}(\hat{\theta}_n)$ , elle est donnée par :

$$R_{n,w}(\hat{\theta}_n) = n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[p_n(i,j) - f(i,j; \hat{\theta}_n)][p_n(k,l) - f(k,l; \hat{\theta}_n)]}{(i+k+a_1+1)(j+l+a_2+1)}$$

où  $p_n(i,j)$  est la fréquence relative de la paire  $(i,j)$  et  $a_1$  et  $a_2$  sont les paramètres de la fonction de poids  $g$ .

En ce qui concerne la deuxième famille, nous avons remarqué une erreur dans la formule de calcul présentée dans l'annexe de l'article. Nous en avons informé les auteurs qui l'ont reconnue. La formule juste de son calcul vous est présentée ci-dessous. Soient  $Z$  la matrice  $n \times 2$  constituée des vecteurs  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de telle sorte que  $Z_{1,i} = X_i$  et  $Z_{2,i} = Y_i$ ,  $B_{r,s} = \{Z_{r,s} \geq 1\}$  avec  $r = 1, 2$ ,  $1 \leq s \leq n$ ,  $I_{B_{r,s}}$  la fonction indicatrice de  $B_{r,s}$  et  $a_1$  et  $a_2$  les paramètres de la fonction de poids  $g$ . Alors la formule de calcul de la statistique est la suivante :

$$S_{n,w}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (S_{1ij} + S_{2ij})$$

où

$$S_{kij} = \frac{Z_{k,i} I_{B_{k,i}} Z_{k,j} I_{B_{k,j}}}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k - 1)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 1)} - \frac{(\hat{\theta}_{kn} - \hat{\theta}_{3n})(Z_{k,i} I_{B_{k,i}} + Z_{k,j} I_{B_{k,j}})}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 1)} - \frac{\hat{\theta}_{3n}(Z_{k,i} I_{B_{k,i}} + Z_{k,j} I_{B_{k,j}})}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 2)} + \frac{2\hat{\theta}_{3n}(\hat{\theta}_{kn} - \hat{\theta}_{3n})}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k + 1)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 2)} +$$

$$\frac{(\hat{\theta}_{kn} - \hat{\theta}_{3n})^2}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k + 1)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 1)} + \frac{\hat{\theta}_{3n}^2}{(Z_{k,i} + Z_{k,j} + a_k + 1)(Z_{3-k,i} + Z_{3-k,j} + a_{3-k} + 3)}.$$

Pour le calcul de ces statistiques, l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  utilisé se déduit des estimateurs obtenus par l'algorithme EM. Il prend les valeurs  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$  pour la famille de statistiques  $R_{n,w}(\hat{\theta}_n)$  et  $(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_3)$  pour la famille de statistiques  $S_{n,w}(\hat{\theta}_n)$ , où  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$  sont les estimateurs obtenus par l'algorithme EM. Concernant la famille de statistiques  $R_{n,w}(\hat{\theta}_n)$  qui présentent quatre séries, nous choisissons un nombre de termes identique à sommer pour chacune d'elles et arrêtons la sommation lorsque la variation relative de  $R_{n,w}(\hat{\theta}_n)$  entre deux termes consécutifs est plus petite que  $10^{-7}$ . Pour leur part, [Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero \(2014\)](#) affirment que l'on peut tronquer chacune des sommations à  $M + 15$ , où  $M$  est le maximum entre les maximums des vecteurs  $X$  et  $Y$ , et avoir des valeurs précises. Nous avons fait plusieurs essais et les résultats obtenus ont montré qu'on peut arrêter la sommation avant le nombre  $M + 15$  et avoir une variation relative plus petite que  $10^{-7}$ . Nous décidons par conséquent d'utiliser le critère de la variation relative.

La valeur- $p$  de chacun des tests est estimée par la méthode du bootstrap et  $H_0$  est rejetée si ladite valeur- $p$  est inférieure au seuil prescrit.

### 3.3. QUICK TEST DE CROCKETT

Proposé par [Best et Rayner \(1997\)](#), ce test est une extension du test de dispersion pour le cas d'une variable de Poisson univariée. C'est une version révisée du test de [Crockett \(1979\)](#) qui permettait d'évaluer la manière dont les variances des données diffèrent de celles qu'on aurait eues si l'on avait un modèle de Poisson bivarié, voir [Rayner et Best \(1995\)](#). [Best et Rayner \(1997\)](#) proposent la statistique de test  $T^*$  définie comme suit :

$$T^* = n \frac{\bar{Y}_n^2 Z_X^2 - 2r^2 \bar{X}_n \bar{Y}_n Z_X Z_Y + \bar{X}_n^2 Z_Y^2}{2(\bar{X}_n^2 \bar{Y}_n^2 - r^4)}$$

où  $\bar{X}_n$  et  $\bar{Y}_n$  sont la moyenne des  $X_i$  et  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement,  $r = \{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)\} / \sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y}_n)^2}$  est le coefficient de corrélation entre  $X$  et  $Y$ ,  $Z_X = (n - 1)^{-1} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 - \bar{X}_n$  et  $Z_Y = (n - 1)^{-1} \sum_i (Y_i - \bar{Y}_n)^2 - \bar{Y}_n$  sont la différence entre la variance échantillonnale et la moyenne échantillonnale de chaque variable, respectivement. Pour une Poisson

bivariée, la moyenne et la variance sont identiques pour chacune des deux variables de telle sorte que  $Z_X$  et  $Z_Y$  devraient être proches de 0.

La statistique  $T^*$  suit asymptotiquement une loi de khi-deux à deux degrés de liberté et l'hypothèse  $H_0$  est rejetée si  $T^* > \chi_{2,1-\alpha}^2$  pour un test de niveau  $\alpha$ , où  $\chi_{n,1-\alpha}^2$  est le quantile supérieur d'ordre  $\alpha$  de la loi de khi-deux à  $n$  degrés de liberté.

### 3.4. TEST DE L'INDICE DE DISPERSION

Loukas et Kemp (1986b) ont développé un test en étendant le test de dispersion de Fisher de la loi de Poisson univariée. Ce test évalue à quel point une combinaison linéaire des variances et covariances des données diffère de celle qu'on aurait obtenu si l'on avait un modèle de Poisson bivarié.

Best et Rayner (1997) proposent dans ce cas également une révision de la statistique tout comme dans le cas du test de Crockett et proposent la statistique

$$I_B^* = \frac{n \left( \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\bar{X}_n} - 2Cr^2 + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\bar{Y}_n} \right)}{1 - r^2}$$

où  $C = \hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y / \sqrt{\bar{X}_n \bar{Y}_n}$ ,  $\hat{\sigma}_Y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$ ,  $\hat{\sigma}_X^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ .

La distribution nulle de cette statistique  $I_B^*$  est asymptotiquement une  $\chi^2$  à  $2n - 3$  degrés de liberté. L'hypothèse  $H_0$  est donc rejetée si  $I_B^* > \chi_{2n-3,1-\alpha}^2$  pour un test de niveau  $\alpha$ .

Il existe divers autres tests généraux comme le test du khi-deux de Pearson et bien d'autres encore qui ne sont pas conçus spécialement pour la loi de Poisson bivariée que le lecteur peut consulter dans Kocherlakota et Kocherlakota (1992)(pp. 114-115).





# Chapitre 4

---

## SIMULATIONS ET APPLICATION

Dans ce chapitre, nous allons évaluer la performance de tous les tests décrits dans le chapitre précédent en fonction de leur niveau et de leur puissance pour détecter le fait que les données proviennent d'une distribution autre que Poisson bivariée. En outre, on les utilisera sur des données de la série A du championnat italien de soccer, lors de la saison 1991-1992, afin de tester l'hypothèse  $H_0$  : "Les données proviennent d'une loi de Poisson bivariée" contre l'hypothèse  $H_a$  : "Les données proviennent d'une loi autre que Poisson bivariée".

### 4.1. SIMULATIONS

#### 4.1.1. Méthodologie

##### 4.1.1.1. *L'estimation des paramètres*

Comme expliqué dans le chapitre 2, l'estimation des paramètres va se faire en utilisant l'algorithme EM. Pour ce faire, nous utilisons la fonction "simple.bp" du package bivpois qui a été créé par Karlis et Ntzoufras (2003).

##### 4.1.1.2. *L'estimation de l'erreur de type I*

Pour estimer l'erreur de type I, nous avons simulé 1000 jeux de données d'une variable de Poisson bivariée de paramètre  $\lambda$ . Pour chaque jeu de données, la valeur- $p$  de chacun des tests a été calculée. Lorsque les tests font appel au bootstrap pour calculer la valeur- $p$ , nous avons simulé 1000 jeux de données bootstrap d'une variable de Poisson bivariée de taille  $n$  et de paramètre estimé  $\hat{\lambda}$ . Dans les autres cas, nous avons calculé la valeur- $p$  basée sur la distribution asymptotique. Tous les tests ont été appliqués aux mêmes jeux de données en vue de faciliter les comparaisons entre eux. Les valeurs du paramètre  $\lambda$  utilisées sont

$(0,75; 0,75; 0,25)$ ,  $(0,5; 0,5; 0,5)$ ,  $(0,25; 0,25; 0,75)$  et  $(1,25; 0,85; 0,10)$ . Les trois premiers vecteurs de paramètres proviennent de [Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero \(2014\)](#) alors que le dernier est proche de la valeur des estimations que nous obtiendrons dans l'exemple d'application de la prochaine section. Vous remarquerez que dans les trois premiers cas, si on utilise la paramétrisation de  $\theta$  plutôt que  $\lambda$ , alors  $\theta_1 = \theta_2 = 1$  et ce n'est que le troisième paramètre  $\theta_3 = \lambda_3$  qui change.

En vue d'engendrer un échantillon de taille  $n$  de la loi de Poisson bivariée de paramètre  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , où  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$ , nous générons trois échantillons de taille  $n$  de loi de Poisson univariée  $X_1, X_2$  et  $X_3$ , indépendants, de paramètres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ , respectivement. Alors, le couple  $(X, Y) = (X_1 + X_3, X_2 + X_3)$  suit une loi de Poisson bivariée de paramètre  $\lambda$ , par définition.

Les seuils retenus pour les estimations des erreurs de type I sont 0,05 et 0,10.

Parfois, nous avons voulu comparer nos résultats à ceux d'autres auteurs en utilisant la statistique de test  $Z$  pour la comparaison de proportions  $p_1$  et  $p_2$  définie par

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_c(1 - \hat{p}_c) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}},$$

où  $\hat{p}_1$  et  $n_1$  sont respectivement la proportion de rejets que nous avons obtenue et la taille de notre simulation (1000),  $\hat{p}_2$  et  $n_2$  sont la proportion de rejets et la taille avec laquelle nous voulons comparer nos résultats respectivement, et  $p_c = \frac{(n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2)}{n_1 + n_2}$ . Avec un niveau de confiance de 95% nous comparons  $|Z|$  à 1,96 et rejetons l'hypothèse d'égalité des proportions lorsque  $|Z| > 1,96$ .

#### 4.1.1.3. *La puissance du test*

Pour le calcul de la puissance, il est indispensable dans un premier temps de considérer des alternatives. Dans ce mémoire nous considérerons la loi binomiale bivariée et la loi binomiale négative bivariée comme dans [Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero \(2014\)](#), puis la loi Hermite bivariée comme dans [Best et Rayner \(1997\)](#). Ces trois alternatives sont décrites dans [Kocherlakota et Kocherlakota \(1992\)](#). Les valeurs choisies pour leurs paramètres proviennent des articles cités ci-haut pour ce qui concerne la binomiale négative bivariée et la Hermite bivariée. Pour la binomiale bivariée, nous avons choisi les paramètres nous-mêmes car les

paramètres proposés par l'article sus-cité nous conduisait parfois à des estimations nulles pour  $\hat{\lambda}_3$ .

Pour simuler la loi binomiale bivariée et la loi binomiale négative bivariée, nous utilisons respectivement la méthode d'éléments communs et la méthode composée de Loukas et Kemp (1986a). En ce qui concerne la loi Hermite bivariée, nous nous inspirons de la méthode proposée par Kemp et Loukas (1978). Ces méthodes sont présentées ci-dessous.

#### *La loi binomiale bivariée*

Nous la noterons  $BB(m, p_1, p_2, p_3)$ , où  $m$  est le nombre d'épreuves indépendantes et chaque épreuve a 4 résultats possibles  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  avec des probabilités  $p_i, i = 0, \dots, 3$ , respectivement. Elle a pour fonction génératrice de probabilité  $\pi(u, v; m, p_1, p_2, p_3) = (p_0 + p_1u + p_2v + p_3uv)^m$ , où  $0 < p_i < 1, i = 0, 1, 2, 3$ , et  $\sum_{i=0}^3 p_i = 1$ . Pour la simuler, il suffit selon Loukas et Kemp (1986a), de générer une quadrimomiale de paramètres  $(m, p_0, p_1, p_2, p_3)$ . Soit  $X_i$  le nombre d'occurrences du résultat  $A_i$  au cours des  $m$  épreuves. Alors  $(X_1, X_2, X_3)$  suit une distribution multinomiale trivariée de paramètres  $(m, p_1, p_2, p_3)$ . En prenant le couple de variables  $(X_1 + X_3, X_2 + X_3)$ , nous obtenons ainsi la distribution binomiale bivariée  $BB(m, p_1, p_2, p_3)$ .

Nous considérerons les lois  $BB(20; 0,05; 0,05; 0,1)$ ,  $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$  et  $BB(30; 0,05; 0,05; 0,1)$  et  $BB(30; 0,15; 0,15; 0,15)$  comme alternatives.

#### *La loi binomiale négative bivariée*

Elle sera notée  $BNB(k, a_1, a_2, a_3)$  et a pour fonction génératrice de probabilité  $\pi(u, v; k, a_1, a_2, a_3) = (a_0 - a_1u - a_2v - a_3uv)^{-k}$  où  $k > 0, a_i > 0, i = 1, 2, 3$ , et  $a_0 = 1 + a_1 + a_2 + a_3$ . Pour la simuler, nous utilisons un mélange de loi gamma et de loi de Poisson bivariée. Pour ce faire, on génère une observation  $z$  de la loi gamma de paramètres  $(k, 1)$  de densité  $f(x; k, 1) = \frac{1}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x}$ , où  $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ . À partir de cette observation, nous générons un couple d'observations de la loi de Poisson bivariée de paramètres  $(za_1, za_2, za_3)$  en utilisant la paramétrisation  $\lambda$ . Ce couple d'observations est alors un couple d'observations d'une  $BNB(k, a_1, a_2, a_3)$ . Nous répétons ce processus  $n$  fois pour obtenir un échantillon de taille  $n$  provenant d'une  $BNB(k, a_1, a_2, a_3)$ . Les lois  $BNB(1; 0,99; 0,99; 0,01)$  et

$BNB(2; 0,97; 0,97; 0,01)$  seront considérées comme alternatives.

### *La loi Hermite bivariée*

Nous la noterons  $HB(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  avec  $a_i > 0, i = 1, \dots, 5$ . Elle a pour fonction génératrice de probabilité  $\pi(u, v; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \exp\{a_1(u - 1) + a_2(u^2 - 1) + a_3(v - 1) + a_4(v^2 - 1) + a_5(uv - 1)\}$ . Pour la simuler, Kemp et Loukas (1978) nous proposent de générer 5 lois indépendantes de Poisson  $Y_i, i = 1, \dots, 5$ , de paramètres  $a_i$  respectivement, puis de considérer le couple  $(X, Y) = (Y_1 + 2Y_2 + Y_5, Y_3 + 2Y_4 + Y_5)$  qui suit une  $HB(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ . Ici, les lois alternatives considérées sont  $HB(1; 0,75; 1,25; 0,5; 1)$  et  $HB(2; 1,5; 2; 1,5; 1)$ .

Une fois ces alternatives simulées, nous estimons la puissance des différents tests en utilisant la même procédure décrite pour l'estimation des erreurs de type I, mais cette fois, les 1000 échantillons originaux proviendront de la distribution alternative. Enfin, les différents tests peuvent être comparés entre eux selon leur puissance.

Par ailleurs, pour les différentes alternatives, nous calculons également les ratios  $Var(X)/E(X)$  et  $Var(Y)/E(Y)$ . Dans le cas d'une loi de Poisson bivariée, ils valent 1. On s'attend donc à de plus grandes puissances lorsqu'ils s'éloignent de 1.

Pour les différents calculs, nous utilisons le logiciel R version 3.2.

## **4.1.2. Résultats**

### *4.1.2.1. Erreurs de type I*

Les résultats des simulations pour  $n = 50$  se trouvent dans le tableau 4.1. Il présente les niveaux trouvés pour chacun des tests selon les seuils et les valeurs de  $\lambda$ .

Pour le test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  que nous introduisons dans ce mémoire et qui est basé sur la fonction caractéristique, tout comme dans le cas de la loi de Poisson univariée, le tableau montre que les erreurs de type I obtenues sont pratiquement celles qui étaient attendues pour chacune des valeurs de  $\lambda$  choisie. En effet, à 5%, les erreurs estimées sont comprises entre 0,036 et 0,064, la zone de non-rejet d'un test de niveau 5% de l'hypothèse que le niveau est de 5%, et ce pour toutes les valeurs de  $\lambda$  choisies. Elles ne sont donc pas statistiquement

TABLEAU 4.1. Niveaux des tests obtenus pour  $n = 50$  par simulation en fonction des paramètres et des seuils.

Statistiques	Seuils	Valeurs du paramètre $\lambda$			
		(0,75; 0,75; 0,25)	(0,5; 0,5; 0,5)	(0,25; 0,25; 0,75)	(1,25; 0,85; 0,1)
$T_{n,G}(\hat{\lambda})$	0,05	0,044	0,058	0,049	0,046
	0,10	0,109	0,103	0,101	0,088
$R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$	0,05	0,045	0,057	0,047	0,052
	0,10	0,087	0,108	0,109	0,103
$R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$	0,05	0,048	0,057	0,051	0,057
	0,10	0,091	0,110	0,100	0,098
$S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$	0,05	0,047	0,055	0,051	0,056
	0,10	0,105	0,113	0,104	0,114
$S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$	0,05	0,049	0,056	0,049	0,058
	0,10	0,099	0,100	0,108	0,106
$T^*$	0,05	0,062	0,055	0,083	0,058
	0,10	0,107	0,108	0,120	0,101
$I_B^*$	0,05	0,062	0,073	0,101	0,055
	0,10	0,125	0,131	0,174	0,109

$R_{n,w(a,b)}(\hat{\lambda})$  et  $S_{n,w(a,b)}(\hat{\theta})$  sont les statistiques  $R_{n,w}(\hat{\lambda})$  et  $S_{n,w}(\hat{\theta})$  calculées lorsque les paramètres de la fonction de poids  $a_1$  et  $a_2$  valent respectivement  $a$  et  $b$ .

différentes de 0,05. Le même constat est fait à 10% où toutes les erreurs estimées se situent entre 0,0881 et 0,1119, la zone de non-rejet d'un test de niveau 5% de l'hypothèse que le niveau est de 10%.

Pour les statistiques  $R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$  et  $S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$  de Nova-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014), les niveaux estimés ne sont également pas statistiquement différents des seuils choisis. Par contre, pour les statistiques  $T^*$  du Quick test de Crockett et  $I_B^*$  du test de l'indice de dispersion introduits par Best et Rayner (1997), les conclusions diffèrent selon la valeur de  $\lambda$ . Pour la statistique  $T^*$ , les niveaux estimés sont statistiquement différents des seuils choisis pour  $\lambda = (0,25; 0,25; 0,75)$ , alors qu'ils ne le sont pas pour les autres valeurs de  $\lambda$ . Concernant, la statistique  $I_B^*$ , les niveaux estimés sont statistiquement différents des seuils pour  $\lambda = (0,5; 0,5; 0,5)$  et  $\lambda = (0,25; 0,25; 0,75)$ . Vous remarquerez que les moins bons résultats sont obtenus lorsque  $\lambda_3$  augmente. Rappelons également que  $cor(X,Y) = \frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}}$  et que pour les trois premiers vecteurs de paramètres,  $cor(X,Y) = \lambda_3$ . Ainsi les niveaux semblent moins bons lorsque la corrélation augmente.

Au vu de ces résultats, tout comme Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014), l'on peut conclure que les approximations asymptotiques des valeurs- $p$  des tests basés sur les statistiques  $T^*$  et  $I_B^*$  ne donnent pas de résultats satisfaisants pour toutes les combinaisons des valeurs des paramètres comparativement au bootstrap pour approcher les distributions nulles des statistiques de tests  $R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$ ,  $S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$  et  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  qui fait bien pour toutes les valeurs des paramètres que nous avons étudiées. Nous devons donc en tenir compte lorsque nous interpréterons les puissances des tests.

Dans le but de s'assurer que les statistiques étaient bien programmées, nous avons comparé le niveau des tests basés sur les statistiques autres que  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  et  $T^*$ , pour les trois premiers ensembles de paramètres, à ceux obtenus par Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014) via la statistique  $Z$ . Nous n'avons trouvé des différences importantes que pour la statistique  $I_B^*$  pour deux ensembles de paramètres, voir le tableau 4.2 qui contient la valeur de la statistique  $Z$  pour le test basé sur la statistique  $I_B^*$  (une valeur de  $Z$  supérieure à 1,96 est statistiquement significative au niveau 5%). Comme il y a clairement des différences importantes pour les deux derniers ensembles de paramètres, nous avons utilisé les valeurs de  $\lambda$  figurant dans Rayner et Best (1995) où cette statistique a été introduite et estimé les valeurs- $p$  afférentes pour la statistique  $I_B^*$  mais également pour la statistique  $T^*$  avec  $n \in \{50,100\}$ . La comparaison de nos résultats avec les leurs n'a révélé aucune différence statistique, nous rassurant ainsi que nos programmes sont corrects et que ce sont vraisemblablement les résultats de Novoa-Muñoz et Jiménez-Gamero (2014) qui sont en erreur lorsqu'il y a une différence.

TABLEAU 4.2. Statistique  $Z$  de comparaison des deux proportions selon le test, le paramètre  $\lambda$  et le seuil  $\alpha$ .

Statistiques	$\lambda = (0,75; 0,75; 0,25)$		$\lambda = (0,5; 0,5; 0,5)$		$\lambda = (0,25; 0,25; 0,75)$	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$
$I_B^*$	0,385	0,686	4,173	4,530	4,300	4,409

#### 4.1.2.2. Calcul de puissance

Les résultats figurent dans le tableau 4.3 qui présente pour chacune des alternatives, la puissance estimée pour chacun des tests, selon le seuil. On y trouve également les ratios  $Var(X)/E(X)$  et  $Var(Y)/E(Y)$ . Rappelons que pour une Poisson bivariée, ces ratios sont égaux à 1. Nous ne discuterons que les résultats

obtenus au niveau 5%, les résultats de l'autre niveau sont qualitativement identiques.

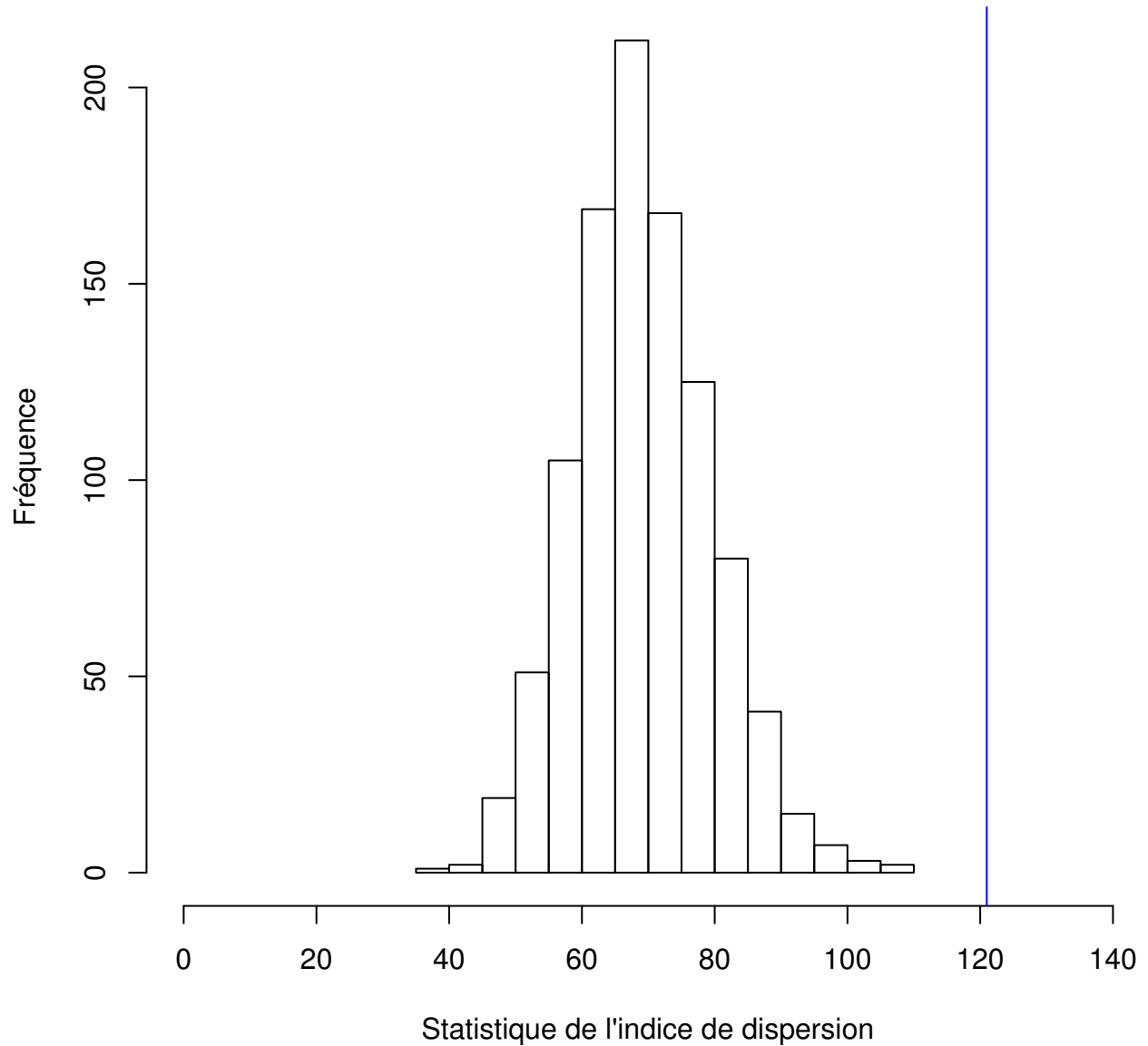
Le premier constat que l'on fait est que la puissance des tests varie en fonction des alternatives et de leurs paramètres.

Lorsque l'alternative est une loi binomiale bivariée, tous les tests ont une faible puissance. En effet, la puissance des tests ne dépasse pas 0,341, la puissance du test basé sur  $T^*$  lorsque l'alternative est la  $BB(30; 0,15; 0,15; 0,15)$ . La puissance du test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  est relativement plus élevée que celle des autres tests pour la  $BB(30; 0,05; 0,05; 0,1)$  et vaut 0,080 alors que pour la  $BB(20; 0,05; 0,05; 0,1)$ , c'est le test basé sur  $R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$  avec 0,069. Cette faiblesse de la puissance pourrait s'expliquer par le fait que comme dans le cas univarié où une binomiale  $(n,p)$  converge vers une Poisson  $(\lambda)$  ( $np \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ), une binomiale bivariée  $BB(m,p_1,p_2,p_3)$  converge vers une Poisson bivariée de paramètre  $(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3)$ , lorsque  $m \rightarrow \infty$  et  $mp_i \rightarrow \lambda_i$ . Par conséquent, les ratios  $Var(X)/E(X)$  et  $Var(Y)/E(Y)$  sont proches de 1 et la binomiale bivariée est difficile à différencier d'une Poisson bivariée.

Par ailleurs, nous remarquons que le test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  est le seul test pour lequel les puissances estimées sont plus grandes que le seuil, pour chacune des alternatives. Les autres tests ont au moins une alternative pour laquelle la puissance est plus basse que le seuil. Le test de l'indice de dispersion, basé sur la statistique  $I_B^*$ , est le seul test pour lequel toutes les puissances estimées sont toutes plus petites que le seuil. Il affiche même une puissance de 0 pour la  $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$  et la  $BB(30; 0,15; 0,15; 0,15)$ . Cette puissance de 0 a attiré notre attention. Pour mieux comprendre ce qui se passe, nous avons simulé 1000 échantillons de taille 50 de la  $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$  et calculé la statistique  $I_B^*$ , sur chacun de ces échantillons puis nous les avons comparé avec  $\chi_{97,0.95}^2 = 120,986$ , voir figure 4.1.

Cette figure contient l'histogramme des valeurs obtenues pour la statistique ainsi que la droite d'équation  $x = 120,986$ . Elle montre clairement que toutes les valeurs calculées de la statistique sont plus petites que le quantile  $\chi_{97,0.95}^2$ . Ainsi, si les données ne proviennent pas d'une loi de Poisson bivariée, la statistique de test pourrait soit prendre de grandes ou de petites valeurs. La puissance nulle obtenue provient du fait qu'on a considéré que le test de l'indice de dispersion

FIGURE 4.1. Histogramme des 1000 valeurs de la statistique  $I_B^*$  lorsqu'on simule la  $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$  et la borne de la région de rejet



est unilatéral, c'est-à-dire qu'on rejette l'hypothèse nulle pour des grandes valeurs de la statistique de test. Elle nous interpelle sur le fait que le test devrait être bilatéral de sorte qu'il puisse rejeter également pour des petites valeurs de la statistique de test. D'ailleurs, on remarquera que dans l'article original qui a introduit le test, voir Loukas et Kemp (1986b), rien dans la discussion du test



n'indique que si  $H_0$  est fausse, la statistique devrait prendre de grandes valeurs.

Contrairement aux différentes alternatives binomiales bivariées, les puissances sont élevées pour les alternatives binomiales négatives bivariées. Elles sont au moins égales à 0,531, puissance atteinte par le test basé sur  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  pour la  $BNB(2; 0,97; 0,97; 0,01)$ . Les différents tests détectent mieux ces alternatives. Remarquons aussi que les ratios  $Var(X)/E(X)$  et  $Var(Y)/E(Y)$  sont éloignés de 1 et que la puissance du test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  reste la plus faible. Les tests basés sur les statistiques  $T^*$  et  $I_B^*$  ont les plus grandes puissances. Cependant, nous rappelons que les niveaux de ces tests n'étaient pas toujours respectés et que comme le vrai niveau était supérieur au niveau prescrit, ils peuvent avoir une puissance supérieure à ce qu'elle devrait être.

En ce qui concerne la loi Hermite bivariée, les puissances des tests sont relativement élevées à l'exception de celle du test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$ . Les ratios  $Var(X)/E(X)$  et  $Var(Y)/E(Y)$  sont relativement éloignés de 1. Ce test présente la plus faible des puissances et l'écart entre sa puissance et celle des autres tests est relativement importante. En effet, sa puissance est inférieure à 0,060 obtenue pour la  $BNB(1; 0,99; 0,99; 0,01)$  alors que celle des autres est au moins égale à 0,508. Tout comme pour les alternatives binomiales bivariées négatives, les tests basés sur les statistiques  $T^*$  et  $I_B^*$  ont les plus grandes puissances. Mais nous ne devons pas oublier que leurs niveaux n'étaient pas respectés.

Au total, nous remarquons qu'il est difficile de dire qu'une statistique de test est plus puissante qu'une autre puisque le test ayant une plus forte puissance varie selon les alternatives. Cependant en excluant les tests basés sur les statistiques  $T^*$  et  $I_B^*$  dont les niveaux estimés étaient parfois plus élevés que ceux postulés, une tendance se dégage. Les tests basés sur les statistiques  $R_{n,w(a,b)}(\hat{\lambda})$  sont relativement plus puissants que ceux basés sur les statistiques  $S_{n,w(a,b)}(\hat{\theta})$  qui à leur tour devancent le test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$ . La différence entre  $R_{n,w(a,b)}(\hat{\lambda})$  et  $S_{n,w(a,b)}(\hat{\theta})$  est faible alors que la différence avec  $T_{n,G}(\hat{\lambda})$  est grande. Toutefois, pour le temps de calcul des statistiques de test, l'ordre précédent est inversé. En plus, nous faisons remarquer que notre choix de la fonction de poids  $g_3(t)$  dans le chapitre 1 reposait sur le fait que cette fonction offrait non seulement une expression plus simple pour le calcul de la statistique de test, mais également un temps moindre pour les estimations de niveau. En utilisant la contrepartie bivariée de la fonction de poids,  $g_2(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , qui donnait la plus grande puissance au chapitre 1, on aurait peut-être pu améliorer la puissance du test.

TABLEAU 4.3. Estimations de la puissance des tests selon les alternatives.

Alternatives	$\frac{Var(X)}{E(X)}$	$\frac{Var(Y)}{E(Y)}$	Seuils	Statistiques de test						
				$T_{n,G}(\hat{\lambda})$	$R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$	$R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$	$S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$	$S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$	$T^*$	$I_B^*$
$BB(20; 0,05; 0,05; 0,1)$	0,850	0,850	0,05	0,065	0,046	0,069	0,035	0,057	0,041	0,016
			0,10	0,123	0,141	0,156	0,119	0,138	0,087	0,025
$BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$	0,700	0,700	0,05	0,089	0,096	0,166	0,081	0,158	0,335	0,00
			0,10	0,155	0,369	0,427	0,328	0,418	0,527	0,00
$BB(30; 0,05; 0,05; 0,1)$	0,850	0,850	0,05	0,080	0,021	0,039	0,019	0,037	0,049	0,010
			0,10	0,126	0,083	0,115	0,077	0,109	0,084	0,023
$BB(30; 0,55; 0,15; 0,15; 0,15)$	0,700	0,700	0,05	0,101	0,259	0,293	0,264	0,299	0,341	0,000
			0,10	0,169	0,517	0,533	0,513	0,524	0,505	0,000
$BNB(1; 0,99; 0,99; 0,01)$	1,990	1,990	0,05	0,742	0,953	0,949	0,916	0,922	0,957	0,982
			0,10	0,833	0,971	0,967	0,948	0,954	0,971	0,992
$BNB(2; 0,97; 0,97; 0,01)$	1,970	1,970	0,05	0,531	0,962	0,960	0,924	0,938	0,978	0,992
			0,10	0,656	0,975	0,974	0,952	0,968	0,982	0,998
$HB(1; 0,75; 1,25; 0,5; 1)$	1,429	1,308	0,05	0,056	0,555	0,508	0,533	0,529	0,607	0,718
			0,10	0,144	0,635	0,593	0,632	0,631	0,678	0,818
$HB(2; 1,5; 2; 1,5; 1)$	1,500	1,500	0,05	0,060	0,701	0,709	0,692	0,708	0,796	0,879
			0,10	0,137	0,784	0,783	0,782	0,787	0,837	0,933

## 4.2. APPLICATION

### 4.2.1. Présentation des données

Au cours de la saison 1991-1992, le championnat italien de soccer comportait 18 équipes devant se rencontrer en matchs aller et retour, soit un total de  $2 \times \binom{18}{2} = 306$  matchs. Le fichier faisant l'objet de cette étude provient du package bivpois créé par Karlis et Ntzoufras (2003) et comprend les 4 variables que sont :

$g_1$  : nombre de buts marqués par l'équipe évoluant à domicile ;

$g_2$  : nombre de buts marqués par l'équipe évoluant à l'extérieur ;

$team_1$  : Nom de l'équipe évoluant à domicile ;

$team_2$  : Nom de l'équipe évoluant à l'extérieur ;

Pour les besoins de l'étude, posons :

$X$  : nombre de buts marqués par l'équipe évoluant à domicile ;

$Y$  : nombre de buts marqués par l'équipe évoluant à l'extérieur

La répartition des matchs selon le score est présenté dans le tableau 4.4

TABLEAU 4.4. Répartition des matchs selon les scores.

X	Y						Total
	0	1	2	3	4	8	
0	38	23	13	0	1	0	75
1	41	58	12	10	3	0	124
2	28	19	10	3	0	1	61
3	6	11	4	4	1	0	26
4	7	5	1	0	1	0	14
5	2	2	2	0	0	0	6
Total	122	118	42	17	6	1	306

Les données montrent que 111 matchs se sont soldés par un match nul :  $0 - 0(38)$  ;  $1 - 1(58)$  ;  $2 - 2(10)$  ;  $3 - 3(4)$  ;  $4 - 4(1)$ . Elles renseignent en plus que 128 matchs ont été gagnés par l'équipe évoluant à domicile contre 67 pour l'équipe visiteuse. Ainsi, on pourrait penser que c'est un avantage de jouer sur son terrain. Le tableau 4.5 présente des statistiques descriptives sur les variables  $X$  et  $Y$ . Il contient également les ratios *Variance/moyenne* et la corrélation entre  $X$  et  $Y$ . On peut y remarquer que la moyenne des buts marqués par l'équipe évoluant à domicile est de 1,340 avec un écart-type de 1,183 contre 0,931 avec un écart-type de 1,046 pour l'équipe des visiteurs. De plus, les ratios *Variance/moyennes* ne sont pas trop loin de 1 et le calcul de la corrélation entre  $X$  et  $Y$  donne 0,088.

TABLEAU 4.5. Statistiques descriptives du nombre de buts comptés par les équipes à domicile et à l'extérieur.

Statistiques	Buts à domicile	Buts à l'extérieur
Minimum	0	0
Maximum	5	8
Moyenne	1,340	0,931
Ecart-type	1,183	1,046
Variance/Moyenne	1,044	1,174
Corrélation	0,088	

## 4.2.2. Résultats

### 4.2.2.1. Estimation des paramètres

La méthode d'estimation présentée en 4.1.1.1 permet d'obtenir les paramètres suivants pour la loi de Poisson bivariée :  $\hat{\lambda}_1 = 1,243$ ,  $\hat{\lambda}_2 = 0,834$  et  $\hat{\lambda}_3 = 0,097$ .

### 4.2.2.2. Valeurs- $p$ sur le jeu de données

Après avoir estimé les paramètres, les valeurs- $p$  ont été calculées sur le jeu de données. Les résultats figurent dans le tableau 4.6.

TABLEAU 4.6. Estimations des valeurs- $p$  selon les tests.

Statistiques de test	Valeurs- $p$
$T^*$	0,085
$I_B^*$	0,030
$R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$	0,706
$R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$	0,650
$S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$	0,639
$S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$	0,803
$T_{n,G}(\hat{\lambda})$	0,009

Ce tableau montre que la valeur- $p$  estimée pour le test basé sur la statistique  $T_{n,G}(\hat{\theta})$  est de 0,009. Au seuil de 5%, nous rejetons donc l'hypothèse  $H_0$ , c'est-à-dire qu'il y a assez d'évidence contre le fait que la variable  $(X,Y)$  suit une loi de Poisson bivariée.

Le test basé sur la statistique  $I_B^*$  corrobore ce résultat avec une valeur- $p$  de 0,03. La valeur- $p$  du test basé sur la statistique  $T^*$ , bien que non significative (0,085) n'est pas très loin de 0,05 contrairement aux tests basés sur les statistiques  $R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$ , et  $S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$ . Nous avons donc des conclusions différentes selon les tests sur le même jeu de données. Pour avoir une

explication, nous avons porté une attention aux écarts entre la fonction génératrice des probabilités expérimentale et la fonction génératrice estimée d'une part, puis entre la fonction caractéristique expérimentale et la fonction caractéristique estimée d'autre part. En ce qui concerne les écarts entre la fonction génératrice expérimentale,  $\pi_n(t_1, t_2)$  et la fonction génératrice estimée  $\pi(t_1, t_2; \hat{\lambda})$ , nous avons représenté ces deux fonctions en fonction de  $t_1$  pour différentes valeurs fixées de  $t_2$ , où  $t_1$  et  $t_2$  sont des vecteurs de taille 10 dont les éléments appartiennent à l'intervalle  $[0,01; 0,99]$ . Pour tous ces graphiques, nous avons maintenu pour borne supérieure, le maximum des fonctions parmi toutes les valeurs calculées. Nous avons ensuite retenu les deux graphiques pour lesquels les écarts sont **grands**, voir figure 4.2. Les expressions de ces deux fonctions sont données ci-dessous.

$$\pi_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_1^{X_i} t_2^{Y_i},$$

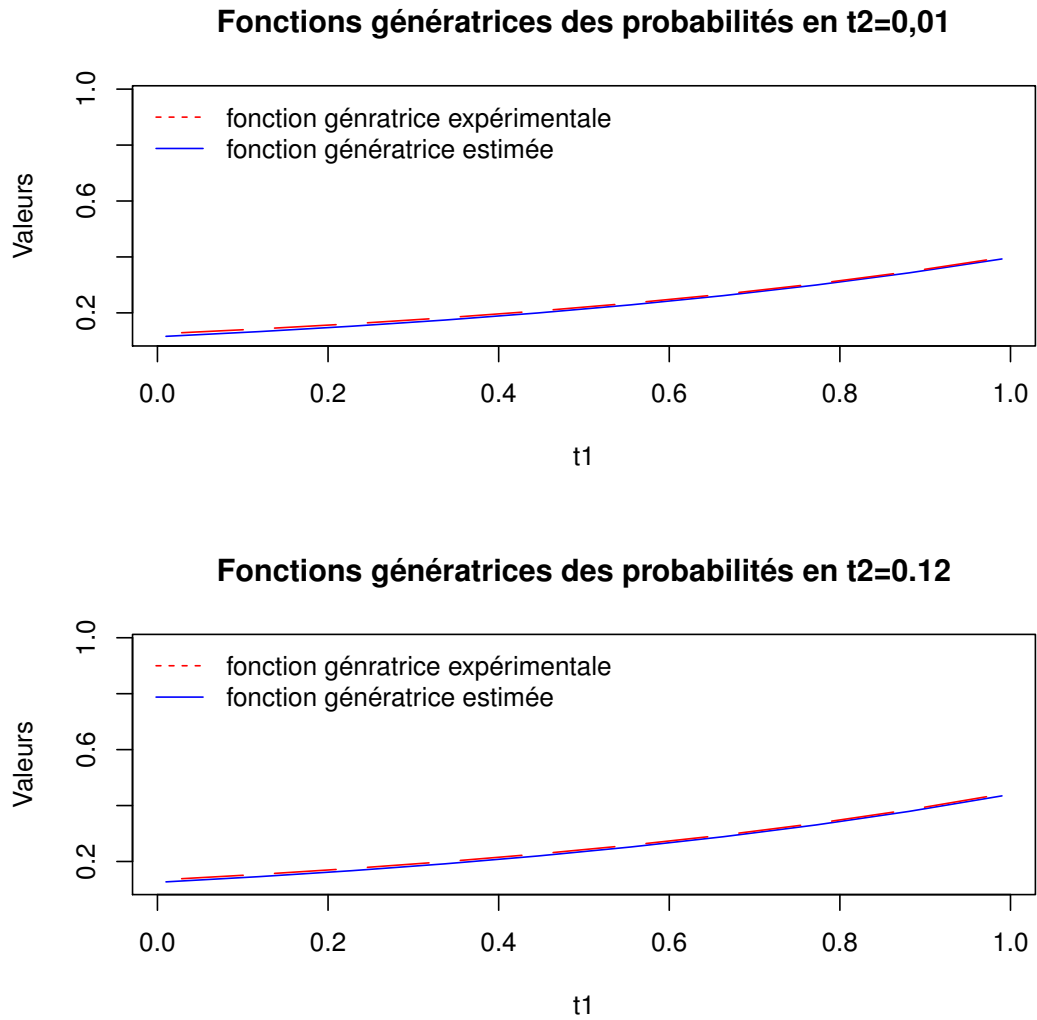
$$\pi(t_1, t_2; \hat{\lambda}) = \exp\{\hat{\lambda}_1 e^{it_1} + \hat{\lambda}_2 e^{it_2} + \hat{\lambda}_3 e^{i(t_1+t_2)} - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3)\}.$$

A la lumière de cette figure, on peut dire que les écarts entre les deux courbes ne sont pas importants, expliquant pourquoi les tests basés sur les statistiques  $R_{n,w(0,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $R_{n,w(1,0)}(\hat{\lambda})$ ,  $S_{n,w(0,0)}(\hat{\theta})$ , et  $S_{n,w(1,0)}(\hat{\theta})$  ne sont pas significatifs.

Pour ce qui est de la fonction caractéristique, nous avons pris 10 valeurs entre  $-1$  et  $1$  pour  $t_1$  et  $t_2$ . Ensuite, nous avons représenté les parties réelle et imaginaire de  $c_n(t_1, t_2)$ , la fonction caractéristique expérimentale puis de  $c_0(t_1, t_2; \hat{\lambda})$ , la fonction caractéristique estimée en fonction de  $t_1$ , pour chacune des valeurs de  $t_2$ . Nous avons retenu le maximum des parties réelles comme borne supérieure des graphiques de la partie réelle. La même chose a été faite pour la partie imaginaire. Par la suite, nous avons retenu le graphique pour lequel l'écart était **moindre** entre les courbes des parties imaginaires, puis entre les courbes des parties réelles de ces deux fonctions, voir figure 4.3. À travers cette figure, on illustre bien que les écarts sont importants entre la fonction caractéristique expérimentale et la fonction caractéristique estimée, aussi l'on comprend bien pourquoi le test  $T_{n,G}(\hat{\theta})$ , basé sur l'écart entre ces deux fonctions caractéristiques, est significatif. Les expressions des deux fonctions caractéristiques suivent :

$$c_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{\cos(t_1 X_j + t_2 Y_j) + i \sin(t_1 X_j + t_2 Y_j)\},$$

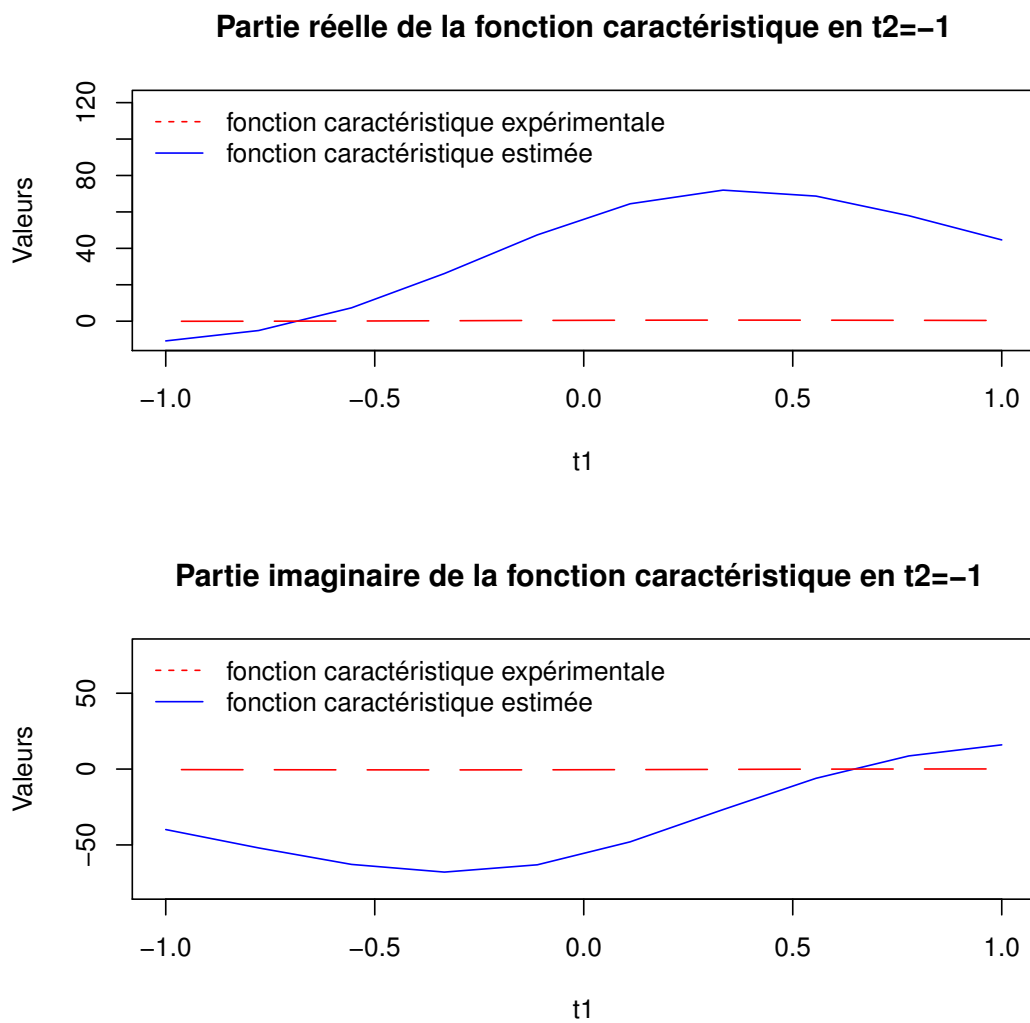
FIGURE 4.2. Fonctions génératrices des probabilités expérimentale et estimée en  $t_2 = 0,01$  et  $t_2 = 0,12$



$$c_0(t_1, t_2; \lambda) = \exp\left(-\sum_{j=1}^3 \lambda_j\right) \exp\{\lambda_1 \cos(t_1) + \lambda_2 \cos(t_2) + \lambda_3 \cos(t_1 + t_2)\} \{ \cos[\lambda_1 \sin(t_1) + \lambda_2 \sin(t_2) + \lambda_3 \sin(t_1 + t_2)] + i \sin[\lambda_1 \sin(t_1) + \lambda_2 \sin(t_2) + \lambda_3 \sin(t_1 + t_2)] \},$$

où  $i$  est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

FIGURE 4.3. Fonctions caractéristiques expérimentale et estimée en  $t_2 = -1$







# CONCLUSION

---

En vue de proposer un test d'adéquation dans le cas de la loi de Poisson bivariée, nous nous sommes référés à l'article de Jiménez-Gamero *et al.* (2009) qui proposent un test au moyen de la fonction caractéristique mesurant les écarts quadratiques entre la fonction caractéristique (paramétrique) estimée et la fonction caractéristique expérimentale. Ce test fait aussi intervenir une fonction de poids qui, bien choisie, facilite le calcul de la statistique de test et affecte la puissance et la convergence du test. La distribution de sa statistique de test sous l'hypothèse nulle étant très compliquée à obtenir, on recourt, sous des conditions précises, au bootstrap paramétrique pour faire l'approximation de sa valeur- $p$  ou sa valeur critique. Pour sa mise en œuvre, notre démarche nous a permis d'abord de voir que le test a un bon comportement dans le cas de la loi de Poisson univariée puis de retenir, pour la suite du mémoire, la troisième fonction de poids proposée par les auteurs puisqu'elle permettait un calcul plus facile de la statistique de test et permettait de sauver du temps.

Ensuite, l'étude de la loi de Poisson bivariée a permis d'avoir une idée de la manière dont les paramètres pourraient être estimés et la méthode du maximum de vraisemblance a été retenue. L'algorithme EM pour cette méthode a été utilisé pour l'estimation des paramètres.

Par la suite, nous avons élaboré ce test dans le cas de la loi de Poisson bivarié en prenant pour fonction de poids la contrepartie bivariée de la fonction  $g_3$  définie Jiménez-Gamero *et al.* (2009). Le choix de cette fonction se justifie par le fait que la statistique de test devient trop compliquée avec les contreparties bivariées des deux autres fonctions de poids. Ensuite, nous avons présenté quatre autres tests d'adéquation qui se basent sur des propriétés propres à la loi de Poisson bivariée en vue de les comparer au test proposé, du point de vue de la puissance. Deux de ces autres tests sont l'indice de dispersion et le Quick test de Crockett qui se basent sur l'écart entre la moyenne et la variance. Les deux

autres sont des familles de tests et sont basées sur la fonction génératrice des probabilités. L'une utilise les écarts quadratiques entre la fonction génératrice des probabilités estimée et la fonction génératrice expérimentale. L'autre utilise un système d'équations différentielles dont la fonction génératrice des probabilités de la loi de Poisson bivariée est la seule solution et remplace celle-ci par la fonction génératrice expérimentale dans le système d'équation afin de mesurer l'écart.

Pour finir, l'étude de son comportement par simulation a permis de constater que les erreurs de type I estimées étaient statistiquement respectées pour les différentes valeurs du paramètre  $\lambda$  choisies. Ceci était également vrai pour les deux familles de tests qui utilisent aussi l'approximation par bootstrap alors que l'approximation asymptotique n'était pas toujours bonne pour les tests de l'indice de dispersion et le Quick test de Crockett. Il serait donc intéressant de voir si le bootstrap ferait mieux pour ces deux tests. En plus, le test permettait de détecter les alternatives même si cela n'est pas aussi bien que les autres. La comparaison de sa puissance avec celle des autres tests nous a conduit à déceler que le test de l'indice de dispersion devrait être bilatéral. En effet, en générant 1000 échantillons échantillons de taille 50 de la  $BB(20; 0,15; 0,15; 0,15)$  nous avons calculé la statistique du test de l'indice de dispersion sur chacun de ces échantillons et avons obtenu que toutes ces statistiques étaient plus petites que  $\chi_{97,0.95}^2 = 120,986$ . Ainsi, nous montrions que la statistique de test peut prendre également des petites valeurs si les données ne proviennent pas d'une loi de Poisson bivariée. D'ailleurs, nous faisons remarquer que si on regarde dans Loukas et Kemp (1986b), l'article original qui a introduit le test, on constate que rien dans la discussion du test n'indique que si  $H_0$  est fausse, la statistique devrait prendre de grandes valeurs.

Le test a été appliqué sur des données réelles provenant du championnat italien de soccer en 1991-92. Comme résultat, une valeur- $p$  de 0,009 a été trouvée indiquant qu'il y avait assez d'évidence pour rejeter l'hypothèse que les données proviennent d'une distribution de Poisson bivariée. Les deux familles de tests donnaient des conclusions différentes. Nous avons pu expliquer cette différence par le fait que les écarts entre la fonction génératrice des probabilités expérimentale et la fonction génératrice estimée étaient très proches alors que c'était le contraire entre la fonction caractéristique expérimentale et la fonction caractéristique estimée.

Au terme de ce mémoire, nous retenons que nous avons réussi à mettre en œuvre ce test. Toutefois, il a semblé moins puissant que les tests avec lesquels

on le comparait. Ce résultat peut être relatif aux alternatives choisies. En effet, nous aurions pu avoir un résultat différent si nous avions considéré davantage de familles d'alternatives au lieu des trois familles utilisées. Malheureusement, le temps ne nous le permettait plus. En outre, l'utilisation de la contrepartie bivariée des deux autres fonctions de poids du chapitre 1, surtout la fonction  $g_2(t)$  aurait pu améliorer la puissance du test que nous proposons.



## Bibliographie

---

- A. AZZALINI et A. DALLA VALLE : The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83(4):715–726, 1996.
- L. BARINGHAUS et N. HENZE : A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function. *Metrika*, 35(6):339–348, 1988.
- L. BARINGHAUS et N. HENZE : A goodness of fit test for the Poisson distribution based on the empirical generating function. *Statistics & Probability Letters*, 13(4):269–274, 1992.
- D. J. BEST et J. C. W. RAYNER : Crockett’s test of fit for the bivariate Poisson. *Biometrical Journal*, 39(4):423–430, 1997.
- Jeff A. BILMES : A gentle tutorial of the em algorithm and its application to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models. *International Computer Science Institute*, 4(510):126, 1998.
- J. T. CAMPBELL : The Poisson correlation function. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 4(01):18–26, 1934.
- N. G. CROCKETT : A quick test of fit of a bivariate distribution. In D. MCNEIL, éditeur : *Interactive statistics*, pages 185–191, Amsterdam, North-Holland, 1979.
- A. P. DEMPSTER, N.M. LAIRD et D.B. RUBIN : Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, 39(1), 1977. URL <http://www.jstor.org/stable/2984875>.
- T. W. EPPS : Tests for location-scale families based on the empirical characteristic function. *Metrika*, 62(1):99–114, 2005.
- T. W. EPPS et L. B. PULLEY : A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika*, 70(3):723–726, 1983.
- W. FELLER : *An Introduction To Probability Theory and Its Applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971.
- G. GONZÁLEZ-FARÍAS, A. DOMÍNGUEZ-MOLINA et A. K. GUPTA : Additive properties of skew normal random vectors. *Journal of Statistical Planning and*

- Inference*, 126(2):521–534, 2004.
- N. HENZE et B. ZIRKLER : A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 19(10):3595–3617, 1990.
- M. D. JIMÉNEZ-GAMERO, V. ALBA-FERNÁNDEZ, J. MUÑOZ-GARCÍA et Y. CHALCO-CANO : Goodness-of-fit tests based on empirical characteristic functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(12):3957–3971, 2009.
- G. JOGESH BABU et C.R. RAO : Goodness-of-fit tests when parameters are estimated. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*, 66:63–74, 2004.
- Dimitris KARLIS et Ioannis NTZOUFRAS : Analysis of sports data by using bivariate Poisson models. *Journal of the Royal Statistical Society : Series D (The Statistician)*, 52, 2003. URL <http://libgen.org/scimag/index.php?s=10.1111/1467-9884.00366>.
- C. D. KEMP et S. LOUKAS : The computer generation of bivariate discrete random variables. *Journal of the Royal Statistical Society Series A (General)*, 141, 1978. URL <http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.2307/2344486>.
- S. KOCHERLAKOTA et K. KOCHERLAKOTA : *Bivariate Discrete Distributions*, volume 132 de *Statistics : Textbooks and Monographs*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- S. LOUKAS et C. D. KEMP : The computer generation of bivariate binomial and negative binomial random variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 15, 1986a. URL <http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1080/03610918608812489>.
- S. LOUKAS et C. D. KEMP : The index of dispersion test for the bivariate Poisson distribution. *Biometrics*, 42(4):941–948, 1986b.
- Jerrold. E. MARSDEN et Anthony TROMBA : *Vector Calculus*. Freeman and Company, 1976.
- F. NOVOA-MUÑOZ et M. D. JIMÉNEZ-GAMERO : Testing for the bivariate Poisson distribution. *Metrika*, 77:771–793, 2014.
- J. C. W. RAYNER et D. J. BEST : Smooth tests for the bivariate Poisson distribution. *The Australian Journal of Statistics*, 37(2):233–245, 1995.
- Joseph P. ROMANO : A bootstrap revival of some nonparametric distance tests. *Journal of the American Statistical Association*, 83(403):698–708, 1988.
- Winfried STUTE, Wenceslao Gonzáles MANTEIGA et Manuel Presedo QUINDIMIL : Bootstrap based goodness-of-fit-tests. *Metrika*, 40(1):243–256, 1993.
- H. TEICHER : On the multivariate Poisson distribution. *Skand. Aktuarietidskr.*, 37:1–9, 1954.

H. WHITE : Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica*, 50, 01 1982. URL <http://www.jstor.org/stable/1912526>.





# ANNEXE

---

## VÉRIFICATION DES CONDITIONS

Posons  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  et  $t = (t_1, t_2)$ . Soit  $f$  la fonction de masse de la loi de Poisson bivariée de paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  définie par

$$f(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{i=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-i} \lambda_2^{y-i} \lambda_3^i}{(x-i)!(y-i)!i!}.$$

Posons  $f_{(i)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} f(x, y; \lambda)$  et  $f_{(i, j)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} f(x, y; \lambda)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , les dérivées partielles de premier et de second ordre de  $f$  respectivement, par rapport aux paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Elles s'expriment comme suit :

$$f_{(1)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{x-k}{\lambda_1} \right) - f(x, y; \lambda)$$

$$f_{(2)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{y-k}{\lambda_2} \right) - f(x, y; \lambda)$$

$$f_{(3)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{k}{\lambda_3} \right) - f(x, y; \lambda)$$

$$f_{(1,2)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{y-k}{\lambda_2} - 1 \right)$$

$$f_{(1,3)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{k}{\lambda_3} - 1 \right)$$

$$f_{(2,3)}(x, y; \lambda) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x, y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left( \frac{y-k}{\lambda_2} - 1 \right) \left( \frac{k}{\lambda_3} - 1 \right)$$

$$f_{(1,1)}(x,y;\lambda) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x,y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left[ \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right)^2 - \frac{x-k}{\lambda_1^2} \right]$$

$$f_{(2,2)}(x,y;\lambda) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x,y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left[ \left( \frac{y-k}{\lambda_2} - 1 \right)^2 - \frac{y-k}{\lambda_2^2} \right]$$

$$f_{(3,3)}(x,y;\lambda) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min(x,y)} \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!} \left[ \left( \frac{k}{\lambda_3} - 1 \right)^2 - \frac{k^2}{\lambda_3} \right]$$

### Vérification de la condition B-2

Selon la définition de la condition, il nous faut trouver des fonctions  $\rho_r(t)$  et  $\iota_r(t)$  bornant respectivement  $|R_{(r)}(t; \gamma)|$  et  $|I_{(r)}(t; \gamma)|$  telles que  $\int \rho_r^2(t) dG(t) < \infty$  et  $\int \iota_r^2(t) dG(t) < \infty$ ,  $1 \leq r \leq 3$  pour  $\gamma$  appartenant à un voisinage  $K(\lambda)$  de  $\lambda$ .

Or, l'on a que

$$R(t; \lambda) = \int \cos(t_1x + t_2y) dF(x,y; \lambda).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} R_{(r)}(t; \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \int \cos(t_1x + t_2y) dF(x,y; \lambda) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \cos(t_1x + t_2y) f(x,y; \lambda) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \cos(t_1x + t_2y) f_{(r)}(x,y; \lambda) \end{aligned}$$

et

$$|R_{(r)}(t; \lambda)| \leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} |f_{(r)}(x,y; \lambda)|.$$

De la même façon on a que

$$\begin{aligned} I(t; \lambda) &= \int \sin(t_1x + t_2y) dF(x,y; \lambda), \\ I_{(r)}(t; \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \int \sin(t_1x + t_2y) dF(x,y; \lambda), \end{aligned}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sin(t_1 x + t_2 y) f_{(r)}(x, y; \lambda),$$

et

$$| I_{(r)}(t; \lambda) | \leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} | f_{(r)}(x, y; \lambda) |.$$

Considérant  $f_{(1)}(x, y; \lambda)$ , l'on montre que

$$| f_{(1)}(x, y; \lambda) | \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} | R_{(1)}(t; \lambda) | &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left( f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_1} \right) \\ &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} f(x, y; \lambda) + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_1} \\ &\leq 1 + \frac{E(X)}{\lambda_1} = 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \rho_1(t). \end{aligned}$$

Comme en plus

$$\int \left( 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^2 dG(t) = \left( 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^2 < \infty$$

dans un voisinage  $K(\lambda)$  de  $\lambda$ , alors le résultat découle.

De la même façon, on montre que

$$| f_{(2)}(x, y; \lambda) | \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{y}{\lambda_2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} | R_{(2)}(t; \lambda) | &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left( f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{y}{\lambda_2} \right) \\ &\leq 1 + \frac{E(Y)}{\lambda_2} = 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \rho_2(t). \end{aligned}$$

Et l'on a

$$\int \left( 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 dG(t) = \left( 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 < \infty$$

dans un voisinage  $K(\lambda)$  de  $\lambda$ .

En ce qui concerne  $|R_{(3)}(t; \lambda)|$ , l'on montre que

$$|f_{(3)}(x, y; \lambda)| \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_3}.$$

Ainsi, la borne obtenue pour  $|R_{(1)}(t; \lambda)|$  tient également dans ce cas.

Les mêmes arguments sont utilisés pour borner  $|I_{(r)}(t; \theta)|$  et nous obtenons les mêmes bornes. D'où la condition B-2 est remplie.  $\square$

### Vérification de la condition C

Pour  $\epsilon > 0$ , nous allons trouver une sphère bornée  $C$  de  $\mathbb{R}^3$ , centrée en  $\lambda$  telle que pour  $\gamma \in C$ ,  $R_{(r)}(t; \gamma)$  et  $I_{(r)}(t; \gamma)$  existent pour  $r = 1, 2, 3$  et  $\|\nabla R(t; \gamma) - \nabla R(t; \lambda)\| \leq \rho(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^3$  avec  $\int \rho^2(t) dG(t) < \epsilon$  et  $\|\nabla I(t; \gamma) - \nabla I(t; \lambda)\| \leq \iota(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^3$ , avec  $\int \iota^2(t) dG(t) < \epsilon$ .

On a que  $\|\nabla R(t; \gamma) - \nabla R(t; \lambda)\|^2 = \sum_{i=1}^3 (R_{(i)}(t; \gamma) - R_{(i)}(t; \lambda))^2$  et,

$$R_{(i)}(t; \gamma) - R_{(i)}(t; \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \cos(t_1 x + t_2 y) [f_{(i)}(x, y; \lambda) - f_{(i)}(x, y; \gamma)],$$

alors

$$|R_{(i)}(t; \gamma) - R_{(i)}(t; \lambda)| \leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} |f_{(i)}(x, y; \lambda) - f_{(i)}(x, y; \gamma)|.$$

Posons  $g_i(x, y; \lambda) = f_{(i)}(x, y; \lambda)$ . En utilisant le développement limité à l'ordre 1 de  $g_i$  en  $\lambda$ , l'inégalité précédente devient

$$|R_{(i)}(t; \gamma) - R_{(i)}(t; \lambda)| \leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left( \left| \sum_{j=1}^3 g_{i(j)}(x, y; \lambda) + B_i(\lambda - \gamma, \lambda) \right| \right),$$

où  $g_{i(j)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} g_i(x, y; \lambda)$ ,  $g_{i(j,k)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} g_i(x, y; \lambda)$ ,  $k, j = 1, 2, 3$ ,

et  $B_i(\lambda - \gamma, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{i(j,k)}(x, y; c_{kj})(\lambda_j - \gamma_j)(\lambda_k - \gamma_k)$ , le reste du développement limité d'ordre 1 de  $g_i$  et  $c_{kj}$  est un vecteur de dimension 3 se situant sur la ligne joignant  $\lambda$  et  $\gamma$ , voir Marsden et Tromba (1976).

Pour  $i = 1$ , on a

$$\begin{aligned} |R_{(1)}(t, \gamma) - R_{(1)}(t, \lambda)| &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left( \left| \sum_{j=1}^3 g_{1(j)}(x, y; \lambda) + B_1(\lambda - \gamma, \lambda) \right| \right) \\ &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} (|g_{1(1)}(x, y; \lambda)| + |g_{1(2)}(x, y; \lambda)| + |g_{1(3)}(x, y; \lambda)|) + \\ &\quad \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} |B_1(\lambda - \gamma, \lambda)| \end{aligned}$$

avec

$$B_1(\lambda - \gamma, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{1(j,k)}(x, y; c_{kj})(\lambda_j - \gamma_j)(\lambda_k - \gamma_k).$$

Calculons et majorons chacun des termes  $g_{1(j)}(x, y; \lambda)$  et  $g_{1(j,k)}(x, y; \lambda)$ . Pour ce faire, posons  $a = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}$ ,  $m = \min(x, y)$  et  $A(k) = \frac{\lambda_1^{x-k} \lambda_2^{y-k} \lambda_3^k}{(x-k)!(y-k)!k!}$  et majorons dans un premier temps  $|f_{(1,1)}(x, y; \lambda)|$ ,  $|f_{(1,2)}(x, y; \lambda)|$ ,  $|f_{(1,3)}(x, y; \lambda)|$ ,  $|f_{(2,2)}(x, y; \lambda)|$  et  $|f_{(3,3)}(x, y; \lambda)|$ . Alors,

$$\begin{aligned} |f_{(1,1)}(x, y; \lambda)| &\leq \left( \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ |f_{(1,2)}(x, y; \lambda)| &\leq \left( \frac{x}{\lambda_1} \frac{y}{\lambda_2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ |f_{(1,3)}(x, y; \lambda)| &\leq \left( \frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ |f_{(2,2)}(x, y; \lambda)| &\leq \left( \frac{y^2 + y}{\lambda_2^2} + \frac{2y}{\lambda_2} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ |f_{(3,3)}(x, y; \lambda)| &\leq \left( \frac{m^2}{\lambda_3^2} + \frac{m^2 + 2m}{\lambda_3} + 1 \right) f(x, y; \lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g_{1(1)}(x, y; \lambda) &= f_{(1,1)}(x, y; \lambda) \text{ et } |g_{1(1)}(x, y; \lambda)| \leq \left( \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ g_{1(2)}(x, y; \lambda) &= f_{(1,2)}(x, y; \lambda) \text{ et } |g_{1(2)}(x, y; \lambda)| \leq \left( \frac{x}{\lambda_1} \frac{y}{\lambda_2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} + 1 \right) f(x, y; \lambda), \\ g_{1(3)}(x, y; \lambda) &= f_{(1,3)}(x, y; \lambda) \text{ et } |g_{1(3)}(x, y; \lambda)| \leq \left( \frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1 \right) f(x, y; \lambda). \end{aligned}$$

Pour majorer  $B_1(\lambda - \gamma, \lambda)$ , commençons par  $g_{1(1,2)}(x, y; c_{12})$ .

$$g_{1(1,2)}(x, y; c_{12}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} f_{(1,1)}(x, y; \lambda)$$

$$= -f_{(1,1)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right)^2 - \frac{x-k}{\lambda_1^2} \right] \frac{y-k}{\lambda_2}$$

et l'on montre que :

$$|g_{1(1,2)}(x,y;c_{12})| \leq \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) |f_{(1,1)}| \leq \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) f(x,y;\lambda),$$

$$\text{puisque } |f_{(1,1)}| \leq \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) f(x,y;\lambda).$$

Pour  $g_{1(1,3)}(x,y;c_{13})$ , on a

$$\begin{aligned} g_{1(1,3)}(x,y;c_{13}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_3} f_{(1,1)}(x,y;\lambda) \\ &= -f_{(1,1)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right)^2 - \frac{x-k}{\lambda_1^2} \right] \frac{k}{\lambda_3} \end{aligned}$$

et par la suite,

$$|g_{1(1,3)}(x,y;c_{13})| \leq \left(1 + \frac{m}{\lambda_3}\right) |f_{(1,1)}| \leq \left(1 + \frac{m}{\lambda_3}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) f(x,y;\lambda).$$

Concernant  $g_{1(2,3)}(x,y;c_{23})$ ,

$$\begin{aligned} g_{1(2,3)}(x,y;c_{23}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_2} f_{(1,3)}(x,y;\lambda) \\ &= -f_{(1,3)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{k}{\lambda_3} - 1 \right) \frac{y-k}{\lambda_2} \end{aligned}$$

et donc,

$$|g_{1(2,3)}(x,y;c_{23})| \leq \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) |f_{(1,3)}| \leq \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) \left(\frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1\right) f(x,y;\lambda).$$

Pour  $g_{1(1,1)}(x,y;c_{11})$ ,

$$\begin{aligned} g_{1(1,1)}(x,y;c_{11}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f_{(1,1)}(x,y;\lambda) \\ &= -f_{(1,1)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right)^2 - \frac{x-k}{\lambda_1^2} \right] \frac{x-k}{\lambda_1} - \\ &\quad \frac{2}{\lambda_1} a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left( \frac{x-k}{\lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{x-k}{\lambda_1} \right) - \frac{x-k}{\lambda_1^2} \right] \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$|g_{1(1,1)}(x,y;c_{11})| \leq \left(1 + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1}\right) |f_{(1,1)}| + \frac{2x}{\lambda_1} f(x,y;\lambda)$$

$$\leq \left[ \left(1 + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) + \frac{2x}{\lambda_1} \right] f(x,y;\lambda).$$

En ce qui concerne  $g_{1(2,2)}(x,y;c_{22})$ ,

$$\begin{aligned} g_{1(2,2)}(x,y;c_{22}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f_{(2,2)}(x,y;\lambda) \\ &= -f_{(2,2)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left(\frac{y-k}{\lambda_2} - 1\right)^2 - \frac{y-k}{\lambda_2^2} \right] \frac{x-k}{\lambda_1} \end{aligned}$$

et par la suite,

$$|g_{1(2,2)}(x,y;c_{22})| \leq \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) |f_{(2,2)}| \leq \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) \left(\frac{y^2+y}{\lambda_2^2} + \frac{2y}{\lambda_2} + 1\right) f(x,y;\lambda).$$

Pour  $g_{1(3,3)}(x,y;c_{33})$ ,

$$\begin{aligned} g_{1(3,3)}(x,y;c_{33}) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f_{(3,3)}(x,y;\lambda) \\ &= -f_{(3,3)}(x,y;\lambda) + a \sum_{k=0}^m A(k) \left[ \left(\frac{k}{\lambda_3} - 1\right)^2 - \frac{k^2}{\lambda_3} \right] \frac{x-k}{\lambda_1} \end{aligned}$$

et ainsi,

$$|g_{1(3,3)}(x,y;c_{33})| \leq \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) |f_{(3,3)}| \leq \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) \left(\frac{m^2}{\lambda_3^2} + \frac{m^2+2m}{\lambda_3} + 1\right) f(x,y;\lambda).$$

Par conséquent, l'on a que :

$$\begin{aligned} |R_{(1)}(t,\gamma) - R_{(1)}(t,\lambda)| &\leq \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) |\lambda_1 - \gamma_1| + \right. \\ &\quad \left(\frac{x}{\lambda_1} \frac{y}{\lambda_2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} + 1\right) |\lambda_2 - \gamma_2| + \\ &\quad \left(\frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1\right) |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &\quad \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_2 - \gamma_2| + \\ &\quad \left(1 + \frac{m}{\lambda_3}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &\quad \left(1 + \frac{y}{\lambda_2}\right) \left(\frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1\right) |\lambda_2 - \gamma_2| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &\quad \left[ \left(1 + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1}\right) \left(\frac{x^2+x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1\right) + \frac{2x}{\lambda_1} \right] |\lambda_1 - \gamma_1|^2 + \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) \left(\frac{y^2 + y}{\lambda_2^2} + \frac{2y}{\lambda_2} + 1\right) |\lambda_2 - \gamma_2|^2 + \\ & \left(1 + \frac{x}{\lambda_1}\right) \left(\frac{m^2}{\lambda_3^2} + \frac{m^2 + 2m}{\lambda_3} + 1\right) |\lambda_3 - \gamma_3|^2 \end{aligned} \right\} f(x, y; \lambda)$$

En remplaçant  $m$  par  $x$  et en calculant le terme de droite de l'inégalité ci-dessus, l'on obtient des espérances et l'inégalité devient :

$$\begin{aligned} |R_{(1)}(t, \gamma) - R_{(1)}(t, \lambda)| &\leq E \left[ \left( \frac{X^2}{\lambda_1^2} + \frac{X}{\lambda_1} + \frac{2X}{\lambda_1} + 1 \right) \right] |\lambda_1 - \gamma_1| + \\ &E \left[ \left( \frac{X}{\lambda_1} \frac{Y}{\lambda_2} + \frac{X}{\lambda_1} + \frac{Y}{\lambda_2} + 1 \right) \right] |\lambda_2 - \gamma_2| + \\ &E \left[ \left( \frac{X^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{X}{\lambda_1} + \frac{X}{\lambda_3} + 1 \right) \right] |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &E \left[ \left( 1 + \frac{Y}{\lambda_2} \right) \left( \frac{X^2 + X}{\lambda_1^2} + \frac{2X}{\lambda_1} + 1 \right) \right] |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_2 - \gamma_2| + \\ &E \left[ \left( 1 + \frac{X}{\lambda_3} \right) \left( \frac{X^2 + X}{\lambda_1^2} + \frac{2X}{\lambda_1} + 1 \right) \right] |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &E \left[ \left( 1 + \frac{Y}{\lambda_2} \right) \left( \frac{X^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{X}{\lambda_1} + \frac{X}{\lambda_3} + 1 \right) \right] |\lambda_2 - \gamma_2| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &E \left[ \left[ \left( 1 + \frac{X}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} \right) \left( \frac{X^2 + X}{\lambda_1^2} + \frac{2X}{\lambda_1} + 1 \right) + \frac{2X}{\lambda_1} \right] \right] |\lambda_1 - \gamma_1|^2 + \\ &E \left[ \left( 1 + \frac{X}{\lambda_1} \right) \left( \frac{X^2 + Y}{\lambda_2^2} + \frac{2Y}{\lambda_2} + 1 \right) \right] |\lambda_2 - \gamma_2|^2 + \\ &E \left[ \left( 1 + \frac{X}{\lambda_1} \right) \left( \frac{X^2}{\lambda_3^2} + \frac{X^2 + 2X}{\lambda_3} + 1 \right) \right] |\lambda_3 - \gamma_3|^2 \end{aligned}$$

Comme  $X$  et  $Y$  ont des distributions de Poisson provenant de trois autres distributions indépendantes de Poisson, alors  $\forall k, l \in \mathbb{N}$ ,  $E(X^k Y^l)$  est finie. Par conséquent nous pouvons majorer chacune des neuf espérances de l'inégalité précédente. Soit  $K_1$  le maximum de ces espérances, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} |R_{(1)}(t, \gamma) - R_{(1)}(t, \lambda)| &\leq K_1 |\lambda_1 - \gamma_1| + K_1 |\lambda_2 - \gamma_2| + K_1 |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &K_1 |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_2 - \gamma_2| + K_1 |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\ &K_1 |\lambda_2 - \gamma_2| |\lambda_3 - \gamma_3| + K_1 |\lambda_1 - \gamma_1|^2 + \\ &K_1 |\lambda_2 - \gamma_2|^2 + K_1 |\lambda_3 - \gamma_3|^2. \end{aligned}$$



En prenant  $M = \sup (|\lambda_i - \gamma_i|)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , l'inégalité devient

$$\left| R_{(1)}(t, \gamma) - R_{(1)}(t, \lambda) \right| \leq 3MK_1 (1 + 2M)$$

Pour  $i = 2, 3$ , on prendra pour  $K_i$  le maximum des neuf espérances et les mêmes étapes du raisonnement précédent nous permettent d'arriver aux résultats :

$$\left| R_{(2)}(t, \gamma) - R_{(2)}(t, \lambda) \right| \leq 3MK_2 (1 + 2M),$$

$$\left| R_{(3)}(t, \gamma) - R_{(3)}(t, \lambda) \right| \leq 3MK_3 (1 + 2M).$$

Par la suite, nous obtenons  $\|\nabla R(t; \gamma) - \nabla R(t; \lambda)\| \leq 3M (1 + 2M) (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{1/2}$ . En posant  $\rho(t) = 3M (1 + 2M) (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{1/2}$  et en prenant  $\gamma$  de sorte que  $9M^2 (1 + 2M)^2 (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) < \epsilon$ , le résultat découle.

Toutes les étapes du raisonnement précédent sont effectuées pour  $\|\nabla I(t; \gamma) - \nabla I(t; \lambda)\|$  et les mêmes bornes sont utilisées, montrant que la condition  $C$  est remplie.  $\square$

### Vérification de la condition F

Au niveau de la conditions B-2, nous avons montré que :

$$\left| f_{(1)}(x, y; \lambda) \right| \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_1},$$

$$\left| f_{(2)}(x, y; \lambda) \right| \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{y}{\lambda_2} \quad \text{et,}$$

$$\left| f_{(3)}(x, y; \lambda) \right| \leq f(x, y; \lambda) + f(x, y; \lambda) \frac{x}{\lambda_3}.$$

Ainsi, considérant  $f_{(1)}(x, y; \lambda)$ , nous montrons que  $\left| \frac{f_{(1)}(x, y; \lambda)}{f(x, y; \lambda)} \right| < \left( 1 + \frac{x}{\lambda_1} \right)$  et pouvons écrire par conséquent que

$$E \left[ \left\{ \frac{f_{(1)}(x, y; \lambda)}{f(x, y; \lambda)} \right\}^2 \right] \leq 1 + \frac{2E(X)}{\lambda_1} + \frac{E(X^2)}{\lambda_1^2} < \infty$$

puisque  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_3$ .

Par ailleurs, prenant  $\gamma$  dans un voisinage de  $\lambda$ , on a, d'après la preuve de la condition C que :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f_{(1)}(x,y;\lambda) - f_{(1)}(x,y;\gamma)}{f(x,y;\lambda)} \right| &\leq \left( \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) |\lambda_1 - \gamma_1| + \\
&\quad \left( \frac{x}{\lambda_1} \frac{y}{\lambda_2} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{y}{\lambda_2} + 1 \right) |\lambda_2 - \gamma_2| + \\
&\quad \left( \frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1 \right) |\lambda_3 - \gamma_3| + \\
&\quad \left( 1 + \frac{y}{\lambda_2} \right) \left( \frac{x^2 + x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_2 - \gamma_2| + \\
&\quad \left( 1 + \frac{x}{\lambda_3} \right) \left( \frac{x^2 + x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) |\lambda_1 - \gamma_1| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\
&\quad \left( 1 + \frac{y}{\lambda_2} \right) \left( \frac{x^2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x}{\lambda_3} + 1 \right) |\lambda_2 - \gamma_2| |\lambda_3 - \gamma_3| + \\
&\quad \left[ \left( 1 + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} \right) \left( \frac{x^2 + x}{\lambda_1^2} + \frac{2x}{\lambda_1} + 1 \right) + \frac{2x}{\lambda_1} \right] |\lambda_1 - \gamma_1|^2 + \\
&\quad \left( 1 + \frac{x}{\lambda_1} \right) \left( \frac{y^2 + y}{\lambda_2^2} + \frac{2y}{\lambda_2} + 1 \right) |\lambda_2 - \gamma_2|^2 + \\
&\quad \left( 1 + \frac{x}{\lambda_1} \right) \left( \frac{x^2}{\lambda_3^2} + \frac{x^2 + 2x}{\lambda_3} + 1 \right) |\lambda_3 - \gamma_3|^2
\end{aligned}$$

On élève cette inégalité au carré et on applique l'espérance. Le carré du terme de droite est un polynôme de degré 6 en  $x$  et  $y$ . Et comme  $X$  et  $Y$  sont des distributions de Poisson provenant de trois autres distributions indépendantes de Poisson alors  $\forall k, l \in \mathbb{N}$ ,  $E(X^k Y^l)$  est finie. Par la suite,

$$E \left[ \left\{ \frac{f_{(1)}(x,y;\lambda) - f_{(1)}(x,y;\theta)}{f(x,y;\gamma)} \right\}^2 \right] < \infty.$$

Le même raisonnement tient pour les deux autres dérivées partielles, et la condition  $F$  est vérifiée.  $\square$

### Vérification des conditions $A$ , $E$ et $G$

Jiménez-Gamero *et al.* (2009) nous disent que les conditions  $A$  et  $G$  sont satisfaites pour les estimateurs de quasi-maximum de vraisemblance selon le théorème 3.2 de White (1982), tout comme la condition  $E$  selon le théorème 2.2 de White (1982). Les estimateurs de maximum de vraisemblance étant des cas particuliers de quasi estimateurs de maximum de vraisemblance, alors ils vérifient les conditions précitées.

Toutefois, ils soulignent que la condition  $F$  est une condition nécessaire pour que le théorème 3.2 de White (1982) s'applique.

Ayant montré que la condition  $F$  est vérifiée, alors les conditions  $A$ ,  $E$  et  $G$  le sont donc aussi.  $\square$ .