Université de Montréal

Sur des inégalités dans L^p pour les polynômes et les polynômes trigonométriques

par

Nabil Ayoub

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

novembre 2007

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Sur des inégalités dans L^p pour les polynômes et les polynômes trigonométriques

présentée par

Nabil Ayoub

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

André Giroux

(président-rapporteur)

Qazi Ibadur Rahman

(directeur de recherche)

Paul Gauthier

(co-directeur)

Khalid Benabdallah

(membre du jury)

Hira Narang

(examinateur externe)

Neil Freidrick Stewart

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

La date d'acceptation

SOMMAIRE

Dans un article publié en 1954, W. W. Rogosinski [13] a initié une théorie sur les fonctionnels linéaires réels définis sur les espaces linéaires des polynômes réels et des polynômes trigonométriques. En munissant ces deux espaces d'une certaine norme pondérée définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, respectivement $[-\pi, \pi]$, il a pu caractériser le polynôme extrémal d'un fonctionnel linéaire donné. Mais pour une raison donnée, il n'a pas pu revenir sur le sujet pour lui donner les applications voulues. Malheureusement, d'après nous, cette théorie n'a pas eu l'attention qu'elle mérite. Dans cette thèse, on va démontrer des nouvelles inégalités dans L^p, qui à leur tour, seront vues comme des applications de cette théorie.

Mots clés : Problèmes extrémaux ; polynômes ; polynômes trigonométriques ; fonctionnel linéaire ; théorème d'extension de Hahn-Banach ; théorème de représentation de Riesz.

SUMMARY

In a paper published in 1954, W. W. Rogosinski [13] initiated a general theory of linear extremum problems for real polynomials and trigonometric polynomials involving certain L^p norms on a measurable subset E of the real line and of $[-\pi, \pi]$, respectively. He saw such a problem as one of determining the norm of an appropriate functional on the space of all real polynomials of degree at most n, endowed with some weighted L^p norm on $E \subseteq \mathbb{R}$, or of all real trigonometric polynomials of degree at most n, endowed with an L^p norm on $E \subseteq [-\pi, \pi]$. He obtained characterizations for the *extremals*, in the two cases, but unfortunately could not find enough time to get back to 'systematic applications' he had hoped to do. His results did not receive the attention they deserve, in our opinion. The purpose of this thesis is to elaborate upon the contents of Rogosinski's paper, and also present some applications illustrating the scope of his finding.

Keywords : Extremum problems ; polynomials ; trigonometric polynomials ; linear functionals ; Hahn-Banach extension theorem ; Riesz representation.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier de manière toute particulière mon directeur de recherche, le professeur Qazi Ibadur Rahman. Son soutien moral, financier et ses conseils mathématiques m'ont été d'une aide inestimable. Le temps et l'aide qu'il m'a consacrés m'ont été précieux. C'était un honneur pour moi de travailler avec cette personne qui m'a permis d'enrichir mes connaissances en mathématiques.

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement mon co-directeur, le professeur Paul Gauthier, pour son aide considérable et son soutien financier.

Je remercie également les professeurs André Giroux, Khalid Benabdallah et Hira Narang, pour avoir accepté d'être membres du jury.

J'exprime ma gratitude et ma reconnaissance envers l'ISM ainsi que la Faculté des études supérieures de l'Université de Montréal.

Finalement, je remercie ma femme et mes proches de m'avoir encouragé tout au long de ce parcours.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est de démontrer des nouvelles inégalités, dans L^p, sur les coefficients des polynômes et des polynômes trigonométriques. En effet, ce sujet a été étudié depuis très longtemps et les méthodes qui ont été utilisées étaient différentes. Les inégalités qu'on va présenter seront déduites à partir d'un problème extrémal d'un certain fonctionnel linéaire défini sur l'espace des polynômes de degré au plus n ou sur celui des polynômes trigonométriques.
Commençons d'abord par présenter quelques résultats intéressants qui ont déjà été trouvés à propos de ce sujet.

Quelques inégalités sur les coefficients

0.1. L'inégalité de Chebyshev pour les polynômes

Les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\cos m\theta &= \Re(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^m = \sum_{\mu=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^\mu\binom{m}{2\mu}(\cos\theta)^{m-2\mu}(\sin\theta)^{2\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^\mu\binom{m}{2\mu}(\cos\theta)^{m-2\mu}(1-\cos^2\theta)^\mu\,,\end{aligned}$$

nous permettent de conclure que $\cos m\theta$ est un polynôme de degré m en $\cos\theta$. Le polynôme T_m tel que $T_m(\cos\theta) \equiv \cos m\theta$ est appelé le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré m. Il est également possible d'utiliser Tschebyscheff (ou Tchebysheff) au lieu de Chebyshev. La lettre 'T' dans Tschebyscheff (ou Tchebysheff) justifie le T dans la notation T_m. Évidemment,

$$T_0(x) := 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) := x\,.$$

L'identité trigonométrique

$$\cos m\theta + \cos(m-2)\theta = 2\cos\theta\,\cos(m-1)\theta \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

nous amène à la *relation de récurrence* suivante :

$$T_m(x) = 2x\,T_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) \qquad (m = 2, 3, \ldots)\,. \tag{0.1.1}$$

Cette dernière est utilisée pour conclure que le coefficient de x^m dans le développement de Maclaurin de $T_m(x)$ est 2^{m-1}. Le développement de Maclaurin , lui-même, est donné par

$$\frac{m}{2}\sum_{\mu=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^\mu \frac{(m-\mu-1)!}{\mu!\,(m-2\mu)!}\,(2x)^{m-2\mu}\,. \tag{0.1.2}$$

Le fait que $\cos m\theta$ s'annule aux points

$$\theta_{m,\mu} := \frac{(2\mu-1)\pi}{2m} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

implique que le polynôme $T_m(x)$ s'annule si et seulement si

$$x = \cos\theta_{m,\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)\,.$$

Il est important de mentionner que les zéros de T_m appartiennent tous à l'intervalle ouvert $(-1\,,\,1)$. Ainsi, en tenant compte du coefficient dominant de $T_m(x)$ et de ses zéros, on peut écrire

$$T_m(x) := \cos m \arccos x = 2^{m-1}\prod_{\mu=1}^{m}\left(x - \cos\frac{(2\mu-1)\pi}{2m}\right)\,. \tag{0.1.3}$$

À partir de la distribution de ses zéros, il est évident que la parité de $T_m(x)$ est la même que celle de m.

Il est utile de savoir que $y = T_m(x)$ satisfait l'équation differentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - x\,y' + m^2\,y = 0\,. \tag{0.1.4}$$

Ajoutons que $|T_m(x)| \le 1$ sur l'intervalle $(-1\,,\,1)$ et que

$$T_m\left(\cos\frac{k\pi}{m}\right) = (-1)^k \qquad (k = 0, \ldots, m)\,. \tag{0.1.5}$$

En effet, c'est une propriété très importante de T_m. De ce fait, on peut tirer que si un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ de degré n satisfait la condition $\max_{-1\le x\le 1} |f(x)| \le 1$ ou, si de façon plus générale

$$\left|f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right| \le 1 \qquad (k=0,1,\ldots,n)\,, \tag{0.1.6}$$

alors

$$|a_n| \le 2^{n-1}\,. \tag{0.1.7}$$

Pour le voir, rappelons d'abord que le coefficient de x^n dans le développement de Maclaurin de T_n est 2^{n-1}. Ainsi, nous allons supposer que $|a_n| = 2^{n-1}+\delta$ pour $\delta > 0$. De plus, le coefficient a_n peut être considéré strictement positif; sinon, on considère le polynôme $-f$. Soit $f_\delta(x) := \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+\delta} f(x)$. Alors, $T_n(x) - f_\delta(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que

$$(-1)^k \left\{T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) - f_\delta\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} > 0 \qquad (k=0,1,\ldots,n)\,.$$

Ensuite, par le théorème de la valeur intermédiaire, $T_n - f_\delta$ doit avoir au moins n zéros dans l'intervalle ouvert $(-1\,,\,1)$, ce qui est possible seulement si $f_\delta = T_n$, i.e. seulement si

$$f(x) \equiv \frac{2^{n-1}+\delta}{2^{n-1}}\, T_n(x)\,.$$

Cela contredit (0.1.6), et l'inégalité (0.1.7) aura lieu.

L'inégalité (0.1.7) est dûe à Chebyshev [Collected works, p. 493]. De plus, W. Markov [11] a généralisé ce résultat en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME A. *Soit $T_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k t_{n,n-2k} x^{n-2k}$ le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré n. Alors, pour tout polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_n x^\nu$ de degré n tel que $|f(x)| \le 1$ pour $-1 \le x \le 1$, nous avons*

$$|a_{n-2k}| \le t_{n,n-2k} \qquad \left(k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \tag{0.1.8}$$

et

$$|a_{n-2k+1}| \le t_{n-1,n-1-2k} \qquad \left(k=0,\ldots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right)\,. \tag{0.1.9}$$

Le résultat suivant (voir [3]) est une extension significative du théorème A.

THÉORÈME B. *Soient $x_0 < \cdots < x_n$ une suite de $n+1$ nombres réels, et $y_0,\ldots,y_n$ une autre suite de $n+1$ nombres positifs, où on suppose que*

$x_\nu = -x_{n-\nu}$ et $y_\nu = y_{n-\nu}$ pour $\nu = 0,\dots,n$, et $\sum_{\nu=0}^{n} y_\nu > 0$. Considérons le polynôme unique F de degré n défini par $F(x) := \sum_{\mu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n-2\mu}\, x^{n-2\mu}$, tel que $F(x_\nu) = (-1)^{n-\nu} y_\nu$ pour $\nu = 0,\dots,n$. De plus, soit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu$ un polynôme réel de degré au plus n, dont le module ne dépasse pas celui de F aux points $x_0 < \cdots < x_n$, autrement dit

$$|f(x_\nu)| \le y_\nu = |F(x_\nu)| \qquad (\nu = 0,\dots,n)\,.$$

Alors,

$$|a_{n-2k}| + |a_{n-2k-1}| \le |A_{n-2k}| \qquad \left(k = 0,\dots,\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)\,. \tag{0.1.10}$$

En particulier, tout polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_n\, x^\nu$ de degré n tel que

$$\left| f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right| \le 1 \qquad (k = 0,1,\dots,n) \tag{0.1.11}$$

possède la propriété

$$|a_{n-2k}| + |a_{n-2k-1}| \le t_{n,n-2k} \qquad \left(k = 0,\dots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\,. \tag{0.1.12}$$

Le polynôme

$$U_m(x) := \frac{1}{m+1}\, T'_{m+1}(x) = \sum_{\mu=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^\mu \frac{(m-\mu)!}{\mu!\,(m-2\mu)!}\,(2x)^{m-2\mu} \tag{0.1.13}$$

est appelé le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré m.

Soit

$$x_0 = -1,\ x_n := 1 \ \text{ et } \ x_\nu := \cos\frac{2(n-2)-\nu}{2(n-1)}\pi \ \text{ pour } \ \nu = 1,\dots,n-1\,.$$

De plus, soit

$$y_0 = y_n := 0 \ \text{ et } \ y_\nu = \sqrt{1-x_\nu^2} \ \text{ pour } \ \nu = 1,\dots,n-1\,.$$

Alors,

$$F(x) := -(1-x^2)\, U_{n-2}(x) = -(1-x^2)\,\frac{1}{n}\, T'_{n-1}(x) = \sum_{\mu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{n-2\mu}\, x^{n-2\mu}$$

est l'unique polynôme de degré n tel que $F(x_\nu) = (-1)^{n-\nu} y_\nu$ pour $\nu = 0, \dots, n$. Le théorème B s'applique afin de conclure que tout polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, x^\nu$ de degré au plus n avec

$$f(\pm 1) = 0 \quad \text{et} \quad |f(x_\nu)| \le \sqrt{1 - x_\nu^2} \;\; \text{pour} \;\; \nu = 1, \dots, n-1\,,$$

satisfait

$$|a_{n-2k}| + |a_{n-2k-1}| \le |\alpha_{n-2k}| \qquad \left(k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) . \tag{0.1.14}$$

En particulier, si

$$F(x) := -(1 - x^2)\, U_{n-2}(x) = \sum_{\mu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{n-2\mu}\, x^{n-2\mu}\,,$$

où $U_m(x)$ est le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré m, et $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, x^\nu$ est un polynôme de degré au plus n, alors

$$|a_{n-2k}| + |a_{n-2k-1}| \le |\alpha_{n-2k}| \sup_{-1<x<1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) . \tag{0.1.15}$$

Le théorème B a plusieurs conséquences intéressantes.

0.2. Un analogue de l'inégalité de Chebyshev dans L^1

Soit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, x^\nu$ un polynôme de degré n. Quelle est la valeur maximale que la quantité suivante

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, \mathrm{d}x}$$

peut prendre ?

Pour répondre à cette question, on peut la relier au résultat suivant (voir [13]) concernant les polynômes sur le cercle unité.

THÉORÈME C. *Soient b_j et b_k, avec $0 \le j < k \le m$, deux coefficients du polynôme $g(z) := \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \, z^\mu$. On suppose que tous les autres coefficients a_l avec $l \equiv j \pmod{k-j}$ sont nuls. Alors*

$$|b_j| + |b_k| \le \max_{|z|=1} |g(z)|\,. \tag{0.2.1}$$

De plus, en posant

$$C_p := \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|^p \, \mathrm{d}\varphi} = \frac{2^{-p}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}p + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right)} \qquad (0 < p < \infty), \tag{0.2.2}$$

on a

$$|b_j| + |b_k| \le 2\,(C_p)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \,d\theta \right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)\,. \qquad (0.2.3)$$

Dans le cas où $j = 0$ *et* $k = m$*, l'estimation dans* (0.2.3) *a lieu aussi pour tout* $p \in (0\,,\,1)$ *; cela veut dire que*

$$|b_0| + |b_m| \le 2\,(C_p)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \,d\theta \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty)\,. \qquad (0.2.4)$$

Le théorème précédent peut être énoncé, en termes de polynômes trigonométriques, comme suit :

THÉORÈME C′. *Soient* c_j *et* c_k*, avec* $-m \le j < k \le m$*, deux coefficients du polynôme trigonométrique* $t(\theta) := \sum_{\mu=-n}^{m} c_\mu\, e^{i\mu\theta}$*. On suppose que tous les autres coefficients* a_ℓ *avec* $l \equiv j \pmod{(k-j)}$ *sont nuls. Alors*

$$|c_j| + |c_k| \le \max_{-\pi\le\theta<\pi} |t(\theta)|\,, \qquad (0.2.5)$$

et avec le C_p *donné dans* (0.2.2)*, on a*

$$|c_j| + |c_k| \le 2\,(C_p)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t(\theta)|^p \,d\theta \right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)\,. \qquad (0.2.6)$$

Dans le cas où $j = -m$ *et* $k = m$*, l'estimation dans* (0.2.6) *a lieu aussi pour tout* $p \in (0\,,\,1)$ *; cela veut dire que*

$$|c_{-m}| + |c_m| \le 2\,(C_p)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t(\theta)|^p \,d\theta \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty)\,. \qquad (0.2.7)$$

Revenons maintenant au problème posé au début de la sous-section 0.2. Soit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu$ un polynôme de degré n. Alors

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos\theta)\,\sin\theta|\,d\theta\,, \qquad (0.2.8)$$

et

$$t(\theta) := f(\cos\theta)\,\sin\theta = \sum_{\nu=-n-1}^{n+1} c_\nu\, e^{i\nu\theta}$$

est un polynôme trigonométrique de degré $n+1$. On voit facilement que

$$c_{n+1} = -\frac{i}{2}\frac{1}{2^n}\,a_n \quad \text{et} \quad c_{-n-1} = -c_{n+1}$$

de sorte que

$$|a_n| = 2^n\left(|c_{-n-1}| + |c_{n+1}|\right).$$

Maintenant, appliquons (0.2.7), avec $m = n+1$ et $p = 1$, à $t(\theta) := f(\cos\theta)\sin\theta$ et utilisons (0.2.8), il s'en suit que

$$|a_n| = 2^n\left(|c_{-n-1}| + |c_{n+1}|\right) \le 2^n\,\frac{C_1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = 2^n\,\frac{2\,C_1}{\pi}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Puisque

$$C_1 := \frac{2^{-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{4},$$

on conclut que *pour un polynôme* $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, *de degré au plus* n, *on a*

$$|a_n| \le 2^{n-1}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{0.2.9}$$

Référons nous à (0.1.13), on voit que le coefficient de x^n dans le développement de Maclaurin de U_n est 2^n, et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|U_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\frac{1}{n+1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}T_{n+1}(\cos\theta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}|\sin(n+1)\theta|\,\mathrm{d}\theta = 2,\end{aligned}$$

ce qui veut dire que (0.2.9) est exacte. Par un autre raisonnement, A. Korkine et G. Zolotareff [8] ont démontré l'inégalité (0.2.9). Ajoutons que cette dernière est contenue implicitement dans un travail antérieur de Chebyshev : "On interpolation in the case of a large number of experimental data," (Collected works, Vol. 1, 1859).

0.3. Un analogue de l'inégalité de Chebyshev dans L^2

Maintenant, on désire connaître la valeur maximale de la quantité

$$\frac{|a_n|}{\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}$$

pour un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\,x^\nu$ de degré n. Autrement dit, on veut savoir la plus petite valeur prise par

$$\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

où f est un polynôme de degré n, dont le coefficient dominant est 1. En d'autres mots, $f(x) := x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$, où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des nombres quelconques dans $\mathbb{C}$. Finalement, la question sera posée comme suit :

Question 1. Comment choisir $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ de telle façon que la quantité

$$\int_{-1}^{1} |x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu|^2 \, \mathrm{d}x \tag{0.3.1}$$

soit la plus petite possible ?

Il est clair que l'intégrale (0.3.1) sera minimisée en choisissant les nombres $a_0, \ldots, a_{n-1}$, dans $\mathbb{R}$.

Maintenant, il serait logique de considérer le problème suivant :

Question 2. Comment choisir $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ de telle façon que la quantité définie par

$$\int_{-1}^{1} |x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

soit minimale ?

Pour répondre à cette dernière question, on va utiliser le fait que si T_k est le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré k, alors pour deux entiers distincts m et n, on a

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\, T_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \, \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0\,. \tag{0.3.2}$$

Ajoutons que

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\, T_k(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos^2 k\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Puisqu'on peut écrire $x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, x^\nu$ sous la forme $2^{-n+1}T_n(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu T_\nu(x)$, où les b_ν dépendent de $a_0, \ldots, a_{n-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left| x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, x^\nu \right|^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & \\
&= \int_{-1}^{1} \left\{ 4^{-n+1}\, T_n^2(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^2\, T_\nu^2(x) \right\} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 4^{-n+1} \int_{-1}^{1} T_n^2(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^2 \int_{-1}^{1} T_\nu^2(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 4^{-n+1}\, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^2 \geq 4^{-n+1}\, \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $b_0, \ldots, b_{n-1}$ sont tous nuls. Ainsi, pour minimiser la quantité $\int_{-1}^{1} |x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, x^\nu|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$, les coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ doivent être choisis tels que

$$x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, x^\nu = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\,.$$

Cela répond à la question 2, et la réponse peut être énoncée de la façon suivante :

THÉORÈME D1. *Pour un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ de degré au plus n, on a*

$$|a_n| \leq \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2}. \tag{0.3.3}$$

L'identité (0.3.2) a joué un rôle vraiment crucial dans le raisonnement précédent. Il sera possible de résoudre la question 1 d'une façon analogue si, pour chaque $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, il existe un polynôme P_n de degré n qui aura les deux propriétés suivantes. Premièrement,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n)\,; \tag{0.3.4}$$

deuxièmement, tout polynôme f de degré n peut être exprimé comme une combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_n$. Heureusement, les polynômes $\{P_n\}$ définis par la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)\, x\, P_n(x) + n\, T_{n-1}(x) = 0, \;\; P_0(x) := 1, \;\; P_1(x) := x$$

ont ces propriétés. Le développement de Maclaurin de P_n est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{2n-2\nu}{n} x^{n-2\nu} . \tag{0.3.5}$$

D'une façon plus explicite,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots \right] .$$

De plus, ces polynômes sont normalisés de telle sorte que

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} . \tag{0.3.6}$$

Parfois, il sera plus convenable de les normaliser pour que leurs normes dans L^2 sur $[-1, 1]$ soit égale à 1. Pour cela, on va introduire

$$P_m^*(x) := \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \, P_m(x) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) .$$

qui satisferont

$$\int_{-1}^{1} |P_m^*(x)|^2 \, dx = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Pour plus de simplicité, on va référer les coefficients de P_m et P_m^* par certains symboles. On va ainsi écrire

$$P_m^*(x) := p_{m,m} \, x^m - p_{m-2,m} \, x^{m-2} + p_{m-4,m} \, x^{m-4} - \cdots , \tag{0.3.7}$$

avec

$$p_{m,m} := \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \, \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} , \quad p_{m-2,m} := \frac{m(m-1)}{2(2m-1)} \, p_{m,m} , \quad \text{etc.}$$

Les polynômes P_n sont appelés les polynômes de Legendre de degré n. Ainsi, en utilisant (0.3.5), (0.3.6) et un raisonnement analogue à celui de la question 2, on arrive à la conclusion suivante : Afin de minimiser $\int_{-1}^{1} |x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \, x^\nu|^2 \, dx$, les coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ doivent être choisis tels que

$$x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \, x^\nu = \frac{2^n \, (n!)^2}{(2n)!} \, P_n(x) .$$

Cela nous donne la réponse à la question 1. Ainsi, nous l'énonçons comme suit :

THÉORÈME D2. *Pour un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ de degré au plus n, on a*

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \, \frac{(2n))!}{2^n \, (n!)^2} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} . \tag{0.3.8}$$

Étant donné une fonction $W(x)$ intégrable et positive sur un intervalle $[a\,,\,b]$ (fini ou infini), on connaît bien la façon de construire une suite de polynômes $\pi_n^*(x)$, de degré exact n, qui seront normalisés et orthogonaux sur $[a\,,\,b]$ par rapport au poids $W(x)$. En d'autres mots, les polynômes $\pi_n^*(x)$ satisferont

$$\int_a^b W(x)\,\pi_m^*(x)\,\pi_n^*(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \qquad (m\,,\,n = 0, 1, \ldots)\,. \qquad (0.3.9)$$

Dans le cas où l'intervalle $[a\,,\,b]$ est semi-infini ou infini, le poids $W(x)$ doit être choisi pour que les intégrales $\int_a^b W(x)\,x^\nu\,\mathrm{d}x$, $\nu = 0, \ldots n$, existent.

Les polynômes de Jacobi , $P_n^{(\alpha\,,\beta)}(x)$, $\alpha > -1, \beta > -1$, sont les polynômes orthogonaux par rapport au poids $W(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $-1 < x < 1$. On les normalise en choisissant leur coefficient dominant ($\lim_{x\to\infty} x^{-n} P_n^{(\alpha\,,\beta)}(x)$) pour être

$$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\,.$$

Dans le cas où $\alpha = \beta$, les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha\,,\beta)}$ sont appelés les polynômes ultrasphériques (Gegenbauer) . Dans ce dernier cas, on va les noter par :

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,P_n^{(\alpha\,,\alpha)}(x), \qquad \left(\alpha = \lambda - \frac{1}{2}\right)\,. \qquad (0.3.10)$$

Il est convenable d'écrire le développement de Maclaurin de $P_n^{(\lambda)}$ sous la forme

$$P_n^{(\lambda)}(x) := p_{n,n}(\lambda)\,x^n - p_{n-2,n}(\lambda)\,x^{n-2} + p_{n-4,n}(\lambda)\,x^{n-4} - \cdots\,.$$

Ces polynômes sont connus par la normalisation suivante

$$\|P_n^{(\lambda)}\|_2^{\dagger\,2} := \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\left(P_n^{(\lambda)}(x)\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2\lambda-1}\,\left(\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}{(n+\lambda)\,n!\,\Gamma(n+2\lambda)}\,.$$

Mais parfois, il serait mieux de normaliser les polynômes ultrasphériques de telle sorte que leurs normes L^2 sur $[-1\,,\,1]$ soient égales à 1. Pour cette raison, on va introduire le polynôme

$$P_n^{(\lambda)*}(x) := \sqrt{\frac{n!\,(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}\,\left(\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}}\,P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-2\nu,n}^*(\lambda)x^\nu \qquad (0.3.11)$$

pour lequel

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\left(P_n^{(\lambda)*}(x)\right)^2\,\mathrm{d}x = 1\,. \qquad (0.3.12)$$

Le raisonnement qui a été utilisé pour démontrer le théorème D1 sera adapté pour démontrer le résultat suivant, qui est bien connu dans la théorie des polynômes orthogonaux. De plus, il contient le théorème D2.

THÉORÈME D. *Soit* $P_n^{(\lambda)*}(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k p^*_{n,n-2k}(\lambda)\, x^{n-2k}$ *le polynôme ultrasphérique de degré* n *satisfaisant* (0.3.12). *Alors, pour tout polynôme réel* $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ *de degré au plus* n*, nous avons*

$$|a_n| \le p^*_{n,n}(\lambda)\left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\right). \qquad (0.3.13)$$

Étant donné un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu$ de degré n, les inégalités (0.1.7), (0.2.9) et (0.3.8) nous donnent la valeur maximale que peut prendre $|a_n|$ sous la condition que $\max_{-1\le x\le 1}|f(x)| \le 1$ ou $\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x \le 1$ ou $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \le 1$, respectivement. Mais, *quelle est la valeur maximale atteinte par* $|a_n|$*, si* $\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x \le 1$*, où* p *est un nombre strictement positif* ? Cette question est tout à fait naturelle, mais probablement très difficile. Malheureusement, le fait que cette question soit résolue pour $p = 1, 2, \infty$, ne nous donne aucun indice sur le cas des autres $p \in (0, \infty)$. Il est bizarre que les preuves qu'on a données sont exclusives au cas où $p = 1, 2, \infty$. Par exemple, l'idée de la preuve utilisée dans (0.1.7) ne semble pas marcher pour prouver (0.2.9) et (0.3.8), et inversement.

Une autre question semblable sera de déterminer la borne supérieure exacte prise par $|a_j|$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sous la condition $\int_{-1}^{1}|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu|^p\,\mathrm{d}x \le 1$. Ajoutons que cette dernière question a été réglée dans $(\mathcal{P}_n, \|.\|_2)$, par Labelle [10] qui a trouvé le résultat suivant :

$$|a_k| \le \frac{1.3.5....(2k-1)(k-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{k!}\binom{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor + k + \frac{1}{2}}{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor}\|f\|_2\,, \quad (1 \le k \le n).$$

De plus, cette dernière inégalité est exacte ; elle est atteinte pour un multiple constant de

$$f(x) := \sum_{\nu=0}^{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor}(-1)^\nu(4\nu+2k+1)\binom{k+\nu-\frac{1}{2}}{\nu}P_{k+2\nu}(x).$$

De même, il est raisonnable de demander quelle est la borne supérieure de $|a_j| + |a_k|$ pour j et k tels que $0 \le j \ne k \le n$. Aussi, en écrivant $f(x_0)$, sous la forme $\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu a_\nu$ avec $\lambda_\nu = x_0^\nu$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$, on se questionne sur la borne supérieure de $|f(x_0)|$. Il en est de même pour celle de $f'(x_0) = 0.a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_\nu$, avec $\lambda_\nu = \nu x_0^{\nu-1}$, $\nu = 1, \dots, n$, etc.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour un polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, x^\nu$, à coefficient réel, associons le nombre $\lambda_0 \, a_0 + \cdots + \lambda_n \, a_n$. Quelle est la valeur maximale ou minimale que pourra prendre la quantité $\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \, a_\nu$ sous la condition $\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq 1$? En effet, cela ne couvre pas seulement les questions qu'on a posées sur les coefficients a_j, mais bien plusieurs autres. Pour plus de simplicité, on va se restreindre au cas où $p \in [1\,,\,\infty)$; puisque, dans ce dernier cas, la correspondance

$$f \mapsto \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \qquad (0.3.14)$$

définit une norme sur l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes réels de degré au plus n .

Le problème analogue, où on munit $\mathcal{P}_n$ de la norme supremum sur $[-1\,,\,1]$, a été étudié d'une façon détaillée par E. V. Voronovskaja dans une série de papiers (voir [24], [25], [26] et aussi [16]). On aimerait bien savoir si les résultats de Voronovskaja sur l'espace $\mathcal{P}_n$ muni de la norme supremum suggèrent des résultats correspondants quand $\mathcal{P}_n$ sera muni de la norme définie par (0.3.14) ? On ne le sait pas. Mais, pour plus de clarification à ce sujet, on va énoncer la proposition suivante (voir [14, Lemma 3]) qui est valide pour les polynômes, ayant les coefficients dans $\mathbb{C}$, définis sur le cercle unité. Cette dernière nous indique comment obtenir un résultat dans L^p à partir d'un autre valide dans L^∞.

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{P}_{n,\mathbb{C}}$ l'espace linéaire des polynômes de degré au plus n avec coefficients dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \max_{|z|=1} |f(z)|$. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ un ensemble arbitraire de $n+1$ nombres dans $\mathbb{C}$, et notons par L le fonctionnel linéaire définie sur $\mathcal{P}_{n,\mathbb{C}}$, par*

$$f \mapsto \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n \qquad \left(f(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu\right) .$$

De plus, soit $N := \|L\| = \sup\left\{L(f) : \|f\|_\infty = \max_{|z|=1} |f(z)| = 1\right\}$. Alors, pour toute fonction convexe et croissante φ sur $[0\,,\,\infty)$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\right|}{N}\right) \mathrm{d}\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\right|\right) \mathrm{d}\theta . \qquad (0.3.15)$$

En particulier,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu a_\nu e^{i\nu\theta}\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq N\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu e^{i\nu\theta}\right|^p d\theta\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Dans le cas des polynômes définis sur $[-1\,,\,1]$, on ne connaît pas un résultat analogue à la proposition 1. Pour bien expliquer la situation, on va donner un exemple. Le polynôme $f(z) = z^n$ est extrémal pour le fonctionnel $\mathcal{I}(f) = a_n$, définie sur $(\mathcal{P}_{n,\mathbb{C}}, \|f\|_\infty)$. Ce dernier, $f(z) = z^n$, est également extrémal pour le même fonctionnel défini sur $(\mathcal{P}_{n,\mathbb{C}}, \|f\|_2)$. Par contre, dans le cas des polynômes définis sur $[-1\,,\,1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty$ et $\|f\|_2$, les polynômes extrémaux pour le fonctionnel $\mathcal{I}(f) = a_n$ sont ceux de Chebyshev de première espèce et de Legendre respectivement. Donc, si un tel résultat semblable à la proposistion 1 existe, il n'aura pas une forme aussi simple que celle de l'équation (0.3.15). Pour cette raison, l'obtention des résultats touchant la norme $\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,dx$ à partir des résultats connus sur la norme $\sup_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|$ semble très difficile.

On connaît plusieurs résultats dans $\mathcal{P}_n$ lorsque ce dernier est muni de la norme $\sup_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|$ ou bien de la norme $\int_{-1}^{1}W(x)\,|f(x)|^2\,dx$. Ce fait nous pousse à formuler la question qui suit. Pourquoi ne pas appliquer le théorème d'interpolation de M. Riesz [17] pour obtenir des résultats dans L^p sur $[-1\,,\,1]$ pour $p \in (2\,,\,\infty)$?. En effet, il y a une difficulté sérieuse dans l'application du théorème de Riesz, puisque ce dernier nécessite que l'opérateur en question ait comme domaine de définition un sous-espace dense dans tout l'espace L^p.

À son tour, E. M. Stein [20] a contourné le problème en démontrant le théorème E qui nécessite d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION . Un système orthonormal est appelé *régulier*, s'il existe un entier r de sorte que la moyenne de Cesàro d'ordre r ait la propriété suivante :

$$\|\sigma_n^{(r)}(f)\|_p \leq A\,\|f\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty),$$

où A est indépendante de n et f.

Voici donc l'énoncé du théorème d'interpolation de Stein :

THÉORÈME E. *Soit $\{\phi_n(x)\}$ un système orthonormal "régulier" . Supposons que T est une transformation linéaire définie sur les "polynômes" du système*

$\{\phi_n(x)\}$. De plus, supposons qu'on a des indices p, p_1, p_2 et des nombres α, β, γ, tels que $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, $-\infty < \alpha\,, \beta, \gamma < +\infty$, et un paramètre t qui vérifie $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$ et $\gamma = (1-t)\alpha + t\beta$ avec $0 \leq t \leq 1$. Supposons

$$\|T(f)\|_{p_1} \leq A_1\, n^{\alpha}\, \|f\|\|_{p_1} \quad \text{et} \quad \|T(f)\|_{p_2} \leq A_2\, n^{\beta}\, \|f\|\|_{p_2}\,,$$

où f est un polynôme de degré n. Alors,

$$\|T(f)\|_p \leq A\, n^{\gamma}\, \|f\|\|_p\,.$$

De plus, $A = B \cdot A_1^{1-t} A_2^{t}$; où B dépend seulement du système $\{\phi_n(x)\}$ et de γ.

Notons que cette dernière inégalité ne répond pas à notre question. En effet, on ne connaît pas le cas d'égalité ; la constante A qui figure dans le membre droit n'est pas la meilleure possible.

Chapitre 1

PROBLÈMES EXTRÉMAUX POUR LES POLYNÔMES RÉELS

1.1. La théorie de Rogosinski

Notre problème dans ce chapitre est de déterminer le(s) polynôme(s) extrémaux de quelques fonctionnels linéaires sur l'espace linéaire des polynômes définis sur $[-1, +1]$. Cela sera fait en utilisant la théorie de Rogosinski. Dans un papier publié en 1954, W. W. Rogosinski [19] a présenté une théorie sur les fonctionnels linéaires définis sur les espaces linéaires des polynômes réels munis d'une certaine norme, semblable à celle de $L^p(E)$, où E est un ensemble mesurable de la droite réelle .

Cette théorie nous assure que tout polynôme réel sur $[-1, +1]$ est un polynôme extrémal pour un certain fonctionnel. Inversement, tout fonctionnel linéaire, défini sur $\mathcal{P}_n$: l'ensemble des polynômes de degré au plus n, admet un polynôme extrémal. Les caractérisations d'un tel extrémal seront données par un système d'équations à $n + 1$ inconnus. L'unicité de ce polynôme extrémal dépend de la valeur de p. Mais généralement, la détermination de ce polynôme reste un problème difficile. Il est important de noter que cette théorie est applicable pour un $p \in [1, \infty[$.

1.2. L'idée de la théorie

Soit E un sous-ensemble de la droite réelle mesurable au sens de Lebesgue. On suppose que la mesure de E est strictement positive. De plus, soit $W : E \to [0, \infty)$

une fonction positive mesurable au sens de Lebesgue et $p \in [1, \infty)$. Pour un polynôme f appartenant à $\mathcal{P}_n$ (l'espace des polynômes réels de degré au plus n), on définit

$$\|f\|_p^\dagger := \left\{ \int_E W(x)\,|f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right\}^{1/p} . \tag{1.2.1}$$

On suppose que W satisfait à la contrainte suivante : $\int_E W(x)\,|f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$ pour tout $f \in \mathcal{P}_n$.

La quantité $\|f\|_p^\dagger$, mentionnée en (1.2.1), définit une norme sur l'espace $\mathcal{P}_n$. Cela est justifié par les faits suivants : premièrement, $1 \leq p < \infty$; deuxièmement, un polynôme de degré au plus n ne peut pas avoir plus que n zéros sans être identiquement nul.

Pour tout $p \in [1, \infty)$, la boule unité fermée

$$K := \left\{ f \in \mathcal{P}_n : \int_E W(x)\,|f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq 1 \right\}$$

est un ensemble compact puisque $\mathcal{P}_n$ est de dimension finie (voir [4, pp. 244–245] ou [5, p. 31]) .

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application définie par

$$f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu \mapsto \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$$

est un fonctionnel linéaire continu, $\mathcal{I}$, sur l'espace linéaire $\mathcal{P}_n$ de tous les polynômes réels de degré au plus n muni de la norme $\|f\|_p^\dagger$ telle que donnée dans (1.2.1). Le problème est de déterminer la norme de $\mathcal{I}$ définie par :

$$\|\mathcal{I}\| = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} := \sup \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu \ : \ f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu, \int_E W(x)|f(x)|^p \,\mathrm{d}x = 1 \right\} .$$

Puisque la boule unité K est un ensemble compact, alors la norme de $\mathcal{I}$ est atteinte. Autrement dit, il existe un polynôme $F \in \mathcal{P}_n$ avec $\|F\|_p^\dagger = 1$ tel que $\mathcal{I}(F) = \|\mathcal{I}\|$.

Donc, trouver la norme de $\mathcal{I}$ est tout à fait équivalent à déterminer le polynôme extrémal. Le fonctionnel $\mathcal{I}$ est défini par le vecteur $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Pour cette raison, il sera approprié de trouver des caractérisations convenables pour les polynômes extrémaux en termes de composantes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$.

Posons $W^*(x) := \{W(x)\}^{1/p}$ et $g(x) := W^*(x)\, f(x)$. Il en découle que

$$\|g\|_p := \left(\int_E |g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(\int_E W(x)|f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \|f\|_p^\dagger$$

est une norme sur le sous-espace $\{\mathcal{G}\}_n := \{W^* f \;:\; f \in \mathcal{P}_n\}$ de l'espace linéaire $\mathcal{L}^p(E)$. Ajoutons que la norme d'une fonction $\phi \in L^p(E)$ est donnée par

$$\|\phi\|_p := \left(\int_E |\phi(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} .$$

Pour tout $g \in \{\mathcal{G}\}_n$, on pose $\mathcal{I}^*(g) = \mathcal{I}(f)$.

Il est bien connu (par un théorème de F. Riesz) qu'un fonctionnel linéaire continu $\mathcal{J}$ sur l'espace $\mathcal{L}^p(E)$ tout *entier* admet une représentation *unique* (voir [18, p. 78] ou [1 , pp. 64–65]) de la forme

$$\mathcal{J}(\phi) = \int_E \phi(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\phi \in \mathcal{L}^p(E)) \,. \tag{1.2.2}$$

Si $p > 1$, alors μ appartient à $L^q(E)$ où $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et

$$\|\mathcal{J}\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \|\mu\|_q := \left(\int_E |\mu(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \qquad (1 < p < \infty)\,. \tag{1.2.3}$$

Dans le cas où $p = 1$, la fonction μ sera mesurable. De plus, elle est essentiellement bornée sur E avec

$$\|\mathcal{J}\|_{\mathcal{L}^1(E)} = \text{ess. sup}\,|\mu|\,. \tag{1.2.4}$$

La représentation de $\mathcal{J}$ donnée en (1.2.2) ne peut pas être appliquée directement sur $\mathcal{I}^*$ puisque ce dernier est défini seulement sur un sous-espace de l'espace linéaire $\mathcal{L}^p(E)$. Par contre, en utlilisant le théorème de Hahn-Banach (voir théorème [1 , p. 55]), on peut étendre $\mathcal{I}^*$ sur l'espace $\mathcal{L}^p(E)$ tout entier, et cela *en préservant la norme*. Autrement dit, on peut trouver un fonctionnel $\mathcal{J}^*$ défini sur $\mathcal{L}^p(E)$ avec $\mathcal{J}^*(\phi) = \mathcal{I}^*(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{G}_n$, et $\|\mathcal{J}^*\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \|\mathcal{I}^*\|_{\mathcal{G}_n} = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n}$. Ainsi, par le théorème de représentation de Riesz donné en (1.2.2), on a

$$\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}^*(g) = \mathcal{J}^*(g) = \int_E g(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x = \int_E W^*(x)\,f(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2.5}$$

avec

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} = \|\mathcal{I}^*\|_{\mathcal{G}_n} = \|\mu\|_q \quad \text{si} \quad p > 1\,, \tag{1.2.6}$$

et

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} = \text{ess. sup}\,|\mu| \quad \text{si} \quad p = 1\,. \tag{1.2.7}$$

Comme déjà mentionné , il existe un polynôme F de degré au plus n tel que $\mathcal{I}(F) = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n}$. Évidemment, F doit avoir une norme égale à 1. En résumé, ce polynôme satisfait à la condition

$$\mathcal{I}(F) = \int_E W^*(x)\, F(x)\, \mu(x)\, \mathrm{d}x = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n}\,. \tag{1.2.8}$$

Plus tard, on verra que ce polynôme (extrémal) est unique dans le cas où p est plus grand que 1 ; mais ce n'est pas nécessairement le cas lorsque $p = 1$.

1.3. Énoncés des résultats

Théorème 1. *Soit E un sous-ensemble de la droite réelle, mesurable au sens de Lebesgue. Soit $W : E \to [0, \infty)$ une fonction positive intégrable au sens de Lebesgue. De plus, soit $\mathcal{P}_n$ la classe des polynômes réels de degré au plus n munie de la norme*

$$\|f\|_p^\dagger := \left\{ \int_E W(x)\, |f(x)|^p\, \mathrm{d}x \right\}^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{P}_n)\,, \tag{1.3.1}$$

avec $p \in (1\,, \infty)$. Considérons $\mathcal{I}$ un fonctionnel linéaire continu sur $\mathcal{P}_n$, et supposons que F est un élément extrémal de $\mathcal{P}_n$, c'est à dire

$$\mathcal{I}(F) = \|\mathcal{I}\| = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} := \sup\left\{\mathcal{I}(f) : \|f\|_p^\dagger \le 1\right\}\,. \tag{1.3.2}$$

Alors, l'extrémal F est l'unique polynôme qui satisfait à la condition

$$\mathcal{I}(f) = \|\mathcal{I}\| \int_E W(x)\, f(x) \cdot \operatorname{sign} F(x) \cdot |F(x)|^{p-1}\, \mathrm{d}x \qquad (f \in \mathcal{P}_n)\,. \tag{1.3.3}$$

Il est clair que l'équation (1.3.3) a lieu pour tout $f \in \mathcal{P}_n$ si et seulement si elle a lieu pour $f(x) := x^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Cela va nous conduire à énoncer le théorème 1 de la façon suivante :

Théorème 1′. *Supposons que le fonctionnel $\mathcal{I}$ du théorème 1 est défini par le vecteur $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ dans le sens que $\mathcal{I}(f) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu\, a_\nu$ pour tout $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$. Alors $\mathcal{I}$ admet un polynôme extrémal $F \in \mathcal{P}_n$ avec $\|F\|_p^\dagger = 1$ si et seulement si*

$$\lambda_k = \|\mathcal{I}\| \int_E x^k\, W(x) \cdot \operatorname{sign} F(x) \cdot |F(x)|^{p-1}\, \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{1.3.4}$$

Dans le cas où $p = 2$, *la condition* (1.3.4) *se réduit à*

$$\lambda_k = \|\mathcal{I}\| \int_E x^k\, W(x)\, F(x)\, \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{1.3.4'}$$

Dans ce qui suit, on va discuter le cas où $p = 1$. Le théorème qu'on va énoncer est un résultat qui correspond aux théorèmes 1 et 1′.

Théorème 2. *Supposons que* E, W *et* $\mathcal{P}_n$ *sont déjà définis comme dans le théorème 1. Soit*

$$\|f\|_1^\dagger := \int_E W(x)\, |f(x)|\, \mathrm{d}x \qquad (f \in \mathcal{P}_n)\ . \tag{1.3.1'}$$

De plus, si $\mathcal{I}$ *est un fonctionel linéaire continu sur* $\mathcal{P}_n$ *et* $F \in \mathcal{P}_n$ *tel que*

$$\mathcal{I}(F) = \|\mathcal{I}\| = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} := \sup\left\{ I(f) : \|f\|_1^\dagger \le 1 \right\}\ , \tag{1.3.5}$$

alors

$$\mathcal{I}(f) = \|\mathcal{I}\| \int_E W(x)\, f(x) \cdot \operatorname{sign} F(x)\, \mathrm{d}x \qquad (f \in \mathcal{P}_n)\,. \tag{1.3.6}$$

Ajoutons que si $\mathcal{I}$ *est défini par le vecteur* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *alors le polynôme* $F \in \mathcal{P}_n$ *avec* $\|F\|_1^\dagger = 1$ *est extrémal pour* $\mathcal{I}$ *si et seulement si*

$$\lambda_k = \|\mathcal{I}\| \int_E x^k\, W(x) \cdot \operatorname{sign} F(x)\, \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{1.3.7}$$

Ici, contrairement à ce qui est déjà vu , il est possible d'avoir plusieurs polynômes $F \in \mathcal{P}_n$ *avec* $\|F\|_1^\dagger = 1$ *pour lesquels* $\mathcal{I}(F) = \|\mathcal{I}\|$.

1.4. Applications

Comme première application de cette théorie, on va démontrer le résultat de Korkine et Zolotareff qui a été traité dans la section 0.3 par une méthode différente.

Théorème 3. *Soit* $F(x) = U_n(x)/2$, où $U_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev du deuxième espèce définie dans (0.1.13). *Soit* $\mathcal{P}_n$ *l'ensemble de tous les polynômes* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ *de degré au plus* n *muni de la norme* $\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\, \mathrm{d}x$. *Définissons sur l'espace* $\mathcal{P}_n$ *le fonctionnel linéaire* $\mathcal{I} : \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \mapsto a_n$. *Alors,* $\|\mathcal{I}\| = \mathcal{I}(F)$. *En d'autres mots, on a l'inégalité suivante :*

$$|a_n| \le 2^{n-1} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, \mathrm{d}x\,.$$

Une deuxième application de cette théorie est suggérée par un résultat de Pierre et Rahman. En effet, ces derniers (voir [12] ou [15, Chapter 16]) ont raffiné le résultat suivant démontré par V.A. Markov [11]

$$|a_{n-2k}| \leq |t_{n-2k,n}| \max_{-1\leq x\leq 1} |f(x)| \qquad \left(k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right), \tag{1.4.1}$$

pour avoir la nouvelle version qui suit :

$$|a_{n-2k}| + |a_{n-2k-1}| \leq |t_{n-2k,n}| \max_{-1\leq x\leq 1} |f(x)| \qquad \left(k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right). \tag{1.4.1'}$$

Il est remarquable que ces deux inégalités sont exactes. Cela se justifie par le fait que le coefficient de x^{n-2k-1} dans le développement de Maclaurin de T_n est nul. Vu que le coefficient de x^{n-1} dans le développement de Maclaurin de U_n et celui de P_n^* défini dans (0.3.7) est nul, on se demande alors si la quantité $|a_n|$ qui apparaît dans le côté gauche des deux inégalités,

$$|a_n| \leq 2^{n-1} \int_{-1}^{1} |f(x)| \,\mathrm{d}x\,, \tag{1.4.2}$$

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \tag{1.4.3}$$

pourrait être remplacée par $|a_n|+|a_{n-1}|$. En effet, le théorème suivant nous révèle plus que cela : il donne la valeur maximale exacte prise par la quantité $|a_n|+\varepsilon|a_{n-1}|$ en fonction de la norme $\|f\|_2$, et ceci pour tout $\varepsilon \geq 0$.

Théorème 4. *Pour tout* $\lambda > -\frac{1}{2}$, *soit* $P_n^{\lambda *}(x)$ *le polynôme défini dans* (0.3.11), *avec*

$$p^*_{n,n} := p^*_{n,n}(\lambda) = \frac{\Gamma(2\lambda+2n)}{2^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+n+\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{n+\lambda}{n!\,\Gamma(n+2\lambda)}}\,. \tag{1.4.4}$$

Alors, pour tout polynôme réel $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ *de degré au plus* n *et pour tout* $\varepsilon \geq 0$, *on a*

$$|a_n| + \varepsilon|a_{n-1}| \leq \sqrt{1+\varepsilon^2 \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda-1)(n+\lambda)}}\; p^*_{n,n}\, \|f\|_2^\dagger\,, \tag{1.4.5}$$

où $\|f\|_2^\dagger := (\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x)^{1/2}$. *L'égalité a lieu seulement pour un multiple constant de* $f(x) := P_n^{(\lambda)*}(x) + \varepsilon\, P_{n-1}^{(\lambda)*}(x)$.

Il est tout à fait logique de se demander s'il existe une extension similaire de l'inégalité (1.4.2) quand $p = 1$. En effet, ce problème est plus complexe à l'exeption du cas où $n = 1$. Avec l'aide du théorème 2, on va trouver la réponse exacte si $n = 2$. Ainsi, il en découle le théorème suivant :

Théorème 5. *Pour un polynôme réel* $f(x) := a_0 + a_1 x$ *de degré* 1, *on a*

$$|a_1| + \varepsilon\,|a_0| \le \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (\varepsilon \ge 0)\,. \tag{1.4.6}$$

Pour tout polynôme réel $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *de degré* 2, *on a*

$$|a_2| + \varepsilon\,|a_1| \le \left(1+\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (\varepsilon \ge 0)\,. \tag{1.4.7}$$

Malheureusement, on n'a aucun résultat semblable aux inégalités (1.4.6) et (1.4.7) pour $n = 3, 4, \ldots$.

On remarque que pour tout $\varepsilon > 0$, le membre droit de (1.4.6) est plus petit que

$$2^{1-1}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

et celui de (1.4.7) est plus petit que

$$2^{2-1}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Ces faits nous amènent à s'interroger si *un polynôme réel, de degré au plus n,* $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, *vérifie l'inégalité*

$$q_{n,\varepsilon}(f) := \frac{|a_n| + \varepsilon\,|a_{n-1}|}{\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x} < 2^{n-1}\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\right) \qquad (\varepsilon > 0)\;.$$

On est dans l'incapacité de répondre à cette question. Par contre , on peut démontrer qu'on ne peut pas faire mieux que cette inégalité. À l'aide d'un raisonnement indépendant de la théorie de Rogosinski, on démontre le résultat suivant :

Théorème 6. *Soit* $b > 2$. *Pour tout entier* $n \ge 3$, *soit* ε *un nombre strictement positif tel que*

$$\varepsilon^{b-2} + \varepsilon^{b} < \frac{60}{(n+1)^6}\,.$$

Posons $f_b(x) = f_{n,b,\varepsilon}(x) := U_n(x) + \varepsilon^{b-1}\,U_{n-1}(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$. *Alors*

$$q_{n,\varepsilon}(f_b) \;:=\; \frac{|a_n| + \varepsilon\,|a_{n-1}|}{\int_{-1}^{1}|f_b(x)|\,\mathrm{d}x} > 2^{n-1}\left(1+\frac{1}{4}\,\varepsilon^{b}\right)\,. \tag{1.4.8}$$

Une troisième application de cette théorie consiste à résoudre le problème suivant :

Problème. Soit $\lambda > -\frac{1}{2}$. Soit $f(x) := a_0 + \cdots + a_n x^n$ un polynôme réel de degré au plus n tel que

$$\|f\|_2^\dagger := \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \, |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq 1 . \tag{1.4.9}$$

Quelle est la valeur maximale de $|a_0|$?

Le théorème suivant va donner une réponse à la question précédente dans le cas où $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{0\}$.

Théorème 7a. *Soit $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{0\}$, supposons que $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ est un polynôme réel de degré au plus n satisfaisant* (1.4.9). *De plus, soit $\{P_m^{(\lambda)}\}$ le polynôme ultrasphérique orthogonal par rapport au poids $W(x) := (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ avec $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$. Alors,*

$$|f(0)| \leq \begin{cases} 2^{\lambda-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}} \left|P_n^{(\lambda)\prime}(0)\right| & \text{si } n \text{ est impair} , \\ 2^{\lambda-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2\lambda+1)}} \left|P_{n+1}^{(\lambda)\prime}(0)\right| & \text{si } n \text{ est pair} . \end{cases}$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, on a cette nouvelle version :

Théorème 7b. *Soit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ un polynôme réel de degré au plus n satisfaisant à la condition*

$$\|f\|_2^\dagger := \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq 1 .$$

Alors,

$$|f(0)| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\pi}} & \text{si } n \text{ est impair} , \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} & \text{si } n \text{ est pair} . \end{cases}$$

1.5. Lemmes

Pour les preuves de ces théorèmes, quelques lemmes seront nécessaires. Le premier, l'inégalité de Hölder, joue un rôle important dans la caractérisation des polynômes extrémaux. De plus, il est crucial de bien connaître le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder. Pour cette raison, on va donner une preuve complète de ce lemme.

Lemme 1 (L'inégalité de Hölder) *Soit $E \subset R$ un ensemble mesurable au sens de Lebesque. Soit $u \in L^p(E)$, $v \in L^{p/(p-1)}(E)$, avec $p > 1$.*

Alors $u \cdot v \in L^1(E)$, *et*

$$\left| \int_E u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \left\{ \int_E |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right\}^{1/p} \left\{ \int_E |v(x)|^{p/(p-1)} \, \mathrm{d}x \right\}^{1-1/p} . \qquad (1.5.1)$$

Cette dernière inégalité devient une égalité si et seulement si le rapport $\dfrac{|u(x)|^p}{|v(x)|^{p/(p-1)}}$ *est une constante presque partout*(p.p.).

Preuve. Soit $0 < m < 1$; $x > 1$ et $y \in (1, x)$. Puisque $t^{m-1} \leq 1$ pour $t \geq 1$ et $t^{m-1} = 1$ seulement pour $t = 1$, on a

$$\int_1^y t^{m-1}\, \mathrm{d}t \leq y - 1 \quad \text{et} \quad \int_y^x t^{m-1}\, \mathrm{d}t \leq y^{m-1}(x-y) < x - y\,.$$

Mais,

$$\frac{1}{m}(x^m - 1) = \int_1^x t^{m-1}\, \mathrm{d}t = \int_1^y t^{m-1}\, \mathrm{d}t + \int_y^x t^{m-1}\, \mathrm{d}t < (y-1) + (x-y)\,,$$

c'est-à-dire que

$$x^m - 1 \leq m(x-1) \qquad (0 < m < 1\,,\ x \geq 1)\,,$$

où le cas d'égalité a lieu seulement lorsque $x = 1$. En posant $x = a/b$ ($a \geq b$), et en multipliant les deux côtés par b, on obtient

$$a^m\, b^{1-m} \leq b + m(a-b)\,. \qquad (1.5.2)$$

Puisque $m \in (0,1)$ si et seulement si $1 - m \in (0,1)$, on constate que (1.5.2) a lieu pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$. De plus, l'égalité dans (1.5.2) se produit seulement dans le cas où $a = b$.

Maintenant, posons $m = \alpha$, $1 - m = \beta$ dans (1.5.2), on obtient

$$a^\alpha\, b^\beta \leq a\alpha + b\beta \qquad (\alpha + \beta = 1)\,, \qquad (1.5.3)$$

où $a^\alpha\, b^\beta = a\alpha + b\beta$, seulement pour $a = b$.

Soit $U : E \to [0, \infty)$ et $V : E \to [0, \infty)$ deux fonctions non identiquement nulles dans $L^1(E)$. Posons

$$a(x) := \frac{U(x)}{\int_E U(t)\, \mathrm{d}t}\ , \quad b(x) := \frac{V(x)}{\int_E V(t)\, \mathrm{d}t}\,.$$

Alors, (1.5.3) implique que

$$\int_E \{a(x)\}^\alpha\, \{b(x)\}^\beta\, \mathrm{d}x \leq \int_E \{\alpha\, a(x) + \beta\, b(x)\}\, \mathrm{d}x = \alpha + \beta = 1\,,$$

où l'inégalité est stricte sauf dans le cas où $a(x) = b(x)$ presque partout dans E. Ainsi, en prenant $\alpha = 1/p$, $U(x) = |u(x)|^p$ et $V(x) = |v(x)|^{p/(p-1)}$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Hölder. Par conséquent, l'égalité dans (1.5.1) se produit si et seulement si $|u(x)|^p/|v(x)|^{p/(p-1)}$ est une constante presque partout. $\square$

Lemme 2. *Soit $U_m(x)$ le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré m. Alors*

$$I_{1,k} = I_{1,k}(U_m) := \int_{-1}^{1} x^k \cdot \operatorname{sign} U_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2^{-m+1} & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k = 0, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{si } k = m+1. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

Preuve. Les faits que $I_{1,m} = 2^{-m+1}$ et $I_{1,k} = 0$ pour $k = 0, \ldots, m-1$ sont déjà connus (voir [23, pp. 84–85, 111–113] ou [9, pp. 30–33]). Donc, on n'a besoin que de démontrer que $I_{1,m+1} = 0$. Pour cela, notons que

$$\begin{aligned} I_{1,k} := \int_{-1}^{1} x^k \cdot \operatorname{sign} U_m(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} (\cos\theta)^k \cdot \operatorname{sign} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\,(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^{\ell} \int_{\frac{\ell\pi}{m+1}}^{\frac{(\ell+1)\pi}{m+1}} (\cos\theta)^k\,(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Cela veut dire que

$$(k+1)\, I_{1,k} = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^{\ell+1} \left\{ \cos^{k+1} \frac{(\ell+1)\pi}{m+1} - \cos^{k+1} \frac{\ell\pi}{m+1} \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (m+2)\, I_{1,m+1} &= 1 + 2\sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell} \left(\cos \frac{\ell\pi}{m+1} \right)^{m+2} + (-1)^{m+1} (\cos\pi)^{m+2} \\ &= 2\sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell} \left(\cos \frac{\ell\pi}{m+1} \right)^{m+2}. \end{aligned}$$

Cette dernière somme contient toujours un nombre pair de termes non nuls. En effet, dans le cas où m est impair, le terme qui correspond à $\ell = (m+1)/2$ est nul. Afin de conclure que $I_{1,m+1}$ est nul, il suffit de remarquer que

$$(-1)^{m-\ell+1} \left(\cos \frac{(m-\ell+1)\pi}{m+1} \right)^{m+2} = -(-1)^{\ell} \left(\cos \frac{\ell\pi}{m+1} \right)^{m+2} \qquad (\ell = 1, \ldots, m).$$

$\square$

Le lemme suivant est connu sous le nom de la quadrature de Gauss-Jacobi (voir 2, p. 343]).

Lemme 3. *Notons par* $\{\pi_n(x)\}$ *les polynômes orthogonaux par rapport au poids* $W(x)$ *sur* $[-1\,,\,1]$, *et soient* $x_1 < \ldots < x_n$ *les zéros de* $\pi_n(x)$. *Alors, on peut trouver des constantes strictement positives* $w_1, \ldots, w_n$ *qui dépendent de* $W(x)$ *telles que*

$$\int_{-1}^{1} W(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu\, f(x_\nu)\,, \tag{1.5.5}$$

et cela, pour tout polynôme f *de degré au plus* $2n-1$.

1.6. Preuves des résultats

Preuve du théorème 1. Soit $q := p/(p-1)$. En considérant (1.2.5), (1.2.6), (1.2.8) et le lemme 1, on a

$$\begin{aligned} \|\mu\|_q = \|\mathcal{I}\| = \mathcal{I}(F) &= \int_E W^*(x)\, F(x)\, \mu(x)\, \mathrm{d}x \\ &\le \int_E W^*(x)\, |F(x)|\, |\mu(x)|\, \mathrm{d}x \\ &\le \left[\int_E \{W^*(x)\, |F(x)|\}^p\, \mathrm{d}x\right]^{1/p} \left[\int_E |\mu(x)|^q\, \mathrm{d}x\right]^{1/q} \\ &= \left\{\int_E |\mu(x)|^q\, \mathrm{d}x\right\}^{1/q} = \|\mu\|_q \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

où on a utilisé

$$\|F\|_p^\dagger = \left[\int_E \{W^*(x)\, |F(x)|\}^p\, \mathrm{d}x\right]^{1/p} = \left\{\int_E W(x)\, |F(x)|^p\, \mathrm{d}x\right\}^{1/p} = 1\,.$$

Le premier et le dernier termes de cette chaîne d'inégalité (1.6.1) sont les mêmes, alors on devra avoir une égalité partout. Ainsi, le polynôme F vérifie

$$\int_E W^*(x)\, F(x)\, \mu(x)\, \mathrm{d}x = \int_E W^*(x)\, |F(x)\mu(x)|\, \mathrm{d}x\,, \tag{1.6.2}$$

et

$$\int_E W^*(x)|F(x)||\mu(x)|\, \mathrm{d}x = \left[\int_E \{W^*(x)\, |F(x)|\}^p\, \mathrm{d}x\right]^{1/p} \left[\int_E |\mu(x)|^q\, \mathrm{d}x\right]^{1/q}. \tag{1.6.3}$$

Pour que l'égalité dans (1.6.2) se produise, $F(x)$ et $\mu(x)$ doivent être de même signe presque partout. Cela veut dire que $\mu(x) = |\mu(x)| \cdot \mathrm{sign}F(x)$, p.p. sur E.

Par ailleurs, par le lemme 1, l'égalité (1.6.3) peut avoir lieu si et seulement si $\{W^*(x)|F(x)|\}^p$ est , p.p. sur E, un multiple constant de $|\mu(x)|^q$. Autrement dit,

$$|\mu(x)| = A\,\{W^*(x)|F(x)|\}^{p/q} = A\,\{W^*(x)\,|F(x)|\}^{p-1}$$

pour une certaine constante positive A. Donc, on devrait avoir, p.p sur E,

$$\mu(x) = |\mu(x)| \cdot \operatorname{sign} F(x) = A \cdot \operatorname{sign} F(x)\ \{W^*(x)|F(x)|\}^{p-1}\,. \tag{1.6.4}$$

De l'égalité (1.2.5) découle que

$$\mathcal{I}(f) = \int_E W^*(x) f(x) \mu(x)\,\mathrm{d}x = A \int_E W(x)\, f(x) \cdot \operatorname{sign} F(x) \cdot |F(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Cela implique que $A = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n}$. En effet, par la jonction de (1.2.6) et (1.6.4), on a

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n} = \|\mu\|_q = \left[\int_E A^q \{W^*(x)|F(x)|\}^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/q} = A\,\left(\|F\|_p^\dagger\right)^{p/q} = A\,.$$

"La représentation(1.2.2) est unique" signifie que si μ_1 et μ_2 sont deux fonctions dans $L^q(E)$ telles que

$$\mathcal{J}^*(\phi) = \int_E \phi(x)\,\mu_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \phi(x)\,\mu_2(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\phi \in \mathcal{L}^p(E))\,,$$

alors $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, p.p. sur E. Si maintenant F_1 et F_2 sont deux polynômes de degré au plus n, avec $\|F_1\|_p^\dagger = \|F_2\|_p^\dagger = 1$, tels que

$$\mathcal{I}(F_1) = \mathcal{I}(F_2) = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{P}_n}\,,$$

alors en vertu de (1.6.4), $F_2(x)$ devra être identique à $F_1(x)$ p.p sur E. En d'autres mots, $F_2(x) - F_1(x) = 0$ p.p sur E. Le fait que E est de mesure de Lebesgue strictement positive nous amène à la conclusion que les polynômes F_1 et F_2 doivent être identiques.

Réciproquement, si un polynôme Q satisfait à (1.3.3) pour tout $f \in \mathcal{P}_n$, alors ce polynôme doit satisfaire à (1.3.3) pour $f(x) := x^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ensuite, ce polynôme est unique. Mais, le polynôme extrémal satisfait aussi à ces $n+1$ conditions, donc le polynôme Q est extrémal. $\square$

Preuve du théorème 2. Appliquons (1.2.7), (1.3.5) et (1.2.5) sur F. Le fait que $W^*(x) := W(x)$ pour $p = 1$ nous donne

$$\begin{aligned} \text{ess. sup}\,|\mu| = \|\mathcal{I}\| = \mathcal{I}(F) &= \int_E W(x)\,F(x)\,\mu(x)\,dx \\ &\leq (\text{ess. sup}\,|\mu|) \cdot \int_E W(x)\,|F(x)|\,dx = \text{ess. sup}\,|\mu|\,. \end{aligned}$$

Or, $\mu(x) = |\mu(x)| \cdot \operatorname{sign} F(x)$, p.p. sur E, et $|\mu(x)| = \text{ess. sup}\,|\mu|$, p.p. sur E. Ainsi, en utilisant (1.2.7), on conclut que

$$\mu(x) = \text{ess. sup}\,|\mu| \cdot \operatorname{sign} F(x) = \|\mathcal{I}\| \cdot \operatorname{sign} F(x) \qquad (\text{p.p. on } E)\,. \tag{1.6.5}$$

La jonction de cette dernière avec (1.2.5) nous donne (1.3.6).

Les égalités dans (1.3.7) seront satisfaites en remarquant que $\{1, x, \dots, x^n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Pour finaliser la preuve du théorème 2, considérons le fonctionnel

$$\mathcal{I} \,:\, \sum_{\nu=0}^{2} a_\nu x^\nu \mapsto a_1$$

défini sur l'espace linéaire normé $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré au plus 2 avec $\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$. Le fonctionnel $\mathcal{I}$ défini par le vecteur (0, 1, 0) $\in \mathbb{R}^3$. Il est facile de vérifier que

$$\int_{-1}^{1} x^0 \cdot 1 \cdot \operatorname{sign} x\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} x^1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sign} x\,dx = 1, \quad \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \cdot \operatorname{sign} x\,dx = 0\,.$$

Ainsi, en prenant $A := 1$, on aura

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A \textstyle\int_{-1}^{1} x^0 \operatorname{sign} x\,dx\,, \\ 1 &= A \textstyle\int_{-1}^{1} x^1 \operatorname{sign} x\,dx\,, \\ 0 &= A \textstyle\int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sign} x\,dx \end{aligned}\right\}\,.$$

En comparant cette dernière avec (1.3.7), on constate que $F(x) := x$ est extrémal pour le fonctionnel $\mathcal{I}$ déjà considéré, et ainsi la norme de $\mathcal{I}$ est $\mathcal{I}(F) = A := 1$.

On affirme que $f(x) := x$ n'est pas le seul polynôme extrémal. En effet, chaque polynôme de la forme

$$F_\delta(x) := x\,(1 \pm \delta\,x) = x \pm \delta x^2 \qquad (\delta \in [0\,,\,1])$$

est extrémal. Pour le voir, il suffit de noter que

$$\int_{-1}^{1} |F_\delta(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|\,(1 \pm \delta\, x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x + \delta \int_{-1}^{1} x\,|x|\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Cela finalise la preuve du théorème 2. □

Preuve du théorème 3. Considérons le polynôme $F(x) := U_n(x)/2$. Remarquons d'abord que $\|F\|_1 = 1$. De plus, par le lemme 2, on a $\int_{-1}^{1} x^k\, F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-1$, et non pas pour $k = n$. Ainsi, en utilisant le théorème 2, on peut conclure que le polynôme F est extrémal pour le fonctionnel $\mathcal{I}\ :\ \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \mapsto a_n$. En d'autres mots, on a démontré l'inégalité suivante : $|a_n| \leq 2^{n-1} \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. □

Preuve du théorème 4. Rappelons d'abord que les polynômes ultrasphériques sont ceux qui sont orthogonaux par rapport au poids $W(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$.
La preuve de ce théorème consiste à utiliser le cas où $p = 2$ du théorème 1′. Pour un $\delta \in \mathbb{R}$, on va définir le polynôme $f_\delta(x) := P_n^{(\lambda)*}(x) + \delta\, P_{n-1}^{(\lambda)*}(x)$. Puisque

$$\int_{-1}^{1} x^k\,(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)*}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k = 0, \ldots, n-1)\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\|f_\delta\|_2^{\dagger}\right)^2 := {} & \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\{f_\delta(x)\}^2\,\mathrm{d}x \\
= {} & \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \{P_n^{(\lambda)*}(x)\}^2\,\mathrm{d}x + \delta^2 \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \{P_{n-1}^{(\lambda)*}(x)\}^2\,\mathrm{d}x \\
= {} & 1 + \delta^2\,,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$f_\delta^*(x) := \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} f_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left\{P_n^{(\lambda)*}(x) + \delta\, P_{n-1}^{(\lambda)*}(x)\right\}$$

est un polynôme de degré n avec $\|f_\delta^*\|_2^{\dagger} = 1$. Par la propriété d'orthogonalité de $P_n^{(\lambda)*}$, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^n\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^n\, P_n^{(\lambda)*}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\, \frac{1}{p_{n,n}^*}\,,
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{n-1}\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{n-1}\, P_{n-1}^{(\lambda)*}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\,\frac{1}{p^*_{n-1,n-1}}\,,$$

et

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{k}\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k=0,\ldots,n-2)\,.$$

En prenant $A := \sqrt{1+\delta^2}\, p^*_{n,n}$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} A\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{k}\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,\ldots,n-2) \\ A\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{n-1}\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x = \delta\,\frac{p^*_{n,n}}{p*_{n-1,n-1}} = \delta\sqrt{\frac{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}{n(n+2\lambda-1)}} \\ A\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, x^{n}\, f_\delta^*(x)\,\mathrm{d}x = 1 \end{array}\right\}. \tag{1.6.6}$$

Par comparaison de (1.6.6) avec (1.3.4′), on déduit que le polynôme f_δ^* est extrémal pout le fonctionnel

$$\mathcal{I}\ :\ \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \mapsto a_n + \delta\sqrt{\frac{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}{n(n+2\lambda-1)}}\,a_{n-1}$$

défini sur l'espace linéaire $\mathcal{P}_n$ de tous les polynômes réels $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ de degré au plus n avec $\|f\|_2^\dagger := \left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$. Ainsi, la norme de $\mathcal{I}$ est

$A := \sqrt{1+\delta^2}\, p^*_{n,n}$. Il s'en suit que

$$a_n + \delta\sqrt{\frac{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}{n(n+2\lambda-1)}}\,a_{n-1} \le \sqrt{1+\delta^2}\, p^*_{n,n}\,.$$

Or, δ peut être positif ou négatif, cela nous donne

$$|a_n| + |\delta|\sqrt{\frac{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}{n(n+2\lambda-1)}}\,|a_{n-1}| \le \sqrt{1+\delta^2}\, p^*_{n,n}\,.$$

En remplaçant $|\delta|\sqrt{\dfrac{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}{n(n+2\lambda-1)}}$ par ε ; on obtient (1.4.5). □

Remarque . En remplaçant ε par 0 et λ par 1/2 dans (1.4.5), on obtient

$$|a_n| \le \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{(2n))!}{2^n\,(n!)^2}\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{0.3.8}$$

Donc, (1.4.5) peut être vu comme une généralisation du théorème D2.

Prenons $\lambda = \frac{1}{2}$ et divisons le deux membres de l' inégalité (1.5.4) par ε et faisons tendre ε vers l'infini, on obtient

$$|a_{n-1}| \leq \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}\, p_{n,n}\, \|f\|_2 = \sqrt{\frac{2n-1}{2}} \frac{(2\,(n-1))!}{2^{n-1}\,((n-1)!)^2}\, \|f\|_2 = p_{n-1,n-1}\, \|f\|_2\,.$$

Cette dernière est exacte seulement dans le cas où notre polynôme est un multiple constant de P^*_{n-1}, le polynôme de Legendre de degré $n-1$.

L'inégalité (1.4.5) nous démontre aussi que le membre gauche de (1.4.3) ne peut pas être remplacé par $|a_n| + |a_{n-1}|$. Même plus, il ne peut pas être remplacé par $|a_n| + \varepsilon\,|a_{n-1}|$ pour un ε positif quelconque. Donc, un raffinement de (1.4.3), comme celui de (1.4.1) ou de (1.4.1′), est tout simplement impossible.

Preuve du théorème 5. On va omettre la preuve de (1.4.6) puisqu'elle est complètement analogue à celle de (1.4.7). En effet, elle est plus simple. On mentionne simplement que l'égalité dans (1.4.6) a lieu seulement pour un multiple constant de $f(x) := \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) U_1(x) + 2\,\varepsilon U_0(x)$.

Pour un $\delta \in (-2, 2)$, soit

$$F_\delta(x) := \frac{2}{4+\delta^2} \left\{ U_2(x) + \delta\, U_1(x) + \frac{\delta^2}{4}\, U_0(x) \right\}.$$

Les coefficients de U_2, U_1 et U_0 sont choisis de telle sorte que la norme $\|F_\delta\|_1 := \int_{-1}^1 |F_\delta(x)|\, \mathrm{d}x$ soit égale à 1 et $\int_{-1}^1 x^0 \operatorname{sign} F_\delta(x)\, \mathrm{d}x = 0$. Les deux zéros de la quadratique F_δ sont

$$x_1 := -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{4} \quad \text{et} \quad x_2 := \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}\,.$$

Évidemment, $F_\delta(x)$ est strictement positive sur $[-1\,,\, x_1) \cup (x_2\,,\, 1]$ et strictement négative sur $(x_1\,,\, x_2)$. Ainsi,

$$\int_{-1}^1 |F_\delta(x)|\, \mathrm{d}x = \frac{2}{4+\delta^2} \left(\int_{-1}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) \left\{ 4x^2 + 2\delta\, x - \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) \right\} = 1$$

et

$$\int_{-1}^1 x^0 \operatorname{sign} F_\delta(x)\, \mathrm{d}x = \left(\int_{-1}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1 \right) \mathrm{d}x = 2\,x_1 + 1 - 2x_2 + 1 = 0\,.$$

Pour appliquer le théorème 2, on a besoin aussi d'évaluer les deux quantités suivantes $\int_{-1}^{1} x^1 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x$. Or,

$$\int_{-1}^{1} x^1 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{x_1} x\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{1} x\,\mathrm{d}x = x_2^2 - x_2^2 = \frac{\delta}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{x_1} x^2\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left\{2 + 2\,(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2)\right\} = \frac{4-\delta^2}{8}\,.\end{aligned}$$

Alors, en prenant

$$A = \frac{8}{4-\delta^2}\,, \tag{1.6.7}$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \tfrac{8}{4-\delta^2} \int_{-1}^{1} x^0 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ \tfrac{4\,\delta}{4-\delta^2} &= \tfrac{8}{4-\delta^2} \int_{-1}^{1} x^1 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ 1 &= \tfrac{8}{4-\delta^2} \int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sign} F_\delta(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}\right\}. \tag{1.6.8}$$

En comparant (1.6.8) avec (1.3.7), on constate que F_δ est extrémal pour le fonctionnel

$$\mathcal{I}\ :\ \sum_{\nu=0}^{2} a_\nu x^\nu \mapsto a_2 + \frac{4\delta}{4-\delta^2}\,a_1$$

sur l'espace linéaire normé $\mathcal{P}_2$ de tous les polynômes f de degré au plus 2 muni de la norme $\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Cela veut dire que

$$|a_2| + \frac{4\delta}{4-\delta^2}\,|a_1| \leq \frac{8}{4-\delta^2} \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (0 \leq \delta < 2)\,.$$

Finalement, en posant $\varepsilon := \dfrac{4\delta}{4-\delta^2}$, il s'en suit que

$$|a_2| + \varepsilon\,|a_1| \leq \left(1 + \sqrt{1+\varepsilon^2}\right) \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

L'égalité aura lieu seulement pour un multiple constant de

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) U_2(x) + \frac{1}{2}\varepsilon\,U_1(x) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) U_0(x) \\ &= \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,x^2 + \varepsilon\,x - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,. \end{aligned}$$ □

Preuve du théorème 6. On va mentionner d'abord que le polynôme f_b ne dépend pas seulement de n et b, mais aussi de ε. De plus, on va noter que

$\varepsilon < \{30/(n+1)^6\}^{1/(b-1)}$ puisque $2\varepsilon^{b-1} < \varepsilon^{b-2} + \varepsilon^b$. À la fin de la preuve, on aura besoin du fait que $\varepsilon^{b-2} + \varepsilon^b < 1/4n^2$. Cette dernière inégalité a lieu puisque $60/(n+1)^6 < 1/4n^2$ pour $n \geq 3$.

Pour rendre la preuve plus élégante, on va la présenter en deux étapes.

Étape I. Rappelons que les zéros de U_n sont

$$x_{\nu,n} := \cos\frac{\nu\pi}{n+1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)\,.$$

Ils appartiennent à l'intervalle $(-1\,,\,1)$, et $x_{\nu+1,n} < x_{\nu,n}$ pour $\nu = 1, \ldots, n-1$. Notons que les zéros de U_{n-1} s'entrelacent avec ceux de U_n. Autrement dit,

$$x_{\nu+1,n} < x_{\nu,n-1} < x_{\nu,n} < x_{\nu-1,n-1} < x_{\nu-1,n} \qquad (\nu = 2, \ldots, n-1)$$

pour $n = 3, 4, \ldots$

Puisque $U_n(x)$ est strictement positif sur $(x_{1,n}\,,\,1]$ et aussi strictement négatif sur $(x_{2,n}\,,\,x_{1,n})$, alors $U_{n-1}(x)$ est strictement positif sur $(x_{1,n-1}\,,\,1] \supset (x_{1,n}\,,\,1]$ et strictement négatif sur $(x_{2,n}\,,\,x_{1,n-1}) \subset (x_{2,n-1}\,,\,x_{1,n-1})$. On peut conclure que, pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le polynôme $U_n(x) + \varepsilon\, U_{n-1}(x)$ a un zéro $\xi_{1,n}$ dans $(x_{1,n-1}\,,\,x_{1,n})$, donc dans $(x_{2,n}\,,\,x_{1,n})$. Cet argument peut être répété pour démontrer que $U_n(x) + \varepsilon\, U_{n-1}(x)$ a un zéro $\xi_{\nu,n}$ dans $(x_{\nu,n-1}\,,\,x_{\nu,n})$, pour $\nu = 1, \ldots, n-1$, et un zéro dans l'intervalle $(-1\,,\,x_{n,n})$ qui sera nommé par $\xi_{n,n}$. Posons $\xi_{0,n} = x_{0,n} = 1$, $\xi_{n+1,n} = x_{n+1,n} = -1$. Alors,

$$-1 = \xi_{n+1,n} = x_{n+1,n} < \xi_{n,n} < x_{n,n} < \cdots < \xi_{2,n} < x_{2,n} < \xi_{1,n} < x_{1,n} < \xi_{0,n} = x_{0,n} = 1$$

pour $n = 3, 4, \ldots$ On prétend que

$$0 < x_{\nu,n} - \xi_{\nu,n} < \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.6.9}$$

pour un ε suffisamment petit , disons $\varepsilon < 30/(n+1)^5$. Pour voir cette dernière, on va utiliser le théorème de Taylor. En effet,

$$U_n(x_{\nu,n} + \varepsilon) = U_n(x_{\nu,n}) + \varepsilon\, U_n'(x_{\nu,n}) + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\, U_n''(t) \tag{1.6.10}$$

pour un $t \in (x_{\nu,n}\,,\,x_{\nu,n} + \varepsilon)$. Puisque $U_n(x_{\nu,n}) = 0$ et $U_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\,T_{n+1}'(x)$, l'égalité (1.6.10) sera

$$U_n(x_{\nu,n} + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{n+1}\left\{T_{n+1}''(x_{\nu,n}) + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, T_{n+1}'''(t)\right\}.$$

Or, le polynôme T_{n+1} satisfait l'équation différentielle

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + (n+1)^2 y = 0$$

ainsi que $T_{n+1}(x_{\nu,n}) = (-1)^\nu$. Par conséquent,

$$U_n(x_{\nu,n}+\varepsilon) = \varepsilon \left\{ (-1)^{\nu+1} \frac{n+1}{1-x_{\nu,n}^2} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} T_{n+1}'''(t) \right\} .$$

Du fait que

$$\max_{-1\le x\le 1} |T_{n+1}'''(t)| = T_{n+1}'''(1) = \frac{(n+1)^2\,((n+1)^2-1^2)\,((n+1)^2-2^2)}{1\cdot 3\cdot 5} < \frac{(n+1)^6}{15}$$

découle

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu+1} U_n(x_{\nu,n}+\varepsilon) &= \varepsilon \left\{ \frac{n+1}{1-x_{\nu,n}^2} - (-1)^\nu \frac{\varepsilon}{2(n+1)} T_{n+1}'''(t) \right\} \\ &> \varepsilon \left\{ (n+1) - \frac{1}{30}\,\varepsilon\,(n+1)^5 \right\} > n\varepsilon \qquad (1.6.11) \end{aligned}$$

pour un $\varepsilon < 30/(n+1)^5$. D'une façon analogue, on démontre que

$$(-1)^{\nu+1} U_n(x_{\nu,n}-\varepsilon) < -n\varepsilon \quad \text{pour un} \quad \varepsilon < \frac{30}{(n+1)^5} . \qquad (1.6.12)$$

En se basant sur

$$|U_{n-1}(x)| = \frac{1}{n} |T_n'(x)| < n \quad \text{pour} \quad -1 < x < 1$$

et sur (1.6.11) et (1.6.12), on conclut que

$$(-1)^{\nu+1} \left\{ U_n(x_{\nu,n}+\varepsilon) + \varepsilon U_{n-1}(x_{\nu,n}+\varepsilon) \right\} > 0 ,$$

alors que

$$(-1)^{\nu+1} \left\{ U_n(x_{\nu,n}-\varepsilon) + \varepsilon U_{n-1}(x_{\nu,n}-\varepsilon) \right\} < 0 .$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, $(-1)^{\nu+1}\{U_n(x)+\varepsilon U_{n-1}(x)\}$ doit s'annuler au moins une fois dans $(x_{\nu,n}-\varepsilon\,,\,x_{\nu,n}+\varepsilon)$, c'est-à-dire que le polynôme $U_n+\varepsilon U_{n-1}$ possède au moins un zéro dans $(x_{\nu,n}-\varepsilon\,,\,x_{\nu,n}+\varepsilon)$ pour $\varepsilon < 30/(n+1)^5$. Cela étant vrai pour chaque ν, donc il ne peut pas avoir plus qu'un zéro dans $(x_{\nu,n}-\varepsilon\,,\,x_{\nu,n}+\varepsilon)$. Ainsi, en vertu de ce qui a été déjà dit au début de la preuve, ce zéro doit appartenir à $(x_{\nu,n}-\varepsilon\,,\,x_{\nu,n})$, et non pas à $[x_{\nu,n}\,,\,x_{\nu,n}+\varepsilon]$.

Étape II. Les informations obtenues concernant la location des points $\xi_{\nu,n}$ seront utilisées maintenant pour trouver une borne supérieure de

$$\phi(\varepsilon) := \int_{-1}^{1} |U_n(x) + \varepsilon U_{n-1}(x)| \, dx \, .$$

Puisque $\xi_{\nu+1,n} < x_{\nu+1,n} < \xi_{\nu,n} < x_{\nu,n}$, $\xi_{0,n} = x_{0,n} := 1$, et $\xi_{n+1,n} = x_{n+1,n} := -1$, on aura

$$\begin{aligned}
\phi(\varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \int_{\xi_{\nu+1,n}}^{\xi_{\nu,n}} \{U_n(x) + \varepsilon U_{n-1}(x)\} \, dx \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \left(\int_{x_{\nu+1,n}}^{\xi_{\nu,n}} + \int_{\xi_{\nu+1,n}}^{x_{\nu+1,n}} \right) \{U_n(x) + \varepsilon U_{n-1}(x)\} \, dx \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \int_{x_{\nu+1,n}}^{\xi_{\nu,n}} U_n(x) \, dx + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \int_{x_{\nu+1,n}}^{\xi_{\nu,n}} U_{n-1}(x) \, dx \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu-1} \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} \{U_n(x) + \varepsilon U_{n-1}(x)\} \, dx \, .
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\phi(\varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \left(\int_{x_{\nu+1,n}}^{\xi_{\nu,n}} - \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} \right) U_n(x) \, dx \\
&\quad + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \left(\int_{x_{\nu+1,n}}^{x_{\nu,n}} - \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} \right) U_{n-1}(x) \, dx - \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} U_{n-1}(x) \, dx \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \int_{x_{\nu+1,n}}^{x_{\nu,n}} (-1)^{\nu} U_n(x) \, dx - 2 \sum_{\nu=0}^{n} \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} (-1)^{\nu} U_n(x) \, dx \\
&\quad + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} \int_{x_{\nu+1,n}}^{x_{\nu,n}} (-1)^{\nu} U_{n-1}(x) \, dx - 2\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} U_{n-1}(x) \, dx \, .
\end{aligned}$$

Notons que $(-1)^{\nu} U_n(x) \geq 0$ pour $x_{\nu+1,n} \leq x \leq x_{\nu,n}$ et *a fortiori* pour $\xi_{\nu,n} \leq x \leq x_{\nu,n}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} \int_{x_{\nu+1,n}}^{x_{\nu,n}} (-1)^{\nu} U_{n-1}(x) \, dx &= \sum_{\nu=0}^{n} \int_{x_{\nu+1,n}}^{x_{\nu,n}} (\text{sign}\, U_n(x)) \, U_{n-1}(x) \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (\text{sign}\, U_n(x)) \, U_{n-1}(x) \, dx = 0
\end{aligned}$$

puisque $(\text{sign}\, U_n(x)) \, U_{n-1}(x)$ est une fonction impaire. Ainsi

$$\phi(\varepsilon) < \int_{-1}^{1} |U_n(x)| \, dx - 2\,\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} U_{n-1}(x) \, dx \, .$$

Par (1.6.9), il s'en suit que

$$\left|\int_{\xi_{\nu,n}}^{x_{\nu,n}} U_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |U_{n-1}(x)|\cdot(x_{\nu,n}-\xi_{\nu,n}) < n\,\varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon < \frac{30}{(n+1)^5}\,.$$

En tenant compte de $\int_{-1}^{1} |U_n(x)|\,\mathrm{d}x = 2$, on obtient

$$\phi(\varepsilon) = \int_{-1}^{1} |U_n(x) + \varepsilon U_{n-1}(x)|\,\mathrm{d}x < 2 + 2\,n^2\,\varepsilon^2 \quad \text{si} \quad \varepsilon < \frac{30}{(n+1)^5}\,. \qquad (1.6.13)$$

En appliquant (1.6.13) au polynôme

$$f_b(x) := U_n(x) + \varepsilon^{b-1} U_{n-1}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots$$

pour lequel $a_n + \varepsilon\, a_{n-1} = 2^n + 2^{n-1}\,\varepsilon^b$, car $a_n = 2^n$ et $a_{n-1} = 2^{n-1}\,\varepsilon^{b-1}$, on peut dire que

$$\int_{-1}^{1} |f_b(x)|\,\mathrm{d}x < 2 + 2\,n^2\,\varepsilon^{2b-2} \quad \text{si} \quad \varepsilon^{b-1} < \frac{30}{(n+1)^5}\,.$$

Ainsi l'inégalité (1.4.8) a lieu si

$$\varepsilon^{b-1} < \frac{30}{(n+1)^5} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{b-2} + \frac{1}{4}\,\varepsilon^b < \frac{1}{4n^2}\,,$$

donc aussi pour un $\varepsilon^{b-2} + \varepsilon^b < 60/(n+1)^6$. □

Preuve du théorème 7a. Afin de présenter la preuve de ce théorème, on va rappeler que les polynômes ultrasphériques sont définis explicitement par :

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^\nu \frac{\Gamma(n-\nu+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(n-2\lambda+1)}\,(2x)^{n-2\nu}\,.$$

En particulier, si $n = 2m+1$, on a l'égalité suivante :

$$\left|P_n^{(\lambda)\prime}(0)\right| = \frac{\Gamma(m+1+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,. \qquad (1.6.14)$$

Les multiplicateurs w_ν, appelés les nombres de Christoffel, qui correspondent au poids $W(x) := (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$ sont (voir [21, p. 352, formule (15.3.2)])

$$w_\nu = \frac{2^{2-2\lambda}\,\pi}{\{\Gamma(\lambda)\}^2}\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{1}{(1-x_\nu^2)\{P_n^{(\lambda)\prime}(x_\nu)\}^2} \qquad (\nu = 1,\ldots,n)\,.$$

En particulier si $n = 2m+1$, alors $x_{m+1} = 0$ et

$$w_{m+1} = \frac{2^{2-2\lambda}\,\pi}{\{\Gamma(\lambda)\}^2}\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{1}{\{P_n^{(\lambda)\prime}(0)\}^2} \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2},\ \lambda \neq 0\right)\,. \qquad (1.6.15)$$

Quand $n = 2m+1$, le polynôme $P_n^{(\lambda)}$ a un zéro à l'origine. Donc, le polynôme $Q_n(x) := x^{-1} P_n^{(\lambda)}(x)$ est de degré $n-1$. En appliquant (1.5.5) en jonction avec (1.6.15), on obtient

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \{Q_{n,\lambda}(x)\}^2 \, dx = \frac{2^{2-2\lambda}\,\pi}{\{\Gamma(\lambda)\}^2} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)} \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\,;\ \lambda \neq 0\right).$$

Ainsi, avec la norme $\|f\|_2^\dagger$ définie en (1.4.9), on a

$$\|Q_{n,\lambda}\|_2^\dagger = \frac{2^{1-\lambda}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)}} \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\,;\ \lambda \neq 0\right). \tag{1.6.16}$$

Finalement, soit $F_{n,\lambda}(x) := Q_{n,\lambda}(x)/\|Q_{n,\lambda}\|_2^\dagger$. Alors,

$$F_{n,\lambda}(x) = \frac{2^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\lambda) \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}} \cdot \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{x} \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\,;\ \lambda \neq 0\right) \tag{1.6.17}$$

est un polynôme de degré $n-1$ avec $\|F_{n,\lambda}\|_2^\dagger = 1$.

On prétend que pour tout polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, de degré impair n et satisfaisant (1.4.9), on a $|a_0| \leq |F_{n,\lambda}(0)|$, sauf dans le cas où $\lambda = 0$. Notre assertion découle du cas où $p = 2$ du théorème 1′. Pour vérifier cette dernière, on va évaluer les intégrales

$$\psi_k := \int_{-1}^{1} x^k (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} F_{n,\lambda}(x) \, dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

En tenant compte du fait que $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_m^{(\lambda)}(x)\, P_n^{(\lambda)}(x) \, dx = 0$ pour $m \neq n$, on obtient

$$\psi_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1.6.18}$$

La valeur de ψ_0 sera calculée en utilisant encore une fois la formule de la quadrature du Lemme 3, avec $W(x) := (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. Ainsi, en prenant les valeurs de w_{m+1} et $\|Q_{n,\lambda}\|_2^\dagger$ trouvées dans (1.6.15) et (1.6.16) respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_0 = w_{m+1}\, F_{n,\lambda}(0) &= w_{m+1} \frac{P_n^{(\lambda)\prime}(0)}{\|Q_{n,\lambda}\|_2^\dagger} \\ &= 2^{1-\lambda} \sqrt{\pi}\, \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)}} \frac{1}{P_n^{(\lambda)\prime}(0)}. \end{aligned} \tag{1.6.19}$$

En tenant compte de (1.6.18) et (1.6.19), avec un

$$A := 2^{\lambda-1} \frac{\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}} \left| P_n^{(\lambda)\prime}(0) \right| ,$$

on aura

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sign} P_n^{(\lambda)\prime}(0) & = & A \int_{-1}^{1} x^k (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} F_{n,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x \quad (k=0)\,, \\ 0 & = & A \int_{-1}^{1} x^k (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} F_{n,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x \quad (k=1,\ldots,n) \end{array}\right\}. \tag{1.6.20}$$

Par la comparaison de (1.6.20) avec (1.3.4′), on peut constater que tout polynôme $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, de degré *impair* n, qui satisfait (1.4.9) vérifie

$$|a_0| \le A = 2^{\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)}}\left|P_n^{(\lambda)\prime}(0)\right| \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2},\ \lambda \neq 0\right). \tag{1.6.21}$$

Cette dernière estimation est exacte, et la borne supérieure est atteinte pour $\pm F_{n,\lambda}$.

Le polynôme $F_{n,\lambda}$ est de degré égal à $n-1$. Cela veut dire que si n est impair, alors le supremum de $|f(0)|$, parmi tous les polynômes réels de degré au plus n satisfaisant (1.4.9), est atteint pour un polynôme de degré $n-1$ qu'on a nommé $F_{n,\lambda}$. Il en découle que si n est pair, alors le supremum de $|f(0)|$ parmi tous les polynômes de degré n satisfaisant (1.4.9) est atteint par $F_{n+1,\lambda}$. Cela est dû au fait que ce dernier maximise $|f(0)|$ sur une plus grande classe, celle de tous les polynômes f de degré allant jusqu'à $n+1$ et satisfaisant (1.4.9). □

Preuve du théorème 7b. Dans le cas où $\lambda = 0$, on devra maximixer $|f(0)|$ sous la supposition que f est un polynôme de degré au plus n satisfaisant

$$\|f\|_2^{\dagger} := \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le 1\,. \tag{1.6.22}$$

Rappelons que les polynômes orthogonaux par rapport au poids $1/\sqrt{1-x^2}$ sont les polynômes de Chebyshev de première espèce . Cela nous suggère que, pour un n impair, $|f(0)|$ sera maximisé par

$$F_{n,1/2}(x) := \frac{x^{-1}\,T_n(x)}{\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,|x^{-1}\,T_n(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}\,.$$

De plus, lorsque $W(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, les zéros de T_n sont les noeuds de la formule de quadrature de Gauss dans le Lemme 3. Dans ce cas, les nombres de Christoffel associés w_ν sont π/n pour $\nu = 1,\ldots,n$ (voir, e.g. [23, p. 48]). En utilisant ces informations, on peut conclure que

$$F_{n,1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{T_n(x)}{x} \qquad (n \text{ impair}),$$

$$\int_{-1}^{1} x^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} F_{n,1/2}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

et

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} F_{n,1/2}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

En appliquant le théorème 1′, la preuve du théorème 7b sera complétée . □

Chapitre 2

PROBLÈMES EXTRÉMAUX POUR DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES RÉELS

2.1. La théorie de Rogosinski pour les polynômes trigonométriques réels

Un polynôme trigonométrique réel de degré n est une somme finie définie de la manière suivante :

$$t(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

où $a_0, \ldots a_n$ et $b_1, \ldots b_n$ sont des réels. On définit $\mathcal{T}_n^{(\mathbb{R})}$ l'espace linéaire de tous les polynômes trigonométriques réels t, de degré au plus n. Soient E un sous ensemble de $[-\pi\,,\,\pi]$ mesurable au sens de Lebesgue et $W : E \to [0\,,\infty)$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue. Pour $p \geq 1$, on munit cet espace de la norme

$$\|t\|_p^\dagger := \left(\int_E W(\theta) |t(\theta)|^p \, \mathrm{d}\theta \right)^{1/p}. \qquad (2.1.1)$$

Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. L'application définie par

$$t(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) \mapsto \alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu a_\nu + \beta_\nu b_\nu) \qquad (2.1.2)$$

est un fonctionnel linéaire continu, $\mathcal{I}$, sur l'espace linéaire $\mathcal{T}_n^{(\mathbb{R})}$ de tous les polynômes trigonométriques de degré au plus n muni de la norme $\|t\|_p^\dagger$ telle que donnée dans (2.1.1)(cet espace sera noté par $\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$). En effet, il existe une correspondance biunivoque entre les fonctionnels linéaires continus définis sur $\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$ et les vecteurs dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. En d'autres mots, une application, $\mathcal{I}$, définie sur $\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$ est un fonctionnel linéaire continu si et seulement si il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1 \ldots, \beta_n$ tels que

$$\mathcal{I}(t) := \alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu a_\nu + \beta_\nu b_\nu) \quad \left(t(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) \right) . \tag{2.1.3}$$

On va déterminer la norme de $\mathcal{I}$ définie par :

$$\|\mathcal{I}\| = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}} := \sup \left\{ \alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu a_\nu + \beta_\nu b_\nu) : \|t\|_p^\dagger \leq 1 \right\} .$$

L'espace $\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$ est de dimension finie. De ce fait, la boule unité fermée de cet espace est un ensemble compact. Par la suite, la norme de $\mathcal{I}$ sera atteinte. Cela nous assure l'existence d'un polynôme $T \in \mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$ avec $\|T\|_p^\dagger = 1$ tel que $\mathcal{I}(T) = \|\mathcal{I}\|$.

Évidemment la caractérisation d'un tel polynôme extrémal doit être donnée en termes des composantes $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ puisque notre fonctionnel est défini à partir de ces composantes.

Posons $W^*(\theta) := \{W(\theta)\}^{1/p}$ et $g(\theta) := W^*(\theta)\, t(\theta)$. Il en découle que

$$\|g\|_p := \left(\int_E |g(\theta)|^p \, \mathrm{d}\theta \right)^{1/p} = \left(\int_E W(\theta) |t(\theta)|^p \, \mathrm{d}\theta \right)^{1/p} = \|t\|_p^\dagger$$

est une norme sur le sous-espace $\mathcal{G}_n := \{W^* t \;:\; t \in \mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}\}$ de l'espace linéaire $\mathcal{L}^p(E)$. Pour tout $g \in \mathcal{G}_n$, on pose $\mathcal{I}^*(g) = \mathcal{I}(t)$.

Maintenant, en utilisant le théorème de Hahn-Banach (Théorème [1 , p. 55]), on peut étendre $\mathcal{I}^*$ sur l'espace $\mathcal{L}^p(E)$ tout entier, et cela *en préservant la norme*. Cela veut dire qu'il existe un fonctionnel $\mathcal{J}^*$ défini sur $\mathcal{L}^p(E)$ avec $\mathcal{J}^*(\phi) = \mathcal{I}^*(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{G}_n$, et $\|\mathcal{J}^*\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \|\mathcal{I}^*\|_{\mathcal{G}_n} = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}}$. Par un théorème de F. Riesz, ce prolongement $\mathcal{J}^*$ admet une représentation *unique* (voir [18, p. 78] ou [1 , pp. 64–65]) de la forme

$$\mathcal{J}^*(\phi) = \int_E \phi(\theta)\, \mu(\theta)\, \mathrm{d}\theta \qquad (\phi \in \mathcal{L}^p(E)) . \tag{2.1.4}$$

Si $p > 1$, alors μ appartient à $L^q(E)$ où $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et

$$\|\mathcal{J}^*\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \|\mu\|_q := \left(\int_E |\mu(\theta)|^q \, \mathrm{d}\theta \right)^{1/q} \qquad (1 < p < \infty) . \tag{2.1.5}$$

Dans le cas où $p=1$, la fonction μ sera mesurable. De plus, elle est essentiellement bornée sur E avec

$$\|\mathcal{J}^*\|_{\mathcal{L}^1(E)} = \text{ess. sup } |\mu| \,. \tag{2.1.6}$$

En résumé, on arrive à l'égalité suivante :

$$\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}^*(g) = \mathcal{J}^*(g) = \int_E g(\theta)\,\mu(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_E W^*(\theta)\,t(\theta)\,\mu(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{2.1.7}$$

avec

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{T}^{(\mathbf{R})}_{n,p}} = \|\mathcal{I}^*\|_{\mathcal{G}_n} = \|\mu\|_q \quad \text{si} \quad p>1\,, \tag{2.1.8}$$

et

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{T}^{(\mathbf{R})}_{n,p}} = \text{ess. sup } |\mu| \quad \text{si} \quad p=1\,. \tag{2.1.9}$$

Ainsi le polynôme extrémal T satisfait à la condition suivante :

$$\mathcal{I}(T) = \int_E W^*(\theta)\,F(\theta)\,\mu(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{T}^{(\mathbf{R})}_{n,p}}\,. \tag{2.1.10}$$

2.2. Énoncés des résulats

Les deux prochains théorèmes, 8 et 9, sont des analogues aux théorèmes 1, 1′ et 2 qui ont été démontrés dans les moindres détails dans le premier chapitre. C'est pour cette raison qu'on va omettre leur preuve.

Théorème 8. *Soit E, W, $\mathcal{T}^{(\mathbf{R})}_{n,p}$, $\mathcal{I}$ et T tels que déjà définis. Alors, pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\mathcal{I}(t) = A\int_E W(\theta)\,t(\theta)\,\mathrm{sign}\,(T(\theta))\cdot|T(\theta)|^{p-1}\,\mathrm{d}\theta \qquad (t \in \mathcal{T}^{(\mathbf{R})}_{n,p}) \tag{2.2.1}$$

avec $A = \|\mathcal{I}\|$. Dans le cas où $p>1$, le polynôme trigonométrique extrémal T est unique.

Théorème 9. *Soit $p \geq 1$. Le fonctionnel donné en* (2.1.2) *admet un polynôme extrémal T, $\|T\|_p^\dagger = 1$, si et seulement si on a l'égalité suivante :*

$$\gamma_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k = A\int_E \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} W(\theta)\,\mathrm{sign}\,(T(\theta))\cdot|T(\theta)|^{p-1}\,\mathrm{d}\theta \qquad (A>0) \tag{2.2.2}$$

pour tout $k = 0,\ldots,n$.

2.3. Applications

Une application du théorème 9 est le résultat suivant qui possède, à son tour, plusieurs conséquences intéressantes.

Théorème 10. *Soit* $t(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$ *un polynôme trigonométrique réel de degré au plus* n. *Alors, pour tout* $p \geq 1$, *on a*

$$|a_\ell| \leq \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos \ell\theta|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |t(\theta)|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \qquad \left(\ell > \frac{n}{3}\right). \tag{2.3.1}$$

Le théorème 10 peut être énoncé, d'une manière équivalente, de la façon suivante :

Théorème 10′. *Soit* $f(z) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - \mathrm{i}b_\nu)z^\nu$ *un polynôme de degré au plus* n, *tel que* $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ *sont tous réels . Alors, pour tout* $p \geq 1$, *on a*

$$|a_\ell| \leq \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos \ell\theta|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Re f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \qquad \left(\ell > \frac{n}{3}\right). \tag{2.3.2}$$

Une application du théorème 10 consiste à démontrer le résultat connu suivant

(voir [13] ou [15, Chapter 16]).

Corollaire 1a. *Soit* $\tau(\theta) := \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}$ *un polynôme trigonométrique (pas nécessairement réel) de degré au plus* n. *Alors , pour tout* $p \geq 1$, *on a*

$$|c_{-\ell}| + |c_\ell| \leq \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos \ell\theta|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(\theta)|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \qquad \left(\ell > \frac{n}{3}\right). \tag{2.3.3}$$

Maintenant, on présente quelques conséquences du corollaire 1a.

Corollaire 2a. *Soit* T_k *le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré* k. *De plus, soit* $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ *un polynôme de degré au plus* n, *pas nécessairement réel, et* $p \geq 1$. *Alors, pour* $k = n, n-1$, *on a*

$$|a_k| \leq \frac{2^{k-1}}{\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |T_k(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{2.3.4}$$

Remarque 1. Le cas où $p = 2$ du corollaire 2a est bien connu.

En tenant compte des théorèmes 1′ et 2 du chapitre 1, le corollaire 2a est équivalent au résultat suivant :

Corollaire 2b. *Soit T_m le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré m. De plus, pour un $p \geq 1$, soit*

$$W(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,|T_m(x)|^{p-1} \qquad (-1 < x < 1)$$

et $I_{p,k} = I_{p,k}(T_m) := \int_{-1}^{1} x^k\, W(x)\,\mathrm{sign}\,(T_m(x))\,\mathrm{d}x$. Alors

$$I_{p,k} = \begin{cases} 2^{-m+1}\left(\int_{-1}^{1} W(x)\,|T_m(x)|\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k = 0, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{si } k = m+1\,. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Soit n et m deux entiers strictement positifs. En se basant sur les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos n\theta|^p\,\mathrm{d}\theta &= \frac{2}{n}\int_0^{n\pi} |\cos\phi|^p\,\mathrm{d}\phi = 2\int_0^{\pi} |\cos\phi|^p\,\mathrm{d}\phi = 4\int_0^{\pi/2} |\cos\phi|^p\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\int_0^{\pi/2} |\sin\phi|^p\,\mathrm{d}\phi = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin\phi|^p\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{m}\int_{-m\pi}^{m\pi} |\sin\phi|^p\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin m\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\,, \end{aligned}$$

on peut énoncer le corollaire 1a de la façon suivante :

Corollaire 1b. *Soit $\tau(\theta) := \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu e^{i\nu\theta}$ un polynôme trigonométrique (pas nécessairement reél) de degré au plus N. Alors , pout tout $p \geq 1$, on a*

$$|c_{-\ell}| + |c_\ell| \leq \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin \ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \qquad \left(\ell > \frac{N}{3}\right). \tag{2.3.3'}$$

Du corollaire 1b découle le résultat suivant :

Corollaire 3a. *Soit U_m le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré m. De plus, soit $f(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ un polynôme de degré au plus n, pas nécessairement réel, et $p \geq 1$. Alors, pour $m = n, n-1$, on a*

$$|a_m| \leq \frac{2^m}{\left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}}\,|U_m(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}} \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}}\,|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{2.3.6}$$

Remarque 2. En prenant $p = 1$ et $m = n$ dans l'inégalité (2.3.6), on retrouve l'inégalité (0.2.9). Donc (2.3.6) est une généralisation de (0.2.9).

En tenant compte des théorèmes 1′ et 2, le corollaire 3a est équivalent au corollaire 3b. Ce dernier peut être vu comme une extension du lemme 2 (il suffit de prendre $p = 1$).

Corollaire 3b. *Soit U_m le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré m. De plus, pour un $p \geq 1$, soient*

$$W(x) := (1 - x^2)^{(p-1)/2}\, |U_m(x)|^{p-1} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

et $I_{p,k} = I_{p,k}(U_m) := \int_{-1}^{1} x^k\, W(x)\, \mathrm{sign}\,(U_m(x))\, \mathrm{d}x$. Alors,

$$I_{p,k}(U_m) = \begin{cases} 2^{-m} \left(\int_{-1}^{1} W(x)\, |U_m(x)|\, \mathrm{d}x\right)^{1/p} & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k = 0, \ldots, m-1, \\ 0 & \text{si } k = m+1\,. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

2.4. Preuve des résultats

Preuve du théorème 10. Soit $E = [-\pi, \pi]\,, W(\theta) = 1$. Soit $\mathcal{T}_{n,p}^{(\mathbb{R})}$ l'espace linéaire de tous les polynômes trigonométriques t de degré au plus n muni de la norme suivante : $\|t\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |t(\theta)|^p\, \mathrm{d}\theta\right)^{1/p}$. Soit $\mathcal{I}_\ell$ le fonctionnel

$$t(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) \mapsto a_\ell\,.$$

On a besoin de déterminer la norme de $\mathcal{I}_\ell$. Avec l'aide du théorème 9, on va démontrer que la norme de $\mathcal{I}_\ell$ est atteinte pour

$$T(\theta) := \frac{\cos \ell\theta}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos \ell\theta|^p\, \mathrm{d}\theta\right)^{1/p}}\,. \tag{2.4.1}$$

En tenant compte de (2.2.2), on a besoin d'évaluer les intégrales

$$\mathcal{I}_{k,p} := \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\, \mathrm{sign}\,(T(\theta))\, |T(\theta)|^{p-1}\, \mathrm{d}\theta \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{2.4.2}$$

Pour se faire, on va trouver la série de Fourier de la fonction $G(\theta) := (\mathrm{sign}\,(\cos\theta))\, |\cos(\theta)|^{p-1}$. Notons que G est une fonction paire, alors la série de Fourier de G ne possède que des termes en cosinus. Puisque G est continue et qu'elle est à variations bornées sur$[-\pi\,,\,\pi]$, on peut écrire (voir [7, p. 42 (Théorème 57)]) :

$$G(\theta)=\alpha_0+\alpha_1\cos\theta+\cdots+\alpha_\nu\cos\nu\theta+\cdots.$$

Maintenant, on note que $G(\pi-\theta)=-G(\theta)$. Ainsi, pour $j=0,1,\ldots$, on aura

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}G(\theta)\,\cos 2j\theta\,\mathrm{d}\theta &= 2\int_0^{\pi/2}G(\theta)\,\cos 2j\theta\,\mathrm{d}\theta+2\int_{\pi/2}^{\pi}G(\theta)\,\cos 2j\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}G(\theta)\,\cos 2j\theta\,\mathrm{d}\theta-2\int_0^{\pi/2}G(\phi)\,\cos 2j\phi\,\mathrm{d}\phi=0.\end{aligned}$$

Cela veut dire que les coefficients $\alpha_0,\alpha_2,\alpha_4,\ldots$ sont tous nuls. En d'autres mots, on a

$$G(\theta)=\alpha_1\cos\theta+\alpha_3\cos 3\theta+\alpha_5\cos 5\theta+\cdots\qquad\left(\alpha_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right).$$

Donc,

$$(\mathrm{sign}\,(\cos\ell\theta))\,|\cos\ell\theta|^{p-1}=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)\cos\ell\theta+\alpha_3\cos 3\ell\theta+\cdots.\qquad(2.4.3)$$

Avec cette dernière, on est prêt à évaluer les intégrales de (2.4.2). En se référant à (2.4.1) pour la définition de T, on peut conclure de (2.4.3) que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\ell,p} &= \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{(p-1)/p}}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\ell\theta)\ \mathrm{sign}\,(\cos\ell\theta)\,|\cos\ell\theta|^{p-1}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{(p-1)/p}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\ell\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\ell\theta\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Mais, le fait que $\ell>n/3$ nous donne

$$\mathcal{I}_{k,p}=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos k\theta)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2j+1}\cos{(2j+1)\ell\theta}\right)\mathrm{d}\theta=0\qquad(k\in\{0,1,\ldots,n\}\backslash\{\ell\}).$$

Ainsi, en posant $A:=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\ell\theta|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{-1/p}$, on voit que

$$\left.\begin{aligned}0 &= A\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{sign}\,(T(\theta))\,|T(\theta)|^{p-1}\,\mathrm{d}\theta\quad(k\in\{0,\ldots,n\}\backslash\{\ell\}),\\ 1 &= A\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{sign}\,(T(\theta))\,|T(\theta)|^{p-1}\,\mathrm{d}\theta\quad(k=\ell)\end{aligned}\right\},\qquad(2.4.4)$$

et le résultat voulu découle du théorème 9. □

Preuve du corollaire 1a. Soit

$$c_{-\ell} = |c_{-\ell}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,, \quad c_\ell = |c_\ell|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\,.$$

Alors, avec $\delta := \frac{(\alpha+2\pi-\beta)}{2\ell}$, on a

$$B(\theta) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell\delta-\alpha)}\,\tau(\theta+\delta) = \sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\,,$$

où $d_{-\ell}$ et d_ℓ sont positifs. Évidemment,

$$C(\theta) := \frac{1}{2}\left(B(\theta) + \overline{B(\bar{\theta})}\right) = \sum_{\nu=-n}^{n} \Delta_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}$$

est un polynôme trigonométrique *réel* de degré au plus n tel que

$$\Delta_{-\ell} = \Delta_\ell = \frac{1}{2}(d_\ell + d_{-\ell}) \geq 0\,.$$

Le polynôme C peut être écrit sous la forme suivante :

$$C(\theta) := a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta + b_\nu\sin\nu\theta) \qquad (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R})\,,$$

avec $b_\ell = 0$ et $a_\ell = d_\ell + d_{-\ell} = |c_\ell| + |c_{-\ell}|$. En utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\|C\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |C(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |B(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}.$$

Finalement, par le théorème 10, l'inégalité voulue a lieu. □

Preuve du corollaire 2a. Soit

$$\tau(\theta) := f(\cos\theta) = \frac{a_n}{2^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta} + \frac{a_n}{2^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

Alors,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,|f(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} |f(\cos\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Ainsi, par le corollaire 1a pour $\ell = n$, on obtient

$$\begin{aligned} |a_n| &= 2^{n-1}\left(\frac{|a_n|}{2^n} + \frac{|a_n|}{2^n}\right) \\ &\le 2^{n-1}\frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos n\theta|^p \, d\theta\right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tau(\theta)|^p \, d\theta\right)^{1/p} \\ &= \frac{2^{n-1}}{\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |T_n(x)|^p \, dx\right)^{1/p}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Ceci prouve (2.3.4) pour $k = n$.

En tenant compte de l'inégalité de Minkowski ($p \ge 1$)

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left|\frac{f(x) \pm f(-x)}{2}\right|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

et

$$a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots = \begin{cases} \frac{f(x)-f(-x)}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{f(x)+f(-x)}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On constate que (2.3.4), qui est vraie pour $k = n$, doit être vraie aussi pour $k = n - 1$. □

Preuve du corollaire 3a. Notons que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} |f(x)|^p \, dx &= \int_0^{\pi} |\sin\theta|^{p-1} |f(\cos\theta)|^p (\sin\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} |(\sin\theta) f(\cos\theta)|^p \, d\theta , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(n+1)\theta|^p \, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin\theta|^{p-1} \left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right|^p |\sin\theta| \, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} |\sin\theta|^{p-1} \left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right|^p (\sin\theta) \, d\theta \\ &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} |U_n(x)|^p \, dx . \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la corollaire 1b, avec $N = n + 1$ et $\ell = n + 1$, sur

$$\tau(\theta) := (\sin\theta) f(\cos\theta) = \frac{a_n}{2^{n+1}} i \, e^{-i(n+1)\theta} + \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta} - \frac{a_n}{2^{n+1}} i \, e^{i(n+1)\theta} ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|a_n| &= 2^n \left(\left| \frac{a_n}{2^{n+1}}\,\mathrm{i} \right| + \left| -\frac{a_n}{2^{n+1}}\,\mathrm{i} \right| \right) \\
&\leq 2^n \frac{1}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin{(n+1)\theta}|^p \,\mathrm{d}\theta \right)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(\sin\theta)\, f(\cos\theta)|^p \,\mathrm{d}\theta \right)^{1/p} \\
&= \frac{2^n}{\left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} \,|U_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}} \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} \,|f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.3.6) pour $m = n$. Appliquons cela sur $(f(x) + f(-x))/2$ pour un n impair et sur $(f(x) - f(-x))/2$ pour un n pair, on trouve que l' inégalité aura lieu aussi pour $m = n - 1$. □

CONCLUSION

On remarque que la théorie de Rogosinski a le potentiel de stimuler de sérieuses recherches intéressantes concernant les polynômes et les polynômes trigonométriques en termes de leurs "normes L^p " . J'espère que cette thèse, ci-présentée, va attirer l'attention des autres mathématiciens à cette théorie et aux questions qu'elle soulève. Par exemple, il serait intéressant de trouver d'autres propriétés importantes des polynômes F qui apparaissent dans (1.3.4). L'étude des zéros de ces polynômes, qui dépendent de n et p, aura un intérêt spécial. Aussi, il serait important de savoir s'il existe une équation différentielle, liée à ces polynômes, qui nous permettra de les mieux comprendre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* 2nd edn, Chelsea Publishing Company, New York, 1932.

[2] P.J. Davis, *Interpolation and approximation,* 2nd edn., Blaisdell, New York, 1965.

[3] D. P. Dryanov, M. A. Qazi, and Q. I. Rahman, 'Certain extremal problems for polynomials', *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2741–2751.

[4] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators,* Part I, Wiley Classics Library Edition, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[5] W.H. Fleming, *Functions of several variables,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1965.

[6] G.H. Hardy, 'Prolegomena to a chapter on inequalities', *Journal London Math. Soc.* **4** (1929), 61–78.

[7] G.H. Hardy and W.W. Rogosinski, *Fourier series,* 3rd edn. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38, Cambridge University Press, 1968.

[8] A. Korkine and G. Zolotareff, 'Sur un certain minimum', *Ann. de Mathémat.,* 2^e série **12** (1873), 337–355.

[9] V.I. Krylov, *Approximate calculation of integrals,* (trans. A.H. Stroud), The Macmillan Company, New York, 1962.

[10] G. Labelle, *Concerning polynomials on the unit interval, Proc. Amer.Math.Soc.* **20** (1969), 321–326.

[11] W. Markoff, 'Über POlynome die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen', *Math. Ann.*, **77** (1916), 213–258.

[12] R. Pierre and Q.I. Rahman, 'On a problem of Turán about polynomials III', *Canadian Journal of Mathematics* **34** (1982), 888–899.

[13] Q.I. Rahman, 'Inequalities concerning polynomials and trigonmetric polynomials', *J. Math. Anal. Appl.* **6** (1963), 303–324.

[14] Q. I. Rahman, 'Functions of exponential type', *Trans. Amer. Math. Soc.* **135** (1969), 295–309.

[15] Q.I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials,* Clarendon Press, Oxford, 2002.

[16] Q.I. Rahman and K.R. Unni, 'Extremal problems and polynomials of least deviation' *Scripta Mathematica* **27** (1966), 303–329.

[17] M. Riesz, 'Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires', *Acta Mathematica* **49** (1926), 465–497.

[18] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis,* (trans. L.F. Boron), Frederick Ungar, New York, 1955.

[19] W.W. Rogosinski, 'Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials', *Archiv der Mathematik* **5** (1954), 182–190.

[20] E.M. Stein 'Interpolation in polynomial classes and Markoff's inequality', *Duke Math. J.* **24** (1957), 467–476.

[21] G. Szegö, *Orthogonal polynomials.* Colloquium Publications, **23**, 4th. edn. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[22] E.C. Titchmarsh, *The theory of functions.* 2nd edn, Oxford University Press, 1939.

[23] J. Todd, *Introduction to the constructive theory of functions,* Academic Press, Inc., New York, 1963. The Macmillan Company, New York, 1962.

[24] E.V. Voronovskaja, 'Application of functional analysis to polynomials of least deviation' (Russian), *Doklady Akademii Nauk SSSR* (New Series) **99** (1954), 5–8.

[25] E.V. Voronovskaja, 'Extremal polynomials of some of the simplest functionals' (Russian), *Doklady Akademii Nauk SSSR* (New Series) **99** (1954), 193–196.

[26] E.V. Voronovskaja, *The functional method and its applications.* Translation of Mathematical Monographs, Vol. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.