

Université de Montréal

Dynamique de  $N$  pôles à intensités variables

par

Anik Soulière

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

juin 2007



© Anik Soulière, 2007



## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Dynamique de  $N$  pôles à intensités variables**

présentée par

**Anik Soulière**

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*Octav Cornea*

---

(président-rapporteur)

*Tadashi Tokieda*

---

(directeur de recherche)

*François Lalonde*

---

(co-directeur)

*Anne Bourlioux*

---

(membre du jury)

*Mark Roberts*

---

(examineur externe)

*Robert G. Owens*

---

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

*28 mai 2007*

---

## SOMMAIRE

---

La dynamique de  $N$  pôles à intensités variables est une généralisation du cas classique de  $N$  tourbillons ponctuels dans un fluide parfait de dimension 2. La dynamique est régie par un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre. Une configuration de  $N$  pôles induit donc une dynamique « sans inertie » : la vitesse de chaque pôle dépend uniquement de la configuration des pôles à l'instant présent et celle-ci n'a aucun effet sur l'accélération. Sous certaines conditions, le système est hamiltonien.

La présente thèse est constituée de trois articles. Les deux premiers étudient le cas classique des tourbillons ponctuels alors que le dernier article porte sur le modèle généralisé aux pôles à intensités variables. Un simulateur permettant de calculer numériquement et de visualiser la dynamique des pôles a été développé.

Le premier article porte sur les solutions périodiques de tourbillons ponctuels dans un fluide de dimension 2. On y présente un exemple inédit d'une famille de solutions périodiques avec bifurcation de  $N$  tourbillons sur la sphère. Ce cas particulier inspire une méthode qui permet de trouver une infinité de familles de solutions périodiques sur des surfaces possédant certaines symétries.

Le deuxième article étudie les tourbillons ponctuels sur le cylindre. Le formalisme hamiltonien est présenté, un théorème sur la non-existence de solutions périodiques relatives non-statiques est prouvé, les équilibres relatifs sont classifiés dans le cas où toutes les vorticités ont le même signe. Finalement, plusieurs résultats d'équilibres relatifs sont présentés dont certaines généralisations des cas classiques de saute-mouton et du train de von Kármán.

Le dernier article porte sur une généralisation de la théorie des tourbillons ponctuels. Chaque singularité sera maintenant appelée « pôle ». En plus des

tourbillons, chaque pôle peut être une source, un puits, un point de selle, une selle de singe (...) de même que leurs superpositions. La dynamique du nouveau système obtenu est illustrée par plusieurs solutions exactes.

#### MOTS-CLÉS

Systemes hamiltoniens, systemes dynamiques, tourbillons ponctuels, hydrodynamique ideale, solutions periodiques, solutions exactes.

## SUMMARY

---

Dynamics of  $N$  poles with variable strengths is a generalization of the classical problem of  $N$  point vortices in a 2-dimension ideal fluid. This system of ordinary differential equations is of first order : the dynamics has no inertia, in the sense that the poles' instantaneous positions determine their velocities, with no effect on acceleration. Under certain restrictions, it is a Hamiltonian system.

This thesis consists of three papers. The first two study point vortices and the third one presents a generalization of the model. A numerical simulator showing dynamics of poles has been developed to experiment and illustrate the behavior of the system.

The first paper is about periodic solutions of point vortices in 2-dimensional ideal fluid on other surfaces than the plane. It presents the first known example of a family of periodic motions with bifurcations on the sphere. This particular example leads to a general method of finding periodic motions of  $N$  vortices on surfaces possessing certain symmetries.

The second paper studies point vortices on the cylinder. The Hamiltonian formalism is developed, a non-existence theorem for non-stationnary relative equilibria is proved, equilibria are classified when all vorticities have the same sign. Several results on relative periodic orbits are established, including as corollaries classical results on vortex streets and leapfrogging.

The third and last paper presents a generalization of the theory of point vortices. Besides vortices, we allow sources/sinks, saddle points, monkey saddles (...) as well as their superpositions. We call those new objects « poles ». We also allow the strengths of these poles to vary. This leads to a rich dynamical system which we illustrate with a variety of exact solutions.

## KEYWORDS

Hamiltonian system, dynamical system, point vortices, ideal hydrodynamics, periodic motions, exact solutions.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	v
<b>Liste des figures</b> .....	xi
<b>Remerciements</b> .....	xii
<b>Introduction</b> .....	1
0.1. Modèle des tourbillons ponctuels.....	1
0.2. Dynamique hamiltonienne des tourbillons ponctuels.....	2
0.3. Modèle des pôles à intensités variables.....	3
0.4. Aperçu historique.....	6
0.5. Étude numérique des pôles à intensités variables.....	7
0.6. Organisation de la présente thèse.....	8
<b>Chapitre 1. Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry</b>	
9	
1.1. Contribution à l'article.....	9
1.2. Mouvement périodique de tourbillons sur des surfaces avec symétrie	10
Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry.....	11
Abstract.....	11
1. Introduction.....	11

2. Point vortices on surfaces .....	13
3. Periodic motions with dihedral symmetry .....	14
3.1 Twisters on the sphere .....	14
3.2 Twisters on the cylinder .....	18
3.3 Twisters on ellipsoids of revolution .....	18
4. Analysis of periodicity, bifurcation and level spacing .....	19
4.1 Proof of periodicity by symmetry and Hamiltonian .....	19
4.2 Critical polar vorticity .....	20
4.3 Logarithmic divergence of the Hamiltonian .....	21
5. Periodic motions with other symmetries .....	21
<b>References</b> .....	24
<b>Chapitre 2. Vortex Dynamics on a Cylinder</b> .....	26
2.1. Contribution à l'article .....	26
2.2. Dynamique de tourbillons sur un cylindre .....	26
Vortex Dynamics on a Cylinder .....	28
Abstract .....	28
1. Introduction .....	28
2. Hamiltonian formalism of vortices on a cylinder .....	30
3. Relative equilibria .....	33
4. Relative periodic orbits .....	36
<b>References</b> .....	44
<b>Chapitre 3. Dynamics of moving poles with variable strengths ..</b>	46
3.1. Contribution à l'article .....	46

3.2. Dynamique de pôles à intensités variables .....	47
Dynamics of moving poles with variable strengths .....	49
3.3. Equations of motion, conservation laws .....	49
3.4. Examples of exact solutions .....	51
3.4.1. Self-similar solutions .....	51
3.4.1.1. Pair .....	51
3.4.1.2. Regular polygons .....	52
3.4.2. Variable strengths .....	52
3.4.2.1. Snell's law .....	52
3.4.2.2. Scattering .....	53
3.4.2.3. Leapfrog .....	54
3.4.2.4. Leapfrogging of a pair .....	55
<b>References</b> .....	56
3.5. Annexe .....	57
3.5.1. Mouvement circulaire et saute-mouton .....	57
3.5.2. Saute-mouton d'une paire de pôles .....	58
3.5.3. La loi de Snell .....	60
3.5.4. Exemple d'équilibre dans le cas non homogène .....	61
3.5.5. Autres exemples .....	61
<b>Synthèse et conclusion</b> .....	63
<b>Bibliographie</b> .....	65
<b>Annexe A. Autorisations diverses</b> .....	A-i
A.1. Autorisation de <i>Journal of Fluid Mechanics</i> .....	A-ii
A.2. Autorisation de Tadashi Tokieda .....	A-iii
A.3. Autorisation de <i>SIAM J. Applied Dynamical Systems</i> .....	A-iv

A.4. Autorisation de James Montaldi .....	A-vi
<b>Annexe B. Simulations numériques .....</b>	<b>B-i</b>
B.1. Structure générale .....	B-i
B.2. Validation des résultats .....	B-ii
B.3. Cas du cylindre et de la sphère .....	B-ii
B.4. Cas des pôles à intensités variables .....	B-ii

## LISTE DES FIGURES

---

0.1	(a) Effet d'un tourbillon de vorticité $\Gamma_1$ sur un autre tourbillon du système dans le plan; (b) deux tourbillons de vorticites opposées sur le plan se déplacent parallèlement. ....	2
0.2	Lignes de courant de $\overline{\mu z^{-1}}$ avec (a) $\text{Re } \mu < 0, \text{Im } \mu = 0$ (b) $\text{Re } \mu > 0, \text{Im } \mu = 0$ (c) $\text{Re } \mu = 0, \text{Im } \mu < 0$ (d) $\text{Re } \mu > 0, \text{Im } \mu < 0$ . ....	3
0.3	Lignes de courant de $\overline{\mu z^n}$ .....	4
0.4	Exemple de superposition : lignes de courant .....	5
0.5	Exemple de superposition : lignes de courant .....	5
3.1	(a) $\mu = -\mu'$ ; (b) $\text{Im } \mu = -\text{Im } \mu'$ ; (c) $\mu = \mu'$ .....	48
3.2	Pentagone régulier de pôles d'égales intensités (a) spirales; (b) ajout d'un pôle central d'intensité $-(N - 1) \mu/2$ . ....	48
3.3	(a) Superposition of $n = -3$ and $n = -2, \mu > 0$ ; (c) $n = -1, \text{Re } \mu > 0, \text{Im } \mu < 0$ .....	50
3.4	A pair of poles crossing a discontinuity of $S$ . ....	52
3.5	(a) $r = 0.4, d = 1$ (b) $r = 0.01, d = 1$ (c) $r = 0.01, d = 0.25$ .....	54
3.6	A circular periodic leapfrog; initially aligned poles of strength $\mu, -\bar{\mu}, -\bar{\mu}$ and $\mu$ . ....	54
3.7	Leapfrogging of a pair of same strength. ....	55
3.8	Paire de pôles d'intensités $\mu = 1 + 3i$ et $\mu' = -1 + 2i$ ; le centre d'intensité est marqué par un $\times$ ; .....	57

3.9	(a) Trajectoire d'un couple de pôles d'intensités $\mu$ et $-\bar{\mu}$ , le centre d'intensité est marqué par un $\times$ ; (b) au centre, l'ajout d'un troisième pôle d'intensité $-i \mu /2\text{Im}\mu$ crée un équilibre. ....	58
3.10	Trajectoires de pôles de même intensité initialement posés à $z_0 = 0$ et $z_1 = \Delta z$ . $S$ admet une discontinuité en $\text{Im} z = 0$ . ....	59
3.11	Saute-mouton asymétrique, $\mu = 3\mu'$ . ....	59
3.12	(a) $\theta_0 < \theta_c$ ; (b) $\theta_0 > \theta_c$ ; (c) variation monotone croissante de $S$ . ....	60
3.13	(a) Lignes de courant de $\overline{\mu_{n_1} z^{n_1} + \mu_{n_2} z^{n_2}}$ avec (a) $\mu_{n_1} = 2^7 + i$ , $\mu_{n_2} = i$ , $n_1 = -4$ et $n_2 = 3$ ; (b) configuration donnant lieu à l'équilibre. ....	61
3.14	Autres exemples de trajectoires d'un couple de pôles. ....	62

## REMERCIEMENTS

---

Je remercie d'abord mon directeur de thèse, Tadashi Tokieda, qui m'a beaucoup appris, tant sur la carrière, l'enseignement, que les mathématiques. Il a su me proposer un sujet qui me convenait à merveille et sur lequel j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Notre travail s'est déroulé dans divers lieux, à différents points tournants de nos carrières respectives. Un grand merci pour son accueil, chaque fois que j'ai eu l'occasion de répondre à ses invitations. Mes séjours à New York, Oxford et Cambridge resteront longtemps gravés dans ma mémoire.

Je remercie les organismes qui m'ont soutenue financièrement : le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie (CRSNG, Canada), le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT, Québec), l'Institut des sciences mathématiques (ISM), la Fondation Carl Herz, l'Université de Montréal.

Merci également à mon codirecteur, François Lalonde, qui m'a soutenue financièrement lors de mon voyage à Cambridge.

Merci à James Montaldi avec qui j'ai eu la chance de collaborer et qui a accepté que notre article *Vortex Dynamics on a Cylinder* soit inclus dans ma thèse. Merci aux éditeurs de *Journal of Fluid Mechanics* et de *SIAM J. Applied Dynamical Systems* pour avoir accepté que les articles *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry* et *Vortex Dynamics on a Cylinder* soient reproduits dans ma thèse.

Un merci très spécial à toute l'équipe du Syndicat des enseignants et des enseignantes du Collège de Maisonneuve. Leur excellent travail a assuré un cheminement dynamique de mon dossier et m'a permis d'obtenir un congé de perfectionnement. Un merci particulier à Nicole Lefebvre qui a joué un rôle crucial dans ce dossier.

Plus personnellement, merci aux meilleurs parents du monde, Hellen et Marcel, pour leur complicité, leur généreuse disponibilité, leur appui inconditionnel. Merci à Gaby pour les petits plats préparés, source de réconfort dans les périodes de travail intense. Merci à Diane et à Ernest pour leur collaboration en révision des textes.

À Olivier qui m'a épaulée en partageant ma passion pour les mathématiques, merci pour tout.



# INTRODUCTION

---

## 0.1. MODÈLE DES TOURBILLONS PONCTUELS

C'est au 19<sup>e</sup> siècle qu'Helmoltz a développé le modèle idéalisé des tourbillons ponctuels dans un fluide parfait de dimension 2. Un *tourbillon ponctuel* est une sorte de distribution  $\delta$  de vorticité obtenue à la limite quand on rétrécit une zone de vorticité dans un fluide tout en gardant fixe la vorticité totale de cette zone. Les tourbillons ponctuels évoluent dans un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux et incompressible, modélisé par l'équation d'Euler d'hydrodynamique. Les équations étant du premier ordre, les tourbillons n'ont pas d'inertie : seules leurs positions relatives importent sur l'évolution du système. L'espace de phase de  $N$  tourbillons sur une surface est donc constitué du produit de  $N$  fois la surface sans les diagonales pour ne pas superposer les tourbillons.

Lorsqu'on place plusieurs tourbillons ponctuels sur le plan, chaque tourbillon influence la vitesse des autres tourbillons proportionnellement à sa vorticité  $\Gamma$  et inversement proportionnellement à la distance (figure 0.1 (a)).

Par exemple, deux tourbillons de vorticités 1 et  $-1$  se déplacent de façon parallèle sur le plan (figure 0.1 (b)). Ce système dynamique est hamiltonien (section 0.2) et constitue une approximation en dimension finie de l'équation d'Euler.

Dans le modèle des tourbillons ponctuels, le mouvement de  $N$  tourbillons sur une surface est réduit à la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires. Jusqu'à 3 tourbillons, le système est intégrable. Pour  $N > 3$ , le système d'équations différentielles qui régit le mouvement de  $N$  tourbillons n'est plus intégrable. Ainsi, la description des familles de solutions périodiques et d'équilibres

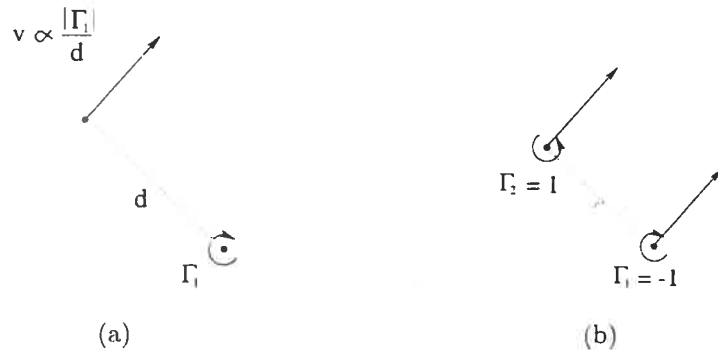


FIG. 0.1. (a) Effet d'un tourbillon de vorticité  $\Gamma_1$  sur un autre tourbillon du système dans le plan; (b) deux tourbillons de vorticités opposées sur le plan se déplacent parallèlement.

relatifs est difficile et revêt une importance particulière pour l'approche perturbatrice.

## 0.2. DYNAMIQUE HAMILTONIENNE DES TOURBILLONS PONCTUELS

L'espace des phases de  $N$  tourbillons sur le plan  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  est donné par

$$\{(z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} | z_k \neq z_l \text{ si } k \neq l\}.$$

Le champ de vitesses  $\mathbf{v} = dz/dt$  est généré par une fonction de courant  $\psi$  telle que  $\nabla^2 \psi = -\nabla \times \mathbf{v}$ . Dans le contexte de  $N$  tourbillons ponctuels,  $\nabla \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta_{z_i}$ . Dans le plan, la solution fondamentale de  $\nabla^2 \psi_l = -\delta_{z_l}$  est

$$\psi_l(z) = \frac{-1}{2\pi} \log |z - z_l|.$$

En définissant le hamiltonien comme

$$h = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |z_k - z_l|$$

qui est une somme pondérée des  $N$  fonctions de Green  $\psi$  pour  $N$  tourbillons, les équations du mouvements peuvent être réécrites

$$\frac{dz_k}{dt} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l \neq k} \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_l - \bar{z}_k}. \quad (0.2.1)$$

Sur des surfaces autres que le plan, le hamiltonien des tourbillons ponctuels s'obtient de la même façon : on résout  $\nabla^2 \psi = -\omega$  (où  $\omega$  est la vorticité) en

trouvant la fonction de Green pour la surface étudiée. Le hamiltonien est une somme pondérée des  $N$  fonctions de Green pour les  $N$  tourbillons.

### 0.3. MODÈLE DES PÔLES À INTENSITÉS VARIABLES

Une généralisation de la théorie des tourbillons ponctuels est présentée dans l'article du chapitre 3. Voici une introduction à ce modèle.

Le champ de vitesse induit par un seul tourbillon ponctuel posé à  $z = 0$  sur le plan est donné par

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma}{\bar{z}} \quad (0.3.1)$$

où  $\Gamma \in \mathbb{R}$  est la vorticité du tourbillon. En permettant à  $\Gamma$  de prendre des valeurs complexes, on obtient une tout autre dynamique. En posant  $\bar{\mu} = -\Gamma/2\pi i$ , l'équation 0.3.1 devient

$$\frac{dz}{dt} = \overline{\mu z^{-1}}. \quad (0.3.2)$$

Si  $\mu$  est imaginaire pur, on a un tourbillon de vorticité  $2\pi i\mu$ . Si  $\mu$  est réel, on a un puits ou une source de flux  $2\pi\mu$ . La figure 0.2 illustre les lignes de courant pour différentes valeurs de  $\mu$ .

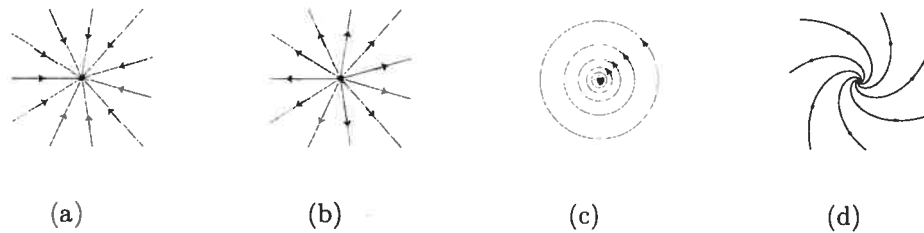


FIG. 0.2. Lignes de courant de  $\overline{\mu z^{-1}}$  avec (a)  $\text{Re } \mu < 0, \text{Im } \mu = 0$  (b)  $\text{Re } \mu > 0, \text{Im } \mu = 0$  (c)  $\text{Re } \mu = 0, \text{Im } \mu < 0$  (d)  $\text{Re } \mu > 0, \text{Im } \mu < 0$ .

Une autre étape de généralisation consiste à considérer

$$\frac{dz}{dt} = \overline{\mu z^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (0.3.3)$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on a un dipôle pour  $n = -2$ , un quadrupôle pour  $n = -3$ , un sexap  le pour  $n = -4 \dots$ ; un champ uniforme pour  $n = 0$ , une selle pour  $n = 1$ ,

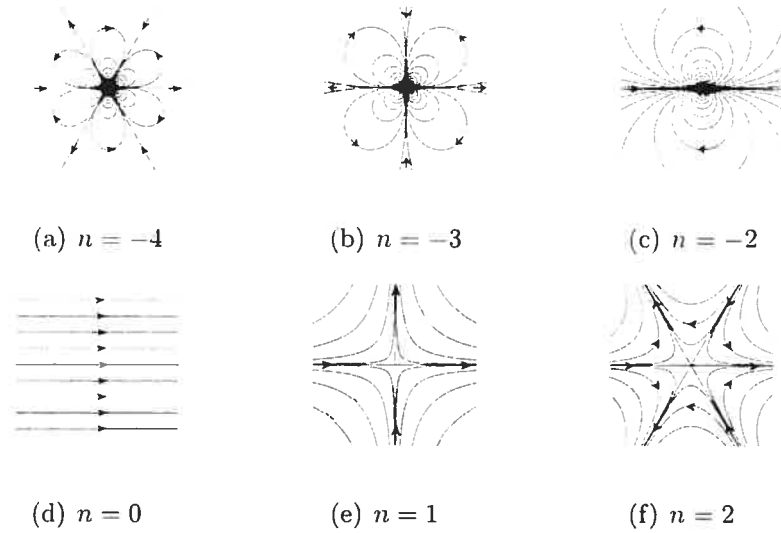


FIG. 0.3. Lignes de courant de  $\overline{\mu z^n}$

une selle de singe pour  $n = 2 \dots$ . Les lignes de courant pour différentes valeurs de  $n$  sont données à la figure 0.3.

On peut également admettre des superpositions de ces singularités,

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{\mu_n z^n}, \quad (0.3.4)$$

en considérant que seul un nombre fini des  $\mu_n$  seront non nuls. Par exemple, la figure 0.4 (d) est une superposition des figures (a) et (b). Les figures 0.4 et 0.5 illustrent d'autres exemples de superpositions doubles.

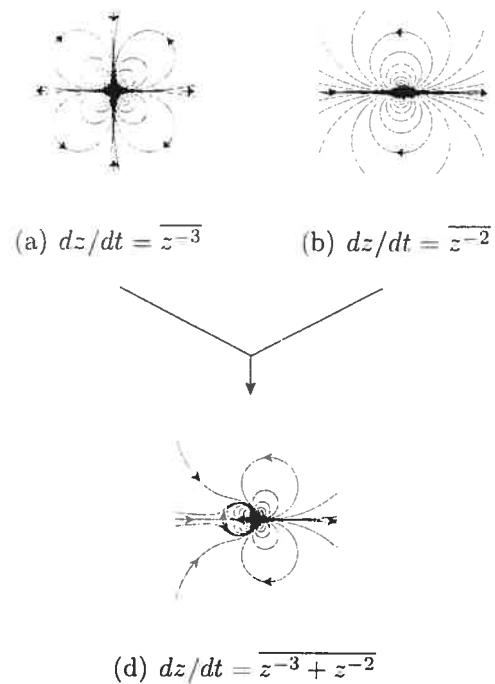


FIG. 0.4. Exemple de superposition : lignes de courant

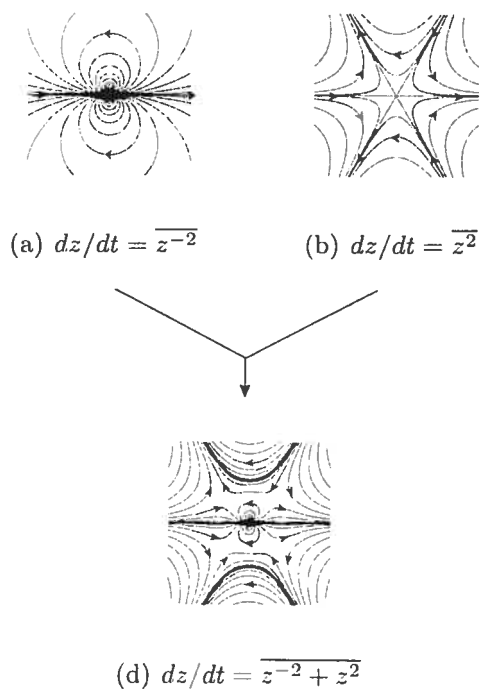


FIG. 0.5. Exemple de superposition : lignes de courant

Finalement, en mettant plusieurs de ces singularités sur une même surface, et en permettant aux paramètres d'intensité  $\mu_n$  de varier comme fonction de  $z$ , on obtient le modèle général étudié au chapitre 3.

#### 0.4. APERÇU HISTORIQUE

La théorie des tourbillons ponctuels dans un fluide parfait de dimension 2 est un chapitre classique d'hydrodynamique [Lamb (1932)] chap.VII, [Villat (1930)]. C'est au 19<sup>e</sup> siècle que [Helmoltz (1858)] introduit le modèle. Par la suite, [Kirchhoff (1876)] démontre que les équations du mouvement de tourbillons ponctuels dans le plan définissent un système dynamique hamiltonien. En 1877, dans un document de 86 pages, [Gröbli (1877)] donne plusieurs résultats sur une série d'exemples particuliers des tourbillons sur le plan. Il prouve entre autres que le problème de trois tourbillons sur le plan est intégrable. Ce résultat est présenté indépendamment par [Poincaré (1893)]. [Love (1894)] contribue aussi à la théorie des tourbillons ponctuels. Il présente le mouvement de paires de tourbillons avec un axe de symétrie dont la dynamique inspirera le nom saute-mouton (leapfrog).

Dans la première moitié du 20<sup>e</sup> siècle, les tourbillons ponctuels reçoivent quelques contributions isolées, citons par exemple [von Kármán (1912), Imai (1936), Lin (1941), Synge (1949)]. La plus importante est probablement celle de [Onsager (1949)] (connu pour sa solution exacte au modèle d'Ising en 2 dimensions). Onsager développe l'approche mécanique statistique des tourbillons ponctuels. Il prédit l'organisation d'un nuage de tourbillons ponctuels en une structure globale. Sa contribution semble être une première tentative d'explication de l'organisation et de la persistance de certains grands tourbillons communs dans les problèmes d'astrophysique et de géophysique.

Vers la fin du siècle, on assiste à un regain d'intérêt pour le sujet (voir [Aref (1983)] pour un survol). [Kimura (1999)] étend la théorie à des surfaces simplement connexes à courbure constante. L'étude du cas intégrable de 3 tourbillons est faite par [Aref (1979), Aref et Stremler (1996), (1999)] pour le plan, et par [Kidambi et Newton (1998), (1999), (1999)a, (2000)] sur la sphère. Les progrès en systèmes dynamiques stimulent l'étude du problème non intégrable de  $N > 3$

tourbillons [Aref (1979)]. L'approche perturbatrice motive la description d'équilibres, d'équilibres relatifs et d'orbites périodiques. Sur le plan, [Aref (1995)] étudie les équilibres et la stabilité d'une rangée de tourbillons. Sur la sphère, [Lim et al. (2001)] ont classifié les équilibres relatifs et [Pekarsky et Marsden (1998)] ont fait l'analyse de stabilité. La connaissance de mouvements périodiques (qui ne sont pas des équilibres relatifs) sur la sphère est plus rare : [Tokieda (2001)] présente une famille infinie de solutions périodiques de  $N$  tourbillons sur la sphère et d'autres surfaces. Pour le cas non intégrable, la recherche d'équilibres et de périodicité passe souvent par l'utilisation de la symétrie pour réduire les degrés de liberté du hamiltonien. Des arguments de symétrie sont utilisés par [Hally (1980), Aref (1982), Pekarsky et Marsden (1998)]. Des équilibres asymétriques, beaucoup plus difficiles à trouver, sont donnés par [Aref et Vainchtein (1998)]. Le problème de  $N$  tourbillons a aussi été abordé selon de nouveaux points de vue : géométrie symplectique [Lim et al. (2001), Montaldi et Tokieda (2003)], action de groupes de Lie [Montaldi et Tokieda (2003)], topologie [Kidambi et Newton (1999)a, Tokieda (2001), Montaldi et Tokieda (2003), Boyland et Stremler (2003)].

La généralisation à des pôles à intensités variables est inédite.

## 0.5. ÉTUDE NUMÉRIQUE DES PÔLES À INTENSITÉS VARIABLES

Bien que le sujet des tourbillons ponctuels est en train d'être étudié selon plusieurs points de vue, l'analyse numérique est relativement peu exploitée. Dans le plan, [Aref et Vainchtein (1998)] ont utilisé un simulateur pour trouver des équilibres asymétriques. [Acheson (2000)] a étudié la stabilité de la configuration saute-mouton par des expériences numériques.

L'observation expérimentale du mouvement des tourbillons ponctuels dans un fluide qu'on peut traiter comme idéal, par exemple l'hélium liquide, est extrêmement délicate. Il faut par ailleurs beaucoup d'expérience et d'intuition pour imaginer la dynamique de plusieurs tourbillons. Un simulateur de la dynamique de pôles constitue donc un précieux outil d'expérimentation.

La plupart des résultats présentés dans cette thèse ont été inspirés d'expériences faites sur un simulateur de mouvement des pôles. Pour une configuration

initiale des positions et des intensités des pôles, le simulateur calcule numériquement les trajectoires des pôles et affiche une animation de la dynamique obtenue. Le simulateur a été conçu pour les tourbillons ponctuels sur la sphère et le cylindre, ainsi que pour les pôles à intensités variables sur le plan. Pour  $N$  pôles, la résolution des  $2N$  équations différentielles ordinaires de premier ordre se fait à l'aide d'une méthode adaptative du logiciel Matlab.

## 0.6. ORGANISATION DE LA PRÉSENTE THÈSE

Le travail est organisé en trois chapitres composés d'articles ayant été rédigés dans le cadre de mes études au doctorat. Voici les références aux articles inclus dans la thèse.

### **Article 1**

A. SOULIÈRE, T. TOKIEDA, *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry*, J. Fluid. Mech., **460** (2002), 83–92.

### **Article 2**

J. MONTALDI, A. SOULIÈRE, T. TOKIEDA, *Vortex Dynamics on a Cylinder*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, Vol.2, No.3, (2003), 417–430.

### **Article 3**

A. SOULIÈRE, T. TOKIEDA, *Dynamics of moving poles with variable strengths*.

Mes contributions à chaque article sont décrites au début des chapitres. Les accords et autorisations de publication sont inclus dans l'Annexe A.

Une description des méthodes numériques utilisées est présentée à l'Annexe B.



# Chapitre 1

---

## PERIODIC MOTIONS OF VORTICES ON SURFACES WITH SYMMETRY

AUTEURS : ANIK SOULIÈRE ET TADASHI TOKIEDA

### 1.1. CONTRIBUTION À L'ARTICLE

Ce chapitre est constitué de l'article *Periodic motions of vortices on surface with symmetry* par Anik Soulière et Tadashi Tokieda paru dans *J. Fluid. Mech.*, 460 (2002), 83–92.

Voici la liste des contributions d'Anik Soulière à cet article :

- conception du simulateur de mouvements de tourbillons sur la sphère ;
- découverte d'une première famille de solutions périodiques avec bifurcations : « *twisters* » ;
- analyse des types de solutions et de leurs points de bifurcation en fonction des paramètres ;
- création d'exemples de solutions périodiques avec bifurcations utilisant différents types de symétries ;
- illustration numérique du hamiltonien servant à la preuve de la périodicité des solutions ;
- création d'un exemple de mouvements périodiques dont la configuration initiale n'est pas symétrique (avec Tokieda).

## 1.2. MOUVEMENT PÉRIODIQUE DE TOURBILLONS SUR DES SURFACES AVEC SYMÉTRIE

Dans le plan euclidien, l'étude des tourbillons ponctuels a reçu de nombreuses élaborations [Aref (1982), (1983), (1995), Aref et Vainchtein (1998), Lewis et Ratiu (1996)]. L'étude des tourbillons ponctuels sur des surfaces autres que le plan est relativement récente (voir la section 1 de l'article pour un résumé). Par exemple, il n'existait aucun mouvement périodique connu sur des surfaces autres que le plan avant les tourbillons dansants de [Tokieda (2001)]. Toutefois, ces familles de solutions périodiques sont toutes topologiquement équivalentes (la variation des paramètres ne génère pas de bifurcation).

L'élaboration d'un simulateur numérique a permis une expérimentation du mouvement d'un grand nombre de tourbillons sur la sphère. Une solution périodique avec bifurcation de  $N$  tourbillons possédant certaines symétries a été découverte. Cette solution est née d'une perturbation d'une configuration statique de huit tourbillons sur la sphère. La démonstration de sa périodicité s'applique à d'autres configurations de tourbillons qui possèdent certaines symétries.

Pour construire de nouvelles solutions périodiques, il suffit de réduire à 2 degrés de liberté le hamiltonien du système. Pour ce faire, on exprime la position de tous les tourbillons présents en fonction de la position d'un tourbillon de référence. La trajectoire de chaque tourbillon suit la courbe de niveau du hamiltonien qui passe par le tourbillon. On montre que ces courbes sont génériquement difféomorphes à  $S^1$ .

Dans cet article, on expose aussi l'idée de fission (splitting) pour perturber des équilibres et engendrer de nouvelles solutions périodiques à partir de configurations stables. Elle est illustrée par un exemple (sommets du tétraèdre divisés en trois). L'idée de fission est reprise sur le cylindre dans l'article suivant.

## PERIODIC MOTIONS OF VORTICES ON SURFACES WITH SYMMETRY

## ABSTRACT

The theory of point vortices in a two-dimensional ideal fluid has a long history, but on surfaces other than the plane no method of finding periodic motions (except relative equilibria) of  $N$  vortices is known. We present one such method and find infinite families of periodic motions on surfaces possessing certain symmetries, including spheres, ellipsoids of revolution and cylinders.  $N$  can be made arbitrarily large. Numerical plots of bifurcations are given.

## 1. INTRODUCTION

Since the 19th century (Helmholtz 1858; Kirchhoff 1876), the Hamiltonian theory of point vortices in a two-dimensional ideal fluid has been a classic chapter in hydrodynamics (cf. Aref 1983). Besides being a useful mathematical prototype of fluid motion, point vortices are of direct physical interest because they can be desingularized to solutions of the Euler equation.

Much is known about periodic motions of these vortices on the plane. On surfaces other than the plane, however, the subject is less well explored. On spheres, Pekarsky & Marsden (1998) investigated the stability and Lim, Montaldi & Roberts (2001) the classification of relative equilibria (vortices that move as a rigid configuration), whereas on cylinders, flat tori and spheres, Aref & Stremler (1996), Stremler & Aref (1999) and Kidambi & Newton (1998, 1999, 2000a, b) carried out extensive studies of three vortices. Apart from these pioneering works, few results pertaining to  $N$  vortices on general surfaces existed until recently; in particular, practically no examples of periodic motion were known. The first infinite family of periodic motions, *dancing vortices*, was found by Tokieda (2001) (and independently worked out by James Montaldi). But dancing vortices were all of a single topological type, i.e. as the parameters varied, they did not undergo bifurcation.

In the present paper we construct an infinite bifurcating family of periodic motions of vortices on surfaces possessing discrete symmetries.  $N$  can be made

arbitrarily large. The case of dihedral symmetry, including spheres, ellipsoids of revolution and cylinders, is described in detail : the *twisters* of § 3. In § 5, the cases of cyclic and regular polyhedral symmetries are outlined.

Where should we look for such a family of periodic motions? The idea is to endow solutions with so much symmetry that they are left with only two degrees of freedom, and in the resulting two-dimensional system use the Hamiltonian to delineate closed curves. This is reminiscent of the standard approach to integrable systems, which reduces dimensions by finding independent, Poisson-commuting first integrals. An advantage of our approach is that we need not find these first integrals, since we are concerned with individual trajectories, not with invariant tori throughout the phase space; a possible disadvantage is that perturbation theory for symmetric solutions like ours may require a delicate book-keeping of how dynamics intertwines with symmetry.

In plane theory, a sizable literature is already available on periodic motions involving symmetries, e.g. Aref (1982), Koiller et al. (1985), Lewis & Ratiu (1996); notably Aref (1982) constructed, from a different viewpoint, a plane analogue of our *twisters*. Hally (1980) appears to be the earliest to treat vortex motion on surfaces with symmetry.

A good variation on our model would be to add a slight thickness to the two-dimensional fluid, so that we could examine, for instance, bending of vortex tubes and the evolution of a ensemble of Ekman boundary layers. Tropical cyclones (cf. e.g. Holton 1979) constitute a class of meteorological objects into which our theory, or its variant, is likely to provide some qualitative insight. These cyclones are intense vortical storms over tropical oceans above regions of warm surface water (exceeding say  $26^{\circ}\text{C}$ ); they are each typically a couple of hundred kilometres across and are born as a cluster extending up to thousands of kilometres, a scale over which the curvature of the Earth begins to be felt. Another area of application is the study of a rotating layer of liquid helium II (cf. Patterson 1974).

## 2. POINT VORTICES ON SURFACES

We recall the theory and list explicit formulae for Hamiltonians on the plane as well as on several other surfaces. Consider an ideal fluid flow in the complex plane  $\mathbb{C}$ , irrotational except in a domain  $D$  bounded by a loop  $\gamma = \partial D$ . The velocity field  $\mathbf{v}$  is generated by a stream function  $\psi$ . Shrink  $D$  to a point  $z$  while keeping the circulation  $\Gamma = \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\gamma$  constant; in the limit,  $\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla^2 \psi$  converges to  $\Gamma$  times a  $\delta$ -function concentrated at  $z$ , an object called *plane point vortex* of *vorticity*  $\Gamma$ . The dynamics of  $N$  interacting vortices lends itself to a Hamiltonian formalism : the phase space  $\mathbb{C}^N \setminus \{z_k = z_l \text{ for } k \neq l\}$ , the direct-sum Kähler metric weighted with vorticities  $\sum_{k=1}^N \Gamma_k dz_k d\bar{z}_k$  and the Hamiltonian  $h = -(1/2\pi) \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |z_k - z_l|$  which is the weighted sum of  $N$  Green's functions  $\psi$  for  $N$  vortices. Indeed, in the plane  $\mathbb{C}$  a fundamental solution to  $-\nabla^2 \psi = \delta$  is  $\psi \propto \log r$ , where  $r$  denotes the Euclidean distance between vortices. The equation of motion is

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{2}{i} \frac{\partial h}{\partial(\Gamma_k \bar{z}_k)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l \neq k} \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_k - \bar{z}_l} \quad (k = 1, \dots, N);$$

this means that each of its partners  $z_l$  drags the vortex  $z_k$  with velocity proportional to  $\Gamma_l$ , inversely proportional to  $|z_k - z_l|$ , sweeping counter-clockwise if  $\Gamma_l > 0$  and clockwise if  $\Gamma_l < 0$ . For example (figure 1) when  $N = 4$  and  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\Gamma_4$ , if initially the vortices are placed in order at the corners of a rectangle, then they move symmetrically along the branches of the curve  $x^{-2} + y^{-2} = \text{constant} > 0$ . The dancing vortices mentioned in § 1 are based on this example; it will be used again in § 5.

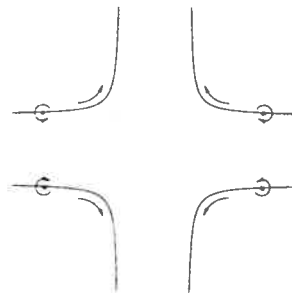


FIGURE 1. Motion of vortices of vorticity  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\Gamma_4$  on the plane.

On the sphere  $S^2$ , the cylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$ , the hyperbolic plane  $H^2$ , the flat torus  $T^2$  and orientable surfaces in general, the Hamiltonian vortex formalism is defined similarly by calculating the Laplacian  $\nabla^2$  and solving for its Green's function.

On the unit sphere  $S^2$ .

$$h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \log(1 - \cos r_{kl}),$$

where  $r_{kl}$  denotes the spherical distance between vortices with labels  $k$  and  $l$ . It should be noted here that  $\nabla^2 \log(1 - \cos r) \propto \delta - 4\pi$  and not  $\delta$ ; we are obliged to impose a *background vorticity*  $-4\pi = -\text{area}(S^2)$ , for by Stokes's formula the integral of  $\nabla \times \mathbf{v}$  over any closed surface must vanish. Since on account of its isotropy the background vorticity does not affect the vortex dynamics, we shall ignore it in what follows.

On the cylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  of unit radius, the Hamiltonian is obtained by formally periodizing the plane Hamiltonian (invoke  $\sin z = z \prod_{n>1} (1 - z^2/n^2\pi^2)$ ) and then jettisoning additive constants to force the convergence :

$$h = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| \sin \frac{z_k - z_l}{2} \right|,$$

where  $z = \phi + i\theta$ , and  $\phi$  (modulo  $2\pi$ ),  $\theta$  are the coordinates on the horizontal circle  $S^1$ , the vertical generator  $\mathbb{R}$ .

On the hyperbolic plane  $H^2$ ,  $\psi \propto \log \tanh(r/2)$ , where  $r$  this time denotes the hyperbolic distance; on the torus  $T^2$  and on an ellipsoid of revolution,  $\psi$  is expressible in terms of a Jacobian theta-function and Lamé harmonics respectively. The Hamiltonians are weighted sums of these  $\psi$ .

Naturally, the theories on all these surfaces reduce to the theory on the plane in the limit of infinitesimal distances.

### 3. PERIODIC MOTIONS WITH DIHEDRAL SYMMETRY

#### 3.1 Twisters on the sphere

On the sphere  $S^2$ , we take as coordinates the longitude  $\phi$  (modulo  $2\pi$ ) and the latitude  $\theta$  ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ) (rather than the usual colatitude in spherical coordinates). Consider  $2N + 2$  vortices positioned as in figure 2(a) :

- $N$  vortices of vorticity  $+1$  at  $(\phi, \theta), (\phi + 2\pi/N, \theta), \dots, (\phi + (N - 1) \cdot 2\pi/N, \theta)$ ,
- $N$  vortices of vorticity  $+1$  at  $(-\phi, -\theta), (-\phi - 2\pi/N, -\theta), \dots, (-\phi - (N - 1) \cdot 2\pi/N, -\theta)$ ,
- 2 vortices of vorticity  $\Gamma$  at the north and south poles.

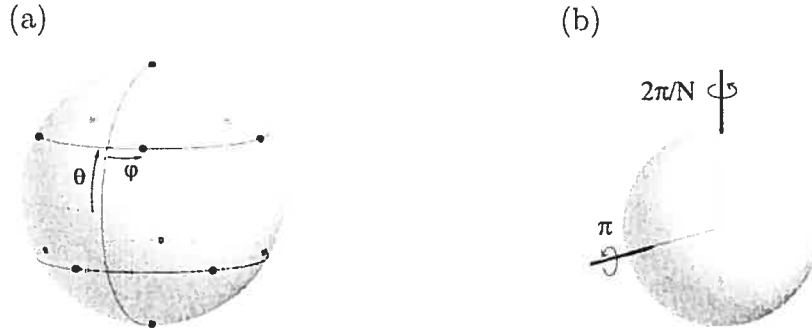


FIGURE 2. (a) Coordinates for twistors on the sphere. (b) Generators of  $D_{2N}$ .

Vortices in this configuration, or *twistors*, form a parametric family, with a discrete parameter  $N$  and a continuous parameter  $\Gamma$ . At all times, twistors are invariant under the action of the dihedral group  $D_{2N}$ : this group is generated by the rotation  $(\phi, \theta) \mapsto (\phi + 2\pi/N, \theta)$  around the pole-pole axis and the flip  $(\phi, \theta) \mapsto (-\phi, -\theta)$  around the Gulf of Guinea-Kiribati axis (figure 2(b)). (The choice of  $+1$  as the value of vorticity is immaterial, but the  $2N$  non-polar vortices must have the same vorticity if the symmetry  $D_{2N}$  is to act.) Thanks to these symmetries, the positions of all  $2N + 2$  twistors are determined by the position of any non-polar one of them. Let us designate one non-polar vortex as a tracer and draw its trajectory on the phase sphere  $(\phi, \theta)$ . Figure 3 (a-i) shows the result for  $N = 3$ ; the motions of the remaining  $2N - 1$  non-polar vortices are reconstructed by applying  $D_{2N}$  to the tracer; as regards the polar vortices, they never move. The  $2N$  black dots on the equator at  $(0, 0), (\pm\pi/N, 0), \dots, (\pm(N - 1)\pi/N, 0), (\pi, 0)$  represent collision singularities where the northern and southern rings become superposed; the two black dots at the poles represent coalescence of each ring with a polar vortex. The Hamiltonian  $h$  diverges at all these points.

While  $\Gamma < -(N - 1)/2$ , there are  $2N$  equatorial saddles representing the northern and southern rings in fully staggered positions on the equator. They are connected by separatrices, which separate three regimes of periodic motions: above the separatrices, westward wavy motion; below the separatrices, eastward

wavy motion; inside the separatrices, counter-clockwise spinning motions around collision singularities.

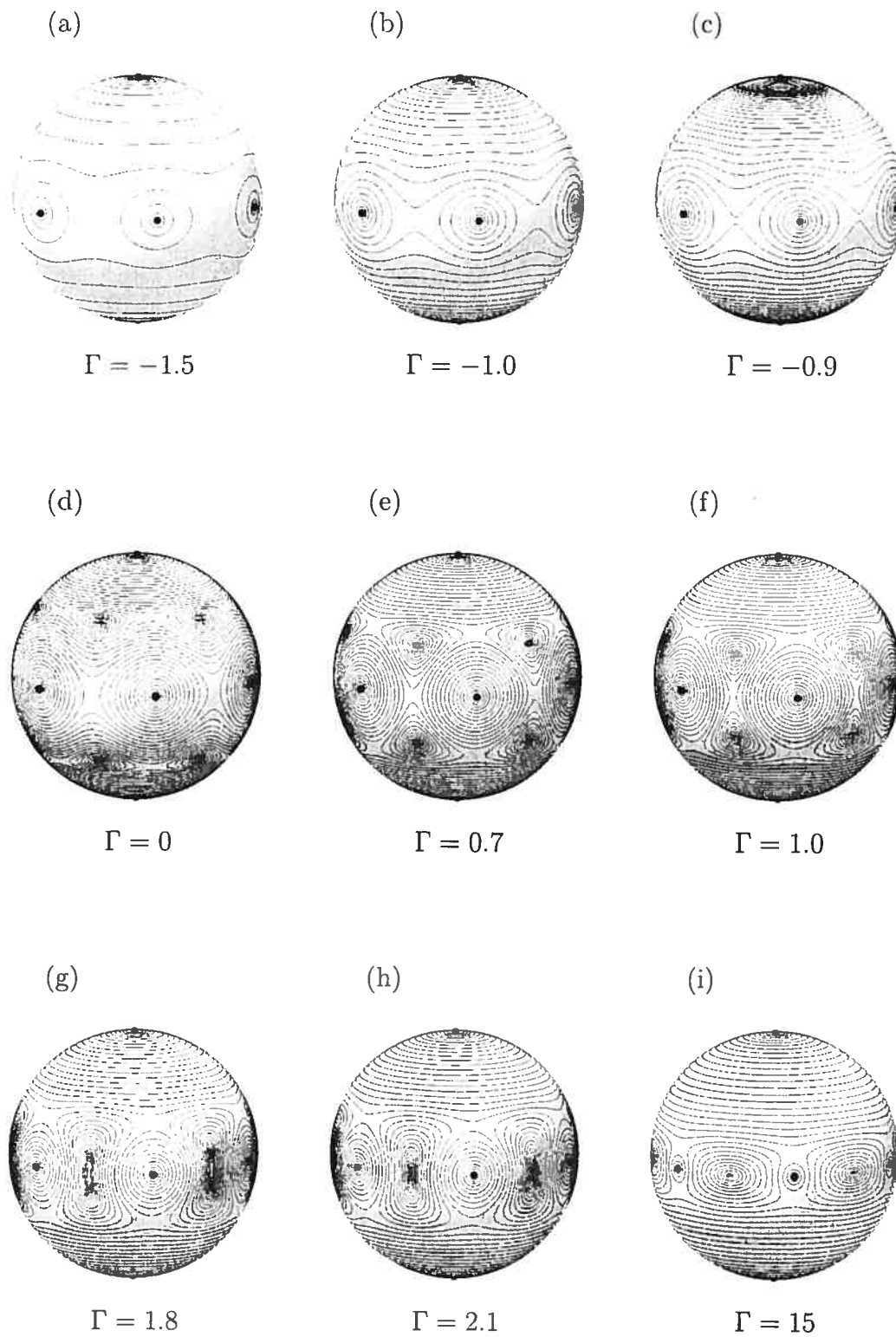
When  $\Gamma = -(N-1)/2$ , we see at the poles the births of new regimes of periodic motions which expand as  $\Gamma$  increases  $> -(N-1)/2$ . Figure 3 (c),  $\Gamma = -0.9$ , shows the new regimes soon after their births, for  $N = 3$ ; by  $\Gamma = 0$  (figure 3d) they have grown and are easier to see. On each hemisphere, they are:  $2N$  clockwise centres and  $2N$  new saddles, the latter being connected by new separatrices; in the northern polar cap bordered by the new separatrices, eastward wavy motion; in the southern polar cap, westward wavy motion. Within the equatorial band bordered by the new separatrices the motion is as before.

At a higher value of  $\Gamma$ , the new and old separatrices in the equatorial band merge, squeezing to nil the old westward and eastward wavy motions: figure 3(e),  $\Gamma = 0.7$ .

From then on, as shown in figure 3(f,g),  $\Gamma = 1.0, 1.8$ , the new saddles on the two hemispheres become mutually connected by separatrices, whereas every separatrix issuing from an old equatorial saddle circumnavigates a new centre and returns to the same saddle. Just outside the 'figures of eight' formed by the returning separatrices, a new regime of clockwise, peanut-shaped periodic motions appears.

Meanwhile, the 'new' (no longer so new) centres above and below the equatorial saddles have been coming closer together. They eventually merge, as in figure 3(h),  $\Gamma = 2.1$ , absorbing between them the equatorial saddles. As  $\Gamma$  continues to increase, the equatorial band where interesting things are happening becomes thinner and thinner, and the now overgrown polar caps of eastward and westward wavy motions invade a larger and larger portion of the sphere, but no further bifurcations occur.



FIGURE 3. Twister on the sphere,  $N=3$ .

### 3.2 Twisters on the cylinder

On the cylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$ , with coordinates specified in § 2, consider  $2N$  vortices of vorticity  $+1$  in the following positions :

$N$  vortices at  $(\phi, \theta), (\phi + 2\pi/N, \theta), \dots, (\phi + (N - 1)2\pi/N, \theta),$

$N$  vortices at  $(-\phi, -\theta), (-\phi - 2\pi/N, -\theta), \dots, (-\phi - (N - 1)2\pi/N, -\theta).$

As in the case of the sphere  $S^2$ , these twisters are invariant under the action of the dihedral group  $D_{2N}$ . Figure 4 shows the trajectory of a tracer vortex for  $N = 3$ . As the only parameter at our disposal is the discrete parameter  $N$ , we have a single picture for each  $N$  and no bifurcation.

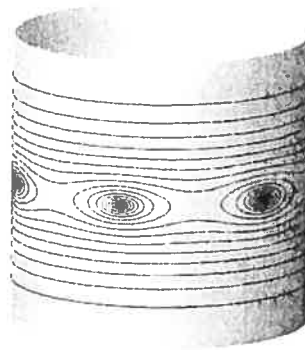


FIGURE 4. Twisters on the cylinder.

### 3.3 Twisters on ellipsoids of revolution

Though the Hamiltonian formalism is difficult to write out explicitly, it is clear that surfaces possessing the symmetries of  $D_{2N}$  are always hospitable to periodic motions of twisters. If the surface is diffeomorphic to a sphere, polar vortices may be introduced, with attendant bifurcations. The case of ellipsoids of revolution deserves special attention, for it can be thought of as an interpolation between the sphere case and the cylinder case (figure 5).

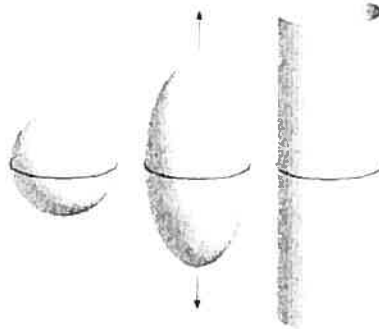


FIGURE 5. Ellipsoids of revolution interpolating between a sphere and a cylinder.

## 4. ANALYSIS OF PERIODICITY, BIFURCATION AND LEVEL SPACING

### 4.1 Proof of periodicity by symmetry and Hamiltonian

It was observed in § 3 that the positions of twistors are determined by the position of any non-polar one of them. In other words, for given  $N$  and  $\Gamma$ , all possible positions of twistors form a certain two-dimensional surface  $\Sigma$  in the phase space; our phase sphere (figure 3) or phase cylinder (figure 4) is a diffeomorphic projection of  $\Sigma$  on the ‘tracer component’ factor of the phase space. Since the dihedral symmetry  $D_{2N}$  preserves the Hamiltonian  $h$ ,  $\Sigma$  is dynamically invariant. Now  $h$  is a first integral: in other words, every level set of  $h$  is dynamically invariant, generically a hypersurface of codimension 1 in the phase space. Hence a phase trajectory of twistors lies in the intersection of  $\Sigma$  and a level set of  $h$ . Such an intersection is generically a one-dimensional curve, and depending on whether it is compact or not, it is diffeomorphic to a circle  $S^1$  (periodic motion) or to a line  $\mathbb{R}$  (separatrix); it can also degenerate to a point (equilibrium). This achieves the proof that the generic orbits are periodic.

To draw the trajectories on the phase sphere or cylinder, it therefore suffices to regard  $h$  as a function of two variables  $\phi, \theta$  and plot its level curves. In the case of the sphere  $S^2$ , by a routine calculation,

$$2^{1-2N-\Gamma^2/N} e^{-4\pi h/N} \\ = (\cos^2 \theta)^{2\Gamma+N-1} (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \phi) \prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \left( \frac{k\pi}{N} \right) \left( 1 - \cos^2 \theta \cos^2 \left( \phi + \frac{k\pi}{N} \right) \right).$$

In the case of the cylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$ ,

$$e^{-2\pi h/N} = (\sin^2 \phi + \sinh^2 \theta) \prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left( \sin^2\left(\phi + \frac{k\pi}{N}\right) + \sinh^2 \theta \right).$$

The diffeomorphism  $x = \sin \phi$  ( $|\phi| < \pi$ ),  $y = \sin \theta$  ( $|\theta| < \pi/2$ ) or  $y = \sinh \theta$  ( $|\theta| < \infty$ ) converts the above equations into (almost) algebraic equations and maps trajectories to (almost) algebraic curves. The proviso ‘almost’ is due to the exponent  $\Gamma$  for  $S^2$ : for rational  $\Gamma$ , these are genuine algebraic curves. For  $S^1 \times \mathbb{R}$  the problem does not arise. A corollary of algebraicity is that degeneracies cannot be too bad: for example, equilibria are isolated (actually mere analyticity implies this conclusion). Sharper information concerning the numbers of ovals (periodic motion in our context), branches (separatrices), isolated points (equilibria) and their arrangements may be obtained from the theory of topology of real algebraic curves, originated by Harnack; cf. Bochnak, Coste & Roy (1987) and the state of the art in Mikhalkin (2000).

The case of ellipsoids of revolution, though analytically harder, is topologically identical to the case of the sphere  $S^2$ .

## 4.2 Critical polar vorticity

For twistors on the sphere  $S^2$ , the critical value  $-(N-1)/2$  of the polar vorticity  $\Gamma$  for the earliest bifurcation (figure 3(b),  $\Gamma = -1.0$  when  $N = 3$ ) may be deduced by comparison with the theory on the plane. In the plane  $\mathbb{C}$ , a regular  $N$ -gon of vortices of vorticity  $+1$  spins counter-clockwise. The vorticity of a vortex that needs to be inserted at the centre to immobilize the polygon is  $-(N-1)/2$ , independently of the scale of the polygon. On  $S^2$ , as the northern ring of twistors approaches the north pole, the influence from the southern vortices becomes negligible, while in the neighbourhood of the north pole the sphere theory is approximated better and better by the plane theory. So, in the limit,  $\Gamma < -(N-1)/2$  successfully induces a clockwise (westward) motion on the northern hemisphere, whereas  $\Gamma > -(N-1)/2$  is insufficient to brake the counter-clockwise (eastward) motion of the ring. Because the motion farther south is westward, the latter scenario leads inevitably to the birth of new equilibria.

### 4.3 Logarithmic divergence of the Hamiltonian

Near the collision and coalescence singularities (e.g. black dots in figure 3), the Hamiltonian  $h$  diverges like  $-\log \epsilon$ ,  $\epsilon \searrow 0$ . This makes the spacing between levels crowded near the singularities (which is not relevant here) and inconveniently sparse near the equilibria (where we wish to zoom in). In numerical simulations, we took the logarithmically biased spacing

$$\min h + (\max h - \min h) \left(\frac{l}{L}\right)^\beta \quad (l = 0, \dots, L)$$

( $L =$  number of levels plotted), whose effect is to enhance the resolution near minima if  $\beta > 1$  and near maxima if  $\beta < 1$ . Pictures in figure 3 and 4 were plotted at biases  $\beta = 5, 1/2$ .

## 5. PERIODIC MOTIONS WITH OTHER SYMMETRIES

Symmetries different from that of the dihedral group  $D_{2N}$  can be exploited to construct periodic motions of vortices. We adopt the notation  $\mathbb{Z}_N$ ,  $S_n$ ,  $A_n$  for the cyclic group of order  $N$ , the group of all permutations of  $n$  objects (symmetric group), the group of even permutations of  $n$  objects (alternating group) respectively.  $\mathbb{Z}_N$ ,  $D_{2N}$ ,  $A_4$ ,  $S_4$ ,  $A_5$  exhaust all discrete subgroups of the group of spatial rotations  $SO(3)$ , which is the spatial symmetry group of the Hamiltonian vortex theory on the sphere  $S^2$ . (The theory has a few extra non-spatial symmetries, such as the antipodal map combined with the reversal of vorticities.)

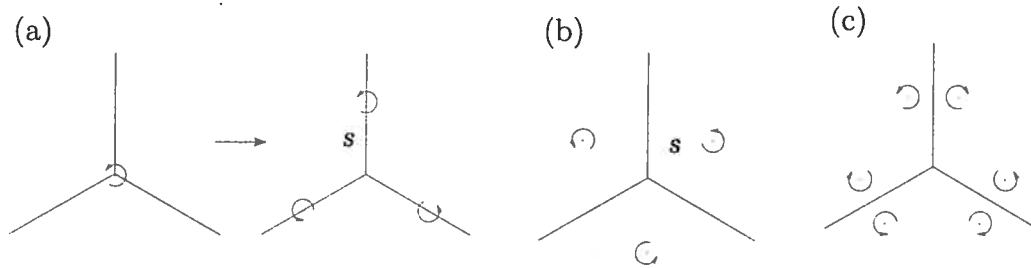


FIGURE 6. Splitting a vortex : (a) along the edges ; (b) along the faces ; (c) astride the edges, alternating vorticities.

Four vortices of vorticity  $+1$  at the vertices of a regular tetrahedron are in equilibrium. Now at each vertex, split the vortex along the edges into three vortices of vorticity  $+1/3$  as in figure 6(a). The resulting motion of  $4 \times 3$  vortices

(figure 7) is periodic and bifurcates once as the *split parameter*  $s$  varies. The symmetry is  $A_4$ . We obtain analogous periodic motions with symmetries  $S_4$ ,  $S_4$ ,  $A_5$ ,  $A_5$  starting from a cube, a regular octahedron, a regular dodecahedron, a regular icosahedron. Splitting along the faces as in figure 6(b) again creates periodic motions; this time, moreover, as the split parameter varies the vortices of a given polyhedron move like the vortices of its dual polyhedron as the latter's split parameter varies backward.

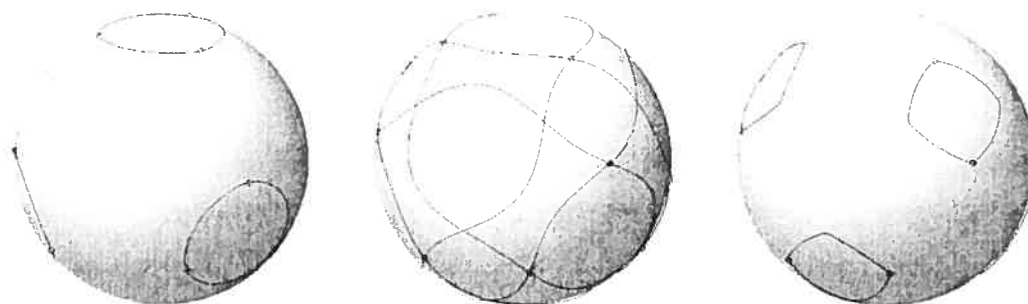


FIGURE 7. Vortices starting on the edges near the vertices of a regular tetrahedron.

We have also found periodic motions to which the argument of § 4.1 does not apply. Figure 8 shows two parallel equilateral triangles of three vortices of vorticity  $+1$  at asymmetric latitudes. The symmetry group is  $Z_3$ .

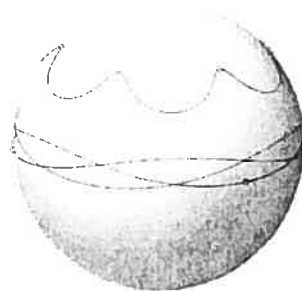


FIGURE 8. Two equilateral triangles of vortices at asymmetric latitudes.

Note that dancing vortices (cf. figure 1 and Tokieda 2001) too can accommodate symmetries of regular polyhedra. Figure 9 shows the trajectories of  $4 \times 3 \times 2$  vortices of alternating vorticities started around the vertices of a regular tetrahedron at the positions of figure 6(c).



FIGURE 9. Dancing vortices with tetrahedral symmetry.

Let us summarize the approach to the construction of periodic motions of  $N$  vortices developed in this paper.

- (1) Give the vortices initial positions with a discrete symmetry that preserves the Hamiltonian. Hamilton's equation being first-order ('vortices have no inertia'), the velocities thereby inherit the same symmetry, so that the vortices will keep the same symmetry throughout their evolution.
- (2) Estimate the size of the symmetry, or more precisely, count the number  $G$  of different group orbits in the given initial positions : the larger the size, the smaller  $G$ . The dimension  $2N$  of the phase space is reduced to  $2G$ .
- (3) If at least  $2G - 1$  independent first integrals are available, then generic trajectories are periodic. Even if there are too few first integrals, an application of the intermediate value theorem may still detect some periodic motions.

Detection of *asymmetric* periodic motions is of course beyond the scope of our approach. Aref & Vainchtein (1998) discovered asymmetric relative equilibria of vortices on the plane.

A.S. is grateful to Martin Gander for his advice on numerical methods. T.T. thanks Isao Imai, James Montaldi and Mark Roberts for helpful conversations.

## REFERENCES

---

- AREF, H. 1982 Point vortex motions with a center of symmetry. *Phys. Fluids* **25**, 2183–2187.
- AREF, H. 1983 Integrable, chaotic, and turbulent motion in two-dimensional flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 345–389.
- AREF, H. & STREMLER, M. 1996 On the motion of three point vortices in a periodic strip. *J. Fluid Mech.* **314**, 1–25.
- AREF, H. & VAINCHTEIN, D. 1998 Point vortices exhibit asymmetric equilibria. *Nature* **392**, 769–770.
- BOCHNAK, J., COSTE, M. & ROY, M.-F. 1987 *Géométrie Algébrique Réelle*. Springer.
- HALLY, D. 1980 Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry. *J. Math. Phys.* **21**, 211–217.
- VON HELMHOLTZ, H. VON 1858 Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Crelles J.* **55**, 25–55.
- HOLTON, J. 1979 *Introduction to dynamic meteorology*. Academic Press.
- KIDAMBI, R., NEWTON, P. 1998 Motion of three point vortices on a sphere. *Physica D* **116**, 143–175.
- KIDAMBI, R., NEWTON, P. 1999 Collision of three vortices on a sphere. *Nuovo Cimento C* **22**, 779–791.
- KIDAMBI, R., NEWTON, P. 2000a Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere. *Physica D* **140**, 95–125.
- KIDAMBI, R., NEWTON, P. 2000b Vortex motion on a sphere with solid boundaries. *Phys. Fluids* **12**, 581–588.



- KIRCHHOFF, G. 1876 *Vorlesungen über mathematische Physik*, 'Mechanik'. Kap. XX. Teubner.
- KOILER, J., PINTO DE CARVALHO, S., RODRIGUES DA SILVA, R., GONÇALVES DE OLIVEIRA, L. C. 1985 On Aref's vortex motions with a symmetry center. *Physica D* **16**, 27–61.
- LEWIS, D., RATIU, T. 1996 Rotating  $n$ -gon/ $kn$ -gon vortex configurations. *J. Non-linear Sci.* **6**, 385–414.
- LIM, C., MONTALDI, J., ROBERTS, M. 2001 Relative equilibria of point vortices on the sphere. *Physica D* **148**, 97–135.
- MIKHALKIN, G. 2000 Real algebraic curves, the moment map and amoebas. *Ann. of Math.* **151**, 309–326.
- PATTERSON, S. J. 1974 *Superfluid Hydrodynamics*. North-Holland.
- PEKARSKY, S. & MARSDEN, J. E. 1998 Point vortices on a sphere : stability of relative equilibria. *J. Math. Phys.* **39**, 5894–5907.
- STREMLER, M. & AREF, H. 1999 Motion of three point vortices in a periodic parallelogram. *J. Fluid Mech.* **392**, 101–128.
- TOKIEDA, T. 2001 Tourbillons dansants. *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, **333**, 943–946.

# Chapitre 2

---

## VORTEX DYNAMICS ON A CYLINDER

AUTEURS : JAMES MONTALDI, ANIK SOULIÈRE ET TADASHI TOKIEDA

### 2.1. CONTRIBUTION À L'ARTICLE

Ce chapitre est constitué de l'article *Vortex Dynamics on a Cylinder* par James Montaldi, Anik Soulière et Tadashi Tokieda paru dans *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, Vol.2, No.3, (2003), 417–430.

Voici la liste des contributions d'Anik Soulière à cet article :

- conception du simulateur de mouvements de tourbillons sur le cylindre ;
- observation des mouvements saute-mouton et « *twisters* » sur le cylindre ;
- calcul du hamiltonien numérique et analyse des courbes de niveau pour les théorèmes 3 et 4 (avec Tokieda) ;
- calcul d'une valeur critique pour le mouvement saute-mouton (avec Tokieda).

### 2.2. DYNAMIQUE DE TOURBILLONS SUR UN CYLINDRE

L'idée d'étudier les tourbillons sur le cylindre est inspirée d'un problème classique d'hydrodynamique : le train de von Kármán [von Kármán (1912), Lamb (1932)]. Cet équilibre relatif de tourbillons ponctuels est intéressant par sa sensibilité aux perturbations. Il est de plus fréquemment observé dans la nature. Sur le cylindre (bande périodisée), deux tourbillons remplacent les deux rangées infinies de tourbillons constituant le train de von Kármán. Les perturbations de cette solution périodique sur le cylindre seront nécessairement périodiques pour

le train de von Kármán associé. Il est naturel d'étudier une perturbation périodique du train puisque la perturbation peut provenir du mécanisme qui engendre la rangée de tourbillons sur le plan. L'étude du train sur le cylindre offre donc une simplification de l'analyse et du calcul numérique.

Cet article traite principalement des équilibres relatifs et des solutions périodiques relatives de  $N$  tourbillons sur le cylindre. D'abord, on présente le formalisme hamiltonien pour le cylindre. L'idée centrale pour déterminer le hamiltonien est d'effectuer une périodisation de la fonction de Green du plan. Dans la section 3, on montre que si la somme des  $N$  vorticités des tourbillons est nulle, alors les équilibres relatifs sont en fait des équilibres statiques. On donne une classification des équilibres statiques de  $N$  tourbillons de vorticités de même signe. La section 4 traite des équilibres relatifs (la somme des vorticités est nulle). Pour trois tourbillons, on donne des conditions pour avoir des équilibres relatifs. Avec quatre tourbillons, plusieurs résultats sont établis sur la classe de solutions périodiques relatives de type saute-mouton (leapfrogging).

Ma principale contribution à cet article est l'étude des mouvements d'un point de vue numérique. En particulier, j'ai étudié le mouvement saute-mouton (leapfrog). Nous avons utilisé l'idée de la fission présentée dans l'article précédent. L'idée de la preuve du théorème 3 rejoint celle de l'exemple des twistors sur la sphère de l'article précédent. La preuve utilise principalement le théorème 1 et la réduction des degrés de liberté du hamiltonien du système. Le théorème 4 présente un résultat pour des configurations symétriques de quatre tourbillons sur le cylindre. Le mouvement saute-mouton est un cas particulier de ce théorème. L'ajustement des paramètres permet au mouvement d'être périodique sur le cylindre. Finalement, on trouve la valeur critique de distance des deux groupes qui permet à la configuration d'engendrer le mouvement saute-mouton.

# VORTEX DYNAMICS ON A CYLINDER

Copyright (c)2003 Society for Industrial and Applied Mathematics.

Reprinted with permission.

## ABSTRACT

Point vortices on a cylinder (periodic strip) are studied geometrically. The Hamiltonian formalism is developed, a non-existence theorem for relative equilibria is proved, equilibria are classified when all vorticities have the same sign, and several results on relative periodic orbits are established, including as corollaries classical results on vortex streets and leapfrogging.

## 1. INTRODUCTION

Spatially periodic rows of point vortices in a 2-dimensional ideal fluid have long attracted the attention of fluid dynamicists, one of the earliest and the most popular instances being Kármán's vortex street [6], [16, photos 94–98]. The general problem is as follows : analyse the motion of an infinite configuration consisting of vortices  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$  with vorticities  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in \mathbb{R}$  together with their translates  $\{z_k + 2\pi r m \mid k = 1, \dots, N, m \in \mathbb{Z}\}$ , where  $2\pi r > 0$  is the spatial period of translation. Traditionally the problem is analysed on the plane  $\mathbb{C}$ , but in this paper we place the vortices on a cylinder  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$  (fig. 1).

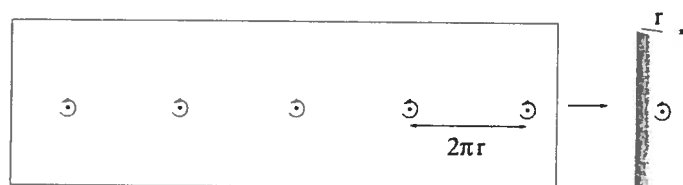


FIG. 1.

Though the two pictures—periodic planar and cylindrical—are for most purposes equivalent, as we shall see there are advantages, both conceptual and computational, to working on a cylinder rather than on the plane. The proviso ‘for most purposes’ is necessary because the cylindrical picture posits that everything in the dynamics be  $2\pi r$ -periodic, whereas in the planar picture one could allow, for example, non-periodic perturbations to the periodic row. Physically, however, perturbations are usually due to some small change in the mechanism generating the vortex row, and the simplest

type of change generates spatially periodic perturbations. Symmetry-breaking perturbations, which do occur in real fluids and are very interesting, arise at the next level of complexity. So it is natural to look at the cylindrical picture first.

We shall be interested in how vortices move relative to one another, more precisely in their dynamics modulo the translational action of the symmetry group  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ . The basic objects of interest are relative equilibria and relative periodic orbits. A *relative equilibrium* is a motion of vortices that lies entirely in a group orbit (i.e. it looks stationary up to translation), and a *relative periodic orbit* is a motion that revisits the same group orbit after some time (i.e. it looks periodic in time up to translation). Equilibria and periodic orbits in the ordinary sense are special examples of relative equilibria and relative periodic orbits. When we wish to exclude ordinary equilibria or periodic orbits, we speak of relative equilibria or relative periodic orbits *with nonzero drift*.

As on the plane, dynamics of point vortices on a cylinder lends itself to a Hamiltonian formalism. The model presented here is then a finite-dimensional Hamiltonian approximation to the vortex dynamics of the Euler equation. This approximation is mathematically very rich and in the context of the plane can claim a pedigreed history [1, chap. VII], [17]. Conversely, the motion of point vortices is amenable to desingularization to a solution of the Euler equation.

For vortices on the plane or on a sphere, an extensive theory of relative equilibria is available (especially when the vorticities are identical or opposite) [1, 9, 8]. In contrast, apart from a study on 3 vortices on the periodic strip [2], and a study of rings of point vortices on surfaces of revolution [4], no literature seems to exist on relative equilibria and relative periodic orbits of  $N$  vortices on a cylinder. In this paper we develop the Hamiltonian formalism for vortex dynamics on a cylinder (section 2), prove that if the vorticities do not sum to zero a cylinder supports no relative equilibrium with nonzero drift (section 3), classify equilibria when all vorticities have the same sign (section 3), show that 3 vortices form a relative periodic orbit for ‘small’ initial conditions or for vorticities dependent over  $\mathbb{Q}$  with zero sum, and establish several results on a class of relative periodic orbits called leapfrogging [16, photo 79] (section 4), which may be regarded as splitting of Kármán’s vortex street.

Although Noether’s theorem tells us that associated to any 1-parameter group of symmetries there is a corresponding first integral, there is a topological hypothesis (that certain closed 1-forms are exact) which is not fulfilled by the cylinder, and while the subgroup of horizontal translations  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$  does have a conserved quantity

associated to it. the subgroup  $i\mathbb{R}$  of vertical translations does not. However, since any closed 1-form is *locally* exact, this subgroup does have *locally* well-defined first integrals, and one of the novelties of the present work is to exploit these local first integrals (Theorems 2, 3, 4).

Many of the results have analogues in the theory of vortices on a torus, i.e. for spatially biperiodic arrays of vortices.

## 2. HAMILTONIAN FORMALISM OF VORTICES ON A CYLINDER

Throughout the paper *cylinder* means the surface  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{R}/2\pi r) \times \mathbb{R}$ , where  $r > 0$  is some fixed constant, the *radius* of the cylinder. The coordinate  $z = x + iy$  on  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$  is to be read modulo  $2\pi r$ , i.e.  $x \equiv x + 2\pi rn$  for all  $n \in \mathbb{Z}$ ; the  $x$ -axis (which is a circle) is *horizontal*, the  $y$ -axis *vertical*. The phase space for the motion of vortices  $z_1, \dots, z_N$  with vorticities  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  is the product of  $N$  copies of the cylinder with diagonals removed (to exclude collisions). The Hamiltonian is a weighted combination  $H(z_1, \dots, z_N) = \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \psi(z_k, z_l)$  of Green's function  $\psi$  for the Laplacian on the cylinder :  $\nabla^2 \psi(z, z_0) = -\delta_{z_0}(z)$  (see e.g. [15, section 2]). Hamilton's equations are

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{2}{i} \frac{\partial H}{\partial(\Gamma_k \bar{z}_k)}, \quad (k = 1, \dots, N).$$

The quickest way to derive the Hamiltonian on a cylinder is to periodize Green's function on the plane  $\psi(z_k, z_l) = -\frac{1}{2\pi} \log |z_k - z_l|$  by taking into account contributions from  $2\pi\mathbb{Z}$ -translates. Formally the periodized Hamiltonian becomes

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |z_k - z_l - 2\pi rn|,$$

which, as it stands, diverges. But since additive constants in  $H$  do not affect the dynamics, we can subtract off a constant divergent series to force the remaining functional part to converge. Jettisoning  $-\frac{1}{2\pi} \sum_n \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2\pi rn|$  and pairing terms in  $n$  and  $-n$ ,

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| (z_k - z_l) \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \left( \frac{z_k - z_l}{2\pi rn} \right)^2 \right) \right| = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| \sin \frac{z_k - z_l}{2r} \right|. \quad (2.2.1)$$

The equations of motion on a cylinder are therefore

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{i}{4\pi r} \sum_{l, l \neq k} \Gamma_l \cotan \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2r}, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.2.2)$$

For reference, we list expressions in real coordinates :

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left\{ \sin^2 \left( \frac{x_k - x_l}{2r} \right) + \sinh^2 \left( \frac{y_k - y_l}{2r} \right) \right\}, \quad (2.2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi r} \sum_{l, l \neq k} \Gamma_l \frac{\sinh \frac{y_k - y_l}{r}}{\sin^2 \left( \frac{x_k - x_l}{2r} \right) + \sinh^2 \left( \frac{y_k - y_l}{2r} \right)} \\ \frac{dy_k}{dt} = \frac{1}{8\pi r} \sum_{l, l \neq k} \Gamma_l \frac{\sin \frac{x_k - x_l}{r}}{\sin^2 \left( \frac{x_k - x_l}{2r} \right) + \sinh^2 \left( \frac{y_k - y_l}{2r} \right)} \end{cases}, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.2.4)$$

One noteworthy feature of (2.2.4) is that as  $y_k - y_l \rightarrow \infty$  (infinite vertical separation), the velocity induced by  $z_l$  on the vortex  $z_k$  does not decay to 0, but tends to  $\Gamma_l/4\pi r$ , as is obvious upon calculating in the planar theory the circulation around a tall window of width  $2\pi r$  enclosing  $z_l$ . Another way to interpret the feature is to note that in the planar theory, up to rescaling, stretching vertical separation amounts to narrowing the spatial period  $2\pi r \rightarrow 0$ ; the latter limit produces a *vortex sheet* (or more aptly *vortex line* in this 2-dimensional theory), which induces a velocity field constant above (and the opposite constant below) the sheet independently of the distance to the sheet. This is exactly as in 2-dimensional electromagnetism or gravity where the force induced by a homogeneous charge or mass distribution along an infinite line is independent of the distance to the line.

Physically, periodizing the plane with period  $2\pi r$  and considering  $N$  vortices on the resulting cylinder is the same as periodizing with period  $2\pi r n$  and considering  $nN$  vortices on the resulting wider cylinder. The equivalence between these periodizations is trivial yet sometimes useful :

**Proposition.** *Let  $z_1, \dots, z_N$  be vortices with vorticities  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  on a cylinder of radius  $r$ . Next let  $z_1, \dots, z_N, z_1 + 2\pi r, \dots, z_N + 2\pi r, \dots, z_1 + 2\pi r n, \dots, z_N + 2\pi r n$  be their ' $n$ -fold copies' with corresponding vorticities on a cylinder of radius  $rn$ , where  $n$  is any strictly positive integer. Then the dynamics on the cylinder of radius  $rn$  covers the dynamics on the cylinder of radius  $r$ .*

In particular, given a relative equilibrium or a relative periodic orbit, we can reel off infinite families of relative equilibria or relative periodic orbits at no extra cost by replicating the configuration sideways on a wider cylinder.

*Remark 1.* A torus has the form  $\mathbb{C}/(\pi\mathbb{Z} + \tau\pi\mathbb{Z})$ , where the parameter  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}\tau > 0$  controls the conformal class. The Hamiltonian is

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \left\{ \log |\vartheta_1(z_k - z_l | \tau)| - \frac{(\text{Im}(z_k - z_l))^2}{\pi \text{Im}\tau} \right\},$$

where  $\vartheta_1$  is the 1st Jacobian theta function [12], [14], [15].

A cylinder has a translational symmetry of  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$  acting on itself, hence acting diagonally on the phase space. The plane has a supplementary rotational symmetry  $z \mapsto e^{i\theta}z$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ; this is lost on the cylinder. Via Noether's theorem the translational symmetry of  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$  should give rise to a first integral, a *momentum map*  $(z_1, \dots, z_N) \mapsto \sum_k \Gamma_k z_k$ , but there is a rub : because  $z$ 's are defined only modulo  $2\pi r$  this 'momentum map' is not well-defined as a map to the dual of the Lie algebra of the symmetry group  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ . Nor is it advisable to treat this 'momentum map' as a multi-valued function, for generically  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  are independent over  $\mathbb{Q}$  and so the ambiguity  $\{2\pi r \sum_k \Gamma_k n_k \mid n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}\}$  in the value of the 'map' is dense in  $\mathbb{R}$ . Nevertheless, the momentum map is *locally* (i.e. on each chart) well-defined. From now on, whenever we write  $\sum_k \Gamma_k z_k$ , some suitable ad hoc chart will be understood.

When  $\sum_k \Gamma_k \neq 0$ , the *center of vorticity*  $\sum_k \Gamma_k z_k / \sum_k \Gamma_k$  is a more intuitive first integral [1, art. 154]. The next result provides a substitute for center of vorticity when  $\sum_k \Gamma_k = 0$ .

**Theorem 1.** *Let  $\{z\}$  be vortices on the plane or on a cylinder whose vorticities sum to zero :  $\sum \Gamma = 0$ . Suppose the vortices are partitioned into two groups  $\{z'\}$ ,  $\{z''\}$  and within each group  $\sum \Gamma' \neq 0$ ,  $\sum \Gamma'' \neq 0$ , so that the center of vorticity for each group is well-defined. Then the vector connecting the two centers of vorticity is a local first integral (fig. 2).*

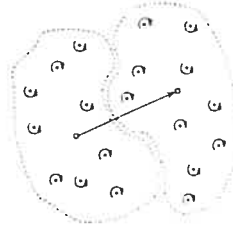


FIG.2.

DÉMONSTRATION. Since  $\sum \Gamma' + \sum \Gamma'' = 0$ , the vector in question is

$$\frac{\sum \Gamma' z'}{\sum \Gamma'} - \frac{\sum \Gamma'' z''}{\sum \Gamma''} = \frac{\sum \Gamma' z'}{\sum \Gamma'} + \frac{\sum \Gamma'' z''}{\sum \Gamma'} = \frac{\sum \Gamma z}{\sum \Gamma'},$$



and  $\sum \Gamma z$  is a local first integral. □

Sfigure

Theorem 1 is serviceable in many problems. The simplest illustration is the motion of a *vortex pair*  $z_1, z_2$  with vorticities  $\Gamma, -\Gamma$  [16, photos 77, 78]. Treating  $z_1$  as one group and  $z_2$  as the other group, we check against Theorem 1 that  $z_2 - z_1$  is constant during the motion. In fact, according to (2.2.4) the vortex pair on a cylinder forms a relative equilibrium moving with slope

$$-\sin \frac{x_2 - x_1}{r} / \sinh \frac{y_2 - y_1}{r}.$$

When  $x_2 - x_1 = 0$  or  $\pi r$  the pair moves horizontally : the corresponding configurations on the plane are the unstaggered or fully staggered cases of Kármán's vortex street, see also [4]. When  $z_1, z_2$  are in general position, the corresponding vortex street on the plane translates at an angle to the horizontal, a case studied in [11]. The 'plane limit'  $r \rightarrow \infty$  yields the angle of progression of a vortex pair on the plane  $-(x_2 - x_1)/(y_2 - y_1)$ . For a beautiful study of the stability of variants of vortex streets, see [5].

### 3. RELATIVE EQUILIBRIA

The first fact about relative equilibria of vortices on a cylinder is that there are not many of them.

**Theorem 2.** *Let  $z_1, \dots, z_N$  be vortices with vorticities  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  on a cylinder  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$ . Suppose  $\sum_k \Gamma_k \neq 0$ . Then all relative equilibria are in fact equilibria. Moreover, if all  $\Gamma$ 's have the same sign, then for each cyclic ordering there exists a unique (up to translation by  $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}$ ) equilibrium, and all the vortices are aligned on a single horizontal circle.*

DÉMONSTRATION. If  $z_1, \dots, z_N$  form a relative equilibrium, then all  $z$ 's move with some common drift velocity  $v$ . The local first integral should not vary :

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_k \Gamma_k z_k = v \sum_k \Gamma_k,$$

so  $\sum_k \Gamma_k = 0$  or else  $v = 0$ .

If the vortices are not aligned on a single horizontal circle, pick a 'top vortex' (one with maximal  $y$ -coordinate) and a 'bottom vortex' (one with minimal  $y$ -coordinate). If all  $\Gamma$ 's have the same sign, then by (2.2.4) the velocities of the top and bottom

vortices must have  $x$ -components with opposite signs, so this position cannot constitute an equilibrium.

Now suppose all the vorticities are of the same sign. Fix a cyclic ordering of the vortices, and place the vortices in order on a single horizontal circle. The Hamiltonian is given by

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \sin^2 \left( \frac{x_k - x_l}{2r} \right).$$

One readily checks that this is a convex function of  $x_1, \dots, x_N$ : one first checks that wherever they are defined the second derivatives satisfy  $\partial^2 H / \partial x_k \partial x_l < 0$  for  $k \neq l$  and  $\partial^2 H / \partial x_k^2 > 0$  and  $\sum_l \partial^2 H / \partial x_k \partial x_l = 0$  for each  $k$ ; it then follows from a variant of Gershgorin's theorem (Lemma 1 below) that 0 is a simple eigenvalue of the Hessian of  $H$  and all other eigenvalues are strictly positive. Consequently on each connected component of the domain of definition there is a unique minimum and no other critical point, and different connected components correspond to different cyclic orderings. This is the same argument as for [9, Theorem 4.8].  $\square$

**Lemma 1.** *Let  $A = (a_{kl})$  be a symmetric  $N \times N$  matrix satisfying  $a_{kl} < 0$  for  $k \neq l$ , and  $a_{kk} > 0$ ,  $\sum_{l=1}^N a_{kl} = 0$  for each  $k$ . Then 0 is a simple eigenvalue of  $A$  and all other eigenvalues are strictly positive.*

DÉMONSTRATION. Let  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$  be an eigenvector of  $A$  with eigenvalue  $\lambda$ , normalized so that there is an index  $k$  for which  $u_k = 1$  and  $|u_l| \leq 1$  for all  $l$ . The  $k$ th row of the equation  $Au = \lambda u$  is  $a_{kk} + \sum_{l, l \neq k} a_{kl} u_l = \lambda$ , which in view of the hypotheses on  $a_{kl}$  may be written  $\sum_l |a_{kl}| (1 - u_l) = \lambda$ . But  $1 - u_l \geq 0$  and  $|a_{kl}| > 0$  for each  $l$ ; it follows that  $\lambda \geq 0$  and  $\lambda = 0$  if and only if all  $u_l = 1$ . On the other hand,  $(1, \dots, 1)^T$  is obviously an eigenvector with eigenvalue 0.  $\square$

If the vortices are placed on a single horizontal circle so that successive vorticities have alternating signs, then we also get the existence of an equilibrium, though the uniqueness problem is open as the function is no longer convex. In full generality, if the signs are neither the same nor alternating, the argument for existence fails as  $H \rightarrow +\infty$  for some collisions and  $\rightarrow -\infty$  for others.

*Remark 2.* For  $N = 2$ , if  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ , we have generically a periodic orbit and exceptionally an equilibrium of antipodal vortices  $z, z + \pi r$  or a separatrix connecting equilibria. For  $N > 2$ , if  $\sum_k \Gamma_k \neq 0$  but  $\Gamma$ 's have mixed signs, equilibria are less severely

constrained. For example, for  $N = 3$ , let  $z_1, z_2$  be vortices with vorticities  $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$ . To secure an equilibrium, the third vortex  $z_3$  with vorticity  $\Gamma_3 < 0$  must be placed at one of the 2 stagnation points of the velocity field induced by  $z_1, z_2$ , given in view of (2.2.2) as roots of

$$\Gamma_1 \cotan \frac{z - z_1}{2} + \Gamma_2 \cotan \frac{z - z_2}{2} = 0.$$

Having chosen  $z_3$  as one of the roots and thereby immobilized  $z_3$ , adjust  $\Gamma_3$  so as to immobilize  $z_1$  :

$$\Gamma_2 \cotan \frac{z_1 - z_2}{2} + \Gamma_3 \cotan \frac{z_1 - z_3}{2} = 0.$$

Then  $z_2$  too is automatically immobilized :

$$\Gamma_3 \cotan \frac{z_2 - z_3}{2} + \Gamma_1 \cotan \frac{z_2 - z_1}{2} = 0.$$

The upshot is that given any  $z_1, z_2$  with vorticities of the same sign, we have 2 positions to place  $z_3$  with the right vorticity of the opposite sign to secure an equilibrium. For example, vortices  $z_1, z_2$  both of vorticity  $\Gamma$  such that  $z_2 - z_1 = 2ib$  are immobilized by the adjunction of a vortex  $(z_1 + z_2)/2$  of vorticity

$$\Gamma \left( \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{b}{2r} - 1 \right).$$

This is always less than  $-\Gamma/2$  and in the plane limit  $r \rightarrow \infty$  tends to the corresponding value in the planar theory  $-\Gamma/2$ . On the other hand, in the 'vortex sheet limit'  $b \rightarrow \infty$  this tends to  $-\Gamma$ , also as it should. Similarly, vortices  $z_1, z_2$  of vorticity  $\Gamma$  such that  $z_2 - z_1 = 2a$  are immobilized by the adjunction of a vortex  $(z_1 + z_2)/2$  of vorticity

$$\Gamma \left( \frac{1}{2} \sec^2 \frac{a}{2r} - 1 \right).$$

In the planar limit this tends again to  $-\Gamma/2$ . On the other hand, it is 0 when  $a = \pi r/2$  :  $z_1, z_2$  are antipodal on the cylinder and are stationary already by themselves. When  $a \rightarrow \pi r$ ,  $z_1, z_2$  nearly meet at the back and a stronger and stronger vortex is required at the front to prevent them from moving.

*Remark 3.* Now suppose  $\sum_k \Gamma_k = 0$ . It was pointed out at the end of section 2 that a vortex pair  $N = 2$  is always a relative equilibrium. For  $N = 3$ , Aref and Stremler [2] made a detailed study of relative equilibria; the patterns of some trajectories are surprisingly complicated. For  $N > 3$  and  $N$  even, we have for any  $a, b > 0$  a family of relative equilibria consisting of  $n = N/2$  vortices with vorticity  $\Gamma$  at

$$ib, ib + \frac{2\pi r}{n}, \dots, ib + (n-1) \frac{2\pi r}{n}, \quad (2.2.5)$$

and  $n$  vortices with vorticity  $-\Gamma$  at

$$a - ib, a - ib + \frac{2\pi r}{n}, \dots, a - ib + (n-1)\frac{2\pi r}{n}. \quad (2.2.6)$$

This is merely a crowded vortex street with spatial period  $2\pi r/n$ , or equivalently a single vortex pair on a thinner cylinder of radius  $r/n$  (see stability calculations in [3]).

No essentially different family of relative equilibria seems to be known for  $N > 3$ .

Incidentally, even the trivial equivalence between 1 vortex on a cylinder of radius  $r$  and  $n$  horizontally equidistributed vortices on a cylinder of radius  $nr$  leads to amusing identities [1] : for example, equating the induced velocity fields and rescaling the variables in (2.2.2),

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cotan \frac{z + \pi l}{n} = \cotan z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Remark 4.* On the plane equilibria do not exist either when all  $\Gamma$ 's are of the same sign (even the possibility of a horizontal circle is lost), and the non-existence of translational relative equilibria with nonzero drift when  $\sum_k \Gamma_k \neq 0$  holds also on the plane and on a torus ; the proof carries over verbatim from the cylindrical theorem. A torus, however, accommodates more varied families of equilibria : for example,  $n_1 n_2$  vortices with identical vorticity  $\Gamma$  placed on a sub-lattice  $(\pi/n_1)\mathbb{Z} + (\tau\pi/n_2)\mathbb{Z}$  form an equilibrium [15]. Many further patterns of equilibria may be designed on a torus with identical or alternating vortices.

#### 4. RELATIVE PERIODIC ORBITS

Once a relative equilibrium of vortices is known, a frequently successful recipe for creating relative periodic orbits consists in *splitting* the vortices. Assume the vortices  $z_1, \dots, z_N$  with vorticities  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  form a relative equilibrium. Let us split each  $z_k$  into a cluster, near the original position of  $z_k$ , of  $n_k$  vortices  $z_{k,1}, \dots, z_{k,n_k}$  whose vorticities are of the same sign and sum to  $\Gamma_k$ . We expect the child vortices  $z_{k,1}, \dots, z_{k,n_k}$  to orbit around one another and remain a cluster, while seen from far away they still look like the original parent vortex  $z_k$  with vorticity  $\Gamma_k$ . It is reasonable to conjecture that for suitable initial configurations the child vortices form a relative periodic orbit, and for perhaps generic splittings they form a relative *quasi-periodic* orbit.

A vortex pair on a cylinder, which corresponds in the planar picture to Kármán's vortex street, is a relative equilibrium. In this section we shall create various relative periodic orbits by splitting a vortex pair ; as a special case we recover the phenomenon

classically known in the planar picture as leapfrogging. In Theorem 3 we split one of the vortices, while in Theorem 4 we split both. The split is measured by a complex variable  $\zeta = \xi + i\eta$  (or rather by  $2\zeta$ ), and we are principally interested in small values of  $|\zeta|$ . In all the formulae the radius of the cylinder is normalized to  $r = 1$ : denormalization is a matter of dimensional analysis. Later in the section additional classes of relative periodic orbits are described.

Take a vortex pair at  $c, -c$ , where  $c = a + ib \in \mathbb{C}$ . We split it into 3 or 4 vortices as in fig. 3 : the left diagram illustrates Theorem 3; the middle one Theorem 4, case  $-b(1 + \Gamma/\Gamma')/2 < \eta < b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2$ ; the right one case  $b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2 < \eta$ . Theorem 4, case  $\eta < -b(1 + \Gamma/\Gamma')/2$  is like the right diagram reflected laterally with  $\Gamma, \Gamma'$  interchanged.

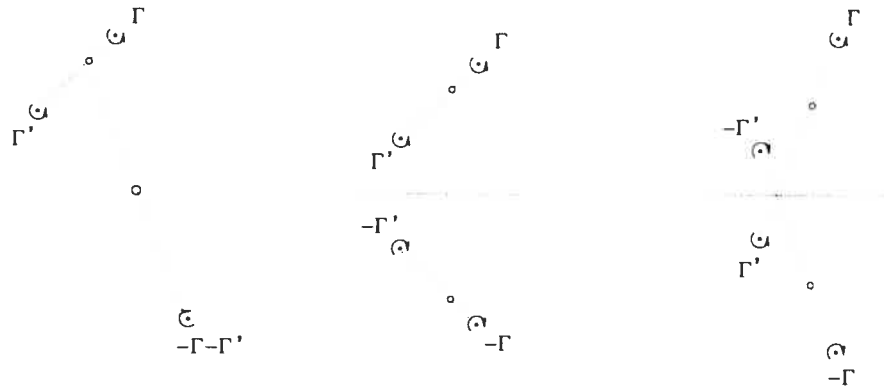


FIG.3.

**Theorem 3.** Let  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a cylinder, consider the configuration of 3 vortices with vorticities  $\Gamma, \Gamma', -\Gamma - \Gamma'$  ( $\Gamma$  and  $\Gamma'$  being of the same sign) at

$$c + \frac{2\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad c - \frac{2\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad -c.$$

There exists an open punctured neighborhood of  $\zeta = 0$  such that for every initial condition  $\zeta(0) \neq 0$  in this neighborhood, these vortices form a relative periodic orbit. If  $\Gamma/\Gamma' \in \mathbb{Q}$ , then for a generic choice of  $\zeta(0)$  (no restriction on its size) these vortices form a relative periodic orbit, and for isolated choices of  $\zeta(0)$  they form a relative equilibrium or a separatrix connecting relative equilibria.

Combined with Proposition of section 2, Theorem 3 gives relative equilibria and relative periodic orbits of  $N = 3n$  vortices for all  $n \geq 1$ . The result for  $N = 3$  when  $\Gamma/\Gamma' \in \mathbb{Q}$  is in [2], but we give a somewhat different proof. The relative periodicity for small  $\zeta(0)$  is new.

The proof invokes the following elementary lemma.

**Lemma 2.** *Let  $H$  be a function with only nondegenerate critical points on a compact surface with  $p$  punctures such that  $|H| \rightarrow \infty$  near each puncture. Then the generic level sets of  $H$  are disjoint unions of loops. If  $p > 2$ , then besides loops there exist isolated saddles and separatrices connecting the saddles.*

DÉMONSTRATION. By rescaling the values of  $H$  and compactifying the punctures, we reduce to the situation where  $H$  is defined on a compact surface, takes values in  $[-1, 1]$  and attains  $\pm 1$  at the points where the punctures used to be. The first part of the conclusion is immediate from Sard's theorem and the implicit function theorem. Moreover, from Morse theory

$$p - \#\text{saddles} \leq \#\text{max} + \#\text{min} - \#\text{saddles} = \text{Euler characteristic} \leq 2,$$

whence the second part of the conclusion.  $\square$

The idea now for the proof of Theorem 3 is to use symmetries and Theorem 1 to rewrite the Hamiltonian as a function on a punctured 2-dimensional sphere, satisfying the condition of divergence near the punctures. Applying Lemma 2 and recalling that a phase point in a Hamiltonian system moves along a level set of the Hamiltonian, we shall be home.

PROOF OF THEOREM 3. The center of vorticity of the group  $\Gamma, \Gamma'$  is at  $c$ , that of the singleton group  $-\Gamma - \Gamma'$  at  $-c$ . By Theorem 1, the vector connecting these centers is a local first integral. Hence passing to the quotient by translations, these centers may be assumed immobile. Within the group  $\Gamma, \Gamma'$ , the position of one vortex determines the position of the other (it is at a definite ratio of distances across their center). Hence the trajectory of the vortex with vorticity  $\Gamma$  determines the trajectories of all 3 vortices up to translation, and the hamiltonian  $H$  may be regarded as a function of  $\zeta = \xi + i\eta$  alone *as long as the trajectory of  $\zeta$  lies on a single chart*. If the vortices  $\Gamma, \Gamma'$  are very close, they orbit like a binary star around their immobile center  $c$  within the chart, so that sooner or later  $\arg \zeta$  increases by  $2\pi$ . Since  $H(\zeta) \rightarrow +\infty$  as  $\zeta \rightarrow 0$ , for large enough  $E \in \mathbb{R}$  the connected component of  $\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus 0 \mid |H(\zeta)| > E\}$  surrounding the singularity  $\zeta = 0$  is topologically a punctured open disk, free of critical points of  $H$ . (The infimum of such  $E$  is the largest of the saddle values of  $H$ .) The level sets of  $H$

on this neighborhood are topologically circles. and so every  $\zeta$  starting from  $\zeta(0) \neq 0$  in this neighborhood returns to  $\zeta(0)$ , guaranteeing relative periodicity.

We must deal with the scenario where the trajectory of  $\zeta$  does not lie on a single chart. Since  $\Gamma/\Gamma' \in \mathbb{Q}$ , the lowest common multiple  $L$  of  $2, 1 + \Gamma/\Gamma', 1 + \Gamma'/\Gamma$  makes sense. To define  $\zeta$  on the whole cylinder, we must swell the cylinder to  $\mathbb{C}/L\pi\mathbb{Z}$ . The swollen cylinder  $\mathbb{C}/L\pi\mathbb{Z}$  covers the original cylinder  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$  and  $H$  as a function of  $\zeta$  lifts to a function on  $\mathbb{C}/L\pi\mathbb{Z} \setminus \{\text{singularities}\}$ . The singularities represent the collisions between

$$\Gamma \sim \Gamma' \text{ (front and back), } \Gamma \sim -\Gamma - \Gamma', \quad \Gamma' \sim -\Gamma - \Gamma'$$

where  $|H| \rightarrow \infty$ ; off the singularities, by (2.2.1),

$$e^{2\pi H/\Gamma\Gamma'} = \frac{\left| \sin \left( c + \frac{\zeta}{1 + \Gamma/\Gamma'} \right) \right|^{1+\Gamma/\Gamma'} \left| \sin \left( c - \frac{\zeta}{1 + \Gamma'/\Gamma} \right) \right|^{1+\Gamma'/\Gamma}}{|\sin \zeta|}. \quad (2.2.7)$$

Toward the ‘ends’  $\eta \rightarrow \pm\infty$ ,  $|H| \rightarrow \infty$  as well. Topologically  $\mathbb{C}/L\pi\mathbb{Z} \setminus \{\text{singularities}\}$  is a sphere with at least 4 punctures. (2.2.7) shows that the critical points of  $H$  are all nondegenerate and  $|H| \rightarrow \infty$  near each puncture. By Lemma 2, the generic level sets of  $H$  are loops, representing (putting horizontal translation back in) relative periodic orbits, and there exist values of  $\zeta$  representing relative equilibria as well as separatrices (relative heteroclinic orbits) connecting relative equilibria.  $\square$

*Remark 5.* In Theorem 3, relative periodicity when  $\Gamma/\Gamma' \notin \mathbb{Q}$  is spoilt only for  $\zeta(0)$  too large. For such  $\zeta(0)$ , the orbit is relative quasi-periodic. Of course, even when  $\Gamma/\Gamma' \notin \mathbb{Q}$  there are questions that can be settled within a chart. Thus, for 3 vortices with arbitrary vorticities that sum to zero, topological reasons imply the existence of a configuration that forms a relative equilibrium.

**Theorem 4.** *Let  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . On a cylinder, consider the configuration of 4 vortices with vorticities  $\Gamma, \Gamma', -\Gamma', -\Gamma$  ( $\Gamma$  and  $\Gamma'$  being of the same sign) at*

$$ib + \frac{2\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad ib - \frac{2\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad -ib - \frac{2\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}\bar{\zeta}, \quad -ib + \frac{2\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\bar{\zeta};$$

*Let  $\Gamma/\Gamma' \neq 1$ . Then for a generic choice of the initial condition  $\zeta(0)$  these vortices form a relative periodic orbit, and for isolated choices of  $\zeta(0)$  they form a relative equilibrium or a separatrix connecting relative equilibria. If  $\Gamma/\Gamma' = 1$ , the same conclusion holds for  $\zeta(0)$  such that  $|\text{Im} \zeta(0)| < b$  or  $\pi H(\zeta(0))/\Gamma^2 < \log \sinh b$ .*

Combined with Proposition of section 2, Theorem 4 gives relative equilibria and relative periodic orbits of  $N = 4n$  vortices for all  $n \geq 1$ .

DÉMONSTRATION. As in the proof of Theorem 3. the positions of all 4 vortices are determined by those of the ones with vorticities  $\Gamma$  and  $-\Gamma$ . Thanks to a supplementary reflexive symmetry  $z \mapsto \bar{z}$ . the position of  $\Gamma$  determines that of  $-\Gamma$ . This time, after passing to the quotient by translations,  $H$  is a genuine function on the cylinder  $\mathbb{C}/\pi\mathbb{Z}$  of  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $-\pi/2 < \xi \leq \pi/2$ . with the singularities removed. Off the singularities, by (2.2.1),

$$e^{2\pi H/\Gamma\Gamma'} = \left| \frac{\sin\left(ib + \frac{\Gamma'\zeta + \Gamma\bar{\zeta}}{\Gamma + \Gamma'}\right)}{\sin\zeta} \right|^2 \left| \sin\left(ib + \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{1 + \Gamma/\Gamma'}\right) \right|^{\Gamma/\Gamma'} \left| \sin\left(ib - \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{1 + \Gamma'/\Gamma}\right) \right|^{\Gamma'/\Gamma}. \quad (2.2.8)$$

In particular, when  $\Gamma/\Gamma' = 1$ ,

$$e^{2\pi H/\Gamma^2} = \frac{\sin^2\xi + \sinh^2b}{\sin^2\xi + \sinh^2\eta} |\sinh(b + \eta)\sinh(b - \eta)|. \quad (2.2.9)$$

The isolated singularities represent simultaneous collisions between

$$\Gamma \sim \Gamma' \text{ and } -\Gamma' \sim -\Gamma$$

where  $H \rightarrow +\infty$ , and, if  $\Gamma/\Gamma' \neq 1$ , between

$$\Gamma \sim -\Gamma' \text{ and } \Gamma' \sim -\Gamma$$

where  $H \rightarrow -\infty$ . Toward the ends,  $H \rightarrow +\infty$ . There are also circles of singularities  $\eta = -b(1 + \Gamma/\Gamma')/2$ ,  $b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2$  representing collisions between

$$\Gamma \sim -\Gamma, \quad \Gamma' \sim -\Gamma'$$

where  $H \rightarrow -\infty$ . Let us saw the cylinder  $\mathbb{C}/\pi\mathbb{Z}$  of  $\zeta$  into 3 trunks :

$$C_+ = \{\zeta \mid b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2 < \eta\},$$

$$C_0 = \{\zeta \mid -b(1 + \Gamma/\Gamma')/2 < \eta < b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2\},$$

$$C_- = \{\zeta \mid \eta < -b(1 + \Gamma/\Gamma')/2\}.$$

Topologically  $C_+, C_0, C_-$  are spheres with punctures.  $C_0$  contains  $\zeta = 0$ , the simultaneous collisions between  $\Gamma \sim \Gamma', -\Gamma' \sim -\Gamma$ , so  $C_0$  has at least 3 punctures and  $|H| \rightarrow \infty$  near each puncture. Lemma 2 applies to  $C_0$  and implies the existence of relative periodic orbits and relative equilibria.

For the moment, suppose  $\Gamma/\Gamma' \neq 1$ .  $\zeta$  representing the simultaneous collisions between  $\Gamma \sim -\Gamma', \Gamma' \sim -\Gamma$  is in  $C_+$  or  $C_-$  accordingly as  $\Gamma/\Gamma' > 1$  or  $< 1$ . If  $\Gamma/\Gamma' > 1$ ,



this puts on  $C_+$  at least 3 punctures near each of which  $|H| \rightarrow \infty$ . so Lemma 2 applies and implies the existence of relative periodic orbits and relative equilibria; whereas  $C_-$  acquires only 2 punctures, so we can conclude the existence only of relative periodic orbits. If  $\Gamma/\Gamma' < 1$ , the rôles of  $C_+, C_-$  are reversed.

Note that as  $H$  is symmetric under the lateral reflection along  $\xi = 0$  and along  $\xi = \pi/2$ , every point on either line where  $\partial H/\partial \eta$  vanishes is critical. Let  $\Gamma/\Gamma' > 1$  and work on  $C_+$ . The strip  $0 < \xi < \pi/2$  is free of critical points, for here by (2.2.9)  $H$  is strictly monotone in  $\xi$  along any line  $\eta = \text{constant}$ . Along  $\xi = 0$ ,  $H \rightarrow -\infty$  as  $\eta \rightarrow b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2$  or  $b(\Gamma + \Gamma')/(\Gamma - \Gamma')$ , between which  $\partial H/\partial \eta$  must vanish, signalling a saddle at say  $\zeta_1$ . Along  $\xi = \pi/2$ ,  $H \rightarrow -\infty$  or  $+\infty$  as  $\eta \rightarrow b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2$  or  $+\infty$ . These bits of information, together with the fact that all critical points of  $H$  are nondegenerate, imply that  $\partial H/\partial \eta$  vanishes twice along  $\xi = \pi/2$ , signalling a maximum at say  $\zeta_2$  and a saddle (which shall be left nameless). As a bonus we learn that 2 relative equilibria are represented in  $C_+$ , whereas a count of 3 singularities just predicts at least 1 relative equilibrium. The analysis works mutatis mutandis on  $C_-$  if  $\Gamma/\Gamma' < 1$ .

Finally, suppose  $\Gamma/\Gamma' = 1$ . Then the simultaneous collisions  $\Gamma \sim -\Gamma', \Gamma' \sim -\Gamma$  as well as  $\zeta_1, \zeta_2$  escape to the ends  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , and toward the ends  $2\pi H/\Gamma^2$  asymptotes to  $\log(\sin^2 \xi + \sinh^2 b)$ , which remains bounded. Hence all the critical points in  $C_+, C_-$  disappear. Relative periodic orbits are represented by compact level sets of  $H$ , i.e. those that fill the region  $e^{\pi H/\Gamma^2} < \sinh b$  of  $C_+, C_-$ ; there is no relative equilibrium on these trunks.  $\square$

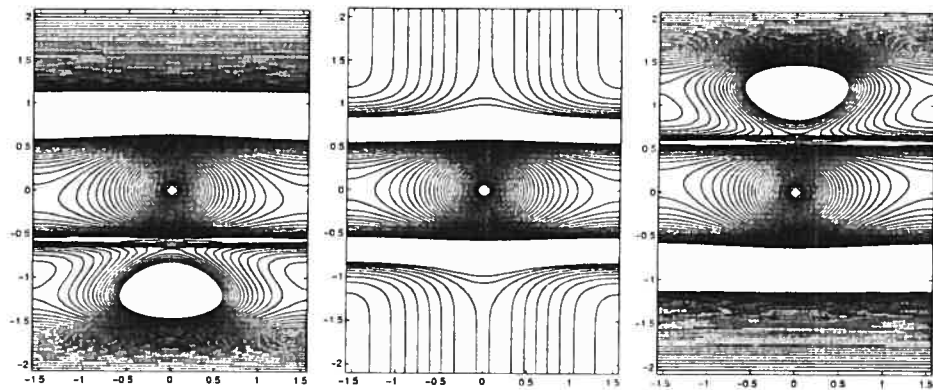


FIG.4.

The plots of fig. 4 depict the level sets of  $H$  as a function of  $\zeta$  for  $\Gamma/\Gamma' < 1, = 1, > 1$  respectively; they were drawn at  $b = 1$ . By (2.2.8), the levels for  $\Gamma/\Gamma' < 1$  and  $> 1$  are mirror images of each other via  $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ . The blank holes and bands indicate where

$H$  diverges to  $-\infty$  too steeply. while the diamond in the middle of each plot surrounds a peak  $H \rightarrow +\infty$ .

Take the  $N = 4$  case as in Theorem 4 and initially align the 4 vortices vertically :  $\zeta(0) = 0$ . If  $\eta(0)$  is sufficiently small, the vortices of the group  $\Gamma, \Gamma'$  orbit like a binary counter-clockwise, the vortices of the group  $-\Gamma', -\Gamma$  orbit like a binary clockwise, while the 2 groups progress together like a vortex pair. The superposition produces *leapfrogging*, a relative periodic orbit whose plane limit  $r \rightarrow \infty$  is observed as the motion of a cross-section of consecutive vortex rings as they overtake each other. By adjusting the parameters  $\Gamma/\Gamma'$ ,  $b$ ,  $\zeta(0)$ , we can render leapfrogging on a cylinder not only relative periodic but periodic. Alternatively, if  $\eta(0)$  is sufficiently close to  $b(1 + \Gamma'/\Gamma)/2$  or to  $-b(1 + \Gamma/\Gamma')/2$ , the vortices  $\Gamma', -\Gamma'$  or  $\Gamma, -\Gamma$  form a pair and rush off without leapfrogging. In the planar theory, in the case  $\Gamma/\Gamma' = 1$ , [3] calculated the critical value of  $\eta(0)$  that separates the leapfrogging and non-leapfrogging régimes. In our setup this value may be obtained at once as follows.

In the situation of Theorem 4, denote by  $\rho(b, \Gamma/\Gamma')$  the distance from the origin  $\zeta = 0$  to the nearest separatrix. Then  $\eta(0) = \rho(b, \Gamma/\Gamma) = \rho(b, 1)$ . Denote by  $\zeta_{re} = \xi_{re} + i\eta_{re}$  a value of  $\zeta$  at a saddle of  $H(\zeta)$ , representing a relative equilibrium. Inside the separatrices connecting the saddles we have leapfrogging; outside, not.  $\rho = \rho(b, 1)$  is the ordinate at which a separatrix cuts the  $\eta$ -axis. Since the value of  $H$  is the same along the separatrices as on the saddles,  $H(0, \rho) = H(\xi_{re}, \eta_{re})$ . It is clear that a relative equilibrium occurs when 2 vortex pairs are antipodal :  $\xi_{re} = \pm\pi/2, \eta_{re} = 0$ . This fixes  $\rho$  in the cylindrical theory :  $\sqrt{2} \tanh \rho = \tanh b$ . Restoring  $r$  and taking the plane limit  $r \rightarrow \infty$ , we get in the planar theory  $\rho = b/\sqrt{2}$ , agreeing with [3, section 3], which arrived at  $(b + \rho)/(b - \rho) = 3 + 2\sqrt{2}$ .

When  $\Gamma/\Gamma' \neq 1$ ,  $\zeta_{re}$  and  $\rho(b, \Gamma/\Gamma')$  are difficult to pin down in closed form. At any rate  $\xi_{re} = \pm\pi/2$ ;  $\eta_{re}$  is the unique root of

$$\begin{aligned} & (\Gamma + \Gamma') \tanh \eta + (\Gamma - \Gamma') \tanh \left( b - \frac{\Gamma - \Gamma'}{\Gamma + \Gamma'} \eta \right) \\ & - \Gamma \coth \left( b + \frac{2\eta}{1 + \Gamma/\Gamma'} \right) + \Gamma' \coth \left( b - \frac{2\eta}{1 + \Gamma'/\Gamma} \right) = 0 \end{aligned}$$

which in view of (2.2.4) is the condition that the vertically aligned pairs  $\Gamma, -\Gamma$  and  $\Gamma', -\Gamma'$ , antipodal to each other, move with the same velocity. If  $\Gamma/\Gamma' = 1 + \epsilon$ , then up to 2nd order in  $\epsilon$ ,

$$\eta_{re} \simeq \tanh b \operatorname{sech}^2 b \left( \frac{\epsilon}{2} - \left( 1 + \frac{\operatorname{sech}^4 b}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{4} \right), \quad \rho(b, 1+\epsilon) = \rho(b, 1) - \frac{\tanh b \operatorname{sech}^2 b}{1 + \cosh^2 b} \frac{\epsilon^2}{4\sqrt{2}}.$$

*Remark 6.* By an argument parallel to that of Theorem 4 we see that 4 vortices with vorticities  $\Gamma, \Gamma', -\Gamma', -\Gamma$  at

$$a + \frac{2\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad a - \frac{2\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}\zeta, \quad -a + \frac{2\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}\bar{\zeta}, \quad -a - \frac{2\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\bar{\zeta}$$

leapfrog as well (fig. 5, left diagram).



FIG.5.

Unlike the  $N = 4$  case of Theorem 4, however, the configuration on the right does not leapfrog.

*Remark 7.* Leapfrogging vortices and their generalizations analysed above owe their relative periodicity to the type of symmetry compatible with the local first integral of Theorem 1. Other types of symmetry permit other types of relative periodic orbits. Thus,  $2n$  vortices with identical vorticity  $\Gamma$  at (2.2.5), (2.2.6) form a relative periodic orbit [13, section 3.2].

*Remark 8.* Vortex streets and leapfrogging vortices can be adapted to a torus, where they form relative periodic orbits. A torus accommodates many further types of relative periodic orbits. For example on  $\mathbb{C}/(\pi\mathbb{Z} + i\pi\mathbb{Z})$ , by splitting each point of a sub-lattice into a rectangular quadruplet of vortices with vorticities  $\Gamma, -\Gamma, \Gamma, -\Gamma$ , we create a periodic orbit, the ‘dancing vortices’ of [15].

**Acknowledgments.** The work of JM was partially supported by the European Union through the Research Training Network MASIE. TT thanks Yiannis Petridis and Morikazu Toda for instructive conversations and David Acheson for his gift of a copy of the paper [3]. The authors would like to thank the referees for their comments, and particularly for pointing out the paper of Hally [4].

## REFERENCES

---

- [1] H. Aref, P.K. Newton, M.A. Stremler, T. Tokieda and D. L. Vainchtein, Vortex crystals, to appear in *Adv. Applied Mech.*
- [2] H. Aref and M.A. Stremler, On the motion of three point vortices in a periodic strip, *J. Fluid Mech.* **314** (1996) 1–25.
- [3] U. Domm, Über die Wirbelstraßen von geringster Instabilität, *Z. Angew. Math. Mech.* **36** (1956) 367–371.
- [4] D. Hally, Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry, *J. Math. Phys* **21** (1980) 211–217.
- [5] I. Imai, On the stability of a double row of vortices with unequal strengths in a channel of finite breadth, *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **18** (1936) 436–459.
- [6] T. von Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math.-phys. Klasse* (1911) 509–517, (1912) 547–556.
- [7] H. Lamb, *Hydrodynamics* (6th ed.), Cambridge University Press, 1932.
- [8] F. Laurent-Polz, Point vortices on the sphere : a case with opposite vorticities. *Nonlinearity* **15** (2002) 143–171.
- [9] C. Lim, J. Montaldi and R.M. Roberts, Relative equilibria of point vortices on the sphere. *Physica D* **148** (2001) 97–135.
- [10] A.E.H. Love. On the motion of paired vortices with a common axis, *Proc. Lond. Math. Soc.* **25** (1894) 185–194.
- [11] A.W. Maue, Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße, *Z. Angew. Math. Mech.* **20** (1940) 129–137.
- [12] K.A. O’Neil, On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices, *J. Math. Phys.* **30** (1989) 1373–1379.

- [13] A. Soulière and T. Tokieda, Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry. *J. Fluid Mech.* **460** (2002) 83–92.
- [14] M.A. Stremler and H. Aref, Motion of three point vortices in a periodic parallelogram, *J. Fluid Mech.* **392** (1999) 101–128.
- [15] T. Tokieda, Tourbillons dansants, *C. R. Acad. Sci. Paris série I* **333** (2001) 943–946.
- [16] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982.
- [17] H. Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, 1930.

# Chapitre 3

---

## DYNAMICS OF MOVING POLES WITH VARIABLE STRENGTHS

AUTEURS : ANIK SOULIÈRE ET TADASHI TOKIEDA

### 3.1. CONTRIBUTION À L'ARTICLE

Ce chapitre est constitué de l'article *Dynamics of moving poles with variable strengths* par Anik Soulière et Tadashi Tokieda qui sera prochainement soumis pour la publication.

Voici la liste des contributions d'Anik Soulière à cet article :

- conception du simulateur de mouvements de pôles à intensités variables sur le plan ;
- calcul et preuve de la quantité conservée *centre d'intensité* ;
- solution exacte du système d'une paire de pôles à intensités constantes ;
- solution exacte d'un polygone régulier de pôles de même intensité et critère d'équilibre ;
- découverte et preuve de la loi de Snell pour un couple de pôles traversant un saut discret de la fonction  $S$  ;
- découverte et preuve du mouvement périodique circulaire d'une paire de pôles d'intensités  $\mu$  et  $\mu'$  telles que  $\operatorname{Re} \mu = -\operatorname{Re} \mu'$  ; critère d'équilibre pour le cas  $\mu' = -\bar{\mu}$  ; illustration du mouvement saute-mouton qui en découle ;
- découverte et preuve d'une variante du mouvement saute-mouton d'une paire de pôles avec intensités variables ;
- exemple d'une famille d'équilibres de  $N$  pôles dans le cas non homogène.

### 3.2. DYNAMIQUE DE PÔLES À INTENSITÉS VARIABLES

Dans cette section, je résumerai les grandes lignes de *Dynamics of moving poles with variable strengths*. Dans la section 3.5 suivant l'article, j'ajouterai des figures, des exemples et des preuves complémentaires à l'article.

Le dernier article présente une généralisation du cas de  $N$  tourbillons ponctuels avec vorticités constantes à un système de  $N$  pôles avec intensités variables (voir la section 0.3 pour une introduction). Voici une exposition très générale du système dynamique étudié. Considérons  $N$  points  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{C}$  que nous appellerons « pôles ». À chaque pôle est associé une famille de fonctions à valeurs complexes  $\{\mu_n^i(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  appelées « intensités ». Pour chaque pôle, seul un nombre fini de ces fonctions sont non nulles. La dynamique des pôles est donnée par

$$\frac{d}{dt} z_i(t) = \sum_{j: j \neq i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\mu_n^j(z_j(t))} (z_i(t) - z_j(t))^n \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.2.1)$$

Les équations étant du premier ordre, le système n'a pas d'inertie. L'espace des phases demeure le même que pour les tourbillons ponctuels.

Le cas particulier

$$\operatorname{Re} \mu_n^i(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \mu_n^i(z) = 0 \quad \text{pour } n \neq -1 \quad (3.2.2)$$

correspond à un système de tourbillons ponctuels tel qu'étudié dans les deux premiers articles.

Après avoir exposé ce modèle très général, la suite de l'article se restreint au cas où l'équation du mouvement est homogène (tous les  $\mu_n^i$  sont nuls sauf pour un certain  $n_0$ ) et les intensités sont constantes.

On réécrit l'équation du mouvement de pôles en termes d'une fonction  $H$  rappelant le Hamiltonien des tourbillons ponctuels. Cette fonction de la position des pôles du système n'est pas une quantité conservée en général. Un premier théorème affirme que  $H$  est conservée dans le cas où les intensités sont toutes imaginaires pures.

Le *centre d'intensité* est défini et un deuxième théorème affirme qu'il s'agit d'une quantité conservée pour un degré d'homogénéité impair.

Enfin, un troisième théorème affirme que les équations du mouvement sont conservées sous symétrie affine de l'espace des phases si et seulement si le système est homogène de degré  $n_0 = -1$ .

La deuxième partie de l'article donne une série d'exemples de solutions exactes pour le cas homogène de degré  $n_0 = -1$  et pour des intensités qui varient en fonction de leur

position sur le plan. La fonction  $S$  « fond de l'océan » donne cette dépendance, unique pour tous les pôles :  $u^k(z) = u^k \cdot S(z)$ .

Les solutions exactes d'un couple de pôles et celles de polygones réguliers de mêmes intensités sont trouvées à l'aide d'un principe utilisé dans le premier article. Pour une configuration de  $N$  pôles comportant certaines symétries, l'utilisation du *centre d'intensité* permet de réduire le degré de liberté de  $N$  à 1. En posant le centre d'intensité à l'origine, l'équation du mouvement se ramène à une équation d'une seule variable

$$\frac{d}{dt}w = \frac{p}{\bar{w}} \quad (3.2.3)$$

résolue dans l'article. Dans le cas du couple de pôles d'intensités quelconques, le centre d'intensité permet de trouver la position d'un pôle par rapport à l'autre. La figure 3.1 donne plusieurs illustrations de mouvements de paires de pôles à intensités constantes.

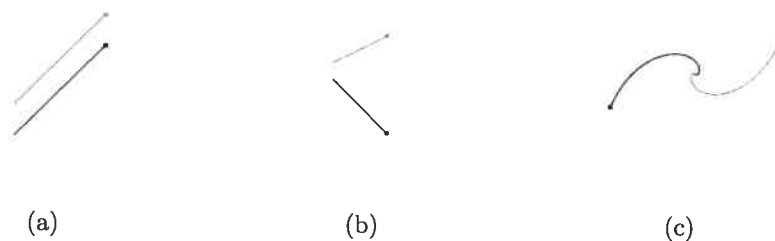


FIG. 3.1. (a)  $\mu = -\mu'$ ; (b)  $\text{Im } \mu = -\text{Im } \mu'$ ; (c)  $\mu = \mu'$

Dans le cas du polygone régulier de pôles d'intensités constantes, c'est la symétrie qui permet de ramener le système à une équation de la forme 3.2.3. L'ajout d'un pôle supplémentaire d'intensité  $-(N-1)\mu/2$  immobilise le système (figure 3.2).



FIG. 3.2. Pentagone régulier de pôles d'égales intensités (a) spirales; (b) ajout d'un pôle central d'intensité  $-(N-1)\mu/2$ .

La dernière section de l'article présente une série de solutions exactes dans le cas où les intensités dépendent de la position des pôles. Par exemple, on sait qu'un couple



de pôles d'intensités  $\mu$  et  $-\mu$  avancent en parallèle. Au passage d'un saut discret de la fonction  $S$ , la trajectoire du couple se comporte comme un rayon lumineux suivant une loi analogue à celle de Snell-Descartes en optique géométrique (section 3.4.2.1).

## DYNAMICS OF MOVING POLES WITH VARIABLE STRENGTHS

### 3.3. EQUATIONS OF MOTION, CONSERVATION LAWS

Dynamics of point vortices with fixed strengths in a 2-dimensional ideal fluid has a long pedigree. (For classical references see e.g. [1], Art. 154–160; as the subject remains popular, recent ones are too numerous to list.) In this paper we generalize it in two directions : i) besides vortices, we allow sources/sinks as well as their superpositions (poles); ii) we allow the strengths of these poles to vary. This leads to a rich dynamical system which we illustrate with a variety of exact solutions. One of these follows an analogue of Snell's law in optic. Though our motivation is pure-mathematical, i), ii) may be of relevance for instance in magnetohydrodynamics with an external magnetic field.

The imaginary unit will be written  $\sqrt{-1}$  rather than  $i$ . We begin with a very general setup but will particularize soon. Consider  $N$  interacting points  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$  called *poles*, each pole  $z_i$  carrying with it a family of complex-valued functions  $\{\mu_n^i(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  called *strengths*, all but finitely many of them being 0. The poles move according to

$$\frac{d}{dt} z_i(t) = \sum_{j: j \neq i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\mu_n^j(z_j(t))} (z_i(t) - z_j(t))^n \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.3.1)$$

The dynamics of 3.3.1 has no inertia, in the sense that the poles' instantaneous positions determine their velocities, with no effect of acceleration; in other words, the phase space is a product of  $N$  copies of  $\mathbb{C}$  minus diagonals, not the (co)tangent bundle over it. The setup makes sense on any domain on a Riemann surface, provided  $\sum_i \mu_{-1}^i$  is chosen pure imaginary and equal to  $1/2\pi\sqrt{-1}$  times the total circulation on the boundary (0 on a closed surface).

A term of the form  $\overline{\mu(z - z_j)^n}$  on the right of 3.3.1 represents a flow velocity induced by  $z_j$  at  $z$ . The pictures for  $n = -1$  have rotational symmetry : source or sink of flux  $2\pi\mu$  for  $\mu$  real, vortex of anticlockwise circulation  $2\pi\sqrt{-1}\mu$  for  $\mu$  pure imaginary, in general a superposition of these, a spiral node.

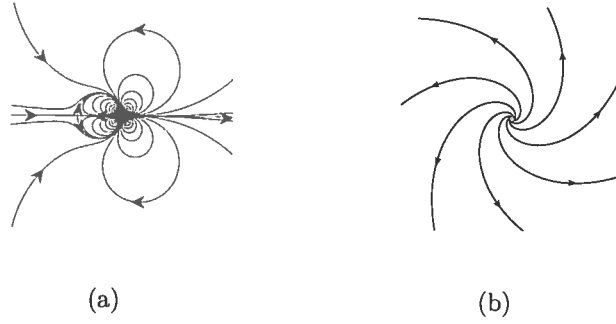


FIG. 3.3. (a) Superposition of  $n = -3$  and  $n = -2$ ,  $\mu > 0$ ; (c)  $n = -1$ ,  $\text{Re } \mu > 0$ ,  $\text{Im } \mu < 0$

Now suppose 3.3.1 is homogeneous, i.e.  $\mu_n^i = 0$  except for a certain exponent  $n_0$  and moreover all  $\mu^i := \mu_{n_0}^i$  are fixed. Then may 3.3.1 be recast in the canonical form

$$\frac{d}{dt} z_i = \frac{2}{\mu^i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} H, \quad H(z_1, \dots, z_N) = \text{Re} \sum_{i,j:i \neq j} \mu^i \mu^j G(z_i - z_j)$$

with

$$G(z_i - z_j) = \begin{cases} (z_i - z_j)^{n_0+1}/(n_0+1) & \text{when } n_0 \neq -1 \\ \log(z_i - z_j) & \text{when } n_0 = -1 \end{cases}$$

( $G$  as in 'Green'). From

$$\frac{d}{dt} H(z_1(t), \dots, z_N(t)) = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial z_i} H \cdot \frac{d}{dt} z_i + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} H \cdot \frac{d}{dt} \bar{z}_i \right) = \sum_i (\mu^i + \bar{\mu}^i) \left| \frac{d}{dt} z_i(t) \right|^2,$$

we see

**Theorem 3.3.1.** *If all  $\mu^i$  are pure imaginary, then  $H$  is a first integral.*

Next let the homogeneity degree  $n_0$  be odd, with  $\mu^i$  fixed. Pairwise cancellation in 3.3.1 yields  $\sum_i \bar{\mu}^i dz_i/dt = 0$ , whence

**Theorem 3.3.2.** *If  $M := \sum_i \mu^i \neq 0$ , then the 'center of strength'  $\sum_i \bar{\mu}^i z_i / \bar{M}$  is a first integral. If  $M = 0$ , then for every partition  $I \sqcup I' = \{1, \dots, N\}$  such that  $M_I := \sum_{i \in I} \mu^i \neq 0$  and  $M_{I'} := \sum_{i' \in I'} \mu^{i'} \neq 0$ , the difference between the 'subcenters'  $\sum_{i \in I} \bar{\mu}^i z_i / \bar{M}_I - \sum_{i' \in I'} \bar{\mu}^{i'} z_{i'} / \bar{M}_{I'}$  is a first integral.*

Finally, how can we extend the affine symmetry of the phase space to that of the phase space-time so as to make 3.3.1 invariant? The requirement that time  $t$  be real yields

**Theorem 3.3.3.** *The system 3.3.1 is  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ -invariant if and only if it is homogeneous of degree  $n_0 = -1$ : here  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  sends  $(t, z)$  to  $(|a|^2 t, az + b)$ .*

### 3.4. EXAMPLES OF EXACT SOLUTIONS

We will, in what follows, focus on the case where 3.3.1 involves only the exponent  $n_0 = -1$  and all the strengths share a common dependence on the position :  $\mu^i(z) = \mu^i \cdot S(z)$  for some complex-valued  $S$  ('seabed' or 'step' function) and constants  $\mu^i$  having the dimension of length<sup>2</sup>/ time. Thus the equations of motion are

$$\frac{d}{dt}z_i(t) = \sum_{j:j \neq i} \frac{\overline{\mu^j S(z_j(t))}}{z_i(t) - z_j(t)} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.4.1)$$

In most of our examples  $S$  will be a step function. Then Theorems 3.3.1, 3.3.2 and 3.3.3 hold piecewise, as long as none of the poles crosses a discontinuity of  $S$ ; when crossing occurs,  $H$  and the centers of strengths jump to new values.

When  $S(z) = 1$  and all  $\mu^i$  are pure imaginary, we are back to point vortices and recover  $H$  as their Hamiltonian.

#### 3.4.1. Self-similar solutions

In problems involving self-similarity, Theorem 3.3.2 allows reducing the (complex) degree of freedom from  $N$  to 1, down to a single equation

$$\frac{d}{dt}w = \frac{p}{w}, \quad (3.4.2)$$

which in polars separates into

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|w|^2}{2} \right) = \operatorname{Re} p, \quad |w|^2 \frac{d}{dt} \arg w = \operatorname{Im} p.$$

The solution is

$$w(t) = T \exp \left( \sqrt{-1} \frac{\operatorname{Im} p}{\operatorname{Re} p} \log T \right) w(0), \quad T = \sqrt{1 + \frac{2 \operatorname{Re} p}{|w(0)|^2} t}. \quad (3.4.3)$$

The poles collapse to their center of strength after time  $-|w(0)|^2/2 \operatorname{Re} p$ .

##### 3.4.1.1. Pair

Poles  $z, z'$  of fixed strengths  $\mu, \mu'$  move self-similarly around their center of strength  $c$ . With a little manipulation 3.4.1 takes the form of 3.4.2,

$$\frac{d}{dt}(z - c) = \frac{|\mu'|^2}{\mu + \mu'} \frac{1}{z - c}$$

with  $p = (\mu + \mu')/|1 + \mu/\mu'|^2$ ,  $w = z - c$  and analogously for  $z' - c$  exchanging prime and unprime. If  $\mu + \mu' = 0$ , then Theorem 3.3.2 implies at once that the pair moves in parallel ( $c \rightarrow \infty$ ).

### 3.4.1.2. Regular polygons

Place  $N$  poles of equal fixed strengths  $\mu$  at the vertices of a regular  $N$ -gon, plus 1 pole of strength  $\mu'$  at the center, which coincides with the center of strength  $c$ . The poles spiral self-similarly out or in, clockwise or anticlockwise, depending on  $N, \mu, \mu'$ . Denote by  $\omega^j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) the  $N$ th roots of 1. If  $z$  is any one of the vertices, then the others are at  $c + \omega^j(z - c)$ , so 3.4.1 takes the form of 3.4.2,

$$\frac{d}{dt}(z - c) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{(1 - \omega^j)(z - c)} + \frac{\mu'}{z - c} = \left( \frac{N-1}{2} \bar{\mu} + \bar{\mu}' \right) \frac{1}{z - c}$$

with  $p = (N-1)\bar{\mu}/2 + \bar{\mu}'$ ,  $w = z - c$ . If  $\mu' = -(N-1)\mu/2$ , then all the poles are immobilized.

## 3.4.2. Variable strengths

### 3.4.2.1. Snell's law

Let  $S(z) = n$  in the lower half-plane  $\text{Im } z < 0$ ,  $S(z) = n' \neq n$  in the upper half-plane  $\text{Im } z \geq 0$ . A pair  $z, z'$  with strengths  $-\mu S(z), \mu S(z')$ , moving in parallel, arrives from the lower half-plane.

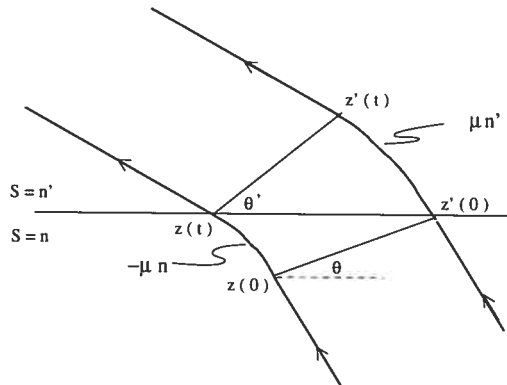


FIG. 3.4. A pair of poles crossing a discontinuity of  $S$ .

When  $z'$  crosses the real axis, the pair starts moving self-similarly around their center of strength  $c = (n'z' - nz)/(n' - n)$ . When, after time  $t$  say,  $z$  crosses the real axis, the pair finishes moving self-similarly around  $c$  and resumes moving in parallel inside the upper half-plane. The pair's angles of inclination  $\theta, \theta'$  before and after the crossing satisfy

$$n \sin \theta \exp\left(-\frac{\text{Re } \mu}{\text{Im } \mu} \theta\right) = n' \sin \theta' \exp\left(-\frac{\text{Re } \mu}{\text{Im } \mu} \theta'\right). \quad (3.4.4)$$

Suppose  $\mu$  pure imaginary. Then  $\theta, \theta'$  coincide with the angles of incidence and 3.4.4 gives an analogue of Snell's law in optics;  $\theta' = \pi/2$  represents the critical case where the pair 'skids' along the real axis without entering the upper half-plane, hence the pair reflects back into the lower half-plane for  $\theta > \arcsin(n'/n)$ .

Proof of 3.4.4. With the notation of 2.1, it is readily checked that, during the crossing,  $T = T'$  (express  $z(0) - c, z'(0) - c$  in terms of  $z'(0) - z(0)$ ) and  $\text{Im } p/\text{Re } p = -\text{Im } \mu/\text{Re } \mu$ . We know

$$T \exp\left(-\sqrt{-1} \frac{\text{Im } \mu}{\text{Re } \mu} \log T\right)(z(0) - c) = z(t) - c, \quad (3.4.5)$$

and subtracting from the corresponding equation for  $z' - c$ ,

$$T \exp\left(-\sqrt{-1} \frac{\text{Im } \mu}{\text{Re } \mu} \log T\right)(z'(0) - z(0)) = z'(t) - z(t)$$

comparing whose arguments we get

$$\theta - \frac{\text{Im } \mu}{\text{Re } \mu} \log T = \theta'. \quad (3.4.6)$$

Next take the imaginary part of 3.4.5 by using

$$z(0) - c = -\frac{n'}{n' - n} |z'(0) - z(0)| \exp(\sqrt{-1} \theta),$$

and  $\text{Im } z(t) = \text{Im } z'(0) = 0$  whence  $\text{Im } c = -\text{Im } z(0) n/(n' - n)$ . We find

$$n' T \sin\left(\theta - \frac{\text{Im } \mu}{\text{Re } \mu} \log T\right) = n \frac{-\text{Im } z(0)}{|z'(0) - z(0)|} = n \sin \theta.$$

The claim 3.4.4 follows from this and 3.4.6.

#### 3.4.2.2. Scattering

Let  $S(z) = 1/r$  inside a disc of radius  $r$  and  $S(z) = 1$  everywhere else. A pair of poles of opposite pure imaginary strengths moves in parallel in the direction of the disc. The first pole is moving in the direction of the center of the disc, the second one misses the disc. The distance between poles is greater than  $2r$ . The discontinuity makes the pair deviate from the initial direction. The angle of deviation after crossing the disc is given by :

$$\theta = 2 \arctan((1 - r)/d) \quad (3.4.7)$$

where  $d$  is the distance between the poles (Figure 3.5). When  $r \rightarrow 0$  and  $2r/d \approx 1$  then  $\theta \rightarrow \pi$ .

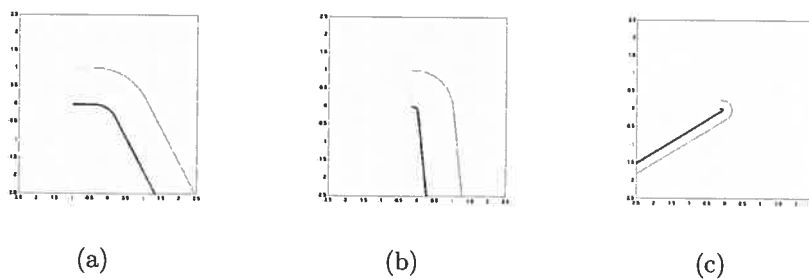


FIG. 3.5. (a)  $r = 0.4$ ,  $d = 1$  (b)  $r = 0.01$ ,  $d = 1$  (c)  $r = 0.01$ ,  $d = 0.25$

### 3.4.2.3. Leapfrog

With pure imaginary strengths, relative periodic motion called leapfrog has been analysed by Love [3] in 1894 and studied more recently by Acheson [2]. The generalisation of the strengths allows the motion to be periodic (Figure 3.6).

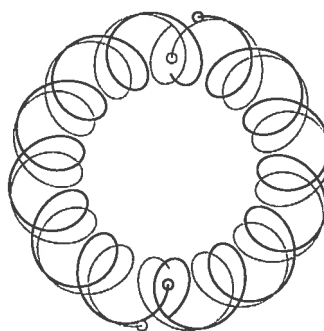


FIG. 3.6. A circular periodic leapfrog; initially aligned poles of strength  $\mu$ ,  $-\bar{\mu}$ ,  $-\bar{\mu}$  and  $\mu$ .

#### 3.4.2.4. Leapfrogging of a pair

Let  $S(z) = n$  in  $\text{Im } z < 0$ ,  $S(z) = n' \neq n$  in  $\text{Im } z \geq 0$  where  $n$  and  $n'$  are real positive constants. A pair with strengths  $\sqrt{-1} \mu S(z)$  and  $\sqrt{-1} k \mu S(z)$ ,  $\mu$  and  $k$  real positive constants, is initially at 0 and  $\Delta z$  in the upper half-plane. Then it leapfrogs each other parallel to the real axis, in successive cycles where the center of strength jumps, moving by

$$\frac{4k(n-n')}{(1+k)(n+n')} \text{Re}(\Delta z) \quad (3.4.8)$$

per cycle (Figure 3.7).

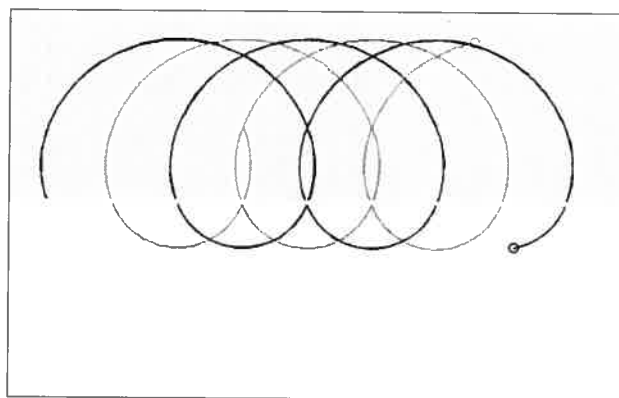


FIG. 3.7. Leapfrogging of a pair of same strength.

## REFERENCES

---

- [1] H. Lamb, *Hydrodynamics* (6th ed.), Cambridge UP 1932.
- [2] D.J. Acheson, *Instability of vortex leapfrogging* Eur. J. Phys. **21** (2000), 269-273.
- [3] A.E.H. Love, *On the motion of paired vortices with a common axis* Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1894), 185-194.



### 3.5. ANNEXE

#### 3.5.1. Mouvement circulaire et saute-mouton

Voici un exemple de solution exacte complémentaire à l'article. Une paire de pôles  $z$  et  $z'$  d'intensités telles que  $\operatorname{Re} \mu = -\operatorname{Re} \mu'$  suivent des trajectoires circulaires concentriques autour du centre d'intensité  $c$  (figure 3.8). En effet, à la section 3.4.1.1, on démontre que

$$\frac{d}{dt}(z - c) = \frac{\mu'}{\mu + \mu'} \frac{1}{z - c}.$$

Le produit scalaire entre les vecteurs  $d(z - c)/dt$  et  $(z - c)$  est nul. Il en est de même pour  $d(z' - c)/dt$  et  $(z' - c)$ . Le vecteur vitesse de chaque pôle est donc tangent aux cercles de centre  $c$  et de rayons  $(z - c)$  et  $(z' - c)$ .

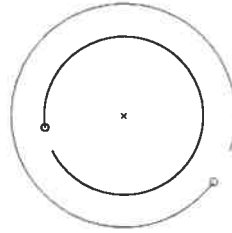


FIG. 3.8. Paire de pôles d'intensités  $\mu = 1 + 3i$  et  $\mu' = -1 + 2i$ ; le centre d'intensité est marqué par un  $\times$ ;

Dans le cas particulier où  $\mu' = -\bar{\mu}$ , les pôles progressent sur un même cercle (figure 3.9(a)). En ajoutant un troisième pôle à la position du centre d'intensité  $c$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - c) &= \frac{|-\bar{\mu}|^2}{\mu - \bar{\mu}} \frac{1}{z - c} + \bar{\gamma} \frac{1}{z - c} \\ \frac{d}{dt}(z' - c) &= \frac{|\mu|^2}{\mu - \bar{\mu}} \frac{1}{z' - c} + \bar{\gamma} \frac{1}{z' - c} \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est l'intensité du pôle central. En choisissant  $\gamma = -i|\mu|/2\operatorname{Im} \mu$ , un équilibre est créé (figure 3.9(b)).

La formation d'une configuration symétrique avec deux couples d'intensités  $\mu$  et  $-\bar{\mu}$  est à l'origine du mouvement saute-mouton circulaire présenté à la section 3.4.2.3.

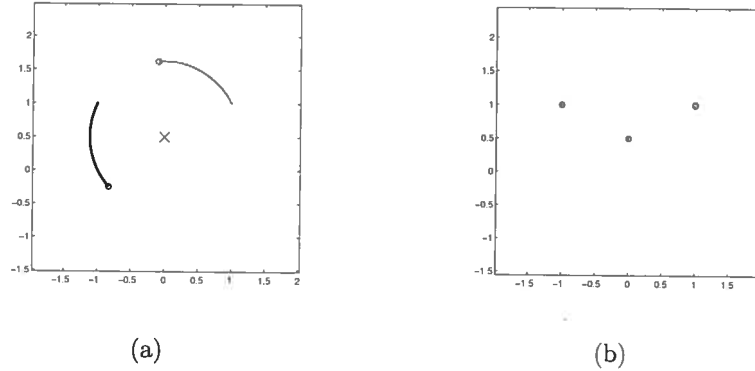


FIG. 3.9. (a) Trajectoire d'un couple de pôles d'intensités  $\mu$  et  $-\bar{\mu}$ , le centre d'intensité est marqué par un  $\times$  ; (b) au centre, l'ajout d'un troisième pôle d'intensité  $-i|\mu|/2 \operatorname{Im} \mu$  crée un équilibre.

### 3.5.2. Saute-mouton d'une paire de pôles

Un autre exemple de mouvement saute-mouton engendré par un saut dans la fonction  $S$  est énoncé à la section 3.4.2.4. Je présenterai ici quelques détails de la démonstration.

Soit  $S(z) = n$  dans  $\operatorname{Im} z < 0$ ,  $S(z) = n'$  dans  $\operatorname{Im} z \geq 0$ . Sans perte de généralité, prenons  $n$  et  $n'$  des réels positifs. Deux pôles,  $z_0$  et  $z_1$  sont posés respectivement à 0 et  $\Delta z$ . Leurs intensités sont données par  $\sqrt{-1} \mu S(z)$  et  $\sqrt{-1} k \mu S(z)$  pour  $k$  et  $\mu$  réels positifs. À travers la discontinuité de  $S$ , le centre d'intensité passe de

$$c_0 = z_0 + \frac{n' k}{n + n' k} \Delta z$$

lorsque les pôles sont de part et d'autre de la discontinuité, à

$$c_1 = z_0 + \frac{k}{1 + k} \Delta z$$

lorsqu'ils sont du même côté. La figure 3.10 illustre un cycle complet d'un couple de pôles pour  $k = 1$ . Le déplacement  $c_1 - c_0$  est donné par

$$\frac{k(n - n')}{(1 + k)(n + n')} \Delta z.$$

Lorsque le deuxième pôle croise à son tour la discontinuité, on obtient le miroir horizontal de la configuration initiale. Le centre d'intensité est alors déplacé de

$$\frac{k(n - n')}{(1 + k)(n + n')} \overline{\Delta z}.$$

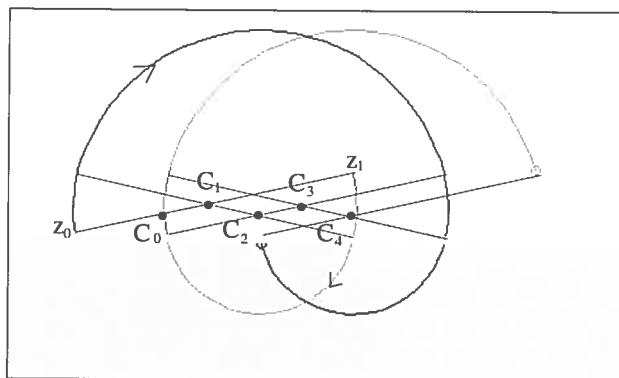


FIG. 3.10. Trajectoires de pôles de même intensité initialement posés à  $z_0 = 0$  et  $z_1 = \Delta z$ .  $S$  admet une discontinuité en  $\text{Im } z = 0$ .

Les pôles ont parcouru la moitié du cycle. L'ajout de deux autres déplacements du centre d'intensité permet de compléter le cycle, d'où le résultat 3.4.8.

En prenant des intensités différentes,  $k \neq 1$ , on obtient un mouvement saute-mouton asymétrique (figure 3.11).

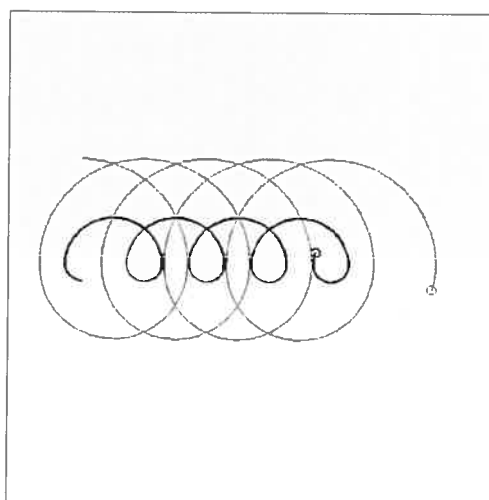


FIG. 3.11. Saute-mouton asymétrique,  $\mu = 3\mu'$ .

### 3.5.3. La loi de Snell

La figure 3.12 montre quelques exemples supplémentaires. Pour des intensités imaginaires pures, la loi 3.4.4 est réduite à

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (3.5.1)$$

Lorsque les pôles passent d'une région lente à une région rapide, (i.e.  $n > n'$ ) le couple fait demi-tour si l'angle d'inclinaison est supérieur à l'angle critique (figure 3.12 (b))

$$\theta_c = \arcsin(n'/n). \quad (3.5.2)$$

Des expériences numériques prédisent que la relation 3.5.3 demeure valide si le saut dans la fonction  $S$  est croissant ou décroissant monotone (figure 3.12 (c)).

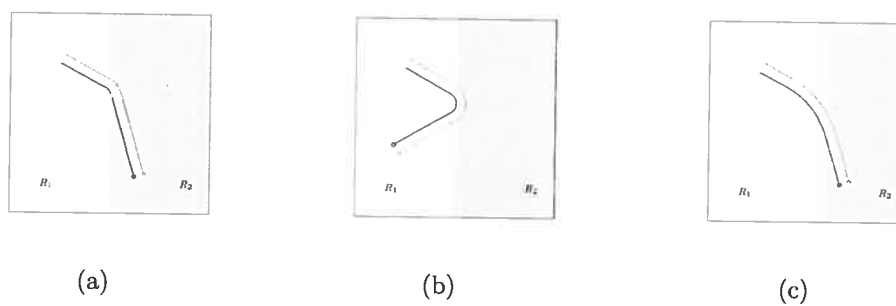


FIG. 3.12. (a)  $\theta_0 < \theta_c$ ; (b)  $\theta_0 > \theta_c$ ; (c) variation monotone croissante de  $S$ .

### 3.5.4. Exemple d'équilibre dans le cas non homogène

En considérant le cas non homogène, les lignes de courants engendrées par un pôle superposent différents types de singularités (voir figure 0.3). Voici un exemple d'une famille d'équilibres statiques à  $N$  pôles dans le cas non homogène.

Un seul pôle  $z_0 = 0$  sur le plan induit le champ de vecteurs donné par

$$\frac{d}{dt}z(t) = \overline{\mu_{n_1}^0 z(t)^{n_1} + \mu_{n_2}^0 z(t)^{n_2}} \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, n_1 < n_2) \quad (3.5.3)$$

où  $\mu_{n_1}^0$  et  $\mu_{n_2}^0$  sont des constantes dans  $\mathbb{C}$ . Ce champ de vecteurs comporte  $N = n_2 - n_1$  équilibres :

$$z_k = \sqrt[N]{-\frac{\mu_{n_1}^0}{\mu_{n_2}^0}} \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.5.4)$$

Pour créer un équilibre statique avec  $N+1$  pôles, on superpose  $N$  pôles aux positions d'équilibres de  $z_0$  tels que  $\mu_{n_1}^j = \mu_{n_2}^j = 0$ ,  $\mu_{-1}^j = \nu$  pour  $j = 1, 2, \dots, N$  ( $\nu \in \mathbb{C}$ ) et on ajoute l'intensité  $\mu_{-1}^0 = -(N-1)\nu/2$  à  $z_0$ . La figure 3.13 illustre un cas particulier de ce type d'équilibre.

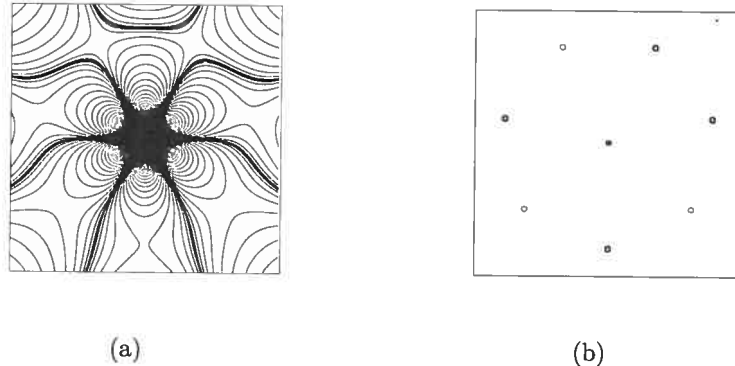


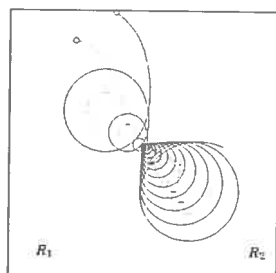
FIG. 3.13. (a) Lignes de courant de  $\overline{\mu_{n_1} z^{n_1} + \mu_{n_2} z^{n_2}}$  avec (a)  $\mu_{n_1} = 2^7 + i$ ,  $\mu_{n_2} = i$ ,  $n_1 = -4$  et  $n_2 = 3$ ; (b) configuration donnant lieu à l'équilibre.

### 3.5.5. Autres exemples

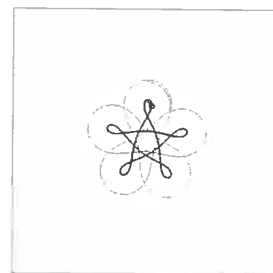
D'autres exemples de solutions ont pu être observés sans être analysés. Voici quelques exemples de solutions illustrées à l'aide du simulateur.

La figure 14(a) illustre la trajectoire d'un couple de pôles d'intensités  $\mu = -1 - 3i$  et  $\mu' = 1 + i$  passant une discontinuité de la fonction  $S$ . Ce type de mouvement peut-être reproduit lorsque  $\text{Re}\mu = -\text{Re}\mu'$  et  $\text{Im}\mu \neq \text{Im}\mu'$ .

La figure 14(b) donne la trajectoire d'une couple de pôles à intensités variables :  $-1,55i S(z)$  et  $i S(z)$  avec  $S(z) = 1/|z|^4$  pour  $0 < z < 1$  et  $S(z) = 1$  partout ailleurs. Plusieurs solutions périodiques pourraient découler de cette configuration.



(a)



(b)

FIG. 3.14. Autres exemples de trajectoires d'un couple de pôles.

# SYNTHÈSE ET CONCLUSION

---

Le modèle de dynamique de  $N$  pôles à intensités variables, qui donne le titre de la thèse, a été introduit dans le troisième chapitre. Le cas classique des tourbillons ponctuels dans un fluide parfait de dimension 2 est un cas particulier de ce nouveau modèle.

La thèse commence par l'étude du cas particulier des tourbillons ponctuels sur la sphère, puis sur le cylindre, pour terminer avec une généralisation inédite de l'interaction entre particules appelées pôles possédant certaines intensités.

La ligne directrice du travail a été l'utilisation de simulations numériques de la dynamique des tourbillons. L'outil numérique a permis l'exploration, la découverte et la compréhension de certains phénomènes des systèmes dynamiques étudiés. Au premier chapitre, la découverte d'un premier exemple d'une famille de solutions périodiques avec bifurcation sur la sphère s'est faite à l'aide du simulateur. À partir de l'analyse théorique de cet exemple, nous avons pu généraliser le résultat en une méthode pour engendrer de nouveaux exemples de solutions périodiques possédant certaines symétries. Cette idée est réutilisée dans le troisième article lorsqu'il est question de solutions autosimilaires.

Après le premier article traitant principalement de l'étude des solutions périodiques des tourbillons sur la sphère, nous avons étudié le cas du cylindre, intéressant par son rapprochement avec le problème classique du train de von Kármán. Le cas du cylindre a également été étudié d'un point de vue numérique. Plusieurs résultats sur les équilibres relatifs ont été énoncés et démontrés.

Le troisième article porte sur la généralisation du modèle des tourbillons ponctuels. Les objets ponctuels considérés, appelés pôles, permettent la superposition de tourbillons, de sources ou de puits. De plus, l'intensité associée à chaque pôle peut varier en fonction du temps ou de la position. Le nouveau système donne lieu à une dynamique riche en solutions originales. Le troisième chapitre introduit le modèle et expose

le formalisme associé. Plusieurs théorèmes sont énoncés. Plusieurs solutions exactes sont données dont un phénomène qui s'apparente à la loi de Snell en optique géométrique.

Le dernier article ouvre l'étude d'un nouveau sujet qui pourrait être exploré davantage. Par exemple, il serait réaliste de croire que d'autres phénomènes d'optique géométrique puissent être reproduits à l'aide du mouvement de pôles. Il serait également intéressant d'étudier le modèle sur une surface avec bords.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Acheson (2000)] D.J. ACHESON, *Instability of vortex leapfrogging*, Eur. J. Phys. **21** (2000), 269–273.
- [Aref (1979)] H. AREF, *Motion of three vortices*, Phys. Fluids **22** (1979), 393.
- [Aref (1982)] H. AREF, *Point vortex motion with a center of symmetry*, Phys. Fluids Mech. **25** (1982), 2183–2187.
- [Aref (1983)] H. AREF, *Integrable, chaotic and turbulent motion in two-dimensional flows*, Ann. Rev. Fluid Mech. **15** (1983), 345–389.
- [Aref (1995)] H. AREF, *The equilibrium and stability of a row of point vortices*, J. Fluid Mech. **290** (1995), 167–181.
- [Aref et Stremmer (2001)] H. AREF, M.A. STREMLER, *Point vortex models and the dynamics of strong vortices in the atmosphere and oceans*, Fluid mechanics and the environment : dynamical approaches (Ithaca, NY, 1999), 1–17, Lecture Notes in Phys., **566**, Springer, Berlin, 2001.
- [Aref et Stremmer (1996)] H. AREF, M.A. STREMLER, *On the motion of three point vortices in a periodic strip*, J. Fluid Mech. **314** (1996), 1–25.
- [Aref et Stremmer (1999)] H. AREF, M.A. STREMLER, *Motion of three point vortices in a periodic parallelogram*, J. Fluid Mech. **392** (1999), 101–128.
- [Aref et Vainchtein (1998)] H. AREF, C. VAINCHTEIN, *Point vortices exhibit asymmetric equilibria*, Nature **392** (1998), 769–770.
- [Boyland et Stremmer (2003)] P. BOYLAND, M.A. STREMLER, A. AREF *Topological fluid mechanics of point vortex motions*, Phys. D **175** (2003), no. 1-2, 69–95.
- [Gröbli (1877)] W. GRÖBLI, *Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* Zürich : Zürcher und Furrer, 1877.

- [Hally (1980)] D. HALLY. *Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry*, J. Math. Phys., **21** (1980), 211-217.
- [Helmholtz (1858)] H. VON HELMHOLTZ. *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. Crelles J. **55** (1858), 25.
- [Imai (1936)] I. IMAI. *On the stability of a double row of vortices with unequal strengths in a channel of finite breadth*, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **18** (1936), 436-459.
- [von Kármán (1912)] T. VON KÁRMÁN *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math.-phys. Klasse, (1911) 509-517; (1912) 547-556.
- [Khanin (1982)] K.M. KHANIN, *Quasi-periodic motion of vortex system*, Physica D **4** (1982), 261-269.
- [Kimura (1999)] Y. KIMURA. *Vortex motion on surfaces with constant curvature*, Proc. Roy. Soc. London, ser. A, **455** (1999), 245-259.
- [Kirchhoff (1876)] G. KIRCHHOFF *Vorlesungen über mathematische Physik, 'Mechanik'*, Kap. XX, Teubner, Leipzig, 1876.
- [Kidambi et Newton (1998)] R. KIDAMBI, P. NEWTON, *Motion of three point vortices on a sphere*, Physica D **166** (1998), 143-175.
- [Kidambi et Newton (1999)] R. KIDAMBI, P. NEWTON, *Collision of three vortices on a sphere*, Nuovo Cimento **22** (1999), 779-791.
- [Kidambi et Newton (1999)a] R. KIDAMBI, P. NEWTON, *Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere* Physica D **116** (1999), 95-125.
- [Kidambi et Newton (2000)] R. KIDAMBI, P. NEWTON, *Point vortex motion on a sphere with solid boundaries*, Phys. Fluids **12** (2000), no. 3, 581-588.
- [Lamb (1932)] H. LAMB *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [Lewis et Ratiu (1996)] D. LEWIS, T. RATIU, *Rotating  $n$ -gon/ $kn$ -gon vortex configurations*, J. Nonlinear Sci. **6** (1996), 385-414.
- [Lim et al. (2001)] C. LIM, J. MONTALDI, M. ROBERTS. *Relative equilibria of point vortices on the sphere*, Physica D **148** (2001), 97-135.
- [Lin (1941)] C. C. LIN, *On the motion of vortices in two dimensions. II. Some further investigations on the Kirchhoff-Routh function*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **27**, (1941), 575-577.

- [Love (1894)] A.E.H. LOVE. *On the motion of paired vortices with a common axis*, Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1894), 185–194.
- [Montaldi et Tokieda (2003)] J. MONTALDI, T. TOKIEDA, *Openness of momentum maps and persistence of extremal relative equilibria*, Topology **42** (2003), no. 4, 833–844.
- [Onsager (1949)] L. ONSAGER *Statistical hydrodynamics*, Nuovo Cimento **6**, (1949), 279–287.
- [Pekarsky et Marsden (1998)] S.J PEKARSKY, J.E. MARSDEN, *Point vortices on a sphere : stability of relative equilibria*, J. Math. Phys. **39** (1998), 5894–5907.
- [Poincaré (1893)] H. POINCARÉ. *Théorie des Tourbillons*, ed. G. Carré, Chap.4 Paris : Deslis Frères, 1893.
- [Synge (1949)] J.L. SYNGE *On the motion of three vortices*, Can. J. Math. **1**, (1949), 257–270.
- [Tokieda (2001)] T. TOKIEDA. *Tourbillons dansants*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.333, Série I (2001), 943–946.
- [Villat (1930)] H. VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

# Annexe A

---

## AUTORISATIONS DIVERSES

Deux des trois articles présentés dans cette thèse sont déjà publiés. Cette annexe contient les autorisation des éditeurs et coauteurs des articles publiés en vue du micro-filmage et de la diffusion de la thèse.

### Article 1

A. SOULIÈRE, T. TOKIEDA, *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry*, J. Fluid. Mech., **460** (2002), 83–92.

### Article 2

J. MONTALDI, A. SOULIÈRE, T. TOKIEDA, *Vortex Dynamics on a Cylinder*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, Vol.2, No.3, (2003), 417–430.

A.1. AUTORISATION DE *Journal of Fluid Mechanics*

Anik,

You have our permission to reprint this article in your thesis. Please credit as the source in your work.

Thank you.

Adam

-----  
Adam Hirschberg  
Rights and Permissions Coordinator  
Cambridge University Press  
32 Avenue of the Americas  
New York, NY 10013-2473

tel.:

tel.:

fax:

email:

web: [www.cambridge.org/us](http://www.cambridge.org/us)  
-----

A.2. AUTORISATION DE TADASHI TOKIEDA

Chere Anik,


J'autorise que soient reproduits comme partie de ta  
these les deux articles

Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry,  
J. Fluid Mech., vol. 460 (2002), 83--92.

Vortex dynamics on a cylinder,  
SIAM J. Appl. Dyn. Syst., vol. 2, no. 3 (2003), 417--430.

Meilleures pensees,

Tadashi Tokieda  
Trinity Hall  
Cambridge CB2 1TJ  
Angleterre



A.3. AUTORISATION DE *SIAM J. Applied Dynamical Systems*

----- Forwarded message -----

Date: Fri, 16 Feb 2007 10:50:38 -0500

From: Kelly Thomas [REDACTED]

To: Tadashi Tokieda [REDACTED]

Subject: RE: siam paper permission request

Dear Dr. Tokieda:

SIAM is pleased to grant permission to reprint the article mentioned below. Please be sure to credit the complete citation to the article and add the wording "Copyright (c)2003 Society for Industrial and Applied Mathematics. Reprinted with permission."

Sincerely,

Kelly Thomas

Managing Editor, SIAM

-----Original Message-----

From: Tadashi Tokieda [mailto:[REDACTED]]

Sent: Wednesday, February 14, 2007 6:26 AM

To: Kelly Thomas

Subject: siam paper permission request

Dear Professor Thomas,

A while ago I published a paper with a collaborator and a Ph.D. student of mine:

James Montaldi, Anik Souli\`ere, and Tadashi Tokieda Vortex Dynamics on

a Cylinder SIAM J. Applied Dynamical Systems  
2003  
vol. 2, no. 3, pp. 417--430

Now my student (Anik) is graduating, and wishes to reproduce this paper as part of her Ph.D. thesis from the Universit\`e de Montr\`eal; the use will be strictly academic and it will be made clear that the paper has appeared in the SIAM J.

Appl. Dyn. Sys. Would you be so kind as to tell me how one can obtain permission? Thank you very much for your help.

Best regards,

Tadashi Tokieda



A.4. AUTORISATION DE JAMES MONTALDI

Chere Anik,

J'autorise que soit reproduit comme partie de ta  
these l'article

Vortex dynamics on a cylinder,  
SIAM J. Appl. Dyn. Syst., vol. 2, no. 3 (2003), 417--430.

Amicalement

James

James Montaldi  
School of Mathematics  
University of Manchester  
PO Box 88  
Manchester, M60 1QD  
GB

# Annexe B

---

## SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les simulations numériques utilisées pour expérimenter la dynamique des pôles ont été programmées à l'aide du logiciel MATLAB.

Des simulateurs ont été construits pour

- les tourbillons ponctuels sur la sphère ;
- les tourbillons ponctuels sur le cylindre ;
- les pôles à intensités variables sur le plan.

### B.1. STRUCTURE GÉNÉRALE

Pour chacune de ces surfaces, il existe une fonction qui permet de lancer la simulation. L'utilisateur doit fixer plusieurs paramètres qui gèrent :

- le pas de temps  $\Delta t$  ;
- la durée de la simulation ;
- le nombre de tourbillons et leur position initiale ;
- le nombre d'images dans l'animation ;
- les dimensions de la fenêtre d'affichage ;
- le choix de tracer la trajectoire des tourbillons en plus de leur position instantanée ;
- le choix de la méthode numérique à utiliser.

Les fonctions initialisent les données du problème, utilisent une méthode numérique standard pour calculer les positions de tous les tourbillons à chaque  $\Delta t$  convenu. Finalement, elles affichent l'animation résultante et retournent une variable matlab de type **Movie**.

## B.2. VALIDATION DES RÉSULTATS

Pour tous les simulateurs, les solutions obtenues par une résolution numérique des équations différentielles ont été superposées aux solutions exactes connues ou découvertes. Les méthodes numériques utilisées ode45 ou ode23s semblaient très satisfaisantes dans le contexte d'exploration de la dynamique.

## B.3. CAS DU CYLINDRE ET DE LA SPHÈRE

Sur la sphère et le cylindre, le chapitre 3 de mon mémoire de maîtrise donne des explications sur les méthodes utilisées et leur validation.

A. SOULIÈRE, *Tourbillons ponctuels dans un fluide parfait de dimension 2*, Université de Montréal (2002).

## B.4. CAS DES PÔLES À INTENSITÉS VARIABLES

Dans le cas des pôles à intensités variables sur le plan, j'ai utilisé essentiellement les mêmes méthodes que pour les tourbillons sur le cylindre. Le simulateur se limite au cas non homogène avec un maximum de deux intensités par pôle. L'intensité peut varier en fonction de la position sur le plan. L'équation du mouvement de  $N$  pôles est

$$\frac{d}{dt}z_i(t) = \sum_{j:j \neq i} \sum_{n=1,2} \frac{S(z_j(t))\mu_n^j(z_i(t) - z_j(t))^n}{(i = 1, \dots, N)}. \quad (\text{B.4.1})$$

Voici maintenant une description plus technique des fonctions disponibles pour les pôles à intensités variables sur le plan. Les fichiers matlab peuvent être fournis sur demande par l'auteur de la thèse.

<b>PlanePoles</b>	Fonction principale. Elle contient toutes les étapes mentionnées plus tôt. Elle fait appel à la plupart des fonctions suivantes.
<b>PolesInit</b>	Contient plusieurs exemples étudiés dans l'article. On peut sélectionner un exemple déjà préparé ou spécifier soi-même la position et l'intensité de chaque pôle.
<b>fPlanePoles</b>	Correspond à $f$ dans l'équation différentielle $u' = f(u)$ du mouvement des pôles sur le plan lorsqu'il y a une seule intensité non nulle par pôle ( $u_{n_2} = 0$ dans l'équation B.4.1).

---

<b>fsupPlanePoles</b>	Correspond à $f$ dans l'équation différentielle $u' = f(u)$ du mouvement des pôles sur le plan lorsqu'il y a deux intensités non nulles pour au moins un pôle.
<b>ode23s</b>	Méthode numérique de résolution d'EDO conçue par matlab. Il s'agit d'une méthode qui gère les équations différentielles ordinaires raides (stiff). Cette fonction est utilisée si le paramètre 'stiff'=1.
<b>ode45</b>	Méthode numérique de résolution d'EDO conçue par matlab. Il s'agit d'une méthode qui gère les équations différentielles ordinaires non raides. Cette fonction est utilisée si le paramètre 'stiff'=0.
<b>PlaneMovie</b>	Cette fonction prend une matrice de positions en fonction du temps et construit un objet de type <b>Movie</b> . Les tourbillons sont représentés par le symbole <b>o</b> . La fonction permet de tracer la trajectoire des tourbillons en plus de leur position instantanée si le paramètre "Traj"=1.
<b>Seabed</b>	Cette fonction donne la possibilité définir la fonction $S$ de l'équation B.4.1. Plusieurs cas classiques sont déjà définis.
<b>StartSimulation</b>	Cette fonction permet de fixer les paramètres de nouveaux exemples de simulation du mouvement de pôles sur le plan. Un modèle est présenté au début du fichier. Cette fonction pourrait être éventuellement remplacée par un interface graphique.

---