

Université de Montréal

Inégalités définissant l'espace d'orbites d'un
groupe fini

par

David Marcoux

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

janvier 2007



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Inégalités définissant l'espace d'orbites d'un
groupe fini**

présenté par

David Marcoux

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pavel Winternitz

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

Christiane Rousseau

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

Le 16 février 2007

SOMMAIRE

Pour un groupe fini agissant sur une variété affine réelle, l'objectif de ce mémoire est de décrire l'espace d'orbites à l'aide d'inégalités. Ce travail s'inspire grandement d'un article de C. Procesi and G. Schwarz [23] dans lequel ils obtiennent ce résultat pour le cas d'un groupe compact agissant linéairement sur un espace vectoriel réel. En prenant un groupe fini, beaucoup de simplifications sont possibles pour alléger le travail requis pour la démonstration du théorème. On donnera aussi une démonstration d'un résultat qui affirme que pour un groupe fini agissant linéairement sur un espace vectoriel réel, si l'espace d'orbites est homéomorphe à un espace vectoriel, alors le groupe est généré par des pseudo-réflexions. Tel que mentionné dans [18], ce résultat apparaît dans un article de O. V. Shvartsman [26] qu'il nous est impossible de trouver. Nous avons donc fourni une preuve et nous ne savons pas si elle coïncide avec celle de Shvartsman.

Mots clés : espace d'orbites, groupe fini, représentation, géométrie algébrique, groupe de transformations, quotient algébrique, stratification.

SUMMARY

Given a finite group acting on a real affine variety, the objective of this master thesis is to describe the orbit space with inequalities. This work is mainly based on a paper by C. Procesi and G. Schwarz [23], in which they obtain the result for a compact group acting linearly on a real vector space. By taking a finite group, this allows for many simplifications in the work needed to prove the theorem. We also give a proof of a result which states that, for a finite group acting linearly on a real vector space, if the orbit space is homeomorphic to the vector space, then the group is generated by pseudo-reflections. As mentioned in [18], this result appeared in a paper of O.V. Shvartsman [26], but it was impossible for us to get a hold of it. We provided our own proof and we do not know if it is the same as Shvartsman's.

Keywords : orbit space, finite group, representation, algebraic geometry, transformation group, algebraic quotient, stratification.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Remerciements	1
Introduction	2
0.1. Théorème de Sylvester.....	2
0.2. Objectifs.....	4
0.3. Exemples.....	5
0.4. Contenu du mémoire.....	13
Chapitre 1. Espaces d'orbites	14
1.1. Espaces d'orbites.....	14
1.2. Stratification.....	19
1.3. Slices.....	23
1.4. Actions linéaires sur des espaces vectoriels.....	29
1.4.1. Topologie de Zariski.....	30
Chapitre 2. Polynômes invariants et quotient algébrique	37
2.1. Éléments de géométrie algébrique.....	38
2.1.1. Variétés affines et anneaux de coordonnées.....	38
2.1.2. G -variétés affines.....	42

2.2. Polynômes invariants	44
2.2.1. Opérateur de moyenne	45
2.2.2. Générateurs de $K[\mathcal{X}]^G$	47
2.2.3. Structure de $K[\mathcal{X}]^G$ et quotient algébrique	51
2.3. Espace d'orbites complexe	55
2.4. Espace d'orbites réel	59
2.4.1. Produits scalaires	64
2.5. Complexification	69
2.5.1. Quotient algébrique de la complexification	73
2.5.2. Forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante	75
Chapitre 3. Géométrie de l'Espace d'Orbites	77
3.1. Espaces tangents et applications tangentes	79
3.1.1. Structure de $\mathbb{R}G_w$ -module sur $T_w W$	83
3.2. Espaces Tangents aux Strates	86
3.3. Complexification	90
Chapitre 4. Résultats Principaux	94
4.1. Théorème de Procesi-Schwarz	94
4.2. Cas Particuliers	98
4.2.1. Théorème de Sylvester	105
Chapitre 5. Exemples	109
Bibliographie	131
Annexe A. Ensembles stratifiés abstraits et transversalité	A-i
Annexe B. Exemple d'utilisation de MAGMA	B-i

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. Abraham Broer, à qui je dois l'ensemble de ce travail.
Je remercie également M. Octavian Cornea pour son aide qui fut indispensable.

INTRODUCTION

Soit un groupe fini G qui agit de façon linéaire sur un espace vectoriel réel W de dimension finie. C'est-à-dire que l'on a une action de G sur W (voir définition 1.1.1) telle que pour chaque $g \in G$, $u, v \in W$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda(g \cdot u) + \mu(g \cdot v)$. On considère les orbites des points de W par l'action de G . Pour un point w de W , une G -orbite, notée Gw , est formée de tous les points de la forme $g \cdot w$ où $g \in G$. L'ensemble de toutes les G -orbites de W forme ce que l'on appellera l'espace d'orbites, noté W/G . Le résultat principal de ce mémoire nous fournira une méthode permettant de décrire l'espace d'orbites à l'aide d'inégalités.

0.1. THÉORÈME DE SYLVESTER

L'exemple suivant sert de prototype au résultat que l'on se propose de trouver. Soit $f(x) = x^2 + bx + c$ un polynôme avec des coefficients réels. On sait que f a toutes ses racines réelles si et seulement si $b^2 - 4c \geq 0$. Le théorème de Sylvester (voir [22]) généralise ce fait.

Soit $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} + \dots + (-1)^nb_n$ un polynôme à coefficients réels et ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n) \\ &= x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) \end{aligned}$$

et les coefficients b_i sont donnés par $b_i = \sigma_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, avec les polynômes symétriques élémentaires

$$\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_i}$$

pour chaque $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $i = 1, 2, \dots, n$. À partir de ces racines, on y définit les matrices de Vandermonde

$$Van := (\alpha_j^{i-1})_{ij}$$

et le Bezoutien

$$Bez := Van \cdot Van^t = (\tau_{i+j-2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))_{ij}$$

où $\tau_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j x_j^k$ pour chaque $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

En considérant l'action naturelle du groupe de permutations S_n , qui agit sur \mathbb{R}^n en permutant les coordonnées, les $\{\sigma_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ sont en fait des générateurs de l'anneau des polynômes S_n -invariants sur \mathbb{R}^n . On peut donc écrire les polynômes τ_k , qui sont laissés invariants par l'action de S_n , comme des polynômes en σ_i . Les formules de Newton-Girard (voir [31]), nous donnent ces polynômes. Ainsi, les coefficients de la matrice Bez sont en fait des expressions polynomiales en les $b_i = \sigma_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Par exemple pour $n = 2$, $b_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $b_2 = \alpha_1\alpha_2$ et $b_1^2 - 2b_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, d'où

$$Bez = \begin{pmatrix} 1+1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b_1 \\ b_1 & b_1^2 - 2b_2 \end{pmatrix}$$

On écrit alors $Bez(b_1, b_2, \dots, b_n)$ pour désigner le Bezoutien d'un polynôme exprimé à l'aide de ses coefficients b_i .

Théorème 0.1.1 (Sylvester). *Le polynôme à coefficients réels $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} + \dots + (-1)^nb_n$ a toutes ses racines réelles si et seulement si la matrice $Bez(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est semi-définie positive.*

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 4. □

Pour $n = 2$, la matrice Bez est semi-définie positive si et seulement si $\det Bez = b_1^2 - 4b_2 \geq 0$. On obtient le critère du discriminant qui permet de déterminer si les racines d'un polynôme de degré deux sont réelles.

Soit l'application polynomiale $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'image $X = Im \sigma$. On observe que $(b_1, b_2, \dots, b_n) = \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in X$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in$

\mathbb{R}^n si et seulement si le polynôme $f(x) = x^n - b_1x^{n-1} + \dots + (-1)^nb_n$ a toutes ses racines réelles. Par le théorème de Sylvester, ceci est équivalent à ce que $Bez(b_1, b_2, \dots, b_n) \geq 0$. Donc $X = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \mid Bez(b_1, b_2, \dots, b_n) \geq 0\}$.

Du fait que les polynômes symétriques élémentaires $\{\sigma_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ sont des générateurs de l'anneau des polynômes constants sur les S_n -orbites de \mathbb{R}^n , on obtiendra un homéomorphisme $\tilde{\sigma}$ entre l'espace d'orbites \mathbb{R}^n/S_n et X . Pour ce faire, on factorise l'application $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^n$ par l'application $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/S_n$ qui envoie un point sur son orbite. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\sigma} & \\ \mathbb{R}^n/S_n & & \end{array}$$

et que l'espace d'orbites $\mathbb{R}^n/S_n \cong X = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Bez(z) \geq 0\}$. On verra aussi que la matrice $Bez(z)$ est semi-définie positive si et seulement si les déterminants de ses mineurs principaux $\{M_I(z) \mid I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$ sont ≥ 0 . Il est alors possible de définir l'espace d'orbites \mathbb{R}^n/S_n avec l'ensemble X donné par des inégalités

$$X = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \det M_I(z) \geq 0, I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$$

Pour cet exemple, on obtient que l'espace d'orbites est déterminé par des inégalités provenant du Bezoutien. On cherche à généraliser ce résultat.

0.2. OBJECTIFS

Le but de ce mémoire est de décrire l'espace d'orbites d'un groupe fini G agissant linéairement sur un espace vectoriel réel W , comme un sous-ensemble de \mathbb{R}^m défini par des inégalités. Soit $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ un ensemble de générateurs de l'algèbre des polynômes sur W invariants pour l'action du groupe G et I l'idéal des relations algébriques entre ces polynômes générateurs. Pour l'application polynomiale $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, on note son image $X := \text{Im } p$ et l'ensemble des zéros de l'idéal $I \trianglelefteq \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]$, $W//G \subseteq \mathbb{R}^m$. De plus, on appellera $Grad$ l'unique fonction matricielle sur $W//G$ telle que $Grad(p(w)) = \left(\left(\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \right) (w) \right)_{ij}$ pour chaque $w \in W$ et avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de

l'espace vectoriel W . On verra en fait que l'on peut supposer que G est un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$. On formule ainsi le résultat de Procesi-Schwarz :

Théorème 0.2.1 (Procesi-Schwarz). *Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini. Alors l'espace d'orbites W/G est homéomorphe à l'ensemble*

$$X := \{z \in W//G \mid \text{Grad}(z) \geq 0\}$$

où $W//G \subseteq \mathbb{R}^m$ est le quotient algébrique et $\text{Grad}(z)$ est une fonction matricielle sur $W//G$, l'ensemble des zéros de l'idéal des relations d'un ensemble de générateurs de l'algèbre des polynômes sur W invariants pour l'action du groupe G .

DÉMONSTRATION. Voir chapitre 4. □

L'idée de ces inégalités définissant l'espace d'orbites fut d'abord introduite dans un article de Abud et Sartori [1, 2]. C'est Procesi et Schwarz [23] qui donnèrent par contre une démonstration adéquate pour le cas d'un groupe compact agissant linéairement sur un espace vectoriel réel.

Bien sûr, la démonstration du cas compact reste valide pour le cas fini. Cependant, lors du passage au cas fini, plusieurs simplifications sont possibles permettant ainsi d'obtenir une démonstration plus appropriée. En effet, l'utilisation de plusieurs résultats est alors remplacée par des arguments de nature élémentaire. Par exemple, les résultats de Dadok-Kac, Kempf-Ness et Luna ne sont plus nécessaires ou s'obtiennent beaucoup plus facilement.

On généralisera ce résultat en considérant les actions d'un groupe fini sur une sous-variété affine $\mathcal{X} \subseteq W \cong \mathbb{R}^n$. On obtiendra que l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est déterminé par les inégalités de l'espace d'orbites $W/G \cong X \subseteq \mathbb{R}^m$ et les égalités du quotient algébrique $\mathcal{X}//G \subseteq \mathbb{R}^m$, qui est une sous-variété affine.

0.3. EXEMPLES

Afin d'illustrer ce que l'on cherche à faire, on présente quelques exemples simples qui nous permettent d'obtenir naturellement de telles inégalités.

1. On considère sur l'espace vectoriel $W = \mathbb{R}^2$ l'action naturelle du groupe $G = \{\pm 1\}$ qui multiplie les coordonnées par ± 1 :

$$\pm 1 \cdot (x, y) = \pm(x, y)$$

pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avec cette action, l'orbite d'un point $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $G \cdot p = \{p, -p\}$.

On considère l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/G comme étant l'ensemble des G -orbites de \mathbb{R}^2 . Intuitivement, on obtient l'espace d'orbites en identifiant p à $-p$ dans \mathbb{R}^2 . Tel qu'indiqué par la figure suivante, ceci est obtenu à partir du demi-plan en "collant" (dans \mathbb{R}^3) les demi-droites $\overrightarrow{0p}$ et $\overrightarrow{0(-p)}$.

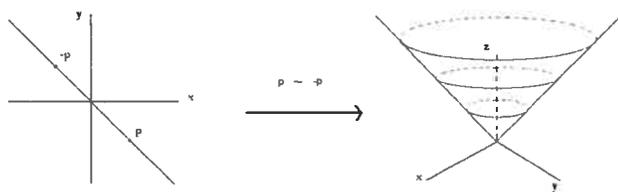


FIG. 0.1

Le demi-plan de \mathbb{R}^2 devient alors un cône de \mathbb{R}^3 qui lui est homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 via la projection sur les deux premières coordonnées $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

On obtient maintenant cette description de l'espace d'orbites avec des arguments de nature algébrique. Considérons l'application polynomiale

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{2}xy, \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2) \right)$$

On montre que l'image de cette application correspond à l'ensemble suivant donné par des inégalités,

$$X = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w \geq 0 \text{ et } u^2 + v^2 = w^2\}$$

qui correspond au cône de la figure 0.1. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\sqrt{2}xy, \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2) \right)$ dont la dernière coordonnée est $\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2) \geq 0$. De plus, $(\sqrt{2}xy)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2) \right)^2 = \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + x^2y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2) \right)^2$ et

donc $Im f \subseteq X$. Inversement, pour chaque $(u, v, w) \in X$, $w \geq 0$ et $u^2 + v^2 = w^2$ donc en particulier $u, v \leq w$. Ainsi, en prenant

$$(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(v+w)}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(w-v)} \right) & \text{si } u \geq 0 \\ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(v+w)}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(w-v)} \right) & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

on a que $f(x, y) = (u, v, w)$. En fait, la préimage de $(u, v, w) \in X$ est l'orbite du point (x, y) trouvé :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (u, v, w) &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2}xy \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2) \\ w = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2}xy \\ x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(v+w) \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(w-v) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(v+w)}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(w-v)} \right) & \text{si } u \geq 0 \\ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(v+w)}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(w-v)} \right) & \text{si } u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, pour chaque $(u, v, w) \in X$, la préimage $f^{-1}(u, v, w)$ est l'orbite d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (u, v, w)$. En associant une orbite à un point de X , on obtient une correspondance bijective entre l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/G et l'ensemble X de \mathbb{R}^3 donné par des inégalités.

De cette identification, on observe la particularité de la singularité au point 0 du cône. On remarque que ce point, qui est l'image de l'origine de \mathbb{R}^2 , correspond au seul point qui est laissé fixe par l'action du groupe. L'ensemble des points différents de l'origine de \mathbb{R}^2 possèdent tous des orbites composées de deux points, tandis que l'orbite de l'origine est formée d'un seul point. Ainsi l'espace d'orbites, soit le cône, est formé de deux composantes géométriques correspondant chacune à un type d'orbites différent.

On utilise maintenant le résultat de Procesi-Schwarz pour obtenir ces inégalités. Les polynômes $p_1(x, y) = \sqrt{2}xy$, $p_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2)$ et $p_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2)$ sont en fait des générateurs de l'algèbre des polynômes sur \mathbb{R}^2 invariants pour la multiplication par -1 . De plus, l'idéal des relations est engendré par une seule relation : $p_1^2 + p_2^2 = p_3^2$. On obtient donc comme zéros de cet idéal

$W//G = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w^2 - u^2 - v^2 = 0\}$. La matrice $Grad$ sur $W//G$ est alors donnée par

$$Grad(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}w & 0 & \sqrt{2}u \\ 0 & 2\sqrt{2}w & 2\sqrt{2}v \\ \sqrt{2}u & 2\sqrt{2}v & 2\sqrt{2}w \end{pmatrix}$$

Le résultat de Procesi-Schwarz dit alors que l'espace d'orbites est homéomorphe à

$$\{(u, v, w) \in W//G \mid Grad(u, v, w) \geq 0\}$$

Or $Grad(u, v, w)$ est semi-définie positive si et seulement si les déterminants de ses mineurs principaux sont positifs. En notant D_I avec $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, le déterminant du mineur principal de $Grad(u, v, w)$ formé des lignes et colonnes de l'ensemble I . Ainsi, pour $(u, v, w) \in W//G$, $Grad(u, v, w) \geq 0$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w \geq 0 \Leftrightarrow w \geq 0 \\ D_2 = D_3 = 2\sqrt{2}w \geq 0 \Leftrightarrow w \geq 0 \\ D_{12} = 2w^2 \geq 0 \\ D_{13} = 2w^2 - 2u^2 \geq 0 \Leftrightarrow w^2 - u^2 \geq 0 \\ D_{23} = 8w^2 - 8v^2 \geq 0 \Leftrightarrow w^2 - v^2 \geq 0 \\ D_{123} = 4\sqrt{2}w(w^2 - u^2 - v^2) \geq 0 \end{array} \right.$$

Sur $W//G$, seul la première inégalité n'est pas redondante. On trouve donc que l'espace d'orbite est homéomorphe à

$$\{(u, v, w) \in W//G \mid Grad(u, v, w) \geq 0\} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w \geq 0, w^2 - u^2 - v^2 = 0\}$$

ce qui correspond au cône que l'on a obtenu précédemment.

2. On considère le groupe D_4 des isométries du carré et son action naturelle sur \mathbb{R}^2 . Le groupe D_4 est alors composé de l'identité, des quatre réflexions du plan \mathbb{R}^2 selon les quatre axes de symétrie α , β , γ et δ du carré et des rotations de $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'origine (figure 0.2).

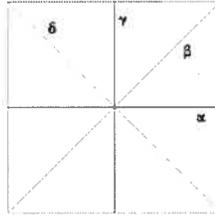


FIG. 0.2

Ainsi, le groupe D_4 agit sur le plan \mathbb{R}^2 via ces huit transformations. Pour un point générique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'orbite est alors donnée par les huit points $\{(\pm x, \pm y)\} \cup \{(\pm y, \pm x)\}$ (figure 0.3). On remarque également que sur les axes de

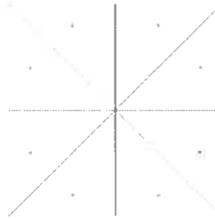


FIG. 0.3

symétrie, les points différents de l'origine possèdent des orbites de quatre points (figure 0.4).

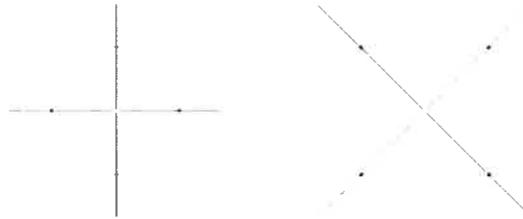


FIG. 0.4

Si l'on considère l'espace d'orbites comme étant l'ensemble des D_4 -orbites des points de \mathbb{R}^2 , on obtient en identifiant les points d'une orbite à un point de la région illustrée dans la figure 0.5, une correspondance bijective entre les points de cette région et les D_4 -orbites. En effet, chaque orbite contient exactement un unique point dans la région, qui est ici un domaine fondamental.

D'après cette identification de l'espace d'orbites au domaine fondamental, l'image des deux types d'orbites illustrés par la figure 0.4 correspond aux deux

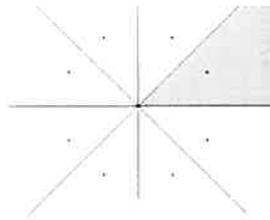


FIG. 0.5

demi-droites délimitant le domaine fondamental. De même, l'origine, qui a une orbite d'un seul point, est envoyée sur la pointe de la région fondamentale. Pour le reste de \mathbb{R}^2 , i.e. les points qui ne sont pas sur des axes de symétrie, ils sont tous envoyés dans l'intérieur de cette région. On obtient ainsi une stratification de l'espace d'orbites en strates ayant des orbites de même type, qui se décrit géométriquement par les composantes de dimension 0, 1 et 2 du domaine fondamental : soit l'origine, les deux demi-droites et l'intérieur de la région fondamentale. Ces quatre composantes sont en fait des variétés lisses de dimension 0, 1 et 2.

Tel que présenté au premier exemple, on tente d'obtenir une description de l'espace d'orbites à l'aide d'outils algébriques. On considère l'application polynomiale

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x^2 + y^2, x^2 y^2)$$

On prétend que l'image de cette application est égale à l'ensemble

$$X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ et } u^2 - 4v \geq 0\}$$

et que ces ensembles correspondent de façon bijective à l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/D_4 .

Tout d'abord, pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 y^2)$ et $x^2 + y^2, x^2 y^2 \geq 0$. De plus, $(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 y^2) = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0$ et donc $Im f \subseteq X$. Pour chaque $(u, v) \in X$, i.e. que $u, v \geq 0$ et $u^2 - 4v \geq 0$, alors $0 \geq -4v \Leftrightarrow u^2 \geq u^2 - 4v \Leftrightarrow u \geq \sqrt{u^2 - 4v} \Leftrightarrow \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \geq 0$. Donc en choisissant $(x, y) = \left(\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}}, \sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}} \right)$, alors $f(x, y) = (u, v)$. En fait, la préimage

de $(u, v) \in X$ est l'orbite de ce point (x, y) :

$$\begin{aligned}
 (u, v) = f(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = u - x^2 \\ v = x^2 y^2 = ux^2 - x^4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = u - x^2 \\ v - ux^2 + x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \\ y^2 = \frac{u \mp \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{u \mp \sqrt{u^2 - 4v}}{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = \left(\pm \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}}, \pm \sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}} \right) \\ \text{ou} \\ (x, y) = \left(\pm \sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}}, \pm \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}} \right) \end{cases}$$

Comme l'orbite d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par les points $\{(\pm x, \pm y)\} \cup \{(\pm y, \pm x)\}$, $f(x, y) = f(s, t)$ si et seulement si (x, y) et (s, t) sont sur la même orbite. D'où la correspondance bijective entre X et l'espace d'orbites.

On remarque évidemment l'homéomorphisme entre X donné par la figure suivante et le domaine fondamental trouvé précédemment.

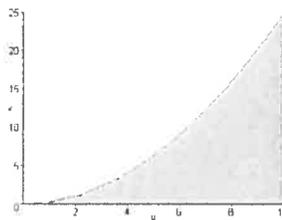


FIG. 0.6

Pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \neq x = \pm y$, $f(x, y) = (2x^2, x^4) \in X$ et donc les points non nuls sur les axes de symétrie β et δ de la figure 0.3 sont envoyés sur la frontière supérieure de X . De même, pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = 0$ ou $y = 0$, $f(x, y) = (x^2, 0)$ ou $(y^2, 0)$ et donc les points des axes de symétrie α et γ sont envoyés sur la frontière inférieure de X . Les autres points

de \mathbb{R}^2 qui ne sont pas sur les axes de symétrie sont envoyés dans l'intérieur de X . On retrouve donc la stratification de l'ensemble X qui se décompose en quatre strates correspondant aux différents types d'orbites de l'action de D_4 sur \mathbb{R}^2 .

On utilise maintenant le résultat de Procesi-Schwarz pour obtenir ces inégalités. Tout d'abord, les polynômes $p_1(x, y) = x^2 + y^2$ et $p_2(x, y) = x^2 y^2$ sont des générateurs de l'algèbre des polynômes D_4 -invariants sur \mathbb{R}^2 qui n'ont pas de relations algébriques entre eux. Ainsi, $W//G = \mathbb{R}^2$ et on obtient la matrice $Grad(u, v)$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$Grad(u, v) = \begin{pmatrix} 4u & 8v \\ 8v & 4uv \end{pmatrix}$$

Le théorème de Procesi-Schwarz dit alors que l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/D_4 est homéomorphe à

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid Grad(u, v) \geq 0\}$$

Or, $Grad(u, v) \geq 0$ si et seulement si les déterminants de ses mineurs principaux sont positifs, i.e.

$$\begin{cases} D_1 = 4u \geq 0 \\ D_2 = 4uv \geq 0 \\ D_{12} = 16v(u^2 - 4v) \geq 0 \end{cases}$$

L'espace d'orbites est donc homéomorphe à la région de \mathbb{R}^2 définie par des inégalités :

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ et } u^2 - 4v \geq 0\}$$

qui est exactement la région que l'on a trouvé précédemment.

Ainsi, comme on le voit pour ces exemples, pour l'action d'un groupe fini sur un espace vectoriel réel, on a obtenu des inégalités qui définissent une certaine région de \mathbb{R}^m qui correspond à l'espace d'orbites. Bien sûr, pour les exemples présentés ici, ces inégalités s'obtenaient de façon intuitive. Or en général, ce n'est pas nécessairement le cas. Le résultat que l'on se propose d'obtenir nous donnera une méthode algébrique nous permettant de trouver ce genre d'inégalités pour tout groupe fini agissant sur un espace vectoriel réel donné. Il est à noter que les polynômes que l'on a utilisés pour trouver les inégalités sont des générateurs

de l'anneau des polynômes invariants pour l'action du groupe. La théorie des invariants nous donne en fait des outils pour obtenir ces générateurs. On montrera qu'avec de tels générateurs, il est possible d'obtenir les inégalités.

0.4. CONTENU DU MÉMOIRE

Dans le premier chapitre, il sera question de la notion d'espace d'orbites. Cette définition sera introduite dans un contexte purement topologique. On y considèrera en effet une action continue d'un groupe fini sur un espace topologique. Une telle action définira une stratification de l'espace topologique et de l'espace d'orbites. Ces espaces seront donc partitionnés en strates contenant les points avec des orbites de même type. On y montrera aussi l'existence des slices.

Dans le second chapitre, on introduit les outils algébriques. Comme on a vu avec les exemples, la construction des inégalités dépend d'un choix de générateurs de l'anneau des polynômes invariants pour l'action du groupe. Il sera donc nécessaire de donner quelques notions de la théorie des invariants. De plus, afin d'obtenir le quotient algébrique, nous aurons besoin d'éléments de la géométrie algébrique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des espaces d'orbites d'un point de vue de la géométrie différentielle. En effet, pour calculer le rang de la matrice $Grad$, il sera nécessaire de considérer les espaces tangents aux strates.

On montre finalement le résultat principal dans le quatrième chapitre. On y présentera ensuite quelques cas particuliers, notamment le cas où l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique et celui où l'espace d'orbites est homéomorphe à un espace vectoriel. Ce dernier cas est donné par les résultats de M.A. Mikhaïlova [18] et O.V. Shvartsman [26].

Dans le dernier chapitre, on présente quelques exemples où l'on trouve des inégalités définissant des espaces d'orbites avec le résultat de Procesi et Schwarz.

Chapitre 1

ESPACES D'ORBITES

Dans la première section, on introduit la notion d'espace d'orbites. On considère alors l'espace d'orbites comme espace topologique muni de la topologie quotient provenant de la projection qui envoie un point sur son orbite. De cette définition de nature topologique découleront quelques propriétés topologiques de l'espace d'orbites. Dans la deuxième section, nous discuterons de la stratification que l'action du groupe entraîne sur l'espace topologique ainsi que sur l'espace d'orbites. L'action du groupe permettra en effet de stratifier l'espace en strates contenant les orbites de même type. Dans la troisième section, il sera question de l'existence de slices pour le cas d'un groupe fini agissant sur un espace topologique Hausdorff. Ces voisinages ouverts des orbites seront utiles pour étudier le comportement local de l'espace d'orbites. Dans la dernière section, on traite le cas particulier où le groupe agit de façon linéaire sur un espace vectoriel. Avec cet ajout de structure algébrique, il sera possible de définir la topologie de Zariski. Ensuite, nous serons en mesure de passer au chapitre suivant, où nous utiliserons cette structure algébrique pour étudier l'espace d'orbites.

1.1. ESPACES D'ORBITES

Avant de donner une définition d'espace d'orbites, on définit ce que l'on entend par une action d'un groupe sur un espace topologique.

Définition 1.1.1. *Soit X un espace topologique et G un groupe fini. Une action de G sur X est une application $\mu : G \times X \longrightarrow X$ telle que pour chaque $g, g' \in G$*

et $x \in X$,

$$\mu(g, x) \in X$$

$$\mu(e_G, x) = x$$

et

$$\mu((g \cdot g'), x) = \mu(g, \mu(g', x))$$

Pour chaque $g \in G$, on note l'action de cet élément sur $x \in X$ par $g \cdot x := \mu(g, x)$. On peut alors considérer pour chaque $g \in G$ la multiplication à gauche $l_g : X \rightarrow X$ donnée par $l_g(x) := g \cdot x$, avec $x \in X$.

Comme on travaille avec des espaces topologiques, on s'intéresse à des actions continues.

Définition 1.1.2. Soit X un espace topologique et G un groupe fini. Une action continue $\mu : G \times X \rightarrow X$ de G sur X est une action qui est continue pour la topologie produit de $G \times X$ avec la topologie discrète de G .

Définition 1.1.3. Lorsque G , un groupe fini, agit sur un espace topologique X de façon continue, on dit que X est un G -espace. Si X et Y sont deux G -espaces, une application $f : X \rightarrow Y$ est dite G -équivariante si

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

pour chaque $g \in G$ et $x \in X$. On appelle une application continue et G -équivariante un G -morphisme.

Lemme 1.1.1. L'action $\mu : G \times X \rightarrow X$ est continue si et seulement si pour chaque $g \in G$, la multiplication $l_g : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme.

DÉMONSTRATION. Supposons que pour chaque $g \in G$, l'application $l_g : X \rightarrow X$ est continue. Alors pour $\mathcal{U} \subseteq X$ un ouvert, la préimage $\mu^{-1}(\mathcal{U})$ est un ensemble $\mathcal{V} \subseteq G \times X$ tel que pour chaque $(g, v) \in \mathcal{V}$, $\mu(g, v) = g \cdot v \in \mathcal{U}$. On a donc que $\mathcal{V} = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times V_g$ pour des ensembles $V_g \subseteq X$. Or, pour chaque $g \in G$, $V_g = l_g^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert par la continuité des l_g . Donc, l'union finie $\mathcal{V} = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times V_g$ est un ouvert et μ est continue.

Supposons maintenant que l'action $\mu : G \times X \rightarrow X$ est continue. En considérant

pour chaque $g \in G$ l'application $l_g : X \longrightarrow X$ et l'inclusion $\iota : X \cong \{g\} \times X \longrightarrow G \times X$ qui envoie $x \in X$ sur $(g, x) \in G \times X$, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \iota & \searrow l_g & \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Soit alors un ouvert $\mathcal{U} \subseteq X$. On a donc que $l_g^{-1}(\mathcal{U}) = \iota^{-1}(\mu^{-1}(\mathcal{U}))$ est un ouvert puisque l'inclusion ι et l'action μ sont continues. Donc l_g est continue. De plus,

$$(l_g \circ l_{g^{-1}})(x) = l_g(l_{g^{-1}}(x)) = l_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot g^{-1} \cdot x = x$$

et

$$(l_{g^{-1}} \circ l_g)(x) = l_{g^{-1}}(l_g(x)) = l_{g^{-1}}(g \cdot x) = g^{-1} \cdot g \cdot x = x$$

donc $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ est aussi continue et chaque l_g est un homéomorphisme. \square

Remarque 1.1.1. *En particulier, pour \mathcal{U} un ouvert de X et F un fermé, $g \cdot \mathcal{U} = (l_{g^{-1}})^{-1}(\mathcal{U})$ pour chaque $g \in G$. Donc $g \cdot \mathcal{U}$ est la préimage d'un ouvert par une application continue et donc est ouvert. De même, $g \cdot F$ est la préimage de F par l'application continue $l_{g^{-1}}$ donc est fermé.*

Définition 1.1.4. *Soit G un groupe fini et X un G -espace. On définit l'espace d'orbites, que l'on note X/G , comme étant l'espace quotient X/\sim avec la relation d'équivalence*

$$x \sim y \Leftrightarrow G \cdot x = G \cdot y$$

avec $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

On remarque que pour un groupe fini G , $G \cdot x = G \cdot y$ est équivalent à dire qu'il existe un $g \in G$ tel que $x = g \cdot y$. Ainsi, un élément de X/G se trouve à être une G -orbite de X . On note $Gx \in X/G$ pour désigner l'orbite de $x \in X$. De plus, on muni X/G de la topologie quotient provenant de la projection canonique

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/G \\ x &\longmapsto Gx \end{aligned}$$

On a donc que $\mathcal{U} \subseteq X/G$ est un ouvert $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de X .

On rappelle quelques propriétés de nature topologique.

Définition 1.1.5. Pour X un espace topologique Hausdorff, on dit que X est compact si tout recouvrement d'ouverts de X admet un sous-recouvrement fini.

Définition 1.1.6. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On dit que f est propre si la préimage de chaque compact est compacte.

Proposition 1.1.1. Soit X un G -espace.

- (i) La projection $\pi : X \rightarrow X/G$ est une application ouverte et fermée.
- (ii) X est Hausdorff implique que X/G est Hausdorff.
- (iii) Pour X Hausdorff, la projection $\pi : X \rightarrow X/G$ est une application propre.
- (iv) Soit X un espace Hausdorff, alors X est compact $\Leftrightarrow X/G$ est compact.
- (v) Si X est connexe par arcs, alors X/G est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. (i) On montre que l'application π est ouverte. Soit $\mathcal{U} \subseteq X$ un ouvert. Alors $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{U})) = G(\mathcal{U}) = \bigcup_{g \in G} g(\mathcal{U})$. Comme l'action d'un élément de G est un homéomorphisme, les $g(\mathcal{U})$ sont ouverts et on a une union finie d'ouverts qui est ouverte. Ainsi par la définition de la topologie quotient de X/G , $\pi(\mathcal{U})$ est ouvert et l'application est ouverte.

Soit $A \subseteq X$ un fermé. Alors $\pi^{-1}(\pi(A)) = G(A) = \bigcup_{g \in G} g(A)$. Les $g(A)$ sont fermés et donc l'union finie des fermés est aussi fermée. Ainsi, $\pi(A)$ est fermé et l'application est fermée.

(ii) Soit X un G -espace Hausdorff et $Gx \neq Gy \in X/G$. Comme l'espace X est Hausdorff, pour chaque y_i de l'orbite de $y_0 = y \in X$, $G \cdot y = \{y_i \mid i \in I\}$, il existe des ouverts \mathcal{U}_i et \mathcal{V}_i de X tels que $x \in \mathcal{U}_i$, $y_i \in \mathcal{V}_i$ et $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$ pour chaque $i \in I$. En prenant $\mathcal{U} := \bigcap_i \mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V} := \bigcup_i \mathcal{V}_i$, on a que $x \in \mathcal{U}$, chaque y_i est dans \mathcal{V} et les ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} sont disjoints. Avec $\tilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{g \in G} g\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, \mathcal{U} et $\tilde{\mathcal{V}}$ sont deux ouverts disjoints qui contiennent respectivement x et $G \cdot y$. En effet, $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Donc $\pi(\mathcal{U})$ et $\pi(\tilde{\mathcal{V}})$ sont des ouverts disjoints de X/G . Sinon, soit $Gz \in \pi(\mathcal{U}) \cap \pi(\tilde{\mathcal{V}})$. Alors $z = g \cdot u = g' \cdot v$ pour $g, g' \in G$, $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \tilde{\mathcal{V}}$. Ainsi, $u = g^{-1}g' \cdot v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ ce qui est une contradiction. Puisque $\pi(\mathcal{U})$ et $\pi(\tilde{\mathcal{V}})$ contiennent respectivement Gx et Gy , X/G est Hausdorff.

(iii) Pour montrer que l'application est propre, comme elle est continue, surjective

et fermée, il suffit de montrer que la préimage d'un point est compacte (voir par exemple [15][p. 216, théorème 95.7]). Or, pour $Gx \in X/G$, la préimage est un nombre fini de points et donc est compacte. L'application est donc propre.

(iv) Supposons que X , un espace Hausdorff, est compact. Soit $\{U_\lambda\}$ un recouvrement d'ouverts de X/G . Alors la préimage de ce recouvrement est un recouvrement d'ouverts de X . Comme X est compact, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini. Soit $\{U_i\}$ un tel sous-recouvrement. Alors $\{\pi(U_i)\}$ est un recouvrement fini de X/G . Donc X/G est compact. Si X/G est compact, alors comme π est propre et que $X = \pi^{-1}(X/G)$, X étant la préimage d'un compact, il est aussi compact.

(v) Soit X un G -espace connexe par arcs et $Gx \neq Gy \in X/G$. Pour $x \in \pi^{-1}(Gx)$ et $y \in \pi^{-1}(Gy)$, soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu de x vers y . Alors $\pi \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow X/G$ est une application continue telle que $(\pi \circ \alpha)(0) = Gx$ et $(\pi \circ \alpha)(1) = Gy$. Donc X/G est connexe par arcs. \square

L'espace d'orbites possède la propriété universelle suivante :

Proposition 1.1.2. *Soit une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre X un G -espace et Y un espace topologique telle que f est G -invariante, i.e. que pour chaque $g \in G$ et $x \in X$, $f(g \cdot x) = f(x)$. Alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : X/G \rightarrow Y$ qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X/G & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit l'application $\tilde{f}(Gx) = \tilde{f}(\pi(x)) = (\tilde{f} \circ \pi)(x) := f(x)$. Cette application est correctement définie car si $Gx = Gy$, alors il existe un $g \in G$ tel que $x = g \cdot y$ et ainsi $\tilde{f}(Gx) = f(x) = f(g \cdot y) = f(y) = \tilde{f}(Gy)$. Elle est aussi l'unique application à faire commuter ce diagramme. Supposons que l'application $h : X/G \rightarrow Y$ fait aussi commuter le diagramme. Alors on a que $h(Gx) = (h \circ \pi)(x) = f(x) = \tilde{f}(Gx)$ donc $h = \tilde{f}$. On montre que \tilde{f} est continue. Soit \mathcal{U} un ouvert de Y . On doit montrer que la préimage de \mathcal{U} par \tilde{f} est un ouvert. Comme l'application π est ouverte et que f est continue, il suffit

de montrer que $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{U}) = \pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$. Soit $Gx \in \pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$, i.e qu'il existe un $x' \in G \cdot x$ tel que $x' \in f^{-1}(\mathcal{U})$. Alors $\tilde{f}(Gx) = f(x') \in \mathcal{U}$ et donc $Gx \in \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$. Si maintenant $Gx \in \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$. Alors pour $x \in \pi^{-1}(Gx)$, $f(x) = \tilde{f}(Gx) \in \mathcal{U}$ et donc $Gx \in \pi(f^{-1}(\mathcal{U}))$ et on a l'égalité. Ainsi, cette application est continue. \square

Il y a donc une correspondance bijective entre les applications continues de X vers Y qui sont G -invariantes et les applications continues sur X/G vers Y .

1.2. STRATIFICATION

On considère l'action d'un groupe fini G sur un espace topologique X . On s'intéresse ici aux types d'orbites que l'on peut retrouver parmi les G -orbites de X .

Définition 1.2.1. *Soit X un G -espace. Pour chaque $x \in X$, on note G_x le groupe d'isotropie de x , i.e.*

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

On observe que le nombre de points d'une orbite est déterminé par les groupes d'isotropies des points qui la composent.

Proposition 1.2.1. *Soit X un G -espace. Pour chaque $x \in X$, il y a une bijection*

$$\phi : G/G_x \longrightarrow Gx$$

$$gG_x \longmapsto g \cdot x$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ et considérons l'application

$$\phi_x : G/G_x \longrightarrow Gx$$

$$gG_x \longmapsto g \cdot x$$

qui est correctement définie : si $gG_x = g'G_x$, alors $g'^{-1} \cdot g \in G_x$ et ainsi $(g'^{-1} \cdot g) \cdot x = x$ et $g' \cdot x = g \cdot x$. Donc $\phi_x(g'G_x) = g' \cdot x = g \cdot x = \phi_x(gG_x)$. Cette application est injective. Si $\phi_x(g'G_x) = \phi_x(gG_x)$, alors $g \cdot x = g' \cdot x$ donc $g^{-1} \cdot g' \in G_x$ et ainsi $gG_x = g'G_x$. Elle est aussi surjective. Soit $g \cdot x \in Gx$. Alors $gG_x \in G/G_x$ et $\phi_x(gG_x) = g \cdot x$. \square

Avec le résultat suivant, les groupes d'isotropies des points d'une même orbite sont tous conjugués. Pour $H \leq G$ un sous-groupe, on appelle le *normalisateur* de H dans G

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Lemme 1.2.1. *Soit X un G -espace et $x \in X$. Alors pour tout $g \in G$,*

$$G_{gx} = gG_xg^{-1}$$

En particulier, $G_{gx} = G_x$ si et seulement si $g \in N_G(G_x)$.

DÉMONSTRATION. Soit $h \in G_{gx}$, alors $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ et $g^{-1}hg \cdot x = x$ donc $g^{-1}hg \in G_x$. Ainsi, $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}$. Soit $h \in G_x$, pour chaque $g \in G$, $(ghg^{-1}) \cdot (g \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x$ donc $ghg^{-1} \in G_{gx}$. D'où l'égalité. \square

Définition 1.2.2. *Soit $x \in X$ et G_x le groupe d'isotropie de x . On dénote par*

$$(G_x) := \{gG_xg^{-1} \mid g \in G\}$$

la classe de conjugaison de G_x . Par le lemme précédent, en chaque point d'une orbite Gx , le groupe d'isotropie $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ est un élément de (G_x) . On dénote alors le type d'orbite de Gx par (G_x) .

Définition 1.2.3. *Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe de G . On définit la strate de type (H) , notée $X^{(H)}$, comme étant l'ensemble des points de X tels que leur groupe d'isotropie est conjugué à H :*

$$X^{(H)} = \{x \in X \mid G_x \in (H)\}$$

Soit $\pi : X \rightarrow X/G$ la projection canonique qui envoie x sur Gx . On appelle l'image de $X^{(H)}$ par π la strate de type (H) de X/G , que l'on dénote par $(X/G)^{(H)}$.

On note également

$$X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x \forall h \in H\}$$

$$X^{<H>} = \{x \in X \mid G_x = H\}$$

et $(X/G)^H$ pour désigner l'image de $X^{<H>}$ par l'application π et $(X/G)^{<H>}$ celle de X^H .

Soit K et H deux sous-groupes de G . On dit que $(K) \leq (H)$ si K est conjugué à un sous-groupe de H . On notera $(K) = (H)$ pour dire que K est conjugué à H . Cette relation d'ordre nous sera utile pour décrire la stratification des espaces d'orbites.

Remarque 1.2.1. (i) Soit $K \subseteq H$ deux sous-groupes de G . Alors $X^H \subseteq X^K$.

(ii) Soit $x \in X$ et G_x son groupe d'isotropie. Alors

$$X^{(G_x)} = \bigcup_{(H)=(G_x)} X^{<H>} = \bigcup_{g \in G} g \cdot X^{<G_x>} = \bigcup_{g \in G} X^{<gG_xg^{-1}>} = \dot{\bigcup}_{g \in G/N_G(G_x)} X^{<gG_xg^{-1}>}$$

où la dernière réunion est une réunion disjointe.

(iii) Soit H un sous-groupe de G . Alors

$$X^H = \bigcup_{H' \supseteq H} X^{<H'>}$$

On illustre ces définitions avec quelques exemples.

(i) Soit $S_2 = \{e, \alpha\}$ qui agit sur \mathbb{R}^2 en permutant les coordonnées. On considère les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , $Y_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$ et son complément $Y_2 = \mathbb{R}^2 \setminus Y_1$. Pour chaque $p = (x, x) \in Y_1$, on a que $G_p = S_2$ car $\alpha \cdot (x, x) = (x, x)$. Pour chaque $p = (x, y) \in Y_2$, i.e. $x \neq y$, on a que $G_p = \{e\}$ car $\alpha \cdot (x, y) = (y, x) \neq (x, y)$. Ainsi, l'espace \mathbb{R}^2 possède deux strates pour cette action de S_2 : $\mathbb{R}^2^{(S_2)} = Y_1$ et $\mathbb{R}^2^{(e)} = Y_2$.

En identifiant (x, y) à (y, x) dans \mathbb{R}^2 , l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/S_2 est homéomorphe à $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0\}$. Par cette identification, on obtient $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(S_2)} = \pi(Y_1) = \{(x, x) \in X\}$ et $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(e)} = \pi(Y_2) = \{(x, y) \in X \mid x \neq y\}$ (figure 1.1).

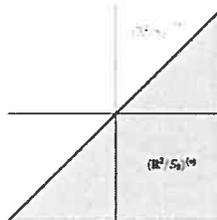


FIG. 1.1

(ii) Soit l'action naturelle de $G = D_4$ sur \mathbb{R}^2 . On a vu que le groupe est généré par les rotations de $\pi/2$ autour de l'origine et les réflexions selon les axes α, β, γ et δ (figure 1.2).

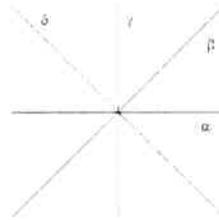


FIG. 1.2

Pour l'origine de \mathbb{R}^2 , le groupe d'isotropie est $G_0 = D_4$. Pour tout point $0 \neq p \in \mathbb{R}^2$ sur l'un des axes de réflexion α, β, γ ou δ , par exemple α , alors $G_p = G_\alpha := \{e, \sigma_\alpha\}$ où σ_α est la réflexion selon l'axe α . On note de même $G_\beta := \{e, \sigma_\beta\}$, $G_\gamma := \{e, \sigma_\gamma\}$ et $G_\delta := \{e, \sigma_\delta\}$. Puisque $\sigma_\beta \cdot \sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta^{-1} = \sigma_\gamma$, σ_α est conjugué à σ_γ et donc $(G_\alpha) = (G_\gamma)$. De même, on obtient que $(G_\beta) = (G_\delta)$.

Pour le reste, i.e. pour tout point $p \in \mathbb{R}^2$ qui n'est pas sur un axe de réflexion, $G_p = \{e\}$. Ainsi, pour cette action, \mathbb{R}^2 possède quatre strates

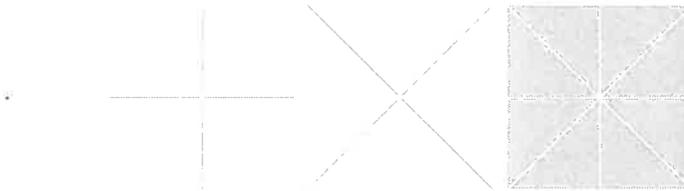


FIG. 1.3. De gauche à droite respectivement : $\mathbb{R}^{2(D_4)}$, $\mathbb{R}^{2(G_\alpha)}$, $\mathbb{R}^{2(G_\beta)}$ et $\mathbb{R}^{2(e)}$.

Avec $\mathbb{R}^{2\langle G_\alpha \rangle} = \alpha \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^{2\langle G_\beta \rangle} = \beta \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^{2\langle G_\gamma \rangle} = \gamma \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^{2\langle G_\delta \rangle} = \delta \setminus \{0\}$, étant les axes de symétrie moins l'origine, on remarque que

$$\mathbb{R}^{2(G_\alpha)} = \mathbb{R}^{2(G_\gamma)} = \mathbb{R}^{2\langle G_\alpha \rangle} \cup \mathbb{R}^{2\langle G_\gamma \rangle}$$

et

$$\mathbb{R}^{2(G_\beta)} = \mathbb{R}^{2(G_\delta)} = \mathbb{R}^{2\langle G_\beta \rangle} \cup \mathbb{R}^{2\langle G_\delta \rangle}$$

Avec l'identification faite dans l'introduction (figure 0.5), on obtient l'image de ces strates

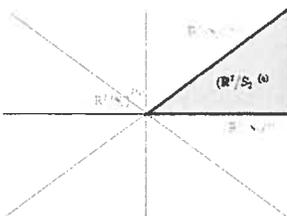


FIG. 1.4. Les quatre strates de (\mathbb{R}^2/S_2) : $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(D_4)}$, $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(G_\alpha)}$, $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(G_\beta)}$ et $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(e)}$.

1.3. SLICES

Dans cette section nous obtiendrons le théorème de slices. Cet outil jouera un rôle très important pour la suite. En effet, ce résultat permet de trouver un voisinage des orbites qui possède des propriétés intéressantes. On introduit d'abord la notion de *produit tordu*.

Définition 1.3.1. Soit G un groupe fini, $H \subseteq G$ un sous-groupe et X un H -espace. On considère le H -espace $G \times X$ dont l'action de H est donnée par

$$\begin{aligned} H \times (G \times X) &\longrightarrow G \times X \\ h \cdot (g', x) &\longmapsto (g' \cdot h^{-1}, h \cdot x) \end{aligned}$$

On appelle le produit tordu de G et X au-dessus de H , que l'on note $G *_H X$, l'espace d'orbites $(G \times X)/H$. On note $[g, x]$ la classe d'équivalence de (g, x) dans $G *_H X = (G \times X)/H$.

On observe que $[g, x] = [g', y] \in G *_H X$ si et seulement s'il existe un $h \in H$ tel que $g' = gh^{-1}$ et $y = h \cdot x$.

$G *_H X$ est aussi un G -espace en considérant l'action

$$\begin{aligned} G \times (G *_H X) &\longrightarrow G *_H X \\ g, [g', x] &\longmapsto [gg', x] \end{aligned}$$

On donne une définition de slice à l'aide du produit tordu.

Définition 1.3.2. Soit X un G -espace et $x \in X$. Soit $S \subseteq X$ un ouvert tel que $x \in S$ et $G_x(S) = S$. On dit que S est une slice en x si l'application

$$\phi : G *_x S \longrightarrow G(S)$$

$$[g, s] \longmapsto g \cdot s$$

est un homéomorphisme G -équivariant avec $G(S)$ qui est un voisinage ouvert de $G(x)$.

Si l'espace X est Hausdorff, alors on obtient l'existence des slices par le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit G un groupe fini et X un G -espace Hausdorff. Pour chaque $x \in X$ et $H = G_x$, il existe un voisinage de x , $S \subseteq X$, tel que $G_x(S) = S$ et l'application*

$$\phi : G *_H S \longrightarrow G(S)$$

$$[g, s] \longmapsto g \cdot s$$

est un homéomorphisme G -équivariant vers $G(S)$ un voisinage ouvert de Gx dans X .

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ et $H = G_x$ son groupe d'isotropie. Comme X est Hausdorff, soit \mathcal{U} un ouvert de X contenant x tel que $\mathcal{U} \cap G \cdot x = \{x\}$. Pour ce faire, soit $\{x, x_1, x_2, \dots, x_s\}$ les points distincts de l'orbite Gx . Comme X est Hausdorff, pour chaque x_i il existe des ouverts disjoints \mathcal{U}_i et \mathcal{V}_i tels que $x \in \mathcal{U}_i$, $x_i \in \mathcal{V}_i$ et $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$. En prenant $\mathcal{U} = \bigcap_i \mathcal{U}_i$, un ouvert qui contient x , on obtient que $\mathcal{U} \cap Gx = \{x\}$. En fait, $\overline{\mathcal{U}} \cap Gx = \{x\}$ où $\overline{\mathcal{U}}$ dénote la fermeture de \mathcal{U} . Supposons au contraire que $x_i = g \cdot x \in \overline{\mathcal{U}}$ pour un $g \in G \setminus G_x$, alors pour chaque voisinage ouvert \mathcal{W} de $g \cdot x$, $\mathcal{W} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. En particulier pour \mathcal{V}_i qui contient $x_i = g \cdot x$, $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ ce qui contredit la construction de \mathcal{U} . Donc $\overline{\mathcal{U}} \cap Gx = \{x\}$.

Soit $G \setminus H = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$. On pose $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus (\bigcup_i g_i \overline{\mathcal{U}})$ qui est un ouvert contenant x . En effet, si au contraire $x \in g_i \overline{\mathcal{U}}$, alors $x = g_i u$ pour un $u \in \overline{\mathcal{U}}$ et donc $u = g_i^{-1} \cdot x \neq x$ ce qui contredit le fait que $\overline{\mathcal{U}} \cap Gx = \{x\}$. Cet ouvert \mathcal{V} a la propriété que pour $g \in G$ et $v \in \mathcal{V}$, si $g \cdot v \in \mathcal{V}$ alors $g \in G_x = H$.

On pose finalement $\mathcal{S} = \bigcap_{g \in H} g\mathcal{V} \subseteq e\mathcal{V} = \mathcal{V}$. Cet ouvert contient x et donc est non vide. On montre que cet ouvert satisfait les propriétés d'une slice. Tout

d'abord, par construction, il est H -stable car pour chaque $h \in H$,

$$h \cdot \mathcal{S} = h \cdot \left(\bigcap_{g \in H} g\mathcal{V} \right) = \bigcap_{g \in H} (hg)\mathcal{V} = \bigcap_{g' = hg \in H} g'\mathcal{V} = \mathcal{S}$$

On montre maintenant que l'application

$$\phi : G *_H \mathcal{S} \longrightarrow G(\mathcal{S})$$

$$[g, s] \longmapsto g \cdot s$$

est un homéomorphisme G -équivariant. Pour chaque $g \in G$ et $[g', s] \in G *_H \mathcal{S}$, $g \cdot \phi([g', s]) = g \cdot (g' \cdot s) = (gg') \cdot s = \phi([gg', s]) = \phi(g \cdot [g', s])$ et donc l'application est G -équivariante. Cette application est surjective car pour chaque $g \cdot s \in G(\mathcal{S})$, $\phi([g, s]) = g \cdot s$ avec $[g, s] \in G *_H \mathcal{S}$. On montre qu'elle est injective. Soit $[g', s'], [g, s] \in G *_H \mathcal{S}$ tels que $g \cdot s = \phi([g, s]) = \phi([g', s']) = g' \cdot s'$. Alors $s' = g'^{-1}g \cdot s \in \mathcal{S}$ et donc par construction de \mathcal{S} , on doit avoir que $g'^{-1}g \in H$. Ainsi $[g, s] = [g(g'^{-1}g)^{-1}, (g'^{-1}g) \cdot s] = [g', s']$ et l'application est injective. Pour montrer que l'application est continue, on remarque que ϕ fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{S} & \xrightarrow{\mu} & G(\mathcal{S}) \\ \pi_H \downarrow & \nearrow \phi & \\ G *_H \mathcal{S} & & \end{array}$$

avec l'action à gauche de G , un homéomorphisme H -invariant $\mu : G \times \mathcal{S} \longrightarrow G(\mathcal{S})$ donné par $\mu(g, s) = l_g(s) = g \cdot s$ et tel que $\mu(h \cdot (g, s)) = \mu(g \cdot h^{-1}, h \cdot s) = g \cdot s = \mu(g, s)$. Or, par la propriété universelle de la proposition 1.1.2, ϕ est la seule telle application et elle est continue. Pour chaque ouvert $\mathcal{U} \subseteq G *_H \mathcal{S}$, $\phi(\mathcal{U}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ est un ouvert. En effet, soit $G' = \{g \in G \mid \exists s \in \mathcal{S} \text{ avec } (g, s) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})\}$. Alors $\phi(\mathcal{U}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{U})) = \bigcup_{g \in G'} l_g(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ et comme les l_g , les multiplications à gauche par $g \in G$, sont des homéomorphismes et que π est continue, c'est un ouvert. L'application ϕ est donc un homéomorphisme. Puisque $Gx \subseteq G(\mathcal{S})$, $G(\mathcal{S})$ est un voisinage ouvert de Gx et ainsi \mathcal{S} est une slice en x . \square

On obtient alors quelques propriétés d'une slice.

Proposition 1.3.1. *Soit X un G -espace, $x \in X$ avec $H = G_x$ et \mathcal{S} une slice en x . Alors*

(i) Il existe un G -morphisme qui est une rétraction $f : G(\mathcal{S}) \longrightarrow G(x)$, i.e que $f \circ \iota = Id_{G(x)}$ pour l'inclusion $\iota : G(x) \longrightarrow G(\mathcal{S})$, tel que $f^{-1}(x) = \mathcal{S}$.

(ii) Pour $g \in G$, si $g \cdot \mathcal{S} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, alors $g \in H$.

DÉMONSTRATION. (i) On définit l'application $f : G(\mathcal{S}) \longrightarrow G(x)$ par $f(g \cdot s) = g \cdot x$ pour chaque $g \cdot s \in G(\mathcal{S})$. Cette application continue est G -équivariante car pour chaque $g' \in G$ et $g \cdot s \in G(\mathcal{S})$, $g' \cdot f(g \cdot s) = g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x = f((g'g) \cdot s) = f(g' \cdot (g \cdot s))$. Avec l'inclusion $\iota : G(x) \longrightarrow G(\mathcal{S})$ donnée par $\iota(g \cdot x) = g \cdot x$, $(f \circ \iota)(g \cdot x) = f(g \cdot x) = g \cdot x = Id_{G(x)}(g \cdot x)$ pour chaque $g \cdot x \in G(x)$ et donc f est une rétraction. Finalement, on note que $f(g \cdot s) = x$ si et seulement si $g \in H$ si et seulement si $g \cdot s \in G_x(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Donc $f^{-1}(x) = \mathcal{S}$.

(ii) Soit $g \in G$ et $s \in \mathcal{S}$ tels que $g \cdot s \in g \cdot \mathcal{S} \cap \mathcal{S}$. Alors $g \cdot s \in \mathcal{S}$ implique que pour la rétraction f de (i), $x = f(g \cdot s) = g \cdot f(s) = g \cdot x$ et donc $g \in H = G_x$. \square

Corollaire 1.3.1. Soit X un G -espace, $Y \subseteq X$ une slice en $x \in Y$ avec $H = G_x$. Alors il existe un homéomorphisme $\psi : Y/H \longrightarrow G(Y)/G$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G *_H Y & \xrightarrow{\phi} & G(Y) \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y/H & \xrightarrow{\psi} & G(Y)/G \end{array}$$

où $\pi_2 : G *_H Y \longrightarrow Y/H$ est la projection $\pi_2([g, y]) = Hy$ et où π est la restriction de $\pi : X \longrightarrow X/G$ à $G(Y)$.

DÉMONSTRATION. On vérifie d'abord que la projection $\pi_2 : G *_H Y \longrightarrow Y/H$ est correctement définie. Si $[g, y] = [g', y']$, alors il existe un $h \in H$ tel que $y' = h \cdot y$ et donc $\pi_2([g, y]) = Hy = Hy' = \pi_2([g', y'])$. On définit donc l'application $\psi : Y/H \longrightarrow G(Y)/G$ pour chaque $Hy \in Y/H$ par

$$\psi(Hy) = \psi(\pi_2([e, y])) = (\psi \circ \pi_2)([e, y]) := (\pi \circ \phi)([e, y]) = \pi(y) = Gy$$

Cette application est correctement définie car $Hy = Hy'$ implique qu'il existe un $h \in H \subseteq G$ tel que $y' = h \cdot y$ et donc $\psi(Hy) = Gy = Gy' = \psi(Hy')$. Pour la surjectivité, on remarque que pour chaque $Gy \in G(Y)/G$, $Hy \in Y/H$ et

$\psi(Hy) = Gy$. On montre que cette application est injective. Soit $Hy, Hy' \in Y/H$ tels que $\psi(Hy) = \psi(Hy')$. On a donc que $Gy = Gy'$ et ainsi il existe un $g \in G$ tel que $y' = g \cdot y \in Y$. Or, par la proposition 1.3.1 (ii), cela implique que $g \in H$ et ainsi $Hy = Hy'$. Puisque ϕ est un homéomorphisme et que π est ouverte (proposition 1.1.1 (i)), il suffit de montrer que l'application π_2 est ouverte pour avoir que ψ et son inverse sont continues. Soit $[K, \mathcal{U}]$ un ouvert de $G *_H Y$. Alors $\pi_2([K, \mathcal{U}]) = H \cdot \mathcal{U}$. Or, \mathcal{U} est un ouvert de Y implique que $H(\mathcal{U}) = \pi_H^{-1}(H \cdot \mathcal{U})$ est un ouvert de Y et donc $H \cdot \mathcal{U}$ est un ouvert de Y/H . Ainsi, l'application π_2 est ouverte et on obtient que ψ est un homéomorphisme. \square

Corollaire 1.3.2. *Soit X un G -espace avec $x \in X$ tel que $G_x = \{e\}$. Alors pour S une slice en x , $S \cong G(S)/G$.*

DÉMONSTRATION. Par le corollaire précédent, $S/G_x \cong G(S)/G$. Or, $G_x = \{e\}$ nous donne que $S \cong S/G_x \cong G(S)/G$. \square

Corollaire 1.3.3. *Soit X un G -espace avec $Y \subseteq X$ un sous-ensemble G -stable pour lequel chaque $y \in Y$ possède un groupe d'isotropie triviale, i.e. que pour chaque $y \in Y$, $G_y = \{e\}$. Alors $\pi|_Y : Y \rightarrow Y/G$ est un homéomorphisme local.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque $y \in Y$, soit S une slice en y . En prenant $\mathcal{U} = S \cap Y$, un ouvert qui contient y , on prétend que $\pi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \pi(\mathcal{U})$ est un homéomorphisme. Si w et $g \cdot w \in \mathcal{U}$, alors la proposition 1.3.1 donne que $g \in G_w = \{e\}$ et l'application est injective. Comme l'application $\pi|_{\mathcal{U}}$ est surjective, continue et ouverte, elle est un homéomorphisme. D'où le résultat. \square

Pour $x \in X$ un G -espace avec $H = G_x$, on remarque que l'action du normalisateur $N_G(H)$ sur $X^{<H>}$ nous donne une action de $N_G(H)/H$ sur $X^{<H>}$ via $gH \cdot x = g \cdot x$ pour chaque $gH \in N_G(H)/H$ et $x \in X^{<H>}$. En effet, cette action est correctement définie puisque $gH = g'H$ si et seulement si $g'^{-1}g \in H$ si et seulement si $g \cdot x = g' \cdot x$.

Proposition 1.3.2. Soit X un G -espace avec $x \in X$ et $H = G_x$. L'application

$$\phi : G/H *_{N_G(H)/H} X^{<H>} \longrightarrow X^{(H)}$$

$$[gH, x] \longmapsto g \cdot x$$

est un homéomorphisme.

DÉMONSTRATION. On montre que l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\psi : G/H *_{N_G(H)/H} X^{<H>} \longrightarrow G(X^{<H>}) = X^{(H)}$$

$$[gH, x] \longmapsto g \cdot x$$

On vérifie d'abord que cette application est injective. Soit $[gH, x], [g'H, x'] \in G/H *_{N_G(H)/H} X^{<H>}$ tels que $g \cdot x = \psi([gH, x]) = \psi([g'H, x']) = g' \cdot x'$. Ainsi $x' = g'^{-1}g \cdot x$ et on remarque que $H = G_{x'} = (g'^{-1}g)G_x(g'^{-1}g)^{-1} = (g'^{-1}g)H(g'^{-1}g)^{-1}$ donc $g'^{-1}g \in N_G(H)$. Alors, $[gH, x] = [gH(g'^{-1}g)^{-1}H, g'^{-1}gH \cdot x] = [g', x']$ et l'application est injective. Pour montrer la surjectivité, soit $x \in X^{(H)}$. Puisque $(G_x) = (H)$, il existe un $g \in G$ tel que $G_x = gHg^{-1}$. Alors, $G_{g^{-1}x} = g^{-1}G_xg = g^{-1}gHg^{-1}g = H$ donc $g^{-1}x \in X^{<H>}$ et $\psi([gH, g^{-1} \cdot x]) = x$. Pour montrer que cette application est continue, on observe qu'elle fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\mu} & G(X) \\ \pi_H \downarrow & \nearrow \psi & \\ (G \times X)/H & & \end{array}$$

Par la propriété universelle, elle est alors continue. On montre que l'inverse est continue. Soit $[KH, \mathcal{U}]$ un ouvert de $G/H *_{N_G(H)/H} X^{<H>}$. Comme pour chaque élément du groupe, l'action est un homéomorphisme, $\psi([KH, \mathcal{U}]) = K(\mathcal{U})$ est un ouvert de $X^{(H)}$. On a donc un homéomorphisme $\psi : G/H *_{N_G(H)/H} X^{<H>} \longrightarrow G(X^{<H>}) = X^{(H)}$. \square

Corollaire 1.3.4. L'homéomorphisme de la proposition précédente nous donne un homéomorphisme local

$$X^{<H>} \stackrel{\text{local}}{\cong} X^{<H>} / (N_G(H)/H)$$

DÉMONSTRATION. La proposition nous dit en fait que $X^{<H>}$, un $N_G(H)/H$ -espace, est une slice en $x \in X^{<H>} \subseteq X^H$. Comme pour chaque $x \in X^{<H>}$, $gH \cdot x = g \cdot x = x$ si et seulement si $g \in H$ si et seulement si $gH = H$. Donc $(N_G(H)/H)_x = H$ et ainsi chaque point de $X^{<H>}$ possède un groupe d'isotropie trivial. En appliquant le corollaire 1.3.3, $X^{<H>} \cong^{local} X^{<H>}/(N_G(H)/H)$. \square

1.4. ACTIONS LINÉAIRES SUR DES ESPACES VECTORIELS

Maintenant, on veut ajouter une structure algébrique à notre espace topologique. On considère alors V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . De plus, par une action d'un groupe fini G sur V nous entendons une action *linéaire* sur V , i.e. une action qui est K -linéaire : pour tout $\lambda, \mu \in K$ et $u, v \in V$, alors pour chaque $g \in G$

$$g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda(g \cdot u) + \mu(g \cdot v)$$

En terme de la théorie des représentations, on dit que V est une *représentation* de G ou que V est un KG -module de type fini.

Pour une action linéaire de G sur un K -espace vectoriel V , on obtient naturellement une action sur son dual V^* . Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de V et $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ la base duale de V^* telle que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. De l'action linéaire de G sur V on obtient une action linéaire de G sur V^* qui est donnée par

$$g \cdot x^* = x^* \circ g^{-1} \in V^*$$

pour chaque $g \in G$ et $x^* \in V^*$. En effet, on a que pour $g, g' \in G$ et $x^* \in V^*$,

$$\begin{aligned} (gg') \cdot x^* &= x^* \circ (gg')^{-1} = x^* \circ (g'^{-1}g^{-1}) = (x^* \circ g'^{-1}) \circ g^{-1} = (g' \cdot x^*) \circ g^{-1} \\ &= g \cdot (g' \cdot x^*) \end{aligned}$$

Cette action est linéaire car pour chaque $g \in G$, $x^*, y^* \in V^*$ et $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned} g \cdot (\alpha x^* + \beta y^*) &= (\alpha x^* + \beta y^*) \circ g^{-1} = \alpha(x^* \circ g^{-1}) + \beta(y^* \circ g^{-1}) \\ &= \alpha(g \cdot x^*) + \beta(g \cdot y^*) \end{aligned}$$

1.4.1. Topologie de Zariski

Pour un espace vectoriel $V \cong K^n$ avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on sait que V possède en particulier la topologie usuelle de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Or, la structure algébrique de l'espace vectoriel nous permet d'y définir une autre topologie.

Soit $V \cong K^n$ avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un espace vectoriel réel ou complexe. Pour $I \trianglelefteq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal de l'anneau des polynômes $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, on note alors la *sous-variété affine* associée par

$$\mathcal{V}(I) = \{v \in V \mid f(v) = 0 \forall f \in I\}$$

Définition 1.4.1. Soit $V \cong K^n$ un K -espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On définit la topologie de Zariski sur V en prenant comme fermés pour cette topologie les sous-variétés affines.

Proposition 1.4.1. Ceci définit une topologie sur $V \cong K^n$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On vérifie que

- (i) \emptyset et K^n sont des ouverts.
- (ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ est ouvert pour chaque U_λ ouvert.
- (iii) $\bigcap_{i=1}^s U_i$ est ouvert pour chaque U_λ ouvert.

DÉMONSTRATION. (i) On considère les idéaux de l'anneau de polynômes $0 \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et $I = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Alors $\mathcal{V}(0) = K^n$ et $\mathcal{V}(I) = \emptyset$ sont des fermés. En passant au complément, on a que \emptyset et K^n sont des ouverts.

(ii) Soit les ouverts \mathcal{U}_λ pour chaque $\lambda \in \Lambda$. On pose alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$ $\mathcal{U}_\lambda^C = \mathcal{V}_\lambda = \mathcal{V}(I_\lambda)$, avec I_λ des idéaux de $K[V]$. Pour montrer que $\bigcup_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ est ouvert, on montre que $(\bigcup_\lambda \mathcal{U}_\lambda)^C = \bigcap_\lambda \mathcal{V}_\lambda$ est fermé. On note que $\bigcap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$. En effet, soit $v \in \bigcap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda)$, i.e. $v \in \mathcal{V}(I_\lambda)$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Donc, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $f(v) = 0$ pour tout $f \in I_\lambda$. Ainsi, pour tout $f = \sum f_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$, $f(v) = \sum_\lambda f_\lambda(v) = 0$ et donc $v \in \mathcal{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$. Pour montrer l'autre inclusion, soit $v \in \mathcal{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, alors pour tout $f \in I_\lambda \subseteq \sum_\lambda I_\lambda$, $f(v) = 0$ et donc $v \in \mathcal{V}(I_\lambda)$. On obtient que $v \in \bigcap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda)$ d'où l'égalité. $(\bigcup_\lambda \mathcal{U}_\lambda)^C$ est donc un fermé.

(iii) Soit les ouverts \mathcal{U}_i pour $i = 1, 2, \dots, s$. On note $\mathcal{U}_i^C = \mathcal{V}_i = \mathcal{V}(I_i)$ les fermés pour chaque i avec I_i des idéaux de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On montre que $(\bigcap_i \mathcal{U}_i)^C$ est fermé en vérifiant que $(\bigcap_i \mathcal{U}_i)^C = \bigcup_i \mathcal{V}(I_i) = \mathcal{V}(\bigcap_i I_i)$. Soit $v \in \bigcup_i \mathcal{V}(I_i)$. Pour $v \in \mathcal{V}(I_k)$, alors pour chaque $f \in \bigcap_i I_i \subseteq I_k$, $f(v) = 0$ et donc $v \in \mathcal{V}(\bigcap_i I_i)$. Soit $v \in \mathcal{V}(\bigcap_i I_i)$ et supposons que $v \notin \mathcal{V}(I_k)$ pour chaque $k = 1, 2, \dots, s-1$. On montre que $v \in \mathcal{V}(I_s)$. Or $v \notin \mathcal{V}(I_k)$ signifie que pour chaque $k = 1, 2, \dots, s-1$, il existe un $f_k \in I_k$ tel que $f_k(v) \neq 0$. Donc, pour chaque $f_s \in I_s$, $f := f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_{s-1} \cdot f_s \in \bigcap_i I_i$ et ainsi $0 = f(v) = f_1(v) \cdot f_2(v) \cdot \dots \cdot f_{s-1}(v) \cdot f_s(v)$. Puisqu'aucun des $s-1$ premiers termes n'est égal à 0, $f_s(v) = 0$ et ainsi $v \in \mathcal{V}(I_s)$. Donc, $(\bigcap_i \mathcal{U}_i)^C$ est fermé et on a le résultat. \square

Remarque 1.4.1. (i) Pour K^n avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les fermés pour cette topologie sont les ensembles de la forme :

$$\mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \{x \in K^n \mid f_i(x) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, s\}$$

où les f_i sont des polynômes de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. En effet, comme l'anneau de polynômes $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est noethérien, tout idéal est généré par un nombre fini de polynômes.

(ii) Pour cette topologie, on remarque que les applications polynomiales $f : K^n \longrightarrow K^m$ sont continues. Soit $\mathcal{U} \subseteq K^m$ un ouvert. Alors $V = \mathcal{U}^c$ est un fermé donc $V = \mathcal{V}(I)$ avec $I \trianglelefteq K[x_1, x_2, \dots, x_m]$. Puisque $K[x_1, x_2, \dots, x_m]$ est noethérien, soit h_1, h_2, \dots, h_s des générateurs de I , i.e. que $I = \langle h_1, h_2, \dots, h_s \rangle$. Pour $\mathcal{W} := f^{-1}(V)$, on montre que $\mathcal{W} = \mathcal{V}(h_1 \circ f, h_2 \circ f, \dots, h_s \circ f)$. Soit $w \in \mathcal{W}$. Alors $f(w) \in V = \mathcal{V}(I)$ et donc pour chaque i , $(h_i \circ f)(w) = h_i(f(w)) = 0$ et ainsi $w \in \mathcal{V}(h_1 \circ f, h_2 \circ f, \dots, h_s \circ f)$. Soit maintenant $w \in \mathcal{V}(h_1 \circ f, h_2 \circ f, \dots, h_s \circ f)$. Pour chaque i , $0 = (h_i \circ f)(w) = h_i(f(w))$ donc $f(w) \in V$ et ainsi $w \in \mathcal{W} = f^{-1}(V)$. On a donc que $\mathcal{W} = f^{-1}(V) = (f^{-1}(\mathcal{U}))^c$ est un fermé au sens de Zariski et ainsi $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert. Donc l'application polynomiale est continue.

(iii) La topologie usuelle d'un K -espace vectoriel est plus fine que la topologie de Zariski, i.e. que si \mathcal{U} est un ouvert pour la topologie de Zariski, alors \mathcal{U} est

un ouvert pour la topologie usuelle. En effet, soit \mathcal{U} un ouvert de K^n pour la topologie de Zariski. Alors $\mathcal{W} = \mathcal{U}^c$ est un fermé et donc $\mathcal{W} = \mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s)$ avec les $f_i \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Soit $\{x_i\} \subseteq \mathcal{W}$ une suite qui converge (pour la topologie usuelle) vers $x \in K^n$. Alors pour chaque k et i , $f_k(x_i) = 0$ et donc $\underbrace{f_k(x_i)}_{=0} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ pour chaque k . Ainsi, $x \in \mathcal{W}$ et \mathcal{W} est fermé donc \mathcal{U} est ouvert pour la topologie usuelle.

On s'intéresse aux types de strates d'un G -espace V , où V est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie muni de la topologie de Zariski.

Proposition 1.4.2. Soit $v \in V$ avec $H = G_v$,

- (i) V^H est fermé pour la topologie de Zariski.
- (ii) $V^{<H>}$ est ouvert dans V^H pour la topologie de Zariski.
- (iii)

$$\overline{(V/G)^{(H)}}^Z = \bigcup_{(H_i) \geq (H)} (V/G)^{(H_i)}$$

où $\overline{(V/G)^{(H)}}^Z$ désigne la fermeture au sens de Zariski.

DÉMONSTRATION. (i) On a que $V^H \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel de V . Pour chaque $h \in H$, $h \cdot 0 = 0 \in V^H$ et pour tout $a, b \in V^H$, pour chaque $h \in H$, $h \cdot (a - b) = h \cdot a - h \cdot b = a - b \in V^H$. On a donc un sous-espace vectoriel de V . Soit alors $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ une base du sous-espace vectoriel V^H que l'on complète pour avoir une base de V avec $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\}$. En considérant le polynôme $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=m+1}^n x_k^2 \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, alors $f(x) = 0$ si et seulement si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V^H$. Donc $V^H = \mathcal{V}(f)$ et est un fermé pour la topologie de Zariski.

(ii) Bien sûr par définition on a que $V^{<H>} \subseteq V^H$. Avec la remarque 1.2.1 (iii), le complément de $V^{<H>}$ dans V^H est donné par

$$(V^{<H>})^c = V^H \setminus V^{<H>} = \bigcup_{H' \not\geq H} V^{H'}$$

Or, les sous-espaces $V^{H'}$ sont fermés par (i) et en nombre fini car il y a un nombre fini de tels sous-groupes H' . Leur union est un fermé et ainsi $(V^{<H>})^c$ est fermé

donc $V^{<H>}$ est ouvert.

(iii) Pour chaque $(H') \geq (H)$, on a que $V^{(H')} \subseteq V^{(H)}$ donc

$$(V/G)^{(H')} = \pi(V^{(H')}) \subseteq \pi(V^{(H)}) = (V/G)^{(H)}$$

On peut ainsi prendre l'union

$$\bigcup_{(H') \geq (H)} (V/G)^{(H')} \subseteq (V/G)^{(H)} \subseteq \overline{(V/G)^{(H)}}^Z$$

On montre maintenant que si $(V/G)^{<G_v>}$ est dans la fermeture de $(V/G)^{(H)}$, alors $(G_v) \geq (H)$. En effet, nous avons que

$$V^{(H)} = \bigcup_{(H')=(H)} V^{<H'>} \subseteq \bigcup_{(H')=(H)} V^{H'} \subseteq \bigcup_{(H') \leq (H)} V^{H'}$$

Or, les $V^{<H'>}$ sont ouverts par (ii) et donc leur union, qui est finie, est aussi ouverte. De plus, les $V^{H'}$ sont fermés et ainsi leur union l'est aussi. Puisque l'application π est fermée, on a que $(V/G)^{(H)}$ est inclu dans le fermé $\bigcup_{(H')=(H)} (V/G)^{H'}$

$$(V/G)^{(H)} \subseteq \bigcup_{(H')=(H)} (V/G)^{H'} \subseteq \bigcup_{(H') \leq (H)} (V/G)^{H'}$$

On a donc que la fermeture de $(V/G)^{(H)}$, qui est le plus petit fermé qui le contient, est inclu dans $\bigcup_{(H')=(H)} (V/G)^{H'}$

$$\overline{(V/G)^{(H)}}^Z \subseteq \bigcup_{(H')=(H)} (V/G)^{H'} \subseteq \bigcup_{(H') \leq (H)} (V/G)^{H'}$$

Donc, si $(V/G)^{<G_v>}$ est dans la fermeture de $(V/G)^{(H)}$, alors $(G_v) \geq (H)$.

On a donc que

$$(V/G)^{<G_v>} = \pi(V^{<G_v>}) \subseteq \pi(V^{G_v}) \subseteq \pi(V^H) = \bigcup_{(H') \geq (H)} (V/G)^{(H')}$$

□

On obtient un résultat équivalent pour la topologie usuelle de V .

Proposition 1.4.3. Soit $v \in V$ avec $H = G_v$.

(i) V^H est fermé pour la topologie usuelle de V .

(ii) $V^{<H>}$ est ouvert dans V^H pour la topologie usuelle de V .

(iii)

$$\overline{(V/G)^{(H)}} = \bigcup_{(H') \geq (H)} (V/G)^{(H')}$$

où $\overline{(V/G)^{(H)}}$ désigne la fermeture au sens de la topologie usuelle de V .

DÉMONSTRATION. (i) et (ii) sont obtenus de la proposition 1.4.2 et du fait qu'un ouvert $\mathcal{U} \subseteq V$ pour la topologie de Zariski est un ouvert pour la topologie usuelle de $V \cong K^n$. On montre (iii) en reprenant la démonstration de la proposition 1.4.2(iii). \square

Soit H_0 le noyau de G pour l'action sur V , i.e que $h \cdot v = v$ pour chaque $h \in H_0$ et $v \in V$. Ce sous-groupe est inclu dans tout groupe d'isotropie G_v pour chaque $v \in V$. Donc $(e) \leq (H_0) \leq (G_v)$ pour chaque $v \in V$. On dit que (H_0) est le type d'orbite *minimal* de G pour la relation \leq .

Proposition 1.4.4. *Soit G un groupe fini, V un KG -module de type fini et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (H) est minimal pour \leq .

(ii) $V^{(H)}$ est Zariski-dense dans V .

(iii) $V^{(H)}$ est ouvert pour la topologie de Zariski.

DÉMONSTRATION. On montre que (i) est équivalent à (ii). Soit H un sous-groupe de G qui est minimal pour la relation d'ordre \leq , i.e que pour chaque groupe d'isotropie H' , $(H) \leq (H')$. Alors $\overline{V^{(H)}} \stackrel{\text{Prop 1.4.2c}}{=} \bigcup_{(H') \geq (H)} V^{(H')} = V$ et $V^{(H)}$ est dense. Soit maintenant $V^{(H)}$ qui est dense et supposons au contraire que H n'est pas minimal pour la relation d'ordre \leq . Soit alors $(H') \leq (H)$. On a donc que $V^{(H')}$ n'est pas inclu dans $\overline{V^{(H)}} = \bigcup_{(\tilde{H}) \geq (H)} V^{(\tilde{H})}$. Mais $\overline{V^{(H)}} = V$ ce qui est une contradiction. Donc (i) est équivalent à (ii).

On montre que (i) est équivalent à (iii). Soit H un sous-groupe de G qui est minimal pour la relation d'ordre \leq . Alors

$$\overline{V^{(H)}^c} = \overline{\bigcup_{(H') \neq (H)} V^{(H')}} = \overline{\bigcup_{(H') > (H)} V^{(H')}} = \bigcup_{(H') > (H)} V^{(H')} = V^{(H)}^c$$

Donc $V^{(H)^c}$ est fermé et ainsi $V^{(H)}$ est ouvert. Supposons maintenant que $V^{(H)}$ est ouvert et que H_0 soit un élément minimal. Alors

$$\begin{aligned}\overline{V^{(H)^c}} &= \overline{\bigcup_{(H') \neq (H)} V^{(H')}} = \overline{\left(\bigcup_{(H_0) \leq (H') < (H)} V^{(H')} \right) \cup \left(\bigcup_{(H') > (H)} V^{(H')} \right)} \\ &= \bigcup_{(H_0) \leq (H')} V^{(H')} = V\end{aligned}$$

Donc $V^{(H)}$ est dense et donc H est minimal. \square

Par un argument similaire et avec le fait que la topologie usuelle est plus fine que celle de Zariski, on a que

Corollaire 1.4.1. *Soit G un groupe fini, V un KG -module de type fini et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) (H) est minimal pour \leq .
- (ii) $V^{(H)}$ est dense dans V pour la topologie usuelle.
- (iii) $V^{(H)}$ est ouvert pour la topologie usuelle de V .

\square

On reformule donc avec ces propriétés une notion de stratification des G -espaces et des espaces d'orbites associés.

Corollaire 1.4.2. *Soit G un groupe fini qui agit sur un K -espace vectoriel V avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors pour H_0, H_1, \dots et H_s les sous-groupes d'isotropie distincts de G ,*

- (i) $V = \bigcup_i V^{(H_i)}$ avec les $V^{(H_i)}$ tous disjoints.
- (ii) Pour $i \neq j$, $V^{(H_i)} \cap \text{adh}(V^{(H_j)}) \neq \emptyset$ si et seulement si $(H_i) > (H_j)$ si et seulement si $V^{(H_i)} \subseteq \text{adh}(V^{(H_j)})$.

DÉMONSTRATION. Il ne reste qu'à vérifier (ii). En fait, $V^{(H_i)} \cap \text{adh}(V^{(H_j)}) \neq \emptyset$ si et seulement si il existe un $x \in V^{(H_i)} \cap \text{adh}(V^{(H_j)})$, si et seulement si $(G_x) = (H_i)$ et $(G_x) > (H_j)$ car $\text{adh}(V^{(H_j)}) = \overline{V^{(H_j)}} \setminus V^{(H_j)} = \bigcup_{(H') \geq (H_j)} V^{(H')} \setminus V^{(H_j)} = \bigcup_{(H') > (H_j)} V^{(H')}$. Ainsi, ceci est équivalent à $(H_i) > (H_j)$, ce qui équivaut à $V^{(H_i)} \subseteq \bigcup_{(H') > (H_j)} V^{(H')} = \text{adh}(V^{(H_j)})$. \square

De même, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1.4.3. Soit G un groupe fini qui agit sur un K -espace vectoriel V avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors pour H_0, H_1, \dots et H_s les sous-groupes d'isotropie distincts de G ,

(i) $V/G = \bigcup_i (V/G)^{(H_i)}$ avec les $(V/G)^{(H_i)}$ tous disjoints.

(ii) Pour $i \neq j$, $(V/G)^{(H_i)} \cap \text{adh}((V/G)^{(H_j)}) \neq \emptyset$ si et seulement si $(H_i) > (H_j)$ si et seulement si $(V/G)^{(H_i)} \subseteq \text{adh}((V/G)^{(H_j)})$.

□

Par exemple, pour l'action naturelle de D_4 sur \mathbb{R}^2 , on avait obtenu les types d'orbites (figure 1.5) dont les inclusions donnent la stratification de l'espace d'or-

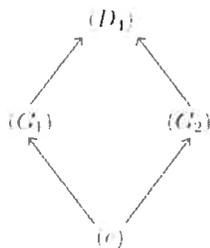


FIG. 1.5

bites (figure 1.6).

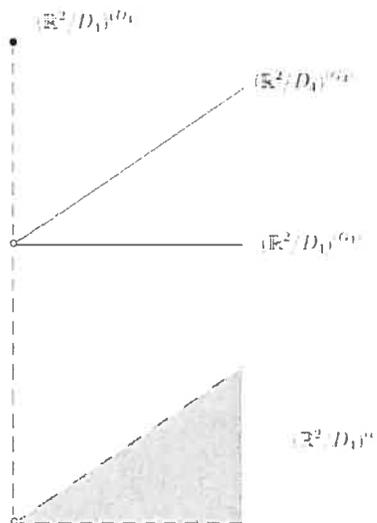


FIG. 1.6

Chapitre 2

POLYNÔMES INVARIANTS ET QUOTIENT ALGÈBRIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'espace d'orbites pour l'action d'un groupe fini sur un espace topologique. Maintenant, nous aimerions y ajouter une structure algébrique. Nous considérerons les actions linéaires d'un groupe fini sur une sous-variété affine d'un espace vectoriel réel ou complexe. En fait, on montrera que si l'action n'est pas linéaire, alors on peut choisir un nouvel espace vectoriel où l'action est linéaire, dans lequel se trouve la sous-variété affine à isomorphisme près. Le but de ce chapitre est de définir la notion de quotient algébrique. Ce quotient, qui sera de nature algébrique, nous donnera un moyen de réaliser l'espace d'orbites comme sous-ensemble semi-algébrique d'une variété affine. Nous pourrons donc utiliser la structure semi-algébrique induite de cette variété affine pour travailler sur l'espace d'orbites.

Dans la première section, on introduit quelques notions de géométrie algébrique. En particulier, on établira le lien entre les morphismes de variétés affines et les homomorphismes des anneaux de coordonnées associés. Dans la seconde section, on s'intéresse à l'anneau des polynômes qui sont invariants pour l'action du groupe. On verra entre autres que cet anneau est généré par un nombre fini de polynômes homogènes et qu'il est un anneau de coordonnées. La variété affine associée à cet anneau de coordonnées sera le quotient algébrique. De plus, on utilisera les générateurs de cet anneau pour réaliser l'espace d'orbites comme sous-ensemble du quotient algébrique. Dans les sections suivantes, on traitera

séparément le cas où l'espace vectoriel est complexe puis réel. On y verra en particulier que pour le cas complexe, l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique. Pour le cas réel, l'espace d'orbites sera un sous-ensemble semi-algébrique du quotient algébrique. Ainsi, les inégalités définissant l'espace d'orbites seront les inégalités qui définissent cette région semi-algébrique du quotient algébrique. On y construira aussi un produit scalaire invariant pour l'action du groupe, ce qui permettra de le voir comme un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$. Dans la dernière section, on construira la complexification du cas réel. Ceci permettra en fait d'avoir un espace d'orbites complexe contenant l'espace d'orbites réel qui nous intéresse.

2.1. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On introduit quelques notions de géométrie algébrique.

2.1.1. Variétés affines et anneaux de coordonnées

Définition 2.1.1. Soit $I \trianglelefteq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal de polynômes. On note alors la variété affine associée par

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}$$

Pour un sous-ensemble $\mathcal{X} \subseteq K^n$, on définit l'idéal des polynômes qui s'annulent sur \mathcal{X} par

$$\mathcal{I}(\mathcal{X}) = \{f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in \mathcal{X}\}$$

On définit les applications entre des variétés affines de la façon suivante :

Définition 2.1.2. Soient $\mathcal{X} \subseteq K^n$ et $\mathcal{Y} \subseteq K^m$ deux variétés affines. Une application $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme de variétés affines si elle est la restriction d'une application polynomiale $F : K^n \rightarrow K^m$, c'est-à-dire que $f = F|_{\mathcal{X}}$, de la forme $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ avec les $f_i \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et telle que $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$.

Définition 2.1.3. Un morphisme de variétés affines $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme de variétés affines $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que $f \circ g = 1_{\mathcal{Y}}$ et $g \circ f = 1_{\mathcal{X}}$. On dit alors que les variétés affines \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont isomorphes et on le note par $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$.

Définition 2.1.4. Pour $\mathcal{X} \subseteq K^n$ une variété affine et $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ l'idéal associé, on définit l'anneau de coordonnées $K[\mathcal{X}]$ par

$$K[\mathcal{X}] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$$

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow K$ une application polynomiale. On a donc que $f(x) = F|_{\mathcal{X}}(x)$ pour un $F \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Or $F, G \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ définissent la même application sur \mathcal{X} si et seulement si $F(x) - G(x) = 0$ pour chaque $x \in \mathcal{X}$ ce qui revient à dire que $F - G \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Ainsi, on peut voir $K[\mathcal{X}] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$ comme l'anneau des fonctions polynomiales sur \mathcal{X} à valeurs dans K .

On observe le lien entre les morphismes de variétés affines et les homomorphismes entre les anneaux de coordonnées associés.

Théorème 2.1.1. Pour $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $\mathcal{X} \subseteq K^n$ et $\mathcal{Y} \subseteq K^m$ des variétés affines.

(i) Le morphisme $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ induit un homomorphisme de K -algèbres

$$\begin{aligned} f^* : K[\mathcal{Y}] &\longrightarrow K[\mathcal{X}] \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

(ii) Un homomorphisme de K -algèbres $\phi : K[\mathcal{Y}] \rightarrow K[\mathcal{X}]$ est de la forme $\phi = f^*$ pour un unique morphisme de variétés affines $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

DÉMONSTRATION. (i) On vérifie que cette application polynomiale est un homomorphisme de K -algèbres. Soit $g, h \in K[\mathcal{Y}]$ et $\lambda \in K$.

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f \equiv \lambda$$

$$f^*(g + h) = (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f = f^*(g) + f^*(h)$$

$$f^*(g \cdot h) = (g \cdot h) \circ f = (g \circ f) \cdot (h \circ f) = f^*(g) \cdot f^*(h)$$

$$f^*(\lambda \cdot g) = (\lambda \cdot g) \circ f = \lambda \cdot (g \circ f) = \lambda \cdot f^*(g)$$

Donc, on a un homomorphisme de K -algèbres.

(ii) Soit $\phi : K[\mathcal{Y}] \longrightarrow K[\mathcal{X}]$ un homomorphisme de K -algèbres. Avec $K[\mathcal{Y}] = K[y_1, y_2, \dots, y_m]/\mathcal{I}(\mathcal{Y})$ et $K[\mathcal{X}] = K[x_1, x_2, \dots, x_m]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$, on pose $\bar{f}_i = \phi(\bar{y}_i)$ pour chaque $\bar{y}_i \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]/\mathcal{I}(\mathcal{Y}) = K[\mathcal{Y}]$ où \bar{y}_i représente la classe d'équivalence de y_i dans $K[\mathcal{Y}]$. Soit pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, $f_i \in K[x_1, x_2, \dots, x_m]$ un représentant des classes d'équivalences des $\bar{f}_i \in K[\mathcal{X}]$. On définit l'application polynomiale

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \end{aligned}$$

On prétend que l'image de \mathcal{X} par f est dans \mathcal{Y} . Pour cela il suffit de montrer que $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}$. Soit $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$. On a que pour chaque $x \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = g(\phi(y_1)(x), \phi(y_2)(x), \dots, \phi(y_m)(x)) \\ &= \phi(g)(x) \end{aligned}$$

Or, $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Y})$ signifie que sa classe d'équivalence dans $K[\mathcal{Y}] = K[y_1, y_2, \dots, y_m]/\mathcal{I}(\mathcal{Y})$ est nulle. L'application ϕ étant un homomorphisme d'algèbres, $\phi(g)$ est égal à zéro donc $0 = \phi(g)(x) = g(f(x))$ et ainsi $f(x)$ est dans \mathcal{Y} .

Finalement, il reste à vérifier que notre application $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ vérifie $f^* = \phi$ et qu'elle est unique. Or, par construction, on a que pour chaque $g \in K[\mathcal{Y}]$,

$$\begin{aligned} \phi(g) &= g(\phi(y_1), \phi(y_2), \dots, \phi(y_m)) = g(f_1, f_2, \dots, f_m) \\ &= g \circ f = f^*(g) \end{aligned}$$

Donc $f^* = \phi$. Supposons que $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ soit une autre application polynomiale telle que $h^* = \phi$. Alors pour chaque i , $y_i \circ h = h^*(y_i) = \phi(y_i) = y_i \circ f$ et donc les polynômes sur chaque coordonnées de f et h sont les mêmes et ainsi $f = h$. \square

Il y a donc par ce résultat une bijection entre les morphismes de variétés affines \mathcal{X} et \mathcal{Y} et les homomorphismes de K -algèbres de $K[\mathcal{Y}]$ à $K[\mathcal{X}]$. On note de plus la functorialité de cette construction.

Proposition 2.1.1. Soit $\mathcal{W} \subseteq K^l$, $\mathcal{X} \subseteq K^m$ et $\mathcal{Y} \subseteq K^n$ des variétés affines et $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$, $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ des morphismes et $Id_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ l'identité. Alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

et

$$(Id_{\mathcal{Y}})^* = Id_{K[\mathcal{Y}]}$$

DÉMONSTRATION. Soit $p \in K[\mathcal{Y}]$, alors

$$(f^* \circ g^*)(p) = f^*(p \circ g) = (p \circ g) \circ f = p \circ (g \circ f) = (g \circ f)^*(p)$$

et

$$(Id_{\mathcal{Y}})^*(p) = p \circ Id_{\mathcal{Y}} = p = Id_{K[\mathcal{Y}]}(p)$$

□

Cela nous donne le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. Soit $\mathcal{X} \subseteq K^m$ et $\mathcal{Y} \subseteq K^n$ deux variétés affines. Alors $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y} \Leftrightarrow K[\mathcal{X}] \cong K[\mathcal{Y}]$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$. Alors il existe des morphismes $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tels que $f \circ g = Id_{\mathcal{Y}}$ et $g \circ f = Id_{\mathcal{X}}$. Par la proposition précédente, $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (Id_{\mathcal{Y}})^* = Id_{K[\mathcal{Y}]}$ et $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (Id_{\mathcal{X}})^* = Id_{K[\mathcal{X}]}$. Donc g^* et f^* sont des inverses et ainsi on a un isomorphisme de K -algèbres entre $K[\mathcal{X}]$ et $K[\mathcal{Y}]$.

Supposons maintenant que $K[\mathcal{X}] \cong K[\mathcal{Y}]$. Soit $\phi : K[\mathcal{Y}] \rightarrow K[\mathcal{X}]$ un isomorphisme entre les K -algèbres. Alors on a que $\phi \circ \phi^{-1} = Id_{K[\mathcal{X}]}$ et $\phi^{-1} \circ \phi = Id_{K[\mathcal{Y}]}$. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ les morphismes tels que $f^* = \phi$ et $g^* = \phi^{-1}$. On a donc que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \phi \circ \phi^{-1} = Id_{K[\mathcal{X}]} = (Id_{\mathcal{X}})^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = \phi^{-1} \circ \phi = Id_{K[\mathcal{Y}]} = (Id_{\mathcal{Y}})^*$. Or par unicité, $(f \circ g) = Id_{\mathcal{Y}}$ et $(g \circ f) = Id_{\mathcal{X}}$. Ainsi $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$. □

Ainsi, pour montrer que deux variétés affines sont isomorphes, il suffit de montrer que les anneaux de coordonnées sont isomorphes et vice versa. Une variété affine est donc déterminée, à isomorphisme près, par son anneau de coordonnées.

Proposition 2.1.2. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de variétés affines et $f^* : K[\mathcal{Y}] \rightarrow K[\mathcal{X}]$ l'homomorphisme d'algèbres associé. Alors f^* est injective $\Leftrightarrow f(\mathcal{X})$ est Zariski-dense dans \mathcal{Y} .*

DÉMONSTRATION. Supposons que f^* est injective mais qu'au contraire $\overline{f(\mathcal{X})}^Z \subsetneq \mathcal{Y}$. Comme $\overline{f(\mathcal{X})}^Z$ est un fermé pour la topologie de Zariski, soit $0 \neq I$ un idéal tel que $\overline{f(\mathcal{X})}^Z = \mathcal{V}(I)$. On a donc que $f(\mathcal{X}) \subseteq \overline{f(\mathcal{X})}^Z = \mathcal{V}(I)$. Soit $0 \neq g \in I$, alors pour chaque $x \in \mathcal{X}$,

$$0 = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = f^*(g)(x)$$

et ainsi $f^*(g) = 0$ donc $g \in \text{Ker } f^*$ ce qui contredit l'hypothèse que f^* est injective. Donc $\overline{f(\mathcal{X})}^Z = \mathcal{Y}$ et $f(\mathcal{X})$ est Zariski-dense.

Supposons maintenant que $f(\mathcal{X})$ est dense dans \mathcal{Y} pour la topologie de Zariski mais que f^* ne soit pas injective. Soit alors $0 \neq g \in \text{Ker } f^*$. Ainsi, pour chaque $x \in \mathcal{X}$,

$$0 = f^*(g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

et donc $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{V}(g)$. Alors $\overline{f(\mathcal{X})}^Z \subseteq \mathcal{V}(g)$ ce qui contredit le fait que $\overline{f(\mathcal{X})}^Z = \mathcal{Y}$. \square

2.1.2. G -variétés affines

Soit G un groupe fini et W un KG -module avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note la K -algèbre des polynômes sur W à valeurs dans K par $K[W]$. De l'action de G sur W , on obtient une action naturelle de G sur $K[W]$ via

$$g \cdot f = f \circ g^{-1}$$

pour chaque $g \in G$ et $f \in K[W]$. En effet, on a alors que $g \cdot (g' \cdot f) = g \cdot (f \circ g'^{-1}) = (f \circ g'^{-1}) \circ g^{-1} = f \circ (gg')^{-1} = (gg') \cdot f$.

Définition 2.1.5. Pour un polynôme $f \in K[W]$, on dit que f est G -invariant si pour chaque $g \in G$,

$$f(g \cdot w) = f(w)$$

On note la K -algèbre des polynômes G -invariants sur W par $K[W]^G$. En identifiant W à K^n , on obtient un isomorphisme $K[W] \cong K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et de même on a que $K[W]^G \cong K[x_1, x_2, \dots, x_n]^G$.

Définition 2.1.6. Soit W un KG -module de type fini et $\mathcal{X} \subseteq W \cong K^n$ une variété affine. On dira que \mathcal{X} est G -stable si l'action de G sur W induit une action sur \mathcal{X} , i.e. que $g \cdot x \in \mathcal{X}$ pour chaque $g \in G$ et $x \in \mathcal{X}$. On appelle une variété affine G -stable une G -variété affine.

Définition 2.1.7. Soit \mathcal{X} une G -variété affine, on définit l'espace d'orbites \mathcal{X}/G comme étant $\pi(\mathcal{X})$ pour l'application $\pi : W \longrightarrow W/G$ qui envoie un point sur son orbite.

Comme on a fait pour W/G , on munit \mathcal{X}/G de la topologie quotient provenant de l'application π .

Bien que l'on ait supposé jusqu'à présent que l'action du groupe est linéaire, on montre avec la proposition suivante que si un groupe fini agit sur une variété affine, il existe une variété affine isomorphe sur laquelle le groupe agit de façon linéaire.

Proposition 2.1.3. Soit G un groupe fini agissant sur une G -variété affine $\mathcal{X} \subseteq K^n$. Alors il existe un isomorphisme de variétés affines $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, avec une variété affine \mathcal{Y} dans un KG -module de type fini.

DÉMONSTRATION. Soit $R = K[\mathcal{X}]$ l'anneau de coordonnées de la variété affine \mathcal{X} . Soit $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ un ensemble de générateurs de cette algèbre et l'ensemble $\{h_1, h_2, \dots, h_m\} = \{g \cdot f_i \mid g \in G \text{ et } i = 1, 2, \dots, s\}$. Ainsi $R = K[h_1, h_2, \dots, h_m]$. Soit l'homomorphisme d'algèbres

$$\phi' : K[y_1, y_2, \dots, y_m] \longrightarrow K[h_1, h_2, \dots, h_m] = R$$

$$y_i \longmapsto h_i$$

de noyau I , l'idéal des relations des $\{h_i\}_{i=1,2,\dots,m}$. Comme l'application est surjective, on obtient un isomorphisme d'anneaux de coordonnées

$$\phi^* : K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I \longrightarrow K[h_1, h_2, \dots, h_m]$$

$$\tilde{y}_i \longmapsto h_i$$

qui induit un isomorphisme sur les variétés affines \mathcal{X} et $\mathcal{Y} = \mathcal{V}(I)$. En fait, cet isomorphisme est l'application $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ donnée par $\phi(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))$ pour chaque $x \in \mathcal{X}$ et d'inverse $\phi^{-1} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ telle que pour tout $y \in \mathcal{Y}$, $\phi^{-1}(y) = (y_1(y), y_2(y), \dots, y_m(y))$ (voir théorème 2.1.1(ii)).

De la construction des $\{h_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, l'action de G sur $\langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle_K$ est linéaire. Soit pour chaque $g \in G$, $g \cdot h_i = \sum_j [g]_{ij} h_j$ avec la matrice $[g] = ([g]_{ij})$ à coefficients dans K . On définit une action linéaire de G sur $\langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m \rangle_K$ par

$$g \cdot \tilde{y}_i = \sum_j [g]_{ij} \tilde{y}_j$$

pour chaque $g \in G$ et $i = 1, 2, \dots, m$.

Cette action permet de définir sur \mathcal{Y} une action linéaire de G donnée par

$$\begin{aligned} g \cdot y &= g \cdot (\tilde{y}_1(y), \tilde{y}_2(y), \dots, \tilde{y}_m(y)) := ((g \cdot \tilde{y}_1)(y), (g \cdot \tilde{y}_2)(y), \dots, (g \cdot \tilde{y}_m)(y)) \\ &= \left(\sum_j [g]_{1j} \tilde{y}_j(y), \sum_j [g]_{2j} \tilde{y}_j(y), \dots, \sum_j [g]_{mj} \tilde{y}_j(y) \right) \\ &= [g] \cdot \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(y) \\ \tilde{y}_2(y) \\ \dots \\ \tilde{y}_m(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour chaque $g \in G$ et $y = (\tilde{y}_1(y), \tilde{y}_2(y), \dots, \tilde{y}_m(y)) \in \mathcal{Y}$. □

2.2. POLYNÔMES INVARIANTS

Comme on le verra à la fin de cette section, pour G un groupe fini et W un KG -module de type fini avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le quotient algébrique $W//G$ peut être défini à l'aide de l'algèbre des polynômes G -invariants sur W à valeurs dans K . Dans cette section, nous étudierons la structure de cette algèbre. On débute

en introduisant l'opérateur de moyenne, qui se veut une projection de $K[W]$ sur $K[W]^G$. On utilisera cet opérateur entre autres pour le théorème de finitude de Hilbert, qui nous assure que l'algèbre des polynômes G -invariants est générée par un nombre fini de polynômes homogènes. Ensuite, on montrera que cette algèbre est en fait un anneau de coordonnées pour un idéal bien particulier. La variété affine déterminée par cet idéal sera ce que l'on appellera quotient algébrique.

2.2.1. Opérateur de moyenne

On rappelle que l'on travaille avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit G un groupe fini et W un KG -module de type fini. Le fait que G soit un groupe fini nous permet de prendre la "moyenne" d'un polynôme. Ce processus très utile permet de construire à partir de polynômes quelconques des polynômes G -invariants. On utilise ce principe pour obtenir l'opérateur de moyenne.

Définition 2.2.1. On définit l'opérateur de moyenne comme étant l'application

$$\begin{aligned} \rho : K[W] &\longrightarrow K[W]^G \\ f &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (f \circ g) \end{aligned}$$

On remarque que pour chaque $f \in K[W]$, l'image $\rho(f)$ est bien un polynôme G -invariant. En effet, pour $g \in G$ et $w \in W$,

$$\begin{aligned} \rho(f)(g \cdot w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} \in G} f(\tilde{g} \cdot (g \cdot w)) = \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} \in G} f((\tilde{g} \cdot g) \cdot w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' = \tilde{g} \cdot g \in G} f(g' \cdot w) = \rho(f)(w) \end{aligned}$$

De plus, cette application est égale à l'identité lorsque restreinte sur $K[W]^G$. Si $f \in K[W]^G$, alors pour chaque $w \in W$

$$\rho(f)(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(w) = f(w)$$

Cet opérateur est en fait une projection de $K[W]$ sur $K[W]^G$. De plus, il préserve la structure de KG -module et de $K[W]^G$ -module de $K[W]$.

Lemme 2.2.1. Pour chaque $p, q \in K[W]$, $r \in K[W]^G$, $g \in G$ et $\lambda \in K$, on a que

$$\rho(\lambda \cdot p) = \lambda \cdot \rho(p)$$

$$\rho(r \cdot p) = r \cdot \rho(p)$$

$$\rho(p + q) = \rho(p) + \rho(q)$$

et

$$\rho(g \cdot p) = \rho(p) = g \cdot \rho(p)$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $w \in W$,

$$\rho(\lambda \cdot p)(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\lambda \cdot p(g \cdot w)) = \frac{\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} (p(g \cdot w)) = \lambda \cdot \rho(p)(w)$$

$$\begin{aligned} \rho(r \cdot p)(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (r(g \cdot w) \cdot p(g \cdot w)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r(w) \cdot p(g \cdot w) \\ &= r(w) \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p(g \cdot w) \right) = r(w) \cdot \rho(p)(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(p + q)(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (p + q)(g \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p(g \cdot w) + q(g \cdot w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p(g \cdot w) + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} q(g \cdot w) \\ &= \rho(p)(w) + \rho(q)(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(g \cdot p)(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (g \cdot p)(g' \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} p((g^{-1}g') \cdot w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} = g^{-1}g' \in G} p(\tilde{g} \cdot w) = \rho(p)(w) = (g \cdot \rho(p))(w) \end{aligned}$$

□

2.2.2. Générateurs de $K[\mathcal{X}]^G$

Soit G un groupe fini et W un KG -module. Le théorème suivant est très important. Il nous garantit en effet que l'algèbre des polynômes G -invariants sur W , ou une sous- G -variété affine, est générée par un nombre fini de polynômes homogènes.

Théorème 2.2.1. (*Théorème de finitude de Hilbert*) Soit $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. L'algèbre $K[\mathcal{X}]^G$ possède un nombre fini de générateurs homogènes en tant que K -algèbre.

DÉMONSTRATION. Soit $K[\mathcal{X}]_d$ et $K[\mathcal{X}]_d^G$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré d de $K[\mathcal{X}]$ et $K[\mathcal{X}]^G$ respectivement. Soit I_d l'idéal de $K[\mathcal{X}]^G$ généré par $\bigoplus_{i=1}^d K[\mathcal{X}]_i^G$. Ainsi $I_d \subseteq I_{d+1}$. Posons $\tilde{I}_d := K[\mathcal{X}] \cdot I_d \subseteq K[\mathcal{X}]$.

On remarque que si $I_d \subsetneq I_{d+1}$ alors $\tilde{I}_d \subsetneq \tilde{I}_{d+1}$. En effet, supposons que l'on ait $I_d \subsetneq I_{d+1}$ et que $\tilde{I}_d = \tilde{I}_{d+1}$. Alors pour $f \in I_{d+1}$, on a que $f \in I_{d+1} \subseteq \tilde{I}_{d+1} = \tilde{I}_d$. Donc f s'écrit comme $f = \sum_{i=1}^d s_i \cdot t_i$ avec $s_i \in K[\mathcal{X}]$ et $t_i \in K[\mathcal{X}]_i^G$. Ainsi, comme $f \in K[\mathcal{X}]^G$, l'opérateur de moyenne donne que

$$f = \rho(f) = \rho\left(\sum_{i=1}^d s_i \cdot t_i\right) = \sum_{i=1}^d \underbrace{\rho(s_i)}_{\in K[\mathcal{X}]^G} \cdot \underbrace{t_i}_{\in I_d} \in I_d$$

Donc $I_{d+1} \subseteq I_d$ et $I_{d+1} = I_d$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $I_d \subsetneq I_{d+1}$ implique que $\tilde{I}_d \subsetneq \tilde{I}_{d+1}$, ce qui équivaut à dire que $\tilde{I}_d = \tilde{I}_{d+1}$ implique que $I_d = I_{d+1}$ car $I_d \subseteq I_{d+1}$ et $\tilde{I}_d \subseteq \tilde{I}_{d+1}$.

Par le théorème "Basisatz" de Hilbert (voir par exemple [10]), on a que K est noethérien donc $K[x_1, x_2, \dots, x_n] \cong K[W]$ est aussi noethérien. Il en est donc de même pour le quotient $K[\mathcal{X}] = K[W]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$. Ainsi, la chaîne d'idéaux de $K[\mathcal{X}]$

$$\tilde{I}_0 \subseteq \tilde{I}_1 \subseteq \tilde{I}_2 \subseteq \dots \tilde{I}_d \subseteq \dots$$

est stationnaire, i.e. il existe un $m \in \mathbb{N}_*$ tel que $\tilde{I}_d = \tilde{I}_m \forall d \geq m$. Par l'argument précédent, la chaîne

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots I_m \subseteq \dots$$

est aussi stationnaire. Il existe donc un nombre fini de I_d et alors $K[\mathcal{X}]^G$ est généré par I_m . \square

Soit G un groupe fini et W un KG -module de type fini avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine, $K[\mathcal{X}]^G$ l'algèbre des polynômes G -invariants et $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ les générateurs homogènes de cette algèbre. Nous noterons $K[\mathcal{X}]^G = K[p_1, p_2, \dots, p_m]$ pour dire que $K[\mathcal{X}]^G$ est généré par $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ en tant que K -algèbre.

Soit $\{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subseteq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un ensemble de polynômes. On appelle *idéal de relations* de $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ l'idéal $I \trianglelefteq K[y_1, y_2, \dots, y_s]$ tel que pour $h \in K[y_1, y_2, \dots, y_s]$,

$$h \in I \Leftrightarrow h(f_1, f_2, \dots, f_s) \equiv 0$$

Pour $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine, soit alors $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes de $K[\mathcal{X}]^G$. On considère l'application polynomiale

$$\begin{aligned} p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : \mathcal{X} &\longrightarrow K^m \\ w &\longrightarrow (p_1(w), p_2(w), \dots, p_m(w)) \end{aligned}$$

cette application $p : \mathcal{X} \longrightarrow K^m$ est constante sur les G -orbites de \mathcal{X} . Pour chaque $w \in \mathcal{X}$ et $g \in G$,

$$p(g \cdot w) = (p_1(g \cdot w), p_2(g \cdot w), \dots, p_m(g \cdot w)) = (p_1(w), p_2(w), \dots, p_m(w)) = p(w)$$

Soit $I \trianglelefteq K[y_1, y_2, \dots, y_m]$ l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, on définit la variété affine

$$Z := \mathcal{V}(I) = \{z \in K^m \mid h(z) = 0 \forall h \in I\}$$

et

$$X := \text{Im } p \subseteq K^m$$

On note que $X \subseteq Z$. En effet, soit $x \in X$, i.e. $x = p(w) = (p_1(w), p_2(w), \dots, p_m(w))$ pour un $w \in \mathcal{X}$. Or, pour chaque $h \in I$, $0 = h(p(w)) = h(x)$ et donc $x \in \mathcal{V}(I) = Z$.

Avec la propriété universelle de la proposition 1.1.2, de notre application polynomiale $p : \mathcal{X} \longrightarrow K^m$, on peut y construire l'application continue (pour la topologie usuelle et Zariski)

$$\tilde{p} : \mathcal{X}/G \longrightarrow K^m$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{p} & K^m \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ \mathcal{X}/G & & \end{array}$$

en posant

$$\tilde{p}(Gw) = \tilde{p}(\pi(w)) = (\tilde{p} \circ \pi)(w) := p(w)$$

Le théorème suivant est la clé pour l'obtention du résultat cherché : il nous donne un homéomorphisme entre l'espace d'orbites et l'image de \mathcal{X} par p , $X \subseteq K^m$.

Théorème 2.2.2. *Soit G un groupe fini, W un KG -module de type fini avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. L'application $\tilde{p} : \mathcal{X}/G \longrightarrow X$ est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION. De la propriété universelle de la construction de \tilde{p} , cette application est continue. On montre maintenant que \tilde{p} est bijective. Tout d'abord elle est surjective : pour chaque $x \in X = \text{Im } p$, il existe un $w \in \mathcal{X}$ tel que $p(w) = x$ et ainsi $\tilde{p}(Gw) = p(w) = x$. Pour l'injectivité, soit $Gx \neq Gy \in \mathcal{X}/G$. Il ne peut donc y avoir de $g \in G$ tel que $x = g \cdot y$. On note les éléments de G par $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_s\}$ et on pose

$$x^i := g_i \cdot x = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \in Gx \subseteq \mathcal{X}$$

pour chacun des points de l'orbite de x pour un choix de base du K -espace vectoriel W . De même, on note les points de l'orbite de y par $y^i := g_i \cdot y$. Soit le polynôme à valeurs positives sur \mathcal{X} :

Si $K = \mathbb{R}$

$$h(v) = h(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^s (v_1 - x_1^i)^2 + (v_2 - x_2^i)^2 + \dots + (v_n - x_n^i)^2$$

Si $K = \mathbb{C}$

$$h(v) = h(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^s |v - x^i|^2$$

où $|v|$ désigne le module de v .

Alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, s$, $h(x^i) = 0$ car le i -ème terme du produit est égal à 0. De plus, comme $y^i \notin \{x^i\}_{i=1, \dots, s}$, $h(y^i) > 0$ pour chaque y^i . En prenant la moyenne de h , i.e. en y appliquant l'opérateur de moyenne, on obtient le polynôme G -invariant

$$\tilde{h}(v) = \rho(h)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h(g \cdot v)$$

qui s'annule sur Gx

$$\tilde{h}(x^i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{h(g \cdot x^i)}_{=0} = 0$$

et non sur Gy

$$\tilde{h}(y^i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{h(g \cdot y^i)}_{>0} > 0$$

Donc $\tilde{h} \in K[\mathcal{X}]^G$. Comme $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ sont les générateurs de $K[\mathcal{X}]^G$, il existe un $q \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]$ tel que $\tilde{h} = q(p_1, p_2, \dots, p_m)$. Or, on a que $Gx \neq Gy$ et on veut montrer que $p(x) = \tilde{p}(Gx) \neq \tilde{p}(Gy) = p(y)$. Supposons au contraire que $p(x) = p(y)$ i.e $p_i(x) = p_i(y) \forall i = 1, 2, \dots, m$. On a donc que

$$0 = \tilde{h}(x) = q(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) = q(p_1(y), p_2(y), \dots, p_m(y)) = \tilde{h}(y) > 0$$

et on a une contradiction. Donc \tilde{p} est injective et ainsi elle est bijective.

On montre que \tilde{p} est propre. Pour chaque $x \in X = \text{Im } p$, il existe un $w \in \mathcal{X}$ tel que $p(w) = x$. Il suffit de montrer que $\tilde{p}^{-1}(x) = \{Gw\}$. En effet, $\tilde{p}(Gw) = p(w) = x$ donc $\{Gw\} \subseteq \tilde{p}^{-1}(x)$. Si $Gw' \in \tilde{p}^{-1}(x)$, alors $\tilde{p}(Gw') = x = \tilde{p}(Gw)$. Or \tilde{p} est injective donc $Gw' = Gw$ donc $\tilde{p}^{-1}(x) \subseteq \{Gw\}$ et on obtient l'égalité.

On a donc que l'application $\tilde{p} : \mathcal{X}/G \rightarrow X$ est propre et bijective. Pour montrer qu'elle est un homéomorphisme, on montre que \tilde{p} est une application fermée.

Soit $F \subseteq \mathcal{X}/G$ un fermé et $\{x_k\} \subseteq \tilde{p}(F)$ une suite convergente vers $x \in X$. On veut montrer que $x \in \tilde{p}(F)$. Or $Y := \{x\} \cup \{x_k\}$ est un compact de X . Comme \tilde{p} est propre, $\tilde{p}^{-1}(Y)$ est compact. Soit alors $\{y_k\} \subseteq F \cap \tilde{p}^{-1}(Y)$ tel que $\tilde{p}(y_k) = x_k$ pour chaque k . La suite $\{y_k\}$ étant dans un compact, il existe une sous-suite convergente $\{y_{k_i}\}$ telle que $y_{k_i} \rightarrow y \in F$ car F est fermé. Par la continuité de \tilde{p} , on a que $\tilde{p}(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{p}(y_{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x$. Donc $x \in \tilde{p}(F)$ et \tilde{p} est fermée.

Ainsi, \tilde{p} est bijective, continue et fermée donc un homéomorphisme. \square

2.2.3. Structure de $K[\mathcal{X}]^G$ et quotient algébrique

Avec le théorème 2.2.2, l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est homéomorphe à l'ensemble $X = \text{Im } p$ qui est inclu dans la variété affine $Z \subseteq K^m$. On peut alors voir \mathcal{X}/G comme sous-ensemble de $Z \subseteq K^m$. Ainsi, pour le cas réel, les inégalités que l'on se propose de trouver sont des inégalités de \mathbb{R}^m qui délimiteront X dans Z . Pour le cas complexe, on verra que $X = Z$.

Les propriétés suivantes nous donnent la structure de l'algèbre des polynômes G -invariants sur \mathcal{X} . On voit que $K[\mathcal{X}]^G$ est un anneau de coordonnées.

Proposition 2.2.1. *Soit G un groupe fini agissant sur W un K -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Soit $K[\mathcal{X}]^G = K[p_1, p_2, \dots, p_m]$ avec $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes et $I \trianglelefteq K[y_1, y_2, \dots, y_m]$ l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Alors*

$$K[\mathcal{X}]^G \cong K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$$

DÉMONSTRATION. On définit l'application :

$$\phi : K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I \longrightarrow K[\mathcal{X}]^G$$

$$\tilde{h} \longmapsto h(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

pour h un représentant de \tilde{h} . En effet, pour chaque $g \in G$, $x \in \mathcal{X} \subseteq W \cong K^n$, $\tilde{h} \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$,

$$\phi(\tilde{h})(g \cdot x) = h(p_1(g \cdot x), p_2(g \cdot x), \dots, p_m(g \cdot x)) = h(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) = \phi(\tilde{h})(x)$$

et ainsi $\phi(\tilde{h}) \in K[\mathcal{X}]^G$.

Cette application est correctement définie car

$$\begin{aligned}\tilde{h} = \tilde{f} \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I &\Leftrightarrow h - f \in I \Leftrightarrow (h - f)(p_1, p_2, \dots, p_m) \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow h(p_1, p_2, \dots, p_m) \equiv f(p_1, p_2, \dots, p_m) \Leftrightarrow \phi(\tilde{h}) = \phi(\tilde{f})\end{aligned}$$

On vérifie que ϕ est un homomorphisme d'algèbres. Pour chaque $\tilde{f}, \tilde{h} \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$, $\lambda \in K$ et $x \in K^n$ on a que :

$$\phi(\lambda) = \lambda(p_1, p_2, \dots, p_m) = \lambda$$

$$\phi(\lambda \cdot \tilde{f}) = (\lambda \cdot f)(p_1, p_2, \dots, p_m) = \lambda \cdot (f(p_1, p_2, \dots, p_m)) = \lambda \cdot \phi(\tilde{f})$$

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{f} + \tilde{h})(x) &= \phi(\widetilde{f+h})(x) = (f+h)(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \\ &= f(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) + h(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \\ &= \phi(\tilde{f})(x) + \phi(\tilde{h})(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{f} \cdot \tilde{h})(x) &= \phi(\widetilde{f \cdot h})(x) = (f \cdot h)(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \\ &= f(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \cdot h(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \\ &= \phi(\tilde{f})(x) \cdot \phi(\tilde{h})(x)\end{aligned}$$

Donc ϕ est un homomorphisme d'algèbres. On montre que c'est en plus un isomorphisme. Soit $\tilde{f}, \tilde{h} \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$ tels que $\phi(\tilde{f}) = \phi(\tilde{h})$. Alors $f(p_1, p_2, \dots, p_m) \equiv h(p_1, p_2, \dots, p_m)$, ce qui implique que $(f-h)(p_1, p_2, \dots, p_m) \equiv 0$ et donc $f-h \in I$. Ainsi $\tilde{f} = \tilde{h}$ et ϕ est injective. Soit $f \in K[\mathcal{X}]^G = K[p_1, p_2, \dots, p_m]$, alors $f = h(p_1, p_2, \dots, p_m)$ pour un certain $h \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]$. Ainsi $\phi(\tilde{h}) = f$ et ϕ est surjective et est un isomorphisme. \square

Proposition 2.2.2. Soit G un groupe fini et W un KG -module de type fini. Pour $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine et $K[\mathcal{X}] = K[W]/I$, alors

$$K[\mathcal{X}]^G = K[W]^G/I^G$$

où $I^G = I \cap K[W]^G$.

DÉMONSTRATION. Soit $K[W] = \bigoplus_{d \geq 0} K[W]_d$, avec les $K[W]_d$, les KG -modules des polynômes de degré d . Ainsi,

$$K[\mathcal{X}] = K[W]/I = \left(\bigoplus_{d \geq 0} K[W]_d \right) / I \cong \bigoplus_{d \geq 0} K[W]_d / I_d$$

avec $I_d = I \cap K[W]_d$. Par le théorème de Maschke (voir [24]), pour chacun des KG -modules $K[W]_d$, il existe des KG -modules complémentaires M_d tels que $K[W]_d = K[W]_d^G \oplus M_d$. Alors

$$K[W]_d / I_d \cong (K[W]_d^G \oplus M_d) / I_d \cong K[W]_d^G / I_d^G \oplus M_d / \tilde{I}_d$$

avec $I_d^G = I_d \cap K[W]_d^G$ et $\tilde{I}_d = I_d \cap M_d$. On a donc de l'opérateur de moyenne ρ , une projection sur la composante G -invariante, que

$$K[\mathcal{X}]_d^G = (K[W]_d / I_d)^G = \rho(K[W]_d / I_d) = K[W]_d^G / I_d^G$$

Avec le théorème de Maschke, il y a des KG -modules complémentaires N_d tels que $K[\mathcal{X}]_d = K[\mathcal{X}]_d^G \oplus N_d$ pour chaque $d \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} K[\mathcal{X}]^G &= \rho \left(\bigoplus_{d \geq 0} K[\mathcal{X}]_d \right) = \bigoplus_{d \geq 0} K[\mathcal{X}]_d^G = \bigoplus_{d \geq 0} K[W]_d^G / I_d^G \\ &= K[W]^G / I^G \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.3. *Soit G un groupe fini agissant sur W un K -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Soit $K[\mathcal{X}]^G = K[p_1, p_2, \dots, p_m]$ avec $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes et $I \trianglelefteq K[y_1, y_2, \dots, y_m]$ l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Soit*

$$Z := \mathcal{V}(I) = \{x \in K^m \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}$$

Alors :

- (i) $I = \mathcal{I}(Z) := \{f \in K[y_1, y_2, y_3, \dots, y_m] \mid f(x) = 0 \forall x \in Z\}$
- (ii) $K[Z] \cong K[\mathcal{X}]^G$ où $K[Z]$ est l'anneau des coordonnées défini par $K[Z] := K[y_1, y_2, y_3, \dots, y_m] / \mathcal{I}(Z)$

DÉMONSTRATION. (i) Soit $f \in I$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in Z = \mathcal{V}(I)$ donc $f \in \mathcal{I}(Z)$ et $I \subseteq \mathcal{I}(Z)$. Soit $f \in \mathcal{I}(Z)$. Pour chaque $x \in \mathcal{X} \subseteq W \cong K^n$, $(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) \in X \subseteq Z$ et donc $f(p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)) = 0$, ce qui veut dire que $f \in I$, d'où l'égalité.

(ii) $K[Z] := K[y_1, y_2, y_3, \dots, y_m]/\mathcal{I}(Z) \stackrel{(i)}{\cong} K[y_1, y_2, y_3, \dots, y_m]/I \stackrel{\text{Prop 2.2.1}}{\cong} K[\mathcal{X}]^G \quad \square$

Ainsi, $K[\mathcal{X}]^G \cong K[y_1, y_2, y_3, \dots, y_m]/\mathcal{I}(Z) \cong K[Z]$ est l'anneau de coordonnées de la variété affine $Z = \mathcal{V}(I)$, avec I l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$.

On donne alors la définition de quotient algébrique :

Définition 2.2.2. Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un corps, G un groupe fini, W un KG -module de type fini et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. On définit le quotient algébrique $\mathcal{X}//G$ comme étant la variété affine $Z = \mathcal{V}(I)$ ayant comme anneau de coordonnées $K[\mathcal{X}//G] := K[Z] = K[\mathcal{X}]^G \cong K[y_1, y_2, \dots, y_m]/\mathcal{I}(Z) = K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$.

Le quotient possède la même propriété universelle que l'espace d'orbites.

Proposition 2.2.4. Soit \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux variétés affines et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de variétés affines G -invariant. Alors il existe un unique morphisme de variétés affines $\tilde{f} : \mathcal{X}//G \rightarrow \mathcal{Y}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ p \downarrow & \searrow \tilde{f} & \\ \mathcal{X}/G & & \end{array}$$

avec $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : \mathcal{X} \rightarrow K^m$, l'application donnée par des générateurs de $K[\mathcal{X}]^G$.

DÉMONSTRATION. On a obtenu à la proposition 2.2.1 un isomorphisme

$$\phi : K[\mathcal{X}//G] = K[y_1, y_2, \dots, y_m]/I \rightarrow K[\mathcal{X}]^G$$

$$\tilde{h} = h + I \mapsto h \circ p$$

avec I l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Ainsi, pour chaque morphisme G -invariant de variétés affines $f = (f_1, f_2, \dots, f_s) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, chacun des $f_i \in K[\mathcal{X}]^G$ pour $i = 1, 2, \dots, s$, s'écrit comme $f_i = h_i \circ p$ pour un $h_i \in K[y_1, y_2, \dots, y_m]$.

Comme $h_i \circ p = h'_i \circ p$ si et seulement si $\tilde{h} = \tilde{h}' \in K[\mathcal{X} // G]$, une telle application $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ est uniquement déterminée par $\tilde{f} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_s) : \mathcal{X} // G \rightarrow \mathcal{Y}$ où les $\tilde{h}_i = h_i + I \in K[\mathcal{X} // G] = K[y_1, y_2, \dots, y_m] / I$ sont tels que $f_i = h_i \circ p$. On a donc pour chaque $w \in W$ que $f(w) = (f_1(w), f_2(w), \dots, f_s(w)) = (h_1(p(w)), h_2(p(w)), \dots, h_s(p(w))) = (\tilde{f} \circ p)(w)$. \square

2.3. ESPACE D'ORBITES COMPLEXE

Dans cette section on s'intéresse au cas où $K = \mathbb{C}$. On y verra entre autres que pour ce cas, l'espace d'orbites est en fait égal au quotient algébrique. Ainsi, l'espace d'orbites est une variété affine donc déterminé par des égalités.

Soit donc W un $\mathbb{C}G$ -module de type fini et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Pour $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ un ensemble de générateurs homogènes de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$. On a défini l'application

$$\begin{aligned} q = (q_1, q_2, \dots, q_m) : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ v &\longmapsto (q_1(v), q_2(v), \dots, q_m(v)) \end{aligned}$$

qui nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}^m \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{q} & \\ \mathcal{X}/G & & \end{array}$$

avec l'homéomorphisme $\tilde{q} : \mathcal{X}/G \rightarrow q(\mathcal{X})$ défini par $\tilde{q}(Gv) = (\tilde{q} \circ \pi)(v) := q(v)$.

Pour le cas complexe, l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est identifié à la variété affine $\mathcal{X} // G$. On montre comment voir cela.

Pour K un corps algébriquement clos, par exemple pour \mathbb{C} , nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3.1. (Nullstellensatz) *Soit K un corps algébriquement clos*

(i) *Tout idéal maximal de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est de la forme $m_a = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle$ pour un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$.*

(ii) *Soit $I \trianglelefteq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal. Alors $I \neq K[x_1, x_2, \dots, x_n] \Leftrightarrow \mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

(iii) *Soit $I \trianglelefteq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal. Alors*

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$$

où \sqrt{I} est l'idéal radical de I , i.e. $f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow$ il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m \in I$.

DÉMONSTRATION. On retrouve ces résultats dans tout bon livre de géométrie algébrique. Par exemple [10]. \square

La partie (iii) de ce résultat nous donne une correspondance bijective entre

$$\begin{aligned} \{\text{idéaux radicaux de } \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]\} &\longleftrightarrow \{\text{variétés affines de } \mathbb{C}^n\} \\ \sqrt{I} &\longleftrightarrow \mathcal{V}(I) \end{aligned}$$

et la partie (i) nous donne une correspondance bijective entre

$$\begin{aligned} \{\text{points de } \mathbb{C}^n\} &\longleftrightarrow \{\text{idéaux maximaux de } \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]\} \\ a = (a_1, a_2, \dots, a_n) &\longleftrightarrow m_a = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle \end{aligned}$$

Cette correspondance entre les points de \mathbb{C}^n et les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nous permet de voir d'une nouvelle façon la construction que l'on a fait au théorème 2.1.1 pour les morphismes de variétés affines et les homomorphismes entre les anneaux de coordonnées.

Proposition 2.3.1. *Soit \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux variétés affines complexes, un morphisme de variétés affines $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $\phi : \mathbb{C}[\mathcal{Y}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ l'homomorphisme de \mathbb{C} -algèbres tel que $\phi = f^*$. Pour $a \in \mathcal{X}$ et $\tilde{m}_a \trianglelefteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ l'idéal maximal associé, alors $\phi^{-1}(\tilde{m}_a) = \tilde{m}_b$ avec l'idéal maximal \tilde{m}_b donné par le point $b = f(a)$.*

DÉMONSTRATION. Soit l'application polynomiale $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ donnée par $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ telle que $\phi = f^*$. Soit $M \trianglelefteq \mathbb{C}[\mathcal{X}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathcal{I}(\mathcal{X})$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$. Par le Nullstellensatz, l'idéal M est de la forme $\tilde{m}_a = m_a$ modulo $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ avec $m_a = \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle$ pour un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On a que $\phi^{-1}(\tilde{m}_a)$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[\mathcal{Y}]$. En effet, on considère la composée de ϕ avec la projection $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]/\tilde{m}_a$ que l'on notera ψ

$$\psi : \mathbb{C}[\mathcal{Y}] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[\mathcal{X}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]/\tilde{m}_a$$

Comme \tilde{m}_a est un idéal maximal, le quotient $\mathbb{C}[\mathcal{X}]/\tilde{m}_a$ est un corps isomorphe à \mathbb{C} . Or $\mathbb{C}[\mathcal{Y}]$ contient une copie de \mathbb{C} qui est envoyée sur $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}[\mathcal{X}]/\tilde{m}_a$ et donc l'application ψ est surjective. Ainsi, $\mathbb{C}[\mathcal{Y}]/\text{Ker } \psi \cong \mathbb{C}$ et donc $\text{Ker } \psi = \phi^{-1}(\tilde{m}_a)$ est un idéal maximal. Encore par le Nullstellensatz, cet idéal maximal est de la forme \tilde{m}_b donné par l'idéal $m_b = \langle y_1 - b_1, y_2 - b_2, \dots, y_m - b_m \rangle$ pour un point $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{C}^m$. On montre qu'en fait, ce point se trouve à être $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a))$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$, on a pour chacun des $\tilde{y}_i \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m]/\mathcal{I}(\mathcal{Y})$

$$\phi(\tilde{y}_i - f_i(a)) = \phi(\tilde{y}_i) - f_i(a) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(a)$$

Or $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(a) \in \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n \rangle = m_a$. En effet, en divisant successivement $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par $x_1 - a_1, x_2 - a_2$ jusqu'à $x_n - a_n$, on obtient

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_1(x_1 - a_1) + q_2(x_2 - a_2) + \dots + q_n(x_n - a_n) + r$$

où les q_i sont des polynômes de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et r , le reste qui ne contient aucun des x_i , est de degré 0 donc une constante. En évaluant cette expression au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, on a que

$$f_i(a) = r$$

Donc l'expression nous donne que

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(a) = q_1(x_1 - a_1) + q_2(x_2 - a_2) + \dots + q_n(x_n - a_n) \in m_a$$

Ainsi, l'idéal maximal $m = \langle \tilde{y}_1 - f_1(a), \dots, \tilde{y}_m - f_m(a) \rangle$ est dans la préimage de m_a que l'on avait noté m_b . On a donc que $m \subseteq m_b$. De la maximalité de m , $m = m_b$ et ainsi $b = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)) = f(a)$. \square

Avant de montrer que l'espace d'orbites est une variété affine complexe, on a besoin des résultats suivants.

Définition 2.3.1. Soit R un anneau et S une R -algèbre. Pour $s \in S$, on dit que s est entier s'il existe un polynôme à coefficient dominant égal à 1, p , tel que $p(s) = 0$. Si tout élément de S est entier, on dit que S est entière.

Proposition 2.3.2. Soit W un $\mathbb{C}G$ -module de type fini avec G un groupe fini et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. L'extension $\mathbb{C}[\mathcal{X}]^G \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ est entière.

DÉMONSTRATION. Soit f_1, f_2, \dots, f_n des générateurs de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$. Pour $i = 1, 2, \dots, n$, on pose

$$s_i(t) := \prod_{g \in G} (t - g \cdot f_i)$$

On remarque que les polynômes s_i sont G -invariants car pour chaque $g' \in G$,

$$g' \cdot s_i(t) = \prod_{g \in G} (t - (g' \cdot g) \cdot f_i) = \prod_{\tilde{g} = g' \cdot g \in G} (t - \tilde{g} \cdot f_i) = s_i(t)$$

Soit $A \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ la sous-algèbre générée par les s_i . On a donc que chaque $f_i \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ est entier sur A car $s_i(f_i) = 0$. Ainsi on a que $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ est entier sur $A \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$ et donc sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$. \square

Théorème 2.3.2. *Soit $R \subset S$ une extension entière d'anneaux. Soit $P \trianglelefteq R$ un idéal premier, alors il existe un idéal premier $Q \trianglelefteq S$ tel que $P = Q \cap R$.*

DÉMONSTRATION. Voir théorème 4.15 p. 129 de [10]. \square

Théorème 2.3.3. *Soit S une R -algèbre entière et $P \trianglelefteq S$ un idéal premier, alors P est maximal $\Leftrightarrow P \cap R$ est un idéal maximal de R .*

DÉMONSTRATION. Voir corollaire 4.18 p. 131 de [10]. \square

Théorème 2.3.4. *Pour G un groupe fini et W un $\mathbb{C}G$ -module et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine, l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est homéomorphe à la variété affine $\mathcal{X} // G$.*

DÉMONSTRATION. On considère l'inclusion de \mathbb{C} -algèbres $\iota : \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]$. On a vu que $\mathbb{C}[\mathcal{X} // G] = \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m] / I$ où I est l'idéal des relations des générateurs $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$. Ainsi, on a que l'application ι envoie chaque générateur $\tilde{y}_i \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m] / I$ sur q_i :

$$\iota : \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m] / I \cong \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]$$

$$\tilde{y}_i \quad \leftrightarrow \quad q_i \longmapsto q_i$$

Et donc le morphisme induit sur les variétés affines est donné par

$$\begin{aligned}\eta : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} // G \\ w &\longmapsto (q_1(w), q_2(w), \dots, q_m(w))\end{aligned}$$

On montre alors que l'application η est surjective. Soit $b \in \mathcal{X} // G$. Par le Nullstellensatz, ce point correspond à un idéal maximal de $\mathbb{C}[\mathcal{X} // G]$ que l'on note \tilde{m}_b donné par $m_b = \langle y_1 - b_1, \dots, y_m - b_m \rangle$. Or cet idéal est maximal donc premier. Ainsi par le théorème 2.3.2, il existe un idéal premier $P \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ tel que $m_b = P \cap \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$. Or par le théorème 2.3.3, m_b est maximal donc P est maximal. L'idéal P est alors de la forme $m_a = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ pour un point $a \in \mathcal{X}$. De l'inclusion ι et du fait que $m_b = m_a \cap \mathbb{C}[\mathcal{X}]^G$, $\iota(m_b) \subseteq m_a$ et donc $m_b \subseteq \iota^{-1}(m_a)$. Or de la maximalité de m_b on a que $m_b = \iota^{-1}(m_a)$. Par la proposition 2.3.1, cela veut dire que $\eta(a) = b$. Donc η est surjective. Or on a déjà obtenu un homéomorphisme entre \mathcal{X}/G et X qui était l'image de \mathcal{X} par l'application $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$. Comme $\eta = q$, on a que $\mathcal{X}/G \cong \text{Im } q = \text{Im } \eta = \mathcal{X} // G$ \square

2.4. ESPACE D'ORBITES RÉEL

On s'intéresse maintenant au cas où W est un espace vectoriel réel. Contrairement au cas complexe, il n'est pas vrai en général que l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique. La raison est que la correspondance entre les idéaux maximaux et les points que l'on a utilisée pour le cas complexe n'est plus valide. En fait, on montrera au chapitre 4 que l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique si et seulement si le groupe est d'ordre impair et la représentation est fidèle. Cependant, pour le cas réel, l'espace d'orbites, vu comme sous-ensemble du quotient algébrique, est un ensemble semi-algébrique dont la fermeture pour la topologie de Zariski est le quotient algébrique. Ainsi, on aura donc que l'espace d'orbites est défini par des inégalités qui déterminent cet ensemble semi-algébrique. On montrera également que pour une G -variété affine, les inégalités définissant l'espace d'orbites sont celles provenant de l'espace d'orbites de l'espace vectoriel ambiant en plus des égalités données par la G -variété affine.

On commence par définir ce qu'est un ensemble *semi-algébrique*.

Définition 2.4.1. *Un ensemble semi-algébrique élémentaire de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble qui est défini par un ensemble d'inégalités et d'égalités algébriques réelles. Un ensemble semi-algébrique est une union finie d'ensembles semi-algébriques élémentaires. De façon équivalente, les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n forment la plus petite collection de parties de \mathbb{R}^n contenant toutes les parties de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$, où $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, et stable par intersection finie, réunion finie et passage au complémentaire.*

Par exemple, toute variété affine de \mathbb{R}^n est un ensemble semi-algébrique. En effet, on a que $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_s(x) = 0, \}$ pour f_1, f_2, \dots, f_s des générateurs de I .

Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Pour $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes de $\mathbb{R}[\mathcal{X}]^G$, on a l'application polynomiale

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$w \longrightarrow (p_1(w), p_2(w), \dots, p_m(w))$$

Soit $I \trianglelefteq \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]$ l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ et la variété affine

$$\mathcal{X} // G = Z = \mathcal{V}(I) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid h(z) = 0 \forall h \in I\}$$

et

$$X := \text{Im } p \subseteq \mathbb{R}^m$$

Comme on l'a fait plus tôt, de notre application $p : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on obtient l'application continue

$$\tilde{p} : \mathcal{X} / G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^m \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ \mathcal{X} / G & & \end{array}$$

en posant

$$\tilde{p}(Gw) = \tilde{p}(\pi(w)) = (\tilde{p} \circ \pi)(w) := p(w)$$

Avec le théorème suivant on peut montrer que l'espace d'orbites est homéomorphe à un ensemble semi-algébrique.

Théorème 2.4.1. (*Tarski-Seidenberg*) *L'image d'un ensemble semi-algébrique par une application polynomiale est semi-algébrique.*

DÉMONSTRATION. Voir [5]. □

Corollaire 2.4.1. *L'espace d'orbites \mathcal{X}/G est homéomorphe à un ensemble semi-algébrique.*

DÉMONSTRATION. On a que \mathcal{X}/G est homéomorphe à X qui est l'image d'une variété affine par une application polynomiale. Or une variété affine est un ensemble semi-algébrique et donc par le résultat précédent, X est semi-algébrique. □

Corollaire 2.4.2. *Les strates $W^{<H>}$, $W^{(H)}$ et $(W/G)^{(H)}$ sont semi-algébriques.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{H_0, H_2, \dots, H_s = G\}$ les sous-groupes d'isotropie distincts de G . Pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, s$, soit $H_{n_1} = G, H_{n_2}, \dots, H_{n_t} = H_i$ les sous-groupes d'isotropie distincts qui contiennent H_i . On montre par récurrence sur t que $W^{<H_i>}$ est semi-algébrique. Si $t = 1$, alors $H_i = G$ et avec $W^H = \bigcup_{\tilde{H} \supseteq H} W^{<\tilde{H}>}$, $W^G = W^{<G>}$ est un espace-vectoriel, donc un ensemble semi-algébrique. Supposons alors le résultat vrai pour tout $t \geq 1$ et montrons que c'est vrai pour $t + 1$. Soit $H_{n_1} = G, H_{n_2}, \dots, H_{n_t}, H_{n_{t+1}} = H_i$ les sous-groupes d'isotropie qui contiennent H_i . Alors $W^{H_i} = \bigcup_{j=1}^{t+1} W^{<H_{n_j}>}$ et donc $W^{<H_i>} = W^{H_i} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^t W^{<H_{n_j}>} \right)$ qui est le complément d'un ensemble semi-algébrique, donc semi-algébrique. Ainsi, les $W^{<H_i>}$ sont semi-algébriques, les strates $W^{(H_i)} = \bigcup_{(H)=(H_i)} W^{<H>}$ sont semi-algébriques et leur image par l'application polynomiale p , les $(W/G)^{(H_i)}$, sont aussi semi-algébriques. □

Ainsi, en voyant \mathcal{X}/G comme $X \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^m$, on a que \mathcal{X}/G est déterminé par les inégalités qui définissent l'ensemble semi-algébrique X dans \mathbb{R}^m . Le résultat

de Procesi-Schwarz nous donne donc une méthode pour trouver ces inégalités. On peut aussi montrer que X est Zariski-dense dans Z .

Proposition 2.4.1. *Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini avec $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Avec l'application polynomiale $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par des générateurs de $\mathbb{R}[\mathcal{X}]^G$, on pose $X := \text{Im } p$ qui est homéomorphe à l'espace d'orbites \mathcal{X}/G . Alors $\overline{X}^Z = Z$.*

DÉMONSTRATION. Soit l'inclusion $\iota : \mathbb{R}[\mathcal{X}/G] = \mathbb{R}[\mathcal{X}]^G \rightarrow \mathbb{R}[\mathcal{X}]$. De cet homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, on a l'application induite de variétés affines $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/G$ telle que $f^* = \iota$ qui est donnée par $f(w) = (p_1(w), p_2(w), \dots, p_m(w))$ tel que l'on a fait dans la démonstration du théorème 2.3.4. En fait $f = p$. Par la proposition 2.1.2, $\iota = p^*$ est injective donc $X = p(\mathcal{X})$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}/G = Z$. \square

Maintenant que l'on sait que les espace d'orbites \mathcal{X}/G et W/G sont semi-algébriques, on peut se demander quelles sont les égalités et/ou les inégalités qui définissent \mathcal{X}/G dans W/G pour $\mathcal{X} \subset W$.

Proposition 2.4.2. *Soit G un groupe fini et $\mathcal{X} = \mathcal{V}(J)$ une G -variété affine de l'espace vectoriel réel W sur lequel G agit de façon linéaire. Alors*

$$\mathcal{X}/G \cong \tilde{p}(\mathcal{X}/G) = X \cap \mathcal{X}/G$$

pour l'homéomorphisme $\tilde{p} : W/G \rightarrow X$ du théorème 2.2.2 avec $X \subseteq W//G \subseteq \mathbb{R}^m$. Donc l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est donné par les inégalités de $W/G \cong X \subseteq \mathbb{R}^m$ et les égalités de la variété affine $\mathcal{X}/G \subseteq \mathbb{R}^m$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine. Avec l'application $\pi : W \rightarrow W/G$ on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & W \\ \downarrow \pi \circ \iota & & \downarrow \pi \\ \mathcal{X}/G & \hookrightarrow & W/G \end{array}$$

De l'homéomorphisme $\tilde{p} : W/G \longrightarrow X$, on note $\tilde{X} = \tilde{p}(\mathcal{X}/G)$. Par définition de l'anneau de coordonnées et avec la proposition 2.2.2, on a que

$$\mathbb{R}[\mathcal{X}//G] = \mathbb{R}[\mathcal{X}]^G \cong (\mathbb{R}[W]/\mathcal{I}(\mathcal{X}))^G \cong \mathbb{R}[W]^G/\mathcal{I}(\mathcal{X})^G$$

et $\mathcal{X}//G \cong \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G)$.

Avec $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ un ensemble de générateurs homogènes de $\mathbb{R}[W]^G$ et I l'idéal des relations, on a $\mathbb{R}[W]^G \cong \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I$ et des projections

$$\mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m] \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I \cong \mathbb{R}[W]^G \longrightarrow \mathbb{R}[W]^G/\mathcal{I}(\mathcal{X})^G$$

on prend le noyau $\mathcal{J} \triangleq \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]$, i.e. la préimage de $0 + \mathcal{I}(\mathcal{X})^G \in \mathbb{R}[W]^G/\mathcal{I}(\mathcal{X})^G$.

On peut alors voir la variété affine $\mathcal{X}//G$ comme $\mathcal{X}//G \cong \mathcal{V}(\mathcal{J}) \subseteq \mathbb{R}^m$. Avec $\mathcal{X}/G \cong \tilde{X} \subseteq \mathcal{X}//G$ et $W/G \cong X \subseteq W//G \subseteq \mathbb{R}^m$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & W \\ \pi \circ \iota \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{X}/G & \hookrightarrow & W/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}//G & \hookrightarrow & W//G \hookrightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

On veut montrer que

$$\tilde{X} = X \cap \mathcal{X}//G$$

Or bien sûr on voit par le diagramme que $\emptyset \neq \tilde{X} \subseteq X \cap \mathcal{X}//G$. On montre donc l'autre inclusion $X \cap \mathcal{X}//G \subseteq \tilde{X}$. Soit $\xi \in W/G \cap \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G) \cong X \cap \mathcal{X}//G$. Alors $\pi^{-1}(\xi)$ est une orbite Gw de W et chaque $w' \in Gw$ est un élément de $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W])$. On vérifie alors que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W]) = \mathcal{X}$. Or $\mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W] \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{X})$ donc $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W]) \supseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$. Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. On considère alors le polynôme

$$F(t) = \prod_{g \in G} (t - g \cdot f) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n$$

où $n = |G|$, les coefficients a_i sont des polynômes de $\mathcal{I}(\mathcal{X})^G$ et $F(f) = 0$. On a donc que

$$f^n = -a_1 f^{n-1} - a_2 f^{n-2} - \dots - a_n \in \mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W]$$

Donc pour $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ un ensemble de générateurs de l'idéal $\mathcal{I}(\mathcal{X})$, i.e. tel que $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = (f_1, f_2, \dots, f_s)$, on obtient par l'argument précédent que $(f_1^n, f_2^n, \dots, f_s^n) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W] \subseteq (f_1, f_2, \dots, f_s) = \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Or $\mathcal{V}(f_1^n, f_2^n, \dots, f_s^n) = \mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \mathcal{X}$ et donc $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})^G \cdot \mathbb{R}[W]) \subseteq \mathcal{V}(f_1^n, f_2^n, \dots, f_s^n) = \mathcal{X}$. On obtient donc l'égalité et ainsi tout $w' \in Gw$ est dans \mathcal{X} et $\xi = \pi(w') \in \mathcal{X}/G$. On a donc le résultat cherché. \square

2.4.1. Produits scalaires

Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et G un groupe fini. Le fait que G soit un groupe fini nous permet d'utiliser le principe de la "moyenne". On montre comment à partir d'un produit scalaire sur W on peut construire un produit scalaire G -invariant, i.e. tel que

$$(g \cdot v, g \cdot w) = (v, w)$$

pour chaque $v, w \in W$ et $g \in G$.

Proposition 2.4.3. *Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel W de dimension finie. Alors*

$$(u, v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle$$

définit un produit scalaire G -invariant sur W .

DÉMONSTRATION. En effet, pour chaque $u, v, w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a que :

$$(u, v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v, g \cdot u \rangle = (v, u)$$

$$\begin{aligned} (\lambda u, v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot (\lambda u), g \cdot v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle \\ &= \lambda (u, v) \end{aligned}$$

$$(u, u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\langle g \cdot u, g \cdot u \rangle}_{\geq 0} \geq 0$$

et $(u, u) = 0$ si et seulement si $\langle g \cdot u, g \cdot u \rangle = 0$ pour chaque $g \in G$ si et seulement si $u = 0$.

$$\begin{aligned} (g \cdot u, g \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \langle g' \cdot (g \cdot u), g' \cdot (g \cdot v) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \langle (g'g) \cdot u, (g'g) \cdot v \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} = g'g \in G} \langle \tilde{g} \cdot u, \tilde{g} \cdot v \rangle = (u, v) \end{aligned}$$

Donc, (\cdot, \cdot) est un produit scalaire G -invariant sur W . □

De plus, comme le produit scalaire (\cdot, \cdot) est G -invariant, cela permet de voir G comme un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$, les matrices orthogonales réelles n par n . En effet, en prenant une base orthonormale de W par rapport à ce produit scalaire, comme G préserve ce même produit scalaire, G est un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$.

De ce produit scalaire G -invariant sur W , on en obtient un de façon naturelle sur l'espace dual W^* .

Proposition 2.4.4. *Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire G -invariant sur W et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base orthonormale. On obtient un produit scalaire G -invariant sur W^* en posant*

$$(x_i^*, x_j^*) = (x_i, x_j) = \delta_{i,j}$$

pour chaque élément de la base $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ de W^* où $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ pour chaque $i, j = 1, 2, \dots, n$.

DÉMONSTRATION. Soit $x^* = \sum_i a_i x_i^*$, $y^* = \sum_i b_i x_i^*$ et $z^* = \sum_i c_i x_i^* \in W^*$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x^*, y^*) = \left(\sum_i a_i x_i^*, \sum_i b_i x_i^* \right) = \sum_i a_i b_i = \sum_i b_i a_i = \left(\sum_i b_i x_i^*, \sum_i a_i x_i^* \right) = (y^*, x^*)$$

$$\begin{aligned}
(x^* + y^*, z^*) &= \left(\sum_i a_i x_i^* + \sum_i b_i x_i^*, \sum_i c_i x_i^* \right) = \left(\sum_i (a_i + b_i) x_i^*, \sum_i c_i x_i^* \right) \\
&= \sum_i (a_i + b_i) c_i = \sum_i a_i c_i + \sum_i b_i c_i \\
&= \left(\sum_i a_i x_i^*, \sum_i c_i x_i^* \right) + \left(\sum_i b_i x_i^*, \sum_i c_i x_i^* \right) = (x^*, z^*) + (y^*, z^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot x^*, y^*) &= \left(\lambda \cdot \sum_i a_i x_i^*, \sum_i b_i x_i^* \right) = \left(\sum_i (\lambda \cdot a_i) x_i^*, \sum_i b_i x_i^* \right) = \sum_i (\lambda \cdot a_i) b_i \\
&= \lambda \cdot \sum_i a_i b_i = \lambda \cdot \left(\sum_i a_i x_i^*, \sum_i b_i x_i^* \right) = \lambda \cdot (x^*, y^*)
\end{aligned}$$

$$(x^*, x^*) = \sum_i a_i^2 \geq 0$$

et $(x^*, x^*) = 0$ si et seulement si $a_i = 0$ pour chaque i si et seulement si $x^* = 0$.

Pour montrer que ce produit scalaire est G -invariant, soit $[g]$ la matrice orthogonale de l'action de $g \in G$ sur W , i.e. pour $w = \sum_i a_i x_i \in W$, $g \cdot w = \sum_k (\sum_j [g]_{kj} a_j) x_k$. Alors pour chaque $g \in G$,

$$(g \cdot x_i^*)(x_j) = x_i^*(g^{-1} \cdot x_j) = x_i^* \left(\sum_k [g^{-1}]_{jk} x_k \right) = [g^{-1}]_{ji}$$

et ainsi $g \cdot x_i^* = \sum_j [g^{-1}]_{ji} x_j^*$. Puisque la base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est orthonormale, on a que $[g^{-1}] = [g]^{-1} = [g]^t$ et donc $[g^{-1}]_{ji} = [g]_{ij}$ pour chaque entrée. Ainsi,

$$(g \cdot x_i^*, g \cdot x_j^*) = \left(\sum_k [g^{-1}]_{ki} x_k^*, \sum_k [g^{-1}]_{kj} x_k^* \right) = \sum_k [g^{-1}]_{ki} [g^{-1}]_{kj} = \sum_k [g]_{ik} [g]_{jk}$$

qui est égal au produit scalaire des rangées i et j de la matrice orthogonale $[g]$.

Donc,

$$(g \cdot x_i^*, g \cdot x_j^*) = \delta_{ij} = (x_i^*, x_j^*)$$

et on obtient sur W^* un produit scalaire G -invariant. \square

On sait qu'il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels $W \cong W^*$. Avec un produit scalaire G -invariant sur W , on obtient un isomorphisme de $\mathbb{R}G$ -modules.

Proposition 2.4.5. *Soit G un groupe fini agissant sur un espace vectoriel réel W et (\cdot, \cdot) un produit scalaire G -invariant. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}G$ -modules $\phi : W \cong W^*$. De plus, soit H un sous-groupe de G . Alors $w \in W$ est H -invariant si et seulement si $\phi(w)$ est H -invariant.*

DÉMONSTRATION. On définit l'application $\phi : W \longrightarrow W^*$ donnée par $\phi(w) := (w, \cdot)$ pour chaque $w \in W$. On montre qu'elle est G -équivariante. Pour $g \in G$ et $w \in W$,

$$\phi(g \cdot w)(v) = (g \cdot w, v) = (w, g^{-1} \cdot v) = \phi(w)(g^{-1} \cdot v) = (g \cdot \phi(w))(v)$$

pour tout $v \in W$ et donc l'application est G -équivariante. Cette application est linéaire. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w, x \in W$,

$$\phi(\lambda \cdot v)(x) = (\lambda \cdot v, x) = \lambda(v, x) = \lambda \cdot \phi(v)(x)$$

$$\phi(v + w)(x) = (v + w, x) = (v, x) + (w, x) = (\phi(v) + \phi(w))(x)$$

On montre que ϕ est injective. Soit v et $w \in W$ tels que $\phi(v) = \phi(w)$, i.e. pour chaque $x \in W$, $(v, x) = \phi(v)(x) = \phi(w)(x) = (w, x) \Leftrightarrow (v - w, x) = 0$ pour tout $x \in W$. Comme le produit scalaire est non-dégénéré, ceci implique que $v - w = 0$ donc que $v = w$ et que ϕ est injective. On montre la surjectivité. Soit $w^* \in W^*$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ une base orthonormée de W par rapport à (\cdot, \cdot) . On définit $\alpha_i = w^*(w_i) \in \mathbb{R}$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ et on pose $w := \sum_i \alpha_i \cdot w_i \in W$. Alors pour chaque $x = \sum_i \beta_i \cdot w_i \in W$,

$$\begin{aligned} \phi(w)(x) &= (w, x) = \left(\sum_i \alpha_i \cdot w_i, \sum_i \beta_i \cdot w_i \right) = \sum_i \alpha_i \beta_i = \sum_i \beta_i \alpha_i \\ &= \sum_i \beta_i \cdot w^*(w_i) = w^* \left(\sum_i \beta_i \cdot w_i \right) = w^*(x) \end{aligned}$$

Donc $\phi(w) = w^*$ et ϕ est surjective. On obtient le premier énoncé.

Soit $v \in W$ qui est H -invariant, i.e. que pour tout $h \in H$, $h \cdot v = v \Leftrightarrow v = h^{-1} \cdot v$. Alors $v \in W^H \Leftrightarrow$ pour tout $w \in W$ et $h \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(v)(w) &= (v, w) = (h^{-1} \cdot v, h^{-1} \cdot w) = (v, h^{-1} \cdot w) = \phi(v)(h^{-1} \cdot w) \\ &= (\phi(v) \circ h^{-1})(w) = (h \cdot \phi(v))(w) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \phi(v) \in W^{*H}$. □

De plus, avec (\cdot, \cdot) un produit scalaire G -invariant, il est possible de définir une distance G -invariante sur W par $d(u, v) = \sqrt{(u - v, u - v)}$ pour chaque $u, v \in W$.

Proposition 2.4.6. *Soit $w \in W$. Alors il existe une boule de rayon ϵ centrée en w , $B(w, \epsilon)$, tel que $G_v \subseteq G_w$ pour chaque $v \in B(w, \epsilon)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $w \in W$ et $\delta := \min_{g \in G} \{d(w, g \cdot w) \mid g \cdot w \neq w\}$. En posant $\epsilon = \frac{\delta}{3}$, alors pour chaque $v \in B(w, \epsilon)$, $G_v \subseteq G_w$. En effet, si l'on suppose le contraire, i.e. qu'il existe un $h \in G_v$ qui n'est pas dans G_w , alors $h \cdot w \neq w$ et donc

$$\delta \leq d(w, h \cdot w) \leq d(w, h \cdot v) + d(h \cdot v, h \cdot w) = 2d(w, v) < 2\epsilon = \frac{2}{3}\delta < \delta$$

ce qui est une contradiction. Ainsi $G_v \subseteq G_w$ pour chaque $v \in B(w, \epsilon)$. \square

Une distance G -invariante permet aussi d'obtenir l'existence de slices.

Proposition 2.4.7. *Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module muni d'une distance G -invariante d . Alors pour chaque $w \in W$, la boule de rayon ϵ centrée en w de la proposition 2.4.6 est une slice en w .*

DÉMONSTRATION. Soit $w \in W$ et $B(w, \epsilon)$ une boule de rayon ϵ centrée en w où $\epsilon = \frac{\delta}{3}$ avec $\delta := \min_{g \in G} \{d(w, g \cdot w) \mid g \cdot w \neq w\}$. On montre que $B(w, \epsilon)$ est G_w -stable. Supposons au contraire qu'il existe un $v \in B(w, \epsilon)$ et $g \in G$ tels que $g \cdot v \notin B(w, \epsilon)$. Alors, $\epsilon < d(w, g \cdot v) = d(g^{-1} \cdot w, v) = d(w, v) < \epsilon$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $B(w, \epsilon)$ est G_w -stable.

On montre que l'application G -équivariante

$$\phi : G *_G B(w, \epsilon) \longrightarrow G(B(w, \epsilon))$$

$$[g, v] \longmapsto g \cdot v$$

est un homéomorphisme. Cette application est surjective car pour chaque $g \cdot v \in G(B(w, \epsilon))$, $[g, v] \in G *_G B(w, \epsilon)$ et $\phi([g, v]) = g \cdot v$. Pour montrer l'injectivité, on vérifie d'abord que $v \in B(w, \epsilon)$ et $g \cdot v \in B(w, \epsilon)$ implique que $g \in G_w$. Si l'on suppose le contraire, alors

$$\delta \leq d(w, g^{-1} \cdot w) \leq d(v, w) + d(v, g^{-1} \cdot w) = d(w, v) + d(w, g \cdot v) < 2\epsilon = \frac{2}{3}\delta$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, $v \in B(w, \epsilon)$ et $g \cdot v \in B(w, \epsilon)$ implique que $g \in G_w$.

Soit $[g, v]$ et $[g', v'] \in G *_{G_w} B(w, \epsilon)$ tels que $g \cdot v = \phi([g, v]) = \phi([g', v']) = g' \cdot v'$. Alors, $v = g^{-1}g' \cdot v'$ et comme v et v' sont dans $B(w, \epsilon)$, l'argument précédent donne que $g^{-1}g' \in G_w$. Ainsi, $[g', v'] = [g' \cdot g^{-1}g, g^{-1}g' \cdot v'] = [g, v]$ et ϕ est injective. La continuité de ϕ et son inverse s'obtiennent de la même manière que dans la démonstration de la proposition 1.3.2. \square

2.5. COMPLEXIFICATION

On a vu que pour le cas complexe, l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique. Comme ce n'est pas le cas pour le cas réel, il sera utile de considérer la complexification du cas réel afin de bénéficier de cette particularité du cas complexe. Il sera donc question de considérer l'action du groupe G sur la complexification de l'espace vectoriel réel W . On définit d'abord ce que l'on veut dire par complexification et on y présente la structure des objets ainsi obtenus en complexifiant le cas réel.

Soit G un groupe fini et W une représentation réelle de dimension finie. On appellera la *complexification* de W l'espace vectoriel complexe

$$W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Soit $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ une \mathbb{R} -base de W . Alors l'ensemble $\{w_1 \otimes 1, w_2 \otimes 1, \dots, w_n \otimes 1\}$ est une \mathbb{C} -base de $W_{\mathbb{C}}$. Pour chaque $v = \sum_i v_i \otimes \alpha_i \in W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, avec $v_i = \sum_k a_{ik} \cdot w_k \in W$ et les $a_{ik} \in \mathbb{R}$, on a que

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i \otimes \alpha_i = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} \cdot w_k \right) \otimes \alpha_i = \sum_i \sum_k (a_{ik} \cdot w_k) \otimes \alpha_i \\ &= \sum_i \sum_k w_k \otimes (a_{ik} \cdot \alpha_i) = \sum_i \sum_k (a_{ik} \cdot \alpha_i) (w_k \otimes 1) \\ &= \sum_k \underbrace{\left(\sum_i (a_{ik} \cdot \alpha_i) \right)}_{\in \mathbb{C}} (w_k \otimes 1) \end{aligned}$$

On obtient alors la représentation naturelle de G sur l'espace vectoriel complexe $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ que l'on définit sur les générateurs par :

$$g \cdot (w_i \otimes 1) = \underbrace{(g \cdot w_i)}_{\in W} \otimes 1$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Pour chaque $g \in G$ et $v \in W_{\mathbb{C}}$ de la forme $v = \sum_i v_i \otimes \alpha_i$ avec $v_i = \sum_k a_{ik} \cdot w_k \in W$ avec les $a_{ik} \in \mathbb{R}$,

$$g \cdot v = g \cdot \left(\sum_k \left(\sum_i (a_{ik} \cdot \alpha_i) \right) (w_k \otimes 1) \right) = \sum_k \left(\sum_i (a_{ik} \cdot \alpha_i) \right) (g \cdot w_k \otimes 1)$$

Comme on l'a fait plus tôt, pour $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification de W , on peut y considérer les polynômes sur $W_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans \mathbb{C} que l'on note par $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$. On a la propriété suivante :

Proposition 2.5.1. *Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}] \cong \mathbb{R}[W] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ une \mathbb{R} -base de W et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ la \mathbb{C} -base de $W_{\mathbb{C}}$ associée, i.e $v_i = w_i \otimes 1$ pour tout i . On construit l'application

$$\phi : \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}] \longrightarrow \mathbb{R}[W] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$f(v) \longmapsto \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes a_{\lambda}$$

pour chaque $f(v) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot v^{\lambda} \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$, où l'on utilise la notation $v^{\lambda} = v_1^{\lambda_1} \cdot v_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot v_n^{\lambda_n}$ avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Cette application est un homomorphisme d'algèbres :

Pour chaque $f(v) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot v^{\lambda}$, $g(v) = \sum_{\lambda} b_{\lambda} \cdot v^{\lambda} \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $v \in W_{\mathbb{C}}$, on a que

$$\phi(\alpha) = 1 \otimes \alpha$$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cdot f(v)) &= \phi \left(\sum_{\lambda} (\alpha \cdot a_{\lambda}) v^{\lambda} \right) = \sum_{\lambda} v^{\lambda} \otimes (\alpha \cdot a_{\lambda}) = \alpha \left(\sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes a_{\lambda} \right) \\ &= \alpha \cdot \phi(f(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(f(v) + g(v)) &= \phi\left(\sum_{\lambda} (a_{\lambda} + b_{\lambda}) \cdot v^{\lambda}\right) = \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes (a_{\lambda} + b_{\lambda}) \\
&= \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes a_{\lambda} + \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes b_{\lambda} = \phi(f(v)) + \phi(g(v))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(f(v) \cdot g(v)) &= \phi\left(\sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot v^{\lambda} \cdot \sum_{\mu} b_{\mu} \cdot v^{\mu}\right) \\
&= \phi\left(\sum_{\eta=\lambda+\mu} \gamma_{\eta} \cdot v^{\eta}\right) \quad \text{avec} \quad \gamma_{\eta} = \sum_{\lambda+\mu=\eta} a_{\lambda} \cdot b_{\mu} \\
&= \sum_{\eta} w^{\eta} \otimes \gamma_{\eta} = \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes a_{\lambda} \cdot \sum_{\mu} w^{\mu} \otimes b_{\mu} = \phi(f(v)) \cdot \phi(g(v))
\end{aligned}$$

Ainsi ϕ est un homomorphisme d'algèbres.

On montre maintenant que ϕ est en plus un isomorphisme. Soit $f(v) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot v^{\lambda} \in \text{Ker } \phi$. Ainsi pour chaque $v \in W_{\mathbb{C}}$, $\phi(f(v)) = \sum_{\lambda} w^{\lambda} \otimes a_{\lambda} = 0 \Leftrightarrow a_{\lambda} = 0$ pour tout $\lambda \Leftrightarrow f(v) \equiv 0$ et donc ϕ est injective.

Soit $f = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \otimes a_{\lambda} \in \mathbb{R}[W] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ avec $f_{\lambda}(w) = \sum_{\mu_{\lambda}} b_{\mu_{\lambda}} \cdot w^{\mu_{\lambda}} \in \mathbb{R}[W]$ pour tout λ . Alors pour $\sum_{\lambda} \sum_{\mu_{\lambda}} (b_{\mu_{\lambda}} \cdot a_{\lambda}) v^{\mu_{\lambda}} \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{\lambda} \sum_{\mu_{\lambda}} (b_{\mu_{\lambda}} \cdot a_{\lambda}) v^{\mu_{\lambda}}\right) &= \sum_{\lambda} \sum_{\mu_{\lambda}} w^{\mu_{\lambda}} \otimes (b_{\mu_{\lambda}} \cdot a_{\lambda}) \\
&= \sum_{\lambda} \sum_{\mu_{\lambda}} (b_{\mu_{\lambda}} \cdot w^{\mu_{\lambda}} \otimes a_{\lambda}) \\
&= \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mu_{\lambda}} b_{\mu_{\lambda}} \cdot w^{\mu_{\lambda}}\right) \otimes a_{\lambda} = f(w)
\end{aligned}$$

Donc ϕ est aussi surjective et ainsi elle est un isomorphisme d'algèbres. \square

On s'intéresse maintenant à la structure de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$.

Lemme 2.5.1. *Soit G un groupe fini agissant \mathbb{R} -linéairement sur V un \mathbb{R} -espace vectoriel et $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sa complexification. Alors*

$$V_{\mathbb{C}}^G = V^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une \mathbb{R} -base de V et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ la \mathbb{C} -base de $V_{\mathbb{C}}$ associée, i.e $y_i = x_i \otimes 1$ pour chaque i . Alors pour chaque y_i de la base de $V_{\mathbb{C}}$ et $g \in G$,

$$\begin{aligned} y_i \in V_{\mathbb{C}}^G &\Leftrightarrow (g \cdot x_i) \otimes 1 = g \cdot y_i = y_i = x_i \otimes 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = (g \cdot x_i - x_i) \otimes 1 \\ &\Leftrightarrow g \cdot x_i - x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow g \cdot x_i = x_i \Leftrightarrow x_i \in V^G \end{aligned}$$

Ainsi, comme tout élément est combinaison linéaire des éléments de la base, on a le résultat. \square

Corollaire 2.5.1. *Soit G un groupe fini agissant sur W un \mathbb{R} -espace vectoriel et $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sa complexification. Alors*

$$\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G \cong \mathbb{R}[W]^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

DÉMONSTRATION. On a par la proposition 2.5.1 que $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}] \cong \mathbb{R}[W] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. En considérant les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$ et $\mathbb{R}[W] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ respectivement, $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]_k$ et $\mathbb{R}[W]_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, les polynômes de degré k , on a alors par le lemme 2.5.1 que pour tout k

$$\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]_k^G \cong \mathbb{R}[W]_k^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Comme

$$\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]_k^G$$

et

$$\mathbb{R}[W]^G = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{R}[W]_k^G$$

On obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G &= \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]_k^G \cong \bigoplus_{k \geq 0} (\mathbb{R}[W]_k^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\ &\cong \left(\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{R}[W]_k^G \right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}[W]^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \end{aligned}$$

\square

2.5.1. Quotient algébrique de la complexification

Soit G un groupe fini, W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification. Si $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ sont des générateurs homogènes de $\mathbb{R}[W]^G$, alors $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ avec $q_i = p_i \otimes 1$ forment un ensemble de générateurs homogènes de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$. On définit alors l'application

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m) : W_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

$$v \longmapsto (q_1(v), q_2(v), \dots, q_m(v))$$

de laquelle on obtient l'homéomorphisme $\tilde{q} : W_{\mathbb{C}}/G \longrightarrow q(W_{\mathbb{C}}) = W_{\mathbb{C}}//G$ défini par $\tilde{q}(Gv) = (\tilde{q} \circ \pi)(v) := q(v)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}^m \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{q} & \\ W_{\mathbb{C}}/G & & \end{array}$$

On montre maintenant le lien entre le quotient algébrique $W//G$ et celui de la complexification $W_{\mathbb{C}}//G$. On a $I \trianglelefteq \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]$ l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, des générateurs de $\mathbb{R}[W]^G$ et $W//G = Z = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{R}^m$. On vérifie d'abord la proposition suivante.

Proposition 2.5.2. *Soit G un groupe fini, W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification. Alors*

$$\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}//G] = \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m]/(I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

DÉMONSTRATION. Soit la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m] \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur $_ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ à cette suite, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G &\cong (\mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong (\mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_m] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) / (I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\ &\cong \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m] / (I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\end{aligned}$$

□

On a donc de ce résultat que $W_{\mathbb{C}}//G = \mathcal{V}(I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^m$. On montre maintenant la propriété qui motive la complexification de notre cas réel.

Proposition 2.5.3. *Soit G un groupe fini, W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification.*

$$W//G = W_{\mathbb{C}}//G \cap \mathbb{R}^m$$

DÉMONSTRATION. Soit $z \in W//G = \mathcal{V}(I)$. Alors pour chaque $\sum_i h_i \otimes a_i \in I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_i h_i \otimes a_i \right) (z) = \sum_i \underbrace{h_i(z)}_{=0} \otimes a_i = 0$$

et donc $z \in W_{\mathbb{C}}//G \cap \mathbb{R}^m$.

Soit maintenant $z \in W_{\mathbb{C}}//G \cap \mathbb{R}^m$. Alors pour chaque $h \in I$,

$$h(z) = h(z) \otimes 1 = (h \otimes 1)(z) = 0$$

donc $z \in W//G$. □

On termine avec une propriété qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.5.2. *Soit $z \in Z = W//G$ et $v \in W_{\mathbb{C}}$ tels que $q(v) = z$, alors il existe un $k \in G$ tel que*

$$\bar{v} = k \cdot v = k^{-1} \cdot v$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes de $\mathbb{R}[W]^G$ et $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ les générateurs de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$ tels que $q_i = p_i \otimes 1$. Comme les polynômes q_i sont réels et que $q(v) = z \in Z = q(W_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^m$, $q(\bar{v}) = \overline{q(v)} = \bar{z} = z = q(v)$. Ainsi

$$\tilde{q}(Gv) = \tilde{q} \circ \pi(v) = q(v) = q(\bar{v}) = \tilde{q} \circ \pi(\bar{v}) = \tilde{q}(G\bar{v})$$

De l'injectivité de \tilde{q} on a que $Gv = G\bar{v}$ et donc v et \bar{v} sont sur la même orbite. Ainsi il existe un $k \in G$ tel que $\bar{v} = k \cdot v$. Soit $v = w_1 + iw_2 \in W_{\mathbb{C}} \cong W \oplus iW$, alors $\bar{v} = k \cdot v \Leftrightarrow w_1 - iw_2 = k \cdot (w_1 + iw_2) = (k \cdot w_1) + i(k \cdot w_2) \Leftrightarrow w_1 = k \cdot w_1$ et $-w_2 = k \cdot w_2 \Leftrightarrow w_1 = k^{-1} \cdot w_1$ et $-w_2 = k^{-1} \cdot w_2 \Leftrightarrow \bar{v} = w_1 - iw_2 = k^{-1} \cdot (w_1 + iw_2) = k^{-1} \cdot v$. \square

2.5.2. Forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante

Au chapitre précédent, on a trouvé un produit scalaire G -invariant sur W . On montre comment à partir de ce produit scalaire, on obtient une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante sur la complexification $W_{\mathbb{C}}$.

Proposition 2.5.4. *Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire G -invariant de W et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base orthonormale. Pour $\{x_1 \otimes 1, x_2 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1\}$ comme \mathbb{C} -base de l'espace vectoriel $W_{\mathbb{C}}$, on définit sur $W_{\mathbb{C}}$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante par*

$$(x_i \otimes 1, x_j \otimes 1) = (x_i, x_j) = \delta_{ij}$$

DÉMONSTRATION. Pour $u = \sum_i x_i \otimes a_i$, $v = \sum_i x_i \otimes b_i$ et $w = \sum_i x_i \otimes c_i \in W_{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a que

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left(\sum_i x_i \otimes a_i, \sum_i x_i \otimes b_i \right) = \sum_i a_i b_i = \sum_i b_i a_i \\ &= \left(\sum_i x_i \otimes b_i, \sum_i x_i \otimes a_i \right) = (v, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u + v, w) &= \left(\sum_i x_i \otimes a_i + \sum_i x_i \otimes b_i, \sum_i x_i \otimes c_i \right) = \sum_i (a_i + b_i) c_i \\ &= \sum_i a_i c_i + \sum_i b_i c_i \\ &= \left(\sum_i x_i \otimes a_i, \sum_i x_i \otimes c_i \right) + \left(\sum_i x_i \otimes b_i, \sum_i x_i \otimes c_i \right) \\ &= (u, w) + (v, w) \end{aligned}$$

$$(\lambda \cdot u, v) = \left(\sum_i x_i \otimes (\lambda \cdot a_i), \sum_i x_i \otimes b_i \right) = \sum_i \lambda a_i \cdot b_i = \lambda \sum_i a_i \cdot b_i = \lambda(u, v)$$

Pour $u = \sum_i x_i \otimes a_i$, si $0 = (u, v) = \sum_i a_i b_i$ pour chaque $v = \sum_i x_i \otimes b_i \in W$, alors $(u, x_i \otimes 1) = a_i = 0$ pour tout i et ainsi $u = 0$ et (\cdot, \cdot) est non-dégénérée.

On montre finalement que $(.,.)$ est G -invariante.

$$\begin{aligned}(g \cdot u, g \cdot v) &= \left(\sum_i (g \cdot x_i) \otimes a_i, \sum_i (g \cdot x_i) \otimes b_i \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (g \cdot x_i, g \cdot x_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (x_i, x_j) = \sum_i a_i b_i = (u, v)\end{aligned}$$

□

De même que pour le cas réel, il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$(W_{\mathbb{C}})^* = (W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^* \cong W^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = W_{\mathbb{C}}$$

Or la forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante sur $W_{\mathbb{C}}$ que l'on vient de définir nous permet de reprendre la proposition 2.4.5 pour la complexification $W_{\mathbb{C}}$:

Proposition 2.5.5. *Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification. Soit $(.,.)$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante sur $W_{\mathbb{C}}$. Alors l'application*

$$\begin{aligned}\phi : W_{\mathbb{C}} &\longrightarrow (W_{\mathbb{C}})^* \\ w &\longmapsto (w, .)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}G$ -modules. De plus, soit H un sous-groupe de G . Alors $w \in W_{\mathbb{C}}$ est H -invariant $\Leftrightarrow \phi(w)$ est H -invariant.

DÉMONSTRATION. On reprend la démonstration de la proposition 2.4.5. □

Chapitre 3

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE D'ORBITES

Pour G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini, on s'intéresse dans ce chapitre à l'origine de la matrice *Grad* de laquelle on y trouvera les inégalités qui définiront l'espace d'orbites. Avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de l'espace vectoriel réel W et $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ des générateurs homogènes de $\mathbb{R}[W]^G$, on définit pour chaque $w \in W$ la matrice *Jacobienne* de p à w ,

$$\mathcal{J}(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

où pour chaque i et j , $\frac{\partial p_i(w)}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de p_i par rapport à x_j au point w . On obtient alors la matrice symétrique suivante, que l'on appelle *Grad* ($p(w)$) :

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p(w)) &= \mathcal{J}(w)\mathcal{J}^t(w) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_n} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\left(\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \right) (w) \right)_{i,j} \end{aligned}$$

On verra que chaque entrée de cette matrice se trouve à être un polynôme de $\mathbb{R}[W]^G$. Or, cet anneau est l'anneau de coordonnées de la variété affine $Z = W//G$. Ainsi, les entrées de cette matrice correspondent à des fonctions polynomiales sur le quotient algébrique $W//G$.

Définition 3.0.1. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille n par n . On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si $x^t A x \geq 0$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 3.0.6. La matrice $Grad(p(w))$ est semi-définie positive pour chaque $w \in W$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$x^t Grad(p(w))x = x^t (\mathcal{J}(w) \mathcal{J}(w)^t) x = (x^t \cdot \mathcal{J}(w)) (x^t \cdot \mathcal{J}(w))^t \geq 0$$

□

On montrera donc que la fonction matricielle $Grad$ sur Z est semi-définie positive seulement sur les points de Z correspondant à ceux de l'espace d'orbites. Or une matrice symétrique est semi-définie positive si et seulement si les déterminants des mineurs principaux sont non négatifs (théorème 4.1.1). Ainsi, ces inégalités définiront l'espace d'orbites W/G dans $W//G$.

Mais avant, on observera que la matrice $\mathcal{J}(w)$ se trouve à être l'application tangente de l'application $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ comme base du \mathbb{R} -espace vectoriel W . Pour cela, nous avons besoin d'une notion d'espace tangent, ce que l'on fera dans la première section. Comme nous n'utiliserons que des espaces vectoriels, nous opterons pour une version algébrique qui correspond à la définition standard d'espace tangent à une variété différentiable pour le cas où elle est composée d'une seule carte. Dans la seconde section, on utilisera ces constructions pour étudier l'espace d'orbites réel. Ceci nous permettra de voir entre autres les strates de l'espace d'orbites comme des variétés lisses. Dans la dernière section, on utilisera ces résultats pour la complexification du cas réel.

3.1. ESPACES TANGENTS ET APPLICATIONS TANGENTES

Pour W un espace vectoriel réel de dimension finie, on veut donner une définition d'espace tangent. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une \mathbb{R} -base de W . Pour $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $w \in W \cong \mathbb{R}^n$, on note

$$(D_i f)_w = \frac{\partial f(w)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(w + tx_i) - f(w)}{t}$$

la dérivée partielle de f en w par rapport à x_i pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$. On note donc

$$(Df)_w = ((D_1 f)_w, (D_2 f)_w, \dots, (D_n f)_w) \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur *gradient* donné par les dérivées partielles de f en w .

On donne un exemple qui motive notre définition d'espace tangent. Pour un vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on obtient une application linéaire sur $C_w^1(W)$, l'ensemble des fonctions réelles sur W différentiables en w , via

$$v_w(f) = (Df)_w \cdot v^t = \sum_i v_i \cdot (D_i f)_w$$

Cette application est linéaire car pour chaque $f, g \in C_w^1(W)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v_w(\alpha f + \beta g) &= D(\alpha f + \beta g)_w \cdot v^t = \sum_i v_i \cdot D_i(\alpha f + \beta g)_w \\ &= \sum_i v_i \cdot (\alpha (D_i f)_w + \beta (D_i g)_w) \\ &= \alpha \sum_i v_i \cdot (D_i f)_w + \beta \sum_i v_i \cdot (D_i g)_w = \alpha \cdot v_w(f) + \beta \cdot v_w(g) \end{aligned}$$

de plus, on a que

$$\begin{aligned} v_w(fg) &= D(fg)_w \cdot v^t = \sum_i v_i \cdot D_i(fg)_w = \sum_i v_i \cdot (f(w)(D_i g)_w + g(w)(D_i f)_w) \\ &= f(w) \sum_i v_i \cdot (D_i g)_w + g(w) \sum_i v_i \cdot (D_i f)_w = f(w) \cdot v_w(f) + g(w) \cdot v_w(g) \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur v agit sur une fonction différentiable comme dérivée directionnelle. On en tire une définition d'espace tangent à un ouvert $\mathcal{U} \subseteq W$.

Définition 3.1.1. Soit W un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour $w \in \mathcal{U} \subseteq W$ un ouvert, on définit l'espace tangent à \mathcal{U} au point w , noté $T_w \mathcal{U}$, comme

étant l'espace vectoriel réel des applications linéaires $v : C_w^1(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour chaque $f, g \in C_w^1(\mathcal{U})$:

$$v_w(f \cdot g) = v_w(f) \cdot g(w) + f(w) \cdot v_w(g)$$

De telles fonctions sont appelées des dérivations.

On remarque que cette condition implique que $v(\lambda) = 0$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in T_w\mathcal{U}$. En effet, $v_w(1) = v_w(1 \cdot 1) = v_w(1) \cdot 1 + 1 \cdot v_w(1)$, ce qui implique que $v_w(1) = 2v_w(1)$ et donc $v_w(1) = 0$. Par linéarité, $v_w(\lambda) = 0$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$. La structure d'espace vectoriel de $T_w\mathcal{U}$ est donnée par les opérations

$$(v + v')_w(f) = v_w(f) + v'_w(f)$$

et

$$(\alpha v)_w(f) = \alpha \cdot v_w(f)$$

pour chaque $v, v' \in T_w\mathcal{U}$ et $f \in C_w^1(\mathcal{U})$.

La proposition suivante nous dit que le plan tangent à un ouvert est égal au plan tangent à l'espace vectoriel ambiant.

Proposition 3.1.1. *Soit W un espace vectoriel réel et $w \in W$. Pour un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subseteq W$ de w , on a que*

$$T_w\mathcal{U} = T_wW$$

DÉMONSTRATION. On montre que l'inclusion $\iota : \mathcal{U} \longrightarrow W$ donne un isomorphisme

$$\phi : T_w\mathcal{U} \longrightarrow T_wW$$

$$v \longmapsto \tilde{v}$$

tel que pour chaque $f \in C_w^1(W)$, $\tilde{v}_w(f) = v_w(f|_{\mathcal{U}}) = v_w(f \circ \iota)$. Cette application est linéaire car pour chaque $v, v' \in T_w\mathcal{U}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha v + \beta v')_w(f) &= (\alpha v + \beta v')_w(f|_{\mathcal{U}}) = \alpha \cdot v_w(f|_{\mathcal{U}}) + \beta \cdot v'_w(f|_{\mathcal{U}}) \\ &= \alpha \cdot \phi(v)_w(f) + \beta \cdot \phi(v')_w(f) \end{aligned}$$

De plus elle est injective car si $\phi(v) = \phi(v')$, pour chaque $f \in C_w^1(W)$,

$$v_w(f|_{\mathcal{U}}) = \phi(v)_w(f) = \phi(v')_w(f) = v'_w(f|_{\mathcal{U}})$$

et donc $v = v'$. Comme pour chaque $\tilde{v} \in T_w W$, \tilde{v} est une application linéaire de $C_w^1(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(\tilde{v}) = \tilde{v}$ et ainsi l'application est surjective. On obtient donc un isomorphisme entre deux espaces vectoriels dont l'un est inclus dans l'autre, d'où l'égalité. \square

Proposition 3.1.2. *Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de l'espace vectoriel réel W . Alors*

$$T_w W = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_w, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_w, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_w \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

DÉMONSTRATION. Voir [30] proposition 3.1 page 7. \square

Définition 3.1.2. *Soit V et W des espaces vectoriels réels. Pour $f : V \rightarrow W$ une application différentiable, on note le pull-back*

$$f^* : C^1(W) \rightarrow C^1(V)$$

$$\phi \mapsto \phi \circ f$$

et l'application tangente en $v \in V$, $df_v : T_v V \rightarrow T_{f(v)} W$, qui est donnée par

$$(df_v D_v)(\phi) = D_v(f^* \phi) = D_v(\phi \circ f)$$

pour chaque $D_v \in T_v V$ et $\phi \in C^1(W)$.

Proposition 3.1.3. *Soit V et W des espaces vectoriels réels avec bases respectives $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Pour $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : V \rightarrow W$ une application différentiable, la matrice de l'application tangente dans ces bases est*

$$df_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 3.1.2, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_v \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(v)} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ sont des bases pour les espaces vectoriels $T_v V$ et $T_{f(v)} W$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$ et $\phi \in C^1(W)$,

$$\begin{aligned} df_v \frac{\partial}{\partial x_i}|_v(\phi) &= \frac{\partial}{\partial x_i}|_v(f^* \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_v(\phi \circ f) = \sum_j \frac{\partial \phi(f(v))}{\partial x_j} \frac{\partial f_j(v)}{\partial x_i} \\ &= \left(\sum_j \frac{\partial f_j(v)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}|_{f(v)} \right) (\phi) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_v \in T_v V$,

$$\begin{aligned} df_v \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_v \right) (\phi) &= \sum_i \alpha_i df_v \frac{\partial}{\partial x_i}|_v(\phi) = \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \frac{\partial f_j(v)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}|_{f(v)}(\phi) \right) \\ &= \left(\sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f_j(v)}{\partial x_i} \alpha_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j}|_{f(v)} \right) (\phi) \end{aligned}$$

Donc,

$$df_v : T_v V \longrightarrow T_{f(v)} W$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(v)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(v)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(v)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

□

On note la functorialité de l'application tangente.

Proposition 3.1.4. Soit $f : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^l$ et $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ respectivement avec $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$. Alors pour $u \in \mathcal{U}$,

$$d(g \circ f)_u = dg_{f(u)} \circ df_u$$

et pour l'identité $id : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $d(id)_u = id_{T_u \mathbb{R}^l}$.

DÉMONSTRATION. Pour la première partie, soit $D \in T_u \mathbb{R}^l$ et $\phi \in C^1(g(\mathcal{V}))$. Alors

$$(dg_{f(u)} \circ df_u)D(\phi) = df_u D(\phi \circ g) = D(\phi \circ g \circ f) = D(\phi \circ (g \circ f)) = d(g \circ f)_u D(\phi)$$

Pour la deuxième, la matrice de $d(id)_w$ est l'identité, d'où le résultat. \square

3.1.1. Structure de $\mathbb{R}G_w$ -module sur T_wW

Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini. On montre que les espaces tangents T_wW sont munis naturellement d'une structure de $\mathbb{R}G_w$ -modules.

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W . Alors pour $w = \sum_i \alpha_i x_i \in W$, l'action de $g \in G$ sur $w \in W$ est donnée par $g \cdot w = g \cdot (\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i (g \cdot x_i) = \sum_i \alpha_i (\sum_j [g]_{ji} x_j) = \sum_j (\sum_i \alpha_i [g]_{ji}) x_j$. En considérant l'action d'un élément $g \in G$ sur W comme un automorphisme sur W , on écrit donc $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : W \rightarrow W$ où les fonctions $g_j : W \rightarrow \mathbb{R}$ sont données par $g_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_i \alpha_i [g]_{ji}$. Alors, pour tout $w \in W$, $\frac{\partial g_j(w)}{\partial x_k} = [g]_{jk}$ pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$. Ainsi, l'application tangente $dg_w : T_wW \rightarrow T_{gw}W$ est donnée par la matrice $[g] = ([g]_{ij})$.

Pour le sous-groupe d'isotropie $G_w \subseteq G$, on obtient donc une action sur T_wW en posant

$$g \cdot D := dg_w D$$

pour tout $D \in T_wW$. En effet, l'application tangente d'un $g \in G_w$ est alors une application linéaire inversible $dg_w : T_wW \rightarrow T_wW$ donnée par la matrice $[g]$. Cette action définit alors une structure de $\mathbb{R}G_w$ -modules sur T_wW .

Avec la proposition 3.1.2, nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels $T_wW \cong \mathbb{R}^n \cong W \cong W^*$. Mais avec la structure de $\mathbb{R}G_w$ -modules donnée par cette action, il y a en fait un isomorphisme de $\mathbb{R}G_w$ -modules $T_wW \cong W \cong W^*$.

Proposition 3.1.5. *Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W . Pour tout $w \in W$, l'application*

$$\psi : T_wW \rightarrow W$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_w \mapsto x_i$$

définit un isomorphisme de $\mathbb{R}G_w$ -modules.

DÉMONSTRATION. On vérifie que cette application est G_w -équivariante. Pour tout $g \in G_w$ et $\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \in T_w W$,

$$\begin{aligned}
 g \cdot \psi \left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) &= g \cdot \left(\sum_i a_i x_i \right) = \sum_i a_i (g \cdot x_i) \\
 &= \sum_i a_i \left(\sum_j [g]_{ji} x_j \right) = \sum_i a_i \left(\sum_j [g]_{ji} \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} |_w \right) \right) \\
 &= \psi \left(\sum_i a_i \left(\sum_j [g]_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} |_w \right) \right) = \psi \left(\sum_i a_i \left(g \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) \right) \\
 &= \psi \left(g \cdot \left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) \right)
 \end{aligned}$$

Donc, elle est G_w -équivariante.

Cette application est aussi injective. Si $0 = \psi \left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) = \sum_i a_i \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) = \sum_i a_i x_i$, alors $a_i = 0$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ et donc ψ est injective. Soit $\sum_i a_i x_i \in W$, alors $\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \in T_w W$ et $\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) = \sum_i a_i x_i$ donc ψ est surjective. On obtient donc un isomorphisme de $\mathbb{R}G_w$ -modules. \square

Corollaire 3.1.1. *Pour tout $w \in W$, il y a un isomorphisme de $\mathbb{R}G_w$ -modules $T_w W \cong W^*$.*

DÉMONSTRATION. Avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W orthonormée pour un produit scalaire G -invariant, il suffit de prendre $\eta : T_w W \rightarrow W^*$ égal à $\eta = \phi \circ \psi$ avec les isomorphismes de $\mathbb{R}G_w$ -modules des propositions 2.4.5 et 3.1.5. \square

De cet isomorphisme de $\mathbb{R}G_w$ -modules, avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W orthonormée pour un produit scalaire G -invariant, il est alors possible de voir les $\frac{\partial}{\partial x_i} |_w$ comme des éléments de W^* , soit des fonctionnelles linéaires $\frac{\partial}{\partial x_i} |_w : W \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\frac{\partial}{\partial x_i} |_w(x_j) = x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. On considère donc pour $f \in C^1(W)$ $(Df)_w = \sum_i (D_i f)_w \frac{\partial}{\partial x_i} |_w$ comme un élément de W^* , i.e. que pour chaque $x = \sum_i \alpha_i x_i \in W$,

$$\begin{aligned}
 (Df)_w(x) &= \left(\sum_i (D_i f)_w \frac{\partial}{\partial x_i} |_w \right) (x) = \sum_i (D_i f)_w \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_w(x) \right) \\
 &= \sum_i (D_i f)_w \alpha_i
 \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1. Soit $w \in W$, $f \in C^1(W)$ et $g \in G_w$, alors

$$(g^{-1} \cdot (Df)_w)(x) = (Df)_w(g \cdot x)$$

pour chaque $x \in W$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W orthonormée pour un produit scalaire G -invariant. Alors, pour $g \in G_w < O(n, \mathbb{R})$ et $x = \sum_i \alpha_i x_i \in W$,

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot (Df)_w(x) &= \left(g^{-1} \cdot \sum_i (D_i f)_w \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_w \right) (x) = \left(\sum_i (D_i f)_w g^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_w \right) (x) \\ &= \left(\sum_i (D_i f)_w \left(\sum_j [g^{-1}]_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_w \right) \right) (x) = \left(\sum_j \left(\sum_i (D_i f)_w [g^{-1}]_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_w \right) (x) \\ &= \sum_j \left(\sum_i (D_i f)_w [g^{-1}]_{ji} \right) \alpha_j = \sum_j \left(\sum_i (D_i f)_w [g]_{ij} \right) \alpha_j \\ &= \sum_i (D_i f)_w \left(\sum_j [g]_{ij} \alpha_j \right) = \left(\sum_i (D_i f)_w \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_w \right) \left(\sum_k \left(\sum_j [g]_{kj} \alpha_j \right) x_k \right) \\ &= (Df)_w(g \cdot x) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.2. Soit $w \in W$ et $g \in G$. Pour $q \in \mathbb{R}[W]^G$, alors

$$(Dq)_w(g \cdot x) = (Dq)_{g^{-1} \cdot w}(x)$$

pour chaque $x \in W$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W ainsi que $w = \sum_i w_i x_i$ et $x = \sum_i \alpha_i x_i \in W$. Pour $q \in \mathbb{R}[W]^G$, alors pour chaque $w \in W$, $q(w) = q(g \cdot w) =$

$(q \circ g)(w)$ et donc $\frac{\partial q(w)}{\partial x_k} = \frac{\partial (q \circ g)(w)}{\partial x_k}$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (Dq)_w(g \cdot x) &= \sum_j \frac{\partial q(w)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_w (g \cdot x) \right) = \sum_j \frac{\partial q(w)}{\partial x_j} \left(\sum_k \alpha_k [g]_{jk} \right) \\
 &= \sum_k \sum_j \left(\frac{\partial q(w)}{\partial x_j} \alpha_k [g]_{jk} \right) = \sum_k \sum_j \left(\frac{\partial q(w)}{\partial x_j} \alpha_k \frac{\partial g_j(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \right) \\
 &= \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial q(w)}{\partial x_j} \frac{\partial g_j(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \right) \alpha_k = \sum_k \frac{\partial (q \circ g)(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \cdot \alpha_k \\
 &= \sum_k \frac{\partial (q \circ g)(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{g^{-1} \cdot w} (x) \right) \\
 &= \sum_k \frac{\partial q(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{g^{-1} \cdot w} (x) \right) = (Dq)_{g^{-1} \cdot w}(x)
 \end{aligned}$$

□

3.2. ESPACES TANGENTS AUX STRATES

Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini avec G un groupe fini. Dans cette section, on s'intéresse aux plans tangents des strates de W ainsi qu'à l'application tangente de l'application polynomiale p donnée par les générateurs homogènes de l'anneau des invariants.

Soit alors l'application polynomiale $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$. L'application tangente à un point $w \in W$

$$dp_w : T_w W \longrightarrow T_{p(w)} \mathbb{R}^m$$

est donnée par la matrice

$$dp_w = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathcal{J}(w)$$

Pour $w \in W$ et $H = G_w$, W^H est un sous-espace vectoriel H -stable de W . De plus, on a vu à la proposition 1.4.2 que $W^{<H>}$ est ouvert dans W^H . On considère alors la restriction de p à cet ouvert de W^H .

Proposition 3.2.1. *Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini, $w \in W$ et $H = G_w$. On note $\phi : W^{(H)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la composition de l'inclusion $\iota : W^{(H)} \rightarrow W$ avec l'application p , i.e. $\phi = p|_{W^{(H)}}$. Alors l'application ϕ est un difféomorphisme local sur son image.*

DÉMONSTRATION. On a montré à la proposition 1.3.2 que l'on a un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : G/H \times_{N_G(H)/H} W^{<H>} &\longrightarrow W^{(H)} = G(W^{<H>}) \\ [g, w] &\longmapsto g \cdot w \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $w \in W^{(H)}$, avec $H = G_w$, $W^{<H>}$ est une slice en w et donc $W^{<H>}/(N_G(H)/H)$ est homéomorphe à $W^{(H)}/G$ par le corollaire 1.3.1. Comme pour chaque $w \in W^{<H>}$, le groupe d'isotropie pour l'action de $N_G(H)/H$ est trivial, i.e. $(N_G(H)/H)_w = eH$, le corollaire 1.3.3 nous donne un homéomorphisme local $W^{<H>} \stackrel{\text{local}}{\cong} W^{<H>}/(N_G(H)/H) \cong W^{(H)}/G \cong p(W^{<H>})$. Ainsi, il existe $\mathcal{U} \subseteq W^{<H>}$ un voisinage de w pour lequel l'application $p|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow p(\mathcal{U})$ est un homéomorphisme. Comme l'application p est polynomiale, elle est en fait un difféomorphisme sur cet ouvert. Donc, ϕ est un difféomorphisme local. \square

Corollaire 3.2.1. *L'application tangente $d\phi_w : T_w W^{(H)} \rightarrow T_{p(w)} \mathbb{R}^m$ est injective et donc*

$$\dim T_w W^{(H)} = \text{rg } d\phi_w = \dim W^H$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U} \subseteq W^{<H>} \subseteq W^H$ un voisinage ouvert de w tel que $\phi : \mathcal{U} \rightarrow p(\mathcal{U})$ est un difféomorphisme. Alors, l'inverse $\phi^{-1} : p(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ est différentiable en $p(w)$ et ainsi, on a que

$$d\phi_{p(w)}^{-1} \circ d\phi_w = d(\phi^{-1} \circ \phi)_w = d(\text{id}_{\mathcal{U}})_w = \text{id}_{T_w \mathcal{U}}$$

est injective et donc $d\phi_w$ est injective. L'application $d\phi_w : T_w \mathcal{U} = T_w W^H \rightarrow T_{p(w)} \mathbb{R}^m$ est injective signifie que le rang de la matrice $d\phi_w$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel $T_w W^H \cong (W^H)^* \cong W^H$. \square

De ce résultat nous avons que le rang de la matrice $d\phi_w$ en chaque point $w \in W^{(H)}$ est égal à la dimension des espaces vectoriels $T_w W^{(H)} = T_w W^H \cong W^H \cong \mathbb{R}^s$. En fait, les strates $W^{(H)}$ sont des *variétés lisses*, i.e. qu'en chaque point, ils ont un espace tangent isomorphe à $\mathbb{R}^s \cong W^H$. Or, la proposition 3.2.1 donne également que les strates de l'espace d'orbites sont lisses.

Corollaire 3.2.2. *Les strates de W/G sont lisses.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition précédente, pour chaque $w \in W^{(H)}$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de w tel que $p|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow p(\mathcal{U})$ est un difféomorphisme. Ainsi, on obtient un isomorphisme d'espaces tangents $dp_w : T_w \mathcal{U} \rightarrow T_{p(w)} p(\mathcal{U})$. Comme $T_w \mathcal{U} \cong W^H \cong \mathbb{R}^s$, il en est de même pour $T_{p(w)} p(\mathcal{U}) \cong T_{Gw}(W^{(H)}/G)$. Donc, $T_{Gw}(W^{(H)}/G) \cong \mathbb{R}^s$ et ainsi, $W^{(H)}/G$ est lisse. \square

Maintenant, on regarde ce qu'il arrive si l'on considère l'application tangente de $p : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ sur l'espace W en entier. On verra que la matrice de dp_w est de rang égal à la dimension de W^{G_w} et ce, même si à priori la taille de la matrice est plus grande.

Proposition 3.2.2. *Soit l'application polynomiale $p : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $w \in W$ et $H = G_w$. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ une base de W^H et la complétion $\{x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n\}$ qui forme une base de W . Alors la matrice de $dp_w : T_w W \rightarrow T_{p(w)} \mathbb{R}^m$ est dans ces bases de la forme*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_s(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_s(w)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_s(w)}{\partial x_s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_s} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\frac{\partial p_i(w)}{\partial x_j} = 0$ pour chaque $j > s$. De plus, elle est de rang égal à $s = \dim W^H$.

DÉMONSTRATION. Soit $w \in W$, $H = G_w$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ une base de W^H que l'on complète pour avoir une base de W , $\{x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n\}$. Pour $(Dp_i)_w = \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} |_w \in T_w W \cong W^*$ via l'identification $\frac{\partial}{\partial x_i} |_w \leftrightarrow x_i^*$ des bases canoniques associées, l'action de G est donnée par $g \cdot (Dp_i)_w = (Dp_i)_{(g^{-1} \cdot w)}$ pour chaque $g \in G$. Ainsi, pour $h \in H = G_w$, $h \cdot (Dp_i)_w = (Dp_i)_{(h^{-1} \cdot w)} = (Dp_i)_w$ et donc $(Dp_i)_w \in (W^*)^H \cong (W^H)^*$. Alors $(Dp_i)_w = \sum_{k=1}^s \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} |_w$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} = 0$ pour tout $k > s$. Ainsi dp_w est égale à

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_s} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_s} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_s} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_s} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où la partie non nulle de la matrice est égale à la matrice de $d\phi_w$ de rang $s = \dim W^H$. D'où le second énoncé. \square

On peut alors reformuler la proposition comme suit :

Corollaire 3.2.3. *Sous les conditions de la proposition précédente, on a que*

$$\langle (Dp_1)_w, (Dp_2)_w, \dots, (Dp_m)_w \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^s \cong W^{G_w}$$

où $(Dp_i)_w = ((D_1 p_i)_w, (D_2 p_i)_w, \dots, (D_n p_i)_w) = \left(\frac{\partial p_i(w)}{\partial x_1}, \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$ qui correspond à la i -ème ligne de la matrice dp_w pour ce choix de base. \square

On obtient donc pour chaque $w \in W$, avec un choix de base approprié, que la matrice $Grad(p(w))$ est

$$Grad(p(w)) = dp_w \cdot (dp_w)^t = \begin{pmatrix} d\phi_w \cdot (d\phi_w)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $d\phi_w$ est la matrice de taille $s \times s$ de l'application tangente de $\phi : W^{(G_w)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $s = \dim_{\mathbb{R}} W^{G_w}$.

3.3. COMPLEXIFICATION

On regarde maintenant ce que cela nous apporte comme information sur la complexification de W . Soit $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification du $\mathbb{R}G$ -module W et $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ les générateurs homogènes de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$ donnés par $q_i = p_i \otimes 1$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$ où les $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ génèrent $\mathbb{R}[W]^G$. Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une base de W , alors $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, avec $z_i = x_i \otimes 1$, est une \mathbb{C} -base de $W_{\mathbb{C}}$.

Tel que l'on a fait pour le cas réel, on note pour $f : W_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction complexe différentiable en $v \in W_{\mathbb{C}}$, les dérivées partielles

$$(D_i f)_v = \frac{\partial f(v)}{\partial z_i} = \lim_{z_i \rightarrow 0} \frac{f(v + z_i) - f(v)}{z_i}$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$. De même, on note le vecteur gradient

$$(Df)_v = \sum_i (D_i f)_v \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_v \in \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_v, \frac{\partial}{\partial z_2} \Big|_v, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_v \right\rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^n$$

En tant qu'espaces vectoriels complexes, de l'isomorphisme $W_{\mathbb{C}} \cong W_{\mathbb{C}}^*$, on considère $(Df)_v$ comme une fonctionnelle linéaire sur $W_{\mathbb{C}}$, qui agit comme dérivée directionnelle via

$$(Df)_v(x) = \sum_i D_i f_v a_i$$

pour chaque $x = \sum_i a_i z_i \in W_{\mathbb{C}}$.

Comme on a fait pour le cas réel, on obtient la propriété suivante.

Lemme 3.3.1. *Soit $v \in W_{\mathbb{C}}$ et $g \in G$. Pour q un polynôme G -invariant sur $W_{\mathbb{C}}$, alors*

$$(Dq)_v(g \cdot x) = (Dq)_{g^{-1} \cdot v}(x)$$

pour chaque $x \in W_{\mathbb{C}}$.

DÉMONSTRATION. Voir la démonstration pour le cas réel au lemme 3.1.2. \square

Proposition 3.3.1. *Soit $W_{\mathbb{C}}$ la complexification d'un $\mathbb{R}G$ -module W et $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ les générateurs homogènes de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$ donnés par $q_i = p_i \otimes 1$ où les $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ génèrent $\mathbb{R}[W]^G$. Alors, il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^s \cong W_{\mathbb{C}}^{G_v}$$

DÉMONSTRATION. Soit $v \in W_{\mathbb{C}}$ et $H = G_v$. Comme $W_{\mathbb{C}}^H \cong W^H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on a que

$$\dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}}^H = \dim_{\mathbb{R}} W^H = \text{rg } d\phi_w$$

pour $w \in W^H$ et $\phi = p|_{W^H}$. Or, pour $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ une base de W^H et $\{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ avec $z_i = x_i \otimes 1$ comme base de $W_{\mathbb{C}}^H$, puisque les coefficients des polynômes $\frac{\partial q_i(z)}{\partial z_j}$ sont réels,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_s} \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_s} \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1(v)}{\partial z_1} & \frac{\partial q_1(v)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial q_1(v)}{\partial z_s} \\ \frac{\partial q_2(v)}{\partial z_1} & \frac{\partial q_2(v)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial q_2(v)}{\partial z_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_m(v)}{\partial z_1} & \frac{\partial q_m(v)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial q_m(v)}{\partial z_s} \end{pmatrix}$$

De plus, le rang de ces matrices est égal à la dimension de l'espace vectoriel complexe engendré par les lignes de cette matrice, $\{(Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v\}$. Alors, $\dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}}^{G_v} = \dim_{\mathbb{C}} \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{C}}$ d'où le résultat. \square

Proposition 3.3.2. *Soit $v \in W_{\mathbb{C}}$, $H = G_v$ et $D(v) = \{(Df)_v \mid f \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G\}$. Il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$(W_{\mathbb{C}}^*)^H \cong D(v)$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$. Comme $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ sont des générateurs de cette algèbre, il existe un $h \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_m]$ tel que $f = h(q_1, q_2, \dots, q_m)$. Ainsi, pour $v \in W_{\mathbb{C}}$, on a par la règle de dérivation en chaîne que

$$\begin{aligned} (Df)_v &= D(h(q_1, q_2, \dots, q_m))_v = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(q(v))}{\partial z_j} \frac{\partial q_j(v)}{\partial z_i} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_v \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial h(q(v))}{\partial z_j} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial q_j(v)}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_v \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial h(q(v))}{\partial z_j} (Dq_j)_v \end{aligned}$$

Donc $D(v) = \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{C}}$ et on a que

$$(W_{\mathbb{C}}^*)^H \cong W_{\mathbb{C}}^H \cong \mathbb{C}^s \cong \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{C}} = D(v)$$

□

Définition 3.3.1. Soit $z \in Z = W//G$, $v \in W_{\mathbb{C}}$, $H = G_v$ et $k \in G$ tels que $q(v) = z$ et $\bar{v} = k \cdot v = k^{-1} \cdot v$ comme on a fait au lemme 2.5.2. Pour (\cdot, \cdot) une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante, on pose

$$\Delta_{\mathbb{R}}(v) = \{\lambda \in (W_{\mathbb{C}}^*)^H \mid \lambda \circ k = \bar{\lambda}\}$$

où $\bar{\lambda}$ est donnée par (\bar{v}, \cdot) , si $\lambda = (v, \cdot)$ pour un $v \in W_{\mathbb{C}}$.

On montre que $\Delta_{\mathbb{R}}(v)$ est en fait l'espace vectoriel réel généré par les gradients $\{(Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v\}$.

Proposition 3.3.3. Sous les hypothèses de la définition précédente,

$$\Delta_{\mathbb{R}}(v) = \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{R}}$$

pour $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ des générateurs de $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]^G$.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in W_{\mathbb{C}}$ et $k \in G$ tels que dans le lemme précédent. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, m$ et $x \in W_{\mathbb{C}}$, puisque les polynômes q_i ont des coefficients réels (de même que pour leurs dérivées partielles), $q_i(\bar{v}) = \overline{q_i(v)}$ pour chaque $v \in W_{\mathbb{C}}$. Ainsi, on montre que chaque $(Dq_i)_v$ est dans $\Delta_{\mathbb{R}}(v)$.

$$\begin{aligned} (Dq_i)_v(k \cdot x) &= (Dq_i)_{k^{-1} \cdot v}(x) = (Dq_i)_{\bar{v}}(x) = \sum_j \frac{\partial q_i(\bar{v})}{\partial z_j} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_{\bar{v}} \cdot x \right) \\ &= \sum_j \frac{\overline{\partial q_i(v)}}{\partial z_j} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_v \cdot x \right) = \overline{(Dq_i)_v}(x) \end{aligned}$$

Donc $\langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \Delta_{\mathbb{R}}(v)$.

On montre ensuite que $\Delta_{\mathbb{R}}(v) \subseteq \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{R}}$. Par la proposition 3.3.2, $(W_{\mathbb{C}}^*)^H \cong D(v)$. On définit l'application $\psi : (W_{\mathbb{C}}^*)^H \rightarrow (W_{\mathbb{C}}^*)^H$ par $\psi(\lambda) = \bar{\lambda} \circ k$ pour chaque $\lambda \in (W_{\mathbb{C}}^*)^H$. Cette application est conjuguée-linéaire car pour chaque $\alpha \in \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in (W_{\mathbb{C}}^*)^H$ et $w \in W_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha \cdot \lambda)(w) &= (\overline{\alpha \cdot \lambda} \circ k)(w) = (\overline{\alpha \cdot \lambda})(k \cdot w) = \bar{\alpha} \bar{\lambda}(k \cdot w) = \bar{\alpha} \cdot \psi(w) \\ \psi(\lambda + \mu)(w) &= (\overline{(\lambda + \mu)} \circ k)(w) = \overline{(\lambda + \mu)}(k \cdot w) = (\bar{\lambda} + \bar{\mu})(k \cdot w) \\ &= \bar{\lambda}(k \cdot w) + \bar{\mu}(k \cdot w) = \psi(\lambda)(w) + \psi(\mu)(w) = (\psi(\lambda) + \psi(\mu))(w) \end{aligned}$$

De plus, cette application admet une inverse $\psi^{-1} : (W_{\mathbb{C}^*})^H \longrightarrow (W_{\mathbb{C}^*})^H$ avec $\psi^{-1}(\lambda) = \bar{\lambda} \circ k^{-1}$ qui est aussi conjuguée-linéaire (en prenant k^{-1} au lieu de k dans l'argument précédent). En effet,

$$(\psi^{-1} \circ \psi)(\lambda) = \psi^{-1}(\psi(\lambda)) = \psi^{-1}(\bar{\lambda} \circ k) = \overline{\bar{\lambda} \circ k} \circ k^{-1} = \bar{\lambda} \circ k \circ k^{-1} = \lambda$$

et

$$(\psi \circ \psi^{-1})(\lambda) = \psi(\psi^{-1}(\lambda)) = \psi(\bar{\lambda} \circ k^{-1}) = \overline{\bar{\lambda} \circ k^{-1}} \circ k = \bar{\lambda} \circ k^{-1} \circ k = \lambda$$

On a donc un isomorphisme $\psi : (W_{\mathbb{C}^*})^H \longrightarrow (W_{\mathbb{C}^*})^H$. De plus, on remarque que pour $\lambda \in (W_{\mathbb{C}^*})^H$, $\psi(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \circ k \Leftrightarrow \bar{\lambda} = \lambda \circ k \Leftrightarrow \lambda \in \Delta_{\mathbb{R}}(v)$. Soit alors $\lambda \in \Delta_{\mathbb{R}}(v) \subseteq (W_{\mathbb{C}^*})^H = D(v)$. On a donc que $\lambda = \sum_i \alpha_i (Dq_i)_v$ avec les $\alpha_i = x_i + iy_i \in \mathbb{C}$. Comme $\bar{\lambda} \circ k = \psi(\lambda) = \lambda$, on a que

$$\begin{aligned} \sum_i x_i (Dq_i)_v(w) + i \left(\sum_i y_i (Dq_i)_v(w) \right) &= \left(\sum_i \alpha_i (Dq_i)_v \right) (w) = \lambda(w) = \bar{\lambda}(k \cdot w) \\ &= \overline{\left(\sum_i x_i (Dq_i)_v(k \cdot w) + i \left(\sum_i y_i (Dq_i)_v(k \cdot w) \right) \right)} \\ &= \overline{\left(\sum_i x_i (Dq_i)_{(k^{-1} \cdot v)}(w) \right) + i \left(\sum_i y_i (Dq_i)_{(k^{-1} \cdot v)}(w) \right)} \\ &= \overline{\left(\sum_i x_i (Dq_i)_{\bar{v}}(w) \right) + i \left(\sum_i y_i (Dq_i)_{\bar{v}}(w) \right)} \\ &= \overline{\left(\sum_i x_i \overline{Dq_{i\bar{v}}}(w) \right) + i \left(\sum_i y_i \overline{Dq_{i\bar{v}}}(w) \right)} \\ &= \overline{\sum_i \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} \overline{Dq_{i\bar{v}}}(w) + i \left(\sum_i \underbrace{y_i}_{\in \mathbb{R}} \overline{Dq_{i\bar{v}}}(w) \right)} \\ &= \sum_i x_i (Dq_i)_v(w) - i \left(\sum_i y_i (Dq_i)_v(w) \right) \end{aligned}$$

donc $y_i = 0$ pour chaque i et ainsi $\lambda = \sum_i x_i (Dq_i)_v \in \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{R}}$.

On a donc que $\Delta_{\mathbb{R}}(v) \subseteq \langle (Dq_1)_v, (Dq_2)_v, \dots, (Dq_m)_v \rangle_{\mathbb{R}}$. \square

Chapitre 4

RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans ce chapitre, on démontre finalement le résultat de Procesi-Schwarz. On rappellera en fait le résultat d'algèbre linéaire qui affirme qu'une matrice est semi-définie positive si et seulement si les déterminants de ses mineurs principaux sont ≥ 0 . Comme on a déjà vérifié qu'en chaque point w de W , la matrice $Grad(p(w))$ est semi-définie positive, on verra que la matrice $Grad(z)$ est une fonction matricielle sur $Z = W//G$ qui est semi-définie positive seulement si z est un élément de $X \subseteq Z$. Dans un deuxième temps, on traitera deux cas particuliers, notamment celui où l'espace d'orbites est égal au quotient algébrique et celui où il est homéomorphe à un espace d'orbites. On utilisera aussi le théorème de Procesi-Schwarz pour donner une démonstration du théorème de Sylvester.

4.1. THÉORÈME DE PROCESI-SCHWARZ

On rappelle le résultat d'algèbre linéaire qui nous donne des inégalités pour une matrice symétrique semi-définie positive.

Définition 4.1.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée par $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On appelle mineurs principaux les sous-matrices

$$A_I = (a_{ij})_{i, j \in I}$$

pour $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ non vide.

Théorème 4.1.1. Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si et seulement si les déterminants des mineurs principaux sont ≥ 0 .

DÉMONSTRATION. Voir [27] page 257. \square

On a défini dans la section précédente la matrice $Grad(p(w))$ pour tout $w \in W$ par

$$Grad(p(w)) = \mathcal{J}(w)\mathcal{J}^t(w)$$

où la matrice $\mathcal{J}(w)$ est l'application tangente de $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par

$$\mathcal{J}(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial p_m(w)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

pour $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de l'espace vectoriel réel W . On montre qu'en fait, la matrice $Grad$ est une fonction matricielle de $Z = W//G$.

Proposition 4.1.1. *Il existe une unique fonction matricielle $Grad : Z \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$ telle que $Grad(p(w)) = \mathcal{J}(w)\mathcal{J}^t(w)$ pour tout $w \in W$.*

DÉMONSTRATION. Soit les vecteurs gradients des p_i ,

$$(Dp_i)_w = ((D_1p_i)_w, (D_2p_i)_w, \dots, (D_np_i)_w) \in \mathbb{R}^n$$

avec les $(D_kp_i)_w = \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k}$ et (\cdot, \cdot) le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n . On remarque que chaque entrée (i, j) de la matrice $Grad(p(w))$ est

$$(\mathcal{J}(w) \cdot \mathcal{J}^t(w))_{i,j} = \sum_k \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} \frac{\partial p_j(w)}{\partial x_k} = ((Dp_i)_w, (Dp_j)_w)$$

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base orthonormée de W pour un produit scalaire G -invariant. Alors,

$$\begin{aligned} g \cdot \left(\sum_k \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} \frac{\partial p_j(w)}{\partial x_k} \right) &= \sum_k \frac{\partial p_i(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \frac{\partial p_j(g^{-1} \cdot w)}{\partial x_k} \\ &= (g \cdot (Dp_i)_w, g \cdot (Dp_j)_w) = ((Dp_i)_w, (Dp_j)_w) \\ &= \sum_k \frac{\partial p_i(w)}{\partial x_k} \frac{\partial p_j(w)}{\partial x_k} \end{aligned}$$

et ainsi chaque entrée de la matrice $Grad(p(w)) = \mathcal{J}(w)\mathcal{J}^t(w)$ est un polynôme G -invariant de W . Par la propriété universelle du quotient algébrique de la

proposition 2.2.4, l'application matricielle $Grad(p(w))$ correspond à une unique application matricielle définie sur $Z = W//G$ dont chaque entrée est une fonction polynomiale sur Z . \square

Avant de démontrer le résultat principal, on construit λ un élément particulier de $\Delta_{\mathbb{R}}(v)$. Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire G -invariant sur W , un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification. On note aussi (\cdot, \cdot) pour désigner la forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante induite sur $W_{\mathbb{C}}$ et $W_{\mathbb{C}}^*$.

Lemme 4.1.1. *Soit $z \in W//G$, $k \in G$ et $v \in W_{\mathbb{C}}$ tels que $q(z) = v$ et $\bar{v} = k \cdot v = k^{-1} \cdot v$ comme dans le lemme 2.5.2. Pour ce $v \in W_{\mathbb{C}}$, soit les formes linéaires $\lambda_2, \lambda_1 : W_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par*

$$\lambda_1(v') := (v', \bar{v})$$

et

$$\lambda_2(v') := (v', v)$$

pour chaque $v' \in W_{\mathbb{C}}$. Alors,

$$\lambda := \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

est un élément de $\Delta_{\mathbb{R}}(v)$.

DÉMONSTRATION. On note que λ_1 et λ_2 sont G_v -invariantes. En effet, pour tout $g \in G_v$ et $v' \in W_{\mathbb{C}}$, $\lambda_1(g \cdot v') = (g \cdot v', \bar{v}) = (v', g^{-1} \cdot \bar{v}) = (v', \bar{v}) = \lambda_1(v')$ et $\lambda_2(g \cdot v') = (g \cdot v', v) = (v', g^{-1} \cdot v) = (v', v) = \lambda_2(v')$. Donc, λ_1 et $\lambda_2 \in \Delta(v) = D(v)$. Ainsi, comme $\Delta(v)$ est un espace vectoriel, $\lambda := \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \in \Delta(v) = D(v)$. Si $v = w_1 + iw_2$ avec w_1 et $w_2 \in W$, on observe que

$$\begin{aligned} \lambda(v') &= \frac{1}{2}(\lambda_2(v') - \lambda_1(v')) = \frac{1}{2}((v', v) - (v', \bar{v})) = \frac{1}{2}((v', w_1 + iw_2) - (v', w_1 - iw_2)) \\ &= \frac{1}{2}((v', w_1) + (v', iw_2) - (v', w_1) + (v', iw_2)) = (v', iw_2) \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = (iw_2, \cdot) \in W_{\mathbb{C}}^*$ et pour $k \in G$ tel que $k \cdot v = \bar{v}$ donné par le lemme 2.5.2, pour chaque $v' \in W_{\mathbb{C}}$,

$$(\lambda \circ k)(v') = (iw_2, k \cdot v') = (k^{-1} \cdot (iw_2), v') = (-iw_2, v')$$

De l'isomorphisme de la proposition 2.5.5,

$$\bar{\lambda} = (\overline{iw_2}, \cdot) = (-iw_2, \cdot) = \lambda \circ k$$

et donc, $\lambda \in \Delta_{\mathbb{R}}(v)$. □

Nous sommes maintenant prêts pour démontrer le résultat principal.

Théorème 4.1.2 (Procesi-Schwarz). *Soit G un groupe fini, W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}[W]^G$. Alors l'espace d'orbites W/G est homéomorphe à l'ensemble $\{z \in Z \mid \text{Grad}(z) \geq 0\}$ où $Z = W//G$ est la variété affine associée à l'idéal des relations des polynômes générateurs de l'anneau $\mathbb{R}[W]^G$ et Grad est l'unique fonction matricielle sur Z telle que $\text{Grad}(p(w)) = \left(\sum_k \frac{\partial p_1(w)}{\partial x_k} \frac{\partial p_2(w)}{\partial x_k} \right)_{i,j}$ pour chaque $w \in W$ et pour $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W .*

DÉMONSTRATION. Soit $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ un ensemble de polynômes G -invariants homogènes qui génèrent l'anneau $\mathbb{R}[W]^G$. On note l'application polynomiale $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, son image X et $Z = \mathcal{V}(I) = W//G$ pour I l'idéal des relations des $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. On note de plus $W_{\mathbb{C}}$ la complexification de W . Par le théorème 2.2.2, $W/G \cong X$. On montre alors que $X = \{z \in Z \mid \text{Grad}(z) \geq 0\}$.

Soit $z = p(w) \in X \subseteq Z$. Alors par la proposition 3.0.6, la matrice $\text{Grad}(p(w))$ est semi-définie positive et donc $X \subseteq \{z \in Z \mid \text{Grad}(z) \geq 0\}$. Soit maintenant $z \in Z$ tel que $\text{Grad}(z) \geq 0$. Puisque $Z = q(W_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^m$, $z = q(v)$ avec $v = w_1 + iw_2 \in W_{\mathbb{C}}$. Soit (\cdot, \cdot) un produit scalaire de $D_{\mathbb{R}}(v) \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\lambda = (iw_2, \cdot) \in D_{\mathbb{R}}(v) = \Delta_{\mathbb{R}}(v)$ tel que définie au lemme 4.1.1. Alors

$$0 \leq (\lambda, \lambda) = (iw_2, iw_2) = -(w_2, w_2) \leq 0$$

d'où $w_2 = 0$ et ainsi $z = p(v) = p(w_1) \in X$. □

Une fois que l'on a les inégalités qui définissent l'espace d'orbites d'un groupe fini agissant linéairement sur un espace vectoriel réel, on obtient les inégalités qui définissent l'espace d'orbites pour une sous- G -variété affine de l'espace vectoriel.

Corollaire 4.1.1. *Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini. Pour $\mathcal{X} \subseteq W$ une G -variété affine, l'espace d'orbites \mathcal{X}/G est donné par les inégalités*

de $W/G \cong X \subseteq \mathbb{R}^m$ obtenus par le théorème de Procesi-Schwarz et les égalités définissant le quotient algébrique $\mathcal{X} // G \subseteq \mathbb{R}^m$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 2.4.2, $\mathcal{X}/G \cong X \cap \mathcal{X} // G \subseteq \mathbb{R}^m$. L'espace d'orbites est alors donné par les inégalités de $X \cong W/G$ dans \mathbb{R}^m et les égalités de la variété affine $\mathcal{X} // G \in \mathbb{R}^m$. \square

4.2. CAS PARTICULIERS

Soit G un groupe fini, W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini et $W_{\mathbb{C}}$ sa complexification. Pour $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ un ensemble de polynômes générateurs de $\mathbb{R}[W]^G$, on note $X = \text{Im } p$ pour $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $Z = W // G$ le quotient algébrique. On veut déterminer quand l'espace d'orbites W/G correspond au quotient algébrique $W // G$, i.e. lorsque $W/G \cong X = Z = W // G$.

Proposition 4.2.1. *Avec ces notations, $X = Z$ si et seulement s'il n'existe pas d'éléments $g \in G$ avec une valeur propre égale à -1 sur W .*

DÉMONSTRATION. Supposons que $X \subsetneq Z$ et soit $z \in Z \setminus X$. Par le lemme 2.5.2, soit $v = w_1 + iw_2 \in W_{\mathbb{C}}$ tel que $p(v) = z$ et $k \cdot v = \bar{v}$. Comme $z \notin X$, $w_2 \neq 0$ et donc $k \cdot w_2 = -w_2$.

Soit maintenant $X = Z$ et supposons qu'il existe un $g \in G$ et $w \in W$ tel que $g \cdot w = -w$. Soit une base orthonormale de W pour un produit scalaire G -invariant (\cdot, \cdot) . On pose alors $f(x) = (x, x) = \sum_i x_i^2$ qui est un polynôme homogène de degré 2 G -invariant sur W . Sans perte de généralité, on peut supposer que $f = p_1$, le premier générateur homogène de l'application $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. Pour chacun des p_j , $p_j(w) = p_j(k \cdot w) = p_j(-w)$ et donc si p_j est de degré impair, $p_j(w) = p_j(-w) = -p_j(w) = 0$. De plus, pour chaque p_j de degré pair, si le degré est un multiple de 4, alors $p_j(iw) = p_j(w) \in \mathbb{R}^m$ et sinon $p_j(iw) = -p_j(w) \in \mathbb{R}^m$. Ainsi, $p(iw) = (-p_1(w), \pm p_2(w), \dots, \pm p_m(w)) \in p(V) \cap \mathbb{R}^m \stackrel{\text{prop. 2.5.3}}{=} Z = X$ et donc il existe un $w' \in W$ tel que $p(w') = p(iw)$. Or, $0 \leq p_1(w') = p_1(iw) = -p_1(w) \leq 0$ donc $p_1(w') = 0$ et ainsi $w' = 0$, ce qui implique que $w = 0$. \square

Corollaire 4.2.1. *Si W est une représentation fidèle de G , alors $X = Z$ si et seulement si G est un groupe d'ordre impair.*

DÉMONSTRATION. Soit $X = Z$ et supposons au contraire que l'ordre de G est pair. Il existe alors g un élément d'ordre 2 et $g^2 \cdot w = w$ pour chaque $w \in W$. Avec un choix de base de W , on obtient la matrice $[g]$ de l'action de g sur W . Comme la représentation est fidèle, $[g^2] = Id$ et donc la matrice $[g]$ a pour polynôme minimal $x^2 - 1$ car $[g]^2 - Id = [g^2] - Id = 0$. Puisque ce polynôme minimal divise le polynôme caractéristique de la matrice $[g]$, cette dernière possède une valeur propre égale à -1 . Par la proposition précédente, ceci implique que $X \neq Z$, une contradiction.

Soit maintenant $|G| = 2k + 1$ et supposons au contraire qu'il existe un $g \in G$ et $w \in W$ tel que $g \cdot w = -w$. Alors g a un ordre pair. En effet, soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une base de W avec $x_1 = w$. La matrice de l'action de g dans cette base est alors de la forme

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

pour une matrice $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Or, pour tout entier impair $2k + 1 \in \mathbb{N}$,

$$[g^{2k+1}] = [g]^{2k+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B^{2k+1} \end{pmatrix} \neq Id$$

Donc, l'ordre de g ne peut être impair. Puisque l'ordre de g , qui est pair, doit diviser l'ordre du groupe G , qui est impair, on a une contradiction. \square

On illustre ce cas particulier avec un exemple.

Soit G le groupe des rotations du plan \mathbb{R}^2 d'ordre 3 autour de l'origine. Ce groupe est généré par

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

et possède 3 éléments. On trouve avec MAGMA comme générateurs de $\mathbb{R}[x, y]^G$ les polynômes

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= x^2 + y^2 \\ p_2(x, y) &= x^3 - 3xy^2 \\ p_3(x, y) &= x^2y - \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

ainsi que la relation $\frac{1}{9}p_1^3 - \frac{1}{9}p_2^2 - p_3^2 = 0$. On a donc que

$$Z = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{9}u^3 - \frac{1}{9}v^2 - w^2 = 0\}$$

et on obtient la matrice *Grad* sur X

$$\text{Grad}(p(x, y)) = \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2) & 6(x^3 - 3xy^2) & 6(x^2y - \frac{1}{3}y^3) \\ 6(x^3 - 3xy^2) & 9(x^2 + y^2)^2 & 0 \\ 6(x^2y - \frac{1}{3}y^3) & 0 & (x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix}$$

qui après substitution nous donne celle sur Z

$$\text{Grad}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 4u & 6v & 6w \\ 6v & 9u^2 & 0 \\ 6w & 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble X est alors donné par les points $(u, v, w) \in Z$ satisfaisant les inégalités suivantes données par les déterminants des mineurs principaux de $\text{Grad}(u, v, w)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 4u \geq 0 \\ D_2 = 9u^2 \geq 0 \\ D_3 = u^2 \geq 0 \\ D_{12} = 36(u^3 - v^2) \geq 0 \\ D_{13} = 4(u^3 - 9w^2) \geq 0 \\ D_{23} = 9u^4 \geq 0 \\ D_{123} = 36u^2(u^3 - v^2 - 9w^2) \geq 0 \end{array} \right.$$

En particulier, comme $u^3 - v^2 - 9w^2 = 0$ sur Z , $u = \sqrt[3]{v^2 + 9w^2} \geq 0$ et la première inégalité est redondante. De même, sur Z on a que $u^3 - v^2 = 9w^2 \geq 0$ et

$u^3 - 9w^2 = v^2 \geq 0$. La dernière inégalité est toujours nulle sur Z et ces inégalités sont donc toutes redondantes. Ainsi, $X = Z$ tel que le corollaire le suggère.

On traite maintenant le cas particulier où l'espace d'orbites W/G est homéomorphe à W . On verra que c'est le cas si et seulement si le groupe G est généré par des pseudo-réflexions.

Lorsque le groupe fini G est un groupe engendré par des réflexions, on a le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 (Shephard-Todd). *Soit G un groupe fini engendré par des réflexions de $V = \mathbb{C}^n$. Alors l'algèbre des polynômes G -invariants $\mathbb{C}[V]^G$ est générée par n générateurs algébriquement indépendants.*

DÉMONSTRATION. Voir [8]. □

Définition 4.2.1. *On appelle une pseudo-réflexion une application linéaire dont le sous-espace des vecteurs invariants par cette application est de codimension 2.*

On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit W une représentation réelle (de dimension fini) d'un groupe fini G . Soit $\sigma \in G$ une réflexion et $\tau \in G$ une pseudo-réflexion. Alors pour chaque $g \in G$, $g \cdot \sigma \cdot g^{-1}$ est une réflexion et $g \cdot \tau \cdot g^{-1}$ est une pseudo-réflexion.*

DÉMONSTRATION. Soit A la représentation matricielle de $\sigma \in G$ et B celle de g . Comme σ est une réflexion, la matrice A possède une seule valeur propre égale à -1 . Alors la représentation matricielle de $g \cdot \sigma \cdot g^{-1}$ est donnée par la matrice $B \cdot A \cdot B^{-1}$ qui a comme valeurs propres celles de A car

$$\begin{aligned} \det(BAB^{-1} - \lambda \cdot I) &= \det(BAB^{-1} - \lambda \cdot (BB^{-1})) = \det(B(A - \lambda \cdot I)B^{-1}) \\ &= \det B \cdot \det(A - \lambda \cdot I) \cdot \det B^{-1} = \det(A - \lambda \cdot I) \end{aligned}$$

Donc elle possède aussi une seule valeur propre égale à -1 .

De même, la représentation matricielle de $\tau \in G$ possède deux valeurs propres égales à -1 et donc aussi celle de $g \cdot \tau \cdot g^{-1}$ qui est donc une pseudo-réflexion. \square

Proposition 4.2.2. *Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de dimension n . Si l'espace d'orbites W/G est une variété lisse, alors G ne contient pas de réflexion.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire que $\sigma \in G$ est une réflexion et soit $W^\sigma \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Pour un point générique $w \in W^\sigma$ avec groupe d'isotropie $G_w = \{e, \sigma\}$, soit \mathcal{S} une slice en w qui est une boule de rayon ϵ centrée en w obtenue à la proposition 2.4.7. Par le corollaire 1.3.1, \mathcal{S}/G_w est homéomorphe à un voisinage ouvert de l'orbite $Gw \in W/G$. En prenant un choix de base approprié, on a que $\mathcal{S} \cong \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 < \epsilon\}$ et l'action de σ sur un point de \mathcal{S} correspond à la multiplication par -1 de la première coordonnée. L'ouvert \mathcal{S}/G_w est alors homéomorphe à la demi-boule $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \text{ et } \sum_i x_i^2 < \epsilon\}$. Ceci est en contradiction avec le fait que l'espace d'orbites est lisse, car alors chaque point doit posséder un voisinage ouvert homéomorphe à une boule de \mathbb{R}^n . \square

Théorème 4.2.2 (Shvartsman). *Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de dimension $n \geq 3$ avec G un groupe fini. Si l'espace d'orbites W/G est homéomorphe à un espace vectoriel, alors G est un groupe généré par des pseudo-réflexions.*

DÉMONSTRATION. Supposons que W/G est un espace vectoriel. Soit H le sous-groupe de G généré par les réflexions et les pseudo-réflexions de G . On suppose par l'absurde que $H \subsetneq G$. Par le lemme précédent, H est un sous-groupe normal de G . Soit $\pi_G : W \rightarrow W/G$ et $\pi_H : W \rightarrow W/H$ les applications qui envoient un point sur son orbite. Comme $Hw = Hw'$ implique que $Gw = Gw'$, par la propriété universelle, il y a une unique application continue $\tilde{\pi}_G : W/H \rightarrow W/G$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\pi_G} & W/G \\ \pi_H \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}_G & \\ W/H & & \end{array}$$

Soit le complément dans W des sous-espaces vectoriels de codimension ≥ 3 invariants pour des éléments de G :

$$\tilde{W} := \left(\bigcup_{\text{codim } W^g \geq 3} W^g \right)^c$$

On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \hookrightarrow & W \\ \pi_H \downarrow & & \pi_H \downarrow \\ \tilde{W}/H & \hookrightarrow & W/H \\ \tilde{\pi}_G \downarrow & & \tilde{\pi}_G \downarrow \\ \tilde{W}/G & \hookrightarrow & W/G \end{array}$$

Puisque pour chaque $g \in G$, W^g est un fermé, \tilde{W} est un ouvert, tout comme $\tilde{W}/H = \pi_H(\tilde{W})$ et $\tilde{W}/G = \pi_G(\tilde{W})$. De plus, comme \tilde{W} est connexe par arcs, la proposition 1.1.1(v) donne que \tilde{W}/H est aussi connexe par arcs.

On remarque que pour chaque $w' \in \tilde{W}$, $G_{w'} = H_{w'}$. Bien sûr, $H_{w'} \subseteq G_{w'}$. Supposons au contraire qu'il existe un $g \in G_{w'} \setminus H_{w'}$. On a donc que $w' \in W^g$. Or, comme g n'est pas dans H , $\text{codim } W^g \geq 3$, ce qui est une contradiction car $w' \in \tilde{W}$. Donc $G_{w'} = H_{w'}$.

On a donc pour chaque $Gw' \in \tilde{W}/G$ que

$$|Gw'| = \frac{|G|}{|G_{w'}|} = \frac{|G|}{|H|} \frac{|H|}{|H_{w'}|} = \frac{|G|}{|H|} |Hw'|$$

et pour chaque $Gw' \in \tilde{W}/G$, $|\tilde{\pi}_G^{-1}(Gw')| = \frac{|G|}{|H|} > 1$.

On montre que le groupe fondamental de \tilde{W}/G est trivial, i.e. que $\pi_1(\tilde{W}/G) = \{0\}$. On commence par montrer que tout lacet de \tilde{W}/G qui est la frontière d'un disque est contractible. Soit α un tel lacet de \tilde{W}/G et D un disque dans l'espace W/G dont la frontière est α . Avec le théorème A.0.5, on peut alors déplacer et déformer le disque D dans W/G de façon à ce qu'il soit transverse aux strates de W/G de codimension ≥ 3 (définition A.0.9). On veut montrer que ce disque

n'intersecte aucune strate de codimension ≥ 3 . Si au contraire, $D \cap V \neq \emptyset$ pour une strate V de codimension ≥ 3 , alors pour $x \in D \cap V$, $T_x D + T_x V = T_x(W/G)$. Or, si $\dim T_x(W/G) = n$, $\dim T_x V \leq n - 3$ et $\dim T_x D = 2$, donc $T_x D + T_x V \leq 2 + n - 3 < n = \dim T_x(W/G)$, ce qui contredit la transversalité de D et V . Ainsi, le disque D n'intersecte aucune strate de codimension ≥ 3 et on obtient que tout lacet qui est la frontière d'un disque est contractible dans \tilde{W}/G . On considère maintenant le cas où le lacet n'est pas la frontière d'un disque. Si le lacet est un noeud non trivial sans intersection, il suffit de partitionner le lacet en un nombre fini de sections et de choisir pour chacune de ces sections un disque de W/G dont la frontière contient cette section du lacet ainsi qu'un point commun $x_0 \in \tilde{W}/G$ à tous ces disques. Pour ce faire, on partitionne le lacet en un nombre fini d'arcs et on choisit un point arbitraire $x_0 \in \tilde{W}/G$. Puisque $W/G \cong \mathbb{R}^n$, il est possible de joindre les extrémités des sections du lacet au point x_0 par des arcs de W/G . On obtient donc des disques contenant x_0 dont les sections du lacet sont contenues dans les frontières. Par le théorème A.0.6, il est possible de déformer chaque disque de façon à ce qu'il soit transverse aux strates de W/G de codimension ≥ 3 tout en laissant fixe les sections du lacet ainsi que le point x_0 . Par l'argument précédent, on voit alors qu'aucune strate de codimension ≥ 3 ne peut intersecter les disques, qui sont donc dans \tilde{W}/G . Ainsi, chacun de ces disques est contractible au point x_0 dans \tilde{W}/G . Le lacet initial est alors homotope au chemin trivial en x_0 . Si maintenant le lacet possède un nombre fini d'intersections, il suffit de considérer successivement les boucles fermées du lacet. Ces boucles sont soit des lacets simples ou des noeuds sans intersection. Puisque chacune de ces sections est contractible, l'ensemble de ces lacets est aussi contractible. Ainsi, tout lacet de \tilde{W}/G est contractible et donc le groupe fondamental de \tilde{W}/G est trivial.

Or, $\pi_1(\tilde{W}/G) = \{0\}$ est une contradiction car on a ainsi un revêtement non-ramifié à $\frac{|G|}{|H|}$ feuilles $\tilde{\pi}_G : \tilde{W}/H \rightarrow \tilde{W}/G$ avec $\pi_1(\tilde{W}/G) = \{0\}$ (voir [19]). On doit donc avoir que $H = G$. Cependant, puisque l'espace d'orbites est une variété lisse, par la proposition précédente, il ne peut y avoir de réflexion. G est donc généré par des pseudo-réflexions. \square

Avec une classification des groupes finis générés par des pseudo-réflexions, on obtient la réciproque de ce résultat. Puisque cette approche est laborieuse, on omettra la preuve qui se trouve dans l'article de Mikhaïlova [18].

Théorème 4.2.3 (Mikhaïlova). *Soit W un $\mathbb{R}G$ -module de dimension $n \geq 3$ avec G un groupe fini. Si le groupe G est généré par des pseudo-réflexions, alors $W/G \cong W$.*

DÉMONSTRATION. Voir [18]. □

4.2.1. Théorème de Sylvester

On utilise le résultat de Procesi-Schwarz pour donner une démonstration du théorème de Sylvester. On considère le groupe des permutations de n éléments S_n qui agit sur \mathbb{R}^n via l'action naturelle qui consiste à permuter les coordonnées.

Pour cette action, l'algèbre des polynômes S_n -invariants est générée par les polynômes symétriques élémentaires :

$$\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_i}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$\sigma_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

⋮

$$\sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

On peut aussi trouver un autre ensemble de générateurs donnés par

$$\tau_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j x_j^i$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\tau_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$\tau_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$\tau_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3$$

$$\vdots$$

$$\tau_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n$$

D'ailleurs, les formules de Newton-Girard (voir [31]) nous permettent d'écrire ces polynômes en fonction des polynômes symétriques élémentaires. Par exemple, $\tau_1 = \sigma_1$, $\tau_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $\tau_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. De plus, les polynômes $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ sont algébriquement indépendants. Ainsi, $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{R}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ et en prenant l'application $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\tau_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \tau_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$, on obtient la matrice *Grad* définie sur X :

$$\begin{aligned} & \text{Grad}(p(x_1, \dots, x_n)) = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & \dots & 2x_n \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 & \dots & 3x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & nx_2^{n-1} & nx_3^{n-1} & \dots & nx_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & nx_1^{n-1} \\ 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \dots & nx_2^{n-1} \\ 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & \dots & nx_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2x_n & 3x_n^2 & \dots & nx_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \tau_0(x_1, \dots, x_n) & 2\tau_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & n\tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ 2\tau_1(x_1, \dots, x_n) & 4\tau_2(x_1, \dots, x_n) & \dots & 2n\tau_n(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n) & 2n\tau_n(x_1, \dots, x_n) & \dots & n^2\tau_{2n-2}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ & = (ij \cdot \tau_{i+j-2}(x_1, \dots, x_n))_{i,j} \end{aligned}$$

avec la notation $\tau_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i x_i^j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2$. Or cette matrice est semi-définie positive si et seulement si la matrice suivante est semi-définie positive

$$\text{Bez}(p(x_1, \dots, x_n)) := \begin{pmatrix} \tau_0(x_1, \dots, x_n) & \tau_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ \tau_1(x_1, \dots, x_n) & \tau_2(x_1, \dots, x_n) & \dots & \tau_n(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1}(x_1, \dots, x_n) & \tau_n(x_1, \dots, x_n) & \dots & \tau_{2n-2}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

qui est appelée le *Bezoutien* de $p(x_1, \dots, x_n)$.

On a donc du théorème principal que

$$\mathbb{R}^n / S_n \cong X = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{Bez}(y) \geq 0\}$$

Avec ce résultat, on donne une démonstration du théorème de Sylvester :

Théorème 4.2.4 (Sylvester). *Soit $f(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n b_n$ un polynôme à coefficients réels avec racines $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Les racines de f sont toutes réelles si et seulement si $\text{Bez}(b_1, b_2, \dots, b_n) \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ un polynôme à coefficients réels avec $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ comme racines. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) = x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x^{n-1} \\ &\quad + (\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} + \dots + (-1)^n(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n) \\ &= x^n - \sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-1} + \sigma_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-2} + \dots + (-1)^n\sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

et les coefficients de f , à signes près, sont $b_i = \sigma_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Avec l'application polynomiale $p = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ et $\text{Im } p = X = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{Bez}(y) \geq 0\}$, les racines de f sont toutes réelles si et seulement si

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in X \Leftrightarrow \text{Bez}(p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \text{Bez}(b_1, b_2, \dots, b_n) \geq 0$$

□

Par exemple, pour $n = 2$, le polynôme $f(x) = x^2 - bx + c$ a toutes ses racines réelles si et seulement si

$$\begin{aligned} Bez(b, c) &= \begin{pmatrix} \tau_0(\alpha_1, \alpha_2) & \tau_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ \tau_1(\alpha_1, \alpha_2) & \tau_2(\alpha_1, \alpha_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & b \\ b & b^2 - 2c \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 2 \geq 0 \\ D_2 = b^2 - 2c \geq 0 \\ D_{12} = b^2 - 4c \geq 0 \end{cases}$$

Or

$$b^2 - 4c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 \geq 4c \geq 2c \geq 0 \text{ si } c \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \geq 2c \text{ si } c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 - 2c \geq 0$$

On obtient donc le discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ d'un polynôme de degré deux qui permet de détecter si ses racines sont toutes réelles.

Chapitre 5

EXEMPLES

Dans l'introduction nous avons présenté quelques exemples d'espaces d'orbites donnés par des inégalités. Maintenant, on utilise le théorème de Procesi-Schwarz pour obtenir ces inégalités. Pour utiliser ce résultat, nous devons d'abord trouver des polynômes générateurs de l'anneau des polynômes invariants. Pour ce faire, on utilise ici le logiciel MAGMA qui nous permet en plus de trouver les relations entre ces générateurs. Bien que l'utilisation de ce logiciel soit transparente dans cet exposé, un exemple d'utilisation du logiciel est fait en annexe B qui montre comment obtenir ces générateurs ainsi que leurs relations.

Exemple 1 : \mathbb{R}^2/S_2

On considère l'action du groupe des permutations de deux éléments, S_2 sur le plan réel \mathbb{R}^2 . Soit $S_2 = \{e, \alpha\}$ avec e l'identité. On définit l'action de α sur un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\alpha \cdot (x, y) = (y, x)$$

Avec le logiciel MAGMA, on obtient les générateurs homogènes de l'algèbre des polynômes S_2 -invariants sur \mathbb{R}^2 , $p_1(x, y) = x + y$ et $p_2(x, y) = xy$. Ainsi,

$$\mathbb{R}[x, y]^{S_2} = \mathbb{R}[x + y, xy]$$

et l'application $p(x, y) = (x + y, xy)$ nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ \mathbb{R}^2/S_2 & & \end{array}$$

L'ensemble X donné par des inégalités que l'on se propose de déterminer, est homéomorphe à l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/S_2 . On construit maintenant la matrice $Grad$:

$$\begin{aligned} Grad(p(x, y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & x + y \\ x + y & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme p_1 et p_2 sont algébriquement indépendants, i.e. qu'il n'y a pas de relations algébriques entre eux, l'idéal des relations $I \subseteq \mathbb{R}[y_1, y_2]$ est trivial et alors $Z := \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(0) = \mathbb{R}^2$. Avec la substitution

$$u := p_1(x, y) = x + y$$

$$v := p_2(x, y) = xy$$

On obtient la matrice $Grad$ pour chaque $(u, v) \in Z = \mathbb{R}^2$

$$Grad(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & u \\ u & u^2 - 2v \end{pmatrix}$$

Ainsi, par le théorème 4.1.2, l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/S_2 est homéomorphe à

$$X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid Grad(u, v) \geq 0\}$$

Or $Grad(u, v) \geq 0$ si et seulement si $\det(Grad(u, v)) = 2u^2 - 4v - u^2 = u^2 - 4v \geq 0$. Donc l'espace d'orbites \mathbb{R}^2/S_2 est homéomorphe à

$$X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 - 4v \geq 0\}$$

Comme $(y, x) = \alpha \cdot (x, y) = (x, y)$ si et seulement si $x = y$, on obtient les deux strates de \mathbb{R}^2 pour cette action :

$$(\mathbb{R}^2)^{(S_2)} = \Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$$

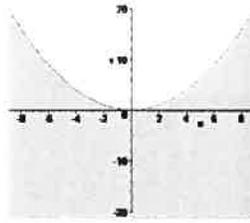


FIG. 5.1

$$(\mathbb{R}^2)^{(e)} = \Delta^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$$

On remarque que l'image par p de la diagonale Δ est la frontière de X , soit la courbe $v = \frac{1}{4}u^2$. En effet, $p(x, x) = (2x, x^2)$ pour tout $(x, x) \in \Delta$. Donc $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(S_2)} \cong \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 4v = u^2\}$.

Quant au complément de la diagonale, il est envoyé dans l'intérieur de X . En effet, si $x \neq y$, alors $p(x, y) = (x + y, xy)$ et $0 < (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Leftrightarrow 2xy < x^2 + y^2 \Leftrightarrow 4xy < x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$. Donc $(\mathbb{R}^2/S_2)^{(e)} \cong \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 4v < u^2\}$. On obtient alors des strates de l'espace d'orbites qui sont des variétés lisses de dimension 1 et 2.

Exemple 2 : \mathbb{R}^3/S_3

On considère maintenant l'action du groupe S_3 sur \mathbb{R}^3 qui permute les coordonnées. Pour $\sigma \in S_3$ et $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

Par exemple, la permutation $(123) \in S_3$ agit sur \mathbb{R}^3 comme

$$(123) \cdot (x, y, z) = (z, x, y)$$

Pour cette action, des générateurs homogènes de l'algèbre des polynômes S_3 -invariants $\mathbb{R}[x, y, z]^{S_3}$ sont donnés par

$$p_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$p_2(x, y, z) = xy + xz + yz$$

$$p_3(x, y, z) = xyz$$

Puisque ces éléments sont algébriquement indépendants, $Z = \mathcal{V}(0) = \mathbb{R}^3$.

Avec l'application polynomiale

$$p(x, y, z) = (p_1(x, y, z), p_2(x, y, z), p_3(x, y, z)) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$$

on obtient la matrice *Grad* définie sur X

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p(x, y, z)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y + z & x + z & x + y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y + z & yz \\ 1 & x + z & xz \\ 1 & x + y & xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2x + 2y + 2z & xy + xz + yz \\ 2x + 2y + 2z & (x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 & x^2y + xy^2 + y^2z + z^2y + x^2z + z^2x \\ xy + xz + yz & x^2y + xy^2 + y^2z + z^2y + x^2z + z^2x & x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En effectuant la substitution

$$u := p_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$v := p_2(x, y, z) = xy + xz + yz$$

$$w := p_3(x, y, z) = xyz$$

On obtient la matrice *Grad* définie sur $Z = \mathbb{R}^3$

$$\text{Grad}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 & 2u & v \\ 2u & 2u^2 - 2v & uv - 3w \\ v & uv - 3w & v^2 - 2uw \end{pmatrix}$$

Ainsi, les points de X sont les points (u, v, w) de \mathbb{R}^3 tels que la matrice $\text{Grad}(u, v, w)$ est semi-définie positive, i.e.

$$\text{Grad}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 & 2u & v \\ 2u & 2u^2 - 2v & uv - 3w \\ v & uv - 3w & v^2 - 2uw \end{pmatrix} \geq 0$$

si et seulement si, pour D_I le déterminant du mineur principaux M_I de $\text{Grad}(u, v, w)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 3 \geq 0 \\ D_2 = 2(u^2 - v) \geq 0 \Leftrightarrow u^2 - v \geq 0 \\ D_3 = v^2 - 2uw \geq 0 \\ D_{12} = 2(u^2 - 3v) \geq 0 \Leftrightarrow u^2 - 3v \geq 0 \\ D_{13} = 2(v^2 - 3uw) \geq 0 \Leftrightarrow v^2 - 3uw \geq 0 \\ D_{23} = u^2v^2 - 4u^3w - 2v^3 + 10vuw - 9w^2 \geq 0 \\ D_{123} = u^2v^2 - 4u^3w - 4v^3 - 27w^2 + 18uvw \geq 0 \end{array} \right.$$

L'espace d'orbites \mathbb{R}^3/S_3 est donc homéomorphe aux points $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 - 3v \geq 0 \\ v^2 - 3uw \geq 0 \\ u^2v^2 - 4u^3w - 2v^3 + 10vuw - 9w^2 \geq 0 \\ u^2v^2 - 4u^3w - 4v^3 + 18uvw - 27w^2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Cette action stratifie l'espace \mathbb{R}^3 en trois strates. Soit $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \text{ et } z \text{ tous distincts}\}$. Alors $(S_3)_p = \{e\}$ pour chaque $p \in X_1$. Soit $X_2 = \{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$. Pour chaque point $p \in X_2$, $G_1 := (S_3)_p = \{e, (12)\}$. De même, pour $X_3 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$ et $X_4 = \{(y, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$, on trouve les groupes d'isotropies respectifs $G_2 := \{e, (13)\}$ et $G_3 := \{e, (23)\}$. Finalement, pour $X_5 = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$, le groupe d'isotropie associé est S_3 . Comme $(13) \cdot (12) \cdot (13)^{-1} = (23)$ et $(23) \cdot (12) \cdot (23)^{-1} = (13)$, les trois groupes G_1, G_2 et G_3 sont conjugués et ainsi $(G_1) = (G_2) = (G_3)$. Il y a donc trois types de strates : $(\mathbb{R}^3)^{(e)} = X_1$, $(\mathbb{R}^3)^{(G_1)} = X_2 \cup X_3 \cup X_4$ et $(\mathbb{R}^3)^{(S_3)} = X_5$.

Pour chaque $(x, x, x) \in X_5$, son image par p est $p(x, x, x) = (3x, 3x^2, x^3)$. Ainsi, l'image de X_5 par p est une variété lisse de dimension 1 donnée par $p(X_5) = \{(x, \frac{1}{3}x^2, \frac{1}{27}x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Donc, $(\mathbb{R}^3/S_3)^{(S_3)} \cong p(X_5)$. De même, l'image par p d'un point de $X_2 \cup X_3 \cup X_4$ est de la forme $(2x+y, x^2+2xy, x^2y) \in \mathbb{R}^3$. La strate de $X_2 \cup X_3 \cup X_4$ au niveau de l'espace d'orbites est donc $(\mathbb{R}^3/S_3)^{(G_1)} \cong \{(2x+y, x^2+2xy, x^2y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, une variété de dimension 2. Finalement, la

$\{(2x+y, x^2+2xy, x^2y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, une variété de dimension 2. Finalement, la strate ouverte et dense de \mathbb{R}^3/S_3 est $(\mathbb{R}^3/S_3)^{(e)} \cong X \setminus (p(X_5) \cup p(X_2 \cup X_3 \cup X_4))$.

Exemple 3 : $M_2(\mathbb{R})/D_4$

Soit D_4 le groupe des isométries du carré. Cette fois-ci, on le fait agir sur $M_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels, par conjugaison. Ainsi, pour chaque $A \in D_4$ et $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$A \cdot M = AMA^{-1}$$

Avec la base de $M_2(\mathbb{R})$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on identifie à la base canonique de \mathbb{R}^4 via

$$e_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'action des éléments de D_4

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_\delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $M_2(\mathbb{R})$ correspond à la multiplication matricielle des éléments respectifs suivants sur \mathbb{R}^4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple,

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \rho^{-1} = \rho \cdot (ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4) \cdot \rho^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

où les entrées sont données par

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Avec MAGMA, on obtient pour l'algèbre $\mathbb{R}[x, y, z, w]^{D_4}$ les générateurs

$$p_1(x, y, z, w) = x + w$$

$$p_2(x, y, z, w) = x^2 + w^2$$

$$p_3(x, y, z, w) = y^2 + z^2$$

$$p_4(x, y, z, w) = yz$$

$$p_5(x, y, z, w) = xy^2 + wz^2$$

qui, cette fois-ci, ne sont pas algébriquement indépendants car

$$-\frac{1}{2}p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_1p_3p_5 - p_5^2 + \frac{1}{2}p_2p_3^2 - 2p_2p_4^2 = 0$$

Or, ceci est la seule relation entre les générateurs et donc

$$I = \langle -\frac{1}{2}y_1^2y_3^2 + y_1^2y_4^2 + y_1y_3y_5 - y_5^2 + \frac{1}{2}y_2y_3^2 - 2y_2y_4^2 \rangle \triangleleft \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_5]$$

et

$$Z = \mathcal{V}(I) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5 \mid -\frac{1}{2}y_1^2y_3^2 + y_1^2y_4^2 + y_1y_3y_5 - y_5^2 + \frac{1}{2}y_2y_3^2 - 2y_2y_4^2 = 0\}$$

On obtient la matrice *Grad* sur X

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p(x, y, z, w)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2x & 0 & 0 & 2w \\ 0 & 2y & 2z & 0 \\ 0 & z & y & 0 \\ y^2 & 2xy & 2zw & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 2y & z & 2xy \\ 0 & 0 & 2z & y & 2zw \\ 1 & 2y & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2(x+w) & 0 & 0 & y^2+z^2 \\ 2(x+w) & 4(x^2+w^2) & 0 & 0 & 2(xy^2+wz^2) \\ 0 & 0 & 4(y^2+z^2) & 4yz & 4(xy^2+wz^2) \\ 0 & 0 & 4yz & y^2+z^2 & 2(xyz+yzw) \\ y^2+z^2 & 2(xy^2+wz^2) & 4(xy^2+wz^2) & 2(xyz+yzw) & y^4+4x^2y^2+4z^2w^2+z^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $y_i = p_i(x, y, z, w)$, on obtient la matrice *Grad* définie sur Z

$$\text{Grad}(y_1, y_2, \dots, y_5) = \begin{pmatrix} 2 & 2y_1 & 0 & 0 & y_3 \\ 2y_1 & 4y_2 & 0 & 0 & 2y_5 \\ 0 & 0 & 4y_3 & 4y_4 & 4y_5 \\ 0 & 0 & 4y_4 & y_3 & 2y_1y_4 \\ y_3 & 2y_5 & 4y_5 & 2y_1y_4 & y_3^2 - 2y_4^2 + 4y_1y_5 - 2y_1^2y_3 + 2y_2y_3 \end{pmatrix}$$

Soit D_I le déterminant du mineur principal M_I de la matrice $\text{Grad}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Alors pour $(y_1, y_2, \dots, y_5) \in Z$, il y a maintenant 31 inégalités provenant des 31

déterminants D_I pour $\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, 5\}$, qui définissent l'ensemble X .

$$\begin{aligned}
 & D_1 = 2 \geq 0, \quad D_2 = 4y_2 \geq 0, \quad D_3 = 4y_3 \geq 0, \quad D_4 = y_3 \geq 0 \\
 & D_5 = y_3^2 - 2y_4^2 + 4y_1y_5 - 2y_1^2y_3 + 2y_2y_3 \geq 0 \\
 & D_{12} = 8y_2 - 4y_1^2 \geq 0, \quad D_{13} = 8y_3 \geq 0, \quad D_{14} = 2y_3 \geq 0 \\
 & D_{15} = y_3^2 - 4y_4^2 + 8y_1y_5 - 4y_1^2y_3 + 4y_2y_3 \geq 0 \\
 & D_{23} = 16y_2y_3 \geq 0, \quad D_{24} = 4y_2y_3 \geq 0, \quad D_{34} = 4y_3^2 - 16y_4^2 \geq 0 \\
 & D_{25} = 4y_2y_3^2 - 8y_2y_4^2 + 16y_2y_1y_5 - 8y_2y_1^2y_3 + 8y_2^2y_3 - 4y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{35} = 4y_3^3 - 8y_3y_4^2 + 16y_3y_1y_5 - 8y_1^2y_3^2 + 8y_2y_3^2 - 16y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{45} = y_3^3 - 2y_3y_4^2 + 4y_3y_1y_5 - 2y_1^2y_3^2 + 2y_2y_3^2 - 4y_1^2y_4^2 \geq 0 \\
 & D_{123} = 32y_2y_3 - 16y_1^2y_3 \geq 0, \quad D_{124} = 8y_2y_3 - 4y_1^2y_3 \geq 0, \quad D_{134} = 8y_3^2 - 32y_4^2 \geq 0 \\
 & D_{125} = 4y_2y_3^2 - 16y_2y_4^2 + 32y_2y_1y_5 - 24y_2y_1^2y_3 + 16y_2^2y_3 - 8y_5^2 + 8y_3y_1y_5 \\
 & \quad - 4y_1^2y_3^2 + 8y_1^2y_4^2 - 16y_1^3y_5 + 8y_1^4y_3 \geq 0 \\
 & D_{135} = 4y_3^3 - 16y_3y_4^2 + 32y_3y_1y_5 - 16y_1^2y_3^2 + 16y_2y_3^2 - 32y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{145} = y_3^3 - 4y_3y_4^2 + 8y_3y_1y_5 - 4y_1^2y_3^2 + 4y_2y_3^2 - 8y_1^2y_4^2 \geq 0 \\
 & D_{234} = 4y_2(4y_3^2 - 16y_4^2) \geq 0 \\
 & D_{235} = 16y_2y_3^3 - 32y_4^2y_2y_3 + 64y_2y_3y_1y_5 - 32y_2y_1^2y_3^2 + 32y_2^2y_3^2 - 64y_2y_5^2 - 16y_3y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{245} = 4y_2y_3^3 - 8y_4^2y_2y_3 + 16y_2y_3y_1y_5 - 8y_2y_1^2y_3^2 + 8y_2^2y_3^2 - 16y_2y_1^2y_4^2 - 4y_3y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{345} = 4y_3^4 - 24y_3^2y_4^2 + 16y_3^2y_1y_5 - 8y_1^2y_3^3 + 8y_2y_3^3 + 16y_3y_1^2y_4^2 + 32y_4^4 - 32y_4^2y_2y_3 - 16y_3y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{1234} = 32y_2y_3^2 - 128y_2y_4^2 - 16y_1^2y_3^2 + 64y_1^2y_4^2 \geq 0 \\
 & D_{1235} = 16y_2y_3^3 - 64y_4^2y_2y_3 + 128y_2y_3y_1y_5 - 96y_2y_1^2y_3^2 + 64y_2^2y_3^2 - 128y_2y_5^2 - 32y_3y_5^2 \\
 & \quad - 16y_1^2y_3^3 + 32y_3y_1^2y_4^2 - 64y_3y_1^3y_5 + 32y_1^4y_3^2 + 64y_1^2y_5^2 + 32y_3^2y_1y_5 \geq 0 \\
 & D_{1245} = 4y_2y_3^3 - 16y_4^2y_2y_3 + 32y_2y_3y_1y_5 - 24y_2y_1^2y_3^2 + 16y_2^2y_3^2 - 32y_2y_1^2y_4^2 - 8y_3y_5^2 \\
 & \quad - 4y_1^2y_3^3 + 8y_3y_1^2y_4^2 - 16y_3y_1^3y_5 + 8y_1^4y_3^2 + 16y_1^4y_4^2 + 8y_3^2y_1y_5 \geq 0 \\
 & D_{1345} = 4y_3^4 - 32y_3^2y_4^2 + 32y_3^2y_1y_5 - 16y_1^2y_3^3 + 16y_2y_3^3 + 32y_3y_1^2y_4^2 + 64y_4^4 - 64y_4^2y_2y_3 - 32y_3y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{2345} = 16y_2y_3^4 - 96y_2y_3^2y_4^2 + 64y_2y_3^2y_1y_5 - 32y_2y_1^2y_3^3 + 32y_2^2y_3^3 + 64y_2y_3y_1^2y_4^2 \\
 & \quad + 128y_2y_4^4 - 128y_4^2y_2^2y_3 - 64y_2y_3y_5^2 - 16y_3^2y_5^2 + 64y_4^2y_5^2 \geq 0 \\
 & D_{12345} = 32y_1y_5y_3^3 + 128y_2y_3^2y_1y_5 + 256y_2y_3y_1^2y_4^2 - 128y_1y_5y_3y_4^2 + 16y_2y_3^4 + 64y_2^2y_3^3 \\
 & \quad + 256y_2y_4^4 - 32y_3^2y_5^2 + 128y_4^2y_5^2 - 256y_4^2y_2^2y_3 - 128y_2y_3^2y_4^2 - 96y_2y_1^2y_3^3 - 128y_2y_3y_5^2 \\
 & \quad - 64y_3^2y_1^3y_5 - 64y_3y_1^4y_4^2 + 64y_1^2y_3y_5^2 - 16y_1^2y_3^4 + 32y_1^4y_3^3 - 128y_1^2y_4^4 + 96y_1^2y_3^2y_4^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la stratification de cet espace d'orbites. Tout d'abord, on voit que pour une matrice générique de $M_2(\mathbb{R})$, son orbite est composée de quatre points :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

Il suffit en effet de faire agir sur la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ les éléments du groupe ρ , σ_α et σ_β respectivement. De plus, on voit que le groupe d'isotropie minimal est composé de deux éléments qui agissent de manière triviale sur $M_2(\mathbb{R})$: e et ρ^2 . Ensuite, les ensembles

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$X_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sont invariants pour les groupes respectifs $G_1 = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3\}$, $G_2 = \{e, \rho^2, \sigma_\alpha, \sigma_\gamma\}$ et $G_3 = \{e, \rho^2, \sigma_\beta, \sigma_\delta\}$. Comme ces groupes ne sont pas conjugués entre eux, on obtient les strates de $M_2(\mathbb{R})$: $M_2(\mathbb{R})^{(G_1)} = X_1$, $M_2(\mathbb{R})^{(G_2)} = X_2$ et $M_2(\mathbb{R})^{(G_3)} = X_3$. Avec l'origine, qui est la strate $M_2(\mathbb{R})^{(D_4)}$ et $M_2(\mathbb{R})^{(e)} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, il y a donc cinq strates de $M_2(\mathbb{R})$.

Pour avoir les strates au niveau de l'espace d'orbites, on regarde l'image de X_1 , X_2 et X_3 par p :

$$p(X_1) = \{(2a, 2a^2, 2b^2, -b^2, 2ab^2) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$p(X_2) = \{(a + d, a^2 + d^2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5 \mid a, d \in \mathbb{R}\}$$

$$p(X_3) = \{(2a, 2a^2, 2b^2, b^2, 2ab^2) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Donc, $(M_2(\mathbb{R})/D_4)^{(D_4)} = \{0\}$, $(M_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_1)} \cong p(X_1)$, $(M_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_2)} \cong p(X_2)$, $(M_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_3)} \cong p(X_3)$ et $(M_2(\mathbb{R})/D_4)^{(e)} \cong X \setminus (\{0\} \cup p(X_1) \cup p(X_2) \cup p(X_3))$.

Exemple 4 : $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4$

On fait maintenant agir D_4 sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ par conjugaison. En effet,

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est l'espace vectoriel de dimension 3 formé des matrices à trace nulle ayant comme \mathbb{R} -base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour ces bases, la représentation matricielle de l'action des éléments de D_4 sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ que l'on identifie à \mathbb{R}^3 devient

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_\delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les générateurs de l'algèbre des polynômes D_4 -invariants sont

$$p_1(x, y, z) = x^2$$

$$p_2(x, y, z) = y^2 + z^2$$

$$p_3(x, y, z) = yz$$

$$p_4(x, y, z) = xy^2 - xz^2$$

qui sont liés par la relation

$$h(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 p_2^2 - 4p_1 p_3^2 - p_4^2 = 0$$

Donc, $Z = \mathcal{V}(\langle h \rangle) \subseteq \mathbb{R}^4$ est une surface de \mathbb{R}^4 . La matrice *Grad* définie sur X est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p(x, y, z)) &= \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 0 & z & y \\ y^2 - z^2 & 2xy & -2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 & y^2 - z^2 \\ 0 & 2y & z & 2xy \\ 0 & 2z & y & -2xz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x^2 & 0 & 0 & 2(xy^2 - xz^2) \\ 0 & 4(y^2 + z^2) & 4yz & 4(xy^2 - xz^2) \\ 0 & 4yz & z^2 + y^2 & 0 \\ 2(xy^2 - xz^2) & 4(xy^2 - xz^2) & 0 & y^4 + z^4 - 2y^2z^2 + 4x^2(y^2 + z^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec les substitutions

$$u := p_1(x, y, z)$$

$$v := p_2(x, y, z)$$

$$w := p_3(x, y, z)$$

$$s := p_4(x, y, z)$$

On obtient la matrice *Grad* définie sur Z

$$\text{Grad}(u, v, w, s) = \begin{pmatrix} 4u & 0 & 0 & 2s \\ 0 & 4v & 4w & 4s \\ 0 & 4w & v & 0 \\ 2s & 4s & 0 & v^2 - 4w^2 + 4uv \end{pmatrix}$$

Avec D_I désignant le déterminant mineur principal M_I de $\text{Grad}(u, v, w, s)$, il y a maintenant 15 inégalités provenant de ces déterminants. En voici quelques-unes :

$$\begin{cases} D_1 = 4u \geq 0 \\ D_2 = 4v \geq 0 \\ D_{12} = 16uv \geq 0 \\ D_{123} = 16u(v^2 - 4w^2) \geq 0 \end{cases}$$

Il est à noter que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, les matrices de trace nulle, est en fait la variété affine de $M_2(\mathbb{R})$ donnée par $\mathcal{V}(x_1 + x_4)$. Ainsi, par la proposition 2.4.2, on s'attend à ce que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4 \cong M_2(\mathbb{R})/D_4 \cap \mathcal{V}(x_1 + x_4)$. Or, avec $x_1 + x_4 = 0$, le premier des polynômes générateurs de $\mathbb{R}[M_2(\mathbb{R})]^{D_4}$ que l'on a trouvé, $p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_4$, est identiquement nul. Avec la contrainte additionnelle $y_1 = 0$, les inégalités que l'on a donné servant à définir l'espace d'orbites $M_2(\mathbb{R})/D_4$ deviennent

$$\begin{cases} D'_2 = 4y_2 \geq 0 \\ D'_3 = 4y_3 \geq 0 \\ D'_{12} = 8y_2 \geq 0 \\ D'_{123} = 32y_3y_2 \geq 0 \\ D'_{1234} = 32y_2(y_3^2 - 4y_4^2) \geq 0 \end{cases}$$

Avec $y_2 = u$, $y_3 = v$ et $y_4 = w$, on retrouve des inégalité équivalentes à ceux énumérés pour l'espace d'orbites $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4$.

On détermine maintenant les types d'orbites de cette action sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Tout d'abord, on voit que les éléments du groupe e et ρ^2 agissent trivialement sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Aussi, l'orbite d'une matrice générique de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est composée de quatre points :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & -a \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -a & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

en appliquant respectivement ρ , σ_α et σ_β .

Or,

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

si et seulement si $a = 0$ et $b = -c$.

$$\sigma_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

si et seulement si $b = c = 0$. Et

$$\sigma_\beta \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

si et seulement si $a = 0$ et $b = c$.

On obtient donc pour $G_1 = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3\}$, $G_2 = \{e, \rho, \sigma_\alpha, \sigma_\gamma\}$ et $G_3 = \{e, \rho, \sigma_\beta, \sigma_\delta\}$, les strates de dimension 1 :

$$X_1 = (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))^{(G_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$X_2 = (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))^{(G_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$X_3 = (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))^{(G_3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec les strates $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))^{(D_4)} = \{0\}$ et $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))^{(e, \rho)} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \setminus (\{0\} \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, on obtient donc cinq strates de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Avec l'application polynomiale $p(a, b, c) = (a^2, b^2 + c^2, bc, ab^2 - ac^2)$, on obtient les strates de l'espace d'orbites :

$$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_1)} \cong \{0\}$$

$$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_1)} \cong p(X_1) = \{(0, 2b^2, b^2, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid b \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_2)} \cong p(X_2) = \{(a^2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4)^{(G_3)} \cong p(X_3) = \{(0, 2b^2, -b^2, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid b \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})/D_4)^{(e, \rho)} \cong Z \setminus (\{0\} \cup p(X_1) \cup p(X_2) \cup p(X_3))$$

Exemple 5 : \mathbb{R}^2/D_{2n}

On considère l'action sur \mathbb{R}^2 du groupe diédral D_{2n} , soit le groupe des réflexions et rotations d'un $2n$ -gone régulier dans \mathbb{R}^2 . Comme on a vu pour D_4 , ce groupe est généré par la réflexion et la rotation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{2n}) & \sin(\frac{2\pi}{2n}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{2n}) & \cos(\frac{2\pi}{2n}) \end{pmatrix}$$

Un système de générateurs de l'anneau des invariants est donné par :

$$p_1(x, y) = x^2 + y^2$$

$$p_2(x, y) = \sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j} (-1)^j x^{2n-2j} y^{2j}$$

qui sont deux polynômes sans relations algébriques (voir par exemple [7]). On obtient la matrice $Grad$ sur X :

$$\begin{aligned}
 Grad(p(x, y)) &= \\
 &= \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j} (2n-2j) (-1)^j x^{2n-2j-1} y^{2j} & \sum_{j=1}^n \binom{2n}{2j} (2j) (-1)^j x^{2n-2j} y^{2j-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2x & \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j} (2n-2j) (-1)^j x^{2n-2j-1} y^{2j} \\ 2y & \sum_{j=1}^n \binom{2n}{2j} (2j) (-1)^j x^{2n-2j} y^{2j-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2) & 4n \left(\sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j} (-1)^j x^{2n-2j} y^{2j} \right) \\ 4n \left(\sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j} (-1)^j x^{2n-2j} y^{2j} \right) & 4n^2 (x^2 + y^2)^{2n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et donc en substituant par

$$u := p_1(x, y, z)$$

$$v := p_2(x, y, z)$$

on obtient la matrice $Grad$ sur Z

$$Grad(u, v) = \begin{pmatrix} 4u & 4nv \\ 4nv & 4n^2 u^{2n-1} \end{pmatrix}$$

Par le théorème principal, $(u, v) \in X$ si et seulement si

$$\begin{cases} 4u \geq 0 \\ 4n^2 u^{2n-1} \geq 0 \\ 16n^2 (u^{2n} - v^2) \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathbb{R}^2 / D_{2n} \cong X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0 \text{ et } u^{2n} - v^2 \geq 0\}$$

Exemple 6 : \mathbb{R}^3 / O_h

On considère l'action du groupe $G = O_h$ des rotations du cube sur \mathbb{R}^3 . Ce groupe, formé de 24 éléments, est généré par les éléments suivants :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour plus de détails sur ce groupe et cette représentation, on réfère le lecteur à [13]. On obtient pour cette action sur \mathbb{R}^3 les polynômes générateurs de l'anneau des invariants :

$$p_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$p_2(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

$$p_3(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6$$

$$p_4(x, y, z) = x^5y^3z - x^5yz^3 - x^3y^5z + x^3yz^5 + xy^5z^3 - xy^3z^5$$

Ces polynômes sont liés via une seule relation algébrique :

$$\begin{aligned} h(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{1}{36}p_1^9 + \frac{1}{3}p_1^7p_2 - \frac{5}{18}p_1^6p_3 - \frac{4}{3}p_1^5p_2^2 \\ &+ \frac{13}{6}p_1^4p_2p_3 + \frac{11}{6}p_1^3p_2^3 - \frac{17}{18}p_1^3p_3^2 - \frac{25}{6}p_1^2p_2^2p_3 \\ &- \frac{1}{4}p_1p_2^4 + \frac{7}{2}p_1p_2p_3^2 + \frac{1}{6}p_2^3p_3 - p_3^3 - p_4^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, $Z = \mathcal{V}(\langle h \rangle) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid h(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0\}$ et la matrice *Grad* sur X est :

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p(x, y, z)) &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 6x^5 & 6y^5 & 6z^5 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 4x^3 & 6x^5 & \alpha \\ 2y & 4y^3 & 6y^5 & \beta \\ 2z & 4z^3 & 6z^5 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 + z^2) & 8(x^4 + y^4 + z^4) & 12(x^6 + y^6 + z^6) & 18\delta \\ 8(x^4 + y^4 + z^4) & 16(x^6 + y^6 + z^6) & 24(x^8 + y^8 + z^8) & 20\epsilon \\ 12(x^6 + y^6 + z^6) & 24(x^8 + y^8 + z^8) & 36(x^{10} + y^{10} + z^{10}) & 6\xi \\ 18\delta & 20\epsilon & 6\xi & \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\alpha = 5x^4y^3z - 5x^4yz^3 - 3x^2y^5z + 3x^2yz^5 + y^5z^3 - y^3z^5$$

$$\beta = 3x^5y^2z - x^5z^3 - 5x^3y^4z + x^3z^5 + 5xy^4z^3 - 3xy^2z^5$$

$$\gamma = x^5y^3 - 3x^5yz^2 - x^3y^5 + 5x^3yz^4 + 3xy^5z^2 - 5xy^3z^4$$

$$\delta = x^5y^3z - x^5yz^3 - x^3y^5z + x^3yz^5 + xy^5z^3 - xy^3z^5$$

$$\epsilon = x^7y^3z - x^7yz^3 - y^7x^3z + y^7xz^3 + z^7x^3y - z^7xy^3$$

$$\xi = 5(x^9y^3z - x^9yz^3 - y^9x^3z + y^9xz^3 + z^9x^3y - z^9xy^3)$$

$$+ 3(-x^7y^5z + x^7yz^5 + y^7x^5z - y^7xz^5 - z^7x^5y + z^7xy^5)$$

$$\eta = -30x^4y^4z^8 + 3x^4y^{10}z^2 + 3x^2y^{10}z^4 + x^2y^8z^6 + 3x^4y^2z^{10}$$

$$+ x^2y^6z^8 + 3x^2y^4z^{10} + x^8y^6z^2 - 30x^8y^4z^4 + x^6y^8z^2$$

$$+ 22x^6y^4z^6 - 30x^4y^8z^4 + 22x^4y^6z^6 + x^8y^2z^6 + 22x^6y^6z^4$$

$$+ x^6y^2z^8 + x^6y^{10} + x^{10}y^6 - 2x^8y^8 + x^6z^{10} + x^{10}z^6 - 2x^8z^8$$

$$+ y^6z^{10} + y^{10}z^6 - 2y^8z^8 + 3x^{10}y^2z^4 + 3x^{10}y^4z^2$$

Or,

$$(x^8 + y^8 + z^8) = \frac{1}{6}p_1^4 + \frac{4}{3}p_1p_3 - p_1^2p_2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

$$(x^{10} + y^{10} + z^{10}) = \frac{1}{6}p_1^5 + \frac{5}{6}p_1^2p_3 - \frac{5}{6}p_1^3p_2 + \frac{5}{6}p_2p_3$$

$$\epsilon = p_1p_4$$

$$\xi = p_1^2 p_4 + 4p_2 p_4$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{4}p_1^8 - \frac{5}{2}p_1^6 p_2 + p_1^5 p_3 + \frac{17}{2}p_1^4 p_2^2 - 7p_1^3 p_2 p_3 - 10p_1^2 p_2^3 \\ &+ \frac{1}{2}p_1^2 p_3^2 + 14p_1 p_2^2 p_3 - \frac{9}{2}p_2 p_3^2 - \frac{1}{4}p_2^4 \end{aligned}$$

Donc, en substituant par :

$$u := p_1(x, y, z)$$

$$v := p_2(x, y, z)$$

$$w := p_3(x, y, z)$$

$$s := p_4(x, y, z)$$

on obtient la matrice *Grad* sur Z :

$$\begin{pmatrix} 2u & 8v & 12w & 18s \\ 8v & 16w & 4(u^4 + 8uw - 6u^2v + 3v^2) & 20us \\ 12w & 4(u^4 + 8uw - 6u^2v + 3v^2) & 6(u^5 + 5u^2w - 5u^3v + 5vw) & 6(u^2s + 4vs) \\ 18s & 20us & 6(u^2s + 4vs) & \eta \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{4}u^8 - \frac{5}{2}u^6v + u^5w + \frac{17}{2}u^4v^2 - 7u^3vw - 10u^2v^3 \\ &+ \frac{1}{2}u^2w^2 + 14uv^2w - \frac{9}{2}vw^2 - \frac{1}{4}v^4 \end{aligned}$$

Voici quelques inégalités provenant des déterminants des mineurs principaux de *Grad* (u, v, w, s) .

$$D_1 = 2u \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 0$$

$$D_{12} = 32(uw - 2v^2) \geq 0 \Leftrightarrow uw - 2v^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} D_{123} &= 32(-10u^6w - 34u^3w^2 + 90u^4vw + 222uvw^2 - u^9 + 12u^7v - 54u^5v^2 \\ &- 252u^2v^2w + 96u^3v^3 - 9uv^4 + 12wv^3 - 72w^3) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1234} = & 8(2920u^6vw^3 - 18026wu^6v^4 - 7788u^7v^2w^2 - 1800u^6s^2v + 936wu^5s^2 \\
& + 719872v^3w^3u^2 + 1244u^9vw^2 + 16026wu^4v^5 - 25040u^3w^2v^4 - 732u^2wv^6 \\
& - 12692u^4w^3v^2 + 266wu^{12}v + 3072u^3w^4v + 8560wu^8v^3 - 2100wu^{10}v^2 \\
& + 22216u^5w^2v^3 + 612uv^5w^2 + 2592u^4v^2s^2 + 1296w^2vs^2 - 144w^2u^2s^2 \\
& - 8028uv^2w^4 - 1512wu^3s^2v - 1728uvw^2s^2 - 76u^{11}w^2 - 14wu^{14} - 228u^8w^3 \\
& - 356u^5w^4 + 288u^8s^2 + 22u^{15}v - 208u^{13}v^2 + 1084u^{11}v^3 - 3284u^9v^4 \\
& + 5502u^7v^5 - 4092u^5v^6 + 264u^3v^7 + 9uv^8 - 144v^4w^3 - 12v^7w + 72v^4s^2 \\
& - u^{17} - 144u^2w^5 + 1296vw^5) \geq 0
\end{aligned}$$

Pour déterminer les types de strates, on se réfère au tableau suivant qui regroupe les éléments du groupe des rotations du cube ainsi que leur action sur un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par classes de conjugaisons :

$$C_1 \left\{ g_1 \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \right.$$

$$C_2 \left\{ \begin{array}{l} g_2 \cdot (x, y, z) = (-x, -y, z) \\ g_3 \cdot (x, y, z) = (-x, y, -z) \\ g_4 \cdot (x, y, z) = (x, -y, -z) \end{array} \right.$$

$$C_3 \left\{ \begin{array}{l} g_5 \cdot (x, y, z) = (-y, x, z) \\ g_6 \cdot (x, y, z) = (y, -x, z) \\ g_7 \cdot (x, y, z) = (z, y, -x) \\ g_8 \cdot (x, y, z) = (-z, y, x) \\ g_9 \cdot (x, y, z) = (x, -z, y) \\ g_{10} \cdot (x, y, z) = (x, z, -y) \end{array} \right.$$

$$C_4 \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \cdot (x, y, z) = (-x, z, y) \\ g_{12} \cdot (x, y, z) = (-z, -y, -x) \\ g_{13} \cdot (x, y, z) = (y, x, -z) \\ g_{14} \cdot (x, y, z) = (-y, -x, -z) \\ g_{15} \cdot (x, y, z) = (-x, -z, -y) \\ g_{16} \cdot (x, y, z) = (z, -y, x) \end{array} \right.$$

$$C_5 \left\{ \begin{array}{l} g_{17} \cdot (x, y, z) = (-z, -x, y) \\ g_{18} \cdot (x, y, z) = (z, x, y) \\ g_{19} \cdot (x, y, z) = (-y, z, -x) \\ g_{20} \cdot (x, y, z) = (y, -z, -x) \\ g_{21} \cdot (x, y, z) = (-z, x, -y) \\ g_{22} \cdot (x, y, z) = (z, -x, -y) \\ g_{23} \cdot (x, y, z) = (y, z, x) \\ g_{24} \cdot (x, y, z) = (-y, -z, x) \end{array} \right.$$

En notant les sous-groupes suivants $G_1 = \{g_1, g_2, g_5, g_6\}$, $G_2 = \{g_1, g_3, g_7, g_8\}$ et $G_3 = \{g_1, g_4, g_9, g_{10}\}$, on voit du tableau que

$$(\mathbb{R}^3)^{\langle G_1 \rangle} = \{(0, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{\langle G_2 \rangle} = \{(0, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{\langle G_3 \rangle} = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Or, ces trois groupes sont congrués. Ils forment donc une même strate

$$X_1 = (\mathbb{R}^3)^{(G_1)} = \{(0, 0, x), (0, x, 0), (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Ces strates correspondent en fait aux axes de rotations x , y et z de \mathbb{R}^3 .

La seconde strate est composée des six axes de rotations selon les axes reliant les milieux d'arêtes opposés du cube. On observe en fait que

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{11}} = \{(0, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{12}} = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{13}} = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{14}} = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{15}} = \{(0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{R}^3)^{g_{16}} = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Or, ces six éléments $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{16}$ d'ordre deux sont tous conjugués et donc

$$\begin{aligned} X_2 &= (\mathbb{R}^3)^{(g_{11})} \\ &= \{(0, x, x), (x, 0, -x), (x, x, 0), (x, -x, 0), (0, x, -x), (x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Pour les éléments g_{17} à g_{24} , seulement g_{18} et g_{23} ont des points non nuls de \mathbb{R}^3 qui sont laissés invariants par l'action du groupe. Ainsi,

$$X_3 = (\mathbb{R}^3)^{(g_{18}, g_{23})} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Avec la strate correspondant à l'origine et celle ouverte et dense dans \mathbb{R}^3 correspondant à $(\mathbb{R}^3)^{(e)}$, il y a donc cinq strates de \mathbb{R}^3 pour cette action.

Avec l'application polynomiale

$$p(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^4 + y^4 + z^4, x^6 + y^6 + z^6, x^5 y^3 z - x^5 y z^3 - x^3 y^5 z + x^3 y z^5 + x y^5 z^3 - x y^3 z^5)$$

on obtient l'image des strates de \mathbb{R}^3 :

$$p(X_1) = \{(x^2, x^4, x^6, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$p(X_2) = \{(2x^2, 2x^4, 2x^6, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

$$p(X_3) = \{(3x^2, 3x^4, 3x^6, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$$

Donc,

$$(\mathbb{R}^3/G)^{(G)} \cong \{0\}$$

$$(\mathbb{R}^3/G)^{(G_1)} \cong p(X_1)$$

$$(\mathbb{R}^3/G)^{(g_{11})} \cong p(X_2)$$

$$(\mathbb{R}^3/G)^{(g_{18}, g_{23})} \cong p(X_3)$$

$$(\mathbb{R}^3/G)^{(e)} \cong Z \setminus \{0\} \cup p(X_1) \cup p(X_2) \cup p(X_3)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABUD, G. SARTORI, *The Geometry of Orbit-Space and Natural Minima of Higgs Potentials*, Phys. Lett. **104**, 147-152, 1981
- [2] M. ABUD, G. SARTORI, *The Geometry of Spontaneous Symmetry Breaking*, Ann. Phys. **150**, 307-370, 1983
- [3] K. BEKKA, *Sur les propriétés topologiques et métriques des espaces stratifiés*, thèse, Université de Paris-Sud, Orsay, 1988
- [4] K. BEKKA, *C-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, Part 1, Lect. Notes Math. **1462**, Springer-Verlag, Berlin, 42-62, 1991
- [5] J. BOCHNAK, M. COSTE, M-F. ROY, *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, Berlin, 1987
- [6] G. BREDON, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Pure and Appl. Math. Vol. **46**, Academic Press, New York, 1972
- [7] M. BRION, G. SCHWARZ, *Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients*, Cours d'été CIMPA, Univ. Monastir, et Univ. de Poitiers, Hermann, Paris, 1996
- [8] C. CHEVALLEY, *Invariants of Finite Groups Generated by Reflections*, Amer. J. Math. **77**, 778-782, 1955
- [9] J. DADOK, V. KAC, *Polar Representations*, J. Algebra **92**, 504-524, 1985
- [10] D. EISENBUD, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. **150**, Springer-Verlag, New York, 1996
- [11] M. GORESKEY, R. MACPHERSON, *Stratified Morse Theory*, Springer-Verlag, New York, 1988
- [12] A. GRAY, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Studies in Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, 1993

- [13] M. HALL, *The Theory of Groups*, Second Edition, Chelsea Publ. Company, New York, 1976
- [14] G. KEMPF, L. NESS, *The Length of Vectors in Representation Spaces*, Algebraic geometry : summer meeting Copenhagen August 1978, Lect. Notes Math. **732**, 233-243, Springer-Verlag, New York, 1979
- [15] R.H. KARRIEL, *Undergraduate Topology*, Saunders Toronto, Philadelphia, 1971
- [16] D. LUNA, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. Fr. Mém. **33**, 81-105, 1973
- [17] D. LUNA, *Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie*, Am. J. Math. **97**, 172-181, 1975
- [18] M.A. MIKHAÏLOVA, *On the Quotient Space Modulo the Action of a Finite Group Generated by Pseudoreflections*, Math. USSR Izvest. **24**, **1**, 99-119, 1985
- [19] W.S. MASSEY, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Math. **127**, Springer-Verlag, New York, 1991
- [20] C. MURDO, A.A. DU PLESSIS, D.J.A. TROTMAN, *Stratified Transversality by Isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. **355**, no. 12, 4881-4900, 2003
- [21] M.J. PFLAUM, *Analytic and Geometric Study of Stratified Spaces*, Lect. Notes Math. **1768**, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [22] C. PROCESI, *Positive Symmetric Functions*, Adv. Math. **29**, 219-225, 1978
- [23] C. PROCESI, G. SCHWARZ, *Inequalities Defining Orbit Spaces*, Invent. Math. **81**, 539-554, 1985
- [24] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, 3e édition, Hermann, Paris, 1978
- [25] G. SCHWARZ, *Lifting Smooth Homotopies of Orbit Spaces*, Publ. Math. IHES **51**, 37-136, 1980
- [26] O.V. SHVARTSMAN, *On an Arithmetic Discrete Group Acting in the Complex Ball*, Manuscript No. 2024-75, déposé à VINITI, (Russe) R. Zh. Mat. **11A655**, 1975
- [27] G. STRANG, *Linear Algebra and its Applications*, Second Edition, Academic Press, New York, 1980
- [28] R. THOM, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 240-284, 1969

- [29] D. TROTMAN, L. WILSON, *Stratifications, Singularities and Differential Equations II : Stratifications and Topology of Singular Spaces*, Travaux en cours **55**, Hermann, Paris, 1997
- [30] G. WALSHAP, *Metric Structures in Differential Geometry*, Grad. Texts in Math. **224**, Springer-Verlag, New York, 2004
- Lien internet :
- [31] <http://mathworld.wolfram.com/SymmetricPolynomial.html>

Annexe A

ENSEMBLES STRATIFIÉS ABSTRAITS ET TRANSVERSALITÉ

Dans cette section, nous introduisons des outils qui sont nécessaires pour la démonstration du théorème de Shvartsman. On retrouve l'ensemble de cette section dans [20].

Définition A.0.2. Une stratification d'un espace topologique A est une partition localement finie Σ de A en variétés connexes C^1 , appelées les strates de Σ , qui satisfont la condition de frontière : si X et Y sont deux strates disjointes de Σ telles que X intersecte la fermeture de Y , $\text{adh } Y$, alors $X \subseteq \text{adh } Y$, que l'on note $X < Y$.

La paire $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est appelée un espace stratifié. L'union des strates de dimension $\leq k$ est appelée le k -squelette, dénoté par A_k , induisant un espace stratifié $\mathcal{X}' = (A_k, \Sigma_{A_k})$.

Définition A.0.3. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié. Un objet sous-stratifié de \mathcal{X} est un espace stratifié $\mathcal{W} = (W, \Sigma_W)$, où W est un sous-ensemble de A , tel que chaque strate de Σ_W est contenue dans une seule strate de \mathcal{X} .

Définition A.0.4. Une application stratifiée $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ entre deux espaces stratifiés $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et $\mathcal{X}' = (B, \Sigma')$ est une application continue $f : A \rightarrow B$ qui envoie chaque strate X de \mathcal{X} dans une unique strate X' de \mathcal{X}' , telle que la restriction $f|_X : X \rightarrow X'$ est lisse. L'application $f : A \rightarrow B$ est un homéomorphisme stratifié si f est un homéomorphisme et si chaque $f|_X$ est un difféomorphisme.

Définition A.0.5. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié. On dira qu'une famille $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X, T_X)\}_{X \in \Sigma}$ est un système de données contrôlant pour \mathcal{X} si pour chaque strate $X \in \Sigma$:

- (i) T_X est un voisinage ouvert de X dans A (appelé voisinage tubulaire de X).
- (ii) $\pi_X : T_X \longrightarrow X$ est une rétraction continue de T_X sur X (appelée projection sur X).
- (iii) $\rho_X : T_X \longrightarrow [0, \infty)$ est une fonction continue telle que $X = \rho_X^{-1}(0)$ (appelée fonction de distance de X).

De plus, pour chaque paire de strates telle que $X < Y$, en considérant les restrictions $\pi_{XY} = \pi_X|_{T_{XY}}$ et $\rho_{XY} = \rho_X|_{T_{XY}}$ sur $T_{XY} = T_X \cap T_Y$, on a :

- (iv) L'application $(\pi_{XY}, \rho_{XY}) : T_{XY} \longrightarrow X \times [0, \infty)$ est une immersion lisse.
- (v) Pour chaque strate Z de \mathcal{X} telle que $Z > Y > X$ et pour chaque $z \in T_{YZ} \cap T_{XZ}$, les conditions de contrôle suivantes sont satisfaites :

- (a) $\pi_{XY} \circ \pi_{YZ}(z) = \pi_{XZ}(z)$
- (b) $\rho_{XY} \circ \pi_{YZ}(z) = \rho_{XZ}(z)$

Définition A.0.6. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié et \mathcal{F} un système de données contrôlant pour \mathcal{X} . Si A est Hausdorff, localement compact et admet une base dénombrable pour sa topologie, on appelle la paire $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un ensemble stratifié abstrait.

Remarque A.0.1. Soit G un groupe fini et W un $\mathbb{R}G$ -module de type fini. La stratification par types d'orbites de W/G satisfait les conditions a) et b) de Whitney (voir [21]/théorème 4.4.6, p.165] pour la démonstration et voir [21], [11] et [29] pour la définition des conditions de Whitney). De plus, la condition b) de Whitney implique la c)-régularité de Bekka, qui elle, est suffisante pour être un ensemble stratifié abstrait (voir [20], [3] et [4]). La stratification par types d'orbites de W/G y détermine alors un ensemble stratifié abstrait.

Définition A.0.7. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié. Une isotopie stratifiée de \mathcal{X} , $H : A \times I \longrightarrow A$, est une application stratifiée telle que pour chaque $t \in I = [0, 1]$, l'application au temps t , $H_t : A \longrightarrow A$, est un homéomorphisme stratifié de A .

Définition A.0.8. Soit $\mathcal{W} = (W, \Sigma_W)$ et $\mathcal{W}' = (W', \Sigma_{W'})$ deux objets sous-stratifiés d'un espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$. On dit que \mathcal{W}' est une déformation par isotopie de \mathcal{W} dans A s'il existe une isotopie stratifiée $H : A \times I \longrightarrow A$ telle que $H_0 = Id_A$ et $W' = H_1(W)$.

Définition A.0.9. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié et deux objets sous-stratifiés $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ et $\mathcal{W} = (W, \Sigma_W)$. On dit que \mathcal{V} et \mathcal{W} sont transverses si pour chaque strate $S \in \Sigma$, les restrictions V_S et W_S sont transverses dans S , i.e pour chaque $s \in V_S \cap W_S$, $T_s V_S + T_s W_S = T_s A$.

Théorème A.0.5. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un ensemble stratifié abstrait et \mathcal{V} un objet sous-stratifié de \mathcal{X} . Pour chaque objet sous-stratifié $\mathcal{W} = (W, \Sigma_W)$ de \mathcal{X} et chaque voisinage ouvert U de W dans A , il existe une déformation par isotopie $\mathcal{W}' = (W', \Sigma_{W'})$ de \mathcal{W} , transverse à \mathcal{V} dans \mathcal{X} , telle que $W' \subseteq U$.

DÉMONSTRATION. Voir [20][Théorème 3.8, p.4887]. □

Théorème A.0.6. Avec les hypothèses et notations du théorème précédent, si Z est un sous-ensemble fermé de A tel qu'en chaque point \mathcal{W} est transversal à \mathcal{V} , on peut alors obtenir que la déformation par isotopie $H : A \times I \longrightarrow A$ satisfait $H_t|_Z = Id$ pour chaque $t \in I$, ainsi $W' \cap Z = W \cap Z$.

DÉMONSTRATION. Voir [20][Théorème 3.9, p.4890]. □

Annexe B

EXEMPLE D'UTILISATION DE MAGMA

On donne un exemple de l'utilisation du logiciel MAGMA pour trouver des générateurs de l'anneau des polynômes invariants ainsi que leurs relations algébriques. On présente ici l'exemple du groupe des rotations du cube agissant sur \mathbb{R}^3 .

Tout d'abord, on travaille avec le corps des nombres rationnels :

```
>Q := RationalField();
```

```
> Q;
```

```
Rational Field
```

Ensuite, on construit le groupe matriciel $M_3(\mathbb{Q})$:

```
> gl := GeneralLinearGroup(3,Q);
```

```
> gl;
```

```
GL(3, RationalField())
```

On construit le groupe des rotations du cube à l'aide des éléments générateurs suivants :

```
> G := sub< gl | [ 1,0,0, 0,1,0, 0,0,1 ],  
[ -1,0,0, 0,-1,0, 0,0,1 ], [ -1,0,0, 0,1,0, 0,0,-1 ],  
[ 1,0,0, 0,-1,0, 0,0,-1 ], [ 0,1,0, -1,0,0, 0,0,1 ],  
[ 0,0,-1, 0,1,0, 1,0,0 ], [ 1,0,0, 0,0,1, 0,-1,0 ],  
[ 0,-1,0, 0,0,1, -1,0,0 ], [ 0,1,0, 0,0,1, 1,0,0 ],  
[ 0,0,-1, -1,0,0, 0,1,0 ] >;
```

```
> G;
```

```
MatrixGroup(3, Rational Field)
```

Generators :

$$[-1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ -1 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 1]$$

$$[-1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ -1]$$

$$[1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ -1 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ -1]$$

$$[0 \ 1 \ 0]$$

$$[-1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 1]$$

$$[0 \ 0 \ -1]$$

$$[0 \ 1 \ 0]$$

$$[1 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 1]$$

$$[0 \ -1 \ 0]$$

$$[0 \ -1 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 1]$$

$$[-1 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 1]$$

```
[ 1 0 0 ]
```

```
[ 0 0 -1 ]
```

```
[-1 0 0 ]
```

```
[ 0 1 0 ]
```

Coefficient ring :

Rational Field

On obtient l'anneau des invariants avec la fonction *InvariantRing* :

```
>I := InvariantRing(G) ;
```

Puis les générateurs avec :

```
> FundamentalInvariants(I) ;
```

```
[
```

```
  x1^2 + x2^2 + x3^2,
```

```
  x1^4 + x2^4 + x3^4,
```

```
  x1^6 + x2^6 + x3^6,
```

```
  x1^5*x2^3*x3 - x1^5*x2*x3^3 - x1^3*x2^5*x3 + x1^3*x2*x3^5
```

```
  + x1*x2^5*x3^3 - x1*x2^3*x3^5
```

```
]
```

et les relations :

```
> Relations(I) ;
```

```
[
```

```
  -1/36*f1^9 + 1/3*f1^7*f2 - 5/18*f1^6*f3 - 4/3*f1^5*f2^2
```

```
  + 13/6*f1^4*f2*f3 + 11/6*f1^3*f2^3 - 17/18*f1^3*f3^2
```

```
  - 25/6*f1^2*f2^2*f3 - 1/4*f1*f2^4 + 7/2*f1*f2*f3^2 + 1/6*f2^3*f3
```

```
  - f3^3 - h1^2
```

```
]
```