Université de Montréal

Catégorie assujettie à une fonctionnelle et une application aux systèmes Hamiltoniens

par

Nicolas Beauchemin

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

Juillet 2006

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Catégorie assujettie à une fonctionnelle et une application aux systèmes Hamiltoniens

présentée par

Nicolas Beauchemin

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau
(président-rapporteur)

Marlène Frigon
(directeur de recherche)

Octav Cornea
(membre du jury)

Antonio Marino
(examinateur externe)

Tucker Carrington
(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:
24 octobre 2006

SUMMARY

The goal of this thesis is to present a modification of the Lusternik-Schnirelman category, called f-category, which takes into account a functional f. This f-category will allow us to obtain a lower bound on the number of critical points of f which depends not only on the space as it is the case with the classical category, but also of the functional. This lower bound is always larger or equal and sometimes much bigger than the one obtained in the classical case.

The concepts of relative category, limit relative category and asymptotic category will also be adapted. We will also present the notions of truncated category and of category adapted to a multivalued functional. Thereafter, we will show the relations between the critical points of the function f and the f-category as well as the relation between the f-category and linking sets. Finally, we will present an application to Hamiltonian systems and obtain an existence and multiplicity result.

Keywords

Lusternik-Schnirelman category, relative category, critical points, Hamiltonian systems.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

Je voudrais profiter de l'occasion qui m'est offerte pour remercier quelques personnes sans qui ce travail n'aurait sans doute jamais abouti.

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement la Professeure Marlène Frigon, ma directrice de recherche, pour son support de tous les instants et pour sa grande humanité. Merci d'avoir toujours eu la porte ouverte et de m'avoir supporté, aussi bien financièrement que mathématiquement. Je vous dois énormément, tant du point de vue professionnel qu'humain. Vous m'avez appris un nombre incalculable de choses.

Merci également au Professeur Antonio Marino, de l'Université de Pise, qui m'a invité à séjourner en Italie pour me permettre de travailler avec lui. Il m'a également ouvert la porte d'un pays magnifique. Cette expérience m'a énormément appris tant en mathématiques que sur moi-même.

Je voudrais aussi dire merci à Miguel Chagnon qui m'a fait confiance comme coadministrateur du laboratoire et ainsi, m'a permis d'apprendre et de m'épanouir au sein du département. Cette expérience m'a donné non seulement un savoir informatique hors pair, mais aussi une reconnaissance importante de la part de l'ensemble de la communauté.

Je voudrais aussi remercier tous les copains du département qui ont rempli ces années de moments inoubliables. Vous avez fait de cette période de ma vie une expérience colorée, riche, joyeuse et enrichissante. Anik, Christian, Dimitri, Étienne, Gabriel, Jean-François, Jérôme, Olivier, Sébastien et tous les autres, je vous dois une grande partie du plaisir que j'ai eu à faire des études aux cycles supérieurs.

Je voudrais remercier particulièrement Alexandre Girouard qui fut mon complice durant toutes ces années. Les nombreuses discussions (mathématiques ou non) que nous avons eues ont grandement contribué à enrichir l'ensemble de mon expérience. La plupart d'entre nous sont confinés à une île (pratiquement) déserte sans personne avec qui discuter de la recherche en cours. Grâce à toi, ce ne fut pas mon cas. Je suis extrêmement choyé d'avoir pu partager mon travail avec un ami comme toi.

Merci également à ma famille qui a toujours continué de croire en moi. Je pense en particulier à ma mère, Carmelle, sans qui je n'aurais jamais pu entreprendre des études avancées. Merci d'avoir su éveiller en moi cette curiosité qui m'a amené si loin. Tu es une personne merveilleuse.

Finalement, je voudrais envoyer un million de remerciements à ma chère Caroline qui a toujours été là pour moi, dans les bons comme dans les mauvais moments. Durant ces années, j'ai eu des moments de profond découragement. Tu as toujours su m'aider à me relever. Je te dois infiniment, tu remplis mes journées de soleil. Je t'aime.

INTRODUCTION

Tous jeunes encore, les deux auteurs dont nous présentons ici l'ouvrage ont déjà à leur actif de belles découvertes et sont, à notre avis, de ceux sur lesquels la Science Mathématique est en droit de fonder les plus sûrs espoirs. Dans ce fascicule et dans celui auquel il sert d'introduction on admirera la nouveauté et la largeur des points de vue, la puissance et la fécondité des idées émises.

Nous avons estimé qu'il convenait de ne pas laisser ignorer au lecteur français une œuvre de cette valeur.

HADAMARD[1]

Dans leur ouvrage *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels* [38], Lusternik et Schnirelman ont présenté un invariant topologique appelé catégorie. Ils définissent la catégorie d'un fermé $B \subseteq X$, où X est un espace topologique séparé, comme le nombre minimal de fermés contractiles dans X nécessaires pour recouvrir B. Cet outil permet entre autres de fournir une borne inférieure au nombre de points critiques d'une fonctionnelle définie sur un espace X, permettant ainsi d'obtenir des résultats de multiplicité.

Plus précisément, considérons un espace de Banach X et $f : X \to \mathbb{R}$, une fonctionnelle de classe C^1. Un *point critique de* f est un point $x \in X$ tel que $f'(x) = 0$. La valeur correspondante $f(x) = c$ est appelée valeur critique. Dans plusieurs applications, les points critiques d'une fonctionnelle correspondent aux solutions faibles d'un problème différentiel. Par exemple, si $X = H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$,

[1]Préface de *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels* [38].

les points critiques de la fonctionnelle

$$f(x) = \int_0^T \frac{1}{2} J\dot{x} \cdot x + H(t,x)\, dx$$

sont les solutions périodiques, de période T, du système Hamiltonien

$$Jx + \nabla H(t,x) = 0,$$

où ∇ est le gradient par rapport à x (voir [23, 50]).

De façon à obtenir des valeurs critiques qui ne sont pas des infima sur l'espace, Lusternik et Schnirelman ont utilisé pour les variétés compactes de dimension finie, un argument de mini-max [38]. Une valeur critique c_i est ainsi caractérisée par

$$c_i = \inf_{U \in \mathscr{A}} \sup_{x \in U} f(x)$$

où $\mathscr{A}$ est une classe d'ensembles de catégorie de Lusternik-Schnirelman supérieure ou égale à i. L'un des principaux outils utilisé pour montrer que c est bien une valeur critique est un lemme de déformation.

La théorie fut étendue à des espaces de dimension infinie pour les cas où f est bornée inférieurement, notamment aux variétés riemanniennes par J.T. Schwartz en 1964 [53] et aux variétés de Finsler par Palais en 1966 [48]. L'hypothèse d'avoir f bornée inférieurement est malheureusement cruciale dans tous ces travaux.

La théorie des points critiques continua de s'enrichir, notamment avec les travaux d'Ambrosetti et Rabinowitz qui exhibèrent en 1973 le fameux théorème du col de la montagne [2]. La présence d'un lemme de déformation était ici aussi essentielle pour assurer l'existence de points critiques. Cependant, dans leur situation, la fonctionnelle n'avait pas besoin d'être bornée inférieurement. En contre-partie, la multiplicité des points critiques trouvée en utilisant la catégorie ne pouvait plus être obtenue puisque l'espace est contractile. En 1989, Fournier et Willem [24] ont utilisé une notion de catégorie relative afin de pallier ce problème. Ainsi, ils développèrent une façon de traiter les fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement à l'aide d'une approche s'inspirant des travaux de Lusternik et Schnirelman, récupérant du même coup la multiplicité associée à ces méthodes. Par la suite, en collaboration avec Ramos et Lupo [23], ils ont présenté une extension de la catégorie relative qui est applicable aux fonctionnelles fortement indéfinies. Essentiellement, ces fonctionnelles sont telles que la décomposition spectrale de l'opérateur associé comporte une infinité de valeurs propres négatives ainsi qu'une infinité de valeurs propres positives. Pour ce faire, ils ont considéré les restrictions de f à des sous-espaces de dimension finie X_n, créant ainsi la catégorie relative limite.

Toutes ces approches dépendent fortement de lemmes de déformations. Sans compacité sur l'espace, ces lemmes nécessitent une condition de compacité appelée *condition de Palais-Smale.* Nous dirons que f satisfait la *condition de Palais-Smale au niveau* c (que nous noterons $(PS)_c$) si toute suite $(u_m) \subset X$ pour laquelle $f(u_m) \to c$ et $f'(u_m) \to 0$ quand $m \to \infty$, possède une sous-suite convergente. Notons $f^a = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$. Le théorème suivant illustre bien le type de lemmes de déformations que nous allons utiliser. Le lecteur intéressé pourra consulter [10, 12, 15, 17, 50, 61]. Notons $K_c = \{x \in X \mid f'(x) = 0 \text{ et } f(x) = c\}$, l'ensemble des points critiques de niveau c.

Théorème 0.1 (Lemme de déformation). *Soit X un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. Soient $c \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ et $\mathcal{O}$, un voisinage de K_c. Si f satisfait $(PS)_c$, alors il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et $\eta \in C(X \times [0,1], X)$ tels que*

(1) $\eta(x, 0) = x$ *pour tout* $x \in X$,

(2) $\eta(x, t) = x$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *si* $f(x) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$,

(3) $\eta(x, t)$ *est un homéomorphisme de* X *dans* X *pour chaque* $t \in [0,1]$,

(4) $\|\eta(x, t) - x\| \leq \lambda$, *pour tout* $t \in [0,1]$ *et pour tout* $x \in X$,

(5) $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x, t) \in [0,1] \times X$,

(6) $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$.

Au début des années 80, une notion de pente a été introduite par De Giorgi, Marino et Tosques [18] pour les fonctionnelles discontinues dans les espaces métriques. Ils ont utilisé cette notion de pente qu'on peut qualifier de type Fréchet pour développer une théorie d'évolution pour des inéquations variationnelles paraboliques et ainsi obtenir des résultats de multiplicité pour différents types d'inéquations variationnelles elliptiques.

En 1994, Degiovanni et Marzocchi [20] ont étendu la notion de points critiques aux fonctionnelles continues et semi-continues inférieurement. Pour ce faire, ils ont introduit la pente faible qui coïncide avec la norme de la dérivée lorsque la fonctionnelle considérée est de classe C^1. À l'aide de cette notion, avec Corvellec [17], ils ont pu également obtenir grâce à une condition de type Palais-Smale un lemme de déformation permettant de développer des théorèmes équivalents à ceux obtenus dans le cas où f est de classe C^1. En 1998, Frigon [26] généralise la pente faible pour obtenir une théorie des points critiques pour les fonctionnelles multivoques. À l'aide de la pente faible multivoque, elle obtient une condition de Palais-Smale ainsi qu'un lemme de déformation adaptés à son contexte.

Finalement, pour aborder des problèmes de rebonds élastiques avec une approche variationnelle, Marino et Mugnai [40, 41, 45] ont été amenés à considérer une notion de points critiques asymptotiques.

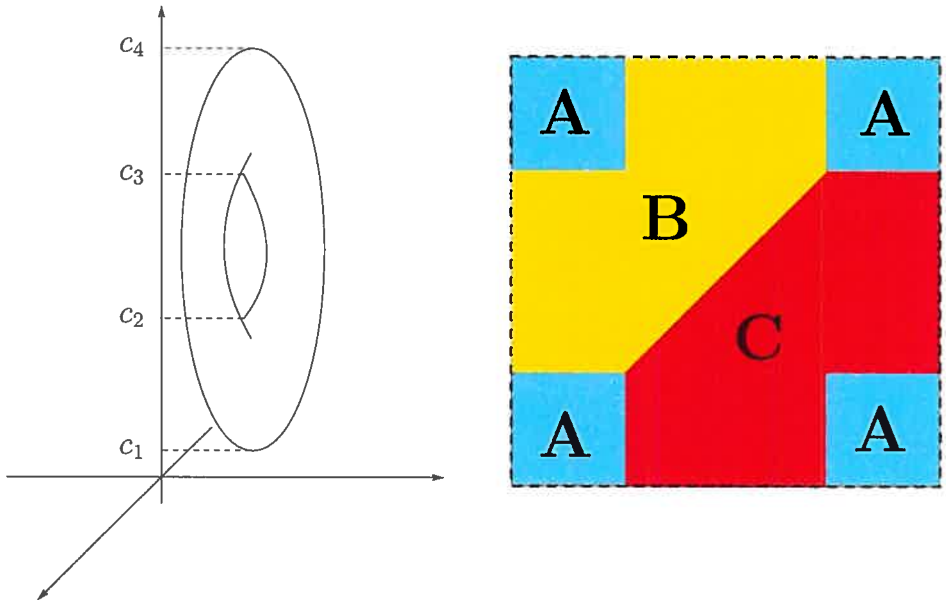
Soit $(h_n)_n$ une suite de fonctionnelles définies sur un espace de Banach X et considérons une fonctionnelle $h : X \to \mathbb{R}$. Supposons que les fonctionnelles h_n sont de classe C^1.

Définition 0.2. On dit que $x \in X$ est un *point asymptotiquement critique* pour le couple $((h_n)_n, h)$ s'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(u_k)_k$ dans X tels que

$$h'_{n_k}(u_k) \to 0, \quad u_k \to u \quad \text{et} \quad h_{n_k}(u_k) \to h(u).$$

Nous disons également que $h(u)$ est une *valeur asymptotiquement critique* pour le couple $((h_n)_n, h)$.

Ils ont par la suite réussi à adapter l'approche de la catégorie relative limite aux points critiques asymptotiques. Ainsi, ils ont pu borner inférieurement le nombre de points critiques asymptotiques de $((h_n)_n, h)$ où les h_n ne sont pas nécessairement les restrictions de h à un sous-espace X_n contrairement au cas de la catégorie relative limite développée par Fournier Lupo, Ramos et Willem [23].



(a) La fonction hauteur (b) La décomposition

FIG. 0.1. Le tore

Encore une fois, une condition de type Palais-Smale, la condition de ∇-*compacité*, est introduite de façon à obtenir l'existence de déformations pour la famille de fonctionnelles.

Puisque la catégorie est un invariant topologique, on peut très facilement trouver une fonctionnelle qui a plus de points critiques que la catégorie de l'espace sur lequel elle est définie. Considérons par exemple le tore $\mathbb{T}^2$ comme espace avec la fonction hauteur f telle qu'illustrée à la figure 0.1(a). Cette fonction a 4 valeurs critiques c_1, c_2, c_3, c_4, mais on peut recouvrir le tore par 3 fermés contractiles comme illustré à la figure 0.1(b). En particulier, ceci entraîne que $\mathrm{cat}_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{T}^2) \leq 3$.

Cette constatation n'est guère surprenante étant donné que les notions de catégorie, de catégorie relative et de catégorie relative limite ne tiennent pas compte de la fonctionnelle f considérée. Ceci va de soi puisque ces catégories caractérisent l'espace et non une fonctionnelle en particulier. Puisqu'ici, l'objet d'étude est la fonctionnelle, il serait intéressant de développer une notion de catégorie qui tienne compte de celle-ci. On pourrait ainsi espérer trouver une meilleure borne pour le nombre de points critiques.

L'objet de cette thèse est donc de développer une catégorie assujettie à une fonctionnelle f et de montrer qu'elle fournit bien une borne inférieure sur le nombre de points critiques de la fonctionnelle. Nous allons pour ce faire utiliser toute la portée des lemmes de déformations. En effet, dans les preuves classiques, les propriétés (4) et (5) de la déformation du théorème 0.1 étaient peu utilisées. Nous allons donc nous servir de ces propriétés et restreindre les déformations admissibles dans la définition de catégorie. Nous adapterons également toutes les notions de catégorie relative, catégorie relative limite ainsi que le cas asymptotique en tenant compte de la fonctionnelle. Compte tenu des différents contextes où cette f-catégorie pourra s'appliquer, nous adopterons une approche axiomatique pour ensuite expliciter des cas où on trouve des résultats spécifiques. Nous présentons également une notion de f-catégorie tronquée qui nous permettra de considérer des fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement sans avoir à étudier les ensembles de niveau.

Du point de vue des applications, mentionnons les travaux de Szulkin [59] qui étudie le système

$$\begin{cases} \dot{u} = J\nabla H(t,u), \\ u(0) = u(2\pi), \end{cases} \tag{SH1}$$

où $u = (p,q) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $H \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$, ∇H est la dérivée de H par rapport à u et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice symplectique usuelle. L'auteur montre que si H est périodique de période 2π dans toutes les variables, alors l'équation (SH1) a au moins $2N+1$ solutions distinctes. Pour ce faire, Szulkin utilise une légère modification de la catégorie relative de Fournier et Willem.

Mentionnons également les travaux de Liu [32] qui trouve le même résultat en adoptant une notion de pseudo-catégorie et en utilisant des approximations de Galerkin.

En 1995, Li et Willem [30] considérèrent le système

$$\begin{cases} J\dot{u} - A(t)u + \nabla H(t,u) = 0, \\ u(0) = u(2\pi), \end{cases} \tag{SH2}$$

sous les conditions

(H1) la matrice $2N \times 2N$ $A(t)$ est symétrique, continue, périodique de période 2π en t, $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N+1}, \mathbb{R})$ est périodique de période 2π en t ;

(H2) il existe des constantes $a_1, a_2 > 0$, $p > 1$ telles que

$$|\nabla H(t,u)|^p \leq a_1 + a_2 u \cdot \nabla H(t,u);$$

(H3) $H(t,u) = o(|u|^2)$, $|u| \to 0$, uniformément sur $\mathbb{R}$;

(H4) il existe une constante $\mu > 2$ et $R \geq 0$ telles que, pour $|u| \geq R$,

$$0 < \mu H(t,u) \leq u \cdot \nabla H(t,u);$$

(H5) il existe $\delta > 0$, tel que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) pour tout $|u| \leq \delta$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(t,u) \geq 0$,

(b) pour tout $|u| \leq \delta$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(t,u) \leq 0$.

Ils obtiennent alors que si H satisfait (H1)–(H5), alors l'équation (SH2) a au moins une solution. Les auteurs ne considèrent pas le cas où nous sommes en présence de périodicité dans les variables spatiales. Étant donné que les espaces considérés sont des espaces vectoriels, l'utilisation de la catégorie ne permet pas d'obtenir plus de points critiques. En effet, puisque tout sous-ensemble de l'espace est contractile, la catégorie de l'espace est 1.

Le lecteur intéressé pourra consulter [4, 42] pour trouver d'autres résultats concernant les problèmes Hamiltoniens.

De notre côté, nous avons considéré le problème (SH2) dans le cas particulier où $H(t,p,q)$ est une fonction périodique en t et q et A est de la forme

$$A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $B(t)$ est une matrice $N \times N$ auto-adjointe. Au chapitre 7, sous les conditions énoncées au Théorème 7.2, nous obtenons l'existence d'au moins une solution au problème (SH2). De plus, si

$$\max_{(t,q)\in[0,2\pi]^{N+1}} H(t,0,q) - \min_{(t,q)\in[0,2\pi]^{N+1}} H(t,0,q)$$

est assez petit, alors le problème (SH2) a au moins $N+1$ orbites de solutions distinctes. Ce problème est en quelque sorte une fusion des problèmes de Szulkin et de Li-Willem. En effet, la présence de périodicité dans les N dernières variables spatiales nous permettra d'utiliser la f-catégorie qui jouera un rôle crucial dans l'obtention de multiplicité de solutions. Soulignons, qu'à notre connaissance, ceci constitue une nouvelle application de méthodes variationnelles aux systèmes Hamiltoniens et qu'elle a pu être obtenue grâce à cette nouvelle notion de f-catégorie.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1. Résultats généraux

Nous utiliserons assez fréquemment le lemme d'Urysohn pour qu'il soit à propos de le rappeler.

Théorème 1.1 (Lemme d'Urysohn). *Soit X un espace normal. Soit A et B deux sous-ensembles fermés de X tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe une fonction continue*

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in B$.

1.2. Catégorie de Lusternik-Schnirelman classique

Pour plus d'information au sujet de la catégorie et de la catégorie relative, le lecteur pourra consulter [14, 23, 58, 59, 62].

Définition 1.2. Un ensemble A est dit *contractile* dans un espace topologique X s'il existe $\eta \in C(A \times [0,1], X)$ telle que, $\forall x, y \in A$,

$$\eta(x,0) = x \qquad \eta(x,1) = \eta(y,1).$$

Définition 1.3. Nous dirons que $\eta : A \times [0,1] \to X$ est une *déformation de A dans X* si

(1) η est continue,

(2) $\eta(x,0) = x \quad \forall x \in A$.

Définition 1.4. Soient η_1 et η_2, des déformations de A_1 et A_2 telles que $\eta_1(A_1,1) \subseteq A_2$. La *superposition de* η_1 *et* η_2, notée $\eta_2 * \eta_1$, est définie par

$$\eta_2 * \eta_1(x,t) = \begin{cases} \eta_1(x,2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \eta_2(\eta_1(x,1), 2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Définition 1.5. Un ensemble $A \subseteq X$, où X est un espace topologique, est dit *de catégorie de Lusternik-Schnirelman* k si A peut être recouvert par k, mais pas $k-1$, ensembles fermés contractiles dans X. Dans ce cas, nous écrirons $\mathrm{cat}_X(A) = k$. Si un tel nombre k n'existe pas, nous dirons que $\mathrm{cat}_X(A) = +\infty$.

Théorème 1.6. *Soit X un espace topologique et $A, B \subseteq X$. Alors*

(1) *$cat_X(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$;*

(2) *$cat_X(A) = 1$ si et seulement si $\bar{A}$ est contractile dans X ;*

(3) *si $A \subseteq B$, alors $cat_X(A) \leq cat_X(B)$;*

(4) *$cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$;*

(5) *si $cat_X(B) < \infty$, alors $cat_X(A \setminus B) \geq cat_X(A) - cat_X(B)$;*

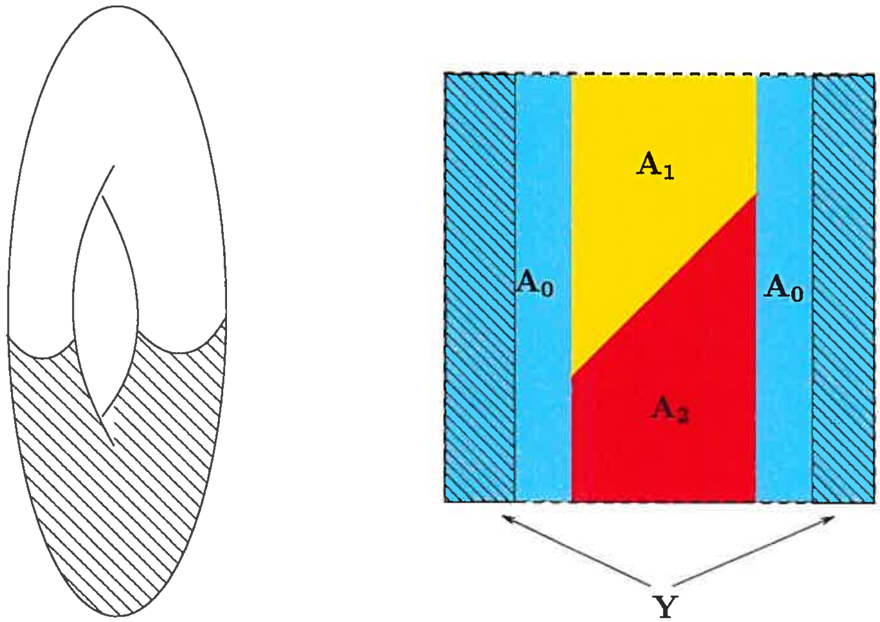
(6) *si $\eta : X \times [0,1] \to X$ est une déformation de X, alors*

$$cat_X(A) \leq cat_X(\eta(A,1));$$

(7) *si X est une variété de dimension finie et que $A \subseteq X$ est compact, alors il existe un voisinage $\mathscr{N}$ de A tel que $cat_X(A) = cat_X(\mathscr{N})$.*

Le théorème suivant nous permet de lier la catégorie d'un espace avec le nombre minimal de points critiques des fonctions définies sur l'espace.

Théorème 1.7. *Supposons que X soit une variété compacte sans bord de classe C^1 et que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Alors ϕ a au moins $cat(X)$ points critiques distincts.*



(a) Le tore (b) Une décomposition

FIG. 1.1. Le tore

Définition 1.8. Soit A et Y, des sous-ensembles d'un espace topologique X. La *catégorie de A dans X relativement à Y*, notée $\mathrm{cat}_{X,Y}(A)$, est le plus petit entier n tel qu'il existe $n+1$ sous-ensembles fermés $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de X satisfaisant

(1) $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i$,

(2) $A_1, \ldots, A_n$ sont contractiles dans X,

(3) il existe une déformation η_0 de A_0 dans X satisfaisant

  (a) $\eta_0(A_0, 1) \subseteq Y$,

  (b) $\eta_0(y,t) \in Y, \forall (y,t) \in A_0 \cap Y \times [0,1]$.

Pour illustrer, considérons le tore de la Figure 1.1 avec Y qui est la partie hachurée. Dans cet exemple, on trouve que $\mathrm{cat}_{\mathbb{T}^2,Y}(\mathbb{T}^2) = 2$. Nous avons bien que A_1 et A_2 sont contractiles et qu'on peut déformer A_0 dans la partie hachurée.

Remarque 1.9. Dans le cas où $Y = \emptyset$, la catégorie relative coïncide avec la catégorie classique c'est-à-dire $\mathrm{cat}_{X,\emptyset}(A) = \mathrm{cat}_X(A)$.

La catégorie relative a les propriétés suivantes. Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration dans [23, 25, 59, 62].

Proposition 1.10. *Soit A, B et Y des sous-ensembles de X avec Y fermé. Alors*

(1) $cat_{X,Y}(A) \leq cat_X(A)$;

(2) $cat_{X,Y}(A) = 0$ *si et seulement s'il existe une déformation* η_0 *de* $A \cup Y$ *dans* X *telle que* $\eta_0(A,1) \subseteq Y$ *et* $\eta_0(Y,t) \subseteq Y$ *pour tout* $t \in [0,1]$;

(3) *si* $A \subseteq B$, *alors* $cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$;

(4) $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;

(5) *si* $cat_X(B) < \infty$, *alors* $cat_{X,Y}(A \setminus B) \geq cat_{X,Y}(A) - cat_X(B)$;

(6) *si* η *est une déformation de* $A \cup Y$ *dans* X *telle que* $\eta(A,1) \subseteq B$ *et* $\eta(Y,t) \subseteq Y$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors* $cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$;

(7) *si* (X', Y') *est une paire de sous-ensembles fermés de* X *avec* $Y' \subseteq Y$ *et qu'il existe une rétraction de* (X, Y) *dans* (X', Y') *(c'est-à-dire une fonction* $r : X \to X'$ *telle que* $r(x) = x$ *pour tout* $x \in X'$ *et* $r(Y) = Y'$*), alors* $cat_{X,Y}(A) \geq cat_{X',Y'}(A')$ *dès que* $A' \subseteq A \cap X'$.

La notion de cuplength sera souvent utilisée pour borner la catégorie. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [21, 25, 59].

Définition 1.11. Soit X et Y, deux sous-ensembles fermés de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $Y \subseteq X$. Notons $H^*(X, Y)$ la cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. On définit le cuplength(X, Y) comme le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $\alpha_0 \in H^{q_0}(X, Y$ and $\alpha_j \in H^{q_j}(X, Y)$, $1 \leq j \leq m$, tels que $q_1, \ldots, q_m \geq 1$ et $\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_m \neq 0$ dans $H^{q_0 + \cdots q_m}(X, Y)$ ($\cup$ est le produit cup).

Szulkin obtient également un estimé de la catégorie relative grâce au cuplength, ce qui nous permettra ultérieurement de fournir une borne explicite sur le nombre de points critiques. En particulier, dans le cas où V est le tore de dimension N, il obtient le résultat suivant.

Proposition 1.12. *Soit V le tore de dimension N, B une boule fermée dans un espace de dimension m et soit S, sa frontière. Alors*

$$cat_{B\times V, S\times V}(B \times V) \geq N + 1.$$

Les détails qui permettent de prouver cette proposition ainsi que plus d'informations sur le cuplength relatif peuvent être trouvés dans [25] ainsi que dans [59].

1.3. Lemmes de déformation

En théorie des points critiques, les lemmes de déformations occupent une place prépondérante. Ce sera le cas aussi tout au long de ce texte. Bien que nous ayons choisi d'adopter une approche abstraite, les conditions $\mathscr{D}(X, K_c)$ et $\mathscr{D}^*(X, K_c)$ qui seront présentées aux chapitres 3 et 4 s'inspirent fortement de ces lemmes. Il est donc utile de les rappeler ici. Le lecteur intéressé pourra consulter [10, 17, 50, 56] pour plus de détails.

Notations : Soit $a, c \in \mathbb{R}$. Nous adopterons dans toute la suite la notation $f^a = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$. Pour $K \subset X$ que nous appellerons l'ensemble des points critiques de f, nous écrirons

$$K_c = \{x \in K \mid f(x) = c\}.$$

Évidemment, dans le cas où X est un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, nous dirons que x est un point critique de f si $f'(x) = 0$. Par conséquent, dans ce contexte, $K = \{x \in X \mid f'(x) = 0\}$.

Définition 1.13. Soit X un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. Nous dirons que *f satisfait la condition de Palais-Smale au niveau c* ou plus brièvement $(PS)_c$ si toute suite $(x_n) \subseteq X$ telle que $f(x_n) \to c$ et $f'(x_n) \to 0$ possède une sous-suite convergente.

Théorème 1.14 (Lemme de déformation). *Soit X un espace de Banach et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. Soient $c \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ et $\mathcal{O}$, un voisinage de K_c. Si f satisfait $(PS)_c$, alors il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et $\eta \in C(X \times [0,1], X)$ tels que*

(1) $\eta(x,0) = x$ *pour tout* $x \in X$;

(2) $\eta(x,t) = x$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *si* $f(x) \notin [c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]$;

(3) $\eta(x,t)$ *est un homéomorphisme de* X *dans* X *pour chaque* $t \in [0,1]$;

(4) $\|\eta(x,t) - x\| \leq \lambda$, *pour tout* $t \in [0,1]$ *et pour tout* $x \in X$;

(5) $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x,t) \in [0,1] \times X$;

(6) $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$.

Théorème 1.15 (Théorème d'intervalle non critique). *Soit* X *un espace de Banach et* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Soit* $a < b \in \mathbb{R}$ *tels que* $[a,b]$ *ne contient pas de valeurs critiques. Si* f *satisfait* $(PS)_c$ *pour tout* $c \in [a,b]$, *alors il existe* $\eta \in C(X \times [0,1], X)$ *telle que*

(1) $\eta(x,0) = x$ *pour tout* $x \in X$;

(2) $\eta(x,t) = x$ *pour tout* $(x,t) \in [0,1] \times f^a$;

(3) $\eta(x,t)$ *est un homéomorphisme de* X *dans* X *pour chaque* $t \in [0,1]$;

(4) $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x,t) \in [0,1] \times X$;

(5) $\eta(f^b, 1) \subseteq f^a$.

Théorème 1.16 (Deuxième lemme de déformation). *Soit* X, *un espace de Banach. Supposons que* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfait* $(PS)_c$ *pour tout* $c \in [a,b]$ *et que* a *est la seule valeur critique de* f *dans* $[a,b)$. *Supposons également que les composantes connexes de* K_a *sont des points isolés. Alors il existe une déformation* $\eta : f^b \times [0,1] \longrightarrow X$ *telle que*

(i) $\eta(f^b \setminus K_b, 1) \subseteq f^a$;

(ii) $\eta(x,t) = x$ *pour tout* $(x,t) \in f^b \times \{0\} \cup f^a \times [0,1]$;

(iii) $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$.

Tout ce qui a été présenté jusqu'ici aurait pu être fait pour des variétés riemanniennes ou plus généralement pour un espace métrique et une fonctionnelle continue (voir [17]). Pour la suite de cette section, nous allons nous placer dans les conditions nécessaires pour pouvoir parler de catégorie relative limite. Cette notion a été introduite pour pouvoir traiter des problèmes dans des espaces de dimension infinie en les approchant par des sous-espaces de dimension finie. Le lecteur intéressé pourra consulter [23, 62] pour plus de détails.

Soit X un espace de Banach et une famille (X_n) de sous-espaces de X tels que

$$X = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_n} \quad \text{et} \quad X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $f_n = f|_{X_n}$.

Définition 1.17. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On dit que f *satisfait la condition de Palais-Smale étoile au niveau* c, notée $(PS)_c^*$, si toute suite (x_{n_j}) telle que $n_j \to \infty$, $x_{n_j} \in X_{n_j}$, $f(x_{n_j}) \to c$ et $f'_{n_j}(x_{n_j}) \to 0$ possède un sous-suite convergente.

Cette condition nous permet de trouver une famille de déformations ayant une certaine uniformité. Ces déformations satisfont des conditions similaires au Théorème 1.14 qui nous permettra, au Chapitre 4, de relier la f-catégorie limite relative aux points critiques de f.

Théorème 1.18. *Soient $\bar{\varepsilon} > 0$, $\rho > 0$ et $f : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant $(PS)_c^*$ et soit $\mathcal{O}$, un voisinage de K_c. Alors il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_0$, il existe*

$$\eta_n : X_n \times [0, 1] \to X_n$$

satisfaisant

(1) $f_n(\eta_n(x, t)) \leq f_n(x)$ *pour tout* $x \in X_n$, $t \in [0, 1]$;

(2) $\eta_n(f_n^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}, 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon}$;

(3) $d(\eta_n(x, t), x) \leq \rho$ *pour tout* $x \in X_n$, $t \in [0, 1]$;

(4) $\eta_n(x, t) = x$ *pour tout* $(x, t) \in X_n \times \{0\} \cup f_n^{c-\bar{\varepsilon}} \times [0, 1]$.

1.4. Enlacements et points critiques

Dans cette section, nous présentons les résultats reliant les notions d'enlacement introduites par Frigon [27, 28] avec les points critiques. Le lecteur intéressé à la notion classique d'enlacement pourra consulter [11, 47, 50, 54]. La notion d'enlacement local à été introduite par Li et Liu [33].

Pour un sous-ensemble $A \subseteq X$, nous noterons

$$\mathcal{N}(A) = \{\eta \in C(X \times [0,1], X) \mid \eta = id \text{ sur } X \times \{0\} \cup A \times [0,1]\}.$$

Définition 1.19. Soit $A \subseteq B \subseteq X$, $P \subseteq Q \subseteq X$ tels que $B \cap Q \neq \emptyset$, $B \cap P = \emptyset$ et $A \cap Q = \emptyset$. Soit $\mathcal{N}_0$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{N}(A)$. Nous dirons que (B, A) *enlace* (Q, P) *via* $\mathcal{N}_0$ si pour tout $\eta \in \mathcal{N}_0$, une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $\eta(B, 1) \cap Q \neq \emptyset$,

(2) $\eta(B,]0, 1[) \cap P \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(A)$, nous dirons simplement que (B, A) *enlace* (Q, P).

Cette notion, introduite par Frigon [27], généralise la notion classique d'enlacement qui correspond à $(B, \partial B)$ enlace $(Q, \emptyset)$. Elle inclut également la notion d'enlacement local et surtout, elle donne lieu à de nombreux nouveaux enlacements. Le cas où $X = X_1 \oplus X_2$, $B = B_1$, $A = S_1$, $Q = B_2$, $P = S_2$ où $B_i = \overline{B(0, r_1)} \cap X_i$, $S_i = \partial B_i$ dans X_i, appelé « Splitting Spheres », a été d'abord considéré par Marino, Michelletti et Pistoia [39].

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, une fonctionnelle continue et $A \subseteq X$. Nous noterons

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_f(A) = \{\eta \in C(X \times [0,1], X) \mid \eta = id \text{ sur } X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \\ \text{et } f(\eta(x,t)) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in X \text{ et } t \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Grâce à cette notion, Frigon montre le résultat suivant qui relie l'enlacement avec l'existence d'un point critique.

Théorème 1.20. *Soit X un espace de Banach et $f : X \to \mathbb{R}$, une fonctionnelle de classe C^1. Supposons qu'il existe deux paires (B, A) et (Q, P) telles que (B, A) enlace (Q, P),*

$$f(x) < f(y) \text{ pour tout } x \in B, y \in P, \quad \sup f(A) \leq \inf f(Q),$$

avec une inégalité stricte si $\operatorname{dist}(A, Q) = 0$. *Posons*

$$c = \inf_{\eta \in \mathcal{N}_f(A)} \sup f(\eta(B, 1)).$$

Si $c \in \mathbb{R}$ et f satisfait $(PS)_c$, alors $K_c \neq \emptyset$. De plus, si $c = \inf f(Q)$, alors $\operatorname{dist}(Q, K_c) = 0$.

Chapitre 2

NOTIONS DE f-CATÉGORIES

Comme annoncé au Théorème 1.7, la catégorie de Lusternik-Schnirelman nous permet d'obtenir une borne inférieure sur le nombre de points critiques de fonctionnelles de classe C^1 sur une variété donnée. Puisque la catégorie ne dépend que de la variété, il est bien évident que la borne obtenue peut être très inférieure au nombre de points critiques d'une fonctionnelle donnée. Nous présentons ici les notions de f-catégorie, de f-catégorie tronquée et de f-catégorie relative qui tiennent compte de la fonctionnelle et, en général, permettent d'obtenir une meilleure estimation du nombre de points critiques de la fonctionnelle f.

Nous pourrons utiliser les concepts qui suivent dans différents contextes, avec des notions différentes de points critiques. Pour faciliter ce travail, nous allons aborder le problème sous un angle abstrait.

Soit X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Tout d'abord, introduisons une notion qui allégera les énoncés ultérieurs.

Définition 2.1. Nous dirons que A est un ensemble *(f, ε)-contractile dans X* s'il existe $\bar{x} \in X$ et une déformation $\eta : A \times [0, 1] \to X$ continue telle que

(Da) $\eta(x, 0) = x$ pour tout $x \in A$,

(Db) $\eta(A, 1) = \bar{x}$,

(Dc) $f(\eta(x, t)) \leq f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in A$ et $t \in [0, 1]$.

Nous dirons que A est *(f, ε)-contractile vers $\bar{x}$* pour bien préciser que $\eta(A, 1) = \bar{x}$.

Remarque 2.2. Il est clair que

$$\{A \subseteq X \mid A \text{ est } (f,\varepsilon)\text{-contractile}\} \subseteq \{A \subseteq X \mid A \text{ est contractile}\}.$$

En général, l'inclusion est stricte.

2.1. La f-catégorie

Dans cette section, nous présentons la f-catégorie qui est une adaptation de la catégorie de Lusternik-Schnirelman, comme annoncé dans l'introduction. Auparavant, nous devons introduire une définition intermédiaire pour faciliter les énoncés futurs.

Définition 2.3. Soit $B \subseteq X$ et $\varepsilon > 0$. Notons $n_\varepsilon^f(B, X)$ le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel qu'il existe $A_1, \ldots, A_n$ fermés vérifiant

(C1) $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$,

(C2) pour $i = 1, \ldots, n$, A_i est (f, ε)-contractile.

Si un tel n n'existe pas, nous écrirons $n_\varepsilon^f(B, X) = \infty$.

Remarque 2.4. Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, alors $n_{\varepsilon_1}^f(B, X) \geq n_{\varepsilon_2}^f(B, X)$. En effet, le recouvrement satisfaisant (C1),(C2) de la définition 2.3 pour ε_1 satisfait aussi (C1),(C2) pour ε_2.

Définition 2.5. On définit la *f-catégorie de B dans X* par

$$f\text{-cat}_X(B) = \sup_{\varepsilon > 0} n_\varepsilon^f(B, X).$$

Remarque 2.6. Si $f\text{-cat}_X(B) < \infty$, puisque $n_\varepsilon^f(B, X) \in \mathbb{N}$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que $\forall \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(B, X) = n_{\bar{\varepsilon}}^f(B, X) = f\text{-cat}_X(B)$.

Par exemple, dans le cas montré à la Figure 2.1, on trouve $f\text{-cat}_X(B) = 2$ et $\text{cat}_X(B) = 1$. On peut également considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. On trouve alors $f\text{-cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \infty$ tandis que $\text{cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ (voir Figure 2.2).

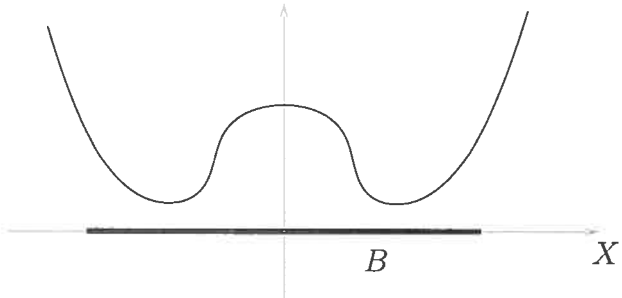


FIG. 2.1. f-$\mathrm{cat}_X(B) = 2, \quad \mathrm{cat}_X(B) = 1$

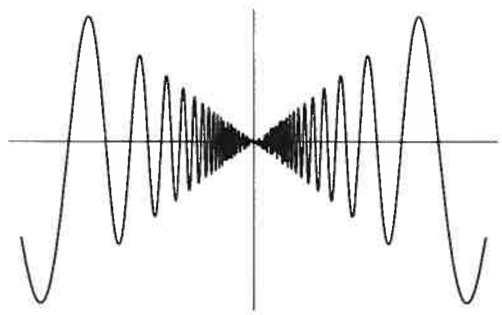


FIG. 2.2. f-$\mathrm{cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \infty, \quad \mathrm{cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$

Lemme 2.7. *Soient X un espace métrique, $A, B \subseteq X$, $\varepsilon > 0$ et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) *$cat_X(B) \leq n^f_\varepsilon(B, X)$;*

(2) *$n^f_\varepsilon(A, X) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$;*

(3) *$n^f_\varepsilon(A, X) = 1$ entraîne que $\overline{A}$ est (f, ε)-contractile dans X ;*

(4) *si $A \subseteq B$, alors $n^f_\varepsilon(A, X) \leq n^f_\varepsilon(B, X)$;*

(5) *$n^f_\varepsilon(A \cup B, X) \leq n^f_\varepsilon(A, X) + n^f_\varepsilon(B, X)$;*

(6) *si $n^f_\varepsilon(B, X) < \infty$, alors $n^f_\varepsilon(A \setminus B, X) \geq n^f_\varepsilon(A, X) - n^f_\varepsilon(B, X)$;*

(7) *si $\varepsilon_1 \geq 0$ et $\eta : X \times [0, 1] \to X$ vérifie $f(\eta(x, t)) \leq f(x) + \varepsilon_1$ pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1]$, alors $n^f_{\varepsilon+\varepsilon_1}(A, X) \leq n^f_\varepsilon(\eta(A, 1), X)$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, (1),(2) et (3) sont clairs. Pour (4), supposons que $n^f_\varepsilon(B, X) = k < \infty$. Il existe donc $U_1, \ldots, U_k$, des ensembles (f, ε)-contractiles tels que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Puisque $A \subseteq B$, on a clairement $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Donc, $n_\varepsilon^f(A, X) \leq n_\varepsilon^f(B, X) = k$ pour tout ε.

(5) Supposons que $n_\varepsilon^f(A, X) = k_A < \infty$ et $n_\varepsilon^f(B, X) = k_B < \infty$. Il existe donc $A_1, \ldots, A_{k_A}$ et $B_1, \ldots, B_{k_B}$ satisfaisant (C1)–(C2) de la Définition 2.3 pour A et B respectivement. Par conséquent, $A_1, \ldots, A_{k_A}, B_1, \ldots, B_{k_B}$ satisfait (C1)–(C2) pour $A \cup B$. On a donc $n_\varepsilon^f(A \cup B, X) \leq k_A + k_B$.

(6) Puisque $A \subseteq A \setminus B \cup B$, par (4) et (5), on a que

$$n_\varepsilon^f(A, X) \leq n_\varepsilon^f(A \setminus B \cup B, X) \leq n_\varepsilon^f(A \setminus B, X) + n_\varepsilon^f(B, X).$$

Si $n_\varepsilon^f(B, X) < \infty$, on obtient

$$n_\varepsilon^f(A, X) - n_\varepsilon^f(B, X) \leq n_\varepsilon^f(A \setminus B, X).$$

(7) Supposons que $n_\varepsilon^f(\eta(A, 1), X) = k < \infty$. Il existe $U_1, \ldots, U_k$, des ensembles (f, ε)-contractiles tels que $\eta(A, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Posons $\psi(x) = \eta(x, 1)$ et $A_i = \psi^{-1}(U_i)$. Pour $i = 1, \ldots, k$, définissons $\hat{\eta}_i : A_i \times [0, 1] \to X$ en posant $\hat{\eta}_i(x, t) = \eta_i * \eta(x, t)$ où η_i est donné par (C2) de la Définition 2.3. Puisque $f(\eta(x, t)) \leq f(x) + \varepsilon_1$ pour tout $(x, t) \in A_i \times [0, 1]$, on a que

$$f(\hat{\eta}_i(x, t)) = \begin{cases} f(\eta(x, 2t)) \leq f(x) + \varepsilon_1 & \text{pour } t \in [0, 1/2), \\ f(\eta_i(\eta(x, 1), 2t - 1)) \leq f(\eta(x, 1)) + \varepsilon & \\ \qquad \leq f(x) + \varepsilon + \varepsilon_1 & \text{pour } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Les conditions (C1) et (C2) de la Définition 2.3 sont donc vérifiées pour A et donc $n_{\varepsilon+\varepsilon_1}^f(A, X) \leq k$. ■

Remarque 2.8. En prenant $\varepsilon_1 = 0$ dans le Lemme 2.7(7), on déduit que si $\eta : X \times [0, 1] \to X$ est une déformation telle que $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$, alors

$$n_\varepsilon^f(A, X) \leq n_\varepsilon^f(\eta(A, 1), X).$$

Le lemme précédent nous permet de déduire des propriétés importantes de la f-catégorie.

Théorème 2.9. *Soient X un espace métrique, $A, B \subseteq X$ et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors, la f-catégorie vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $cat_X(A) \leq f\text{-}cat_X(A)$;

(2) $f\text{-}cat_X(A) = 0$ *si et seulement si* $A = \emptyset$;

(3) $f\text{-}cat_X(A) = 1$ *entraîne que* A *est* (f, ε)*-contractile dans* X $\forall \varepsilon > 0$;

(4) *si* $A \subseteq B$, *alors* $f\text{-}cat_X(A) \leq f\text{-}cat_X(B)$;

(5) $f\text{-}cat_X(A \cup B) \leq f\text{-}cat_X(A) + f\text{-}cat_X(B)$;

(6) *si* $f\text{-}cat_X(B) < \infty$, *alors* $f\text{-}cat_X(A \setminus B) \geq f\text{-}cat_X(A) - f\text{-}cat_X(B)$,

(7) *si* $f\text{-}cat_X(A) < \infty$, *il existe* $\bar{\varepsilon}$ *tel que pour tout* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ *et pour toute déformation* η *telle que* $f(\eta(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon$, $f\text{-}cat_X(\eta(A,1)) \geq f\text{-}cat_X(A)$;

(8) *si* $f\text{-}cat_X(A) = \infty$, *alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $\bar{\varepsilon}$ *tel que pour tout* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ *et pour toute déformation* η *telle que* $f(\eta(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon$, *on a que* $f\text{-}cat_X(\eta(A,1)) \geq k$.

DÉMONSTRATION. Le résultat découle directement du Lemme 2.7 et de la Remarque 2.6. Par exemple, pour (4), supposons que $f\text{-cat}_X(B) = k < \infty$. Il existe donc $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(B, X) = k$. Par le Lemme 2.7, on a que $n_\varepsilon^f(A, X) \leq n_\varepsilon^f(B, X)$. Puisque l'inégalité est vérifiée pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, on déduit que $f\text{-cat}_X(A) \leq k$.

Pour (7), si $f\text{-cat}_X(A) = k \in \,]0, \infty[$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(A, X) = k$. Supposons que $\eta : X \times [0,1] \to X$ est une déformation vérifiant $f(\eta(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}$ et soit ε_2 tel que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}$. Alors pour $\varepsilon < \varepsilon_2$,

$$n_\varepsilon^f(\eta(A,1), X) \geq n_{\varepsilon_2}^f(\eta(A,1), X) \geq n_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^f(A, X) = k.$$

Donc, $f\text{-cat}_X(\eta(A,1)) \geq k$.

Pour (8), si $f\text{-cat}_X(A) = \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\tilde{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(A, X) \geq k$. Considérons $\bar{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$. Par le Lemme 2.7(6), pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et pour toute déformation η satisfaisant $f(\eta(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon$, puisque $\varepsilon + \bar{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}$, on a que $k \leq n^f_{\varepsilon+\bar{\varepsilon}}(A,X) \leq n^f_{\bar{\varepsilon}}(\eta(A,1),X) \leq n^f_{\bar{\varepsilon}}(\eta(A,1),X)$. Par conséquent, $f\text{-cat}_X(\eta(A,1)) \geq k$.

■

Remarque 2.10. Si $f\text{-cat}_X(A) = 1$, l'affirmation (3) du théorème précédent garantit que pour tout $\varepsilon > 0$, A est (f,ε)-contractile. Cependant, il n'existe pas forcément η, une déformation de l'ensemble A telle que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$. En effet, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $f(x) = e^x$, alors $f\text{-cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$, pourtant il n'existe pas $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\eta : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\eta(x,0) = x$, $\eta(x,1) = x_0$ et $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.11. En général, l'énoncé (7) du Théorème 1.6 est faux. En effet, contrairement au cas de la catégorie classique, en général on ne peut pas trouver un voisinage $\mathscr{N}$ de B tel que $f\text{-cat}_X(\mathscr{N}) = f\text{-cat}_X(B)$, même si B est compact et X de dimension finie. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = x\sin(1/x)$, alors $f\text{-cat}_{\mathbb{R}}(\{0\}) = 1$ et $f\text{-cat}_{\mathbb{R}}(V) = \infty$ pour tout voisinage V de l'origine (voir Figure 2.2).

Proposition 2.12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et soient $B \subseteq X$. Si $f\text{-}cat_X(B) < \infty$ alors il existe $\sigma > 0$ tel que pour toute fonction $g : X \to \mathbb{R}$ satisfaisant $\|g - f\|_0 \leq \sigma$, on a que*

$$f\text{-}cat_X(B) \leq g\text{-}cat_X(B).$$

De plus, si $\|f-g\|_0 = \beta$ alors $n^g_{\varepsilon}(B,X) \geq n^f_{2\beta+\varepsilon}(B,X)$ et $n^f_{\varepsilon}(B,X) \geq n^g_{2\beta+\varepsilon}(B,X)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Puisque $f\text{-cat}_X(B) = k_f < \infty$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $n^f_{\varepsilon}(B,X) = k_f$. Fixons $\sigma < \bar{\varepsilon}/2$. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ tel que $\|f(x) - g(x)\| \leq \sigma$. Supposons que $g\text{-cat}_X(B) = k_g < \infty$. Il existe donc $\hat{\varepsilon}$ tel que $\forall \varepsilon < \hat{\varepsilon}$, $n^g_{\varepsilon}(B,X) = k_g$. Soit $\varepsilon < \min\{\hat{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}-2\sigma\}$. Soit $A_1,\ldots,A_{k_g}$ le recouvrement relié à $n^g_{\varepsilon}(B,X)$. Pour $i = 1,\ldots,k_g$, il existe une déformation $\eta_i : A_i \times [0,1] \to X$ telle que $g(\eta_i(x,t)) \leq$

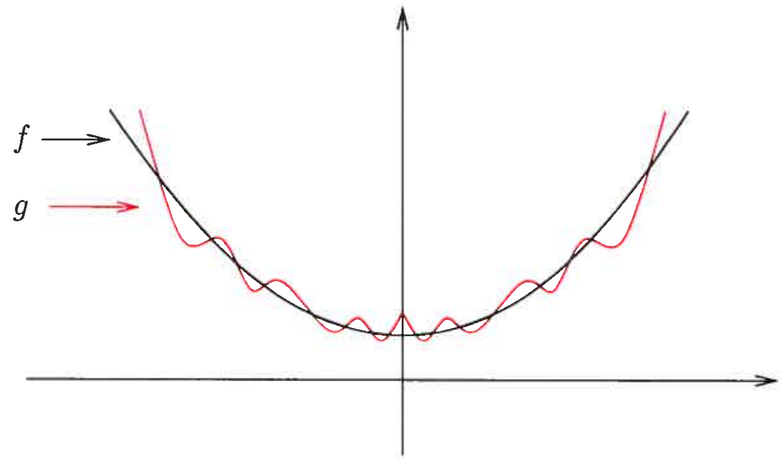


FIG. 2.3. Perturbation de f

$g(x)+\varepsilon$. Donc, $f(\eta_i(x,t)) \leq g(\eta_i(x,t))+\sigma \leq g(x)+\sigma+\varepsilon \leq f(x)+2\sigma+\varepsilon \leq f(x)+\bar{\varepsilon}$. Puisque $n^f_{\bar{\varepsilon}}(B,X) = k_f$, on a que $k_f \leq k_g$. Le même argument permet de déduire que si $\|f-g\|_0 = \beta$ alors $n^g_{\varepsilon}(B,X) \geq n^f_{2\beta+\varepsilon}(B,X)$. ■

Il n'est pas possible de remplacer l'inégalité de la proposition précédente par une égalité pour obtenir $f\text{-cat}_X(B) = g\text{-cat}_X(B)$. En effet, on peut toujours trouver une fonction g aussi proche de f qu'on veut avec une catégorie aussi grande qu'on veut. Il s'agit de perturber f par des oscillations de faibles amplitudes comme le montre la Figure 2.3.

2.2. La f-catégorie tronquée

On constate que la notion de f-catégorie est peu appropriée pour les fonctionnelles non-bornées inférieurement. En effet, même dans le cas le plus simple où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bornée inférieurement, on a $f\text{-cat}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \infty$ (voir Figure 2.4).

Dans cette section, nous présentons une notion de f-catégorie alternative qui sera plus pertinente pour l'étude des fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement. Soulignons au passage qu'il s'agit d'une nouvelle notion qui n'a pas d'équivalent dans le cas classique.

Définition 2.13. Soit $B \subseteq X$ et $\varepsilon > 0$. Notons $m_\varepsilon^f(B, X)$ le plus petit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel qu'il existe $A_0, A_1, \ldots, A_m$ fermés vérifiant

(CT1) $B \subseteq \bigcup_{i=0}^m A_i$,

(CT2) pour $i = 1, \ldots, m$, A_i est (f, ε)-contractile,

(CT3) il existe une déformation $\eta_0 : A_0 \times [0,1] \to X$ telle que $f(\eta_0(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon$ et $f(\eta_0(x,1)) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Si un tel m n'existe pas, nous écrirons $m_\varepsilon^f(B, X) = \infty$.

Définition 2.14. On définit la *f-catégorie tronquée de B dans X* par

$$f\text{-catt}_X(B) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\varepsilon^f(B, X).$$

Remarque 2.15. Si $f\text{-catt}_X(B) < \infty$, puisque $m_\varepsilon^f(B, X) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que $\forall \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $m_\varepsilon^f(B, X) = m_{\bar{\varepsilon}}^f(B, X) = f\text{-catt}_X(B)$.

Comme mentionné plus haut, l'intérêt de cette catégorie alternative est de pouvoir considérer des fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement. Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + 1$. On a alors que $f\text{-cat}_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = \infty$, mais $f\text{-catt}_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = 1$. En effet, pour tout $\varepsilon < 1$, on peut considérer $A_1 = \overline{B(0, \varepsilon)}$ et $A_0 = \overline{\mathbb{R} \setminus A_1}$. Par contre, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + \cos(\pi x^2)$ nous donne $f\text{-catt}_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = +\infty$. Les deux fonctions sont illustrées à la Figure 2.5.

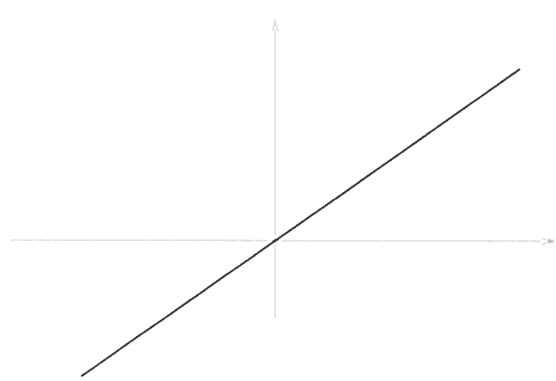
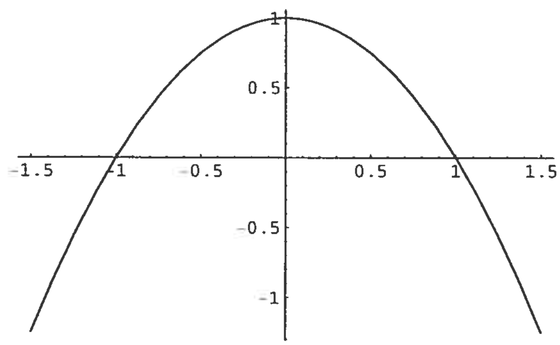
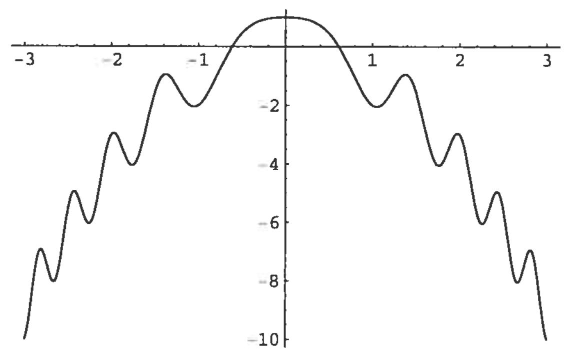


FIG. 2.4. $f\text{-cat}_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = \infty$



(a) $f(x) = -x^2 + 1, \quad f\text{-catt}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$



(b) $f(x) = -x^2 + \cos(\pi x^2), \quad f\text{-catt}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = +\infty$

FIG. 2.5. Exemples pour $f\text{-catt}_{\mathbb{R}}(B)$

Proposition 2.16. *Soient X un espace métrique, $A, B \subseteq X$, $\varepsilon > 0$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) $m_\varepsilon^f(f^{-1/\varepsilon}, X) = 0$;

(2) *si* $A \subseteq B$, *alors* $m_\varepsilon^f(A, X) \leq m_\varepsilon^f(B, X)$;

(3) $m_\varepsilon^f(A \cup B, X) \leq m_\varepsilon^f(A, X) + n_\varepsilon^f(B, X)$;

(4) *si* $n_\varepsilon^f(B, X) < \infty$, *alors* $m_\varepsilon^f(A \setminus B, X) \geq m_\varepsilon^f(A, X) - n_\varepsilon^f(B, X)$;

(5) *si* $\eta : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ *est une déformation telle que* $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x, t) \in X \times [0, 1]$, *alors* $m_\varepsilon^f(A, X) \leq m_\varepsilon^f(\eta(A, 1), X)$.

DÉMONSTRATION. La partie (1) est claire. Pour (2), supposons que $m_\varepsilon^f(B, X) = k < \infty$. Il existe donc des fermés $A_0, \ldots, A_k$ et des déformations satisfaisant (CT1),

(CT2) et (CT3) de la Définition 2.13 pour B. En particulier, ils vérifient aussi les conditions (CT1), (CT2) et (CT3) pour A. D'où $m_\varepsilon^f(A, X) \leq k$.
(3) Supposons que $m_\varepsilon^f(A, X) = k_A$ et $n_\varepsilon^f(B, X) = k_B$, avec $k_A, k_B < \infty$. Il existe donc des fermés $A_0, \dots, A_{k_A}$ satisfaisant (CT1)–(CT3) de la Définition 2.13 pour A ainsi que des fermés $B_1, \dots, B_{k_B}$ satisfaisant (C1) et (C2) de la Définition 2.3 pour B. Ainsi, la famille de fermés constituée de tous ces fermés satisfait (CT1)–(CT3) pour $A \cup B$. D'où $m_\varepsilon^f(A \cup B, X) \leq k_A + k_B$.
(4) Puisque $A \subseteq A \setminus B \cup B$, en appliquant (3), on obtient le résultat.
(5) Supposons que $m_\varepsilon^f(\eta(A, 1), X) = k < \infty$. Il existe donc $A_0, \dots, A_k$ satisfaisant (CT1)–(CT3) de la Définition 2.13 et des déformations η_i, $i = 0, \dots, k$ associées. Posons $g(x) = \eta(x, 1)$ et considérons les ensembles $\tilde{A}_i = g^{-1}(A_i)$, $i = 0, \dots, k$. Puisque g est continue, les ensembles $\tilde{A}_i$ sont fermés. De plus, grâce aux déformations $\tilde{\eta}(x, t) = \eta_i * \eta(x, t)$, ces ensembles vérifient les conditions (CT1)–(CT3) de la Définition 2.13 pour A. Donc, $m_\varepsilon^f(A, X) \leq k$. ■

On déduit directement de la proposition précédente les propriétés suivantes sur la f-catégorie tronquée.

Théorème 2.17. *Soit X un espace métrique, $A, B \subseteq X$, $\varepsilon > 0$ et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) *si $A \subseteq B$, alors $f\text{-}catt_X(A) \leq f\text{-}catt_X(B)$;*

(2) *$f\text{-}catt_X(A \cup B) \leq f\text{-}catt_X(A) + f\text{-}cat_X(B)$;*

(3) *si $f\text{-}cat_X(B) < \infty$, alors $f\text{-}catt_X(A \setminus B) \leq f\text{-}catt_X(A) - f\text{-}cat_X(B)$;*

(4) *si $\eta : X \times [0,1] \to X$ est une déformation telle que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$, alors $f\text{-}catt_X(A) \leq f\text{-}catt_X(\eta(A,1))$.*

Voici un équivalent de la Proposition 2.12 pour la f-catégorie tronquée. Nous avons ainsi une propriété de semi-robustesse pour cette catégorie également.

Proposition 2.18. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et soit $B \subseteq X$. Si $f\text{-}catt_X(B) < \infty$ alors il existe $\sigma > 0$ tel que pour toute fonction $g : X \to \mathbb{R}$ satisfaisant $\|g - f\|_0 \leq \sigma$, on* *a que*

$$f\text{-}catt_X(B) \leq g\text{-}catt_X(B).$$

De plus, si $\|f - g\|_0 = \beta$ *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, $m_\varepsilon^g(B,X) \geq m_{2\beta+\varepsilon}^f(B,X)$ *et* $m_\varepsilon^f(B,X) \geq m_{2\beta+\varepsilon}^g(B,X)$.

DÉMONSTRATION. Puisque $f\text{-catt}_X(B) = k_f < \infty$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $m_\varepsilon^f(B,X) = k_f$. Fixons $\sigma < \bar{\varepsilon}/2$. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ tel que $\|f(x)-g(x)\| \leq \sigma$. Supposons que $g\text{-catt}_X(B) = k_g < \infty$. Il existe donc $\hat{\varepsilon}$ tel que $\forall \varepsilon < \hat{\varepsilon}$, $m_\varepsilon^g(B,X) = k_g$. Soit $\varepsilon < \min\{\hat{\varepsilon}, \bar{\varepsilon} - 2\sigma, \frac{2\bar{\varepsilon}}{2+\bar{\varepsilon}^2}\}$. Soit $A_0, A_1, \ldots, A_{k_g}$ le recouvrement relié à $m_\varepsilon^g(B,X)$. Pour $i = 0, \ldots, k_g$, il existe une déformation $\eta_i : A_i \times [0,1] \to X$ telle que $g(\eta_i(x,t)) \leq g(x) + \varepsilon$. Donc, $f(\eta_i(x,t)) \leq g(\eta_i(x,t)) + \sigma \leq g(x) + \sigma + \varepsilon \leq f(x) + 2\sigma + \varepsilon \leq f(x) + \bar{\varepsilon}$. De plus, pour $x \in A_0$, $f(\eta_0(x,1)) \leq g(\eta_0(x,1)) + \sigma \leq \sigma - \frac{1}{\varepsilon} \leq -\frac{1}{\bar{\varepsilon}}$. Puisque $m_\varepsilon^f(B,X) = k_f$, on a que $k_f \leq k_g$. Le même argument permet de déduire que si $\|f-g\|_0 = \beta$ alors $n_\varepsilon^g(B,X) \geq n_{2\beta+\varepsilon}^f(B,X)$. ■

2.3. La f-catégorie relative

Il serait intéressant d'étendre également la notion de catégorie relative à notre contexte. Les idées introduites dans la Section 2.1 pourront servir à étendre les notions de catégorie relative de Fournier et Willem [23] en tenant compte de la fonctionnelle f.

Définition 2.19. Soient X un espace métrique, Y un fermé de X, $B \subseteq X$ et $\varepsilon > 0$. Notons $n_\varepsilon^f(B,X,Y)$ le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel qu'il existe $A_0, \ldots, A_n$ fermés vérifiant

(CR1) $B \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$,

(CR2) pour $i = 1, \ldots, n$, A_i est (f,ε)-contractile.

(CR3) il existe $\eta_0 : X \times [0,1] \to X$ continue telle que

(CR3a) $\eta_0(x,0) = x$ pour tout $x \in X$,

(CR3b) $\eta_0(Y,t) \subseteq Y$ pour tout $t \in [0,1]$, (CR3c) $\eta_0(A_0, 1) \subseteq Y$,

(CR3d) $f(\eta_0(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$.

Remarque 2.20. De la même façon qu'à la Remarque 2.4, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, alors $n^f_{\varepsilon_1}(B,X,Y) \geq n^f_{\varepsilon_2}(B,X,Y)$.

Définition 2.21. On définit la *f-catégorie de B relativement à Y dans X* par $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B) = \sup\limits_{\varepsilon>0} n^f_\varepsilon(B,X,Y)$.

Remarque 2.22. Comme dans la Remarque 2.6, si $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B) < \infty$, puisque $n^f_\varepsilon(B,X,Y) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que $\forall \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, on a que $n^f_\varepsilon(B,X,Y) = n^f_{\bar{\varepsilon}}(B,X,Y) = f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B)$. De plus, nous aurions pu obtenir un résultat du type de la Proposition 2.12 si nous avions écrit la condition (CR3d) de la Définition 2.19 sous la forme de (Dc) de la Définition 2.1. Par contre, plusieurs résultats ultérieurs seraient affaiblis. En particulier, les liens entre la f-catégorie et l'enlacement qui sont présentés à la Section 2.4 ne seraient plus vérifiés.

Proposition 2.23. *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $B, Y \subseteq X$ avec Y fermé. Alors, on a que*

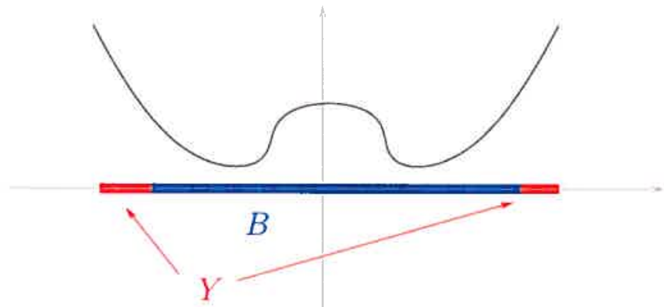
$$cat_{X,Y}(B) \leq f\text{-}cat_{X,Y}(B).$$

Démonstration. Puisque toutes les déformations sont autorisées pour la catégorie relative classique, il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$,

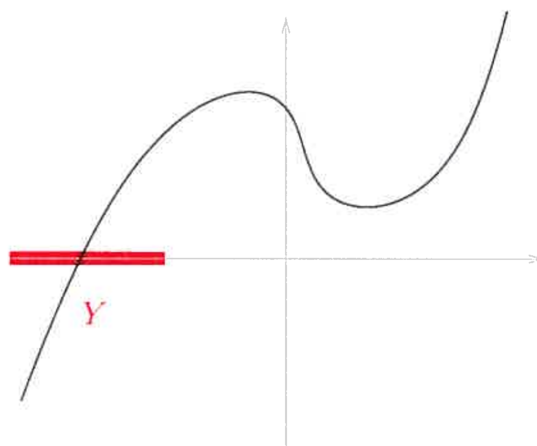
$$\mathrm{cat}_{X,Y}(B) \leq n^f_\varepsilon(B,X,Y),$$

ce qui entraîne la conclusion. ∎

Dans l'exemple de la Figure 2.6, dans la partie (a), on trouve encore que $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B) = 2$ tandis que dans (b), on obtient que $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B) = 1$. Remarquons que dans les deux cas, on trouve que $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}(B) > \mathrm{cat}_{X,Y}(B)$.



(a) $f\text{-cat}_{X,Y}(B) = 2$ et $\text{cat}_{X,Y}(B) = 1$



(b) $f\text{-cat}_{\mathbb{R},Y}(\mathbb{R}) = 1$ et $\text{cat}_{\mathbb{R},Y}(\mathbb{R}) = 0$

FIG. 2.6. Exemples pour la f-catégorie relative

La f-catégorie relative a des propriétés similaires à la catégorie relative classique. Pour réussir à les dégager, nous devrons cependant étudier auparavant les propriétés de $n_\varepsilon^f(B, X, Y)$.

Lemme 2.24. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $A, B, Y \subseteq X$ avec Y fermé. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

(1) $n_\varepsilon^f(A, X, Y) \leq n_\varepsilon^f(A, X)$;

(2) *si* $A \subseteq B$ *alors* $n_\varepsilon^f(A, X, Y) \leq n_\varepsilon^f(B, X, Y)$;

(3) $n_\varepsilon^f(A \cup B, X, Y) \leq n_\varepsilon^f(A, X, Y) + n_\varepsilon^f(B, X)$;

(4) *si* $n_\varepsilon^f(B, X) < \infty$, *alors* $n_\varepsilon^f(A \setminus B, X, Y) \geq n_\varepsilon^f(A, X, Y) - n_\varepsilon^f(B, X)$;

(5) *si* $\eta : X \times [0,1] \to X$ *est une déformation satisfaisant* $\eta(Y,t) \subseteq Y$, $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x,t) \in X \times [0,1]$, *alors*

$$n_\varepsilon^f(A,X,Y) \leq n_\varepsilon^f(\eta(A,1),X,Y);$$

(6) *si* (X',Y') *est une paire de sous-ensembles fermés de* X *telle que* $(X',Y') \subset (X,Y)$ *et qu'il existe une rétraction de* (X,Y) *vers* (X',Y') *(c'est-à-dire une application* $r : X \to X'$ *telle que* $r(x) = x$ $\forall x \in X'$ *et* $r(Y) = Y'$*) telle que* $f(r(x)) \leq f(x)$ *alors* $n_\varepsilon^f(A,X,Y) \geq n_\varepsilon^f(A',X',Y')$ *dès que* $A' \subseteq A \cap X'$.

DÉMONSTRATION. (1). Supposons que $n_\varepsilon^f(A,X) = n < \infty$. Alors, il existe $A_1,\ldots,A_n$ satisfaisant (C1) et (C2) de la Définition 2.3. En prenant $A_0 = Y$ et $\eta_0(x,t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$, on a que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ satisfont (CR1)-(CR3) de la Définition 2.19. D'où $n_\varepsilon^f(A,X,Y) \leq n$.
(2). Supposons que $n_\varepsilon^f(B,X,Y) = n < \infty$. Les ensembles garantis par la Définition 2.19 sont aussi valables pour A.
(3). Supposons que $n_\varepsilon^f(A,X,Y) = k$ et $n_\varepsilon^f(B,X) = n$ avec $n,k < \infty$. Il existe $A_0,\ldots,A_k$ satisfaisant (CR1)–(CR3) pour A et $B_1,\ldots,B_n$ satisfaisant (C1) et (C2) de la Définition 2.3 pour B. Les ensembles $A_0, A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_n$ vérifient la Définition 2.19 pour $A \cup B$.
(4) découle directement de (2) et (3).
(5). Posons $B = \eta(A,1)$ et supposons que $n_\varepsilon^f(B,X,Y) = n < \infty$. Il existe donc $B_0,\ldots,B_n$ et des déformations associées η_i satisfaisant (CR1)–(CR3). Posons $g(x) = \eta(x,1)$ et considérons les fermés $A_i := g^{-1}(B_i)$. Puisque $g(A) \subseteq B$, on a clairement que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$. De plus, considérons les déformations $\hat{\eta}_i$ définies par $\hat{\eta}_i(x,t) := \eta_i * \eta(x,t)$. Pour $i = 1,\ldots,n$, puisque $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ et que η_i

satisfait (CR2), on a que, pour $x \in A_i$,

$$\begin{aligned} f(\hat{\eta}_i(x,t)) &= f(\eta(x,2t)) \quad \text{pour } t \in [0,1/2] \\ &\leq f(x) \\ f(\hat{\eta}_i(x,t)) &= f(\eta_i(\eta(x,1),2t-1)) \quad \text{pour } t \in [1/2,1] \\ &\leq f(\eta(x,1)) + \varepsilon \leq f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, $A_1, \ldots, A_n$ satisfont (CR2). Pour A_0, la déformation $\hat{\eta}_0$ satisfait de la même façon que précédemment les hypothèses (CR3a), (CR3c) et (CR3d) de la Définition 2.19. Pour (CR3b), prenons $y \in Y$. Alors, pour $t \in [0,1/2]$, $\hat{\eta}_0(y,t) = \eta(y,2t) \in Y$ par hypothèse. D'un autre côté, pour $t \in [1/2,1]$, puisque $\eta(y,1) = y' \in Y$, $\hat{\eta}_0(y,t) = \eta_0(y', 2t-1) \in Y$, car η_0 satisfait (CR3b). Nous avons donc $n_\varepsilon^f(A,X,Y) \leq n$. D'où $n_\varepsilon^f(A,X,Y) \leq n_\varepsilon^f(B,X,Y) = n_\varepsilon^f(\eta(A,1),X,Y)$.

(6) Supposons que $n_\varepsilon^f(A,X,Y) = n < \infty$. Il existe donc $A_0, \ldots, A_n$ et des déformations associées η_i satisfaisant (CR1)–(CR3). Posons $A'_i := A_i \cap X'$. Clairement, $A' \subseteq \bigcup_{i=0}^n A'_i$. Ce recouvrement satisfait (CR1)–(CR3). En effet,pour $i = 1, \ldots, n$, considérons $\hat{\eta}_i(x,t) := r(\eta_i(x,t))$ restreinte à A'_i. Puisque $A'_i \subseteq X'$, $r(\eta(x,0)) = r(x) = x$. De plus, comme r est à image dans X', $\hat{\eta}_i$ l'est aussi. Finalement, puisque $f(r(x)) \leq f(x)$, on obtient que $f(\hat{\eta}_i(x,t)) = f(r(\eta_i(x,t))) \leq f(\eta_i(x,t)) \leq f(x) + \varepsilon$. Les conditions (CR1) et (CR2) de la Définition 2.19 sont bien vérifiées. Pour A'_0, la déformation $\hat{\eta}_0 = r \circ \eta_0$ est encore une fois à valeur dans X' et puisque $\eta_0(A_0,1) \subseteq Y$, on a bien que $\hat{\eta}_0(A'_0,1) \subseteq Y'$. Soit $x \in Y'$. Puisque $Y' \subseteq Y$ et $\eta_0(x,t) \in Y$, on a $r(\eta_0(x,t)) \in Y'$. Nous avons bien que $\hat{\eta}_0(Y',t) \subseteq Y'$ comme requis. Nous pouvons donc conclure que $n_\varepsilon^f(A',X',Y') \leq n$. ■

À partir du Lemme 2.24, on peut facilement dégager plusieurs propriétés de la f-catégorie relative.

Théorème 2.25. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $A, B, Y \subseteq X$ avec Y fermé. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

(1) $cat_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat_{X,Y}(A)$;

(2) $f\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat_X(A)$;

(3) *si* $A \subseteq B$ *alors* $f\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat_{X,Y}(B)$;

(4) $f\text{-}cat_{X,Y}(A \cup B) \leq f\text{-}cat_{X,Y}(A) + f\text{-}cat_X(B)$;

(5) *si* $f\text{-}cat_X(B) < \infty$, *alors* $f\text{-}cat_{X,Y}(A \setminus B) \geq f\text{-}cat_{X,Y}(A) - f\text{-}cat_X(B)$;

(6) *si* $\eta : X \times [0,1] \to X$ *est une déformation satisfaisant* $\eta(Y,t) \subseteq Y$, $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x,t) \in X \times [0,1]$, *alors*

$$f\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat_{X,Y}(\eta(A,1));$$

(7) *si* (X', Y') *est une paire de sous-ensembles fermés de* X *telle que* $(X', Y') \subset (X, Y)$ *et qu'il existe une rétraction de* (X,Y) *vers* (X',Y') *(c'est-à-dire une application* $r : X \to X'$ *telle que* $r(x) = x\ \forall x \in X'$ *et* $r(Y) = Y'$*) telle que* $f(r(x)) \leq f(x)$ *alors* $f\text{-}cat_{X,Y}(A) \geq f\text{-}cat_{X',Y'}(A')$ *dès que* $A' \subseteq A \cap X'$.

Démonstration. Le résultat découle directement des Remarques 2.6 et 2.22 et du Lemme 2.24. ■

Dans certains cas particuliers, lorsque deux espaces X, X' sont reliés par des fonctions ϕ, ψ telles que $\psi \circ \phi$ est homotope à l'identité sur X,

$$X \xrightarrow{\phi} X' \xrightarrow{\psi} X \ ,$$

il sera possible de mettre en rapport la f-catégorie relative d'un ensemble sur X avec la $f \circ \psi$-catégorie d'un ensemble associé sur X'. En particulier, le théorème suivant sera utile pour comparer $f\text{-cat}_{X,Y}(A)$ avec $f\text{-cat}_{X',Y'}(A)$ lorsque $X' \subseteq X$.

Théorème 2.26. *Soient* X, X' *deux espaces métriques,* Y *et* Y' *fermés respectivement dans* X *et* X', $A \subseteq X$ *et* $A' \subseteq X'$ *et soit* $f : X \to \mathbb{R}$. *Supposons qu'il existe* $\phi : (X, A, Y) \to (X', A', Y')$ *et* $\psi : (X', A', Y') \to (X, A, Y)$, *des fonctions continues telles qu'il existe une déformation* $\eta : X \times [0,1] \to X$ *vérifiant* $\eta(x,1) = \psi \circ \phi(x)$, $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$, $\eta(Y,t) \subseteq Y$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors*

$$f\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq f \circ \psi\text{-}cat_{X',Y'}(A').$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $f \circ \psi\text{-cat}_{X',Y'}(A') = n < \infty$ et soit $\bar{\varepsilon}$ tel que

$$n_{\varepsilon}^{f\circ\psi}(A', X', Y') = n$$

pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. On a donc l'existence de $A'_0, \ldots, A'_n$ et η'_i les déformations associées vérifiant les conditions de la Définition 2.19.

Posons $A_i := \phi^{-1}(A'_i), i = 0, \ldots, n$. Clairement, $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ et A_i est fermé pour $i = 0, \ldots, n$. Nous allons montrer que ce recouvrement satisfait (CR2) et (CR3). Pour $i = 0, \ldots, n$, définissons η_i par

$$\eta_i(x,t) = \begin{cases} \eta(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(\eta'_i(\phi(x), 2t-1)) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Puisque $\eta(x, 1) = \psi \circ \phi(x)$, η_i est bien une déformation continue. Pour $y \in Y$ et $t \in [0, 1/2]$, on a que $\eta_0(y, t) = \eta(y, 2t) \in Y$ par hypothèse. Pour $t \in [1/2, 1]$, $\eta'_0(\phi(y), 2t-1) \in Y'$ puisque $\phi(y) \in Y'$ et η'_0 satisfait (CR3) pour (X', A', Y'). On peut donc déduire que $\eta_0(y, t) = \psi(\eta'_0(\phi(y), 2t-1)) \in Y$. De plus, $\eta_0(A_0, 1) \subseteq Y$. En effet, $\eta_0(A_0, 1) = \psi(\eta'_0(\phi(\phi^{-1}(A'_0)), 1)) \subseteq \psi(\eta'_0(A'_0, 1)) \subseteq \psi(Y') \subseteq Y$. Finalement, pour $x \in X$ et $t \in [1/2, 1]$,

$$\begin{aligned} f(\eta_0(x,t)) &= f \circ \psi(\eta'_0(\phi(x), t)) \\ &\leq f \circ \psi(\phi(x)) \\ &= f(\eta(x, 1)) \\ &\leq f(x). \end{aligned}$$

Le cas $t \in [0, 1/2]$ est évident. La condition (CR3) est donc vérifiée. Pour $i = 1, \ldots, n$, $\eta_i(A_i, 1) = \psi(\eta'_i(\phi(A_i), 1)) \subseteq \psi(\eta'_i(A'_i, 1)) = \psi(x'_i) = x_i$. De plus, de la même façon que pour η_0, pour $t \in [1/2, 1]$ et pour $x \in A_i$,

$$\begin{aligned} f(\eta_i(x,t)) &= f \circ \psi(\eta'_i(\phi(x), t)) \\ &\leq f \circ \psi(\phi(x)) + \varepsilon \\ &= f(\eta(x, 1)) + \varepsilon \\ &\leq f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Encore une fois, le cas $t \in [0, 1/2]$ est clair. La condition (CR2) est donc vérifiée.

En combinant tout cela, nous obtenons que $n_\varepsilon^f(A, X, Y) \leq n$ pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Donc, $f\text{-cat}_{X,Y}(A) \leq n$. ■

En fait, l'égalité peut être obtenue si (X', Y') est un rétracte de déformation de (X, Y) approprié pour la fonctionnelle f comme le montre la proposition suivante qui découle directement du théorème précédent et du Théorème 2.25 (7).

Proposition 2.27. *Soit des fermés Y, X', Y' de X tels que $(X', Y') \subseteq (X, Y)$. Supposons que (X', Y') est un rétracte de déformation de (X, Y) compatible avec f c'est-à-dire qu'il existe une déformation $\eta : X \times [0, 1] \to X$ telle que*

$$(\eta(X, 1), \eta(Y, 1)) = (X', Y'),$$

$\eta(x, t) = x$ pour tout $x \in X'$ et $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$, alors

$$f\text{-}cat_{X,Y}(A) = f\text{-}cat_{X',Y'}(A \cap X')$$

pour tout $A \subseteq X$ tel que $\eta(A, 1) \subseteq A$.

La prochaine proposition permet de relier les f-catégories relatives relativement à Y et Y' lorsque $Y' \subseteq Y$. Pour que ce soit possible, l'ensemble Y devra être fermé sous les déformations qui satisfont la condition (CR3) de la Définition 2.19. En particulier, ce sera le cas lorsque $Y = f^a$.

Proposition 2.28. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $Y' \subseteq Y$ tels que pour toute déformation $\eta : X \times [0, 1] \to X$ satisfaisant $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$ pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1]$, on a $\eta(Y, t) \subseteq Y$ alors*

$$f\text{-}cat_{X,Y}(B) \leq f\text{-}cat_{X,Y'}(B).$$

Démonstration. Supposons que $f\text{-cat}_{X,Y'}(B) = k < \infty$. Il existe donc $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $\forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(B, X, Y') = k$. Soit $A_0, A_1, \ldots, A_k$ et $\eta_0, \ldots, \eta_k$, les déformations associées vérifiant la Définition 2.19.

En particulier, on a que $\eta_0(A_0, 1) \subseteq Y' \subseteq Y$ et $\eta_0(Y, t) \subseteq Y$ par hypothèse. Donc A_0 satisfait (CR3) de la Définition 2.19 pour Y. D'où $n_\varepsilon^f(B, X, Y) \leq k$ et ce, pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$. Donc $f\text{-cat}_{X,Y}(B) \leq k$. ■

2.4. Liens entre l'enlacement et la f-catégorie

Dans cette section, nous allons établir quelques liens entre la f-catégorie et la présence d'une situation d'enlacement telle que présentée à la Section 1.4. Par convention, nous dirons que $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ et $\text{dist}(\emptyset, Q) = \infty$.

Proposition 2.29. *Supposons que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_f(A)$ et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sup f(A) \leq a < \inf f(Q)$. Alors $f\text{-cat}_{X,f^a}(B) \geq 1$ et $f\text{-cat}_{X,\bar{A}}(B) \geq 1$.*

Démonstration. Supposons que $f\text{-cat}_{X,f^a}(B) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $Q \subseteq X \setminus f^{a+\varepsilon}$. Puisque $f\text{-cat}_{X,f^a}(B) = 0$, il existe une déformation $\eta : X \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\eta(B, 1) \subseteq f^a$, $\eta(f^a, t) \subseteq f^a$ et $f(\eta(x,t)) \leq f(x), \quad \forall (x,t) \in X \times [0,1]$.

Considérons la fonction d'Urysohn

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \in f^a, \\ 1 & x \in \overline{X \setminus f^{a+\varepsilon/2}}, \end{cases}$$

et introduisons une nouvelle déformation $\hat{\eta}(x,t) = \eta(x, t\lambda(x))$. Puisque $\hat{\eta}(x,t) = \eta(x, 0) = x$ pour tout $x \in f^a$ et que $f(\hat{\eta}(x,t)) = f(\eta(x, t\lambda(x))) \leq f(x)$, on a que $\hat{\eta} \in \mathcal{N}_f(A)$. De plus, $\hat{\eta}(B, 1) \cap Q = \emptyset$. En effet, pour $x \in B$, on a que

$$\hat{\eta}(x,1) = \begin{cases} \eta(x,1) \in f^a & \text{pour } x \in X \setminus f^{a+\varepsilon/2}, \\ \eta(x, \lambda(x)) \in f^{a+\varepsilon/2} & \text{pour } x \in f^{a+\varepsilon/2}, \text{ car } f(\eta(x,t)) \leq f(x). \end{cases}$$

Or $Q \cap f^{a+\varepsilon/2} = \emptyset$. D'où (B, A) n'enlace pas $(Q, \emptyset)$. Contradiction.

Finalement, il découle de la Proposition 2.28 que $f\text{-cat}_{X,\bar{A}}(B) \geq f\text{-cat}_{X,f^a}(B)$. ■

Proposition 2.30. *Soit A fermé dans X et supposons que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_f(A)$ avec*

$$\sup f(A) = \inf f(Q) \text{ et } \operatorname{dist}(A, Q) > 0.$$

Dans ces conditions, on a que $f\text{-}cat_{X,A}(B) \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Si on suppose le contraire, il existe une déformation

$$\eta : X \times [0,1] \to X$$

telle que $\eta(B, 1) \subseteq A$, $\eta(A, t) \subseteq A \; \forall t \in [0,1]$ et $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$.

Pour chaque $t \in [0,1]$, posons $U_t = \eta^{-1}(Q, t)$. Considérons

$$U = \overline{\bigcup_{t \in [0,1]} U_t}.$$

On a que $A \cap U = \emptyset$. En effet, pour $\bar{x} \in U$, il existe une suite (x_n) avec $x_n \in U_{t_n}$ pour un $t_n \in [0,1]$ telle que $x_n \to \bar{x}$. La suite (t_n) possède une sous-suite (t_{n_k}) qui converge vers $\bar{t}$. On a donc, en passant à la sous-suite, que $(x_{n_k}, t_{n_k}) \to (\bar{x}, \bar{t})$. Puisque η est continue, on a que $\eta(x_{n_k}, t_{n_k}) \to \eta(\bar{x}, \bar{t})$. Par construction, on sait que $\eta(x_{n_k}, t_{n_k}) \in Q$ pour tout k. On obtient donc que $\eta(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{Q}$. D'un autre côté, si $\bar{x} \in A$, on sait que $\eta(\bar{x}, t) \in A$ pour tout t. En particulier, $\eta(\bar{x}, \bar{t}) \in A$. Puisque que $\operatorname{dist}(A, Q) > 0$, on a que $A \cap \overline{Q} = \emptyset$. Contradiction.

Considérons la fonction d'Urysohn

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ 1 & x \in U. \end{cases}$$

Posons $\tilde{\eta}(x,t) = \eta(x, \phi(x)t)$. Clairement, $f(\tilde{\eta}(x,t)) \leq f(x)$. De plus, pour tout $x \in A, t \in [0,1]$, $\tilde{\eta}(x,t) = \eta(x, 0) = x$. Donc, $\tilde{\eta} \in \mathcal{N}_f(A)$. Donc, il existe $x \in B$ tel que $\tilde{\eta}(x, 1) \in Q$. Mais, si $\tilde{\eta}(x,1) = \eta(x, \phi(x)) \in Q$, alors, par construction de U, $x \in U$ et donc $\phi(x) = 1$. D'où $\tilde{\eta}(x, 1) = \eta(x, 1) \in A$. Contradiction. ∎

Remarque 2.31. En fait, dans les deux propositions précédentes, si on a que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$, on obtient que $\operatorname{cat}_{X,A}(B) \geq 1$. Par contre, cette conclusion n'est pas possible avec l'enlacement via $\mathcal{N}_f(A)$. Par exemple, considérons la Figure 2.7. On a clairement que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_f(A)$. On a bien que f-$\mathrm{cat}_{X,A}(B) = 1$, mais $\mathrm{cat}_{X,A}(B) = 0$.

Théorème 2.32. *Soit A un fermé de X. Supposons que (B, A) enlace (Q, P) avec*

$$\sup f(A) \leq \inf f(Q)$$

et $\mathrm{dist}(A, Q) > 0$ *si* $\inf(Q) = \sup f(A)$. *Supposons de plus que $f(x) < f(y)$ $\forall x \in B, \forall y \in P$. Dans ces conditions, on a que f-$\mathrm{cat}_{X,A}(B) \geq 1$.*

Démonstration. Puisque $f(x) < f(y)$ $\forall x \in B, \forall y \in P$, si $\eta \in \mathcal{N}_f(A)$ on a que $\eta(B, 1) \cap P = \emptyset$. Donc, par l'enlacement, on a que $\eta(B, 1) \cap Q \neq \emptyset$, c'est-à-dire (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_f(A)$. On a donc la conclusion par les Propositions 2.29 et 2.30. ■

Remarque 2.33. Comme mentionné dans la Remarque 2.31, le Théorème 2.32 n'est pas vrai pour la catégorie de Lusternik-Schnirelman classique. Par exemple, dans le cas de la Figure 2.8, toutes les hypothèses du Théorème 2.32 sont vérifiées et donc f-$\mathrm{cat}_{X,A}(B) \geq 1$. En fait, f-$\mathrm{cat}_{X,A}(B) = 1$ alors que $\mathrm{cat}_{X,A}(B) = 0$.

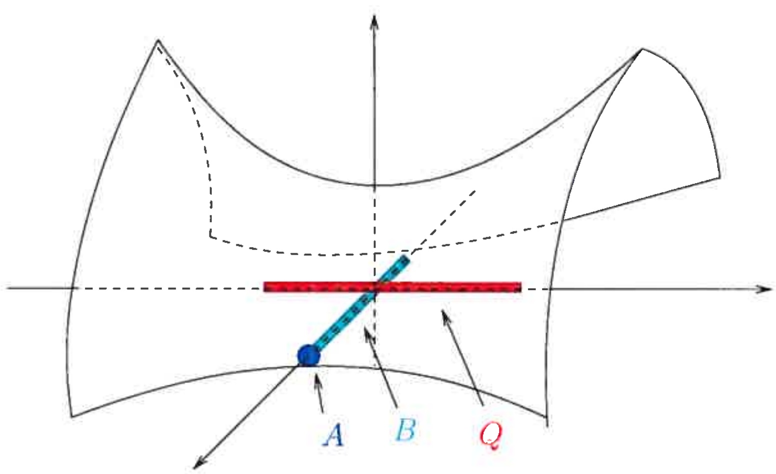


Fig. 2.7. Exemple d'enlacement via $\mathcal{N}_f(A)$

D'autres informations sur la f-catégorie pourront être obtenues lorsque nous aurons la présence d'un enlacement du type « (B, A) enlace (Q, P) » comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.34. *Soient* $A \subseteq B$, *deux fermés. Supposons que* (B, A) *enlace* (Q, P) *via* $\mathcal{N}_f(A)$, *que* $\sup f(A) \leq \inf f(Q)$ *avec* $\operatorname{dist}(A, Q) > 0$ *si* $\inf f(Q) = \sup f(A)$ *alors* $f\text{-}cat_{X \setminus P, A}(B) \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Si on suppose le contraire, il existe une déformation

$$\eta : X \setminus P \times [0,1] \to X \setminus P$$

telle que $\eta(A, t) \subseteq A$ et $f(\eta(x, t)) \leq f(x)$ satisfaisant $\eta(B, 1) \subseteq A$. En suivant les mêmes étapes que dans la preuve des Propositions 2.29 et 2.30, on obtient l'existence d'une déformation $\tilde{\eta} : X \setminus P \times [0,1] \to X \setminus P$ avec $\tilde{\eta} \in \mathcal{N}_f(A)$. Puisque $\tilde{\eta}$ est à image dans $X \setminus P$, on trouve qu'il existe $x \in B$ tel que $\tilde{\eta}(x, 1) \in Q$. Mais par la construction de $\tilde{\eta}$, on a également que $\tilde{\eta}(x, 1) \in A$. Contradiction. ■

Inversement, à partir de la f-catégorie, des enlacements peuvent être décelés.

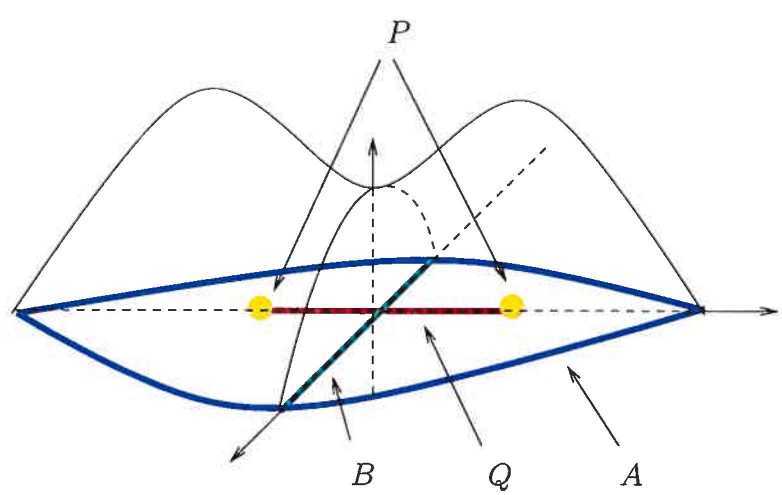


FIG. 2.8. Exemple d'enlacement de type (B, A) enlace (Q, P)

Proposition 2.35. *Soit $A \subseteq B$, deux fermés. Supposons que $f\text{-}cat_{X,A}(B) > f\text{-}cat_{X,A}(X \setminus Q)$. Alors (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ via $\mathcal{N}_f(A)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ qui fixe A, telle que $\eta(B,1) \cap Q = \emptyset$ et que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in B \times [0,1]$. On a donc $\eta(B,1) \subseteq X \setminus Q$. Grâce au Théorème 2.25, on obtient

$$f\text{-cat}_{X,A}(B) \leq f\text{-cat}_{X,A}(\eta(B,1)) \leq f\text{-cat}_{X,A}(X \setminus Q),$$

ce qui termine la preuve. ∎

Théorème 2.36. *Supposons que $f\text{-}cat_{X\setminus P,A}(B) > f\text{-}cat_{X\setminus P,A}(X \setminus Q)$ alors (B, A) enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_f(A)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X \setminus P$ qui fixe A, telle que $\eta(B,1) \cap Q = \emptyset$ et que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$. Grâce au Théorème 2.25, on trouve que

$$f\text{-cat}_{X\setminus P,A}(B) \leq f\text{-cat}_{X\setminus P,A}(\eta(B,1)) \leq f\text{-cat}_{X\setminus P,A}(X \setminus Q)$$

ce qui termine la preuve. ∎

Pour le prochain théorème, nous allons nous placer dans une situation d'enlacement particulière. Pour un espace de Banach $X = X_1 \oplus X_2$ et une variété compacte V, nous allons considérer les ensembles

$$B_1 = \{x \in X_1 \mid \|x\| \leq R_1\},$$

$$S_1 = \{x \in X_1 \mid \|x\| = R_1\},$$

$$B_2 = \{x \in X_2 \mid \|x\| \leq R_2\},$$

$$S_2 = \{x \in X_2 \mid \|x\| = R_2\}.$$

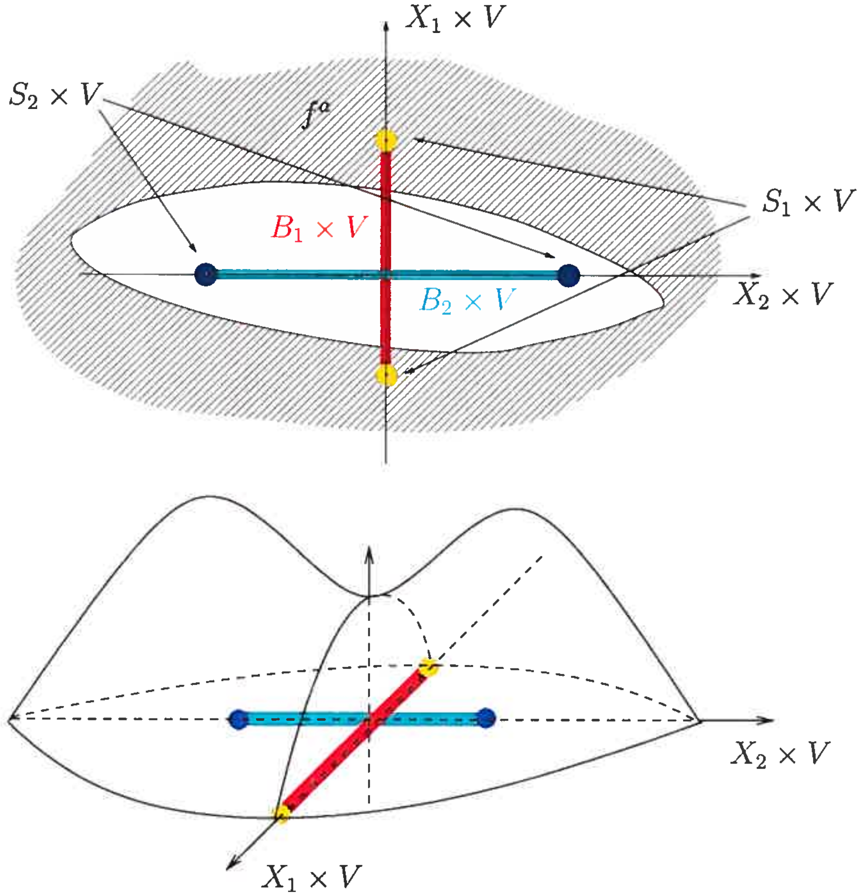


FIG. 2.9. Enlacement du Théorème 2.37

et supposer que

$$\sup f(S_1 \times V) < a < \inf f(B_2 \times V) \leq \sup f(B_1 \times V) < \inf f(S_2 \times V).$$

Théorème 2.37. *Soit* $X = X_1 \oplus X_2$, *un espace de Banach avec* $0 < \dim X_1 < \infty$ *et* V *une variété riemannienne compacte. Soit* $f : X \times V \to \mathbb{R}$ *continue. Supposons que*

$$\sup f(S_1 \times V) < a < \inf f(B_2 \times V) \leq \sup f(B_1 \times V) < b < \inf f(S_2 \times V)$$

alors

$$f\text{-}cat_{X \times V, f^a}(B_1 \times V) \geq cat_{(X \setminus S_2) \times V, f^a}(B_1 \times V).$$

Démonstration. Supposons que $f\text{-cat}_{X\times V, f^a}(B_1 \times V) = k < \infty$, alors il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(B_1 \times V, X \times V, f^a) = k$. Soit $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Il existe $A_0, A_1, \ldots, A_k$ fermés donnés par la Définition 2.19 tels que $\bigcup_{i=0}^k A_i = B_1 \times V$ avec $A_1, \ldots, A_k$ qui sont (f, ε)-contractiles et il existe $\eta_0 : (X \times V) \times [0,1] \to X \times V$ continue telle que $\eta_0((x,v),0) = x$ pour tout (x,v), $f(\eta_0((x,v),t)) \leq f(x,v)$ et $\eta_0(A_0, 1) \subseteq f^a$. Soit $\delta > 0$. Notons $B_2^\delta = \{(x,v) \in X_2 \times V \mid \|x\| \leq R_2 - \delta\}$.

Pour $i = 1, \ldots, k$, A_i est contractile dans $(X_1 \oplus B_2^\delta) \times V$. En effet, considérons $\eta_i : A_i \times [0,1] \to X \times V$ telle que $f(\eta_i((x,v),t)) \leq f(x,v) + \varepsilon$ et $\eta_i((x,v),1) = (\bar{x}, \bar{v}) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{v})$.

Posons $\hat{\eta}_i : A_i \times [0,1] \to X \times V$ définie par

$$\hat{\eta}_i((x,v),t) = (\eta_{i,1}((x,v),t) + P_{B_2^\delta}(\eta_{i,2}((x,v),t)), \eta_{i,V}((x,v),t))$$

où $\eta_i = (\eta_{i,1} + \eta_{i,2}, \eta_{i,V})$ avec $\eta_{i,j}$ à valeur dans X_j et $\eta_{i,V}$ à valeur dans V et $P_{B_2^\delta} : X_2 \to B_2^\delta$ est la projection canonique. La déformation $\hat{\eta}_i$ est continue et $\hat{\eta}_i((x,v),1) = (\bar{x}_1 + P_{B_2^\delta}(\bar{x}_2), \bar{v})$.

D'autre part, puisque pour tout $(x,v,t) \in A_0 \times V \times [0,1]$,

$$f(\eta_0(x,v,t)) \leq f(x,v) \leq \sup f(B_1 \times V) < \inf f(S_2 \times V),$$

on trouve que $\eta_0(A_0 \times [0,1]) \cap (S_2 \times V) = \emptyset$. Donc, $\eta_0 : A_0 \times [0,1] \to (X \backslash S_2) \times V$ et $\eta_0(A_0, 1) \subset f^a$. D'où $\text{cat}_{(X\backslash S_2)\times V, f^a}(B_1 \times V) \leq k$. ■

Conjecture 2.38. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$, un espace de Banach avec $0 < \dim X_1 < \infty$ et V une variété riemannienne compacte. Soit $f : X \times V \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que*

$$\sup f(S_1 \times V) < a < \inf f(B_2 \times V) \leq \sup f(B_1 \times V) < b < \inf f(S_2 \times V)$$

alors

$$f\text{-}cat_{X\times V, f^a}(B_1 \times V) \geq cat_{B_1\times V, S_1\times V}(B_1 \times V). \tag{2.1}$$

Discussion sur la conjecture : Supposons que $f\text{-cat}_{X\times V, f^a}(B_1 \times V) = k < \infty$, alors il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(B_1 \times V, X \times V, f^a) = k$. Soit $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Il existe $A_0, A_1, \ldots, A_k$ fermés donnés par la Définition 2.19 tels que $\bigcup_{i=0}^k A_i =$

$B_1 \times V$ avec $A_1, \ldots, A_k$ qui sont (f, ε)-contractiles et il existe $\eta_0 : (X \times V) \times [0,1] \to X \times V$ continue telle que $\eta_0((x,v),0) = x$ pour tout (x,v), $f(\eta_0((x,v),t)) \leq f(x,v)$ et $\eta_0(A_0, 1) \subseteq f^a$.

Dans la preuve du théorème précédent, on a vu que pour $i = 1, \ldots, k$, il existe des déformations $\hat{\eta}_i : A_i \times [0,1] \to X_1 \oplus B_2^\delta \times V$. Puisque $B_1 \times V$ est un rétracte de déformation de $X_1 \oplus B_2^\delta \times V$, il existe $\tilde{\eta}_i : A_i \times [0,1] \to B_1 \times V$ qui satisfont la Définition 1.8. Pour conclure, il faudrait montrer qu'il existe $\tilde{\eta}_0 : A_0 \times [0,1] \to B_1 \times V$ qui satisfait également la Définition 1.8. Dans le cas particulier où $V = \{v_0\}$, la théorie du degré implique qu'il existe un continuum $\mathcal{C} \subseteq \{(x,t) \in B_1 \times [0,1] \mid \eta_{0,1}(x, v_0, t) = 0\}$ tel que $\mathcal{C} \cap B_1 \times \{0\} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C} \cap B_1 \times \{1\} \neq \emptyset$. Si $(x,1) \in \mathcal{C}$, on a que $\eta_{0,1}(x, v_0, 1) = 0$ et donc $\eta_0(x, v_0, 1) \in X_2 \times V$. De plus, par choix de η_0, on sait que $\eta_0(x, v_0, 1) \in f^a$. Puisque $f^a \cap (\{0\} \oplus B_2) \times V = \emptyset$, on a nécessairement que $\|\eta_{0,2}(x, v_0, 1)\| > R_2$. Puisque $\mathcal{C}$ est connexe et que $\eta_{0,2}$ est continue, on a que $\{\|\eta_{0,2}(x, v_0, t)\| \in [0, \infty) \mid (x,t) \in \mathcal{C}\}$ est connexe. Par conséquent, il existe $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathcal{C}$ tel que $\|\eta_{0,2}(\bar{x}, v_0, \bar{t})\| = R_2$. D'où $\eta_{0,2}(\bar{x}, v_0, \bar{t}) \in S_2 \times V$. Or, $\eta_0(A_0, [0,1]) \cap S_2 \times V = \emptyset$. Donc $(\bar{x}, v_0) \notin A_0$. Puisque S_1 est un rétracte de déformation de $B_1 \backslash \{\bar{x}\}$, il existe une autre déformation $\tilde{\eta}_0 : A_0 \times [0,1] \to B_1 \times V$ telle que $\tilde{\eta}_0(x, v_0, 1) \in S_1 \times V$ pour tout $x \in B_1$. On obtient donc la conclusion.

Si V n'est pas un singleton, par le même argument, pour chaque $v \in V$, il existe $x_v \in B_1$ tel que $(x_v, v) \notin A_0$. Cependant, rien n'indique *a priori* que la fonction qui à v associe x_v aie de belles propriétés nous permettant de conclure qu'on peut rétracter $B_1 \times V$ sur $S_1 \times V$.

Chapitre 3

f-CATÉGORIES ET POINTS CRITIQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats liant les notions de f-catégorie et de f-catégorie relative au nombre de points critiques des fonctionnelles. Entre autres, nous voudrons que le nombre de points critiques de f soit borné inférieurement par la f-catégorie.

Essentiellement, il s'agira de trouver des valeurs critiques obtenues par un argument de type min-max sur des classes d'ensembles appropriées.

Soit (X, d) un espace métrique. Dans toute la suite, nous considérons une fonctionnelle continue $f : X \to \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $K \subseteq X$ tel que $K \cap f^{-1}(B)$ est compact pour tout B compact de $\mathbb{R}$. Nous appellerons K *l'ensemble des points critiques* de f. Nous dirons que $c \in \mathbb{R}$ est une *valeur critique* s'il existe $x \in K$ tel que $f(x) = c$. Nous noterons $K_c = K_c(f) = \{x \in K(f) \mid f(x) = c\}$. Par convention, nous dirons que l'infimum pris sur un ensemble vide est $+\infty$, $\sup f(\emptyset) = -\infty$, $\inf f(\emptyset) = +\infty$.

3.1. Contractilité locale et propriétés de déformations

Nous devrons supposer que les espaces rencontrés satisfont la condition de contractilité suivante, présentée entre autres par Borsuk [5], pour trouver des résultats de points critiques.

Définition 3.1. Nous dirons que X est *localement contractile* si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}_x$ de x, il existe $\bar{x}$ et un voisinage $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}_x$ qui est contractile dans $\mathscr{V}_x$ vers $\bar{x}$, c'est-à-dire il existe une déformation continue $\kappa_x : \mathscr{V}' \times [0,1] \to \mathscr{V}_x$ telle que $\kappa_x(y,0) = y$ et $\kappa_x(y,1) = \bar{x}$ pour tout $y \in \mathscr{V}'$.

Évidemment, les espaces de Banach et les variétés riemanniennes connexes sont localement contractiles. Essentiellement, nous nous servirons de cette condition pour appliquer le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soit X, un espace métrique localement contractile et soit $f : X \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de x qui est (f, ε)-contractile.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, il existe un voisinage $\mathscr{V}_x$ tel que $f(\mathscr{V}_x) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$. Puisque X est localement contractile, il existe $\bar{x}$ et un voisinage $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{V}_x$ et une déformation $\eta : \mathscr{V} \times [0,1] \to \mathscr{V}_x$ telle que $\eta(y,1) = \bar{x}$. Puisque pour tout $(y,t) \in \mathscr{V} \times [0,1]$, $\eta(y,t) \in \mathscr{V}_x$, on trouve que $f(\eta(y,t)) \leq f(x) + \varepsilon/2 \leq f(y) + \varepsilon$. ■

Introduisons maintenant des propriétés de déformations abstraites. Pour plus de détails ou d'autres type de déformations, le lecteur pourra consulter [15].

Définition 3.3. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon}$, $\rho > 0$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de K_c, il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que

(1) $\eta(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in X \times \{0\} \cup f^{c-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$,

(2) $f(\eta(x,t)) \leq f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$,

(3) $d(\eta(x,t), x) \leq \rho$,

(4) $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus \mathscr{V}, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$.

Cette propriété permet d'obtenir une propriété de déformation sur un intervalle non critique.

Proposition 3.4. *Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec $a < b$. Supposons que pour tout $c \in [a, b]$, $K_c = \emptyset$ et que f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$. Alors il existe une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que*

(1) $\eta(f^b, 1) \subseteq f^a$;

(2) $\eta(f^a, t) \subseteq f^a$ *pour tout* $t \in [0,1]$;

(3) $\eta(x,t) = x$ *pour tout* $(x,t) \in f^{a-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$;

(4) $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ *pour tout* $(x,t) \in X \times [0,1]$;

(5) *si* $b < \infty$, *il existe* $\rho > 0$ *tel que* $d(\eta(x,t), x) \leq \rho$ *pour tout* $x, t \in X \times [0,1]$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $b < \infty$. Soit $c \in [a, b]$. Puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$, il existe $\varepsilon_c < \bar{\varepsilon}$ et $\eta_c : X \times [0,1] \to X$ tel que $f(\eta_c(x,t)) \leq f(x)$, $\eta_c(f^{c+\varepsilon_c}, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon_c}$. De plus, on a que $\eta_c(x,t) = x$ pour tout $x \in c - \bar{\varepsilon}$. Puisque $[a,b]$ est compact, $\{(c-\varepsilon_c, c+\varepsilon_c)\}_{c\in[a,b]}$ possède un sous-recouvrement fini de $[a,b]$. Donc, il existe $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ et $\varepsilon_i = \varepsilon_{c_i}$ tels que $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i)$. Notons également η_i la déformation correspondant à c_i. Donc, on a que $c_1 - \varepsilon_1 < a$, $c_j - \varepsilon_j < c_{j-1} + \varepsilon_{j-1}$ et $b < c_n + \varepsilon_n$. Considérons $\eta = \eta_1 * \eta_2 * \ldots * \eta_n$. Puisque $f^{c_{j+1}-\varepsilon_{j+1}} \subseteq f^{c_j+\varepsilon_j}$ et que $\eta_j(f^{c_j+\varepsilon_j}, 1) \subseteq f^{c_j-\varepsilon_i}$, on obtient que $\eta_j(f^{c_{j+1}-\varepsilon_{j+1}}, 1) \subseteq f^{c_j-\varepsilon_j}$. D'où $\eta(f^b, 1) \subseteq f^a$. Finalement, puisque $f(\eta_i(x,t)) \leq f(x)$ pour chaque i, il est clair que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ et que $\eta(f^a, t) \subseteq f^a$. De plus,

$$\sup_{(x,t)\in X\times[0,1]} \{d(\eta(x,t), x)\} \leq \sum_{i=1}^{n} \sup\{d(\eta_i(x,t), x)\}$$

qu'on peut choisir fini.

Si $b = \infty$, il existe une suite b_h strictement croissante telle que $b_1 = a$ et $\lim_{h\to\infty} b_h = \infty$. Pour chaque h, appelons $\eta'_h : X \times [0,1] \to X$ la déformation obtenue en appliquant la première partie pour $a = b_h$ et $b = b_{h+1}$. Construisons récursivement la déformation $\eta_h : X \to X$ définie par $\eta_1(x,t) = \eta'_1(x,t)$ et $\eta_h(x,t) = \eta_{h-1}(\eta'_h(x,t), t)$. Nous allons montrer par induction que $\eta_h(x,t)$ satisfait les propriétés suivantes pour $h \geq 2$:

(1') $\eta_h(x, 0) = x$,

(2') $f(\eta_h(x,t)) \leq f(x)$,

(3') si $f(x) \leq b_h - \bar{\varepsilon}$, $\eta_h(x,t) = \eta_{h-1}(x,t)$,

(4') $\eta_h(f^{b_{h+1}}, 1) \subseteq f^a$.

Pour $h = 2$, on a que $\eta_2(x,0) = \eta_1(\eta_2'(x,0),0) = \eta_1'(x,0) = x$. Ensuite, $f(\eta_2(x,t)) = f(\eta_1(\eta_2'(x,t),t)) \leq f(\eta_2'(x,t)) \leq f(x)$. Si $x \in f^{b_2-\bar{\varepsilon}}$, alors $\eta_2(x,t) = \eta_1(\eta_2'(x,t)) = \eta_1(x,t)$. Finalement, pour $x \in f^{b_3}$, puisque $\eta_2'(x,1) \in f^{b_2}$ et que $\eta_1(f^{b_2},1) \subseteq f^a$, on obtient que $\eta_2(x,1) = \eta_1(\eta_2'(x,1),1) \in f^a$. Par un raisonnement analogue, on montre que si les propriétés sont vérifiées pour $h-1$, elles le sont également pour h.

Définissons

$$\eta(x,t) = \lim_{h\to\infty} \eta_h(x,t).$$

Grâce à (3'), η est bien définie. De plus, elle est continue puisque les η_h le sont et que pour tout $u \in X$, il existe V_u un voisinage de u sur lequel f est bornée. Par (3'), il existe $\bar{h}$ tel que pour tout $h > \bar{h}$, $\eta_{\bar{h}}(x,t) = \eta_h(x,t) = \eta(x,t)$ pour tout $(x,t) \in V_u \times [0,1]$. En utilisant les propriétés démontrées plus haut, on a que η a les propriétés souhaitées. ■

3.2. Le cas de la f-catégorie

Dans cette section, nous allons montrer que la f-catégorie permet de borner inférieurement le nombre de points critiques de la fonctionnelle f.

Pour $i \in \mathbb{N}$, posons

$$\Gamma_i = \{U \subseteq X | f\text{-cat}_X(U) \geq i\}$$

et

$$c_i = \inf_{U\in\Gamma_i} \sup f(U).$$

Remarquons que par notre convention, $c_i = \infty$ si $i > f\text{-cat}_X(X)$.

Lemme 3.5. *Supposons que X est localement contractile et que $c = c_{k+1} = \ldots = c_{k+m} \in \mathbb{R}$, que f vérifie $\mathscr{D}(X, K_c)$ et que c n'est pas un point d'accumulation des valeurs critiques de f, alors* $\operatorname{card} K_c \geq m$.

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire $\operatorname{card} K_c = p$ avec $p < m$. Puisque c n'est pas un point d'accumulation de K, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}] \setminus \{c\}$ ne contient pas de valeur critique. L'ensemble $f^{c+\bar{\varepsilon}} \in \Gamma_{k+m}$. En effet, il existe au moins un $U \in \Gamma_{k+m}$ tel que $f(U) \leq c+\bar{\varepsilon}$ et par la propriété d'inclusion, on a automatiquement que $f\text{-}\mathrm{cat}_X(f^{c+\bar{\varepsilon}}) \geq f\text{-}\mathrm{cat}_X(U) \geq k+m$. Donc, il existe un certain $\tilde{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon' \leq \tilde{\varepsilon}$, on a que $n^f_{\varepsilon'}(f^{c+\bar{\varepsilon}}, X) \geq k+m$. Puisque f est continue et que X est localement contractile, par le Lemme 3.2, pour chaque $y \in K_c$ il existe un voisinage $\mathscr{V}_y$ de y qui est $(f, \tilde{\varepsilon})$-contractile. Considérons $V = \bigcup_{y \in K_c} \mathscr{V}_y$. Puisque f vérifie $\mathscr{D}(X, K_c)$, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et $\eta : X \times [0,1] \to X$ tels que

$$\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$$

et $f(\eta(x,t)) \leq f(x) \quad \forall x, \forall t$. On a que $f\text{-}\mathrm{cat}_X(\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1)) \geq k+1$. En effet, si $f\text{-}\mathrm{cat}_X(\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1)) = j \leq k$, il existe $\hat{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon' \leq \hat{\varepsilon}$, on a que $n^f_{\varepsilon'}(\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1), X) = j$. En particulier, on peut prendre $\varepsilon' < \tilde{\varepsilon}$. On peut donc trouver $A_1, \ldots, A_j$ tels que $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} A_i$. Posons $\eta_1(x) = \eta(x, 1)$. Considérons les ensembles $B_i = \eta_1^{-1}(A_i)$ pour $i = 1, \ldots, j$. L'ensemble $f^{c+\varepsilon} \setminus V$ est clairement recouvert par la famille $\{B_i\}_{i=1}^{j}$. De plus, puisque pour $s = 1, \ldots, j$, il existe une déformation η_s avec $\eta_s(A_s, 1) = x_s$ et $f(\eta_s(x,t)) \leq f(x) + \tilde{\varepsilon}$, on peut déformer B_s dans un point en prenant comme déformation $\tilde{\eta}(x,t) = \eta_s * \eta(x,t)$. Cette déformation est telle que $f(\tilde{\eta}(x,t)) \leq f(x) + \tilde{\varepsilon}$ pour tout $x \in B_s$. Finalement, rappelons que pour chaque $y \in K_c$, le voisinage $\mathscr{V}_y$ est $(f, \tilde{\varepsilon})$-contractile. Il existe donc une déformation $\kappa_y : \mathscr{V}_y \times [0,1] \to X$ telle que $f(\kappa_y(x,t)) \leq f(x) + \tilde{\varepsilon}$ pour tout $(x,t) \in \mathscr{V}_y \times [0,1]$ et $\kappa_y(x,1) = \bar{y}$.

On a donc que

$$\left\{B_s \;\middle|\; s = 1, \ldots, j\right\} \cup \left\{\mathscr{V}_y \;\middle|\; y \in K_c\right\}$$

forme un recouvrement de $f^{c+\varepsilon}$ que nous noterons $\left\{O_i \;\middle|\; i = 1, \ldots, j+p\right\}$ puisque $\operatorname{card} K_c = p$. Finalement, par la Proposition 3.4, puisque $[c+\varepsilon, c+\bar{\varepsilon}]$ ne contient pas de valeurs critiques, il existe une déformation $\hat{\eta}$ telle que $\hat{\eta}(f^{c+\bar{\varepsilon}}, 1) \subseteq f^{c+\varepsilon}$ et $f(\hat{\eta}(x,t)) \leq f(x)$. Posons $\hat{\eta}_1(x) = \hat{\eta}(x,1)$ et $U_i = \hat{\eta}_1^{-1}(O_i), i = 1, \ldots, j+p$.

Par construction, $f^{c+\bar{\varepsilon}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j+p} U_i$. De plus, nous avons trouvé que $n_{\bar{\varepsilon}}^{f}(f^{c+\bar{\varepsilon}}, X) \leq j+p < k+m$. Contradiction.

Finalement, puisque $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus V, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$, on obtient $f\text{-cat}_X(f^{c-\varepsilon}) \geq k+1$. Nous obtenons $f^{c-\varepsilon} \in \Gamma_{k+1}$ et donc

$$c = \inf_{U \in \Gamma_{k+1}} \sup f(U) \leq \sup f(f^{c-\varepsilon}) \leq c - \varepsilon.$$

Contradiction.

■

Théorème 3.6. *Si f vérifie $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ et est bornée inférieurement, alors f a au moins $f\text{-cat}_X(X)$ points critiques.*

Démonstration. Supposons que le nombre de points critiques est fini. Dans le cas contraire, la conclusion est vérifiée. Il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que $K \subseteq f^b$. Par la Proposition 3.4 et le Théorème 2.25, on a que $f\text{-cat}_X(X) = f\text{-cat}_X(f^b)$. D'où $c_i \leq b$ pour $i \leq f\text{-cat}_X(X)$.

Ensuite, on a que $c_1 \in \mathbb{R}$ puisque f est bornée inférieurement. Si $c_i \in \mathbb{R}$ alors $K_{c_i} \neq \emptyset$. En effet, si c_i n'est pas une valeur critique de f alors, puisque $K \cap f^{-1}(B)$ est compact pour tout B compact de $\mathbb{R}$, il existe $a < c_i < \tilde{a}$ tel que $[a, \tilde{a}]$ ne contient pas de valeur critique.

Soit $V \in \Gamma_i \cap f^{\tilde{a}}$. La Proposition 3.4 implique qu'il existe $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que

$$f(\eta(f^{\tilde{a}}, 1)) \leq a.$$

De plus, par le Théorème 2.9, on a que $\eta(V, 1) \in \Gamma_i$. Nous avons donc

$$c_i \leq \sup f(\eta(V, 1)) \leq a < c_i$$

ce qui est contradictoire. La conclusion découle du Lemme 3.5. ■

3.3. Le cas de la f-catégorie tronquée

La catégorie tronquée nous permettra d'obtenir un résultat analogue au Théorème 3.6, mais pour des fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement. Mentionnons qu'il n'existe pas de version classique de ce résultat dans la littérature.

Théorème 3.7. *Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supposons que f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. Alors*

$$f\text{-}catt_X(X) \leq \operatorname{card} K.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\operatorname{card} K < \infty$. Si $K = \emptyset$, la Proposition 3.4 implique que $m^f_\varepsilon(X, X) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $f\text{-catt}_X(X) = 0$.

Supposons que les valeurs critiques sont $\{c_1, \ldots, c_k\}$ avec $c_i < c_{i+1}$. Il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $c_{i+1} - \bar{\varepsilon} > c_i + \bar{\varepsilon}$. Soit δ tel que $-\frac{1}{\delta} \leq c_1 - \varepsilon$. Supposons que $K_{c_1} = \{y^1_1, \ldots, y^1_{m_1}\}$. Pour $i = 1, \ldots, m_1$, considérons V^1_i, un voisinage de y^1_i (f, δ)-contractile. Posons $V_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1} V^1_i$. Puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour tout c, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et une déformation $\eta_1 : X \times [0,1] \to X$ telle que $f(\eta_1(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta_1(f^{c_1+\varepsilon} \setminus V_1, 1) \subseteq f^{c_1-\varepsilon}$. Puisque $[c_1 + \varepsilon, c_1 + \bar{\varepsilon}]$ et $[-\frac{1}{\delta}, c_1 - \varepsilon]$ ne contiennent pas de valeurs critiques, par les Propositions 2.16 et 3.4, puisque V_1 est composé de m_1 voisinages (f, δ)-contractiles, on obtient que

$$\begin{aligned} m^f_\delta(f^{c_1+\bar{\varepsilon}}, X) &\leq m^f_\delta(f^{c_1+\varepsilon} \setminus V_1, X) + n^f_\delta(V_1, X) \\ &\leq m^f_\delta(f^{c_1-\varepsilon}, X) + m_1 \leq m^f_\delta(f^{-1/\delta}, X) + m_1 = \operatorname{card} K_{c_1}. \end{aligned}$$

Le même argument et la Proposition 3.4 impliquent que pour V_2 défini similairement à V_1,

$$\begin{aligned} m^f_\delta(f^{c_2+\bar{\varepsilon}}, X) &\leq m^f_\delta(f^{c_2+\varepsilon} \setminus V_2, X) + n^f_\delta(V_2, X) \\ &\leq m^f_\delta(f^{c_2-\varepsilon}, X) + \operatorname{card} K_2 \leq m^f_\delta(f^{c_1+\bar{\varepsilon}}, X) + \operatorname{card} K_2 \\ &\leq \operatorname{card} K_{c_1} + \operatorname{card} K_{c_2}. \end{aligned}$$

On procède de cette façon pour $i = 1, \ldots, k$ pour obtenir que

$$m_\delta^f(f^{c_k+\bar{\varepsilon}}, X) \leq \operatorname{card} K_{c_1} + \ldots + \operatorname{card} K_{c_k}.$$

Finalement, puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ et que $[c_k + \bar{\varepsilon}, \infty)$ ne contient pas de valeurs critiques, la Proposition 3.4, implique que $m_\delta^f(X, X) \leq m_\delta^f(f^{c_k+\bar{\varepsilon}}, X)$, et ce, pour tout δ assez petit. Par conséquent, $f\text{-catt}_X(X) \leq \operatorname{card} K$. ■

3.4. Le cas de la f-catégorie relative

À l'image de la Section 3.2, nous allons garantir l'existence de points critiques à l'aide d'un procédé mini-max sur une classe d'ensembles bien choisie. Le fait d'utiliser la f-catégorie relative nous permettra de circonscrire les valeurs critiques dans un intervalle.

Théorème 3.8. *Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe a, b et $B \subseteq X$ avec $B \subseteq f^b$ et $f\text{-}cat_{X,f^a}(B) = k \leq \infty$. Si f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour tout $c \in [a, b]$ alors f possède au moins k points critiques dans $f^{-1}([a, b])$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{I} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq k\}$. Pour $j \in \mathcal{I}$, posons

$$\Gamma_j = \{A \subseteq X | f\text{-cat}_{X,f^a}(A) \geq j\}$$

et

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup f(A).$$

Puisque $f\text{-cat}_{X,f^a}(f^a) = 0$, on a que $f\text{-cat}_{X,f^a}(A) \geq 1$ entraîne nécessairement que $\sup f(A) > a$. De plus, puisque $B \in \Gamma_j$ pour $j \in \mathcal{I}$ et que $B \subseteq f^b$, on a que $a \leq c_j \leq b$ pour tout j.

On peut supposer que $f^{-1}[a, b]$ contient un nombre fini de points critiques. Dans le cas contraire, la conclusion est déjà vérifiée.

Si $c_1 = \ldots = c_p = a$, alors $\operatorname{card}(K_a) \geq p$. Sinon, supposons que $\operatorname{card} K_a < p$. Soit $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $[a, a + \bar{\varepsilon}]$ ne contient que a comme valeur critique. Soit $U \in \Gamma_p$ tel que $\sup f(U) < a + \bar{\varepsilon}$. Il existe $\hat{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$, $n_\varepsilon^f(U, X, f^a) \geq p$.

Puisque f est continue et que X est localement contractile, pour chaque $y \in K_a$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_y$ de y qui est $(f, \hat{\varepsilon})$-contractile vers y. Posons $V = \bigcup_{y \in K_a} \mathscr{V}_y$. Puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_a)$, il existe $\varepsilon' < \bar{\varepsilon}$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que $\eta(f(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta(f^{a+\varepsilon'} \setminus V, 1) \subseteq f^a$. Nous avons donc que $\eta(f^a, t) \subseteq f^a$ et donc $n^f_{\hat{\varepsilon}}(f^{a+\varepsilon'}, X, f^a) \leq \operatorname{card} K_a$. Puisque $[a+\varepsilon', a+\bar{\varepsilon}]$ ne contient pas de valeurs critiques et $U \subseteq f^{a+\bar{\varepsilon}}$, par la Proposition 3.4, on a

$$n^f_{\hat{\varepsilon}}(U, X, f^a) \leq n^f_{\hat{\varepsilon}}(f^{a+\varepsilon'}, X, f^a) \leq \operatorname{card} K_a < p.$$

Contradiction.

Supposons maintenant que $c = c_{j+1} = \ldots = c_{j+p} > a$. Si $c < b$, puisque le nombre de valeurs critiques est fini, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}] \setminus \{c\}$ ne contient pas de valeurs critiques. Remarquons que $f^{c+\bar{\varepsilon}} \in \Gamma_{j+p}$. En particulier, $f\text{-cat}_{X,f^a}(f^{c+\bar{\varepsilon}}) \geq j+p$. Il existe alors $\varepsilon' \leq \bar{\varepsilon}$ tel que $n^f_{\varepsilon'}(f^{c+\bar{\varepsilon}}, X) = \alpha \geq j+p$. Puisque f est continue et que X est localement contractile, un argument similaire au cas précédent nous assure qu'il existe $\varepsilon < \varepsilon'$ tel que

$$n^f_{\varepsilon'}(f^{c+\bar{\varepsilon}}, X, f^{c-\varepsilon}) \leq \operatorname{card} K_c. \tag{3.1}$$

Puisque $c - \varepsilon < c$, $f\text{-cat}_{X,f^a}(f^{c-\varepsilon}) = r \leq j$. Il existe donc $\varepsilon'' < \varepsilon'$ tel que pour tout $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon''$, $n^f_{\tilde{\varepsilon}}(f^{c-\varepsilon}, X, f^a) = r \leq j$ et donc

$$n^f_{\varepsilon'}(f^{c-\varepsilon}, X, f^a) \leq j. \tag{3.2}$$

En combinant les équations (3.1) et (3.2), on trouve que $n^f_{\varepsilon'}(f^{c+\varepsilon}, X, f^a) \leq j + \operatorname{card} K_c$. D'où $\operatorname{card} K_c \geq p$.

Si $c_{j+1} = b$, puisque $f\text{-cat}_X(B) = k$ et $B \subseteq f^b$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq k - j$, on a en fait $c = c_{j+1} = \ldots = c_{j+p}$. Comme précédemment, on peut remarquer que $f^b \in \Gamma_{j+p}$. Puisque $f\text{-cat}_{X,f^a}(f^b) = k \geq j+p$, il existe ε' tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon'$, $n^f_{\varepsilon}(f^b, X, f^a) \geq j+p$. Par continuité et puisque l'espace est localement contractile, le même argument implique que $n^f_{\varepsilon'}(f^b, X, f^a) \leq j + \operatorname{card} K_b$. D'où $\operatorname{card} K_b \geq p$. En combinant les trois cas précédents, on déduit que $\operatorname{card} K \geq f\text{-cat}_{X,f^a}(B)$. ∎

Proposition 3.9. *Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue satisfaisant $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour tout $c \in [a, b]$ et n'ayant pas de valeurs critiques dans $[a, b]$. Alors pour tout $B \subseteq X$, $f\text{-}cat_{X,f^a}(B) = f\text{-}cat_{X,f^b}(B)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $[a, b]$ ne contient pas de points critiques et que f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$, par la Proposition 3.4, il existe une déformation

$$\eta : X \times [0,1] \to X$$

telle que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta(f^b, 1) \subseteq f^a$. Supposons que $n_\varepsilon^f(B, X, f^b) = k < \infty$. Il existe donc $U_0, \ldots, U_k$ donnés à la Définition 2.19 tels que $B \subseteq \bigcup_{i=0}^k U_i$, $U_1, \ldots, U_k$ satisfont (CR2) et U_0 satisfait (CR3). Considérons $\hat{\eta} : X \times [0,1] \to X$ définie par $\hat{\eta}(x,t) = \eta * \eta_0(x,t)$ où η_0 est donnée par (CR3). Puisque $f(\eta_0(x,t)) \leq f(x)$ et que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$, on a que $f(\hat{\eta}(x,t)) \leq f(x)$. Par conséquent, il est clair que $\hat{\eta}(f^a, t) \subseteq f^a$. Finalement, puisque $\eta_0(U_0, 1) \subseteq f^b$ et que $\eta(f^b, 1) \subseteq f^a$, on a bien que $\hat{\eta}(U_0, 1) \subseteq f^a$. Cette déformation satisfait bien toutes les conditions pour permettre à U_0 de remplir (CR3). Donc, $n_\varepsilon^f(B, X, f^a) \leq k$.

Inversement, puisque pour toute déformation η telle que $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$, on a que $\eta(f^b, t) \subseteq f^b$ et que $f^a \subseteq f^b$, par la Proposition 2.28, on a que $f\text{-cat}_{X,f^b}(B) \leq f\text{-cat}_{X,f^a}(B)$. De plus, on obtient de cette dernière inégalité que si $f\text{-cat}_{X,f^b}(B) = \infty$ alors $f\text{-cat}_{X,f^a}(B) = \infty$. ■

En imposant une autre propriété de déformation, on peut permettre $\inf f(P) = \sup f(B)$ dans le Théorème 2.32.

Définition 3.10. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f satisfait $\widehat{\mathscr{D}}(X, K_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon} > 0$, pour tout $\rho > 0$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de K_c, il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que

(1) $\eta(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in X \times \{0\} \cup \{x \mid f(x) \geq c + \bar{\varepsilon}\} \times [0,1]$;

(2) $f(\eta(x,t)) \geq f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$;

(3) $d(\eta(x,t), x) \leq \rho$;

(4) $\eta(\{x \mid f(x) \geq c - \varepsilon\} \setminus \mathscr{V}, 1) \subseteq \{x \mid \ f(x) \geq c + \varepsilon\}$.

Remarque 3.11. Soit $\hat{K}$, l'ensemble des points critiques de $-f$. Si $\hat{K}_{-c} = K_c$, alors f vérifie $\widehat{\mathscr{D}}(X, K_c)$ si et seulement si $-f$ vérifie $\mathscr{D}(X, \hat{K}_{-c})$. Dans les applications, cette condition sera obtenue en appliquant un lemme de déformation à la fonction $-f$. En effet, dans les contextes spécifiques, on a en général que les points critiques de f et de $-f$ coïncident et que, si f satisfait les hypothèses du lemme de déformation, $-f$ les satisfait aussi.

Proposition 3.12. *Soit A et P des fermés de X. Supposons que (B, A) enlace (Q, P) avec*

$$\sup f(A) \leq a = \inf f(Q) \leq \sup f(B) = \inf f(P) = b < \infty$$

et $\operatorname{dist}(A, Q) > 0$ *si* $\inf f(Q) = \sup(A)$.

Supposons également que f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$ et $\widehat{\mathscr{D}}(X, K_c)$ pour tout $c \in [a, b]$. Alors $K_b \cap P \neq \emptyset$ ou f-$cat_{X,A}(B) \geq 1$.

Démonstration. Si $K_b \cap P = \emptyset$, il existe un voisinage de K_b tel que $V \cap P = \emptyset$. Puisque f satisfait $\widehat{\mathscr{D}}(X, K_b)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ tels que

$$\eta(\{x \mid f(x) \geq b - \varepsilon\} \setminus V, 1) \subseteq \{x \mid f(x) \geq b + \varepsilon\}$$

avec $\operatorname{dist}(x, \eta(x,t)) \leq \frac{d}{2}$, où $d = \operatorname{dist}(A, Q)$ si $d > 0$. Ainsi, puisque $P \subseteq X \setminus f^{b-\varepsilon}$, on a que $\inf f(\eta(P, 1)) \geq b + \varepsilon$. Considérons $\hat{P} = \eta(P, 1)$ et $\hat{Q} = Q \cup \overline{\eta(P, [0,1])}$. Par construction, (B, A) enlace $(\hat{Q}, \hat{P})$ et

$$\sup f(A) \leq \inf f(\hat{Q}) \leq \sup f(B) < \inf f(\hat{P}).$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 2.32 pour obtenir f-$\mathrm{cat}_{X,A}(B) \geq 1$. ■

Pour le prochain résultat, nous allons considérer des ensembles fermés A et Q tels que $A \cap Q = \emptyset$,

$$\Gamma = \{U \subseteq X | f\text{-}\mathrm{cat}_{X,A}(U) \geq 1, A \subseteq U, (U, A) \text{ enlace } (Q, \emptyset)\} \text{ et}$$

$$c = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U).$$

Remarquons qu'en vertu de la Proposition 2.30, l'ensemble Γ est non-vide lorsqu'on a que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$. En effet, $B \in \Gamma$.

Théorème 3.13. *Supposons que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$ avec*

$$\sup f(A) \leq a = \inf f(Q) \leq \sup f(B) = b < \infty \text{ et } \operatorname{dist}(A, Q) = k > 0.$$

Si f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$, on a que $K_c \neq \emptyset$. De plus, si $c = a$, alors $K_c \cap \overline{Q} \neq \emptyset$.

Démonstration. Premier cas, si $c > a$. Supposons $K_c = \emptyset$. Soit $\overline{\varepsilon}$ tel que $a < c - \overline{\varepsilon} < c$ avec $\overline{\varepsilon} < k$.

Puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$, il existe η et ε tels que

$$\eta(f^{c+\varepsilon}, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$$

Soit $U \in \Gamma$ tel que $\sup f(U) < c + \varepsilon$. On a que $\eta(U, 1) \in \Gamma$. En effet, η garde A fixe, car $\sup f(A) < c - \overline{\varepsilon}$. Ce qui conduit à la contradiction suivante :

$$c \leq \sup f(\eta(U, 1)) \leq c - \varepsilon.$$

Deuxième cas, si $a = c$. Supposons $K_c \cap \overline{Q} = \emptyset$. On a que

$$a = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U) = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U \cap Q)$$

car

$$a = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U) \geq \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U \cap Q) \geq \inf f(Q) = a.$$

Soit $\overline{\varepsilon} < \frac{k}{2}$ tel que $B_{2\overline{\varepsilon}}(K_c) \cap \overline{Q} = \emptyset$.

Puisque f satisfait $\mathscr{D}(X, K_c)$, il existe η et $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$ tel que $\eta(f^{c+\varepsilon} \setminus B_{\overline{\varepsilon}}(K_c), 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}$ et $\operatorname{dist}(\eta(x, t), x) < \overline{\varepsilon}$.

Soit λ la fonction d'Urysohn

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(A). \end{cases}$$

Considérons la nouvelle déformation $\hat{\eta}(x, t) = \eta(x, \lambda(x)t)$. Grâce à la fonction d'Urysohn, $\hat{\eta} \in \mathcal{N}_f(A)$. Donc, $f\text{-cat}_{X,A}(\hat{\eta}(U, 1)) \geq 1$ pour tout $U \in \Gamma$. D'où

$\hat{\eta}(U,1) \in \Gamma$ pour tout $U \in \Gamma$. Soit $U \in \Gamma$ tel que $\sup(U \cap Q) < c + \varepsilon$. Pour tout $x \in U$ tel que $\hat{\eta}(x,1) \in Q$, on a

$$x \in B_{\overline{\varepsilon}}(Q) \Rightarrow \begin{cases} x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(K_c), \\ x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(A). \end{cases}$$

Donc si $x \in B_{\overline{\varepsilon}}(Q)$, on a nécessairement $\lambda(x) = 1$ et $x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(K_c)$ et donc

$$\hat{\eta}(x,1) = \eta(x,1) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$$

On a donc $\sup f(\hat{\eta}(U,1) \cap Q) < c - \varepsilon$ ce qui contredit la définition de c. D'où $K_c \cap Q \neq \emptyset$.

■

3.5. Contextes particuliers

Dans cette section, nous allons présenter différentes notions de points critiques où la théorie présentée s'applique.

3.5.1. Cas classique

Le cas classique est évidemment lorsque nous avons un espace de Banach X et une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note alors $K_c = \{x \in X \mid f'(x) = 0, f(x) = c\}$ l'ensemble des points critiques de niveau c. On pourrait également utiliser cette définition dans le cas où X est une variété de Finsler de classe C^1. Pour garantir que la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$ est vérifiée, nous demanderons que f satisfasse $(PS)_c$, permettant ainsi l'application du Théorème 1.14. Ce théorème implique la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$.

3.5.2. Cas des fonctionnelles continues

Une des notions rencontrées dans la littérature pour développer une théorie des points critiques pour les fonctionnelles qui ne sont pas C^1 est la pente faible. Elle fut introduite par Degiovanni et Marzocchi [20]. Corvellec, Degiovanni et Marzocchi [17] ont montré qui si f satisfait une condition de type Palais-Smale au niveau c, alors f vérifie $\mathscr{D}(X, K_c)$ où K est l'ensemble des points de pente faible nulle.

Le lecteur intéressé à d'autres résultats utilisant la pente faible peut consulter [9, 17, 20].

Rappelons d'abord la définition de pente faible d'une fonction continue. Soit (X, d), un espace métrique.

Définition 3.14. Soit $f : X \to \mathbb{R}$, une fonctionnelle continue. La *pente faible de f au point u*, notée $|df|(u)$, est le supremum des σ dans $[0, +\infty)$ tel qu'il existe un voisinage U de u dans X, $\delta > 0$ et une fonction continue $h : U \times [0, \delta] \to X$ telle que pour tout $v \in U$ et pour tout $t \in [0, \delta]$, on a

(1) $d(h(v,t), v) \leq t$,

(2) $f(h(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

Remarque 3.15. Dans le cas où $f \in C^1$, on a que $|df|(u) = \|f'(u)\|$. Le lecteur intéressé en trouvera la preuve dans [20].

Ainsi, il est naturel de définir les points critiques par

$$K_c = \{x \in X \mid |df|(x) = 0, f(x) = c\}.$$

La condition de Palais-Smale associée est la suivante.

Définition 3.16. Soit (X, d) un espace métrique et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Nous dirons que f *satisfait la condition de Palais-Smale au niveau* c ou plus brièvement $(PS)_c$ si toute suite $(x_n) \subseteq X$ telle que $f(x_n) \to c$ et $|df|(x_n) \to 0$ possède une sous-suite convergente.

Le lemme de déformation dans ce contexte a été obtenu dans [17]. Il nous permet de garantir que la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$ est satisfaite lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées.

Théorème 3.17. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$, une fonction continue et soit $c \in \mathbb{R}$. Supposons que X est complet et que f satisfait $(PS)_c$. Soit $\bar{\varepsilon} > 0$, U un voisinage de K_c et*

$\rho > 0$. *Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et une déformation* $\eta : X \times [0,1] \to X$ *telle que pour tout* $x \in X$ *et* $t \in [0,1]$, *on a*

(1) $d(\eta(x,t), x) \leq \rho$;

(2) $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$;

(3) $f(x) \notin]c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}[\Rightarrow \eta(x,t) = x$;

(4) $x \in f^{c+\varepsilon} \Rightarrow \eta(x,1) \in f^{c-\varepsilon} \cup U$.

L'approche axiomatique favorisée tout au cours du travail permet donc d'adapter les théorèmes à plusieurs contextes. En effet, bien que ces différentes théories des points critiques soient assez différentes au niveau des définitions, les lemmes de déformations abouttissent essentiellement aux mêmes conclusions. C'est en utilisant ces similitudes que nous avons pu obtenir une approche unificatrice et ainsi garantir l'existence de points critiques dans tous ces contextes.

Chapitre 4

f-CATÉGORIE LIMITE

4.1. Théorie abstraite

Soit X un espace métrique et une famille (X_n) de sous-espaces de X tels que

$$X = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_n} \quad \text{et} \quad X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$$

et tels que pour tout n, il existe une rétraction $r_n : X \longrightarrow X_n$ continue.Soient A, Y deux sous-ensembles de X avec Y fermé et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Posons $A_n = A \cap X_n$, $Y_n = Y \cap X_n$ et $f_n := f|_{X_n}$, la restriction de f à X_n. Remarquons que si X est localement contractile, alors X_n l'est aussi.

Définition 4.1. Dans ce contexte, la *f-catégorie relative limite de A dans X relativement à Y*, notée $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(A)$, est définie par

$$f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \to \infty} n^{f_n}_{\varepsilon}(A_n, X_n, Y_n).$$

Nous noterons $f\text{-cat}^{\infty}_{X}(A) := f\text{-cat}^{\infty}_{X,\emptyset}(A)$.

Remarque 4.2. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout ε, il existe N_ε tel que pour tout $m \geq N_\varepsilon$,

$$n^{f_m}_{\varepsilon}(B_m, X_m, Y_m) \leq M,$$

alors $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(B) \leq M$. De plus, s'il existe $\varepsilon > 0$, $M', N \in \mathbb{N}$ tels que

$$n^{f_n}_{\varepsilon}(B_n, X_n, Y_n) \geq M'$$

pour tout $n \geq N$, alors $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(B) \geq M'$.

Proposition 4.3. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et soient $A, Y \subseteq X$, deux fermés. Alors $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) = k \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $\bar{\varepsilon}$ et (m_i) tels que $\forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}$,*

(1) *$n_{\varepsilon}^{f_{m_i}}(A_{m_i}, X_{m_i}, Y_{m_i}) \to k$ quand $m_i \to \infty$;*

(2) *il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $n_{\varepsilon}^{f_n}(A_n, X_n, Y_n) \leq k$.*

Démonstration. On a que $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(A) = k \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$,

$$\limsup_{n\to\infty} n_{\varepsilon}^{f_m}(A_n, X_n, Y_n) = \limsup_{n\to\infty} n_{\bar{\varepsilon}}^{f_n}(A_n, X_n, Y_n) = k.$$

Donc, il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $\sup_{m\geq n} n_{\varepsilon}^{f_m}(A_m, X_m, Y_m) = k$, car $n_{\varepsilon}^{f_m}(A_m, X_m, Y_m) \in \mathbb{N}$. D'autre part, il existe une suite (m_i) telle que

$$n_{\bar{\varepsilon}}^{f_{m_i}}(A_{m_i}, X_{m_i}, Y_{m_i}) \to k.$$

Or $n_{\bar{\varepsilon}}^{f_{m_i}}(A_{m_i}, X_{m_i}, Y_{m_i}) \leq n_{\varepsilon}^{f_{m_i}}(A_{m_i}, X_{m_i}, Y_{m_i}) = k$ pour tout $m_i \geq N_\varepsilon$. ■

Théorème 4.4. *Soit A, B, Y des sous-ensembles de X avec Y fermé. Alors la f-catégorie relative limite satisfait les propriétés suivantes :*

(a) $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(Y) = 0$;

(b) si $A \subseteq B$ alors $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(B)$;

(c) $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A \cup B) \leq f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) + f\text{-}cat^{\infty}_{X}(B)$;

(d) si, pour tout $n > M$, il existe une déformation

$$\eta_n : (X_n, Y_n) \times [0,1] \longrightarrow (X_n, Y_n)$$

telle que $f(\eta_n(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta_n(A_n, 1) \subseteq B_n$, alors $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) \leq f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(B)$;

(e) si (X', Y') sont des sous-ensembles fermés de (X, Y) et que pour tout $n > M$, il existe une rétraction $r_n : (X_n, Y_n) \to (X'_n, Y'_n)$ telles que $f_n(r_n(x)) \leq f_n(x)$ pour tout $x \in X_n$, alors $f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) \geq f\text{-}cat^{\infty}_{X',Y'}(A')$ dès que $A' \subseteq A \cap X'$.

Démonstration. Étant donné la Définition 4.1, il suffit d'utiliser le Lemme 2.24 pour obtenir les résultats.

■

Proposition 4.5. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient $Y' \subseteq Y$. Supposons que pour toute famille de déformations $\{\eta_m : X_m \times [0,1] \to X_m\}$ satisfaisant $f(\eta_m(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in X_m \times [0,1]$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > M$, on a $\eta_m(Y_m, t) \subseteq Y_m$ alors pour tout sous-ensemble B de X,*

$$f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(B) \leq f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y'}(B).$$

Démonstration. Supposons que $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y'}(B) = k < \infty$. il existe donc $\bar{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, il existe N_ε avec $\forall m > N_\varepsilon$, $n^{f_m}_{\varepsilon}(B_m, X_m, Y'_m) \leq k$. Soit $N'_\varepsilon = \max\{M, N_\varepsilon\}$. Pour tout $m > N'_\varepsilon$, par le même argument que dans la preuve de la Proposition 2.28, on a que $n^{f_m}_{\varepsilon}(B_m, X_m, Y_m) \leq n^{f_m}_{\varepsilon}(B_m, X_m, Y'_m) \leq k$. Par la Remarque 4.2, on obtient $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(B) \leq k$. ■

Nous pouvons également adapter la preuve de la Proposition 2.27 pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Soit des fermés Y, X', Y' de X tels que $(X', Y') \subseteq (X, Y)$. Supposons qu'il existe M tel que pour tout $n \geq M$, (X'_n, Y'_n) est un rétracte de déformation de (X_n, Y_n) compatible avec f c'est-à-dire qu'il existe une déformation $\eta_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que*

$$(\eta_n(X_n, 1), \eta_n(Y,1)) = (X'_n, Y'_n),$$

$\eta_n(x,t) = x$ pour tout $x \in X'_n$ et $f_n(\eta_n(x,t) \leq f_n(x)$, alors

$$f\text{-}cat^{\infty}_{X,Y}(A) = f\text{-}cat^{\infty}_{X',Y'}(A \cap X')$$

pour tout $A \subseteq X$ tel que $\eta_n(A_n, 1) \subseteq A_n$ pour tout $n \geq M$.

Comme dans le cas de la f-catégorie relative, la f-catégorie limite relative nous permet de donner une borne inférieure au nombre de points critiques de la fonctionnelle.

Nous devons évidemment introduire le pendant de la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$ pour ce contexte.

Définition 4.7. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Nous dirons que f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon}$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de K_c, il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, il existe une déformation $\eta_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que

(1) $\eta_n(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in X_n \times \{0\} \cup f_n^{c-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$,

(2) $f_n(\eta_n(x,t)) \leq f_n(x,t)$ pour tout $(x,t) \in X_n \times [0,1]$,

(3) $\eta_n(f_n^{c+\varepsilon} \setminus \mathscr{V}, 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon}$.

Encore une fois, on peut déduire un résultat de déformation d'intervalle non critique de cette propriété de déformation.

Proposition 4.8. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $a < b \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $c \in [a,b]$, $K_c = \emptyset$ et que f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe une famille de déformations $\eta_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que*

(1) $\eta_n(f_n^b, 1) \subseteq f_n^a$;

(2) $\eta_n(f_n^a, t) \subseteq f_n^a$ pour tout $t \in [0,1]$;

(3) $\eta_n(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in f_n^{a-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$;

(4) $f(\eta_n(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in X_n \times [0,1]$.

Démonstration. Soit $c \in [a,b]$. Puisque f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, il existe N_c et $\varepsilon_c < \bar{\varepsilon}$ tels que pour tout $n \geq N_c$, il existe $\eta_n^c : X_n \times [0,1] \to X_n$ tel que $\eta_n^c(f(x,t)) \leq f(x)$, $\eta_n^c(f_n^{c+\varepsilon_c}, 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon_c}$. De plus, on a que $\eta_n^c(x,t) = x$ pour tout $x \in c - \bar{\varepsilon}$. Puisque $[a,b]$ est compact et que $\{(c-\varepsilon_c, c+\varepsilon_c)\}_{c\in[a,b]}$ forme un recouvrement ouvert de $[a,b]$, il existe un sous-recouvrement fini. Donc, il existe

$c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{c_i}$, $N = \max\{N_{c_1}, \ldots, N_{c_k}\}$ tels que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i).$$

Pour $n \geq N$, notons également η_n^i la déformation correspondant à c_i. Donc, on a que $c_1 - \varepsilon_1 < a$, $c_j - \varepsilon_j < c_{j-1} + \varepsilon_{j-1}$ et $b < c_k + \varepsilon_k$. Considérons $\eta_n = \eta_n^1 * \eta_n^2 * \ldots * \eta_n^k$. Puisque $f_n^{c_{j+1}-\varepsilon_{j+1}} \subseteq f_n^{c_j+\varepsilon_j}$ et que $\eta_n^j(f_n^{c_j+\varepsilon_j}, 1) \subseteq f_n^{c_j-\varepsilon_i}$, on obtient que $\eta_n^j(f_n^{c_{j+1}-\varepsilon_{j+1}}, 1) \subseteq f_n^{c_j-\varepsilon_j}$. D'où $\eta_n(f_n^b, 1) \subseteq f_n^a$. Finalement, puisque $f(\eta_n^i(x,t)) \leq f(x)$ pour chaque i, il est clair que $f(\eta_n(x,t)) \leq f(x)$ et que $\eta(f_n^a, t) \subseteq f_n^a$. ■

Pour la suite, nous allons poser

$$\Gamma_i = \left\{ U \subseteq X \,|\, f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}^{\infty}(U) \geq i \right\},$$

$$c_i = \inf_{U \in \Gamma_i} \sup f(U).$$

Nous pourrons ainsi relier les points critiques à la catégorie limite.

Proposition 4.9. *Soit $f \in C(X,\mathbb{R})$ avec X localement contractile. Supposons que*

$$c_{j+1} = \ldots = c_{j+m} \equiv c.$$

Si c n'est pas un point d'accumulation de K, que $\sup f(Y) < c$ et que f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$ alors $\operatorname{card}(K_c) \geq m$.

Démonstration. Supposons le contraire c'est-à-dire

$$\operatorname{card} K_c = p < m. \tag{4.1}$$

Puisque c n'est pas un point d'accumulation de K, il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que

$$[c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}] \setminus \{c\}$$

ne contient pas de valeur critique et $Y \subseteq f^{c-\bar{\varepsilon}}$. Il existe $U \subseteq f^{c+\bar{\varepsilon}}$ tel que $U \in \Gamma_{j+m}$. On a donc $f\text{-}\mathrm{cat}_{X,Y}^{\infty}(U) \geq j+m$. Il existe donc $\hat{\varepsilon}$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} n_{\varepsilon}^{f_n}(U_n, X_n, Y_n) \geq j+m$$

pour tout $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$.

Soit $\delta < \hat{\varepsilon}$. Puisque X est localement contractile et que f est continue, pour tout $y \in K_c$, il existe un voisinage fermé V_y de y qui est (f, δ)-contractile. De plus, il est possible de prendre les V_y de telle sorte que si $X_n \cap V_y \neq \emptyset$, alors $V_y \cap X_n$ est (f, δ)-contractile dans X_n, c'est-à-dire qu'il existe une déformation $\tilde{\eta}_n^y : V_y \cap X_n \times [0,1] \to X_n$ avec $\tilde{\eta}_n^y(V_y \cap X_n, 1) = z_{y,n}^* \in V_y \cap X_n$ et $f(\tilde{\eta}_n^y(x,t)) \leq f(x) + \delta$.

Donc,

$$n_\delta^{f_n}(V_y \cap X_n, X_n, Y_n) \leq 1 \text{ pour tout } y \in K_c. \tag{4.2}$$

Soit $V = \bigcup_{y \in K_c} V_y$. Puisque f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_1$, il existe $\tilde{\eta}_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ satisfaisant

$$\tilde{\eta}_n(f_n^{c+\varepsilon} \setminus V, 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon}, \tag{4.3}$$

$$f_n(\tilde{\eta}_n(x,t)) \leq f_n(x), \tag{4.4}$$

$$\tilde{\eta}_n(x,t) = x \quad \forall (x,t) \in X_n \times \{0\} \cup Y_n \times [0,1], \tag{4.5}$$

car $Y_n \subseteq f_n^{c-\bar{\varepsilon}}$.

Notons $n_\delta^{f_n}(f_n^{c-\varepsilon}, X_n, Y_n) = r_n$. Si $r_n < \infty$, on peut écrire

$$f_n^{c-\varepsilon} = A_0^n \cup A_1^n \cup \ldots \cup A_{r_n}^n$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta_0 &: X_n \times [0,1] \to X_n & \eta_0(A_0^n, 1) &\subseteq Y_n,\\
\eta_1 &: A_1^n \times [0,1] \to X_n & \eta_1(A_1^n, 1) &= \bar{y}_{1,n},\\
&\vdots & &\vdots\\
\eta_{r_n} &: A_{r_n}^n \times [0,1] \to X_n & \eta_{r_n}(A_r^n, 1) &= \bar{y}_{r_n,n}.
\end{aligned}$$

Pour $n \geq N_1$, posons $g_n(x) = \tilde{\eta}_n(x,1)$. Considérons

$$\mathcal{O}_i^n = g_n^{-1}(A_i^n), \quad i = 0, \ldots, r_n.$$

Par (4.3), on a que $f_n^{c+\varepsilon} \setminus V \subseteq \mathcal{O}_0^n \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{r_n}^n$. Les ensembles

$$\{\mathcal{O}_i^n \mid i = 0, \ldots, r_n\} \cup \{V_y \mid y \in K_c\}$$

forment un recouvrement de $f_n^{c+\varepsilon}$, nous obtenons grâce aux inégalités (4.1) et (4.2) que

$$n_\delta^{f_n}(f_n^{c+\varepsilon}, X_n, Y_n) \leq n_\delta^{f_n}(f_n^{c+\varepsilon} \setminus V, X_n, Y_n) + n_\delta^{f_n}(V, X_n, Y_n) \leq r_n + p. \tag{4.6}$$

Puisque $[c+\varepsilon, c+\bar{\varepsilon}]$ ne contient pas de valeurs critiques, par la Proposition 4.8, il existe $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$, il existe $\bar{\eta}_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ satisfaisant

$$f_n(\bar{\eta}_n(x,t)) \leq f(x) \tag{4.7}$$

$$\bar{\eta}_n(f_n^{c+\bar{\varepsilon}}, 1) \subseteq f_n^{c+\varepsilon} \tag{4.8}$$

Le Lemme 2.24(2)(5) implique $n_\delta^{f_n}(f_n^{c+\bar{\varepsilon}}, X_n, Y_n) \leq n_\delta^{f_n}(f_n^{c+\varepsilon}, X_n, Y_n)$ pour tout $n \geq N_2$. En particulier, puisque $U \subseteq f^{c+\bar{\varepsilon}}$, il découle de l'équation (4.6) que

$$n_\delta^{f_n}(U_n, X_n, Y_n) \leq r_n + p = n_\delta^{f_n}(f_n^{c-\varepsilon}, X_n, Y_n) + p$$

pour tout $n \geq N_2$. On déduit que

$$j + m \leq \limsup_{n\to\infty} n_\delta^{f_n}(U_n, X_n, Y_n) \leq p + \limsup_{n\to\infty} n_\delta^{f_n}(f_n^{c-\varepsilon}, X_n, Y_n)$$

pour tout $\delta < \hat{\varepsilon}$.

L'inégalité (4.1) implique que $f\text{-cat}_{X,Y}^\infty(f^{c-\varepsilon}) \geq j+1$ c'est-à-dire $f^{c-\varepsilon} \in \Gamma_{j+1}$ et donc $c \leq c - \varepsilon$ qui est clairement une contradiction. ■

Théorème 4.10. *Supposons que X est localement contractile et que $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $a < b \in \mathbb{R}$ et $B \subseteq f^b$ tels que*

$$f\text{-}cat_{X,f^a}^\infty(B) = k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Si f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$ pour tout $c \in [a,b]$, alors f possède au moins k points critiques dans $f^{-1}[a,b]$.

DÉMONSTRATION. Supposons que le nombre de points critiques dans $f^{-1}[a,b]$ soit fini. Dans le cas contraire, la conclusion est déjà vérifiée. Posons

$$\mathcal{I} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq f\text{-cat}^{\infty}_{X,f^a}(B)\}.$$

Puisque $f\text{-cat}^{\infty}_{X,f^a}(f^a) = 0$, on a que $f\text{-cat}^{\infty}_{X,f^a}(U) \geq 1$ entraîne que $\sup f(U) > a$. De plus, puisque $B \subseteq f^b$ et que $B \in \Gamma_j$ pour $j \in \mathcal{I}$, on a que $c_j \leq b$ pour $j \in \mathcal{I}$.

Si $c_1 = \ldots = c_p = a$ pour un $p \in \mathcal{I}$ alors $\operatorname{card} K_a \geq p$. En effet, supposons que $\operatorname{card} K_a = j < p$. Il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $[a, a+\bar{\varepsilon}]$ ne contient que a comme valeur critique. Puisque $c_1 = \ldots = c_p$, il existe U tel que

$$f\text{-cat}^{\infty}_{X,f^a}(U) \geq p \text{ et } \sup f(U) < a + \bar{\varepsilon}.$$

Il existe $\hat{\varepsilon}$ tel que pour tout $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$, $\limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\varepsilon}(U_n, X_n, Y_n) \geq p$. Soit $\delta < \hat{\varepsilon}$. Puisque f est continue et que X est localement contractile, pour tout $y \in K_c$, il existe un voisinage V_y de y qui est (f,δ)-contractile.

Posons $V = \bigcup_{y \in K_a} V_y$. Puisque $\operatorname{card} K_a = j$ et que pour tout $y \in K_a$, V_y est (f,δ)-contractile, on a que $n^{f_n}_{\delta}(V \cap X_n, X_n, Y_n) \leq j$.

Puisque f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, il existe N et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \geq N$, il existe une déformation $\eta_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que $\eta_n(f^a_n, t) \subseteq f^a$ et $\eta_n(f^{a+\varepsilon} \setminus V, 1) \subseteq f^a$. Puisque $[a+\varepsilon, a+\bar{\varepsilon}]$ ne contient pas de points critiques, il existe $N_1 \geq N$ tel que pour tout $n \geq N_1$, il existe une autre déformation $\tilde{\eta}_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que $\tilde{\eta}_n(f^a_n, t) \subseteq f^a_n$ et $\tilde{\eta}_n(f^{a+\bar{\varepsilon}}_n, 1) \subseteq f^{a+\varepsilon}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\delta}(U_n, X_n, f^a_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\delta}(U_n \setminus V, X_n, f^a_n) + \limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\delta}(V \cap X_n, X_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\delta}(f^a_n, X_n, f^a_n) + \limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\delta}(V \cap X_n, X_n) \\
&< p.
\end{aligned}$$

Contradiction.

Si $c_{j+1} = b$, puisque $f\text{-cat}^{\infty}_{X,Y}(B) = k$ et $B \subseteq f^b$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq k - j$, on a en fait $c = c_{j+1} = \ldots = c_{j+p}$. Supposons que $\operatorname{card} K_c = m < p$. Comme précédemment, on peut remarquer que $f^b \in \Gamma_{j+p}$. Puisque $f\text{-cat}^{\infty}_{X,f^a}(f^b) = k \geq j + p$, il existe ε' tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon'$, $\limsup_{n\to\infty} n^{f_n}_{\varepsilon}(f^b_n, X_n, f^a_n) \geq j + p$. Soit $\delta < \varepsilon'$. Par continuité et puisque l'espace est localement contractile, pour $y \in K_c$, il existe encore un voisinage V_y qui est (f,δ)-contractile. En posant encore une fois $V = \bigcup_{y\in K_c} V_y$, il existe $\varepsilon > 0$ et N tels que pour tout $n \geq N$, il existe une déformation $\eta_n : X_n \times [0,1] \to X_n$ telle que $f(\eta_n(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta_n(f_n^b \setminus V, 1) \subseteq f_n^{b-\varepsilon}$. En utilisant les mêmes arguments, on aboutit à une contradiction.

Finalement, si on a que $c_j \in]a,b[$, il suffit d'appliquer la Proposition 4.9 pour avoir la conclusion. ■

Pour ce qui suit, nous allons nous mettre dans la même situation que pour la Conjecture 2.38. Soit $X = X_1 \oplus X_2$ un espace de Banach et V une variété riemannienne compacte. Lorsque X_n est de dimension finie pour tout n, nous avons une situation d'enlacement du type $((B_1 \cap X_n) \times V, (S_1 \cap X_n) \times V)$ enlace $((B_2 \cap X_n) \times V, (S_2 \cap X_n) \times V)$ pour tout n. Si

$$\sup f(S_1 \times V) < a < \inf f(B_2 \times V) \leq \sup f(B_1 \times V) < \inf f(S_2 \times V)$$

et que l'inégalité (2.1) est vérifiée, nous pourrons déduire l'existence de

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{cat}_{(B_1\cap X_n)\times V,(S_1\cap X_n)\times V}((B_1 \cap X_n) \times V)$$

points critiques.

Théorème 4.11. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$, un espace de Banach et soit*

$$(X_n) = (X_{n,1} \oplus X_{n,2})$$

une famille de sous-espaces de dimension finie telle que $X = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_n}$. Posons $M_n = (B_1 \cap X_n)$ et $Y_n = (S_1 \cap X_n)$. Soit V une variété riemannienne compacte. Soit $f : X \times V \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que l'inégalité (2.1) est vérifiée et que

$$\sup f(S_1 \times V) < a < \inf f(B_2 \times V) \leq \sup f(B_1 \times V) < b < \inf f(S_2 \times V)$$

alors

$$f\text{-}cat^{\infty}_{X\times V,f^a}(B_1 \times V) \geq \limsup_{n\to\infty} cat_{M_n\times V,Y_n\times V}(M_n \times V).$$

Démonstration. Si $f\text{-cat}^{\infty}_{X\times V, f^a}(B_1 \times V) < \infty$, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$,

$$\limsup_{n\to\infty} n_{\varepsilon}^{f_n}(M_n \times V, X_n \times V, f^a \cap (X_n \times V)) = k.$$

En utilisant l'inégalité (2.1), on montre

$$n_{\varepsilon}^{f_n}(M_n \times V, X_n \times V, f^a \cap (X_n \times V)) \geq \text{cat}_{M_n\times V, Y_n \times V}(M_n \times V).$$

D'où la conclusion. ■

Finalement, pour le prochain résultat, nous allons considérer des enlacements (B_n, A_n) avec (Q_n, P_n) dans X_n pour n assez grand. Notons

$$\begin{aligned}\Gamma = \{U \subseteq X | f\text{-cat}^{\infty}_{X,A}(U) \geq 1, A \subseteq U, \\ (U \cap X_n, A \cap X_n) \text{ enlace } (Q, P) \text{ via } \mathcal{N}_f(A) \text{ pour } n \text{ assez grand}\}\end{aligned}$$

et

$$c = \inf_{U\in\Gamma} \sup f(U).$$

Théorème 4.12. *Supposons que $(B \cap X_n, A \cap X_n)$ enlace $(Q \cap X_n, P \cap X_n)$ dans X_n avec*

$$\sup f(A) \leq a = \inf f(Q) \leq \sup f(B) = b < \inf f(P),$$

avec $\text{dist}(A, Q) > 0$ si $\sup f(A) = a$. Si f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, on a que $K_c \neq \emptyset$. De plus, si $c = a$, alors $K_c \cap \overline{Q} \neq \emptyset$.

Démonstration. Premier cas, si $c > a$. Supposons $K_c = \emptyset$. Soit $\bar{\varepsilon}$ tel que $a < c - \bar{\varepsilon} < c + \bar{\varepsilon} < \inf f(P)$.

Puisque f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et N tels que pour tout $n > N$, il existe η_n tel que

$$\eta_n(f_n^{c+\varepsilon}, 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon}.$$

Soit $U \in \Gamma$ tel que $\sup f(U) < c+\varepsilon$. Remarquons que puisque pour n assez grand (U_n, A_n) enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_f(A_n)$, $(\eta_n(U_n, 1), A_n)$ enlace aussi (Q, P) et donc

$(f_n^{c-\varepsilon}, A_n)$ enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_f(A_n)$. De plus, en vertu du Théorème 4.4,

$$1 \leq f\text{-}\mathrm{cat}^{\infty}_{X,A}(U) \leq f\text{-}\mathrm{cat}^{\infty}_{X,A}(f^{c+\varepsilon}) \leq f\text{-}\mathrm{cat}^{\infty}_{X,A}(f^{c-\varepsilon}).$$

Donc $f^{c-\varepsilon} \in \Gamma$, ce qui est contradictoire.

Deuxième cas, si $a = c$. Supposons $K_c \cap \overline{Q} = \emptyset$. On a que

$$a = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U) = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U \cap Q)$$

car

$$a = \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U) \geq \inf_{U \in \Gamma} \sup f(U \cap Q) \geq \inf f(Q) = a.$$

Soit $\overline{\varepsilon} < \frac{\mathrm{dist}(A,Q)}{2}$ tel que $B_{2\overline{\varepsilon}}(K_c) \cap \overline{Q} = \emptyset$.

Puisque f satisfait $\mathscr{D}^*(X, K_c)$, il existe $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$ et N tels que pour tout $n \geq N$, il existe η_n tel que $\eta_n(f_n^{c+\varepsilon} \setminus B_{\overline{\varepsilon}}(K_c), 1) \subseteq f_n^{c-\varepsilon}$ et $\mathrm{dist}(\eta_n(x,t), x) < \overline{\varepsilon}$.

Soit λ la fonction d'Urysohn

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ 1 & x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(A). \end{cases}$$

Considérons la nouvelle déformation $\hat{\eta}_n(x,t) = \eta_n(x, \lambda(x)t)$. Grâce à la fonction d'Urysohn, $\hat{\eta}_n \in \mathscr{N}_{f_n}(A)$. Comme précédemment, on trouve que si $U \in \Gamma \cap f^{c+\varepsilon}$, pour n assez grand, $(\hat{\eta}_n(U_n, 1), A_n)$ enlace (Q, P) via $\mathcal{N}_f(A_n)$. Or, par construction, $\hat{\eta}_n(U_n, 1) \cap Q = \emptyset$. En effet, pour tout $x \in U$ tel que $\hat{\eta}_n(x, 1) \in Q$ pour un certain n, on a

$$x \in B_{\overline{\varepsilon}}(Q) \Rightarrow \begin{cases} x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(K_c), \\ x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(A). \end{cases}$$

Donc si $x \in B_{\overline{\varepsilon}}(Q)$, on a nécessairement $\lambda(x) = 1$ et $x \notin B_{\overline{\varepsilon}}(K_c)$ et donc

$$\hat{\eta}_n(x, 1) = \eta_n(x, 1) \subseteq f^{c-\varepsilon}.$$

On a donc $\sup(\hat{\eta}_n(U_n, 1) \cap Q) < c - \varepsilon$, ce qui est contradictoire. ■

Le résultat précédent va en général s'appliquer dans le cas où $A = f^a$ pour un certain niveau a. On pourrait également trouver des bornes intéressantes sur les points critiques lorsque nous sommes dans le contexte de la Proposition 4.5, c'est-à-dire lorsque $f^a \subseteq A$ et que $\eta_n(A_n, t) \subseteq A_n$ pour toute famille de déformations

$\{\eta_n\}$ satisfaisant $f(\eta_m(x,t)) \leq f(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$. Pour plus de détails sur un argument de ce type, le lecteur pourra consulter [59].

4.2. Cas particulier

Soit X un espace de Banach et une famille (X_n) de sous-espaces fermés de X telle que

$$X = \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_n} \quad \text{et} \quad X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$$

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Si f satisfait la condition $(PS)_c^*$, par le Théorème 1.18, f satisfait la condition $\mathscr{D}^*(X, K_c)$. De plus, puisque nous sommes dans un espace de Banach, X est localement contractile. Nous pouvons donc appliquer la f-catégorie limite dans ce contexte.

Chapitre 5

THÉORIE DES POINTS ASYMPTOTIQUEMENT CRITIQUES

La notion de point asymptotiquement critique a été introduite en 2001 par Marino et Mugnai [41] dans le but d'aborder les problèmes de rebonds élastiques avec une approche variationnelle. Contrairement au Chapitre 4, la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$ n'est pas nécessairement la restriction d'une fonctionnelle h à un sous-espace de X. Nous imposons cependant aux fonctionnelles $(h_n)_n$ d'être définies sur le même espace que h. Le rôle de la fonctionnelle h est très limité puisque nous nous intéressons principalement au comportement asymptotique de la suite des fonctionnelles $(h_n)_n$. En fait, la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$ pourrait ne pas converger vers h.

5.1. Théorie abstraite

5.1.1. Définitions

Soit $(h_n)_n$ une suite de fonctionnelles définies sur un espace métrique X et considérons une fonctionnelle $h : X \to \mathbb{R}$. Supposons que les fonctionnelles h_n sont continues. Nous allons encore une fois adopter une approche abstraite pour dégager les caractéristiques essentielles de la théorie. Ainsi, pour $c \in \mathbb{R}$, soit AK_c un compact de X que nous appellerons l'ensemble des *points critiques asymptotiques de niveau c pour le couple* $((h_n), h)$. Nous noterons $AK = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} AK_c$.

Définition 5.1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $h : X \to \mathbb{R}$ et une famille $h_n : X \to \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{H} = ((h_n)_n, h)$. Nous dirons que $\mathcal{H}$ satisfait $\mathscr{D}^*(X, AK_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon}$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de AK_c, il existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, il existe une déformation $\eta_n : X \times [0,1] \to X$ telle que

(1) $\eta_n(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in X \times \{0\} \cup h_n^{c-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$,

(2) $h_n(\eta_n(x,t)) \leq h_n(x,t)$ pour tout $(x,t) \in X \times [0,1]$,

(3) $\eta_n(h_n^{c+\varepsilon} \setminus \mathscr{V}, 1) \subseteq h_n^{c-\varepsilon}$.

En utilisant les mêmes idées que pour la preuve de la Proposition 4.8, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Soient $h_n, h : X \to \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $a < b \in \mathbb{R}$ et posons $\mathcal{H} = ((h_n)_n, h)$. Supposons que pour tout $c \in [a,b]$, $AK_c = \emptyset$ et que $\mathcal{H}$ satisfait $\mathscr{D}^*(X, AK_c)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe une famille de déformations $\eta_n : X \times [0,1] \to X$ telle que*

(1) $\eta_n(h_n^b, 1) \subseteq h_n^a$;

(2) $\eta_n(h_n^a, t) \subseteq h_n^a$ *pour tout* $t \in [0,1]$;

(3) $\eta_n(x,t) = x$ *pour tout* $(x,t) \in h_n^{a-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$;

(4) $h_n(\eta_n(x,t)) \leq h_n(x)$ *pour tout* $(x,t) \in X \times [0,1]$.

5.1.2. La $\mathcal{H}$-catégorie

Nous allons étendre la définition de catégorie au contexte asymptotique en s'inspirant de ce qui à été fait au Chapitre 4. Puisque la définition est très proche de la f-catégorie limite, plusieurs résultats resteront vraies dans ce contexte.

Définition 5.3. Soient $\mathcal{A} = (A_n)_n$ et $\mathcal{Y} = (Y_n)_n$, deux familles d'ensembles fermés de X et $\mathcal{H} = ((h_n)_n, h)$. La *$\mathcal{H}$-catégorie asymptotique relative de $\mathcal{A}$ dans X relativement à $\mathcal{Y}$*, notée $\mathcal{H}\text{-cat}^{\infty}_{X,\mathcal{Y}}(\mathcal{A})$, est définie par

$$\mathcal{H}\text{-cat}^{\infty}_{X,\mathcal{Y}}(\mathcal{A}) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} n_\varepsilon^{h_n}(A_n, X, Y_n)$$

où $n_\varepsilon^{h_n}$ est défini à la Définition 2.19.

Remarque 5.4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout ε, il existe N_ε tel que pour tout $m \geq N_\varepsilon$,

$$n_\varepsilon^{h_m}(A_m, X, Y_m) \leq M,$$

alors $\mathcal{H}\text{-cat}_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{A}) \leq M$.

Théorème 5.5. *Soit $\mathcal{A} = (A_n), \mathcal{B} = (B_n), \mathcal{Y} = (Y_n)$ des suites de sous-ensembles de X et $M \in \mathbb{N}$. Alors la $\mathcal{H}$-catégorie asymptotique relative satisfait les propriétés suivantes :*

(a) $\mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{Y}) = 0$;

(b) *si pour tout $n > M$, $A_n \subseteq B_n$ alors $\mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{A}) \leq \mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{B})$;*

(c) $\mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq \mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{A}) + \mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{B})$;

(d) *si, pour tout $n > M$, il existe une déformation*

$$\eta_n : (X_n, Y_n) \times [0,1] \longrightarrow (X_n, Y_n)$$

telle que $f(\eta_n(x,t)) \leq f(x)$ et $\eta_n(A_n, 1) \subseteq B_n$, alors $\mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{A}) \leq \mathcal{H}\text{-}cat_{X,\mathcal{Y}}^\infty(\mathcal{B})$.

Nous devrons remplacer le fait que X est localement contractile par une condition sur la famille de fonctionnelles qui permettra d'avoir un équivalent du Lemme 3.2 dans ce contexte.

Ainsi, nous dirons que $\mathcal{H}$ satisfait $(\mathscr{C})$ si la condition suivante est vérifiée.

$(\mathscr{C})$ Pour tout $u \in AK$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V un voisinage de u et N_ε tel que V est (h_n, ε)-contractile dans X pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

Ainsi, nous avons tous les ingrédients pour relier la $\mathcal{H}$-catégorie avec les points asymptotiquement critiques du couple $((h_n)_n, h)$. Auparavant, nous aurons besoin d'un théorème. Pour $a \in \mathbb{R}$, nous noterons $\mathcal{H}^a = (h_n^a)_n$.

Théorème 5.6. *Soient a et b, des nombres réels tels que $a \leq b$ et soient $c_1, \ldots, c_k$ les seuls niveaux critiques de $((h_n)_n, h)$ dans $[a,b]$ où $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leq b$. Supposons que $\mathcal{H}$ satisfait $(\mathscr{C})$ et $\mathscr{D}^*(X, AK_c)$ pour tout $c \in [a,b]$. Alors*

$$\mathcal{H}\text{-}cat^{\infty}_{X,\mathcal{H}^a}(\mathcal{H}^b) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} AK_{c_i}.$$

Démonstration. Supposons que $k < \infty$ et $\operatorname{card} AK_{c_i} < \infty$ pour tout i. Dans le cas contraire, la conclusion est trivialement vérifiée. Considérons

$$a = a_1 \leq c_1 < a_2 < c_2 \ldots < c_k \leq a_{k+1} = b.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la condition $(\mathscr{C})$ est satisfaite, pour chaque $y \in AK_c$, il existe N_ε et V_y un voisinage de y qui est (h_n, ε)-contractile pour tout $n \geq N_\varepsilon$. Puisque qu'on a que AK_{c_i} est fini, on peut choisir N_ε qui fonctionne pour chaque $y \in AK_{c_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Considérons $V_1 = \bigcup_{y \in AK_{c_1}} V_y$. Puisque $\mathcal{H}$ satisfait $\mathscr{D}^*(X, AK_{c_1})$, il existe $N_1 > N_\varepsilon$ et $\tilde{\varepsilon}$ avec $c_1 + \tilde{\varepsilon} < a_2$ tels que pour tout $n \geq N_1$, il existe une déformation $\eta_n : X \times [0,1] \to X$ telle que $h_n(\eta_n(x,t)) \leq h_n(x)$ et $\eta_n(h_n^{c_1+\tilde{\varepsilon}} \setminus V_1, 1) \subseteq h_n^{c_1-\tilde{\varepsilon}}$. Puisque $h_n(\eta_n(x,t)) \leq h_n(x)$, on a que $\eta_n(h_n^a, t) \subseteq h_n^a$ et donc, par le Lemme 2.24,(3) et (5), on a que

$$n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{c_1+\tilde{\varepsilon}}, X, h_n^a) \leq n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{c_1-\tilde{\varepsilon}}, X, h_n^a) + n_\varepsilon^{h_n}(V_1, X). \tag{5.1}$$

Soit $c_1 - \tilde{\varepsilon} < a$ ou alors il n'y a pas de valeurs asymptotiquement critiques entre a et $c_1 - \tilde{\varepsilon}$. Puisqu'il n'y a pas non plus de valeurs asymptotiquement critiques entre $c_1 + \tilde{\varepsilon}$ et a_2, par la Proposition 5.2 et l'équation (5.1), on obtient

$$n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{a_2}, X, h_n^a) \leq n_\varepsilon^{h_n}(h_n^a, X, h_n^a) + n_\varepsilon^{h_n}(V_1, X) \leq \operatorname{card} K_{c_1}. \tag{5.2}$$

Par la même argumentation que plus haut, il existe N_2 tel que pour tout $n > N_2$, on obtient que

$$n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{a_3}, X, h_n^a) \leq n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{a_2}, X, h_n^a) + \operatorname{card} K_{c_2} \leq \operatorname{card} K_{c_1} + \operatorname{card} K_{c_2}. \tag{5.3}$$

On répète l'argument k fois pour obtenir que pour tout $n > N_k$

$$n_\varepsilon^{h_n}(h_n^{a_{k+1}}, X, h_n^a) \leq \operatorname{card} K_{c_1} + \ldots + \operatorname{card} K_{c_k}. \tag{5.4}$$

Puisque ε est arbitraire, on obtient par la Remarque 5.4 que

$$\mathcal{H}\text{-}\operatorname{cat}^{\infty}_{X,\mathcal{H}^a}(\mathcal{H}^b) \leq \operatorname{card} K_{c_1} + \ldots + \operatorname{card} K_{c_k}.$$

■

Des résultats analogues aux Propositions 4.5 et 4.6 ainsi qu'aux Théorèmes 4.11 et 4.12 peuvent être obtenus sans difficulté.

5.2. Théorie des points asymptotiquement critiques

Les définitions introduites précédemment sont conformes avec le travail de Marino et Mugnai [40, 41, 45]. Soit $(h_n)_n$ une suite de fonctionnelles définies sur un espace de Banach X et considérons une fonctionnelle $h : X \to \mathbb{R}$. Supposons que les fonctionnelles h_n sont de classe C^1. Dans ce contexte, les auteurs définissent dans [41] les points critiques asymptotiques de la façon suivante.

Définition 5.7. On dit que $x \in X$ est un *point asymptotiquement critique* pour le couple $((h_n)_n, h)$ s'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(u_k)_k$ dans X tels que

$$h'_{n_k}(u_k) \to 0, \quad u_k \to u \quad \text{et} \quad h_{n_k}(u_k) \to h(u).$$

Nous disons également que $h(u)$ est une *valeur asymptotiquement critique* pour le couple $((h_n)_n, h)$. Nous noterons AK_c l'ensemble des points asymptotiquement critiques pour le couple $((h_n)_n, h)$ de niveau c.

Notons qu'il n'est pas nécessaire d'imposer que u soit un point critique de h. En fait, nous pourrions complètement éliminer la présence de h de la définition. Dans ce cas, il faudrait ajouter comme hypothèse que pour chaque u satisfaisant la définition modifiée, la limite $(h_{n_k}(u_k))_k$ ne dépend pas de $(n_k)_k$ et $(u_k)_k$.

Introduisons maintenant le pendant de la condition de $(PS)_c$ dans ce contexte. Les auteurs choisissent d'utiliser la notation $\nabla(h_n, h; c)$ pour parler de la condition suivante. J'utiliserai plutôt la notation $ss\text{-}(PS)^*_c$ introduite par Perreault [49] pour insister sur la parenté avec la condition de Palais-Smale et sur le fait qu'on n'exige que l'existence d'une sous-suite convergente.

Définition 5.8. Soit $c \in \mathbb{R}$. On dit que le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait la *condition* $ss\text{-}(PS)^*_c$ si pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et toute suite $(u_k)_k$ de X telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to c, \quad h'_k(u_k) \to 0,$$

il existe une sous-suite $(k_j)_j$ dans $\mathbb{N}$ et il existe $u \in X$ tels que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$.

Ces définitions ont permis à Marino et Mugnai de présenter les trois résultats suivants. Le lecteur intéressé pourra aussi trouver leurs démonstrations dans [49].

Proposition 5.9. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et supposons que le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait $ss\text{-}(PS)^*_c$. Alors AK_c est compact.*

Nous avons de plus un lemme de déformation adapté à ce contexte qui nous permettra d'appliquer le même genre d'argument qu'au Chapitre 4 et d'obtenir des résultats de multiplicité pour les points asymptotiquement critiques.

Proposition 5.10. *Soient $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$. Considérons $\mathscr{N}$, un voisinage ouvert de AK_c. Supposons que le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait $ss\text{-}(PS)^*_c$. Alors il existe $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, il existe des déformations continues*

$$\eta_n : X \times [0,1] \to X$$

satisfaisant

(a) $\eta_n(x,t) = x$ *si* $t = 0$ *ou si* $x \notin h_n^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(b) $h_n(\eta_n(x,t)) \leq h_n(x)$;

(c) $\eta_n(h_n^{c+\varepsilon} \setminus \mathscr{N}, 1) \subseteq h_n^{c-\varepsilon}$;

(d) $\|x - \eta_n(x,t)\| \leq \bar{\varepsilon}$.

De plus, on peut en déduire le lemme d'intervalle non critique suivant.

Proposition 5.11. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Supposons que l'intervalle $[a, b]$ ne contient pas de valeurs asymptotiquement critiques pour le couple $((h_n)_n, h)$. Supposons aussi que le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait la condition ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a, b]$. Alors, pour tout $\rho > 0$, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon \in]0, \rho[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues*

$$\eta_n : X \times [0, 1] \longrightarrow X$$

satisfaisant

(a) $\|u - \eta_n(u, t)\| \leq \gamma$ *;*

(b) $h_n(\eta_n(u, t)) \leq h_n(u)$ *;*

(c) *si $h_n(u) \leq b$, alors $h_n(\eta_n(u, 1)) \leq a$;*

(d) *si $u \notin h_n^{-1}([a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon])$ ou si $t = 0$, alors $\eta_n(u, t) = u$.*

Dans ce cas particulier, le Théorème 5.6 conduit au résultat suivant.

Théorème 5.12. *Soit $\mathcal{H} = ((h_n), h)$ et soient a et b, des nombres réels tels que $a \leq b$. Supposons que $\mathcal{H}$ vérifie $(\mathscr{C})$ et ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a, b]$. Alors*

$$\mathcal{H}\text{-}cat^{\infty}_{X,\mathcal{H}^a}(\mathcal{H}^b) \leq \operatorname{card}\{AK_c \mid a \leq c \leq b\}.$$

Remarque 5.13. Si la famille (h_n) est équicontinue aux points de AK alors $\mathcal{H}$ vérifie $(\mathscr{C})$.

Chapitre 6

F-CATÉGORIE AVEC F MULTIVOQUE

Dans ce chapitre, nous introduisons des notions de catégories assujetties à une fonction multivoque $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ces notions nous permettront de fournir une borne inférieure au nombre de points critiques de F similaire à ce que nous avons obtenu au Chapitre 3. À l'image des autres chapitres, nous allons tout d'abord présenter une théorie avec une approche abstraite dans X et ensuite dans le graphe de F. Cette dernière notion pourra être appliquée en utilisant la notion de points critiques pour les fonctionnelles multivoques qui est due à Frigon [26].

6.1. Théorie abstraite dans X

Soit X un espace métrique et soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle multivoque. Pour $c \in \mathbb{R}$, notons $K_c \subseteq F^{-1}(c) \subseteq X$, un compact que nous appellerons *l'ensemble des points critiques de niveau c*. Notons $K = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} K_c$, *l'ensemble des points critiques de F*.

Nous aurons besoin d'un équivalent de la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$ dans le contexte multivoque.

Définition 6.1. Nous dirons que F satisfait la condition $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon}$, $\rho > 0$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de K_c, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et une déformation $\eta : X \times [0, 1] \to X$ telle que

(1) $\eta(x, t) = x$ si $t = 0$ ou $F(x) \subseteq (-\infty, c - \bar{\varepsilon}]$.

(2) $F(\eta(x, t)) \subseteq (-\infty, \sup F(x)]$,

(3) $d(\eta(x, t), x) \leq \rho$,

(4) si $x \notin V$ et $F(x) \subseteq (-\infty, c+\varepsilon]$, $F(\eta(x,1)) \subseteq (-\infty, c-\varepsilon]$.

De la même façon qu'au Chapitre 3, on montre le résultat suivant sur un intervalle non critique.

Proposition 6.2 (intervalle non critique). *Soient $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec $a < b$. Supposons que pour tout $c \in [a,b]$, $K_c = \emptyset$ et que F satisfait $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_c)$. Alors il existe une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que*

(1) $F(\eta(x,1)) \subseteq (-\infty, a]$ *si* $F(x) \subseteq (-\infty, b]$ *;*

(2) $F(\eta(x,t)) \subseteq (-\infty, a]$ *si* $F(x) \subseteq (-\infty, a]$ *;*

(3) $\eta(x,t) = x$ *si* $F(x) \subseteq (-\infty, a-\bar{\varepsilon}]$ *;*

(4) $F(\eta(x,t)) \subseteq (-\infty, \sup F(x)]$.

Encore une fois, nous aurons besoin d'avoir une condition de contractilité dans l'espace.

Définition 6.3. Nous dirons que $U \subseteq X$ est (F,ε)-*contractile dans* X s'il existe $\bar{x} \in X$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que $F(\eta(x,t)) \subseteq \varepsilon + (-\infty, \sup F(x)]$, $\eta(x,0) = x$ et $\eta(x,1) = \bar{x}$.

Finalement, nous aurons ici aussi besoin d'une définition intermédiaire pour pouvoir définir la F-catégorie pour une fonctionnelle multivoque.

Définition 6.4. Soient X un espace métrique, $Y \subseteq B$ un fermé de X et $\varepsilon > 0$. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque. Notons $n_\varepsilon^F(B, X, Y)$ le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel qu'il existe $A_0, \ldots, A_n$ des fermés de X vérifiant

(mCR1) $B \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$,

(mCR2) pour $i = 1, \ldots, n$, A_i est (F,ε)-contractile dans X,

(mCR3) il existe $\eta_0 : X \times [0,1] \to X$ continue telle que

(MCR3a) $\eta_0(x,0) = x$,

(MCR3b) $\eta_0(Y,t) \subseteq Y$,

(MCR3c) $\eta_0(A_0,1) \subseteq Y$,

(MCR3d) $F(\eta(x,t)) \subseteq (-\infty, \sup F(x)]$.

Comme précédemment, nous allons définir la F-catégorie à l'aide de la définition précédente.

Définition 6.5. On définit la F-catégorie de B dans X relativement à Y par

$$F\text{-cat}_{X,Y}(B) = \sup_{\varepsilon>0} n_\varepsilon^F(B,X,Y).$$

En suivant les mêmes étapes que pour la preuve du Théorème 2.25, on obtient que la $F\text{-cat}_{X,Y}(A)$ possède les propriétés suivantes.

Théorème 6.6. *Soit $F : X \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque et $A, B, Y \subseteq X$ avec Y fermé. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

(1) *$F\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}cat_X(A)$;*

(2) *si $A \subseteq B$ alors $F\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}cat_{X,Y}(B)$;*

(3) *$F\text{-}cat_{X,Y}(A \cup B) \leq F\text{-}cat_{X,Y}(A) + F\text{-}cat_X(B)$;*

(4) *si $F\text{-}cat_X(B) < \infty$, alors $F\text{-}cat_{X,Y}(A \setminus B) \geq F\text{-}cat_{X,Y}(A) - F\text{-}cat_X(B)$;*

(5) *soit $\eta : X \times [0,1] \to X$ est une déformation satisfaisant $\eta(Y,t) \subseteq Y$ et $F(\eta(x,t)) \subseteq (-\infty, \sup F(x)]$. Alors $F\text{-}cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}cat_{X,Y}(\eta_1(U,1))$.*

Nous allons encore une fois caractériser les points critiques de la fonctionnelle avec la famille suivante. Posons

$$\Gamma_i = \{U \subseteq X \mid F\text{-cat}_X(U) \geq i\}$$

et

$$c_j = \inf_{U\in\Gamma_i} \sup_{x\in U} \sup F(x).$$

Lemme 6.7. *Supposons que X est localement contractile, que $c = c_{k+1} = \ldots = c_{k+m} \in \mathbb{R}$, que F vérifie $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_c)$, que la fonction $\sup F(x)$ est continue pour* *tout $x \in K_c$ et que c n'est pas un point d'accumulation des valeurs critiques de F. Alors* $\operatorname{card} K_c \geq m$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\operatorname{card} K_c = p < m$. Puisque c n'est pas un point d'accumulation des valeurs critiques de F, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}] \setminus \{c\}$ ne contient pas de valeurs critiques. Soit $U \in \Gamma_{k+m}$ tel que $\sup_{x \in U} \sup F(x) \leq c + \bar{\varepsilon}$. Il existe donc $\tilde{\varepsilon}$ tel que pour tout $\delta \leq \tilde{\varepsilon}$, $n_\delta^F(B, X) \geq k + m$. Puisque X est localement contractile et que $\sup F(y)$ est continue pour chaque $y \in K_c \cap U$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_y$ de y qui est (F, δ)-contractile vers y. Considérons $V = \bigcup_{y \in K_c} \mathscr{V}_y$. Puisque F satisfait $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_c)$, il existe $\varepsilon < \delta$ et une déformation $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $x \notin \mathscr{V}$ satisfaisant $F(x) \subseteq (-\infty, c + \varepsilon]$, on a $F(\eta(x, 1)) \subseteq (-\infty, c - \varepsilon]$. Posons $B = \{x \in U \setminus \mathscr{V} \mid F(x) \subseteq (-\infty, c + \varepsilon]\}$. Puisque $n_\delta^F(\mathscr{V}, X) \leq p$, on obtient que $n_\delta^F(B, X) \geq k + 1$. Par conséquent, par le Théorème 6.6, $n_\delta^F(\eta(B, 1), X) \geq n_\delta^F(B, X) \geq 1$ et donc $\eta(B, 1) \in \Gamma_{k+1}$. Mais $\sup_{x \in B} \sup F(x) \leq c - \varepsilon$ ce qui constitue une contradiction avec la définition de c. ■

Théorème 6.8. *Supposons que F vérifie $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ et qu'elle est bornée inférieurement. Supposons qu'il existe $B \subseteq X$ tel que $F(B)$ est borné. Alors F a au moins F-$\mathrm{cat}_X(B)$ points critiques.*

DÉMONSTRATION. Supposons que le nombre de points critiques est fini. Dans le cas contraire, la conclusion est vérifiée. Par hypothèse, $B \in \Gamma_i$, $i \leq F\text{-}\mathrm{cat}_X(B)$. D'où $c_i \leq b$ pour $i \leq F\text{-}\mathrm{cat}_X(B)$.

Ensuite, on a que $c_1 \in \mathbb{R}$ puisque F est bornée inférieurement. Ensuite, si $c_i \in \mathbb{R}$ alors $K_{c_i} \neq \emptyset$. En effet, si c_i n'est pas une valeur critique de F alors, puisque K_{c_i} est fini, il existe $a < c_i < \tilde{a}$ tel que $[a, \tilde{a}]$ ne contient pas de valeur critique.

Soit $V \in \Gamma_i$ tel que $\sup f(V) < \tilde{a}$. Puisque F satisfait $\widehat{\mathscr{MD}}(X, K_{c_i})$, il existe $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que pour tout x tel que $F(x) \subseteq (-\infty, \tilde{a}]$,

$$F(\eta(x,1)) \leq a.$$

De plus, par le Théorème 6.6, on a que $\eta(V,1) \in \Gamma_i$. Nous avons donc

$$c_i \leq \sup_{x \in \eta_1(V,1)} \inf F(x) \leq a < c_i$$

ce qui est clairement une contradiction. La conclusion découle du Lemme 6.7. ■

6.2. Théorie abstraite dans *graphF*

Les hypothèses qui ont été nécessaires dans la Section 6.1 pour garantir que la F-catégorie soit une borne inférieure pour le nombre de points critiques sont très restrictives. Elles ne sont vérifiées que dans un nombre très limité d'exemples et causent une perte d'information importante. À l'image des travaux de Frigon [26] sur les fonctions multivoques, nous allons présenter ici une autre notion de catégorie assujettie à la fonction F dans le graphe de F plutôt que sur son domaine qui permettra d'obtenir plus d'information sur la fonctionnelle.

Soit X un espace métrique et soit d_X la métrique de X. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle multivoque. Le graphe de F est défini par

$$graphF = \{(u,b) \in X \times \mathbb{R} \mid b \in F(u)\} \subset X \times \mathbb{R}.$$

Introduisons une métrique d sur $graphF$ en posant

$$d((u,c),(v,b)) = \sqrt{(d_X(u,v))^2 + \|c-b\|^2}.$$

Dans le cas où F est une fonction à graphe fermé, l'espace métrique $graphF$ est complet avec cette métrique.

Dans le contexte multivoque, il est naturel de s'attendre à ce qu'un même point critique puisse avoir plusieurs valeurs critiques. Ainsi, l'ensemble des points critiques doit être considéré comme la projection d'un sous-ensemble de $graphF$ afin d'obtenir le plus d'information possible.

Pour $c \in \mathbb{R}$, notons $K_c \subseteq F^{-1}(c) \subseteq X$, un compact que nous appellerons *l'ensemble des points critiques de niveau c*. Nous dirons également que (x,c) est un *couple critique* si $x \in K_c$. Notons $K = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} K_c$, *l'ensemble des points critiques de* F.

Dans le même esprit que ce qu'on a vu précédemment, nous noterons, pour une fonction multivoque, $F^a = graphF \cap (X \times (-\infty, a])$.

Nous aurons également besoin d'un équivalent de la condition $\mathscr{D}(X, K_c)$ dans ce contexte multivoque.

Définition 6.9. Nous dirons que F satisfait la condition $\mathscr{MD}(X, K_c)$ si pour tout $\bar{\varepsilon}$, $\rho > 0$ et pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de $K_c \times \{c\}$, il existe $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et une déformation $\eta = (\eta_1, \eta_2) : graphF \times [0,1] \to graphF$ telle que

(1) $\eta((x,c),t) = (x,c)$ pour tout $((x,c),t) \in graphF \times \{0\} \cup F^{c-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$.

(2) $\eta_2((x,c),t) \leq c$ pour tout $((x,c),t) \in graphF \times [0,1]$,

(3) $d(\eta((x,c),t),(x,c)) \leq \rho$,

(4) $\eta(F^{c+\varepsilon} \setminus \mathscr{V}, 1) \subseteq F^{c-\varepsilon}$.

En fait, si on considère la fonction univoque $\mathscr{G}_F : graphF \to \mathbb{R}$ définie par $\mathscr{G}_F(x,c) = c$, F satisfait la condition $\mathscr{MD}(X, K_c)$ si et seulement si $\mathscr{G}_F$ satisfait $\mathscr{D}(graphF, K_c \times \{c\})$. Par conséquent, on peut facilement adapter la Proposition 3.4 pour obtenir un théorème d'intervalle non critique dans le contexte multivoque.

Proposition 6.10 (intervalle non critique). *Soient* $F : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *avec* $a < b$. *Supposons que pour tout* $c \in [a,b]$, $K_c = \emptyset$ *et que* F *satisfait* $\mathscr{MD}(X, K_c)$. *Alors il existe une déformation* $\eta : graphF \times [0,1] \to graphF$ *telle que*

(1) $\eta(F^b, 1) \subseteq F^a$;

(2) $\eta(F^a, t) \subseteq F^a$ *pour tout* $t \in [0,1]$;

(3) $\eta((x,c),t) = (x,c)$ *pour tout* $((x,c),t) \in F^{a-\bar{\varepsilon}} \times [0,1]$;

(4) $\eta_2((x,c),t) \leq c$ *pour tout* $((x,c),t) \in graphF \times [0,1]$.

Définition 6.11. Nous dirons qu'un ensemble $U \subseteq graphF$ est (F,ε)*-contractile dans* $graphF$ s'il existe $(\bar{y},\bar{c}) \in graphF$ et une déformation

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) : graphF \times [0,1] \to graphF$$

telle que $\eta_2((x,c),t) \leq c + \varepsilon$, $\eta((x,c),0) = (x,c)$ et $\eta((x,c),1) = (\bar{y},\bar{c})$.

Définition 6.12. Soient X un espace métrique, $\varepsilon > 0$ et soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque. Soit Y un fermé de $graphF$. Pour $B \subseteq graphF$, notons $N_\varepsilon^F(B, X, Y)$ le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel qu'il existe $A_0, \ldots, A_n$ des fermés de $graphF$ vérifiant

(MCR1) $B \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$,

(MCR2) pour $i = 1, \ldots, n$, il existe $(x_i, b_i) \in graphF$ tel que A_i est (F,ε)-contractile vers (x_i, b_i) dans $graphF$.

(MCR3) il existe $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0) : graphF \times [0,1] \to graphF$ continue telle que

(MCR3a) $\eta^0((x,c),0) = (x,c)$ pour tout $(x,c) \in graphF$,

(MCR3b) $\eta^0(Y,t) \subseteq Y$ pour tout $t \in [0,1]$,

(MCR3c) $\eta^0(A_0, 1) \subseteq Y$,

(MCR3d) $\eta_2^0((x,c),t)) \leq c$ pour tout $((x,c),t) \in graphF \times [0,1]$.

Définition 6.13. Pour $B \subseteq graphF$, on définit la F*-Catégorie multivoque de* B *dans* X *relativement à* Y par

$$F\text{-Cat}_{X,Y}(B) = \sup_{\varepsilon>0} N_\varepsilon^F(B, X, Y).$$

Remarque 6.14. Si on réinterprète l'écriture de la F-Catégorie multivoque en terme de $\mathcal{G}_F$, on obtient que

$$F\text{-Cat}_{X,Y}(B) = \mathcal{G}_F\text{-cat}_{graphF,Y}(B).$$

Comme conséquence directe de la Remarque 6.14, on a que l'ensemble des résultats obtenus au Chapitres 2 et 3 peuvent se réinterpréter en terme de catégorie multivoque. Nous présentons ici les plus importants.

Théorème 6.15. *Soit $F : X \to \mathbb{R}$, une fonction multivoque à graphe fermé et $A, B, Y \subseteq graphF$ avec Y fermé. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

(1) $F\text{-}Cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}Cat_X(A)$;

(2) *si* $A \subseteq B$ *alors* $F\text{-}Cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}Cat_{X,Y}(B)$;

(3) $F\text{-}Cat_{X,Y}(A \cup B) \leq F\text{-}Cat_{X,Y}(A) + F\text{-}Cat_X(B)$;

(4) *si* $F\text{-}Cat_X(B) < \infty$, *alors* $F\text{-}Cat_{X,Y}(A \backslash B) \geq F\text{-}Cat_{X,Y}(A) - F\text{-}Cat_X(B)$;

(5) *si* $\eta = (\eta_1, \eta_2) : graphF \times [0,1] \to graphF$ *est une déformation satisfaisant* $\eta(Y,t) \subseteq Y$, $\eta_2((x,b),t) \leq b$ *pour tout* $((x,b),t) \in graphF \times [0,1]$, *alors* $F\text{-}Cat_{X,Y}(A) \leq F\text{-}Cat_{X,Y}(\eta(A,1))$.

Les points critiques de la fonctionnelle multivoque F sont encore reliés à la F-catégorie multivoque.

Théorème 6.16. *Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque telle que $graphF$ est localement contractile. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $B \subseteq F^b$ avec $F\text{-}Cat_{X,F^a}(B) = k \leq \infty$. Si F satisfait $\mathscr{MD}(X, K_c)$ pour tout $c \in [a,b]$, alors F a au moins k points critiques de niveau entre a et b.*

6.3. Théorie des points critiques pour les fonctionnelles multivoques

Dans [26], Frigon a étendu la notion de pente faible présentée à la Section 3.5.2 aux fonctions multivoques à graphe fermé, permettant ainsi de développer une théorie des points critiques pour ces fonctionnelles.

Définition 6.17. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque à graphe fermé et soit $(u,c) \in graphF$. La *pente faible de F au point* (u,c), notée $|dF|(u,c)$, est le supremum des σ dans $[0, +\infty)$ tel qu'il existe un voisinage U de (u,c) (dans $graphF$), $\delta > 0$ et une fonction continue $h = (h_1, h_2) : U \times [0,\delta] \to graphF$ telle que pour tout $(v,b) \in U$ et pour tout $t \in [0,\delta]$, on a

(1) $d(h((v,b),t),(v,b)) \leq t\sqrt{1+\sigma^2}$,

(2) $h_2((v,b),t) \leq b - \sigma t$.

Définition 6.18. On dira que u est un *point critique de F au niveau* c si $c \in F(x)$ et $|dF|(u,c) = 0$. Ainsi, l'ensemble des points critiques est

$$K = \{x \in X \mid \exists c \in F(x) \text{ avec } |dF|(x,c) = 0\}.$$

Nous noterons K_c l'ensemble des points critiques de F au niveau c. Nous dirons que c est une *valeur critique de F* si $K_c \neq \emptyset$.

Soit $\mathcal{G}_F : graphF \to \mathbb{R}$ la fonction définie précédemment. Nous disons que (u,c) est un *point critique de $\mathcal{G}_F$* si la pente faible de $\mathcal{G}_F$ au point (u,c) est nulle (voir la Définition 3.14). Les points critiques de F et de $\mathscr{G}_F$ sont liés comme l'énonce la proposition suivante :

Proposition 6.19. *Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle multivoque et $\mathscr{G}_F$ définie comme ci-dessus. Alors u est un point critique de niveau c pour F si et seulement si (u,c) est un point critique de $\mathscr{G}_F$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(u,c) \in graphF$. Tout d'abord, montrons que

$$|d\mathscr{G}_F|(u,c) \leq |dF|(u,c). \tag{6.1}$$

Si $|d\mathscr{G}_F|(u,c) = 0$, c'est clair. Supposons que $|d\mathscr{G}_F|(u,c) > 0$. Il existe donc $0 < \sigma < |d\mathscr{G}_F|(u,c)$ satisfaisant la Définition 3.14. Donc, il existe $\delta > 0$, U un voisinage dans $graphF$ et h une déformation tels que $\mathscr{G}_F(h((v,b),t)) = h_2((v,b),t) \leq \mathscr{G}_F(v,b) - \sigma t = b - \sigma t$ et $d(h((v,b),t),(v,b)) \leq t \leq t\sqrt{1+\sigma^2}$. On trouve donc que $\sigma \leq |dF|(u,c)$ et ce pour tout $0 < \sigma < |d\mathscr{G}_F|(u,c)$.

Montrons maintenant que

$$\frac{|dF|(u,c)}{\sqrt{1 + (|dF|(u,c))^2}} \leq |d\mathscr{G}_F|(u,c). \tag{6.2}$$

Encore une fois, si $|dF|(u,c) = 0$, la conclusion est trivialement vérifiée. Sinon, il existe $0 < \sigma \leq |dF|(u,c)$ satisfaisant la Définition 6.17. Il existe donc $\delta > 0$, U un voisinage dans $graphF$ et h. Construisons une nouvelle déformation $\hat{h} : graphF \times [0,\delta] \to graphF$ en posant $\hat{h}((v,b),t) = h((v,b), \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}})$. Par les propriétés de h, on trouve que $\mathscr{G}_F(\hat{h}((v,b),t)) = h_2((v,b), \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}) \leq b + -\sigma\frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}$ et $d(\hat{h}((v,b), \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}), (v,b)) \leq \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\sqrt{1+\sigma^2} = t$. Par conséquent, on trouve $\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \leq |d\mathscr{G}_F|(u,c)$ et ce, pour tout $\sigma < |dF|(u,c)$.

En combinant les équations (6.1) et (6.2), on trouve que $|dF|(u,c) = 0$ si et seulement si $|d\mathscr{G}_F|(u,c) = 0$. ∎

Définition 6.20. Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle multivoque à graphe fermé et soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction F satisfait la *condition de Palais-Smale au niveau* c (notée $(PS)_c$) si toute suite (u_n) dans X pour laquelle il existe $c_n \in F(u_n)$ avec $c_n \to c$ et $|dF|(u_n, c_n) \to 0$, possède une sous-suite convergente.

Présentons maintenant le théorème de déformation dans ce contexte qui permettra de vérifier que la condition $\mathscr{MD}(X, K_c)$ est vérifiée :

Théorème 6.21 (Théorème de déformation). *Soient X un espace métrique complet, $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle multivoque à graphe fermé et soit $c \in \mathbb{R}$. Supposons que F satisfait $(PS)_c$. Alors, pour $\varepsilon_0 > 0$, $\mathcal{U} \subset E \times \mathbb{R}$ un voisinage invariant de $K_c \times \{c\}$ ($\mathcal{U}$ peut être vide si K_c est vide) et $\lambda > 0$ donnés, il existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et une fonction continue $\eta = (\eta_1, \eta_2) : graphF \times [0,1] \to graphF$ tels que*

(1) *$d(\eta((v,b),t), (v,b)) \leq \lambda t$;*

(2) *$\eta_2((v,b),t) \leq b$;*

(3) *si $(v,b) \in graphF \setminus (X \times (c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0))$, alors $\eta((v,b),t) = (v,b)$;*

(4) *$\eta((graphF \cap X \times (-\infty, c+\varepsilon]) \setminus \mathcal{U}, 1) \subset X \times (-\infty, c-\varepsilon]$.*

Ce théorème de déformation permet de garantir que si $F : X \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle multivoque à graphe fermé qui satisfait $(PS)_c$, alors elle satisfait la

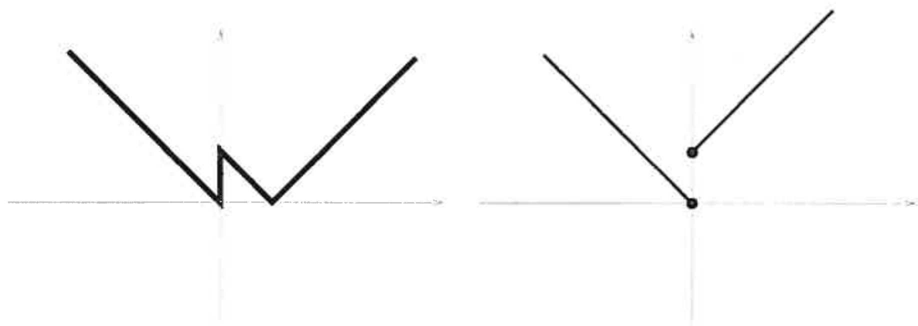


FIG. 6.1. Points critiques de fonctions multivoques

condition $\mathscr{MD}(X, K_c)$. Par conséquent nous pourrons appliquer le Théorème 6.16 avec cette théorie des points critiques. Dans certains cas particuliers, le Théorème 6.8 s'appliquera également.

Considérons par exemple la fonction multivoque $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} -x & x < 0, \\ [0,1] & x = 0, \\ -x+1 & 0 < x < 1, \\ x-1 & x > 1. \end{cases}$$

On obtient $F\text{-}\mathrm{Cat}_{\mathbb{R}}(graphF) = 2$ (voir Figure 6.1). On remarque que $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ sont des couples critiques de F. Si on considère plutôt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0, \\ x+1 & x \geq 0, \end{cases}$$

on obtient que $F\text{-}\mathrm{Cat}_{\mathbb{R}}(graphF) = 2$. Encore une fois, on constate la présence des couples critiques $(0,0)$ et $(0,1)$.

De plus, le fait de travailler dans le graphe de F permet de voir des points critiques que nous n'aurions pas pu voir avec la première approche. Considérons par exemple la Figure 6.2. Dans cet exemple, $(0, c_1)$ et $(0, c_2)$ sont des couples critiques. La première approche nous aurait donné seulement la valeur critique c_2.

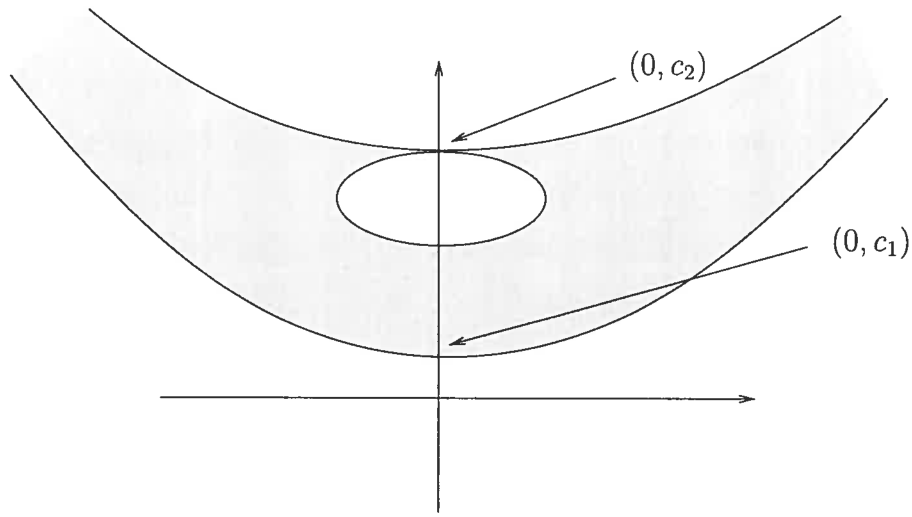


FIG. 6.2. Points critiques de fonctions multivoques 2

6.4. Le cas semi-continu inférieurement

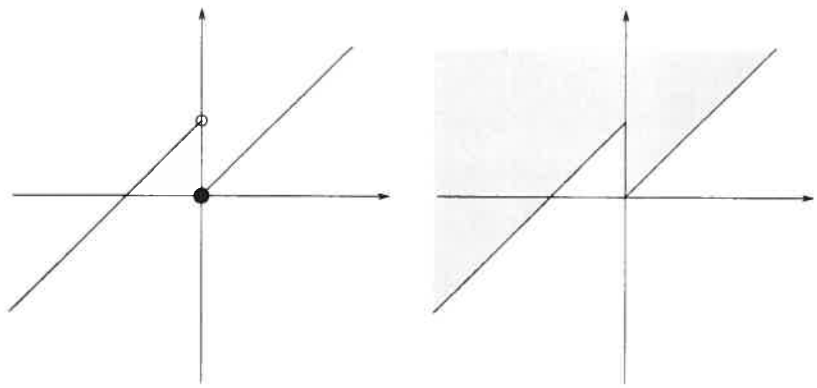
La théorie présentée ci-dessus permet d'introduire une approche pour traiter le cas des fonctionnelles qui sont semi-continues inférieurement. Considérons $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, une fonction semi-continue inférieurement. Introduisons une nouvelle fonction multivoque F en posant $F(u) = \{c \in \mathbb{R} \mid f(u) \leq c\}$. On peut ainsi définir la pente faible de f en posant $|df|(u) = |dF|(u, f(u))$. Posons $\mathcal{D}(f) = \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Définition 6.22. On dit que $u \in \mathcal{D}(f)$ est un *point critique* (inférieur) de f si $|df|(u) = 0$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une *valeur critique inférieure* s'il existe un point critique inférieur u de f tel que $f(u) = c$.

À cause de ce qui précède, on a que $u \in \mathcal{D}(f)$ est un point critique de f si et seulement si $(u, f(u))$ est un couple critique de F. Ainsi, le fait de connaître les points critiques de F nous permet de connaître les points critiques de f. Par contre, rien ne garantit que tous les points critiques de F sont des points critiques de f. Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0, \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, 0 est un point critique pour la fonction F ayant les valeurs critiques 0 et 1 mais 0 est la seule valeur critique inférieure de f.



(a) La fonction f (b) La fonction F

FIG. 6.3. Points critiques d'une fonction semi-continue inférieurement

Nous pourrons quand même, dans certains cas particuliers, obtenir les points critiques de f à partir de ceux de F, par exemple, si on suppose que

$$\inf\{|dF|(u,c) \mid f(u) < c\} > 0. \tag{6.3}$$

Proposition 6.23. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$, une fonction semi-continue inférieurement et F, la fonction multivoque définie par $F(u) = \{c \mid f(u) \leq c\}$. Supposons que graph$F$ est localement contractile, que la condition* (6.3) *est vérifiée et qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $B \subseteq F^b$ avec $F\text{-}Cat_{X,F^a}(B) = k \leq \infty$. Si F satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \in [a,b]$, alors f a au moins k points critiques.*

Chapitre 7

APPLICATION AUX ÉQUATIONS HAMILTONIENNES

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à un problème Hamiltonien rappelant ceux qui ont intéressés plusieurs auteurs. Mentionnons entre autres Bartsch et Szulkin [4, 59] ainsi que Li et Willem [30] qui ont fortement inspiré notre travail.

7.1. Formulation du problème et théorème principal

Tout au long du chapitre, pour $z \in \mathbb{R}^{2N}$, nous utiliserons p pour désigner les N premières coordonnées de z et q pour les N suivantes. Ainsi, $z = (p, q)$. En calquant sur ce modèle, nous noterons

$$\begin{aligned}\nabla H(t,p,q) &= (\nabla_p H(t,p,q), \nabla_q H(t,p,q)) \\ &= \left(\frac{\partial H(t,p,q)}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H(t,p,q)}{\partial p_N}, \frac{\partial H(t,p,q)}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H(t,p,q)}{\partial q_N}\right).\end{aligned}$$

Considérons le problème

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B(t) & 0 \end{pmatrix} u(t) + J\nabla H(t, u(t)), \qquad (*)$$

où $u(t) = (u_p(t), u_q(t)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $u(t) = u(t+2\pi)$ pour tout t, $H \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N})$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice symplectique usuelle et $B : \mathbb{R} \to M_N$ où M_N est l'espace des matrices $N \times N$ et $B(t)$ est autoadjointe pour tout t. Supposons que H est 2π-périodique en t. Nous sommes intéressés à trouver des solutions 2π-périodiques de $(*)$. Considérons l'espace $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ des fonctions de carré intégrable définies sur le cercle à valeur dans $\mathbb{R}^{2N}$. Chaque fonction $u \in L^2(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ peut s'écrire en série de Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ikt}$$

où $\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} u(t)e^{-ikt}\,dt$ est le k-ième coefficient de Fourier.

Définissons l'espace de Sobolev fractionnaire

$$H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) := \left\{ u \in L^2(S^1, \mathbb{R}^{2N}) \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{1/2}|\hat{u}(k)|^2 < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1/2} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{1/2}|\hat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert lorsque muni du produit scalaire associé à la norme

$$u \cdot v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{1/2}\hat{u}(k)\overline{\hat{v}(k)}.$$

Voici une propriété de cet espace qui sera cruciale dans la suite.

Théorème 7.1. *Pour chaque $\alpha \in [1,\infty)$, $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ est plongé de manière compacte dans $L^\alpha(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. En particulier, il existe une constante $\gamma_\alpha > 0$ telle que pour chaque $u \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$,*

$$\|u\|_{L^\alpha} \le \gamma_\alpha \|u\|_{1/2}.$$

Pour plus de détails sur cet espace et pour la preuve de ce théorème, le lecteur pourra consulter [1, 31, 43].

Les conditions suivantes seront utilisées tout au long du chapitre :

(H1) $B : \mathbb{R} \to M_N$ est continue, 2π-périodique et $B(t)$ est une matrice autoadjointe $N \times N$ inversible ;

(H2) $H \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ est 2π-périodique en t et en q ;

(H3) il existe des constantes $a_1, a_2 > 0$ et $r > 1$ telles que

$$\|\nabla H(t,p,q)\|^r \leq a_1 + a_2 p \cdot \nabla_p H(t,p,q);$$

(H4) il existe $R > 0$ et $\mu > 2$ telles que pour tout (p,q) avec $\|p\| \geq R$ on a

$$0 < \mu H(t,p,q) \leq p \cdot \nabla_p H(t,p,q);$$

(H5) $\nabla_q H(t,p,q)$ est borné ;

(H6) $\lim\limits_{(p,q)\to 0} \dfrac{H(t,p,q+v) - H(t,0,v)}{\|(p,q)\|^2} = 0$ uniformément en t et en v.

Des variations de ces conditions apparraissent en particulier dans le travail de Li et Willem [30] ainsi que dans celui de Rabinowitz [2, 50].

On dit que $u \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ est une *solution faible* du problème $(*)$ si

$$\int_{S^1} J\dot{u} \cdot v + Au \cdot v + \nabla H(t,u) \cdot v \, dt = 0$$

pour tout $v \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$.

Voici maintenant le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 7.2. *Supposons que les conditions (H1)–(H6) sont satisfaites et que l'inégalité* (2.1) *est vérifiée. Alors le problème* $(*)$ *a au moins une solution faible* $u \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. *De plus, il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que si pour* $\mathcal{O} = S^1 \times \{0\} \times [0, 2\pi]^N$,

$$\max\{H(t,p,q) \mid (t,p,q) \in \mathcal{O}\} - \min\{H(t,p,q) \mid (t,p,q) \in \mathcal{O}\} < \lambda_0 \qquad (7.1)$$

alors le problème $(*)$ *a au moins* $N+1$ *orbites de solutions faibles périodiques distinctes.*

7.2. Résultats techniques

Afin de démontrer le Théorème 7.2, nous aurons besoin d'étudier les propriétés des fonctions J, H et B.

Remarque 7.3. Pour la suite du chapitre, les constantes nécessaires dans les preuves seront notées $c_1, c_2, \ldots$ La numérotation des constantes reprendra à c_1 au début de chaque preuve.

Lemme 7.4. *Sous l'hypothèse (H2), les fonctions H et $\nabla_p H$ sont bornées sur $\mathbb{R} \times [-k,k]^N \times \mathbb{R}^N$, pour tout $k > 0$.*

DÉMONSTRATION. Puisque H est périodique en t et en q, les valeurs extremales de H sur $\mathbb{R}\times[-k,k]^N\times\mathbb{R}^N$ sont les mêmes que celles sur $[0,2\pi]\times[-k,k]^N\times[0,2\pi]^N$ qui est compact. Puisque H est continue, il existe une constante c_1 telle que

$$\Big|H(t,p,q)\Big| \leq c_1.$$

Puisque $\|\nabla_p H(t,p,q)\|$ est aussi une fonction continue périodique en t et en q, la même argumentation fonctionne. Il existe donc une constante c_2 telle que

$$\|\nabla_p H(t,p,q)\| \leq c_2.$$

■

Lemme 7.5. *Supposons que (H3) est vérifié et notons $s = \frac{1}{r-1}$ (où r est donné par (H3)). Alors il existe $a_3, a_4 > 0$ tels que $\|\nabla H(t,p,q)\| \leq a_3 + a_4\|p\|^s$ pour tout $(t,p,q) \in \mathbb{R}^{2N+1}$.*

DÉMONSTRATION. Par (H3), on a que

$$\|\nabla H(t,p,q)\|^r \leq a_1 + a_2 p \cdot \nabla_p H(t,p,q) \leq a_1 + a_2\|p\|\|\nabla_p H(t,p,q)\|.$$

Si $\|\nabla H(t,p,q)\| \geq a_1$, on a alors que

$$\|\nabla H(t,p,q)\|^r \leq (1 + a_2\|p\|)\|\nabla H(t,p,q)\|$$

et donc, $\|\nabla H(t,p,q)\|^{r-1} \leq 1 + a_2\|p\|$. En prenant la racine de chaque côté, nous obtenons

$$\|\nabla H(t,p,q)\| \leq (1 + a_2\|p\|)^{\frac{1}{r-1}} \leq a_3 + a_4\|p\|^{\frac{1}{r-1}}. \tag{7.2}$$

En effet, si $\|p\| \geq a_2$, on a

$$\begin{aligned}
(1 + a_2\|p\|)^{\frac{1}{r-1}} &= \left(\frac{1}{\|p\|} + a_2\right)^{\frac{1}{r-1}} \|p\|^{\frac{1}{r-1}} \\
&\leq \left(\frac{1}{a_2} + a_2\right)^{\frac{1}{r-1}} \|p\|^{\frac{1}{r-1}} \\
&= a_4\|p\|^{\frac{1}{r-1}}.
\end{aligned}$$

Si, par contre, nous avons que $\|p\| \leq a_2$, nous obtenons

$$(1 + a_2\|p\|)^{\frac{1}{r-1}} \leq \left(1 + a_2^2\right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

Le cas où $\|\nabla H(t,p,q)\| \leq a_1$ est trivial. Donc, il existe des constantes a_3 et a_4 telles que $\|\nabla H(t,p,q)\| \leq a_3 + a_4\|p\|^{\frac{1}{r-1}}$. ■

Lemme 7.6. *Supposons que (H2), (H3) et (H6) sont satisfaites. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\left| H(t,p,q+2\pi z) - H(t,0,2\pi z) \right| \leq \varepsilon\|(p,q)\|^2 + c_\varepsilon\|(p,q)\|^{s+1}$$

pour tout $(t,p,q) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ et $z \in \mathbb{Z}^N$.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda(\alpha) = H(t, \alpha p, \alpha q + 2\pi z)$. On a

$$\lambda'(\alpha) = \nabla H(t, \alpha p, \alpha q + 2\pi z) \cdot (p,q).$$

Donc, par le Lemme 7.5,

$$\begin{aligned}
|\lambda(1) - \lambda(0)| &= \left| \int_0^1 \nabla(H(t, \alpha p, \alpha q + 2\pi z) \cdot (p,q)\, d\alpha \right| \\
&\le \int_0^1 \|\nabla H(t, \alpha p, \alpha q + 2\pi z)\| \, \|(p,q)\| \, d\alpha \\
&\le \int_0^1 (a_3 + a_4 \|\alpha p\|^s) \, \|(p,q)\| \, d\alpha \\
&\le \int_0^1 a_3 \|(p,q)\| + a_4 |\alpha|^s \|(p,q)\|^{s+1} \, d\alpha \\
&= a_3 \|(p,q)\| + \frac{a_4}{s+1} \|(p,q)\|^{s+1}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse (H6), il existe une constante R_ε telle que pour $\|(p,q)\| < R_\varepsilon$, on a $|H(t,p,q+2\pi z) - H(t,0,2\pi z)| < \varepsilon \|(p,q)\|^2$. Supposons que $\|(p,q)\| \ge R_\varepsilon$. Par l'équation (7.3), nous avons que

$$\begin{aligned}
|H(t,p,q+2\pi z) - H(t,0,2\pi z)| &\le a_3 \|(p,q)\| + \frac{a_4}{s+1} \|(p,q)\|^{s+1} \\
&= \left(\frac{a_3}{\|(p,q)\|^s} + \frac{a_4}{s+1} \right) \|(p,q)\|^{s+1} \\
&\le \left(\frac{a_3}{R_\varepsilon^s} + \frac{a_4}{s+1} \right) \|(p,q)\|^{s+1}.
\end{aligned}$$

En posant $c_\varepsilon = (\frac{a_3}{R_\varepsilon^s} + \frac{a_4}{s+1})$, nous obtenons

$$|H(t,p,q+2\pi z) - H(t,0,2\pi z)| \le \varepsilon \|(p,q)\|^2 + c_\varepsilon \|(p,q)\|^{s+1}.$$

■

Lemme 7.7. *Sous les hypothèses (H2) et (H4), il existe des constantes $a_5, a_6 > 0$ telles que*

$$H(t,p,q) \ge a_5 \|p\|^\mu - a_6 \text{ pour tout } (t,p,q) \in \mathbb{R}^{2N+1}$$

où μ est donné par (H4).

DÉMONSTRATION. Supposons que $\|p\| > R$. Considérons, pour $\alpha \geq R$,

$$g(\alpha) = H\left(t, \alpha\frac{p}{\|p\|}, q\right).$$

Par (H4),

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \nabla_p H(t, \alpha\frac{p}{\|p\|}, q) \cdot \frac{p}{\|p\|} \\ &\geq \frac{\mu}{\alpha} H(t, \frac{\alpha p}{\|p\|}, q) \\ &= \frac{\mu}{\alpha} g(\alpha). \end{aligned}$$

Donc, puisque $g(\alpha) > 0$ pour $\alpha \geq R$, en intégrant, nous obtenons

$$\ln(g(\alpha)) - \ln(g(R)) = \int_R^\alpha \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\, d\alpha \geq \int_R^\alpha \frac{\mu}{\alpha}\, d\alpha = \ln \alpha^\mu - \ln R^\mu. \tag{7.4}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient

$$g(\alpha) \geq \frac{g(R)}{R^\mu}\alpha^\mu. \tag{7.5}$$

En choisissant $\alpha = \|p\|$, l'équation (7.5) devient

$$H(t, p, q) \geq R^{-\mu} H(t, \frac{Rp}{\|p\|}, q)\|p\|^\mu. \tag{7.6}$$

Puisque H est 2π-périodique en t et en q et par (H4), il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $H(t, \frac{Rp}{\|p\|}, q) \geq c_1 R^\mu$ pour tout $(t, p, q) \in \mathbb{R}^{2N+1}$. En combinant avec l'équation (7.6), on obtient que

$$H(t, p, q) \geq c_1 \|p\|^\mu \tag{7.7}$$

pour tout $(t, p, q) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ avec $\|p\| > R$.

D'un autre côté, si $\|p\| \leq R$, par le Lemme 7.4, il existe une constante c_2 telle que $H(t, p, q) \geq -c_2$. En combinant avec l'équation (7.7), nous obtenons

$$H(t, p, q) \geq c_1 \|p\|^\mu - c_2 - c_1 R^\mu = a_5 \|p\|^\mu - a_6.$$

■

Lemme 7.8. *Supposons que H satisfait (H2), (H3) et (H4). Alors,* $s = \frac{1}{r-1} > 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $(p,0) \in \mathbb{R}^{2N}$. Considérons $\lambda(\alpha) = H(t,\alpha p,0)$. Puisque $\lambda'(\alpha) = \nabla_p H(t,\alpha p,0)\cdot p$ et par le Lemme 7.5, on a que

$$\begin{aligned} H(t,p,0) - H(t,0,0) = \lambda(1) - \lambda(0) &= \int_0^1 \nabla_p H(t,\alpha p,0)\cdot p\, d\alpha \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla_p H(t,\alpha p,0)\|\|p\|\, d\alpha \\ &\leq \int_0^1 \left(a_3 + a_4\alpha^s\|p\|^s\right)\|p\|\, d\alpha \\ &= a_3\|p\| + c_1\|p\|^{s+1}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Puisque H est périodique en t, il existe une constante c_2 telle que

$$H(t,p,0) - H(t,0,0) \geq H(t,p,0) - c_2. \tag{7.9}$$

En combinant les équations (7.8), (7.9) et le résultat du Lemme 7.7, nous obtenons

$$a_5\|p\|^\mu - c_3 \leq H(t,p,0) - c_2 \leq a_3\|p\| + c_1\|p\|^{s+1}$$

avec $c_3 = a_6 + c_2$. Donc, avec $c_4 = c_2 + c_3$,

$$a_3\|p\| + c_1\|p\|^{s+1} - a_5\|p\|^\mu + c_4 \geq 0.$$

Puisque $a_5 > 0$ et que cette inégalité doit être vraie pour tout p, pour p assez grand on doit avoir $s+1 \geq \mu > 2$. D'où $s > 1$. ■

Puisque nous nous intéressons aux solutions 2π-périodiques du problème $(*)$ et puisque B et H sont 2π-périodiques en t, nous pouvons identifier $[0,2\pi]$ à S^1.

Lemme 7.9. *Supposons que H satisfait (H2) et (H4). Alors il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\int_{S^1} H(t,u(t))\, dt \leq \int_{S^1} \frac{u_p(t)\cdot\nabla_p H(t,u(t))}{\mu}\, dt + k$$

pour tout $u = (u_p,u_q) \in H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N})$.

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 7.4, il existe c_1 et c_2 tel que $\|p\|\|\nabla_p H(t,p,q)\| \leq c_1/2\pi$ et $|H(t,p,q)| \leq c_2/2\pi$ pour tout $(t,p,q) \in \mathbb{R}\times[-R,R]\times\mathbb{R}^N$.

Soit $u = (u_p, u_q) \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. Notons

$$\mathcal{A} = \left\{ t \in S^1 \;\middle|\; \|u_p(t)\| \leq R \right\}.$$

Par ce qui précède,

$$\int_{\mathcal{A}} u_p \cdot \nabla_p H(t, u_p(t), u_q(t)) \, dt \leq \int_{\mathcal{A}} \|u_p\| \|\nabla_p H(t, u_p(t), u_q(t))\| \, dt \leq c_1, \quad (7.10)$$

$$\left| \int_{\mathcal{A}} H(t, u_p(t), u_q(t)) \, dt \right| \leq c_2. \quad (7.11)$$

Par (H4),

$$\int_{\mathcal{A}^c} u_p \cdot \nabla_p H(t, u) \, dt \geq \int_{\mathcal{A}^c} \mu H(t, u) \, dt. \quad (7.12)$$

En combinant (7.10), (7.11) et (7.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} H(t, u) \, dt + \int_{\mathcal{A}^c} H(t, u) \, dt &\leq c_2 + \int_{\mathcal{A}^c} \frac{u_p \cdot \nabla_p H(t, u)}{\mu} \, dt \\
&= c_2 + \int_{S^1} \frac{u_p \cdot \nabla_p H(t, u)}{\mu} \, dt - \int_{\mathcal{A}} \frac{u_p \cdot \nabla_p H(t, u)}{\mu} \, dt \\
&\leq \int_{S^1} \frac{u_p \cdot \nabla_p H(t, u)}{\mu} \, dt + c_2 - \frac{c_1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien que

$$\int_{S^1} H(t, u) \, dt \leq \int_{S^1} \frac{u_p \cdot \nabla_p H(t, u)}{\mu} \, dt + k$$

pour tout $u \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. ■

Définissons $A : S^1 \to M_n$ par $A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et considérons la fonctionnelle $f : H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
f(u) &= \frac{1}{2} \int_{S_1} J\dot{u} \cdot u + Au \cdot u \, dt + \int_{S^1} H(t, u) \, dt \\
&= \frac{1}{2} a(u, u) + \psi(u)
\end{aligned}$$

où $a(u, v) = \int_{S^1} J\dot{u} \cdot v + Au \cdot v \, dt$ et $\psi(u) = \int_{S^1} H(t, u) \, dt$. La fonctionnelle f est bien définie. En effet, pour $u \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$, par la définition de $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$, on obtient facilement que $a(u,u) \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, en utilisant le Théorème 7.1 et le Lemme 7.6, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^1} H(t,u_p,u_q)\, dt\right| &\le \left|\int_{S^1} H(t,u_p,u_q) - H(t,0,0)\, dt\right| + \left|\int_{S^1} H(t,0,0)\right| dt \\ &\le \varepsilon\|u\|_{L^2}^2 + c_\varepsilon \|u\|_{L^{s+1}}^{s+1} + a_7 \\ &\le \gamma_2\varepsilon\|u\|_{1/2}^2 + \gamma_{s+1}c_\varepsilon\|u\|_{1/2}^{s+1} + a_7\end{aligned}$$

et donc $\int_{S^1} H(t,u_p,u_q)\, dt \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.10. *L'application $L : H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N}) \to (H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N}))^*$ définie par $L(u) = J\dot{u} + Au + \nabla H(t,u)$ c'est-à-dire*

$$L(u)(v) = \int_{S^1} (J\dot{u} + Au + \nabla H(t,u)) \cdot v\, dt$$

est continue.

Pour pouvoir prouver ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 7.11. *Supposons que (H3) est vérifiée et soit s, la constante donnée par le Lemme 7.5. Alors la fonction $h : L^{2s}(S^1,\mathbb{R}^{2N}) \to L^2(S^1,\mathbb{R}^{2N})$ définie par*

$$h(\phi)(t) = \nabla H(t,\phi(t))$$

est continue.

Démonstration. Soit $\phi_n \to \phi$ dans $L^{2s}(S^1,\mathbb{R}^{2N})$ et considérons $\{\xi_n\}$, une sous-suite de $\{\phi_n\}$ telle que $\xi_n(x) \to \phi(x)$ presque partout dans S^1. Il existe une sous-suite $\{\psi_n\}$ de $\{\xi_n\}$ telle que $\|\psi_{j+1} - \psi_j\|_{L^{2s}} \le 2^{-j}$, $\forall j \ge 1$. Posons

$$g(x) := \|\psi_1(x)\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_{j+1}(x) - \psi_j(x)\|.$$

On a clairement que $\|\psi_n(x)\| \le g(x)$ presque partout dans S^1 et donc $\|\phi(x)\| \le g(x)$ presque partout dans S^1.

Pour $u \in L^{2s}(S^1,\mathbb{R})$, par (H3), on a que $\|h(u)(t)\|^2 \leq (a+b\|u(t)\|^s)^2 \leq \tilde{a}+\tilde{b}\|u(t)\|^{2s}$. D'où $h(u) \in L^2(S^1,\mathbb{R})$.

Puisque $\|h(\psi_n)(t)-h(\phi)(t)\|^2 \leq 4(\tilde{a}+\tilde{b}\|g\|^{2s}) \in L^1(S^1,\mathbb{R})$, par le Théorème de convergence dominée, $h(\psi_n) \to h(\phi)$ dans $L^2(S^1,\mathbb{R})$. Puisque qu'on a ça pour toute sous-suite $\{\xi_n\}$ de $\{\phi_n\}$, on obtient que $h(\phi_n) \to h(\phi)$ dans $L^2(S^1,\mathbb{R})$. ■

Démonstration de la Proposition 7.10. Puisque $H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N}) \subseteq L^2$, il est clair que $L(u)(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N})$. Soit u dans $H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N})$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\|J\dot{u}+Au\|_{(H^{1/2})^*} &= \sup_{\|v\|_{1/2}=1} \left\| \int_{S^1} \left(J\dot{u}+Au\right)\cdot v\,dt \right\| \\
&\leq \sup_{\|v\|_{1/2}=1} c_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|(\hat{u}(k))\overline{\hat{v}(k)} + c_2\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}, \\
&\leq c_1\|u\|_{1/2} + c_2\|u\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

et donc, par le Théorème 7.1, on obtient que $u \mapsto J\dot{u}+Au$ est continue. Finalement, on conclut grâce au Lemme 7.11 que L est continue.

■

Théorème 7.12. *La fonctionnelle f est de classe C^1 et*

$$
\langle f'(u), v\rangle = L(u)(v) = \int_{S^1} J\dot{u}\cdot v + Au\cdot v + \nabla H(t,u)v\,dt
$$

pour tout $u, v \in H^{1/2}(S^1,\mathbb{R}^{2N})$.

Démonstration. Soient $u, v \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. Posons $\lambda(\alpha) = f(u + \alpha v)$ et remarquons que

$$\lambda'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\Bigg(\frac{1}{2}\int_{S^1} J(\dot{u} + \alpha\dot{v}) \cdot (u + \alpha v) + A(u + \alpha v) \cdot (u + \alpha v)\, dt \\ + \int_{S^1} H(t, u + \alpha v)\, dt\Bigg)$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\Bigg(\frac{1}{2}\int_{S^1} J\dot{u} \cdot u + Au \cdot u + \alpha\Big(J\dot{u} \cdot v + J\dot{v} \cdot u + Au \cdot v + Av \cdot u\Big) \\ + \alpha^2\Big(J\dot{v} \cdot v + Av \cdot v\Big)\, dt + \int_{S^1} H(t, u + \alpha v)\, dt\Bigg)$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\int_{S^1} J\dot{u} \cdot v + J\dot{v} \cdot u + Au \cdot v + Av \cdot u + 2\alpha\Big(J\dot{v} \cdot v + Av \cdot v\Big)\, dt\Bigg) \\ + \int_{S^1} \nabla H(t, u + \alpha v) \cdot v\, dt.$$

En évaluant en $\alpha = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda'(0) &= \frac{1}{2}\Bigg(\int_{S^1} J\dot{u} \cdot v + J\dot{v} \cdot u + Au \cdot v + Av \cdot u\, dt\Bigg) + \int_{S^1} \nabla H(t, u) \cdot v\, dt \\ &= \int_{S^1} J\dot{u} \cdot v + Au \cdot v\, dt + \int_{S^1} \nabla H(t, u) \cdot v\, dt \end{aligned}$$

puisque B est auto-adjointe et par intégration par partie en utilisant le fait que u, v sont dans $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. Donc

$$\lambda'(0) = \langle J\dot{u} + Au + \nabla H(t, u), v\rangle_{L^2} = \langle L(u), v\rangle_{L^2}.$$

En vertu de la Proposition 7.10, L est continue. Donc f est différentiable au sens de Fréchet et $f' = L$. ■

7.3. Formulation équivalente du problème et condition $(PS)_c^*$

On remarque que les solutions faibles du problème $(*)$ correspondent précisément aux points critiques de la fonctionnelle f.

Considérons les deux opérateurs $T, S \in \mathscr{L}(H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}))$ définis par

$$\langle Tu, v\rangle_{1/2} = \int_{S^1} J\dot{u} \cdot v \, dt, \quad \langle Su, v\rangle_{1/2} = \int_{S^1} Au \cdot v \, dt \quad \forall u, v \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}).$$

On a que T est autoadjoint et l'hypothèse (H1) garantit que S l'est aussi.

Puisque l'inclusion de $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ dans $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ est continue et compacte, l'opérateur S est compact. On a donc que les points d'accumulation du spectre de l'opérateur $T + S$ sont les mêmes que ceux du spectre de T (voir[51]). Puisque les valeurs propres de T ne s'accumulent qu'en $\pm\infty$, on pourra noter les valeurs propres de $T + S$ par

$$\ldots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

Le lecteur intéressé pourra consulter [34, 35, 50, 51] pour plus de détails. Notons $\{e_{\pm j}\}$ les vecteurs propres de $T + S$ correspondant respectivement à $\{\lambda_{\pm j}\}$ et définissons $X^+ = \text{span}\{e_1, e_2, \ldots\}$, $X^- = \text{span}\{e_{-1}, e_{-2}, \ldots\}$ et $X^0 = \ker(T + S)$. Nous obtenons ainsi une décomposition de $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) = X^+ \oplus X^0 \oplus X^-$ avec $\dim X^0 < \infty$ et $\dim X^+ = \dim X^- = \infty$. De plus, nous pouvons introduire un nouveau produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en posant, pour $u = u^+ + u^0 + u^-$ et $v = v^+ + v^0 + v^-$,

$$\langle u, v\rangle = \langle (T + S)u^+, v^+\rangle_{1/2} - \langle (T + S)u^-, v^-\rangle_{1/2} + \langle u^0, v^0\rangle_{1/2}.$$

Ce produit scalaire induit une norme équivalente sur $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ que nous continuerons de noter $\| \cdot \|_{1/2}$. On trouve donc que, dans cette nouvelle norme,

$$\int_{S^1} (J\dot{u} + Au) \cdot u \, dt = \langle (T + S)u, u\rangle_{1/2} = \|u^+\|^2_{1/2} - \|u^-\|^2_{1/2}. \tag{7.13}$$

On peut remarquer que

$$\langle (T + S)(u), v\rangle = a(u, v)$$

et donc, par la décomposition spectrale, pour $u = u^+ + u^0 + u^-$, $a(u, v^+) = a(u^+, v^+)$ pour tout $v^+ \in X^+$et $a(u, v^-) = a(u^-, v^-)$ pour tout $v^- \in X^-$.

Par la périodicité de B et de H donné en (H1) et (H2), on a que

$$f(u_p, u_q + 2\pi z) = f(u_p, u_q) \text{ pour tout } z \in \mathbb{Z}^N.$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
f(u_p, u_q + 2\pi z) &= \frac{1}{2} \int_{S_1} J(\dot{u}_p, \dot{u}_q) \cdot (u_p, u_q + 2\pi z) \\
&\qquad + A(u_p, u_q + 2\pi z) \cdot (u_p, u_q + 2\pi z) \, dt \\
&\qquad\qquad + \int_{S^1} H(t, u_p, u_q + 2\pi z) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{S_1} J(\dot{u}_p, \dot{u}_q) \cdot (u_p, u_q) + \dot{u}_p \cdot 2\pi z \\
&\qquad + A(u_p, u_q) \cdot \Big[(u_p, u_q) + (0, 2\pi z) \Big] \, dt + \int_{S^1} H(t, u_p, u_q) \, dt \\
&= f(u_p, u_q) + 2\pi \int_{S^1} \dot{u}_p \cdot z \, dt \\
&= f(u_p, u_q)
\end{aligned}
$$

puisque u_p est périodique. Il s'ensuit que $f'(u_p, u_q + 2\pi z) = f'(u_p, u_q)$.

Grâce à cette particularité, à chaque solution $(\bar{u}_p, \bar{u}_q)$ correspond en fait une orbite de solutions $(\bar{u}_p, \bar{u}_q + 2\pi\mathbb{Z}^N)$.

Introduisons la relation d'équivalence $\sim$ sur X^0 définie par $x \sim x' \Leftrightarrow x - x' = 2\pi z$ où $z \in \mathbb{Z}^N$. Notons $[x^0]$ la classe d'équivalence de x^0, $V = \{[x^0] \mid x^0 \in X^0\}$ et $X = X^+ \oplus X^-$. On remarque qu'on peut identifier $V = \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N$ au tore $\mathbb{T}^N$ de dimension N. Nous avons ainsi une fonction $\pi : H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) \to X \times V$ définie par $\pi(x + x^0) = (x, [x^0])$. Définissons $\phi : X \times V \to \mathbb{R}$ par $\phi(x, [x^0]) = f(x + x^0)$. Puisque f est 2π périodique, ϕ est bien définie.

$$
\begin{tikzcd}
H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\
X \times V \arrow[ur, dashed, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pour chaque $x + x^0$ de $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$, π induit une correspondance π' entre les plans tangents $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}) = T_{x+x^0}(H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N}))$ et $T_{(x,[x^0])}(X \times V)$. On obtient donc que pour tout $v \in H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$, $f'(x + x^0)v = \phi'(x, [x^0])(\pi'(v))$. Nous avons donc une correspondance entre les orbites de points critiques de f et les points critiques de ϕ. Pour plus de détails, consultez [55].

Afin de s'assurer que ϕ vérifie la propriété de déformation $\mathscr{D}^*(X, K_c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, il suffit, en vertu du Théorème 1.18, de vérifier que ϕ satisfait la condition de Palais-Smale étoile au niveau c.

Théorème 7.13. *Soit $X_n^+ = \text{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $X_n^- = \text{span}\{e_{-1}, \ldots, e_{-n}\}$. Si H satisfait (H1)- (H6) alors la fonction $\phi : X \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition $(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit ϕ_n, la restriction de ϕ à $(X_n^+ \oplus X_n^-) \times V$ et f_n, la restriction de f à $X_n^+ \oplus X_n^- \oplus X^0$. Encore une fois, il existe une correspondance entre les plans tangents $T_{(x,[x^0])}((X_n^+ \oplus X_n^-) \times V)$ et $T_{x+x^0}(X_n^+ \oplus X_n^- \oplus X^0)$ qui entraîne que $\phi_n'(x_n, [x_n^0]) \to 0$ si et seulement si $f_n'(u_n) \to 0$ où $u_n = x_n + x_n^0$ et $x_n = x_n^+ + x_n^-$.

Considérons $(z_n) = (x_n^+ + x_n^-, [x_n^0]) \in (X^+ \oplus X^-) \times V$ une suite telle que $z_n \in (X_n^+ \oplus X_n^-) \times V$, $\phi(z_n) \to c$ et $\phi_n'(z_n) \to 0$.

Nous allons étudier la suite $(u_n) = (x_n^+ + x_n^- + x_n^0)$ en prenant le représentant x_n^0 dans $[0, 2\pi]^N$.

Nous devons montrer que (z_n) possède une sous-suite convergente. Pour ce faire, nous allons montrer que (u_n) possède une sous-suite convergente et la conclusion découlera de la continuité de la correspondance π.

Pour cette démonstration, nous adopterons la notation $u_n(t) = (u_n^p(t), u_n^q(t))$ plutôt que la notation usuelle pour éviter la confusion.

Par la compacité de $[0, 2\pi]^N$, la suite (x_n^0) possède une sous-suite convergeant vers x^0. En particulier, (x_n^0) est bornée.

Puisque $\phi(x_n, [x_n^0]) \to c$ et $f(x_n + x_n^0) = \phi(x_n, [x_n^0])$, pour n assez grand,

$$c + 1 \geq f(u_n) \geq c - 1$$

et donc

$$1 - c \geq -f(u_n) \tag{7.14}$$

De plus, puisque $f_n'(u_n) \to 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|f'(u_n)\|_{(H^{1/2})^*} \leq 1. \tag{7.15}$$

En utilisant les équations (7.14) et (7.15), on obtient, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} 1 - c + \|u_n\|_{1/2} &\geq \frac{1}{2}\langle f_n'(u_n), u_n\rangle - f(u_n) \\ &= \int_{S^1} \frac{\nabla H(t,u_n)\cdot u_n}{2} - H(t,u_n)\,dt \end{aligned} \tag{7.16}$$

En vertu de (H5), la suite $\Big(\nabla_q H(t,u_n)\Big)$ est bornée et donc

$$\begin{aligned} \left|\int_{S^1} u_n^q \cdot \nabla_q H(t,u_n)\,dt\right| &\leq \left(\int_{S^1} (u_n^q)^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \nabla_q H(t,u_n)^2\,dt\right)^{1/2} \\ &\leq c_1 \|u_n^q\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

car $u_n \in L^2$.

D'autre part, le Lemme 7.9 implique que

$$\int_{S^1} \frac{u_n^p \cdot \nabla_p H(t,u_n)}{2} - H(t,u_n)\,dt \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_{S^1} u_n^p \cdot \nabla_p H(t,u_n)\,dt - k \tag{7.18}$$

En combinant (7.16), (7.17), (7.18) et l'hypothèse (H3), on déduit

$$\begin{aligned} 1 - c + \|u_n\|_{1/2} &\geq \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) u_n^p \cdot \nabla_p H(t,u_n)\,dt - k - c_1\|u_n^q\|_{L^2} \\ &\geq c_2 \|\nabla H(t,u_n)\|_{L^r}^r - k_1 - c_1 \|u_n^q\|_{L^2} \end{aligned} \tag{7.19}$$

avec $c_2 = \frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)$ ou encore, par le Théorème 7.1,

$$1 - c + (1 + c_3)\|u_n\|_{1/2} \geq c_2 \|\nabla H(t,u_n)\|_{L^r}^r - k_1. \tag{7.20}$$

Posons r', l'exposant conjugué de r. Puisque

$$\begin{aligned} \langle f_n'(u_n), x_n^+\rangle &= a(u_n, x_n^+) + \int_{S^1} x_n^+ \cdot \nabla H(t,u_n)\,dt \\ &= a(x_n^+, x_n^+) + \int_{S^1} x_n^+ \cdot \nabla H(t,u_n)\,dt, \end{aligned}$$

on obtient, grâce aux équations (7.15) et (7.20),

$$\begin{aligned} a(x_n^+, x_n^+) &= \langle f_n'(u_n), x_n^+\rangle - \int_{S^1} x_n^+ \cdot \nabla H(t,u_n)\,dt \\ &\leq \|x_n^+\|_{1/2} + \|x_n^+\|_{L^{r'}} \|\nabla H(t,u_n)\|_{L^r} \\ &\leq \|x_n^+\|_{1/2} + c_4 \|x_n^+\|_{1/2}(1 + \|u_n\|_{1/2}^{1/r}) + c_5 \\ &\leq c_6 \|u_n\|_{1/2}^{1+1/r} + c_7. \end{aligned} \tag{7.21}$$

De la même façon, pour x_n^-,

$$\langle f'(u_n), x_n^- \rangle = a(x_n^-, x_n^-) + \int_{S^1} x_n^- \cdot \nabla H(t, u_n)\, dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
-a(x_n^-, x_n^-) &= -\langle f'(u_n), x_n^- \rangle + \int_{S^1} x_n^- \cdot \nabla H(t, u_n)\, dt \\
&\le \|x_n^-\|_{1/2} + \|x_n^-\|_{L^{r'}} \|\nabla H(t, u_n)\|_{L^r} \\
&\le \|x_n^-\|_{1/2} + c_4 \|x_n^-\|_{1/2}(1 + \|u_n\|_{1/2}^{1/r}) + c_5 \\
&\le c_6 \|u_n\|_{1/2}^{1+1/r} + c_7.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Puisque, par l'équation (7.13), $\|u_n\|_{1/2}^2 = a(x_n^+, x_n^+) - a(x_n^-, x_n^-) + \|x_n^0\|^2$, on obtient, grâce aux équations (7.21), (7.22) et du fait que la suite (x_n^0) est bornée, que

$$\|u_n\|_{1/2}^2 \le 2c_6 \|u_n\|_{1/2}^{1+1/r} + c_8.$$

Puisque $r > 1$, on obtient que la suite (u_n) est bornée. Puisque $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ est un espace de Hilbert, la boule fermée est faiblement compacte. Donc la suite (u_n) possède une sous-suite, que nous noterons encore (u_n), faiblement convergente dans $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ c'est-à-dire $u_n \rightharpoonup u = x^+ + x^- + x^0$. On a donc que $\langle f'(u_n), x_n^\pm - x^\pm \rangle - \langle f'(u), x_n^\pm - x^\pm \rangle \to 0$, car $f'(u_n) \to 0$ et $x_n^\pm \rightharpoonup x^\pm$.

Puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ et que l'inclusion de $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ dans $L^\alpha(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ est compacte pour tout $\alpha > 1$, on sait que (u_n) possède une sous-suite convergente dans $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ et dans $L^{2s}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ que nous continuerons de noter (u_n). On a donc par le Lemme 7.11 que $\|\nabla H(t, u_n) - \nabla H(t, u)\|_{L^2} \to 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\int_{S^1} \Big(\nabla H(t, u_n) - \nabla H(t, u)\Big) \cdot \Big(x_n^+ - x^+\Big)\, dt \to 0.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\Big\langle f'(u_n) - f'(u), x_n^\pm - x^\pm \Big\rangle = a(u_n, x_n^\pm - x^\pm) - a(u, x_n^\pm - x^\pm) + \\
\int_{S^1} (\nabla H(t, u_n) - \nabla H(t, u)) \cdot (x_n^\pm - x^\pm)\, dt
\end{aligned}$$

$$= a(x_n^\pm - x^\pm, x_n^\pm - x^\pm) + \int_{S^1} (\nabla H(t, u_n) - \nabla H(t, u)) \cdot (x_n^\pm - x^\pm)\, dt.$$

Donc, par ce qui précède,

$$a(x_n^\pm - x^\pm, x_n^\pm - x^\pm) = \langle f'(u_n), x_n^\pm - x^\pm\rangle - \langle f'(u), x_n^\pm - x^\pm\rangle$$
$$- \int_{S^1} \Big(\nabla H(t, u_n) - \nabla H(t,u)\Big) \cdot \Big(x_n^\pm - x^\pm\Big)\, dt \to 0. \quad (7.23)$$

Puisque $a(x_n^\pm - x^\pm, x_n^\pm - x^\pm) = \pm\|x_n^\pm - x^\pm\|_{1/2}^2$, on obtient que $x_n^\pm \to x^\pm$ et donc $u_n \to u$ fortement dans $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$. ■

7.4. Preuve du théorème principal

Afin de démontrer le Théorème 7.2, nous voulons d'abord vérifier que ϕ vérifie des inégalités appropriées sur des paires d'ensembles qui s'enlacent.

Théorème 7.14. *Il existe deux constantes R^+ et R^- , $v_0 \in V$ et $\lambda > 0$ tels que les ensembles*

$$B^+ = \{x \in X^+ \mid \|x\|_{1/2} \leq R^+\}$$
$$S^+ = \{x \in X^+ \mid \|x\|_{1/2} = R^+\}$$
$$B^- = \{x \in X^- \mid \|x\|_{1/2} \leq R^-\}$$
$$S^- = \{x \in X^- \mid \|x\|_{1/2} = R^-\}$$

satisfont

$$\sup \phi(S^- \times V) < \inf \phi(B^+ \times \{v_0\}) \leq \sup \phi(B^- \times V) < \inf \phi(S^+ \times \{v_0\}). \quad (7.24)$$

De plus, si l'inégalité (7.1) *est vérifiée, alors*

$$\sup \phi(S^- \times V) < \inf \phi(B^+ \times V) \leq \sup \phi(B^- \times V) < \inf \phi(S^+ \times V). \quad (7.25)$$

DÉMONSTRATION. Soit $(x^-, v) \in X^- \times V$ et $x^0 \in X^0$ tel que $v = [x^0]$. Nous avons donc, par le Théorème 7.1 et le Lemme 7.6,

$$\begin{aligned}
\phi(x^-, v) &= \frac{a(x^-, x^-)}{2} + \int_{S^1} H(t, x^- + x^0) - H(t, x^0)\, dt + \int_{S^1} H(t, x^0)\, dt \\
&= \frac{-\|x^-\|_{1/2}^2}{2} + \int_{S^1} H(t, x^- + x^0) - H(t, x^0)\, dt + \int_{S^1} H(t, x^0)\, dt \\
&\leq \frac{-\|x^-\|_{1/2}^2}{2} + \varepsilon \int_{S^1} \|x^-\|^2\, dt + c_\varepsilon \int_{S^1} \|x^-\|^{s+1}\, dt + \phi(v) \\
&= \frac{-\|x^-\|_{1/2}^2}{2} + \varepsilon \|x^-\|_{L^2}^2 + c_\varepsilon \|x^-\|_{L^{s+1}}^{s+1} + \phi(v) \\
&\leq \frac{-\|x^-\|_{1/2}^2}{2} + \varepsilon \gamma_2 \|x^-\|_{1/2}^2 + c_\varepsilon \gamma_{s+1} \|x^-\|_{1/2}^{s+1} + \phi(v) \\
&= (-\frac{1}{2} + \varepsilon\gamma_2 + c_\varepsilon \gamma_{s+1} \|x^-\|_{1/2}^{s-1}) \|x^-\|_{1/2}^2 + \phi(v).
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Puisque, par le Lemme 7.8, $s > 1$, pour ε assez petit, il existe R^- et $k_0 > 0$ une constante tels que, par l'équation (7.26), on a

$$\begin{aligned}
\phi(x^-, v) < -k_0 + \phi(v) < \phi(v) \qquad \forall x^- \in S^-, \forall v \in V, \\
\phi(x^-, v) \leq \phi(v) \qquad \forall x^- \in B^-, \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

De même, par le Théorème 7.1,

$$\begin{aligned}
\phi(x^+, v) &= \frac{a(x^+, x^+)}{2} + \int_{S^1} H(t, x^+ + x^0) - H(t, x^0)\, dt + \int_{S^1} H(t, x^0)\, dt \\
&\geq \frac{\|x^+\|_{1/2}^2}{2} - \varepsilon \int_{S^1} \|x^+\|^2\, dt - c_\varepsilon \int_{S^1} \|x^+\|^{s+1}\, dt + \phi(v) \\
&= \frac{\|x^+\|_{1/2}^2}{2} - \varepsilon \|x^+\|_{L^2}^2 - c_\varepsilon \|x^+\|_{L^{s+1}}^{s+1} + \phi(v) \\
&\geq \frac{\|x^+\|_{1/2}^2}{2} - \gamma_2 \varepsilon \|x^+\|_{1/2}^2 - \gamma_{s+1} c_\varepsilon \|x^+\|_{1/2}^{s+1} + \phi(v) \\
&= (\frac{1}{2} - \gamma_2\varepsilon - \gamma_{s+1} c_\varepsilon \|x^+\|_{1/2}^{s-1}) \|x^+\|_{1/2}^2 + \phi(v)
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Pour ε et R^+ assez petits, il existe une constante k_1 telle que, par l'équation (7.28),

$$\begin{aligned}
\phi(x^+, v) > k_1 + \phi(v) > \phi(v) \qquad \forall x^+ \in S^+, \forall v \in V \\
\phi(x^+, v) \geq \phi(v) \qquad \forall x^+ \in B^+, v \in V.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Ainsi, si

$$\sup_{v \in V} \phi(v) - \inf_{v \in V} \phi(v) < \lambda = \min\{k_0, k_1\}, \tag{7.30}$$

en combinant (7.27), (7.29) et (7.30), nous obtenons

$$\phi(x^+, v_1) \geq \inf \phi(V) > -\lambda + \sup \phi(V) \geq k_0 - \lambda + \phi(x^-, v_2)$$
$$\forall (x^+, v_1) \in B^+ \times V, \forall (x^-, v_2) \in S^- \times V,$$
$$\phi(x^+, v_1) > k_1 + \inf \phi(V) \geq k_1 - \lambda + \sup \phi(V) \geq k_1 - \lambda + \phi(x^-, v_2)$$
$$\forall (x^+, v_1) \in S^+ \times V, \forall (x^-, v_2) \in B^- \times V.$$

Donc

$$\sup \phi(S^- \times V) < \inf \phi(B^+ \times V) \leq \sup \phi(B^- \times V) < \inf \phi(S^+ \times V).$$

D'un autre côté, si l'équation (7.30) n'est pas vérifiée, en choisissant v_0 tel que

$$\phi(v_0) = \max_{v \in V} \phi(v). \tag{7.31}$$

en combinant (7.27), (7.29) et (7.31), nous obtenons

$$\phi(x^+, v_0) \geq \phi(v_0) \geq \phi(v) > -k_0 + \phi(v) > \phi(x^-, v)$$
$$\forall v \in V, \forall x^+ \in B^+, \forall x^- \in S^-,$$
$$\phi(x^+, v_0) > k_1 > \phi(v_0) \geq \phi(v) \geq \phi(x^-, v)$$
$$\forall v \in V, \forall x^+ \in S^+, \forall x^- \in B^-.$$

D'où

$$\sup \phi(S^- \times V) < \inf \phi(B^+ \times \{v_0\}) \leq \sup \phi(B^- \times V) < \inf \phi(S^+ \times \{v_0\}).$$

■

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème principal de ce chapitre.

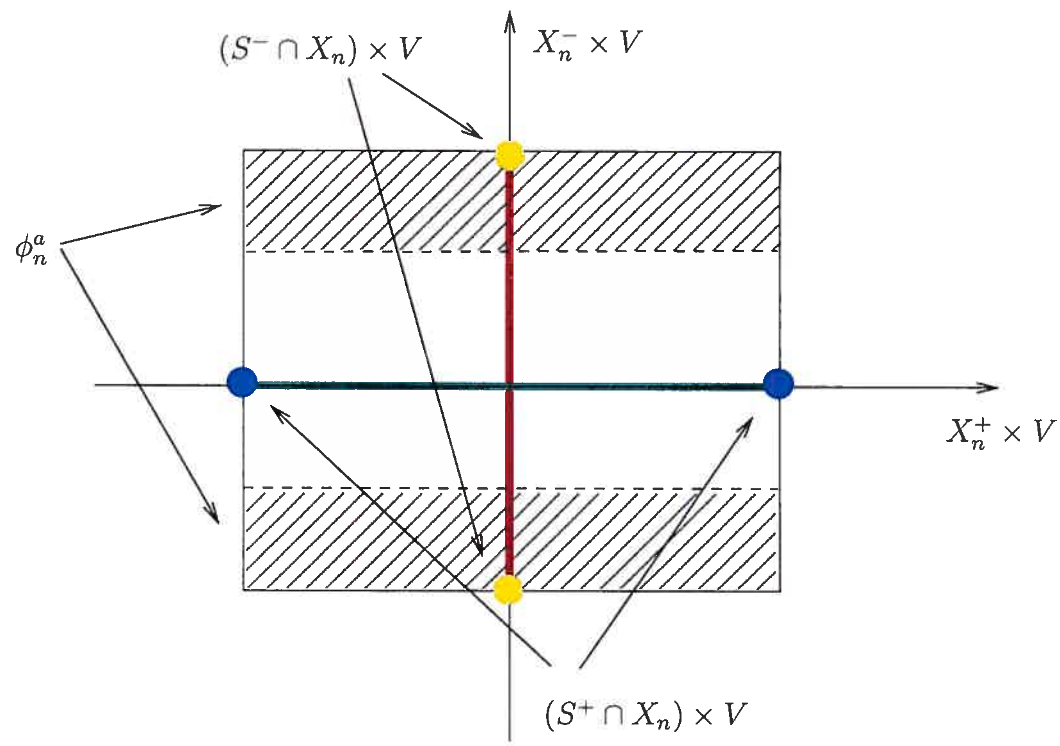


FIG. 7.1. Situation d'enlacement

PREUVE DU THÉORÈME 7.2. Supposons $\operatorname{card}(K) < \infty$. Dans le cas contraire, la conclusion est vérifiée.

Puisque ϕ satisfait $(PS)_c^*$ pour tout c et que $\phi \in C^1(X \times V, \mathbb{R})$, par le Théorème 1.18, ϕ satisfait $\mathscr{D}^*(X \times V, K_c)$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$((B^- \cap X_n) \times V, (S^- \cap X_n) \times V) \text{ enlace } ((B^+ \cap X_n) \times \{v_0\}, (S^+ \cap X_n) \times \{v_0\}),$$

où v_0 est donné au Théorème 7.14, en appliquant le Théorème 4.12, on trouve que $\operatorname{card} K \geq 1$.

Si la condition (7.1) est vérifiée pour λ donné par le Théorème 7.14, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $S^- \times V \subseteq (\phi^a \cap ((B^- \oplus B^+) \times V))$ avec $\phi^a \cap (B^+ \times V) = \emptyset$. Nous sommes précisément dans la situation décrite au Théorème 4.11. Puisque V est le tore de dimension N, par la Proposition 1.12, on a

$$\operatorname{cat}_{(B^- \cap X_n) \times V, (S^- \cap X_n) \times V}((B^- \cap X_n) \times V) \geq N + 1.$$

Par les Théorèmes 4.10 et 4.11, nous obtenons que $f\text{-}\mathrm{cat}^{\infty}_{X\times V,S^-\times V}(B^-\times V) \geq N+1$ et

$$\mathrm{card}(\{K_c \mid c \in [\sup \phi(S^- \times V), \sup \phi(B^- \times V)]\}) \geq N + 1.$$

Le problème $(*)$ a donc au moins $N + 1$ orbites distinctes de solutions.

■

Nous avons donc obtenu que le problème $(*)$ a toujours au moins une solution faible périodique. De plus, dans le cas où (7.1) est vérifiée, nous avons obtenu qu'il existe au moins $N + 1$ solutions faibles périodiques distinctes.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons développé plusieurs notions de catégories assujetties à une fonctionnelle f, permettant de traiter un grand nombre de situations, du moins d'un point de vue théorique. L'amélioration des bornes obtenues pour le nombre de points critiques d'une fonctionnelle est notable dans plusieurs cas.

Un des problèmes fondamentaux pour cette théorie est la difficulté à calculer explicitement la f-catégorie. Il n'y a pas à s'en étonner, car l'évaluation de la catégorie de Lusternik-Schnirelman est également ardue. Dans ce cas, les outils de topologie algébrique comme le cuplength sont utilisés pour fournir des bornes inférieures sur la catégorie. Il serait souhaitable de développer des méthodes permettant de trouver des bornes inférieures pour la f-catégorie et améliorer celle fournie par le cuplength.

Du point de vue des applications, on peut espérer que l'application de la f-catégorie pourra conduire à de nombreux nouveaux résultats de multiplicité. En effet, comme mentionné dans l'introduction, lorsque les fonctions sont définies sur un espace vectoriel, la catégorie classique ne permet pas d'obtenir des résultats de multiplicité. Des applications au problème de plaques accrochées tel que présenté par Marino et Mugnai [41] peuvent aussi être envisagées. Dans ces situations, la f-catégorie asymptotique pourrait être d'une grande utilité.

INDEX

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Ambrosetti et P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal, **14** (1973), 349–381.

[3] T. Bartsch et M. Clapp, *Critical point theory for indefinite functionals with symmetries*, J. Funct. Anal., **138** (1996), 107–136.

[4] T. Bartsch et A. Szulkin, *Hamiltonian systems : periodic and homoclinic solutions by variational methods*, dans Handbook of differential equations : ordinary differential equations. Vol. II, 77–146, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[5] K. Borsuk, *Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage*, Fund. Math., **35** (1948), 175–180.

[6] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[7] H. Brezis et L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 939–963.

[8] A. M. Candela, F. Giannoni et A. Masiello, *Multiple critical points for indefinite functionals and applications*, J. Differential Equations, **155** (1999), 203–230.

[9] A. Canino et M. Degiovanni, *Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, dans Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 472, 1–50, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[10] K. C. Chang, *Variational methods for non-differential functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **80** (1981), 102–129.

[11] K. C. Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*, Prog. Nonlinear Differential Equations, vol. 6, Birkhäuser, Boston, 1993.

[12] D. C. Clark, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math. J., **22** (1972), 65–74.

[13] F. Clarke, *Optimisation and nonsmooth analysis*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advances Texts, John Wiley & Sons, New-York, 1983.

[14] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea et D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 103, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[15] J.-N. Corvellec, *Contribution à la théorie des poins critiques*, Thèse de doctorat, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 1990.

[16] J.-N. Corvellec, *Quantitative deformation theorems and critical point theory*, Pacific J. Math., **187** (1999), 263–279.

[17] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni et M. Marzocchi, *Deformation properties for continuous functionals and critical point theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **1** (1993), 151–171.

[18] E. De Giorgi, A. Marino et M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68** (1980), 180–187.

[19] M. Degiovanni, *Nonsmooth critical point theory and applications*, Nonlinear Anal., **30** (1997), 89–99.

[20] M. Degiovanni et M. Marzocchi, *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **167** (1994), 73–100.

[21] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[22] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1978.

[23] G. Fournier, D. Lupo, M. Ramos et M. Willem, *Limit relative category and critical point theory*, dans Dynamics reported, Dynam. Report. Expositions

Dynam. Systems (N.S.), vol. 3, 1–24, Springer, Berlin, 1994.

[24] G. Fournier et M. Willem, *Multiple solutions of the forced double pendulum equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **6** (1989), 259–281.

[25] G. Fournier et M. Willem, *Relative category and the calculus of variations*, dans Variational methods (Paris, 1988), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 4, 95–104, Birkhäuser, Boston, 1990.

[26] M. Frigon, *On a critical point theory for multivalued functionals and application to partial differential inclusion*, Nonlinear Anal., **31** (1998), 735–753.

[27] M. Frigon, *On a new notion of linking and application to elliptic problems at resonance*, J. Differential Equations, **153** (1999), 96–120.

[28] M. Frigon, *Remarques sur l'enlacement en théorie des points critiques pour des fonctionnelles continues*, Canad. Math. Bull., **47** (2004), 515–529.

[29] A. Granas et M. Lassonde, *Some elementary general principles of convex analysis*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **5** (1995), 23–37.

[30] S. J. Li et M. Willem, *Applications of local linking to critical point theory*, J. Math. Anal. Appl., **189** (1995), 6–32.

[31] E. H. Lieb et M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[32] J. Q. Liu, *A generalized saddle point theorem*, J. Differential Equations, **82** (1989), 372–385.

[33] J. Q. Liu et S. J. Li, *An existence theorem for multiple critical points and its application*, Kexue Tongbao, **29** (1984), 1025–1027.

[34] Y. Long et X. Xu, *Periodic solutions for a class of nonautonomous Hamiltonian systems*, Nonlinear Anal., **41** (2000), 455–463.

[35] Y. M. Long et E. Zehnder, *Morse-theory for forced oscillations of asymptotically linear Hamiltonian systems*, dans Stochastic processes, physics and geometry (Ascona and Locarno, 1988), World Sci. Publishing, Teaneck, 1990, 528–563.

[36] D. Lupo et A. M. Micheletti, *Multiple solutions of Hamiltonian systems via limit relative category*, J. Comput. Appl. Math., **52** (1994), 325–335.

[37] D. Lupo et A. M. Micheletti, *Two applications of a three critical points theorem*, J. Differential Equations, **132** (1996), 222–238.

[38] L. Lusternik et L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Actualités scientifiques et industrielles ; 188. Exposés sur l'analyse mathématique et ses applications ; 3, Hermann, Paris, 1934.

[39] A. Marino, A. M. Micheletti et A. Pistoia, *A nonsymmetric asymptotically linear elliptic problem*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **4** (1994), 289–339.

[40] A. Marino et D. Mugnai, *Asymptotical multiplicity and some reversed variational inequalities*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **20** (2002), 43–62.

[41] A. Marino et D. Mugnai, *Asymptotically critical points and their multiplicity*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **19** (2002), 29–38.

[42] J. Mawhin et M. Willem, *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 1989.

[43] R. C. McOwen, *Partial differential equations : methods and applications*, Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[44] V. Moroz, A. Vignoli et P. Zabreĭko, *On the three critical points theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **11** (1998), 103–113.

[45] D. Mugnai, *On a "reversed" variational inequality*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **17** (2001), 321–357.

[46] J. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice Hall, New Jersey, 1975.

[47] W. M. Ni, *Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations*, J. Analyse Math., **37** (1980), 248–275.

[48] R. S. Palais, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology, **5** (1966), 115–132.

[49] J.-F. Perreault, *Quelques résultats d'existence de points asymptotiquement critiques*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2004.

[50] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with appplications to differential equations*, n° 65 dans Conference board of the mathematical sciences, American Mathematical Society, 1986.

[51] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[52] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[53] J. T. Schwartz, *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 307–315.

[54] E. A. d. B. e. Silva, *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Anal., **16** (1991), 455–477.

[55] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, Publish or Perish Inc., Wilmington, 1979.

[56] M. Struwe, *Variational methods*, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[57] A. Szulkin, *Minimax principle for lower semi-continuous functions and application to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire, **3** (1986), 77–109.

[58] A. Szulkin, *Critical point theory of Ljusternik-Schnirelman type and applications to partial differential equations*, dans Minimax results of Lusternik-Schnirelman type and applications, Les Presses de l'Université de Montréal, 1989, 35–94.

[59] A. Szulkin, *A relative category and applications to critical point theory for strongly indefinite functionals*, Nonlinear Anal., **15** (1990), 725–739.

[60] C. Varga et V. Varga, *A note on linking problems in equivariant case*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., **41** (1996), 113–119.

[61] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, vol. 24, Birkhäuser, Boston, 1996.

[62] M. Willem, *La catégorie relative*, Ann. Sci. Math. Québec, **22** (1998), 245–250.

[63] L. Yongqing, *A limit index theory and its applications*, Nonlinear Anal., **25** (1995), 1371–1389.