Université de Montréal

DÉTERMINATION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES INVARIANTES D'ORDRE QUATRE ET LEURS DISCRÉTISATIONS

par
Marc-Étienne Cloutier

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Février, 2007

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

DÉTERMINATION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES INVARIANTES D'ORDRE QUATRE ET LEURS DISCRÉTISATIONS

présenté par:

Marc-Étienne Cloutier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu B. Paranjape,	président-rapporteur
Pavel Winternitz,	directeur de recherche
Jiri Patera,	membre du jury

Mémoire accepté le: ....

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous déterminons dans un premier temps les équations différentielles invariantes par rapport aux groupes de Lie dans le plan complexe ou réel. La classification de ces groupes a été donnée par Sophus Lie dans le cas complexe et par A.Gonzales-Lopez, N.Kamran et P.Olver dans le cas réel. Dans un cadre d'intêrets physique nous voulons ensuite déterminer les schémas discrets invariants pour les mêmes groupes.

Mots clés : prolongation, algèbre de Lie, équation différentielle invariante, groupes de symétries, équation aux différences finies.

ABSTRACT

The work that we present here is firstly a search for ordinary differential equations invariant under Lie groups acting on the complex or real plane. The classification of these groups is known since the work of Sophus Lie in the complex case and since the work of A.Gonzales-Lopez, N.Kamran and P.Olver for the real case. After that we construct difference schemes invariant under the same groups and approximating the formed invariant equations.

Keywords : prolongation, Lie algebra, symmetry group, ordinary differential equation, point symmetry, difference schemes.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie premièrement mon directeur Pavel Winternitz pour m'avoir dirigé. Je remercie ensuite mes parents et mon frère pour m'avoir supporté. Je remercie aussi tous les gens que j'ai cotoyés et qui m'ont souvent porté de bons conseils, que dieu vous bénisse.

INTRODUCTION

La théorie des groupes de Lie fut premièrement appliquée à la transformation des ensemble-solution de systèmes d'équations différentielles[1][2][3][4]. Au cours des années, cette théorie est devenu un outil puissant pour classer les équations différentielles et les résoudre. Les techniques développées sont décrites dans plusieurs références[5][6][7]. Pour les équations différentielles, il y a deux applications qui prévalent en physique. Dans la première les équations sont déjà connues et on utilise la théorie des groupes pour les résoudre. Dans la seconde les symétries précèdent les équations, c'est-à-dire que les symétries d'un problème sont connues et on les utilise afin d'élaborer un modèle théorique. La classification d'équations aux différences finies selon les groupes de Lie est beaucoup plus récentes[8][9]. Dans cet ouvrage, nous utiliserons le même point de vue que dans l'article de O.Gat[10], c'est-à-dire que nous considérons un groupe de symétries et son algèbre de Lie a priori donnés et nous en déduisons une équation différentielle invariante. Nous cherchons dans un second temps un schéma , c'est-à-dire une équation aux différences finies munie d'un maillage ayant le même groupe de symétries et cette algèbre. Nous considérons alors des équations différentielles du quatrième ordre de la forme :

$$y''''(x) = \omega(x, y, y', y'', y''') \tag{1}$$

L'algèbre de Lie L du groupe de symétries de l'équation (1) est réalisée par des champs de vecteurs de la forme :

$$X_\alpha \;=\; \xi_\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x} \;+\; \eta_\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\;, \alpha = 1, \cdots, m. \tag{2}$$

S. Lie a montré que pour une équation différentielle ordinaire d'ordre n≥3, la dimension de L est au plus n+3. Pour le modèle discret, on le représente par deux équations, soient :

(voir Kozlov,Dorodnitsyn,Winternitz 2000),

$$E_1(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0, \tag{3}$$

$$E_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0, \tag{4}$$

telles que

$$det\frac{\partial(E_1, E_2)}{\partial(x_{n-2}, y_{n-2})} \neq 0\ ,\ det\frac{\partial(E_1, E_2)}{\partial(x_{n+2}, y_{n+2})} \neq 0; \tag{5}$$

Lorsque les pas h_i du schéma aux diférences finies tendent vers 0, l'équation (3) doit tendre vers une équation différentielle du quatrième ordre, alors que l'équation (4) tend vers l'identité 0=0.

Nous avons aussi la motivation sur le plan physique que l'espace-temps est peut-être discret aux échelles de la longueur de Planck et du temps de Planck, ce qui impliquerait une physique discrète. Même si l'espace-temps est continu, beaucoup de phénomènes physiques sont discrets et décrits par les équations à différences.

Une autre motivation est le désir de discrétiser les équations différentielles en préservant leurs symétries afin d'améliorer les méthodes numériques[11].

CHAPITRE 1

EXPOSITION DES MÉTHODES POUR DÉTERMINER LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE QUATRE INVARIANTES ET DES SCHÉMA D'ÉQUATIONS A DIFFÉRENCES FINIES INVARIANTS

On cherche premièrement les équations différentielles invariantes. La théorie des prolongations[5] impose :

$$pr^{(4)}X_\alpha E(x,y,y',y'',y''',y'''') = \xi_\alpha\frac{\partial E}{\partial x}+\eta_\alpha\frac{\partial E}{\partial y}+\eta_\alpha^{(1)}\frac{\partial E}{\partial y'}+\eta_\alpha^{(2)}\frac{\partial E}{\partial y''}+\eta_\alpha^{(3)}\frac{\partial E}{\partial y'''}+\eta_\alpha^{(4)}\frac{\partial E}{\partial y''''} = 0,$$

où

$$\eta_\alpha^{(1)} = D_x\eta_\alpha - y'D_x\xi_\alpha,$$

$$\eta_\alpha^{(n)} = D_x\eta_\alpha^{(n-1)} - y^{(n)}D_x\xi_\alpha\ , \quad pour\ n \geq 2.$$

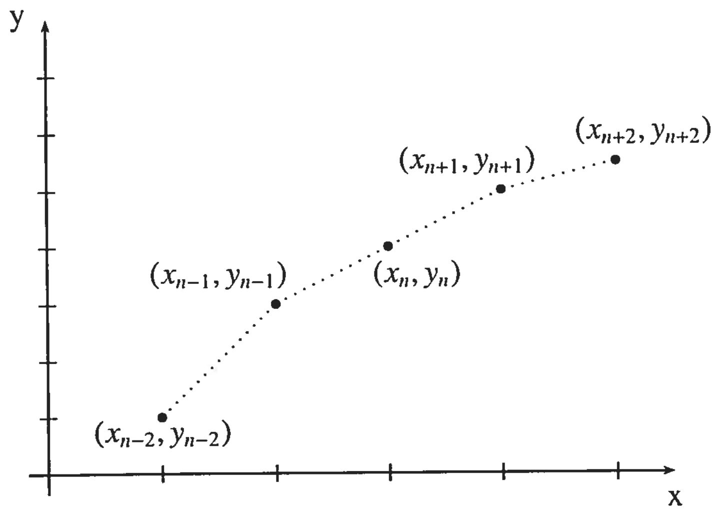
En utilisant la méthode des charactéristiques, on obtient un ensemble d'invariants $\{I_1, \cdots, I_k\}$, où le nombre d'invariants k est donné par :

$$k = dim(M) - rang(Z), \tag{1.1}$$

où M est une sous-variété de l'espace des jets, M $\sim \{(x,y,y',y'',y''',y'''')\}$. La matrice Z est :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \eta_1^{(3)} & \eta_1^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_m & \eta_m & \eta_m^{(1)} & \eta_m^{(2)} & \eta_m^{(3)} & \eta_m^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Nous étudions ensuite les schémas invariants en fonction des éléments du stencil nécessaire pour des équations du quatrième ordre.



Le pas entre chaque points du maillage est donné par :

$$\begin{aligned} h_{n-1} &= x_{n-1} - x_{n-2}, \\ h_n &= x_n - x_{n-1}, \\ h_{n+1} &= x_{n+1} - x_n, \\ h_{n+2} &= x_{n+2} - x_{n+1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les formules pour les dérivées premières sont alors :

$$\begin{aligned} y_x^{(n-1)} &= \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}, \\ y_x^{(n)} &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}, \\ y_x^{(n+1)} &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}}, \\ y_x^{(n+2)} &= \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h_{n+2}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Les formules des dérivées secondes sont :

$$y_{xx}^{(n)} = \frac{y_x^{(n)} - y_x^{(n-1)}}{\frac{h_{n-1}+h_n}{2}} = \frac{2}{h_{n-1} + h_n}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right),$$

$$y_{xx}^{(n+1)} = \frac{2\ (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)})}{h_n + h_{n+1}}, \tag{1.4}$$

$$y_{xx}^{(n+2)} = \frac{2\ (y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)})}{h_{n+1} + h_{n+2}}.$$

Les dérivées de troisième ordre sont données par :

$$y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3\ (y_{xx}^{(n+1)} - y_{xx}^{(n)})}{h_{n-1} + h_n + h_{n+1}}, \tag{1.5}$$

$$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\ (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)})}{h_n + h_{n+1} + h_{n+2}}.$$

Finalement, la dérivée d'ordre 4 est donnée par :

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4\ (y_{xxx}^{(n+2)} - y_{xxx}^{(n+1)})}{h_{n-1} + h_n + h_{n+1} + h_{n+2}}. \tag{1.6}$$

.

La formule pour la quatrième prolongation des équations aux différences finies est donné par :

$$pr^{(4)}X_\alpha = \sum_{i=n-2}^{n+2}\left(\xi_\alpha(x_i, y_i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_\alpha(x_i, y_i)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \tag{1.7}$$

$$= \xi_{\alpha,n-2}\frac{\partial}{\partial x_{n-2}} + \xi_{\alpha,n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \xi_{\alpha,n}\frac{\partial}{\partial x_n} + \tag{1.8}$$

$$\xi_{\alpha,n+1}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \xi_{\alpha,n+2}\frac{\partial}{\partial x_{n+2}} + \eta_{\alpha,n-2}\frac{\partial}{\partial y_{n-2}} +$$

$$\eta_{\alpha,n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \eta_{\alpha,n}\frac{\partial}{\partial y_n} + \eta_{\alpha,n+1}\frac{\partial}{\partial y_{n+1}} + \eta_{\alpha,n+2}\frac{\partial}{\partial y_{n+2}}$$

où $\xi_{\alpha,n} = \xi_\alpha(x_n, y_n)$. En appliquant la méthode des caractéristiques à la dernière équation on trouve un certain nombre d'invariants. Ce nombre r est donnée par :

$$r = dim(M) - rang(Z), \tag{1.9}$$

où M $\subseteq \{(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2})\}$ et Z est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \xi_{1,n-2} & \eta_{1,n-2} & \xi_{1,n-1} & \eta_{1,n-1} & \xi_{1,n} & \eta_{1,n} & \xi_{1,n+1} & \eta_{1,n+1} & \xi_{1,n+2} & \eta_{1,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{m,n-2} & \eta_{m,n-2} & \xi_{m,n-1} & \eta_{m,n-1} & \xi_{m,n} & \eta_{m,n} & \xi_{m,n+1} & \eta_{m,n+1} & \xi_{m,n+2} & \eta_{m,n+2} \end{pmatrix}.$$

Le nombre de ligne de Z est egal a la dimension de la base de l'algèbre $\{X_\alpha, \alpha = 1, \cdots, m.\}$..

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 1 ET 2

2.1 Analyse des équations différentielles et des schémas invariants pour un groupe de dimension 1.

Pour commencer, on utilise le champ de vecteurs,

$$\mathbf{D}_{1,1} \ : \ X_1 = \partial_y \, , \quad \text{où } \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

C'est le groupe des translations en une dimension.Nous cherchons l'équation différentielle invariante de ce groupe de symétries. Soit E(x, y, y', y'', y''', y'''')=0 une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre. La méthode pour trouver les invariants passe par la théorie des prolongations et impose

$$pr^{(4)} X_1 E = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0.$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y'}, \frac{\partial E}{\partial y''}, \frac{\partial E}{\partial y'''}, \frac{\partial E}{\partial y''''}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation, ceci implique que l'on trouve cinq invariants soient :

$$I_1 = x, \;\; I_2 = y', \;\; I_3 = y'', \;\; I_4 = y''', \;\; I_5 = y''''.$$

On remarque que le nombre d'invariants correspond bien à celui que prédit la formule (1.1). La base des invariants est donc,

$$\{x, \, y', \, y'', \, y''', \, y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est alors,

$$y'''' = F(x, y', y'', y''') \tag{2.1}$$

Par le changement de variable u=y', l'équation différentielle invariante devient

$$u''' = F(x, u, u', u'') \tag{2.2}$$

et on a donc réduit l'équation différentielle d'ordre 4 à une équation différentielle d'ordre 3. Vérifions maintenant quel est le système d'équations aux différences finies invariants pour ce même groupe de symétries en une dimension. On trouve premièrement les invariants à l'aide de la quatrième prolongation discrète du champ de vecteurs X_1,

$$pr^{(4)}X_1 E(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial y_{n-2}} + \frac{\partial E}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial E}{\partial y_n} + \frac{\partial E}{\partial y_{n+1}} + \frac{\partial E}{\partial y_{n+2}} = 0 \tag{2.4}$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial x_{n-2}}, \frac{\partial E}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial E}{\partial x_n}, \frac{\partial E}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial E}{\partial x_{n+2}}$ n'apparaisent pas dans l'équation, on a donc trouvé cinq invariants soient :

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2}.$$

La méthode des caractéristiques appliquée à l'équation (2.4) nous donne

$$dy_{n-2} = dy_{n-1} = dy_n = dy_{n+1} = dy_{n+2}, \tag{2.5}$$

ce qui représente 4 équations intégrables. Comme l'équation (1.9) prédit neuf invariants, nous avons déjà les cinq invariants I_i où i=1,2,3,4,5 et les quatres autres proviennent de l'intégration des équations (2.5). Ceci mènent aux invariants :

$$I_6 = y_{n-1} - y_{n-2}, \quad I_7 = y_n - y_{n-1}, \quad I_8 = y_{n+1} - y_n, \quad I_9 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

On peut alors écrire une base pour les invariants comme

$$\{x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ y_{n-1} - y_{n-2},\ y_n - y_{n-1},\ y_{n+1} - y_n,\ y_{n+2} - y_{n+1}\}.$$

On peut réecrire cette base d'une façon plus pratique en fonction des équations (1.2) à (1.6), soit :

$$\left\{x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ h_{n+2},\ \frac{y_x^{(n-1)} + y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{4},\ \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2},\ y_{xxxx}^{(n+2)}\right\}$$

Cette base est obtenue par les transformations suivantes :

$$y_x^{(n-1)} = \frac{I_6}{I_2 - I_1}, \quad y_x^{(n)} = \frac{I_7}{I_3 - I_2}, \quad y_x^{(n+1)} = \frac{I_8}{I_4 - I_3}, \quad y_x^{(n+2)} = \frac{I_9}{I_5 - I_4},$$

$$y_{xx}^{(n)} = \frac{2(y_x^{(n)} - y_x^{(n-1)})}{I_3 - I_1}, \quad y_{xx}^{(n+1)} = \frac{2(y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)})}{I_4 - I_2}, \quad y_{xx}^{(n+2)} = \frac{2(y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)})}{I_5 - I_3},$$

$$y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+1)} - y_{xx}^{(n)})}{I_4 - I_1}, \quad y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)})}{I_5 - I_2},$$

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4(y_{xxx}^{(n+2)} - y_{xxx}^{(n+1)})}{I_5 - I_1}$$

Le schéma invariant le plus général est alors exprimé par :

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = H\left(x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{y_x^{(n-1)} + y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{4},\ \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right), \tag{2.6}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1}, \frac{y_x^{(n-1)} + y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{4}, \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right). \tag{2.7}$$

Dans la limite où les h_i tendent vers zéro, l'équation (2.6) tend vers (2.1) et (2.7) tend vers l'équation 0=0. Autrement dit,

$$\lim_{h_i \to 0} H = F(x, y', y'', y''').$$

et (2.7) tend vers l'égalité 0=0 à la condition que

$$0 < |\lim_{h_i \to 0} G| < \infty.$$

Lors des prochains cas, nous ne discuterons pas de ces limites, mais elles doivent donner des résultats semblables.

2.2 Analyse des équations différentielles et des schémas invariants pour un groupe de dimension 2.

Il existe quatre réalisations inéquivalentes des algèbres de Lie de dimension 2. On a premièrement le cas,

$$\mathbf{D_{2,1}}: \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y.$$

Nous cherchons l'équation différentielle invariante pour ce groupe de symétries (des translations). Premièrement nous avons que

$$pr^{(4)} X_1 E = \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

ce qui donne les invariants :

$$I_1 = y, \ I_2 = y', \ I_3 = y'', \ I_4 = y''', \ I_5 = y''''.$$

On a alors pour la quatrième prolongation du champ de vecteurs X_2 :

$$pr^{(4)}X_2E(I_1,\ldots,I_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = \frac{\partial E}{\partial I_1} = 0.$$

Ceci donne les invariants,

$$\phi_1 = y', \quad \phi_2 = y'', \quad \phi_3 = y''', \quad \phi_4 = y'''',$$

La base des invariants est alors,

$$\{y' , y'' , y''' , y'''' \}$$

ce qui nous donne pour équation différentielle invariante

$$y'''' = F(y', y'', y''') \tag{2.8}$$

que l'on peut réduire à une équation du troisième ordre en faisant le changement de varialble u=$y^{(1)}$. On a alors

$$u''' = F(u, u', u''). \tag{2.9}$$

Comme cette équation est invariante par rapport à ∂_x (translations en x) on peut encore réduire à l'ordre deux par une transformation d'hodographe[5]. On cherche maintenant le schéma invariant sous ce même groupe de symétries. La prolongation discrète de X_1 s'écrit alors,

$$pr^{(4)}X_1E = \frac{\partial E}{\partial x_{n-2}} + \frac{\partial E}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial E}{\partial x_n} + \frac{\partial E}{\partial x_{n+1}} + \frac{\partial E}{\partial x_{n+2}} = 0, \tag{2.10}$$

et comme $\frac{\partial E}{\partial y_{n-2}}, \frac{\partial E}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial E}{\partial y_n}, \frac{\partial E}{\partial y_{n+1}}, \frac{\partial E}{\partial y_{n+2}}$ n'apparaissent pas, on a déjà les invariants :

$$I_1 = y_{n-2} \ , \ I_2 = y_{n-1} \ , \ I_3 = y_n \ , \ I_4 = y_{n+1} \ , \ I_5 = y_{n+2}.$$

Avec la méthode des caractéristiques, l'équation (2.10) donne,

$$dx_{n-2} = dx_{n-1} = dx_n = dx_{n+1} = dx_{n+2}$$

et on a les invariants,

$$I_6 = x_{n-1} - x_{n-2}\ ,\ I_7 = x_n - x_{n-1},\ I_8 = x_{n+1} - x_n,\ I_9 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

La prolongation de X_2 donne :

$$pr^{(4)}X_2E(I_1, ..., I_9) = \sum_{i=1}^{9}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0. \tag{2.11}$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_6}, \frac{\partial E}{\partial I_7}, \frac{\partial E}{\partial I_8}, \frac{\partial E}{\partial I_9}$ n'apparaissent pas dans l'équation on a les invariants

$$\phi_1 = x_{n-1} - x_{n-2},\ \phi_2 = x_n - x_{n-1},\ \phi_3 = x_{n+1} - x_n,\ \phi_4 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Ensuite en appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation (2.11),

$$dI_1 = dI_2 = dI_3 = dI_4 = dI_5$$

ce qui donne les invariants,

$$\phi_5 = y_{n-1} - y_{n-2},\ \phi_6 = y_n - y_{n-1},\ \phi_7 = y_{n+1} - y_n,\ \phi_8 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous trouvons comme base des invariants,

$$\{x_{n-1}-x_{n-2}\ ,\ x_n-x_{n-1}\ ,\ x_{n+1}-x_n\ ,\ x_{n+2}-x_{n+1}\ ,\ y_{n-1}-y_n\ ,\ y_n-y_{n-1}\ ,\ y_{n+1}-y_n\ ,\ y_{n+2}-y_{n+1}\}.$$

On peut réecrire cette base comme,

$$\left\{h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ h_{n+2},\ \frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},\ \frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2},\ y_{xxxx}^{(n+2)}\right\}$$

que l'on a obtenue avec les relations suivantes :

$$y_x^{(n-1)} = \frac{\phi_5}{\phi_1},\ y_x^{(n)} = \frac{\phi_6}{\phi_2},\ y_x^{(n+1)} = \frac{\phi_7}{\phi_3},\ y_x^{(n+2)} = \frac{\phi_8}{\phi_4},$$

$$y_{xx}^{(n)} = \frac{2(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{\phi_1+\phi_2},\ y_{xx}^{(n+1)} = \frac{2(y_x^{(n+1)}-y_x^{(n)})}{\phi_2+\phi_3},\ y_{xx}^{(n+2)} = \frac{2(y_x^{(n+2)}-y_x^{(n+1)})}{\phi_3+\phi_4},$$

$$y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+1)}-y_{xx}^{(n)})}{\phi_1+\phi_2+\phi_3},\ y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+2)}-y_{xx}^{(n+1)})}{\phi_2+\phi_3+\phi_4},$$

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4(y_{xxx}^{(n+1)}-y_{xxx}^{(n)})}{\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4}.$$

Le schéma invariant est donc,

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = F\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},\ \frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right) \tag{2.12}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\,G\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},\ \frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right) \tag{2.13}$$

♠ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{2,2}}:\quad X_1 = \partial_y,\quad X_2 = x\,\partial_y.$$

Ici, l'algèbre est abélienne comme $D_{2,1}$, mais pour $D_{2,2}$ les deux vecteurs de base sont "linéairement connectés", c'est-à-dire linéairement dépendant avec les poids qui dépendent du point (x,y). On cherche a savoir l'équation différentielle du quatrième ordre qui est invariante sous ce groupe de symétries. On procède par la prolongation du champ de vecteurs X_1 qui s'annule,

$$pr^{(4)}X_1E = \frac{\partial E}{\partial y} = 0.$$

Ceci donne les invariants :

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''', \quad I_5 = y''''.$$

Nous reprenons la prolongation pour X_2, mais en fonction des invariants,

$$pr^{(4)}X_2\, E(I_1, \ldots, I_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2 I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = \frac{\partial E}{\partial I_2} = 0$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$, $\frac{\partial E}{\partial I_4}$, $\frac{\partial E}{\partial I_5}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation, nous avons les invariants :

$$\phi_1 = x, \quad \phi_2 = y'', \quad \phi_3 = y''', \quad \phi_4 = y''''.$$

Nous trouvons alors comme base des invariants,

$$\{x,\ y'',\ y''',\ y''''\}.$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = F(\,x,\ y'',\ y'''), \tag{2.14}$$

que l'on peut réduire à une équation différentielle d'ordre 2 en posant u=y''. On obtient alors

$$u'' = F(\,x,\ u,\ u'). \tag{2.15}$$

On cherche maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons $pr^{(4)}X_1E = 0$ et on retrouve les mêmes invariants que dans le cas de $\mathbf{D}_{1,1}$, soient :

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 = y_{n-1} - y_{n-2}, \quad I_7 = y_n - y_{n-1}, \quad I_8 = y_{n+1} - y_n, \quad I_9 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Pour le deuxième champ de vecteurs on a la condition,

$$pr^{(4)}X_2E(I_1, ..., I_9) = \sum_{i=1}^{9}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(x_{n-1} - x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_6} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_7} + (x_{n+1} - x_n)\frac{\partial E}{\partial I_8} + (x_{n+2} - x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_9} = 0. \quad (2.16)$$

On retrouve deja cinq invariants soient I_1 jusqu'à I_5, car $\frac{\partial E}{\partial I_1}, \frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}, \frac{\partial E}{\partial I_5}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation. Ensuite en appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation (2.16), on obtient :

$$\frac{dI_6}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{dI_7}{x_n - x_{n-1}} = \frac{dI_8}{x_{n+1} - x_n} = \frac{dI_9}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

On peut intègrer directement et on obtient les invariants :

$$\phi_1 = (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$\phi_2 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$\phi_3 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

La base pour les invariants est donc,

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}.$$

Une base plus pratique est :

$$\left\{x_n, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}, y_{xxxx}^{(n+2)}\right\},$$

que l'on a obtenu par les relations,

$$y_{xx}^{(n)} = \frac{-2\phi_1}{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}, \quad y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_2}{(I_3 - I_2)(I_4 - I_2)(I_4 - I_3)},$$

$$y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\phi_3}{(I_4 - I_3)(I_5 - I_3)(I_5 - I_4)}, y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+1)} - y_{xx}^{(n)})}{I_4 - I_1}, \; y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)})}{I_5 - I_2},$$

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4(y_{xxx}^{(n+2)} - y_{xxx}^{(n+1)})}{I_5 - I_1}.$$

Le modèle discret est alors,

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = F\left(x_n, \, h_{n-1}, \, h_n, \, h_{n+1}, \, \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}, \, \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right), \tag{2.17}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(x_n, \, h_{n-1}, \, h_n, \, h_{n+1}, \, \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}, \, \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right). \tag{2.18}$$

♣Etudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{2,3}}: \quad X_1 = \partial_y, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y.$$

Ici, l'algèbre n'est pas abélienne, mais résoluble. Les champs de vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas linéairement connectés. On cherche l'équation différentielle invariante sous ce groupe de symétries. La quatrième prolongation de X_1 nous donne les mêmes invariants que $\mathbf{D_{1,1}}$, soient :

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''', \quad I_5 = y''''.$$

En appliquant la quatrième prolongation à X_2, on obtient :

$$pr^{(4)}X_2 \; E(I_1, \ldots, I_5) = \sum_{i=1}^{5} (pr^{(4)}X_2 I_i) \, \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x\,\frac{\partial E}{\partial I_1} - y''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} - 2\,y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} - 3\,y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_5} = 0$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ n'apparaît pas dans la dernière équation, nous avons l'invariant :

$$I_2 = y'.$$

La méthode des caractéristiques nous donne,

$$\frac{dI_1}{I_1} = -\frac{dI_3}{I_3} = -\frac{dI_4}{2\,I_4} = -\frac{dI_5}{3\,I_5}.$$

Ceci nous donne les invariants,

$$\phi_1 = xy'', \quad \phi_2 = x^2y''', \quad \phi_3 = x^3y''''.$$

La base pour les invariants est alors donnée par,

$$\{y',\ xy'',\ x^2y''',\ x^3y''''\},$$

et l'équation différentielle invariante est :

$$y'''' = \frac{1}{x^3}F(y',\ xy''\ x^2y'''). \tag{2.19}$$

On peut réduire cette équation d'un ordre par le changement de coordonnées u=y', on obtient

$$u''' = \frac{1}{x^3}F(u,\ xu'\ x^2u''). \tag{2.20}$$

De plus, la dernière équation est invariante par rapport à $x\partial_x$ et on peut réduire à l'ordre 2. On cherche maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Le calcul des invariants par la prolongation de X_1 nous donne les résultats obtenus pour

$\mathbf{D}_{1,1}$, soient

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2}.$$

$$I_6 = y_{n-1} - y_{n-2}, \quad I_7 = y_n - y_{n-1}, \quad I_8 = y_{n+1} - y_n, \quad I_9 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous utilisons ensuite la quatrième prolongation de X_2 pour obtenir

$$pr^{(4)}X_2E(I_1, ..., I_9) = \sum_{i=1}^{9}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$x_{n-2}\frac{\partial E}{\partial I_1} + x_{n-1}\frac{\partial E}{\partial I_2} + x_n\frac{\partial E}{\partial I_3} + x_{n+1}\frac{\partial E}{\partial I_4} + x_{n+2}\frac{\partial E}{\partial I_5} +$$

$$(y_{n-1} - y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_6} + (y_n - y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_7} + (y_{n+1} - y_n)\frac{\partial E}{\partial I_8} + (y_{n+2} - y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_9} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, on obtient,

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7} = \frac{dI_8}{I_8} = \frac{dI_9}{I_9}.$$

Ce qui donne les invariants :

$$\phi_1 = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}, \ \phi_2 = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \ \phi_3 = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \ \phi_4 = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}},$$

$$\phi_5 = \frac{x_{n+2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \ \phi_6 = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{y_n - y_{n-1}}, \ \phi_7 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \ \phi_8 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Ainsi une base pour les invariants est :

$$\{\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3, \ \phi_4, \ \phi_5, \ \phi_6, \ \phi_7, \ \phi_8\}.$$

Cependant une base plus pratique est

$$\{\frac{h_{n-1}}{x_n}, \ \frac{h_n}{x_n}, \ \frac{h_{n+1}}{x_n}, \ \frac{h_{n+2}}{x_n}, \ \frac{y_x^{(n-1)} + y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{4},$$

$$x_n\,(\frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3}),\ x_n^2\,(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2}),\ x_n^3\,y_{xxxx}^{(n+2)},\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes :

$$\frac{h_{n-1}}{x_n}=(1-\phi_1)\phi_2,\quad \frac{h_n}{x_n}=1-\phi_2,\quad \frac{h_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{\phi_3}-1,\quad \frac{h_{n+2}}{x_n}=\frac{1}{\phi_3}(\frac{1}{\phi_4}-1),$$

$$y_x^{(n-1)}=\frac{1}{(1-\phi_1)\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5},\ y_x^{(n)}=\frac{1}{(1-\phi_2)\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6},\ y_x^{(n+1)}=\frac{1}{(1-\phi_3)\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7},$$

$$y_x^{(n+2)}=\frac{1}{(1-\phi_4)\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8},\ x_n y_{xx}^{(n)}=\frac{2(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{1-\phi_1\phi_2},$$

$$x_n y_{xx}^{(n+1)}=\frac{2\phi_3(y_x^{(n+1)}-y_x^{(n)})}{1-\phi_2\phi_3},\ x_n y_{xx}^{(n+2)}=\frac{2\phi_3\phi_4(y_x^{(n+2)}-y_x^{(n+1)})}{1-\phi_3\phi_4},$$

$$x_n^2\,y_{xxx}^{(n+1)}=\frac{3\phi_3(x_n y_{xx}^{(n+1)}-x_n y_{xx}^{(n)})}{1-\phi_1\phi_2\phi_3},\ x_n^2\,y_{xxx}^{(n+2)}=\frac{3\phi_3\phi_4(x_n y_{xx}^{(n+2)}-x_n y_{xx}^{(n+1)})}{1-\phi_2\phi_3\phi_4},$$

$$x_n^3\,y_{xxxx}^{(n+2)}=\frac{4\phi_3\phi_4(x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)}-x_n^2 y_{xxx}^{(n+1)})}{1-\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}.$$

Le modèle discret est alors,

$$y_{xxxx}^{(n+2)}=\frac{1}{x_n^3}F\Big(\frac{h_{n-1}}{x_n},\frac{h_n}{x_n},\frac{h_{n+1}}{x_n},\frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},x_{n-1}(\frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3}),$$
$$x_n^2(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2})\Big) \tag{2.21}$$

$$h_{n+2}=h_{n+1}G\Big(\frac{h_{n-1}}{x_n},\frac{h_n}{x_n},\frac{h_{n+1}}{x_n},\frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},x_n(\frac{y_{xx}^{(n)}+y_{xx}^{(n+1)}+y_{xx}^{(n+2)}}{3}),$$
$$x_n^2(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}+y_{xxx}^{(n+2)}}{2})\Big) \tag{2.22}$$

♦Etudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{2,4}}\ :\ X_1=\partial_y,\ X_2=y\partial_y.$$

L'algèbre $D_{2,4}$ est isomorphe à $D_{2,3}$, mais les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont linéairement connectés. Les algèbres ne sont donc pas équivalente. On cherche l'EDO du quatrième ordre invariante sous ce groupe de transformations. Nous devons avoir, $pr^{(4)}X_1E = \frac{\partial E}{\partial y} = 0$ et les invariants sont ceux trouvés pour le cas $\mathbf{D_{1,1}}$:

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''', \quad I_5 = y'''',$$

Nous avons ensuite que,

$$pr^{(4)}X_2E(I_1,...,I_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow y'\frac{\partial E}{\partial I_2} + y''\frac{\partial E}{\partial I_3} + y'''\frac{\partial E}{\partial I_4} + y''''\frac{\partial E}{\partial I_5} = 0 \tag{2.23}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans l'équation on a que,

$$\phi_1 = x.$$

La méthode des caractéristiques donne pour l'équation (2.4) :

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5},$$

qui donne les invariants

$$\phi_2 = \frac{y''}{y'}, \ \phi_3 = \frac{y'''}{y'}, \ \phi_4 = \frac{y''''}{y'},$$

La base des invariants est donc,

$$\{x, \frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y'}, \frac{y''''}{y'}\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y' \, F(x, \frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y'}). \tag{2.24}$$

On peut réduire cette équation à une équation différentielle du troisième ordre en posant u=y', on obtient

$$u''' = u \, F(x, \frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}). \tag{2.25}$$

Comme la dernière équation est invariante par rapport à $u\partial_u$ nous pouvons en réduire l'ordre pour avoir une équation du deuxième ordre. On cherche maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons que $pr^{(4)}X_1E = 0$ et nous obtenons les mêmes invariants que pour le cas $\mathbf{D_{1,1}}$, soient

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 = y_{n-1} - y_{n-2}, \quad I_7 = y_n - y_{n-1}, \quad I_8 = y_{n+1} - y_n, \quad I_9 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous exigeons ensuite

$$pr^{(4)}X_2E(I_1, ..., I_9) = \sum_{i=1}^{9}(pr^{(4)}X_2I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(y_{n-1} - y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_6} + (y_n - y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_7} + (y_{n+1} - y_n)\frac{\partial E}{\partial I_8} + (y_{n+2} - y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_9} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}, \frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}, \frac{\partial E}{\partial I_5}$, n'apparaissent pas dans l'équation, on a les invariants

$$I_1 = x_{n-2}, \, I_2 = x_{n-1}, \, I_3 = x_n, \, I_4 = x_{n+1}, \, I_5 = x_{n+2}.$$

La méthode des caractéristiques nous donne,

$$\frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7} = \frac{dI_8}{I_8} = \frac{dI_9}{I_9}.$$

Apres intégration, nous avons les invariants,

$$\phi_1 = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{y_n - y_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_3 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous avons alors comme base pour les invariants,

$$\{I_1, \ I_2, \ I_3, \ I_4, \ I_5, \ \phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3\},$$

et en la réecrivant de façon plus pratique, on a

$$\left\{x_{n-1}, \ h_{n-1}, \ h_n, \ h_{n+1}, \ h_{n+2}, \ \frac{1}{3}(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}), \ \frac{1}{2}(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}), \ \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes :

$$\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{I_3 - I_1}(1 - \phi_1(\frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1})), \quad \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{I_4 - I_2}(\frac{1}{\phi_2}(\frac{I_3 - I_2}{I_4 - I_3}) - 1),$$

$$\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2(I_3 - I_2)}{(I_5 - I_3)}(\frac{1}{\phi_2\phi_3(I_5 - I_4)} - \frac{1}{\phi_2(I_4 - I_3)}), \quad \frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} = \frac{3}{I_4 - I_1}(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}}),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{3}{I_5 - I_2}(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}), \quad \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{3}{I_5 - I_1}(\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}).$$

Le schéma invariant est alors,

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = y_x^{(n)} F\left(x_n, \ h_{n-1}, \ h_n, \ h_{n+1}, \ \frac{1}{3}(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}), \ \frac{1}{2}(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}})\right) \quad (2.26)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} G\left(x_n, \ h_{n-1}, \ h_n, \ h_{n+1}, \ \frac{1}{3}(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}), \ \frac{1}{2}(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}})\right). \quad (2.27)$$

Comme nous pouvons le voir la discrétisation standard sur maillage uniforme est invariante pour tous les groupes de dimension 1 et 2.

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SCHÉMAS INVARIANTS SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 3

Dans ce chapitre nous traitons les seize groupe de symétries de dimension 3 de l'article de V.Dorodnitsyn, R.Kozlov et P.Winternitz. De plus, nous traitons un groupe supplémentaire qui a été omis par ces derniers lors de la classification. Nous débutons par le groupe,

$$\mathbf{D_{3,1}} \ : \ X_1 \ = \ \partial_x \ , \quad X_2 \ = \ \partial_y \ , \quad X_3 \ = \ x\,\partial_y.$$

Nous cherchons premièrement l'équation différentielle invariante sous ce groupe de symétries. Nous avons que, $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous pouvons nous baser sur le cas $\mathbf{D_{2,1}}$ qui nous donnait,

$$I_1 \ = \ y' \ , \quad I_2 \ = \ y'' \ , \ I_3 \ = \ y''' \ , \ I_4 \ = \ y''''.$$

Ensuite, nous imposons,

$$pr^{(4)}X_2E(I_1,...,I_4) \ = \ \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} \ = \ \frac{\partial E}{\partial I_1} \ = \ 0.$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation, on a comme invariants,

$$\phi_1 \ = \ y'' \ , \quad \phi_2 \ = \ y''' \ , \ \phi_3 \ = \ y''''.$$

Ceci nous donne comme base pour les invariants,

$$\{y'' \ , \ y''' \ , \ y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est :

$$y'''' \ = \ F(y'' \ , \ y'''). \tag{3.1}$$

On peut ainsi réduire l'ordre de 2 en posant u=y" et on obtient

$$u'' \ = \ F(u, \ u'). \tag{3.2}$$

De plus, la dernière équation peut être réduite à l'ordre un, car elle est invariante par rapport à ∂x. On cherche ensuite le schéma d'ordre 4, qui est invariant sous ce même groupe. En imposant $pr^{(4)}X_1E \ = \ pr^{(4)}X_2E \ = \ 0$, nous retrouvons les mêmes invariants que pour $\mathbf{D}_{2,1}$, soient

$$I_1 \ = \ x_{n-1} - x_{n-2} \ , \ I_2 \ = \ x_n - x_{n-1}, \ I_3 \ = \ x_{n+1} - x_n, \ I_4 \ = \ x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_5 \ = \ y_{n-1} - y_{n-2}, \ I_6 \ = \ y_n - y_{n-1}, \ I_7 \ = \ y_{n+1} - y_n, \ I_8 \ = \ y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Ensuite nous imposons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, .., I_8) \ = \ \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i) \ \frac{\partial E}{\partial I_i} \ =$$

$$(x_{n-1} - x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_5} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_6} + (x_{n+1} - x_n)\frac{\partial E}{\partial I_7} + (x_{n+2} - x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0. \tag{3.3}$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_1}, \frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 \ = \ x_{n-1} - x_{n-2} \ , \ I_2 \ = \ x_n - x_{n-1}, \ I_3 \ = \ x_{n+1} - x_n, \ I_4 \ = \ x_{n+2} - x_{n+1},$$

Nous pouvons reformuler l'équation (3.3) en fonction des invariants et on obtient,

$$I_1\frac{\partial E}{\partial I_5} + I_2\frac{\partial E}{\partial I_6} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_7} + I_4\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, la dernière équation donne,

$$\frac{dI_5}{I_1} = \frac{dI_6}{I_2} = \frac{dI_7}{I_3} = \frac{dI_8}{I_4}$$

qui s'intègrent pour donner les invariants,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),\\
\phi_2 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),\\
\phi_3 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Nous avons alors comme base des invariants,

$$\{I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3\}$$

Une base plus pratique est

$$\left\{h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ h_{n+2},\ \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2},\ y_{xxxx}^{(n+2)}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations

$$\begin{aligned}
y_{xx}^{(n)} &= \frac{-2\phi_1}{I_1I_2(I_1+I_2)},\ y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_2}{I_2I_3(I_2+I_3)},\ y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\phi_3}{I_3I_4(I_3+I_4)},\\
y_{xxx}^{(n+1)} &= \frac{3(y_{xx}^{(n+1)} - y_{xx}^{(n)})}{I_1+I_2+I_3},\ y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3(y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)})}{I_2+I_3+I_4},\\
y_{xxxx}^{(n+2)} &= \frac{4(y_{xxx}^{(n+2)} - y_{xxx}^{(n+1)})}{I_1+I_2+I_3+I_4}.
\end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = F\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right), \tag{3.4}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3},\ \frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}\right). \tag{3.5}$$

▲ Étudions le cas,

$$\mathbf{D}_{3,2}\ :\ X_1 = \partial_y\ ,\quad X_2 = x\,\partial_y\ ,\quad X_3 = \partial_x + y\,\partial_y.$$

Premièrement nous avons $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ ce qui nous donne les invariants calculés pour $\mathbf{D}_{2,2}$,

$$I_1 = x,\quad I_2 = y'',\quad I_3 = y''',\quad I_4 = y''''.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, ..., I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_1} + y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} + y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

La méthode des caractéristiques appliquée à la dernière équation nous donne,

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4}$$

Les constantes d'intégration nous donnent les invariants soient,

$$\phi_1 = \frac{y''}{e^x},\quad \phi_2 = \frac{y'''}{e^x},\quad \phi_3 = \frac{y''''}{e^x}.$$

La base des invariants est alors,

$$\left\{\frac{y''}{e^x},\ \frac{y'''}{e^x},\ \frac{y''''}{e^x}\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' \;=\; e^x\, F\left(\frac{y''}{e^x},\ \frac{y'''}{e^x}\right). \tag{3.6}$$

On peut réduire l'ordre de la dernière équation différentielle par le changement de coordonnées u=y'' qui donne

$$u'' \;=\; e^x\, F\left(\frac{u}{e^x},\ \frac{u'}{e^x}\right). \tag{3.7}$$

De plus, la dernière équation est invariante par rapport à $\partial_x + u\partial_u$ et on peut la réduire à l'ordre un. On cherche maintenant le schéma invariant sous ce groupe de symétries. Nous demandons premièrement que $pr^{(4)}X_1E \;=\; pr^{(4)}X_2E \;=\; 0$ et nous retrouvons les invariants calculés pour le cas discret $\mathbf{D}_{2,2}$,

$$I_1 = x_{n-2},\quad I_2 = x_{n-1},\quad I_3 = x_n,\quad I_4 = x_{n+1},\quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 \;=\; (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) \;-\; (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$I_7 \;=\; (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) \;-\; (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_8 \;=\; (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) \;-\; (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous exigeons alors que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, ..., I_8) \;=\; \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{\partial E}{\partial I_5} +$$

$$
\begin{aligned}
&[y_{n-2}(x_{n-1} - x_n) + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_{n-2} - x_{n-1})]\frac{\partial E}{\partial I_6} + \\
&[y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)]\frac{\partial E}{\partial I_7} + \\
&[y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})]\frac{\partial E}{\partial I_8} = \\
&\frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{\partial E}{\partial I_5} + I_6\frac{\partial E}{\partial I_6} + I_7\frac{\partial E}{\partial I_7} + I_8\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

On appréhende la dernière équation par la méthode des caractéristiques et on obtient,

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{1} = \frac{dI_3}{1} = \frac{dI_4}{1} = \frac{dI_5}{1} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7} = \frac{dI_8}{I_8}.$$

Les constantes d'intégration de la dernière équation nous délivrent les invariants,

$$\phi_1 = x_{n-1} - x_{n-2}, \quad \phi_2 = x_n - x_{n-1}, \quad \phi_3 = x_{n+1} - x_n, \quad \phi_4 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$\phi_5 = e^{-x_n}[(x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1})],$$

$$\phi_6 = e^{-x_n}[(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)],$$

$$\phi_7 = e^{-x_n}[(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})],$$

Une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7\}.$$

On peut réecrire cette base d'une façon plus pratique,

$$\left\{h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, e^{-x_n}\frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}, e^{-x_n}\frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2}, e^{-x_n}\, y_{xxxx}^{(n+2)}\right\}$$

où nous avons utilisé les transformations suivantes,

$$e^{-x_n}\, y_{xx}^{(n)} = \frac{-2\phi_5}{\phi_1\phi_2(\phi_1+\phi_2)}, \quad e^{-x_n}\, y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_6}{\phi_2\phi_3(\phi_2+\phi_3)}, \quad e^{-x_n}\, y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\phi_7}{\phi_3\phi_4(\phi_3+\phi_4)},$$

$$e^{-x_n}\, y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3}{\phi_1+\phi_2+\phi_3}(e^{-x_n}y_{xx}^{(n+1)} - e^{-x_n}y_{xx}^{(n)}), \quad e^{-x_n}\, y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3}{\phi_2+\phi_3+\phi_4}(e^{-x_n}y_{xx}^{(n+2)} - e^{-x_n}y_{xx}^{(n+1)})$$

$$e^{-x_n}\, y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4}{\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4}(e^{-x_n}y_{xxx}^{(n+2)} - e^{-x_n}y_{xxx}^{(n+1)}).$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = e^{x_n}\, F\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ e^{-x_n}(\frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}),\ e^{-x_n}(\frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2})\right) \quad (3.9)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ e^{-x_n}(\frac{y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{3}),\ e^{-x_n}(\frac{y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)}}{2})\right) \quad (3.10)$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D}_{3,3}\ :\ X_1 = \partial_x\,,\quad X_2 = \partial_y\,,\quad X_3 = y\,\partial_y.$$

Pour trouver l'équation différentielle invariante sous ce groupe, nous imposons $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés en $\mathbf{D}_{2,1}$,

$$I_1 = y',\quad I_2 = y'',\quad I_3 = y''',\quad I_4 = y''''$$

Nous utilisons ensuite l'annulation de la quatrième prolongation calculé par rapport aux invariants,

$$pr^{(4)}X_3E(I_1,\ldots,I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$y'\frac{\partial E}{\partial I_1} + y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} + y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0$$

pour trouver par la méthode des caractéristiques,

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4}.$$

L'intégration des dernières équations nous donne les invariants, soient

$$\phi_1 = \frac{y''}{y'}, \quad \phi_2 = \frac{y'''}{y'}, \quad \phi_3 = \frac{y''''}{y'}.$$

Une base obtenue pour les invariants est alors,

$$\left\{ \frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y'}, \frac{y''''}{y'} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y' \, F\left(\frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y'}\right). \tag{3.11}$$

Nous pouvons réduire l'ordre de l'équation différentielle par la transformation $u=y'$ qui donne

$$u''' = u \, F\left(\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}\right). \tag{3.12}$$

De plus, la dernière équation est invariante par rapport à ∂_x *et* $u\partial_u$, donc on peut encore réduire de deux ordre. Nous cherchons ensuite le schéma invariant sous ce même groupe de Lie de symétries. L'annulation de la quatrième prolongation des deux premiers champs de vecteurs nous donne les invariants du cas discret $\mathbf{D_{2,1}}$,

$$I_1 = x_{n-1} - x_{n-2}\ , \ I_2 = x_n - x_{n-1}, \ I_3 = x_{n+1} - x_n, \ I_4 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_5 = y_{n-1} - y_{n-2}, \ I_6 = y_n - y_{n-1}, \ I_7 = y_{n+1} - y_n, \ I_8 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1,...,I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(y_{n-1}-y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_5}+(y_n-y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_6}+(y_{n+1}-y_n)\frac{\partial E}{\partial I_7}+(y_{n+2}-y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_8}=0. \qquad (3.13)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}, \frac{\partial E}{\partial I_2} et \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans l'équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}-x_{n-2}\ ,\ I_2 = x_n - x_{n-1},\ I_3 = x_{n+1}-x_n,\ I_4 = x_{n+2}-x_{n+1}.$$

La méthode des caractéristiques appliqué à l'équation (3.3) donne,

$$\frac{dI_5}{I_5}=\frac{dI_6}{I_6}=\frac{dI_7}{I_7}=\frac{dI_8}{I_8}.$$

Ceci nous conduit aux invariants,

$$\phi_1 = \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{y_n-y_{n-1}},\quad \phi_2 = \frac{y_n-y_{n-1}}{y_{n+1}-y_n},\quad \phi_3 = \frac{y_{n+1}-y_n}{y_{n+2}-y_{n+1}}.$$

Nous trouvons alors une base pour les invariants,soit

$$\{I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3\}.$$

Cette base peut être réecrite de façon plus pratique comme,

$$\left\{h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ h_{n+2},\ \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}}+\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}+\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}+\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right),\ \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right\}$$

où nous avons utilisé les transformations,

$$\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{I_1+I_2}\left(1-\phi_1\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\right),\quad \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{I_2+I_3}\left(\frac{I_2}{I_3\phi_2}-1\right),$$

$$\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{I_3+I_4}\left(\frac{I_2}{I_4\phi_2\phi_3} - \frac{I_2}{I_3\phi_2}\right), \quad \frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} = \frac{3}{I_1+I_2+I_3}\left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}}\right),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{3}{I_2+I_3+I_4}\left(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}\right), \quad \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{4}{I_1+I_2+I_3+I_4}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} - \frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}\right)$$

Le schéma invariant est alors,

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = y_x^{(n)}\, F\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right)\right) \quad (3.14)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}\right)\right) \quad (3.15)$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D}_{3,4}\ :\ X_1 = \partial_y\ ,\quad X_2 = x\partial_y\ ,\quad X_3 = y\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D}_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3 I_i)\ \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} + y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0 \quad (3.16)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans cette équation, on a l'invariant $I_1 = x$. La méthode des caractéristiques appliquée à l'équation (3.4) donne

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4}$$

et en intégrant, on trouve les invariants,

$$\phi_1 = \frac{y'''}{y''}, \quad \phi_2 = \frac{y''''}{y''}.$$

Nous pouvons alors formuler une base, soit

$$\left\{x, \frac{y'''}{y''}, \frac{y''''}{y''}\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y'' \, F\left(x, \frac{y'''}{y''}\right) \tag{3.17}$$

Nous pouvons réduire de 2 l'ordre de l'équation différentielle par la transformation $u=y^{(2)}$ qui donne

$$u'' = u \, F\left(x, \frac{u'}{u}\right). \tag{3.18}$$

La dernière équation est invariante par rapport à $u\partial_u$ et nous pouvons ainsi la réduire à l'ordre un. Nous cherchons ensuite le modèle d'équations aux différences finies invariant sous $\mathbf{D}_{3,4}$. En exigeant que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$, on obtient les invariants calculés pour le cas discret $\mathbf{D}_{2,2}$,

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 = (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$I_7 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_8 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1, \ldots, I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3 I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow\quad & [y_{n-2}(x_{n-1} - x_n) + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_{n-2} - x_{n-1})]\frac{\partial E}{\partial I_6} + \\ & [y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)]\frac{\partial E}{\partial I_7} + \\ & [y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})]\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.\end{aligned}$$

La dernière équation peut se récrire comme

$$I_6\frac{\partial E}{\partial I_6} + I_7\frac{\partial E}{\partial I_7} + I_8\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0 \tag{3.19}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$, $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_5}$ n'apparaissent pas dans cette équation, on a les invariants,

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

Par la méthode des caractéristiques, l'équation (3.19) donne

$$\frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7} = \frac{dI_8}{I_8},$$

qui nous mène aux invariants,

$$\phi_1 = \frac{(x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1})}{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)},$$

$$\phi_2 = \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}.$$

On a ainsi comme base pour les invariants,

$$\{I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ I_5,\ \phi_1,\ \phi_2\}$$

Cette base peut être récrite de façon plus pratique comme,

$$\left\{x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ h_{n+2},\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_{xx}^{(n+1)}}+\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}}\right),\ \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}}\right\}$$

où nous avons utilisé les transformations

$$\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_{xx}^{(n+1)}} = \frac{3}{I_4-I_1}\left(1-\phi_1\frac{(I_4-I_3)(I_4-I_2)}{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}\right),\ \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}} = \frac{3}{I_5-I_2}\left(\frac{(I_4-I_2)(I_3-I_2)}{(I_5-I_3)(I_5-I_4)}\frac{1}{\phi_2}-1\right),$$

$$\frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}} = \frac{4}{I_5-I_1}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}}-\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_{xx}^{(n+1)}}\right).$$

On a alors comme schéma invariant,

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = y_{xx}^{(n+1)}\,F\left(x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_{xx}^{(n+1)}}+\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}}\right)\right) \tag{3.20}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\,G\left(x_n,\ h_{n-1},\ h_n,\ h_{n+1},\ \frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_{xx}^{(n+1)}}+\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)}}\right)\right) \tag{3.21}$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,5}}\ :\ X_1 = \partial_y\ ,\ \ X_2 = x\partial_y\ ,\ \ X_3 = (1-a)x\partial_x + y\partial_y,\ \text{où } a \neq 1.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,2}}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1, ..., I_4) \;=\; \sum_{i=1}(pr^{(4)}X_3 I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-a)x\frac{\partial E}{\partial I_1} \;+\; (2a-1)y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2} \;+\; (3a-2)y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} + (4a-3)y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} \;=\; 0 \quad (3.22)$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à cette équation, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{(1-a)I_1} = \frac{dI_2}{(2a-1)I_2} = \frac{dI_3}{(3a-2)I_3} = \frac{dI_4}{(4a-3)I_4}.$$

et l'intégration de ces équations nous donne les invariants

$$\phi_1 \;=\; x^{1-2a}y''^{(1-a)},\ \phi_2 \;=\; x^{\frac{2-3a}{1-a}}y''',\ \phi_3 \;=\; x^{\frac{3-4a}{1-a}}y''''.$$

Une base pour les invariants est

$$\left\{x^{1-2a}y''^{(1-a)},\ x^{\frac{2-3a}{1-a}}y''',\ x^{\frac{3-4a}{1-a}}y''''\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' \;=\; x^{\frac{4a-3}{1-a}}\ F\left(x^{1-2a}y''^{(1-a)},\ x^{\frac{2-3a}{1-a}}y'''\right) \tag{3.23}$$

Nous pouvons réduire l'ordre de la dernière équation différentielle par la transformation $u = y''$ qui donne l'équation

$$u'' \;=\; x^{\frac{4a-3}{1-a}}\ F\left(x^{1-2a}u^{1-a},\ x^{\frac{2-3a}{1-a}}u'\right) \tag{3.24}$$

Déterminons maintenant le schéma du système d'équations aux différences finies invariant sous le même groupe de symétries. En exigeant que $pr^{(4)}X_1E \;=\; pr^{(4)}X_2E \;=\; 0$, on obtient les invariants calculés pour le cas discret $\mathbf{D}_{2,2}$,

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 = (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$I_7 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_8 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1, ..., I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3 I_i)\ \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\begin{aligned}
\iff (1-a)&\left[x_{n-2}\frac{\partial E}{\partial I_1} + x_{n-1}\frac{\partial E}{\partial I_2} + x_n\frac{\partial E}{\partial I_3} + x_{n+1}\frac{\partial E}{\partial I_4} + x_{n+2}\frac{\partial E}{\partial I_5}\right] + \\
&[(1-a)[x_{n-2}(y_n - y_{n-1}) + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_{n-2})] + \\
&y_{n-2}(x_{n-1} - x_n) + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_{n-2} - x_{n-1})]\frac{\partial E}{\partial I_6} + \\
&[(1-a)[x_{n-1}(y_{n+1} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_{n+1}) + x_{n+1}(y_n - y_{n-1})] + \\
&y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)]\frac{\partial E}{\partial I_7} + \\
&[(1-a)[x_n(y_{n+2} - y_{n+1}) + x_{n+1}(y_n - y_{n+2}) + x_{n+2}(y_{n+1} - y_n)] + \\
&y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})]\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons récrire cette équation comme

$$(1-a)\left[I_1\frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2\frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_3} + I_4\frac{\partial E}{\partial I_4} + I_5\frac{\partial E}{\partial I_5}\right] +$$

$$(2-a)I_6\ \frac{\partial E}{\partial I_6} + (2-a)I_7\ \frac{\partial E}{\partial I_7} + (2-a)I_8\ \frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

La méthode des caractéristiques appliqué à la dernière équation donne

$$\frac{dI_1}{(1-a)I_1} = \frac{dI_2}{(1-a)I_2} = \frac{dI_3}{(1-a)I_3} = \frac{dI_4}{(1-a)I_4} = \frac{dI_5}{(1-a)I_5} = \frac{dI_6}{(2-a)I_6} = \frac{dI_7}{(2-a)I_7} = \frac{dI_8}{(2-a)I_8}$$

qui conduit aux invariants

$$\phi_1 = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad \phi_3 = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad \phi_4 = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}},$$

$$\phi_5 = x_n^{a-2}[(x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1})]^{1-a},$$

$$\phi_6 = x_n^{a-2}[(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)]^{1-a},$$

$$\phi_7 = x_n^{a-2}[(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})]^{1-a}.$$

Nous avons alors une base des invariants donnée par

$$\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4,\ \phi_5,\ \phi_6,\ \phi_7\}.$$

Nous pouvons récrire cette base de façon plus pratique comme

$$\{\frac{h_{n-1}}{x_n},\ \frac{h_n}{x_n},\ \frac{h_{n+1}}{x_n},\ \frac{h_{n+2}}{x_n},\ \frac{1}{3}\left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+2)})^{1-a}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+1)} + x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)}\right),\ x_n^{\frac{3-4a}{1-a}} y_{xxxx}^{(n+2)}\}$$

que l'on a obtenue par les transformations

$$\frac{h_{n-1}}{x_n} = (1-\phi_1)\phi_2, \quad \frac{h_n}{x_n} = 1 - \phi_2, \quad \frac{h_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\phi_3} - 1, \quad \frac{h_{n+2}}{x_n} = \frac{1}{\phi_3}\left(\frac{1}{\phi_4} - 1\right),$$

$$x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n)})^{1-a} = \frac{(-2)^{(1-a)}}{\left(\frac{h_{n-1}}{x_n} + \frac{h_n}{x_n}\right)^{1-a}} \frac{\phi_5}{\left(\frac{h_{n-1}}{x_n}\right)^{1-a}\left(\frac{h_n}{x_n}\right)^{1-a}},$$

$$x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a} = \frac{(-2)^{(1-a)}}{\left(\frac{h_n}{x_n}+\frac{h_{n+1}}{x_n}\right)^{1-a}} \frac{\phi_6}{\left(\frac{h_n}{x_n}\right)^{1-a}\left(\frac{h_{n+1}}{x_n}\right)^{1-a}},$$

$$x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+2)})^{1-a} = \frac{(-2)^{(1-a)}}{\left(\frac{h_{n+1}}{x_n}+\frac{h_{n+2}}{x_n}\right)^{1-a}} \frac{\phi_7}{\left(\frac{h_{n+1}}{x_n}\right)^{1-a}\left(\frac{h_{n+2}}{x_n}\right)^{1-a}},$$

$$x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3}{\frac{h_{n-1}}{x_n}+\frac{h_n}{x_n}+\frac{h_{n+1}}{x_n}} \left[\left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}} - \left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}}\right],$$

$$x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3}{\frac{h_n}{x_n}+\frac{h_{n+1}}{x_n}+\frac{h_{n+2}}{x_n}} \left[\left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+2)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}} - \left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}}\right],$$

$$x_n^{\frac{3-4a}{1-a}} y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4}{\frac{h_{n-1}}{x_n}+\frac{h_n}{x_n}+\frac{h_{n+1}}{x_n}+\frac{h_{n+2}}{x_n}} \left[\left(x_n^{2-3a}(y_{xxx}^{(n+2)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}} - \left(x_n^{2-3a}(y_{xxx}^{(n+1)})^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a}}\right].$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = x_n^{\frac{4a-3}{1-a}} F\left(\frac{h_{n-1}}{x_n}, \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{3}\left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+2)})^{1-a}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+1)} + x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)}\right)\right) \tag{3.25}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(\frac{h_{n-1}}{x_n}, \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{3}\left(x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+1)})^{1-a} + x_n^{1-2a}(y_{xx}^{(n+2)})^{1-a}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+1)} + x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)}\right)\right) \tag{3.26}$$

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,6}} \;:\; X_1 = \partial_y\,,\ \ X_2 = x\partial_y\,,\ \ X_3 = (1+x^2)\,\partial_x + (x+b)y\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,2}}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''. \tag{3.27}$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1,\ldots,\ I_4)\ =\ \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3 I_i)\ \frac{\partial E}{\partial I_i}\ =\ 0$$

$$\Longleftrightarrow\ (1+x^2)\frac{\partial E}{\partial I_1}+(b-3x)y''\frac{\partial E}{\partial I_2}+(-3y''+(b-5x)y''')\frac{\partial E}{\partial I_3}+(-8y'''+(b-7x)y'''')\frac{\partial E}{\partial I_4}\ =\ 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques et en utilisant l'équation (3.27), nous obtenons

$$\frac{dI_1}{1+I_1^2}=\frac{dI_2}{(b-3I_1)I_2}=\frac{dI_3}{(b-5I_1)I_3-3I_2}=\frac{dI_4}{(b-7I_1)I_4-8I_3}.$$

Nous obtenons alors les invariants

$$\phi_1\ =\ b\ arctan(x)-\frac{3}{2}ln(1+x^2)-ln(y''),$$

$$\phi_2\ =\ e^{-b\ \arctan(x)}[3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}xy''+(1+x^2)^{\frac{5}{2}}y'''],$$

$$\phi_3\ =\ e^{-b\ \arctan(x)}[12(1+x^2)^{\frac{3}{2}}x^2y''+8(1+x^2)^{\frac{5}{2}}xy'''+(1+x^2)^{\frac{7}{2}}y''''],$$

Nous avons ainsi la base $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ pour les invariants et l'équation différentielle invariante est

$$y''''=\frac{-12x^2y''}{(1+x^2)^2}-\frac{8xy'''}{(1+x^2)}+\frac{e^{b\ \arctan(x)}}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}F(\phi_1,\phi_2). \tag{3.28}$$

En posant u=y", on peut réduire la dernière équation à l'ordre 2,

$$u''=\frac{-12x^2u}{(1+x^2)^2}-\frac{8xu'}{(1+x^2)}+\frac{e^{b\ \arctan(x)}}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}F(\phi_1',\phi_2'). \tag{3.29}$$

Le calcul du schéma invariant n'est pas évident et nous le cessons ainsi.

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,7}}\ :\ X_1\ =\ \partial_x\ ,\ \ X_2\ =\ \partial_y\ ,\ \ X_3\ =\ x\,\partial_x+y\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,1}}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1, \ldots, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\ \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ -y''\ \frac{\partial E}{\partial I_2} - 2y'''\ \frac{\partial E}{\partial I_3} - 3y''''\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0 \tag{3.30}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans la dernière équation, c'est un invariant et $I_1 = y'$. En appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation (3.30), on obtient

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{2I_3} = \frac{dI_4}{3I_4}.$$

L'intégration nous donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{y'''}{y''^2},\ \phi_2 = \frac{y''''}{y''^3}.$$

Nous trouvons alors comme base pour les invariants,

$$\left\{y',\ \frac{y'''}{y''^2},\ \frac{y''''}{y''^3}\right\}$$

et l'équation invariante est

$$y'''' = y''^3\ F\left(y',\ \frac{y'''}{y''^2}\right). \tag{3.31}$$

Nous pouvons réduire l'ordre de la dernière équation différentielle par la transformation u=y' qui donne l'équation

$$u''' = u'^3 \, F\left(u, \frac{u''}{u'^2}\right). \tag{3.32}$$

Or cet équation est invariante par rapport à ∂_x et x∂_x. On peut alors réduire l'équation (3.32) à une équation du premier ordre. On cherche ensuite le schéma d'ordre 4, qui est invariant sous ce même groupe. En imposant $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$, nous retrouvons les mêmes invariants que pour $\mathbf{D}_{2,1}$, soient

$$I_1 = x_{n-1} - x_{n-2}\ ,\ I_2 = x_n - x_{n-1},\ I_3 = x_{n+1} - x_n,\ I_4 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_5 = y_{n-1} - y_{n-2},\ I_6 = y_n - y_{n-1},\ I_7 = y_{n+1} - y_n,\ I_8 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Ensuite nous imposons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, .., I_8) = \sum_{i=1}^{8} (pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(x_{n-1} - x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+1} - x_n)\frac{\partial E}{\partial I_3} + (x_{n+2} - x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_4} + (y_{n-1} - y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_5} +$$
$$(y_n - y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_6} + (y_{n+1} - y_n)\frac{\partial E}{\partial I_7} + (y_{n+2} - y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7} = \frac{dI_8}{I_8}.$$

Cette équation engendre les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}},\ \ \phi_2 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n},\ \ \phi_3 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}},$$

$$\phi_4 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n-1} - y_{n-2}},\ \ \phi_5 = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{y_n - y_{n-1}},\ \ \phi_6 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n},\ \ \phi_7 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}},$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4,\ \phi_5,\ \phi_6,\ \phi_7\}.$$

Toutefois une base plus pratique est

$$\Bigg\{y_{xx}^{(n)}h_{n-1},\ y_{xx}^{(n)}h_n,\ y_{xx}^{(n)}h_{n+1},\ y_{xx}^{(n)}h_{n+2},\ \frac{y_x^{(n-1)}+y_x^{(n)}+y_x^{(n+1)}+y_x^{(n+2)}}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_{xx}^{(n)})^2}+\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_{xx}^{(n)})^2}\right),\ \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{(y_{xx}^{(n)})^2}\Bigg\}.$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes,

$$y_x^{(n-1)}=\frac{1}{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4},\quad y_x^{(n)}=\frac{1}{\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5},\quad y_x^{(n+1)}=\frac{1}{\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6},\quad y_x^{(n+2)}=\frac{1}{\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7},$$

$$y_{xx}^{(n)}(x_n-x_{n-2})=2(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)}),$$

$$y_{xx}^{(n+1)}(x_n-x_{n-2})=\frac{2\phi_2(1+\phi_1)}{1+\phi_2}(y_x^{(n+1)}-y_x^{(n)}),$$

$$y_{xx}^{(n+2)}(x_n-x_{n-2})=\frac{2\phi_2\phi_3(1+\phi_1)}{1+\phi_3}(y_x^{(n+2)}-y_x^{(n+1)}),$$

$$y_{xxx}^{(n+1)}(x_n-x_{n-2})^2=\frac{3\phi_2(1+\phi_1)}{1+\phi_2+\phi_1\phi_2}(x_n-x_{n-2})(y_{xx}^{(n+1)}-y_{xx}^{(n)}),$$

$$y_{xxx}^{(n+2)}(x_n-x_{n-2})^2=\frac{3\phi_2\phi_3(1+\phi_1)}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3}(x_n-x_{n-2})(y_{xx}^{(n+2)}-y_{xx}^{(n+1)}),$$

$$y_{xxxx}^{(n+2)}(x_n-x_{n-2})^3=\frac{4\phi_2\phi_3(1+\phi_1)}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3+\phi_1\phi_2\phi_3}(x_n-x_{n-2})^2(y_{xxx}^{(n+2)}-y_{xxx}^{(n+1)}),$$

$$\frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{(y_{xx}^{(n+1)})^3}=\left[\frac{4}{y_{xxxx}^{(n+2)}(x_n-x_{n-2})^2}\left(\frac{1}{\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5}-\frac{1}{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}\right)^2\right]^{-1},$$

$$y_{xx}^{(n)}h_n=\frac{2\phi_1(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{1+\phi_1},\quad y_{xx}^{(n)}h_n=\frac{2(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{1+\phi_1},$$

$$y_{xx}^{(n)}h_{n+1}=\frac{2\phi_1(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{\phi_2(1+\phi_1)},\quad y_{xx}^{(n)}h_{n+2}=\frac{2(y_x^{(n)}-y_x^{(n-1)})}{\phi_2\phi_3(1+\phi_1)}.$$

Le schéma invariant est alors

$$y^{(n+2)}_{xxxx} = (y^{(n)}_{xx})^3 \, F\Big(y^{(n)}_{xx}h_{n-1},\ y^{(n)}_{xx}h_n,\ y^{(n)}_{xx}h_{n+1},\ \frac{y^{(n-1)}_x + y^{(n)}_x + y^{(n+1)}_x + y^{(n+2)}_x}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y^{(n+1)}_{xxx}}{(y^{(n)}_{xx})^2} + \frac{y^{(n+2)}_{xxx}}{(y^{(n)}_{xx})^2}\right)\Big), \tag{3.33}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} \, G\Big(y^{(n)}_{xx}h_{n-1},\ y^{(n)}_{xx}h_n,\ y^{(n)}_{xx}h_{n+1},\ \frac{y^{(n-1)}_x + y^{(n)}_x + y^{(n+1)}_x + y^{(n+2)}_x}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y^{(n+1)}_{xxx}}{(y^{(n)}_{xx})^2} + \frac{y^{(n+2)}_{xxx}}{(y^{(n)}_{xx})^2}\right)\Big), \tag{3.34}$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,8}} \ : \ X_1 = \partial_x \, , \quad X_2 = \partial_y \, , \quad X_3 = x\,\partial_x + (x+y)\,\partial_y .$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,1}}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3 \, E(I_1, \ldots, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3 I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \ \frac{\partial E}{\partial I_1} - y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2} - 2y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} - 3y''''\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{1} = -\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dI_3}{2I_3} = -\frac{dI_4}{3I_4}.$$

L'intégration nous donne les invariants

$$\phi_1 = e^{y'}y'', \ \phi_2 = e^{2y'}y''', \ \phi_3 = e^{3y'}y''''$$

Nous trouvons alors comme base pour les invariants,

$$\left\{e^{y'}y'', \ e^{2y'}y''', \ e^{3y'}y''''\right\}$$

et l'équation invariante est

$$y'''' = e^{-3y'} \, F\left(e^{y'}y'', \ e^{2y'}y'''\right). \tag{3.35}$$

Nous pouvons réduire l'ordre de la dernière équation différentielle par la transformation u=$y^{(1)}$ qui donne l'équation

$$u''' = e^{-3u} \, F\left(e^{u}u', \ e^{2u}u''\right). \tag{3.36}$$

Or, la dernière équation est invariante par rapport à ∂_x et $x\partial_x + \partial_u$ et on peut réduire à une équation du premier ordre. On cherche ensuite le schéma d'ordre 4, qui est invariant sous ce même groupe. En imposant $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$, nous retrouvons les mêmes invariants que pour $\mathbf{D_{2,1}}$, soient

$$I_1 = x_{n-1} - x_{n-2} \ , \ I_2 = x_n - x_{n-1}, \ I_3 = x_{n+1} - x_n, \ I_4 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_5 = y_{n-1} - y_{n-2}, \ I_6 = y_n - y_{n-1}, \ I_7 = y_{n+1} - y_n, \ I_8 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Ensuite nous imposons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, .., I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(x_{n-1}-x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_1}+(x_n-x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_2}+(x_{n+1}-x_n)\frac{\partial E}{\partial I_3}+(x_{n+2}-x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_4}+(x_{n-1}+y_{n-1}-x_{n-2}-y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_5}+$$

$$(x_n+y_n-x_{n-1}-y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_6}+(x_{n+1}+y_{n+1}-x_n-y_n)\frac{\partial E}{\partial I_7}+(x_{n+2}+y_{n+2}-x_{n+1}-y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation (3.8), on obtient

$$\frac{dI_1}{I_1}=\frac{dI_2}{I_2}=\frac{dI_3}{I_3}=\frac{dI_4}{I_4}=\frac{dI_5}{I_1+I_5}=\frac{dI_6}{I_2+I_6}=\frac{dI_7}{I_3+I_7}=\frac{dI_8}{I_4+I_8}.$$

Cette équation engendre les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{x_n-x_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}, \quad \phi_3 = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+2}-x_{n+1}},$$

$$\phi_4 = \frac{e^{\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}}}}{x_{n-1}-x_{n-2}}, \quad \phi_5 = \frac{e^{\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}}}{x_n-x_{n-1}}, \quad \phi_6 = \frac{e^{\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}}}{x_{n+1}-x_n}, \quad \phi_7 = \frac{e^{\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}}}{x_{n+2}-x_{n+1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4,\ \phi_5,\ \phi_6,\ \phi_7\}.$$

On a toutefois une base plus pratique exprimée par

$$\left\{\frac{h_{n-1}}{e^{y_x^{(n)}}},\ \frac{h_n}{e^{y_x^{(n)}}},\ \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n)}}},\ \frac{h_{n+2}}{e^{y_x^{(n)}}},\ \frac{1}{3}\left(y_{xx}^{(n)}e^{y_x^{(n)}}+y_{xx}^{(n+1)}e^{y_x^{(n)}}+y_{xx}^{(n+2)}e^{y_x^{(n)}}\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(y_{xxx}^{(n+1)}e^{2y_x^{(n)}}+y_{xx}^{(n+2)}e^{2y_x^{(n)}}\right),\ y_{xxxx}^{(n+2)}e^{3y_x^{(n)}}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes :

$$y_{xx}^{(n)}e^{y_x^{(n)}} = \frac{2\phi_5}{1+\phi_1}\ln\left(\frac{\phi_5}{\phi_1\phi_4}\right), \quad y_{xx}^{(n+1)}e^{y_x^{(n)}} = \frac{2\phi_2\phi_5}{1+\phi_2}\ln\left(\frac{\phi_6}{\phi_2\phi_5}\right), \quad y_{xx}^{(n+2)}e^{y_x^{(n)}} = \frac{2\phi_2\phi_3\phi_5}{1+\phi_3}\ln\left(\frac{\phi_7}{\phi_3\phi_6}\right),$$

$$y_{xxx}^{(n+1)}e^{2y_x^{(n)}} = \frac{3\phi_2\phi_5}{1+\phi_2+\phi_1\phi_2}\left(y_{xx}^{(n+1)}e^{y_x^{(n)}}-y_{xx}^{(n)}e^{y_x^{(n)}}\right),$$

$$y_{xxx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n)}} = \frac{3\phi_2\phi_3\phi_5}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3} \left(y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n)}} - y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n)}} \right),$$

$$y_{xxxx}^{(n+2)} e^{3y_x^{(n)}} = \frac{4\phi_2\phi_3\phi_5}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3+\phi_1\phi_2\phi_3} \left(y_{xxx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n)}} - y_{xxx}^{(n+1)} e^{2y_x^{(n)}} \right),$$

$$\frac{h_{n-1}}{e^{y_x^{(n)}}} = \frac{\phi_1}{\phi_5}, \quad \frac{h_n}{e^{y_x^{(n)}}} = \frac{1}{\phi_5}, \quad \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n)}}} = \frac{1}{\phi_2\phi_5}, \quad \frac{h_{n+2}}{e^{y_x^{(n)}}} = \frac{1}{\phi_2\phi_3\phi_5}.$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxxx}^{(n+2)} &= e^{-3y_x^{(n)}} F\Bigg(\frac{h_{n-1}}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{h_n}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{1}{3}\left(y_{xx}^{(n)} e^{y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n)}} \right), \\ &\qquad \frac{1}{2}\left(y_{xxx}^{(n+1)} e^{2y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n)}} \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} h_{n+2} &= h_{n+1}\, G\Bigg(\frac{h_{n-1}}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{h_n}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n)}}}, \frac{1}{3}\left(y_{xx}^{(n)} e^{y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n)}} \right), \\ &\qquad \frac{1}{2}\left(y_{xxx}^{(n+1)} e^{2y_x^{(n)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n)}} \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{3.38}$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D}_{3,9} \ : \ X_1 = \partial_x\,, \quad X_2 = \partial_y\,, \quad X_3 = x\,\partial_x + ky\,\partial_y, \text{où k} \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D}_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3\, E(I_1,\ldots,I_4) = \sum_{i=1}^{4} (pr^{(4)}X_3 I_i)\, \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ (k-1)y'\frac{\partial E}{\partial I_1}+(k-2)y''\frac{\partial E}{\partial I_2}+(k-3)y'''\frac{\partial E}{\partial I_3}+(k-4)y''''\frac{\partial E}{\partial I_4}\ =\ 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{(k-1)I_1}=\frac{dI_2}{(k-2)I_2}=-\frac{dI_3}{(k-3)I_3}=-\frac{dI_4}{(k-4)I_4}.$$

L'intégration nous donne les invariants

$$\phi_1\ =\ \frac{y''}{y'^{\frac{k-2}{k-1}}},\ \phi_2\ =\ \frac{y'''}{y'^{\frac{k-3}{k-1}}},\ \phi_3\ =\ \frac{y''''}{y'^{\frac{k-4}{k-1}}}.$$

Nous avons alors comme base des invariants

$$\left\{\frac{y''}{(y')^{\frac{k-2}{k-1}}},\ \frac{y'''}{y'^{\frac{k-3}{k-1}}},\ \frac{y''''}{y'^{\frac{k-4}{k-1}}}\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''''\ =\ y'^{\frac{k-4}{k-1}}\ F\left(\frac{y''}{y'^{\frac{k-2}{k-1}}},\ \frac{y'''}{y'^{\frac{k-3}{k-1}}}\right). \tag{3.39}$$

Nous pouvons réduire l'ordre de la dernière équation différentielle par la transformation u=y' qui donne l'équation

$$u'''\ =\ u^{\frac{k-4}{k-1}}\ F\left(\frac{u'}{u^{\frac{k-2}{k-1}}},\ \frac{u''}{u^{\frac{k-3}{k-1}}}\right). \tag{3.40}$$

Or cet équation est invariante par rapport à ∂_x et $x\partial_x+\frac{(k-1)}{(2k-3)}u\partial_u$ et on peut réduire à une équation du premier ordre. On cherche ensuite le schéma d'ordre 4, qui est invariant sous ce même groupe. En imposant $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$, nous retrouvons les mêmes invariants que pour $\mathbf{D}_{2,1}$, soient

$$I_1\ =\ x_{n-1}-x_{n-2}\ ,\ I_2\ =\ x_n-x_{n-1},\ I_3\ =\ x_{n+1}-x_n,\ I_4\ =\ x_{n+2}-x_{n+1},$$

$$I_5 = y_{n-1} - y_{n-2},\ I_6 = y_n - y_{n-1},\ I_7 = y_{n+1} - y_n,\ I_8 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Ensuite nous imposons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1,..,I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} =$$

$$(x_{n-1}-x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+1}-x_n)\frac{\partial E}{\partial I_3} + (x_{n+2}-x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_4} + k(y_{n-1}-y_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_5} +$$

$$k(y_n - y_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_6} + k(y_{n+1}-y_n)\frac{\partial E}{\partial I_7} + k(y_{n+2}-y_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à la dernière équation, on obtient

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{kI_5} = \frac{dI_6}{kI_6} = \frac{dI_7}{kI_7} = \frac{dI_8}{kI_8}.$$

Cette équation engendre les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}},\quad \phi_2 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n},\quad \phi_3 = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+2}-x_{n+1}},$$

$$\phi_4 = \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^k},\ \phi_5 = \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^k},\ \phi_6 = \frac{y_{n+1}-y_n}{(x_{n+1}-x_n)^k},\ \phi_7 = \frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{(x_{n+2}-x_{n+1})^k}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4,\ \phi_5,\ \phi_6,\ \phi_7\}.$$

On a toutefois une base plus pratique exprimée par

$$\left\{\frac{h_{n-1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}},\ \frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n-1)}},\ \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}},\ \frac{h_{n+2}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}},\ \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}}\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}}\right),\ \frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-4}{k-1}}}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes

$$\frac{y_{xx}^{(n)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} = \frac{2\phi_1}{1+\phi_1}\left(\frac{\phi_5}{\phi_1^{k-1}} - \phi_4\right)\left(\frac{\phi_1^{k-1}}{\phi_5}\right)^{\frac{k-2}{k-1}},$$

$$\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} = \frac{2\phi_1\phi_2}{1+\phi_2}\left(\frac{\phi_6}{(\phi_1\phi_2)^{k-1}} - \frac{\phi_5}{\phi_1^{k-1}}\right)\left(\frac{\phi_1^{k-1}}{\phi_5}\right)^{\frac{k-2}{k-1}},$$

$$\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} = \frac{2\phi_1\phi_2\phi_3}{1+\phi_3}\left(\frac{\phi_7}{(\phi_1\phi_2\phi_3)^{k-1}} - \frac{\phi_6}{(\phi_1\phi_2)^{k-1}}\right)\left(\frac{\phi_1^{k-1}}{\phi_5}\right)^{\frac{k-2}{k-1}},$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} = \frac{3\phi_1\phi_2}{1+\phi_2+\phi_1\phi_2}\left(\frac{\phi_5}{\phi_1^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} - \frac{y_{xx}^{(n)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}}\right),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} = \frac{3\phi_1\phi_2\phi_3}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3}\left(\frac{\phi_5}{\phi_1^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}}\right),$$

$$\frac{y_{xxxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-4}{k-1}}} = \frac{4\phi_1\phi_2\phi_3}{1+\phi_3+\phi_2\phi_3+\phi_1\phi_2\phi_3}\left(\frac{\phi_5}{\phi_1^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} - \frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}}\right),$$

$$\frac{h_{n-1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{1}{\phi_4},\quad \frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{1}{\phi_4\phi_1^{k-1}},\quad \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{1}{\phi_4(\phi_1\phi_2)^{k-1}},\quad \frac{h_{n+2}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{1}{\phi_4(\phi_1\phi_2\phi_3)^{k-1}}.$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = (y_x^{(n)})^{\frac{k-4}{k-1}}\, F\Bigg(\frac{h_{n-1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}}\right)\Bigg) \tag{3.41}$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G\Bigg(\frac{h_{n-1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n-1)}}, \frac{1}{3}\left(\frac{y_{xx}^{(n)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-2}{k-1}}}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}} + \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{(y_x^{(n)})^{\frac{k-3}{k-1}}}\right)\Bigg). \tag{3.42}$$

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D}_{3,10} \ : \ X_1 \ = \ \partial_x \, , \ \ X_2 \ = \ \partial_y \, , \ \ X_3 \ = \ (kx+y)\,\partial_x + (ky-x)\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D}_{2,1}$,

$$I_1 \ = \ y', \quad I_2 \ = \ y'', \quad I_3 \ = \ y''', \quad I_4 \ = \ y''''.$$

Nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3 \ E(I_1;\ldots, \ I_4) \ = \ \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} \ = \ 0$$

$$\Longleftrightarrow \ (1+y'^2)\frac{\partial E}{\partial I_1}+(k+3y')y''\,\frac{\partial E}{\partial I_2}+(3y''^2+2(k+2y')y''')\,\frac{\partial E}{\partial I_3}+(10y''y'''+(3k+5y')y'''')\frac{\partial E}{\partial I_4} \ = \ 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{1+I_1^2} = \frac{dI_2}{(k+3I_1)I_2} = \frac{dI_3}{3I_2^2+2(k+2I_1)I_3} = \frac{dI_4}{10I_2I_3+(3k+5I_1)I_4}.$$

L'intégration nous donne les invariants

$$\phi_1 \ = \ \mathrm{k}\arctan(y') + \frac{3}{2}\ln(1+y'^2) - ln(y''),$$

$$\phi_2 \ = \ \frac{[(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2]e^{-2k\arctan(y')}}{(1+y'^2)^3},$$

$$\phi_3 \ = \ \frac{[(1+y'^2)^2y'''' - 10y'y''y'''(1+y'^2) + 15y'^2y''^3]e^{-3k\arctan(y')}}{(1+y'^2)^{\frac{9}{2}}}.$$

Nous obtenons alors $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ comme base des invariants et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{10y'y''y'''}{(1+y'^2)} - \frac{15y'^2y''^3}{(1+y'^2)^2} + e^{3k\arctan(y')}(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}F(\phi_1,\phi_2). \tag{3.43}$$

En posant, u=y' nous pouvons réduire l'ordre de la dernière équation différentielle,

$$u''' = \frac{10uu'u''}{(1+u^2)} - \frac{15u^2u'^3}{(1+u^2)} + e^{3k}\mathrm{arctan}(u)(1+u^2)^{\frac{5}{2}}F(\phi_1',\phi_2'). \tag{3.44}$$

Nous arrêtons le calcul du schéma ici car il n'est pas évident.

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,11}}\ :\ X_1 = \partial_x\ ,\ \ X_2 = 2x\,\partial_x + y\,\partial_y\ ,\ \ X_3 = x^2\,\partial_x + xy\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,1}}$,

$$I_1 = y,\quad I_2 = y',\quad I_3 = y'',\quad I_4 = y''',\quad I_5 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_2\ E(I_1,\ldots,I_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y\,\frac{\partial E}{\partial I_1} - y'\,\frac{\partial E}{\partial I_2} - 3y''\,\frac{\partial E}{\partial I_3} - 5y'''\,\frac{\partial E}{\partial I_4} - 7y''''\,\frac{\partial E}{\partial I_5} = 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{I_1} = -\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dI_3}{3I_3} = -\frac{dI_4}{5I_4} = -\frac{dI_5}{7I_5}$$

ce qui nous donne, une fois intégrer, les invariants

$$\alpha_1 = yy', \quad \alpha_2 = y^3y'', \quad \alpha_3 = y^5y''', \quad \alpha_4 = y^7y''''.$$

Nous exigeons ensuite que la quatrième prolongation du troisième champ de vecteurs s'annule, soit

$$pr^{(4)}X_3\, E(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) = \sum_{i=1}^{4} (pr^{(4)}X_3\alpha_i)\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y^2\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - 3y^5y''\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 8y^7y'''\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_4} = 0 \tag{3.45}$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}$ n'apparaît pas, nous avons l'invariant

$$\phi_1 = y^3y''.$$

En divisant l'équation (3.9) par y^2, nous trouvons

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - 3y^3y''\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 8y^5y'''\, \frac{\partial E}{\partial \alpha_4} = 0 \tag{3.46}$$

et par la méthode des caractéristiques nous avons

$$\frac{d\alpha_1}{1} = -\frac{d\alpha_3}{3y^3y''} = -\frac{d\alpha_4}{8y^5y'''}.$$

Ceci nous mènent aux invariants

$$\phi_2 = y^5y''' + 3y^4y'y'', \quad \phi_3 = y^7y'''' + 12y^5y'^2y'' + 8y^6y'y'''.$$

La base d'invariants est ainsi

$$\{y^3y'',\ y^5y''' + 3y^4y'y'',\ y^7y'''' + 12y^5y'^2y'' + 8y^6y'y'''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = -\frac{12y'^2y''}{y^2} - \frac{8y'y'''}{y} + \frac{1}{y^7}F(\phi_1, \phi_2). \tag{3.47}$$

Toutefois nous arrêtons ici pour le calcul du schéma.

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,12}} : X_1 = \partial_x , \quad X_2 = x\,\partial_x + y\,\partial_y , \quad X_3 = (x^2 - y^2)\,\partial_x + 2xy\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = 0$ et nous avons alors les invariants calculés en $\mathbf{D_{2,1}}$,

$$\alpha_1 = y, \quad \alpha_2 = y', \quad \alpha_3 = y'', \quad \alpha_4 = y''', \quad \alpha_5 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_2\, E(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2\alpha_i)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow y\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - y''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 2y'''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_4} - 3y''''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_5} = 0 \tag{3.48}$$

On a déjà l'invariant $I_1 = y'$, car $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}$ n'apparaît pas dans l'équation (3.12) et en appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{d\alpha_3}{\alpha_3} = -\frac{d\alpha_4}{2\alpha_4} = -\frac{d\alpha_5}{3\alpha_5}.$$

En intégrant les dernières équations on trouve les invariants

$$I_2 = yy'', \quad I_3 = y^2y''', \quad I_4 = y^3y''''.$$

Nous annulons ensuite la quatrième prolongation du champ X_3 pour la base des invariants I_i trouvés précédemment et nous trouvons l'équation

$$pr^{(4)}X_3\ E(I_1,\ldots,\ I_4)\ =\ \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3 I_i)\ \frac{\partial E}{\partial I_i}\ =\ 0$$

$$\iff\ 2y(1+y'^2)\ \frac{\partial E}{\partial I_1}+2yy'(1+y'^2+3yy'')\ \frac{\partial E}{\partial I_2}+$$

$$2y^2(6y'^2y''+3yy''^2+4yy'y''')\ \frac{\partial E}{\partial I_3}+$$

$$2y^3(9y''^2+7y'^2y'''+10yy''y'''-2y'''+5yy'y'''')\ \frac{\partial E}{\partial I_4}\ =\ 0$$

En divisant la dernière équation par 2y et en la remaniant, on obtient

$$(1+I_1^2)\ \frac{\partial E}{\partial I_1}+I_1(1+I_1^2+3I_2)\ \frac{\partial E}{\partial I_2}+$$

$$(6I_1^2I_2+3I_2^2+4I_1I_3)\ \frac{\partial E}{\partial I_3}+$$

$$(7I_1^2I_3+5I_1I_4+9I_2^2+10I_2I_3-2I_3)\ \frac{\partial E}{\partial I_4}\ =\ 0$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on a

$$\frac{dI_1}{1+I_1^2}=\frac{dI_2}{I_1(1+I_1^2+3I_2)}=\frac{dI_3}{6I_1^2I_2+3I_2^2+4I_1I_3}=\frac{dI_4}{7I_1^2I_3+5I_1I_4+9I_2^2+10I_2I_3-2I_3}.$$

Ceci nous amène aux invariants

$$\phi_1=\frac{1+y'^2+yy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \phi_2=\frac{y^2(y'''(1+y'^2)-3y'y''^2)}{(1+y'^2)^3},$$

$$\phi_3=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{9}{2}}}\Big(51-y'(9+10y^3y''y'''+y^2y''')+y'^2(198+315yy''+69y^2y''^2+15y^3y''^3)-$$

$$y'^3(36+10y^3y''y'''+2y^2y''')+y'^4(288+297yy''+27y^2y''^2)-y'^5(54+y^2y''')+y'^6(186+93yy'')-36y'^7+$$

$$45y'^8-9y'^9+111yy''+42y^2y''^2-\sqrt{1+y'^2}\text{arcsinh}(y')\Big[9+9y^2y'y''^2+y'^2(27+36yy''+9y^2y''^2-6y^2y''')+$$

$$9y'^3y^2y''^2+y'^4(27+18yy''-3y^2y''')+9y'^6+18yy''+9y^2y''^2-3y^2y'''\Big]-$$

$$\ln(1+y'^2)\Big[24+y'^2(96+72yy'')+y'^4(144+72yy'')+y'^6(96+24yy'')+24y'^8+24yy''\Big]-$$

$$\arctan(y')\Big[18+y'^2(72+54yy'')+y'^4(108+54yy'')+y'^6(72+18yy'')+18y'^8+18yy''\Big]+$$

$$y^3y''''(1+y'^2)^2\Big)$$

Nous avons alors une base pour les invariants, soit

$$\{\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$\begin{aligned}y'''' \ =\ & \frac{-1}{y^3(1+y'^2)^2}\Big(51-y'(9+10y^3y''y'''+y^2y''')+y'^2(198+315yy''+69y^2y''^2+15y^3y''^3)-\\
& y'^3(36+10y^3y''y'''+2y^2y''')+y'^4(288+297yy''+27y^2y''^2)-y'^5(54+y^2y''')+y'^6(186+93yy'')-\\
& 36y'^7+45y'^8-9y'^9+111yy''+42y^2y''^2-\sqrt{1+y'^2}\text{arcsinh}(y')[9+9y^2y'y''^2+y'^2(27+36yy''+9y^2y''^2-\\
& 6y^2y''')+9y'^3y^2y''^2+y'^4(27+18yy''-3y^2y''')+9y'^6+18yy''+9y^2y''^2-3y^2y''']-\ln(1+y'^2)[24+\\
& y'^2(96+72yy'')+y'^4(144+72yy'')+y'^6(96+24yy'')+24y'^8+24yy'']-\arctan(y')[18+y'^2(72+54yy'')+\\
& y'^4(108+54yy'')+y'^6(72+18yy'')+18y'^8+18yy'']\Big)+\frac{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}}{y^3}F(\phi_1,\phi_2) \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Nous cessons ici le calcul pour ce qui est du schéma.

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,13}}\ :\ X_1\ =\ \partial_x+\partial_y\ ,\quad X_2\ =\ x\,\partial_x+y\,\partial_y\ ,\quad X_3\ =\ x^2\,\partial_x+y^2\,\partial_y.$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = 0$ et nous avons alors les invariants,

$$\alpha_1 = y - x, \quad \alpha_2 = y', \quad \alpha_3 = y'', \quad \alpha_4 = y''', \quad \alpha_5 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_2 \, E(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) = \sum_{i=1}^{5}(pr^{(4)}X_2\alpha_i)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \; (y-x)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - y''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 2y'''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_4} - 3y''''\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_5} = 0 \qquad (3.50)$$

De la dernière équation, on a déjà l'invariant $I_1 = y'$, car $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}$ n'apparaît pas dans cette équation et en appliquant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{d\alpha_3}{\alpha_3} = -\frac{d\alpha_4}{2\alpha_4} = -\frac{d\alpha_5}{3\alpha_5}.$$

En intégrant les dernières équations on trouve les invariants

$$I_2 = (y-x)y'', \quad I_3 = (y-x)^2 y''', \quad I_4 = (y-x)^3 y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3 \, E(I_1, \ldots, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3 I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow \; & 2(y-x)y'\,\frac{\partial E}{\partial I_1} + (y-x)[3y''(y-x) + 2y'(y'-1)]\,\frac{\partial E}{\partial I_2} + \\ & 2(y-x)^2[2(y-x)y''' + 3y''(y'-1)]\,\frac{\partial E}{\partial I_3} + \\ & (y-x)^3[5(y-x)y'''' + 4(2y'-3)y''' + 6y''^2]\,\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0\end{aligned}$$

En divisant par (y-x), on peut récrire la dernière équation comme

$$2I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + [3I_2 + 2I_1(I_1 - 1)] \frac{\partial E}{\partial I_2} + [4I_3 + 6I_2(I_1 - 1)] \frac{\partial E}{\partial I_3} +$$

$$[5I_4 + 4I_3(2I_1 - 3) + 6I_2^2] \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0$$

Par la méthode des caractéristiques, on obtient

$$\frac{dI_1}{2I_1} = \frac{dI_2}{3I_2 + 2I_1(I_1 - 1)} = \frac{dI_3}{4I_3 + 6I_2(I_1 - 1)} = \frac{dI_4}{5I_4 + 4I_3(I_1 - 3) + 6I_2^2}.$$

Ceci nous mène aux invariants

$$\phi_1 = \frac{(y - x)y'' - 2y'(1 + y')}{y'^{\frac{3}{2}}},$$

$$\phi_2 = \frac{1}{y'^2}((y - x)^2 y''' - 6(y - x)(1 + y')y'' + 6y'(1 + 4y' + y'^2)),$$

$$\phi_3 = \frac{1}{y'^{\frac{5}{2}}}[(y - x)^3 y'''' - 4(y - x)^2(3 + 2y')y''' + 6(y - x)y''(36 + 24y' + 6y'^2 -$$

$$(y - x)y'') - 24y'(1 + 9y' + 9y'^2 + y'^3)]$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{4(3 + 2y')y'''}{(y - x)} - \frac{6}{(y - x)^2} y''(36 + 24y' + 6y'^2 - (y - x)y'') +$$

$$\frac{24y'}{(y - x)^3}(1 + 9y' + 9y'^2 + y'^3) + \frac{y'^{\frac{5}{2}}}{(y - x)^3} F(\phi_1, \phi_2) \qquad (3.51)$$

Toutefois nous arrêtons le calcul ici pour ce qui est du schéma.

■ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,15}} \; : \; X_1 = \partial_y \, , \; X_2 = y \, \partial_y \, , \; X_3 = y^2 \, \partial_y .$$

On cherche l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 invariante sous ce groupe de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous retrouvons les invariants calculés pour le cas continu $\mathbf{D}_{2,4}$, soient

$$I_1 = x, \quad I_2 = \frac{y''}{y'}, \quad I_3 = \frac{y'''}{y'}, \quad I_4 = \frac{y''''}{y'}.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, .., I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2y'\frac{\partial E}{\partial I_2} + 6y''\frac{\partial E}{\partial I_3} + (8y''' + \frac{6y''^2}{y'})\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0. \tag{3.52}$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans cette équation, on a dejà l'invariant ϕ_1 =x et en divisant l'équation 3.14 par $2y'$, on trouve

$$\frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{3y''}{y'}\frac{\partial E}{\partial I_3} + (\frac{4y'''}{y'} + \frac{3y''^2}{y'^2})\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à la dernière équation, on trouve

$$\frac{dI_2}{1} = \frac{dI_3}{3I_2} = \frac{dI_4}{4I_3 + 3I_2^2}.$$

Ceci nous mène aux invariants

$$\phi_2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{32}\left(32\frac{y''''}{y'} + 3 + 12\frac{y''}{y'} + 24\frac{y''^2}{y'^2}\right)e^{-4\frac{y''}{y'}}$$

Nous avons alors la base $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = -\frac{1}{32}(3 + 12y'' + 24\frac{y''^2}{y'}) + y'e^{4\frac{y''}{y'}}F(x, \phi_2) \tag{3.53}$$

En posant u=y', nous pouvons réduire la dernière équation différentielle et nous obtenons

$$u''' = -\frac{1}{32}(3 + 12u' + 24\frac{u'^2}{u}) + ue^{4\frac{u'}{u}}F(x, \phi_2'). \tag{3.54}$$

Nous arrêtons le calcul ici pour ce qui est du schéma.

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{3,16}} \; : \; X_1 \; = \; \partial_y \, , \quad X_2 \; = \; x\, \partial_y, \quad X_3 \; = \; \phi(x)\, \partial_y, \text{où } \phi''(x) \neq 0.$$

Nous cherchons l'équation différentielle invariante pour ce groupe de Lie de dimension 3. Le calcul de $pr^{(4)}X_1E = 0$ donne les invariants,

$$I_1 = x, \;\; I_2 = y', \;\; I_3 = y'', \;\; I_4 = y''', \;\; I_5 = y''''.$$

Le calcul de $pr^{(4)}X_2E = 0$ donne les invariants

$$\alpha_1 = x, \;\; \alpha_2 = y'', \;\; \alpha_3 = y''', \;\; \alpha_4 = y''''.$$

Ensuite nous calculons $pr^{(4)}X_3E = 0$.

$$pr^{(4)}X_3 \; E(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \; = \; \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3\alpha_i)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \; = \; 0$$

$$\Longleftrightarrow \phi''(x)\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} + \phi'''(x)\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} + \phi''''(x)\frac{\partial E}{\partial \alpha_4}$$

Par la méthode des caractéristiques on trouve les invariants,

$$\rho_1 = x, \quad \rho_2 = \phi''(x)y''' - \phi'''(x)y'', \quad \rho_3 = \phi''(x)y'''' - \phi''''(x)y''$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{\phi''''(x)y''}{\phi''(x)} + \frac{1}{\phi''(x)}F(x,\rho_2). \tag{3.55}$$

On cherche ensuite le schéma invariant pour ce même groupe de symétries. Les calculs de $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ mène aux invariants du cas discret de $D_{2,2}$ soient,

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}), \\ I_7 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\ I_8 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}). \end{aligned}$$

Ensuite nous calculons $pr^{(4)}X_3E = 0$.

$$pr^{(4)}X_3\, E(I_1, \ldots, I_8) = \sum_{i=1}^{8}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\ & [(\phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2}))(x_n - x_{n-1}) - (\phi(x_n) - \phi(x_{n-1}))(x_{n-1} - x_{n-2})]\frac{\partial E}{\partial I_6} + \\ & [(\phi(x_n) - \phi(x_{n-1}))(x_{n+1} - x_n) - (\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n))(x_n - x_{n-1})]\frac{\partial E}{\partial I_7} + \\ & [(\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n))(x_{n+2} - x_{n+1}) - (\phi(x_{n+2}) - \phi(x_{n+1}))(x_{n+1} - x_n)]\frac{\partial E}{\partial I_8} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}, \frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}, \frac{\partial E}{\partial I_5}$ n'apparaîssent pas dans la dernière équation, on a les invariants :

$$\alpha_1 = x_{n-2}, \quad \alpha_2 = x_{n-1}, \quad \alpha_3 = x_n, \quad \alpha_4 = x_{n+1}, \quad \alpha_5 = x_{n+2}$$

En posant

$$A = (\phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2}))(x_n - x_{n-1}) - (\phi(x_n) - \phi(x_{n-1}))(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

$$B = (\phi(x_n) - \phi(x_{n-1}))(x_{n+1} - x_n) - (\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n))(x_n - x_{n-1}),$$

$$C = (\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n))(x_{n+2} - x_{n+1}) - (\phi(x_{n+2}) - \phi(x_{n+1}))(x_{n+1} - x_n).$$

et en appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation (3.16), on a

$$\frac{dI_6}{A} = \frac{dI_7}{B} = \frac{dI_8}{C}$$

ce qui mène aux invariants

$$\alpha_6 = AI_7 - BI_6, \quad \alpha_7 = AI_8 - CI_5.$$

On a donc une base pour les invariants :

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}.$$

Toutefois une base plus pratique est

$$\{x_n, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \phi_{xx}^{(n)}\, y_{xxx}^{(n+1)} - \phi_{xxx}^{(n+1)}\, y_{xx}^{(n)}, \phi_{xx}^{(n+1)}\, y_{xxxx}^{(n+2)} - \phi_{xxxx}^{(n+2)}\, y_{xx}^{(n+1)}\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes :

$$\phi_{xx}^{(n)}\, y_{xxx}^{(n+1)} - \phi_{xxx}^{(n+1)}\, y_{xx}^{(n)} = \frac{12\alpha_6(x_n - x_{n-2})^{-1}(x_{n+1} - x_{n-1})^{-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})^2(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-2})}$$

$$\phi_{xx}^{(n+1)}\, y_{xxxx}^{(n+2)} - \phi_{xxxx}^{(n+2)}\, y_{xx}^{(n+1)} = \frac{48}{(x_n - x_{n-2})(x_{n+2} - x_{n-2})}\Bigg[\frac{\alpha_7(x_{n+2} - x_{n-1})^{-1}(x_{n+2} - x_n)^{-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+2} - x_{n+1})}$$
$$- \frac{\alpha_6}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})^2(x_{n+1} - x_n)}\left(\frac{1}{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+2} - x_{n-1})} + \frac{1}{(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-1})}\right)\Bigg]$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{\phi_{xxxx}^{(n+2)}\, y_{xx}^{(n+1)}}{\phi_{xx}^{(n)}} + \frac{1}{\phi_{xx}^{(n)}} F(x_n, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, \phi_{xx}^{(n)}\, y_{xxx}^{(n+1)} - \phi_{xxx}^{(n+1)}\, y_{xx}^{(n)}) \qquad (3.57)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1}\, G(x_n, h_{n-1}, h_n, h_{n+1}, \phi^{(n)}_{xx}\, y^{(n+1)}_{xxx} - \phi^{(n+1)}_{xxx}\, y^{(n)}_{xx}) \tag{3.58}$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D}_{3,17} \;:\; X_1 \;=\; \partial_y \;,\quad X_2 \;=\; x\,\partial_y,\quad X_3 \;=\; -x\,\partial_x - y\,\partial_y.$$

Nous cherchons premièrement l'équation différentielle invariante du quatrième ordre. Nous exigeons alors que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous retrouvons les invariants calculés en $D_{2,2}$ soient

$$I_1 = x,\;\; I_2 = y'',\;\; I_3 = y''',\;\; I_4 = y''''.$$

Nous imposon ensuite que

$$pr^{(4)}X_3\; E(I_1,\ldots,\, I_4) \;=\; \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow\;\; -x\frac{\partial E}{\partial I_1} \;+\; y''\frac{\partial E}{\partial I_2} \;+\; 2y'''\frac{\partial E}{\partial I_3} \;+\; 3y''''\frac{\partial E}{\partial I_4} \;=\; 0.$$

La méthode des caractéristiques appliquée à la dernière équation donne

$$-\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{2I_3} = \frac{dI_4}{3I_4}$$

et ceci mène aux invariants

$$\alpha_1 = xy'',\;\; \alpha_2 = x^2y''',\;\; \alpha_3 = x^3y''''.$$

L'équation différentielle invariante est donc

$$y'''' = \frac{1}{x^3}F(xy'', x^2y''') \tag{3.59}$$

En posant u=y", on peut réduire la dernière équation à

$$u'' = \frac{1}{x^3} F(xu, x^2 u') \tag{3.60}$$

Or cette équation est invariante par rapport à $x\partial_x - u\partial_u$ et on peut la réduire à une équation du premier ordre. On cherche ensuite le schéma invariant pour le même groupe. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1 E = pr^{(4)}X_2 E = 0$ et nous retrouvons les invariants calculés en $D_{2,2}$ soient

$$I_1 = x_{n-2}, \quad I_2 = x_{n-1}, \quad I_3 = x_n, \quad I_4 = x_{n+1}, \quad I_5 = x_{n+2},$$

$$I_6 = (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$I_7 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_8 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3\, E(I_1, \ldots, I_8) = \sum_{i=1}^{8} (pr^{(4)}X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -x_{n-2}\frac{\partial E}{\partial I_1} - x_{n-1}\frac{\partial E}{\partial I_2} - x_n\frac{\partial E}{\partial I_3} - x_{n+1}\frac{\partial E}{\partial I_4} - x_{n+2}\frac{\partial E}{\partial I_5}$$

$$+2[x_n(y_{n-2} - y_{n-1}) + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_{n-2}(y_{n-1} - y_n)]\frac{\partial E}{\partial I_6}$$

$$+2[x_{n+1}(y_{n-1} - y_n) + x_n(y_{n+1} - y_{n-1}) + x_{n-1}(y_n - y_{n+1})]\frac{\partial E}{\partial I_7}$$

$$+2[x_{n+2}(y_n - y_{n+1}) + x_{n+1}(y_{n+2} - y_n) + x_n(y_{n+1} - y_{n+2})]\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0$$

On peut récrire la dernière équation comme

$$I_1\frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2\frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial E}{\partial I_3} + I_4\frac{\partial E}{\partial I_4} + I_5\frac{\partial E}{\partial I_5} + 2I_6\frac{\partial E}{\partial I_6} + 2I_7\frac{\partial E}{\partial I_7} + 2I_8\frac{\partial E}{\partial I_8} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{2I_6} = \frac{dI_7}{2I_7} = \frac{dI_8}{2I_8}.$$

Ceci mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad \alpha_2 = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \alpha_3 = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad \alpha_4 = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{x_n^2}[(x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1})],$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{x_n^2}[(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)],$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{x_n^2}[(x_{n+3} - x_{n+2})(y_{n+2} - y_{n+1}) - (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+3} - y_{n+2})].$$

On a ainsi une base donnée par

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7\}$$

On a toutefois une base plus pratique donnée par

$$\left\{\frac{h_{n-1}}{x_n}, \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{h_{n+2}}{x_n}, \frac{1}{3}(x_n y_{xx}^{(n)} + x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)}), \frac{1}{2}(x_n^2 y_{xxx}^{(n+1)} + x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)}), x_{n-1}^3 y_{xxxx}^{(n+2)}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes,

$$x_n y_{xx}^{(n)} = \frac{-2\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_5}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_1\alpha_2 - 1)},$$

$$x_n y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\alpha_2^2\alpha_6}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_2\alpha_3 - 1)},$$

$$x_n y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\alpha_7}{\alpha_3(\alpha_3 - 1)(\alpha_4 - 1)(\alpha_3\alpha_4 - 1)},$$

$$
\begin{aligned}
x_n^2 y_{xxx}^{(n+1)} &= \frac{3\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 1}(x_n y_{xx}^{(n+1)} - x_n y_{xx}^{(n)}),\\
x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{3\alpha_2}{\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 1}(x_n y_{xx}^{(n+2)} - x_n y_{xx}^{(n+1)}),\\
x_n^3 y_{xxxx}^{(n+2)} &= \frac{4\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 1}(x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} - x_n^2 y_{xxx}^{(n+1)}).
\end{aligned}
$$

Le schéma invariant est donc

$$
y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{1}{x_n^3} F\left(\frac{h_{n-1}}{x_n}, \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{x_n}{3}(y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}), \frac{x_n^2}{2}(y_{xxx}^{(n+1)} + x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)})\right) \quad (3.61)
$$

$$
h_{n+2} = h_{n+1}\, G\left(\frac{h_{n-1}}{x_n}, \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{x_n}{3}(y_{xx}^{(n)} + y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}), \frac{x_n^2}{2}(y_{xxx}^{(n+1)} + x_{n-1}^2 y_{xxx}^{(n+2)})\right) \quad (3.62)
$$

Nous concluons ce chapitre en soulignant que pour des groupes de symétries de dimension 3, l'obtention d'un schéma approximant une équation différentielle n'est pas tout le temps évidente et plusieurs cas reste non résolu.

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SCHÉMA INVARIANTS SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 4 ET 5.

4.1 Équations différentielles et schéma invariants sous un groupe de dimension 4.

Vue la complexité des calculs pour les groupes de dimension quatre, nous traitons certains cas de l'article de O.Gat[10] pour lesquels nous pouvons obtenir le schéma invariant. Nous avons le groupe,

$$\mathbf{D_{4,3}}\ :\ X_1 = \partial_x\,,\ \ X_2 = \partial_y\,,\ \ X_3 = x\,\partial_y,\ \ X_4 = x\,\partial_x + ay\,\partial_y.$$

Nous cherchons l'équation différentielle invariante pour ce groupe. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = pr^{(4)}X_3E = 0$ et nous obtenons les invariants pour le cas $\mathbf{D_{3,1}}$ soient

$$I_1 = y'',\ \ I_2 = y''',\ \ I_3 = y''''.$$

On exige ensuite que

$$pr^{(4)}X_4E(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i=1}^{3}(pr^{(4)}X_4I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a-2)y''\frac{\partial E}{\partial I_1} + (a-3)y'''\frac{\partial E}{\partial I_2} + (a-4)y''''\frac{\partial E}{\partial I_3} = 0$$

En utilisant la méthode des caractéristiques on obtient

$$\frac{dI_1}{(a-2)I_1} = \frac{dI_2}{(a-3)I_2} = \frac{dI_3}{(a-4)I_3}$$

et celà mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{y'''^{(a-2)}}{y''^{(a-3)}} \text{ et } \alpha_2 = \frac{y''''^{(a-2)}}{y''^{(a-4)}}.$$

Nous avons alors la base

$$\left\{\frac{y'''^{(a-2)}}{y''^{(a-3)}}, \frac{y''''^{(a-2)}}{y''^{(a-4)}}\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y''^{\frac{(a-4)}{(a-2)}} G(\alpha_1) \tag{4.1}$$

Nous voulons déterminer le schéma invariant pour ce groupe de symétries, alors nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = pr^{(4)}X_3E = 0$ et nous obtenons les invariants pour le cas $\mathbf{D_{3,1}}$

$$I_1 = x_{n-1} - x_{n-2}\,,\ I_2 = x_n - x_{n-1},\ I_3 = x_{n+1} - x_n,\ I_4 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_5 = (x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1}),$$

$$I_6 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_7 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Ensuite, nous demandons que

$$pr^{(4)}X_4E(I_1, ..., I_7) = \sum_{i=1}^{7}(pr^{(4)}X_4I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_{n-1} - x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+1} - x_n)\frac{\partial E}{\partial I_3} + (x_{n+2} - x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_4} +$$

$$(1 + a)[(x_n - x_{n-1})(y_{n-1} - y_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2})(y_n - y_{n-1})]\frac{\partial E}{\partial I_5} +$$

$$(1+a)[(x_{n+1}-x_n)(y_n-y_{n-1})-(x_n-x_{n-1})(y_{n+1}-y_n)]\frac{\partial E}{\partial I_6}+$$

$$(1+a)[(x_{n+2}-x_{n+1})(y_{n+1}-y_n)-(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})]\frac{\partial E}{\partial I_7}=0.$$

Nous pouvons récrire la dernière équation comme

$$I_1\frac{\partial E}{\partial I_1}+I_2\frac{\partial E}{\partial I_2}+I_3\frac{\partial E}{\partial I_3}+I_4\frac{\partial E}{\partial I_4}+(1+a)I_5\frac{\partial E}{\partial I_5}+(1+a)I_6\frac{\partial E}{\partial I_6}+(1+a)I_7\frac{\partial E}{\partial I_7}=0$$

Par la méthode des caractéristiques, on a

$$\frac{dI_1}{I_1}=\frac{dI_2}{I_2}=\frac{dI_3}{I_3}=\frac{dI_4}{I_4}=\frac{dI_5}{(1+a)I_5}=\frac{dI_6}{(1+a)I_6}=\frac{dI_7}{(1+a)I_7}.$$

Ceci nous donne les invariants

$$\alpha_1=\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{x_n-x_{n-1}},\quad \alpha_2=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n},\quad \alpha_3=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+2}-x_{n+1}}$$

$$\alpha_4=(x_n-x_{n-1})^{-(a+1)}[(x_n-x_{n-1})(y_{n-1}-y_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-2})(y_n-y_{n-1})],$$

$$\alpha_5=(x_n-x_{n-1})^{-(a+1)}[(x_{n+1}-x_n)(y_n-y_{n-1})-(x_n-x_{n-1})(y_{n+1}-y_n)],$$

$$\alpha_6=(x_n-x_{n-1})^{-(a+1)}[(x_{n+2}-x_{n+1})(y_{n+1}-y_n)-(x_{n+1}-x_n)(y_{n+2}-y_{n+1})],$$

et nous avons une base pour les invariants donnés par

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}.$$

Nous avons toutefois une base plus pratique donnée par

$$\left\{\frac{h_{n-1}}{h_n},h_n^{2-a}\,y_{xx}^{(n)},h_n^{2-a}\,y_{xx}^{(n+1)},h_n^{2-a}\,y_{xx}^{(n+2)},\frac{1}{2}\left(\frac{(y_{xxx}^{(n+1)})^{a-2}+(y_{xxx}^{(n+2)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-3}}\right),\frac{(y_{xxxx}^{(n+2)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-4}}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations :

$$(x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n)} = \frac{-2\alpha_4}{\alpha_1(1+\alpha_1)}, \quad (x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\alpha_2^2\alpha_5}{1+\alpha_2}$$

$$(x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_6}{1+\alpha_3}, \quad (x_n - x_{n-1})^{3-a}\, y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3\alpha_2}{1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}(x_n - x_{n-1})^{2-a}(y_{xx}^{(n+1)} - y_{xx}^{(n)}),$$

$$(x_n - x_{n-1})^{3-a}\, y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\alpha_2\alpha_3}{1+\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}(x_n - x_{n-1})^{2-a}(y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}),$$

$$\frac{(y_{xxx}^{(n+1)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-3}} = \frac{\left[(x_n - x_{n-1})^{3-a}\, y_{xxx}^{(n+1)}\right]^{a-2}}{\left[(x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n+1)}\right]^{a-3}}, \quad \frac{(y_{xxx}^{(n+2)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-3}} = \frac{\left[(x_n - x_{n-1})^{3-a}\, y_{xxx}^{(n+2)}\right]^{a-2}}{\left[(x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n+1)}\right]^{a-3}},$$

$$(x_n - x_{n-1})^{4-a}\, y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4\alpha_2\alpha_3}{1+\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x_n - x_{n-1})^{3-a}(y_{xxx}^{(n+2)} - y_{xxx}^{(n+1)}),$$

$$\frac{(y_{xxxx}^{(n+2)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-4}} = \frac{\left[(x_n - x_{n-1})^{4-a}\, y_{xxxx}^{(n+2)}\right]^{a-2}}{\left[(x_n - x_{n-1})^{2-a}\, y_{xx}^{(n+1)}\right]^{a-4}}.$$

Le schéma invariant est donné par

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = (y_{xx}^{(n+1)})^{\frac{a-4}{a-2}}\, G\left(h_n^{2-a}\, y_{xx}^{(n)}, h_n^{2-a}\, y_{xx}^{(n+1)}, h_n^{2-a}\, y_{xx}^{(n+2)}, \frac{1}{2}\left(\frac{(y_{xxx}^{(n+1)})^{a-2} + (y_{xxx}^{(n+2)})^{a-2}}{(y_{xx}^{(n+1)})^{a-3}}\right)\right) \quad (4.2)$$

$$h_n = C\, h_{n-1} \quad (4.3)$$

▲ Étudions maintenant le cas,

$$\mathbf{D_{4,6}} : X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\,\partial_y, \quad X_4 = x\,\partial_x.$$

Nous cherchons premièrement l'équation différentielle invariante du quatrième ordre. Nous exigeons alors que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = pr^{(4)}X_3E = 0$ et nous retrouvons les invariants calculés en $D_{3,3}$ soient

$$I_1 = \frac{y''}{y'}, \quad I_2 = \frac{y'''}{y'}, \quad I_3 = \frac{y''''}{y'}.$$

On demande ensuite que

$$pr^{(4)}X_4E(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i=1}^{3}(pr^{(4)}X_4I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\iff -\frac{y''}{y'}\frac{\partial E}{\partial I_1} - 2\frac{y'''}{y'}\frac{\partial E}{\partial I_2} - 3\frac{y''''}{y'}\frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à la dernière équation on trouve

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{2I_2} = \frac{dI_3}{3I_3}$$

et ceci nous mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{y'\,y'''}{y''^2}, \quad \alpha_2 = \frac{y'^2\,y''''}{y''^3}.$$

Nous avons alors la base

$$\left\{\frac{y'\,y'''}{y''^2}, \frac{y'^2\,y''''}{y''^3}\right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{y''^3}{y'^2}\,G\left(\frac{y'\,y'''}{y''^2}\right). \tag{4.4}$$

Or cet équation est invariante par rapport à ∂_x, $x\partial_x$ et $y\partial_y$ et nous pouvons la réduire à une équation du premier ordre. Nous cherchons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous demandons que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = pr^{(4)}X_3E = 0$

et nous retrouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{3,3}$,

$$I_1 = x_{n-1} - x_{n-2}, \quad I_2 = x_n - x_{n-1}, \quad I_3 = x_{n+1} - x_n, \quad I_4 = x_{n+2} - x_{n+1}$$

$$I_5 = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{y_n - y_{n-1}}, \quad I_6 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_7 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(4)}X_4E(I_1, ..., I_7) = \sum_{i=1}^{7}(pr^{(4)}X_4I_i)\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_{n-1} - x_{n-2})\frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_n - x_{n-1})\frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+1} - x_n)\frac{\partial E}{\partial I_3} + (x_{n+2} - x_{n+1})\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0 \quad (4.5)$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_5}, \frac{\partial E}{\partial I_6}, \frac{\partial E}{\partial I_7}$ ne figure pas dans la dernière équation, I_5, I_6, I_7 sont invariants. Ensuite nous appliquons la méthode des invariants à l'équation 4.1 et nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3}.$$

Ceci nous mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}, \quad \alpha_2 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad \alpha_3 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}$$

et nous avons une base pour les invariants donnée par

$$\{I_5, I_6, I_7, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

Nous avons toutefois une base plus pratique donnée par

$$\left\{\frac{h_{n-1}}{h_n},\ h_n\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{n-1}},\ h_n\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{n-1}},\ h_n\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{n-1}},\ \frac{y_x^{(n-1)}(y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)})}{2(y_{xx}^{(n)})^2},\ \frac{(y_x^{(n-1)})^2\, y_{xxxx}^{(n+2)}}{(y_{xx}^{(n)})^3}\right\}$$

que l'on a obtenue par les transformations suivantes :

$$(x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{2}{1+\alpha_1}\Big(\frac{\alpha_1}{I_5} - 1\Big),$$

$$(x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{2\alpha_2}{1+\alpha_2}\Big(\frac{\alpha_1\alpha_2}{I_5 I_6} - \frac{\alpha_1}{I_5}\Big),$$

$$(x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n-1)}} = \frac{2\alpha_2\alpha_3}{1+\alpha_3}\Big(\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{I_5 I_6 I_7} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{I_5 I_6}\Big),$$

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{y_x^{(n-1)}} y_{xxx}^{(n+1)} = \frac{3\alpha_2}{1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}\Big((x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n-1)}} - (x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n-1)}}\Big),$$

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{y_x^{(n-1)}} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\alpha_2\alpha_3}{1+\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}\Big((x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n-1)}} - (x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n-1)}}\Big),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+1)} y_x^{(n-1)}}{(y_{xx}^{(n)})^2} = \Big((x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n-1)}}\Big)^{-2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{y_x^{(n-1)}} y_{xxx}^{(n+1)},$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)} y_x^{(n-1)}}{(y_{xx}^{(n)})^2} = \Big((x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n-1)}}\Big)^{-2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{y_x^{(n-1)}} y_{xxx}^{(n+2)},$$

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^3}{y_x^{(n-1)}} y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{4\alpha_2\alpha_3}{1+\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\Big((x_n - x_{n-1})^2\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n-1)}} - (x_n - x_{n-1})^2\frac{y_{xxx}^{(n+1)}}{y_x^{(n-1)}}\Big),$$

$$\frac{y_{xxxx}^{(n+2)} (y_x^{(n-1)})^2}{(y_{xx}^{(n)})^3} = \Big((x_n - x_{n-1})\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{(n-1)}}\Big)^{-3} \frac{(x_n - x_{n-1})^3}{y_x^{(n-1)}} y_{xxx}^{(n+2)}.$$

Le schéma invariant est alors

$$y_{xxxx}^{(n+2)} = \frac{(y_{xx}^{(n)})^3}{(y_x^{(n-1)})^2}\, G\Big(h_n\frac{y_{xx}^{(n)}}{y_x^{n-1}},\ h_n\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{n-1}},\ h_n\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{n-1}},\ \frac{y_x^{(n-1)}(y_{xxx}^{(n+1)} + y_{xxx}^{(n+2)})}{2(y_{xx}^{(n)})^2}\Big) \tag{4.6}$$

$$h_n = C\, h_{n-1} \tag{4.7}$$

4.2 Équation différentielle invariante pour un groupe de dimension 5.

Nous calculons ensuite certains cas de dimension 5 pour la classification de A.Gonzalez-Lopez, N.Kamran, P.J. Olver[12]. Étudions le cas 5 du tableau 1 .

$$X_1 = \partial_x , \; X_2 = \partial_y, \; X_3 = x\,\partial_x - y\,\partial_y, \; X_4 = y\,\partial_x, \; X_5 = x\,\partial_y.$$

Nous demandons premièrement que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants du cas $D_{2,1}$, soient

$$I_1 = y', \; I_2 = y'', \; I_3 = y''', \; I_4 = y''''.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, I_2, I_3, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -2y'\frac{\partial E}{\partial I_1} - 3y''\frac{\partial E}{\partial I_2} - 4y'''\frac{\partial E}{\partial I_3} - 5y''''\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, on obtient

$$\frac{dI_1}{2I_1} = \frac{dI_2}{3I_2} = \frac{dI_3}{4I_3} = \frac{dI_4}{5I_4}$$

et ceci nous mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{y''}{y'^{\frac{3}{2}}}, \; \alpha_2 = \frac{y'''}{y'^2}, \; \alpha_3 = \frac{y''''}{y'^{\frac{5}{2}}}.$$

On exige ensuite que

$$pr^{(4)}X_5E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=1}^{3}(pr^{(4)}X_5\alpha_i)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-3y''}{2y'^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - \frac{2y'''}{y'^3}\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} - \frac{5y''''}{2y'^{\frac{7}{2}}}\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0.$$

On peut récrire la dernière équation comme

$$\frac{3}{2}\alpha_1\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} + 2\alpha_2\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} + \frac{5}{2}\alpha_3\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0$$

et en appliquant la méthode des caractéristiques on a,

$$\frac{d\alpha_1}{\frac{3}{2}\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{2\alpha_2} = \frac{d\alpha_3}{\frac{5}{2}\alpha_3}$$

ce qui nous mène aux invariants

$$\beta_1 = \frac{y'''}{y''^{\frac{4}{3}}}, \quad \beta_2 = \frac{y''''}{y''^{\frac{5}{3}}}.$$

Finalement on doit avoir

$$pr^{(4)}X_4E(\beta_1,\beta_2) = \sum_{i=1}^{2}(pr^{(4)}X_4\beta_i)\frac{\partial E}{\partial \beta_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -3y''^{\frac{2}{3}}\frac{\partial E}{\partial \beta_1} - \frac{10y'''}{y''^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0.$$

En divisant la dernière équation par $-3y''^{\frac{2}{3}}$, on peut récrire la dernière équation comme

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial \beta_1} + \frac{10}{3}\beta_1\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on a

$$\frac{d\beta_1}{1} = \frac{d\beta_2}{\frac{10}{3}\beta_1},$$

que l'on intègre directement pour trouver l'invariant

$$\gamma = \beta_2 - \frac{5}{3}\beta_1^2 = \frac{y''''}{y''^{\frac{5}{3}}} - \frac{5}{3}\frac{y'''^2}{y''^{\frac{8}{3}}}$$

La base des invariants est donc formée du seul invariant γ et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = cy''^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}\frac{y'''^2}{y''}, \text{ où c est une constante.} \tag{4.8}$$

On peut la réduire par le changement de variable u=y" à

$$u'' = cu^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}\frac{u'^2}{u}. \tag{4.9}$$

Nous pouvons résoudre la dernière équation et nous obtenons comme solution générale

$$u(x) = \left(-\frac{cx^2}{3} + \frac{2}{3}dx + \frac{2}{3}e\right)^{\frac{-3}{2}}, \quad \text{où d et e sont les constantes d'intégration.} \tag{4.10}$$

■ Étudions le cas 15 du tableau 1[12], son algèbre est donnée par :

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\,\partial_x, \quad X_4 = y\,\partial_y, \quad X_5 = x^2\,\partial_x.$$

Nous demandons premièrement que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants du cas $D_{2,1}$, soient

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

Ensuite nous demandons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, I_2, I_3, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -y'\frac{\partial E}{\partial I_1} - 2y''\frac{\partial E}{\partial I_2} - 3y'''\frac{\partial E}{\partial I_3} - 4y''''\frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{2I_2} = \frac{dI_3}{3I_3} = \frac{dI_4}{4I_4}$$

ce qui nous mène aux invariants

$$\alpha_1 = \frac{y''}{y'^2}, \quad \alpha_2 = \frac{y'''}{y'^3}, \quad \alpha_3 = \frac{y''''}{y'^4}.$$

Nous exigeons ensuite que

$$pr^{(4)}X_4E(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \sum_{i=1}^{3}(pr^{(4)}X_4\alpha_i)\,\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{y''}{y'^2}\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - \frac{2y'''}{y'^3}\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} - \frac{3y''''}{y'^4}\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0.$$

On peut récrire la dernière équation comme

$$\alpha_1\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} + 2\alpha_2\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} + 3\alpha_3\frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on trouve

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{2\alpha_2} = \frac{d\alpha_3}{3\alpha_3}$$

ce qui nous mène aux invariants

$$\beta_1 = \frac{y'y'''}{y''^2}, \quad \beta_2 = \frac{y'^2y''''}{y''^3}.$$

On demande finalement que

$$pr^{(4)}X_5E(\beta_1,\beta_2) = \sum_{i=1}^{2}(pr^{(4)}X_5\beta_i)\,\frac{\partial E}{\partial \beta_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{y'^2y'''}{y''^3} - 6\frac{y'}{y''}\right)\frac{\partial E}{\partial \beta_1} + \left(6\frac{y'^3y''''}{y''^4} - 12\frac{y'^2y'''}{y''^3}\right)\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0.$$

En multipliant la dernière équation par $\frac{y'''}{y''}$, on obtient

$$(4\beta_1^2 - 6\beta_1)\frac{\partial E}{\partial \beta_1} + (6\beta_1\beta_2 - 12\beta_1^2)\frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques on obtient l'invariant

$$\gamma = \frac{\beta_2 - 6\beta_1 + 6}{(2\beta_1 - 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'^2y'''' - 6y'y''y''' + 6y''^3}{(2y'y''' - 3y''^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{c}{y'^2}(2y'y''' - 3y''^2)^{\frac{3}{2}} + 6\frac{y''y'''}{y'} - 6\frac{y''^3}{y'^2}, \quad \text{où c est une constante.} \tag{4.11}$$

que l'on peut réduire à l'équation

$$u''' = \frac{c}{u^2}(2uu'' - 3u'^2)^{\frac{3}{2}} + 6\frac{u'u''}{u} - 6\frac{u'^3}{u^2} \tag{4.12}$$

en posant u=y'.

■ Étudions le cas 24 du tableau 1[12], son algèbre est donnée par :

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\,\partial_y, \quad X_4 = x^2\,\partial_y, \quad X_5 = x\,\partial_x + \alpha y\,\partial_y.$$

On demande premièrement que $pr^{(4)}X_1E = pr^{(4)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants du cas $D_{2,1}$, soient

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''', \quad I_4 = y''''.$$

En second lieu nous exigeons que

$$pr^{(4)}X_3E(I_1, I_2, I_3, I_4) = \sum_{i=1}^{4}(pr^{(4)}X_3I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = \frac{\partial E}{\partial I_1} = 0.$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial I_2}, \frac{\partial E}{\partial I_3}, \frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation on trouve les trois invariants

$$J_1 = y'', \quad J_2 = y''', \quad J_3 = y''''.$$

Troisièment on demande que

$$pr^{(4)}X_3E(J_1, J_2, J_3) \;=\; \sum_{i=1}^{3}(pr^{(4)}X_3J_i)\,\frac{\partial E}{\partial J_i} \;=\; 2\,\frac{\partial E}{\partial J_1} \;=\; 0.$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial J_2}, \frac{\partial E}{\partial J_3}$ n'apparaissent pas dans la dernière équation, on trouve les invariants

$$K_1 = y''', \quad K_2 = y''''.$$

Finalement on exige que

$$pr^{(4)}X_3E(K_1, K_2) \;=\; \sum_{i=1}^{2}(pr^{(4)}X_3K_i)\,\frac{\partial E}{\partial K_i} \;=\; 0.$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha - 3)y'''\frac{\partial E}{\partial K_1} + (\alpha - 4)y''''\frac{\partial E}{\partial K_2} \;=\; 0.$$

En appliquant la méthode des caractéristiques à la dernière équation, on a

$$\frac{dy'''}{(\alpha - 3)y'''} = \frac{dy''''}{(\alpha - 4)y''''}.$$

Ceci mène à l'invariant

$$\gamma \;=\; \frac{y''''^{(\alpha-3)}}{y'''^{(\alpha-4)}}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' \;=\; c\,y'''^{\frac{(\alpha-4)}{(\alpha-3)}}, \qquad \text{où c est une constante.} \tag{4.13}$$

En posant u=y''', cette équation peut-être réduite à l'équation du premier ordre

$$u' = c\, u^{\frac{(\alpha-4)}{(\alpha-3)}}. \qquad (4.14)$$

Nous pouvons résoudre la dernière équation et nous obtenons comme solution générale

$$u(x) = \left(\frac{cx + \alpha d - 3d}{\alpha - 3}\right)^{\alpha-3}, \qquad \text{où d est la constante d'intégration.} \qquad (4.15)$$

■Etudions le cas 25 du tableau 1[12], le groupe symétrie est donné par

$$X_1 = \partial_x\,,\;\; X_2 = \partial_y,\;\; X_3 = x\,\partial_y,\;\; X_4 = x^2\,\partial_y,\;\; X_5 = x\,\partial_x + (3y + x^3)\,\partial_y.$$

En se basant sur le cas précédent, l'analyse des quatre premier champs de vecteurs nous donne les invariants

$$I_1 = y''', \quad I_2 = y''''$$

On exige ensuite que

$$pr^{(4)}X_5E(I_1, I_2) = \sum_{i=1}^{2}(pr^{(4)}X_5I_i)\,\frac{\partial E}{\partial I_i} = 0.$$

Ceci nous amène à l'équation

$$3\frac{\partial E}{\partial I_1} - y''''\frac{\partial E}{\partial I_2} = 0$$

et en appliquant la méthode des caractéristiques on a

$$\frac{dI_1}{3} = -\frac{dI_2}{I_2}.$$

On trouve alors que l'invariant est

$$\alpha = e^{\frac{y'''}{3}} y''''$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = ce^{-\frac{y'''}{3}}. \tag{4.16}$$

En faisant le changement de variable u=y''', on peut réduire l'équation à

$$u' = ce^{-\frac{u}{3}} \tag{4.17}$$

qui se solution avec

$$u(x) = -3\ln\left(\frac{3}{c(x+d)}\right) \tag{4.18}$$

Après avoir calculé quelques cas provenant de l'article de A.Gonzalez-Lopez, N.Kamran, P.J. Olver, nous ne parvenons toujours pas à trouver de modèle discret approximant les équations différentielles invariantes pour les groupes de dimension 5.

CONCLUSION

Depuis les années 1890, la théorie des groupes de Lie s'applique aux équations différentielles. Elle fait réflèter les symétries d'une équation. Sophus Lie avait comme objectif de trouver tous les équations pour une algèbre de symétries donnée et vice versa. Il accompli une classification implicite des groupes de symétries des équations différentielles ordinaires dans le cas de variables complexes. Dans un premier temps nous avons utilisé cette classification pour calculer les équations différentielles invariantes pour une algèbre de symétries donnée. Pour ce faire nous avons utilisé la théorie des prolongations et les calculs se font très bien dans tous les cas. Parallèlement nous voulions trouver les schémas discrets invariants pour les mêmes symétries, ce que nous avons réussi dans les cas à une ou deux dimension. Pour ce qui est des dimensions supérieures, il arrive qu'il soit possible de les trouver, mais certains cas sont tout simplement trop complexes. Ensuite, nous utilisons la classification à A.Gonzalez-Lopez, N.Kamran, P.J. Olver pour le cas réel et des groupes de dimension 5. Encore une fois on peut calculer relativement bien les équations différentielles invariantes, mais les schémas sont trop difficile à obtenir. Les schémas donnés ici ne sont pas les plus généraux. Dans le cas de calculs numériques il faut faire un choix, le maillage uniforme n'est pas nécessairement le meilleur choix. Les schémas numériques deviennent très intéressants quand on ne peut intégrer analytiquement et explicitement.

Il est aussi intéressant de noter l'article de A.Bourlioux, C.Cyr-Gagnon, P.Winternitz[11] dans lequel ils traitent numériquement des schémas du deuxième et troisième ordre. Ils montrent que leurs méthodes numériques pour résoudre ces schémas approximant des équations différentielles donnent de meilleurs résultats que pour certaines méthodes standards. Ils montrent par exemple que pour des solutions avec singularité, leurs méthodes de calcul permet d'avoir des résultats au-delà la singularité, ce que les méthodes standards ne permettent pas. Nous espérons donc amener des résultats pouvant aider à poursuivre ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Sophus Lie, Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen,Bearbeitet und Herausgegehen von Dr.G.Scheffers (Teubner, Leipzig, 1891), reprinted as Differentialgleichungen (Chelsea, New York,1967).

[2] S. Lie, Vorlesungen uber Continuirliche Gruppen mit Geometischen und Anderen Anwendungen, Bearbeited und Herausgegeben von Dr.G.Scheffers(Teubner, Leipzig, 1893)

[3] S. Lie, Theorie der transformationsgruppen, Dritter Abschnitt, Abteilun. I.Unter Mitwirkung von Pr.F.Engel(Teubner, Leipzig, 1893)

[4] S. Lie, Klassifikation und Integration von Gewohnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y die eine Gruppe von Transformationen gestatten.I-IV. Gessamelte Abhandlungen (Teubner, Leipzig, 1924), Vol.5.

[5] P.J. Olver,Applications of Lie Groups to Differential Equations (Springer, New York, 1986).

[6] G.W.Bluman and S.Kumei, Symmetries and Differential Equations (Springer, Berlin, 1989)

[7] Peter E.Hydon, Symmetry Methods for Differential Equations (Cambridge University Press, 2000)

[8] V.Dorodnitsyn, R.Kozlov et P.Winternitz, Lie group classification of second-order ordinary difference equations, J.Math.Phys., Vol 41, No.1, 480-504, 2000.

[9] D.Levi, P.Winternitz , Continuous Symmetries of Difference Equations, J.Phys.A :Math.Gen.39 (2006),R1-R63.

[10] Omri Gat, Symmetry algebras of third-order ordinary differential equations, J.Math.Phys., Vol 33, No.9, 2966-2971, 1992.

[11] A.Bourlioux, C.Cyr-Gagnon, P.Winternitz, Difference schemes with point symmetries and their numerical tests, J.Phys A :Gen.,39 (2006) 6877-6896.

[12] A.Gonzalez-Lopez, N.Kamran, P.J. Olver, Lie algebras of vector fields in the real plane, Proc. London Math Soc., Vol. 64, 339-368, 1992.