

Université de Montréal

Moyenne conditionnelle tronquée pour un
portefeuille de risques corrélés

par

Andrey Ermilov

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Statistique

novembre 2005

© Andrey Ermilov, 2005



QA

3

U54

2005

v. 014



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Moyenne conditionnelle tronquée pour un portefeuille de risques corrélés

présenté par

Andrey Ermilov

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Louis Doray

(président-rapporteur)

Martin Bilodeau

(directeur de recherche)

Roch Roy

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

04 / 11 / 05

SOMMAIRE

L'utilisation de la moyenne conditionnelle tronquée (connue aussi comme espérance conditionnelle unilatérale et en anglais sous l'acronyme TCE) pour mesurer les risques attire de plus en plus l'attention des experts en assurances et en investissements, car cette mesure possède des propriétés souhaitables et applicables dans une variété de situations. En particulier, cette méthode permet de répartir de façon naturelle le capital total en risque parmi ses diverses composantes.

Des formules explicites de TCE existent pour le modèle où le portefeuille est distribué selon une loi elliptique. Ce mémoire porte sur l'estimation statistique de ces mesures. À l'aide de simulations, on étudie le comportement de la variance des différents estimateurs en fonction de la taille échantillonnale pour les modèles où le portefeuille est distribué selon une loi normale ou une loi t de Student multivariée. Les méthodes de bootstrap paramétrique et non paramétrique sont utilisées pour estimer la variance des estimateurs de TCE pour différentes tailles de l'échantillon simulé. Ensuite, ces estimations bootstrap sont comparées avec la variance exacte et l'estimation « plug-in », obtenue des formules de la variance asymptotique du modèle.

Mots clés : Espérance conditionnelle unilatérale, consistance, familles elliptiques, décomposition de risque, variance asymptotique.

SUMMARY

The use of the tail conditional expectation (TCE) as a measure of risk attracts more and more the insurance and investment experts because it shares properties that are considered desirable and applicable in a variety of situations. In particular, this method permits to fairly allocate the total capital needed due to exposure to loss to the constituents of the risk.

If one considers a model where a portfolio of risks is distributed elliptically, the explicit formulas of the TCE exist. The study presented in this thesis is concentrated on the statistical estimation of these measures. Using numerical simulations, we study the comportment of the variance of different estimators as a function of the sample size for the models where the portfolio is distributed normally or as a multivariate Student. The methods of parametric and non-parametric bootstrap are used to estimate the variance of the TCE estimators for different sizes of the simulated sample and then compare it to the exact variance and the plug-in estimate, obtained with the formulas of the asymptotic variance of the model.

Key words : Tail conditional expectation, consistency, elliptical families, risk decomposition, asymptotic variance.

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord et avant tout remercier mon directeur de recherche, monsieur Martin Bilodeau, professeur au Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal, qui a proposé et supervisé ce projet. En plus de ses précieux conseils, qui ont toujours été pertinents, clairs et précis, il a toujours su se montrer disponible et m'a encouragé tout au long de ce travail. Je le remercie surtout pour son appui financier qui m'a permis de me consacrer entièrement à mon programme d'étude.

Je tiens à remercier également le professeur Christian Léger du Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal. Les discussions avec lui dans le cadre de son cours de méthodes de rééchantillonnage m'ont beaucoup aidé dans la réalisation de ce projet.

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs et le personnel du Département de mathématiques et de statistique pour leur travail extraordinaire et leur dévouement, qui m'ont permis de compléter mes études en si peu de temps et sans trop de problèmes.

Finalement, je tiens à remercier mon épouse Natalie pour ses encouragements et sa gentillesse, qui ont été sans limites.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Summary.....	iv
Remerciements.....	v
Liste des figures.....	ix
Liste des tableaux.....	x
Introduction.....	1
Chapitre 1. TCE comme une mesure cohérente de risque.....	4
1.1. Cohérence de mesures de risque.....	4
1.1.1. Incohérence de la VaR.....	5
1.1.2. Définition de la moyenne conditionnelle tronquée (ou TCE).....	6
1.2. TCE pour les modèles normaux et elliptiques multivariés.....	7
1.2.1. TCE pour le modèle normal multivarié.....	7
1.2.2. Familles elliptiques : définition et propriétés.....	10
1.2.3. TCE pour les modèles elliptiques.....	13
1.3. Un exemple pratique d'utilisation de la TCE.....	18
1.4. Autres approches à la modélisation de risques multivariés.....	21
1.4.1. TCE pour les modèles Gamma multivariés.....	21
1.4.2. Utilisation de copules pour modéliser les risques.....	23
Chapitre 2. Estimation statistique de TCE.....	24

2.1. Estimation des paramètres des distributions elliptiques	24
2.1.1. Estimateurs sans biais	25
2.1.2. Estimateurs de vraisemblance maximale	26
2.1.3. Estimateurs robustes	27
2.2. La variance asymptotique des estimateurs de TCE	28
Chapitre 3. Variance des estimateurs de la TCE - étude	
numérique	36
3.1. Simulation d'un portefeuille de risques elliptiques	38
3.1.1. Le modèle normal	38
3.1.2. Le modèle t de Student	41
3.2. Le programme S-plus	43
3.3. Les résultats des simulations	43
3.3.1. Le modèle normal, simples estimateurs sans biais	45
3.3.2. Le modèle t de Student, simples estimateurs sans biais	57
3.3.3. Le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale	63
3.4. Analyse des résultats de simulations	69
3.4.1. Le modèle normal, simples estimateurs sans biais	69
3.4.2. Le modèle t de Student, simples estimateurs sans biais	72
3.4.3. Le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale	74
Conclusion	79
Bibliographie	81
Annexe A. Programmes S-Plus, le modèle normal	A-i
Annexe B. Programmes S-Plus, le modèle t de Student, les	
estimateurs sans biais	B-i

Annexe C. Programmes S-Plus, le modèle t de Student, les
estimateurs de vraisemblance maximale C-i

LISTE DES FIGURES

3.1	REQM pour le modèle normal, estimateurs sans biais et $n = 3$	70
3.2	REQM pour le modèle normal, estimateurs sans biais et $n = 7$	71
3.3	REQM pour le modèle t de Student, estimateurs sans biais et $n = 3$. .	73
3.4	REQM pour le modèle t de Student, estimateurs sans biais et $n = 7$. .	74
3.5	REQM pour le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale et $n = 3$	75
3.6	REQM pour le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale et $n = 7$	76

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Corrélations, écarts types et moyennes pour 10 unités d'affaires.....	19
1.2	Comparaison de mesures de risque différentes.....	20
3.1	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle normal, estimateurs sans biais.....	45
3.2	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r	45
3.3	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1 S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle normal, estimateurs sans biais.....	46
3.4	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1 S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r	46
3.5	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2 S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.....	47
3.6	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2 S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r	47
3.7	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3 S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.....	48
3.8	$n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3 S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r	48
3.9	$n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle normal, estimateurs sans biais.....	49
3.10	$n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r	49

- 3.11 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 50
- 3.12 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 50
- 3.13 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 51
- 3.14 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 51
- 3.15 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 52
- 3.16 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 52
- 3.17 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 53
- 3.18 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 53
- 3.19 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 54
- 3.20 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 54
- 3.21 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 55
- 3.22 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 55
- 3.23 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle normal, estimateurs sans biais. 56

- 3.24 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r 56
- 3.25 $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, estimateurs sans biais. 57
- 3.26 $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 57
- 3.27 $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 58
- 3.28 $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 58
- 3.29 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, estimateurs sans biais. 59
- 3.30 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 59
- 3.31 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 60
- 3.32 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 60
- 3.33 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 61
- 3.34 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 61
- 3.35 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 62
- 3.36 $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais. 62

- 3.37 $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, EVM. 63
- 3.38 $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, EVM. 63
- 3.39 $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, EVM. 64
- 3.40 $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, EVM. 64
- 3.41 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, EVM. 65
- 3.42 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, EVM. 65
- 3.43 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, EVM. 66
- 3.44 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, EVM. 66
- 3.45 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle t de Student, EVM. 67
- 3.46 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle t de Student, EVM. 67
- 3.47 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle t de Student, EVM. 68
- 3.48 $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle t de Student, EVM. 68
- 3.49 L'efficacité relative des estimateurs sans biais aux estimateurs de vraisemblance maximale, $n = 3$ 77

3.50	L'efficacité relative des estimateurs sans biais aux estimateurs de vraisemblance maximale, $n = 7$	77
------	---	----

INTRODUCTION

Les compagnies d'assurances mettent habituellement de côté des fonds propres afin d'être en mesure de payer les réclamations au cas où les revenus des primes deviendraient insuffisants. Les fluctuations des marchés financiers pourraient mettre en danger la rentabilité des produits d'assurances et les fonds propres sont nécessaires pour compenser cette chute de rentabilité potentielle. Évaluer les montants de ces fonds le plus exactement possible est très important pour la compagnie, si elle veut rester viable et compétitive. D'un côté, détenir un montant de fonds propres trop faible pourrait exposer la compagnie et ses clients à un risque exagéré. D'un autre côté, détenir un montant trop élevé représenterait une mauvaise allocation des ressources ; cela pourrait désavantager la compagnie par rapport aux sociétés mesurant mieux leurs risques et ajustant ainsi mieux leurs tarifs.

Il faut noter que bien qu'on utilise un exemple du domaine des assurances, on peut appliquer également les méthodes étudiées à tout autre domaine d'affaires risqué, et même sur un portefeuille d'investissement.

Évaluer les montants de fonds propres qu'il faut mettre en réserve n'est pas un exercice facile. Il faut d'abord déterminer *la distribution de probabilité* de pertes encourues par la compagnie, ce qu'on appelle se doter d'un *modèle*. Ces pertes sont en général les montants totaux des réclamations que la compagnie devrait payer. Ensuite, on doit se doter d'une *mesure de risque* de ces pertes afin de calculer les montants de fonds qu'il faut allouer pour couvrir les pertes avec un haut degré de confiance.

Une mesure de risque est définie comme une correspondance entre l'ensemble des valeurs aléatoires qui représentent généralement les risques et l'ensemble des nombres réels. L'exemple d'une telle mesure, qui est utilisée traditionnellement

dans le domaine financier, est la *Value at Risk* (ou VaR). Malheureusement, VaR ne possède pas toutes les propriétés d'une mesure *cohérente* au sens de Artzner et al. [1]. Artzner et ses collègues ont introduit la mesure de *moyenne conditionnelle tronquée* (connue aussi comme espérance conditionnelle unilatérale ou TCE, Tail Conditional Expectation) qui, étant une mesure plus conservatrice par rapport à VaR, satisfait aux axiomes de cohérence et donc est préférable pour l'utilisation.

Ayant choisi le modèle et la mesure de risque, on doit obtenir les formules ou les algorithmes pour calculer la valeur de cette mesure à partir des paramètres du modèle choisi. La première formule explicite de TCE pour un modèle normal multivarié a été obtenue par Panjer [19]. Dans son étude Panjer a démontré les avantages qu'on obtient en traitant le portefeuille de risques comme une valeur aléatoire multivariée tenant donc compte des corrélations entre les marginales. Cela par opposition à l'approche où on traite chaque risque comme une valeur aléatoire univariée et indépendante des autres. Landsman et Valdez [14] ont généralisé les formules de Panjer [19], examinant le modèle où le risque est distribué selon une loi elliptique multivariée, dont la loi normale est un cas particulier.

Comme Bilodeau [3] l'a remarqué, les formules de Landsman et Valdez utilisent la densité marginale univariée de la loi elliptique du modèle. Cependant, l'expression de cette loi marginale n'est pas toujours facile à obtenir. Au fait, seulement les modèles avec une loi elliptique consistante au sens de Kano [11] donnent la possibilité d'obtenir facilement l'expression de la marginale univariée, car toutes les marginales de la loi elliptique appartenant à une famille consistante ont la même forme fonctionnelle. Toutefois, les familles non consistantes peuvent être utilisées, sauf qu'il faudrait probablement travailler fort pour obtenir les expressions pour les marginales.

Afin d'utiliser les formules de TCE dans la pratique, il faut estimer les paramètres de la loi du modèle à partir des données disponibles et calculer la valeur de TCE en substituant les valeurs estimées en place des vrais paramètres. Bilodeau [3] a proposé plusieurs estimateurs des paramètres des distributions elliptiques, incluant les estimateurs sans biais, les estimateurs de vraisemblance maximale elliptique et les estimateurs robustes et affines invariants. Notant que

les distributions asymptotiques de tous ces estimateurs sont normales et partagent la même forme, Bilodeau a obtenu les expressions de la variance asymptotique de l'estimateur de TCE.

Lorsqu'on a le choix entre plusieurs estimateurs, il serait intéressant en pratique de savoir lequel des estimateurs est préférable dans une situation donnée et d'estimer les écarts types afin de construire les intervalles de confiance pour les estimés de TCE. On peut utiliser les estimations « plug-in » à partir des expressions de la variance asymptotique si on a assez de données ou bien, on peut recourir aux méthodes bootstrap.

Afin de pouvoir donner des recommandations sur le choix d'une méthode d'estimation de TCE et de sa variance pour un modèle donné, on utilise dans la présente étude des simulations pour calculer la variance exacte de TCE pour des tailles échantillonales différentes et la comparer avec les variances obtenues par les méthodes utilisables en pratique : le bootstrap et l'estimation « plug-in ».

Le chapitre 1 introduit les notions de mesures de risque cohérentes en général et de TCE en particulier et présente les démonstrations des formules de TCE pour les modèles normaux et elliptiques, qui sont parfois manquantes dans les articles originaux. Dans le chapitre 2, on décrit la procédure générale d'estimation de TCE avec les options d'estimateurs des paramètres des lois elliptiques et on démontre les expressions pour la variance asymptotique de ces estimateurs. Les résultats des simulations pour différents modèles et estimateurs seront finalement exposés et comparés au chapitre 3.

Chapitre 1

TCE COMME UNE MESURE COHÉRENTE DE RISQUE

Une mesure de risque est une fonction de l'ensemble des valeurs aléatoires qui représentent les risques sur l'ensemble des nombres réels. Une mesure de risque est supposée donner un nombre qui quantifie l'exposition au risque de façon sensée pour le problème d'intérêt. Dans le contexte de cette étude, il est plus facile d'imaginer la mesure de risque comme le montant de fonds nécessaire pour couvrir le risque ou la perte totale d'un portefeuille d'investissement. Par exemple, l'écart type d'une distribution est une mesure de risque. Un autre exemple d'une mesure de risque, qui est utilisée traditionnellement dans le secteur financier est le *quantile* ou *Value at Risk* (ou VaR). Malheureusement, la VaR est atteinte d'incohérences sérieuses si la loi du modèle n'est pas normale. Cependant, il existe des mesures qui sont libres de telles incohérences. L'une d'entre elles, assez récente, la moyenne conditionnelle tronquée (ou TCE - tail conditional expectation), est introduite et étudiée dans ce chapitre.

1.1. COHÉRENCE DE MESURES DE RISQUE

On considère la variable aléatoire X qui représente le risque et dont la fonction de répartition est $F_X(x)$. Une mesure de risque $\rho(X)$ est une fonction de l'ensemble des ces valeurs aléatoires sur l'ensemble des nombres réels :

$$\rho(X) : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Afin que la mesure de risque soit utilisable dans la pratique, il faut qu'elle possède des propriétés utiles. Un ensemble d'axiomes auquel une mesure de risque *cohérente* devrait obéir a été proposé par Artzner et al. [1] :

- 1) *Sous additivité* : pour tous risques X et Y ,

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Cette propriété implique que combiner les risques est moins risqué que de les traiter séparément et donc la diversification des affaires ou des investissements abaisse le risque.

- 2) *Monotonie* : pour tous risques X et Y , où $X \leq Y$ avec probabilité 1, alors

$$\rho(X) \leq \rho(Y).$$

Cela signifie que la mesure de risque considéré plus grand donne une valeur plus élevée.

- 3) *Homogénéité positive* : pour tout risque X et $\forall \lambda > 0$,

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

Cette propriété exige que si le risque est augmenté ou diminué, la mesure doit changer aussi par une valeur égale proportionnelle.

- 4) *Invariance translationnelle* : pour tout risque X et $\forall \alpha > 0$,

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha.$$

Ici, il faut que le changement du risque par une constante non aléatoire amène au même changement de la mesure.

1.1.1. Incohérence de la VaR

Les mesures qui satisfont aux axiomes 1 - 4 sont dites cohérentes. Malheureusement, la mesure qui est utilisée traditionnellement dans le domaine financier, la *Value at Risk*, ou VaR, n'est pas cohérente. Cette mesure est définie comme :

$$VaR_X(q) = \inf \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq q\}, \text{ où } q \in (0, 1). \quad (1.1)$$

On peut remarquer que la VaR est en fait le $q^{\text{ième}}$ quantile de la distribution de la valeur aléatoire X . Artzner et al. [1] ont fait une analyse de la VaR et la déconseillent à cause de plusieurs défauts sérieux, incluant la violation de l'axiome de sous additivité.

1.1.2. Définition de la moyenne conditionnelle tronquée (ou TCE)

La moyenne conditionnelle tronquée (ou TCE - tail conditional expectation) a été introduite par Artzner et al. [1] comme une mesure de risque et elle est définie comme :

$$TCE_X(x_q) = E[X|X > x_q], \quad (1.2)$$

où x_q est le $q^{\text{ième}}$ quantile défini dans (1.1).

Suite à une recherche très récente, on peut affirmer que la TCE, comme elle est définie dans (1.2), satisfait à toutes les exigences d'une mesure cohérente seulement si la fonction de répartition $F_X(x)$ du risque est continue. On peut voir dans Dhaene et al. [6] des exemples où, avec un risque discret ou mixte, l'axiome de sous additivité n'est pas satisfait. Toutefois, on choisit habituellement des lois continues pour les modèles des risques et dans le présent mémoire ce sera le cas. Alors, la TCE sous cette condition sera une mesure cohérente, comme Artzner et ses collègues l'ont démontré.

On peut noter aussi que la TCE donne une mesure de risque plus conservatrice par rapport à la VaR pour le même degré de confiance q , car

$$TCE_X(x_q) = x_q + E[X - x_q|X > x_q], \quad (1.3)$$

et donc,

$$TCE_X(x_q) \geq VaR_X(q) = x_q,$$

puisque le dernier terme dans (1.3) est évidemment non négatif.

Grâce à toutes ces propriétés qui sont très utiles, la TCE est devenue une mesure de risque populaire et selon Hardy et Wirch [8], elle est la seule mesure recommandée par l'Institut Canadien des Actuaire pour déterminer les fonds nécessaires pour les compagnies d'assurances avec des portefeuilles de contrats

d'assurances liés aux valeurs mobilières (voir Groupe d'étude sur les techniques d'évaluation stochastique, Institut Canadien des Actuaires [9]).

1.2. TCE POUR LES MODÈLES NORMAUX ET ELLIPTIQUES MULTIVARIÉS

La tâche d'obtenir les formules pour la TCE dans le cas multivarié n'est pas très évidente. Jusqu'à maintenant le nombre de familles de lois multivariées pour lesquelles on a réussi à obtenir ces formules n'est pas grand. Dans cette section on démontre ces formules pour les lois normales et elliptiques, complétant là où il sera nécessaire les lacunes des articles originaux.

1.2.1. TCE pour le modèle normal multivarié

Panjer [19] a examiné le cas où le portefeuille des risques corrélés X_1, X_2, \dots, X_n est distribué selon une loi normale multivariée. Dans ce cas-ci, la somme

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

suit aussi une loi normale $N(\mu_S, \sigma_S^2)$ de moyenne μ_S et d'écart type σ_S . Comme

$$F_S(s|S > s_q) = \begin{cases} 0, & s < s_q, \\ \frac{F_S(s) - F_S(s_q)}{1 - F_S(s_q)}, & s > s_q, \end{cases}$$

on a alors que

$$\begin{aligned} TCE_S(s_q) &= E[S|S > s_q] = \int_{\mathbb{R}} s dF_S(s|s > s_q) = \frac{1}{1 - F_S(s_q)} \int_{s_q}^{\infty} s f_S(s) ds \\ &= \frac{1}{1 - F_S(s_q)} \int_{z_q}^{\infty} (\mu_S + z\sigma_S) \varphi(z) dz \\ &= \frac{1}{1 - F_S(s_q)} \left[\mu_S \int_{z_q}^{\infty} \varphi(z) dz + \sigma_S \int_{z_q}^{\infty} z \varphi(z) dz \right] \\ &= \frac{1}{1 - F_S(s_q)} \left[\mu_S (1 - \Phi(z_q)) + \frac{\sigma_S}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_q}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - F_S(s_q)} [\mu_S(1 - F_S(s_q)) + \sigma_S \varphi(z_q)] \\
&= \mu_S + \sigma_S^2 \frac{f_S(s_q)}{\bar{F}_S(s_q)}, \tag{1.4}
\end{aligned}$$

où $F_S(\cdot)$ et $f_S(\cdot)$ sont respectivement les fonctions de répartition et de densité de la loi normale avec moyenne μ_S et écart type σ_S et $\bar{F}_S(s_q) = 1 - F_S(s_q)$. Les fonctions $\Phi(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ sont respectivement les fonctions de répartition et de densité d'une $N(0, 1)$. Dans le calcul ci-dessus on a utilisé le changement de variable $z = (s - \mu_S)/\sigma_S$.

Le résultat principal de Panjer dont il omet la preuve est la décomposition du portefeuille des risques $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ avec TCE, c'est-à-dire, l'obtention d'une formule de contribution de chaque risque au risque total, dénoté comme

$$TCE_{X_k|S}(s_q) = E[X_k | S > s_q].$$

Avant de démontrer le théorème sur la formule de décomposition de risques, on démontre un lemme dont on va se servir par la suite.

Lemme 1.1. *Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)^\top \sim N(\mu, \Sigma)$, où $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. Alors,*

$$TCE_{X_1|X_2}(x_q) = E[X_1 | X_2 > x_q] = \mu_1 + \frac{\frac{1}{\sigma_2} \varphi(z_{2,q})}{\bar{\Phi}(z_{2,q})} \cdot \sigma_1\sigma_2\rho_{12}, \tag{1.5}$$

où $\bar{\Phi}(\cdot) = 1 - \Phi(\cdot)$ et $z_{2,q} = (x_q - \mu_2)/\sigma_2$.

Démonstration. Par la définition de l'espérance conditionnelle,

$$E[X_1 | X_2 > x_q] = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | x_2 > x_q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_q}^{\infty} \frac{x_1 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} dx_2 dx_1.$$

En utilisant la formule de la densité normale bivariée et la transformation

$$z_1 = (x_1 - \mu_1)/\sigma_1,$$

$$z_2 = (x_2 - \mu_2)/\sigma_2$$

avec jacobien $J = \sigma_1\sigma_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2 > x_q] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \frac{\mu_1 + \sigma_1 z_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}(z_1^2+z_2^2-2\rho_{12}z_1z_2)} dz_2 dz_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \frac{\mu_1 + \sigma_1 z_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{12}^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z_1-\rho_{12}z_2}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\right)^2 + z_2^2\right)} dz_2 dz_1. \end{aligned}$$

On fait une nouvelle transformation

$$z' = (z_1 - \rho_{12}z_2)/\sqrt{1-\rho_{12}^2},$$

$$z_2 = z_2$$

avec jacobien $J = \sqrt{1-\rho_{12}^2}$:

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2 > x_q] &= \frac{\mu_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z'^2+z_2^2)} dz' dz_2 \\ &+ \frac{\sigma_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}{2\pi} \left(z' + \frac{\rho_{12}z_2}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \right) e^{-\frac{1}{2}(z'^2+z_2^2)} dz' dz_2 \\ &= \frac{\mu_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} dz_2 \\ &+ \frac{\sigma_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{e^{-\frac{1}{2}z_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z'^2} dz'}_0 \right. \\ &\left. + \frac{\rho_{12}z_2}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z'^2} dz'}_1 \right) dz_2 \\ &= \frac{\mu_1(1-\Phi(z_{2,q}))}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} + \frac{\sigma_1\rho_{12}}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \frac{z_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} dz_2 \\ &= \mu_1 + \frac{\sigma_1\sigma_2\rho_{12}f_{X_2}(x_q)}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} = \mu_1 + \frac{\frac{1}{\sigma_2}\varphi(z_{2,q})}{\bar{\Phi}(z_{2,q})} \cdot \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \end{aligned}$$

□

Théorème 1.1. Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top \sim N(\mu, \Sigma)$ et soit $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors, la contribution du risque X_k , $1 \leq k \leq n$, au TCE total peut être exprimée comme

$$TCE_{X_k|S}(s_q) = E[X_k|S > s_q] = \mu_k + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \varphi\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)}{\bar{\Phi}\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)} \cdot \sigma_k \sigma_S \rho_{k,S}, \quad (1.6)$$

où $\rho_{k,S} = \text{cov}(X_k, S) / \sigma_k \sigma_S$.

Démonstration. Puisque S , étant la somme des valeurs aléatoires normales, est aussi distribuée normalement, on peut appliquer le Lemme 1.1 au vecteur $X = (X_k, S)^\top$ et le résultat s'ensuit immédiatement. \square

On peut remarquer que si on somme les $TCE_{X_k|S}(s_q)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n TCE_{X_k|S}(s_q) &= \sum_{k=1}^n \mu_k + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \varphi\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)}{\bar{\Phi}\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)} \sum_{k=1}^n \sigma_k \sigma_S \rho_{k,S} \\ &= \mu_S + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \varphi\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)}{\bar{\Phi}\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)} \sum_{k=1}^n \text{cov}(X_k, S) \\ &= \mu_S + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \varphi\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)}{\bar{\Phi}\left(\frac{s_q - \mu_S}{\sigma_S}\right)} \sigma_S^2 \\ &= TCE_S(s_q), \end{aligned}$$

ce qui est naturel, car

$$TCE_S(s_q) = E[S|S > s_q] = \sum_{k=1}^n E[X_k|S > s_q] = \sum_{k=1}^n TCE_{X_k|S}(s_q).$$

Cela illustre qu'avec la décomposition par la TCE on peut répartir entre les composantes du risque tous les fonds alloués au complet.

1.2.2. Familles elliptiques : définition et propriétés

Le cas où le portefeuille des risques corrélés X_1, X_2, \dots, X_n est distribué selon une loi appartenant à une famille elliptique multivariée a été considéré par Landsman et Valdez [14]. On va d'abord définir et décrire les propriétés des lois elliptiques, et les formules de TCE seront démontrées dans la section suivante.

Définition 1.1. Le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ suit une distribution elliptique avec les paramètres $\mu(n \times 1)$ et $\Sigma(n \times n)$, si sa fonction caractéristique est de la forme

$$\varphi_n(t) = e^{it^\top \mu} \psi_n \left(\frac{1}{2} t^\top \Sigma t \right) \quad (1.7)$$

pour une fonction ψ_n et une matrice Σ définie positive.

On peut noter les propriétés utiles suivantes des distributions elliptiques :

1) Si X possède une densité, alors elle est de la forme

$$f_X(x) = \frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}} g_n \left(\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \quad (1.8)$$

pour une fonction g_n qui est appelée le *générateur de densité*. La forme de cette fonction g_n peut dépendre de la dimension n . On écrit alors que $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$.

2) Les deux premiers moments sont $E(X) = \mu$ et $Cov(X) = \alpha \Sigma$, si $E(X)$ et $Cov(X)$ existent, où la constante $\alpha = -\psi'_n(0)$.

3) En faisant la transformation aux coordonnées polaires, on peut démontrer que la constante de normalisation c_n est :

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2} \int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x) dx}. \quad (1.9)$$

4) Si les paramètres dans (1.8) sont $\mu = 0$ et $\Sigma = I_n$, la distribution est dite *sphérique* et sa densité prend la forme :

$$f_X(x) = c_n g_n \left(\frac{1}{2} x^\top x \right) = c_n g_n \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \quad (1.10)$$

Pour transformer la valeur aléatoire X sphérique vers l'elliptique de (1.8), il suffit de faire le changement de variable $Y = AX + \mu$, où $AA^\top = \Sigma$. La matrice A existe toujours car Σ est définie positive (voir Muirhead [18], pp.585-594 pour plus de détails sur les propriétés des matrices définies positives).

5) De la définition 1.1, il s'ensuit que si $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$, alors

$$AX + b \sim E_m(A\mu + b, A\Sigma A^\top, g_m), \quad (1.11)$$

où A est une matrice $m \times n$ de rang $m \leq n$ et b est un vecteur $m \times 1$. En effet, la fonction caractéristique de $AX + b$ est

$$Ee^{it^\top(AX+b)} = e^{it^\top b} \varphi_n(A^\top t) = e^{it^\top(A\mu+b)} \psi_n\left(\frac{1}{2}t^\top A \Sigma A^\top t\right),$$

ce qui correspond à la fonction caractéristique de la distribution elliptique avec les paramètres $A\mu + b$ et $A \Sigma A^\top$. Cela entraîne que la somme S est distribuée comme

$$S \sim E_1(1_n^\top \mu, 1_n^\top \Sigma 1_n, g_1), \quad (1.12)$$

où $1_n = (1, 1, \dots, 1)^\top$ et $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, car $S = 1_n^\top X$.

- 6) Les distributions marginales univariées d'une loi elliptique possèdent toutes un coefficient d'asymétrie nul et le même coefficient d'aplatissement, voir Muirhead [18], pp.40-41.

Une autre notion qui joue un rôle important dans l'analyse suivante est la notion de consistance des familles elliptiques. Cette notion a été introduite par Kano [11] :

Définition 1.2. *La famille (1.10) possède la propriété de consistance si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_{n+1} g_{n+1} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right) dx_{n+1} = c_n g_n \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (1.13)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Kano [11] a démontré qu'une famille elliptique possède la propriété de consistance si et seulement si la fonction caractéristique $\varphi_n(\cdot)$ ne dépend pas de n . Dans ce cas, on peut omettre l'indice des fonctions $\varphi(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$. On peut noter aussi que les densités de toutes les distributions marginales d'une distribution elliptique consistante profitent de la même forme fonctionnelle et l'indice n n'est qu'un paramètre de la fonction g .

En fait, les lois elliptiques consistantes sont les mélanges de lois normales avec la fonction de répartition du mélange F indépendante de n .

Bilodeau [3] a noté qu'afin d'obtenir les expressions pour $TCE_S(s_q)$ et $TCE_{X_k|S}(s_q)$, et pour se servir d'elles dans le calcul de fonds nécessaires, on utilise la densité marginale univariée $c_1 g_1\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, laquelle est facile à obtenir seulement

pour les familles consistantes, car elle a la même forme fonctionnelle que la densité multivariée. Cela implique que dans la pratique il faudra limiter le choix du modèle aux familles consistantes, à moins qu'on ne sache l'expression de la densité marginale univariée d'une loi non consistante.

Des exemples de familles elliptiques non consistantes, comme Kano [11] et Bilodeau [3] l'ont indiqué, sont les familles logistique

$$f_X(x) = c_n \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x^\top x\right)}{\left[1 + \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top x\right)\right]^2},$$

et exponentielle

$$f_X(x) = c_n \exp\left(-\frac{1}{2}(x^\top x)^s\right).$$

Selon Bilodeau [3], pour cette dernière famille, si $s = 0,5$, alors $E(X_i^2) = 4(n+1)$, $i = 1, \dots, n$, et donc la distribution de chaque risque individuel dépend du nombre de risques dans le portefeuille.

Une autre limitation sur l'utilisation des familles elliptiques pour modéliser les portefeuilles des risques a aussi été indiquée par Bilodeau [3]. Cette limitation est impliquée par la propriété 6 des familles elliptiques. Au fait, l'égalité des coefficients d'aplatissement de toutes les marginales empêche l'utilisation de ces familles pour modéliser les risques dont les queues ont des comportements différents.

1.2.3. TCE pour les modèles elliptiques

On passe maintenant à la démonstration des expressions de TCE, pour les modèles elliptiques, obtenues par Landsman et Valdez [14]. On démontre d'abord l'expression pour la distribution univariée, d'où s'ensuit la formule pour le risque total dans le cadre d'un modèle multivarié. Finalement, on fait la décomposition du risque multivarié, obtenant la formule de TCE pour chaque composante univariée du portefeuille.

Définition 1.3. *Supposons que $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, g_1)$ avec $E|X| < \infty$. La fonction*

$$G(x) = c \int_0^x g_1(u) du \tag{1.14}$$

est appelée le générateur cumulatif.

Comme on a supposé que $E|X| < \infty$, alors considérant toujours la distribution sphérique, on peut voir que

$$E|X| = 2c \int_0^{\infty} x g_1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) dx = 2c \int_0^{\infty} \sqrt{2u} g_1(u) \frac{du}{\sqrt{2u}} = 2c \int_0^{\infty} g_1(u) du < \infty, \quad (1.15)$$

où $u = \frac{1}{2}x^2$, $x = \sqrt{2u}$ et $dx = \frac{du}{\sqrt{2u}}$. La condition $E|X| < \infty$ peut alors être réécrite comme $G(\infty) < \infty$ et cela nous donne le droit de définir la fonction

$$\bar{G}(x) = G(\infty) - G(x). \quad (1.16)$$

Théorème 1.2. Soit $X \sim E_1(\mu, \sigma^2, g_1)$ avec $E|X| < \infty$ et G le générateur cumulatif défini par (1.14). Alors,

$$TCE_X(x_q) = \mu + \sigma^2 \frac{\frac{1}{\sigma} \bar{G}(\frac{1}{2} z_q^2)}{\bar{F}_X(x_q)} = \mu + \sigma^2 \frac{\frac{1}{\sigma} \bar{G}(\frac{1}{2} z_q^2)}{\bar{F}_Z(z_q)}, \quad (1.17)$$

où $z_q = (x_q - \mu)/\sigma$.

Démonstration. Répétant la procédure de la démonstration de (1.4) avec $z = (x - \mu)/\sigma$, on a que :

$$\begin{aligned} TCE_X(x_q) &= \frac{1}{\bar{F}_X(x_q)} \int_{x_q}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{\bar{F}_X(x_q)} \int_{x_q}^{\infty} x \frac{c}{\sigma} g_1 \left[\frac{1}{2} ((x - \mu)/\sigma)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{\bar{F}_X(x_q)} \int_{z_q}^{\infty} c(\mu + \sigma z) g_1 \left(\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\ &= \frac{1}{\bar{F}_X(x_q)} \left[\mu [1 - F_X(x_q)] + c\sigma \int_{z_q}^{\infty} z g_1 \left(\frac{1}{2} z^2 \right) dz \right] \\ &= \mu + \sigma^2 \frac{1}{\bar{F}_X(x_q)} \frac{c}{\sigma} \int_{\frac{1}{2} z_q^2}^{\infty} g_1(u) du \end{aligned}$$

$$= \mu + \sigma^2 \frac{\frac{1}{\sigma} \bar{G}(\frac{1}{2} z_q^2)}{\bar{F}_Z(z_q)}.$$

□

Le résultat (1.17) est une extension du résultat (1.4) de Panjer [19] sur les familles des distributions elliptiques univariées.

Corollaire 1.1. Soit $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$ et $1_n = (1, 1, \dots, 1)^\top$, un vecteur $n \times 1$. Pour $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1_n^\top X$, la TCE peut être exprimée comme :

$$TCE_S(s_q) = \mu_S + \sigma_S^2 \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})}, \quad (1.18)$$

où

$$\mu_S = 1_n^\top \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i,$$

$$\sigma_S^2 = 1_n^\top \Sigma 1_n = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}, \quad \Sigma = (\sigma_{ij}) : n \times n$$

et

$$z_{S,q} = (s_q - \mu_S) / \sigma_S.$$

Démonstration. Selon (1.12) de la propriété 5 des distributions elliptiques, $S \sim E_1(1_n^\top \mu, 1_n^\top \Sigma 1_n, g_1)$ et l'application du Théorème 1.2 prouve le résultat (1.18). □

On procède maintenant à la décomposition du risque multivarié, mais il faut d'abord démontrer deux lemmes.

Lemme 1.2. Soit $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$ où $\Sigma = (\sigma_{ij}) : n \times n$. Alors pour $k = 1, 2, \dots, n$ le vecteur $X_{k,S} = (X_k, S)^\top$ suit une distribution elliptique, c'est-à-dire

$$X_{k,S} \sim E_2(\mu_{k,S}, \Sigma_{k,S}, g_2),$$

$$\text{où } \mu_{k,S} = (\mu_k, \sum_{i=1}^n \mu_i)^\top \text{ et } \Sigma_{k,S} = \begin{bmatrix} \sigma_{kk} & \sum_{j=1}^n \sigma_{kj} \\ \sum_{j=1}^n \sigma_{kj} & \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Posons $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$, une matrice $2 \times n$, où la première ligne contient des zéros sauf pour la $k^{\text{ième}}$ colonne, et la deuxième

ligne contient seulement des 1. Alors, de (1.11) on obtient

$$X_{k,S} = (X_k, S)^\top = AX \sim E_2(A\mu, A\Sigma A^\top, g_2)$$

$$\text{avec } A\mu = (\mu_k, \sum_{i=1}^n \mu_i)^\top = \mu_{k,S}, \quad A\Sigma A^\top = \begin{bmatrix} \sigma_{kk} & \sum_{j=1}^n \sigma_{kj} \\ \sum_{j=1}^n \sigma_{kj} & \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \Sigma_{k,S}. \quad \square$$

Lemme 1.3. Soit $X = (X_1, X_2)^\top \sim E_2(\mu, \Sigma, g_2)$, $\Sigma = (\sigma_{ij}) : 2 \times 2$. Alors, on a

$$TCE_{X_1|X_2}(x_q) = E[X_1|X_2 > x_q] = \mu_1 + \frac{\frac{1}{\sigma_2} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{2,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{2,q})} \cdot \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \quad (1.19)$$

où $\rho_{12} = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{11}}$, $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_{22}}$ et $z_{2,q} = (x_q - \mu_2)/\sigma_2$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 1.1. Par définition de l'espérance conditionnelle et utilisant la propriété 1 des distributions elliptiques, on a :

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2 > x_q] &= \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | x_2 > x_q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_q}^{\infty} \frac{x_1 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{\bar{F}_Z(z_{2,q})} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_q}^{\infty} x_1 \frac{c_2}{\sqrt{|\Sigma|}} g_2 \left(\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) dx_2 dx_1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dans notre cas bivarié,

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = (1 - \rho_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

et

$$\begin{aligned} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) &= \\ &= \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \left\{ \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) - \rho_{12} \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right]^2 + (1 - \rho_{12}^2) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la transformation

$$z_1 = (x_1 - \mu_1)/\sigma_1,$$

$$z_2 = (x_2 - \mu_2)/\sigma_2$$

avec jacobien $J = \sigma_1\sigma_2$, on obtient dans l'équation (1.20) :

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2 > x_q] &= \frac{1}{\bar{F}_Z(z_{2,q})} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_q}^{\infty} x_1 \frac{c_2}{\sqrt{|\Sigma|}} g_2 \left(\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{\bar{F}_Z(z_{2,q})} \frac{c_2}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_1 + \sigma_1 z_1) g_2 \left(\frac{1}{2} \frac{(z_1 - \rho_{12} z_2)^2}{1 - \rho_{12}^2} + \frac{1}{2} z_2^2 \right) dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

On fait une nouvelle transformation

$$z' = (z_1 - \rho_{12} z_2) / \sqrt{1 - \rho_{12}^2},$$

$$z_2 = z_2$$

avec jacobien $J = \sqrt{1 - \rho_{12}^2}$:

$$\begin{aligned} E[X_1|X_2 > x_q] &= \frac{\mu_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \frac{c_2}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_2 \left(\frac{1}{2} (z'^2 + z_2^2) \right) \sqrt{1 - \rho_{12}^2} dz' dz_2 \\ &+ \frac{\sigma_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \frac{c_2}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \int_{z_{2,q}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z' + \frac{\rho_{12} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right) g_2 \left(\frac{1}{2} (z'^2 + z_2^2) \right) \sqrt{1 - \rho_{12}^2} dz' dz_2 \\ &= \frac{\mu_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_2^2 \right) dz_2 \\ &+ \frac{\sigma_1}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} c_2 \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} z' \sqrt{1 - \rho_{12}^2} g_2 \left(\frac{1}{2} (z'^2 + z_2^2) \right) dz' \right)}_{I_1=0} dz_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_{12} z_2 \int_{-\infty}^{\infty} c_2 g_2 \left(\frac{1}{2} (z'^2 + z_2^2) \right) dz' \Big) dz_2 \\
& = \frac{\mu_1 (1 - F_Z(z_{2,q}))}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} + \frac{\sigma_1 \rho_{12}}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{z_{2,q}}^{\infty} z_2 c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_2^2 \right) dz_2 \\
& = \mu_1 + \frac{\sigma_1 \rho_{12}}{\bar{F}_{X_2}(x_q)} \int_{\frac{1}{2} z_q^2}^{\infty} c_1 g_1(u) du \\
& = \mu_1 + \frac{\frac{1}{\sigma_2} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{2,q})}{\bar{F}_Z(z_{2,q})} \cdot \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}.
\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-haut l'intégrale I_1 est égale à zéro car c'est une intégrale d'une fonction impaire. \square

Maintenant on peut formuler le résultat principal de Landsman et Valdez [14] sur la formule de décomposition du portefeuille des risques.

Théorème 1.3. *Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$ et $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors, la contribution du risque X_k , $1 \leq k \leq n$, en TCE totale peut être exprimée comme*

$$TCE_{X_k|S}(s_q) = E[X_k | S > s_q] = \mu_k + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})} \cdot \sigma_k \sigma_S \rho_{k,S}, \quad (1.21)$$

où $\rho_{k,S} = \text{cov}(X_k, S) / \sigma_k \sigma_S$ et $z_{S,q} = (s_q - \mu_S) / \sigma_S$.

Démonstration. Selon le Lemme 1.2, le vecteur $Y = (X_k, S)^\top$ est distribué elliptiquement, et l'application du Lemme 1.3 au vecteur Y entraîne immédiatement le résultat. \square

1.3. UN EXEMPLE PRATIQUE D'UTILISATION DE LA TCE

Un exemple d'application de TCE sur les données réelles issues d'une compagnie d'assurances a été développé par Panjer [19]. On considère 10 unités d'affaires qui représentent des produits d'assurances et d'autres produits financiers liés aux assurances. Les 10 valeurs aléatoires représentent les valeurs présentes des montants nécessaires afin d'assurer la solvabilité de chaque unité, pendant une

période fixe, avec le niveau de confiance de 99,865%, correspondant à trois écarts types d'une loi normale.

Unité d'affaires	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0	0,0	0,12	-0,02	0,18	-0,26	-0,12	0,11	0,08	-0,03
2	0,0	1,0	0,05	0,27	0,02	0,08	0,16	-0,21	-0,17	-0,15
3	0,12	0,05	1,0	0,01	-0,11	0,10	0,03	-0,12	-0,09	-0,12
4	-0,02	0,27	0,01	1,0	0,22	0,05	0,09	-0,11	0,13	-0,23
5	0,18	0,02	-0,11	0,22	1,0	-0,11	0,01	-0,03	0,14	-0,01
6	-0,26	0,08	0,10	0,05	-0,11	1,0	0,07	-0,09	-0,46	-0,16
7	-0,12	0,16	0,03	0,09	0,01	0,07	1,0	-0,25	0,08	0,14
8	0,11	-0,21	-0,12	-0,11	-0,03	-0,09	-0,25	1,0	-0,16	-0,16
9	0,08	-0,17	-0,09	0,13	0,14	-0,46	0,08	-0,16	1,0	0,21
10	-0,03	-0,15	-0,12	-0,23	-0,01	-0,16	0,14	-0,16	0,21	1,0
Écart type	2,69	4,49	0,21	1,32	0,57	3,87	1,59	0,96	1,06	2,59
Corrélation avec la somme	0,25	0,69	0,09	0,35	0,16	0,40	0,39	-0,18	-0,08	0,17
Moyenne	25,69	37,84	0,85	12,70	0,15	24,05	14,41	4,49	4,39	9,56

TAB. 1.1. Corrélations, écarts types et moyennes pour 10 unités d'affaires.

Le tableau 1.1 représente le vecteur de moyennes, les écarts types de chaque unité d'affaires et la matrice des corrélations. Les moyennes et les écarts types sont mesurés en millions de dollars. On peut remarquer que les corrélations sont en général assez petites et il y a plusieurs corrélations négatives. Dans la ligne « Corrélation avec la somme » on voit que les unités 8 et 9 ont une corrélation négative avec la compagnie en entier.

Afin d'appliquer la TCE comme mesure de risque, on a choisi la distribution normale multivariée comme modèle. Ici $n = 10$, $q = 0,99865$.

Le tableau 1.2 regroupe les résultats obtenus avec l'utilisation des mesures différentes. Les deux premières colonnes, la VaR et la TCE univariée sont calculées

Unité d'affaires	VaR (quantile 99,865%)	TCE univariée	TCE multivariée
1	33,76	34,52	27,93
2	51,31	52,58	48,06
3	1,48	1,54	0,91
4	16,66	17,03	14,23
5	1,86	2,021	0,45
6	35,66	36,76	29,11
7	19,18	19,63	16,42
8	7,37	7,64	3,93
9	7,57	7,87	4,12
10	17,33	18,06	11,04
Somme	192,18	197,66	156,21

TAB. 1.2. Comparaison de mesures de risque différentes.

en considérant chaque unité d'affaires indépendamment des autres. Les VaRs sont simplement les quantiles des lois normales avec les moyennes et les écarts types du tableau 1.1. Les TCEs univariées sont calculées selon (1.4) pour chaque unité d'affaires. On note que toutes les TCEs univariées donnent une mesure de risque plus conservatrice par rapport aux VaRs, conformément à (1.3).

La dernière colonne du tableau 1.2 rapporte les résultats d'application des formules de TCE (1.18) et (1.21) dans le contexte multivarié. Les avantages de la diversification des affaires sont clairs. On voit qu'on peut économiser dans cet exemple 23% des fonds par rapport à la mesure traditionnelle pour assurer en même temps la solvabilité de toutes les unités d'affaires, et ce pour le même niveau de confiance. On peut remarquer aussi que les réserves exigées pour les unités 8 et 9, de corrélation négative avec la compagnie en entier, sont moins grandes que les moyennes respectives pour ces unités. C'est l'une des sources de la réduction des montants nécessaires pour toute la compagnie et cela concorde bien avec l'intuition puisqu'il semble naturel que si deux unités aient une corrélation négative, ils devraient alors amortir le risque de la compagnie en entier.

1.4. AUTRES APPROCHES À LA MODÉLISATION DE RISQUES MULTIVARIÉS

Les modèles de risques qu'on a considérés jusqu'à ce point, la loi normale multivariée et son extension à la famille elliptique, sont toutes symétriques. Bien que les formules de TCE soient d'une forme assez simple pour ces modèles, il serait souhaitable d'avoir à notre disposition des modèles multivariés non symétriques, pouvant mieux correspondre aux données réelles du domaine financier. Le premier résultat obtenu jusqu'ici dans cette direction, par Landsman et Furman [13], est l'obtention des expressions de TCE pour le modèle où les risques sont distribués selon l'une des multiples généralisations possibles de la distribution Gamma multivariée. Une autre approche, suggérée par M. Bilodeau et qui pourrait être développée dans l'avenir consiste à utiliser les copules pour construire les distributions multivariées.

1.4.1. TCE pour les modèles Gamma multivariés

Landsman et Furman [13] ont considéré le modèle avec la distribution Gamma multivariée décrit par Mathai et Moschopoulos [17]. La structure de dépendance dans cette distribution est apportée par l'addition d'une valeur aléatoire commune à chaque marginale univariée. Plus précisément, on considère Y_0, Y_1, \dots, Y_n , des valeurs aléatoires indépendantes distribuées selon la loi Gamma avec les paramètres γ_i et α_i (noté $Y_i \sim G(\gamma_i, \alpha_i)$), et donc la densité de Y_i est :

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_i)} e^{-\alpha_i y} y^{\gamma_i - 1} \alpha_i^{\gamma_i}, y > 0, \alpha_i > 0, \gamma_i > 0, i = 0, 1, \dots, n.$$

Soit

$$X_j = \frac{\alpha_0}{\alpha_j} Y_0 + Y_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Définition 1.4. *La distribution du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ est la distribution Gamma multivariée au sens de Mathai et Moschopoulos [17].*

Avec l'aide de la fonction génératrice des moments on obtient facilement les propriétés suivantes de cette distribution :

- 1) $X_j \sim G(\gamma_0 + \gamma_j, \alpha_j)$,

- 2) $E(X_j) = (\gamma_0 + \gamma_j)/\alpha_j$,
- 3) $Var(X_j) = (\gamma_0 + \gamma_j)/\alpha_j^2$,
- 4) $Cov(X_i, X_j) = \gamma_0/(\alpha_i\alpha_j), i \neq j$,
- 5) $Corr(X_i, X_j) = \gamma_0/\sqrt{(\gamma_0 + \gamma_i)(\gamma_0 + \gamma_j)}$.

Le modèle où les marginales sont de loi Gamma serait très utile pour modéliser les risques car son support est non négatif et le choix de paramètre permet d'adapter la forme de la distribution aux données. Mais il est beaucoup plus difficile de manipuler les densités Gamma en comparaison avec les densités elliptiques, et les expressions qu'on obtient deviennent trop compliquées.

Landsman et Furman [13] ont réussi à obtenir les formules de TCE pour le risque total et pour les composantes du modèle de la définition 1.4, mais ces formules sont encombrantes à tel point que leur utilité pratique semble douteuse.

Une autre définition de la distribution Gamma multivariée a été donnée par Lukács et Laha [15] au moyen de la fonction caractéristique, mais on va la reformuler en utilisant plutôt la transformée de Laplace :

Définition 1.5. *La distribution du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ est la distribution Gamma multivariée au sens de Lukács et Laha [15], si la transformée de Laplace de sa fonction de répartition est :*

$$\varphi(u) = Ee^{-u^\top X} = |I + VU|^{-\alpha},$$

où V est une matrice définie positive, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $U = \text{diag}(u)$.

Comme Lukács et Laha [15] l'ont démontré, cette transformée de Laplace correspond à une fonction de répartition pour toute matrice V seulement si $\alpha > (n - 1)/2$. Bapat [2] a trouvé les restrictions sur la matrice V sous lesquelles la distribution Gamma multivariée ainsi définie existe pour tout $\alpha > 0$.

Puisque la transformée de Laplace possède des propriétés semblables à celles de la fonction génératrice de moments, on voit après un petit calcul que pour une telle définition :

- 1) $\varphi(u_i) = (1 + v_{ii}u_i)^{-\alpha}$, et donc $X_i \sim G(\alpha, v_{ii})$, où v_{ii} sont des éléments diagonaux de la matrice V ,
- 2) $E(X_i) = \alpha v_{ii}$,

$$3) \text{Var}(X_i) = \alpha v_{ii}^2,$$

$$4) \text{Cov}(X_i, X_j) = \alpha v_{ij}^2, \quad i \neq j,$$

$$5) \text{Corr}(X_i, X_j) = v_{ij}^2 / v_{ii} v_{jj}.$$

Le premier défaut de cette dernière définition de Gamma multivariée dans notre contexte est celui que toutes les marginales ont une distribution Gamma avec le même paramètre de forme α , ce qui la rend moins avantageuse par rapport à la définition 1.4, où les deux paramètres de chaque marginale peuvent varier.

L'autre défaut plus important que le premier et qui est inhérent aux deux définitions 1.4 et 1.5 est celui que toutes les corrélations entre les marginales sont non négatives. Comme on l'a vu dans l'exemple de Panjer (section 1.3), plusieurs unités d'affaires ont souvent des corrélations négatives entre elles, ce qui apporte d'ailleurs des avantages à l'utilisation de TCE comme une mesure de risque. On ne pourrait donc pas profiter de ces avantages si on utilisait l'un ou l'autre de ces deux modèles Gamma.

1.4.2. Utilisation de copules pour modéliser les risques

Une approche à la construction des modèles multivariés afin d'appliquer la TCE, qui n'a pas encore été explorée, a été suggérée par M. Bilodeau. Cette approche consiste à utiliser les copules pour construire les distributions multivariées. Cette approche possède des avantages importants puisqu'elle permet de choisir les lois marginales et la structure de dépendance séparément, et donc donne plus de liberté pour mieux adapter le modèle au problème envisagé. Le livre de Joe [10] peut servir d'une excellente source d'idées sur ce sujet pour la recherche éventuelle. Les TCE seraient vraisemblablement évaluées par des algorithmes d'intégration numérique. Le bootstrap paramétrique, dans ce cas, serait l'approche qui convient à l'évaluation de la distribution des estimateurs.

Chapitre 2

ESTIMATION STATISTIQUE DE TCE

Lorsqu'on a choisi le modèle pour les données sur lesquelles on veut appliquer la TCE, il faut sélectionner les estimateurs pour estimer les paramètres de ce modèle. Le choix de l'estimateur devrait dépendre du modèle et des données mais il faut explorer les options afin de faire un choix éclairé.

Il faut aussi pouvoir estimer les écarts types des estimations de TCE pour construire les intervalles de confiance. L'une des options pour faire cela est d'utiliser les expressions de la variance asymptotique dans le cas des modèles elliptiques.

Ce chapitre est consacré à la description de la procédure de l'estimation statistique de la TCE pour les modèles elliptiques proposée par Bilodeau [3], et à la démonstration des expressions de la variance asymptotique de ces estimateurs.

2.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DES DISTRIBUTIONS ELLIPTIQUES

Les formules de TCE dépendent des paramètres inconnus de position μ et d'échelle Σ . Les $TCE_S(s_q)$ et les composantes $TCE_{X_k|S}(s_q)$ sont des fonctions $h(\mu, \Sigma)$ de ces paramètres inconnus. Avec un échantillon de N observations des risques multivariés, indépendantes et identiquement distribuées, on peut estimer ces paramètres et obtenir l'estimé « plug-in » $h(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$.

On va considérer, pour un échantillon iid $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})^\top$, $i = 1, \dots, N$, d'une loi $E_n(\mu, \Sigma, g_n)$, les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$, qui sont asymptotiquement indépendants avec les distributions asymptotiques normales de la forme (on peut trouver

la démonstration de ces distributions asymptotiques dans Bilodeau [4], p.219) :

$$\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} N_n(0, \beta\Sigma), \quad (2.1)$$

$$\sqrt{N}(\text{vec}(\hat{\Sigma}) - \text{vec}(\Sigma)) \xrightarrow{\text{loi}} N_{n^2}(0, \sigma_1(I + K_n)(\Sigma \otimes \Sigma) + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top), \quad (2.2)$$

où K_n est la matrice de commutation et \otimes signifie le produit de Kronecker de matrices.

Les paramètres β , σ_1 et σ_2 peuvent être calculés en fonction de la distribution elliptique et de l'estimateur choisi.

Bilodeau [3] a proposé de choisir entre trois familles d'estimateurs afin d'obtenir les estimés de TCE : les estimateurs sans biais, les estimateurs de vraisemblance maximale et les estimateurs robustes et affines invariants.

2.1.1. Estimateurs sans biais

Les estimateurs sans biais sont le vecteur de moyenne et la matrice de covariance échantillonnale :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^N X_i / N, \quad (2.3)$$

$$S = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^\top / (N - 1), \quad (2.4)$$

et on utilise comme les estimateurs des paramètres de la loi elliptique du modèle :

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad (2.5)$$

$$\hat{\Sigma} = \alpha^{-1} S, \quad (2.6)$$

où α est une constante telle que $\text{Cov}(X_i) = \alpha\Sigma$ (voir propriété 2 des familles elliptiques, section 1.2.2). Le calcul dans Bilodeau [4] p.211-213 démontre que les constantes dans (2.1) et (2.2) sont :

$$\beta = \alpha, \quad (2.7)$$

$$\sigma_1 = 1 + \kappa, \quad (2.8)$$

$$\sigma_2 = \kappa, \quad (2.9)$$

où κ est le coefficient d'aplatissement.

Pour la distribution *normale multivariée* on obtient $\alpha = 1$ et $\kappa = 0$.

Si on considère le modèle avec la loi *t de Student multivariée* à ν degrés de liberté, on a :

$$\alpha = \nu/(\nu - 2), \quad (2.10)$$

$$\kappa = 2/(\nu - 4). \quad (2.11)$$

Selon la remarque de Bilodeau [3], ces estimateurs ne sont pas très efficaces si la distribution est elliptique mais n'est pas normale.

2.1.2. Estimateurs de vraisemblance maximale

Les estimateurs de vraisemblance maximale elliptiques (EVM) peuvent être calculés avec un algorithme itératif. Soit

$$u(s) = -g'_n(s/2)/g_n(s/2). \quad (2.12)$$

En dérivant le logarithme de la fonction de vraisemblance de la loi elliptique, les EVM doivent satisfaire au système d'équations implicites :

$$\hat{\mu} = \text{ave} [u(s_i)X_i] / \text{ave} [u(s_i)], \quad (2.13)$$

$$\hat{\Sigma} = \text{ave} [u(s_i)(X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^\top], \quad (2.14)$$

où $s_i = (X_i - \hat{\mu})^\top \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{\mu})$ dépend de $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$, et la notation $\text{ave} [\cdot]$ signifie la moyenne sur $i = 1, 2, \dots, N$.

On peut donc, en commençant avec des valeurs initiales arbitraires $\mu^{(0)}$ et $\Sigma^{(0)}$ définie positive, utiliser les équations itératives :

$$\mu^{(m+1)} = \text{ave} [u(s_i^{(m)})X_i] / \text{ave} [u(s_i^{(m)})], \quad (2.15)$$

$$\Sigma^{(m+1)} = \text{ave} [u(s_i^{(m)})(X_i - \mu^{(m)})(X_i - \mu^{(m)})^\top], \quad (2.16)$$

où $m = 0, 1, 2, \dots$, et $s_i^{(m)} = (X_i - \mu^{(m)})^\top (\Sigma^{(m)})^{-1} (X_i - \mu^{(m)})$.

Kent et Tyler [12] ont démontré que sous des conditions générales le système (2.15) et (2.16) possède une solution unique et que l'algorithme itératif converge vers cette solution. On peut ainsi obtenir une solution numérique pour les EVM.

Puisque pour la loi normale $g_n(s) = e^{-s}$, on voit facilement que $u(s) = 1$ et cet algorithme itératif donne tout de suite les estimateurs de vraisemblance maximale pour la loi normale, \bar{X} et $(N-1)S/N$.

Il est facile de vérifier que pour la loi *t de Student multivariée* dans \mathbb{R}^n à ν degrés de liberté,

$$g_n(s) = (1 + s/\nu)^{-(\nu+n)/2} \quad (2.17)$$

et

$$u(s) = (\nu + n)/(\nu + s). \quad (2.18)$$

Les expressions des paramètres dans (2.1) et (2.2) pour les EVM elliptiques sont les suivantes (voir Bilodeau [4] pour la démonstration, p.221) :

$$\beta = n/E(su^2(s)), \quad (2.19)$$

$$\sigma_1 = n(n+2)/E(s^2u^2(s)), \quad (2.20)$$

$$\sigma_2 = -2\sigma_1(1 - \sigma_1)/(2 + n(1 - \sigma_1)). \quad (2.21)$$

2.1.3. Estimateurs robustes

On a le choix entre plusieurs familles d'*estimateurs robustes* comme, par exemple, le M-estimateur, le S-estimateur et l'estimateur MCD (minimum covariance determinant), qui sont tous affines invariants. Les distributions asymptotiques de ces trois estimateurs partagent la même forme (2.1) et (2.2). Les expressions pour les constantes dans (2.1) et (2.2) pour le M-estimateur et le S-estimateur sont réunies dans Bilodeau [4], p.223-225.

2.2. LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS DE TCE

Les expressions pour la variance asymptotique des estimateurs de TCE ont été obtenues par Bilodeau [3]. Ici on va présenter les preuves qu'on ne retrouve pas dans l'article.

Théorème 2.1. Posons $h_1(\mu, \Sigma) = TCE_S(s_q) = \mu_S + \sigma_S^2 \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})}$ et

$$h_2(\mu, \Sigma) = TCE_{X_k|S}(s_q) = \mu_k + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})} \cdot \sigma_k \sigma_S \rho_{k,S} = \mu_k + \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})} \cdot \sigma_{k,S},$$

où $\sigma_{k,S} = \text{cov}(X_k, S)$.

Posons aussi

$$\begin{aligned} a_q &= c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \left[z_{S,q} \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right] / \bar{F}_Z^2(z_{S,q}), \\ b_q &= \frac{z_{S,q}^2 c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) [z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) + \bar{F}_Z(z_{S,q})]}{2\sigma_S^3 \bar{F}_Z^2(z_{S,q})}, \\ \lambda_S &= \frac{\frac{1}{\sigma_S} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})}. \end{aligned}$$

Alors,

$$1) \sqrt{N} \left[h_1(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) - h_1(\mu, \Sigma) \right] \xrightarrow{\text{loi}} N(0, \gamma_{1,\mu}^2 + \gamma_{1,\Sigma}^2),$$

où

$$\gamma_{1,\mu}^2 = \beta(1 + a_q)^2 \sigma_S^2,$$

$$\gamma_{1,\Sigma}^2 = (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2 \sigma_S^4 (2\sigma_1 + \sigma_2).$$

$$2) \sqrt{N} \left[h_2(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) - h_2(\mu, \Sigma) \right] \xrightarrow{\text{loi}} N(0, \gamma_{2,\mu}^2 + \gamma_{2,\Sigma}^2),$$

où

$$\gamma_{\mu}^2 = \beta \left[\sigma_{kk} + a_q (\sigma_{k,S}^2 / \sigma_S^2) (2 + a_q) \right],$$

$$\gamma_{2,\Sigma}^2 = \sigma_1 \left[\lambda_S^2 (\sigma_S^2 \sigma_{kk} + \sigma_{k,S}^2) + 4\lambda_S b_q \sigma_S^2 \sigma_{k,S}^2 + 2b_q^2 \sigma_{k,S}^2 \sigma_S^4 \right] + \sigma_2 \sigma_{k,S}^2 (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2.$$

Démonstration. Puisque les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ sont asymptotiquement indépendants avec les distributions asymptotiques normales :

$$\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} N_n(0, \beta\Sigma),$$

$$\sqrt{N}(\text{vec}(\hat{\Sigma}) - \text{vec}(\Sigma)) \xrightarrow{\text{loi}} N_{n^2}(0, \sigma_1(I + K_n)(\Sigma \otimes \Sigma) + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top),$$

alors le vecteur, composé de $(\hat{\mu} - \mu)$ et $(\text{vec}(\hat{\Sigma}) - \text{vec}(\Sigma))$ converge en loi vers une normale de dimension $n + n^2$ avec une matrice de covariance divisée en blocs :

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \hat{\mu} - \mu \\ \text{vec}(\hat{\Sigma}) - \text{vec}(\Sigma) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{loi}} N_{n^2+n} \left(0, \begin{bmatrix} \beta \Sigma_{n \times n} & 0 \\ 0 & \sigma_1(I + K_n)(\Sigma \otimes \Sigma) + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]_{n^2 \times n^2}^\top \end{bmatrix} \right).$$

Alors, comme les fonctions $h_i(\mu, \Sigma)$, $i = 1, 2$, sont des fonctions lisses, par le Théorème de Cramér (voir Cramér [5], p.366 ou Srivastava et Khatri [20], p.59) on a

$$\sqrt{N} [h_i(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) - h_i(\mu, \Sigma)] \xrightarrow{\text{loi}} N(0, \gamma_{i,\mu}^2 + \gamma_{i,\Sigma}^2),$$

où

$$\gamma_{i,\mu}^2 = (\partial h_i / \partial \mu)^\top (\beta \Sigma) (\partial h_i / \partial \mu),$$

$$\gamma_{i,\Sigma}^2 = (\text{vec}(\partial h_i / \partial \Sigma))^\top (\sigma_1(I + K_n)(\Sigma \otimes \Sigma) + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top) (\text{vec}(\partial h_i / \partial \Sigma)),$$

$i = 1, 2$.

$$\text{Posons } \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases}, \text{ et } 1_n = (1, 1, \dots, 1)^\top, \text{ un vecteur } n \times 1.$$

Afin d'obtenir les expressions de la variance asymptotique on va utiliser les relations élémentaires suivantes :

- $\frac{\partial \sigma_S}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2\varepsilon_{ij}} \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sigma_S \varepsilon_{ij}},$
- $\frac{\partial z_{S,q}}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{2\varepsilon_{ij}} \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (s_q - \mu_S) = -\frac{z_{S,q}}{2\sigma_S^2 \varepsilon_{ij}},$
- $\bar{F}'_Z(x) = -c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right),$
- $\bar{G}'(x) = -c_1 g_1(x).$

1. Démontrons d'abord les expressions pour $TCE_S(s_q)$.

$$\frac{\partial h_1}{\partial \mu} = 1_n + \sigma_S \frac{z_{S,q} \bar{G}'\left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2\right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G}\left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2\right) \bar{F}'_Z(z_{S,q})}{\bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left(-\frac{1_n}{\sigma_S} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 1_n \left(1 + c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \left[z_{S,q} \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right] / \bar{F}_Z^2(z_{S,q}) \right) \\
&= 1_n (1 + a_q).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\gamma_{1,\mu}^2 = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu} \right)^\top (\beta \Sigma) \left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu} \right) = \beta (1 + a_q)^2 1_n^\top \Sigma 1_n = \beta (1 + a_q)^2 \sigma_S^2.$$

Ensuite, on va calculer $\partial h_1 / \partial \Sigma$. Mais comme la matrice Σ est symétrique, on doit ajouter un facteur de correction pour la symétrie et définir cette dérivée comme $\partial h_1 / \partial \Sigma = (\varepsilon_{ij} \partial h_1 / \partial \sigma_{ij})$. On peut voir Srivastava et Khatri [20], p.37 pour plus de détails sur les dérivées par rapport aux matrices symétriques.

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\bar{F}_Z(z_{S,q}) \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} [\sigma_S \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2)] - \sigma_S \bar{G}(\frac{1}{2} z_{S,q}^2) \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \bar{F}_Z(z_{S,q})}{\bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \\
&= \frac{1}{\bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left\{ \left[\frac{1}{2 \varepsilon_{ij} \sigma_S} \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) + \frac{z_{S,q} \sigma_S}{2 \sigma_S^2 \varepsilon_{ij}} z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \right] \bar{F}_Z(z_{S,q}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{z_{S,q} \sigma_S}{2 \sigma_S^2 \varepsilon_{ij}} \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2 \varepsilon_{ij} \sigma_S \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \times \left\{ z_{S,q}^2 c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) + 2 \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) \right. \\
&\quad \left. - \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \left\{ \underbrace{\frac{\bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right)}{\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q})}}_{\lambda_S} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2 \sigma_S \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left[z_{S,q}^2 c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \left\{ z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) + \bar{F}_Z(z_{S,q}) \right\} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_{ij}} (\lambda_S + b_q \sigma_S^2).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\text{vec} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \Sigma} \right) = \text{vec} \left[\varepsilon_{ij} \frac{\partial h_1}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \text{vec} \left[\varepsilon_{ij} \frac{1}{\varepsilon_{ij}} (\lambda_S + b_q \sigma_S^2) \right] = 1_{n^2} (\lambda_S + b_q \sigma_S^2),$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\Sigma}^2 &= (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2 1_{n^2}^\top \left(\sigma_1 (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top \right) 1_{n^2} \\ &= (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2 \left\{ \sigma_1 1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} + \sigma_1 1_{n^2}^\top K_n (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 1_{n^2}^\top \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top 1_{n^2} \right\}. \end{aligned}$$

Utilisant les propriétés de la matrice de commutation décrites dans Magnus et Neudecker [16], on peut voir que

$$1_{n^2}^\top K_n = 1_{n^2}^\top.$$

On a aussi

$$1_{n^2}^\top \text{vec}(\Sigma) = [\text{vec}(\Sigma)]^\top 1_{n^2} = \sigma_S^2$$

et

$$1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} = \sigma_S^4.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\Sigma}^2 &= (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2 \left\{ 2\sigma_1 1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} + \sigma_2 \sigma_S^4 \right\} \\ &= (\lambda_S + b_q \sigma_S^2)^2 \sigma_S^4 (2\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned}$$

2. Démontrons maintenant les expressions pour $TCE_{X_k|S}(s_q)$.

Posons $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$, un vecteur-unité, où 1 est en $k^{\text{ième}}$ position.

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial \mu} &= e_k + \frac{1_n z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right)}{\sigma_S \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \cdot \sigma_{k,S} \\ &= e_k + 1_n \frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S^2} \underbrace{\left(c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \left[z_{S,q} \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right] \right)}_{a_q} \bigg/ \bar{F}_Z^2(z_{S,q}) \\ &= e_k + 1_n \frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S^2} a_q, \end{aligned}$$

et l'expression pour $\gamma_{2,\mu}^2$ devient

$$\begin{aligned}\gamma_{2,\mu}^2 &= \beta \left[\underbrace{e_k^\top \Sigma e_k}_{\sigma_{kk}} + \left(\frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S^2} a_q \right)^2 \underbrace{1_n^\top \Sigma 1_n}_{\sigma_S^2} + \frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S^2} a_q \left(\underbrace{1_n^\top \Sigma e_k}_{\sigma_{k,S}} + \underbrace{e_k^\top \Sigma 1_n}_{\sigma_{k,S}} \right) \right] \\ &= \beta \left[\sigma_{kk} + a_q \frac{\sigma_{k,S}^2}{\sigma_S^2} (2 + a_q) \right].\end{aligned}$$

Avant de calculer $\gamma_{2,\Sigma}^2$, définissons les symboles suivants :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, i \neq k, j \neq k \\ 1, i = k, \forall j \\ 1, j = k, \forall i \end{cases}$$

et

$$\delta_{ijk} = \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, i \neq k, j \neq k \\ 1, i = j = k \\ 1/2, i = k, i \neq j \\ 1/2, j = k, i \neq j \end{cases},$$

ou dans la forme matricielle,

$$(\delta_{ijk}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

une matrice symétrique $n \times n$, où seulement la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne sont différentes de zéro.

Définissons également

$$\Delta_k = \text{vec}(\delta_{ijk}), \text{ un vecteur } n^2 \times 1.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_2}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S} \cdot \frac{\bar{G}(z_{S,q}^2/2)}{\bar{F}_Z(z_{S,q})} \right) \\
&= \frac{1}{\sigma_S^2 \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left[\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q}) \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\sigma_{k,S} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_{k,S} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q})) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma_S^2 \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left[\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q}) \left\{ \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \frac{\partial \sigma_{k,S}}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma_{k,S} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sigma_{k,S} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \left\{ \bar{F}_Z(z_{S,q}) \frac{\partial \sigma_S}{\partial \sigma_{ij}} + \sigma_S \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \bar{F}_Z(z_{S,q}) \right\} \right].
\end{aligned}$$

On a :

- $\frac{\partial \sigma_{k,S}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ijk},$
- $\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) = c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) z_{S,q}^2 / (2\sigma_S^2 \varepsilon_{ij}),$
- $\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \bar{F}_Z(z_{S,q}) = c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) z_{S,q} / (2\sigma_S^2 \varepsilon_{ij}).$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_2}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{\sigma_S^2 \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left[\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q}) \left\{ \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \varepsilon_{ijk} + \sigma_{k,S} c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \frac{z_{S,q}^2}{2\sigma_S^2 \varepsilon_{ij}} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sigma_{k,S} \bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \left\{ \frac{\bar{F}_Z(z_{S,q})}{2\varepsilon_{ij} \sigma_S} + \frac{\sigma_S z_{S,q}}{2\sigma_S^2 \varepsilon_{ij}} c_1 g_1 \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right) \right\} \right] \\
&= \underbrace{\frac{\bar{G} \left(\frac{1}{2} z_{S,q}^2 \right)}{\sigma_S \bar{F}_Z(z_{S,q})} \varepsilon_{ijk}}_{\lambda_S} + \frac{\sigma_{k,S}}{\varepsilon_{ij}} \times \\
&\quad \underbrace{\frac{1}{2\sigma_S^3 \bar{F}_Z^2(z_{S,q})} \left[z_{S,q}^2 c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \bar{F}_Z(z_{S,q}) - \bar{G} \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) \left\{ z_{S,q} c_1 g_1 \left(\frac{z_{S,q}^2}{2} \right) + \bar{F}_Z(z_{S,q}) \right\} \right]}_{b_q} \\
&= \lambda_S \varepsilon_{ijk} + \frac{\sigma_{k,S}}{\varepsilon_{ij}} b_q,
\end{aligned}$$

et

$$\text{vec} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \Sigma} \right) = \text{vec} \left[\varepsilon_{ij} \frac{\partial h_2}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \text{vec} [\lambda_S \delta_{ijk} + \sigma_{k,S} b_q] = \lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q \mathbf{1}_{n^2}.$$

Calculons maintenant $\gamma_{2,\Sigma}^2$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{2,\Sigma}^2 &= (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2})^\top (\sigma_1 (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) \\
&\quad + \sigma_2 \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top) (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2}) \\
&= \sigma_1 (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2})^\top (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2}) \\
&\quad + \sigma_2 (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2})^\top \text{vec}(\Sigma) [\text{vec}(\Sigma)]^\top (\lambda_S \Delta_k + \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2}) \\
&= \sigma_1 \left[\lambda_S^2 \Delta_k^\top (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k + \lambda_S \sigma_{k,S} b_q \Delta_k^\top (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_S \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2}^\top (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k + \sigma_{k,S}^2 b_q^2 \underbrace{1_{n^2}^\top (I + K_n) (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2}}_{2\sigma_S^4} \right] \\
&\quad + \sigma_2 \left[\lambda_S^2 \underbrace{\Delta_k^\top \text{vec}(\Sigma)}_{\sigma_{k,S}} \underbrace{[\text{vec}(\Sigma)]^\top \Delta_k}_{\sigma_{k,S}} + \lambda_S \sigma_{k,S} b_q \underbrace{\Delta_k^\top \text{vec}(\Sigma)}_{\sigma_{k,S}} \underbrace{[\text{vec}(\Sigma)]^\top 1_{n^2}}_{\sigma_S^2} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_S \sigma_{k,S} b_q \underbrace{1_{n^2}^\top \text{vec}(\Sigma)}_{\sigma_S^2} \underbrace{[\text{vec}(\Sigma)]^\top \Delta_k}_{\sigma_{k,S}} + \sigma_{k,S}^2 b_q^2 \underbrace{1_{n^2}^\top \text{vec}(\Sigma)}_{\sigma_S^4} \underbrace{[\text{vec}(\Sigma)]^\top 1_{n^2}}_{\sigma_S^4} \right] \\
&= \sigma_1 \left[2\lambda_S^2 \Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k + 2\lambda_S \sigma_{k,S} b_q \Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda_S \sigma_{k,S} b_q 1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k + 2\sigma_S^4 \sigma_{k,S}^2 b_q^2 \right] \\
&\quad + \sigma_2 \left[\lambda_S^2 \sigma_{k,S}^2 + 2\lambda_S \sigma_{k,S}^2 \sigma_S^2 b_q + \sigma_{k,S}^2 \sigma_S^4 b_q^2 \right].
\end{aligned}$$

Mais comme

$$(\Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2})^\top = 1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k$$

et que c'est un scalaire, alors

$$\Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} = 1_{n^2}^\top (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k.$$

On peut remarquer aussi que

$$\Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) 1_{n^2} = \sigma_{k,S} \sigma_S^2$$

et

$$\Delta_k^\top (\Sigma \otimes \Sigma) \Delta_k = \frac{1}{2} (\sigma_{kk} \sigma_S^2 + \sigma_{k,S}^2).$$

On a finalement

$$\gamma_{2,\Sigma}^2 = \sigma_1 \left[\lambda_S^2 (\sigma_S^2 \sigma_{kk} + \sigma_{k,S}^2) + 4\lambda_S b_q \sigma_S^2 \sigma_{k,S}^2 + 2b_q^2 \sigma_{k,S}^2 \sigma_S^4 \right] + \sigma_2 \sigma_{k,S}^2 \left[\lambda_S + b_q \sigma_S^2 \right]^2.$$

□

Le résultat, démontré dans le théorème 2.1, est très important car ayant obtenu les estimés des paramètres du modèle elliptique avec l'une des méthodes de la section 2.1, il permet d'obtenir les estimations « plug-in » $\hat{\gamma}_\mu^2 + \hat{\gamma}_\Sigma^2$ de la variance asymptotique des estimateurs de la TCE. Mais comme c'est un résultat asymptotique, il faut étudier le comportement de cet estimateur « plug-in » pour des petites et moyennes tailles d'échantillon afin de connaître les restrictions possibles sur son utilisation. Le Chapitre 3 est consacré à cette étude.

Chapitre 3

VARIANCE DES ESTIMATEURS DE LA TCE - ÉTUDE NUMÉRIQUE

Lorsque l'analyste étudie les données recueillies par l'institution financière, il doit, dans le contexte du présent mémoire, choisir le modèle, les estimateurs de TCE et les estimateurs de la variance des estimateurs de TCE. Les méthodes de choix du modèle sont nombreuses et ils restent en dehors de l'objet de ce mémoire. Mais dès que le modèle est choisi et que ce modèle appartient à une famille elliptique consistante, on pourrait utiliser les résultats d'une étude numérique préliminaire pour conseiller sur la sélection des estimateurs de la TCE et de sa variance.

Le choix de l'estimateur de la TCE peut être déterminé par le modèle utilisé ou par la qualité des données. Si, par exemple, on utilise le modèle normal, il semble naturel de choisir les simples estimateurs sans biais pour estimer les paramètres et calculer ensuite les estimés de TCE, puisque ces estimateurs coïncident, à une correction près, avec les EVM de la loi normale. Mais si on a des raisons de croire que le jeu de données contient des valeurs aberrantes, il serait plus judicieux d'utiliser l'un des estimateurs robustes.

Ayant obtenu les estimations de TCE, l'analyste devrait, en général, fournir les intervalles de confiance ou, du moins, les écarts types pour ces estimations. Les options dont il dispose sont :

- 1) Utiliser les résultats asymptotiques démontrés à la section 2.2. L'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour l'estimation « plug-in » de TCE

$h_i(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$, $i = 1, 2$, sera donc

$$h_i(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) \pm z_{\alpha/2} \hat{\gamma}_i / \sqrt{N},$$

où $z_{\alpha/2}$ est le quantile d'une $N(0, 1)$ et $\hat{\gamma}_i = \sqrt{\hat{\gamma}_{i,\mu}^2 + \hat{\gamma}_{i,\Sigma}^2}$. Selon le théorème de Slutsky, cet intervalle aura la probabilité de couverture correcte, au moins asymptotiquement.

- 2) Appliquer l'une des méthodes bootstrap, soit paramétrique ou non paramétrique.

La méthode de l'estimation de la variance avec le bootstrap paramétrique consiste à tirer de la loi du modèle B échantillons de taille N chacun, et ce en utilisant comme paramètres les valeurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ estimées à partir de l'échantillon original. On estime ensuite les TCE pour chacun de ces B échantillons et on calcule finalement la variance échantillonnale des B estimés de TCE obtenus.

Pour l'estimation de la variance par le bootstrap non paramétrique, on tire, par contre, B échantillons de taille N chacun en utilisant un tirage avec remise directement de l'échantillon original. On applique ensuite la même procédure d'estimation de la variance que dans le cas du bootstrap paramétrique. On démontre dans la littérature sur le bootstrap que cette méthode de tirage avec remise est équivalente au tirage de N observations indépendantes et identiquement distribuées de la loi empirique définie par l'échantillon sous étude ; voir, par exemple, Efron et Tibshirani [7].

Efron et Tibshirani [7] ont aussi suggéré l'utilisation de la valeur $B = 250$ comme étant largement suffisante pour l'estimation de la variance par des méthodes de bootstrap. On va suivre cette suggestion et utiliser cette valeur de B dans les simulations.

L'utilisation des résultats asymptotiques peut donner une estimation correcte de la variance seulement pour des tailles d'échantillons assez grandes. Il faut donc étudier le comportement de ces résultats pour des échantillons plus petits afin d'établir quelle taille peut être considérée comme assez grande pour permettre l'utilisation de ces résultats asymptotiques.

La validation de la deuxième option, le bootstrap, est aussi basée sur des méthodes asymptotiques et donc le bon comportement du bootstrap pour des petits échantillons n'est pas assuré. Une étude numérique s'impose aussi.

Afin de rendre les estimations de la variance comparables pour toutes valeurs de N , on va en fait estimer la variance des estimateurs de $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$ et de $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_k|S}(s_q)$, et ce, pour toutes les méthodes d'estimation.

Dans ce chapitre on va d'abord décrire la procédure de simulation effectuée et le programme S-Plus qu'on a développé à cette fin, puis on exposera les résultats de ces simulations et finalement, on fera l'analyse de ces résultats.

3.1. SIMULATION D'UN PORTEFEUILLE DE RISQUES ELLIPTIQUES

Il s'ensuit, grâce à la propriété 4 des familles elliptiques de la section 1.2.2, qu'afin d'arriver à un échantillon distribué selon une loi elliptique $E_n(\mu, \Sigma, g_n)$, il suffit de simuler un échantillon distribué selon une loi sphérique $E_n(0, I_n, g_n)$. On effectue ensuite la transformation linéaire affine de la valeur aléatoire X sphérique vers Y elliptique avec le changement de variable $Y = AX + \mu$, où $AA^T = \Sigma$, $A = H\Lambda^{1/2}$. La matrice orthogonale H est composée des vecteurs propres de Σ et Λ est la matrice diagonale composée des valeurs propres de Σ . En fait, cette transformation est la composition d'un changement d'échelle le long de chaque axe, d'une rotation (transformation orthogonale) et d'une translation (changement de la localisation).

Cette transformation sera appliquée sur tout échantillon sphérique afin d'obtenir l'échantillon elliptique avec les paramètres voulus.

3.1.1. Le modèle normal

On obtient un échantillon de N vecteurs, indépendants et identiquement distribués, issus de la loi sphérique $N_n(0, I)$ en simulant $N \cdot n$ valeurs aléatoires $N(0, 1)$, indépendantes et identiquement distribuées, et en composant avec ces valeurs une matrice de N lignes et n colonnes. On applique par la suite à cette matrice la transformation décrite ci-dessus, en utilisant les paramètres μ et Σ désirés parmi le cas le plus général.

Les estimateurs sans biais \bar{X} (2.3) et S (2.4) et les EVM (2.13) et (2.14) sont essentiellement les mêmes, à une petite correction près, pour ce modèle normal. On applique seulement les estimateurs sans biais à l'échantillon simulé afin de calculer ensuite les estimations de $TCE_S(s_q)$ et des $TCE_{X_k|S}(s_q)$, en utilisant pour cela les formules (1.4) et (1.6).

Si on répète cette procédure en simulant des échantillons et en estimant les $TCE_S(s_q)$ et les $TCE_{X_k|S}(s_q)$ un grand nombre M de fois, on peut calculer ensuite les estimations de la variance exacte des estimateurs de TCE pour la taille d'échantillon N considérée. Cette variance exacte peut être estimée avec un niveau de précision très élevé, puisqu'on peut augmenter à volonté le nombre d'échantillons simulés.

Afin de comparer le comportement des estimateurs de la variance utilisables dans la pratique, c'est-à-dire les estimateurs bootstrap et l'estimateur « plug-in », on applique aussi aux échantillons simulés ces estimateurs de variance. On calcule ensuite les moyennes et les variances respectives des estimations de la variance pour chaque estimateur, obtenant ainsi les estimations des espérances et des variances des estimateurs. Connaissant l'estimation de la variance exacte, on pourra calculer la mesure de qualité d'estimateur qui est l'erreur quadratique moyenne, et juger ensuite lequel des estimateurs, l'un des estimateurs bootstrap ou l'estimateur « plug-in », est préférable pour la taille d'échantillon N considérée.

Les paramètres suivants ont été utilisés pour les simulations sous le modèle normal.

Les dimensions $n = 3$ et $n = 7$ ont été considérées.

Les paramètres de la distribution pour $n = 3$ étaient :

$$\mu = (1, 2, 3)^T, \quad (3.1)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & 1 & 0,7 \\ -0,4 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Pour $n = 7$ les paramètres étaient :

$$\mu = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)^T, \quad (3.3)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,4 & 0,1 & -0,7 & -0,4 & -0,2 \\ 0,9 & 1 & 0,4 & 0,3 & -0,6 & -0,4 & -0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 1 & 0,6 & -0,5 & -0,6 & -0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 & 1 & -0,1 & -0,2 & 0,1 \\ -0,7 & -0,6 & -0,5 & -0,1 & 1 & 0,7 & 0,3 \\ -0,4 & -0,4 & -0,6 & -0,2 & 0,7 & 1 & 0,6 \\ -0,2 & -0,3 & -0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

La matrice de covariance (3.4) a été obtenue par une décomposition de Choleski.

On peut voir que dans les deux cas les matrices de covariance, qui sont en fait des matrices de corrélation, incluent toutes sortes de valeurs de corrélation entre les composantes : grandes et petites positives comme grandes et petites négatives, et donc représentent des cas assez généraux. Quant aux vecteurs de moyennes, leur choix a été assez arbitraire et ne servait qu'à distinguer au besoin les estimés des différentes composantes des TCE. Le rôle du vecteur de la moyenne dans les formules de TCE en est un seulement de position ; il n'affecte pas la variance des estimateurs de TCE.

On a simulé les échantillons de tailles $N = 30, 50, 100, 200$.

Afin d'estimer la variance exacte, pour chacun de ces N on a simulé $M = 100000$ échantillons.

L'estimation de l'espérance et de la variance de la variance « plug-in » a été faite sur chacun des $M = 100000$ échantillons, tandis que pour la variance bootstrap on s'est restreint à $M = 2000$ échantillons. Cette dernière valeur de M relativement peu élevée s'explique par le fait qu'il faut beaucoup de temps à l'ordinateur pour calculer les estimations bootstrap de la variance, puisqu'on tire $B = 250$ échantillons pour la méthode de bootstrap non paramétrique et encore $B = 250$ échantillons pour la méthode de bootstrap paramétrique, et ce pour chacun des M échantillons simulés.

On a choisi le niveau de confiance $q = 0,95$. La valeur de s_q a été calculée comme le $q^{\text{ième}}$ quantile de la distribution de $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ correspondante au modèle, c'est-à-dire,

$$s_q = \mu_S + \sigma_S \Phi^{-1}(q), \quad (3.5)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une $N(0, 1)$.

Pour $n = 3$, $s_q = 9,289707$, alors que pour $n = 7$, $s_q = 32,47449$.

Dans la section 2.1.3 on a mentionné la possibilité d'appliquer les estimateurs robustes pour l'estimation de TCE, mais leur utilisation pour faire les simulations n'était pas jugée réaliste, car l'obtention de chaque estimation des paramètres exige plusieurs secondes de calcul d'ordinateur, et donc la tâche d'obtenir les estimations bootstrap pour plusieurs échantillons devient trop longue.

Par contre, les expressions pour la variance asymptotique de plusieurs familles d'estimateurs robustes sont connues. On va utiliser les expressions pour l'estimateur S, décrites par Bilodeau [4], section 13.4.2 et le programme S-Plus de l'annexe de ce livre pour calculer les variances asymptotiques des estimateurs de TCE pour les modèles normaux avec les paramètres ci-dessus pour les points de rupture $r = 0,5, 0,3, 0,1$. On pourra ainsi calculer l'efficacité relative asymptotique de cet estimateur S.

3.1.2. Le modèle t de Student

La simulation d'un échantillon issu de la loi t de Student n -variée à ν degrés de liberté $t_{n,\nu}(\mu, \Sigma)$ est basée sur la propriété suivante des mélanges de lois normales (voir Bilodeau [4], exemple 13.3, p.207).

Si un vecteur aléatoire est distribué selon la loi normale standardisée n -variée,

$$z \sim N_n(0, I),$$

et la valeur aléatoire w est telle que νw^{-1} est distribuée selon une loi khi-deux à ν degrés de liberté :

$$\nu w^{-1} \sim \chi_\nu^2,$$

où w et z sont indépendantes, alors

$$X = w^{1/2}z \sim t_{n,\nu}(0, I)$$

avec la densité

$$f_x(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{(\nu\pi)^{n/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (1 + x^\top x/\nu)^{-(\nu+n)/2}, x \in \mathbb{R}^n.$$

On simule donc un vecteur distribué selon une loi $t_{n,\nu}(0, I)$ en simulant un vecteur z normal standard et une valeur aléatoire y , indépendante de z , distribuée selon une loi khi-deux à ν degrés de liberté et en calculant ensuite $X = (\nu/y)^{1/2} z$. On fait ensuite la transformation linéaire affine pour obtenir un vecteur $t_{n,\nu}(\mu, \Sigma)$. Cette procédure est répétée N fois afin d'obtenir un échantillon de taille voulue.

Pour la loi t de Student on a considéré deux estimateurs des paramètres : les estimateurs sans biais \bar{X} (2.3) et S (2.4), qui sont les EVM de la loi normale, et les EVM (2.13) et (2.14).

On a considéré les mêmes dimensions $n = 3$ et $n = 7$ et les paramètres μ et Σ étaient respectivement les mêmes que pour la loi normale, c'est-à-dire (3.1) et (3.2) pour $n = 3$ et (3.3) et (3.4) pour $n = 7$.

Le nombre des degrés de liberté pour ces deux lois t de Student était $\nu = 7$.

On a simulé les échantillons de tailles $N = 30, 50, 100, 200$.

La variance exacte a été estimée, pour chacune de ces valeurs de N et pour les deux estimateurs, à partir de $M = 100000$ échantillons simulés.

L'estimation de l'espérance et de la variance de la variance « plug-in » a été faite à partir de $M = 100000$ échantillons. L'estimation de l'espérance et de la variance de variances bootstrap pour les estimateurs \bar{X} et S a été faite à partir de $M = 2000$ échantillons, tandis que pour les EVM on a dû se limiter à $M = 600$, car le calcul avec l'algorithme itératif (2.15) et (2.16) prend beaucoup plus de temps que le calcul des simples estimateurs sans biais.

Pour chaque estimation bootstrap on a tiré $B = 250$ échantillons. Comme on l'a déjà mentionné, cette valeur de B recommandée par Efron et Tibshirani [7] est suffisante pour l'estimation de la variance d'un estimateur.

Le niveau de confiance était le même que celui du modèle normal : $q = 0,95$. La valeur de s_q a été calculée comme le $q^{\text{ième}}$ quantile de la distribution de

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ correspondante au modèle, c'est-à-dire,

$$s_q = \mu_S + \sigma_S F^{-1}(q), \quad (3.6)$$

où $F(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi t de Student univariée avec $\nu = 7$ degrés de liberté.

Pour $n = 3$, $s_q = 9,789157$, alors que pour $n = 7$, $s_q = 33,15381$.

3.2. LE PROGRAMME S-PLUS

Les simulations décrites dans la section 3.1 ont été programmées et effectuées avec l'aide du logiciel « S-PLUS® 6.1 for Windows PROFESSIONAL EDITION Release 1 ». Le texte du programme S-plus qui effectue les simulations est placé dans les Annexes. Pour chaque choix du modèle et de l'estimateur le programme est réparti en deux fichiers. Le fichier « **Parameters.ssc** » contient des paramètres qu'on peut changer pour faire la simulation suivante (par exemple, N , μ , Σ), et les fonctions communes pour tous les modèles et estimateurs. Ce fichier est toujours le même sauf pour les paramètres.

L'autre fichier, nommé en fonction du modèle et de l'estimateur utilisé, contient les fonctions spécifiques pour le choix du modèle et de l'estimateur. Ce fichier contient aussi la procédure principale pour l'appel à ces fonctions et qui effectue la sortie et la sauvegarde des résultats. On a trois de ces fichiers :

- 1) Le modèle normal et les simples estimateurs sans biais (2.3), (2.4).
- 2) Le modèle t de Student et les simples estimateurs sans biais (2.3), (2.4).
- 3) Le modèle t de Student et les EVM (2.13) et (2.14).

3.3. LES RÉSULTATS DES SIMULATIONS

Les résultats des simulations sont présentés séparément pour chaque modèle et chaque estimateur. On commence par le modèle normal avec les simples estimateurs sans biais, ensuite on présente le modèle t de Student avec les estimateurs sans biais et les EVM elliptiques. Les résultats pour la somme et pour chaque

composante sont présentés dans des tableaux séparés. On commence par la dimension $n = 3$ avec quatre tableaux et on continue avec huit tableaux pour la dimension $n = 7$.

Les valeurs qui se trouvent dans les tableaux ont été calculées de la façon suivante. L'estimation de la variance exacte θ est la variance échantillonnale de M estimations de TCE,

$$\theta = \sum_{i=1}^M (TCE_i - \overline{TCE})^2 / (M - 1).$$

La valeur de la variance exacte correspondante à la taille $N = \infty$ signifie la variance asymptotique du modèle. La valeur moyenne $\bar{\theta}$ est l'estimation de l'espérance de l'estimateur $\hat{\theta}$ de la variance et elle est calculée comme la moyenne de toutes les M estimations de la variance de TCE obtenues avec l'aide de l'un des trois estimateurs. Le biais relatif est calculé comme $biais\ relatif = |\theta - \bar{\theta}| / \theta$. La variance de l'estimateur de la variance est la variance échantillonnale de M estimations de la variance de TCE, $Var(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2 / (M - 1)$. Finalement, l'estimation de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM) est faite par

$$REQM = \left(Biais^2(\hat{\theta}) + Var(\hat{\theta}) \right)^{1/2} = \left((\theta - \bar{\theta})^2 + Var(\hat{\theta}) \right)^{1/2}.$$

Pour le modèle normal on ajoute à chaque tableau de résultats de simulations un tableau avec les valeurs de la variance asymptotique pour l'estimateur S mentionné dans la section 3.1.1 et les valeurs de l'efficacité relative asymptotique, définie comme étant le ratio de la variance asymptotique pour les estimateurs sans biais (estimateurs efficaces pour le modèle normal) et de la variance asymptotique pour l'estimateur S.

3.3.1. Le modèle normal, simples estimateurs sans biais

On commence avec les tableaux des résultats pour la dimension $n = 3$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		0,9228	0,9131	0,9094	0,9087	0,9082
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	0,9196	0,9153	0,9124	0,9101	-
	Biais relatif, %	0,35%	0,24%	0,33%	0,15%	
	Variance	0,1142	0,0712	0,0321	0,0160	
	REQM	0,3380	0,2669	0,1793	0,1267	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	0,9429	0,9358	0,9115	0,9135	
	Biais relatif, %	2,18%	2,48%	0,23%	0,52%	
	Variance	0,1249	0,0815	0,0392	0,0228	
	REQM	0,3539	0,2863	0,1979	0,1512	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	0,8491	0,8628	0,8748	0,8938	
	Biais relatif, %	7,98%	5,51%	3,81%	0,13%	
	Variance	0,2402	0,14392	0,0804	0,0460	
	REQM	0,4957	0,3827	0,2856	0,2144	

TAB. 3.1. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	1,3909	1,0018	0,9144
Effacité relative asymptotique, %	65,30%	90,66%	99,33%

TAB. 3.2. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		4,7949	4,6194	4,5431	4,4971	4,4503
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,4965	4,4733	4,4635	4,4579	-
	Biais relatif, %	6,22%	3,16%	1,75%	0,87%	
	Variance	2,2625	1,3609	0,6097	0,3118	
	REQM	1,5335	1,1757	0,7848	0,5598	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	4,8233	4,6661	4,5207	4,5044	
	Biais relatif, %	0,59%	1,01%	0,49%	0,16%	
	Variance	2,8056	1,7580	0,8011	0,4714	
	REQM	1,6752	1,3267	0,8953	0,6866	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	4,6847	4,5275	4,4457	4,4679	
	Biais relatif, %	2,30%	2,00%	2,15%	0,67%	
	Variance	4,9454	3,060	1,4545	0,9458	
	REQM	2,2266	1,7518	1,2100	0,9730	

TAB. 3.3. $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	7,3869	5,0125	4,4869
Efficacité relative asymptotique, %	60,25%	88,79%	99,19%

TAB. 3.4. $n = 3, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		0,7648	0,7438	0,7247	0,7153	0,7173
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	0,7255	0,7216	0,7191	0,7184	-
	Biais relatif, %	5,14%	2,99%	0,78%	0,43%	
	Variance	0,0245	0,0141	0,0064	0,0031	
	REQM	0,1615	0,1209	0,0804	0,0554	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	0,7723	0,7509	0,7289	0,7245	
	Biais relatif, %	0,98%	0,95%	0,57%	1,29%	
	Variance	0,0336	0,0201	0,0111	0,0074	
	REQM	0,1833	0,1420	0,1055	0,0868	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	0,7462	0,7202	0,7151	0,7143	
	Biais relatif, %	2,44%	3,17%	1,34%	0,31%	
	Variance	0,1034	0,0600	0,0323	0,0189	
	REQM	0,3221	0,2462	0,1799	0,1374	

TAB. 3.5. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	1,1648	0,8032	0,7229
Efficacité relative asymptotique, %	61,58%	89,30%	99,23%

TAB. 3.6. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		3,3674	3,2499	3,2023	3,1607	3,1306
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	3,1641	3,1478	3,1406	3,1362	-
	Biais relatif, %	6,04%	3,15%	1,92%	0,78%	
	Variance	1,0274	0,6122	0,2785	0,1439	
	REQM	1,0338	0,7891	0,5313	0,3802	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	3,3588	3,2673	3,1806	3,1717	
	Biais relatif, %	0,25%	0,53%	0,68%	0,35%	
	Variance	1,2623	0,7908	0,3683	0,2206	
	REQM	1,1236	0,8894	0,6073	0,4698	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	3,2328	3,1557	3,1108	3,1598	
	Biais relatif, %	4,00%	2,90%	2,86%	0,32%	
	Variance	2,2091	1,3933	0,7250	0,4205	
	REQM	1,4924	1,1842	0,8564	0,6485	

TAB. 3.7. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	5,1872	3,5243	3,1561
Efficacité relative asymptotique, %	60,35%	88,83%	99,19%

TAB. 3.8. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

Ensuite les tableaux des résultats pour la dimension $n = 7$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		1,7061	1,6889	1,6898	1,6892	1,6803
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	1,7064	1,6968	1,6868	1,6840	-
	Biais relatif, %	0,01%	0,47%	0,18%	0,31%	
	Variance	0,3931	0,2334	0,1147	0,0559	
	REQM	0,6270	0,4831	0,3387	0,2364	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	1,7270	1,7190	1,7056	1,6858	
	Biais relatif, %	1,22%	1,79%	0,93%	0,20%	
	Variance	0,4330	0,2619	0,1352	0,0807	
	REQM	0,6584	0,5127	0,3681	0,2841	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	1,5586	1,6140	1,6442	1,6496	
	Biais relatif, %	8,64%	4,43%	2,70%	2,34%	
	Variance	0,8394	0,5095	0,2785	0,1523	
	REQM	0,9280	0,7177	0,5297	0,3922	

TAB. 3.9. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	1,9223	1,7302	1,6839
Efficacité relative asymptotique, %	87,41%	97,11%	99,78%

TAB. 3.10. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		4,7620	4,6362	4,4981	4,4738	4,4327
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,4745	4,4567	4,4492	4,4392	-
	Biais relatif, %	6,04%	3,87%	1,09%	0,77%	
	Variance	2,2899	1,3486	0,6571	0,3003	
	REQM	1,5403	1,1751	0,8121	0,5491	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	4,8220	4,6523	4,5444	4,4849	
	Biais relatif, %	1,26%	0,35%	1,03%	0,25%	
	Variance	2,9044	1,6734	0,8618	0,4652	
	REQM	1,7053	1,2937	0,9295	0,6822	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	4,6645	4,5090	4,4883	4,4249	
	Biais relatif, %	2,05%	2,74%	0,22%	1,09%	
	Variance	4,9386	2,8773	1,6911	0,8573	
	REQM	2,2244	1,7010	1,3005	0,9272	

TAB. 3.11. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	5,1095	4,5726	4,4429
Efficacité relative asymptotique, %	86,75%	96,94%	99,77%

TAB. 3.12. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		4,4131	4,2902	4,1751	4,1684	4,1066
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,1457	4,1321	4,1197	4,1107	-
	Biais relatif, %	6,06%	3,69%	1,33%	1,38%	
	Variance	1,9793	1,1758	0,5304	0,2509	
	REQM	1,4321	1,0958	0,7304	0,5042	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	4,4735	4,3076	4,1888	4,1514	
	Biais relatif, %	1,37%	0,41%	0,33%	0,41%	
	Variance	2,4744	1,4465	0,6901	0,3862	
	REQM	1,5742	1,2028	0,8308	0,6217	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	4,3166	4,1617	4,1206	4,1156	
	Biais relatif, %	2,19%	2,99%	1,30%	1,27%	
	Variance	4,2509	2,5609	1,3852	0,7239	
	REQM	2,0640	1,6054	1,1782	0,8525	

TAB. 3.13. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	4,7335	4,2362	4,1160
Efficacité relative asymptotique, %	86,76%	96,94%	99,77%

TAB. 3.14. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		4,7716	4,6424	4,5119	4,4603	4,4327
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,4758	4,4594	4,4479	4,4388	-
	Biais relatif, %	6,20%	3,94%	1,42%	0,48%	
	Variance	2,3637	1,3018	0,6418	0,2894	
	REQM	1,5656	1,1556	0,8037	0,5383	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	4,7933	4,6430	4,5427	4,4875	
	Biais relatif, %	0,46%	0,01%	0,68%	0,61%	
	Variance	3,0690	1,6160	0,8351	0,4439	
	REQM	1,7520	1,2712	0,9143	0,6668	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	4,5385	4,4949	4,4685	4,4484	
	Biais relatif, %	4,88%	3,18%	0,96%	0,27%	
	Variance	4,6621	2,8922	1,6033	0,7598	
	REQM	2,1717	1,7070	1,2670	0,8718	

TAB. 3.15. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	5,1095	4,5726	4,4429
Efficacité relative asymptotique, %	86,75%	96,94%	99,77%

TAB. 3.16. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		3,2717	3,1957	3,1099	3,0982	3,0535
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	3,0869	3,0708	3,0647	3,0558	-
	Biais relatif, %	5,65%	3,91%	1,45%	1,37%	
	Variance	0,9945	0,5925	0,2729	0,1268	
	REQM	1,0142	0,7798	0,5243	0,3586	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	3,3226	3,1882	3,1394	3,0758	
	Biais relatif, %	1,56%	0,23%	0,95%	0,73%	
	Variance	1,3161	0,7218	0,3760	0,1947	
	REQM	1,1483	0,8497	0,6139	0,4418	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	3,1570	3,1217	3,1029	3,0509	
	Biais relatif, %	3,51%	2,32%	0,23%	1,53%	
	Variance	2,2073	1,3967	0,7477	0,3855	
	REQM	1,4901	1,1841	0,8647	0,6227	

TAB. 3.17. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	3,5191	3,1497	3,0605
Efficacité relative asymptotique, %	86,77%	96,94%	99,77%

TAB. 3.18. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		5,6671	5,4821	5,3445	5,2813	5,2480
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	5,3002	5,2782	5,2653	5,2536	-
	Biais relatif, %	6,47%	3,72%	1,48%	0,52%	
	Variance	3,4484	1,9777	0,8826	0,4303	
	REQM	1,8929	1,4210	0,9428	0,6566	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	5,6861	5,5275	5,3938	5,3053	
	Biais relatif, %	0,34%	0,83%	0,92%	0,46%	
	Variance	4,4922	2,4356	1,1751	0,6458	
	REQM	2,1196	1,5613	1,0851	0,8040	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	5,4745	5,3436	5,2799	5,2605	
	Biais relatif, %	3,40%	2,53%	1,21%	0,39%	
	Variance	7,1614	4,1690	2,1197	1,1677	
	REQM	2,6830	2,0465	1,4573	1,0808	

TAB. 3.19. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	6,0497	5,4137	5,2601
Efficacité relative asymptotique, %	86,75%	96,94%	99,77%

TAB. 3.20. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		5,2950	5,1569	5,0210	4,9641	4,9219
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,9705	4,9504	4,9400	4,9274	-
	Biais relatif, %	6,13%	4,00%	1,61%	0,74%	
	Variance	2,9522	1,6842	0,7952	0,3698	
	REQM	1,7486	1,3141	0,8954	0,6092	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	5,3458	5,1613	5,0416	4,9835	
	Biais relatif, %	0,96%	0,09%	0,41%	0,39%	
	Variance	3,859	2,0919	1,0463	0,5633	
	REQM	1,9650	1,4463	1,0231	0,7508	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	5,0688	4,9725	4,9447	4,9534	
	Biais relatif, %	4,27%	3,57%	1,52%	0,22%	
	Variance	5,9697	3,4625	1,9031	0,9542	
	REQM	2,4536	1,8699	1,3816	0,9769	

TAB. 3.21. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	5,6737	5,0772	4,9332
Efficacité relative asymptotique, %	86,75%	96,94%	99,77%

TAB. 3.22. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		4,4064	4,3070	4,1829	4,1667	4,1066
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	4,1439	4,1327	4,1193	4,1099	-
	Biais relatif, %	5,96%	4,05%	1,52%	1,36%	
	Variance	1,9699	1,0961	0,5256	0,2536	
	REQM	1,4279	1,0613	0,7277	0,5068	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	4,4862	4,3070	4,1913	4,1596	
	Biais relatif, %	1,81%	0,001%	0,20%	0,17%	
	Variance	2,4992	1,3480	0,6997	0,3975	
	REQM	1,5829	1,1610	0,8365	0,6305	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	4,2899	4,1585	4,1156	4,1166	
	Biais relatif, %	2,64%	3,45%	1,61%	1,20%	
	Variance	4,2342	2,4087	1,3369	0,7182	
	REQM	2,0610	1,5591	1,1582	0,8489	

TAB. 3.23. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle normal, estimateurs sans biais.

r	0,5	0,3	0,1
Variance asymptotique	4,7335	4,2361	4,1160
Efficacité relative asymptotique, %	86,76%	96,94%	99,77%

TAB. 3.24. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance asymptotique de l'estimateur S pour des points de rupture r .

3.3.2. Le modèle t de Student, simples estimateurs sans biais

Premièrement, on trouve les tableaux des résultats pour la dimension $n = 3$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		1,5561	1,5844	1,6119	1,6406	1,6657
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	1,7207	1,7010	1,6854	1,6739	-
	Biais relatif, %	10,58%	7,36%	4,56%	2,03%	
	Variance	0,8105	0,4986	0,2500	0,1196	
	REQM	0,9152	0,7157	0,5054	0,3474	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	1,6018	1,5876	1,6379	1,6399	
	Biais relatif, %	2,94%	0,20%	1,62%	0,04%	
	Variance	0,7750	0,4830	0,2914	0,1569	
	REQM	0,8816	0,6950	0,5405	0,3961	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	1,2379	1,3680	1,5257	1,5553	
	Biais relatif, %	20,45%	13,66%	5,35%	5,20%	
	Variance	2,2231	4,0363	3,5350	1,9768	
	REQM	1,5246	2,0207	1,8821	1,4086	

TAB. 3.25. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		10,1603	10,1894	10,2308	10,3684	10,6688
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	10,9180	10,8368	10,7464	10,7097	-
	Biais relatif, %	7,46%	6,35%	5,04%	3,29%	
	Variance	23,6410	13,9649	5,9288	3,0503	
	REQM	4,9209	3,7926	2,4889	1,7795	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	10,5208	10,3915	10,2844	10,3455	
	Biais relatif, %	3,55%	1,98%	0,52%	0,22%	
	Variance	22,6770	13,7707	6,6161	3,7631	
	REQM	4,7757	3,7164	2,5727	1,9400	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	9,3861	9,1482	9,5570	9,8227	
	Biais relatif, %	7,62%	10,22%	6,59%	5,26%	
	Variance	37,6966	31,6077	24,3563	19,3606	
	REQM	6,1884	5,7177	4,9810	4,4338	

TAB. 3.26. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		1,5224	1,5445	1,5458	1,5677	1,6064
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	1,6478	1,6309	1,6199	1,6130	-
	Biais relatif, %	8,23%	5,59%	4,80%	2,89%	
	Variance	0,2345	0,1507	0,0641	0,0363	
	REQM	0,5002	0,3978	0,2639	0,1958	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	1,5642	1,5506	1,5495	1,5792	
	Biais relatif, %	2,74%	0,40%	0,24%	0,73%	
	Variance	0,2396	0,1615	0,0806	0,0613	
	REQM	0,4913	0,4020	0,2839	0,2479	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	1,3576	1,3505	1,4201	1,4930	
	Biais relatif, %	10,83%	12,56%	8,13%	4,76%	
	Variance	0,7561	0,7530	0,8554	0,6887	
	REQM	0,8851	0,8892	0,9334	0,8332	

TAB. 3.27. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		7,0938	7,0990	7,1619	7,2722	7,4650
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,6431	7,5853	7,5211	7,4931	-
	Biais relatif, %	7,74%	6,85%	5,01%	3,04%	
	Variance	11,2007	6,1228	2,7566	1,3936	
	REQM	3,3915	2,5218	1,6987	1,2010	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	7,3474	7,2268	7,1999	7,2127	
	Biais relatif, %	3,57%	1,80%	0,53%	0,82%	
	Variance	10,6793	6,1333	3,0199	1,7300	
	REQM	3,2777	2,4798	1,7382	1,3167	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	6,5688	6,3938	6,6122	6,8166	
	Biais relatif, %	7,40%	9,93%	7,68%	6,26%	
	Variance	19,2045	17,4075	10,6590	9,9525	
	REQM	4,4136	4,2314	3,3108	3,1875	

TAB. 3.28. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

Ensuite les tableaux des résultats pour la dimension $n = 7$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		2,8809	2,8997	2,9658	3,0299	3,0815
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	3,1957	3,1440	3,1161	3,0978	-
	Biais relatif, %	10,92%	8,43%	5,07%	2,24%	
	Variance	2,5855	1,7283	0,8551	0,4138	
	REQM	1,6385	1,3372	0,9368	0,6468	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	2,9108	2,9538	3,0094	3,0414	
	Biais relatif, %	1,04%	1,87%	1,47%	0,38%	
	Variance	2,3949	1,7113	0,9261	0,5926	
	REQM	1,5478	1,3093	0,9633	0,7699	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	2,1779	2,4963	2,7496	2,8496	
	Biais relatif, %	24,40%	13,91%	7,29%	5,95%	
	Variance	5,9922	6,7726	8,8450	4,9060	
	REQM	2,5469	2,6335	2,3523	2,2223	

TAB. 3.29. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		10,0666	10,0243	10,0672	10,3672	10,6260
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	10,8810	10,7904	10,7019	10,6751	-
	Biais relatif, %	8,09%	7,18%	4,90%	2,97%	
	Variance	21,4384	12,8672	6,4235	3,1219	
	REQM	4,7012	3,6593	2,5833	1,7935	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	10,3363	10,3263	10,2662	10,3829	
	Biais relatif, %	2,68%	2,57%	0,63%	0,15%	
	Variance	20,7709	12,4754	6,8420	3,9980	
	REQM	4,5655	3,5415	2,6165	1,9996	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	8,9311	9,3016	9,4338	9,7798	
	Biais relatif, %	11,28%	7,60%	7,53%	5,67%	
	Variance	34,5032	33,0061	23,3597	16,4976	
	REQM	5,9827	5,7959	4,8938	4,1040	

TAB. 3.30. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		9,3476	9,3240	9,4769	9,5546	9,8343
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	10,0637	9,9822	9,9065	9,8828	-
	Biais relatif, %	7,66%	7,06%	4,53%	3,44%	
	Variance	17,3486	10,4987	5,3110	2,6887	
	REQM	4,2263	3,3063	2,3443	1,67234	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	9,5250	9,4614	9,4940	9,6396	
	Biais relatif, %	1,90%	1,47%	0,18%	0,89%	
	Variance	17,0370	10,2262	5,7114	3,4724	
	REQM	4,1314	3,2008	2,3899	1,8654	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	8,2228	8,4895	8,6832	9,2017	
	Biais relatif, %	12,03%	8,95%	8,38%	3,69%	
	Variance	29,4095	30,0975	18,5298	19,7124	
	REQM	5,5385	5,5492	4,3772	4,4539	

TAB. 3.31. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		10,1172	10,0985	10,2097	10,3178	10,6260
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	10,8896	10,7723	10,7007	10,6684	-
	Biais relatif, %	7,63%	6,67%	4,81%	3,40%	
	Variance	21,8294	13,4631	6,3909	3,0429	
	REQM	4,7356	3,7306	2,5753	1,7793	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	10,2474	10,3001	10,2598	10,3563	
	Biais relatif, %	1,29%	1,99%	0,49%	0,37%	
	Variance	20,6581	12,9145	6,8692	3,8146	
	REQM	4,5470	3,5993	2,6214	1,9535	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	9,0535	9,1261	9,4512	9,9656	
	Biais relatif, %	10,51%	9,63%	7,43%	3,41%	
	Variance	36,0863	34,3224	24,5145	17,9319	
	REQM	6,1006	5,9387	5,0090	4,2492	

TAB. 3.32. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		6,9605	6,9090	7,0520	7,0449	7,2778
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,4647	7,3811	7,3404	7,3044	-
	Biais relatif, %	7,24%	6,83%	4,09%	3,68%	
	Variance	10,6837	5,9157	2,6822	1,3221	
	REQM	3,3073	2,4776	1,6629	1,1787	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	7,0461	7,0685	6,9450	7,0937	
	Biais relatif, %	1,23%	2,31%	1,52%	0,69%	
	Variance	10,1896	5,8700	2,9637	1,7151	
	REQM	3,1933	2,4280	1,7249	1,3105	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	6,1453	6,3990	6,4021	6,7627	
	Biais relatif, %	11,71%	7,38%	9,22%	4,01%	
	Variance	15,7725	30,7511	11,2904	8,4711	
	REQM	4,0542	5,5688	3,4224	2,9242	

TAB. 3.33. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		11,9968	11,9872	12,1313	12,3007	12,6052
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	12,9063	12,7728	12,6901	12,6585	-
	Biais relatif, %	7,58%	6,55%	4,61%	2,91%	
	Variance	29,6055	20,1060	9,3745	4,6512	
	REQM	5,5166	4,5523	1,7305	2,1861	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	12,2107	12,1955	12,2432	12,3641	
	Biais relatif, %	1,78%	1,74%	0,92%	0,52%	
	Variance	27,7615	18,7619	9,7711	6,0173	
	REQM	5,2733	4,3365	3,1279	2,4538	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	10,6004	10,8145	11,3862	11,8274	
	Biais relatif, %	11,64%	9,78%	6,14%	3,85%	
	Variance	43,6269	54,1465	50,9902	31,0403	
	REQM	6,7511	7,4513	7,1795	5,5915	

TAB. 3.34. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		11,2575	11,2721	11,3642	11,4758	11,8135
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	12,1146	11,9671	11,8952	11,8675	-
	Biais relatif, %	7,61%	6,17%	4,67%	3,41%	
	Variance	26,9072	15,3879	7,8718	3,8569	
	REQM	5,2575	3,9838	2,8555	2,0026	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	11,3541	11,3515	11,3810	11,5434	
	Biais relatif, %	0,86%	0,70%	0,15%	0,59%	
	Variance	24,9577	15,0386	8,2139	4,7899	
	REQM	4,9967	3,8788	2,8660	2,1896	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	9,8644	10,1128	10,3880	11,1027	
	Biais relatif, %	12,38%	10,28%	8,59%	3,25%	
	Variance	40,1071	38,2667	31,4103	26,2947	
	REQM	6,4844	6,2937	5,6889	5,1414	

TAB. 3.35. $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		9,3290	9,3326	9,5677	9,5533	9,8343
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	10,0851	9,9871	9,9012	9,8813	-
	Biais relatif, %	8,10%	7,01%	3,49%	3,43%	
	Variance	18,0241	10,7906	5,0044	2,5394	
	REQM	4,3123	3,3495	2,2618	1,6270	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	9,5604	9,4251	9,4126	9,5764	
	Biais relatif, %	2,48%	0,99%	1,62%	0,24%	
	Variance	17,5957	10,5565	5,4866	3,2498	
	REQM	4,2011	3,2504	2,3475	1,8029	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	8,4238	8,5230	8,5608	9,1755	
	Biais relatif, %	9,70%	8,67%	10,52%	3,96%	
	Variance	30,2408	25,5058	15,2965	19,0826	
	REQM	5,5732	5,1148	4,0386	4,3847	

TAB. 3.36. $n = 7, \sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle t de Student, estimateurs sans biais.

3.3.3. Le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale

Comme toujours, d'abord les tableaux des résultats pour la dimension $n = 3$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		1,1711	1,1555	1,1441	1,1416	1,1430
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	1,1694	1,1579	1,1528	1,1466	-
	Biais relatif, %	0,15%	0,21%	0,76%	0,43%	
	Variance	0,3165	0,1593	0,0773	0,0402	
	REQM	0,5625	0,3991	0,2781	0,2005	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	1,1942	1,1283	1,1657	1,1491	
	Biais relatif, %	1,97%	2,36%	1,89%	0,66%	
	Variance	0,3387	0,1643	0,0896	0,0514	
	REQM	0,5825	0,4063	0,3002	0,2269	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	1,4153	1,2139	1,2158	1,1605	
	Biais relatif, %	20,85%	5,05%	6,27%	1,65%	
	Variance	1,2113	0,3856	0,1889	0,0870	
	REQM	1,1273	0,6237	0,4405	0,2955	

TAB. 3.37. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		8,4666	8,2862	8,0156	7,8667	7,8406
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	8,0053	7,9298	7,8774	7,8562	-
	Biais relatif, %	5,45%	4,30%	1,72%	0,13%	
	Variance	9,0477	5,5789	2,7040	1,3026	
	REQM	3,0431	2,3887	1,6502	1,1414	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	8,6598	8,3780	8,0333	7,9487	
	Biais relatif, %	2,28%	1,11%	0,22%	1,04%	
	Variance	12,2113	6,8504	3,3135	1,9614	
	REQM	3,4998	2,6189	1,8204	1,4029	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	9,8375	9,2906	8,3521	8,1593	
	Biais relatif, %	16,19%	12,12%	4,20%	3,72%	
	Variance	24,0387	13,4779	6,4777	3,4171	
	REQM	5,0910	3,8061	2,5673	1,8716	

TAB. 3.38. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		1,2427	1,2161	1,1875	1,1714	1,1627
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	1,1877	1,1770	1,1691	1,1652	-
	Biais relatif, %	4,43%	3,21%	1,54%	0,53%	
	Variance	0,1110	0,0582	0,0309	0,0138	
	REQM	0,3377	0,2444	0,1769	0,1175	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	1,2733	1,2188	1,1928	1,1668	
	Biais relatif, %	2,46%	0,22%	0,45%	0,39%	
	Variance	0,1458	0,0736	0,0413	0,0220	
	REQM	0,3831	0,2713	0,2033	0,1482	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	1,4597	1,3540	1,2534	1,1924	
	Biais relatif, %	17,46%	11,34%	5,55%	1,80%	
	Variance	0,4708	0,2496	0,1121	0,0553	
	REQM	0,7196	0,5183	0,3413	0,2361	

TAB. 3.39. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		5,8974	5,7753	5,6139	5,5094	5,4797
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	5,5940	5,5438	5,5060	5,4921	-
	Biais relatif, %	5,14%	4,01%	1,92%	0,31%	
	Variance	4,4931	2,5860	1,1930	0,5891	
	REQM	2,1413	1,6247	1,0976	0,7677	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	6,0824	5,8725	5,8370	5,5375	
	Biais relatif, %	3,14%	1,68%	0,46%	0,51%	
	Variance	6,0591	3,3578	1,4932	0,9428	
	REQM	2,4685	1,8350	1,2222	0,9714	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	7,0056	6,4563	5,8369	5,7082	
	Biais relatif, %	18,79%	11,79%	3,97%	3,61%	
	Variance	11,8631	6,8419	2,9896	1,5884	
	REQM	3,6182	2,7029	1,7434	1,2759	

TAB. 3.40. $n = 3$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, EVM.

Ensuite les tableaux des résultats pour la dimension $n = 7$.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		2,1480	2,0748	2,0450	2,0277	2,0139
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	2,1025	2,0629	2,0353	2,0238	-
	Biais relatif, %	2,12%	0,58%	0,47%	0,19%	
	Variance	0,8673	0,5008	0,2401	0,1175	
	REQM	0,9324	0,7077	0,4901	0,3428	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	2,1964	2,1063	2,0973	2,0485	
	Biais relatif, %	2,25%	1,52%	2,56%	1,02%	
	Variance	1,0419	0,5691	0,3208	0,1545	
	REQM	1,0219	0,7550	0,5688	0,3936	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	3,7655	2,8196	2,3779	2,1740	
	Biais relatif, %	75,30%	35,89%	16,28%	7,21%	
	Variance	19,6852	2,9651	0,6804	0,2976	
	REQM	4,7224	1,8761	0,8895	0,5648	

TAB. 3.41. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_S(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la somme S , modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		8,2224	7,9090	7,6716	7,5282	7,4371
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,6210	7,5366	7,4857	7,4596	-
	Biais relatif, %	7,31%	4,71%	2,42%	0,91%	
	Variance	8,3802	4,7230	2,2255	1,0725	
	REQM	2,9567	2,2049	1,5033	1,0379	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	8,5826	8,0033	7,5681	7,5519	
	Biais relatif, %	4,38%	1,19%	1,35%	0,31%	
	Variance	11,5851	6,1690	2,6939	1,7465	
	REQM	3,4227	2,4855	1,6446	1,3218	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	13,3490	10,3676	8,5786	7,9991	
	Biais relatif, %	62,35%	31,09%	11,82%	6,26%	
	Variance	45,7913	20,5798	6,0183	3,3641	
	REQM	8,4896	5,1599	2,6156	1,8936	

TAB. 3.42. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_1|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la première composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		7,5948	7,3045	7,0948	6,9307	6,8815
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,0486	6,9780	6,9265	6,9020	-
	Biais relatif, %	7,19%	4,47%	2,37%	0,41%	
	Variance	7,0328	4,005	1,8849	0,9131	
	REQM	2,7076	2,0276	1,3832	0,9560	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	7,8763	7,3376	7,0607	6,9608	
	Biais relatif, %	3,71%	0,45%	0,48%	0,43%	
	Variance	9,5055	5,0534	2,3501	1,3813	
	REQM	3,0959	2,2482	1,5334	1,1757	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	12,0908	9,5678	7,9841	7,4328	
	Biais relatif, %	59,20%	30,99%	12,53%	7,24%	
	Variance	39,2288	15,8895	5,0664	2,5641	
	REQM	7,7099	4,5839	2,4202	1,6781	

TAB. 3.43. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_2|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la deuxième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		8,2273	7,8875	7,6854	7,5468	7,4371
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,6266	7,5378	7,4862	7,4579	-
	Biais relatif, %	7,30%	4,43%	2,59%	1,18%	
	Variance	7,9153	4,6934	2,2325	1,0734	
	REQM	2,8768	2,1945	1,5074	1,0399	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	8,4601	8,0879	7,5156	7,6032	
	Biais relatif, %	2,83%	2,54%	2,21%	0,75%	
	Variance	10,5449	6,0294	2,7624	1,6536	
	REQM	3,2556	2,4636	1,6707	1,2872	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	12,7550	10,4813	8,5509	7,9179	
	Biais relatif, %	55,03%	32,88%	11,26%	4,92%	
	Variance	47,8295	18,8929	6,7534	2,7963	
	REQM	8,2662	5,0617	2,7391	1,7129	

TAB. 3.44. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_3|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la troisième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		5,5913	5,3695	5,2475	5,1159	5,0874
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	5,2177	5,1575	5,1218	5,1030	-
	Biais relatif, %	6,68%	3,95%	2,40%	0,25%	
	Variance	3,9197	2,0835	0,9833	0,4769	
	REQM	2,0148	1,4589	0,9995	0,6907	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	5,8029	5,5650	5,2212	5,1495	
	Biais relatif, %	3,78%	3,64%	0,50%	0,66%	
	Variance	5,5587	2,7683	1,3687	0,7211	
	REQM	2,3672	1,6753	1,1702	0,8498	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	9,1225	7,1816	5,7821	5,4164	
	Biais relatif, %	63,16%	33,75%	10,19%	5,87%	
	Variance	26,4775	9,1668	2,6504	1,2954	
	REQM	6,2407	3,5285	1,7135	1,1772	

TAB. 3.45. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_4|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la quatrième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		9,7935	9,4363	9,1227	8,9128	8,8261
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	9,0382	8,9547	8,8858	8,8529	-
	Biais relatif, %	7,71%	5,10%	2,60%	0,67%	
	Variance	12,3571	6,8155	3,1816	1,5352	
	REQM	3,5955	2,6547	1,7993	1,2405	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	10,0304	9,4488	8,9717	8,8940	
	Biais relatif, %	2,42%	0,13%	1,66%	0,21%	
	Variance	16,3301	7,7027	4,0285	2,1826	
	REQM	4,0480	2,7754	2,0128	1,4775	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	15,5754	12,2854	10,1929	9,3493	
	Biais relatif, %	59,04%	30,19%	11,73%	4,90%	
	Variance	67,1639	26,9876	8,8832	4,0755	
	REQM	10,0297	5,9250	3,1668	2,0654	

TAB. 3.46. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_5|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la cinquième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		9,1436	8,7875	8,5303	8,3868	8,2705
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	8,4917	8,3832	8,3274	8,2970	-
	Biais relatif, %	7,13%	4,60%	2,38%	1,07%	
	Variance	10,9293	5,9094	2,7779	1,3411	
	REQM	3,3696	2,4643	1,6790	1,1615	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	9,4194	8,9219	8,4362	8,3839	
	Biais relatif, %	3,02%	1,53%	1,10%	0,03%	
	Variance	15,4048	7,6983	3,6932	1,9388	
	REQM	3,9346	2,7778	1,9241	1,3924	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	14,2578	11,4412	9,6291	8,8296	
	Biais relatif, %	55,93%	30,20%	12,88%	5,28%	
	Variance	59,5904	24,6257	7,9587	3,6339	
	REQM	9,2599	5,6274	3,0276	1,9570	

TAB. 3.47. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_6|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la sixième composante, modèle t de Student, EVM.

N		30	50	100	200	∞
Variance exacte		7,6064	7,3067	7,1032	6,9384	6,8815
Variance « plug-in »	Valeur moyenne	7,0560	6,9787	6,9239	6,9010	-
	Biais relatif, %	7,23%	4,49%	2,52%	0,54%	
	Variance	6,9894	4,0055	1,8796	0,9136	
	REQM	2,7004	2,0281	1,3827	0,9566	
Variance bootstrap paramétrique	Valeur moyenne	7,9968	7,4299	6,9904	6,9098	
	Biais relatif, %	5,13%	1,69%	1,59%	0,41%	
	Variance	10,0699	5,1354	2,4408	1,3455	
	REQM	3,1972	2,2695	1,5664	1,1603	
Variance bootstrap non paramétrique	Valeur moyenne	12,1765	9,7559	7,8514	7,3405	
	Biais relatif, %	60,08%	33,52%	10,53%	5,80%	
	Variance	37,7822	15,6501	5,1438	2,3862	
	REQM	7,6595	4,6528	2,3882	1,5962	

TAB. 3.48. $n = 7$, $\sqrt{N} \cdot TCE_{X_7|S}(s_q)$: la variance des estimateurs de TCE de la septième composante, modèle t de Student, EVM.

3.4. ANALYSE DES RÉSULTATS DE SIMULATIONS

Afin de comparer la précision des trois estimateurs de la variance de TCE, on dispose de trois mesures de la qualité d'estimateur : le biais, la variance et la mesure qui combine les deux premières, l'erreur quadratique moyenne ou EQM. EQM est une mesure qui est utilisée habituellement pour juger de la qualité des estimateurs, elle est définie de la façon suivante. Posons θ , la valeur de la variance exacte qu'on a estimée. Supposons que notre estimation était suffisamment précise pour considérer la vraie variance comme étant connue. Posons ensuite $\hat{\theta}$, l'un des trois estimateurs de la variance considérés. Alors,

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\theta - \hat{\theta})^2 = [\theta - E(\hat{\theta})]^2 + E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 = \text{Biais}^2(\hat{\theta}) + \text{Var}(\hat{\theta}).$$

Les tableaux de la section 3.3 donnent les estimations de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne, ou REQM,

$$REQM(\hat{\theta}) = \sqrt{EQM(\hat{\theta})}.$$

REQM est souvent jugée comme étant plus commode à utiliser et interpréter.

3.4.1. Le modèle normal, simples estimateurs sans biais

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent le comportement des REQM des trois estimateurs de la variance pour les dimensions $n = 3$ et $n = 7$ respectivement. Comme on peut le constater, le bootstrap non paramétrique donne toujours la valeur la plus grande de REQM. C'est bien naturel, car les deux autres estimateurs profitent de la connaissance du vrai modèle et donnent donc des meilleures estimations. Puisque cette situation est commune à tous les modèles étudiés, on va se concentrer surtout sur l'analyse des estimations par bootstrap paramétrique et par la méthode « plug-in ».

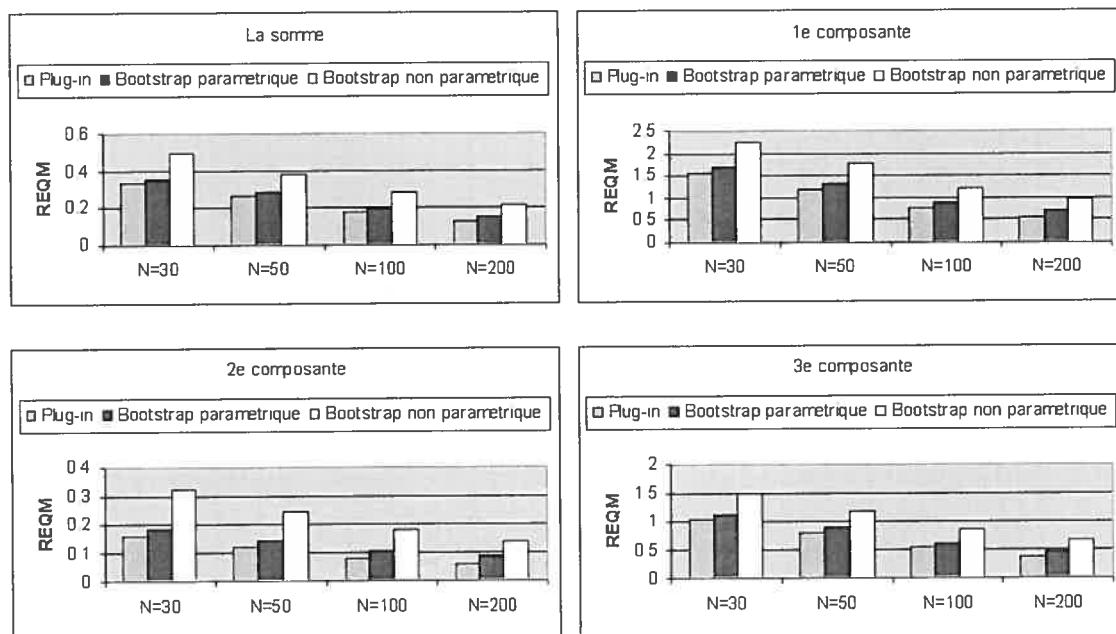


FIG. 3.1. REQM pour le modèle normal, estimateurs sans biais et $n = 3$.

Les REQM de ces deux estimateurs sont beaucoup plus rapprochées, mais l'avantage est toujours du côté de l'estimateur « plug-in », et ce pour la somme aussi bien que pour les composantes du portefeuille.

En examinant les résultats réunis dans les tableaux 3.1 à 3.23 on remarque que le comportement du biais lorsqu'on estime la variance de la somme et la variance des composantes n'est pas pareil. Le biais relatif de l'estimateur « plug-in » de la somme est très petit, entre 0,15% et 0,5% pour toutes les tailles N , tandis que pour les composantes le biais relatif varie de 5% à 6,5% pour $N = 30$ et entre 0,4% et 1,4% pour $N = 200$. Le biais des estimations par bootstrap paramétrique est plus modéré. Lorsqu'on estime la variance de la somme, il varie de 1,2% à 2,2% pour $N = 30$ et 0,2% à 0,5% pour $N = 200$. Le biais des estimations de la variance des composantes se situe entre 0% et 1,8% pour toutes les tailles N . Cependant, la variance plus importante de l'estimateur bootstrap paramétrique le rend moins avantageux par rapport à l'estimateur « plug-in » au sens de l'erreur

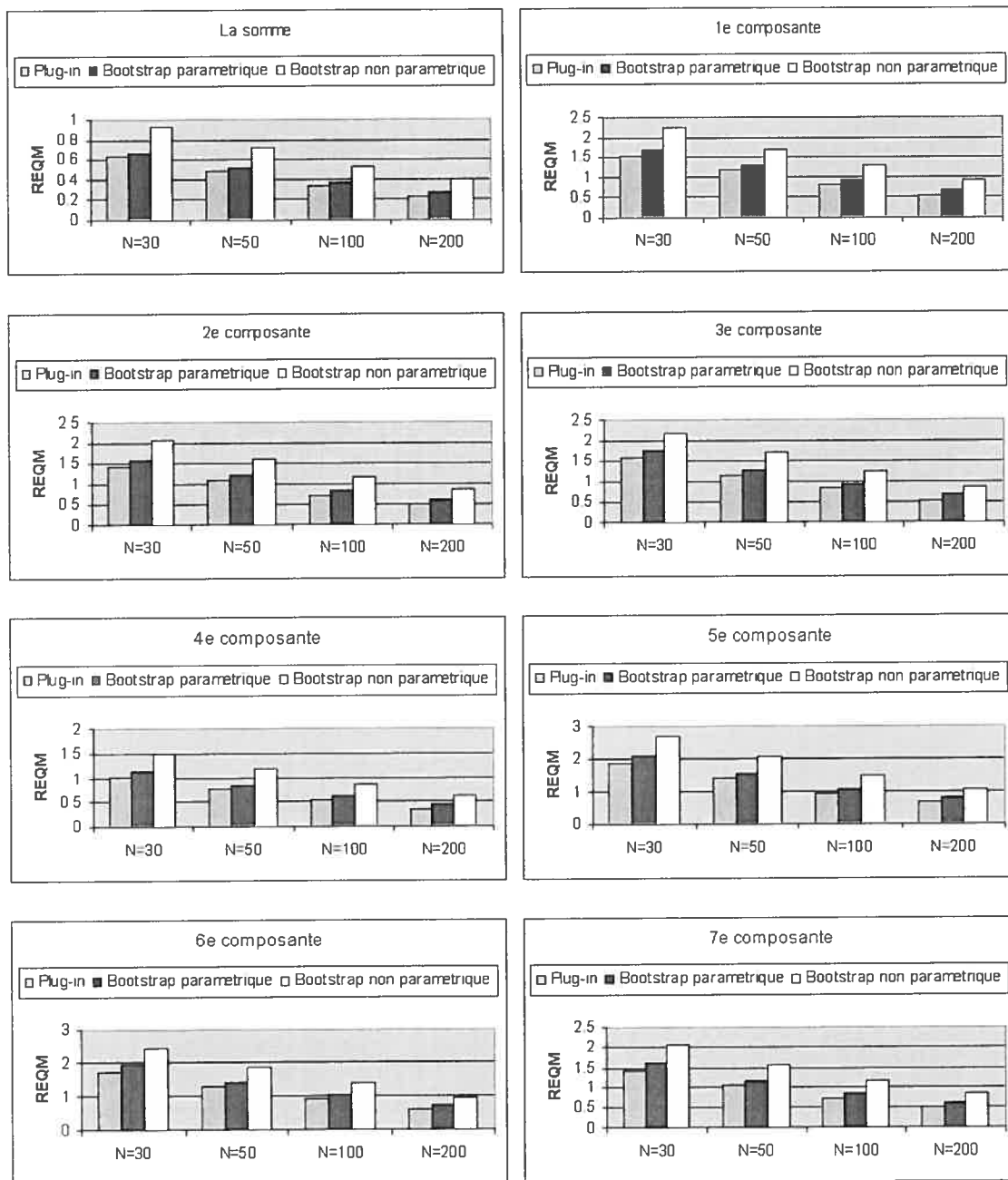


FIG. 3.2. REQM pour le modèle normal, estimateurs sans biais et $n = 7$.

quadratique moyenne, et ce pour toutes les tailles échantillonnales et les deux dimensions considérées.

Les tableaux à numérotation paire 3.2 à 3.8 pour $n = 3$ et 3.10 à 3.24 pour $n = 7$ démontrent que si on utilise l'estimateur robuste S afin d'obtenir les estimés

des paramètres du modèle, on peut perdre jusqu'à 40% d'efficacité asymptotique par rapport aux estimateurs sans biais, lesquels sont efficaces pour ce modèle. Néanmoins, si on se contente du point de rupture $r = 0, 1$, ce qui est suffisant dans plusieurs cas, l'efficacité est de presque 100%. Ces résultats asymptotiques concernant la variance des estimateurs de TCE, par ailleurs, concordent très bien avec les résultats de Bilodeau [4], p.225 sur l'efficacité asymptotique de l'estimateur S des paramètres d'une distribution normale multivariée.

La recommandation concernant la sélection d'un estimateur de la variance pour le modèle normal est donc simple : il est toujours préférable d'utiliser l'estimateur « plug-in ». Il est très facile à calculer et ne requière pas la programmation des simulations nécessaires pour l'estimation selon la méthode de bootstrap paramétrique.

3.4.2. Le modèle t de Student, simples estimateurs sans biais

L'application des simples estimateurs sans biais au modèle t de Student apporte des résultats qui diffèrent de ceux vus dans la section 3.4.1. Les tableaux 3.25 à 3.36 et les figures 3.3 et 3.4 témoignent qu'en général, l'estimation par le bootstrap paramétrique fonctionne mieux que la méthode « plug-in » pour des petits échantillons. Cependant, à partir de $N = 100$ l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur « plug-in » devient légèrement plus petite que celle de l'estimateur de bootstrap paramétrique.

L'étude des tableaux 3.25 à 3.36 démontre que le biais estimé de l'estimateur « plug-in » est toujours trois à sept fois plus grand que le biais de l'estimateur de bootstrap paramétrique. Grâce au fait que la variance de l'estimateur « plug-in » diminue plus rapidement, lorsque la taille de l'échantillon généré augmente, que celle de l'estimateur de bootstrap paramétrique, l'estimateur « plug-in » devient préférable pour des grands échantillons.

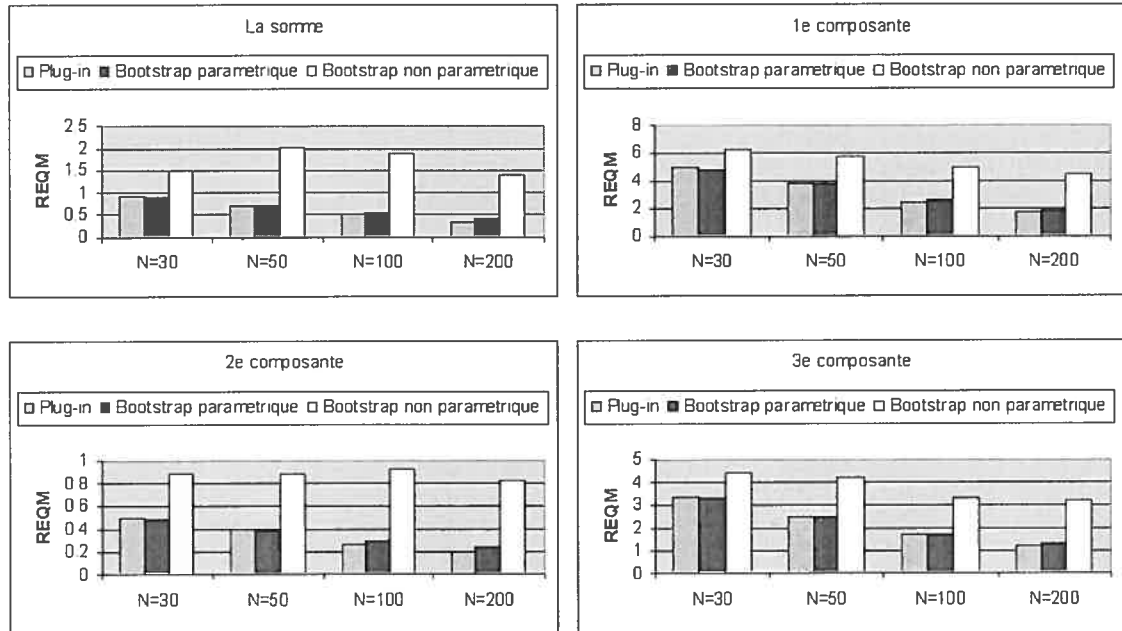


FIG. 3.3. REQM pour le modèle t de Student, estimateurs sans biais et $n = 3$.

La méthode de bootstrap non paramétrique reste la pire avec une erreur quadratique moyenne beaucoup trop élevée.

On peut donc suggérer, lorsqu'on utilise le modèle t de Student et les estimateurs sans biais, d'appliquer l'estimation « plug-in » seulement si on dispose d'un échantillon assez grand, c'est-à-dire d'au moins 100 observations pour des petites dimensions, comme $n = 3$. Pour les dimensions plus grandes, comme $n = 7$, il faudrait même plus d'observations.

Si l'échantillon est de taille petite ou moyenne et compte moins de 100 observations, les meilleurs résultats seront obtenus en utilisant l'estimation par bootstrap paramétrique. Cette dernière méthode, contrairement au bootstrap non paramétrique, n'est pas encore intégrée comme telle dans les logiciels statistiques.

Idéalement, on ne devrait pas utiliser les simples estimateurs sans biais pour des distributions à ailes massives comme la loi t de Student.

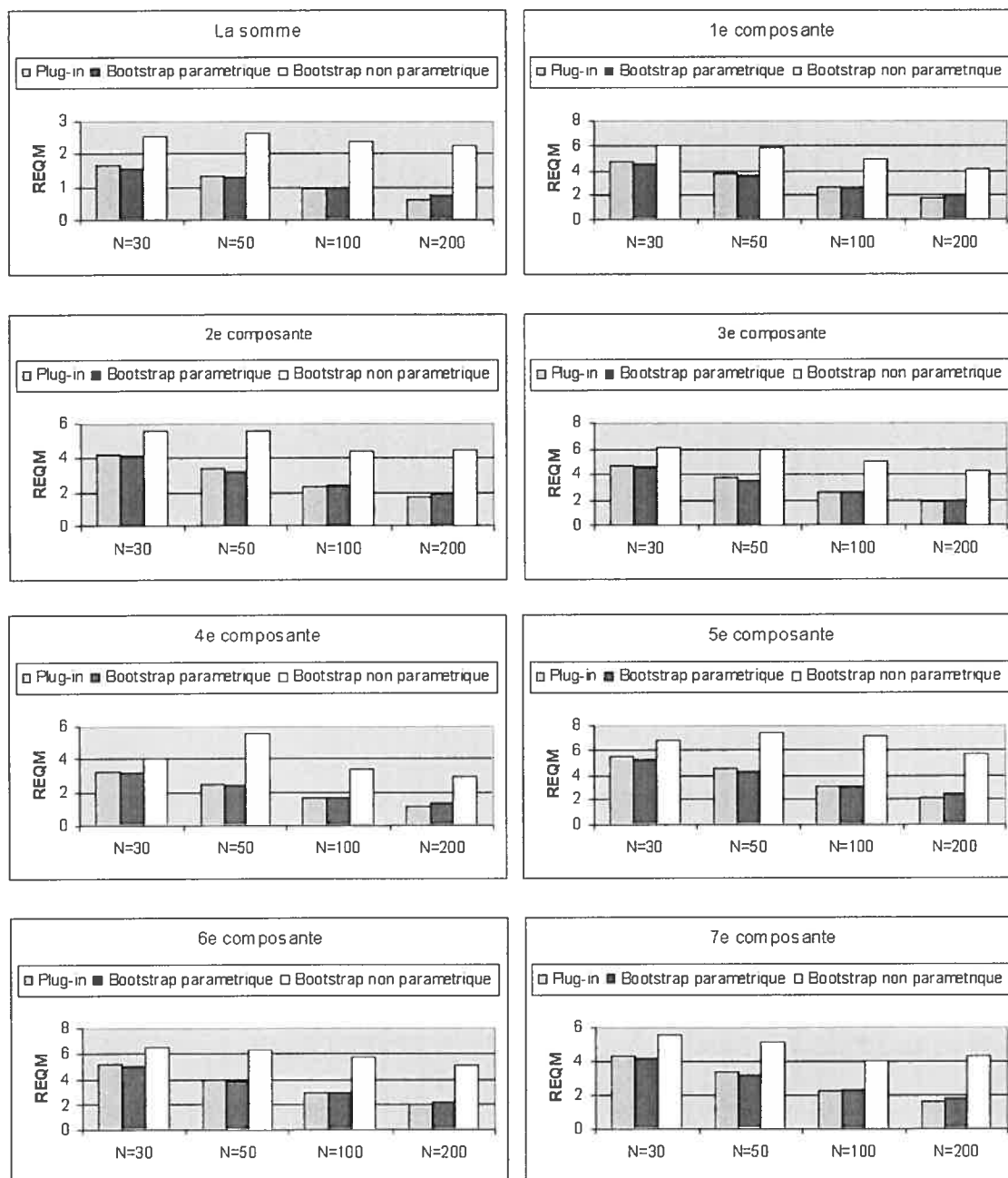


FIG. 3.4. REQM pour le modèle t de Student, estimateurs sans biais et $n = 7$.

3.4.3. Le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale

Les résultats obtenus avec l'application des estimateurs de vraisemblance maximale elliptique au modèle t de Student ressemblent à ceux du modèle normal. Les figures 3.5 et 3.6 démontrent que l'estimateur « plug-in » est supérieur

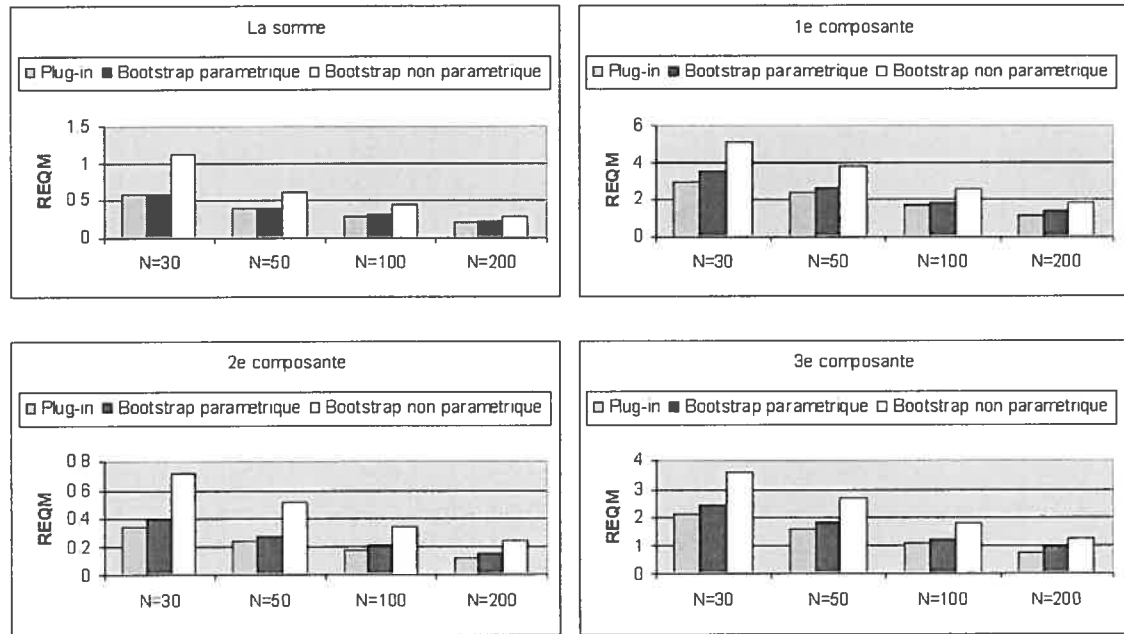


FIG. 3.5. REQM pour le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale et $n = 3$.

aux deux autres pour toutes les tailles N et les deux dimensions étudiées, $n = 3$ et $n = 7$.

D'après les tableaux 3.37 à 3.48 on constate que, lors de l'estimation de la variance de TCE des composantes du portefeuille, le biais de l'estimateur de bootstrap paramétrique est plus petit que le biais de l'estimateur « plug-in ». Au contraire, l'estimation de la variance pour la somme donne le biais de l'estimateur « plug-in » moins important par rapport à l'estimateur de bootstrap paramétrique. Mais toutes ces nuances n'ont guère d'importance, puisque la variance de l'estimateur de bootstrap paramétrique, toujours plus élevée, le rend moins avantageux par rapport à l'estimateur « plug-in » au sens de l'erreur quadratique moyenne, et ce pour toutes les tailles échantillonnales et les deux dimensions considérées, tout comme dans le cas du modèle normal.

La suggestion est donc la même que dans le cas du modèle normal : utiliser toujours l'estimateur « plug-in ».

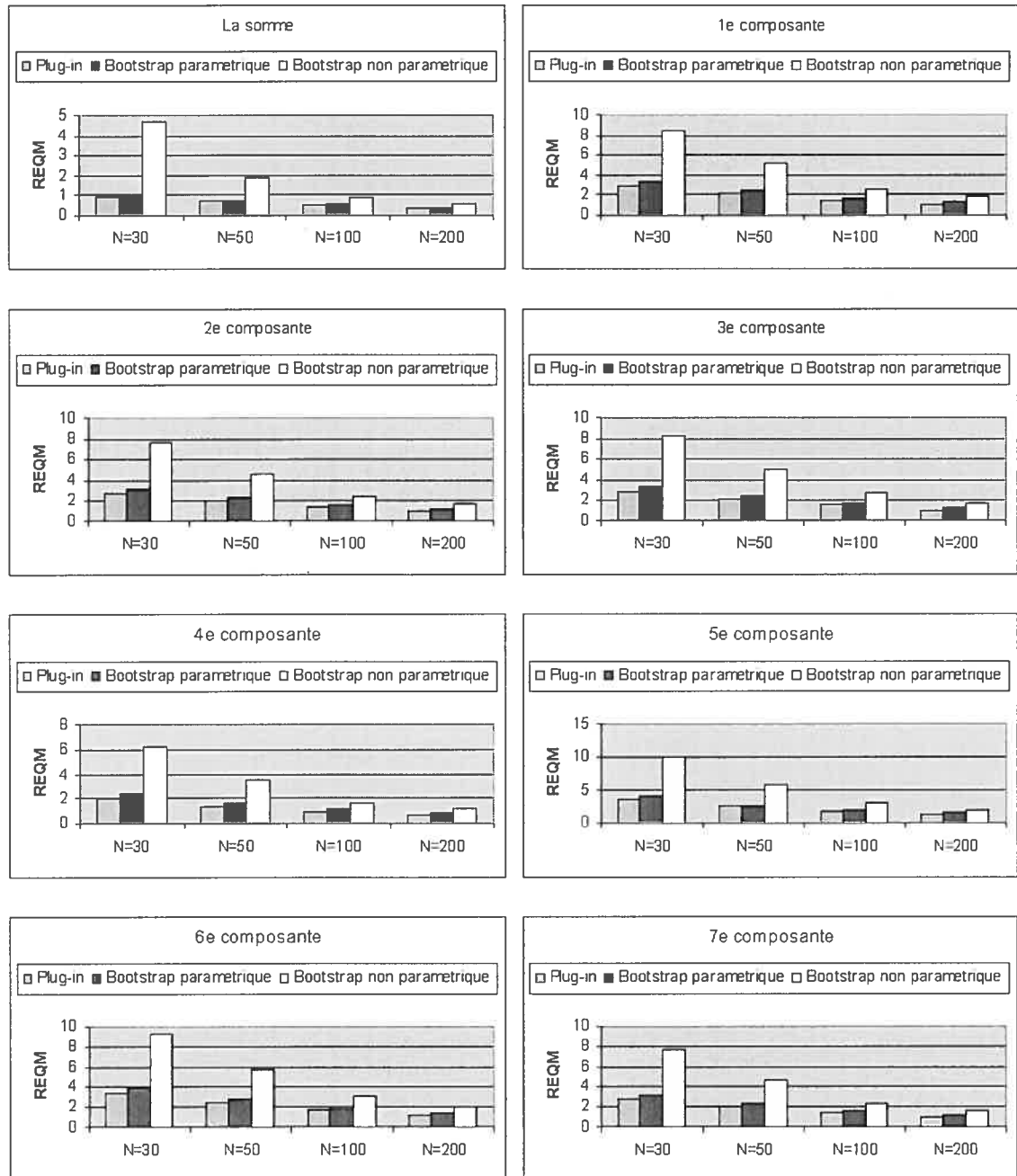


FIG. 3.6. REQM pour le modèle t de Student, estimateurs de vraisemblance maximale et $n = 7$.

Puisque dans les sections 3.3.2 et 3.3.3 on a utilisé le même modèle t de Student avec les mêmes paramètres, mais que les estimateurs des paramètres étaient différents, on peut comparer la performance de ces estimateurs. Pour ce faire, on va calculer l'efficacité relative des estimateurs sans biais aux estimateurs

de vraisemblance maximale, c'est-à-dire calculer le ratio des variances exactes estimées pour chaque valeur de taille échantillonnale N , ainsi que l'efficacité relative asymptotique en utilisant les vrais paramètres.

Les résultats de ce calcul, exprimés en terme de pourcentages, sont dans les tableaux 3.49 et 3.50 pour les dimensions $n = 3$ et $n = 7$, respectivement.

N	30	50	100	200	∞
Somme	75,26%	72,93%	70,98%	69,58%	68,62%
1e composante	83,33%	81,32%	78,35%	75,87%	73,49%
2e composante	81,63%	78,74%	76,82%	74,72%	72,37%
3e composante	83,13%	81,35%	78,39%	75,76%	73,41%

TAB. 3.49. L'efficacité relative des estimateurs sans biais aux estimateurs de vraisemblance maximale, $n = 3$.

N	30	50	100	200	∞
Somme	74,56%	71,55%	68,95%	66,92%	65,35%
1e composante	81,68%	78,56%	75,20%	72,62%	69,99%
2e composante	81,25%	78,34%	74,86%	72,54%	69,98%
3e composante	81,32%	78,11%	75,28%	73,14%	69,99%
4e composante	80,33%	77,72%	74,41%	72,62%	69,90%
5e composante	81,63%	78,72%	75,20%	72,46%	70,02%
6e composante	81,22%	77,96%	75,06%	73,08%	70,01%
7e composante	81,53%	78,29%	74,24%	72,63%	69,98%

TAB. 3.50. L'efficacité relative des estimateurs sans biais aux estimateurs de vraisemblance maximale, $n = 7$.

En regardant ces tableaux on constate que les estimateurs de vraisemblance maximale elliptique sont beaucoup plus efficaces que les simples estimateurs sans

biais. Donc, bien que les EVM soient plus difficiles à programmer et beaucoup plus lents à calculer que les estimateurs sans biais, il vaut la peine de les appliquer.

On remarque aussi que l'efficacité des estimateurs sans biais diminue avec la taille de l'échantillon N , et que ces estimateurs sont un peu plus efficaces pour l'estimation des composantes individuelles par rapport à l'estimation de la somme.

CONCLUSION

Développant les idées, proposées par Bilodeau [3], le but de ce mémoire était d'étudier le comportement des différents estimateurs de la moyenne conditionnelle tronquée (TCE), une mesure de risque utilisée dans les assurances et dans le monde de la finance en général.

Les formules, valides pour les familles elliptiques et obtenues par Landsman et Valdez [14], ont été utilisées pour calculer les valeurs de TCE à partir des estimations des paramètres du modèle. Le modèle normal et le modèle t de Student multivarié ont été considérés et deux estimateurs des paramètres ont été étudiés à fond : le simple estimateur sans biais et l'estimateur de vraisemblance maximale elliptique. Conformément à la théorie, l'estimateur de vraisemblance maximale s'est avéré plus efficace dans le cas du modèle t de Student, où ces deux estimateurs sont essentiellement différents.

Afin de pouvoir produire les écarts types et les intervalles de confiance des estimations de TCE, trois estimateurs de la variance ont été proposés : l'estimateur « plug-in », utilisant les expressions de la variance asymptotique obtenues par Bilodeau [3], et les estimateurs basés sur les méthodes de bootstrap paramétrique et non paramétrique.

Avec l'aide des simulations exhaustives portant sur deux modèles de portefeuilles de risques et de deux dimensions différentes, soient $n = 3$ et $n = 7$, on a établi que l'estimateur « plug-in » de la variance de l'estimation de TCE possède une erreur quadratique moyenne plus petite que celle des estimateurs bootstrap.

Ceci survient lorsque les paramètres de la distribution du modèle sont estimés par les estimateurs de vraisemblance maximale correspondants à ce modèle, c'est-à-dire les estimateurs sans biais pour le modèle normal et les EVM elliptique pour le modèle t de Student.

Par contre, quand on a appliqué les simples estimateurs sans biais au modèle t de Student, la méthode du bootstrap paramétrique a donné les meilleurs résultats en termes de l'erreur quadratique moyenne, mais seulement pour les tailles d'échantillon petites et moyennes, soit plus petites que 100 observations. Pour les échantillons contenant plus de 100 observations, l'estimateur « plug-in » devient de nouveau préférable à l'utilisation puisque son erreur quadratique moyenne redevient la plus petite.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. et HEATH., D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* **9**, 203-228.
- [2] BAPAT, R. B. (1989). Infinite divisibility of multivariate gamma distribution and M-matrices. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series A*, **51**, 73-78.
- [3] BILODEAU, M. (2004). Discussion : Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. *North American Actuarial Journal* **8(3)**,118-123.
- [4] BILODEAU, M. et BRENNER, D. (1999). *Theory of Multivariate Statistics*. New York : Springer-Verlag.
- [5] CRAMÉR, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press.
- [6] DHAENE, J., VANDUFFEL, S., TANG, Q., GOOVAERTS, M.J., KAAS, R., VYNCKE, D. (2004). Capital requirements, risk measures and comonotonicity. *Belgian Actuarial Bulletin*, **4**, 53-61.
- [7] EFRON, B., TIBSHIRANI, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, New York.
- [8] HARDY, M., WIRCH, J. (2003). The Iterated CTE - a Dynamic Risk Measure. Research Report 03-19 Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo, Waterloo, Ont.
- [9] GROUPE D'ÉTUDE SUR LES TECHNIQUES D'ÉVALUATION STOCHASTIQUE. (août 2001). L'utilisation des techniques stochastiques aux fins de l'évaluation du passif actuariel selon les PCGR au Canada. Institut Canadien des Actuaires, document de recherche 20169.
- [10] JOE, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London : Chapman & Hall.

- [11] KANO, Y. (1994). Consistency Property of Elliptical Probability Density Functions, *Journal of Multivariate Analysis* **51**, 139-147.
- [12] KENT, J. T., TYLER, D. E. (1991). Redescending M-estimates of multivariate location and scatter. *Annals of Statistics* **19**, 2102-2119.
- [13] LANDSMAN, Z., FURMAN, E. (2004). Risk Capital Decomposition for a Multivariate Dependent Gamma Portfolio. Technical Report N 04-5-1, University of Haifa, Actuarial Research Center.
- [14] LANDSMAN, Z. M., VALDEZ, E. A. (2003). Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions *North American Actuarial Journal* **7**, 55-71.
- [15] LUKÁCS, E., LAHA, R.G. (1964). *Applications of Characteristic Functions*. London : Griffin.
- [16] MAGNUS, J. R., NEUDECKER, H. (1979). The Commutation Matrix : Some Properties and Applications. *Annals of Statistics* **7**, 381-394.
- [17] MATHAI, A. M., MOSCHOPOULOS P. G. (1991). On a Multivariate Gamma, *Journal of Multivariate Analysis* **39**, 135-53.
- [18] MUIRHEAD, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York : Wiley.
- [19] PANJER, H. H. (2002). Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital Within Financial Conglomerates. Research Report 01-15, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo, Waterloo, Ont.
- [20] SRIVASTAVA, M. S., KHATRI, C. G. (1979). *An Introduction to Multivariate Statistics*. New York : North-Holland.

Annexe A

PROGRAMMES S-PLUS, LE MODÈLE NORMAL

D'abord le fichier « Parameters.ssc » contient les paramètres de simulation et les fonctions les plus communes. Il faut remplacer les signes des commentaires "#" pour passer de la dimension 3 à la dimension 7.

```
#Vecteur de la moyenne
MU_c(1,2,3)
#MU_c(1,2,3,4,5,6,7)

#nombre des dimensions
dim_length(MU)

#Matrice de covariance
SIGMA_matrix(c(
  1.0,0.2,-0.4,
  0.2,1.0,0.7,
  -0.4,0.7,1.0), nrow=dim)
#SIGMA_matrix(c(
# 1.0, 0.9, 0.4, 0.1, -0.7, -0.4, -0.2,
# 0.9, 1.0, 0.4, 0.3, -0.6, -0.4, -0.3,
# 0.4, 0.4, 1.0, 0.6, -0.5, -0.6, -0.2,
# 0.1, 0.3, 0.6, 1.0, -0.1, -0.2, 0.1,
# -0.7, -0.6, -0.5, -0.1, 1.0, 0.7, 0.3,
# -0.4, -0.4, -0.6, -0.2, 0.7, 1.0, 0.6,
# -0.2, -0.3, -0.2, 0.1, 0.3, 0.6, 1.0 ), nrow=dim)
```

```

#Niveau de confiance
q_0.95
#Quantile
Sq_sum(MU)+qnorm(q)*sqrt(sum(as.vector(SIGMA)))

#Nombre d'echantillons a generer
REP_2000
#Nombre d'echantillons BOOTSTRAP a generer
B_250
#Taille d'echantillons a generer
N_200

#"racine" d'une matrice symetrique
pdsroot<-function(Psi)
{
  dec.spectrale_eigen(Psi,symmetric=T)
  val.propre_dec.spectrale$values
  vec.propre_dec.spectrale$vectors
  return(vec.propre%*%diag(sqrt(val.propre)))
}

#Fonction calcule la variance asymptotique exacte ou plug-in
VarAsympt_function(MU,SIGMA,Sq,BETA,sigma1,sigma2)
{
  #Covariances entre k-eme composante et la somme
  SIGMAkS_rowSums(SIGMA)
  #Ecart type de la somme
  SIGMAS_sqrt(sum(SIGMAkS))
  #Moyenne de la somme
  MUS_sum(MU)

  #Constantes pour calculer les TCE's
  ZSq_(Sq-MUS)/SIGMAS
  Fbzval_Fbz(ZSq)
  Gbval_Gb(ZSq^2/2)
  LAMBDA_S_Gbval/(SIGMAS*Fbzval)

  #Constantes pour calculer la variance asymptotique exacte
  g1val_g1(ZSq^2/2)
  aq_C1*g1val*(ZSq*Fbzval-Gbval)/Fbzval^2
  bq_(C1*g1val*ZSq^2*Fbzval-Gbval*

```

```

(C1*g1val*ZSq+Fbzval))/(2*SIGMAS^3*Fbzval^2)

#TCE's et variance asymptotique exacte
TCE_MUS+LAMBDA*SIGMAS^2      #TCE de la somme
TCEk_MU+LAMBDA*SIGMAkS      #Vecteur des composantes

VarAsyptTCE_BETA*(1+aq)^2*SIGMAS^2+(LAMBDA+bq*SIGMAS^2)^2
      *SIGMAS^4*(2*sigma1+sigma2)
VarAsyptTCEk_BETA*(diag(SIGMA)+aq*(SIGMAkS^2/SIGMAS^2)*
      (2+aq))+sigma1*(LAMBDA^2*(SIGMAS^2*diag(SIGMA)
      +SIGMAkS^2)+4*LAMBDA*bq*SIGMAS^2*SIGMAkS^2+2*
      bq^2*SIGMAkS^2*SIGMAS^4)+sigma2*SIGMAkS^2*
      (LAMBDA+bq*SIGMAS^2)^2
return(list(VarAsyptTCE=VarAsyptTCE,
      VarAsyptTCEk=VarAsyptTCEk))
}
#Fonction calcule les TCE
calculTCE<-function(PARAM,Sq)
{
      muS1_sum(PARAM$xbar)
      sigmaS1_rowSums(PARAM$sigmahat)
      sigmaS1_sqrt(sum(sigmaS1))
      zSq1__(Sq-muS1)/sigmaS1
      lambdaS1_Gb(zSq1^2/2)/(sigmaS1*Fbz(zSq1))
      return(c(muS1+lambdaS1*sigmaS1^2,
      PARAM$xbar+lambdaS1*sigmaS1))
}

```

Le fichier principal du programme qu'on exécute.

```

#Simulation de distribution NORMALE les estimateurs sans biais
#Changer les parameters dans ce fichier
source("Parameters.ssc")
#####PARAMETRES DE LA DISTRIBUTION NORMALE#####
ALPHA_1      #Constante de la matrice de covariance
KAPPA_0      #Kurtosis NORMALE
C1_1/sqrt(2*pi) #Constante de normalisation
g1_fonction(x){return(exp(-x))}#Generateur de densite
#Distribution barre de valeur standardisee

```

```

Fbz_function(z){return(1-pnorm(z))}
#Générateur cumulatif barre de loi NORMALE
Gb_function(x,c1=C1){return(c1*exp(-x))}
#Fonction estime la moyenne et la matrice de covariance
#par l'estimateur sans biais
SansBiais<-function(X){ return( list(xbar=colMeans(X),
                                     sigmahat=var(X)))}
#####

dim1_4*(dim+1)

SIGMAroot_pdsroot(SIGMA)
#matrice des estimates, 1 colonne-TCE de la somme
#suite-TCE des composantes
#puis variances bootstrap non-parametrique
#puis variances bootstrap parametrique
#puis variances asymptotiques plug-in
estimTCE<-function(i,N,REP,MU,SIGMAroot,dim)
{
  print(c("N =",N, ", i =",i, "de",REP),quote=F)

  #Simulation d'échantillon normal
  X_t(SIGMAroot%%matrix(rnorm(N*dim),nrow=dim)+MU)
  #Bootstrap non parametrique
  BOOTnonpar_bootstrap(X, calculTCE(SansBiais(X),Sq),
                       B=B,trace=F)

  #Estimation des la moyenne et de la matrice de covariance
  SB_SansBiais(X)
  #Bootstrap parametrique
  BOOTpar_matrix(data=NA,ncol=dim+1,nrow=B)
  for(k in 1:B)
    {BOOTpar[k,]_
      calculTCE(SansBiais(t(pdsroot(SB$sigmahat)%*%
matrix(rnorm(N*dim),nrow=dim)+SB$xbar)),Sq)}

  VarAsPlugin_VarAsympt(MU=SB$xbar,SIGMA=SB$sigmahat,
                        Sq=Sq,BETA=ALPHA,sigma1=1+KAPPA,sigma2=KAPPA)
  return(c(BOOTnonpar$observed,N*BOOTnonpar$estimate$SE^2,
          N*colVars(BOOTpar),
          VarAsPlugin$VarAsyptTCE,VarAsPlugin$VarAsyptTCEk))
}

```

```

#Accumuler les resultats des simulations en fichier
FILE1_"simulSB_Norm.txt"

#SIMULATION
For(i=1:REP, write(estimTCE(i,N,REP,MU,SIGMAroot,dim),
                  file=FILE1, ncolumns=dim1, append=T))
#FIN de SIMULATION

#Calcule des variances, enregistrement des resultats
TCEarray_as.matrix(read.table(FILE1))

#Ecrire les parametres utilises et les resultats
#dans le fichier FILE
FILE_"resSB_Norm.txt"

#variance asymptotique exacte
VarAsExacte_VarAsympt(MU=MU,SIGMA=SIGMA,Sq=Sq,BETA=ALPHA,
sigma1=1+KAPPA,sigma2=KAPPA)
#####OUTPUT#####
write(c(" Distribution normale ", "DIM =",dim), file=FILE,
      ncolumns=3, append=T)
write(" Vecteur de moyenne", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(MU, file=FILE, ncolumns=dim, append=T)
write(" Matrice de covariance", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(SIGMA, file=FILE, ncolumns=dim, append=T)
write(" ESTIMATEUR: Simple estimateur sans biais", file=FILE,
      ncolumns=1, append=T)
write(c("q =",q," Quantile Sq =",Sq), file=FILE,
      ncolumns=4, append=T)
#####variance asymptotique du modele#####
write(" Variance asymptotique de TCE et de TCE de composantes",
      file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(c(VarAsExacte$VarAsyptTCE,VarAsExacte$VarAsyptTCEk),
      file=FILE, ncolumns=dim+1, append=T)
#####
write(c("N =",N," B =",B), file=FILE, ncolumns=4, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write(" Variance estime
EXACTE de TCE et de TCE de composantes",
      file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(N*colVars(TCEarray[,1:(dim+1)]), file=FILE, ncolumns=dim+1,

```


Annexe B

PROGRAMMES S-PLUS, LE MODÈLE T DE STUDENT, LES ESTIMATEURS SANS BIAIS

D'abord le fichier « Parameters.ssc » contient les paramètres de simulation et les fonctions les plus communes. C'est le même fichier que dans le cas normal sauf que le paramètre NU de degré de liberté est ajouté et le calcul du quantile Sq est modifié.

```
#Degrés de liberté pour Student
NU_7

#Vecteur de la moyenne
MU_c(1,2,3)
#MU_c(1,2,3,4,5,6,7)

#nombre des dimensions
dim_length(MU)

#Matrice de covariance
SIGMA_matrix(c(
  1.0,0.2,-0.4,
  0.2,1.0,0.7,
  -0.4,0.7,1.0), nrow=dim)
#SIGMA_matrix(c(
# 1.0, 0.9, 0.4, 0.1, -0.7, -0.4, -0.2,
# 0.9, 1.0, 0.4, 0.3, -0.6, -0.4, -0.3,
# 0.4, 0.4, 1.0, 0.6, -0.5, -0.6, -0.2,
# 0.1, 0.3, 0.6, 1.0, -0.1, -0.2, 0.1,
```

```

#-0.7, -0.6, -0.5, -0.1, 1.0, 0.7, 0.3,
#-0.4, -0.4, -0.6, -0.2, 0.7, 1.0, 0.6,
#-0.2, -0.3, -0.2, 0.1, 0.3, 0.6, 1.0 ),      nrow=dim)

#Niveau de confiance
q_0.95
#Quantile
Sq_sum(MU)+qt(q,NU)*sqrt(sum(as.vector(SIGMA)))

#Nombre d'echantillons a generer
REP_2000
#Nombre d'echantillons BOOTSTRAP a generer
B_250
#Taille d'echantillons a generer
N_200

#"racine" d'une matrice symetrique
pdsroot<-function(Psi)
{
  dec.spectrale_eigen(Psi,symmetric=T)
  val.propre_dec.spectrale$values
  vec.propre_dec.spectrale$vectors
  return(vec.propre%*%diag(sqrt(val.propre)))
}

#Fonction calcule la variance asymptotique exacte ou plug-in
VarAsympt_function(MU,SIGMA,Sq,BETA,sigma1,sigma2)
{
  #Covariances entre k-eme composante et la somme
  SIGMAkS_rowSums(SIGMA)
  #Ecart type de la somme
  SIGMAS_sqrt(sum(SIGMAkS))
  #Moyenne de la somme
  MUS_sum(MU)

  #Constantes pour calculer les TCE's
  ZSq_(Sq-MUS)/SIGMAS
  Fbzval_Fbz(ZSq)
  Gbval_Gb(ZSq^2/2)
  LAMBDA_S_Gbval/(SIGMAS*Fbzval)
}

```

```

#Constantes pour calculer la variance asymptotique exacte
g1val_g1(ZSq^2/2)
aq_C1*g1val*(ZSq*Fbzval-Gbval)/Fbzval^2
bq_(C1*g1val*ZSq^2*Fbzval-Gbval*
      (C1*g1val*ZSq+Fbzval))/(2*SIGMAS^3*Fbzval^2)

#TCE's et variance asymptotique exacte
TCE_MUS+LAMBDA*SIGMAS^2    #TCE de la somme
TCEk_MU+LAMBDA*SIGMAkS    #Vecteur des composantes

VarAsyptTCE_BETA*(1+aq)^2*SIGMAS^2+(LAMBDA+bq*SIGMAS^2)^2
      *SIGMAS^4*(2*sigma1+sigma2)
VarAsyptTCEk_BETA*(diag(SIGMA)+aq*(SIGMAkS^2/SIGMAS^2)*
      (2+aq))+sigma1*(LAMBDA^2*(SIGMAS^2*diag(SIGMA)
      +SIGMAkS^2)+4*LAMBDA*bq*SIGMAS^2*SIGMAkS^2+2*
      bq^2*SIGMAkS^2*SIGMAS^4)+sigma2*SIGMAkS^2*
      (LAMBDA+bq*SIGMAS^2)^2
return(list(VarAsyptTCE=VarAsyptTCE,
           VarAsyptTCEk=VarAsyptTCEk))
}
#Fonction calcule les TCE
calculTCE<-function(PARAM,Sq)
{
  muS1_sum(PARAM$xbar)
  sigmaS1_rowSums(PARAM$sigmahat)
  sigmaS1_sqrt(sum(sigmaS1))
  zSq1_(Sq-muS1)/sigmaS1
  lambdaS1_Gb(zSq1^2/2)/(sigmaS1*Fbz(zSq1))
  return(c(muS1+lambdaS1*sigmaS1^2,
          PARAM$xbar+lambdaS1*sigmaS1))
}

```

Le fichier principal du programme qu'on exécute.

```

#Simulation de distribution t de Student
#estimateurs sans biais
#####PARAMETRES DE LA DISTRIBUTION t de Student#####
ALPHA_NU/(NU-2)    #Constante de la matrice de covariance
KAPPA_2/(NU-4)    #Kurtosis t de Student

```

```

#Constante de normalisation pour la distribution t de Student
C1_gamma((1+NU)/2)/(sqrt(pi*NU)*gamma(NU/2))
#Générateur de densité de loi t de Student
#g1_function(x){return((1+2*x/NU)^(-(1+NU)/2))}
#Distribution barre de valeur standardisée
Fbz_function(z){return(1-pt(z,NU))}
#Générateur cumulatif barre de loi t de Student
Gb_function(x,c1=C1){return(c1*NU/(NU-1)*(1+2*x/NU)^((1-NU)/2))}
#Fonction estime la moyenne et la matrice de covariance
#par l'estimateur sans biais
SansBiais<-function(X){ return(list(xbar=colMeans(X),
                                   sigmaHat=var(X)/ALPHA))}
#####
#Changer les paramètres dans ce fichier
source("Parameters.ssc")

dim1_4*(dim+1)

SIGMAroot_pdsroot(SIGMA)
#matrice des estimés, 1 colonne-TCE de la somme
#suite-TCE des composantes
#puis variances bootstrap non-paramétrique
#puis variances bootstrap paramétrique
#puis variances asymptotiques plug-in
estimTCE<-function(i,N,REP,MU,SIGMAroot,dim)
{
  print(c("N =",N, ", i =",i," de",REP),quote=F)
  #Simulation d'échantillon t de Student
  X_t(SIGMAroot%*%t(sqrt(NU/rchisq(N,NU))*
                    matrix(rnorm(N*dim),nrow=N))+MU)
  #Bootstrap non paramétrique
  BOOTnonpar_bootstrap(X, calculTCE(SansBiais(X),Sq),B=B,trace=F)
  #Estimation des la moyenne et de la matrice de covariance
  SB_SansBiais(X)
  #Bootstrap paramétrique
  BOOTpar_matrix(data=NA,ncol=dim+1,nrow=B)
  for(k in 1:B)
    {BOOTpar[k,]_
      calculTCE(SansBiais(t(pdsroot(SB$sigmaHat)%*%
                           t(sqrt(NU/rchisq(N,NU))*matrix(rnorm(N*dim),nrow=N))
                           +SB$xbar)),Sq)}
}

```

```

VarAsPlugin_VarAsympt(MU=SB$xbar , SIGMA=SB$sigmahat , Sq=Sq ,
                      BETA=ALPHA , sigma1=1+KAPPA , sigma2=KAPPA)
return(c(BOOTnonpar$observed , N*BOOTnonpar$estimate$SE^2 ,
        N*colVars(BOOTpar) , VarAsPlugin$VarAsyptTCE ,
        VarAsPlugin$VarAsyptTCEk))
}

#Accumuler les resultats des simulations en fichier "simulSB_Stud.txt"
FILE1_"simulSB_Stud.txt"
#Ecrire les parametres utilises et les resultats dans le fichier FILE
FILE_"resSB_Stud.txt"

#SIMULATION
For(i=1:REP , write(estimTCE(i , N , REP , MU , SIGMAroot , dim) , file=FILE1 ,
ncolumns=dim1 , append=T))
#FIN de SIMULATION

TCEarray_as.matrix(read.table(FILE1))

#variance asymptotique exacte
VarAsExacte_VarAsympt(MU=MU , SIGMA=SIGMA , Sq=Sq , BETA=ALPHA ,
sigma1=1+KAPPA , sigma2=KAPPA)

#####OUTPUT#####
write(date() , file=FILE , ncolumns=1 , append=T)
write(c(" Distribution t de Student  " , "DIM =" , dim , "NU =" , NU) ,
      file=FILE , ncolumns=5 , append=T)
write("Vecteur de moyenne" , file=FILE , ncolumns=1 , append=T)
write(MU , file=FILE , ncolumns=dim , append=T)
write("Matrice de covariance" , file=FILE , ncolumns=1 , append=T)
write(SIGMA , file=FILE , ncolumns=dim , append=T)
write("ESTIMATEUR: Simple estimateur sans biais" , file=FILE ,
      ncolumns=1 , append=T)
write(c("q =" , q , " Quantile Sq =" , Sq) , file=FILE , ncolumns=4 , append=T)
#####variance asymptotique du modele#####
write("Variance asymptotique de TCE et de TCE de composantes" ,
      file=FILE , ncolumns=1 , append=T)
write(c(VarAsExacte$VarAsyptTCE , VarAsExacte$VarAsyptTCEk) , file=FILE ,
      ncolumns=dim+1 , append=T)
#####

```

```

write(c("N =",N," B =",B), file=FILE, ncolumns=4, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write(" Variance estime
EXACTE de TCE et de TCE de composantes",
file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(N*colVars(TCEarray[,1:(dim+1)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write(" Esperance
estime de la variance bootstrap NON PARAMETRIQUE de TCE et de TCE
de composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[, (dim+2):(2*dim+2)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write(" Esperance
estime de la variance bootstrap PARAMETRIQUE de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[, (2*dim+3):(3*dim+3)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write(" Esperance
estime de la variance asymptotique PLUG-IN de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[, (3*dim+4):(4*dim+4)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("VARIANCE estime
de la variance asymptotique PLUG-IN de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colVars(TCEarray[, (3*dim+4):(4*dim+4)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("VARIANCE estime de la variance bootstrap PARAMETRIQUE de
TCE et de TCE de composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colVars(TCEarray[, (2*dim+3):(3*dim+3)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("VARIANCE estime de la variance bootstrap NON PARAMETRIQUE
de TCE et de TCE de composantes", file=FILE, ncolumns=1,
append=T) write(colVars(TCEarray[, (dim+2):(2*dim+2)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)

```

Annexe C

PROGRAMMES S-PLUS, LE MODÈLE T DE STUDENT, LES ESTIMATEURS DE VRAISEMBLANCE MAXIMALE

Le fichier « Parameters.ssc » est exactement le même que dans le cas du modèle t de Student avec les estimateurs sans biais (Annexe B). On ne le répète donc pas et passe au fichier principal qui a beaucoup de nouvelles fonctions.

```
#Simulation de distribution t de Student pour l'EVM
#####
#Fonction retourne les parametres beta,sigma1 et sigma2 pour
#calculer la variance asymptotique pour la distribution t de Student
EVMasymp<-function(dim,NU) #dim-dimensions, NU-degrees de liberte
{
  #constante de normalisation de loi t
  Cn_gamma((dim+NU)/2)/(gamma(NU/2)*(pi*NU)^(dim/2))
  #Fonction pour calculer E(su^2(s)) pour calculer beta de
  #loi t - c'est su^2(s)*densite
  f1<-function(s,dim,NU,Cn)
  {return(s*((NU+dim)/(NU+s))^2*pi^(dim/2)*
  s^(dim/2-1)*Cn*(1+s/NU)^(-(dim+NU)/2)/gamma(dim/2))}
  #Fonction pour calculer E((su(s))^2) pour calculer sigma1 de
  #loi t - c'est (su(s))^2*densite
  f2<-function(s,dim,NU,Cn)
  {return((s*(NU+dim)/(NU+s))^2*pi^(dim/2)*
  s^(dim/2-1)*Cn*(1+s/NU)^(-(dim+NU)/2)/gamma(dim/2))}
  beta_dim/integrate(f1, 0, Inf, dim=dim, NU=NU, Cn=Cn)$integral
```

```

sigma1_dim*(dim+2)/integrate(f2, 0, Inf, dim=dim, NU=NU, Cn=Cn)
      $integral
return(list(beta=beta, sigma1=sigma1))
}
##### PARAMETRES DE LA DISTRIBUTION t de Student#####
ALPHA_NU/(NU-2)#Constante de la matrice de covariance de t de Student
KAPPA_2/(NU-4)#Kurtosis t de Student
#Constante de normalisation pour la distribution t de Student
C1_gamma((1+NU)/2)/(sqrt(pi*NU)*gamma(NU/2))
#Generateur de densite de loi t de Student
g1_function(x){return((1+2*x/NU)^(-(1+NU)/2))}
#Distribution barre de valeur standardisee
Fbz_function(z){return(1-pt(z,NU))}
#Generateur cumulatif barre de loi t de Student
Gb_function(x,c1=C1){return(c1*NU/(NU-1)*(1+2*x/NU)^((1-NU)/2))}

#La fonction u(s) de l'algorithme de Kent et Tyler pour les modeles
#avec la distribution t
#La fonction u(s)=-2g'(s)/g(s)=(nu+p)/(nu+s) de la loi t(p,nu)
"Ut"<-function(s, p, nu){return((p+nu)/(nu+s))}

#La fonction "EVMelliptique" prend comme arguments la matrice observee
#x, la fonction u(s,nu1,nu2), nu1 et nu2 sont les parametres arbitraires
#et servent pour passer a la fonction Ut
"EVMelliptique"<-function(x,u,nu1=0,nu2=0)
{
  #nombre de dimensions
  p_ncol(x)

  #nombre d'observations
  N_nrow(x)

  erreur.rel_1
  iter_0
  mu0_rep(0,p)
  Sigma0_diag(p)

  while( erreur.rel > 10**-9 & iter < 200 )
  {
    iter_iter+1
    mu1_mu0

```



```

Sigma1_Sigma0
us_u(mahalanobis(x,mu1,Sigma1),p,nu2)
mu0_colMeans(x*us)/mean(us)
Xsweep_sweep(x,2,mu1)
Sigma0_t(Xsweep)%*%(Xsweep*us)/N
erreur.rel_max(abs(c(mu0-mu1,Sigma0-Sigma1))/
                abs(c(mu0,Sigma0)))
}
return(list(xbar=mu0,sigmahat=Sigma0))
}
#####
#Changer les parameters dans ce fichier
source("Parameters.ssc")

dim1_4*(dim+1)
#Calcul des parametres beta et sigma1 pour EVM de t de Student
R_EVMasymp(dim,NU)

SIGMAroot_pdsroot(SIGMA)
#matrice des estimates, 1 colonne-TCE de la somme
#suite-TCE des composantes
#puis variances bootstrap non-parametrique
#puis variances bootstrap parametrique
#puis variances asymptotiques plug-in
estimTCE<-function(i,N,REP,MU,SIGMAroot,dim)
{
  print(c("N =",N, ", i =",i," de ",REP),quote=F)

  #Simulation d'echantillon t de Student
  X_t(SIGMAroot%*%t(sqrt(NU/rchisq(N,NU))*
    matrix(rnorm(N*dim),nrow=N))+MU)

  #Bootstrap non parametrique
  BOOTnonpar_bootstrap(X,calculTCE(
    EVMelliptique(X,Ut,nu1=dim,nu2=NU),Sq),B=B,trace=F)
  #Estimation EVM de la moyenne et de la matrice de covariance
  EVM_EVMelliptique(X,Ut,nu1=dim,nu2=NU)
  #Bootstrap parametrique
  BOOTpar_matrix(data=NA,ncol=dim+1,nrow=B)
  for(k in 1:B)
  {BOOTpar[k,]_

```

```

calculTCE(EVMelliptique(t(pdsroot(EVM$sigmahat)%*%
t(sqrt(NU/rchisq(N,NU))*matrix(rnorm(N*dim),nrow=N))
+EVM$xbar),Ut,nu1=dim,nu2=NU),Sq)}

VarAsPlugin_VarAsympt(MU=EVM$xbar,SIGMA=EVM$sigmahat,Sq=Sq,
BETA=R$beta,sigma1=R$sigma1,sigma2=-2*R$sigma1*
(1-R$sigma1)/(2+dim*(1-R$sigma1)))
return(c(BOOTnonpar$observed,N*BOOTnonpar$estimate$SE^2,
N*colVars(BOOTpar),VarAsPlugin$VarAsyptTCE,
VarAsPlugin$VarAsyptTCEk)}

#Accumuler les resultats des simulations en fichier FILE1
FILE1_"simulEVM_Stud.txt"
#Ecrire les parametres utilises et les resultats dans le fichier FILE
FILE_"resEVM_Stud.txt"

#SIMULATION
For(i=1:REP,write(estimTCE(i,N,REP,MU,SIGMAroot,dim),file=FILE1,
ncolumns=dim1,append=T))
#FIN de SIMULATION

TCEarray_as.matrix(read.table(FILE1))

#variance asymptotique exacte
VarAsExacte_VarAsympt(MU=MU,SIGMA=SIGMA,Sq=Sq,BETA=ALPHA,
sigma1=1+KAPPA,sigma2=KAPPA)

#####OUTPUT#####
write(date(),file=FILE,ncolumns=1,append=T)
write(c("Distribution t de Student","DIM =",dim,"NU =",NU),
file=FILE,ncolumns=5,append=T)
write("Vecteur de moyenne",file=FILE,ncolumns=1,append=T)
write(MU,file=FILE,ncolumns=dim,append=T)
write("Matrice de covariance",file=FILE,ncolumns=1,append=T)
write(SIGMA,file=FILE,ncolumns=dim,append=T)
write("ESTIMATEUR: EVM",file=FILE,ncolumns=1,append=T)
write(c("q =",q,"Quantile Sq =",Sq),file=FILE,ncolumns=4,append=T)
#####variance asymptotique du modele#####
write("Variance asymptotique de TCE et de TCE de composantes",
file=FILE,ncolumns=1,append=T)
write(c(VarAsExacte$VarAsyptTCE,VarAsExacte$VarAsyptTCEk),

```

```

file=FILE, ncolumns=dim+1, append=T)
#####
write(c("N =",N," B =",B), file=FILE, ncolumns=4, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("Variance estime
EXACTE de TCE et de TCE de composantes",
file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(N*colVars(TCEarray[:,1:(dim+1)]), file=FILE, ncolumns=dim+1,
append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("Esperance
estime de la variance bootstrap NON PARAMETRIQUE de TCE et de TCE
de composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[:,(dim+2):(2*dim+2)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("Esperance
estime de la variance bootstrap PARAMETRIQUE de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[:,(2*dim+3):(3*dim+3)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("Esperance
estime de la variance asymptotique PLUG-IN de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colMeans(TCEarray[:,(3*dim+4):(4*dim+4)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("", file=FILE, ncolumns=1, append=T) write("VARIANCE estime
de la variance asymptotique PLUG-IN de TCE et de TCE de
composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colVars(TCEarray[:,(3*dim+4):(4*dim+4)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("VARIANCE estime de la variance bootstrap PARAMETRIQUE de
TCE et de TCE de composantes", file=FILE, ncolumns=1, append=T)
write(colVars(TCEarray[:,(2*dim+3):(3*dim+3)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)
write("VARIANCE estime de la variance bootstrap NON PARAMETRIQUE
de TCE et de TCE de composantes", file=FILE, ncolumns=1,
append=T) write(colVars(TCEarray[:,(dim+2):(2*dim+2)]), file=FILE,
ncolumns=dim+1, append=T)

```