

2m11.3442.3

Université de Montréal

États cohérents pour des systèmes quantiques admettant des
dégénérescences

par
Laurier Dello Sbarba

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Mai, 2006

© Laurier Dello Sbarba, 2006.



QC
3
054
2000
v. 34



AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**États cohérents pour des systèmes quantiques admettant des
dégénérescences**

présenté par:

Laurier Dello Sbarba

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard MacKenzie,	président-rapporteur
Véronique Hussin,	directrice de recherche
David London,	membre du jury

Mémoire accepté le:

19/04/04

À mes parents et grands-parents

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier ma directrice, Prof. Véronique Hussin, pour m'avoir guidé intelligemment durant ma maîtrise. J'ai grandement apprécié l'enthousiasme dont elle fait preuve pour l'enseignement et la recherche. Sa capacité d'analyser rapidement les problèmes qui surgissent lui permet de m'apporter une aide toujours pertinente.

Aussi, je voudrais exprimer ma gratitude envers ma famille et ma fiancée, Annie, pour m'avoir encouragé dans mes projets.

De plus, merci à certains membres de PICASSO, de physique théorique et de physique mathématique. Lors de mes conférences et de discussions enrichissantes, vos commentaires constructifs m'ont apporté de nouvelles idées qui ont fait progresser ma recherche.

Enfin, je tiens à souligner le soutien financier de Véronique Hussin ainsi que du département de physique.

RÉSUMÉ

Nous définissons les états cohérents généralisés et les états cohérents gaussiens pour des systèmes quantiques n'admettant aucune dégénérescence dans leur spectre d'énergie. Nous établissons ensuite une méthode générale qui permet de construire les deux types d'états cohérents dans le cas de systèmes quantiques admettant des dégénérescences. Nous appliquons cette nouvelle construction afin d'obtenir des états cohérents pour les cas particuliers d'une particule dans une boîte quantique en deux dimensions et du modèle de Jaynes-Cummings. Pour ce faire, nous étudions en détail le spectre d'énergie de ces deux modèles afin de prédire la présence exacte des dégénérescences. Nous vérifions ensuite nos résultats afin que les états cohérents, nouvellement construits, respectent bien les définitions et les propriétés fondamentales des états cohérents connus. Pour le modèle de Jaynes-Cummings, nous calculons des valeurs moyennes de certains opérateurs sur nos états cohérents. Enfin, nous expliquons clairement ce que ce travail apporte de nouveau dans la construction des états cohérents.

Mots-clés : Physique mathématique, mécanique quantique, états cohérents, opérateurs de création et d'annihilation, états propres, énergies, dégénérescences.

ABSTRACT

We define generalized coherent states and gaussian coherent states for quantum systems with no degeneracies in their energy spectrum. Then, we establish a general method that permits us to construct both types of coherent states in the case of quantum systems with degeneracies. We apply this new construction to obtain the coherent states for the particular cases of a particle in a quantum box in two dimensions and the Jaynes-Cummings model. To do that, we study in detail the energy spectrum of these two models to predict the exact presence of degeneracies. After, we verify our results to be sure that the newly constructed coherent states respect the definitions and the fundamental properties of the standard coherent states. For the Jaynes-Cummings model, we compute the mean value of various operators in our coherent states. Finally, we explain what has been learned about the construction of coherent states.

Keywords : Mathematical physics, quantum mechanics, coherent states, creation and annihilation operators, eigenstates, energies, degeneracies.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ANNEXES	xiv
INTRODUCTION	1
1 Définitions et propriétés des états cohérents	4
1.1 Théorie générale des états cohérents	5
1.1.1 Opérateurs de création et d'annihilation pour un système quantique arbitraire	5
1.1.2 Construction générale des états cohérents	7
1.2 Les états cohérents gaussiens	16
2 Dégénérescences et construction des états cohérents	24
2.1 Problèmes causés par les dégénérescences sur la construction des états cohérents	25
2.2 Généralisation des états cohérents à des systèmes ayant un spectre d'énergie dégénéré	27

3	Exemples d'applications des deux types d'états cohérents . . .	34
3.1	Construction d'états cohérents gaussiens pour une particule dans une boîte en une dimension	35
3.2	Construction d'états cohérents généralisés pour une particule dans une boîte en une dimension	38
3.3	Construction des états cohérents gaussiens pour une particule dans une boîte en deux dimensions	40
3.4	Construction des états cohérents généralisés pour une particule dans une boîte en deux dimensions	54
4	Étude du modèle de Jaynes-Cummings	55
4.1	Dérivation des énergies et états propres	56
4.2	Caractéristiques générales du spectre d'énergie	59
4.3	Caractéristiques et dégénérescences du spectre d'énergie pour le cas précis où $\epsilon = 0$	64
	4.3.1 Identification des dégénérescences pour λ donné	65
	4.3.2 Calcul du nombre de dégénérescences possibles	69
4.4	Résumé des résultats	84
5	Construction des états cohérents généralisés pour le modèle de Jaynes-Cummings	88
5.1	Le cas d'un décalage $\epsilon = 0$	89
	5.1.1 Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant	89
	5.1.2 Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant	91
5.2	Le cas d'un décalage $\epsilon \neq 0$	93
	5.2.1 Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant	93
	5.2.2 Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant	94
5.3	Valeurs moyennes d'opérateurs sur les états cohérents généralisés du modèle de Jaynes-Cummings pour $\epsilon = 0$	95
	5.3.1 Calcul de $\langle H^\pm(N^\pm) \rangle$ sur les états cohérents généralisés . . .	95

5.3.2	Calcul du nombre moyen de photons sur les états cohérents généralisés	96
6	Construction des états cohérents gaussiens pour le modèle de Jaynes-Cummings pour tout décalage ϵ	102
6.1	Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant	102
6.2	Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant . .	106
	CONCLUSION	111
	BIBLIOGRAPHIE	113

LISTE DES FIGURES

1.1	densité de probabilité en fonction de la position	18
1.2	densité de probabilité en fonction de la position	18
1.3	densité de probabilité en fonction de la position	19
1.4	densité de probabilité en fonction de la position	19
3.1	Quatre courbes de la densité de probabilité en fonction de la position x tracées, de la gauche vers la droite, au temps et au déphasage $(t = \phi_0 = 0)$, $(t = \phi_0 = \frac{\pi}{5n_0})$, $(t = \phi_0 = \frac{2\pi}{5n_0})$ et $(t = \phi_0 = \frac{\pi}{2n_0})$	37
3.2	Graphique de la densité de probabilité en fonction de la position x au temps $t = \frac{3 \cdot 10^6 \pi}{5n_0}$	38
3.3	Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 29$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 15$ et $\sigma = 3$	44
3.4	Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 29$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 15$ et $\sigma = 10$	45
3.5	Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 57$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 30$ et $\sigma = 5$	46
3.6	Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 57$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 30$ et $\sigma = 15$	47
3.7	Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 0.01s$	48
3.8	Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 1500s$	49
3.9	Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 0.01s$	53

3.10	Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 1000s$	53
4.1	Graphique de $g(x)$ pour $\lambda = 7$	65
4.2	Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 4$. Le minimum est atteint pour une valeur entière de n en $n_0 = \frac{4^2}{4} - 1 = 3$	66
4.3	Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ superposé au spectre d'énergie ϵ_n^- avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7}$. Dans ce cas, $\epsilon_0^- = \epsilon_6^+$	67
4.4	Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 2 + \sqrt{5} = \sqrt{3+1} + \sqrt{4+1}$	68
4.5	Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 5$. Dans ce cas, $\epsilon_0^+ = \epsilon_{15}^+$	69
4.6	Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ superposé au spectre d'énergie ϵ_{n+1}^- avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7} - 2 = \sqrt{6+1} - \sqrt{3+1}$. Dans ce cas, il y a donc une dégénérescence en $n = 3$ et $m = 6$, ce qui signifie que $\epsilon_4^- = \epsilon_6^+$	70
4.7	Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 3$: dégénérescences de type $\epsilon_n^+ = \epsilon_{n+1}^-$ pour $(m = 15, n = 0)$, $(m = 24, n = 3)$, $(m = 35, n = 8)$, $(m = 48, n = 15)$, $(m = 63, n = 24)$, $(m = 80, n = 35)$, etc...	71
4.8	Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 10$: dégénérescences de type $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ pour $(m = 35, n = 15)$, $(m = 48, n = 8)$, $(m = 63, n = 3)$, $(m = 80, n = 0)$	72
4.9	Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7}$: dégénérescences de type $\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^-$ pour $(m = 27, n = 6)$, $(m = 62, n = 27)$, $(m = 111, n = 62)$, $(m = 174, n = 111)$, $(m = 251, n = 174)$, etc...	76
4.10	Spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{72}$. On a en fait deux dégénérescences doubles situées en $(m = 49, n = 1)$, $(m = 31, n = 7)$	79
4.11	Énergie dégénérées pour $\epsilon = 0$, $\lambda = \sqrt{72}$: $\epsilon_{49}^+ = \epsilon_1^+$, $\epsilon_{31}^+ = \epsilon_7^+$	80
5.1	Calcul de $\langle N \rangle_+$ pour un cas où $\lambda = 2.4$ et un autre où $\lambda = \lambda_0 = 1 + \sqrt{2}$ en fonction de $ z $	98

5.2	Différence entre le $\langle N \rangle_+$ calculé avec $\lambda = 2.4$ et celui calculé avec $\lambda = \lambda_0$ en fonction de $ z $	99
5.3	Calcul de $\langle N \rangle_+$ pour un cas où $\lambda = 3.9$ et un autre où $\lambda = 4$ en fonction de $ z $	101
5.4	Différence entre le $\langle N \rangle_+$ calculé avec $\lambda = 3.9$ et celui calculé avec $\lambda = 4$ en fonction de $ z $	101
6.1	Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$	105
6.2	Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^-\}$	105
6.3	Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$	107
6.4	Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$	108
6.5	Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$	110

LISTE DES ANNEXES

I	Redéfinition des états propres pour une particule dans une boîte quantique en deux dimensions	115
---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Introduction

La construction des états cohérents pour un système quantique est un sujet relativement récent. Les premiers articles qui en traitent sont ceux de Klauder ^[1] et Glauber ^[2] dans les années soixante. Cependant, ce n'est qu'après la publication de deux livres ^[3,4] définissant les états cohérents et leurs applications en physique et en physique mathématique qu'il y a eu une véritable effervescence autour de ce sujet. Ces dernières années, plusieurs papiers ont été publiés sur la construction des états cohérents pour des systèmes quantiques généraux ou particuliers ^[5-14].

Les états cohérents sont généralement introduits à partir de deux définitions physiques et quatre propriétés mathématiques fondamentales. De tels états sont bien connus lorsque le spectre d'énergie du système est strictement croissant et n'admet aucune dégénérescence ^[3,4]. La tâche devient beaucoup plus difficile lorsque le spectre d'énergie étudié n'est pas strictement croissant et qu'il contient des dégénérescences. Ronald F. Fox et Mee Hyang Choi ^[9] se sont récemment penchés sur la construction des états cohérents dans le cas de systèmes admettant des dégénérescences dans leur spectre d'énergie. Plus précisément, ils ont construit des états cohérents gaussiens pour l'exemple d'une particule dans une boîte quantique en deux dimensions. Cependant, nous verrons que leurs états ne respectent pas une des propriétés mathématiques fondamentales des états cohérents. Nous corrigerons donc ce problème. Il reste aussi beaucoup de travail à faire pour généraliser cette méthode afin qu'elle soit applicable à tous les systèmes quantiques pouvant admettre des dégénérescences. Nous proposerons dans notre mémoire, une méthode générale qui permettra de construire des états cohérents pour tout système quan-

tique dont on connaît parfaitement le spectre d'énergie. Pour construire les états cohérents d'un système physique, il sera donc essentiel de bien analyser le spectre d'énergie du modèle étudié et ses dégénérescences.

L'étude du spectre d'énergie d'un modèle physique particulier est un sujet extrêmement riche qui fait intervenir plusieurs notions fondamentales en mécanique quantique et particulièrement en théorie des nombres. Ce domaine de recherche se justifie initialement par le fait qu'il est important de bien connaître le comportement des énergies d'un tel système physique. De plus, cette connaissance nous permet de construire des opérateurs de création et d'annihilation et, ultimement, des états cohérents pour des modèles précis. Nous nous intéresserons particulièrement à deux modèles physiques : la particule dans une boîte quantique en deux dimensions ^[9] et le modèle de Jaynes-Cummings ^[15]. Dans ce dernier cas, nous présenterons nos récents résultats qui en décrivent le spectre et prédisent quelles énergies seront dégénérées. Ces résultats ont mis les bases à la construction d'opérateurs de création et d'annihilation pour le modèle de Jaynes-Cummings ^[16]. Ensuite, nous appliquerons la méthode générale de construction des états cohérents, énoncée précédemment, à ces deux systèmes quantiques. Nous regarderons si notre construction préserve bien les propriétés et les définitions des états cohérents dans ces cas. Enfin, nous résumerons les nouveaux résultats apportés par ce travail.

Voici comment nous avons divisé ce travail.

Dans le premier chapitre, nous énonçons les définitions et les propriétés des états cohérents. Nous présentons en détails deux types d'états cohérents et sous quelles conditions on peut les construire. Nous exposons d'abord ce que sont les états cohérents généralisés. Nous définissons ensuite les états cohérents gaussiens.

Dans le chapitre 2, nous expliquons les problèmes qui se posent lorsque l'on veut construire des états cohérents pour des systèmes quantiques admettant des dégénérescences dans leur spectre d'énergie. Nous proposons ensuite une méthode générale qui permet de construire des états cohérents généralisés et gaussiens pour des systèmes qui peuvent admettre des dégénérescences. Nous vérifions finalement que cette nouvelle construction répond bien aux définitions et aux propriétés des

états cohérents.

Dans le chapitre 3, nous construisons les deux types d'états cohérents considérés au chapitre 2 pour le modèle physique d'une particule dans une boîte en une et deux dimensions. Nous regardons plus particulièrement le cas en deux dimensions puisqu'il admet des dégénérescences dans son spectre d'énergie. Nous étudions donc ce spectre d'énergie dans le but d'identifier les dégénérescences. Ensuite, nous construisons les états cohérents généralisés et gaussiens de ce modèle.

Dans le chapitre 4, nous nous attardons au modèle de Jaynes-Cummings. Nous prouvons des résultats qui prédisent le comportement du spectre d'énergie et nous donnons toutes les dégénérescences possibles.

Dans le chapitre 5, nous nous servons des résultats obtenus au chapitre 4 afin de construire les états cohérents généralisés pour le modèle de Jaynes-Cummings. Nous calculons ensuite quelques valeurs moyennes d'opérateurs dans ces états cohérents et regardons graphiquement leur comportement en termes de certains paramètres.

Dans le chapitre 6, nous nous servons des résultats obtenus au chapitre 4 et 5 afin de construire les états cohérents gaussiens pour le modèle de Jaynes-Cummings.

Finalement, nous résumons ce travail en insistant sur ce qu'il a apporté de nouveau et les questions que nous avons résolues.

Chapitre 1

Définitions et propriétés des états cohérents

L'étude des états cohérents pour un système quantique est un sujet riche, mais encore relativement récent. La construction originale de ces états cohérents a été faite pour l'oscillateur harmonique quantique [3]. Différentes généralisations des états cohérents applicables à plusieurs systèmes quantiques ont ensuite été travaillées [4,6,8,9]. On observe cependant que dans les différentes généralisations proposées, les définitions ne sont pas toujours équivalentes et diffèrent parfois des définitions originales. Cette situation s'explique par le fait que l'on doit adapter la construction des états cohérents à des systèmes quantiques fondamentalement différents. Dans la prochaine section, nous présentons une généralisation de ces états basée sur les travaux de Klauder, Skagerstam, Gazeau, Daoud et Hussin [3,5,8]. On vérifiera ensuite cette construction en regardant l'exemple typique de l'oscillateur harmonique quantique. Finalement, nous regarderons la construction des états cohérents gaussiens (section 1.2).

1.1 Théorie générale des états cohérents

La construction générale des états cohérents proposée ici est basée sur quelques hypothèses de départ. Elle repose principalement sur une généralisation des états cohérents de l'oscillateur harmonique quantique. Il faut cependant mentionner que les hypothèses de départ ne sont évidemment pas toutes respectées dans tous les systèmes quantiques. Dans les prochains chapitres, nous étudierons la construction d'états cohérents pour des cas où, précisément, certaines hypothèses de départ ne sont pas respectées.

1.1.1 Opérateurs de création et d'annihilation pour un système quantique arbitraire

On débute avec des considérations générales sur la construction d'opérateurs de création et d'annihilation à partir d'un Hamiltonien H donné. Cet Hamiltonien doit admettre un spectre d'énergie discret, infini et sans dégénérescence. Ce spectre est noté $\{E_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Il est tel que l'énergie fondamentale $E_0 = 0$ et les suivantes sont en ordre croissant, i.e.

$$E_0 = 0 < E_1 < E_2 < \dots < E_{n-1} < E_n < \dots \quad (1.1)$$

Les états propres correspondant à ces énergies sont désignés par $|\psi_n\rangle$, pour $n = 0, 1, 2, \dots$. On suppose qu'ils sont orthogonaux et complets :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I, \quad (1.2)$$

où I est l'opérateur identité. On a donc

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad \forall n. \quad (1.3)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation a^+ et a^- peuvent alors être définis

par leur action sur les états propres comme

$$a^+|\psi_n\rangle = (E_{n+1})^{1/2}e^{-i(E_{n+1}-E_n)\alpha}|\psi_{n+1}\rangle, \quad (1.4)$$

$$a^-|\psi_n\rangle = (E_n)^{1/2}e^{i(E_n-E_{n-1})\alpha}|\psi_{n-1}\rangle. \quad (1.5)$$

Le facteur exponentiel qui apparaît dans ces expressions produit seulement un facteur de phase, car $\alpha \in R$, et jouera un rôle important dans la stabilité temporelle des états cohérents (une propriété que l'on étudiera un peu plus loin). Un état propre arbitraire $|\psi_n\rangle$ peut être construit à partir de l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ de H qui satisfait à $a^-|\psi_0\rangle = 0$. On obtient alors

$$|\psi_n\rangle = (E(n))^{-1/2}e^{iE_n\alpha}(a^+)^n|\psi_0\rangle, \quad n > 0, \quad (1.6)$$

où l'on a défini

$$E(n) = E_1E_2 \dots E_n. \quad (1.7)$$

L'opérateur diagonal N doit obéir à la relation suivante :

$$N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle. \quad (1.8)$$

Il découle des relations (1.4) et (1.5) que l'hamiltonien H est un opérateur diagonal qui peut s'écrire en termes de a^+ et a^- comme

$$H = H(N) = a^+a^-. \quad (1.9)$$

On définit explicitement les opérateurs N , $H(N)$, $H(N+1)$, $H(N-1)$, a^+ et a^- comme

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (1.10)$$

$$H(N) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (1.11)$$

$$H(N+1) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n+1} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.12)$$

$$H(N-1) = \sum_{n=2}^{\infty} E_{n-1} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.13)$$

$$a^+ = \sqrt{H(N)} e^{-i(H(N)-H(N-1))\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_{n+1}\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.14)$$

$$a^- = \sqrt{H(N+1)} e^{i(H(N+1)-H(N))\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_{n+1}|. \quad (1.15)$$

Notons aussi que l'ensemble des opérateurs $\{a^+, a^-, N\}$ satisfait aux relations de commutation

$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, a^-] = -a^-, \quad (1.16)$$

$$[a^-, a^+] = H(N+1) - H(N). \quad (1.17)$$

Dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique, l'Hamiltonien est linéaire en N et on retrouve les opérateurs a^+ et a^- habituels. Dans ce cas toujours, l'ensemble $\{a^+, a^-, N\}$ forme une algèbre de Heisenberg. Aussi, sous certaines conditions ^[8,14], l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings satisfait aux conditions (1.1) et la procédure décrite s'applique aussi. Nous étudierons en détail ce dernier cas dans le chapitre 4.

1.1.2 Construction générale des états cohérents

Nous allons construire ici des états cohérents pour un système arbitraire quantique tel que décrit dans la sous-section précédente. Cette section reprend les résultats de l'article de Hussin et Daoud ^[8]. Ces états seront notés $|z, \alpha\rangle$, $z \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{R}$ (où α est le paramètre qui apparaît dans les équations (1.4) et (1.5)). Nous demandons qu'ils satisfassent à deux définitions physiques qui sont en fait équivalentes ^[3] dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique.

Définition 1 : Les états cohérents sont des états propres de l'opérateur d'annihilation a^- .

Définition 2 : Les états cohérents minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. De façon générale, ce sont des états qui minimisent l'incertitude à la fois sur X et P , où $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a^-)$ et $P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a^-)$. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, X représente la position et P l'impulsion. Pour cette raison, dans ce système, les états cohérents sont aussi appelés états quasi-classiques [22].

Il existe cependant d'autres constructions qui ne respectent que partiellement ces définitions physiques [6,9]. Dans ces cas, les deux définitions physiques ne sont plus équivalentes. Par exemple, nous verrons que les états cohérents gaussiens ne sont pas des états propres de l'opérateur d'annihilation. Ce sont des états qui engendrent une bonne localisation de la particule dans le système quantique étudié [9-11]. Il y a un point commun à toutes les définitions d'états cohérents. Ils doivent respecter quatre propriétés mathématiques fondamentales.

Propriété 1 : Les états cohérents doivent être continus en $z \in C$, $\alpha \in R$.

Propriété 2 : Ils doivent vérifier la stabilité temporelle ce qui signifie que l'action de l'opérateur évolution implique un simple changement de paramètre ($e^{-iHt}|z, \alpha\rangle = |z, \alpha + t\rangle$).

Propriété 3 : Ils doivent vérifier la résolution de l'opérateur identité ce qui entraîne que les états sont complets.

Propriété 4 : Les états cohérents doivent être de norme 1.

Ces quatre propriétés sont incontournables lorsque l'on veut construire des états cohérents pour un système quantique donné.

Nous allons donc construire des états cohérents généralisés qui vérifieront les deux définitions physiques et les quatre propriétés mathématiques énumérées plus haut. Rappelons que le système quantique considéré satisfait aux hypothèses de la sous-section (1.1.1).

Nous débutons en exigeant que nos états cohérents soient des états propres de l'opérateur d'annihilation a^- . Pour un système quantique gouverné par l'Hamiltonien

nien $H = (1.9)$, ces états doivent donc vérifier

$$a^-|z, \alpha\rangle = z|z, \alpha\rangle. \quad (1.18)$$

Comme les $\{|\psi_n\rangle = (1.6)\}$ forment un ensemble complet orthogonal, on peut exprimer $|z, \alpha\rangle$ dans cette base comme

$$|z, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |\psi_n\rangle. \quad (1.19)$$

En insérant cette expression dans l'équation (1.18) et en utilisant l'équation (1.5), on trouve la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \frac{z}{(E_{n+1})^{1/2}} e^{-i(E_{n+1}-E_n)\alpha} C_n,$$

qu'il est aisé de résoudre :

$$C_n = \frac{z^n}{(E(n))^{1/2}} e^{-iE_n\alpha} C_0, \quad n > 0 \quad (1.20)$$

où $E(n) = (1.7)$. Notons que, par convention, on pose $E(0) = 1$. En insérant l'équation (1.20) dans (1.19), on obtient une expression de nos états cohérents :

$$|z, \alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-iE_n\alpha}}{(E(n))^{1/2}} |\psi_n\rangle. \quad (1.21)$$

On peut fixer la constante C_0 en imposant la normalisation de nos états cohérents (propriété 4). On doit avoir

$$\langle z, \alpha | z, \alpha \rangle = 1 \quad (1.22)$$

et donc

$$|C_0| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} \right)^{-1/2}. \quad (1.23)$$

Montrons maintenant que la deuxième définition des états cohérents est respectée. Ce sont des états qui doivent minimiser une certaine relation d'incertitude.

Rappelons que la valeur moyenne et la dispersion d'un certain opérateur Z sur les états cohérents $|z, \alpha\rangle$ sont respectivement données par

$$\langle Z \rangle = \langle z, \alpha | Z | z, \alpha \rangle, \quad \Delta Z = \sqrt{\langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2}. \quad (1.24)$$

On construit ensuite deux opérateurs Hermitiens

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a^-), \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a^-), \quad (1.25)$$

qui satisfont, dû à l'équation (1.17), à la relation de commutation

$$[X, P] = i(H(N+1) - H(N)). \quad (1.26)$$

Nous allons vérifier que nos états cohérents, étant des états propres de l'opérateur a^- , minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg ^[23]

$$(\Delta X)^2(\Delta P)^2 \geq \frac{1}{4} \langle i[X, P] \rangle^2. \quad (1.27)$$

Pour ce faire, trouvons ce que vaut explicitement $\frac{1}{4} \langle i[X, P] \rangle^2$ et comparons-le avec $(\Delta X)^2(\Delta P)^2$. On a

$$\frac{1}{4} \langle i[X, P] \rangle^2 = \frac{1}{4} (\langle z, \alpha | a^- a^+ - a^+ a^- | z, \alpha \rangle)^2 = \frac{1}{4} \left[\left(|C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} E_{n+1} \right) - |z|^2 \right]^2. \quad (1.28)$$

On doit aussi calculer explicitement $\langle X \rangle^2$, $\langle X^2 \rangle$, $\langle P \rangle^2$ et $\langle P^2 \rangle$. On obtient

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle z, \alpha | a^+ + a^- | z, \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z} + z) \\ \Rightarrow \langle X \rangle^2 &= \frac{1}{2} (\bar{z}^2 + 2|z|^2 + z^2), \\ \langle X^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle z, \alpha | a^+ a^+ + a^+ a^- + a^- a^+ + a^- a^- | z, \alpha \rangle = \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{2} \left(\bar{z}^2 + z^2 + |z|^2 + |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} E_{n+1} \right) \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle z, \alpha | a^+ - a^- | z, \alpha \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{z} - z) \\ \Rightarrow \langle P \rangle^2 &= -\frac{1}{2} (\bar{z}^2 - 2|z|^2 + z^2), \end{aligned} \quad (1.31)$$

et finalement

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle z, \alpha | -a^+ a^+ + a^+ a^- + a^- a^+ - a^- a^- | z, \alpha \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\bar{z}^2 - z^2 + |z|^2 + |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} E_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

En réunissant les équations (1.29), (1.30), (1.31) et (1.32), on trouve

$$(\Delta X)^2 = (\Delta P)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(|C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} E_{n+1} \right) - |z|^2 \right]. \quad (1.33)$$

On peut maintenant comparer les équations (1.33) et (1.28). On en déduit facilement que $(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = \frac{1}{4} \langle i[X, P] \rangle^2$. Nos états cohérents minimisent donc la relation d'incertitude (1.27).

Il reste à montrer que nos états cohérents vérifient bien les trois premières propriétés. D'abord, on peut facilement se convaincre que l'état $|z, \alpha\rangle$ est continu en z et en α .

Regardons ensuite la propriété 2. C'est précisément la présence du facteur de phase dans les définitions (1.4) et (1.5) qui mène à la stabilité temporelle de nos états cohérents. En effet, on a

$$e^{-itH} |z, \alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-iE_n(\alpha-t)}}{(E(n))^{1/2}} |\psi_n\rangle = |z, \alpha + t\rangle. \quad (1.34)$$

On doit maintenant s'assurer que nos états cohérents vérifient la résolution de

l'opérateur identité. Montrons que

$$\int d\mu(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha |z, \alpha\rangle W(\alpha) \langle z, \alpha| = I = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.35)$$

où le normalisateur $W(\alpha)$ et la mesure $d\mu(z)$ doivent être déterminés. Notons que l'intégrale dans les complexes doit se faire à l'intérieur du disque $\{z \in C: |z| < R\}$, où R est le rayon de convergence de la série correspondant à

$$|C_0|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} \implies R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E(n)}. \quad (1.36)$$

À l'extérieur de ce disque, la sommation diverge de même que l'intégrale. On a

$$\begin{aligned} & \int d\mu(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha |z, \alpha\rangle W(\alpha) \langle z, \alpha| = \\ & \sum_{n, n'=0}^{\infty} \int \frac{d\mu(z) |C_0|^2 z^{n'} \bar{z}^n}{(E(n))^{\frac{1}{2}} (E(n'))^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha) e^{iE_n \alpha} e^{-iE_{n'} \alpha} d\alpha |\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n|. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Remarquons que de choisir $W(\alpha)$ constant fait diverger l'intégrale lorsque $n = m$. De plus, on aimerait obtenir 0 lorsque $n \neq m$ afin de poursuivre le calcul. On choisit donc de poser le normalisateur $W(\alpha)$ de telle sorte que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha) e^{-iE_{n'} \alpha} e^{iE_n \alpha} d\alpha = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i(E_n - E_{n'}) \alpha} d\alpha = \delta_{nn'}. \quad (1.38)$$

Soulignons ici que l'équation (1.38) serait fautive dans un cas où le spectre d'énergie du système quantique admet des dégénérescences. L'équation (1.37) s'écrit maintenant comme

$$\int d\mu(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha |z, \alpha\rangle W(\alpha) \langle z, \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d\mu(z) |C_0|^2 |z|^{2n}}{E(n)} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (1.39)$$

Si on suppose que $d\mu(z)$ dépend uniquement de $|z|$, on peut poser $z = r e^{i\varphi}$, $|C_0|^2 =$

$h(r^2)$ et écrire

$$\int \frac{d\mu(z)|C_0|^2|z|^{2n}}{E(n)} = \frac{1}{E(n)} \int_0^{2\pi} \int_0^R h(r^2)r^{2n}rdrd\rho = \frac{\pi}{E(n)} \int_0^{R^2} h(u)u^n du \quad (1.40)$$

pour $u = r^2$. On peut faire entrer π dans la fonction $h(u)$ et la résolution de l'opérateur identité devient donc équivalente à trouver une fonction $h(u)$ qui satisfait

$$\int_0^{R^2} h(u)u^n du = E(n). \quad (1.41)$$

Lorsque $R \rightarrow \infty$, $h(u)$ est la transformée inverse de Mellin de $E(n)$. On doit donc trouver la fonction $h(u)$ donnée par

$$h(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(s)u^{-(s+1)} ds, \quad c \in R, \quad (1.42)$$

où la fonction $E(s)$ correspond à la prolongation analytique de

$$E(n) = E_n E_{n-1} \dots E_1.$$

Notons que ce calcul requiert une connaissance explicite du spectre d'énergie du système quantique étudié. De plus, la recherche d'une telle fonction se complique rapidement lorsque $E(n)$ s'éloigne du $n!$ de l'oscillateur harmonique quantique. En particulier, les résultats ont été trouvés récemment pour un cas précis de l'atome d'hydrogène ^[18], pour le modèle de Jaynes-Cummings ^[8] ainsi que pour d'autres systèmes quantiques ^[7, 19, 20].

Une conséquence directe de la résolution de l'opérateur identité est que nos états cohérents sont complets. Pour s'assurer de la complétude de ceux-ci, nous devons montrer la relation suivante ^[9] :

$$\frac{(E(n))^{\frac{1}{2}}}{C_0 z^n} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha e^{iE_n \alpha} |z, \alpha\rangle = |\psi_n\rangle, \quad (1.43)$$

pour tout $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. La partie gauche de l'équation (1.43) nous donne

$$\begin{aligned}
& \frac{(E(n))^{\frac{1}{2}}}{z^n} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha e^{iE_n \alpha} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{z^{n'} e^{-iE_{n'} \alpha}}{(E(n'))^{\frac{1}{2}}} |\psi_{n'}\rangle \\
&= \frac{(E(n))^{\frac{1}{2}}}{z^n} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{z^{n'}}{(E(n'))^{\frac{1}{2}}} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha e^{i(E_n - E_{n'}) \alpha} |\psi_{n'}\rangle \\
&= \frac{(E(n))^{\frac{1}{2}}}{z^n} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{z^{n'}}{(E(n'))^{\frac{1}{2}}} \delta_{nn'} |\psi_{n'}\rangle = |\psi_n\rangle, \tag{1.44}
\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (1.38), ce qui assure la complétude de nos états cohérents.

Pour terminer, rappelons ce que donne cette construction dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique. On peut simplement décaler le spectre d'énergie de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ de telle sorte que l'énergie fondamentale soit 0 et

$$H_0 = H(N_0) = a_0^{\dagger} a_0^{-} = N_0. \tag{1.45}$$

Les états propres de l'Hamiltonien génèrent l'espace de Fock

$$\mathcal{F}_b = \{|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots\} \tag{1.46}$$

et l'opérateur nombre est N_0 où

$$N_0 |n\rangle = n |n\rangle. \tag{1.47}$$

En utilisant les équations (1.4) et (1.5), on peut définir les relations pour a_0^{\dagger} et a_0^{-} soit

$$a_0^{\dagger} |n\rangle = \sqrt{n+1} e^{-i\alpha} |n+1\rangle, \quad a_0^{-} |n\rangle = \sqrt{n} e^{i\alpha} |n-1\rangle. \tag{1.48}$$

Notons que si l'on pose $\alpha = 0$, on retrouve les définitions habituelles de a_0^{\dagger} et a_0^{-} pour l'oscillateur harmonique.

Les équations (1.21) et (1.23) nous permettent donc d'écrire les états cohérents

comme

$$|z, \alpha\rangle_{oh} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-in\alpha}}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (1.49)$$

Nous avons montré de façon générale que les quatre propriétés mathématiques sont respectées. Ici, on peut simplement préciser quelle est la mesure $h(u)$ dans la résolution de l'opérateur identité. On doit d'abord trouver le rayon de convergence R de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)}.$$

On obtient

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

Par ailleurs, l'équation (1.41) s'écrit

$$\int_0^{\infty} h(u) u^n du = n! = \Gamma(n+1),$$

ce qui donne

$$h(u) = e^{-u}.$$

Nous venons de présenter une construction générale des états cohérents. Rappelons que cette démarche est applicable à des systèmes quantiques admettant un spectre d'énergie discret, positif, strictement croissant et tel que l'on puisse définir des opérateurs de création et d'annihilation. En pratique, plusieurs systèmes quantiques admettent des dégénérescences dans leur spectre d'énergie. Aussi, il n'est pas toujours évident de définir clairement des opérateurs a^- et a^+ pour des systèmes comme le modèle de Jaynes Cummings, par exemple ^[16]. Dans les prochains chapitres, nous étudierons précisément des cas où les hypothèses de départ de la sous-section (1.1.1) ne sont pas nécessairement respectées.

1.2 Les états cohérents gaussiens

Nous venons de présenter une généralisation des états cohérents de l'oscillateur harmonique proposée par Hussin et Daoud. Cette construction a l'avantage de respecter les quatre propriétés mathématiques fondamentales, mais aussi, les deux définitions physiques équivalentes des états cohérents.

Il existe une autre généralisation qui a été introduite par Fox ^[11] et que nous allons donner dans cette section. On les appelle des états cohérents gaussiens généralisés. Nous verrons que ce ne sont plus des états propres de l'opérateur d'annihilation, mais nous montrerons dans le chapitre 3 qu'ils se comportent presque comme des états classiques.

Ces états cohérents gaussiens ont été construits à partir d'une approximation des états cohérents de l'oscillateur harmonique quantique qui a ensuite été généralisée à d'autres systèmes quantiques. Regardons l'origine de cette construction. À partir de l'équation (1.49), on trouve que la probabilité d'être dans l'état $|k\rangle$ des états cohérents est

$$|\langle k|z, \alpha\rangle|^2 = \frac{x^k e^{-x}}{k!}, \text{ où } x \equiv |z|^2. \quad (1.50)$$

Il s'agit d'une distribution de Poisson de paramètre x . En utilisant l'équation (1.24), la valeur moyenne de l'opérateur N et le carré de sa dispersion sont les mêmes car on écrit

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n e^{-x} x^n}{n!} = x \quad (1.51)$$

et

$$(\Delta N)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^{-x} x^n}{n!} - x^2 = x. \quad (1.52)$$

Notons que si nous avons un spectre d'énergie différent de l'oscillateur harmonique, nous n'aurions pas une distribution de Poisson. Les valeurs de $\langle N \rangle$ et $(\Delta N)^2$ seraient alors différentes. C'est ce que nous constaterons dans les équations (1.61) et (1.62). Pour des valeurs de x assez grandes, on peut utiliser le théorème central limite ^[24] afin d'approximer la probabilité d'obtenir $y_1 < k < y_2$ en agissant avec

N sur les $|z, \alpha\rangle_{oh}$. On obtient l'intégrale d'une fonction gaussienne continue soit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\Delta N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \langle N \rangle}{\Delta N} \right)^2} dy, \quad (1.53)$$

avec la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \langle N \rangle}{\Delta N} \right)^2} dy = \Delta N \sqrt{2\pi}. \quad (1.54)$$

On cherche cependant à faire une approximation de la probabilité d'être dans l'état $|k\rangle$, ou si l'on veut, la probabilité de mesurer k en agissant avec N . On peut écrire

$$|\langle k | z, \alpha \rangle|^2 \approx \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \langle N \rangle}{\Delta N} \right)^2} dy \quad (1.55)$$

$$\approx 1 \times \frac{1}{\Delta N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - \langle N \rangle}{\Delta N} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k - x}{\sqrt{x}} \right)^2}. \quad (1.56)$$

On remplace x par $|z|^2$ et on obtient finalement une approximation des états (1.49) comme

$$|z, \alpha\rangle_{oh} \approx \frac{1}{\sqrt{N(|z|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n-|z|^2)^2}{4|z|^2}} e^{-in\alpha} |n\rangle, \quad (1.57)$$

où la constante de normalisation s'écrit maintenant comme

$$N(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n-|z|^2)^2}{2|z|^2}}. \quad (1.58)$$

Vérifions graphiquement que toutes ces approximations sont bien valables. On peut trouver la densité de probabilité ($|\psi(x)|^2$) d'observer la particule, dans les états cohérents, en fonction de la position. De l'équation (1.49), celle-ci s'écrit, pour les états cohérents généralisés, comme

$$\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 = e^{-|z|^2} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-in\alpha}}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n (n!)}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{Hermite}[n, x] \right) \\
& \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m e^{im\alpha}}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^m (m!)}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{Hermite}[m, x] \right), \quad (1.59)
\end{aligned}$$

où l'on a exprimé les $|n\rangle$ en termes des fonctions mathématiques correspondantes. Les figures 1.1 et 1.2 montrent cette densité de probabilité en fonction de la position x de l'oscillateur harmonique pour $\alpha = 2$ et $z = 5$. La figure 1.2 montre un agrandissement de 10^{10} fois l'axe de $|\psi(x)|^2$.

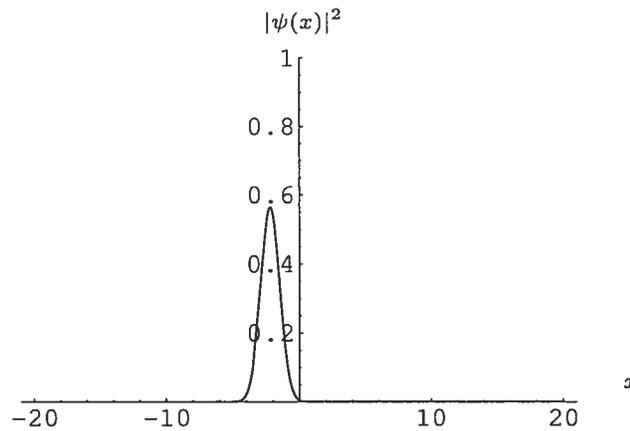


FIG. 1.1 – densité de probabilité en fonction de la position

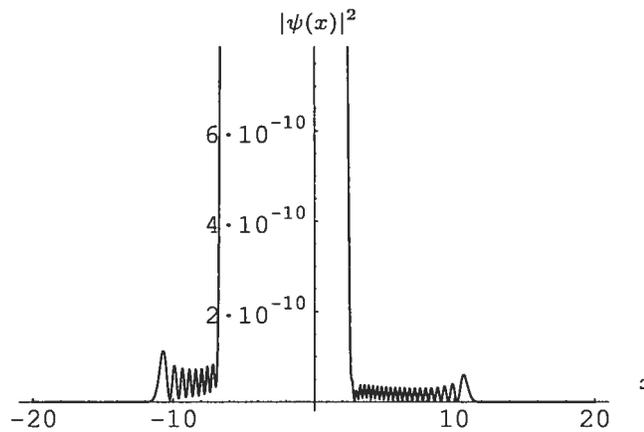


FIG. 1.2 – densité de probabilité en fonction de la position

Si l'on calcule maintenant les états cohérents gaussiens correspondant à $z = 5$, $\alpha = 2$ et que l'on trace $|\psi(x)|^2$, on obtient les figures 1.3 et 1.4. Encore une fois, la deuxième figure montre un agrandissement de 10^{10} fois l'axe de $|\psi(x)|^2$.

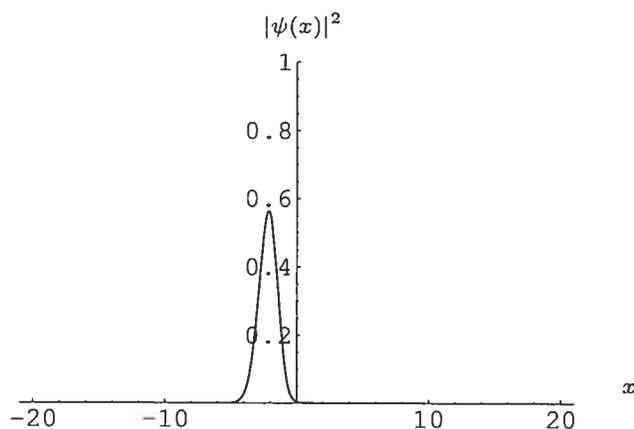


FIG. 1.3 – densité de probabilité en fonction de la position

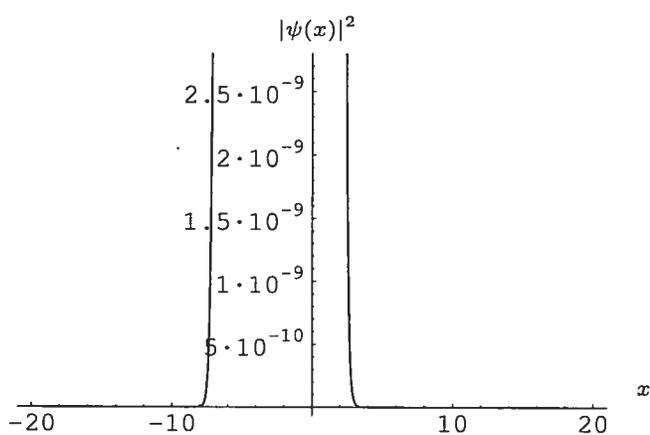


FIG. 1.4 – densité de probabilité en fonction de la position

On voit donc que l'approximation gaussienne des états cohérents généralisés est excellente pour l'oscillateur harmonique. En fait, il faut agrandir 10^{10} fois l'axe de $|\psi(x)|^2$ si l'on veut percevoir une différence à l'oeil. Il faut cependant remarquer que cette approximation gaussienne n'est plus vraie dans le cas où z est un nombre complexe puisque $\langle N \rangle$ et ΔN dépendent uniquement de $|z|$.

Fox a généralisé l'équation (1.57) afin qu'elle soit applicable à d'autres systèmes quantiques. À partir de l'équation (1.21), on trouve que la probabilité d'être dans l'état $|\psi_k\rangle$ des états cohérents est

$$|\langle\psi_k|z, \alpha\rangle|^2 = \frac{|C_0|^2 |z|^{2k}}{E(k)}. \quad (1.60)$$

La valeur moyenne de l'opérateur N et le carré de sa dispersion sont maintenant donnés par

$$\langle N \rangle = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n|z|^{2n}}{E(n)} \quad (1.61)$$

et

$$(\Delta N)^2 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2|z|^{2n}}{E(n)} - |C_0|^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n|z|^{2n}}{E(n)} \right)^2. \quad (1.62)$$

Nous allons encore une fois utiliser le théorème central limite afin d'approximer la probabilité d'obtenir $y_1 < k < y_2$ en agissant avec N sur les états $|z, \alpha\rangle$. Une démarche identique à celle présentée précédemment nous donne une approximation des états (1.21) comme

$$|z, \alpha\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{N(\langle N \rangle)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n-\langle N \rangle)^2}{4(\Delta N)^2}} e^{-iE_n \alpha} |n\rangle, \quad (1.63)$$

où la constante de normalisation s'écrit maintenant comme

$$N(\langle N \rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n-\langle N \rangle)^2}{2(\Delta N)^2}}. \quad (1.64)$$

Comme pour l'oscillateur harmonique, cette approximation n'est valide que si z est réel. Le calcul de $\langle N \rangle$ et ΔN , donné par les équations (1.61) et (1.62), est cependant difficile à effectuer lorsque le spectre d'énergie n'est plus proportionnel au n de l'oscillateur harmonique. Pour cette raison, il est utile de regarder individuellement les états cohérents gaussiens sans passer par une approximation des états cohérents généralisés. On peut réécrire les équations (1.63) et (1.64) en utilisant la notation utilisée par Fox ^[9-11]. Supposons un Hamiltonien H donné, admettant des états

propres et énergies qui satisfont les équation (1.3) et (1.1). Les états cohérents gaussiens sont alors définis par

$$|G, n_0, \phi_0, \sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{N(n_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-iE_n \phi_0} |\psi_n\rangle \text{ où } \{n_0, \phi_0\} \in R, \quad (1.65)$$

et

$$N(n_0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]}, \quad (1.66)$$

ce qui garantit la normalisation :

$$\langle G, n_0, \phi_0, \sigma | G, n_0, \phi_0, \sigma \rangle = 1. \quad (1.67)$$

Notons que si on compare cette dernière équation avec les équations (1.63) et (1.64), on remarque que $\langle N \rangle = n_0$ et $\Delta N = \sigma$. Ces nouveaux paramètres devront être ajustés pour chaque système quantique afin que ces états respectent leur définition physique. Nous testerons donc plusieurs valeurs de σ et n_0 pour trouver une combinaison où la particule est bien localisée dans le système quantique étudié.

Assurons-nous maintenant que les états cohérents gaussiens vérifient bien les quatre propriétés mathématiques fondamentales. L'équation (1.66) assure que ces états sont normés à l'unité. La stabilité temporelle est évidente en regardant la définition (1.65). Vérifions maintenant la continuité en n_0 . Posons $n'_0 \in R$ tel que

$$|n_0 - n'_0| \longrightarrow 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle G, n_0, \phi_0, \sigma | G, n'_0, \phi_0, \sigma \rangle &\longrightarrow 1, \\ \langle G, n'_0, \phi_0, \sigma | G, n_0, \phi_0, \sigma \rangle &\longrightarrow 1, \\ \implies ||G, n_0, \phi_0, \sigma\rangle - |G, n'_0, \phi_0, \sigma\rangle| &\longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.68)$$

ce qui garantit la continuité de nos états en n_0 . La continuité en ϕ_0 se démontre de la même façon.

Il nous reste donc à vérifier que les états cohérents gaussiens satisfont à la résolution de l'opérateur identité. On doit montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 K(n_0) |G, n_0, \phi_0, \sigma\rangle \langle G, n_0, \phi_0, \sigma| = \mathbf{1}, \quad (1.69)$$

où le normalisateur $K(n_0)$ doit être déterminé. La première partie de l'équation (1.69) donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 K(n_0) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{iE_n \phi_0}}{\sqrt{N(n_0)}} \frac{e^{[-\frac{(n'-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-iE_{n'} \phi_0}}{\sqrt{N(n_0)}} |\psi_n\rangle \langle \psi_{n'}|. \quad (1.70)$$

Comme il n'y a aucune dégénérescence du spectre d'énergie, on a

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i(E_{n'} - E_n)\Phi_0} = \delta_{nn'}. \quad (1.71)$$

L'équation (1.70) peut donc s'écrire comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 K(n_0) \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|}{N(n_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \mathbf{1} \quad (1.72)$$

$$\iff K(n_0) = \frac{N(n_0)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (1.73)$$

Comme précédemment, une conséquence directe de la résolution de l'opérateur identité est que les états cohérents gaussiens sont complets.

Les états cohérents gaussiens n'ont pas été construits dans le but de satisfaire à la première définition physique des états cohérents. En effet, ils ne sont pas des états propres de l'opérateur a^- .

Cependant, il a été démontré ^[9, 10] que le fait de préparer un système quantique dans les états cohérents gaussiens augmentent grandement la localisation d'une particule dans ce système. Pour cette raison, on dit que ce sont des états quasi-classiques. Même s'ils ne minimisent pas une relation d'incertitude, ils possèdent donc une propriété analogue à la deuxième définition physique des états cohérents

généralisés. Nous regarderons en détail cette affirmation dans le chapitre 3.

En résumé, nous avons introduit deux généralisations possibles des états cohérents. Les premiers dits, états cohérents généralisés, respectent en tous points les deux définitions physiques et les quatre propriétés fondamentales mathématiques originales des états cohérents de l'oscillateur harmonique quantique. Pour les deuxièmes, les états cohérents gaussiens, les quatre propriétés mathématiques fondamentales des états cohérents sont bien vérifiées. Cependant, la première définition physique des états cohérents n'est pas respectée. Nous verrons que, pour les états cohérents gaussiens, la densité de probabilité d'observer une particule est concentrée dans un domaine très restreint. On aura donc une propriété physique analogue à la deuxième définition physique des états cohérents.

On remarque en terminant qu'aucune des deux constructions n'est assez générale pour inclure le cas de systèmes quantiques dont le spectre d'énergie admet des dégénérescences. Le prochain chapitre propose donc une construction d'états cohérents qui inclut les cas où le spectre d'énergie admet des dégénérescences.

Chapitre 2

Dégénérescences et construction des états cohérents

Dans ce chapitre, nous construisons des états cohérents pour des systèmes quantiques dont le spectre d'énergie admet des dégénérescences. Nous verrons d'abord en quoi celles-ci affectent les états cohérents définis précédemment (section 2.1). Ensuite, nous donnerons de nouveaux états cohérents généralisés ainsi que des états cohérents gaussiens qui englobent les cas où il y a des dégénérescences dans le spectre d'énergie (section 2.2). Pour ce faire, nous nous inspirerons des travaux de Fox et de Choi ^[9,10]. Ils ont construit des états cohérents gaussiens pour l'exemple d'une particule dans une boîte quantique en deux dimensions (un système avec dégénérescences). Cependant, nous verrons dans le prochain chapitre que leurs états ne respectent pas la résolution de l'opérateur identité, une des propriétés mathématiques fondamentales des états cohérents. Notre nouvelle construction corrigera ce problème pour les états cohérents gaussiens et proposera une méthode pour construire les états cohérents généralisés.

2.1 Problèmes causés par les dégénérescences sur la construction des états cohérents

Nous allons montrer que la présence de dégénérescences dans le spectre d'énergie pose un sérieux problème lors de la construction des opérateurs de création et d'annihilation ce qui nous empêche de bien construire les états cohérents généralisés. De plus, nous verrons que les états cohérents gaussiens construits originellement (chapitre 1) ne respectent pas la résolution de l'opérateur identité (propriété 3) et ne sont donc pas complets.

Revenons aux hypothèses de départ de la section 1.1.1. Pour construire des états cohérents généralisés, nous travaillions avec un Hamiltonien H qui admettait un spectre d'énergie discret, strictement croissant et n'ayant aucune dégénérescence. Si maintenant, nous relâchons cette hypothèse, nous pouvons alors avoir un spectre d'énergie tel que

$$E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{n-1} \leq E_n \leq \dots \quad (2.1)$$

Comme nous le verrons pour le modèle de Jaynes-Cummings au chapitre (4), nous pouvons même obtenir un spectre d'énergie admettant une partie décroissante lorsque n augmente. Notons ici que les définitions (1.4) et (1.5) des opérateurs de création a^+ et d'annihilation a^- ne peuvent plus s'appliquer puisque nous ne sommes plus sous les mêmes hypothèses de départ qu'à la section 1.1.1. En effet, une application naïve de ces définitions mènerait à des problèmes physiques importants. Supposons que $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ soient des états propres correspondant à la même énergie. En agissant avec l'opérateur a^- sur l'état $|\psi_2\rangle$, on obtiendrait l'état $|\psi_1\rangle$ dont l'énergie correspondante n'aurait pas diminué. Pire encore, dans le cas du modèle de Jaynes-Cummings, on pourrait faire monter le niveau d'énergie en agissant avec a^- sur l'état fondamental du système. Dans ce chapitre, nous verrons qu'un réordonnement des énergies et une redéfinition des états propres correspondants nous mènera vers la construction des états cohérents généralisés avec de bons

opérateurs d'échelle.

Dans le cas des états cohérents gaussiens, seulement trois des quatre propriétés mathématiques fondamentales sont vérifiées. Montrons que la résolution de l'opérateur identité n'est plus possible lorsqu'il y a des dégénérescences. Supposons que l'on puisse quand même définir les états cohérents gaussiens par l'équation (1.65). On doit alors montrer l'équation (1.69). La présence de dégénérescences dans le spectre d'énergie modifie le résultat de l'équation (1.71). Comme on peut avoir $E_{n'} = E_n$ pour $n \neq n'$, alors

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i(E_{n'} - E_n)\Phi_0} \neq \delta_{nn'}. \quad (2.2)$$

C'est précisément cette dernière inégalité qui nous empêche d'écrire directement que l'équation (1.70) vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 K(n_0) \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|}{N(n_0)}.$$

Nous sommes donc bloqué dans la résolution de l'opérateur identité ce qui entraîne que les états ne sont pas complets.

Pour ces raisons la construction des états cohérents généralisés et gaussiens du chapitre 1 n'est donc pas assez générale pour englober les cas où il y a des dégénérescences dans le spectre d'énergie.

Nous devons donc généraliser les deux constructions du chapitre 1 afin qu'elles englobent les nombreux cas où des dégénérescences se présentent dans le spectre d'énergie.

2.2 Généralisation des états cohérents à des systèmes ayant un spectre d'énergie dégénéré

Nous verrons comment il est possible de définir des états cohérents généralisés ainsi que des opérateurs de création et d'annihilation pour le cas général d'un système quantique admettant des dégénérescences. Nous verrons ensuite comment il est possible de définir des états cohérents gaussiens qui respectent la résolution de l'opérateur identité, et ce, même si le spectre d'énergie admet des dégénérescences. Nous allons ici nous inspirer des travaux de Fox et Choi ^[9] qui ont proposé des états cohérents gaussiens pour le modèle de la particule dans une boîte en deux dimensions.

Voyons d'abord le cas des états cohérents généralisés présenté à la section (1.1). Supposons que l'on réordonne le spectre d'énergie dégénéré de telle façon que $\rho_0 = 0$ et que les énergies suivantes soient notées en ordre croissant, i.e.

$$\rho_0 = 0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{n-1} < \rho_n < \cdots, \quad (2.3)$$

où cette fois, chaque énergie ρ_n est dégénérée d_n fois. Afin de faciliter l'écriture, on notera $d_n = 1$ pour un état non dégénéré. Choisissons une base orthonormale associée à chacune de ces énergies, et notons ces états $|n, p\rangle_d$, où p prend des valeurs entières entre 0 et $d_n - 1$. De plus, pour chaque n , on introduit la phase $\eta_n \in R$ qui prend ses valeurs entre $[0, 2\pi]$. À chaque énergie ρ_n , on associe alors un seul état obtenu comme

$$|n, d_n\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{p=0}^{d_n-1} e^{ip\eta_n} |n, p\rangle_d. \quad (2.4)$$

Dans le cas où il n'y a aucune dégénérescence, cet état se réduit à $|n, 0\rangle_d$. Donc, même si on définit une phase η_n pour chaque ρ_n , elle n'a aucune influence sur les états non dégénérés. On note l'ensemble infini de variables η_n par le vecteur η . Dans les chapitres 3 et 4, nous verrons comment on peut réordonner les énergies afin de satisfaire à (2.3) et définir les états (2.4) pour les exemples de la particule

dans une boîte en deux dimensions ainsi que pour le modèle de Jaynes-Cummings.

On peut, à présent, définir les états cohérents généralisés pour des systèmes quantiques avec dégénérescences par

$$|z, \alpha, \boldsymbol{\eta}\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-i\rho_n \alpha}}{(\rho(n))^{1/2}} |n, d_n\rangle_D, \quad (2.5)$$

où la constante de normalisation C_0 est donnée par

$$|C_0| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{\rho(n)} \right)^{-1/2}, \quad (2.6)$$

avec $\rho(n) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$ et $\rho(0) = 1$. On montre donc la normalisation de ces nouveaux états cohérents en combinant les équations suivantes

$$\langle n, d_n | n, d_n \rangle_D = \frac{1}{d_n} \sum_{p=0}^{d_n-1} \langle n, p | n, p \rangle_d = 1, \quad (2.7)$$

$$\langle n', d_{n'} | n, d_n \rangle_D = 0 \text{ si } n \neq n', \quad (2.8)$$

avec l'équation (1.22). On en déduit facilement que

$$\langle z, \alpha, \boldsymbol{\eta} | z, \alpha, \boldsymbol{\eta} \rangle = 1. \quad (2.9)$$

On veut évidemment que ces nouveaux états vérifient les deux définitions physiques. On doit donc trouver des opérateurs de création et d'annihilation qui obéissent aux définitions (1.4) et (1.5) lorsqu'on les applique sur les états $|n, d_n\rangle_D$. Comme les énergies ρ_n associées à chacun de ces états propres respectent en tout point les conditions initiales de la sous-section (1.1.1), on peut écrire

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n |n, d_n\rangle_D \langle n, d_n|, \quad (2.10)$$

$$H(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |n, d_n\rangle_D \langle n, d_n|, \quad (2.11)$$

$$H(N+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{n+1} |n, d_n\rangle_D \langle n, d_n|, \quad (2.12)$$

$$H(N-1) = \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{n-1} |n, d_n\rangle_D \langle n, d_n|, \quad (2.13)$$

ce qui nous permet de définir

$$a^+ = \sqrt{H(N)} e^{-i(H(N)-H(N-1))\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |n+1, d_{n+1}\rangle_D \langle n, d_n|, \quad (2.14)$$

$$a^- = \sqrt{H(N+1)} e^{i(H(N+1)-H(N))\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |n, d_n\rangle_D \langle n+1, d_{n+1}|. \quad (2.15)$$

Il est alors facile de voir que les nouveaux états (2.5) vérifient les deux définitions physiques des états cohérents énoncées au chapitre 1. Il ne reste qu'à s'assurer que les trois propriétés mathématiques sont respectées.

Ces états cohérents sont encore continus en $z \in C$, $\alpha \in R$ et $\eta_n \in [0, 2\pi]$.

Voyons si ces états propres vérifient la stabilité temporelle. Sachant que chaque état orthonormal $|n, p\rangle_d$ est un état propre de l'Hamiltonien du système, nous avons

$$e^{itH} |z, \alpha, \boldsymbol{\eta}\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-i\rho_n(\alpha-t)}}{(\rho(n))^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{p=0}^{d_n-1} e^{ip\eta_n} |n, p\rangle_d = |z, \alpha - t, \boldsymbol{\eta}\rangle, \quad (2.16)$$

ce qui assure la stabilité temporelle de nos états.

Il faut maintenant s'assurer que ces nouveaux états vérifient bien la résolution de l'opérateur identité en montrant que

$$\int d\mu(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha W(\alpha) \prod_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_j) d\eta_j |z, \alpha, \boldsymbol{\eta}\rangle \langle z, \alpha, \boldsymbol{\eta}| = I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{d_n-1} |n, p\rangle \langle n, p|_d, \quad (2.17)$$

où $W(\alpha)$, $U(\eta_j)$ et la mesure $d\mu(z)$ doivent être déterminés. Rappelons que l'intégrale sur les complexes se fait sur le disque $\{z \in C : |z| < R\}$, où R est le rayon de conver-

gence de la série que l'on obtient en remplaçant $E(n)$ par $\rho(n)$ dans l'équation (1.36). En utilisant le normalisateur $W(\alpha)$ de l'équation (1.38), on a

$$\begin{aligned}
& \int d\mu(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha W(\alpha) \prod_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_j) d\eta_j |z, \alpha, \boldsymbol{\eta}\rangle \langle z, \alpha, \boldsymbol{\eta}| = \\
& |C_0|^2 \int d\mu(z) \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha \prod_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_j) d\eta_j \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-i\rho_n \alpha}}{(\rho(n))^{1/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{p=0}^{d_n-1} e^{ip\eta_n} |n, p\rangle_d \right) \\
& \quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m e^{i\rho_m \alpha}}{(\rho(m))^{1/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{d_m}} \sum_{k=0}^{d_m-1} e^{-ik\eta_m} \langle m, k|_d \right). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Chaque ρ_n est dégénéré d_n fois, mais comme $\rho_n \neq \rho_m, \forall n \neq m$, on peut encore écrire

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} e^{i(\rho_m - \rho_n)\alpha} d\alpha = \delta_{nm}. \tag{2.19}$$

En utilisant l'équation (2.19), on obtient

$$(2.18) = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int d\mu(z) \prod_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_j) d\eta_j \frac{|z|^{2n}}{\rho(n)} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{p,k=0}^{d_n-1} e^{i(p-k)\eta_n} |n, p\rangle \langle n, k|_d \right). \tag{2.20}$$

En posant $U(\eta_j) = \frac{1}{2\pi}$, on a la relation suivante :

$$\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_j e^{i(p-k)\eta_n} = \delta_{pk}. \tag{2.21}$$

De l'équation (2.20), il ne reste donc que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \int d\mu(z) \frac{|C_0|^2 |z|^{2n}}{\rho(n) d_n} \sum_{p=0}^{d_n-1} |n, p\rangle \langle n, p|_d = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{d_n-1} |n, p\rangle \langle n, p|_d, \\
& \iff \int d\mu(z) \frac{|C_0|^2 |z|^{2n}}{\rho(n) d_n} = 1. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Si on suppose, comme précédemment, que $d\mu(z)$ dépend uniquement de $|z|$, on peut poser $z = re^{i\varphi}$. En utilisant l'équation (1.40), la résolution de l'opérateur identité devient donc équivalente à trouver une fonction $h(u)$ qui satisfait l'équation

$$\int_0^{R^2} h(u)u^n du = \rho(n)d_n. \quad (2.23)$$

Il est donc possible de résoudre l'opérateur identité comme avant.

Montrons maintenant que ces états sont complets. Il s'agit donc de vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{(\rho(n))^{\frac{1}{2}}}{C_0 z^n} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha e^{i\rho_n \alpha} \frac{\sqrt{d_n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_n e^{-ip\eta_n} |z, \alpha, \eta\rangle = |n, p\rangle_d, \quad (2.24)$$

pour tout $n, p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ où $0 \leq p \leq d_n - 1$. La partie de gauche de l'équation (2.24) nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho(n))^{\frac{1}{2}}}{C_0 z^n} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\alpha e^{i\rho_n \alpha} \frac{\sqrt{d_n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_n e^{-ip\eta_n} \\ & \times C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m e^{-i\rho_m \alpha}}{(\rho(m))^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{d_m}} \sum_{k=0}^{d_m-1} e^{ik\eta_m} |m, k\rangle_d. \end{aligned} \quad (2.25)$$

On peut encore utiliser l'équation (2.19) afin d'obtenir un δ_{nm} qui fait disparaître tous les termes où $n \neq m$ dans la sommation. Donc, de l'équation (2.25), il reste seulement

$$\frac{\sqrt{d_n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_n e^{-ip\eta_n} \frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{k=0}^{d_n-1} e^{ik\eta_n} |n, k\rangle_d, \quad (2.26)$$

mais

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\eta_n e^{i(k-p)\eta_n} = 2\pi \delta_{pk}, \\ & \implies (2.26) = |n, p\rangle_d. \end{aligned}$$

Regardons maintenant la construction d'états cohérents gaussiens généralisés à des systèmes quantiques admettant des dégénérescences dans leur spectre d'énergie.

En s'inspirant de la démarche précédente, on peut écrire

$$|G, n_0, \phi_0, \sigma, \boldsymbol{\eta}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]} }{\sqrt{N(n_0)}} e^{-i\rho_n\phi_0} |n, d_n\rangle_D, \quad (2.27)$$

où $|n, d_n\rangle_D = (2.4)$ et $N(n_0)$ est toujours défini de façon à assurer la normalisation. On peut facilement vérifier la continuité en $z \in C$, $\alpha \in R$ et $\eta_n \in [0, 2\pi]$. De plus, ces états vérifient aussi la stabilité temporelle. Il est important de s'assurer que ces nouveaux états cohérents gaussiens respectent bien la résolution de l'opérateur identité. On doit donc regarder ce que vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 K(n_0) \prod_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_j) d\eta_j |G, n_0, \phi_0, \sigma, \boldsymbol{\eta}\rangle \langle G, n_0, \phi_0, \sigma, \boldsymbol{\eta}|. \quad (2.28)$$

On pose $U(\eta_j) = \frac{1}{2\pi}$ et on utilise la relation

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i(\rho_n - \rho_{n'})\Phi_0} = \delta_{nn'}.$$

On obtient alors

$$(2.28) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 K(n_0) \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]} }{N(n_0)} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_j \left(\frac{1}{d_n} \sum_{p,k=0}^{d_n-1} e^{i(p-k)\eta_n} |n, p\rangle \langle n, k|_d \right). \quad (2.29)$$

Comme

$$\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_j e^{i(p-k)\eta_n} = \delta_{pk},$$

il ne reste que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 K(n_0) \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]} }{N(n_0)} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{p=0}^{d_n-1} |n, p\rangle \langle n, p|_d \right) = \mathbf{I}, \quad (2.30)$$

$$\iff K(n_0) = \frac{N(n_0)d_n}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (2.31)$$

La complétude de ces états cohérents gaussiens découle directement de la résolution de l'opérateur identité. On peut donc montrer facilement que

$$\begin{aligned} & \sqrt{N(n_0)} e^{\left[\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}\right]} \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i\rho_n \Phi_0} \frac{\sqrt{d_n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_n e^{-ip\eta_n} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{\left[-\frac{|m-n_0|^2}{4\sigma^2}\right]}}{\sqrt{N(m_0)}} e^{-i\rho_m \phi_0} \frac{1}{\sqrt{d_m}} \sum_{k=0}^{d_m-1} e^{ik\eta_m} |m, k\rangle_d = |n, p\rangle_d. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans le prochain chapitre, nous allons construire explicitement ces nouveaux états dans le cas d'une particule dans une boîte quantique en deux dimensions.

Chapitre 3

Exemples d'applications des deux types d'états cohérents

Nous allons présenter ici deux exemples qui illustrent bien la construction des états cohérents généralisés ou gaussiens pour un système quantique particulier. Dans le premier cas, nous allons retrouver ces deux types d'états cohérents pour une particule dans une boîte en une dimension (section 3.1 et 3.2). Cet exemple montrera clairement une application pour un système quantique n'admettant aucune dégénérescence. Ensuite, nous étudierons un système quantique admettant des dégénérescences. Nous construirons ces deux types d'états cohérents pour une particule dans une boîte en deux dimensions (section 3.3 et 3.4). Pour les états cohérents gaussiens, nous allons mettre en évidence une propriété analogue à la définition 2 des états cohérents originaux. Lorsque la particule dans la boîte est représentée par la fonction d'onde des états cohérents gaussiens, elle est très bien localisée dans la boîte.

3.1 Construction d'états cohérents gaussiens pour une particule dans une boîte en une dimension

Regardons donc ce que sont les états cohérents gaussiens pour une particule confinée entre des barrières infinies de potentiel situées en $x = 0$ et $x = a$. On retrouvera ici les résultats de Fox et Choi ^[10]. Comme $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$ et $V(x) = \infty$ ailleurs, on peut écrire

$$H = \frac{p_x^2}{2m},$$

où p est l'opérateur impulsion et m est la masse. La position de la particule sera décrite par la variable x . L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \xi(x) = E \xi(x),$$

avec comme conditions aux frontières :

$$\xi(0) = 0 \text{ et } \xi(a) = 0.$$

Les états propres orthonormés du système sont donc

$$|n\rangle = \xi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (3.1)$$

avec les énergies correspondantes

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = \hbar n^2 \omega_0, \quad (3.2)$$

où $n \in N^+ \setminus \{0\}$ et $\omega_0 = \hbar\pi^2/2Ma^2$. On élimine l'énergie E_0 car son état propre correspondant est nul. Le produit scalaire est simplement défini comme

$$\langle m|n \rangle \equiv \int_0^a \xi_m(x)\xi_n(x)dx = \delta_{n,m}. \quad (3.3)$$

Il n'y a donc aucune dégénérescence possible dans ce spectre d'énergie et on peut utiliser les équations (1.65) et (1.66) afin de construire les états cohérents gaussiens de ce système. On peut inclure les constantes $\hbar\omega_0$ dans le ϕ_0 et on obtient

$$|G, n_0, \phi_0, \sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{N(n_0)}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{in^2\phi_0} |n \rangle, \quad (3.4)$$

où l'on a toujours $N(n_0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}]}$. On peut réécrire ces états en termes des fonctions mathématiques représentées par le ket $|n \rangle$. On regardera aussi l'évolution dans le temps en agissant sur ces états avec l'opérateur $e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$. On a donc

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]}}{\sqrt{N(n_0)}} e^{in^2\phi_0} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (3.5)$$

où $\psi(x, t)$ est simplement la fonction d'onde des états cohérents gaussiens associée à la particule dans la boîte et E_n est donnée par l'équation (3.2).

Nous avons déjà démontré dans le chapitre 1 que ces états respectaient les quatre propriétés mathématiques fondamentales. Cet exemple va nous montrer que ces états ont aussi une propriété physique très intéressante.

La densité de probabilité d'observer la particule à une position x et à un temps t est donné par

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 = \psi\bar{\psi} &= \frac{2}{a} \frac{1}{N(n_0)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{in^2\phi_0} e^{-\frac{i n^2 \omega_0 t}{\hbar}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} e^{[-\frac{(m-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-im^2\phi_0} e^{\frac{im^2\omega_0 t}{\hbar}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

On peut donc tracer les graphiques de la densité de probabilité d'observer la particule en fonction de la position x , pour un temps t donné. La figure 3.1 présente ici quatre courbes où l'on a posé $M = M_e$ (la masse de l'électron), $a = \pi$, $\sigma = 10$, $n_0 = 10000$ et différentes valeurs de t et ϕ_0 entre 0 et $\frac{\pi}{2n_0}$. Pour chacune de ces quatre courbes, on a fait la sommation de n , $m = 9500$ à n , $m = 10500$ ce qui, pour un choix de $n_0 = 10000$, donne une excellente approximation de $|\psi(x)|^2$.

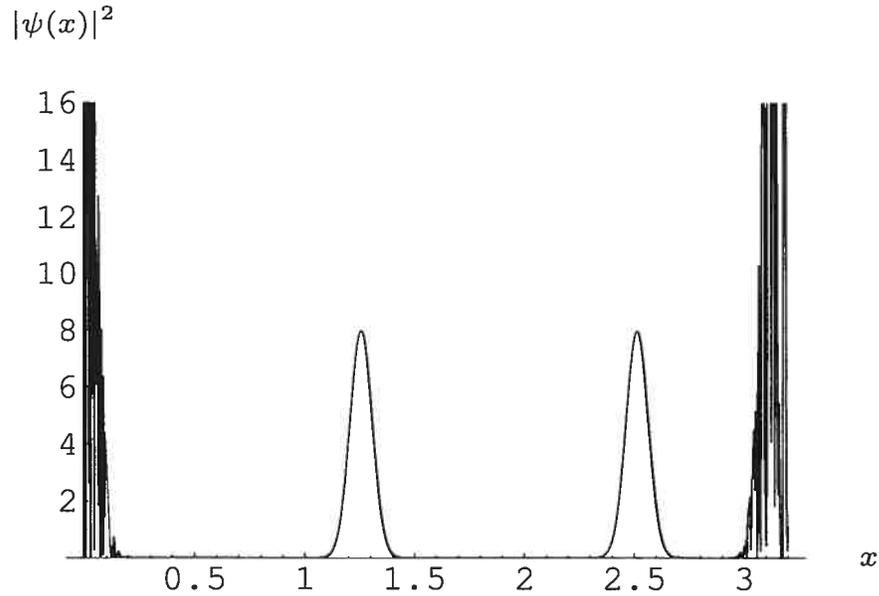


FIG. 3.1 – Quatre courbes de la densité de probabilité en fonction de la position x tracées, de la gauche vers la droite, au temps et au déphasage ($t = \phi_0 = 0$), ($t = \phi_0 = \frac{\pi}{5n_0}$), ($t = \phi_0 = \frac{2\pi}{5n_0}$) et ($t = \phi_0 = \frac{\pi}{2n_0}$).

On remarque que lorsque la distribution de probabilité est près d'un mur (en $x = 0$ et en $x = a$), les courbes sur la figure 3.1 ont une aire sombre. On voit, en fait, le résultat d'oscillations très rapides dans la distribution de probabilité de présence de la particule. Ce phénomène est causé par les interférences constructives et destructives entre la fonction d'onde $\psi(x, t)_{ref}$ qui est réfléchi par la barrière de potentiel et la fonction d'onde incidente $\psi(x, t)_{inc}$. Par contre, lorsque la distribution de probabilité est loin des murs, elle est simplement décrite par une gaussienne. Une observation physiquement intéressante dans ces graphiques est que la densité de probabilité d'observer la particule est bien localisée dans la boîte.

La localisation de la particule dans la boîte est relativement bien conservée dans le temps. Comme on peut le voir sur la figure 3.2, pour un temps avoisinant les 180 secondes, l'amplitude de la densité de probabilité commence à diminuer. Dans la prochaine section, nous verrons que pour la particule dans une boîte en deux dimensions, l'amplitude de la densité de probabilité commence à diminuer pour un temps avoisinant les 500 secondes. Nous obtiendrons donc une localisation plus stable pour la boîte en deux dimensions que pour la boîte en une dimension.

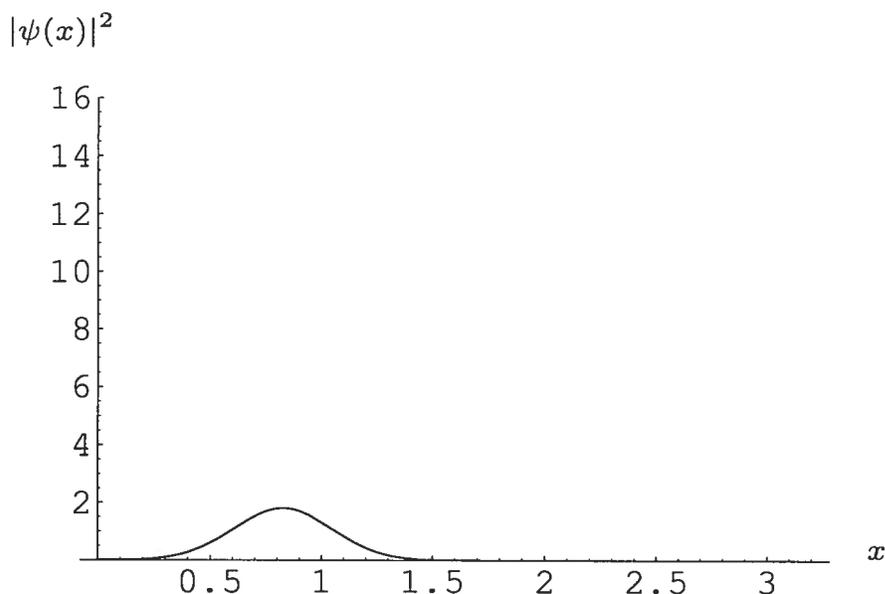


FIG. 3.2 – Graphique de la densité de probabilité en fonction de la position x au temps $t = \frac{3 \cdot 10^6 \pi}{5n_0}$.

3.2 Construction d'états cohérents généralisés pour une particule dans une boîte en une dimension

Il est très facile de construire des états cohérents généralisés pour un système n'admettant aucune dégénérescence. Le seul travail que nous avons à faire afin de

se ramener aux conditions initiales du chapitre 1 est de redéfinir les énergies et les états propres pour que l'énergie fondamentale commence à zéro. Posons donc $E_1 - E_1 \equiv u_0$, $E_2 - E_1 \equiv u_1$, $E_3 - E_1 \equiv u_2, \dots$, $E_n - E_1 \equiv u_{n-1}, \dots$ et $|n\rangle \equiv |U_{n-1}\rangle$, où $n \in N^+ \setminus \{0\}$.

Nous pouvons maintenant adapter les équations ((1.10)-(1.15)) à ce système quantique particulier. On veut que l'opérateur N agissant sur les états propres $|U_m\rangle$, où maintenant $m \in N^+$, donne la valeur propre m multipliée par ces mêmes états propres. On obtient simplement

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} m |U_m\rangle \langle U_m|. \quad (3.7)$$

Pour l'Hamiltonien, on obtient

$$H(N) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m |U_m\rangle \langle U_m|, \quad (3.8)$$

$$H(N+1) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{m+1} |U_m\rangle \langle U_m|, \quad (3.9)$$

$$H(N-1) = \sum_{m=2}^{\infty} u_{m-1} |U_m\rangle \langle U_m|. \quad (3.10)$$

Les opérateurs a^+ et a^- sont donnés ici par

$$a^+ = \sqrt{H(N)} e^{-i(H(N)-H(N-1))\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} |U_{m+1}\rangle \langle U_m|, \quad (3.11)$$

$$a^- = \sqrt{H(N+1)} e^{i(H(N+1)-H(N))\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} |U_m\rangle \langle U_{m+1}|. \quad (3.12)$$

En se référant à l'équation (1.21) pour nos états cohérents généralisés, on obtient :

$$|z, \alpha\rangle_{1d} = C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m e^{-iu_m \alpha}}{(u(m))^{1/2}} |U_m\rangle, \quad (3.13)$$

avec

$$|C_0| = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{u(m)} \right)^{-1/2} \quad (3.14)$$

où $u(m) = u_1 u_2 \dots u_m$ et par convention $u(0) = 1$.

Nous avons déjà montré au chapitre 1 que de tels états vérifiaient les deux propriétés physiques et les quatre propriétés mathématiques originales.

3.3 Construction des états cohérents gaussiens pour une particule dans une boîte en deux dimensions

Nous présenterons ici un exemple où l'on construit des états cohérents gaussiens pour un système quantique admettant des dégénérescences dans son spectre d'énergie. L'Hamiltonien pour une particule dans une boîte quantique en deux dimensions s'écrit

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(x, y),$$

où $V(x, y) = 0$ si $0 < x < a$ et $0 < y < a$, et $V(x, y) = \infty$ ailleurs. Les énergies et les états propres orthonormés du système sont donc respectivement donnés par

$$E_{n,m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n^2 + m^2) = \hbar(n^2 + m^2)\omega_0 \quad (3.15)$$

et

$$|n, m\rangle = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \text{ où } \{n, m\} \in N^+ \setminus \{0\}. \quad (3.16)$$

On élimine les énergies $E_{0,1}$, $E_{1,0}$ et $E_{0,0}$ car leurs états propres correspondants sont nuls. Encore une fois, le produit scalaire est défini comme

$$\langle n', m' | n, m \rangle = \int_0^a \int_0^a \frac{4}{a^2} \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dx dy. \quad (3.17)$$

Afin de construire les états cohérents gaussiens pour un tel système, il faut bien

comprendre d'où proviennent les dégénérescences dans le spectre d'énergie. Il y a deux types de dégénérescences possibles dans ce problème.

1°) On peut obtenir la même énergie simplement en interchangeant n et m . Par exemple, on a $E_{2,1} = E_{1,2}$. Dans cet exemple, l'énergie $5\hbar\omega_0$ est dégénérée deux fois.

2°) Une autre possibilité d'obtenir la même énergie est associée au nombre de façons qu'a un entier d'être exprimé comme la somme de deux entiers au carré. Par exemple, on a $E_{5,5} = E_{1,7} = E_{7,1} = 50\hbar\omega_0$. L'énergie $50\hbar\omega_0$ est donc dégénérée trois fois.

C'est Legendre, au début des années 1800 ^[17], qui a déterminé le nombre de fois qu'un entier positif Q peut être exprimé comme la somme de deux carrés. Son résultat s'exprime de la façon suivante : soit D_1 le nombre de diviseurs de Q de la forme $4k + 1$ et D_2 le nombre de diviseurs de Q de la forme $4k + 3$ où $k \in N^+$, alors le nombre de représentations de Q comme la somme de deux carrés est $4(D_1 - D_2)$. Notons que, dans cette formule, on calcule la somme de deux carrés dont les entiers sont positifs, négatifs ou nuls. Pour ce qui nous concerne, il y a moins de cas puisque n et m sont nécessairement positifs. Par exemple, si $Q = 25$, on a

$$D_1 = 3 \text{ soit } \{1, 5, 25\} \text{ et } D_2 = 0.$$

On a alors $4(D_1 - D_2) = 12$ façons d'exprimer 25 comme la somme de deux carrés qui sont $\{(5^2 + 0^2), (0^2 + 5^2), ((-5)^2 + 0^2), (0^2 + (-5)^2), (3^2 + 4^2), (4^2 + 3^2), ((-3)^2 + 4^2), \dots, ((-4)^2 + (-3)^2)\}$. De ces 12 combinaisons, seulement 2 sont exprimées avec des entiers strictement positifs soit $(3^2 + 4^2)$ et $(4^2 + 3^2)$. L'énergie $25\hbar\omega_0$ est donc dégénérée deux fois.

On va maintenant utiliser le résultat de Legendre afin de trouver le nombre de fois qu'un entier positif Q peut être exprimé comme $Q = n^2 + m^2$ où n et $m \in N^+ \setminus \{0\}$. On notera ce nombre d_q qui correspond aussi au nombre de fois que l'énergie $Q\hbar\omega_0$ est dégénérée. Le choix de l'indice q sera justifié plus tard dans le développement.

On peut remarquer que pour chaque combinaison d'entiers strictement positifs, il y a toujours trois autres combinaisons possibles lorsque l'on inclut aussi les entiers négatifs. Dans l'exemple précédent, on a le cas $(3^2 + 4^2)$ auquel on associe les 3 autres cas $((-3)^2 + 4^2)$, $(3^2 + (-4)^2)$ et $((-3)^2 + (-4)^2)$. Ceci est vrai même si $n=m$. Par exemple, si $Q = 50$, on a le cas $(n = 5, m = 5)$ auquel on peut associer les trois autres cas soit $(n = -5, m = 5)$, $(n = 5, m = -5)$ et $(n = -5, m = -5)$. Lorsque Q est un carré parfait, on a toujours 4 cas de la forme $((\sqrt{Q})^2 + 0^2)$, $((-\sqrt{Q})^2 + 0^2)$, $(0^2 + (\sqrt{Q})^2)$ et $(0^2 + (-\sqrt{Q})^2)$. Nous voulons évidemment rejeter ces 4 cas puisque nos énergies sont libellées en terme d'entiers strictement positifs. On obtient donc le résultat suivant :

Si Q n'est pas un carré parfait, alors

$$d_q = \frac{4(D_1 - D_3)}{4} = D_1 - D_3. \quad (3.18)$$

Si Q est un carré parfait, alors

$$d_q = \frac{4(D_1 - D_3) - 4}{4} = D_1 - D_3 - 1. \quad (3.19)$$

Il est à noter que, pour un certain Q , les formules (3.18) et (3.19) nous permettent de trouver d_q , mais il n'y a cependant pas d'équations qui nous permettent de savoir exactement quels sont les entiers n et m qui causent ces dégénérescences. Pour cette raison, à mesure que Q augmente, il devient de plus en plus difficile de trouver les n et m , qui font que Q est dégénéré d_q fois.

Nous pouvons maintenant construire les états cohérents gaussiens pour ce système. Il s'avère que l'équation (2.27) ne peut pas directement s'appliquer ici. En effet, les énergies sont libellées avec deux indices (n et m) plutôt qu'un seul. Ce problème est facilement résolu en classant les énergies $E_{n,m}$ en ordre croissant et en les rebaptisant avec un seul indice q . Voici donc l'explication de l'introduction de cet indice. On obtient alors $E_{1,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_0$, $E_{1,2} - E_{1,1} = E_{2,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_1$, $E_{2,2} - E_{1,1} \equiv \epsilon_2$, $E_{1,3} - E_{1,1} = E_{3,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_3$, \dots , $E_{7,4} - E_{1,1} = E_{4,7} - E_{1,1} =$

$E_{1,8} - E_{1,1} = E_{8,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_{22}, \dots, E_{n,m} - E_{1,1} = \dots \equiv \epsilon_q, \dots$, avec

$$\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \dots < \epsilon_q < \dots \quad (3.20)$$

On peut définir un nouvel opérateur H' qui dépend de l'Hamiltonien du système H comme

$$H' = H - E_{1,1}, \quad (3.21)$$

de telle sorte que $H'|q, d_q\rangle_D = \epsilon_q|q, d_q\rangle_D$. Pour chaque ϵ_q , nous devons à présent trouver les d_q vecteurs propres orthonormés, où d_q est la dégénérescence. Pour cela, nous allons simplement nous servir des états propres $|n, m\rangle$ du système donné par l'équation (3.16) et définir de nouveaux états en nous inspirant de la définition (2.4). Ainsi, on a, par exemple :

$$\begin{aligned} E_{1,1} - E_{1,1} &\equiv \epsilon_0 \implies |0, 1\rangle_D \equiv |1, 1\rangle, \\ E_{1,2} - E_{1,1} &= E_{2,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_1 \implies |1, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 2\rangle + e^{i\eta_1}|2, 1\rangle), \\ E_{2,2} - E_{1,1} &\equiv \epsilon_2 \implies |2, 1\rangle_D \equiv |2, 2\rangle, \\ E_{1,3} - E_{1,1} &= E_{3,1} - E_{1,1} \equiv \epsilon_3 \implies |3, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 3\rangle + e^{i\eta_3}|3, 1\rangle). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ce travail est fait en annexe (I) pour les trente premières énergies ϵ_q . On peut donc écrire les états cohérents gaussiens pour ce système en prenant la définition (2.27) et en l'adaptant à notre spectre d'énergie particulier. On obtient

$$\begin{aligned} |G, n_0, \phi_0, \sigma, \eta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N(n_0)}} \sum_{q=0}^{\infty} e^{[-\frac{(q-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-i\epsilon_q \phi_0} |q, d_q\rangle_D \equiv \\ &\frac{1}{\sqrt{N(n_0)}} \left(e^{[-\frac{(0-n_0)^2}{4\sigma^2}]} |1, 1\rangle + e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{3i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + e^{i\eta_1}|2, 1\rangle) + \right. \\ &\left. e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{6i\phi_0} |2, 2\rangle + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{8i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 3\rangle + e^{i\eta_3}|3, 1\rangle) + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

où l'on a fait entrer $\hbar\omega_0$ dans le ϕ_0 .

L'évolution dans le temps de ces états s'obtient en agissant sur $|n, m\rangle$ avec l'opérateur $e^{-\frac{iH't}{\hbar}}$. On peut aussi remplacer les états propres $|n, m\rangle$ par les fonctions mathématiques correspondantes données par l'équation (3.16). On peut donc écrire nos états cohérents en termes d'une fonction mathématique $\psi(x, y, t)$. La densité de probabilité de trouver la particule à une position (x, y) et à un temps t donné est simplement $|\psi(x, y)|^2$.

Comme il faut réordonner les énergies et trouver les dégénérescences pour chacune, il sera impossible d'effectuer une très bonne approximation de $|\psi(x, y)|^2$. Nous ne pourrons pas effectuer la sommation de $q = 9500$ à $q = 10500$ avec $n_0 = 10000$ comme pour le cas en une dimension. Les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 montrent différentes approximations de $|\psi(x, y)|^2$ en faisant varier le paramètre σ . Pour ces quatre graphiques, on a fixé $a = \pi$, $M = M_e$, $\phi_0 = 0.01$ et $t = 0.01$. Notons que ces graphiques auraient été indiscernables à l'œil si nous avions choisis un temps $0 \leq t \leq 10$.

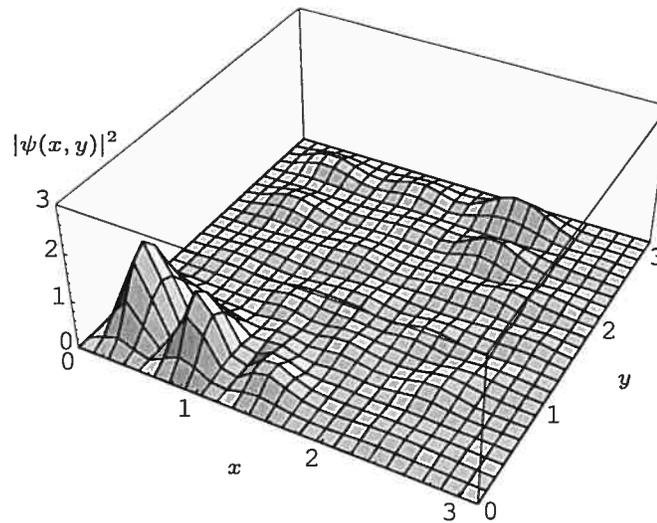


FIG. 3.3 – Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 29$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 15$ et $\sigma = 3$.

La figure 3.3 montre que la particule n'est pas très bien localisée dans la boîte. En fait, pour ces choix de paramètres, il faut que $\sigma > 5$ afin que la particule soit clairement localisée dans la boîte. La figure 3.4 montre, en effet, que pour le

paramètre fixé à $\sigma = 10$, la densité de probabilité est concentrée dans un intervalle d'espace restreint.

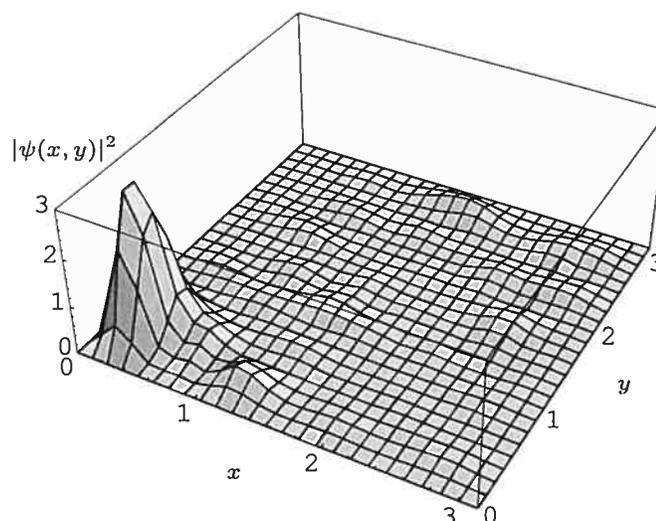


FIG. 3.4 – Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 29$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 15$ et $\sigma = 10$.

On peut cependant se demander si la particule conservera cette localisation avec une meilleure approximation de $|\psi(x, y)|^2$. Malheureusement, lorsque l'on somme sur un plus grand nombre d'énergies, il nous faut augmenter encore plus la valeur de σ afin que la particule soit clairement localisée dans la boîte. La figure 3.5 montre que lorsque l'on somme sur les 57 premières énergies, le choix de fixer $\sigma = 5$ implique que la particule n'est pas localisée. En fait, il faut maintenant que $\sigma > 12$ afin d'avoir une localisation aussi précise que sur la figure 3.4.

La figure 3.4 montre qu'en sommant sur les 57 premières énergies, la densité de probabilité est bien concentrée en fixant $\sigma = 15$. Il est important de souligner que cette localisation diminue à mesure que le temps avance et disparaît lorsque $t > 600s$.

Il y a donc un problème avec la construction que nous venons de faire. La particule est moins bien localisée dans la boîte lorsque l'on fait une approximation plus précise de la densité de probabilité $|\psi(x, y)|^2$. Ce problème s'explique par le fait que les valeurs de n et m des états propres peuvent être très loin du paramètre

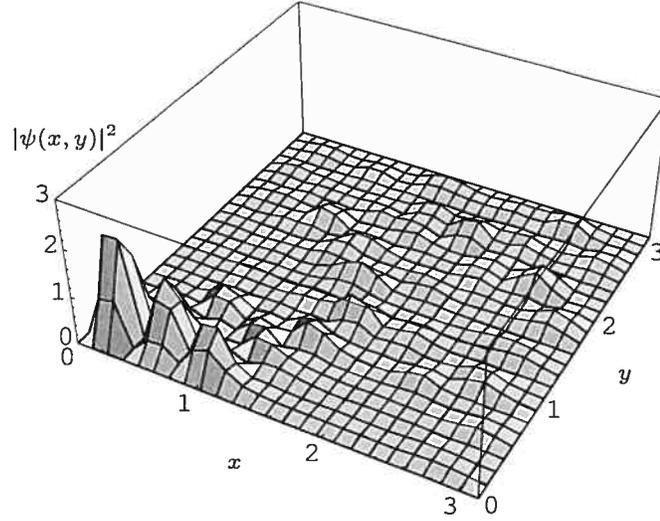


FIG. 3.5 – Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 57$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 30$ et $\sigma = 5$.

n_0 , et ce, pour des valeurs de q près de n_0 .

Nous voulons cependant conserver cette propriété physique analogue à la définition 2 des états cohérents originaux de l'oscillateur harmonique quantique. Une proposition faite par Fox et Choi ^[9] afin de contourner ce problème est d'introduire un facteur gaussien pour chaque indice n et m de l'énergie $E_{n,m}$. Chaque $E_{n,m}$ est maintenant dégénéré $d_{n,m}$ fois. Afin de simplifier l'écriture, on pose $d_{n,m} = 1$ si il n'y a aucune dégénérescence. On peut encore se servir des états propres du système donné par l'équation (3.16) afin d'associer à chaque énergie $E_{n,m}$, un état propre $|n, m, d_{n,m}\rangle_D$. Les énergies ne seront maintenant plus en ordre croissant, mais énumérée avec deux indices m et n . On introduit aussi une phase $\eta_{n,m}$ qui peut prendre des valeurs entre $[0, 2\pi]$. Voici ce que l'on obtient :

$$|1, 1, 1\rangle_D \equiv |1, 1\rangle,$$

$$|1, 2, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 2\rangle + e^{i\eta_{1,2}}|2, 1\rangle),$$

$$|2, 1, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1\rangle + e^{i\eta_{2,1}}|1, 2\rangle),$$

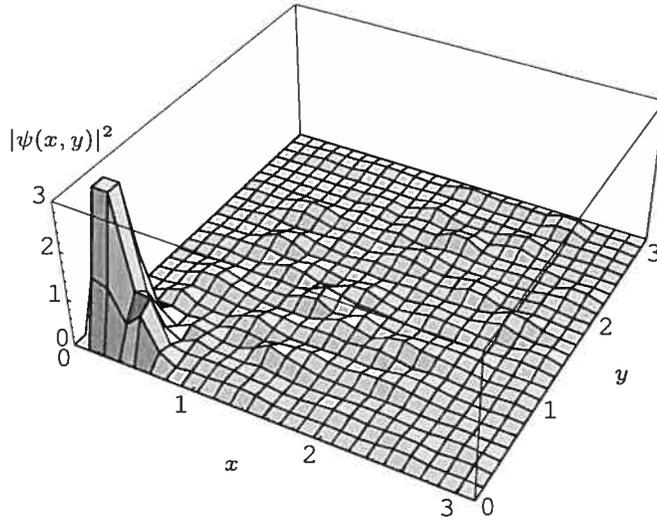


FIG. 3.6 – Approximation de la densité de probabilité ($q = 0$ à $q = 57$) en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $n_0 = 30$ et $\sigma = 15$.

$$\begin{aligned}
 |2, 2, 1\rangle_D &\equiv |2, 2\rangle, \\
 |1, 3, 2\rangle_D &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 3\rangle + e^{i\eta_{1,3}}|3, 1\rangle), \\
 |3, 1, 2\rangle_D &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 1\rangle + e^{i\eta_{3,1}}|1, 3\rangle).
 \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire ces états cohérents gaussiens corrigés par la méthode proposée par Fox et Choi comme

$$\begin{aligned}
 |G, m_0, n_0, \phi_0, \sigma, \eta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N(n_0, m_0)}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(m-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-iE_{n,m}\phi_0} |n, m, d_{n,m}\rangle_D \\
 &\equiv \frac{1}{\sqrt{N(n_0, m_0)}} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-2i\phi_0} |1, 1\rangle + \right. \\
 &\quad e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-5i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + e^{i\eta_{1,2}}|2, 1\rangle) + \\
 &\quad e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-5i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 1\rangle + e^{i\eta_{2,1}}|1, 2\rangle) + \\
 &\quad \left. e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-8i\phi_0} |2, 2\rangle + e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-10i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 3\rangle + e^{i\eta_{1,3}}|3, 1\rangle) + \right.
 \end{aligned}$$

$$e^{\left[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}\right]} e^{-10i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|3, 1\rangle + e^{i\eta_{3,1}} |1, 3\rangle) + \dots \quad (3.24)$$

où l'ensemble infini de variables $\eta_{n,m}$ est représenté par le vecteur $\boldsymbol{\eta}$. On a aussi fait entrer les constantes $\hbar\omega_0$ de l'énergie $E_{n,m}$ dans le ϕ_0 .

Nous devons maintenant vérifier deux choses. Premièrement, il faut s'assurer que cette nouvelle définition des états cohérents gaussiens nous donne bien une meilleure localisation de la particule dans la boîte. Deuxièmement, il faut aussi regarder si cette nouvelle définition respecte bien les quatre définitions mathématiques fondamentales des états cohérents. Les figures 3.7 et 3.8 illustrent une approximation de $|\psi(x, y)|^2$ pour les cinquante-sept premières énergies à différents temps. Pour ces deux graphiques, on a fixé $a = \pi$, $M = M_e$, $\phi_0 = 0.01$ et $n_0 = m_0 = 4$.

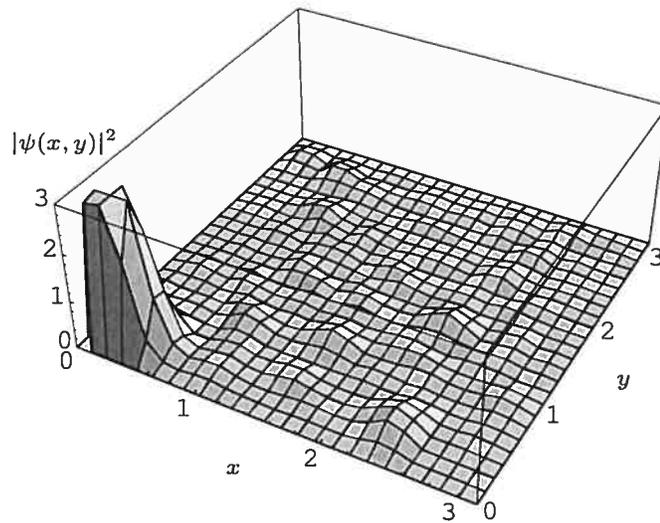


FIG. 3.7 – Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 0.01s$.

La figure 3.7 montre que la particule est très bien localisée. Dans ce cas, il faut que $\sigma > 0.9$ afin que la densité de probabilité soit concentrée dans la boîte. Ce résultat est donc une nette amélioration comparativement au $\sigma > 12$ que nous avons obtenu avec la définition précédente. De plus, ce résultat ne varie pratiquement pas lorsque l'approximation se fait sur les trente premières énergies et plus.

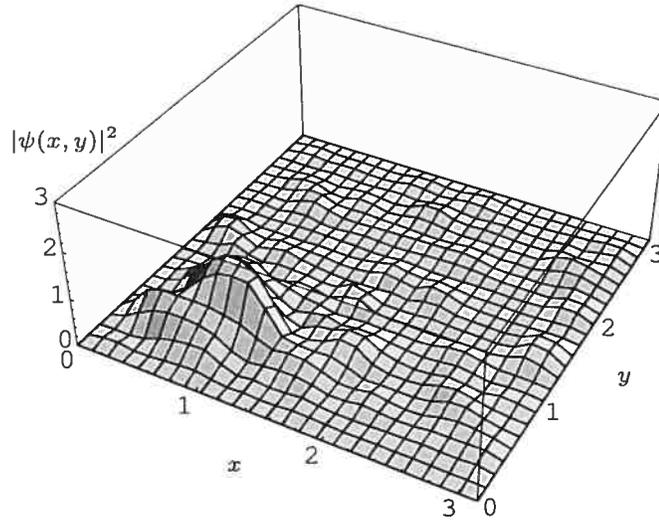


FIG. 3.8 – Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 1500s$.

La figure 3.8 montre simplement que la localisation de la particule dans la boîte se dissipe dans le temps. En fait, pour ces choix de paramètres, lorsque le temps dépasse les 1000 secondes, la particule n'est plus très bien localisée dans la boîte.

Il y a cependant un gros problème avec ces nouveaux états cohérents gaussiens proposés par Fox et Choi. Leur article ^[9] mentionne rapidement que ces nouveaux états (3.24) conservent les propriétés mathématiques des états cohérents gaussiens définis précédemment (3.23). Par contre, une analyse plus profonde du problème montre que les états donnés par l'équation (3.24) ne respectent plus la résolution de l'opérateur identité. En effet, on doit trouver $K(n_0, m_0)$ et $U(\eta_{l,f})$ tels que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 K(n_0, m_0) \times \prod_{l,f=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\eta_{l,f}) d\eta_{l,f} |G, m_0, n_0, \phi_0, \sigma, \boldsymbol{\eta}\rangle \langle G, m_0, n_0, \phi_0, \sigma, \boldsymbol{\eta}| = \mathbf{I}. \quad (3.25)$$

Malheureusement, Nous avons l'inégalité suivante :

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i(e_{n,m} - e_{n',m'})\Phi_0} \neq \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (3.26)$$

La présence de dégénérescences nous bloque donc lorsque nous tentons de résoudre l'opérateur identité pour ces nouveaux états.

Il y a présentement un problème. L'équation (3.23) nous donne des états cohérents gaussiens qui respectent les quatre propriétés mathématiques fondamentales, mais qui ne sont pas bien localisés dans la boîte. Fox et Choi ont alors modifié ces états afin qu'ils soient bien localisés dans la boîte. Ils ont introduit un facteur gaussien pour chaque indice n et m de l'énergie $E_{n,m}$. L'équation (3.24) donne l'expression de ces états modifiés. Cependant, ceux-ci ne respectent plus la propriété 3 des états cohérents. Nous allons donc ajouter notre contribution à cette construction afin d'obtenir des états cohérents gaussiens qui respectent à la fois les quatre propriétés mathématiques et dont la densité de probabilité est concentrée dans un espace restreint de la boîte.

En s'inspirant des deux dernières constructions, on peut définir des états cohérents gaussiens qui conservent l'ordonnement des énergie présent dans l'équation (3.23), mais qui préserve aussi l'idée du double facteur gaussien, présent dans l'équation (3.24). Comme les constantes n_0 et m_0 peuvent être différentes, le fait de choisir $\exp[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]$ ou $\exp[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]$, comme facteur gaussien pour l'énergie ϵ_1 , est arbitraire. Nous allons donc faire une moyenne entre les deux gaussiennes de façon à ne pas privilégier un choix ou un autre. De tels états s'écrivent alors comme

$$\begin{aligned}
|G, m_0, n_0, \phi_0, \sigma, \eta\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N(n_0, m_0)}} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} |1, 1\rangle + \right. \\
& \frac{1}{2} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right) e^{-3i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + e^{i\eta_{1,2}} |2, 1\rangle) + \\
& e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} e^{-6i\phi_0} |2, 2\rangle + \\
& \left. \frac{1}{2} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right) e^{-8i\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 3\rangle + e^{i\eta_{1,3}} |3, 1\rangle) + \dots \right), \quad (3.27)
\end{aligned}$$

où

$$N(n_0, m_0) = e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{2\sigma^2}]} + \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{2\sigma^2}]} + \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 + \dots, \quad (3.28)$$

ce qui garantit la normalisation de ces états. On peut facilement montrer qu'ils vérifient la stabilité temporelle et qu'ils sont continus en $\{n_0, m_0, \phi_0 \text{ et } \eta_{n,m}\} \in R$. Assurons-nous qu'ils vérifient bien la résolution de l'opérateur identité. On note que dans notre dernière définition des états cohérents gaussiens (3.27), nous avons redéfini les énergies en ordre croissant telles que présentées dans l'équation (3.20).

Nous avons donc la relation suivante :

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Phi} \int_{-\Phi}^{\Phi} d\Phi_0 e^{i(\epsilon_n - \epsilon_{n'})\Phi_0} = \delta_{nn'}.$$

On pose $U(\eta_{n,m}) = \frac{1}{2\pi}$ et il ne reste qu'à trouver $K(n_0, m_0)$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 \frac{K(n_0, m_0)}{N(n_0, m_0)} \prod_{l,f=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_{l,f} \\ & \times \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{2\sigma^2}]} |1, 1\rangle \langle 1, 1| + \right. \\ & \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right) \frac{1}{2} (|1, 2\rangle + e^{i\eta_{1,2}} |2, 1\rangle) (\langle 1, 2| + e^{-i\eta_{1,2}} \langle 2, 1|) + \\ & e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{2\sigma^2}]} |2, 2\rangle \langle 2, 2| + \\ & \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 \\ & \left. \times (|1, 3\rangle + e^{i\eta_{1,3}} |3, 1\rangle) (\langle 1, 3| + e^{-i\eta_{1,3}} \langle 3, 1|) + \dots \right) = \mathbf{I}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Comme

$$\prod_{l,f=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\eta_{l,f} e^{i(p-k)\eta_{n,m}} = \delta_{pk},$$

la partie gauche de l'équation (3.29) devient

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 \frac{K(n_0, m_0)}{N(n_0, m_0)} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{2\sigma^2}]} |1, 1\rangle \langle 1, 1| + \right. \\
& \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 \frac{1}{2} (|1, 2\rangle \langle 1, 2| + |2, 1\rangle \langle 2, 1|) + \\
& e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{2\sigma^2}]} |2, 2\rangle \langle 2, 2| + \\
& \left. \frac{1}{4} \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 \frac{1}{2} (|1, 3\rangle \langle 1, 3| + |3, 1\rangle \langle 3, 1|) + \dots \right). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

On doit maintenant faire un choix judicieux pour $K(n_0, m_0)$ dans le but d'obtenir l'opérateur identité. En posant

$$\begin{aligned}
K(n_0, m_0) = N(n_0, m_0) & \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{2\sigma^2}]} \right)^{-1} |1, 1\rangle \langle 1, 1| + \right. \\
& 8 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 \right)^{-1} \\
& \times (|1, 2\rangle \langle 1, 2| + |2, 1\rangle \langle 2, 1|) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 e^{[-\frac{(2-n_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2-m_0)^2}{2\sigma^2}]} \right)^{-1} |2, 2\rangle \langle 2, 2| + \\
& 8 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dn_0 \int_{-\infty}^{\infty} dm_0 \left(e^{[-\frac{(1-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(3-m_0)^2}{4\sigma^2}]} + e^{[-\frac{(3-n_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{(1-m_0)^2}{4\sigma^2}]} \right)^2 \right)^{-1} \\
& \left. \times (|1, 3\rangle \langle 1, 3| + |3, 1\rangle \langle 3, 1|) + \dots \right), \quad (3.31)
\end{aligned}$$

l'équation (3.30) devient simplement $\sum_{n,m=1}^{\infty} |n, m\rangle \langle n, m| = I$.

On doit aussi s'assurer que nos états cohérents (3.27) donnent une bonne localisation de la particule dans la boîte. Les figures 3.9 et 3.10 illustrent une approximation de $|\psi(x, y)|^2$ pour les cinquante-sept premières énergies à différents temps. Pour ces deux graphiques, on a fixé $a = \pi$, $M = M_e$, $\phi_0 = 0.01$, $n_0 = 6$ et $m_0 = 4$.

La figure 3.9 montre que la particule est bien localisée. Dans ce cas, il faut que $\sigma > 1$ afin que la densité de probabilité soit concentrée dans la boîte. On a donc un graphique qui présente une localisation analogue à celle donnée par la figure 3.7,

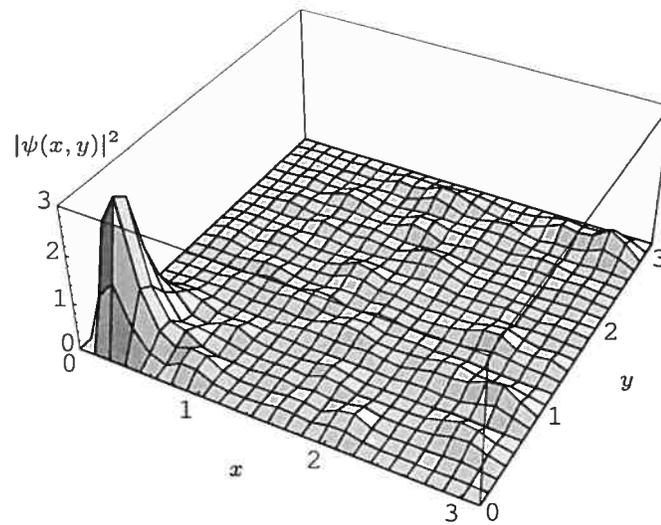


FIG. 3.9 – Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 0.01s$.

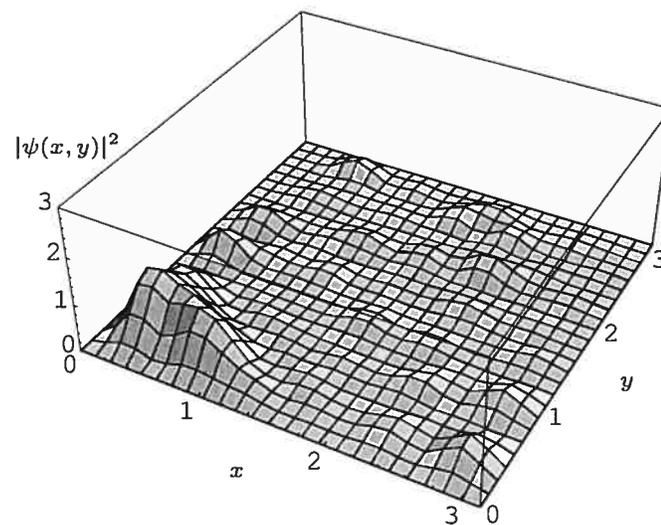


FIG. 3.10 – Approximation de la densité de probabilité en fonction de la position de la particule dans la boîte pour $t = 1000s$.

mais dont les états cohérents (3.27) vérifient maintenant les quatre propriétés mathématiques. De plus, cette approximation est sensiblement la même si l'on conserve les trente premières énergies et plus. La figure 3.10 montre que la localisation de la particule s'estompe dans le temps. En fait, pour un temps supérieur à 500s, la position de la particule n'est plus très précise dans la boîte.

3.4 Construction des états cohérents généralisés pour une particule dans une boîte en deux dimensions

Nous allons ici construire des états cohérents généralisés pour une particule dans une boîte en deux dimensions. Nous nous inspirons pour cela de ce que nous avons fait au chapitre 2 pour le cas d'un système général admettant des dégénérescences. Dans la section précédente, l'équation (3.20) nous donne les énergies en ordre croissant. Leurs états propres correspondants sont donnés par l'équation (3.22). Nous respectons maintenant les conditions initiales du chapitre 1. On peut donc utiliser les équations ((2.11)-(2.15)) afin de construire les opérateurs N , $H(N)$, $H(N + 1)$, $H(N - 1)$, a^+ et a^- pour ce système. En se servant des équations (2.5) et (2.6), on peut écrire les états cohérents généralisés pour la particule dans une boîte en deux dimensions comme

$$|z, \alpha, \boldsymbol{\eta}\rangle_{2d} = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n e^{-i\epsilon_n \alpha}}{(\epsilon(n))^{1/2}} |n, d_n\rangle_D, \quad (3.32)$$

où la constante de normalisation C_0 est donnée par

$$|C_0| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{\epsilon(n)} \right)^{-1/2} \quad (3.33)$$

toujours avec $\epsilon(n) = \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ et $\epsilon(0) = 1$.

Chapitre 4

Étude du modèle de Jaynes-Cummings

Le modèle de Jaynes-Cummings ^[15] décrit l'interaction entre un champ électromagnétique quantifié et un système atomique à 2 niveaux (spin $\frac{1}{2}$). L'hamiltonien de ce modèle, dans ce que l'on appelle l'approximation des ondes tournantes, s'écrit de la façon suivante ^[1,2,12,15,21] :

$$H_{JC} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})\sigma_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+), \quad (4.1)$$

où a^\dagger et a sont les opérateurs de création et d'annihilation habituels de l'oscillateur harmonique quantique. Les opérateurs $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ correspondent sous la forme matricielle aux matrices de Pauli. L'opérateur unité σ_0 correspond sous forme matricielle à la matrice identité (2×2) . Les opérateurs σ_\pm sont définis comme $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$. Les constantes physiques qui apparaissent sont la fréquence modale du champ électromagnétique (ω), la fréquence atomique (ω_0) et la constante de couplage (g) entre le champ de radiation et l'atome. Notons que la constante g sera positive dans les calculs qui suivront.

L'approximation des ondes tournantes que nous utilisons est valable seulement si

$$|\omega_0 - \omega| \ll \min(\omega_0, \omega).$$

Si nous introduisons un paramètre de décalage ϵ , qui peut être positif ou négatif, tel que :

$$\omega = \omega_0(1 + \epsilon), \quad (4.2)$$

alors, par l'approximation des ondes tournantes, on peut écrire :

$$|\epsilon| \ll 1 \text{ et } 1 + \epsilon \Rightarrow |\epsilon| \approx 0.$$

Nous allons dès lors considérer un nouvel hamiltonien obtenu à partir de H_{JC} en divisant par $\hbar\omega_0$. Il dépendra seulement de deux constantes ϵ et $\lambda = \frac{g}{\omega_0}$. Cela semble raisonnable car, dans une expérience donnée, la fréquence de l'atome est fixée et c'est la fréquence du champ de radiation que l'on fait varier. On peut donc écrire :

$$H = \frac{H_{JC}}{\hbar\omega_0} = (1 + \epsilon)(a^\dagger a + \frac{1}{2})\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_3 + \lambda(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+). \quad (4.3)$$

Ce chapitre est consacré à la description du spectre d'énergie de ce modèle. Nous commencerons par donner les valeurs propres et les fonctions propres de H telles que bien connu dans la littérature (section 4.1). Nous nous attarderons ensuite sur les caractéristiques générales du spectre d'énergie (section 4.2). Nous énoncerons aussi quelques résultats supplémentaires lorsque le paramètre de décalage ϵ est nul (section 4.3) et nous terminerons par un résumé de tous nos résultats (section 4.4).

4.1 Dérivation des énergies et états propres

Notre but sera de construire la matrice infinie correspondant au hamiltonien $H = (4.3)$ qui agit sur l'espace des états ($|0, -\rangle$, $|0, +\rangle$, $|1, -\rangle$, ... $|n, +\rangle$, $|n + 1, -\rangle$, ...) de la façon suivante :

$$H|0, -\rangle = \frac{\epsilon}{2}|0, -\rangle,$$

$$H|0, +\rangle = (1 + \frac{\epsilon}{2})|0, +\rangle + \lambda|1, -\rangle,$$

$$H|1, -\rangle = \lambda|0, +\rangle + (1 + 3\frac{\epsilon}{2})|1, -\rangle$$

et, ainsi de suite, de telle sorte que :

$$H|n, +\rangle = ((1 + \epsilon)n + 1 + \frac{\epsilon}{2})|n, +\rangle + \lambda\sqrt{n+1}|n+1, -\rangle,$$

$$H|n+1, -\rangle = \lambda\sqrt{n+1}|n, +\rangle + ((1 + \epsilon)(n+1) + \frac{\epsilon}{2})|n+1, -\rangle.$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 + \frac{\epsilon}{2} & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 + 3\frac{\epsilon}{2} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (1 + \epsilon)n + 1 + \frac{\epsilon}{2} & \lambda\sqrt{n+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\sqrt{n+1} & (1 + \epsilon)(n+1) + \frac{\epsilon}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

On peut donc réduire la matrice infinie représentant notre hamiltonien par une matrice H_c (1×1) et une série de matrices H_n (2×2), $n = 0, 1, 2, \dots$, de la façon suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{où } H_c = \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ et pour } n \in N \text{ fixé,} \quad (4.4)$$

$$H_n = \begin{pmatrix} (1 + \epsilon)n + 1 + \frac{\epsilon}{2} & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & (1 + \epsilon)(n+1) + \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque n , on peut diagonaliser H_n pour trouver les valeurs propres correspondant aux énergies de l'hamiltonien en cherchant la constante b dans :

$$\det(H_n - bI) = 0.$$

On obtient donc notre hamiltonien diagonalisé que l'on appelle H_{nd} :

$$H_{nd} = \begin{pmatrix} (1 + \epsilon)(n + 1) - \lambda r(n + 1) & 0 \\ 0 & (1 + \epsilon)(n + 1) + \lambda r(n + 1) \end{pmatrix},$$

avec $r(n) = \sqrt{\delta + n}$, $\delta = (\frac{\epsilon}{2\lambda})^2 \geq 0$. Les énergies de $H = (4.3)$ sont donc les valeurs propres :

$$\epsilon_0^- = \frac{\epsilon}{2}, \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{n+1}^- = (1 + \epsilon)(n + 1) + \lambda r(n + 1), \quad (4.8)$$

$$\epsilon_n^+ = (1 + \epsilon)(n + 1) - \lambda r(n + 1), \quad n \in N. \quad (4.9)$$

On peut aussi trouver les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres de $H = (4.3)$ en résolvant, pour un n fixé, les systèmes :

$$(H_n - \epsilon_{n+1}^- I) \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ y_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (H_n - \epsilon_n^+ I) \begin{pmatrix} x_{n,2} \\ y_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc les vecteurs propres suivants :

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ y_{n,1} \end{pmatrix} = |\epsilon_{n+1}^- \rangle = \sin \varphi(n + 1) |n, + \rangle + \cos \varphi(n + 1) |n + 1, - \rangle,$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,2} \\ y_{n,2} \end{pmatrix} = |\epsilon_n^+ \rangle = \cos \varphi(n + 1) |n, + \rangle - \sin \varphi(n + 1) |n + 1, - \rangle$$

ainsi que

$$|\epsilon_0^- \rangle = |0, - \rangle. \quad (4.12)$$

On a posé

$$\sin \varphi(n) = \frac{\lambda \sqrt{n}}{R(n)}, \quad \cos \varphi(n) = \frac{\frac{\epsilon}{2} + \lambda r(n)}{R(n)} \quad (4.13)$$

et

$$R(n) = \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2} + \lambda r(n)\right)^2 + \lambda^2 n} = \sqrt{2\lambda r(n) \left(\frac{\epsilon}{2} + \lambda r(n)\right)}. \quad (4.14)$$

L'utilisation de $\sin \varphi(n)$ et $\cos \varphi(n)$ est une notation commode qui allège grandement les calculs. On peut facilement vérifier que $(\sin \varphi(n))^2 + (\cos \varphi(n))^2 = 1$.

Mentionnons que les états propres (4.10), (4.11) et (4.12) et les énergies (4.7), (4.8) et (4.9) trouvés ici sont en accord avec les travaux de Bérubé ^[12] ainsi que de Daoud et Hussin ^[8].

4.2 Caractéristiques générales du spectre d'énergie

Nous allons, dans cette section, étudier le comportement du spectre d'énergie, donné par les équations (4.7), (4.8) et (4.9), en fonction de n , λ et ϵ . Celles-ci sont classées en deux groupes, d'une part celui dénoté $\{\epsilon_0^-; \epsilon_{n+1}^-, n \in N\}$ et d'autre part, celui dénoté $\{\epsilon_n^+, n \in N\}$.

Dans ce qui suit, nous allons donner, de façon tout-à-fait générale, le comportement des deux groupes d'énergie.

Proposition 1.1 : Les énergies ϵ_n^- sont strictement croissantes avec n .

Preuve : Il suffit pour cela de montrer que $\epsilon_{n+1}^- - \epsilon_n^- > 0$, $\forall |\epsilon| \ll 1$, $n \in N$.

Tout d'abord, montrons que $\epsilon_1^- - \epsilon_0^- > 0$. Ce cas est nécessaire car ϵ_0^- n'est pas contenu dans la définition de ϵ_{n+1}^- . On a

$$\epsilon_1^- - \epsilon_0^- = (1 + \epsilon) + \lambda \sqrt{\delta + 1} - \frac{\epsilon}{2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1}.$$

Or, $1 + \frac{\epsilon}{2} > 0$ puisque $\frac{|\epsilon|}{2} \ll 1$ et $\lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} > 0$ car $\lambda > 0$,

ce qui entraîne que

$$\epsilon_1^- - \epsilon_0^- = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} > 0.$$

Montrons maintenant le cas général $\epsilon_{n+1}^- - \epsilon_n^- > 0$, $n \in N \setminus \{0\}$. On a

$$\epsilon_{n+1}^- - \epsilon_n^- = 1 + \epsilon + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n} \right) > 0$$

car $1 + \epsilon > 0$, $\lambda > 0$ et $\left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n} \right) > 0$.

Proposition 1.2 : Les énergies ϵ_n^+ sont strictement croissantes avec n lorsque $\lambda < \lambda_0(\epsilon)$ où $\lambda_0(\epsilon) = ((1 + \epsilon)(3(1 + \epsilon) + \sqrt{8 + 16\epsilon + 9\epsilon^2}))^{\frac{1}{2}}$. Si $\lambda > \lambda_0(\epsilon)$, alors le spectre d'énergie a une partie décroissante et ensuite croissante. Si $\lambda = \lambda_0(\epsilon)$, alors, on a $\epsilon_0^+ = \epsilon_1^+$ et le reste du spectre d'énergie est ensuite strictement croissant.

Preuve : Pour étudier la croissance de ϵ_n^+ , il suffit de trouver pour quelles valeurs de λ , on a $\epsilon_{n+1}^+ - \epsilon_n^+ > 0$, $\forall n \in N$.

$$\epsilon_{n+1}^+ - \epsilon_n^+ = (1 + \epsilon) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 2} \right). \quad (4.15)$$

Étudions plus attentivement l'expression $\left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 2} \right)$ où $n \in N$. Pour cela, on peut poser $x = \left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1$ et étudier le comportement de $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ où $x \in R^+$. Cette fonction est strictement croissante sur $x \in R^+$, elle a un minimum qui vaut $f(x) = -1$ en $x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. La fonction $\left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 2} \right)$ est alors strictement croissante et elle est minimale lorsque $n = 0$.

Donc pour trouver les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (4.15) est positive, $\forall n \in N^+$, il suffit de chercher les valeurs de λ pour lesquelles cette équation est

positive avec $n = 0$. Ainsi, on doit chercher le signe de l'expression

$$(1 + \epsilon) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 2} \right)$$

en fonction de λ . Comme $\left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 2} \right) < 0$, alors

$$\lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 2} \right)$$

est une fonction de plus en plus petite à mesure que λ grandit. On résoud donc l'équation

$$(1 + \epsilon) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 2} \right) = 0.$$

En imposant que λ doit être positif, on obtient

$$\lambda_0(\epsilon) = ((1 + \epsilon)(3(1 + \epsilon) + \sqrt{8 + 16\epsilon + 9\epsilon^2}))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Si l'on fait l'approximation linéaire autour de $\epsilon \approx 0$, on obtient

$$\lambda_0(\epsilon) \approx (1 + \epsilon)(\sqrt{2} + 1).$$

Notons aussi que lorsque $\epsilon = 0$, l'équation (4.16) devient

$$\lambda_0(0) = \sqrt{2} + 1. \quad (4.17)$$

Proposition 1.3 : Le spectre d'énergie du modèle de Jaynes-Cummings admet au plus, des dégénérescences doubles.

Preuve : Comme les énergies ϵ_n^- sont strictement croissantes avec n (proposition 1.1) et que le spectre d'énergie ϵ_n^+ n'admet que des dégénérescences doubles (corollaire immédiat de la proposition 1.2), alors le spectre d'énergie du modèle de Jaynes-Cummings admet au plus, des dégénérescences triples. Supposons qu'il

puisse y avoir une dégénérescence triple. Elle est donc obligatoirement de la forme

$$\epsilon_0^- \text{ ou } \epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ = \epsilon_k^+,$$

où n , m et k sont des entiers.

Une condition nécessaire pour qu'une telle dégénérescence soit possible est que $\epsilon_0^+ > \epsilon_0^-$. On peut réécrire cette dernière condition en utilisant les équations (4.7) et (4.9) comme

$$(1 + \epsilon) - \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1} > \frac{\epsilon}{2},$$

qui est équivalent à

$$1 + \frac{\epsilon}{2} > \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1}.$$

Comme les deux termes de chaque côté de l'inégalité sont positifs, on peut l'élever au carré sans changer l'inégalité. On obtient alors

$$1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{4} > \lambda^2 \left(\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + 1 \right),$$

ou encore

$$\sqrt{1 + \epsilon} > \lambda. \tag{4.18}$$

Des équations (4.18) et (4.16), on peut écrire

$$\lambda < \sqrt{1 + \epsilon} < \lambda_0(\epsilon) = ((1 + \epsilon)(3(1 + \epsilon) + \sqrt{8 + 16\epsilon + 9\epsilon^2}))^{\frac{1}{2}}.$$

La proposition 1.2 nous apprend que, sous cette condition, le spectre d'énergie ϵ_m^+ est strictement croissant. On en conclut facilement que, dans ce cas, il ne peut pas exister de dégénérescence du type $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ et donc aucune dégénérescence triple de la forme ϵ_0^- ou $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ = \epsilon_k^+$ n'est permise.

Proposition 1.4 : On a $\epsilon_0^- = \epsilon_n^+ \iff n = \frac{\lambda^2 + \epsilon(\epsilon + 1)}{(1 + \epsilon)^2} - 1, \forall \frac{\lambda^2 + \epsilon(\epsilon + 1)}{(1 + \epsilon)^2} \in N^+$.

Preuve : Les équations (4.7) et (4.9) nous donnent

$$\begin{aligned}\epsilon_0^- = \epsilon_n^+ &\iff \frac{\epsilon}{2} = (1 + \epsilon)(n + 1) - \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} \\ &\iff n = \frac{\lambda^2 + \epsilon(\epsilon + 1)}{(1 + \epsilon)^2} - 1 \text{ où } n \in N.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Par exemple, si $n = 2$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \sqrt{6}$, l'équation (4.19) est vérifiée. On a alors $\epsilon_0^- = \epsilon_2^+$.

Proposition 1.5 : Soit m et n des entiers positifs, alors $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff (1 + \epsilon)(m - n) - \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1} \right) = 0$.

Preuve : Les équations (4.8) et (4.9) nous donnent

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ &\iff (1 + \epsilon)(n + 1) + \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} = \\ &(1 + \epsilon)(m + 1) - \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1}\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\iff (1 + \epsilon)(m - n) - \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Par exemple, pour $n = 2$, $m = 8$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{108 - 3\sqrt{973}} = 1.8987\dots$, l'équation (4.21) est vérifiée. On aura alors $\epsilon_3^- = \epsilon_8^+$.

Mentionnons qu'il aurait été possible de rassembler les deux dernières propositions en une seule. Nous avons volontairement omis de le faire pour conserver le simple signe $-$ de différence entre les deux côtés de l'équations (4.20).

Proposition 1.6 : Soit m un entier positif $\neq n$, alors $\epsilon_n^+ = \epsilon_m^+ \iff (1 + \epsilon)(m - n) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1} \right) = 0$.

Preuve : Puisque $m \neq n$, on peut poser sans perte de généralité $m > n$. De l'équation (4.9), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\epsilon_n^+ = \epsilon_m^+ &\iff (1 + \epsilon)(n + 1) - \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} = \\
&(1 + \epsilon)(m + 1) - \lambda \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1} \\
\iff (1 + \epsilon)(m - n) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + n + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + m + 1} \right) &= 0. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$, $m = 6$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3(30 + \sqrt{757})} = 6.5677\dots$, l'équation (4.22) est vérifiée. On a alors $\epsilon_2^+ = \epsilon_6^+$.

4.3 Caractéristiques et dégénérescences du spectre d'énergie pour le cas précis où $\epsilon = 0$

Remarquons maintenant que poser $\epsilon = 0$ est physiquement acceptable puisque l'on peut très bien faire varier la fréquence du champ de radiation (ω) pour qu'elle corresponde à la fréquence de l'atome (ω_0) qui elle est fixée. Nous nous intéressons donc au spectre d'énergie dans ce cas où il ne reste que le paramètre physique λ . Il peut être utile d'écrire à nouveau les énergies et les états propres correspondants dans ce cas. Les énergies s'écrivent alors comme :

$$\epsilon_0^- = 0, \quad (4.23)$$

$$\epsilon_{n+1}^- = n + 1 + \lambda\sqrt{n + 1}, \quad (4.24)$$

$$\epsilon_n^+ = n + 1 - \lambda\sqrt{n + 1}, \quad n \in N. \quad (4.25)$$

Les états propres se simplifient sous la forme :

$$|\epsilon_{n+1}^- \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|n, + \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|n + 1, - \rangle, \quad (4.26)$$

$$|\epsilon_n^+ \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|n, + \rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|n + 1, - \rangle, \quad (4.27)$$

$$|\epsilon_0^- \rangle = |0, - \rangle. \quad (4.28)$$

4.3.1 Identification des dégénérescences pour λ donné

Proposition 2.1 : Si λ est de la forme $\lambda = 2\sqrt{k}$ où $k \in N^+$, alors ϵ_n^+ atteint son minimum pour une valeur entière de n en $n_0 = \frac{\lambda^2}{4} - 1$. L'état propre correspondant $|\epsilon_{n_0}^+ \rangle$ est l'état fondamental pour la tour d'énergie ϵ_n^+ .

Preuve : Analysons $\epsilon_n^+ = (4.25)$ en prolongeant les valeurs discrètes de n au demi-axe réel. On obtient alors

$$g(x) = (x+1) - \lambda\sqrt{x+1}.$$

La figure 4.1 illustre la fonction $g(x)$ avec une valeur particulière de λ . Le minimum

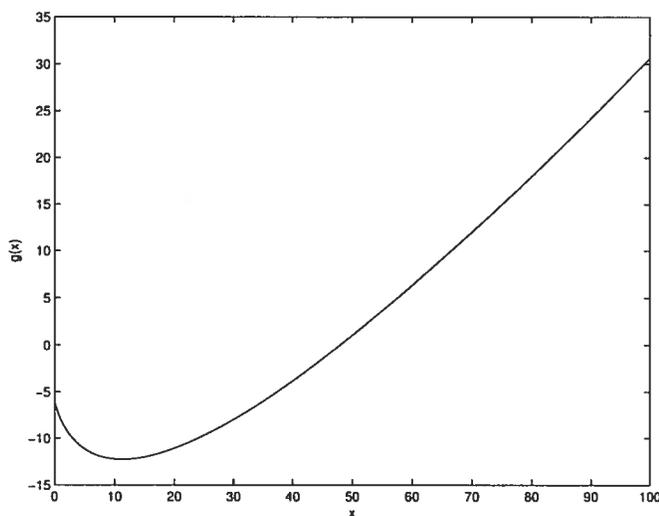


FIG. 4.1 – Graphique de $g(x)$ pour $\lambda = 7$.

de $g(x)$ est atteint pour

$$x = \frac{\lambda^2}{4} - 1. \quad (4.29)$$

Remplaçons x par $n \in N$ dans l'équation (4.29). On obtient donc

$$n_0 = \frac{\lambda^2}{4} - 1 \quad \iff \quad \lambda = 2\sqrt{k} \text{ où } k \in N^+.$$

La figure 4.2 est un exemple qui illustre bien la proposition 2.1.

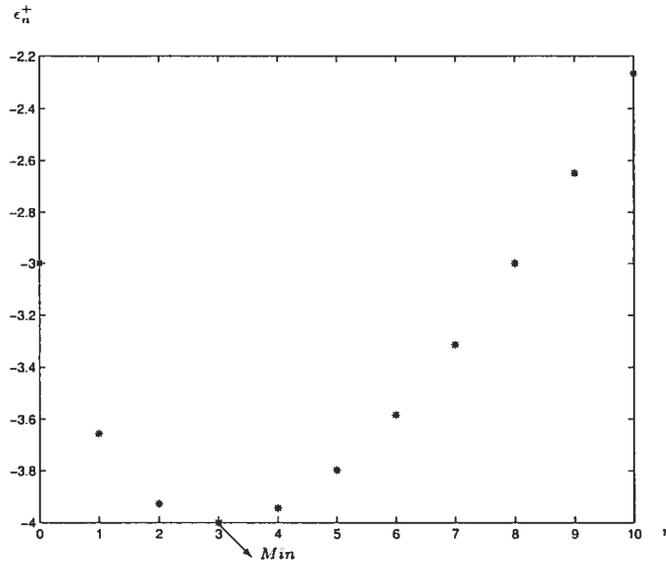


FIG. 4.2 – Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 4$. Le minimum est atteint pour une valeur entière de n en $n_0 = \frac{4^2}{4} - 1 = 3$.

Proposition 2.2 : Si $\lambda = \sqrt{k}$ où $k \in N^+$, alors $\epsilon_0^- = \epsilon_n^+$ avec $n + 1 = \lambda^2$.

Preuve : Des équations (4.23) et (4.25), nous avons

$$\epsilon_0^- = \epsilon_n^+ \iff n + 1 = \lambda^2 \iff \lambda = \sqrt{k} \text{ où } k \in N^+$$

car n doit être un entier positif.

La figure 4.3 illustre un cas où $\epsilon_0^- = \epsilon_n^+$ tel que montré par la proposition 2.2.

Proposition 2.3 : Soit m un entier positif $\neq n$, alors $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}$.

Preuve : Puisque $m \neq n$, on peut poser sans perte de généralité $m > n$. On peut écrire $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ en utilisant l'équation (4.25) comme

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff m - n + \lambda \left(\sqrt{1+n} - \sqrt{1+m} \right) = 0.$$

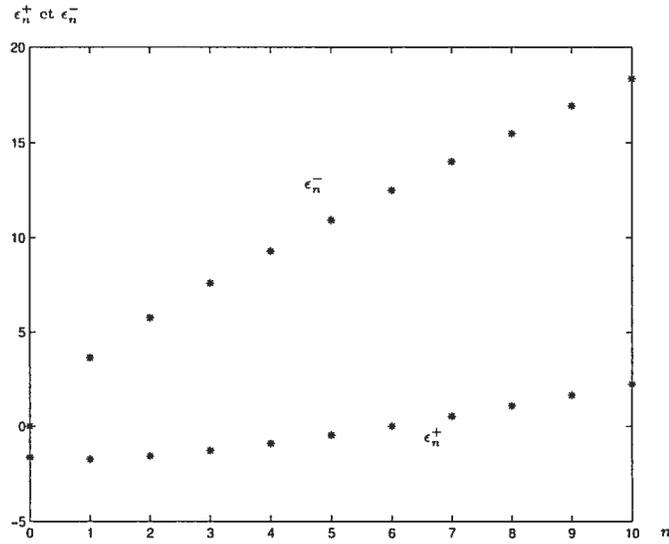


FIG. 4.3 – Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ superposé au spectre d'énergie ϵ_n^- avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7}$. Dans ce cas, $\epsilon_0^- = \epsilon_6^+$.

Si on isole λ dans cette dernière équation, on peut écrire $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ comme

$$\begin{aligned} \epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ &\iff \lambda = \sqrt{(2+m+n) + 2\sqrt{(1+n)(1+m)}} \\ &\iff \lambda = \sqrt{(\sqrt{m+1} + \sqrt{n+1})^2} = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Un cas particulier de cette proposition apparaît lorsque $m = n + 1$. On a alors :

$$\epsilon_{n+1}^+ = \epsilon_n^+ \iff \lambda = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}, \quad (4.31)$$

ce qui correspond à un minimum double à cause de l'allure du spectre $\{\epsilon_n^+, n \in N\}$ (voir figure 4.1). La figure 4.4 illustre un exemple d'un cas particulier où $\epsilon_{m=n+1}^+ = \epsilon_n^+$.

Étudions un dernier cas particulier de cette proposition. Pour $m = 0$, l'équation (4.30) devient

$$\epsilon_0^+ = \epsilon_n^+ \iff n = \lambda(\lambda - 2).$$

Ce qui ne peut être réalisé que si $\lambda \in N \setminus \{0, 1, 2\}$. La figure 4.5 illustre ce cas.

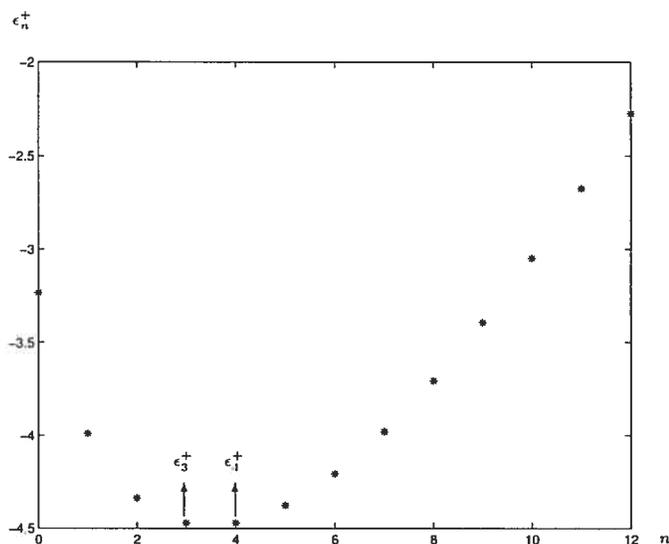


FIG. 4.4 – Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 2 + \sqrt{5} = \sqrt{3+1} + \sqrt{4+1}$.

Proposition 2.4 : Soit m et n des entiers positifs, alors $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}$.

Preuve : Des équations (4.24) et (4.25), on obtient

$$\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff (m-n) - \lambda (\sqrt{1+n} + \sqrt{1+m}) = 0.$$

Si on isole λ dans cette dernière équation, on obtient encore une fois une expression de λ en termes de m et n que l'on peut écrire comme

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{(2+m+n) - 2\sqrt{(1+n)(1+m)}} \\ \iff \lambda &= \sqrt{(\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1})^2} = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La figure 4.6 illustre un cas où $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+$.

Mentionnons qu'il aurait été possible de rassembler les propositions 2.2 et 2.4 en une seule. Nous avons volontairement omis de le faire pour conserver le simple signe – de différence entre les équations (4.32) et (4.30).

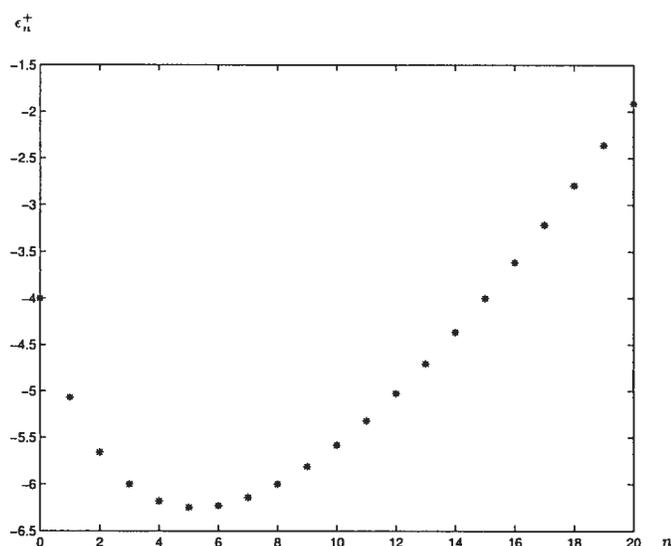


FIG. 4.5 – Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = 5$. Dans ce cas, $\epsilon_0^+ = \epsilon_{15}^+$.

4.3.2 Calcul du nombre de dégénérescences possibles

Nous avons vu dans la sous-section précédente qu'il est relativement facile de trouver, lorsque $\epsilon = 0$, un λ pour lequel $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+$ ou $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ si m et n sont bien choisis. En d'autres mots, pour certains choix de m et n , il est facile de trouver un λ tel qu'il y ait des dégénérescences doubles du spectre d'énergie de Jaynes-Cummings.

Cependant, ce qui est moins évident, c'est de trouver toutes les dégénérescences doubles possibles pour un λ donné. C'est précisément ce que nous allons montrer en utilisant une méthode qui consiste à étudier les cas particuliers de λ entier, fractionnaire et certains irrationnels.

Proposition 3.1 : Soit $\lambda \in N^+$, alors

$$\epsilon_{n_q+1}^- = \epsilon_{m_q}^+ \iff m_q = (\lambda + q)^2 - 1, \quad n_q = q^2 - 1,$$

où $q \in N^+$. On a donc une infinité de dégénérescences doubles libellées en termes du paramètre q .

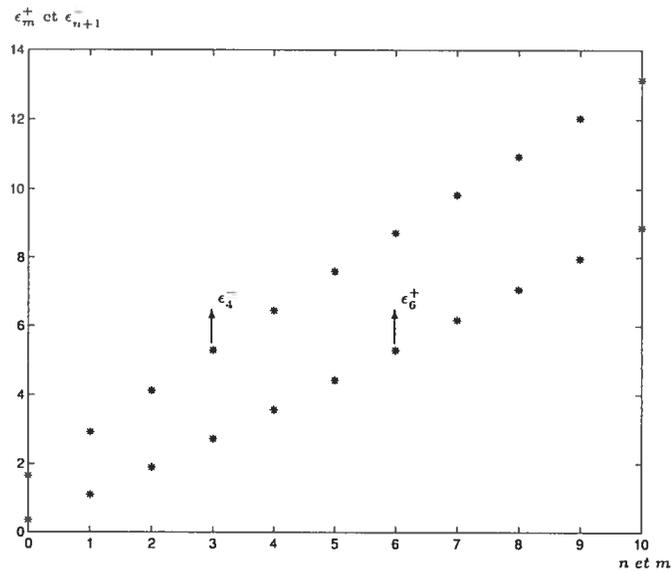


FIG. 4.6 – Graphique du spectre d'énergie ϵ_n^+ superposé au spectre d'énergie ϵ_{n+1}^- avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7} - 2 = \sqrt{6+1} - \sqrt{3+1}$. Dans ce cas, il y a donc une dégénérescence en $n = 3$ et $m = 6$, ce qui signifie que $\epsilon_4^- = \epsilon_6^+$.

Preuve : L'équation (4.32) de la proposition 2.4 nous donne

$$\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}.$$

Comme, par hypothèse, $\lambda \in N^+$, on a nécessairement $\sqrt{m+1} \in N^+$ et $\sqrt{n+1} \in N^+$, c'est-à-dire

$$m+1 = p^2, \quad n+1 = q^2, \quad \text{où } p, q \in N^+.$$

Comme $\lambda = p - q$, on en déduit aisément que

$$\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff n = q^2 - 1 \text{ et } m = p^2 - 1 = (\lambda + q)^2 - 1.$$

La proposition en découle.

La figure 4.7 illustre ce type de dégénérescence.

Proposition 3.2 : Soit $\lambda \in N^+$.

$$\epsilon_{m_q}^+ = \epsilon_{n_q}^+ \iff m_q = (\lambda - q)^2 - 1 \text{ et } n_q = q^2 - 1,$$

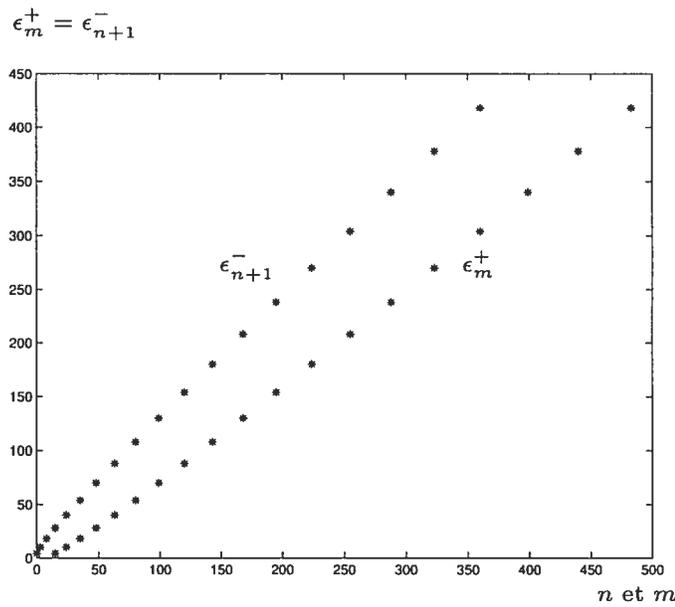


FIG. 4.7 – Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 3$: dégénérescences de type $\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^-$ pour $(m = 15, n = 0)$, $(m = 24, n = 3)$, $(m = 35, n = 8)$, $(m = 48, n = 15)$, $(m = 63, n = 24)$, $(m = 80, n = 35)$, etc...

où $q \in N^+$, $0 < q \leq \left[\frac{\lambda-1}{2} \right]$ ($\left[\right]$ signifie la partie entière de). On a donc un nombre fini de dégénérescences de ce type.

Preuve : L'équation (4.30) de la proposition 2.3 nous donne

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}.$$

On peut poser sans perte de généralité que $m > n$. On a alors $\lambda \in N^+ \iff \sqrt{m+1} \in N^+$ et $\sqrt{n+1} \in N^+$, c'est-à-dire

$$m+1 = p^2, \quad n+1 = q^2, \quad \text{où } p, q \in N^+.$$

Comme nous avons $\lambda = p + q$, on obtient les valeurs de m et n pour lesquelles il y a des dégénérescences :

$$m_q = (\lambda - q)^2 - 1,$$

$$n_q = q^2 - 1.$$

Comme $m_q, n_q \geq 0$ et $m_q > n_q$, on obtient une contrainte sur les valeurs possibles de q :

$$0 < q \leq \left\lfloor \frac{\lambda - 1}{2} \right\rfloor.$$

Il y a donc exactement $\left\lfloor \frac{\lambda - 1}{2} \right\rfloor$ dégénérescences doubles de type $\epsilon_{m_q}^+ = \epsilon_{n_q}^+$.

La figure 4.8 illustre ce type de dégénérescences.

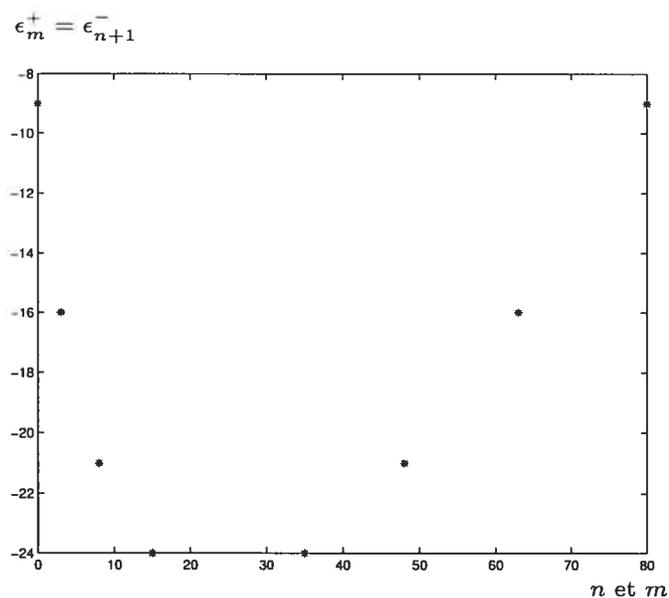


FIG. 4.8 – Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 10$: dégénérescences de type $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ pour $(m = 35, n = 15)$, $(m = 48, n = 8)$, $(m = 63, n = 3)$, $(m = 80, n = 0)$.

Proposition 3.3 : Si λ est un nombre fractionnaire de la forme p/q où $p, q \in N^+$ et $p/q \notin N$, alors il n'y a aucune dégénérescence possible.

Preuve : Les propositions 2.3 et 2.4 stipulent qu'une dégénérescence est possible pour des valeurs de λ telles que :

$$\lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1} \text{ ou } \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}, \quad m, n \in N.$$

Or, la somme ou la différence de deux racines carrées de nombres entiers ne peut pas donner un nombre fractionnaire non entier.

Nous avons donc étudié les dégénérescences dans les cas où $\lambda \in N^+$ et λ est un

nombre fractionnaire de la forme p/q où $p, q \in N^+$ et $p/q \notin N$. Continuons notre chemin sur la droite des réels et étudions maintenant le cas où λ est irrationnel. Commençons par un cas particulier dans ce contexte.

Par exemple, prenons $\lambda = \sqrt{6}$. Par la proposition 2.3, on peut écrire

$$\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}.$$

On veut donc écrire $\sqrt{6}$ sous la forme $\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}$ pour en extraire toutes les dégénérescences de la forme $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+$.

$$\sqrt{6} = \sqrt{6}(2-1) = \sqrt{24} - \sqrt{6} \implies \text{dégénérescence en } (m=23, n=5)$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{6}(3-2) = \sqrt{63} - \sqrt{24} \implies \text{dégénérescence en } (m=62, n=23)$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{6}(4-3) = \sqrt{96} - \sqrt{63} \implies \text{dégénérescence en } (m=95, n=62)$$

⋮

Dans cet exemple, il y a donc une infinité de cas où $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+$. Cet exemple est en fait un cas particulier de la proposition 3.4 que nous énonçons ici de façon formelle.

Proposition 3.4 : Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r}$ avec $k, r \in N^+$ et r n'est pas un multiple d'un carré parfait, alors

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^- \iff m_q = r(k+q)^2 - 1, \quad n_q = rq^2 - 1,$$

où $q \in N^+$.

Preuve : Par la proposition 2.4, on sait que

$$\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}. \quad (4.33)$$

On peut écrire $k\sqrt{r}$ comme

$$(k+q)\sqrt{r} - q\sqrt{r} = \sqrt{r(k+q)^2} - \sqrt{rq^2}, \quad (4.34)$$

où $q \in N^+$.

Si l'on réunit les équations (4.33) et (4.34), on obtient les couples (m_q, n_q) possibles pour lesquelles $\epsilon_{n_q+1}^- = \epsilon_{m_q}^+$:

$$m_q = r(k+q)^2 - 1, \quad n_q = rq^2 - 1. \quad (4.35)$$

Il reste maintenant à montrer que l'équation (4.33) donne bien toutes les dégénérescences possibles de la forme $\epsilon_{n+1}^- = \epsilon_m^+$.

Soit $\alpha, \beta \in N^+$, on veut montrer que $\sqrt{m+1} = \alpha\sqrt{r}$ et $\sqrt{n+1} = \beta\sqrt{r}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lambda = k\sqrt{r} = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}. \quad (4.36)$$

Posons $m+1 = dm'$ et $n+1 = dn'$ où d est le plus grand commun diviseur entre $m+1$ et $n+1$. Donc m' et n' sont premiers entre eux. Si on élève l'équation (4.36) au carré, on obtient

$$m+1 - 2\sqrt{(m+1)(n+1)} + n+1 = k^2r. \quad (4.37)$$

Par hypothèse, on sait que $(m+1+n+1) \in N^+$ de même que $(k^2r) \in N^+$. L'équation (4.37) est vraie

$$\iff \sqrt{(m+1)(n+1)} \in N^+$$

$$\iff \sqrt{dm'dn'} = d\sqrt{m'n'} \in N^+ \iff \sqrt{m'n'} \in N^+. \quad (4.38)$$

Donc, l'équation (4.38) et le fait que m' et n' soient premiers entre eux implique

que

$$\sqrt{m'n'} \in N^+ \iff \sqrt{m'} = a \text{ et } \sqrt{n'} = b,$$

où a et $b \in N^+$. Les quantités m' et n' sont donc des carrés parfaits. On peut maintenant réécrire l'équation (4.36) comme

$$\sqrt{dm'} - \sqrt{dn'} = k\sqrt{r} \quad (4.39)$$

$$\iff \sqrt{d}(a - b) = k\sqrt{r}$$

$$\iff d = \frac{k^2 r}{(a - b)^2} \in N^+ \quad (4.40)$$

Il y a deux possibilités pour que l'équation (4.40) soit valide.

1) Soit $r = s(a - b)^2$, où s est un entier positif. Dans ce cas, on obtient $\sqrt{r} = (a - b)\sqrt{s}$ où $a - b \geq 1$ car $m > n$. La quantité $a - b$ ne peut être strictement supérieure à 1 car, par hypothèse, \sqrt{r} est déjà sous la forme simplifiée. Il reste donc la condition $a - b = 1$, alors

$$\sqrt{d} = k\sqrt{r}.$$

Ce qui nous donne

$$\sqrt{m+1} = \sqrt{dm'} = ka\sqrt{r} = \alpha\sqrt{r}, \quad \sqrt{n+1} = \sqrt{dn'} = kb\sqrt{r} = \beta\sqrt{r}.$$

2) Soit $\frac{k^2}{(a-b)^2} = p^2$, où p est un entier positif. L'équation (4.40) nous donne :

$$d = p^2 r.$$

La figure 4.9 illustre ce type de dégénérescences.

Proposition 3.5 : Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r}$ avec $k, r \in N^+$ et r n'est pas un multiple d'un carré parfait, alors

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff m_q = r(k - q)^2 - 1, \quad n_q = rq^2 - 1, \quad \text{avec } 0 < q \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor,$$

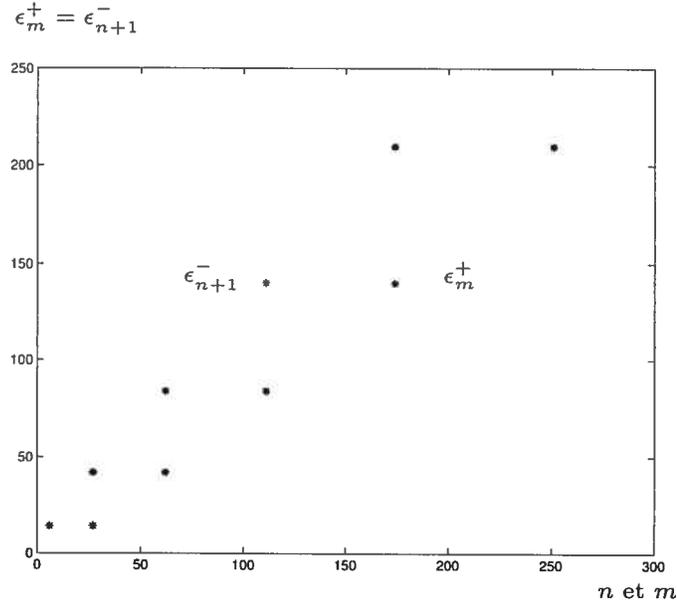


FIG. 4.9 – Spectre d'énergie pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{7}$: dégénérescences de type $\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^-$ pour $(m = 27, n = 6)$, $(m = 62, n = 27)$, $(m = 111, n = 62)$, $(m = 174, n = 111)$, $(m = 251, n = 174)$, etc...

où $q \in N^+$. Le spectre d'énergie ϵ_n^+ aura donc $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ dégénérescences doubles.

Preuve : Par la proposition 2.3, on sait que

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}. \quad (4.41)$$

On peut écrire $\lambda = k\sqrt{r}$ comme

$$(k-q)\sqrt{r} + q\sqrt{r} = \sqrt{r(k-q)^2} + \sqrt{rq^2}, \quad (4.42)$$

où $q \in N^+$. Si l'on réunit les équations (4.41) et (4.42), on constate que si

$$m_q = r(k-q)^2 - 1 \text{ et } n_q = rq^2 - 1, \quad (4.43)$$

alors $\epsilon_{m_q}^+ = \epsilon_{n_q}^+$. Or pour respecter les conditions initiales voulant que $n > 0$ et

$m > n$, il faut absolument imposer la condition suivante sur q :

$$0 < q \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor.$$

Il reste maintenant à montrer que l'équation (4.43) donne bien toutes les dégénérescences possibles de la forme $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$. La preuve est similaire à celle de la proposition 3.4. Soit $\alpha, \beta \in N^+$. on veut montrer que $\sqrt{m+1} = \alpha\sqrt{r}$ et $\sqrt{n+1} = \beta\sqrt{r}$ avec $\alpha + \beta = k$ est une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lambda = k\sqrt{r} = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}. \quad (4.44)$$

Posons $m+1 = dm'$ et $n+1 = dn'$ où d est le plus grand commun diviseur entre $m+1$ et $n+1$. Donc m' et n' sont premiers entre eux. Si l'on élève l'équation (4.44) au carré, on obtient

$$m+1 + 2\sqrt{(m+1)(n+1)} + n+1 = k^2r. \quad (4.45)$$

On sait que $(m+1+n+1) \in N^+$ et aussi que $(k^2r) \in N^+$ par hypothèse. L'équation (4.45) est donc valide

$$\iff \sqrt{(m+1)(n+1)} \in N^+$$

$$\iff \sqrt{dm'dn'} = d\sqrt{m'n'} \in N^+ \iff \sqrt{m'n'} \in N^+. \quad (4.46)$$

Donc, l'équation (4.46) et le fait que m' et n' soient premiers entre eux implique que

$$\sqrt{m'n'} \in N^+ \iff \sqrt{m'} = a \text{ et } \sqrt{n'} = b,$$

où a et $b \in N^+$. Les quantités m' et n' sont donc des carrés parfaits. On peut

maintenant réécrire l'équation (4.44) comme

$$\sqrt{dm'} + \sqrt{dn'} = k\sqrt{r} \quad (4.47)$$

$$\iff \sqrt{d}(a+b) = k\sqrt{r}$$

$$\iff d = \frac{k^2 r}{(a+b)^2} \in N^+. \quad (4.48)$$

On en déduit, comme pour la preuve de la proposition 2.4 que

$$\frac{k^2}{(a+b)^2} = p^2,$$

où p est un entier positif. L'équation (4.48) est respectée

$$\iff d = p^2 r. \quad (4.49)$$

Dans ce cas, l'équation (4.47) est donc valide

$$\iff \sqrt{dm'} = ap\sqrt{r} = \alpha\sqrt{r} \text{ et } \sqrt{dn'} = bp\sqrt{r} = \beta\sqrt{r}, \quad (4.50)$$

où $\alpha, \beta \in N^+$. En remplaçant dn' et dm' par $n+1$ et $m+1$ respectivement, on obtient finalement que

$$\sqrt{m+1} = \alpha\sqrt{r} \text{ et } \sqrt{n+1} = \beta\sqrt{r}.$$

L'équation (4.43) donne donc toutes les dégénérescences possibles de la forme $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$. La condition $0 < q < \left[\frac{k-1}{2}\right]$ nous dit qu'il y a exactement $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ dégénérescences doubles de ce type.

Les figures 4.10 et 4.11 illustre ce type de dégénérescences.

Proposition 3.6 : Soit $(k, r, p \text{ et } s) \in N^+$ où $r \neq s$ et r, s ne sont pas des carrés parfaits.

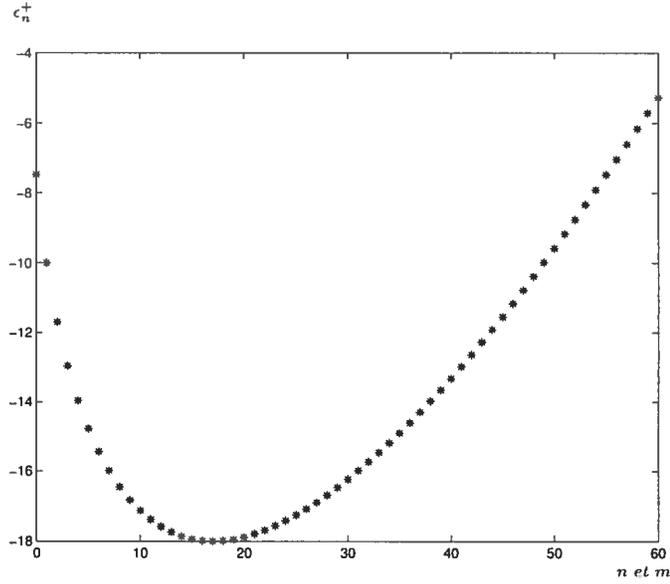


FIG. 4.10 – Spectre d'énergie ϵ_n^+ avec $\epsilon = 0$ et $\lambda = \sqrt{72}$. On a en fait deux dégénérescences doubles situées en $(m = 49, n = 1)$, $(m = 31, n = 7)$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r} + p\sqrt{s}$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=k^2r-1}^+ = \epsilon_{n=p^2s-1}^+$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r} - p\sqrt{s}$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=k^2r-1}^+ = \epsilon_{n=p^2s}^-$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r} + p$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=k^2r-1}^+ = \epsilon_{n=p^2-1}^+$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{r} - p$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=k^2r-1}^+ = \epsilon_{n=p^2}^-$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = p + k\sqrt{r}$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=p^2-1}^+ = \epsilon_{n=k^2r-1}^+$.

Si λ s'écrit comme $\lambda = p - k\sqrt{r}$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double dont l'énergie vaut $\epsilon_{m=p^2-1}^+ = \epsilon_{n=k^2r}^-$.

Preuve : De la proposition 2.3, on peut écrire

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}$$

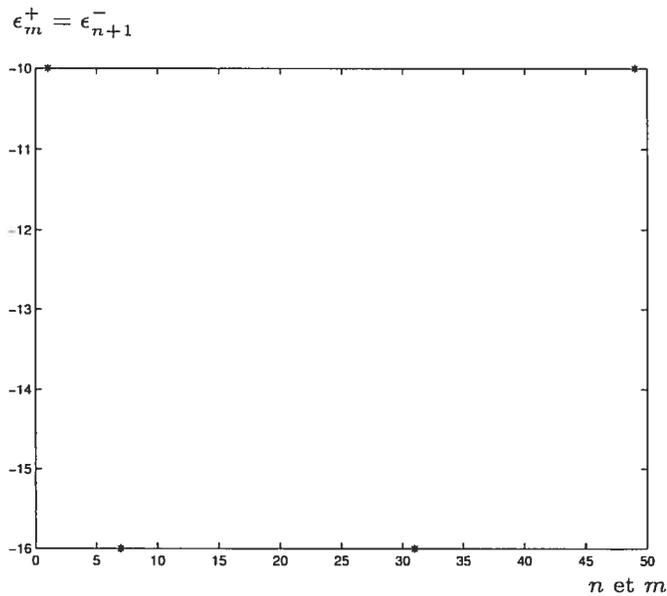


FIG. 4.11 – Énergie dégénérées pour $\epsilon = 0$, $\lambda = \sqrt{72}$: $\epsilon_{49}^+ = \epsilon_1^+$, $\epsilon_{31}^+ = \epsilon_7^+$.

et de la proposition 2.4, on peut écrire

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^- \iff \lambda = \sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}.$$

Montrons d'abord l'existence des dégénérescences. Si $\lambda = k\sqrt{r} + p\sqrt{s} = \sqrt{k^2r} + \sqrt{p^2s}$, alors de la proposition 2.3, on déduit que $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ pour $m = k^2r - 1$ et $n = p^2s - 1$. Si $\lambda = k\sqrt{r} - p\sqrt{s} = \sqrt{k^2r} - \sqrt{p^2s}$, alors de la proposition 2.4, on déduit que $\epsilon_m^+ = \epsilon_{n+1}^-$ pour $(m = k^2r - 1, n = p^2s - 1)$... On peut démontrer l'existence des dégénérescences des autres cas de la même façon.

Il ne reste maintenant qu'à démontrer l'unicité de chacune de ces dégénérescences. Commençons par étudier le cas où $\lambda = k\sqrt{r} + p\sqrt{s} = \sqrt{k^2r} + \sqrt{p^2s}$. Montrons que

$$\sqrt{k^2r} + \sqrt{p^2s} = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1} \iff m+1 = k^2r \text{ et } n+1 = p^2s.$$

Nous aurons alors démontré que $\epsilon_{m=k^2r-1}^+ = \epsilon_{n=p^2s-1}^+$ est bel et bien la seule

dégénérescence possible dans ce cas. On suppose que

$$\sqrt{k^2r} + \sqrt{p^2s} = \sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}. \quad (4.51)$$

Posons $m+1 = dm'$ et $n+1 = dn'$ où d est le plus grand commun diviseur entre $m+1$ et $n+1$. Alors m' et n' sont premiers entre eux. Si l'on élève l'équation (4.51) au carré, on obtient

$$k^2r + 2kp\sqrt{rs} + p^2s = dm' + 2d\sqrt{m'n'} + dn'. \quad (4.52)$$

Il y a donc deux possibilités pour que l'équation (4.52) soit respectée :

1°) $\sqrt{m'n'}$ est entier, alors m' et n' sont des carrés parfaits puisqu'ils sont premiers entre eux. On peut donc écrire $\sqrt{m'} = a$ et $\sqrt{n'} = b$ où a et $b \in N^+$. L'équation (2.28) devient

$$k^2r + 2kp\sqrt{rs} + p^2s = dm' + 2dab + dn'. \quad (4.53)$$

Comme $(k^2r, p^2s, dm', 2dab, dn') \in N^+$, l'équation (4.53) est vraie $\iff \sqrt{rs}$ est un entier. Cette dernière affirmation est cependant absurde puisque, par hypothèse, $k\sqrt{r} + p\sqrt{s}$ ne peut pas se simplifier davantage. \sqrt{r} et \sqrt{s} n'ont donc pas de racine en commun. \sqrt{rs} n'est pas entier, $\sqrt{m'n'}$ ne peut donc pas être un entier.

2°) $\sqrt{m'n'}$ n'est pas un entier et de l'équation (4.52), on identifie les parties entières et non entières de chaque côté de l'équation. On obtient donc

$$2kp\sqrt{rs} = 2d\sqrt{m'n'}, \quad k^2r + p^2s = dm' + dn',$$

ou encore

$$k^2rp^2s = (m+1)(n+1), \quad k^2r + p^2s = m+1 + n+1. \quad (4.54)$$

On peut simplifier le système d'équation (4.54) en posant $k^2r = e$, $p^2s = f$,

$(m + 1) = g$ et $n + 1 = h$. Notons que e, f, g et h sont des entiers positifs. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$ef = gh, \quad e + f = g + h. \quad (4.55)$$

Montrons que le système d'équations (4.55) est satisfait $\iff e = g$ et $f = h$. Nous aurons alors montré que

$$\sqrt{m + 1} + \sqrt{n + 1} = \sqrt{k^2 r} + \sqrt{p^2 s} \iff m + 1 = k^2 r \text{ et } n + 1 = p^2 s,$$

ce qui conclura notre preuve.

$$\text{Soit } e + f = S \text{ et } ef = P, \quad (4.56)$$

montrons qu'il n'existe aucun nombre autre que e et f tel que le système d'équation (4.56) soit respecté. Voici tous les entiers positifs e et f dont la somme donne S :

$$e = S - 1 \quad f = 1$$

$$e = S - 2 \quad f = 2 \dots$$

$$\text{jusqu'à } e = S - \left\lfloor \frac{S-1}{2} \right\rfloor, \quad f = \left\lfloor \frac{S-1}{2} \right\rfloor.$$

Ce qui est équivalent à écrire

$$e = S - q, \quad f = q \quad \forall 1 \leq q \leq \left\lfloor \frac{S-1}{2} \right\rfloor.$$

Le produit de f et e peut donc s'écrire comme

$$ef = (S - q)q. \quad (4.57)$$

Montrons que le produit $ef = (S - q)q$ est strictement croissant avec q . Nous aurons alors montré que l'équation (4.55) est vrai $\iff e = g$ et $f = h$. Pour ce faire, il

suffit de vérifier que

$$(S - q)q - (S - (q - 1))(q - 1) > 0, \quad \forall 1 \leq q \leq \left\lceil \frac{S-1}{2} \right\rceil. \quad (4.58)$$

Mais, on a

$$(S - q)q - (S - (q - 1))(q - 1) = -2q + 1 + S.$$

Comme la valeur maximale que q peut prendre est $\left\lceil \frac{S-1}{2} \right\rceil$, on peut donc écrire

$$-2q + 1 + S \geq -2 \left\lceil \frac{S-1}{2} \right\rceil + 1 + S \geq -S + 1 + 1 + S = 2 > 0,$$

et l'équation (4.58) est satisfaite.

Nous venons de montrer l'unicité de la dégénérescence $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ lorsque ($m = k^2r - 1$, $n = p^2s - 1$) dans le cas où $\lambda = k\sqrt{r} + p\sqrt{s} = \sqrt{k^2r} + \sqrt{p^2s}$.

La démonstration de l'unicité de la dégénérescence dans le cas où $\lambda = k\sqrt{r} - p\sqrt{s} = \sqrt{k^2r} - \sqrt{p^2s}$, $\lambda = k\sqrt{r} \pm p = \sqrt{k^2r} \pm \sqrt{p^2}$, ainsi que $\lambda = p \pm k\sqrt{r} = \sqrt{p^2} \pm \sqrt{k^2r}$ est similaire à la preuve du cas précédent. On omettra donc d'écrire cette preuve. Ceci complète la preuve de la proposition 3.6.

Proposition 3.7 : Si $\lambda \neq 1$ et que l'énergie fondamentale (la plus basse énergie) est dégénérée, alors c'est la seule dégénérescence possible.

Preuve : On sait que l'énergie fondamentale ne fait jamais partie du groupe $\{\epsilon_{n+1}^-\}$. Les seuls types de dégénérescences possibles pour l'énergie la plus basse sont donc de la forme $\epsilon_0^- = \epsilon_n^+$ et $\epsilon_m^+ = \epsilon_{m+1}^+$ où $n, m \in N$. Or, des équations (4.23), (4.25) et (4.17), on a

$$\epsilon_{fond} = \epsilon_0^- = \epsilon_n^+ \iff \lambda = 1 \text{ et } n = 0,$$

ce qui est rejeté par l'hypothèse de départ $\lambda \neq 1$. Sous cette condition, le seul type de dégénérescence possible pour la plus basse énergie est donc de la forme

$\epsilon_m^+ = \epsilon_{m+1}^+$. De la proposition 2.3, on a nécessairement que

$$\epsilon_m^+ = \epsilon_{m+1}^+ \iff \lambda = \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2}.$$

Comme deux entiers consécutifs ne peuvent être tous deux des carrés parfaits, on retombe donc sur une valeur de λ qui correspond à un des cas de la proposition 3.6. Notre énergie fondamentale est donc la seule à être dégénérée.

4.4 Résumé des résultats

Il peut être utile de présenter un sommaire de toutes les propositions que nous venons d'énoncer et de prouver. Les quatre premiers résultats sont donnés pour tout décalage ϵ . Nous regarderons ensuite les cas où $\epsilon = 0$.

Résultat 1. Les énergies ϵ_n^- , données par les équations (4.7) et (4.8), sont strictement croissantes avec n et ≥ 0 (sauf éventuellement pour ϵ_0^- lorsque $\epsilon < 0$). Pour cette catégorie d'énergie, l'énergie fondamentale est donc ϵ_0^- qui n'est égal à zéro que si $\epsilon = 0$.

Le comportement du spectre d'énergie ϵ_n^+ donné par l'équation (4.9) dépend de la valeur du paramètre λ ce qui donne le résultat suivant :

Résultat 2. Les énergies $\{\epsilon_n^+\}$ sont caractérisées par le fait qu'il existe une valeur de λ que l'on note $\lambda_0(\epsilon)$ donnée par $\lambda_0(\epsilon) = ((1+\epsilon)(3(1+\epsilon) + \sqrt{8 + 16\epsilon + 9\epsilon^2}))^{\frac{1}{2}}$ telle que :

- pour $\lambda < \lambda_0(\epsilon)$, les énergies sont strictement croissantes avec n ;
- pour $\lambda = \lambda_0(\epsilon)$, l'énergie fondamentale est dégénérée, c'est-à-dire $\epsilon_0^+ = \epsilon_1^+$ et les autres énergies sont strictement croissantes avec n ;
- pour $\lambda > \lambda_0(\epsilon)$, à mesure que n augmente, le spectre a une partie décroissante et ensuite croissante.

Mentionnons que la valeur critique $\lambda_0(\epsilon)$ est une fonction strictement croissante de ϵ pour $\epsilon \in [-1, 1]$, $\lambda_0(-1) = 0$ et tel que $\lambda_0(\epsilon) \approx (1+\epsilon)(1+\sqrt{2})$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. L'énergie fondamentale peut être négative et dégénérée (par exemple, lorsque $\lambda =$

$\lambda_0(0)$, on obtient $\epsilon_0^+ = \epsilon_1^+ = -\sqrt{2}$).

Le comportement du spectre complet d'énergie est donné par le résultat suivant :

Résultat 3. Le spectre d'énergie complet admet au plus, des dégénérescences doubles. Elles peuvent être du type $\epsilon_m^+ = \epsilon_n^+$ (ceci apparaît seulement pour $\lambda \geq \lambda_0(\epsilon)$) et/ou $\epsilon_k^- = \epsilon_l^+$, m, n, k, l étant différents les uns des autres.

Résultat 4. On peut énoncer les propositions 1.4, 1.5 et 1.6 sous la forme suivante :

$$(1 + \epsilon)(l_0) + \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + l + 1} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + l + l_0 + 1} \right) = 0$$

$$\iff \epsilon_l^+ = \epsilon_{l+l_0}^+, \quad l \in N, \quad l_0 \in N^+; \quad (4.59)$$

$$(1 + \epsilon)(k_0) - \lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + k} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)^2 + k + k_0} \right) = 0$$

$$\iff \epsilon_{k+k_0-1}^+ = \epsilon_k^-, \quad k \in N, \quad k_0 \in N^+. \quad (4.60)$$

Les résultats qui suivent sont maintenant donnés pour un décalage nul ($\epsilon = 0$).

Résultat 5. On peut énoncer les propositions 2.2, 2.3 et 2.4 sous la forme suivante :

$$\lambda = \sqrt{l + l_0} + \sqrt{l} \iff \epsilon_{l+l_0-1}^+ = \epsilon_{l-1}^+, \quad l, \quad l_0 \in N^+; \quad (4.61)$$

$$\lambda = \sqrt{k + k_0} - \sqrt{k} \iff \epsilon_{k+k_0-1}^+ = \epsilon_k^-, \quad k \in N, \quad k_0 \in N^+. \quad (4.62)$$

En particulier lorsque $\lambda = p\sqrt{r}$, $p, r \in N^+$, on a toujours des dégénérescences. Dans ce cas, les deux types de dégénérescences apparaissent lorsque $\lambda \geq \lambda_0 = \lambda_0(0) = 1 + \sqrt{2}$. Pour chacun des autres cas où λ est du type (4.61) ou (4.62), il n'y a qu'un seul type de dégénérescence dans tout le spectre. Si λ n'est pas de la forme (4.61) ou (4.62), il n'y a aucune dégénérescence dans le spectre d'énergie. C'est le cas, en particulier, si λ est un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ où $p, q \in N^+$ et $\frac{p}{q} \notin N^+$.

Résultat 6. Supposons que $\lambda = p\sqrt{r}$, $p, r \in N^+$. Nous avons alors deux cas

possibles.

1°) λ s'écrit comme $\lambda = k\sqrt{l}$ avec $k, l \in N^+$ et l n'est pas un multiple d'un carré parfait. On obtient ici

$$\epsilon_{l(k-s)^2-1}^+ = \epsilon_{ls^2-1}^+, \quad \text{avec } 0 < s \leq \left[\frac{k-1}{2} \right],$$

où $s \in N^+$ et $\lambda \geq \lambda_0 = 1 + \sqrt{2}$. Le spectre d'énergie ϵ_n^+ aura donc $\left[\frac{k-1}{2} \right]$ dégénérescences doubles. Si on regarde maintenant le spectre d'énergie complet du modèle de Jaynes-Cummings, on a un nombre infini de dégénérescences du type :

$$\epsilon_{r(k+q)^2-1}^+ = \epsilon_{rq^2}^-,$$

où $q \in N^+$.

2°) Soit $\lambda \in N^+$, on a alors

$$\epsilon_{(\lambda-t)^2-1}^+ = \epsilon_{t^2-1}^+, \quad \text{avec } 0 < t \leq \left[\frac{\lambda-1}{2} \right],$$

où $t \in N^+$ et $\lambda \geq \lambda_0 = 1 + \sqrt{2}$. Le spectre d'énergie ϵ_n^+ aura donc $\left[\frac{\lambda-1}{2} \right]$ dégénérescences doubles. Si on regarde maintenant le spectre d'énergie complet du modèle de Jaynes-Cummings, on a ici un nombre infini de dégénérescences du type :

$$\epsilon_{v^2}^- = \epsilon_{(\lambda+v)^2-1}^+,$$

où $v \in N^+$.

Résultat 7. Soit $(k, r, p \text{ et } s) \in N^+$ où $r \neq s$ et r, s ne sont pas des carrés parfaits.

Si λ s'écrit de l'une des six façons suivantes : $\lambda = k\sqrt{r} + p\sqrt{s}$ ou $\lambda = k\sqrt{r} - p\sqrt{s}$ ou $\lambda = k\sqrt{r} + p$ ou $\lambda = k\sqrt{r} - p$ ou $\lambda = p + k\sqrt{r}$ ou $\lambda = p - k\sqrt{r}$, alors il n'y a qu'une seule dégénérescence double possible dans le spectre complet du modèle de Jaynes-Cummings. L'énergie correspondante peut facilement être trouvée en utilisant le résultat 5. De plus, si $\lambda \neq 1$ et que l'énergie fondamentale (la plus basse

énergie) est dégénérée, alors c'est la seule dégénérescence possible.

Chapitre 5

Construction des états cohérents généralisés pour le modèle de Jaynes-Cummings

Nous allons maintenant construire des états cohérents pour le modèle de Jaynes-Cummings. Nous commencerons par fixer $\epsilon = 0$ et nous étudierons tous les cas types qui peuvent se présenter pour ce modèle (section 5.1). Une fois ce travail terminé, nous aurons alors une méthode générale pour construire les états cohérents du modèle de Jaynes-Cummings dans le cas où $\epsilon \neq 0$ (section 5.2). Nous utiliserons ensuite les états cohérents construits à la section 5.1 afin de calculer certaines valeurs moyennes d'opérateurs sur les états cohérents (section 5.3). Nous calculerons des valeurs moyennes d'opérateurs pour des cas où le spectre d'énergie admet des dégénérescences. Nous comparerons nos résultats avec le calcul des valeurs moyennes d'opérateurs pour des cas où le spectre d'énergie n'admet pas de dégénérescence.

5.1 Le cas d'un décalage $\epsilon = 0$

Nous allons utiliser la première construction des états cohérents soit : l'équation (1.21) dans le cas où il n'y a pas de dégénérescences et l'équation (2.5) dans le cas où il y a des dégénérescences.

Nous pourrions construire des états cohérents en considérant le spectre d'énergie au complet sans distinction des groupes $\{\epsilon_n^+\}$ et $\{\epsilon_n^-\}$. Nous aurions à réordonner les deux groupes d'énergies ($\{\epsilon_n^+\}$ et $\{\epsilon_m^-\}$) en un seul et considérer toutes les dégénérescences possibles qui peuvent, rappelons-le, constituer en une infinité de dégénérescences. Cependant, une première approche raisonnable est basée sur la séparation de ces deux groupes d'énergies. Nous choisissons donc, ici, de construire des états cohérents pour chacun de ces groupes séparément.

5.1.1 Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant

Le but de cette section est de construire les états cohérents pour tous les cas où le spectre d'énergie de chacun des deux groupes est strictement croissant et n'admet donc aucune dégénérescence. Comme certaines énergies peuvent être négatives, nous ne pouvons pas directement appliquer l'équation (1.21). Ce problème est facilement résolu en introduisant les spectres d'énergie décalée $\{X_n^+\}$ et $\{X_n^-\}$ définis par

$$X_n^+ = \epsilon_n^+ - \epsilon_0^+ \text{ et } X_n^- = \epsilon_n^- - \epsilon_0^-. \quad (5.1)$$

Les X_n^+ et X_n^- sont alors positifs strictement croissants et n'admettent aucune dégénérescence. En s'inspirant des équations, ((1.10)-(1.15)), on peut écrire

$$N^\pm = \sum_{m=1}^{\infty} m |\epsilon_m^\pm\rangle \langle \epsilon_m^\pm|. \quad (5.2)$$

On va aussi définir les trois opérateurs suivants :

$$H^\pm(N^\pm) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m^\pm |\epsilon_m^\pm\rangle \langle \epsilon_m^\pm|, \quad (5.3)$$

$$H^\pm(N^\pm + 1) = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m+1}^\pm |\epsilon_m^\pm\rangle \langle \epsilon_m^\pm|, \quad (5.4)$$

$$H^\pm(N^\pm - 1) = \sum_{m=2}^{\infty} X_{m-1}^\pm |\epsilon_m^\pm\rangle \langle \epsilon_m^\pm|. \quad (5.5)$$

Il est important de remarquer ici que $H^\pm(N^\pm)$ est un opérateur différent de l'hamiltonien $H_{JC} = (4.1)$. En fait, lorsque l'on applique ces opérateurs sur les états propres du système, $H^\pm(N^\pm)$ redonne les énergies décalées tandis que H_{JC} redonne les vraies énergies du modèle de Jaynes-Cummings. Cette remarque est valide pour tous les prochains $H^+(N^+)$ que nous définirons dans cette section.

Les opérateurs $a^{+(\pm)}$ et $a^{-(\pm)}$ sont donnés ici par

$$a^{+(\pm)} = \sqrt{H^\pm(N^\pm)} e^{-i(H^\pm(N^\pm) - H^\pm(N^\pm - 1))\alpha_\pm} \sum_{m=0}^{\infty} |\epsilon_{m+1}^\pm\rangle \langle \epsilon_m^\pm|, \quad (5.6)$$

$$a^{-(\pm)} = \sqrt{H^\pm(N^\pm + 1)} e^{i(H^\pm(N^\pm + 1) - H^\pm(N^\pm))\alpha_\pm} \sum_{m=0}^{\infty} |\epsilon_m^\pm\rangle \langle \epsilon_{m+1}^\pm|. \quad (5.7)$$

Une application directe de l'équation (1.21) nous donne donc

$$|z, \alpha_+\rangle_+ = C_+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(X_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} e^{-iX_n^+ \alpha_+} |\epsilon_n^+\rangle \text{ avec } |C_+| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{X_{(n)}^+} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

et

$$|w, \alpha_-\rangle_- = C_- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(X_{(n)}^-)^{\frac{1}{2}}} e^{-iX_n^- \alpha_-} |\epsilon_n^-\rangle \text{ avec } |C_-| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{X_{(n)}^-} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.9)$$

où l'on a posé $X_{(n)}^\pm = X_n^\pm X_{n-1}^\pm \dots X_1^\pm$ et $X_{(0)}^\pm = 1$.

Comme le spectre d'énergie ϵ_n^- est strictement croissant avec n (proposition 1.1), la construction est donc complète pour les états $|w, \alpha_-\rangle_-$. Nous étudierons maintenant les états cohérents pour le spectre d'énergie ϵ_n^+ qui peut admettre une partie décroissante ainsi que des dégénérescences.

5.1.2 Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant

5.1.2.1 Cas où il y a une dégénérescence de l'énergie fondamentale

Regardons d'abord le cas où il y a une dégénérescence de l'énergie fondamentale de ce spectre du type $\epsilon_0^+ = \epsilon_1^+ \Rightarrow X_1^+ = X_0^+ = 0$ (cas où $\lambda = \lambda_0$) et où les énergies sont par la suite strictement croissantes. On peut alors appliquer la construction donnée par l'équation (2.5) en posant $U_n^+ = X_{n+1}^+$, $n \in N$ et en définissant un ensemble d'états propres dont les énergies ne sont pas dégénérées. On obtient alors

$$|U_0^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\epsilon_0^+\rangle + e^{i\eta_0}|\epsilon_1^+\rangle), \quad |U_n^+\rangle = |\epsilon_{n+1}^+\rangle, \quad \eta_0 \in [0, 2\pi], \quad n \in N^+. \quad (5.10)$$

On peut facilement trouver les opérateurs nécessaires à la construction des états cohérents en utilisant les équations ((1.10)-(1.15)). Le nouvel ensemble d'états cohérents est donc donné par

$$|z, \alpha_+, \boldsymbol{\eta}\rangle_+ = C_+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(U_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} e^{-iU_n^+ \alpha_+} |U_n^+\rangle, \quad \text{avec } |C_+| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(U_{(n)}^+)} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.11)$$

où l'on a posé $U_{(n)}^+ = U_n^+ U_{n-1}^+ \dots U_1^+$ et $U_{(0)}^+ = 1$.

5.1.2.2 Cas où il n'y a aucune dégénérescence

Regardons le cas où il n'y a aucune dégénérescence du type $\epsilon_k^+ = \epsilon_l^+$, mais où le spectre d'énergie $\{\epsilon_k^+\}$ n'est pas strictement croissant ($\lambda \neq \sqrt{l+l_0} + \sqrt{l}$ et $\lambda \geq \lambda_0$). À cause de l'allure du spectre, on sait qu'on aura à réarranger un nombre fini d'énergies pour retrouver un spectre strictement croissant et ainsi définir les états cohérents comme d'habitude. Par exemple : si $\lambda = 3.1$, les valeurs de ϵ_n^+ pour $n = 0, \dots, 3$ sont données par $\{-2.100, -2.384, -2.369, -2.200\}$. En posant $U_0^+ = \epsilon_1^+ - \epsilon_1^+ = 0$, $U_1^+ = \epsilon_2^+ - \epsilon_1^+$, $U_2^+ = \epsilon_3^+ - \epsilon_1^+$, $U_3^+ = \epsilon_0^+ - \epsilon_1^+$ et $U_n^+ = \epsilon_n^+ - \epsilon_1^+$,

$n \geq 4$. Les nouveaux états propres peuvent alors être définis comme

$$|\mu_0^+\rangle = |\epsilon_1^+\rangle, |\mu_1^+\rangle = |\epsilon_2^+\rangle, |\mu_2^+\rangle = |\epsilon_3^+\rangle, |\mu_3^+\rangle = |\epsilon_0^+\rangle, |\mu_n^+\rangle = |\epsilon_n^+\rangle, n \geq 4. \quad (5.12)$$

On a qu'à remplacer les états $|n, d_n\rangle_D$ par $|\mu_n^+\rangle$ dans les équations ((2.10)-(2.15)) afin de trouver les opérateurs N^+ , $H^+(N^+)$, $H^+(N^+ + 1)$, $H^+(N^+ - 1)$, $a^{+(+)}$ et $a^{-(+)}$. Par exemple, on a

$$H^+(N^+) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+ |\mu_n^+\rangle \langle \mu_n^+|. \quad (5.13)$$

Les états cohérents deviennent donc

$$|z, \alpha_+, \rangle_+ = C_+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(U_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} e^{-iU_n^+ \alpha_+} |\mu_n^+\rangle, \quad (5.14)$$

où $|C_+|$, $U_{(n)}^+$ et $U_{(0)}^+$ sont les mêmes qu'en (5.11). Il est important de souligner que cet exemple illustre un modèle de démarche qui peut être appliquée à tous les cas possibles de la sous-section (5.1.2.2).

5.1.2.3 Cas où il y a des dégénérescences du type $\epsilon_k^+ = \epsilon_l^+$

On sait, d'une part que le spectre n'est pas strictement croissant et qu'il y a seulement un nombre fini de dégénérescences du type $\epsilon_k^+ = \epsilon_l^+$. Ce cas peut être résolu en combinant les observations précédentes. Prenons l'exemple où $\lambda = 4$: on a $\epsilon_0^+ = \epsilon_8^+ = -3$ et les autres énergies ne sont pas dégénérées, mais doivent être réordonnées. Les valeurs de ϵ_k^+ pour $k = 0, \dots, 8$ sont données par $\{-3, -3.6569, -3.9282, -4, -3.9443, -3.7980, -3.5830, -3.3137, -3\}$. En posant $U_0^+ = \epsilon_3^+ - \epsilon_3^+ = 0$, $U_1^+ = \epsilon_4^+ - \epsilon_3^+$, $U_2^+ = \epsilon_2^+ - \epsilon_3^+$, $U_3^+ = \epsilon_5^+ - \epsilon_3^+$, $U_4^+ = \epsilon_1^+ - \epsilon_3^+$, $U_5^+ = \epsilon_6^+ - \epsilon_3^+$, $U_6^+ = \epsilon_7^+ - \epsilon_3^+$, $U_7^+ = \epsilon_0^+ - \epsilon_3^+ = \epsilon_8^+ - \epsilon_3^+$ et $U_n^+ = \epsilon_{n+1}^+ - \epsilon_3^+$ pour $n \geq 8$, les nouveaux états propres sont alors définis comme

$$\begin{aligned}
|0, 1\rangle_D &= |\epsilon_3^+\rangle, \quad |1, 1\rangle_D = |\epsilon_4^+\rangle, \quad |2, 1\rangle_D = |\epsilon_2^+\rangle, \quad |3, 1\rangle_D = |\epsilon_5^+\rangle, \\
|4, 1\rangle_D &= |\epsilon_1^+\rangle, \quad |5, 1\rangle_D = |\epsilon_6^+\rangle, \quad |5, 1\rangle_D = |\epsilon_6^+\rangle, \quad |6, 1\rangle_D = |\epsilon_7^+\rangle, \\
|7, 2\rangle_D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\epsilon_0^+\rangle + e^{i\eta\tau}|\epsilon_8^+\rangle), \quad |n, d_n\rangle_D = |\epsilon_{n+1}^+\rangle, \quad n \geq 8.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Les opérateurs utiles sont donnés par les équations ((2.10)-(2.15)) et les états cohérents sont obtenus en remplaçant les états $|U_n^+\rangle$ par $|n, d_n\rangle_D$ dans l'équation (5.11). Encore une fois, cet exemple illustre une démarche qui peut être appliquée à tous les cas possibles de la sous-section (5.1.2.3).

On a déjà montré que les équations (1.21) et (2.5) vérifiaient bien les quatre propriétés mathématiques fondamentales et les deux définitions physiques des états cohérents. Les applications de ces constructions au cas particulier du modèle de Jaynes-Cummings les respectent donc également.

Dans cette section, nous nous sommes restreint à la construction d'états cohérents pour un décalage $\epsilon = 0$. Cependant, nous sommes maintenant en mesure de construire des états cohérents pour des cas où $\epsilon \neq 0$.

5.2 Le cas d'un décalage $\epsilon \neq 0$

Rappelons que les propositions 1.1 à 1.6 donnent les caractéristiques du spectre d'énergie lorsque ϵ peut être différent de 0. Utilisons ces résultats afin de construire des états cohérents pour ces cas.

5.2.1 Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant

Par les propositions 1.1 et 1.3, on sait que les énergies ϵ_n^- sont strictement croissantes avec n et que le spectre complet du modèle de Jaynes-Cummings admet au plus, des dégénérescences doubles. De plus, par la proposition 1.2, on trouve que les énergies ϵ_n^+ sont strictement croissantes avec n lorsque $\lambda < \lambda_0(\epsilon)$ où $\lambda_0(\epsilon) = ((1 + \epsilon)(3(1 + \epsilon) + \sqrt{8 + 16\epsilon + 9\epsilon^2}))^{\frac{1}{2}}$.

Comme le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^-\}$ est strictement croissant pour tout ϵ et pour tout λ , les états cohérents pour ce groupe d'énergie sont donc toujours donnés par l'équation (5.9). Si $\lambda < \lambda_0(\epsilon)$, alors les états cohérents pour le groupe d'énergie ϵ_n^+ sont donnés par l'équation (5.8). La façon d'obtenir ces deux équations est décrite dans la sous section 5.1.1.

5.2.2 Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant

Comme pour la section précédente, trois cas peuvent se produire.

Cas 1 : On a $\lambda = \lambda_0(\epsilon)$. Il y a donc une dégénérescence de l'énergie fondamentale. La démarche est alors exactement la même qu'à la sous-section 5.1.2.1 et les états cohérents sont donnés par l'équation (5.11).

Cas 2 : Nous regardons le cas où le spectre $\{\epsilon_n^+\}$ a une partie décroissante ($\lambda > \lambda_0(\epsilon)$), mais n'admet aucune dégénérescence. Par la proposition 1.6, si ϵ et λ ne peuvent solutionner l'équation (4.22) pour tout n et $m \in N$ ($m \neq n$), alors il n'y a aucune dégénérescence. En calquant la méthode de la sous-section 5.1.2.2, les états cohérents de ce cas sont donnés par l'équation (5.14).

Cas 3 : Il ne reste qu'à étudier le cas où il y a des dégénérescences du type $\epsilon_k^+ = \epsilon_l^+$. Il faut donc que ϵ et λ soient tels que l'équation (4.22) soit respectée pour certains m et n . Afin de construire les états cohérents de ce cas, nous reprenons simplement la méthode décrite dans la sous-section 5.1.2.3. Par exemple, si $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3(30 + \sqrt{757})} = 6.5677\dots$, alors l'équation (4.22) est vérifiée pour $n = 2$ et $m = 6$ seulement. Les valeurs de ϵ_k^+ pour $k = 0, \dots, 10$ sont données par $\{-5.0725, -6.2916, -6.8784, -7.1379, -7.1880, -7.0896, -6.8784, -6.5781, -6.2048, -5.7705, -5.2842\}$ et le reste du spectre est strictement croissant. En posant $U_0^+ = \epsilon_4^+ - \epsilon_4^+ = 0$, $U_1^+ = \epsilon_3^+ - \epsilon_4^+$, $U_2^+ = \epsilon_5^+ - \epsilon_4^+$, $U_3^+ = \epsilon_2^+ - \epsilon_4^+ = \epsilon_6^+ - \epsilon_4^+$, $U_4^+ = \epsilon_7^+ - \epsilon_4^+$, $U_5^+ = \epsilon_1^+ - \epsilon_4^+$, $U_6^+ = \epsilon_8^+ - \epsilon_4^+$, $U_7^+ = \epsilon_9^+ - \epsilon_4^+$, $U_8^+ = \epsilon_{10}^+ - \epsilon_4^+$, $U_9^+ = \epsilon_0^+ - \epsilon_4^+$ et $U_n^+ = \epsilon_{n+1}^+ - \epsilon_4^+$ pour $n \geq 10$, les nouveaux états propres sont

alors définis comme

$$\begin{aligned}
|0, 1\rangle_D &= |\epsilon_4^+\rangle, \quad |1, 1\rangle_D = |\epsilon_3^+\rangle, \quad |2, 1\rangle_D = |\epsilon_5^+\rangle, \\
|3, 2\rangle_D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\epsilon_2^+\rangle + e^{i\eta_3}|\epsilon_6^+\rangle), \\
|4, 1\rangle_D &= |\epsilon_7^+\rangle, \quad |5, 1\rangle_D = |\epsilon_1^+\rangle, \quad |6, 1\rangle_D = |\epsilon_8^+\rangle, \quad |7, 1\rangle_D = |\epsilon_9^+\rangle, \\
|8, 1\rangle_D &= |\epsilon_{10}^+\rangle, \quad |9, 1\rangle_D = |\epsilon_0^+\rangle, \quad |n, d_n\rangle_D = |\epsilon_{n+1}^+\rangle, \quad n \geq 10.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Comme pour la sous-section 5.1.2.3, les états cohérents sont obtenus en remplaçant les états $|U_n^+\rangle$ par $|n, d_n\rangle_D$ dans l'équation (5.11).

Nous venons de terminer tous les cas types qui peuvent se présenter lorsque l'on veut construire les états cohérents pour le modèle de Jaynes-Cummings dans le cas où $\epsilon \neq 0$. En combinant ces résultats avec ceux de la section précédente pour $\epsilon = 0$, nous avons donc une méthode parfaitement générale permettant de construire les états cohérents pour ce modèle.

5.3 Valeurs moyennes d'opérateurs sur les états cohérents généralisés du modèle de Jaynes-Cummings pour $\epsilon = 0$

5.3.1 Calcul de $\langle H^\pm(N^\pm) \rangle$ sur les états cohérents généralisés

Calculons ce que vaut $\langle H^\pm(N^\pm) \rangle$ pour différents cas. Il est important de rappeler que $H^\pm(N^\pm)$ n'est pas directement l'hamiltonien du système. C'est un opérateur qui, agissant sur ses états propres, donne les énergies redéfinies en ordre croissant (les X_n^\pm ou les U_n^\pm). On ne calculera donc pas la valeur moyenne de $H_{JC} = (4.1)$ sur les états cohérents, mais bien $\langle H^\pm(N^\pm) \rangle$.

Regardons d'abord le cas le plus simple où on a un spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ strictement croissant. Les états cohérents sont alors donnés par les équations (5.8)

et (5.9). On peut donc écrire

$$\langle z, \alpha_+ | H^+(N^+) | z, \alpha_+ \rangle_+ = |C_+|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} X_n^+}{(X_{(n)}^+)} = |C_+|^2 |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{X_{(n)}^+} = |z|^2. \quad (5.17)$$

De la même façon, lorsque l'on calcule $\langle z, \alpha_- | H^-(N^-) | z, \alpha_- \rangle_-$, on obtient aussi $|z|^2$.

Regardons maintenant le cas où le spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ a une partie décroissante et peut admettre des dégénérescences. Dans ce cas, les états cohérents sont donnés par l'équation (5.11). On a donc

$$\langle z, \alpha_+, \boldsymbol{\eta} | H^+(N^+) | z, \alpha_+, \boldsymbol{\eta} \rangle_+ = |C_+|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} U_n^+}{(U_{(n)}^+)} = |C_+|^2 |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{U_{(n)}^+} = |z|^2. \quad (5.18)$$

Rappelons que, dans les deux dernières équations, la constante de normalisation $|C_+|^2$ correspond à deux expressions différentes. Des équations (5.17) et (5.18), on conclut facilement que la valeur moyenne de $H^\pm(N^\pm)$ sur les états cohérents est $|z|^2$, et ce, indépendamment du fait qu'il y ait des dégénérescences ou non dans le spectre d'énergie. On a donc une énergie moyenne continue et même constante lorsque l'on fait varier le paramètre λ dans les spectres d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ et $\{\epsilon_n^-\}$.

5.3.2 Calcul du nombre moyen de photons sur les états cohérents généralisés

Il est très important de comprendre que les opérateurs N^\pm définis par l'équation (5.2) ne représentent pas le nombre moyen de photon. Il faut donc prendre la définition originale $N = a^\dagger a I$, où les a^\dagger et a sont les opérateurs de création et d'annihilation habituels de l'oscillateur harmonique qui sont présents dans l'hamiltonien $H_{JC} = (4.1)$. Calculons donc $\langle N \rangle_\pm$ pour différents cas.

Pour un spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ strictement croissant, les états cohérents sont

donnés par (5.8) et (5.9). Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \langle N \rangle_+ &= \langle z, \alpha_+ | N | z, \alpha_+ \rangle_+ = \\ &|C_+|^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n e^{iX_n^+ \alpha_+}}{(X_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} \langle \epsilon_n^+ | \right) N \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m e^{-iX_m^+ \alpha_+}}{(X_{(m)}^+)^{\frac{1}{2}}} | \epsilon_m^+ \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Comme on sait seulement que $N|n, \pm\rangle = n|n, \pm\rangle$, on doit utiliser les équations (4.26), (4.27) et (4.28) afin de réécrire les états $|\epsilon_n^+\rangle$ en termes des états $|n, \pm\rangle$. L'équation (5.19) donne donc

$$\begin{aligned} &\frac{|C_+|^2}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n e^{iX_n^+ \alpha_+}}{(X_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} (\langle n, + | - \langle n+1, - |) \right) \\ &\times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m e^{-iX_m^+ \alpha_+}}{(X_{(m)}^+)^{\frac{1}{2}}} (m|m, +\rangle - (m+1)|m+1, -\rangle) \right) = \frac{|C_+|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)|z|^{2n}}{X_{(n)}^+}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

De la même façon, on peut calculer $\langle N \rangle_-$ et on obtient

$$\begin{aligned} \langle z, \alpha_- | N | z, \alpha_- \rangle_- &= \frac{|C_-|^2}{2} \left(\langle 0, - | + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^{n+1} e^{iX_{n+1}^- \alpha_-}}{(X_{(n+1)}^-)^{\frac{1}{2}}} (\langle n, + | + \langle n+1, - |) \right) \\ &\times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+1} e^{iX_{m+1}^- \alpha_-}}{(X_{(m+1)}^-)^{\frac{1}{2}}} (m|m, +\rangle + (m+1)|m+1, -\rangle) \right) = \frac{|C_-|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)|z|^{2n+2}}{X_{(n+1)}^-}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Regardons maintenant le calcul de $\langle N \rangle_+$ dans le cas où $\lambda = \lambda_0$. On utilise les états cohérents (5.11) pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle z, \alpha_+, \boldsymbol{\eta} | N | z, \alpha_+, \boldsymbol{\eta} \rangle_+ &= \\ &\frac{|C_+|^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \epsilon_0^+ | + e^{i\eta_0} \langle \epsilon_1^+ |) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}^n e^{iU_n^+ \alpha_+}}{(U_{(n)}^+)^{\frac{1}{2}}} \langle \epsilon_{n+1}^+ | \right) \\ &\times N \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (| \epsilon_0^+ \rangle + e^{-i\eta_0} | \epsilon_1^+ \rangle) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m e^{-iU_m^+ \alpha_+}}{(U_{(m)}^+)^{\frac{1}{2}}} | \epsilon_{m+1}^+ \rangle \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{|C_+|^2}{2} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \frac{|z|^{2n}}{U_{(n)}^+} \right), \quad (5.22)$$

en réécrivant les états $|\epsilon_n^+\rangle$ en termes des $|n, \pm\rangle$. Rappelons aussi que dans les équations (5.20) et (5.22), les constantes de normalisation $|C_+|^2$ sont différentes.

On s'intéresse maintenant au calcul du $\langle N \rangle_+$ donné par l'équation (5.20) dans un cas où λ est légèrement inférieur à λ_0 . On veut le comparer à $\langle N \rangle_+$ dans le cas où $\lambda = \lambda_0$ donné par l'équation (5.22). Comme les états cohérents correspondant à ces deux valeurs de λ sont donnés par des expressions mathématiques différentes, nous voulons nous assurer que le calcul de $\langle N \rangle_+$ ne sera pas affecté par une trop grande discontinuité lorsque l'on passera d'une valeur de λ légèrement inférieure à λ_0 , à $\lambda = \lambda_0$. La figure 5.1 montre que les deux valeurs de $\langle N \rangle_+$ pour ces deux cas ne diffère pas beaucoup en fonction de $|z|$. Sur la figure 5.2, on a tracé la différence entre les $\langle N \rangle_+$ pour ces deux cas. On se rend compte que l'écart entre ces deux valeurs n'augmente pas lorsque $|z|$ augmente.

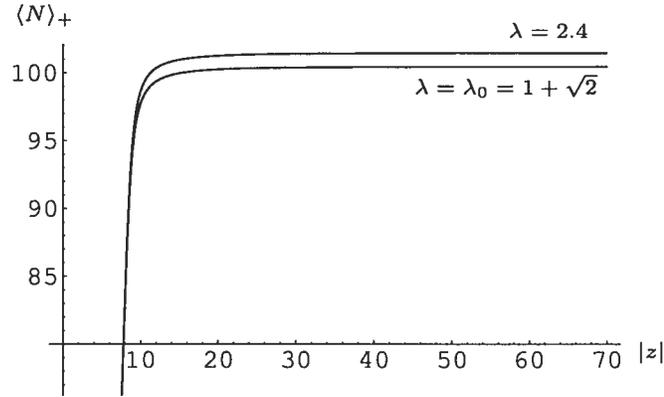


FIG. 5.1 – Calcul de $\langle N \rangle_+$ pour un cas où $\lambda = 2.4$ et un autre où $\lambda = \lambda_0 = 1 + \sqrt{2}$ en fonction de $|z|$.

Si l'on choisit une valeur de λ qui tend vers λ_0 , les deux courbes de la figure 5.1 ne seront pas beaucoup plus rapprochées l'une de l'autre. Cette légère discontinuité est, d'une certaine façon, le prix à payer pour obtenir une construction complète des états cohérents pour le modèle de Jaynes-Cummings. Notons que cette discontinuité est sensiblement la même lorsque l'on passe d'une valeur de $\lambda = \lambda_0$ à une valeur

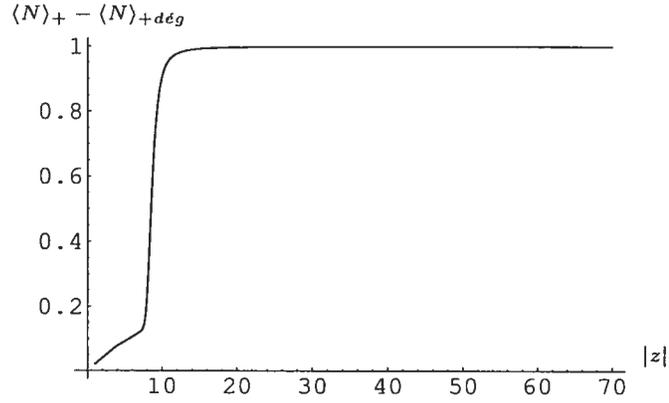


FIG. 5.2 – Différence entre le $\langle N \rangle_+$ calculé avec $\lambda = 2.4$ et celui calculé avec $\lambda = \lambda_0$ en fonction de $|z|$.

de λ légèrement supérieure à λ_0 .

Calculons maintenant $\langle N \rangle_+$ dans le cas où le spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ n'admet aucune dégénérescence et n'est pas strictement croissant. Par exemple, choisissons $\lambda = 3.9$ et utilisons l'équation (5.14) afin de construire les états cohérents de ce cas. On a choisi cette valeur de λ afin de comparer le calcul de $\langle N \rangle_+$ avec le cas où $\lambda = 4$ (avec dégénérescences). Mentionnons que la redéfinition des énergies et des états propres n'est pas identique à l'équation (5.12) puisque nous n'avons pas la même valeur de λ . On a ici $U_0^+ = \epsilon_3^+ - \epsilon_3^+ = 0$, $U_1^+ = \epsilon_2^+ - \epsilon_3^+ = 0.0450$, $U_2^+ = \epsilon_4^+ - \epsilon_3^+ = 0.0793$, $U_3^+ = \epsilon_5^+ - \epsilon_3^+ = 0.2470$, $U_4^+ = \epsilon_1^+ - \epsilon_3^+ = 0.2846$, $U_5^+ = \epsilon_6^+ - \epsilon_3^+ = 0.4816$, $U_6^+ = \epsilon_7^+ - \epsilon_3^+ = 0.7691$, $U_7^+ = \epsilon_0^+ - \epsilon_3^+ = 0.9$ et $U_n^+ = \epsilon_n^+ - \epsilon_3^+ = 0.0450$, $n \geq 8$. Les états propres correspondants sont

$$|\mu_0^+\rangle = |\epsilon_3^+\rangle, |\mu_1^+\rangle = |\epsilon_2^+\rangle, |\mu_2^+\rangle = |\epsilon_4^+\rangle, |\mu_3^+\rangle = |\epsilon_5^+\rangle, |\mu_4^+\rangle = |\epsilon_1^+\rangle,$$

$$|\mu_5^+\rangle = |\epsilon_6^+\rangle, |\mu_6^+\rangle = |\epsilon_7^+\rangle, |\mu_7^+\rangle = |\epsilon_0^+\rangle, |\mu_n^+\rangle = |\epsilon_n^+\rangle, n \geq 8, \quad (5.23)$$

ce qui permet de trouver

$$\langle z, \alpha_+ | N | z, \alpha_+ \rangle_+ = \frac{|C_+|^2}{2} \left(7 + 5 \frac{|z|^2}{U_{(1)}^+} + 9 \frac{|z|^4}{U_{(2)}^+} + 11 \frac{|z|^6}{U_{(3)}^+} + 3 \frac{|z|^8}{U_{(4)}^+} + 13 \frac{|z|^{10}}{U_{(5)}^+} + 15 \frac{|z|^{12}}{U_{(6)}^+} + 1 \frac{|z|^{14}}{U_{(7)}^+} + \sum_{n=8}^{\infty} (2n+1) \frac{|z|^{2n}}{U_{(n)}^+} \right). \quad (5.24)$$

Il ne reste qu'à calculer $\langle N \rangle_+$ dans un cas où le spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ n'est pas strictement croissant et admet un nombre fini de dégénérescences. Prenons l'exemple où $\lambda = 4$. Les énergies, les états propres et les états cohérents pour ce cas sont donnés par les équations (5.15) et (5.11). Avec un peu de travail, on obtient

$$\langle z, \alpha_+ | N | z, \alpha_+ \rangle_+ = \frac{|C_+|^2}{2} \left(7 + 9 \frac{|z|^2}{U_{(1)}^+} + 5 \frac{|z|^4}{U_{(2)}^+} + 11 \frac{|z|^6}{U_{(3)}^+} + 3 \frac{|z|^8}{U_{(4)}^+} + 13 \frac{|z|^{10}}{U_{(5)}^+} + 15 \frac{|z|^{12}}{U_{(6)}^+} + 9 \frac{|z|^{14}}{U_{(7)}^+} + \sum_{n=8}^{\infty} (2n+3) \frac{|z|^{2n}}{U_{(n)}^+} \right). \quad (5.25)$$

Les états cohérents correspondant à $\lambda = 3.9$ et à $\lambda = 4$ sont donnés par des expressions mathématiques différentes. Comme précédemment, nous voulons nous assurer que le calcul de $\langle N \rangle_+$ ne sera pas affecté par une trop grande discontinuité lorsque l'on passera d'une valeur de λ légèrement inférieure à 4, à $\lambda = 4$. Comparons donc les équations (5.24) et (5.25) afin de voir si $\langle N \rangle_+$ varie beaucoup pour ces deux cas. La figure 5.3 montre que le calcul de $\langle N \rangle_+$ varie très peu lorsque l'on passe d'une valeur de $\lambda = 3.9$ à $\lambda = 4$. La figure 5.4 montre clairement que la différence entre les deux $\langle N \rangle_+$ ne s'accroît pas lorsque $|z|$ augmente.

Encore une fois, l'écart entre les deux $\langle N \rangle_+$ se maintient lorsque λ tend vers 4. Cette discontinuité est aussi faible lorsque l'on passe d'une valeur de $\lambda = 4$ à une valeur légèrement supérieure à 4.

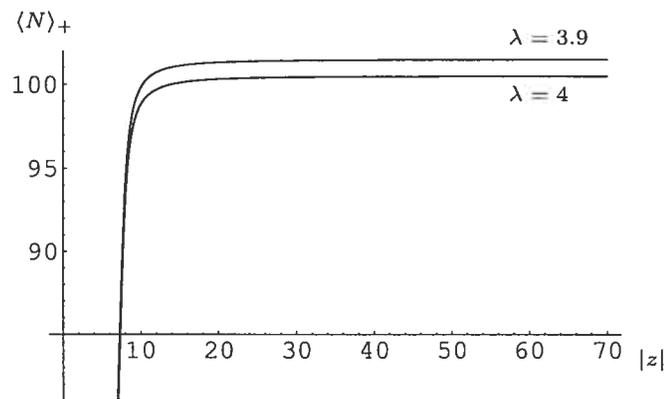


FIG. 5.3 – Calcul de $\langle N \rangle_+$ pour un cas où $\lambda = 3.9$ et un autre où $\lambda = 4$ en fonction de $|z|$.

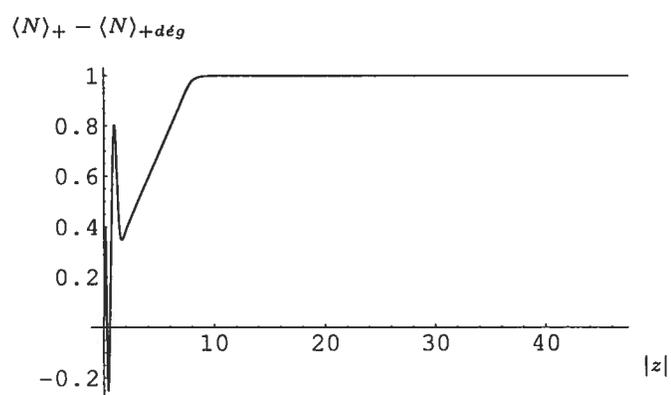


FIG. 5.4 – Différence entre le $\langle N \rangle_+$ calculé avec $\lambda = 3.9$ et celui calculé avec $\lambda = 4$ en fonction de $|z|$.

Chapitre 6

Construction des états cohérents gaussiens pour le modèle de Jaynes-Cummings pour tout décalage ϵ

Nous allons maintenant construire des états cohérents gaussiens pour le modèle de Jaynes-Cummings en utilisant ce que nous avons trouvé pour les états cohérents généralisés dans les cas où nous avons tout d'abord un spectre strictement croissant (section 6.1) et ensuite un spectre non strictement croissant (section 6.2).

6.1 Cas d'un spectre d'énergie strictement croissant

On sait que le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^-\}$ est toujours strictement croissant avec n . On peut donc redéfinir les énergies comme à la sous-section 5.1.1 et utiliser

l'équation (1.65) pour écrire ces états cohérents gaussiens comme

$$|G, n_0^-, \phi_0^-, \sigma^-\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^-)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^-)^2}{4\sigma^2}] e^{-iX_n^- \phi_0^-}} |\epsilon_n^-\rangle \quad \text{où } \{n_0^-, \phi_0^-\} \in R \quad (6.1)$$

et $N(n_0^-)$ est donné par l'équation (1.66).

Dans les sections précédentes, nous avons regardé en détails les conditions nécessaires pour que le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ soit strictement croissant. Dans une telle situation, les états cohérents gaussiens pour ce groupe d'énergie sont donnés par

$$|G, n_0^+, \phi_0^+, \sigma^+\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^2}] e^{-iX_n^+ \phi_0^+}} |\epsilon_n^+\rangle \quad \text{où } \{n_0^+, \phi_0^+\} \in R, \quad (6.2)$$

où $N(n_0^\pm)$ est donné par l'équation (1.66). Rappelons qu'il faut choisir n_0^\pm et σ^\pm afin que la densité de probabilité soit bien localisée en fonction de la position. Le choix de ces deux valeurs peut varier avec les choix de ϵ et λ .

Trouvons l'expression qui représente la densité de probabilité pour chacun des deux groupes d'énergies. Par exemple, pour $\{\epsilon_n^+\}$, on peut réécrire l'équation (6.2) comme

$$|G, n_0^+, \phi_0^+, \sigma^+\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^2}] e^{-iX_n^+ \phi_0^+}} (\cos \varphi(n+1) |n, +\rangle - \sin \varphi(n+1) |n+1, -\rangle). \quad (6.3)$$

Rappelons que $|n, \pm\rangle = |n\rangle \times |\pm\rangle$ où $|n\rangle$ correspond aux états propres de l'oscillateur harmonique. On notera les fonctions mathématiques correspondant aux états propres de l'oscillateur harmonique comme

$$p_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n (n!)}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{Hermite}[n, x]. \quad (6.4)$$

En utilisant les équations (6.3) et (6.4), on peut écrire les états cohérents gaussiens

en termes des fonctions mathématiques $p_n(x)$ de la façon suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iX_n^+ \phi_0^+} (p_n(x) \cos \varphi(n+1)|+) - p_{n+1}(x) \sin \varphi(n+1)|-)). \quad (6.5)$$

L'expression pour la densité de probabilité s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} |\psi(x)|_+^2 &= \frac{1}{N(n_0^+)} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iX_n^+ \phi_0^+} \cos \varphi(n+1) p_n(x) \right) \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{[-\frac{(m-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{iX_m^+ \phi_0^+} \cos \varphi(m+1) p_m(x) \right) + \\ &\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iX_n^+ \phi_0^+} \sin \varphi(n+1) p_{n+1}(x) \right) \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{[-\frac{(m-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{iX_m^+ \phi_0^+} \sin \varphi(m+1) p_{m+1}(x) \right) \right). \quad (6.6) \end{aligned}$$

On peut faire sensiblement le même raisonnement pour trouver la densité de probabilité pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^-\}$. On trouve alors

$$\begin{aligned} |\psi(x)|_-^2 &= \frac{1}{N(n_0^-)} \left(\left(e^{[-\frac{(0-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} e^{-iX_n^- \phi_0^-} \cos \varphi(n) p_n(x) \right) \right. \\ &\quad \times \left(e^{[-\frac{(0-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} p_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{[-\frac{(m-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} e^{iX_m^- \phi_0^-} \cos \varphi(m) p_m(x) \right) + \\ &\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} e^{-iX_n^- \phi_0^-} \sin \varphi(n-1) p_{n-1}(x) \right) \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{[-\frac{(m-n_0^-)^2}{4\sigma^-2}]} e^{iX_m^- \phi_0^-} \sin \varphi(m-1) p_{m-1}(x) \right) \right). \quad (6.7) \end{aligned}$$

Les figures 6.1 et 6.2 montre la densité de probabilité en fonction de la position x pour chacun des deux groupes d'énergies. Pour tracer ces figures, on a sommé sur les cinquante premières énergies ce qui donne une bonne approximation des

équations (6.6) et (6.7). Pour ces deux figures, on a choisi $\epsilon = 0$, $\lambda = 1.5$, $\phi_0^\pm = \frac{\pi}{2}$, $\sigma^\pm = 15$ et $n_0^\pm = 25$. Ces deux derniers choix ont été fait dans le but de restreindre l'étalement de la densité de probabilité.

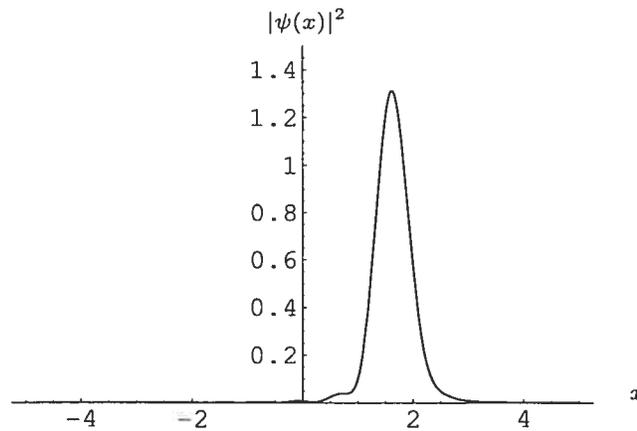


FIG. 6.1 – Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$.

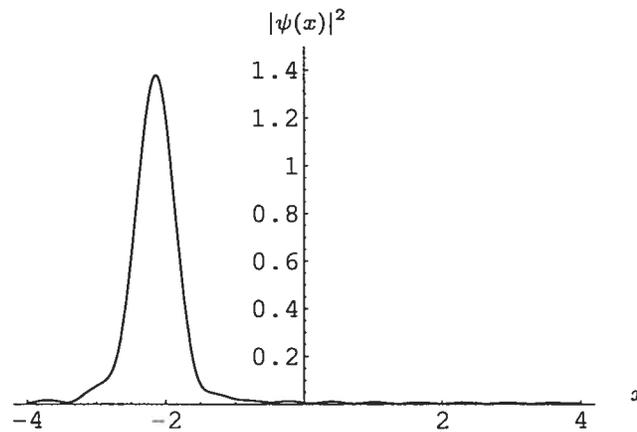


FIG. 6.2 – Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^-\}$.

6.2 Cas d'un spectre d'énergie ϵ_n^+ qui n'est pas strictement croissant

Comme pour les sections 5.1.2 et 5.2.2, trois cas peuvent se produire.

Cas 1 : Il y a une dégénérescence à l'énergie fondamentale. En s'inspirant de l'équation (2.27), on trouve

$$|G, n_0^+, \phi_0^+, \sigma^+, \eta)_+ = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^{+2}}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} |U_n^+\rangle, \quad (6.8)$$

où les $|U_n^+\rangle$ et U_n^+ sont définis de la même façon qu'à la sous-section 5.1.2.1. La densité de probabilité est alors donné par

$$|\psi(x)|_+^2 = \frac{1}{N(n_0^+)} (a\bar{a} + b\bar{b}), \quad (6.9)$$

où l'on a posé

$$a \equiv \left(\frac{e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^{+2}}]}}{\sqrt{2}} (\cos \varphi(1)p_0(x) + e^{i\eta_0} \cos \varphi(2)p_1(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^{+2}}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} \cos \varphi(n+2)p_{n+1}(x) \right)$$

et

$$b \equiv \left(\frac{-e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^{+2}}]}}{\sqrt{2}} (\sin \varphi(1)p_1(x) + e^{i\eta_0} \sin \varphi(2)p_2(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^{+2}}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} \sin \varphi(n+2)p_{n+2}(x) \right).$$

La figure 6.3 montre la densité de probabilité en fonction de la position x pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 1 + \sqrt{2}$. Pour tracer cette figure, on a sommé sur les cinquante premières énergies ce qui donne une bonne approximation de l'équations (6.9). Pour cette figure, on a choisi $\phi_0^+ = \frac{\pi}{2}$, $\sigma^+ = 15$ et $n_0^+ = 25$. La particule est donc bien localisée dans le système quantique.

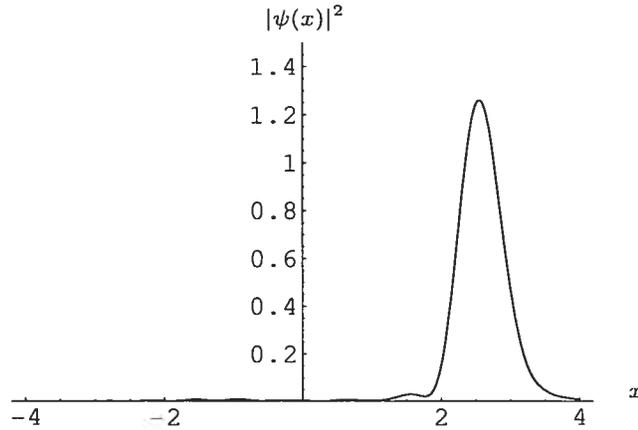


FIG. 6.3 – Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$.

Cas 2 : Le spectre d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$ a une partie décroissante, mais n'admet aucune dégénérescence. On redéfinit d'abord les énergies et les états propres de la même façon qu'à la sous-section 5.1.2.2. On utilise ensuite l'équation (1.65) afin de construire les états cohérents gaussiens sans dégénérescence. On obtient alors

$$|G, n_0^+, \phi_0^+, \sigma^+\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} |\mu_n^+\rangle. \quad (6.10)$$

Regardons l'exemple particulier de ce cas où $\epsilon = 0$ et $\lambda = 3.1$. Le réordonnement des énergies et des états propres est alors exactement le même qu'à la sous-section 5.1.2.2. Avec un peu de travail, on peut écrire la densité de probabilité comme

$$|\psi(x)|_+^2 = \frac{1}{N(n_0^+)} (f\bar{f} + g\bar{g}), \quad (6.11)$$

où l'on a posé

$$f \equiv \left(e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\cos\varphi(2)p_1(x) + e^{[-\frac{(1-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\cos\varphi(3)p_2(x) + \right. \\ \left. e^{[-\frac{(2-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\cos\varphi(4)p_3(x) + e^{[-\frac{(3-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\cos\varphi(1)p_0(x) + \right. \\ \left. \sum_{n=4}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\cos\varphi(n+1)p_n(x) \right)$$

et

$$g \equiv \left(-e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\sin\varphi(2)p_2(x) - e^{[-\frac{(1-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\sin\varphi(3)p_3(x) - \right. \\ \left. e^{[-\frac{(2-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\sin\varphi(4)p_4(x) - e^{[-\frac{(3-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\sin\varphi(1)p_1(x) - \right. \\ \left. \sum_{n=4}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]}\sin\varphi(n+1)p_{n+1}(x) \right).$$

La figure 6.4 montre la densité de probabilité en fonction de la position x pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 3.1$. Pour tracer cette figure, on a sommé sur les cinquante premières énergies ce qui donne une bonne approximation de l'équation (6.11). Pour cette figure, on a choisi $\phi_0^+ = \frac{\pi}{2}$, $\sigma^+ = 15$ et $n_0^+ = 25$. On voit que la particule est bien localisée dans le système quantique.

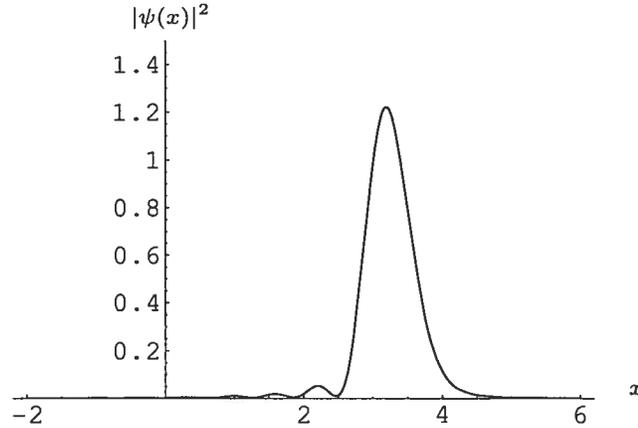


FIG. 6.4 – Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$.

Cas 3 : Le spectre d'énergie admet des dégénérescences du type $\epsilon_k^+ = \epsilon_l^+$. On

redéfinit alors les énergies et les états propres par la méthode présentée à la sous-section 5.1.2.3. On utilise ensuite l'équation 2.27 pour construire les états cohérents gaussiens avec dégénérescences. On trouve

$$|G, n_0^+, \phi_0^+, \sigma^+, \eta\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{N(n_0^+)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} |n, d_n\rangle_D. \quad (6.12)$$

Regardons un exemple particulier de ce cas où $\epsilon = 0$ et $\lambda = 4$. Le réordonnement des énergies et des états propres est alors exactement le même qu'à la sous-section 5.1.2.3. Avec un peu de travail, on peut écrire la densité de probabilité comme

$$|\psi(x)|_+^2 = \frac{1}{N(n_0^+)} (u\bar{u} + v\bar{v}), \quad (6.13)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} u \equiv & \left(e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} \cos \varphi(4) p_3(x) + e^{[-\frac{(1-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_1^+ \phi_0^+} \cos \varphi(5) p_4(x) + \right. \\ & e^{[-\frac{(2-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_2^+ \phi_0^+} \cos \varphi(3) p_2(x) + e^{[-\frac{(3-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_3^+ \phi_0^+} \cos \varphi(6) p_5(x) + \\ & e^{[-\frac{(4-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_4^+ \phi_0^+} \cos \varphi(2) p_1(x) + e^{[-\frac{(5-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_5^+ \phi_0^+} \cos \varphi(7) p_6(x) + \\ & e^{[-\frac{(6-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_6^+ \phi_0^+} \cos \varphi(8) p_7(x) + \\ & e^{[-\frac{(7-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_7^+ \phi_0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi(1) p_0(x) + e^{i\eta} \cos \varphi(9) p_8(x)) + \\ & \left. \sum_{n=8}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} \cos \varphi(n+2) p_{n+1}(x) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v \equiv & \left(-e^{[-\frac{(0-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} \sin \varphi(4)p_4(x) - e^{[-\frac{(1-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_1^+ \phi_0^+} \sin \varphi(5)p_5(x) - \right. \\
& e^{[-\frac{(2-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_2^+ \phi_0^+} \sin \varphi(3)p_3(x) - e^{[-\frac{(3-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_3^+ \phi_0^+} \sin \varphi(6)p_6(x) - \\
& e^{[-\frac{(4-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_4^+ \phi_0^+} \sin \varphi(2)p_2(x) - e^{[-\frac{(5-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_5^+ \phi_0^+} \sin \varphi(7)p_7(x) - \\
& e^{[-\frac{(6-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_6^+ \phi_0^+} \sin \varphi(8)p_8(x) - \\
& e^{[-\frac{(7-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_7^+ \phi_0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \varphi(1)p_1(x) + e^{i\eta\tau} \sin \varphi(9)p_9(x)) - \\
& \left. \sum_{n=8}^{\infty} e^{[-\frac{(n-n_0^+)^2}{4\sigma^+2}]} e^{-iU_n^+ \phi_0^+} \sin \varphi(n+2)p_{n+2}(x) \right).
\end{aligned}$$

La figure 6.5 montre la densité de probabilité en fonction de la position x pour $\epsilon = 0$ et $\lambda = 4$. Pour tracer cette figure, on a sommé sur les cinquante premières énergies ce qui donne une bonne approximation de l'équation (6.13). On a encore une fois choisi $\phi_0^+ = \frac{\pi}{2}$, $\sigma^+ = 15$ et $n_0^+ = 25$ afin d'obtenir la localisation de la particule dans le système quantique.

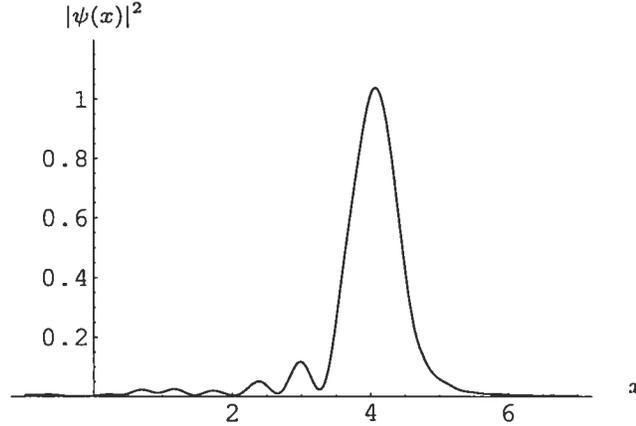


FIG. 6.5 – Densité de probabilité en fonction de la position x pour le groupe d'énergie $\{\epsilon_n^+\}$.

Conclusion

Nous avons décidé de donner dans cette conclusion une description chronologique des résultats obtenus qui diffère légèrement de la présentation de notre travail, mais qui éclaire notre processus de recherche et les questions que nous avons résolues.

Nous avons commencé par analyser le spectre d'énergie du modèle de Jaynes-Cummings spécialement dans le cas où le décalage $\epsilon = 0$. Nous avons décrit l'allure du spectre d'énergie et énuméré toutes les dégénérescences possibles. Nous avons publié ces résultats dans un proceedings ^[14]. Par la suite, nous avons montré quelques résultats pour les cas où le décalage $\epsilon \neq 0$.

Nous voulions ensuite trouver les états cohérents pour le modèle de Jaynes-Cummings. Cependant, nous ne pouvions pas réaliser cette tâche immédiatement puisqu'il n'existait pas de construction complète des états cohérents pour des systèmes quantiques admettant des dégénérescences. Nous avons alors consulté un article de Daoud et Hussin ^[8] qui ont construit des états cohérents généralisés pour des systèmes quantiques sans dégénérescence. Aussi, nous nous sommes inspirés d'un article de Fox et Choi ^[9] qui ont construit, avec une petite erreur, des états cohérents gaussiens pour la particule dans une boîte en deux dimensions (avec dégénérescences). Nous avons finalement établi une méthode générale qui permet de construire des états cohérents généralisés et gaussiens pour tout système quantique, même ceux qui admettent des dégénérescences.

Nous avons ensuite appliqué notre nouvelle méthode générale à un système quantique particulier bien connu : la particule dans une boîte en une et deux di-

mensions. Nous avons d'abord construit les états cohérents gaussiens. Nous avons comparé ces états avec ceux trouvés par Fox et Choi pour ce même système. Pour le cas de la particule dans une boîte en une dimension (sans dégénérescence), nous avons retrouvé exactement les mêmes résultats. Par contre, pour le cas de la particule dans une boîte en deux dimensions (avec dégénérescences), nos états cohérents gaussiens étaient différents des leurs. Après s'être assuré que nos états vérifiaient bien toutes les définitions physiques et mathématiques des états cohérents gaussiens, nous avons compris qu'ils avaient fait une petite erreur dans leur construction. En effet, leurs états cohérents gaussiens ne respectent pas la résolution de l'opérateur identité. Nous avons donc corrigé ce problème.

À notre connaissance, personne n'avait encore construit les états cohérents généralisés pour la particule dans une boîte en une et deux dimensions. Nous avons donc utilisé la méthode générale présentée plus haut afin de construire de tels états. Nous avons ensuite vérifié que ces états respectent en tous points les définitions physiques et mathématiques des états cohérents généralisés. Nous pensons que ces résultats pourraient donner lieu à un article ou une lettre.

Nous avons finalement construit les états cohérents généralisés et gaussiens pour le modèle de Jaynes-Cummings. Une telle tâche aurait été impossible sans une bonne compréhension du spectre d'énergie de ce modèle. Nous avons donc utilisé nos résultats présentés dans le proceedings et ceux trouvés pour tout décalage ϵ afin d'y arriver. Nous avons ensuite regardé le comportement de quelques valeurs moyennes d'opérateurs sur les états cohérents généralisés dans le cas d'un décalage $\epsilon = 0$. Nous avons montré que nos nouveaux états cohérents généralisés ne font pas changer significativement les valeurs moyennes de quantités physiques lorsque l'on passe d'un cas où il n'y pas de dégénérescence ($\lambda = 3.9$ et $\epsilon = 0$), à un cas où il y a des dégénérescences ($\lambda = 4$ et $\epsilon = 0$). Nous pensons que ces résultats sont suffisamment significatifs pour commencer la rédaction d'un autre article à ce sujet.

Bibliographie

- [1] J.R. Klauder, Ann. Phys. **11**, 123 (1960).
- [2] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963) ; **131**, 2766 (1963).
- [3] J.R. Klauder et B.S. Skagerstam, *Coherent States-Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific, Singapore, 1985).
- [4] A.M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [5] J.P Gazeau et J.R. Klauder, J. Phys. A : Math. Gen. **32**, 123 (1999).
- [6] J.R. Klauder, J. Phys. A **29**, L293 (1996).
- [7] J-P Antoine, J-P Gazeau, J.R. Klauder, P.Monceau et K. Penson, J. Math. Phys. **42**, 2349-2387 (2001).
- [8] M. Daoud et V. Hussin, J. Phys. A **35**, 7381 (2002).
- [9] R. F. Fox et Mee Hyang Choi, Phys. Rev. A **64**, 042104 (2001).
- [10] R. F. Fox et Mee Hyang Choi, Phys. Rev. A **61**, 032107 (2000).
- [11] R. F. Fox, Phys. Rev. A **59**, 3241 (1999).
- [12] Y. Bérubé-Lauzière, *États cohérents pour le modèle de Jaynes-Cummings*, mémoire de maîtrise, Département de Physique, Université de Montréal (1993).
- [13] Y. Bérubé-Lauzière, V. Hussin et L.M. Nieto, Phys. Rev. A **50**, 1725 (1994).
- [14] L. Dello Sbarba et V. Hussin, *Group Theoretical Methods in Physics : Proceedings of the XXV International Colloquium on Group Theoretical Methods in*

Physics, Institute of Physics Conference Series, Vol. 185, G.S. Pogosyan, L.E. Vicent and K.B. Wolf, Eds. (IOP, Bristol, 2005).

- [15] E.T. Jaynes et F. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [16] V.Hussin et L.M. Nieto, J. Math. Phys. **46**, 122102-122123 (2005).
- [17] H. Davenport, *The Higher Arithmetic, An Introduction to the Theory of Numbers*, Chap.V., (Dover, New York, 1983).
- [18] M. G. A. Crawford, Phys. Rev. A **62**, 012104 (2001).
- [19] D. J. Fernández, L. M. Nieto, O.
- [20] D. J. Fernández, V. Hussin, L. M. Nieto, J. Ph
- [21] N.B. Narozhny, J.J. Sanchez-Mondragon et J.H. Eberly, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
- [22] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe *Mécanique quantique T1*, (Hermann, Paris, 1973).
- [23] E. Merzbacher, *Quantum mechanics* (John Wiley, New York, 1996).
- [24] Sheldon M. Ross, *Initiation aux probabilités* (Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2002).

Annexe I

Redéfinition des états propres pour une particule dans une boîte quantique en deux dimensions

Nous donnons ici, pour les trente premières énergies, la correspondance entre les états redéfinis $|n, d_n\rangle_D$ et les états propres du système. On obtient donc

$$E_{1,1} \equiv \epsilon_0 \implies |0, 1\rangle_D \equiv |1, 1\rangle,$$

$$E_{1,2} = E_{2,1} \equiv \epsilon_1 \implies |1, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 2\rangle + e^{i\eta_1}|2, 1\rangle),$$

$$E_{2,2} \equiv \epsilon_2 \implies |2, 1\rangle_D \equiv |2, 2\rangle,$$

$$E_{1,3} = E_{3,1} \equiv \epsilon_3 \implies |3, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 3\rangle + e^{i\eta_3}|3, 1\rangle),$$

$$E_{2,3} = E_{3,2} \equiv \epsilon_4 \implies |4, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 3\rangle + e^{i\eta_4}|3, 2\rangle),$$

$$E_{1,4} = E_{4,1} \equiv \epsilon_5 \implies |5, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 4\rangle + e^{i\eta_5}|4, 1\rangle),$$

$$E_{3,3} \equiv \epsilon_6 \implies |6, 1\rangle_D \equiv |3, 3\rangle,$$

$$E_{4,2} = E_{2,4} \equiv \epsilon_7 \implies |7, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 4\rangle + e^{i\eta_7}|4, 2\rangle),$$

$$E_{4,3} = E_{3,4} \equiv \epsilon_8 \implies |8, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 4\rangle + e^{i\eta_8}|4, 3\rangle),$$

$$E_{1,5} = E_{5,1} \equiv \epsilon_9 \implies |9, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 5\rangle + e^{i\eta_9}|5, 1\rangle),$$

$$E_{2,5} = E_{5,2} \equiv \epsilon_{10} \implies |10, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 5\rangle + e^{i\eta_{10}}|5, 2\rangle),$$

$$E_{4,4} \equiv \epsilon_{11} \implies |11, 1\rangle_D \equiv |4, 4\rangle,$$

$$E_{3,5} = E_{5,3} \equiv \epsilon_{12} \implies |12, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 5\rangle + e^{i\eta_{12}}|5, 3\rangle),$$

$$\begin{aligned}
E_{1,6} = E_{6,1} \equiv \epsilon_{13} &\implies |13, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 6\rangle + e^{i\eta_{13}}|6, 1\rangle), \\
E_{2,6} = E_{6,2} \equiv \epsilon_{14} &\implies |14, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 6\rangle + e^{i\eta_{14}}|6, 2\rangle), \\
E_{4,5} = E_{5,4} \equiv \epsilon_{15} &\implies |15, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|4, 5\rangle + e^{i\eta_{15}}|5, 4\rangle), \\
E_{3,6} = E_{6,3} \equiv \epsilon_{16} &\implies |16, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 6\rangle + e^{i\eta_{16}}|6, 3\rangle), \\
E_{5,5} = E_{7,1} = E_{1,7} \equiv \epsilon_{17} &\implies |17, 3\rangle_D \equiv \\
&\frac{1}{\sqrt{3}}(|5, 5\rangle + e^{i\eta_{17}}|7, 1\rangle + e^{2i\eta_{17}}|1, 7\rangle), \\
E_{4,6} = E_{6,4} \equiv \epsilon_{18} &\implies |18, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|4, 6\rangle + e^{i\eta_{18}}|6, 4\rangle), \\
E_{2,7} = E_{7,2} \equiv \epsilon_{19} &\implies |19, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 7\rangle + e^{i\eta_{19}}|7, 2\rangle), \\
E_{3,7} = E_{7,3} \equiv \epsilon_{20} &\implies |20, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 7\rangle + e^{i\eta_{20}}|7, 3\rangle), \\
E_{5,6} = E_{6,5} \equiv \epsilon_{21} &\implies |21, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|5, 6\rangle + e^{i\eta_{21}}|6, 5\rangle), \\
E_{4,7} = E_{7,4} = E_{1,8} = E_{8,1} \equiv \epsilon_{22} &\implies |22, 4\rangle_D \equiv \\
&\frac{1}{\sqrt{4}}(|4, 7\rangle + e^{i\eta_{22}}|7, 4\rangle + e^{2i\eta_{22}}|1, 8\rangle + e^{3i\eta_{22}}|8, 1\rangle), \\
E_{2,8} = E_{8,2} \equiv \epsilon_{23} &\implies |23, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 8\rangle + e^{i\eta_{23}}|8, 2\rangle), \\
E_{6,6} \equiv \epsilon_{24} &\implies |24, 1\rangle_D \equiv |6, 6\rangle, \\
E_{3,8} = E_{8,3} \equiv \epsilon_{25} &\implies |25, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|3, 8\rangle + e^{i\eta_{25}}|8, 3\rangle), \\
E_{5,7} = E_{7,5} \equiv \epsilon_{26} &\implies |26, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|5, 7\rangle + e^{i\eta_{26}}|7, 5\rangle), \\
E_{4,8} = E_{8,4} \equiv \epsilon_{27} &\implies |27, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|4, 8\rangle + e^{i\eta_{27}}|8, 4\rangle), \\
E_{1,9} = E_{9,1} \equiv \epsilon_{28} &\implies |28, 2\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 9\rangle + e^{i\eta_{28}}|9, 1\rangle),
\end{aligned}$$

$$E_{6,7} = E_{7,6} = E_{2,9} = E_{9,2} \equiv \epsilon_{29} \implies |29, 4\rangle_D \equiv \frac{1}{\sqrt{4}}(|6, 7\rangle + e^{i\eta_{29}}|7, 6\rangle + e^{2i\eta_{29}}|2, 9\rangle + e^{3i\eta_{29}}|9, 2\rangle).$$