

2m11.34 03.10

Université de Montréal

Solitons noués dans un système de deux champs scalaires complexes
couplés à un champ de jauge

par

Vincent Poitras

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Février, 2006

©Vincent Poitras, 2006



QC
3
U54
2006
v. 016

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Solitons noués dans un système de deux champs scalaires complexes
couplés à un champ de jauge

présenté par:

Vincent Poitras

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

M. Yvan Saint-Aubin, président-rapporteur
M. Richard MacKenzie, directeur de recherche
M. David London, membre du jury

Mémoire accepté le:

18/04/06

Sommaire

L'objectif de ce mémoire est de vérifier la véracité d'une affirmation faite par certains chercheurs voulant qu'un modèle formé de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge puisse admettre des solitons noués comme solutions. L'essentiel de leur argumentation repose sur le fait qu'il est possible de montrer que la densité lagrangienne modélisant ce système est équivalente à la densité lagrangienne d'une version généralisée du modèle de Faddeev. Bien qu'il soit connu que la version ordinaire du modèle de Faddeev admette des solitons noués, cela n'a pas encore été prouvé pour la version généralisée.

Avant de s'attaquer à la question de savoir s'il est possible pour un système de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge d'admettre de solitons noués, notre étude se portera préalablement sur l'analyse de ce type de soliton dans le modèle de Faddeev. On verra notamment comment il est possible de générer ces objets à partir de bébé-skyrmions. D'autre part, puisque cela jouera un rôle central dans les conclusions qui seront tirées à la fin de ce mémoire, nous étudierons une certaine forme de relation existant entre un champ scalaire à trois composantes et un doublet de champ scalaire complexe en prenant pour exemples les modèles CP^1 et $\sigma O(3)$ non-linéaire, en $(2+1)$ dimensions.

Sans pouvoir affirmer explicitement qu'un modèle formé de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge n'admet pas de solitons noués comme solutions, nous pouvons au moins dire que cela semble être peu probable. En effet, en supposant que les hypothétiques solitons noués du modèle de Faddeev généralisé ont qualitativement la même forme que ceux du modèle ordinaire et en réexprimant ceux-ci en termes du doublet de champs scalaires complexes de l'autre modèle, on en arrive à la conclusion qu'il s'agit d'un système de deux vortex, instable au niveau de l'énergie.

Mots-clés : Soliton topologique, soliton noué, bébé-skyrmion, vortex, charge de Hopf, nombre d'enlacement, nombre d'enroulement, classe d'homotopie, nœud, modèle de Faddeev, modèle σ $O(3)$ non-linéaire, modèle CP^1 , modèle de Higgs abélien.

Abstract

The purpose of this dissertation is to examine the validity of an affirmation made by others to the effect that a model having two complex scalar fields in interaction with a gauge field may admit knotted solitons as solutions. Their argumentation is mainly based on the fact that it is possible to demonstrate that the lagrangian density modeling this system is equivalent to the lagrangian density of a generalisation of the model due to Faddeev model. Although it is known that the ordinary version of Faddeev's model admits knotted solitons, this is still unproven for the generalised version.

Before considering the question of knowing if it is possible for a system of two complex scalar fields in interaction with a gauge field to admit knotted solitons, our study will firstly focus on the analysis of this kind of solitons in Faddeev's model. We will show how it is possible to generate these objects from baby-skyrmions. Moreover, since it will have a central role in the conclusions to be drawn at the end of this dissertation, we will study a particular relation existing between a three component scalar field and a complex scalar field doublet, using as examples the CP^1 and the non-linear σ $O(3)$ models, in $(2+1)$ dimensions.

Without asserting explicitly that a model consisting of two complex scalar fields in interaction with a gauge field does not admit knotted solitons as solutions, we can at least say that it is quite unlikely. Indeed, assuming that hypothetic knotted solitons of the generalised Faddeev's model have qualitatively the same shape than those of the ordinary model, and by re-expressing them in terms of complex scalar field doublet of the other model, we can conclude that this is an energetically unstable system of two vortices.

Keywords : Topological soliton, knotted soliton, baby skyrmion, vortex, Hopf charge,

linking number, winding number, homotopy class, knot, Faddeev model, non-linear σ $O(3)$ model, CP^1 model, abelian Higgs model.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	i
Abstract	iii
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
Remerciements	xiv
Introduction	1
CHAPITRE 1: Introduction à la physique solitonique	4
1.1 Historique	4
1.2 Concepts de base	7

1.3	Exemple du modèle ϕ^4	9
CHAPITRE 2: Vortex		16
2.1	Introduction	16
2.2	Modèle de Goldstone	17
2.3	Modèle de Higgs abélien	18
2.3.1	Densité lagrangienne du modèle	19
2.3.2	Aspect topologique du modèle	20
2.3.3	Solution du vortex	23
CHAPITRE 3: Modèles σ $O(3)$ non-linéaire et CP^1		27
3.1	Introduction	27
3.2	Modèle CP^1	28
3.2.1	Densité lagrangienne du modèle	28
3.2.2	Invariance du modèle	30
3.2.3	Aspect topologique du modèle	32
3.2.4	Borne de Bogomol'nyi	33

3.3	Modèle σ $O(3)$ non-linéaire	35
3.3.1	Densité lagrangienne du modèle	35
3.3.2	Invariance du modèle	37
3.3.3	Aspect topologique du modèle	38
3.3.4	Borne de Bogomol'nyi	41
3.4	Équivalence des modèles σ $O(3)$ non-linéaire et CP^1	42
3.5	Solution du premier secteur topologique	45
CHAPITRE 4: Solitons noués du modèle de Faddeev		52
4.1	Introduction	52
4.2	Généralisation en (3+1) dimensions du modèle σ $O(3)$ non-linéaire (critère de Derrick)	54
4.3	Charge topologique et borne d'énergie	57
4.4	Recherche qualitative de solutions	60
CHAPITRE 5: Modèle à 3 champs $(\Psi_1, \Psi_2, \vec{A})$ et solitons noués		68
5.1	Introduction	68

5.2	Passage d'un modèle à deux champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge au modèle de Faddeev généralisé	69
5.3	Sur l'invariance $O(3)$	72
5.4	Sur la présence de solitons noués	73
5.5	Relation entre les versions ordinaire et généralisée du modèle de Faddeev	79
	Conclusion	81
	BIBLIOGRAPHIE	xv
	APPENDICE A: Identités matricielles	xx
A.1	Démonstration de l'identité $\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = 2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd}$	xx
A.2	Démonstration de l'identité $\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j \sigma_{ef}^k = 2i(\delta_{af}\delta_{bc}\delta_{ed} - \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf})$	xxi
	APPENDICE B: Nœuds et nombre d'enlacement	xxiv
B.1	Définition d'un nœud	xxiv
B.2	Nombre d'enlacement	xxv
	APPENDICE C: Calcul détaillé de certaines étapes	xxvii

C.1	Solution du vortex: équation C.7	xxvii
C.2	Nombre de recouvrement: passage de l'équation 3.19 à l'équation 3.20	xxviii
C.3	Nombre de recouvrement: passage de l'équation 3.35 à l'équation 3.36	xxx
C.4	Redérivation de l'équation du champ 3.31 à partir de la condition d'énergie 3.42	xxxii
C.5	Développement de l'équation 5.11	xxxii
C.6	Développement de l'équation 5.12	xxxiii
C.7	Expression 5.15: réexpression du potentiel en terme des variables n_3 et ρ	xxxv
C.8	Passage de l'équation 5.22 à l'équation 5.23	xxxv
C.9	Équation 5.31	xxxvi
APPENDICE D: Digression sur le bébé-skyrmion anisotrope		xxxviii

LISTE DES TABLEAUX

1-1	Quelques équations ayant joué un rôle important dans la genèse de la théorie des solitons.	5
3-1	Variables complexes introduites dans lors de la recherche d'une solution au modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire	47
4-1	Énergie des solitons noués de charge $Q_H = 1$ à $Q_H = 8$	66

LISTE DES FIGURES

1-1	Illustration du problème de Fermi, Pasta & Ulam	7
1-2	<i>Kink</i> et <i>antikink</i> du modèle ϕ^4	11
1-3	Densité d'énergie du <i>kink</i> et de l' <i>antikink</i>	12
1-4	Extension du <i>kink</i> dans une dimension supplémentaire	15
2-1	Potentiel en forme de <i>sombrero</i>	18
2-2	Illustration du concept de nombre d'enroulement	22
2-3	Profils des champs \vec{A} et Ψ_1	25
2-4	Configuration du vortex	26
3-1	Projection stéréographique inverse de l'espace physique R_2^{phy} vers la sphère S_2^{phy}	39
3-2	Illustration du concept de nombre de recouvrement.	40
3-3	Vecteur \vec{n}	43

3-4	Fonction $f(r)$	49
3-5	Solution de charge $Q = 1$ du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire	50
3-6	Champs χ_1 et χ_2 correspondant à la solution $Q = 1$ du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire	51
4-1	Bébé-skyrmion anisotrope	62
4-2	Construction d'une configuration avec une ligne de champ centrale fermée à partir d'un bébé-skyrmion anisotrope	63
4-3	Exemple de génération d'une charge de Hopf	65
5-1	Configuration des champs χ_1 et χ_2 correspondant à un soliton noué de charge $Q_H = 1$	78
B-1	Exemples de nœuds	xxiv
B-2	Nombre d'enlacement: définition de l'indice C	xxvi
B-3	Nombre d'enlacement: exemples	xxvi
B-4	Courbe fermée et droite infinie enlacées.	xxvi
D-1	Version isotrope et anisotrope du bébé-skyrmion	xxxviii
D-2	Courbes isoangulaires des bébés skyrmions isotrope et anisotrope	xxxix

D-3 Courbes de niveau des bébés skyrmions isotrope et anisotrope xl

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche, Richard MacKenzie, sans qui ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour.

Je suis également reconnaissant envers mes camarades de bureau (les «*bananes théoriques volantes*») Hélène, Julien, Martin, Phil, Pierre-Luc et Sam pour toutes les discussions constructives et les moments de divertissement que l'on a eu ensemble.

Je tiens aussi à remercier mon ami Xavier Thibert-Plante pour toute l'aide technique qu'il m'a apportée ainsi que pour son support moral.

Finalement, je tiens spécialement à exprimer ma reconnaissance à Martin Simard qui a pris la peine de me faire parvenir depuis la bibliothèque de Stanford, un article introuvable à Montréal.

Introduction

Les travaux qui ont mené à la rédaction de ce mémoire ont été entrepris en réaction à la publication de l'article *Hidden symmetry and knot solitons in a charged two-condensates Bose system* de E.Babaev, L.Faddeev et A.Niemi publié en 2002 dans la revue *Physical review B* [1]. Dans cet article, les auteurs, en prenant pour exemple un système de 2 condensats de Bose-Einstein couplés électromagnétiquement, montrent qu'on peut réexprimer un système formé de 2 champs scalaires complexes et d'un champ de jauge en terme de ce qui constitue une généralisation du modèle de Faddeev [20]. Puisqu'il est connu que la version ordinaire du modèle de Faddeev admet comme solutions des solitons noués, les auteurs affirment sans autres arguments que le modèle généralisé doit lui aussi posséder cette solution. On pourrait alors être tenté de réutiliser les mots du célèbre mathématicien Euclide qui, défendant son athéisme, avait déclaré: «*Ce qui peut être affirmé sans preuve peut être nié sans preuve*», toutefois, il est possible d'amener certains arguments qui semblent contredire leur affirmation. Ce mémoire a donc pour objectif de vérifier si, conformément à la prétention des trois auteurs de l'article, il y a des solitons noués dans un système formé de 2 champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge.

Le premier chapitre de ce mémoire constitue une introduction à la physique solitonique. Après un survol historique et plutôt qualitatif du sujet, une approche un peu plus formelle sera présentée en prenant pour exemple le *kink*, le soliton de la théorie ϕ^4 . L'étude de celui-ci n'est pas directement reliée au sujet de ce mémoire, toutefois, cela permet d'illustrer de manière assez simple certaines des propriétés des solitons.

Le second chapitre est consacré à l'étude du modèle de Higgs abélien en $(2+1)$ dimensions. Celui-ci est formé d'un champ scalaire complexe et d'un champ de jauge et possède une solution portant le vortex. L'analyse qui sera faite de cette solution nous

sera d'une grande utilité dans les conclusions qui seront tirées au dernier chapitre.

Le troisième chapitre porte quant à lui sur les modèles CP^1 et $\sigma O(3)$ non-linéaire en $(2+1)$ dimensions. Comme on le montrera, ceux-ci sont en fait deux modèles équivalents. Consacrer un chapitre à des modèles en $(2+1)$ dimensions alors qu'en fait on est intéressé par des systèmes en $(3+1)$ dimensions peut paraître étrange. Néanmoins cela est pertinent dans la mesure où, si on les généralise de manière adéquate en 3 dimensions d'espace, on pourra réutiliser quelques résultats dans les développements subséquents. À ce titre, on s'intéressera notamment à la solution du premier secteur topologique du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire. Celle-ci, ou du moins une configuration qui lui est qualitativement semblable, sera utilisée pour construire des solitons noués dans le modèle de Faddeev.

Le chapitre 4 est justement consacré au modèle de Faddeev. Celui-ci peut être considéré comme un cas particulier d'une généralisation tridimensionnelle du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire. Ce modèle comporte des solutions d'énergie non-nulle stabilisées par une charge topologique, l'invariant de Hopf. Ces solutions portent le nom de solitons noués.

Au chapitre 5, toutes les pièces du casse-tête auront été rassemblées. Il ne restera plus qu'à les imbriquer correctement les unes dans les autres. Après avoir montré l'équivalence du modèle de Faddeev généralisé et du modèle à deux champs scalaires complexes couplés à un champ de jauge, nous partirons à la recherche d'indice pouvant confirmer ou infirmer la présence de solitons noués dans le modèle à deux champs scalaires. Pour cela nous supposerons qu'il en existe dans le modèle de Faddeev généralisé, ce qui n'est pas prouvé, et nous analyserons la forme que prend cet hypothétique soliton une fois exprimé en terme des variables de l'autre modèle. On en arrivera à la conclusion qu'il s'agit d'un système de deux vortex énergétiquement non-stable.

Les quatre premiers chapitres de ce mémoire consistent en un travail de revue. Dans le chapitre 5, mis à part la démonstration de l'équivalence du modèle à deux champs scalaires complexes et du modèle de Faddeev généralisé, toutes les contributions

sont originales.

CHAPITRE 1

Introduction à la physique solitonique

1.1 Historique

L'histoire des solitons débuta par une observation plus ou moins fortuite de l'ingénieur écossais John Scott Russell. En 1834, alors qu'il menait une étude pour le compte de la société *Union Canal* d'Édimbourg, un phénomène hydrodynamique plutôt intrigant attira son attention. Lors de la 14^e rencontre de l'*Association britannique pour l'avancement des sciences*, il relata son observation en ces termes:¹

«J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup: mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur par 1 pied à 1 1/2 pied de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal.»

Suite à sa découverte, Russell entreprit d'étudier ces *ondes solitaires* en recréant en

¹Traduction de Darcy et Bazin [2].

laboratoire le phénomène au moyen d'une cuve à vague. Il mit notamment en évidence que ces ondes se propagent à vitesse constante et sans se déformer. Fait très surprenant, les expériences de Russell indiquèrent que ces propriétés demeurent vraies même après une collision entre deux ou plusieurs de ces ondes, c'est-à-dire qu'après une collision, on retrouve chacune des ondes pratiquement inaltérée.

Bien que certains grands scientifiques se soient intéressés un peu à la question des ondes solitaires (Stokes (1847), Boussinesq (1871), Rayleigh (1876)), ce n'est qu'en 1895, grâce aux travaux des physiciens néerlandais Diederik Korteweg et Gustav de Vries [3], qu'on put expliquer théoriquement les observations de Russell. Ceux-ci montrèrent qu'on peut modéliser la propagation d'une onde en eau peu profonde par une équation qui porte désormais leur nom (voir tableau 1-1). Celle-ci possède des solutions périodiques que les deux scientifiques nommèrent *ondes cnoïdales*, mais, fait très intéressant, cette équation possède aussi une solution représentant une «bosse» qui se déplace à vitesse constante sans se déformer. Les travaux de Korteweg et de Vries permirent donc de donner une description théorique de ce que Russell avait observé expérimentalement quelque 60 ans auparavant.

Nom	Équation
Korteweg-de Vries	$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$
Korteweg-de Vries modifiée	$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0$
Sine-Gordon	$u_{tx} + \sin u = 0$
Schrödinger non-linéaire	$i u_t + u_{xx} + \lambda u ^2 u = 0$
Boussinesq	$3u_{tt} + u_{xxxx} + 6(uu_x)_x = 0$

Tableau 1-1: Quelques équations ayant joué un rôle important dans la genèse de la théorie des solitons. Les indices représentent des dérivées.

Une autre période d'une soixantaine d'années s'écoula avant que n'ait lieu un autre bond qualitatif dans la compréhension des ondes solitaires. On ne peut passer sous silence les travaux de Seeger, Donth & Kochendörfer [4] qui, en 1953, en étudiant la dislocation des solides, montrèrent que l'équation aujourd'hui connue sous le nom d'équation de *Sine-Gordon* (voir tableau 1-1) possède elle aussi des ondes solitaires

comme solutions. Toutefois ce n'est qu'en 1955, suite à un résultat d'une simulation numérique obtenue par Fermi, Pasta & Ulam [5] qui semble à première vue bien éloigné du sujet qui nous intéresse, que le regain d'intérêt pour l'étude des ondes solitaires devint vraiment important. Ceux-ci s'intéressaient aux effets anharmoniques dans un réseau périodique d'atome en une dimension. Lorsqu'on ne considère que les termes harmoniques, on peut décomposer la vibration du réseau en superposition de modes normaux. Puisque ceux-ci sont indépendants les uns des autres, l'énergie de chacun des modes devrait demeurer constante. En introduisant une perturbation non-linéaire (effets anharmoniques), les modes normaux devraient en principe interagir entre eux ce qui permettrait à l'énergie de se distribuer dans chacun des modes d'oscillation en accord avec le théorème d'équipartition. Or, ce n'est pas ce que les simulations numériques indiquèrent. Au contraire, Fermi et ses collaborateurs constatèrent que l'énergie revenait périodiquement dans les modes initialement excités.

Cette découverte poussa les physiciens américains Norman Zabusky et Martin Kruskal à accorder beaucoup d'attention à ce problème. Il se trouve que sous certaines approximations, l'équation utilisée pour modéliser le réseau d'atome peut être réduite à celle de Korteweg-de Vries. Par des simulations numériques, ils montrèrent que des ondes de vitesse et de forme constantes peuvent se propager dans ce réseau [6]. De plus, celles-ci n'interagissent pratiquement pas entre elles. En fait après une collision seule leur phase change. Tout cela permet d'expliquer le phénomène de récurrence observé dans les simulations de Fermi, Pasta & Ulam (voir figure 1-1). En outre, on peut associer une masse au repos ainsi qu'un centre de masse bien précis à ces ondes. C'est donc en raison de l'ensemble de ces propriétés généralement associées à des particules que Zabusky & Kruskal introduisirent en 1965, soit 3 ans après les travaux majeurs de Perring & Skyrme sur les ondes solitaires de l'équation de Sine-Gordon [7], le terme de *soliton* pour désigner ces ondes solitaires.

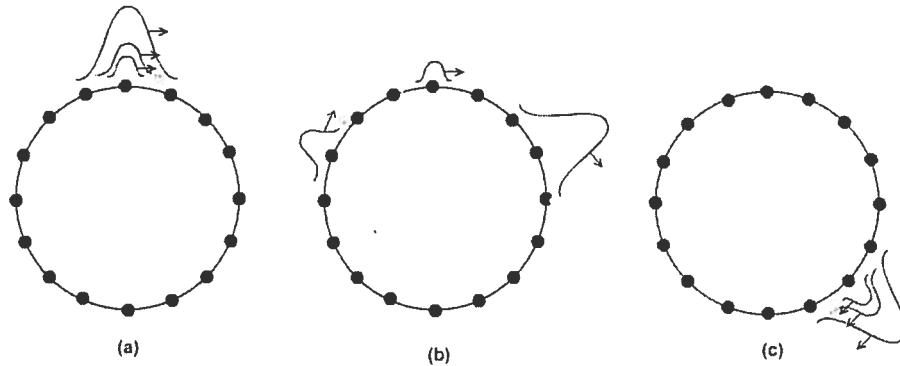


Figure 1-1: Illustration du problème de Fermi, Pasta & Ulam. Soit un réseau monoatomique circulaire. L'état initial est formé de la superposition de plusieurs ondes solitaires (figure a). Puisque ces ondes voyagent à des vitesses différentes, elles se séparent. Elles gardent toutefois toujours la même forme, même après une collision (figure b). Après un certain temps, elles finiront par toutes se rejoindre au même point (figure c), c'est ce qui explique le retour périodique à l'état initial observé par Fermi, Pasta & Ulam.

1.2 Concepts de base

Les concepts d'ondes solitaires et de solitons sont peut-être pour le moment un peu confus. Il faut dire que selon les époques et les domaines d'études considérés, ces notions n'ont pas toujours exactement la même définition. Il convient donc de clarifier tout cela.

Généralement, le terme *onde solitaire* fait référence à certaines solutions d'une équation d'onde non-linéaire et dispersive correspondant à des ondes localisées et dont la forme et la vitesse de propagation sont constantes. On notera que selon cette définition, une solution statique peut être une onde solitaire, puisqu'une vitesse de propagation nulle est une vitesse constante. Un *soliton* est quant à lui un cas particulier d'onde solitaire qui n'est pas altérée par une collision avec d'autres ondes solitaires.

Cela peut paraître étonnant qu'une onde, solution d'une équation dispersive, puisse garder la même forme lorsque le temps s'écoule. En effet, à un temps t donné,

une fonction $f(x, t)$ localisée dans l'espace peut toujours, en autant que f et f' soient continues, être décomposée en ondes planes:

$$f = \int [A_1(k) \cos(kx) + A_2(k) \sin(kx)] dk. \quad (1.1)$$

Puisqu'on considère une situation dispersive, la vitesse de $v_k = \omega(k)/k$ n'est pas identique pour toutes les longueurs d'onde. Ainsi, on s'attend qu'en laissant évoluer le système, les différentes ondes planes se déphasent et par conséquent, que l'onde qui résulte de leur superposition se déforme. Or, dans quelques situations, il est possible que cet effet de dispersion soit contrebalancé par des effets de non-linéarité. C'est ce phénomène qui permet à certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires d'avoir comme solutions des ondes solitaires et éventuellement des solitons.

Pour la plupart des mathématiciens, la propriété la plus significative des solitons est sa capacité à préserver sa forme après une collision. Or en physique des particules et en physique du solide, le fait qu'un soliton ait une énergie finie et qu'il soit localisable est beaucoup plus important. Certains physiciens préfèrent donc donner une définition du soliton en terme de densité d'énergie. Une densité énergétique $\varepsilon(\vec{x}, t)$ sera dite localisée si elle est confinée dans une portion finie de l'espace, c'est-à-dire si elle est partout finie et qu'elle devient nulle à l'infini. De ce point de vue, on peut redéfinir une *onde solitaire* comme étant une solution localisée d'une équation de champ non-linéaire dont la densité d'énergie se déplace à vitesse constante et sans se déformer. Elle doit donc être de la forme:

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{x} - \vec{v}t). \quad (1.2)$$

Passons maintenant au cas du soliton. Au début de cette section, on l'avait défini comme étant une onde solitaire qui n'était pas altérée par une collision avec d'autres ondes solitaires. Cette définition est toujours valable, mais comment cela s'interprète-t-il en terme de densité d'énergie? Lorsqu'on considère un système non-linéaire, on ne peut généralement pas additionner des solutions pour en trouver une autre. Toutefois, étant donnée la nature localisée des ondes solitaires, si on considère une situation où celles-ci sont suffisamment éloignées les unes des autres, c'est-à-dire si les densités d'énergie de chacune des ondes ne se recouvrent pas, on pourra dans ce cas obtenir

une nouvelle solution en additionnant les solutions déjà connues. En laissant évoluer le système, les ondes solitaires qui ne voyagent pas toutes à la même vitesse, finiront par se croiser. Si en attendant suffisamment longtemps, on finit par retrouver chacune des ondes solitaires bien séparées et inaltérées, on parlera alors de solitons. Notons que dans la plupart des cas, lorsque les ondes solitaires se croisent, elles en ressortent modifiées, ainsi seule une fraction des ondes solitaires sont des solitons.

Dans le reste du présent mémoire, nous nous intéresserons exclusivement à des solutions indépendantes du temps. Comme cela a déjà été mentionné, rien n'empêche une configuration statique d'être un soliton. Normalement un champ partout constant devrait constituer le minimum d'énergie, qu'on fixe par convention à zéro, pour un modèle physique donné. Par conséquent, la densité d'énergie devrait être nulle partout. Or, un soliton a une densité d'énergie qui dévie de ce minimum dans une certaine région de l'espace. Le champ devrait donc se déformer continûment de manière à atteindre sa configuration triviale puisque celle-ci est énergétiquement préférable. Toutefois, il existe dans certains cas des contraintes de nature topologique qui empêchent le champ de se déformer librement. Cela peut permettre de stabiliser certaines solutions et on parlera alors de *solitons topologiques*.

1.3 Exemple du modèle ϕ^4

Afin d'illustrer les différents concepts qui viennent d'être présentés, nous allons utiliser comme exemple le modèle ϕ^4 . Celui-ci ne sera pas utilisé dans le reste du mémoire. Seule la simplicité de ce modèle justifie son utilisation comme exemple.

En considérant une situation en (1+1) dimensions, la densité lagrangienne de ce modèle est donnée par:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (1.3)$$

Comme dans le reste du mémoire, nous considérerons une situation statique. La densité

lagrangienne se réduit donc à:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2. \quad (1.4)$$

Notre but est de trouver les solutions de ce modèle pour ensuite les analyser du point de vue de la physique des solitons. Une solution est une configuration stable et d'énergie finie. On notera donc que, dans le cas statique, la densité énergétique (ou densité hamiltonienne) a la même valeur, mais de signe opposé, que la densité lagrangienne: $\varepsilon = -\mathcal{L}$. Ainsi l'énergie totale du champ est simplement donnée par:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2 \right] dx. \quad (1.5)$$

Il s'agit maintenant de trouver une expression pour le champ ϕ . La méthode la plus simple pour trouver les configurations stables est bien entendu de se servir de l'équation d'Euler-Lagrange. À partir de la densité lagrangienne 1.4, on obtient:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{d\phi} \left[\frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2 \right]. \quad (1.6)$$

Pour résoudre cette équation, on peut se servir d'une astuce mathématique en multipliant de chaque côté par $d\phi/dx$:

$$\int \left[\frac{d^2\phi}{dx^2} \right] \frac{d\phi}{dx} dx = \int \frac{d}{d\phi} \left[\frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2 \right] \frac{d\phi}{dx} dx. \quad (1.7)$$

Puisque $\frac{d^2\phi}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2$, cela nous permet d'obtenir une équation différentielle du premier ordre:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \lambda (\phi^2 - a^2) + K. \quad (1.8)$$

Pour que l'énergie soit finie, il faut que la constante K soit nulle. Pour isoler ϕ , nous devons considérer deux cas, celui où l'expression 1.8 est nulle et celui où elle est non-nulle. Le premier de ces cas constitue une situation triviale où le champ est partout constant et prend comme valeur soit a , soit $-a$. En se référant à l'expression 1.7, on voit que ces deux configurations sont d'énergie nulle. Si on considère maintenant le cas où l'expression 1.8 n'est pas nulle, on peut alors inverser l'équation et cela nous permet

de trouver ϕ en intégrant:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\tilde{\phi}}{\lambda(\tilde{\phi}^2 - a^2)} = \mp \frac{1}{a\lambda} \operatorname{arctanh} \left[\frac{\tilde{\phi}}{a} \right] \Bigg|_{\phi(x_0)}^{\phi(x)}. \quad (1.9)$$

En choisissant x_0 tel que $\phi(x_0) = 0$ et en posant $\Delta x \equiv (x - x_0)$, on obtient en isolant $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \pm a \tanh[a\lambda\Delta x]. \quad (1.10)$$

La solution positive porte le nom de *kink* et la négative d'*antikink*. Celles-ci sont tracées à la figure 1-2.

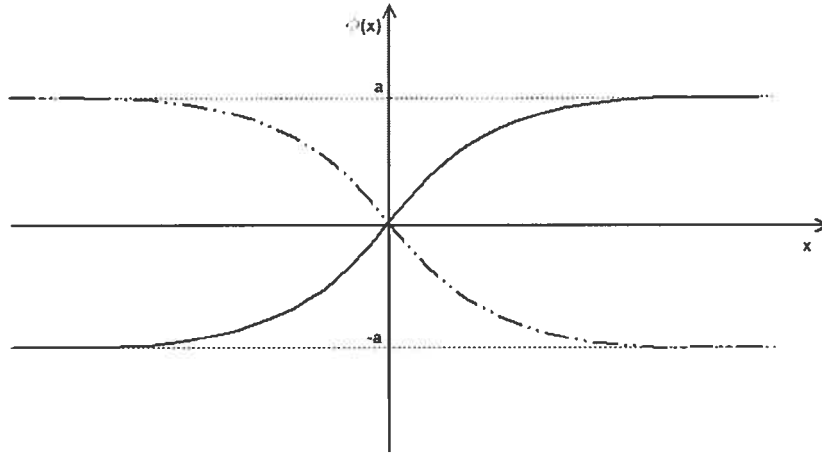


Figure 1-2: *Kink* et *antikink* du modèle ϕ^4 avec $x_0 = 0$. La ligne pleine représente le *kink* et celle formée de tirets et de points l'*antikink*. On remarquera que le champ tend vers $\pm a$ à l'infini.

La densité d'énergie ($\varepsilon = -\mathcal{L}$) est identique pour les deux solutions:

$$\varepsilon(x) = a^4 \lambda^2 \operatorname{sech}^4[a\lambda\Delta x]. \quad (1.11)$$

La figure 1-3 fait clairement ressortir que la densité énergétique est localisée. On obtient l'énergie totale en intégrant ε sur toute la droite (éq. 1.5) ce qui donne $E = \frac{4}{3}a^3\lambda$. On notera qu'en vertu de l'équivalence masse-énergie d'Einstein, cette énergie peut être associée à la masse au repos du *kink* (m_0). De plus, une fois qu'une solution statique est connue, les solutions dépendantes du temps peuvent être obtenues par une

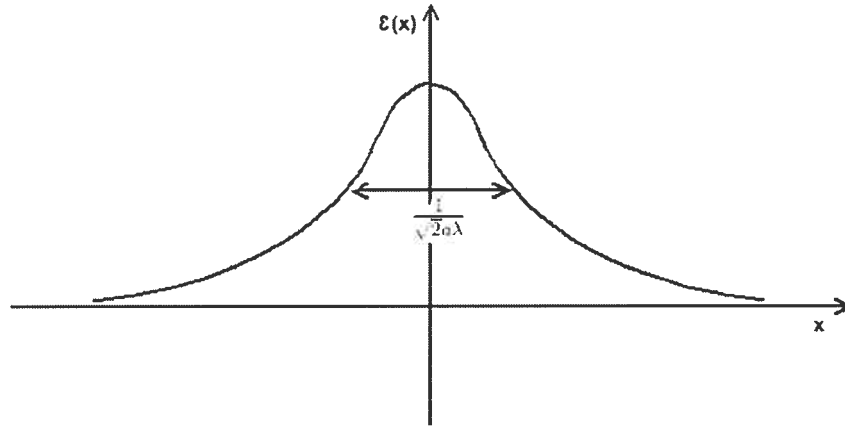


Figure 1-3: Densité d'énergie du *kink* et de l'*antikink*. La largeur caractéristique de la fonction est $\frac{1}{\sqrt{2a\lambda}}$

transformation de Lorentz: ²

$$\phi(x, t) = \pm a \tanh[a\lambda \gamma(\Delta x - vt)]. \quad (1.12)$$

Encore une fois, on trouve l'énergie de ces solutions grâce à l'expression 1.5. On obtient avec un peu de calcul $E(v) = \gamma(v)m_0$. Cette relation est bien connue et relie habituellement l'énergie d'une particule se déplaçant à vitesse v à sa masse au repos. Il s'agit là d'une des propriétés des ondes solitaires qui les rapprochent des particules.

Nous venons donc de trouver quatre familles solutions statique au modèle ϕ^4 : le *kink*, l'*antikink* et deux solutions où le champ est partout constant. Puisque les deux configurations triviales sont d'énergie nulle, on devrait s'attendre à ce que le champ adopte préférentiellement une de celles-ci à l'équilibre, plutôt que la configuration du *kink* ou de l'*antikink*. Toutefois, ce ne sera pas toujours possible. En effet, en se référant à l'équation 1.5, on voit que pour avoir une configuration d'énergie finie, le champ doit nécessairement prendre comme valeur a ou $-a$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. On peut alors regrouper toutes les configurations d'énergie finie en quatre classes qui dépendent de la valeur que prend le champ à $\pm\infty$: $(\phi_{-\infty}, \phi_{\infty}) = \{(-a, -a), (-a, a), (a, -a), (a, a)\}$. Toutes les configurations appartenant à une même classe sont continûment déformables

²On considère un système d'unité dans lequel la vitesse de la lumière vaut un: $c = 1$. Par ailleurs, on considérera dans tout le mémoire que $c = e = \hbar = 1$.

l'une en l'autre (on dit alors qu'elles sont homotopes). Cela n'est toutefois pas le cas pour deux configurations appartenant à des classes différentes. En effet, à l'infini le champ ne peut avoir comme valeur que a ou $-a$. Les valeurs intermédiaires sont interdites car elles feraient diverger l'énergie. On ne peut donc pas passer de manière continue d'une configuration à une autre si celles-ci n'ont pas la même valeur à l'infini positif et à l'infini négatif (ce qui est le cas pour deux configurations appartenant à des classes différentes). Cela revient à dire que toutes les configurations d'énergie finie sont piégées dans la classe à laquelle elles appartiennent. Cela implique que le champ ne pourra pas toujours adopter une de ses deux configurations triviales à l'équilibre. En fait, les quatre solutions du modèle ϕ^4 que nous venons de trouver correspondent à la configuration d'énergie minimale de chacune des classes d'homotopie. Le *kink* et l'*antikink* appartiennent respectivement aux classes $(-a, a)$ et $(a, -a)$ et les solutions constantes aux deux autres classes. Pour minimiser son énergie, le champ adoptera donc une de ces quatre configurations, tout dépendant de la classe d'homotopie dans laquelle il se trouve initialement.

Dans les modèles qui seront présentés dans les prochains chapitres, le regroupement des différentes configurations en classes d'homotopie se fera encore en fonction de la valeur que prend le champ à l'infini. Cela était assez simple à comprendre dans le cas du modèle ϕ^4 , mais se complexifiera pour les autres modèles. Dans de tels cas, il est utile d'attribuer une charge qui caractérise chacune des configurations d'un modèle en fonction de la classe d'homotopie à laquelle elle appartient. Pour ce qui est du modèle ϕ^4 , cette charge est définie comme étant:

$$Q = \frac{1}{2a}[\phi_\infty - \phi_{-\infty}]. \quad (1.13)$$

Puisque cette charge n'est pas dérivée d'un courant de Noether et qu'elle ne dépend que de la forme du champ à l'infini, on la qualifie de charge topologique. Selon la définition qui vient d'être donnée, les configurations appartenant aux classes d'homotopie $\{(-a, -a), (-a, a), (a, -a), (a, a)\}$ sont respectivement de charge $\{0, 1, -1, 0\}$. Les deux solutions triviales ont donc une charge topologique $Q = 0$. On les qualifie donc de solutions non-topologiques. Le *kink* et l'*antikink* sont quant à eux de charge $Q = 1$ et $Q = -1$. Puisqu'ils ont une charge non-nulle, on les qualifie de solutions topologiques.

Il existe des versions du modèle ϕ^4 comportant plus d'une dimension spatiale. Il est alors raisonnable de penser qu'on puisse trouver des configurations stables simplement en étendant les solutions déjà connues dans des dimensions supplémentaires. C'est d'ailleurs en se servant de ce raisonnement qu'au chapitre 4, on construira un soliton noué (objet en $(3+1)$ dimensions) à partir d'un bébé-skyrmion (objet en $(2+1)$ dimensions). Il est donc utile de se familiariser avec ce type de construction dans le cas simple du modèle ϕ^4 . Nous considérerons donc une version en $(2+1)$ dimensions du modèle ϕ^4 . Dans le cas particulier où le champ ϕ ne dépend pas de la coordonnée y , on peut facilement se convaincre qu'une des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange du modèle en $(2+1)$ dimensions a la forme du champ qui est représenté à la figure 1-4. Celle-ci correspond simplement à la solution en $(1+1)$ dimensions, à qui on a fait subir une translation tout le long de l'axe des y . En reliant de manière continue les points pour lesquels la valeur du champ est identique, on obtient ce qu'on appelle des lignes de champs. Dans le présent exemple, celles-ci forment toutes des droites de longueur infinie parallèles à l'axe des y . En $(1+1)$ dimensions, un seul point est nécessaire pour localiser le *kink* sur la droite. Pour cela on utilise habituellement la position du centre de masse (x_0). Dans la solution en $(2+1)$ dimensions, ce point forme maintenant une droite. On désignera celle-ci comme étant la ligne de champ centrale. Lorsque $x = x_0$, le champ ϕ est nul. Ainsi, en $(1+1)$ dimensions la position du centre de masse sépare la droite en deux régions, l'une pour laquelle $\phi > 0$ et l'autre pour laquelle $\phi < 0$. Le même phénomène est présent en $(2+1)$ dimensions. La ligne de champ centrale constitue en effet une frontière entre une région du plan où le champ est positif et l'autre où le champ est négatif. En étendant de la même manière la solution du *kink* en $(3+1)$ dimensions, on obtiendrait dans ce cas un plan séparant l'espace en deux domaines. Il est à noter que même si les versions étendues du *kink* sont des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange des modèles ϕ^4 à plus d'une dimensions d'espace, celles-ci ne constituent toutefois pas des configurations d'énergie finie. Cela se voit très bien lorsqu'on considère l'énergie du *kink* étendue en $(2+1)$ dimensions:

$$E = \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx dy = \frac{4}{3} a^3 \lambda \Delta y. \quad (1.14)$$

On obtient donc une expression pour l'énergie formée d'une longueur (Δy) et d'une densité linéaire d'énergie ($\varepsilon_l \equiv 4a^3/3\lambda$). Évidemment dans notre cas, Δy est infini. L'énergie diverge donc. En fait, de manière plus générale, lorsqu'on construit une con-

figuration en étendant un objet localisable en un point et en une dimension supplémentaire, l'énergie de la configuration obtenue va être proportionnelle à la longueur de la ligne de champ centrale. Pour que l'énergie soit finie, la longueur de la ligne de champ centrale doit donc elle aussi être finie. Cela implique, pour que le champ soit continu, que la ligne de champ centrale forme une courbe fermée. On verra en détail au chapitre 4 comment procéder pour obtenir une telle courbe.

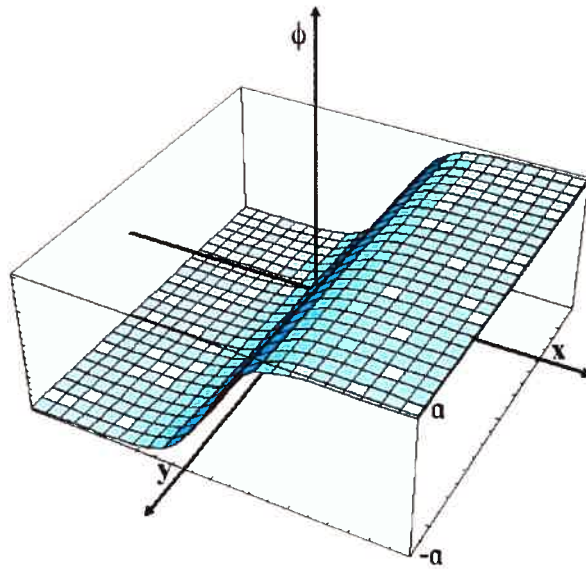


Figure 1-4: Extension du *kink* dans une dimension supplémentaire.

Pour conclure, mentionnons que le *kink* et l'*antikink* ne sont pas des solitons au sens strict du terme. Ce sont bel et bien des solutions d'une équation d'onde non-linéaire (en développant l'expression 1.6, on note la présence d'un terme cubique: $\phi_{xx} = 2\lambda^2[\phi^3 - a^2\phi]$), leur densité d'énergie est bien localisée et ne s'étale pas dans le temps, toutefois, il a été démontré par des simulations numériques que le *kink* et l'*antikink* ne parviennent pas à préserver leur forme après une collision. Bien que par abus de langage, on les désigne souvent comme tels, il ne s'agit donc pas *stricto sensu* de solitons, mais seulement d'ondes solitaires.

CHAPITRE 2

Vortex

2.1 Introduction

La notion de vortex est tirée de la mécanique des fluides. En théorie des champs, elle fait référence à une solution statique d'un système de champs en $(2+1)$ dimensions pour laquelle un des champs adopte une configuration rotationnelle. Si nous nous intéressons aux vortex, c'est parce que ceux-ci vont jouer un rôle majeur dans les conclusions qui seront tirées au dernier chapitre de ce mémoire. En effet, en analysant le modèle formé de deux champs scalaires complexes (Ψ_1 et Ψ_2) en interaction avec un champ de jauge (\vec{A}), on verra apparaître une configuration tourbillonnaire. Il est plus simple de commencer par étudier un système où un seul champ scalaire complexe interagit avec le champ de jauge. En conséquence, nous consacrons ce chapitre au vortex de Nielsen-Olesen [8] qui est en fait une solution du modèle de Higgs abélien. Comme on le verra sous peu, le vortex de Nielsen-Olesen doit son existence à une contrainte topologique à laquelle le champ scalaire est soumis. Cela nous permettra donc de se familiariser un peu plus avec l'aspect topologique des solitons avant de passer à des situations plus complexes dans les autres chapitres. Pour conclure cette introduction, on notera qu'un bon résumé du sujet se trouve dans les ouvrages de Preskill [9] et Vilenkin & Shellard [10].

2.2 Modèle de Goldstone

Avant de considérer le modèle de Higgs abélien, il est utile de se pencher sur le cas du modèle de Goldstone avec un potentiel en forme de *sombrero*. Ce dernier est en fait un cas particulier du modèle de Higgs abélien où le quadrivecteur $A_\mu \equiv (V_E, \vec{A})$ est nul. V_E correspond au potentiel électrique. Le but de ce détour est de faire ressortir un problème de divergence énergétique inhérent à l'absence du champ de jauge \vec{A} . De manière générale, la densité lagrangienne du modèle de Goldstone a la forme suivante:

$$\mathcal{L} = |\partial_0 \Psi_1|^2 - |\partial_i \Psi_1|^2 - V(|\Psi_1|). \quad (2.1)$$

Puisque qu'on considère une situation en (2+1) dimensions $i = \{1, 2\}$. De plus, dans un cas statique, cette expression se réduit à:

$$\mathcal{L} = -|\partial_i \Psi_1|^2 - V(|\Psi_1|). \quad (2.2)$$

Le potentiel considéré a la forme suivante:

$$V(|\Psi_1|) = \frac{\lambda}{2} (|\Psi_1|^2 - v^2)^2. \quad (2.3)$$

En raison de la forme du chapeau traditionnel mexicain qu'il évoque (voir figure 2-1), on qualifie ce dernier de potentiel en forme de *sombrero*. On notera que celui-ci est nul pour toutes les valeurs du champ Ψ_1 se trouvant sur un cercle de rayon $|\Psi_1| = v$ dans le plan complexe. Ainsi, le potentiel possède une infinité de zéros, reliés de manière continue entre eux par une transformation $U(1)$.

Notre but est de montrer que, hormis les solutions triviales, il n'existe pas de solution statique d'énergie finie. Dans le cas statique, $\varepsilon = -\mathcal{L}$. Cela implique que l'énergie totale du système est donnée par:

$$E = \int \varepsilon d^2x = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[|\partial_i \Psi_1|^2 + \frac{\lambda}{2} (|\Psi_1|^2 - v^2)^2 \right] r dr d\theta. \quad (2.4)$$

Si le champ ne tend pas vers un des zéros du potentiel à l'infini, il est évident que cette intégrale va diverger. Donc, en supposant qu'une configuration donnée puisse être d'énergie finie (ce qui n'est pas le cas, sauf pour les configurations homotopes à la

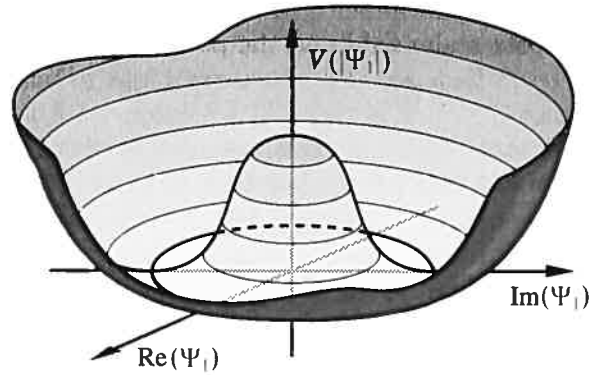


Figure 2-1: Potentiel en forme de *sombrero*. Image tirée de [10] avec modifications.

famille de solutions triviales), le champ devrait nécessairement avoir la forme suivante à l'infini:

$$\Psi_1^\infty \equiv \Psi_1(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow v e^{i\varphi(\theta)}. \quad (2.5)$$

À partir d'un certain rayon R , on fera l'approximation asymptotique que $\Psi_1 \approx \Psi_1^\infty$. On pourra donc séparer le domaine d'intégration en deux régions, l'une pour laquelle $r < R$ et dont l'intégrale devrait normalement converger et une autre pour laquelle $r \geq R$ et qui est plus problématique au niveau de l'intégration. En considérant ce dernier cas, on obtient:

$$E_{r \geq R} = v^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \int_R^\infty \frac{dr}{r}. \quad (2.6)$$

L'intégrale en r tend logarithmiquement vers l'infini et l'intégrale en θ , dans la mesure où on insiste pour que φ ne soit pas une constante, est non-nulle. Or, comme on le verra en étudiant le modèle de Higgs, les solutions avec φ constant sont triviales. Par conséquent, l'énergie de ce système diverge dans des situations non-triviales. L'ajout d'un champ de jauge dans la prochaine section viendra régler ce problème.

2.3 Modèle de Higgs abélien

Le vortex de Nielsen-Olesen est une solution du modèle de Higgs abélien. Nous chercherons donc à la dériver à partir de la densité lagrangienne du modèle. Pour empêcher la diver-

gence énergétique observée pour le modèle de Goldstone, les champs \vec{A} et Ψ_1 doivent adopter des configurations bien précises. Or, il est possible d'obtenir qualitativement la forme de ces configurations sans recourir aux équations d'Euler-Lagrange. Pour cela, on devra notamment analyser le problème d'un point de vue topologique. Le point de départ de notre démarche sera d'introduire le modèle en présentant sa densité lagrangienne.

2.3.1 Densité lagrangienne du modèle

Comme cela a été mentionné, le modèle de Goldstone avec un potentiel en forme de sombrero est un cas particulier du modèle de Higgs abélien où le quadrivecteur A_μ est «éteint». La densité lagrangienne du modèle de Higgs peut donc s'obtenir en «rallumant» A_μ dans l'expression 2.1. Pour cela, il suffit de remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes ($\partial_a \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$) et d'ajouter un terme cinétique correspondant à ce nouveau champ de jauge: $\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Les indices μ et ν vont de 0 à 2. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini en fonction du quadrivecteur A_μ : $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La densité lagrangienne du modèle de Higgs abélien se formule donc de cette façon:

$$\mathcal{L} = |D_0\Psi_1|^2 - |D_i\Psi_1|^2 - \frac{\lambda}{2} (|\Psi_1|^2 - v^2)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Le premier terme de cette expression est nul dans un cas statique D'autre part, le produit $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ peut se réexprimer d'une manière plus familière. En effet, il est bien connu que le champ électrique et le champ magnétique sont reliés au tenseur $F_{\mu\nu}$ par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} E_i &= -F_{0i} \\ B_k &= -\frac{\epsilon_{ijk}}{2} F_{ij} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Avec un peu de calcul, on trouve que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(E^2 + B^2)$. Or, puisqu'on considère une situation statique, le champ électrique ne dépend pas de \vec{A} et se réduit à $E_i = -\partial_i V_E$. Pour simplifier la situation, on considérera un cas où cette dérivée est nulle. Le produit des deux tenseurs vaut donc maintenant $2B^2$. En tenant compte de toutes ces

remarques, la densité lagrangienne s'écrit maintenant:

$$\mathcal{L} = -|D_i \Psi_1|^2 - \frac{\lambda}{2} (|\Psi_1|^2 - v^2)^2 - \frac{B^2}{2}. \quad (2.9)$$

Puisqu'on considère une situation statique et que le terme $|D_0 \Psi_1|^2$ a disparu, la densité énergétique est égale, mais de signe opposé, à la densité lagrangienne $\varepsilon = -\mathcal{L}$.

D'autre part, on notera que les équations d'Euler-Lagrange dérivées à partir de l'expression 2.9 sont:

$$\begin{aligned} D_i D^i \Psi_1 + \frac{\lambda}{2} \Psi_1 (|\Psi_1|^2 - v^2) &= 0 \\ \partial_i F^{ij} - 2\text{Im}\{\Psi_1^* D^j \Psi_1\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

On parviendra à trouver le comportement qualitatif des champs Ψ_1 et \vec{A} sans avoir à résoudre ces équations. Pour cela, nous devons d'abord nous attarder à la topologie du modèle.

2.3.2 Aspect topologique du modèle

Tout comme dans le cas du modèle ϕ^4 , les différentes configurations du champ scalaire complexe du modèle de Higgs abélien peuvent être regroupées en classes d'homotopie. Rappelons que, par définition, ces classes rassemblent toutes les configurations d'énergie finie continûment déformables l'une en l'autre. Pour les étudier, nous procéderons de la même manière que dans le cas du modèle ϕ^4 , c'est-à-dire en analysant le comportement du champ à l'infini.

Sous les conditions que nous avons évoquées, la densité énergétique du modèle de Higgs abélien a la forme suivante:

$$\varepsilon = |D_i \Psi_1|^2 + \frac{\lambda}{2} (|\Psi_1|^2 - v^2)^2 + \frac{B^2}{2}. \quad (2.11)$$

Les trois termes formant la densité énergétique ne sont jamais négatifs. Ils sont soit positifs, soit nuls. Ainsi, à l'infini, chacun de ceux-ci doit tendre vers zéro pour pouvoir espérer avoir une énergie totale finie. Comme cela a déjà été mentionné pour le modèle

de Goldstone, cela implique que le champ Ψ_1 doit tendre vers un des zéros du potentiel à l'infini: $\Psi_1^\infty \rightarrow v e^{i\varphi(\theta)}$. Dans le plan complexe, l'ensemble des valeurs que peut prendre Ψ_1^∞ forme donc un cercle. On notera ce dernier S_1^{int} . L'exposant «*int*» fait référence au fait qu'il s'agit d'un espace interne. L'espace physique dans ce problème est le plan R_2^{phy} . Par définition, le champ Ψ_1^∞ désigne la valeur que prend le champ Ψ_1 sur un cercle de rayon infini. On peut voir ce dernier comme la «frontière» du plan R_2^{phy} . On notera donc ce cercle S_1^{phy} . Puisque la phase $e^{i\varphi(\theta)}$ est une fonction de l'angle polaire θ , à chaque point du cercle S_1^{phy} correspond un point précis du cercle S_1^{int} . Le modèle de Higgs abélien est donc caractérisé par des applications d'un cercle vers un autre. Ce type d'applications implique l'existence d'une charge topologique pour le champ Ψ_1 . En effet, comme cela est illustré à la figure 2-2, on peut attribuer à chacune des configurations du champ Ψ_1 une valeur définie par le nombre de tours qu'effectue la phase $e^{i\varphi(\theta)}$ sur le cercle S_1^{int} , lorsqu'on fait le tour du cercle S_1^{phy} . Pour une raison évidente, cette charge porte le nom de nombre d'enroulement. On la notera par n .

Il est assez simple de dériver une expression pour calculer n . En effet, pour que Ψ_1^∞ soit continue, il faut que, lorsqu'on effectue un tour sur le cercle S_1^{phy} , la phase ait effectué un nombre entier de tours sur le cercle S_1^{int} . Mathématiquement, cela s'exprime de cette façon: $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) + n2\pi$. Cette équation peut aussi être exprimée de la manière suivante:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (2.12)$$

Cette expression nous permet donc de calculer le nombre d'enroulement d'une configuration. Toutes les configurations avec le même nombre d'enroulement forment une classe d'homotopie, c'est-à-dire que toutes les configurations ayant la même charge topologique peuvent être déformées de manière continue l'une en l'autre, alors que les configurations de charges différentes ne le peuvent pas. Ces classes ont une structure de groupe. Mathématiquement, on parle du premier groupe d'homotopie du cercle et celui-ci est noté $\pi_1(S_1^{int})$. Ce groupe est isomorphe au groupe des entiers: $\pi_1(S_1^{int}) \approx \mathbb{Z}$. Nous suggérons au lecteur ou à la lectrice qui désire en savoir plus à ce sujet de se référer au livre *Aspects of symmetry* de Sydney Coleman [11].

Similairement à ce qu'on a vu pour le modèle ϕ^4 , on qualifie la classe d'homotopie

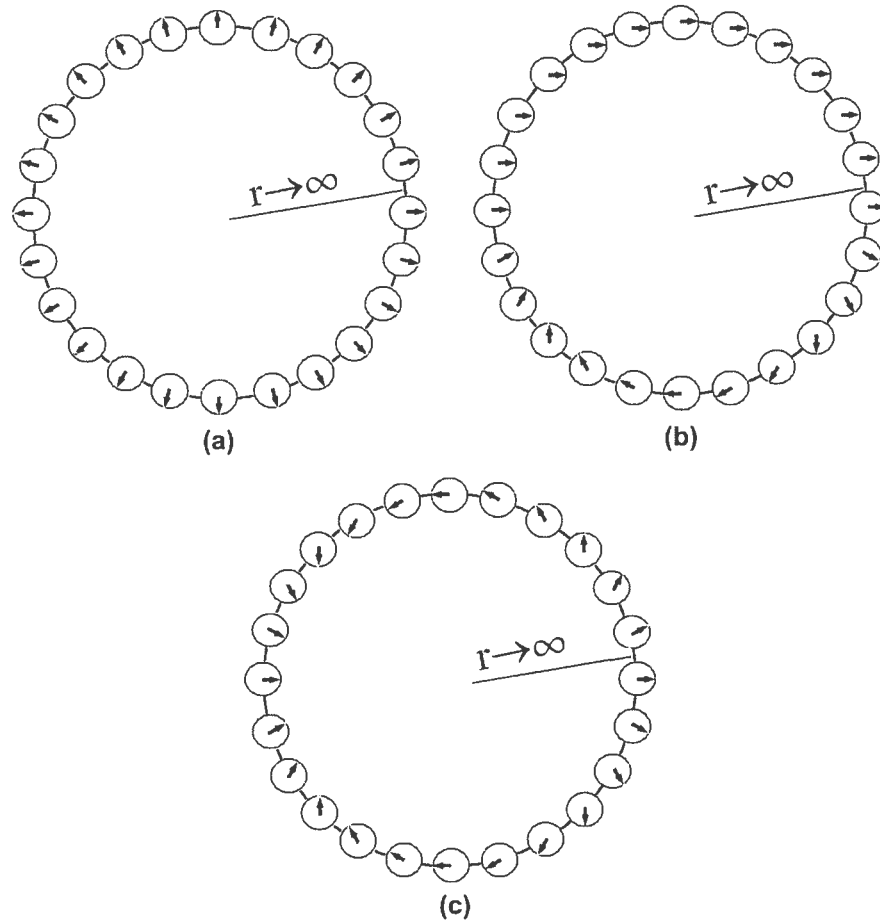


Figure 2-2: Illustration du concept de nombre d'enroulement. La «frontière» de l'espace physique est représentée par le grand cercle (S_1^{phy}). La phase $e^{i\varphi(\theta)}$ est représentée par les flèches dans les petits cercles (S_1^{int}). En (a), lorsqu'on fait un tour sur le cercle S_1^{phy} , la flèche fait elle aussi un tour sur le cercle S_1^{int} ($n = 1$). Il en est de même en (b). En (c), lorsqu'on fait un tour sur le cercle S_1^{phy} , la flèche fait quant à elle deux tours sur le cercle S_1^{int} ($n = 2$). Les configurations (a) et (b) font donc partie de la même classe d'homotopie ($n = 1$) et sont continûment déformables l'une en l'autre alors que ce n'est pas le cas pour la configuration (c) qui appartient à une autre classe d'homotopie ($n = 2$).

regroupant les configurations de charge $n = 0$ de secteur non-topologique et les autres classes de secteurs topologiques. Les configurations minimisant l'énergie du système¹ dans une classe donnée devraient normalement, si elles sont d'énergie finie, constituer une solution du modèle de Higgs abélien. Les solutions les plus simples appartiennent évidemment au secteur $n = 0$ et sont formées par des configurations où le champ Ψ_1 adopte partout comme valeur un des zéros de son potentiel et où $\vec{A} = 0$. Ces solutions ont une énergie nulle. Les solutions des secteurs topologiques ont évidemment des comportements moins triviaux. Par exemple, comme on le verra dans la prochaine section, la solution du secteur $n = 1$ forme un vortex.

2.3.3 Solution du vortex

On a vu en étudiant le modèle de Goldstone, qu'en l'absence de champ de jauge, l'énergie du système était nécessairement divergente, à moins que φ , la phase du champ Ψ_1 à l'infini, soit constante (secteur $n = 0$). Or, grâce à l'interaction du champ de jauge, on verra qu'il est possible pour une configuration dont la phase n'est pas constante à l'infini d'avoir une énergie finie. On considérera le cas où $\varphi(\theta) = \theta$ (secteur $n = 1$). Notre but est donc de déterminer la forme du champ \vec{A} qui permet à l'énergie d'être finie.

Pour trouver sous quelles conditions il est possible pour une configuration de charge $n = 1$ d'avoir une énergie finie, il est utile de procéder de la même manière que dans la section sur le modèle de Goldstone. On séparera donc le plan en deux régions, l'une pour laquelle $r < R$ et l'autre pour laquelle $r \geq R$. Lorsque $r \geq R$, on fera l'approximation que $\Psi_1 \approx \Psi_1^\infty$ et $\vec{A} \approx \vec{A}^\infty$. Pour que l'énergie totale du système soit finie, il faut évidemment qu'elle le soit dans les deux régions. On n'a pas vraiment à s'inquiéter de cela dans la région $r < R$, mais on devrait se soucier un peu plus de ce

¹Rappelons que le champ Ψ_1 est en interaction avec le champ \vec{A} .

qui se passe lorsque $r \geq R$. L'énergie du système dans cette région est donnée par:

$$E_{r \geq R} = \int_{r \geq R} |D_i^\infty \Psi_1^\infty|^2 d^2x + \int_{r \geq R} \frac{(\vec{B}^\infty)^2}{2} d^2x. \quad (2.13)$$

D'après l'équation 2.5, le champ Ψ_1 prend la forme suivante à l'infini:

$$\Psi_1^\infty = v [\cos \theta + i \sin \theta]. \quad (2.14)$$

Pour empêcher la première intégrale de diverger, le champ \vec{A} doit adopter la forme suivante à l'infini:²

$$A_i^\infty = -\frac{\varepsilon_{ij} x_j}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} A_x^\infty = -\frac{\sin \theta}{r} \\ A_y^\infty = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}. \quad (2.15)$$

Avec un champ de cette forme, les deux intégrales de l'expression 2.13 sont nulles. Pour la première, cela est démontré dans l'annexe C.1. Pour la seconde, cela devient évident lorsqu'on se rend compte que $\vec{B}^\infty = \nabla \times \vec{A}^\infty = 0$. Donc, contrairement à ce qui a été observé dans le modèle de Goldstone, il est possible pour l'énergie de la portion du système située au-delà du rayon R , d'être finie.

Maintenant que l'on connaît le comportement des champs \vec{A} (éq. C.7) et Ψ_1 (éq. 2.14) lorsque $r \geq R$, il faut déterminer la forme de ces champs lorsque $r < R$. Une façon simple de construire une solution, lorsqu'on connaît le comportement asymptotique de celle-ci, est d'étendre ce comportement à tout le plan:

$$\begin{aligned} A_i(r, \theta) &= A_i^\infty = -\frac{\varepsilon_{ij} x_j}{r^2} \\ \Psi_1(r, \theta) &= \Psi_1^\infty = v [\cos \theta + i \sin \theta] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Toutefois, ce procédé ne peut pas être utilisé pour deux raisons. Premièrement, à l'origine, l'angle θ est mal défini. Ainsi l'orientation des deux champs est mal définie à cet endroit. De plus, lorsque le rayon tend vers zéro, le module du champ \vec{A} devient infini. Une manière simple de régler ce problème consiste à ajouter des fonctions de profile:

$$\begin{aligned} A_i(r, \theta) &= A_i^\infty(r, \theta) f_2(r) \\ \Psi_1(r, \theta) &= \Psi_1^\infty(\theta) f_1(r) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les fonctions $f_1(r)$ et $f_2(r)$, doivent bien entendu tendre vers 1 lorsque $r \rightarrow \infty$ pour que l'on retrouve la forme asymptotique des champs. De plus, elles doivent être nulles

²Voir annexe C.1 pour le détail du calcul.

à l'origine pour régler les problèmes que nous venons de mentionner. Pour connaître la forme exacte de ces fonctions, il faut résoudre les équations d'Euler-Lagrange (2.10). Aucune solution sous forme close n'a encore été obtenue, mais on peut calculer leur forme par méthode numérique. Celles-ci sont présentées à la figure 2-3.

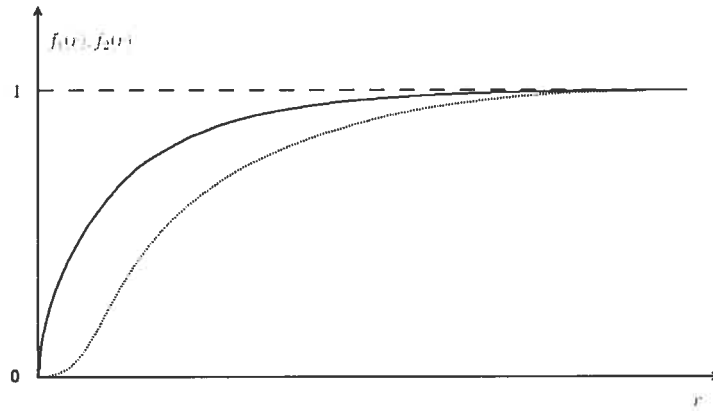


Figure 2-3: Profils des champs \vec{A} et Ψ_1 . f_1 est représentée en ligne continue et f_2 en ligne pointillée. Les deux fonctions valent zéro à l'origine et tendent vers 1 à l'infini.

Les champs Ψ_1 et \vec{A} sont tracés à la figure 2-4. Le champ \vec{A} est nul à l'origine. En raison de la configuration tourbillonnante de \vec{A} , la solution que l'on vient de dériver porte le nom de vortex. Le champ Ψ_1 pointe partout en direction radiale, sauf à l'origine où il est nul. Le vortex est la configuration qui minimise l'énergie dans le secteur topologique $n = 1$. À ce sujet, on gardera en mémoire que l'endroit où $\Psi_1 = 0$ coïncide avec l'endroit où $\vec{A} = 0$. Cette observation va jouer un rôle très important au chapitre 5. Pour terminer, mentionnons que, comme il se doit pour un soliton, la densité d'énergie du système est localisée dans une portion finie du plan (voir figure 2-4-d).

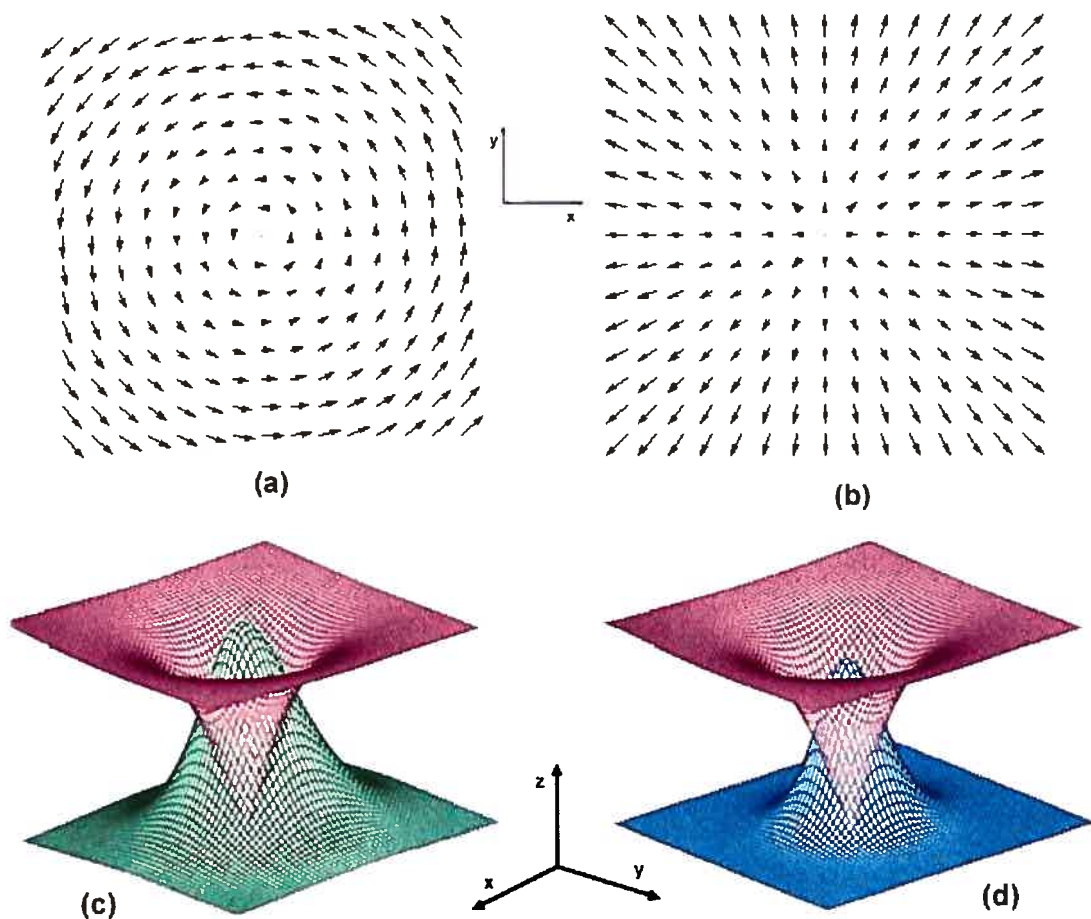


Figure 2-4: Configuration du vortex ($n = 1$). En (a), on retrouve le champ de jauge \vec{A} . En (b), on retrouve le champ scalaire complexe Ψ_1 . La composante réelle du champ est tracée en x et l'imaginaire en y . En (c), le module du champ Ψ_1 est représenté en rouge et celui du champ \vec{B} en vert. En (d), le module du champ Ψ_1 est toujours représenté en rouge. En bleu, il s'agit de la densité d'énergie du système. Images (c) et (d) tirées de [10] avec modifications.

CHAPITRE 3

Les modèles $\sigma O(3)$ non-linéaire et CP^1 en (2+1) dimensions

3.1 Introduction

Le présent chapitre porte sur l'étude des modèles $\sigma O(3)$ non-linéaire et CP^1 en (2+1)-dimensions. De manière générale le modèle CP^{N-1} est composé d'un ensemble de N champs scalaires complexes χ_a ($a = 1, 2, \dots, N$) soumis à la contrainte $\chi_a^* \chi_a = 1$. Le modèle $\sigma O(M)$ non-linéaire est, quant à lui, formé d'un champ normé à M composantes scalaires: $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$. Lorsque $N = M - 1$, on peut voir le modèle CP^{N-1} comme étant une généralisation du modèle $\sigma O(M)$ non-linéaire. Comme on le verra, dans le cas qui nous intéresse ($N = 2, M = 3$), les deux modèles s'avèreront même à être complètement équivalents.

Si l'on présente ici ces modèles en (2+1) dimensions, c'est en vue de faciliter l'étude des cas plus complexes en (3+1) dimensions que l'on rencontrera dans les deux chapitres suivants. Le modèle de Faddeev peut en effet être vu comme une généralisation en (3+1) dimensions du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire. De plus en faisant un certain changement de variables, on pourra se servir des champs χ_1 et χ_2 du modèle CP^1 pour décrire le modèle à deux champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge dans lequel Babaev, Faddeev & Niemi affirment avoir trouvé des solitons noués.

On commencera donc par étudier le modèle CP^1 , puis le modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire en faisant ressortir quelques-unes de leurs caractéristiques. Ensuite, nous dé-

montrerons l'équivalence de ces deux modèles. Ainsi, si on obtient la solution d'un des deux modèles, celle-ci constitue automatiquement une solution de l'autre modèle. La dernière partie de ce chapitre consistera donc à chercher une certaine solution du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire et de la réexprimer en terme des variables du modèle CP^1 . C'est en se servant de cette solution que l'on construira les solitons noués dans le prochain chapitre.

Pour terminer cette introduction, mentionnons que le livre de Rajaraman [12] constitue une excellente référence sur les modèles $\sigma O(3)$ non-linéaire et CP^1 .

3.2 Modèle CP^1

L'étude du modèle CP^1 se fera en quatre étapes. Nous commencerons d'abord par introduire le modèle en dérivant l'équation du champ à partir de sa densité lagrangienne. Ensuite, nous analyserons sous quelles conditions une transformation des champs χ_1 et χ_2 laisse le modèle invariant. L'aspect topologique sera ensuite abordé. Dans un premier temps, on démontrera que les différentes configurations des champs χ_1 et χ_2 sont caractérisées par une charge topologique et peuvent être regroupées en classes d'homotopie. Dans un deuxième temps, on montrera qu'il existe un lien entre l'énergie d'une configuration et sa charge topologique.

3.2.1 Densité lagrangienne du modèle

Le modèle CP^1 consiste en un ensemble de deux champs scalaires complexes, $\chi_1 = |\chi_1| e^{i\varphi_1}$ et $\chi_2 = |\chi_2| e^{i\varphi_2}$, soumis à la contrainte $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$ et dont la dynamique est régie par une certaine densité lagrangienne. En introduisant le spineur

$\chi \equiv (\chi_1, \chi_2)^T$, celle-ci prend la forme suivante:¹

$$\mathcal{L} = |\partial_0 \chi|^2 - |\partial_i \chi|^2 - |\chi^\dagger \partial_0 \chi|^2 + |\chi^\dagger \partial_i \chi|^2. \quad (3.1)$$

Comme dans les chapitres précédents, on considérera une situation statique:

$$\mathcal{L} = -|\partial_i \chi|^2 + |\chi^\dagger \partial_i \chi|^2. \quad (3.2)$$

Puisque les termes avec des dérivées temporelles ont disparu, la densité énergétique devient simplement $\varepsilon = -\mathcal{L}$.

Il va s'avérer utile de reformuler la densité lagrangienne sous une autre forme. Pour cela, on notera qu'en dérivant la contrainte $\chi^\dagger \chi = 1$, on obtient $2\text{Re}[\chi^\dagger \partial_i \chi] = 0$. Le terme $\chi^\dagger \partial_i \chi$ est donc purement imaginaire. Cela permet de construire une variable réelle en posant $\tilde{A}_i = i\chi^\dagger \partial_i \chi$. L'introduction de ce «champ» n'ajoute aucun degré de liberté au système puisqu'il est entièrement déterminé par les champs χ_1 et χ_2 . Puisque \tilde{A}_i n'est en fait qu'un artifice mathématique et ne constitue pas un véritable champ, on le note avec un tilde. On peut définir à partir de ce dernier, une dérivée covariante: $\tilde{D}_i = \partial_i - i\tilde{A}_i$. Cela nous permet de reformuler la densité lagrangienne de la manière suivante:

$$\mathcal{L} = -|\tilde{D}_i \chi|^2. \quad (3.3)$$

La vérification de l'équivalence de l'expression 3.2 et de l'expression 3.3 est directe lorsqu'on développe cette dernière.

On obtient sans trop de difficulté les équations du champ en se servant de la méthode d'Euler-Lagrange. Il ne faut toutefois pas oublier de tenir compte de la contrainte $\chi^\dagger \chi = 1$ par l'entremise d'un multiplicateur de Lagrange:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \lambda(\chi^\dagger \chi - 1). \quad (3.4)$$

L'utilisation de l'expression 3.3 allège beaucoup les calculs et on obtient:

$$\tilde{D}_i(\tilde{D}^i \chi) + \lambda \chi = 0. \quad (3.5)$$

¹Rappelons que l'on considère une situation statique en (1+2) dimensions, ainsi $i = \{1, 2\}$.

En multipliant cette expression à gauche par χ^\dagger , on trouve $\lambda = -\chi^\dagger \tilde{D}_i(\tilde{D}^i \chi)$. L'équation du champ prend par conséquent la forme:

$$\tilde{D}_i(\tilde{D}^i \chi) - [\chi^\dagger \tilde{D}_i(\tilde{D}^i \chi)]\chi = 0. \quad (3.6)$$

Normalement, c'est en résolvant cette équation qu'on trouve les solutions du modèle. Toutefois, nous ne procéderons pas ainsi. Comme cela a été mentionné dans l'introduction, les modèles CP^1 et $\sigma O(3)$ non-linéaire sont équivalents en $(2+1)$ dimensions. On cherchera donc à solutionner le modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire, pour ensuite réexprimer les configurations obtenues en termes des champs χ_1 et χ_2 . Pour l'instant, nous allons poursuivre l'étude du modèle CP^1 .

3.2.2 Invariance du modèle

Lorsqu'un modèle est invariant sous une certaine transformation, cela implique qu'en faisant subir cette transformation à une de ses solutions, celle-ci demeure encore une solution. Dans une telle situation, on parle alors d'une famille de solutions. Il est donc bien important de pouvoir identifier sous quelles transformations un modèle est invariant.

Pour qu'une transformation donnée laisse le modèle CP^1 invariant, celle-ci ne doit ni modifier la densité lagrangienne du modèle, ni la contrainte $\chi^\dagger \chi = 1$. Le fait d'ajouter une phase au spineur χ ne modifie pas la contrainte. Cela est toutefois moins évident pour la densité lagrangienne. Pour voir ce qu'il en est, on considérera une transformation de la forme suivante:

$$\chi(\vec{x}) \rightarrow \chi(\vec{x})e^{i\omega(\vec{x})}. \quad (3.7)$$

On suppose qu'avec ce changement, la phase de chacun des champs demeure bien définie partout où la norme de ces derniers n'est pas nulle. Sous cette transformation, la densité lagrangienne devient:

$$\mathcal{L}' = -|\partial_i(\chi e^{i\omega})|^2 + |\chi^\dagger e^{-i\omega} \partial_i(\chi e^{i\omega})|^2. \quad (3.8)$$

En notant que

$$\partial_i(\chi e^{i\omega}) = [\partial_i\chi + i(\partial_i\omega)\chi]e^{i\omega}, \quad (3.9)$$

le développement des deux termes qui composent la densité lagrangienne s'effectue facilement et on obtient:

$$\begin{aligned} -|\partial_i(\chi e^{i\omega})|^2 &= -|\partial_i\chi|^2 - |\partial_i\omega|^2 - 2i\partial_i\omega(\partial^i\chi^\dagger)\chi \\ |\chi^\dagger e^{-i\omega}\partial_i(\chi e^{i\omega})|^2 &= |\chi^\dagger\partial_i\chi|^2 + |\partial_i\omega|^2 + 2i\partial_i\omega(\partial^i\chi^\dagger)\chi \end{aligned} \quad (3.10)$$

En additionnant ces deux expressions, on retombe sur la densité lagrangienne originale:

$$\mathcal{L}' = -|\partial_i\chi|^2 + |\chi^\dagger\partial_i\chi|^2. \quad (3.11)$$

Le modèle CP^1 est donc invariant sous une transformation $U(1)$. Cela implique que chaque solution χ_s appartient à une famille formée par un ensemble infini et continu de configurations de la forme $\chi_s e^{i\omega}$. Cette caractéristique nous sera très utile lors de certains développements. En effet pour des raisons qui seront évidentes un peu plus tard, certaines configurations avec lesquelles on sera appelé à travailler ne nous conviendront pas. On pourra alors librement les modifier en les multipliant par une phase $e^{i\omega}$ sans que cela ne change la physique du problème.

Le modèle CP^1 est également invariant sous une transformation de type $SU(2)$ indépendante de $\vec{\pi}$, c'est-à-dire une transformation de la forme:

$$\chi_b \rightarrow \chi_a M_{ab}, \quad (3.12)$$

où M est une matrice unitaire 2×2 de déterminant 1. En effet la contrainte demeure inchangée sous cette transformation:

$$(\chi^\dagger)' \chi' = (M_{ab}^* \chi_b^*)(\chi_c M_{ca}) = (\chi_b^* \chi_c)(M_{ab}^* M_{ca}) = (\chi_b^* \chi_b) = \chi^\dagger \chi. \quad (3.13)$$

Il en est de même pour la densité lagrangienne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -|\partial_i\chi'|^2 + |(\chi^\dagger)' \partial_i\chi'|^2 \\ &= \partial_i(M_{ab}^* \chi_b^*) \partial^i(\chi_c M_{ca}) + |M_{ab}^* \chi_b^* \partial_i(\chi_c M_{ca})|^2 \\ &= \partial_i\chi_b^* \partial^i\chi_c (M_{ab}^* M_{ca}) + |\chi_b^* \partial_i\chi_c (M_{ab}^* M_{ca})|^2 \\ &= \partial_i\chi_b^* \partial^i\chi_b + |\chi_b^* \partial_i\chi_b|^2 \\ &= -|\partial_i\chi|^2 + |\chi^\dagger\partial_i\chi|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donc toutes les configurations reliées par une transformation $SU(2)$ à une solution χ_s seront elles aussi des solutions du modèle CP^1 .

3.2.3 Aspect topologique du modèle

L'étude du modèle de Higgs abélien a permis de mettre en évidence le rôle majeur que peut jouer une contrainte topologique dans la dynamique d'un champ. Lorsque le champ appartient à une classe d'homotopie donnée, il est piégé dans celle-ci. C'est ce phénomène qui permet à une configuration qui minimise l'énergie à l'intérieur d'une classe d'homotopie donnée d'être stable. Sans cela, pour diminuer son énergie, le champ finirait par se déformer de manière à adopter une configuration triviale. Tout cela démontre bien jusqu'à quel point il est important de savoir si un modèle donné possède une loi de conservation topologique.

Pour vérifier s'il existe une contrainte topologique dans le cas du modèle CP^1 , considérons l'énergie du système:

$$E = \int \varepsilon d^2x = \int |\tilde{D}_i \chi|^2 d^2x. \quad (3.15)$$

Une condition nécessaire pour empêcher cette intégrale de diverger est que $\tilde{D}_i \chi$ soit nul à l'infini:

$$\tilde{D}_i^\infty \chi^\infty = \left(\partial_i + i \tilde{A}_i^\infty \right) \begin{pmatrix} \chi_1^\infty \\ \chi_2^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Cette équation nous permet d'isoler \tilde{A}_i^∞ :²

$$\tilde{A}_i^\infty = i \frac{\partial_i \chi_a^\infty}{\chi_a^\infty} = [-\partial_i \varphi_a^\infty] + i \left[\frac{\partial_i |\chi_a^\infty|}{|\chi_a^\infty|} \right]. \quad (3.17)$$

Puisqu'on sait que le champ \tilde{A}_i est réel, cela implique que la partie imaginaire du membre de droite de cette équation est nulle. Par conséquent, les normes $|\chi_1^\infty|$ et $|\chi_2^\infty|$ sont constantes. Pour ce qui est de la partie réelle, on en tire un système de deux

²Même si cela devrait être évident, pour éviter toute confusion, spécifions qu'ici, la répétition de l'indice a n'implique pas une sommation.

équations: $\tilde{A}_i^\infty = -\partial_i \varphi_1^\infty$ et $\tilde{A}_i^\infty = -\partial_i \varphi_2^\infty$. Par transitivité de la relation d'égalité, on peut en conclure que $\partial_i \varphi_1^\infty = \partial_i \varphi_2^\infty$. Donc, à l'infini, les phases des champs χ_1 et χ_2 sont égales à une constante près. Cela nous permet de poser $\varphi_a^\infty(\theta) \equiv \varphi(\theta) + \varphi'_a$. Le spineur χ prend par conséquent la forme suivante à l'infini:

$$\chi^\infty(\theta) = \chi^0 e^{i\varphi(\theta)} \quad , \quad \chi^0 = \begin{pmatrix} |\chi_1^\infty| e^{i\varphi'_1} \\ |\chi_2^\infty| e^{i\varphi'_2} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Si on considère un des deux champs, on voit que l'ensemble des valeurs qu'il peut prendre à l'infini forme un cercle. On le notera S_1^{int} . D'autre part, on peut considérer l'infini spatial comme un immense cercle de rayon infini. On notera celui-ci S_1^{phy} . Le modèle CP^1 est donc caractérisé par les applications d'un cercle vers un autre. La situation est donc en tout point analogue à ce que l'on a rencontré dans le modèle de Higgs abélien. En se référant à l'analyse qui a été faite au chapitre précédent, on en conclut que les différentes configurations du modèle CP^1 forment des classes d'homotopie et sont caractérisées par une charge topologique qui mesure le nombre d'enroulement de la configuration à l'infini:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta+2\pi} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (3.19)$$

Avant de passer à la section suivante, on notera que dans l'expression 3.17, on a implicitement considéré que χ_1^∞ et χ_2^∞ n'étaient pas nuls. Or, étant donné la contrainte $\chi^\dagger \chi = 1$, un seul des champs peut être nul à la fois. Cela implique que l'expression 3.17 demeure valide pour au moins un des deux champs. Par conséquent, dans un pareil cas, toutes nos conclusions demeurent valides, sauf celle qui affirme qu'à l'infini, les phases des deux champs sont égales à une constante près.

3.2.4 Borne de Bogomol'nyi

Dans le modèle CP^1 , il existe un lien entre l'énergie d'une configuration et sa charge topologique. On peut en effet relier ces deux quantités par une inégalité qui fixe une borne inférieure à l'énergie d'une classe d'homotopie. Celle-ci porte le nom de borne

de Bogomol'nyi [14, 15]. De manière générale, une borne de Bogomol'nyi est formée d'un ensemble d'inégalités faisant intervenir des dérivées partielles et qui dépendent du comportement du champ à l'infini (donc de la classe d'homotopie à laquelle la configuration appartient). Dans le cas particulier du modèle CP^1 , on obtiendra une seule inégalité.

Pour trouver la borne de Bogomol'nyi, on notera dans un premier temps qu'on peut reformuler l'équation 3.19 comme suit: ³

$$n = -\frac{i}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} (\tilde{D}_i \chi)^\dagger (\tilde{D}_j \chi) d^2x. \quad (3.20)$$

Ensuite, on pose $\xi \equiv (\tilde{D}_i \chi \pm i\varepsilon_{ij} \tilde{D}^j \chi)$ et on développe le module de cette expression:

$$\begin{aligned} \xi^\dagger \xi &= [(\tilde{D}_i \chi)^\dagger \mp i\varepsilon_{ij} (\tilde{D}^j \chi)^\dagger][\tilde{D}^i \chi \pm i\varepsilon^{ik} \tilde{D}_k \chi] \\ &= |\tilde{D}_i \chi|^2 + \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ik} (\tilde{D}^j \chi)^\dagger \tilde{D}_k \chi \mp i\varepsilon_{ij} (\tilde{D}^j \chi)^\dagger \tilde{D}^i \chi + \pm i\varepsilon^{ik} (\tilde{D}_i \chi)^\dagger \tilde{D}_k \chi \\ &= 2|\tilde{D}_i \chi|^2 \mp 2i\varepsilon^{ij} (\tilde{D}_j \chi)^\dagger \tilde{D}_i \chi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Puisque le module d'un nombre complexe n'est jamais négatif ($\xi^\dagger \xi \geq 0$), on obtient l'inégalité suivante:

$$|\tilde{D}_i \chi|^2 \geq \pm i\varepsilon^{ij} (\tilde{D}_j \chi)^\dagger \tilde{D}_i \chi. \quad (3.22)$$

En intégrant des deux côtés de l'équation et en comparant avec les expressions 3.15 et 3.20, on trouve une relation entre l'énergie et la charge topologique:

$$E \geq 2\pi |n|. \quad (3.23)$$

Cette expression fixe une valeur minimale à l'énergie qu'une configuration de charge n peut avoir (borne de Bogomol'nyi). En se référant à l'expression 3.22, on voit que cette valeur est atteinte si le champ répond à l'équation suivante:

$$\tilde{D}_i \chi = i \pm \varepsilon_{ij} \tilde{D}^j \chi. \quad (3.24)$$

La présence de cette borne d'énergie, ainsi que l'existence d'une charge topologique, sont de forts indices suggérant l'existence de solutions non-triviales. Pour vérifier cela, il

³Pour le détail du calcul, voir annexe C.2.

faudrait normalement résoudre les équations d'Euler-Lagrange. Toutefois, comme cela a été mentionné à quelques reprises, nous allons plutôt solutionner le modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire et montrer que le modèle CP^1 est équivalent à ce dernier.

3.3 Modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire

Nous découperons notre analyse du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire de la même façon que cela a été fait dans le cas du modèle CP^1 , c'est-à-dire que nous débuterons l'étude du modèle par l'analyse de sa densité lagrangienne. Nous examinerons ensuite l'invariance du modèle. Par après, nous démontrerons que les configurations d'énergie finie possèdent une charge topologique. Finalement, on reliera cette dernière à l'énergie du système en dérivant une borne de Bogomol'nyi.

3.3.1 Densité lagrangienne du modèle

Considérons les densités lagrangienne et énergétique qui suivent:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 \vec{n})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 - \frac{\lambda}{2}(\vec{n}^2 - a^2)^2, \quad (3.25)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_0 \vec{n})^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 + \frac{\lambda}{2}(\vec{n}^2 - a^2)^2. \quad (3.26)$$

Le vecteur \vec{n} est un vecteur d'espace interne à trois composantes scalaires: $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Pour que l'énergie de ce modèle soit finie, il faut absolument que la composante cinétique et la composante potentielle de la densité énergétique tendent vers zéro à l'infini. Cela implique qu'à l'infini, le champ doit être de norme a et qu'il doit avoir une valeur constante. On notera que ces conditions sont nécessaires pour que l'énergie soit finie, mais ne sont pas toujours suffisantes comme on a pu le voir dans le cas du modèle de Goldstone. Pour que l'énergie soit finie, il faut que la densité énergétique tende vers zéro à l'infini, mais encore, qu'elle le fasse suffisamment rapidement.

Le modèle σ $O(3)$ non-linéaire est un cas limite du modèle décrit par la densité lagrangienne 3.25 pour lequel le paramètre λ tend vers l'infini. Pour avoir une énergie finie, la condition imposée au champ \vec{n} d'être de norme a à l'infini doit maintenant être étendue à tout le plan. La densité lagrangienne devient donc: ⁴

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 \vec{n})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2. \quad (3.27)$$

En considérant une situation statique, celle-ci se réduit à un terme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2. \quad (3.28)$$

Dans ces conditions, la densité énergétique est donnée par $\varepsilon = -\mathcal{L}$.

Le fait que le vecteur \vec{n} soit soumis à la contrainte $|\vec{n}| = a$ dans tout le plan a pour conséquence de faire perdre un degré de liberté au système. En effet, on peut maintenant exprimer l'une des composantes du vecteur \vec{n} en fonction des deux autres: $n_k = \sqrt{a^2 - (n_i^2 + n_j^2)}$, où $i \neq j \neq k \neq i$. Sans trop perdre de généralité, on considérera que \vec{n} est de norme unitaire ($a = 1$).

La dérivation de l'équation du champ se fait comme dans le cas du modèle CP^1 . On commence par modifier la densité lagrangienne pour tenir compte de la contrainte (méthode du multiplicateur de Lagrange):

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{\lambda}{2}(\vec{n}^2 - 1). \quad (3.29)$$

Avec cette densité lagrangienne, l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme suivante:

$$\nabla^2 \vec{n} + \lambda \vec{n} = 0. \quad (3.30)$$

En multipliant cette équation par \vec{n} , on peut isoler le multiplicateur: $\lambda = -\vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n}$. L'équation du champ prend donc la forme:

$$\nabla^2 \vec{n} - (\vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n}) \vec{n} = 0. \quad (3.31)$$

À première vue, résoudre cette équation n'apparaît pas être une chose simple. Fort heureusement, lorsqu'on passera à l'étape de trouver une solution pour le modèle σ $O(3)$

⁴En comparant les expressions 3.25 et 3.27, on voit que cette dernière contient implicitement la contrainte $|\vec{n}| = a$.

non-linéaire, on se servira d'une méthode pour laquelle il n'est pas nécessaire de solutionner explicitement l'équation 3.31.

3.3.2 Invariance du modèle

Comme son nom le laisse supposer, on peut s'attendre à ce que le modèle σ $O(3)$ non-linéaire soit invariant sous une transformation $O(3)$. Pour cela, la contrainte et la densité linéaire ne doivent pas être affectées par une transformation de la forme:

$$n_b \rightarrow n_a O_{ab}. \quad (3.32)$$

La matrice O est orthogonale et est indépendante de la position sur le plan. La raison pour laquelle la matrice O ne doit pas dépendre de la position est que cela modifierait la densité lagrangienne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{2}[\partial_i(n_a O_{ac}) \partial^i(n_b O_{bc})] \\ &= -\frac{1}{2}[n_a n_b (\partial_i O_{ac})(\partial^i O_{bc}) + 2n_a (\partial_i n_b)(\partial^i O_{ac})O_{bc}] - \frac{1}{2}[(\partial_i n_a)(\partial^i n_b)O_{ac}O_{bc}] \\ &= -\frac{1}{2}[n_a n_b (\partial_i O_{ac})(\partial^i O_{bc}) + 2n_a (\partial_i n_b)(\partial^i O_{ac})O_{bc}] + \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on s'est simplement servi du fait que les lignes d'une matrice orthogonale sont orthonormales entre elles et cela implique que $O_{ab}O_{cb} = \delta_{ac}$. Pour que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, il faut que le terme entre crochets dans la troisième ligne soit nul. De manière générale, cela ne se produira que si la matrice O est indépendante de la position.

Le fait que la densité lagrangienne et la contrainte soient invariantes sous une transformation $O(3)$ n'a rien de surprenant puisqu'il s'agit de deux quantités construites à partir d'un produit scalaire et que ce dernier est invariant sous rotation. Cette invariance implique que si une configuration donnée est une solution du modèle, on peut alors générer à partir de celle-ci une famille de solutions de taille infinie en faisant subir au vecteur \vec{n} une rotation $O(3)$ dans l'espace interne.

3.3.3 Aspect topologique du modèle

Dans le but de vérifier si les configurations d'énergie finie du modèle σ $O(3)$ non-linéaire forment des classes d'homotopie, nous procéderons à une analyse topologique du modèle. Celle-ci va s'avérer être un peu plus complexe que dans le cas du modèle CP^1 .

Tout d'abord, on notera que dans les deux modèles, l'espace physique considéré est le plan R_2^{phy} . Toutefois, il existe une subtilité dans le cas du modèle σ $O(3)$ non linéaire. En effet, comme cela a été mentionné dans la section sur la densité lagrangienne, pour que l'énergie du système soit finie, le champ doit prendre une valeur constante à l'infini:

$$\vec{n}(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow \vec{n}_\infty. \quad (3.34)$$

Cette caractéristique du modèle a une implication très profonde car elle permet de projeter le plan R_2^{phy} sur une sphère S_2^{phy} (voir figure 3-1). En effet, dans une projection stéréographique inverse, tous les points du plan situés à l'infini sont projetés vers un seul et même point de la sphère (dans notre cas, ce sera le pôle nord). Pour effectuer cette sorte de projection, il est donc nécessaire que le champ ait partout la même valeur à l'infini, sinon celui-ci ne serait pas bien défini au pôle nord de la sphère S_2^{phy} . Pour cette raison, il n'est pas possible d'effectuer une projection stéréographique inverse dans le cas du modèle CP^1 (la phase des champs χ_1 et χ_2 n'est pas constante à l'infini).

De plus, étant donné la contrainte du modèle ($|\vec{n}|^2 = 1$), le vecteur \vec{n} doit prendre sa valeur sur une sphère unitaire. L'espace interne forme donc aussi une sphère que l'on notera S_2^{int} . Le modèle CP^1 est donc caractérisé par des applications d'une sphère vers une autre, c'est-à-dire qu'à chaque point de la sphère S_2^{phy} correspond une valeur précise de la sphère S_2^{int} . De la même manière que les applications d'un cercle vers un autre sont caractérisées par un nombre d'enroulement n , les applications d'une sphère vers une autre sont caractérisées par un nombre de recouvrement Q . Dans le cas qui nous occupe, cette quantité représente le nombre de fois que la surface de S_2^{int} est recouverte lorsqu'on balaie S_2^{phy} d'un point jusqu'à son antipode (voir figure 3-2).

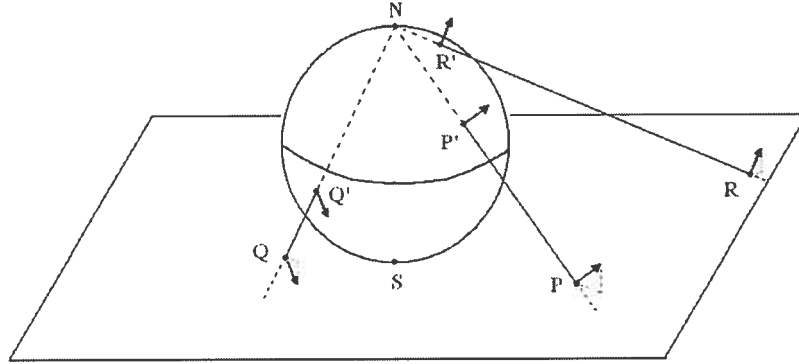


Figure 3-1: Projection stéréographique inverse de l'espace physique R_2^{phy} vers la sphère S_2^{phy}

Mathématiquement, cela s'exprime de la façon suivante:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2^{phy}} dS^{int}(\vec{s}). \quad (3.35)$$

Le vecteur \vec{s} est le vecteur position dans l'espace S_2^{phy} . Le terme dS^{int} représente quant à lui un élément infinitésimal d'aire de la sphère unitaire S_2^{int} . Cela est à mettre en parallèle avec l'équation 3.19 où l'élément infinitésimal d'angle $d\varphi$ correspond à un élément infinitésimal de longueur du cercle unitaire S_1^{int} . Il est généralement plus simple de travailler avec une expression pour Q qui dépende du champ \vec{n} :⁵

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon^{ij} \vec{n} \cdot (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}) d^2x. \quad (3.36)$$

Comme on peut le voir à la figure 3-2, les configurations ayant la même charge topologique peuvent être déformées de manière continue l'une en l'autre, alors que ce n'est pas le cas pour des configurations de charge différente. Toutes les configurations d'énergie finie que peut emprunter le champ \vec{n} dans le modèle σ $O(3)$ non-linéaire se distribuent donc dans des classes d'homotopie. On notera que ces classes ont elles aussi une structure de groupe. Elles forment en fait ce qu'on appelle le second groupe d'homotopie de la sphère. Celui-ci est noté $\pi_2(S_2^{int})$ et tout comme le groupe $\pi_1(S_1^{int})$, il est isomorphe au groupe des entiers: $\pi_2(S_2^{int}) \approx \mathbb{Z}$.

⁵Pour la démonstration de l'équivalence de l'expression 3.36 et de l'expression 3.35, voir annexe C.3.

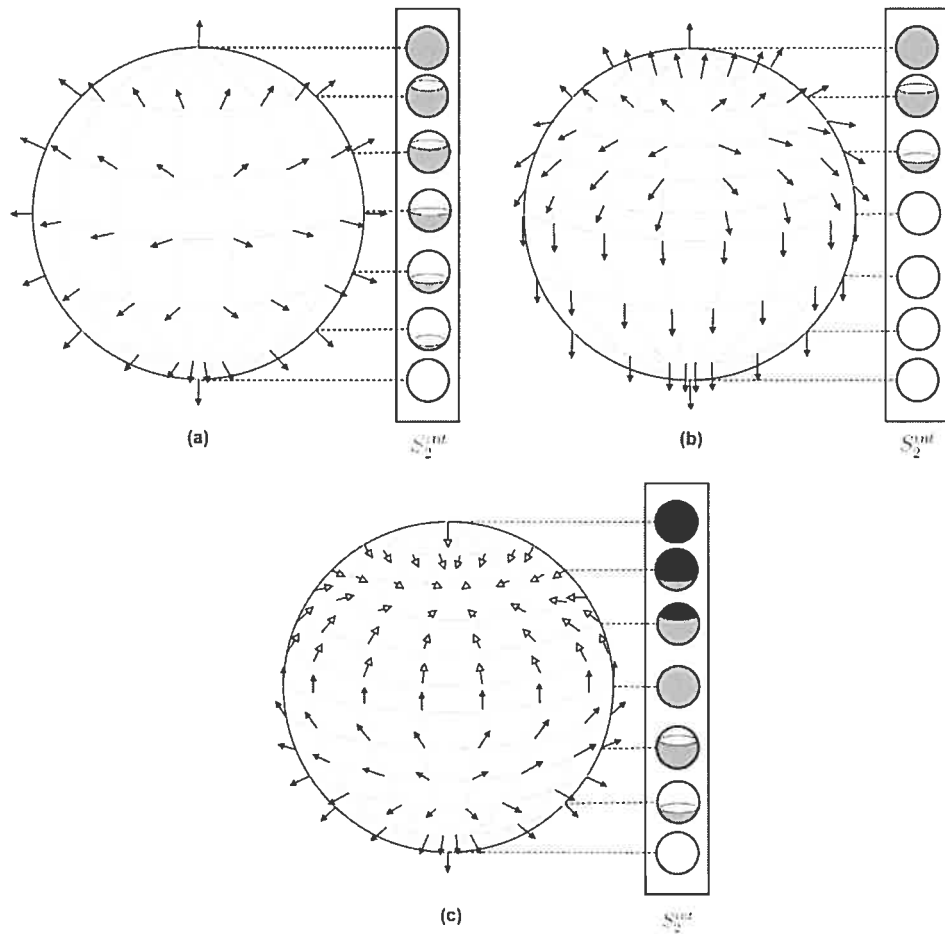


Figure 3-2: Illustration du concept de nombre de recouvrement. En (a), lorsqu'on balaie la sphère S_2^{phy} du pôle sud au pôle nord, la surface de la sphère S_2^{int} a été balayée une fois ($Q = 1$). Il en est de même en (b). En (c), lorsqu'on balaie la sphère S_2^{phy} du pôle sud au pôle nord, la surface de la sphère S_2^{int} a été balayée deux fois ($Q = 2$). Les configurations (a) et (b) font donc partie de la même classe d'homotopie ($Q = 1$) et sont continûment déformables l'une en l'autre. La configuration (c) appartient à une autre classe d'homotopie ($Q = 2$) et ne peut être déformée de manière continue en aucune des deux autres configurations.

3.3.4 Borne de Bogomol'nyi

Le modèle $\sigma O(3)$, non-linéaire possède lui aussi une borne de Bogomol'nyi. La dérivation de celle-ci s'effectue de la même manière que dans le modèle CP^1 .

On commence par poser $\vec{v} \equiv \partial_i \vec{n} \pm \varepsilon_{ij} \vec{n} \times \partial^j \vec{n}$ et on développe le module de cette expression:

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= (\partial_i \vec{n} \pm \varepsilon_{ij} \vec{n} \times \partial^j \vec{n}) \cdot (\partial^i \vec{n} \pm \varepsilon^{ik} \vec{n} \times \partial_k \vec{n}) \\ &= (\partial_i \vec{n})^2 + \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ik} (\vec{n} \times \partial^j \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \partial_k \vec{n}) \pm 2\varepsilon^{ik} \partial_i \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \partial_k \vec{n}) . \end{aligned} \quad (3.37)$$

En se servant de l'identité $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{w})$, le deuxième terme de cette expression devient:

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon^{ik} (\vec{n} \times \partial^j \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \partial_k \vec{n}) = \delta^{jk} [(\vec{n} \cdot \vec{n})(\partial_j \vec{n} \cdot \partial_k \vec{n}) + (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n})(\vec{n} \cdot \partial_k \vec{n})]. \quad (3.38)$$

Le vecteur \vec{n} étant soumis à la contrainte $\vec{n}^2 = 1$, cela implique que $\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} = 0$. Par conséquent, l'expression 3.38 vaut tout simplement $(\partial_i \vec{n})^2$. Le module de \vec{v} se réduit donc à:

$$|\vec{v}|^2 = 2(\partial_i \vec{n})^2 \pm 2\varepsilon^{ij} \partial_i \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \partial_j \vec{n}) . \quad (3.39)$$

Puisque le module d'un vecteur n'est jamais négatif ($|\vec{v}|^2 \geq 0$), on obtient l'inégalité suivante:

$$(\partial_i \vec{n})^2 \geq \pm \varepsilon^{ij} \partial_i \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \partial_j \vec{n}). \quad (3.40)$$

Le membre de gauche de cette équation est proportionnel à la densité d'énergie et le membre de droite à la densité de charge topologique. En intégrant sur tout le plan, on obtient la relation recherchée:

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (3.41)$$

Cette expression fixe une valeur minimum en deçà de laquelle l'énergie d'une configuration de charge Q ne peut pas descendre. On déduit à partir de l'expression 3.40 que ce minimum ne peut être atteint par le champ que s'il répond à l'équation suivante:

$$\partial_i \vec{n} = \pm \varepsilon_{ij} \vec{n} \times \partial^j \vec{n}. \quad (3.42)$$

Nous terminerons cette section par les mêmes remarques que celles qui ont été faites dans le cas du modèle CP^1 , c'est-à-dire que, de par l'existence d'une charge topologique conservée et d'une borne inférieure d'énergie, il est tout à fait raisonnable de penser que des solutions non-triviales puissent exister. Une des prochaines étapes consiste d'ailleurs à trouver une de ces solutions. Mais avant cela, nous allons démontrer l'équivalence des modèles CP^1 et $\sigma O(3)$ non-linéaire.

3.4 Équivalence des modèles $\sigma O(3)$ non-linéaire et CP^1

On aura noté plusieurs similitudes entre les deux modèles à l'étude dans ce chapitre. Ceci n'est pas le fruit du hasard puisque, comme cela a déjà été mentionné, les deux modèles sont en fait équivalents, c'est-à-dire qu'en reliant de façon appropriée le champ \vec{n} aux champs χ_1 et χ_2 , on peut montrer que les densités lagrangiennes de chacun des modèles s'avèrent à être les mêmes (du moins à une constante multiplicative près). Par conséquent, la dynamique des deux modèles est régie par les mêmes équations et ceux-ci possèdent les mêmes solutions.

La relation entre le champ \vec{n} et le doublet de champs χ_1 et χ_2 qui permet de montrer l'équivalence des deux modèles porte le nom de transformation de Hopf et a la forme suivante:

$$\vec{n} = \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi. \quad (3.43)$$

Les composantes du vecteur $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Explicitement, les composantes du vecteur \vec{n} prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} n_1 &= \chi_1^* \chi_2 + \chi_1 \chi_2^* = |\chi_1| |\chi_2| [e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}] \\ n_2 &= -i(\chi_1^* \chi_2 - \chi_1 \chi_2^*) = -i |\chi_1| |\chi_2| [e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}] \\ n_3 &= |\chi_1|^2 - |\chi_2|^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

En posant⁶ $|\chi_1| \equiv \cos\left(\frac{f}{2}\right)$, $|\chi_2| \equiv \sin\left(\frac{f}{2}\right)$ ainsi que $\bar{\theta} = (\varphi_2 - \varphi_1)$, on peut réexprimer le vecteur \bar{n} d'une manière où il est plus évident qu'il s'agit d'un vecteur de norme constante et unitaire (voir figure 3-3):

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin(f) \cos(\bar{\theta}) \\ n_2 &= \sin(f) \sin(\bar{\theta}) \\ n_3 &= \cos(f) \end{aligned} \quad (3.46)$$

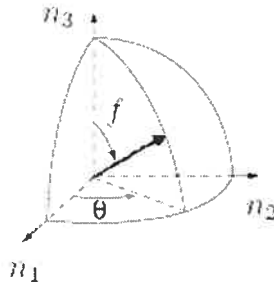


Figure 3-3: Vecteur \bar{n}

On se rappellera que la densité lagrangienne du modèle σ $O(3)$ non-linéaire a la forme suivante (éq. 3.27):

$$\mathcal{L}_{\sigma_{nl}} = \frac{1}{2}(\partial_0 \bar{n})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i \bar{n})^2. \quad (3.47)$$

En se servant de la relation 3.43, le terme cinétique devient:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\partial_i \bar{n})^2 &= -\frac{1}{2}[\partial_i(\chi_a^* \sigma_{ab}^n \chi_b)] [\partial^i(\chi_c^* \sigma_{cd}^n \chi_d)] \\ &= -\frac{1}{2}[(\chi_a^* \partial_i \chi_b + \chi_b \partial_i \chi_a^*)(\chi_c^* \partial^i \chi_d + \chi_d \partial^i \chi_c^*)] \sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n \\ &= -|\chi_a^* \partial_i \chi_b + \chi_b \partial_i \chi_a^*|^2 + \frac{1}{2}[\chi^\dagger \partial_i \chi + \partial_i \chi^\dagger \chi]^2 \\ &= -2[|\chi^\dagger \chi| |\partial_i \chi|^2 + |\chi^\dagger \partial_i \chi|^2] + \frac{1}{2}[\partial_i(\chi^\dagger \chi)]^2 \\ &= -2[|\partial_i \chi|^2 + |\chi^\dagger \partial_i \chi|^2] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on a utilisé de l'identité⁷, $\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = 2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd}$. À la dernière étape, on s'est servi du fait que $\chi^\dagger \chi = 1$. Le terme temporel

⁶Pour l'instant nous ne supposons rien sur la forme de f et $\bar{\theta}$ et considérons ces variables comme des fonctions de r et θ : $f = f(r, \theta)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(r, \theta)$

⁷Cette identité est développée dans l'annexe A.1.

se transforme exactement de la même manière. En comparant avec l'expression 3.1, on voit que

$$\mathcal{L}_{\sigma_{nl}} = 2\mathcal{L}_{CP^1}. \quad (3.49)$$

Cela implique aussi que $\varepsilon_{\sigma_{nl}} = 2\varepsilon_{CP^1}$. Le fait de multiplier par une constante une densité lagrangienne ne modifie évidemment pas les équations d'Euler-Lagrange. On devrait conséquemment tirer des équations de champs complètement équivalentes pour les deux modèles. Par contre, puisque les densités énergétiques sont différentes, cela implique que l'énergie ne sera pas la même dans les deux cas. On peut néanmoins toujours considérer les deux modèles comme étant équivalents, dans la mesure où les énergies de ceux-ci demeurent reliées par une simple constante multiplicative ($E_{\sigma_{nl}} = 2E_{CP^1}$). On notera que ce résultat est cohérent avec les formes des bornes de Bogomol'nyi des deux modèles (voir éq. 3.23 et éq. 3.41).

Pour terminer, trouvons une expression qui permette de passer du champ \vec{n} aux champs χ_1 et χ_2 (l'inverse de l'expression 3.45). On remarquera d'abord que, bien qu'on puisse définir en tout point du plan un vecteur \vec{n} unique à partir de chaque couple χ_1 et χ_2 , l'inverse n'est pas vrai. En effet, si on multiplie les champs χ_1 et χ_2 par une même phase, cela ne modifie pas le champ \vec{n} qui lui correspond (voir éq. 3.45). Ainsi, à chaque configuration du champ \vec{n} correspond une famille de configurations des champs χ_1 et χ_2 . Le module des champs χ_1 et χ_2 devrait être le même pour tous les membres d'une famille. En combinant les équations $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$ et $n_3 = |\chi_1|^2 - |\chi_2|^2$, on trouve les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} |\chi_1| &= \sqrt{\frac{1+n_3}{2}} \\ |\chi_2| &= \sqrt{\frac{1-n_3}{2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Les phases ne se déterminent pas aussi simplement. En effet, les composantes de \vec{n} ne dépendent pas de chacune des phases prises individuellement, mais seulement de leur différence $\tilde{\theta} \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Ainsi, lorsqu'on cherche à exprimer χ_1 et χ_2 en terme des composantes de \vec{n} , cela conduit à une famille de champs paramétrée par une des deux phases (φ_1 ou φ_2), plutôt qu'à une configuration unique:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{\frac{1+n_3}{2}} e^{i[\varphi_2 - \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)]} \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{1-n_3}{2}} e^{i\varphi_2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

La présence d'un paramètre est un peu embêtante. Or, on se souviendra que dans la section sur l'invariance du modèle CP^1 , on avait déterminé qu'une multiplication des champs χ_1 et χ_2 par une même phase ω ne modifie pas la physique du problème. Ainsi, en posant $\omega = -\varphi_2$, on obtient:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \sqrt{\frac{1+n_3}{2}} e^{-i \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{1-n_3}{2}}\end{aligned}\quad (3.52)$$

3.5 Solution du premier secteur topologique

Pour les raisons précédemment évoquées (existence d'une charge topologique, présence d'une borne d'énergie), on a de bonnes raisons de croire que les modèles σ $O(3)$ non-linéaire et CP^1 admettent des solutions non-triviales. Puisqu'il a été démontré que ces deux modèles sont équivalents, il n'est nécessaire de solutionner qu'un seul d'entre eux pour avoir les solutions des deux. On choisira donc de solutionner le modèle σ $O(3)$ non-linéaire. En fait, comme le titre de la section l'indique, on ne cherchera qu'à obtenir la solution du premier secteur topologique, c'est-à-dire celui pour lequel $Q = 1$. La raison de cela est que, dans le prochain chapitre, on se servira de cette solution pour construire des solitons noués. De plus, la démarche qui mène à cette solution illustre bien la méthode générale qui peut être employée pour d'autres charges.

Pour être une solution du modèle σ $O(3)$ non-linéaire, un champ \vec{n} doit répondre à l'équation d'Euler-Lagrange qui a été dérivée à partir de la densité lagrangienne du modèle (éq. 3.31):

$$\nabla^2 \vec{n} - (\vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n}) \vec{n} = 0. \quad (3.53)$$

Cette équation n'est pas nécessairement simple à solutionner directement. Nous devons donc procéder de manière indirecte. Une solution dans un secteur topologique est une configuration stable qui minimise l'énergie à l'intérieur de ce secteur. Or, on se souviendra avoir dérivé, à partir de la borne de Bogomol'nyi, une équation (3.42) qui, si elle possède des solutions, nous permet de trouver les configurations d'énergie

minimum dans chaque classe d'homotopie:

$$\partial_i \vec{n} = \pm \varepsilon_{ij} \vec{n} \times \partial_j \vec{n}. \quad (3.54)$$

Il est à noter qu'on peut montrer qu'un champ répondant à cette équation solutionne automatiquement l'équation 3.53 (voir annexe C.4).

Pour trouver les solutions du modèle σ $O(3)$ non-linéaire, il est donc suffisant de résoudre l'équation 3.54. Cela réduit de beaucoup la quantité de travail nécessaire à cette tâche. Nous reprendrons, dans ses grandes lignes, la méthode présentée par Belavin & Polyakov dans [13]. Celle-ci consiste à effectuer un certain changement de variables qui aura été judicieusement choisi de manière à ce que les nouvelles variables répondent aux équations de Cauchy-Riemann. Ceci signifie que n'importe quelle fonction analytique sera une solution du problème. Commençons par développer l'expression 3.54:

$$\begin{aligned} \partial_i n_1 &= \pm \varepsilon_{ij} [n_2 \partial_j n_3 - n_3 \partial_j n_2] \\ \partial_i n_2 &= \mp \varepsilon_{ij} [n_1 \partial_j n_3 - n_3 \partial_j n_1] \cdot \\ \partial_i n_3 &= \pm \varepsilon_{ij} [n_1 \partial_j n_2 - n_2 \partial_j n_1] \end{aligned} \quad (3.55)$$

C'est en fait à partir des deux premières équations que l'on parviendra à solutionner le modèle. En introduisant la variable complexe $\tilde{n} \equiv n_1 + in_2$, celles-ci peuvent être réexprimer de manière plus compacte:

$$\partial_i \tilde{n} = \mp i \varepsilon_{ij} [\tilde{n} \partial_j n_3 - n_3 \partial_j \tilde{n}]. \quad (3.56)$$

C'est à ce moment-ci que nous effectuons le changement de variable en question. On se rappellera que le vecteur \vec{n} peut prendre ses valeurs sur une sphère unitaire (S_2^{int}). On peut par conséquent projeter stéréographiquement chacun des points de cette sphère vers un plan formé des coordonnées cartésiennes u et v (R_2^{int}):⁸

$$u = \frac{2n_1}{(1-n_3)}, \quad v = \frac{2n_2}{(1-n_3)}. \quad (3.57)$$

Il va s'avérer utile de former une quantité complexe à partir de ces deux nouvelles variables:⁹ $w \equiv u + iv$. Pour obtenir une expression analogue à 3.56, on dérive w :

$$\partial_i w = \partial_i \left[\frac{2\tilde{n}}{1-n_3} \right] = \frac{2}{(1-n_3)^2} [\partial_i \tilde{n} + (\tilde{n} \partial_i n_3 - n_3 \partial_i \tilde{n})]. \quad (3.58)$$

⁸Il est à noter que la projection stéréographique choisie envoie le pôle nord à l'infini.

⁹Pour éviter qu'il y ait de la confusion au niveau des nouvelles variables introduites dans cette section, celles-ci sont résumées dans le tableau 3-1.

On peut réexprimer les deux termes entre crochets en se servant de l'expression 3.56. Le premier terme $(\partial_i \bar{n})$ correspond exactement à cette expression et le second $(\bar{n} \partial_i n_3 - n_3 \partial_i \bar{n})$ s'obtient en la multipliant par $\mp i \varepsilon_{ik}$ et en permutant les indices. Avec ces changements, l'expression 3.58 devient:

$$\partial_i w = \mp i \varepsilon_{ij} \left\{ \frac{2}{(1 - n_3)^2} [(\bar{n} \partial_j n_3 - n_3 \partial_j \bar{n}) + \partial_j \bar{n}] \right\}. \quad (3.59)$$

Les termes entre accolades correspondent à $\partial_j w$. Ainsi, $\partial_i w = \mp i \varepsilon_{ij} \partial_j w$. En considérant les parties réelle et imaginaire de w , on trouve que:

$$\partial_x u = \pm \partial_y v, \quad \partial_y u = \mp \partial_x v. \quad (3.60)$$

En définissant $z \equiv x + iy$, on reconnaît ici les équations de Cauchy-Riemann pour une fonction analytique de z et pour une fonction analytique de z^* . Cela signifie que n'importe quelle fonction analytique $w(z)$ ou $w(z^*)$ constitue une solution de $\partial_i w = \mp i \varepsilon_{ij} \partial_j w$ et, conséquemment, forme aussi une solution de l'équation 3.54. Il est toujours possible de développer une fonction analytique en terme d'une série de MacLaurin¹⁰:

$$w(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i. \quad (3.61)$$

Puisqu'absolument n'importe quelle fonction analytique fait l'affaire, on considérera le cas particulier d'une fonction pour laquelle $\alpha_i = 0$ si $i \neq N$:

$$w(z) = \alpha_N z^N. \quad (3.62)$$

Variables	Espace correspondant
$z \equiv x + iy$	$x \times y = R_2^{phy}$
$w \equiv u + iv$	$u \times v = R_2^{int}$
$\bar{n} \equiv n_1 + in_2$	$n_1 \times n_2 = S_2^{int}$

Tableau 3-1: Variables complexes introduites dans la section

Cette fonction constitue bel et bien une solution à notre équation de départ, toutefois, on se rappellera que l'on est spécifiquement intéressé par une solution du

¹⁰Une série de MacLaurin peut être considérée comme un cas particulier d'une série de Laurent centrée à l'origine et dont tous les coefficients négatifs sont nuls.

premier secteur topologique. La question se pose alors de savoir quelle est la charge de cette solution. Après avoir réexprimé w en terme du champ \vec{n} , on pourrait montrer que $|Q| = N$ en calculant directement la charge en se servant de l'équation 3.36. On pourrait aussi faire la même démonstration en calculant l'énergie de la configuration du fait que $E = 4\pi|Q|$. Toutefois, on va se contenter de considérer le cas où $N = 1$ ($w = \alpha_1 z$) et de vérifier *a posteriori* que la charge topologique vaut bel et bien 1.

Il faut maintenant chercher à réexprimer w en terme des variables originales. On notera dans un premier temps, qu'en terme des coordonnées polaires, z prend la forme suivante: $z = r e^{i\theta}$. Ainsi les composantes réelle et imaginaire de w deviennent:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 r \cos \theta \\ v &= \alpha_1 r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.63)$$

Les variables originales sont reliées à u et v par l'expression 3.57:

$$\alpha_1 r \cos \theta = \frac{2n_1}{1 - n_3}, \quad \alpha_1 r \sin \theta = \frac{2n_2}{1 - n_3}. \quad (3.64)$$

En utilisant la paramétrisation 3.46, ces équations deviennent:

$$\alpha_1 r \cos \theta = \frac{2 \sin f \cos \tilde{\theta}}{1 - \cos f}, \quad \alpha_1 r \sin \theta = \frac{2 \sin f \sin \tilde{\theta}}{1 - \cos f}. \quad (3.65)$$

On identifie tout naturellement la fonction $\tilde{\theta}$ à l'angle polaire θ . La fonction f s'obtient quant à elle en résolvant l'équation :

$$\alpha_1 r = \frac{2 \sin(f)}{1 - \cos(f)}. \quad (3.66)$$

Les solutions se trouvent sans difficulté:

$$f(r) = \pm \arccos \left(\frac{\alpha_1 r - 4}{\alpha_1 r + 4} \right). \quad (3.67)$$

Comme on le verra, c'est la fonction positive qui correspond à la solution de charge $Q = 1$ (la négative correspond à la solution de charge $Q = -1$). Une représentation de la fonction $f(r)$ est présentée à la figure 3-4. Puisque les fonctions $\tilde{\theta}$ et f sont maintenant connues, le champ \vec{n} l'est aussi. Celui-ci est d'ailleurs représenté à la figure 3-5 pour une valeur arbitraire de α_1 . Ce paramètre a pour effet de modifier la taille de

la solution. On notera que cela n'affecte pas l'énergie du système. En effet, en posant $s \equiv \alpha_1 r$, on voit très bien que l'énergie du système ne dépend pas de α_1 :

$$\begin{aligned} E &= \int \varepsilon d^2x = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\alpha_1 \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1}{s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{s ds d\theta}{\alpha_1^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \right)^2 \right] s ds d\theta \end{aligned} \quad (3.68)$$

D'autre part, on voit bien en effectuant une projection stéréographique de cette solution (projection de R_2^{phy} vers S_2^{phy}), que la configuration ainsi obtenue est celle qui est présentée à la figure 3-2-a. Ainsi, il s'agit bel et bien de la solution de charge $Q = 1$ recherchée.

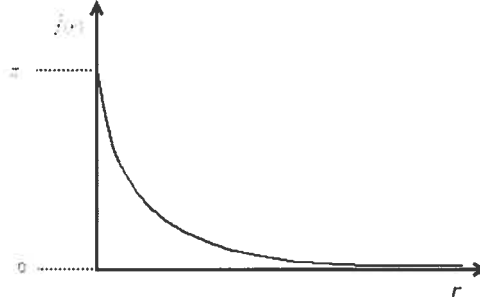


Figure 3-4: Fonction profile $f(r)$. À l'origine celle-ci vaut π . Elle décroît de façon monotone jusqu'à 0 à l'infini.

Pour terminer, on réexprimera cette solution en terme des champs du modèle CP^1 . Pour cela, on utilise simplement l'expression 3.52. Avec $n_3 = \cos(f)$ et $\arctan(\frac{n_2}{n_1}) = \theta$, cela donne:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{\frac{1+\cos(f)}{2}} e^{-i\theta} = \sqrt{\frac{\alpha_1 r}{\alpha_1 r + 4}} e^{-i\theta} \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{1-\cos(f)}{2}} = \sqrt{\frac{4}{\alpha_1 r + 4}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ces deux champs sont représentés à la figure 3-6. La charge topologique de ce doublet de champs est $n = -1$. De manière générale $n = -Q$. On se souviendra qu'il existe une famille de champs χ_1 et χ_2 correspondant à une configuration du champ \vec{n} . Celles-ci peuvent être obtenues en multipliant χ_1 et χ_2 par une phase $e^{i\omega}$. Il est bien entendu nécessaire que la phase résultante de chacun des champs soit partout bien définie où leur norme n'est pas nulle. Cela implique, par exemple, que ω ne peut pas dépendre de l'angle polaire à l'origine, car le champ χ_2 serait alors mal défini. Cette condition empêche notamment de considérer les cas où ω est de la forme $\omega = k\theta$. Une phase de cette

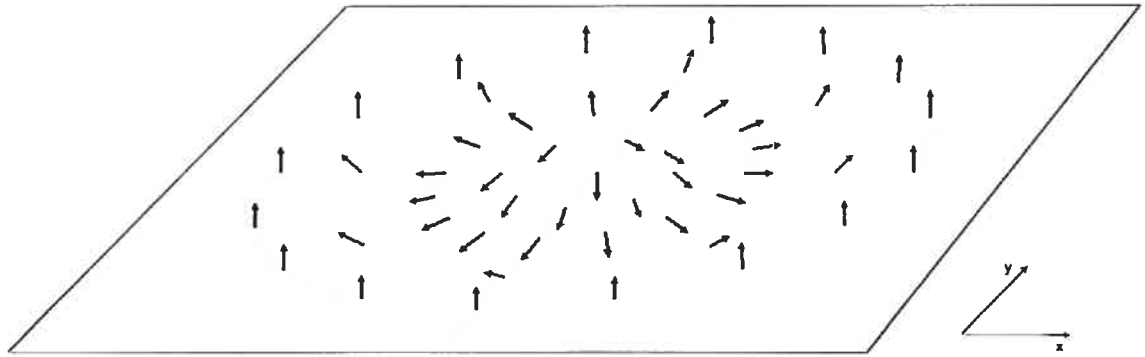


Figure 3-5: Représentation de la solution de charge $Q = 1$ du modèle σ $O(3)$ non-linéaire avec une valeur arbitraire de α_1 . Les axes n_1 et n_2 de l'espace interne ont été alignés avec les axes x et y de l'espace physique et l'axe n_3 pointe vers le haut. À l'origine le vecteur pointe donc vers le pôle sud: $\vec{n}(r = 0, \theta) \equiv \vec{n}_0 = (0, 0, -1)$. À l'infini, le vecteur \vec{n} tend vers le pôle nord: $\vec{n}(r \rightarrow \infty, \theta) \equiv \vec{n}_\infty = (0, 0, 1)$. Partout où elle n'est pas nulle, la projection du vecteur \vec{n} dans le plan $x - y$ pointe de façon radiale. On aurait pu choisir d'aligner les deux systèmes d'axes autrement, auquel cas, la nouvelle configuration serait simplement reliée à celle qui est présentée ici par une rotation $O(3)$.

forme aurait été vraiment problématique puisqu'elle aurait modifié le comportement du champ χ_1 et aurait fait changer la configuration de classe d'homotopie.

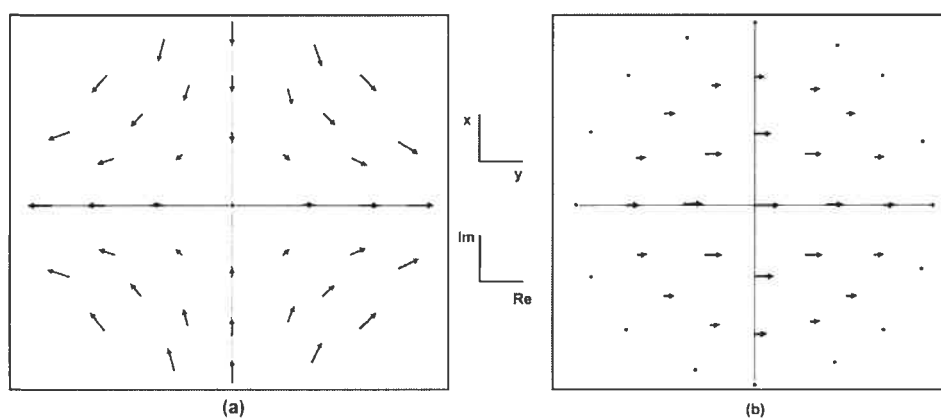


Figure 3-6: Champs χ_1 et χ_2 correspondant à la solution $Q = 1$ du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire . Le champ χ_1 est tracé en (a) et le champ χ_2 en (b). La partie réelle des champs est représentée en x et la partie imaginaire, en y .

CHAPITRE 4

Solitons noués du modèle de Faddeev

4.1 Introduction

À ses débuts, la recherche en physique des solitons se consacrait surtout à l'étude de modèles en $(1+1)$ dimensions. Toutefois, celle-ci ne tarda pas à s'étendre à des espaces de dimensions supérieures. En $(3+1)$ dimensions, les premiers solitons obtenus (Skyrme [17], 't Hooft [18], Polyakov [19]) étaient tous ponctuels. Cela signifie que le centre de ces solitons, c'est-à-dire l'endroit autour duquel le champ dévie de la valeur qu'il prend à l'infini (la valeur du vide), est simplement formé d'un point.

En 1975, le physicien soviétique Ludwig Faddeev suggéra qu'une version modifiée du modèle de Skyrme en $(3+1)$ dimensions pouvait admettre des solitons non-ponctuels [20]. Ce modèle est aujourd'hui connu comme étant le modèle de Faddeev. Le centre de ces solitons serait formé d'une ligne de champ fermé. Étant donné la possibilité pour cette ligne de champ centrale de former des nœuds¹, Faddeev désignera plus tard ces solitons comme étant des solitons noués. Cela est un peu ironique puisque pour la plupart des solitons «noués» identifiés jusqu'à ce jour, la ligne de champ centrale n'est pas réellement nouée (elle forme généralement un «nœud» trivial). Néanmoins, c'est cette appellation qui est généralement utilisée pour parler de ces objets.

Lorsqu'on emploie la méthode d'Euler-Lagrange pour trouver les équations qui décrivent la dynamique du champ du modèle de Faddeev, cela conduit à un système

¹La notion de nœud est définie dans l'annexe B.

relativement complexe d'équations. Jusqu'à ce jour, aucune solution analytique n'a été trouvée pour ce système d'équation. Il est donc nécessaire de le solutionner numériquement. Les ordinateurs de l'époque n'étant pas assez puissants pour résoudre de tels systèmes, il aura fallu attendre une vingtaine d'années après l'intuition initiale de Faddeev pour confirmer l'existence de ces solitons noués. Les premiers articles sur le sujet furent publiés par Faddeev & Niemi en 1997 [35, 36]. La parution de ces articles attira l'attention d'un certain nombre de chercheurs, plus à l'aise dans l'utilisation d'outils numériques. Battye & Sutcliffe, décelèrent notamment un problème dans l'algorithme utilisé par Faddeev & Niemi et qui rendait son utilisation inadéquate à partir d'une certaine charge [37]. Malgré cela, l'ensemble des travaux sur le sujet [37, 38, 39, 40, 41], vint confirmer l'existence des solitons noués. Depuis lors, les solitons noués ont trouvé des applications dans un vaste éventail de domaines allant de la cosmologie primordiale à la supraconductivité.

Notre étude du sujet commencera par la dérivation de la densité lagrangienne du modèle de Faddeev, celui-ci étant considéré comme un cas particulier de la généralisation en $(3+1)$ dimensions du modèle σ $O(3)$ non-linéaire en $(2+1)$ dimensions. Par la suite, dans le but de trouver des indices de l'existence de solutions non-triviales, nous démontrerons qu'il existe une charge topologique conservée ainsi qu'une borne inférieure d'énergie. Puisque les solutions du modèle ne se trouvent qu'en utilisant des superordinateurs, nous terminerons le chapitre en dérivant de manière qualitative la forme des solitons. *Grosso modo*, ceux-ci sont articulés autour d'une ligne de champ centrale formant une boucle et sur laquelle le champ adopte la valeur opposée à celle qu'il prend à l'infini ($\vec{n}_0 = -\vec{n}_\infty$). Dans chaque demi-plan perpendiculaire (ces demi-plans sont bornés par l'axe des z) à cette ligne de champ centrale, le champ adopte la configuration dite du bébé-skyrmion anisotrope. Pour que le système soit stable, il est nécessaire que le champ effectue une rotation autour de la ligne de champ centrale en même temps que l'on effectue une rotation autour de l'axe des z .

4.2 Généralisation en (3+1) dimensions du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire (critère de Derrick)

Comme cela a été mentionné en introduction, le modèle de Faddeev constitue un cas particulier d'une généralisation en trois dimensions spatiales du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire en (2+1) dimensions. On se rappellera que la densité lagrangienne de ce modèle était donnée par (éc. 3.27):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{n})^2. \quad (4.1)$$

Dans une situation statique en (3+1) dimensions, les équations d'Euler-Lagrange dérivées à partir de cette densité lagrangienne n'admettent aucune solution non-triviale. Cela se vérifie très simplement en se servant du critère de Derrick [21, 22]. Pour généraliser le modèle en (3+1) dimensions, il est donc nécessaire de modifier la densité lagrangienne en ajoutant par exemple un potentiel ou des termes d'ordre supérieur en dérivées de \vec{n} . On considérera la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{n})^2 - \left[\frac{g}{8}(\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 + \frac{g'}{8}(\partial_\mu \vec{n})^2(\partial_\nu \vec{n})^2 \right] + V(\vec{n}). \quad (4.2)$$

Il est à noter qu'avec l'ajout d'un terme cubique en dérivées de \vec{n} , la densité lagrangienne n'aurait plus été invariante sous une transformation de Lorentz. Les termes les plus simples à ajouter sont donc quartiques.

Analysons donc cette nouvelle densité lagrangienne du point de vue du critère de Derrick. Pour cela, on considérera une situation indépendante du temps dans un espace (D+1)-dimensionnel. Puisqu'on considère une situation statique et que les dérivées temporelles sont nulles, la densité énergétique est simplement donnée par $\varepsilon = -\mathcal{L}$. De plus pour simplifier l'écriture des équations, on posera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &\equiv \frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 \\ \varepsilon_4 &\equiv \frac{g}{8}(\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 + \frac{g'}{8}(\partial_i \vec{n})^2(\partial_j \vec{n})^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considérons un champ $\vec{n}_s(\vec{x})$ représentant une configuration minimisant localement l'énergie du système. L'énergie de cette configuration est donnée par:

$$\begin{aligned} E[\vec{n}_s] &= \int \varepsilon_2[\vec{n}_s(\vec{x})] d^D x + \int \varepsilon_4[\vec{n}_s(\vec{x})] d^D x + \int V[\vec{n}_s(\vec{x})] d^D x \\ &= E_2[\vec{n}_s] + E_4[\vec{n}_s] + E_V[\vec{n}_s] \end{aligned} \quad (4.4)$$

En introduisant un paramètre λ , on peut construire une famille de configurations à partir du champ \vec{n}_s : $\vec{n}_\lambda(\vec{x}) \equiv \vec{n}_s(\lambda\vec{x})$. Il est alors naturel de définir un nouveau vecteur de position: $\vec{y} \equiv \lambda\vec{x}$. Puisque

$$d^D x = \frac{1}{\lambda^D} d^D y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (4.5)$$

cela permet de développer l'énergie d'une configuration \vec{n}_λ comme suit:

$$\begin{aligned} E_\lambda[\vec{n}_\lambda] &= \int \varepsilon_2[\vec{n}_\lambda(\vec{x})] d^D x + \int \varepsilon_4[\vec{n}_\lambda(\vec{x})] d^D x + \int V[\vec{n}_\lambda(\vec{x})] d^D x \\ &= \int \varepsilon_2[\vec{n}_s(\lambda\vec{x})] d^D x + \int \varepsilon_4[\vec{n}_s(\lambda\vec{x})] d^D x + \int V[\vec{n}_s(\lambda\vec{x})] d^D x \\ &= \lambda^{2-D} \int \varepsilon_2[\vec{n}_s(\vec{y})] d^D y + \lambda^{4-D} \int \varepsilon_4[\vec{n}_s(\vec{y})] d^D y + \lambda^{-D} \int V[\vec{n}_s(\vec{y})] d^D y \\ &= \lambda^{2-D} E_2[\vec{n}_s] + \lambda^{4-D} E_4[\vec{n}_s] + \lambda^{-D} E_V[\vec{n}_s] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si $\lambda = 1$, on retrouve bien évidemment la configuration originale: $\vec{n}_{\lambda=1}(\vec{x}) = \vec{n}_s(\vec{x})$. Or, par définition, cette configuration se trouve à un minimum d'énergie. Puisque la dérivée d'une fonction à son minimum est nulle, cela nous permet de développer l'équation suivante:

$$\left. \frac{dE_\lambda[\vec{n}_\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-D)E_2[\vec{n}_s] + (4-D)E_4[\vec{n}_s] - DE_V[\vec{n}_s] = 0. \quad (4.7)$$

Si les termes quartiques et le potentiel n'avaient pas été ajoutés à la densité lagrangienne, cette équation se serait réduite à:

$$(2-D)E_2[\vec{n}_s] = 0. \quad (4.8)$$

Pour toutes autres dimensions que $D = 2$, cette équation admet des solutions seulement si l'énergie est nulle. Cela montre bien pourquoi il est nécessaire d'ajouter d'autres termes à la densité lagrangienne si on veut espérer avoir des solutions non-triviales. Lorsque $D = 3$, l'équation 4.7 prend la forme suivante:

$$-E_2[\vec{n}_s] + E_4[\vec{n}_s] - 3E_V[\vec{n}_s] = 0. \quad (4.9)$$

Puisque E_2 , E_4 et E_V sont tous des termes non-négatifs, la présence de E_4 dans cette équation est essentielle pour que celle-ci puisse être résoluble. Ce n'est évidemment pas le cas pour E_V . Ainsi pour généraliser la version (2+1)-dimensionnelles du modèle σ $O(3)$ non-linéaire en (3+1) dimensions, l'ajout du potentiel est facultatif, tandis que l'ajout des termes quartiques (ou éventuellement de termes d'ordre supérieur) est

nécessaire. Puisque cela est plus simple, on considérera donc une densité lagrangienne sans potentiel:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 - \frac{g}{8}(\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 - \frac{g'}{8}(\partial_i \vec{n})^2 (\partial_j \vec{n})^2. \quad (4.10)$$

Le modèle de Faddeev est un cas particulier de cette généralisation pour lequel $g' = 0$.² De plus, il n'est pas difficile de montrer que $(\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 = (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2$. De manière générale, si \vec{n} dépend du temps, la densité lagrangienne prend la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{n})^2 - \frac{g}{8}(\vec{n} \cdot \partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2. \quad (4.11)$$

Dans un cas statique, la densité lagrangienne du modèle de Faddeev s'écrit donc de la façon suivante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 - \frac{g}{8}(\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2. \quad (4.12)$$

Avant de passer à la section suivante, il est intéressant d'analyser ce qui se passe avec l'équation 4.7 lorsque $D = 2$. Celle-ci prend alors la forme suivante:

$$2E_4[\vec{n}_s] - 2E_V[\vec{n}_s] = 0. \quad (4.13)$$

Sans la présence du potentiel, il aurait fallu que E_4 soit nulle pour résoudre cette équation. Or, pour que $E_4 = 0$, il faudrait que toutes les dérivées du champ soient nulles (cela impliquerait aussi que $E_2 = 0$). Il s'agirait donc d'une configuration triviale. Ainsi, en deux dimensions d'espace, il est impossible de généraliser le modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire simplement en ajoutant des termes quartiques comme cela a été fait en $(3+1)$ dimensions. La présence du potentiel est ici absolument nécessaire.

Avant de passer à la section suivante, mentionnons que la densité lagrangienne 4.12 ne peut pas être utilisée tel quel en $(2+1)$ dimensions. En effet, comme l'ont fait remarquer Piette, Schroers & Zakrzewski dans [29], mis à part les cas triviaux, aucune configuration ne possède de minimum d'énergie, puisqu'il est toujours possible de réduire celle-ci par un changement d'échelle. L'ajout d'un potentiel ne contenant pas de

²Dans [39], le cas général où $g' \neq 0$ est analysé par Hellmund & Gladikowski.

dérivées est donc nécessaire. La densité lagrangienne en $(2+1)$ dimensions ressemblant le plus à la densité lagrangienne du modèle de Faddeev a donc la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{n})^2 - \frac{g}{8}(\vec{n} \cdot \partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 - V(\vec{n}). \quad (4.14)$$

Dans un cas statique, celle-ci se réduit à:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 - \frac{g}{8}(\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 - V(\vec{n}). \quad (4.15)$$

Lorsque le potentiel est de la forme $V(\vec{n}) = \beta(\vec{n} - \vec{n}_\infty)^2$, cette densité lagrangienne correspond à celle du modèle bébé de Skyrme (voir par exemple [30]). Hormis quelques cas limites, les solutions de ce modèle ne se trouvent que numériquement. Toutefois, de manière qualitative, elles ont la même forme que les solutions du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire. Ainsi, bien qu'on ait affirmé qu'on se servirait de la solution de charge $Q = 1$ du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire pour construire des solitons noués, il est peut-être un peu plus juste de dire que cela se fera en se servant de la solution de charge $Q = 1$ du modèle bébé de Skyrme. Cette solution porte le nom de bébé-skyrmion.

4.3 Charge topologique et borne d'énergie

Bien que le modèle de Faddeev soit une généralisation en trois dimension d'espace de la version $(2+1)$ -dimensionnelle du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire, rien ne garantit qu'il soit lui aussi caractérisé par une charge topologique et par l'existence d'une borne inférieure d'énergie. Si ces propriétés existent, il faut les démontrer.

Dans un cas statique, l'énergie du modèle est donnée par ($\varepsilon = -\mathcal{L}$):

$$E = \int \left[\frac{1}{2}(\partial_i \vec{n})^2 + \frac{g}{8}(\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 \right] d^3x. \quad (4.16)$$

Pour éviter que cette intégrale ne diverge, le champ doit nécessairement prendre une valeur constante à l'infini. Il avait donc été approprié d'effectuer une projection stéréographique inverse, c'est-à-dire de projeter le plan R_2^{phy} vers la sphère S_2^{phy} . De manière analogue, en trois dimensions d'espace, on peut projeter l'hyperplan R_3^{phy} vers l'hypersphère

S_3^{phy} . L'espace interne demeure quant à lui le même, soit une sphère S_2^{int} . Puisqu'à chaque point de S_3^{phy} correspond un vecteur qui prend une valeur précise dans S_2^{phy} , le modèle de Faddeev est caractérisé par des applications de S_3^{phy} vers S_2^{int} . On ne sera pas surpris d'apprendre que ce type d'applications fragmente l'ensemble des configurations en classes d'homotopie. Celles-ci ont encore une fois une structure de groupe. Il s'agit du troisième groupe d'homotopie d'une sphère et celui-ci est isomorphe au groupe des entiers: $\pi_3(S_2^{int}) \approx \mathbb{Z}$.

Chaque configuration possède une charge topologique définie en fonction de la classe d'homotopie à laquelle elle appartient. Celle-ci porte le nom de charge de Hopf [24, 25]. En (3+1) dimensions, cette charge coïncide avec le terme de Chern-Simons [26]:

$$Q_H = \frac{1}{4\pi^2} \int \varepsilon^{ijk} F_{ij} A_k d^3x. \quad (4.17)$$

Le tenseur antisymétrique F_{ij} a la forme suivante:

$$F_{ij} = \vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \partial_j \vec{n} \quad (4.18)$$

et le champ \vec{A} est défini via l'équation:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \quad (4.19)$$

La charge de Hopf peut être interprétée d'une manière assez simple. En effet, il existe un théorème qui stipule que l'invariant de Hopf est égal au nombre d'enlacement³ de deux courbes dans R_3 . Plus précisément, si on considère une application de la forme $S_3 \rightarrow S_2$, alors les images inverses dans R_3 de deux points de S_2 doivent former deux lignes de champs enlacées Q_H fois ($L_k = Q_H$, où L_k est le nombre d'enlacement de deux courbes). L'espace R_3 correspond à la projection stéréographique de S_3 .

La démonstration de ce théorème n'étant pas simple⁴, on se contentera d'en donner une illustration⁵. Pour cela, on considérera la transformation de Hopf utilisée dans le chapitre précédent:

$$\vec{n} = \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi. \quad (4.20)$$

³Pour la définition de nombre d'enlacement, voir annexe B.

⁴Voir par exemple [27].

⁵Cet exemple est tiré de [28].

L'espace interne du champ \vec{n} est une sphère ($S_2^{\vec{n}}$). L'espace interne du doublet de champ χ_1 et χ_2 forme quant à lui une hypersphère en trois dimensions (S_3^{χ}). Ceci est plus évident à voir lorsqu'on exprime les champs χ_1 et χ_2 en terme de leurs composantes réelle et imaginaire:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= z_1 + iz_2 \\ \chi_2 &= z_3 + iz_4 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$$

Ainsi, la transformation 4.20 est une application de S_3^{χ} vers $S_2^{\vec{n}}$. Comme toutes les applications de S_3 vers S_2 , celle-ci doit être caractérisée par une charge de Hopf. Or, il s'avère que dans le cas particulier de cette application, la charge vaut un. On s'attend donc à ce que les images inverses de deux points pris au hasard sur $S_2^{\vec{n}}$ forment dans R_3^{χ} deux courbes avec nombre d'enlacement égal à un. On considérera par exemple les points $\vec{n}_{\infty} = (0, 0, 1)$ et $\vec{n}_0 = (0, 0, -1)$. Afin de poursuivre ce développement, on notera que l'extension en quatre dimensions des coordonnées sphériques se fait de la manière suivante:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \alpha \\ z_2 &= \sin \alpha \cos \beta \\ z_3 &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ z_4 &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.22)$$

En effectuant une projection stéréographique⁶, chaque point (z_1, z_2, z_3, z_4) de S_3^{χ} prend la forme suivante dans R_3^{χ} :

$$\vec{v} = \frac{1}{1-z_1}(z_2, z_3, z_4) = \frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha}(\cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \beta \sin \gamma) \quad (4.23)$$

Cette expression va nous permettre de trouver la forme que les images inverses des points \vec{n}_{∞} et \vec{n}_0 prennent dans R_3^{χ} . Puisque $n_3 = |\chi_1|^2 - |\chi_2|^2$, cela implique les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\infty} &\Rightarrow |\chi_1|^2 = 1, |\chi_2|^2 = 0 \\ \vec{n}_0 &\Rightarrow |\chi_1|^2 = 0, |\chi_2|^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

En comparant avec l'expression 4.22, on trouve que:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\infty} &\Rightarrow \alpha = \alpha, \quad \beta = n\pi, \quad \gamma = \gamma \\ \vec{n}_0 &\Rightarrow \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \gamma \end{aligned} \quad (4.25)$$

⁶On considère une projection où l'hyperplan R_3^{χ} est tangent au point $(-1, 0, 0, 0)$.

En combinant les expressions 4.23 et 4.25, on obtient:

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{n}_\infty) &= \pm \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} (1, 0, 0) \\ \vec{v}(\vec{n}_0) &= (0, \cos \gamma, \sin \gamma)\end{aligned}\tag{4.26}$$

L'image inverse du point $\vec{n}_\infty = (0, 0, 1)$ dans R_3^X forme donc une droite infinie qui se confond avec l'axe v_1 , tandis que l'image inverse de $\vec{n}_0 = (0, 0, -1)$ forme un cercle unitaire contenu dans le plan $v_2 - v_3$ et centré à l'origine. Tel que prévu par le théorème, le nombre d'enlacement de ces deux courbes est bel et bien égal à la charge de Hopf: $L_k = Q_H = 1$. Cet exemple illustre bien la signification du théorème. Toutefois, il est un peu simpliste dans la mesure où la charge de Hopf vaut toujours un. Cela n'est évidemment pas le cas de manière générale. De manière plus particulière, ce n'est pas non plus le cas pour les applications de R_3^{phy} vers S_2^{int} qui caractérisent le modèle de Faddeev. Comme on le verra dans la prochaine section, il va s'avérer être très simple de générer des configurations avec des charges de Hopf arbitraires.

Pour terminer cette section, mentionnons que Vakulenko & Kapitanskii sont parvenus à démontrer [16], en se servant des inégalités de Sobolev, l'existence d'une borne inférieure d'énergie reliée à la charge topologique d'une configuration:

$$E \geq c |Q_H|^{\frac{3}{4}},\tag{4.27}$$

où c est une constante. On remarquera la présence plutôt inhabituelle d'une puissance fractionnaire de la charge. Cela résulte du fait que cette borne a été obtenue d'une manière beaucoup plus complexe que les bornes de Bogomol'nyi du modèle CP^1 et du modèle $\sigma O(3)$ non-linéaire. Bref, l'existence de cette borne et d'une charge topologique indiquent encore une fois qu'il y a de bonnes raisons de croire que des solutions non-triviales existent dans le modèle de Faddeev.

4.4 Recherche qualitative de solutions

Pour trouver les solutions du modèle de Faddeev, il est nécessaire de recourir à des méthodes d'analyse numérique. Celles-ci requièrent d'ailleurs une grande puissance de

calcul. Dans cette section, nous proposons donc de déduire qualitativement la forme que pourraient avoir les solutions du modèle de Faddeev. Bien entendu, pour s'assurer qu'il s'agit bien de solutions, cela restera à être confirmé numériquement.

Le modèle en (2+1)-dimensions ressemblant le plus au modèle de Faddeev est le modèle bébé de Skyrme (éq. 4.15). Il est donc tout à fait raisonnable de penser qu'on puisse construire une solution pour le modèle de Faddeev à partir des solutions de ce modèle. Pour cela, on considèra la solution de charge $Q = 1$ (bébé-skyrmion). Les solutions du modèle bébé de Skyrme ont qualitativement la même forme que celle du modèle σ $O(3)$ non-linéaire (la fonction f ne tend pas de π vers 0 à la même vitesse dans les deux modèles). Pour avoir une image du bébé-skyrmion, on peut donc se référer à la figure 3-5. En (2+1) dimensions, le centre du bébé-skyrmion, c'est-à-dire l'endroit autour duquel le champ \vec{n} dévie de sa valeur dans le vide⁷, est ponctuel. En déplaçant le plan contenant le bébé-skyrmion dans un espace en (3+1) dimensions, le parcours effectué par ce centre trace une courbe dans l'espace. Le champ \vec{n} dévie donc de sa valeur dans le vide autour d'une ligne de champ que l'on désignera comme étant la ligne de champ centrale. Or, comme on l'a vu lors de l'étude du modèle ϕ^4 , pour que l'énergie du système soit finie, il est nécessaire que cette ligne de champ forme une courbe fermée. La manière la plus simple de construire une configuration avec une ligne de champ centrale fermée à partir d'un bébé-skyrmion est de comprimer ce dernier dans un demi-plan (voir figure D-1) et de faire subir à ce demi-plan une rotation de 2π radians autour de l'axe qui le borne (voir figure 4-2). Pour que le champ soit singulier sur l'axe des z , il est nécessaire qu'il ne dépende pas de l'angle α ⁸ à cet endroit. Cela sera donc à vérifier dans la suite des développements. Pour des raisons évidentes, le bébé-skyrmion comprimé dans un demi-plan est qualifié d'anisotrope [31, 32, 33]. Une digression sur le sujet est présentée à l'annexe D.

Le champ atteint sa valeur à l'infini n_∞ partout sur la «frontière» du demi-plan, c'est-à-dire sur l'axe z et sur le demi-cercle de rayon infini centré à l'origine. Toutefois, à partir d'une certaine distance, qui se mesure à partir du centre du bébé skyrmion

⁷Par valeur du vide, on entend la valeur que prend le champ à l'infini.

⁸Dans un système de coordonnées cylindriques (r, z, α) , α représente l'angle polaire.

et qui dépend de la direction choisie, on peut faire l'approximation que $\vec{n} \approx \vec{n}_\infty$. Cela revient à dire qu'on peut utiliser une des courbes de niveau de la figure D-3 de l'annexe D pour démarquer la région où le comportement du champ est trivial de celle où il ne l'est pas. En faisant subir une rotation à la zone située à l'intérieur de cette courbe de niveau limite, cela forme un tore à section non-circulaire. La configuration obtenue en faisant subir une rotation autour de l'axe z à un bébé-skyrmion anisotrope est donc toroïdale.

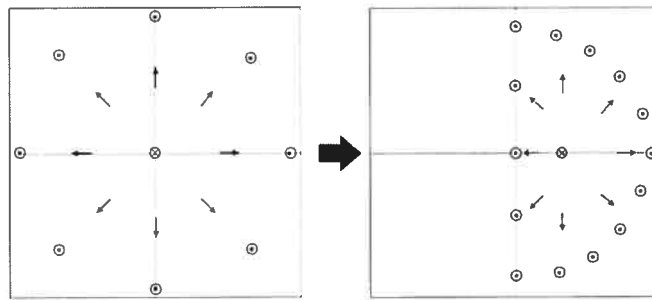


Figure 4-1: Construction d'un bébé-skyrmion anisotrope. En compactant tout le plan dans un demi-plan, on obtient une configuration anisotrope pour le bébé-skyrmion. Un cercle avec un point désigne un vecteur sortant du plan, un cercle avec une croix un vecteur entrant.

Cette construction ne peut toutefois pas encore être retenue comme candidate pour être une solution non-triviale du modèle de Faddeev. Cela s'explique simplement par le fait que sa charge topologique est nulle. En effet, l'invariant de Hopf correspond au nombre d'enlacement de deux courbes dans R_3^{phy} . Or, si on regarde par exemple les lignes de champs de la figure 4-2, il est évident que ce nombre est nul. Ainsi, il n'y a aucune contrainte topologique qui empêche les lignes de la région non-triviale du champ de se resserrer de manière à devenir arbitrairement petites, allant jusqu'à disparaître. La manière la plus simple de prévenir ce phénomène consiste à générer une charge topologique en faisant tourner k fois le bébé-skyrmion autour de sa ligne de champ centrale pendant que le demi-plan effectue un tour complet autour de l'axe z . Les lignes de champs seront alors enlacées k fois. Cela est illustré à la figure 4-3. On

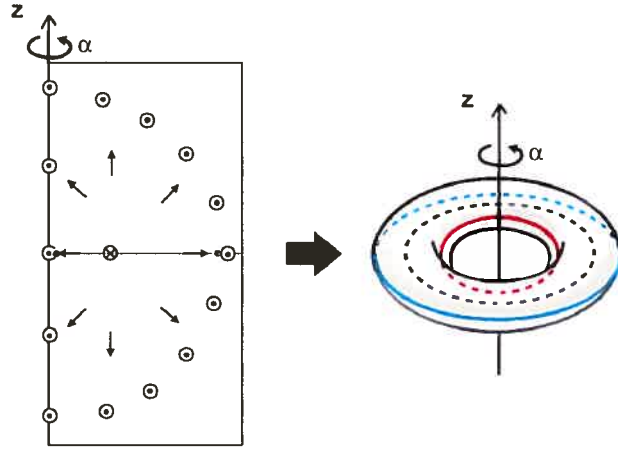


Figure 4-2: Construction d'une configuration avec une ligne de champ centrale fermée à partir d'un bébé-skyrmion anisotrope. En faisant subir une rotation de 2π radians au demi-plan autour de l'axe z , cela permet de couvrir tout l'espace R_3^{phy} . Les lignes de champs, c'est-à-dire les traces laissées par chacun des vecteurs du demi-plan pendant la rotation, forment des cercles. On notera que dans la représentation choisie (l'axe n_1 est aligné avec l'axe r et l'axe n_2 avec l'axe z), le champ peut sembler avoir plusieurs valeurs sur l'axe z puisque les vecteurs qui y sont situés seront toujours représentés perpendiculairement au demi-plan. Cette apparence est artificielle puisque le champ pointe en fait toujours dans la même direction dans l'espace interne: $\vec{n}(r = 0, z, \alpha) = \vec{n}_\infty = (0, 0, 1)$. On notera que cette configuration n'est pas stable puisque le nombre d'enlacement est nul

peut tenir compte de cette rotation en modifiant la paramétrisation 3.46 comme suit:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + k\alpha) \\ n_2 &= \sin(f) \sin(\tilde{\theta} + k\alpha) . \\ n_3 &= \cos(f) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Les fonctions f et $\tilde{\theta}$ dépendent de r et z (voir figures D-2 et D-3) et l'angle α est bien entendu l'angle polaire du système de coordonnées cylindriques de l'espace physique R_3^{phy} .

Puisqu'elles ont été construites à partir de la solution d'un modèle analogue en (2+1) dimensions et qu'elles possèdent une charge topologique non-nulle, il est raisonnable de croire que certaines des configurations décrites par l'expression 4.28 puissent être des solutions du modèle de Faddeev. En fait les travaux numériques sur le sujet [35, 36, 37, 38, 39] ont confirmé que les solutions de charge $Q_H = 1$ et $Q_H = 2$ ont exactement la forme décrite par la paramétrisation 4.28. Les solitons de charge $Q_H = 3$, $Q_H = 4$ et $Q_H = 5$ sont quant à eux un peu différents. Leur ligne de champ centrale n'est plus circulaire. On peut encore utiliser la même méthode pour les générer, mais cette fois, il faudra aussi déplacer le centre du bébé-skyrmion en z et en r pendant la rotation du demi-plan. Pour ce qui est des solitons de charge supérieure, ceux-ci ont une forme beaucoup plus complexe. Cela est dû au fait qu'un phénomène de reconnexion des lignes de champ entre maintenant en jeu. Les solitons de charge $Q_H = 6$ et $Q_H = 8$ sont formés de deux solitons de charge inférieure enlacés l'un à l'autre. Le soliton de charge $Q_H = 8$ a la forme d'un nœud tréflé. Jusqu'à ce jour, il s'agit du seul soliton noué qui ait une forme de nœud non-trivial. Aucune solution n'a encore été trouvée pour une charge supérieure à huit. Pour simplifier les choses, dans le prochain chapitre, on ne considérera que la solution de charge $Q_H = 1$. On notera que ces travaux numériques ont réussi à mettre en évidence la dépendance énergétique en $|Q_H|^{\frac{3}{4}}$ prévue par Vakulenko et Kapitanskii (voir tableau 4-1).

Pour terminer, on notera qu'en se servant de la transformation de Hopf ($\vec{n} = \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi$), on peut trouver la forme que prennent les solitons noués du modèle de Faddeev en terme des champs χ_1 et χ_2 . Dans le prochain chapitre, c'est en procédant de cette façon qu'on cherchera à trouver la forme des hypothétiques solitons noués d'un système

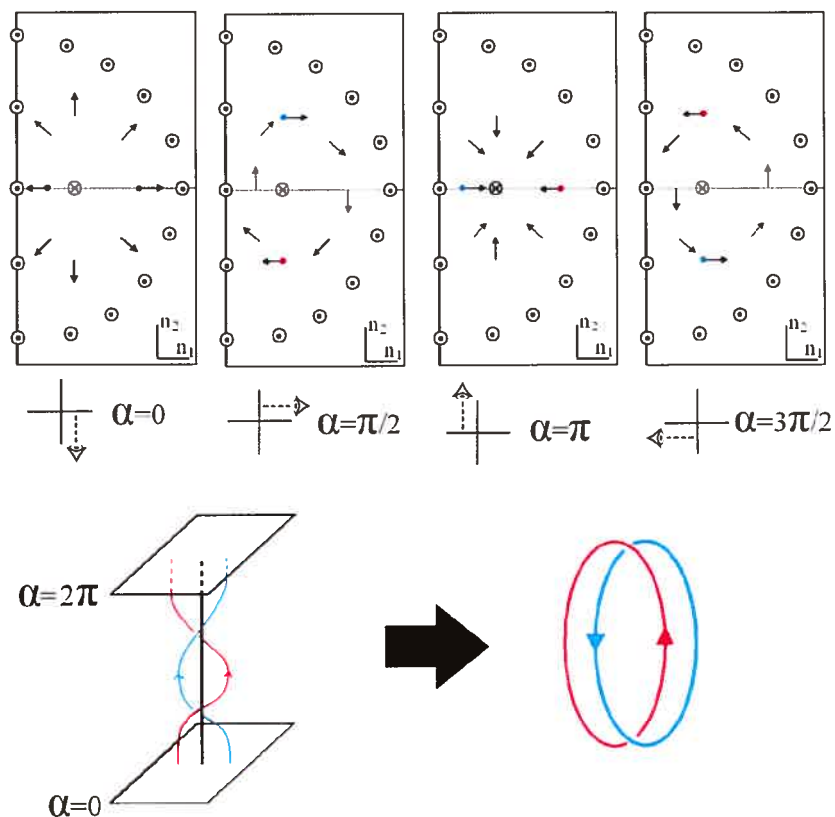


Figure 4-3: Exemple de génération d'une charge de Hopf. En faisant subir k rotations au bébé-skyrmion autour de son centre en même temps que le demi-plan $r-z$ subit une rotation autour de l'axe z , on génère une configuration de charge $Q_H = K$. Dans notre exemple, on fait tourner une fois (en sens anti-horaire) le bébé-skyrmion autour de son centre. Comme on peut le voir, le nombre d'enlacement de deux lignes de champs vaut $L_k = +1$. la charge de Hopf vaut donc 1. Une rotation dans le sens horaire aurait donné un nombre d'enlacement valant $L_K = -1$. De manière plus générale, effectuer k tour(s) enlancerait k fois deux lignes de champ. On notera que la forme du bébé skyrmion semble changer dans les quatre demi-plans illustrés ci-haut, mais cela est un peu artificiel. En effet, dans chacun de ces demi-plans les axes n_1 et n_2 de l'espace interne ont été respectivement alignés avec le demi-axe r et l'axe z de l'espace physique. Ce choix est toutefois arbitraire. En faisant pivoter le plan $n_1 - n_2$ autour de l'axe n_3 (celui qui sort de la feuille) par α dans chacun des demi-plans, la représentation du bébé skyrmion demeurerait identique à celle qui est présentement illustrée pour $\alpha = 0$.

		B&S	H&S
Q_H	$(Q_H)^{3/4}$	$\left(\frac{E_{Q_H}}{E_1}\right)$	$\left(\frac{E_{Q_H}}{E_5}\right) \cdot 5^{3/4}$
1	1,00	1,00	-
2	1,68	1,66	-
3	2,28	2,30	-
4	2,82	2,95	-
5	3,34	3,59	3,34
6	3,83	3,93	3,86
7	4,30	4,38	4,34
8	4,76	4,86	4,84

Tableau 4-1: Énergie pondérée des solutions de charge $Q_H = 1$ à $Q_H = 8$. La colonne B&S fait référence aux résultats de Battye & Sutcliffe [37], la colonne H&S fait référence aux résultats de Hietarinta & Salo [41]. En première approximation on retrouve la dépendance en $(Q_H)^{3/4}$ de la borne trouvée par Vakulenko & Kapitanskii. (Note: si on présente dans ce tableau des valeurs d'énergie pondérées et sans dimension, c'est que dans aucune des deux références citées, les auteurs n'ont pris la peine d'indiquer les unités utilisées. Par exemple la constante c vaut 504 dans B&S et 152,91 dans H&S).

à deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge. En utilisant l'équation 3.52, on obtient:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{\frac{1+\cos(f)}{2}} e^{-i(\bar{\theta}+k\alpha)} \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{1-\cos(f)}{2}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

La présence de l'angle α dans la phase du champ χ_1 pose un problème de définition sur l'axe z . En effet, cet axe est contenu dans tous les demi-plans générés par la rotation du demi-plan initial. Normalement, la valeur du champ sur cet axe devrait être la même dans chacun des demi-plans puisqu'il s'agit physiquement du même endroit. Ce n'est toutefois pas le cas, car la phase change selon l'angle α considéré. Puisqu'elle ne rend pas compte de façon satisfaisante de la réalité physique, notre description mathématique de la situation est donc incorrecte. Il existe fort heureusement une manière de solutionner ce problème. On se rappellera en effet qu'il est toujours possible d'effectuer une transformation de la forme $\chi_a \rightarrow \chi_a e^{i\omega}$. En posant $\omega = k\alpha$, on transfère la dépen-

dance en α dans la phase de χ_2 . Ceci règle le problème puisque, contrairement à χ_1 , ce champ est nul sur l'axe z . On obtient donc:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \sqrt{\frac{1+\cos(f)}{2}} e^{-i\bar{\theta}} \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{1-\cos(f)}{2}} e^{ik\alpha}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

CHAPITRE 5

Sur la présence de solitons noués dans un système de 2 champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge

5.1 Introduction

Ce cinquième et dernier chapitre constitue l'aboutissement de ce mémoire. Nous nous étions fixé comme objectif de déterminer si, oui ou non, un système formé de deux champs scalaires complexes couplés à un champ de jauge peut admettre des solitons noués. Bien que les observations que nous allons présenter ne permettent pas d'affirmer catégoriquement que la réponse à cette question est non, celles-ci constituent tout de même de très fortes indications qui suggèrent que ce modèle ne possède pas de solitons noués comme solutions.

Le modèle à deux champs scalaires et un champ de jauge trouve des applications dans un certain nombre de domaines de la physique. Mentionnons par exemple qu'il intervient dans quelques-unes des théories de grande unification ou encore dans la description d'un système de deux condensats de Bose-Einstein en terme de la théorie de Ginzburg-Landau. C'est d'ailleurs en considérant ce dernier cas que Babaev, Faddeev et Niemi ont écrit l'article [1] dans lequel ils prétendent avoir mis en évidence l'existence de solitons noués dans un système formé de deux champs scalaires complexes couplés à un champ de jauge. Pour ce faire, ils ont montré que le système en question peut, en effectuant un changement de variable approprié, être décrit de manière équivalente

en terme d'un modèle de Faddeev «généralisé». Bien que cela n'ait pas encore été prouvé, ce modèle généralisé pourrait possiblement admettre sous certaines conditions des solitons noués. Cela impliquerait selon les auteurs que le modèle à deux champs scalaires couplés à un champ de jauge devrait en admettre aussi.

Pour vérifier cette affirmation, nous allons d'abord, en reprenant la méthode de Babaev & coll., démontrer l'équivalence des deux modèles. Ensuite, nous allons considérer une configuration ayant la forme d'un soliton noué dans le modèle de Faddeev et trouver la forme que prend celle-ci dans l'autre modèle. En analysant cette dernière, il sera alors possible de tirer certaines conclusions quant à l'existence de solitons noués dans le modèle à deux champs scalaires et un champ de jauge.

5.2 Passage d'un modèle à deux champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge au modèle de Faddeev généralisé

Cette section reprend essentiellement la démarche présentée par Babaev, Faddeev & Niemi [1] pour passer d'un modèle à deux champs scalaires complexes (Ψ_1, Ψ_2) couplés par un champ de jauge (\vec{A}) à une version généralisée du modèle de Faddeev. On cherchera donc à réexprimer la densité lagrangienne du modèle à deux champs scalaires dans une forme qui pourra être considérée comme une généralisation de 4.12. Cela se fera en introduisant deux nouvelles variables, ρ et \vec{C} .

Notre point de départ est la densité lagrangienne suivante:¹

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2m_1} |D_\mu \Psi_1|^2 - V_1(|\Psi_1|^2) \right] + \left[\frac{1}{2m_2} |D_\mu \Psi_2|^2 - V_2(|\Psi_2|^2) \right] - \frac{\vec{B}^2}{8\pi}. \quad (5.1)$$

¹Dans l'article de Babaev & coll. on considère une situation où les deux condensats sont de charge opposée: pour Ψ_1 , $D_i \equiv \partial_i + iA_i$, pour Ψ_2 , $D_i \equiv \partial_i - iA_i$. Dans ce mémoire, nous les considérons de même charge puisque cela ne modifiera pas les conclusions qu'on en tire.

Les potentiels considérés ont la forme suivante:

$$V_a(|\Psi_a|^2) = -b_a|\Psi_a|^2 + \frac{c_a}{2}|\Psi_a|^4. \quad (5.2)$$

Les constantes b_a et c_a sont positives. Dans un cas statique, la densité lagrangienne se réduit à:

$$\mathcal{L} = - \left[\frac{1}{2m_1} |D_i \Psi_1|^2 + V_1(|\Psi_1|^2) \right] - \left[\frac{1}{2m_2} |D_i \Psi_2|^2 + V_2(|\Psi_2|^2) \right] - \frac{\vec{B}^2}{8\pi}. \quad (5.3)$$

Si on considère cette expression du point de vue de la théorie de Ginzburg-Landau, on remarquera que les champs sont caractérisés par des longueurs de cohérence différentes ($\xi_a = 1/\sqrt{2m_a b_a}$), ainsi que par des concentrations différentes ($N_a = \langle |\Psi_a|^2 \rangle = b_a/c_a$). En considérant une situation aussi générale, la manipulation des équations se complexifie assez vite. Dans les faits, on peut simplifier beaucoup de choses en considérant un cas particulier où les deux champs ont les mêmes paramètres d'ordre ($b_1 = b_2 \equiv b$, $c_1 = c_2 \equiv c$) et une masse effective identique ($m_1 = m_2 \equiv m$). De plus, afin d'alléger la notation, on définira le spineur suivant $\Psi \equiv (\Psi_1, \Psi_2)^T$. Avec toutes ces simplifications, l'expression 5.3 prend la forme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} |D_i \Psi|^2 - V(|\Psi_1|^2, |\Psi_2|^2) - \frac{\vec{B}^2}{8\pi}, \quad (5.4)$$

où le potentiel V est défini comme étant la somme de V_1 et V_2 .

Commençons le changement de variables. La densité lagrangienne du modèle de Faddeev ordinaire dépend du vecteur \vec{n} . La première étape consiste donc à relier ce champ aux variables du modèle 5.4. On se souviendra que le champ \vec{n} peut être exprimé en terme des champs χ_1 et χ_2 du modèle CP^1 . Ainsi, il serait pratique de réexprimer le spineur Ψ en terme du spineur χ . Pour cela, on introduit une fonction $\rho(\vec{x})$ définie tel que:

$$\Psi_a = \sqrt{2m}\rho\chi_a. \quad (5.5)$$

La dérivée covariante de Ψ_a se développe comme suit:

$$\begin{aligned} D_k \Psi_a &= \sqrt{2m}(\partial_k - iA_k)\rho\chi_a \\ &= \sqrt{2m}[(\partial_k \rho)\chi_a + \rho(\partial_k - iA_k)\chi_a] \cdot \\ &= \sqrt{2m}[(\partial_k \rho)\chi_a + \rho D_k \chi_a]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

En calculant le module de cette expression, on obtient (les termes mixtes $(\partial_k \rho) D_k \chi_a$ s'annulent entre eux):

$$|D_i \Psi|^2 = \sqrt{2m} \left[(\nabla \rho)^2 + \rho^2 |D_i \chi|^2 \right]. \quad (5.7)$$

La densité lagrangienne s'écrit alors:

$$\mathcal{L} = -(\nabla \rho)^2 - \rho^2 |D_i \chi|^2 - V(\rho, |\chi|^2) - \frac{\vec{B}^2}{8\pi}. \quad (5.8)$$

Avant de faire le passage de χ à \vec{n} , nous allons introduire une autre variable, soit un champ \vec{C} qui est relié à la densité de supercourant \vec{J} :

$$\vec{C} \equiv \frac{2\vec{J}}{\rho^2} = \frac{2}{\rho^2} \left[\frac{i}{2m} [\Psi^\dagger \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \Psi] - \frac{1}{m} |\Psi|^2 \vec{A} \right]. \quad (5.9)$$

Or, comme on peut le voir, la densité de supercourant dépend de Ψ . Puisqu'on veut plutôt travailler en terme du doublet χ , on posera $\vec{j} \equiv i[\chi^\dagger \nabla \chi - (\nabla \chi^\dagger) \chi]$, ce qui permet de réexprimer \vec{C} comme suit:

$$\vec{C} = 2\vec{j} - 4\vec{A}. \quad (5.10)$$

On dispose donc d'un champ \vec{n} qui dépend de χ , ainsi que d'un champ \vec{C} qui dépend de χ et de \vec{A} . Cela devrait normalement nous permettre de se débarrasser de χ et de \vec{A} dans l'expression 5.8 et de la réexprimer en terme de \vec{n} et \vec{C} . Dans un premier temps, on notera qu'en terme de ces variables, les expressions $\rho^2 |D_i \chi|^2$ et $\frac{\vec{B}^2}{8\pi}$ deviennent:²

$$\rho^2 |D_i \chi|^2 = \frac{\rho^2}{4} \nabla \vec{n}^2 + \frac{\rho^2}{16} \vec{C}^2, \quad (5.11)$$

$$\frac{\vec{B}^2}{8\pi} = \frac{1}{256\pi} [(\partial_i C_j - \partial_j C_i) + 2\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}]^2. \quad (5.12)$$

De plus, puisque les normes des champs χ_1 et χ_2 ne dépendent que de n_3 , le potentiel dans l'expression 5.8 ne dépendra pas des deux autres composantes du champ \vec{n} . Avec toutes ces remarques, on obtient une expression pour la densité lagrangienne qui ne dépend plus de Ψ_1, Ψ_2 ni de \vec{A} .

$$\mathcal{L} = -(\nabla \rho)^2 - \frac{\rho^2}{4} \nabla \vec{n}^2 - \frac{\rho^2}{16} \vec{C}^2 - \frac{1}{256\pi} [(\partial_i C_j - \partial_j C_i) + 2\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}]^2 - V(\rho, n_3). \quad (5.13)$$

Le changement de variables est donc complété.

²Pour le détail du calcul voir les annexes C.5 et C.6.

Si on considère le cas particulier où $\vec{C} = 0$, $V = 0$ et ρ est constant, alors la densité lagrangienne 5.13 se réduit à celle du modèle de Faddeev ordinaire (éq. 4.12):

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{\rho^2}{4} \nabla \vec{n}^2 - \frac{1}{64\pi} (\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2. \quad (5.14)$$

Babaev, Faddeev et Niemi considèrent donc l'expression 5.13 comme une généralisation du modèle de Faddeev en interaction avec un champ vectoriel \vec{C} . En conséquence de cela, ils affirment, sans toutefois le prouver, que le modèle de Faddeev généralisé admet des solitons noués comme dans le cas du modèle ordinaire³. D'autre part, ils prétendent également que le modèle généralisé possède une autre propriété du modèle ordinaire, à savoir une invariance $O(3)$. Cela n'est évidemment pas le cas en raison de la présence du potentiel. On notera que pour que le potentiel soit nul, il faut que les paramètres d'ordre soient eux aussi nuls ($b = c = 0$). Or, cela peut causer certains problèmes d'interprétation, notamment si on tient compte du fait que l'expression $N_a = \langle |\Psi_a|^2 \rangle = b_a/c_a$ serait alors mal définie. Bien que nous soyons surtout intéressés par l'affirmation concernant les solitons noués, nous allons d'abord discuter de celle qui concerne le potentiel.

5.3 Sur l'invariance $O(3)$

Puisque la question des solitons noués est beaucoup plus compliquée à traiter, nous commençons par aborder celle de l'invariance $O(3)$. Au chapitre 3, le modèle de Faddeev a été explicitement construit à partir du modèle σ $O(3)$ non-linéaire de manière à ce que sa densité lagrangienne soit invariante sous une transformation $O(3)$. La présence du potentiel brise de façon très nette cette invariance dans le cas du modèle de Faddeev généralisé. En terme de n_3 et de ρ le potentiel a la forme suivante:⁴

$$V = k_0 + k_2 n_3^2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} k_0 = \rho^4 c m^2 - 2\rho^2 b m \\ k_2 = \rho^4 c m^2 \end{cases}. \quad (5.15)$$

³Dans un article publié subséquemment [34], Faddeev affirme d'une manière plus nuancée, sans encore une fois amener de preuves, que les propriétés solitoniques du champ sont préservées seulement pour un certain intervalle de valeurs de ρ et de \vec{C} .

⁴Voir annexe C.7

Puisque k_2 est positif, il faut nécessairement que n_3 soit nul pour minimiser le potentiel. Auparavant, \vec{n}_∞ pouvait prendre n'importe quelle valeur sur la sphère unitaire. Maintenant, pour que n_3 soit nul à l'infini, \vec{n}_∞ est contraint de prendre une valeur sur le cercle unitaire situé dans le plan $n_1 - n_2$. La densité lagrangienne n'est donc invariante que sous une transformation $O(2)$.

Pour se fixer les idées, on considérera le cas où $\vec{n}_\infty \rightarrow (1, 0, 0)$. Dans le chapitre précédent, lorsqu'on étudiait le modèle de Faddeev ordinaire, le champ pointait vers le pôle nord à l'infini: $\vec{n}_\infty \rightarrow (0, 0, 1)$. Or, étant donné l'invariance de $O(3)$ du modèle ordinaire, on aurait tout aussi bien pu considérer une configuration pour laquelle $\vec{n}_\infty \rightarrow (1, 0, 0)$. Dans un tel cas, en autant que l'on effectue le changement $n_1 \rightarrow n_2, n_2 \rightarrow n_3, n_3 \rightarrow n_1$, la paramétrisation 4.28 demeure encore utilisable:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(f) \\ n_2 &= \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + k\alpha) \\ n_3 &= \sin(f) \sin(\tilde{\theta} + k\alpha) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Pour tenir compte de l'effet du potentiel, nous poursuivrons le reste des développements en considérant cette paramétrisation. C'est d'ailleurs uniquement de cette façon que le potentiel interviendra dans le reste de nos calculs. Les conclusions tirées devraient donc normalement être les mêmes en l'absence de potentiel ($b = 0, c = 0$), puisque dans un tel cas, la paramétrisation 5.16 demeure bien entendu valide.

5.4 Sur la présence de solitons noués

Bien que cela ne soit pas prouvé, il n'est pas déraisonnable de croire que pour certaines valeurs de ρ et \vec{C} , le modèle de Faddeev généralisé admette des solitons noués comme solutions. Étant donné l'équivalence des expressions 5.4 et 5.13, cela impliquerait, si la fonction ρ et le champ \vec{C} utilisés pour passer d'une de ces expressions à l'autre se trouvent dans le bon intervalle, que le modèle formé de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge admette lui aussi des solitons noués comme solutions. Or comme, on le verra, cela ne semble pas être le cas.

Pour étudier ce problème, nous considérerons une configuration du champ \vec{n} ayant la forme d'un soliton noué. Pour simplifier les choses, on choisira une configuration de charge $Q_H = 1$. Notre but est de voir quelle forme adopte cette configuration en terme des champs Ψ_1 et Ψ_2 et d'analyser si celle-ci est stable. En fait, puisque χ_1 et χ_2 et Ψ_1 et Ψ_2 sont simplement reliés par un facteur multiplicatif dépendant de la fonction ρ (éq. 5.5), ces deux doublets de champs devraient avoir qualitativement la même forme. On effectuera donc plutôt un passage \vec{n} vers χ_1 et χ_2 . Pour cela, on notera tout d'abord qu'avec la paramétrisation 5.16, les normes des champs χ_1 et χ_2 s'expriment maintenant de la façon suivante:

$$\begin{aligned} |\chi_1| &= \sqrt{\frac{1+n_3}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin(f)\sin(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} \\ |\chi_2| &= \sqrt{\frac{1-n_3}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin(f)\sin(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pour trouver les phases, les choses sont un peu plus compliquées. En se référant à l'équation 3.45, on voit que les composantes n_1 et n_2 du vecteur \vec{n} peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2|\chi_1||\chi_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ n_2 &= 2|\chi_1||\chi_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Le rapport n_2/n_1 vaut donc $\tan(\varphi_2 - \varphi_1)$. En terme de l'ancienne paramétrisation 4.28, ce rapport donnait $\tan(\tilde{\theta} + k\alpha)$. Cela nous permettait d'obtenir une expression assez simple pour l'une des deux phases:

$$\varphi_1 = \varphi_2 - (\tilde{\theta} + \alpha). \quad (5.19)$$

Or, avec la paramétrisation actuelle (5.16), le rapport n_2/n_1 vaut à présent $\tan(f) \cos(\tilde{\theta} + k\alpha)$. La valeur de la différence des phases φ_2 et φ_1 correspond maintenant à une fonction assez complexe. Si on veut isoler φ_1 , on obtient:

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \arctan \left[\tan(f) \cos(\tilde{\theta} + k\alpha) \right]. \quad (5.20)$$

Il était assez simple de travailler avec l'expression 5.19, mais cela ne sera pas le cas avec l'expression 5.20. Il est donc préférable d'obtenir d'une autre manière une expression pour les phases. En comparant les équations 5.16 et 5.18 on voit que:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\cos(f)}{2|\chi_1||\chi_2|} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\sin(f) \cos(\tilde{\theta} + \alpha)}{2|\chi_1||\chi_2|}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ceci permet de poser l'égalité suivante:

$$e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\cos(f) + i \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + \alpha)}{2|\chi_1||\chi_2|}. \quad (5.22)$$

Notre but est de séparer le membre de droite de cette équation en un produit de deux fonctions complexes que l'on pourra identifier à $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$. Après quelques manipulations, on obtient:⁵

$$e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} = \left[\frac{\cos(\frac{f}{2}) e^{i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}} + i \sin(\frac{f}{2}) e^{-i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}}}{\sqrt{2}|\chi_2|} \right] \left[\frac{\cos(\frac{f}{2}) e^{-i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}} + i \sin(\frac{f}{2}) e^{i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}}}{\sqrt{2}|\chi_1|} \right]. \quad (5.23)$$

En faisant le choix d'identifier le premier crochet à $e^{i\varphi_2}$ et le second à $e^{-i\varphi_1}$, on peut exprimer les champs χ_1 et χ_2 comme suit :

$$\chi_{1,2} = |\chi_{1,2}| e^{i\varphi_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) e^{i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}} \pm i \sin\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i\frac{\tilde{\theta} + \alpha}{2}} \right]. \quad (5.24)$$

Le signe positif correspond à χ_1 et le négatif à χ_2 .

Avant de pouvoir utiliser cette expression, il va être nécessaire de la modifier un peu pour régler trois problèmes de multivalence. L'un d'entre eux est dû à la présence d'un terme en $\frac{\tilde{\theta}}{2}$ dans la phase. En effet, dans un demi-plan α donné, à chaque tour que l'on fait autour du centre du bébé-skyrmion, l'angle $\tilde{\theta}$ change par 2π (voir figure D-2). Après n tour(s) la phase demeurera inchangée si n est pair et sera déphasée de π radians si n est impair: $e^{\pm i\frac{\tilde{\theta}}{2}} \rightarrow e^{\pm i\frac{\tilde{\theta}}{2}} e^{\pm in\pi} = \pm e^{\pm i\frac{\tilde{\theta}}{2}}$. À chaque point de l'espace, le champ possède donc au moins deux valeurs différentes. Pour régler ce problème, on se servira du fait qu'on peut librement multiplier les champs χ_1 et χ_2 par une phase ω . En choisissant $\omega = \left(\frac{2m+1}{2}\right) \tilde{\theta}$, on obtient:

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) e^{i[(m+1)\tilde{\theta} + \frac{\alpha}{2}]} \pm i \sin\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i[-m\tilde{\theta} + \frac{\alpha}{2}]} \right]. \quad (5.25)$$

Bien que cela ait réglé une bonne partie du problème, le champ n'est pas encore pour autant partout bien défini. En effet, sur la ligne de champ centrale du soliton noué, $f = \pi$ et cela implique que les champs χ_1 et χ_2 se réduisent à $\chi_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i[m\tilde{\theta} + \frac{\alpha}{2}]}$. On remarquera que les champs ne sont pas nuls et que leur phase dépend de $\tilde{\theta}$. Or, $\tilde{\theta}$ est

⁵Voir annexe C.8

mal défini sur la ligne de champ centrale (voir figure D-2). Par conséquent, les deux champs sont eux aussi mal définis à cet endroit. Le problème se règle simplement en posant $m = 0$ dans la phase ω . Les deux champs deviennent donc :

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) e^{i[\tilde{\theta} + \frac{\alpha}{2}]} \pm i \sin\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i\frac{\alpha}{2}} \right]. \quad (5.26)$$

Il reste un dernier problème de multivalence à régler. Si on considère seulement un demi-plan, c'est-à-dire si on considère une valeur particulière de α , les deux champs sont alors partout bien définis. Toutefois, ce n'est pas le cas lorsqu'on considère tout l'espace. En effet, sur l'axe z , où $f = 0$, l'expression 5.26 se réduit à $\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i[\tilde{\theta} + \frac{\alpha}{2}]}$. Puisque l'axe z est compris dans tous les demi-plans paramétrés par α , les champs χ_1 et χ_2 sont multivalents sur cet axe. On peut se débarrasser du terme en α en multipliant les deux champs par une phase $\omega = -\alpha/2$.

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) e^{i\tilde{\theta}} \pm i \sin\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i\alpha} \right]. \quad (5.27)$$

Les champs χ_1 et χ_2 correspondant à un champ \vec{n} ayant la forme d'un soliton noué de charge $Q_H = 1$ sont maintenant définis sans ambiguïté dans tout l'espace. Puisque les champs Ψ_1 et Ψ_2 sont reliés aux champs χ_1 et χ_2 par la relation $\Psi_a = \sqrt{2m\rho}\chi_a$, les phases des deux paires de champs sont nécessairement les mêmes. L'expression 5.27 nous permet donc de nous faire une idée de ce à quoi ressemblent une configuration ayant la forme d'un soliton noué de charge $Q_H = 1$ dans le modèle de Faddeev généralisé en terme des champs du modèle 5.4.

Pour tracer le champ il est pratique de séparer les composantes réelle et imaginaire :

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) \cos(\tilde{\theta}) \pm \sin\left(\frac{f}{2}\right) \sin(\alpha) \right] + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{f}{2}\right) \sin(\tilde{\theta}) \pm \sin\left(\frac{f}{2}\right) \cos(\alpha) \right]. \quad (5.28)$$

Il n'est nécessaire que de considérer la configuration qu'il adopte dans un demi-plan donné. On considérera par exemple le demi-plan $\alpha = 0$. Dans un tel cas, les champs se réduisent à l'expression

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{f}{2}\right) \left(\cos(\tilde{\theta}) + i \left[\sin(\tilde{\theta}) \pm \tan\left(\frac{f}{2}\right) \right] \right). \quad (5.29)$$

Ceux-ci sont tracés à la figure 5-1 (par mesure de simplicité ceux-ci sont représentés dans un plan plutôt que dans un demi-plan). Une analyse rapide de la configuration de ces deux champs nous permet de faire quelques remarques. On notera tout d'abord qu'à l'infini, les champs sont de norme constante ($|\chi_a| = 1/\sqrt{2}$) et pointent en direction radiale. D'autre part, en se référant à l'expression 5.17, on se rend compte que dans le demi-plan $\alpha = 0$, le champ χ_1 est nul lorsque $f = \pi/2$ et $\tilde{\theta} = -\pi/2$. Sur la figure 5-1, ce point se situe donc sur l'axe des y négatifs à une distance qui dépend de la vitesse à laquelle f passe de π (à l'origine) à 0 (à l'infini). La même observation s'applique pour χ_2 sauf que cette fois-ci ce champ est nul lorsque $\tilde{\theta} = \pi/2$. Le point où $|\chi_2| = 0$ se situe donc sur l'axe des y positifs. De plus, dans les deux cas, on remarquera que le champ «fuit» à partir du point où sa norme est nulle, présentant ainsi la forme caractéristique de la configuration du champ scalaire complexe d'un vortex.

De manière plus générale, lorsqu'on tient compte de l'angle α , la position des deux points où un des deux champs est nul va simplement se déplacer en effectuant une rotation autour de l'origine. En revenant à la représentation en terme de demi-plans, les lignes de champs tracées par chacun de ces deux points forment donc deux courbes fermées qui sont enlacées une fois l'une à l'autre, un peu comme ce qui est représenté à la figure 4-3.

Analysons maintenant la stabilité énergétique de cette configuration. On a vu au chapitre 2, que la configuration d'énergie minimum pour un champ scalaire complexe en interaction avec un champ de jauge en était une où le centre du champ de jauge (l'endroit où $\vec{A} = 0$) coïncidait avec le centre du champ scalaire (l'endroit où ce champ est nul). Or, dans le cas présent, il y a deux champs scalaires et leurs centres ne se situent pas au même endroit. Pour minimiser l'énergie du système, le centre de chacun de ces champs devrait donc se déplacer de manière à se confondre avec l'autre pour qu'ils puissent tous les deux être situés au centre du champ de jauge. Aucune contrainte topologique ne devrait les empêcher d'agir ainsi. Il est vrai que les lignes de champ centrales des deux champs scalaires sont enlacées, mais cela ne constitue pas une contrainte topologique puisque ces champs n'interagissent pas entre eux. On doit donc chercher sous quelles conditions les deux centres peuvent se confondre. En considérant

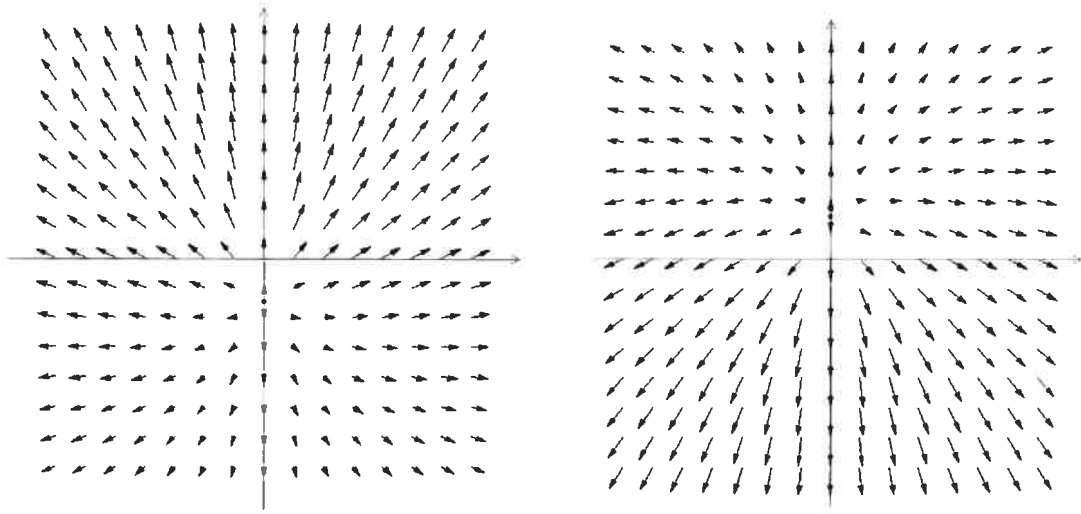


Figure 5-1: Configuration des champs χ_1 et χ_2 correspondant à un soliton noué de charge $Q_H = 1$ dans le demi-plan $\alpha = 0$. Pour simplifier la représentation, le demi-plan a été «décomprimé» en subissant la transformation inverse que celle utilisée à la figure D-1. Le champ χ_1 est tracé à gauche et le champ χ_2 à droite. Dans chacun des cas, on reconnaît la forme caractéristique de la configuration du champ scalaire complexe d'un vortex.

la figure 5-1 et l'équation 5.17, on voit que la distance par rapport à l'origine à laquelle se trouve le centre de chacun des champs ne dépend que de la vitesse à laquelle f tend de π (à l'origine) vers 0 (à l'infini). Donc, plus f tend rapidement vers 0, plus le centre de chacun des champs se rapproche de l'origine. C'est dans la limite où f passerait de π à zéro dans un rayon $r \rightarrow 0$ que les centres des deux champs finiraient par se confondre. En ce qui concerne le champ \vec{n} , cela revient essentiellement à dire qu'il est partout trivial sauf dans une singularité à l'origine. Cette observation suggère qu'une configuration ayant la forme d'un soliton noué n'est pas une solution du modèle formé par deux champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge. La même remarque s'applique au modèle de Faddeev généralisé dans le cas particulier où les variables ρ et \vec{C} sont données par les expressions 5.5 et 5.9. D'autre part, il existe un autre argument qui va dans le même sens. Comme cela a déjà été mentionné, les lignes de champ centrales des champs χ_1 et χ_2 forment des boucles de vortex analogues aux cordes cosmiques. Or, il est bien connu des chercheurs dans le domaine que ce type d'objet n'est pas stable et finit par se désintégrer en se reconnectant.

5.5 Relation entre les versions ordinaire et généralisée du modèle de Faddeev

Comme on vient de le voir, il semblerait qu'une configuration ayant la forme d'un soliton noué n'est pas une solution du modèle à deux champs scalaires ni du modèle de Faddeev généralisé lorsque ρ et \vec{C} sont donnés par 5.5 et 5.9. Normalement, on se serait attendu à ce que ce soit au moins le cas lorsqu'on considère la limite où le modèle généralisé se réduit au modèle ordinaire ⁶. Cette situation est bien étrange et mérite d'être approfondie.

On se rappellera que pour passer du modèle général au modèle ordinaire, il fallait notamment que ρ soit une constante et que $\vec{C} = 0$. Essayons de voir ce que ces conditions impliquent au niveau de l'énergie. Puisque $\vec{C} = 0$, l'équation 5.10 implique que:

$$\vec{A} = \frac{\vec{j}}{2} = \frac{i}{2}[\chi^\dagger \nabla \chi - (\nabla \chi^\dagger) \chi]. \quad (5.30)$$

Par conséquent la dérivée covariante $|D_i \chi|^2$ ne dépend maintenant que du doublet de champ $\chi_a = |\chi_a| e^{i\varphi_a}$. En la développant, on obtient:⁷

$$|D_i \chi|^2 = |(\partial_i + iA_i)\chi|^2 = (\partial_i |\chi_a|)^2 + (|\chi_1| |\chi_2|)^2 (\partial_i \varphi_a)^2. \quad (5.31)$$

En se référant à l'expression 5.8, on voit que le terme $\rho^2 |D_i \chi|^2$ intervient dans l'expression de la densité d'énergie ($\varepsilon = -\mathcal{L}$) du système. Pour que le champ soit d'énergie finie, il faut que ce terme tende suffisamment rapidement vers zéro à l'infini. Ce n'est toutefois pas le cas (du moins pour des situations non-triviales). Pour le démontrer nous allons donc étudier la convergence de l'intégrale suivante sur tout l'espace:

$$\int \rho^2 |D_i \chi|^2 d^3x = \rho^2 \int (\partial_i |\chi_a|)^2 d^3x + \rho^2 \int (|\chi_1| |\chi_2|)^2 (\partial_i \varphi_a)^2 d^3x. \quad (5.32)$$

Rappelons que l'on considère un cas particulier où ρ est une constante; cela nous a donc permis de le sortir de l'intégrale. Puisque les deux éléments du membre de droite

⁶Ce cas limite consiste en une situation où les valeurs des variables ρ et \vec{C} serait telles que les équations du champs du modèle généralisé deviendraient identiques à celles du modèle ordinaire.

⁷Voir annexe C.9

de la précédente équation sont non-négatifs, il suffit de prouver que l'un d'eux diverge pour prouver que l'expression au complet diverge; on considérera donc le second terme. Comme cela a été fait au chapitre 2, on fera l'approximation qu'à partir d'un certain rayon R , $\chi_a \approx \chi_a^\infty$. Ainsi on pourra séparer le domaine d'intégration en deux régions, l'une pour laquelle $r < R$ et qui ne devrait normalement pas causer de problème de divergence et l'autre pour laquelle $R > r$ et qui amènera à une divergence énergétique. À l'infini, $f = 0$ et $\tilde{\theta}$ tend vers l'angle polaire θ (voir figure D-2). En se référant à l'équation 5.27, on voit que $\chi_a^\infty = e^{i\theta}/\sqrt{2}$ et donc que $\chi_a = 1/\sqrt{2}$ et $\varphi_a = \theta$. Donc, dans les conditions considérées, $(\partial_i \varphi_a)^2 = 2/r^2$, $(|\chi_1||\chi_2|)^2 = 1/4$ et l'intégration angulaire donne 4π ce qui fait:

$$\rho^2 \int_{r>R} (|\chi_1||\chi_2|)^2 (\partial_i \varphi_a)^2 d^3x = 2\pi\rho^2 \int_R^\infty dr. \quad (5.33)$$

Ce terme diverge à moins que $\rho = 0$. Or, on considère présentement une situation où ρ est une constante. Ainsi si ρ est nul lorsque $r < R$, alors ρ sera nul dans tout l'espace. Puisque $\Psi_a = \sqrt{2m\rho}\chi_a$, cela implique que les champs Ψ_a correspondant à cette configuration sont partout nuls. Donc le modèle de Faddeev ordinaire correspond à un système de deux champs scalaires complexes couplés par un champ de jauge si et seulement si les champs complexes sont nuls! De plus, un ρ nul fait disparaître le terme quadratique dans la densité lagrangienne 5.14. Dans ces conditions, on peut se demander jusqu'à quel point il est juste d'affirmer que le modèle de Faddeev «généralisé» est encore une généralisation du modèle ordinaire.

Conclusion

Nous avons débuté ce mémoire en introduisant le concept de soliton d'une manière historique. Ensuite, en utilisant l'exemple du *kink*, nous avons mis en relief quelques-unes des propriétés de ce type d'objet. Cela nous a permis d'avoir une meilleure compréhension des autres types de solitons rencontrés subséquemment (vortex, bébé-skyrmion, soliton noué). La stabilité de ces derniers provient de la division des configurations du (ou des) champ(s) de chacun des modèles en classes d'homotopie. Dans chaque cas, l'existence de ces classes peut être vue comme une conséquence du fait que ces modèles sont caractérisés par des applications d'une m -sphère (espace physique) vers une n -sphère (espace interne) ($m \geq n$). Chaque configuration possède une charge topologique définie en fonction de son appartenance à une classe d'homotopie. Dans le cas des solitons noués, cette charge, qui porte le nom d'invariant de Hopf, peut être interprétée comme étant le nombre d'enlacement de deux lignes de champ.

L'objectif de ce mémoire était de vérifier si un modèle formé de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge peut admettre des solitons noués comme solutions. Rappelons que cette hypothèse avait été émise sous forme d'une affirmation par Bababev, Faddeev & Niemi après que ceux-ci eurent montré que le modèle en question $(\Psi_1, \Psi_2, \vec{A})$ était équivalent à une généralisation du modèle de Faddeev (\vec{n}, ρ, \vec{C}) . Or, bien que le modèle de Faddeev ordinaire admette des solitons noués, rien ne prouve que sa version généralisé en ait aussi. Il serait d'ailleurs intéressant que des spécialistes en physique numérique se penchent sur la question. De plus, même dans l'éventualité où il en admettrait, il serait raisonnable de penser que les propriétés solitoniques du modèle ne seront préservées que pour un certain intervalle de valeurs de ρ et de \vec{C} . Or, pour que les deux modèles soient équivalents, les variables ρ et \vec{C} sont restreintes de prendre des valeurs parmi celles qui sont permises par les expressions 5.5 et 5.9. Rien ne garantit que celles-ci se trouvent dans l'intervalle de valeurs permettant

l'existence de solitons noués. En tenant compte de ces observations, on voit bien qu'il est pertinent de vouloir vérifier l'affirmation de Babaev, Faddeev & Niemi.

Nous ne sommes malheureusement pas parvenu à avoir une réponse catégorique à la question de savoir si, oui ou non, un modèle formé de deux champs scalaires complexes en interaction avec un champ de jauge peut avoir des solitons noués comme solutions. Toutefois, les observations que nous avons faites semblent indiquer que ce ne serait pas le cas. En effet, pour étudier la question, nous avons considéré que le champ \vec{n} du modèle de Faddeev généralisé adoptait une configuration ayant la forme d'un soliton noué. En réexprimant cette configuration en terme des champs scalaires complexes Ψ_1 et Ψ_2 , on obtient un système de deux vortex énergétiquement instable. Cela semble donc contredire l'affirmation de Babaev, Faddeev & Niemi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Babaev, L. Faddeev & A. Niemi, *Hidden symmetry and knot solitons in a charged two-condensates Bose system*, Phys. Rev. B 65, 100512 (2002), 4 pp. [cond-mat/0106152].

ARTICLES FONDATEURS DE LA PHYSIQUE SOLITONIQUE

- [2] M.H. Darcy & M.H. Bazin, *Recherches Hydrauliques*, Imprimerie Impériale, Paris (1865), p. 9.
- [3] D.J. Korteweg & G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag 39 (1895), pp. 442-443.
- [4] A. Seeger, H. Donth & A. Kochendöfer, *Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomzeihen*, III, Z. Phys. 134 (1895), pp. 173-193.
- [5] E. Fermi, J.R. Pasta & S.M. Ulam, *Studies of nonlinear problems*, Los Alamos Sci. Lb. Rep. LA-1940 (1955).
- [6] N. Zabusky & M. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. 15 (1965), pp. 240-243.
- [7] J.K. Perring & T.H.R. Skyrme, *A model unified field equation*, Nucl. Phys. 31 (1962), pp. 550-555.

VORTEX

- [8] H. Nielsen & P. Olesen, *Vortex line models for dual strings* Nucl. Phys. B61 (1973), pp. 45-61.

- [9] **J. Preskill**, *Vortices and monopoles*, Elsevier Science publishers (1987).
- [10] **A. Vilenkin & E.P.S. Shellard**, *Cosmic Strings and other Topological Defect*, Cambridge university Press (1994).

GROUPES D'HOMOTOPIE

- [11] **S. Coleman**, *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press (1985).

MODÈLES σ $O(3)$ NON-LINÉAIRE ET CP^1

- [12] **R. Rajaraman**, *Solitons and instantons*, North-Holland publishing company (1982).
- [13] **A.A. Belavin & A.M. Polyakov**, *Metastable States of two-dimensional Isotropic Ferromagnets*, JETP Lett. 22 (1975), pp. 245-248.

BORNE D'ÉNERGIE

- [14] **E.B. Bogomol'nyi**, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976), pp. 449-454.
- [15] **M.K. Prasad & C.H. Sommerfield**, *An exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. rev. Lett (1975) pp. 760-762.
- [16] **A.F. Vakulenko & L.V. Kapitanskii**, *Stability of solitons in S^2 in the nonlinear σ -model*, Sov. phys. dokl. 24, 433 (1979)

SOLITONS EN (3+1) DIMENSIONS

- [17] **T.H.R. Skyrme**, *A Nonlinear Field Theory*, Proc. Roy. Soc. London A260 (1969), pp. 127-128.
- [18] **G. 't Hooft**, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. B79 (1974), pp. 276-284.

- [19] **A.M. Polyakov**, *Particle Spectrum in Quantum Field Theory*, JETP. Lett. 20 (1974), pp. 194-195.
- [20] **L.D. Faddeev**, *Quantization of Solitons*, Princeton preprint IAS print-75-QS70 (1975), pp. 50-52.

CRITÈRE DE DERRICK

- [21] **G.H. Derrick**, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. 5 (1964).
- [22] **R. Hobart**, *On the Instability of a Class of Unitary Field Models*, Proc. Phys. Soc. 82 (1963).

NOMBRE D'ENLACEMENT ET CHARGE DE HOPF

- [23] **L.H Kauffman**, *On knots*, Princeton University Press (1987).
- [24] **L.H Kauffman**, *Knots and physics*, World Scientific (1993).
- [25] **M. Atiyah**, *The geometry and physics of knots*, Cambridge University Press (1990).
- [26] **R. Bott & L.W. Tu**, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Spingler-Verlag (1982).
- [27] **P.J. Hilton** *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge University Press (1953).
- [28] **F. Wilczek & A. Zee**, *Linking Numbers, Spin and Statistics of Solitons*, Phys. rev. Lett. 51 (1983), pp. 2250-2252.

BÉBÉ-SKYRMION

- [29] **B.M.A.G. Piette, B.J. Schroers & W.J Zakrzewski**, *Multisolitons in Two-dimensional Skyrme Model*, Z. Phys. C 65 165 (1994) [[hep-th/9406160](#)].

- [30] **T. Weidig**, *The World of Baby Skyrmions: Numerical Studies of (2+1)D Topological Skyrme-like Solitons (Talk given at School of Subnuclear Physics)*, Erice 1999) [[hep-th/9911056](#)].
- [31] **T. Weidig**, *The baby Skyrme models and their multi-skyrmions*, Nonlinearity 12, 1489 (1999), [[hep-th/9811238](#)].
- [32] **T. I. Ioannidou, V. B. Kopeliovich & W. J. Zakrzewski**, *Approximate analytical solutions of the baby Skyrme model*, JETP 95:572 (2002) [[hep-th/0203253](#)].
- [33] **A. E. Kudryavtsev, B. M. A. G. Piette & W. J. Zakrzewski**, *Skyrmions and domain walls in (2+1) dimensions*, Nonlinearity 11, 783 (1998) [[hep-th/9709187](#)].

SOLITONS NOUÉS

- [34] **L.D. Faddeev**, *Knotted Solitons*, Proceedings of the ICM vol. 1 (2002), [[math-ph/0212079](#)].
- [35] **L.D. Faddeev & A. Niemi**, *Knots and particles*, Nature 387:58 (1997), [[hep-th/9610193](#)].
- [36] **L.D. Faddeev & A. Niemi**, *Toroidal Configurations as Stable Solitons* (1997), [[hep-th/9705176](#)].
- [37] **R.A. Battye & P.M. Sutcliffe**, *Solitons, Link and Knots*, Proc.Roy.Soc.Lond. A455 (1999), [[hep-th/9811077](#)].
- [38] **R.A. Battye & P.M. Sutcliffe**, *Knots as Stable Soliton Solutions in a Three Dimensional Classical Field Theory (To knot or knot to be)*, Phys.Rev.Lett. 81 (1998) 4798-4801, [[hep-th/9808129](#)].
- [39] **J. Gladikowski & M. Hellmund**, *Static solitons with non-zero Hopf number*, Phys.Rev. D56 (1997), [[hep-th/9609035](#)].

- [40] J. Hietarinta & P. Salo, *Faddeev-Hopf knots: Dynamics of linked un-knots*, Phys.Lett. B451 (1999), [hep-th/9811053].
- [41] J. Hietarinta, J. Jäkkä & P. Salo, *Relaxation of twisted vortices in the Faddeev-Skyrme model*, Phys.Lett. A321 (2004), [cond-mat/0309499].

COORDONNÉES TOROÏDALES

- [42] Y.-S. Wu & A. Zee., *A Closed-String (or Ring) Soliton Configuration with Non-zero Hopf Number*, Nucl. Phys. B324 (1989), pp. 623-629.

APPENDICE A

Identités matricielles

Afin de faciliter les calculs, deux identités faisant intervenir des produits d'éléments de matrice de Pauli ont été utilisées. Nous reprenons donc dans cette annexe les grandes lignes du développement de ces identités. Nous nous rappellerons d'abord que les matrices de Pauli ont la forme suivante:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarquera que les traces de ces matrices sont nulles ($\sigma_{ii}^a = 0$). De plus on peut facilement vérifier que le produit de deux matrices donne le résultat suivant: $\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} + i \varepsilon^{abc} \sigma^c$.

A.1 Démonstration de l'identité $\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = 2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd}$

Toute matrice 2×2 peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de la matrice identité et des trois matrices de Pauli. Cela nous permet de décomposer le produit de 2 éléments de matrice, ou d'une manière plus générale une sommation de ces produits comme suit. Le produit d'éléments de matrices $\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n$ peut être décomposé comme suit:

$$\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = A_{ad} \delta_{cb} + B_{ad}^m \sigma_{cb}^m, \quad (\text{A.1})$$

où les coefficients A_{ad} et B_{ad}^m sont à déterminer. Le coefficient A_{ad} se trouve sans trop de difficultés en multipliant l'expression A.1 par δ_{bc} :

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n] \delta_{bc} &= 3\delta_{ad} \\ [A_{ad} \delta_{cb} + B_{ad}^m \sigma_{cb}^m] \delta_{bc} &= 2A_{ad} \end{aligned} \right\} A_{ad} = \frac{3}{2} \delta_{ad}. \quad (\text{A.2})$$

L'expression A.1 devient ainsi:

$$\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = \frac{3}{2} \delta_{ad} \delta_{cb} + B_{ad}^m \sigma_{cb}^m. \quad (\text{A.3})$$

En multipliant cette fois-ci par σ_{bc}^q , on pourra isoler le coefficient B_{ad}^m :

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n] \sigma_{bc}^q &= -\sigma_{ad}^q \\ \left[\frac{3}{2} \delta_{ad} \delta_{cb} + B_{ad}^m \sigma_{cb}^m \right] \sigma_{bc}^q &= 2B_{ad}^q \end{aligned} \right\} B_{ad}^q = -\frac{1}{2} \sigma_{ad}^q. \quad (\text{A.4})$$

En insérant cette expression dans A.3, on obtient:

$$\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = \frac{3}{2} \delta_{ad} \delta_{cb} - \frac{1}{2} \sigma_{ad}^m \sigma_{cb}^m. \quad (\text{A.5})$$

On remarquera que le membre de droite de l'équation contient un terme analogue à l'expression de départ, mais dont les indices sont permutés. On semble peu avancé, mais il suffit d'évaluer récursivement ce terme en fonction de l'expression A.5 pour régler le problème:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ad}^m \sigma_{bc}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \delta_{ab} \delta_{cd} - \frac{1}{2} \sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n \right). \quad (\text{A.6})$$

En insérant A.6 dans A.5 et en isolant $\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n$, on obtient l'expression recherchée:

$$\sigma_{ab}^n \sigma_{cd}^n = 2\delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ab} \delta_{cd}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Démonstration de l'identité $\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j \sigma_{ef}^k = 2i(\delta_{af} \delta_{bc} \delta_{ed} - \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cd})$

Pour développer cette identité, on commencera par ne considérer que les trois premiers termes ($\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j$) et on posera une décomposition analogue à celle qui été utilisée lors de la démonstration de la précédente identité:

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j = A_{ad}^k \delta_{bc} + B_{ad}^{km} \sigma_{bc}^m. \quad (\text{A.8})$$

Pour trouver les coefficients A_{ad}^k et B_{ad}^{km} , on procédera comme précédemment. On commence donc par multiplier l'expression A.8 par δ_{bc} :

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j] \delta_{bc} &= 2i \sigma_{ad}^k \\ [A_{ad}^k \delta_{bc} + B_{ad}^{km} \sigma_{bc}^m] \delta_{bc} &= 2A_{ad}^k \end{aligned} \right\} A_{ad}^k = i \sigma_{ad}^k. \quad (\text{A.9})$$

On peut donc réécrire l'équation A.8 comme suit:

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j = i \sigma_{ad}^k \delta_{bc} + B_{ad}^{km} \sigma_{bc}^m. \quad (\text{A.10})$$

Pour trouver le coefficient B_{ad}^{km} , on multiplie cette dernière expression par σ_{bc}^l :

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j] \sigma_{bc}^l &= -2i \delta^{kl} \delta_{ad} \\ [i \sigma_{ad}^k \delta_{bc} + B_{ad}^{km} \sigma_{bc}^m] \sigma_{bc}^l &= 2B_{ad}^{kl} \end{aligned} \right\} B_{ad}^{kl} = -i \delta^{kl} \delta_{ad}. \quad (\text{A.11})$$

On a réussi à se débarrasser des 2 coefficients, l'expression $\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j$ devient donc:

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j = i [\sigma_{ad}^k \delta_{bc} - \sigma_{bc}^k \delta_{ad}]. \quad (\text{A.12})$$

Or, initialement on s'intéressait à l'expression $\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j \sigma_{ef}^k$. Celle-ci s'obtient en multipliant l'équation A.12 par σ_{ef}^k :

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j \sigma_{ef}^k = i[(\sigma_{ad}^k \sigma_{ef}^k) \delta_{bc} - (\sigma_{bc}^k \sigma_{ef}^k) \delta_{ad}]. \quad (\text{A.13})$$

La première identité développée (éq. A.7) permet de réexprimer les 2 produits d'éléments de matrices $(\sigma_{ad}^k \sigma_{ef}^k)$ et $(\sigma_{bc}^k \sigma_{ef}^k)$ présents dans A.14 en termes de deltas de Kroenecker, ce qui donne comme résultat final:

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{ab}^i \sigma_{cd}^j \sigma_{ef}^k = 2i[\delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de} - \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf}]. \quad (\text{A.14})$$

APPENDICE B

Nœuds et nombre d'enlacement

B.1 Définition d'un nœud

Puisque ce mémoire porte sur l'étude des solitons noués, il est normal pour clarifier les choses de définir ce qu'est un nœud. Un nœud peut être défini comme étant une courbe fermée dans R_{phy}^3 qui ne se croise pas avec elle-même. On notera que cette définition est large et admet même toutes les courbes qui peuvent se déformer continûment (sans s'auto-croiser) de manière à former un cercle. Ces courbes sont qualifiées de «nœuds» triviaux puisqu'elles ne constituent pas des nœuds dans le sens familier du terme. Il est donc fréquent de réserver le terme de nœud aux nœuds non-triviaux. Quelques exemples de nœuds sont présentés à la figure B-1.

Jusqu'à ce jour, un seul soliton noué n'ayant pas une forme de «nœud» trivial a été identifié. Celui-ci a une forme de nœud tréflé. Théoriquement, rien n'empêche que des solitons noués formant des nœuds plus complexes puissent être éventuellement identifiés.



Figure B-1: Exemples de nœuds. On distingue de gauche à droite, le «nœud» trivial, le nœud tréflé, le nœud en huit et le nœud étoilé.

B.2 Nombre d'enlacement

Étant donné l'existence d'un théorème reliant la charge de Hopf au nombre d'enlacement de deux courbes dans R_3 , il est primordial de bien comprendre cette notion. On dit que deux nœuds sont liés ou enlacés l'un à l'autre si on ne peut pas les séparer sans qu'ils ne se croisent. Ce degré de liaison est caractérisé par un invariant topologique, le nombre d'enlacement L_k . On calcule généralement ce nombre à partir de la projection des nœuds sur un plan (diagramme de lien). On affecte à chaque croisement externe (c'est-à-dire entre les deux nœuds) un indice $C(p)$, tel que défini à la figure B-2. Le nombre d'enlacement se calcule alors comme suit:

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_p C(p). \quad (\text{B.1})$$

On notera que pour que L_k soit bien défini, il faut que le sens de parcours des nœuds soit lui aussi bien défini. En effet, inverser le sens de parcours d'un des deux nœuds change le signe du nombre d'enlacement. Quelques exemples sont présentés à la figure B-3.

D'autre part, mentionnons que la notion de nombre d'enlacement peut être étendue à une courbe non-fermée mais dont ses deux extrémités sont situées à une distance infinie l'une de l'autre. Cette extension est naturelle dans la mesure où, si par exemple, une droite infinie passe par l'intérieur d'un cercle, il va être impossible de séparer ces deux objets sans qu'ils ne se croisent (voir figure B-4).

Pour avoir plus détails sur la notion de nœuds ou sur celle de nombre d'enlacement, nous suggérons de consulter les ouvrages de Kauffman sur le sujet [23, 24].

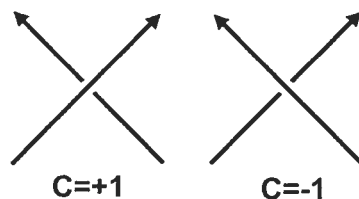


Figure B-2: L'indice $C(p)$ est défini pour tous les points de croisement entre deux nœuds (points p). En tenant compte du sens de parcours des nœuds, on le définit pour qu'il respecte la règle de la main droite.

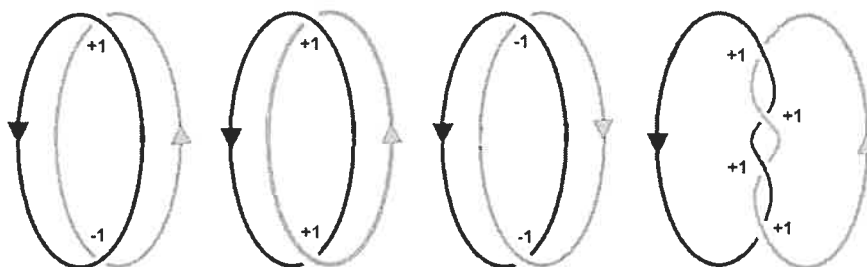


Figure B-3: Nombre d'enlacement de deux «nœuds» triviaux. De gauche à droite, le nombre d'enlacement vaut respectivement 0, 1, -1 et 2. Les deux liens au milieu (ceux pour lesquels $L_k = \pm 1$) portent le nom de lien de Hopf.

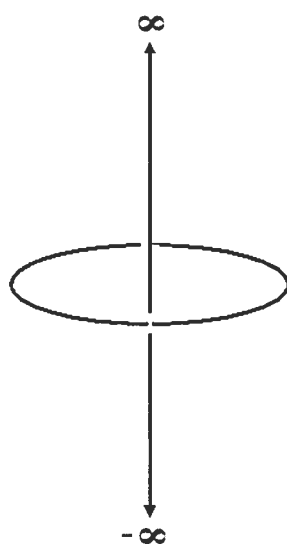


Figure B-4: Courbe fermée et droite infinie enlacées.

APPENDICE C

Calcul détaillé de certaines étapes

C.1 Solution du vortex: équation C.7

Notre but est de trouver une forme pour le champ \vec{A}^∞ qui fera en sorte que l'intégrale suivante:

$$\int_{r \geq R} |D_i^\infty \Psi_1^\infty|^2 d^2x = \int_{r \geq R} |(\partial_i - A_i^\infty) \Psi_1^\infty|^2 d^2x \quad (\text{C.1})$$

ne divergera pas lorsque

$$\Psi_1^\infty = v [\cos \theta + i \sin \theta]. \quad (\text{C.2})$$

On notera dans un premier temps, qu'en séparant le champ scalaire Ψ_1^∞ en terme de ses composantes réelle et imaginaire:

$$\Psi_1^\infty \equiv \frac{\psi_1^\infty + i\psi_2^\infty}{\sqrt{2}}, \quad (\text{C.3})$$

on peut réexprimer la dérivée covariante comme suit:

$$D_k^\infty \Psi_1^\infty = \frac{i^{a-1}}{\sqrt{2}} (\partial_k \psi_a^\infty + A_k^\infty \varepsilon_{ab} \psi_b^\infty). \quad (\text{C.4})$$

En utilisant la notation $x_1 \equiv x$ et $x_2 \equiv y$, on peut réécrire les composantes réelle et imaginaire du champ Ψ_1^∞ ($\psi_1^\infty = v \cos \theta$ et $\psi_2^\infty = v \sin \theta$) comme suit:

$$\psi_a^\infty = \sqrt{2}v \frac{x_a}{r}. \quad (\text{C.5})$$

En insérant cette expression dans l'équation C.4, on obtient:

$$D_i^\infty \Psi_1^\infty = i^{a-1}v \left[\frac{\delta_{ia}}{r} - \frac{x_i x_a}{r^3} + A_i^\infty \varepsilon_{ab} \left(\frac{x_b}{r} \right) \right]. \quad (\text{C.6})$$

Dans l'intégrale que l'on considère, c'est le module de cette quantité qui intervient:

$$|D_i^\infty \Psi_1^\infty|^2 = v^2 \left[\frac{1}{r^2} + (A_i^\infty)^2 + \frac{2A_a^\infty \varepsilon_{ab} x_b}{r^2} \right]. \quad (\text{C.7})$$

Si le champ de jauge était nul, on retomberait en intégrant sur le terme en $1/r$ qui causait le problème de divergence logarithmique. Or, il est possible de trouver une forme pour le champ \vec{A}^∞ qui fait en sorte que $|D_i^\infty \Psi_1^\infty|^2 = 0$. En posant

$$A_a^\infty = X \frac{x_a}{r^2} + Y \frac{\varepsilon_{ab} x_b}{r^2}, \quad (\text{C.8})$$

l'expression C.7 devient:

$$|D_i^\infty \Psi_1^\infty|^2 = v^2 [1 + X^2 + 2Y + Y^2]. \quad (\text{C.9})$$

La dérivée covariante sera nulle si $X = 0$ et $Y = -1$, c'est-à-dire, lorsque le champ \vec{A}^∞ a la forme suivante:

$$A_i^\infty = -\frac{\varepsilon_{ij} x_j}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} A_x^\infty = -\frac{\sin \theta}{r} \\ A_y^\infty = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}. \quad (\text{C.10})$$

C.2 Nombre de recouvrement:

passage de l'équation 3.19 à l'équation 3.20

Soit l'expression 3.19:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (\text{C.11})$$

Nous voulons montrer que cette équation peut se reformuler comme suit:

$$n = -\frac{i}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} (\bar{D}_i \chi)^\dagger (\bar{D}_j \chi) d^2 x. \quad (\text{C.12})$$

Notre démarche consistera à développer ces deux expressions et de montrer qu'elles peuvent se reformuler comme suit:

$$n = -\frac{i}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi d^2 x. \quad (\text{C.13})$$

Commençons par l'expression C.11. On se souviendra qu'en développant l'expression 3.17, on avait trouvé que $\vec{A}_i^\infty = -\partial_i \varphi(\theta)$. L'angle φ représente la phase (à une

constante près) des champs χ_1 et χ_2 . Plus explicitement, cela signifie que:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_r &= 0 \\ \tilde{A}_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}.\end{aligned}\tag{C.14}$$

C.11 peut donc se réécrire comme suit:

$$n = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{phy}} \tilde{A}_\theta r d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{phy}} \vec{\tilde{A}} \cdot d\vec{l}.\tag{C.15}$$

On peut reformuler cette intégrale en se servant du théorème de Stokes. Puisque S_1^{phy} est un cercle de rayon infini, la surface d'intégration deviendra tout le plan:

$$n = -\frac{1}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} \partial_i \tilde{A}_j d^2x.\tag{C.16}$$

Par définition, $\tilde{A}_j \equiv i\chi^\dagger \partial_j \chi$. Cela nous permet donc de faire le développement suivant:

$$\varepsilon^{ij} \partial_i \tilde{A}_j = i\varepsilon^{ij} [\partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi + \chi^\dagger \partial_{ij} \chi] = i\varepsilon^{ij} \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi.\tag{C.17}$$

Le terme $\partial_{ij} \chi$ étant symétrique sous l'échange des indices, sa combinaison avec le tenseur ε^{ij} donne zéro. On obtient finalement l'expression C.13:

$$n = -\frac{i}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi d^2x.\tag{C.18}$$

Démontrons maintenant que l'expression C.12 peut aussi se reformuler de cette manière. L'intégrand se développe comme suit:

$$\begin{aligned}(D_i \chi)^\dagger (D_j \chi) &= (\partial_i \chi^\dagger + i\tilde{A}_i \chi^\dagger) (\partial_j \chi - i\tilde{A}_j \chi) \\ &= \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi + \tilde{A}_i \tilde{A}_j + i[\tilde{A}_i (\chi^\dagger \partial_j \chi) - \tilde{A}_j (\chi^\dagger \partial_i \chi)]\end{aligned}\tag{C.19}$$

En se référant à la définition de \tilde{A}_i , on voit que le crochet vaut simplement $2i\tilde{A}_i \tilde{A}_j$. En multipliant par ε^{ij} , les termes symétriques disparaissent et on obtient:

$$\varepsilon^{ij} (D_i \chi)^\dagger (D_j \chi) = \varepsilon^{ij} \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi.\tag{C.20}$$

L'expression C.12 devient donc:

$$n = -\frac{i}{2\pi} \int \varepsilon^{ij} \partial_i \chi^\dagger \partial_j \chi d^2x.\tag{C.21}$$

Les expressions C.11 et C.12 peuvent donc toutes deux être réexprimées de la même manière et sont par conséquent équivalentes.

C.3 Nombre de recouvrement:

passage de l'équation 3.35 à l'équation 3.36

On cherche à réexprimer la charge topologique du modèle σ $O(3)$ non-linéaire en terme du champ \vec{n} . Cette charge est donnée par:¹

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{R_2^{phy}} dS^{int}(\vec{x}). \quad (C.22)$$

Puisque le vecteur unitaire $\vec{n}(\vec{x})$ est perpendiculaire à la surface de la sphère S_2^{int} , on peut poser $dS^{int} = n_a dS_a^{int}$. La sphère S_2^{int} est décrite en terme des coordonnées cartésiennes $n_1(\vec{x})$, $n_2(\vec{x})$ et $n_3(\vec{x})$, toutefois, il est plus naturel de décrire une sphère en termes angulaires. Une telle description ne nécessite que deux variables que l'on désignera par $\xi_1(\vec{x})$ et $\xi_2(\vec{x})$. Or, il existe, pour un élément infinitésimal d'aire, une expression reliant ces deux systèmes de coordonnées:

$$dS_a^{int} = \frac{1}{2} \varepsilon_{uv} \varepsilon_{abc} \frac{\partial n_b}{\partial \xi_u} \frac{\partial n_c}{\partial \xi_v} d^2 \xi. \quad (C.23)$$

Ainsi Q devient:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{uv} \varepsilon_{abc} n_a \frac{\partial n_b}{\partial \xi_u} \frac{\partial n_c}{\partial \xi_v} d^2 \xi. \quad (C.24)$$

Dans le résultat que l'on recherche, les dérivées sont effectuées par rapport aux coordonnées de l'espace physique R_2^{phy} . On doit donc chercher à relier $x_1 = x$ et $x_2 = y$ à ξ_1 et ξ_2 . Le jacobien de ce changement de variables est donné par:

$$\varepsilon_{uv} d^2 \xi = \varepsilon_{ij} \frac{\partial \xi_u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_v}{\partial x_j} d^2 x. \quad (C.25)$$

On peut par conséquent reformuler l'expression C.24 comme suit:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} n_a \frac{\partial n_b}{\partial \xi_u} \frac{\partial \xi_u}{\partial x_i} \frac{\partial n_c}{\partial \xi_v} \frac{\partial \xi_v}{\partial x_j} d^2 x. \quad (C.26)$$

En se servant de la règle des dérivées en chaîne, C.26 se réduit simplement à:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} n_a \frac{\partial n_b}{\partial x_i} \frac{\partial n_c}{\partial x_j} d^2 x. \quad (C.27)$$

Puisque $\varepsilon_{abc} n_a \partial_i n_b \partial_j n_c = \vec{n} \cdot (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})$, on obtient bel et bien l'expression recherchée:

$$Q = \frac{\varepsilon_{ij}}{8\pi} \int \vec{n} \cdot (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}) d^2 x. \quad (C.28)$$

¹Dans l'expression 3.35, on intégrait sur S_2^{phy} . De manière équivalente, on intègre ici sur R_2^{phy} . Ce qui est important, c'est de couvrir tout l'espace physique.

C.4 Redérivation de l'équation du champ 3.31 à partir de la condition d'énergie 3.42

Une condition nécessaire pour minimiser l'énergie d'un secteur topologique est que le champ réponde à l'équation 3.42:

$$\partial_i \vec{n} = \pm \varepsilon_{ij} \vec{n} \times \partial_j \vec{n}. \quad (\text{C.29})$$

En la dérivant, on obtient:

$$\nabla^2 \vec{n} = \pm \varepsilon_{ij} [\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n} + \vec{n} \times \partial_{i,j} \vec{n}]. \quad (\text{C.30})$$

Le second terme est nul en raison de la présence du tenseur ε_{ij} . En réexprimant $\partial_i \vec{n}$ en se servant de C.29, cela donne;

$$\nabla^2 \vec{n} = \pm \varepsilon_{ij} (\pm \varepsilon_{ik} \vec{n} \times \partial_k \vec{n}) \times \partial_j \vec{n}. \quad (\text{C.31})$$

Il est bien connu que $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} = \delta_{jk}$. De plus un produit triple peut se décomposer en deux produits scalaires: $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$. L'expression C.31 devient donc:

$$\nabla^2 \vec{n} = [\partial_j \vec{n} (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n}) - \vec{n} (\partial_j \vec{n} \cdot \partial_j \vec{n})]. \quad (\text{C.32})$$

En dérivant la contrainte $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, on obtient $\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} = 0$. Ainsi le premier terme du membre de droite de la précédente équation est nul. En redérivant la contrainte une seconde fois, on obtient $\partial_j \vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} + \vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n} = 0$, ce qui nous permet de retomber sur l'équation du champ 3.31:

$$\nabla^2 \vec{n} - (\vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n}) \vec{n} = 0. \quad (\text{C.33})$$

Il est donc évident que si le champ \vec{n} réponde à C.29, qu'il solutionnera automatiquement l'équation d'Euler-Lagrange du modèle σ $O(3)$ non-linéaire.

C.5 Développement de l'équation 5.11

Nous voulons démontrer l'égalité suivante:

$$\rho^2 |D_i \chi|^2 = \frac{\rho^2}{4} (\nabla \vec{n})^2 + \frac{\rho^2}{16} \vec{C}^2. \quad (\text{C.34})$$

Commençons par développer les deux termes de la partie droite de l'équation:

$$\begin{aligned}
(\nabla\bar{n})^2 &= [\nabla(\bar{\chi}\bar{\sigma}\chi)] \cdot [\nabla(\bar{\chi}\bar{\sigma}\chi)] \\
&= [\nabla(\bar{\chi}_i\sigma_{ij}^a\chi_j)][\nabla(\bar{\chi}_m\sigma_{mn}^a\chi_n)] \\
&= [\bar{\chi}'_i\chi_j + \bar{\chi}_i\chi'_j][\bar{\chi}'_m\chi_n + \bar{\chi}_m\chi'_n]\sigma_{ij}^a\sigma_{mn}^a
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Les variables χ marquées d'un prime sont dérivées: $\chi'_i \equiv \nabla\chi_i$. La barre au-dessus des variables χ signifie quant à elle une transposition complexe. On a préféré cette notation à l'obèle (\dagger) pour ne pas encombrer la zone des exposants de trop de symboles. En se servant de l'identité $\sigma_{ij}^a\sigma_{mn}^a = 2\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{mn}$ (voir annexe A.1), cela permet de réécrire C.35 comme suit:

$$\begin{aligned}
(\nabla\bar{n})^2 &= 2[\bar{\chi}'_n\chi_m + \bar{\chi}_n\chi'_m][\bar{\chi}'_m\chi_n + \bar{\chi}_m\chi'_n] - [\bar{\chi}'_n\chi_n + \bar{\chi}_n\chi'_n]^2 \\
&= 2[\bar{\chi}'_m\chi_m\bar{\chi}'_n\chi_n + \bar{\chi}_m\chi'_m\bar{\chi}_n\chi'_n + 2\bar{\chi}'_m\chi'_m\bar{\chi}_n\chi_n] - [\bar{\chi}'_n\chi_n + \bar{\chi}_n\chi'_n]^2 \\
&= 2[(\bar{\chi}'\chi)^2 + (\bar{\chi}\chi')^2 + 2\bar{\chi}'\chi'] - [(\bar{\chi}'\chi) + (\bar{\chi}\chi')]^2 \\
&= 4[\bar{\chi}'\chi'] + [\bar{\chi}\chi' - \bar{\chi}'\chi]^2
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Puisque $\vec{j} \equiv i[\chi^\dagger\nabla\chi - (\nabla\chi^\dagger)\chi]$, $\frac{(\nabla\bar{n})^2}{4}$ devient::

$$\frac{(\nabla\bar{n})^2}{4} = |\nabla\chi|^2 - \frac{\vec{j}^2}{4}. \tag{C.37}$$

Passons maintenant à $\frac{\vec{C}^2}{16}$:

$$\frac{\vec{C}^2}{16} = \left(\frac{\vec{j}}{2} - \vec{A}\right)^2 = \frac{\vec{j}^2}{4} + \vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{j}. \tag{C.38}$$

En additionnant C.37 et C.38, on obtient:

$$\frac{(\nabla\bar{n})^2}{4} + \frac{\vec{C}^2}{16} = |\nabla\chi|^2 + \vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{j}. \tag{C.39}$$

En développant $|D_i\chi|^2$, on peut facilement montrer que ce terme est équivalent à la précédente expression:

$$\begin{aligned}
|D_i\chi|^2 &= (\partial_i\chi^\dagger - iA_i\chi^\dagger)(\partial_i\chi + iA_i\chi) \\
&= \nabla\chi^\dagger\nabla\chi + \vec{A}^2 - iA_i[\chi^\dagger\nabla\chi - \nabla\chi^\dagger\chi] \\
&= |\nabla\chi|^2 + \vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{j}
\end{aligned} \tag{C.40}$$

Ceci complète donc la preuve de l'équation C.34.

C.6 Développement de l'équation 5.12

Nous voulons démontrer l'égalité suivante:

$$\frac{\vec{B}^2}{8\pi} = \frac{1}{256\pi} [(\partial_i C_j - \partial_j C_i) + 2\vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}]^2. \quad (\text{C.41})$$

Le point de départ de cette démonstration est la relation bien connue qui relie le champ magnétique \vec{B} au champ de jauge \vec{A} : $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. En se servant de l'équation 5.10 ($\vec{C} = 2\vec{j} - 4\vec{A}$), on peut exprimer le champ \vec{A} en terme des champs \vec{j} et \vec{C} :

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{j} - \frac{1}{4} \nabla \times \vec{C}. \quad (\text{C.42})$$

Le carré de \vec{B} se développe donc comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{B}^2 &= \frac{1}{16} [2\nabla \times \vec{j} - \nabla \times \vec{C}]^2 \\ &= \frac{1}{16} [4(\nabla \times \vec{j})^2 + (\nabla \times \vec{C})^2 - 4(\nabla \times \vec{j}) \cdot (\nabla \times \vec{C})]. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Notre but est de développer une expression qui ne dépende que des champs χ et \vec{C} . Dans un premier temps, on doit donc chercher à exprimer \vec{j} en terme de ceux-ci. Par définition, $\vec{j} \equiv i[\chi^\dagger \nabla \chi - (\nabla \chi^\dagger) \chi]$, donc:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{j})_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j j_k \\ &= i\varepsilon_{ijk} \partial_j [\chi^\dagger \partial_k \chi - (\partial_k \chi^\dagger) \chi] \\ &= 2i\varepsilon_{ijk} (\partial_j \chi^\dagger) (\partial_k \chi) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Cette expression est reliée au produit triple du vecteur $\vec{n} = \chi^* \vec{\sigma} \chi$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} (\chi_\alpha^* \sigma_\alpha^a \chi_\beta) \partial_j (\chi_\gamma^* \sigma_\gamma^b \chi_\delta) \partial_k (\chi_\varepsilon^* \sigma_\varepsilon^c \chi_\varphi) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\chi_\alpha^* \chi_\beta) \partial_j (\chi_\gamma^* \chi_\delta) \partial_k (\chi_\varepsilon^* \chi_\varphi) \varepsilon^{abc} \sigma_\alpha^a \sigma_\gamma^b \sigma_\varepsilon^c \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Dans l'annexe A.2, il a été démontré que $\varepsilon^{abc} \sigma_\alpha^a \sigma_\gamma^b \sigma_\varepsilon^c = 2i[\delta_{\alpha\varphi} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\varepsilon} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\varepsilon} \delta_{\gamma\varphi}]$ l'expression C.44 devient donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n} &= 2i\varepsilon_{ijk} [(\chi_\alpha^* \chi_\beta) \partial_j (\chi_\beta^* \chi_\varepsilon) \partial_k (\chi_\varepsilon^* \chi_\alpha) - (\chi_\alpha^* \chi_\beta) \partial_j (\chi_\gamma^* \chi_\alpha) \partial_k (\chi_\beta^* \chi_\gamma)] \\ &= 4i\varepsilon_{ijk} (\chi_\alpha^* \chi_\beta) \partial_j (\chi_\beta^* \chi_\gamma) \partial_k (\chi_\gamma^* \chi_\alpha) \\ &= 4i\varepsilon_{ijk} [\chi_\alpha^* \chi_\beta] [(\partial_j \chi_\beta^*) \chi_\gamma + \partial_j \chi_\beta^* (\partial_j \chi_\gamma)] [(\partial_k \chi_\gamma^*) \chi_\alpha + \chi_\gamma^* (\partial_k \chi_\alpha)] \\ &= 4i\varepsilon_{ijk} [(\partial_j \chi^\dagger \chi) (\partial_k \chi^\dagger \chi) + (\chi^\dagger \partial_j \chi) (\chi^\dagger \partial_k \chi) + (\partial_j \chi^\dagger \chi) (\chi^\dagger \partial_k \chi) \\ &\quad + (\partial_k \chi^\dagger) (\partial_j \chi)] \\ &= -4i\varepsilon_{ijk} (\partial_j \chi^\dagger) (\partial_k \chi) \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

À la quatrième ligne, les trois premiers termes du crochet sont nuls en présence du tenseur ε_{ijk} . En effet, en dérivant la contrainte $\chi^\dagger \chi = 1$, on trouve $(\partial_j \chi^\dagger) \chi = -\chi^\dagger (\partial_j \chi)$ et par conséquent les termes en question demeurent les mêmes sous une permutation des indices i et j . En comparant avec C.44, on voit que cela signifie:

$$(\nabla \times \vec{j})_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n}. \quad (\text{C.47})$$

On peut maintenant développer les trois termes de l'expression C.43. Le premier terme:

$$\begin{aligned} 4(\nabla \times \vec{j})^2 &= 4(\nabla \times \vec{j})_i (\nabla \times \vec{j})_i \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} [\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n}] [\vec{n} \cdot \partial_m \vec{n} \times \partial_n \vec{n}] \\ &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) [\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n}] [\vec{n} \cdot \partial_m \vec{n} \times \partial_n \vec{n}] \\ &= 2[\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n}]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Le deuxième terme:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{C})^2 &= (\varepsilon_{ijk} \partial_j C_k) (\varepsilon_{imn} \partial_m C_n) \\ &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) [(\partial_j C_k) (\partial_m C_n)] \\ &= (\partial_j C_k)^2 - (\partial_j C_k) (\partial_k C_j) \\ &= \frac{1}{2} [\partial_j C_k - \partial_k C_j]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Finalement le troisième terme:

$$\begin{aligned} -4(\nabla \times \vec{j}) \cdot (\nabla \times \vec{C}) &= -4[\varepsilon_{ijk} \partial_j C_k] [-\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \vec{n} \cdot \partial_m \vec{n} \times \partial_n \vec{n}] \\ &= 2(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) [\partial_j C_k] [\vec{n} \cdot \partial_m \vec{n} \times \partial_n \vec{n}] \\ &= 2[\partial_j C_k - \partial_k C_j] [\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n}] \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

En additionnant ces trois termes, on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{B}^2 &= \frac{1}{16} [2(\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n})^2 + \frac{1}{2} (\partial_j C_k - \partial_k C_j)^2 + 2(\partial_j C_k - \partial_k C_j) (\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n})] \\ &= \frac{1}{32} [(\partial_j C_k - \partial_k C_j) + 2(\vec{n} \cdot \partial_j \vec{n} \times \partial_k \vec{n})]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

En divisant C.51 par 8π , on obtient l'équation que l'on voulait démontrer.

C.7 Expression 5.15: réexpression du potentiel en terme des variables n_3 et ρ

Le potentiel du champ Ψ_1 et celui du champ Ψ_2 ont tous les deux la même forme:

$$V_a(|\Psi_a|^2) = -b_a|\Psi_a|^2 + \frac{c_a}{2}|\Psi_a|^4. \quad (\text{C.52})$$

Puisque $\Psi_a = \sqrt{2m_a\rho}\chi_a$, cette expression peut aussi s'écrire comme suit:

$$V_a(\rho, |\chi_a|^2) = -2b_a m_a \rho^2 |\chi_a|^2 + 2c_a m_a \rho^4 |\chi_a|^4. \quad (\text{C.53})$$

D'autre part, on sait que $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$ et que $|\chi_1|^2 - |\chi_2|^2 = n_3$, ainsi on en conclut que:

$$|\chi_{1,2}|^2 = \frac{1 \pm n_3}{2}. \quad (\text{C.54})$$

L'addition correspond au champ χ_1 et la soustraction au champ χ_2 . En se servant de cette expression, le potentiel devient:

$$V_a(\rho, n_3) = -b_a m_a \rho^2 (1 \pm n_3) + \frac{c_a m_a \rho^4}{2} (n_3^2 \pm 2n_3 + 1). \quad (\text{C.55})$$

En regroupant les puissances de n_3 ensemble, on obtient:

$$V_a(\rho, n_3) = \left[\frac{c_a m_a^2 \rho^4}{2} - b_a m_a \rho^2 \right] + [\pm c_a m_a^2 \rho^4 \mp b_a m_a \rho^2] n_3 + \left[\frac{c_a m_a^2 \rho^4}{2} \right] n_3^2. \quad (\text{C.56})$$

On se rappellera qu'on considère un cas particulier où $m_1 = m_2 = m$, $b_1 = b_2 = b$ et $c_1 = c_2 = c$. En additionnant V_1 et V_2 , on obtient finalement:

$$V(\rho, n_3) = V_1 + V_2 = [cm^2\rho^4 - 2bm\rho^2] + [cm^2\rho^4]n_3^2. \quad (\text{C.57})$$

C.8 Passage de l'équation 5.22 à l'équation 5.23

Considérons l'équation 5.22

$$e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} = \frac{\cos(f) + i \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + \alpha)}{2|\chi_1||\chi_2|}. \quad (\text{C.58})$$

Notre but est de reformuler le membre de droite de cette expression en un produit de deux fonctions complexes de module unitaire. Pour cela, il est utile d'effectuer un changement de variables. Posons $A \equiv \frac{f+(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}$ et $B \equiv \frac{f-(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}$. Ceci permet de reformuler les deux termes de la somme comme suit:

$$\begin{aligned} \cos(f) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + \alpha) &= \sin A \cos A + \sin B \cos B \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Cela nous permet déjà de trouver un produit de deux fonctions:

$$\cos(f) + i \sin(f) \cos(\tilde{\theta} + \alpha) = [\cos A + i \sin B][\cos B + i \sin A]. \quad (\text{C.60})$$

En retournant aux variables initiales, on peut facilement vérifier que:

$$\begin{aligned} |\cos A + i \sin B| &= \sqrt{2} |\chi_1| \\ |\cos B + i \sin A| &= \sqrt{2} |\chi_2| \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

D'autre part, on notera que:

$$\begin{aligned} \cos A + i \sin B &= \cos \left(\frac{f+(\tilde{\theta}+\alpha)}{2} \right) + i \sin \left(\frac{f-(\tilde{\theta}+\alpha)}{2} \right) = \cos \frac{f}{2} e^{-i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} + i \sin \frac{f}{2} e^{i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} \\ \cos B + i \sin A &= \cos \left(\frac{f-(\tilde{\theta}+\alpha)}{2} \right) + i \sin \left(\frac{f+(\tilde{\theta}+\alpha)}{2} \right) = \cos \frac{f}{2} e^{i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} + i \sin \frac{f}{2} e^{-i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

On obtient ainsi l'expression recherchée:

$$e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} = \left[\frac{\cos \frac{f}{2} e^{i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} + i \sin \frac{f}{2} e^{-i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}}}{\sqrt{2} |\chi_2|} \right] \left[\frac{\cos \frac{f}{2} e^{-i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}} + i \sin \frac{f}{2} e^{+i \frac{(\tilde{\theta}+\alpha)}{2}}}{\sqrt{2} |\chi_1|} \right]. \quad (\text{C.63})$$

C.9 Équation 5.31

Nous considérons une situation où le champ vectoriel \vec{A} est donné par:

$$\vec{A} = \frac{i}{2} [\chi^\dagger \nabla \chi - (\nabla \chi^\dagger) \chi]. \quad (\text{C.64})$$

On peut donc développer $|D_i \chi|^2$ en une expression qui ne dépend que des champs χ_1 et χ_2 :

$$|D_i \chi|^2 = |(\partial_i + iA_i) \chi|^2 = (\partial_i \chi_a)(\partial_i \chi_a^*) + \vec{A}^2 + A_i [i(\chi_a \partial_i \chi_a^* - \chi_a^* \partial_i \chi_a)]. \quad (\text{C.65})$$

Le terme entre crochets vaut $-2A_i$, ainsi:

$$|D_i\chi|^2 = |(\partial_i + iA_i)\chi|^2 = (\partial_i\chi_a)(\partial_i\chi_a^*) - \vec{A}^2. \quad (\text{C.66})$$

Développons $(\partial_i\chi_a)(\partial_i\chi_a^*)$ et \vec{A}^2 en terme de la norme et de la phase des champs χ_1 et χ_2 :

$$(\partial_i\chi_a)(\partial_i\chi_a^*) = (\partial_i|\chi_a|)^2 + (|\chi_a|\partial_i\varphi_a)^2, \quad (\text{C.67})$$

$$\vec{A}^2 = -\frac{1}{4} [\chi_a^*\partial_i\chi_a - \chi_a\partial_i\chi_a^*]^2 = |\chi_a|^4(\partial_i\varphi_a)^2. \quad (\text{C.68})$$

Donc, C.66 devient:

$$|D_i\chi|^2 = (\partial_i|\chi_a|)^2 + |\chi_a|^2(1 - |\chi_a|^2)(\partial_i\varphi_a)^2. \quad (\text{C.69})$$

Puisque $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$, on peut réarranger le coefficient devant la dérivée de la phase:

$$\begin{aligned} \text{Si } a = 1, \quad & |\chi_1|^2[(|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2) - |\chi_1|^2] = |\chi_1|^2|\chi_2|^2 \\ \text{Si } a = 2, \quad & |\chi_2|^2[(|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2) - |\chi_2|^2] = |\chi_1|^2|\chi_2|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

Ceci donne comme expression finale:

$$|D_i\chi|^2 = (\partial_i|\chi_a|)^2 + (|\chi_a|^2|\chi_2|^2)(\partial_i\varphi_a)^2. \quad (\text{C.71})$$

APPENDICE D

Digression sur le bébé-skyrmion anisotrope

Cette annexe a pour but de faire ressortir certaines différences entre les versions isotrope et anisotrope du bébé-skyrmion. Pour cela, on comparera sommairement les fonctions f et $\tilde{\theta}$ dans les deux cas. On se rappellera tout d'abord que champ \vec{n} est décrit par la paramétrisation suivante:

$$\begin{aligned}n_1 &= \sin(f) \cos(\tilde{\theta}) \\n_2 &= \sin(f) \sin(\tilde{\theta}) \\n_3 &= \cos(f)\end{aligned}\tag{D.1}$$

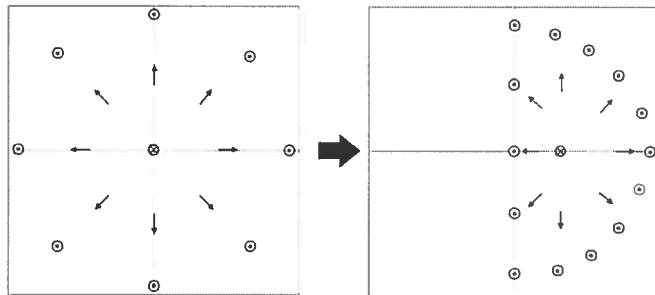


Figure D-1: Version isotrope (à gauche) et anisotrope (à droite) du bébé-skyrmion. Un cercle avec un point désigne un vecteur sortant du plan, un cercle avec une croix un vecteur entrant.

Commençons par considérer la fonction $\tilde{\theta}$. Celle-ci représente la direction de la projection du vecteur \vec{n} dans le plan $n_1 - n_2$. Dans le cas isotrope, cette fonction correspond à l'angle polaire: $\tilde{\theta} = \theta$. Les courbes isoangulaires $\tilde{\theta}$ forment ainsi un faisceau de droites émanant de l'origine. La compression du plan dans le demi-plan vient changer

tout cela comme (voir figure D-2). Dans le cas isotrope, les courbes isoangulaires $\tilde{\theta}$ ne forment plus des droites. À l'infini, on remarquera cependant qu'on retrouve la même dépendance que dans le cas isotrope: $\tilde{\theta}(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow \theta$.

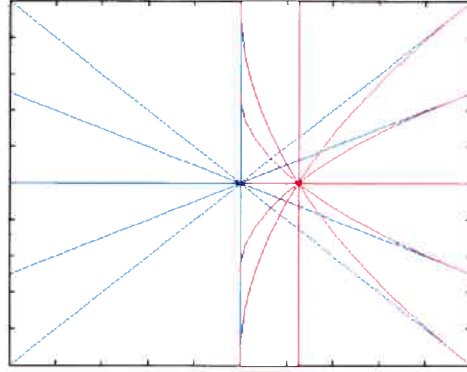


Figure D-2: Courbes isoangulaires des bébés skyrmions isotrope (en bleu) et anisotrope (en rouge). Sur chacune des courbes, la valeur de l'angle $\tilde{\theta}$ est constante.

Passons maintenant à la fonction f . Puisque $n_3 = \cos f$, la fonction f peut être utilisée pour savoir si on se trouve près ou loin du centre du bébé-skyrmion. En effet au centre du bébé-skyrmion, $n_0 = (0, 0, -1)$ et à l'infini, $n_\infty = (0, 0, 1)$. Dans le cas de la version isotrope, f ne dépend que du rayon r . Ainsi les courbes de niveau de n_3 forment des cercles concentriques et centrés à l'origine. Après avoir comprimé le plan dans un demi-plan, ces courbes ne sont clairement plus circulaires (voir figure D-3) et dépendent maintenant de θ et de r . Si on part du centre du bébé-skyrmion anisotrope et que l'on se dirige vers la «frontière» du demi-plan (l'axe z et le demi-cercle de rayon infini centré à l'origine), la fonction f décroît toujours de façon monotone de π vers 0. Toutefois la vitesse de cette décroissance dépend maintenant de la direction choisie. Par exemple, cette vitesse est très élevée lorsque $\tilde{\theta} = \pi$ et très faible lorsque $\tilde{\theta} = 0$.

Il est à noter que puisqu'au chapitre 4, on fait subir une rotation au demi-plan autour de l'axe z . L'usage de coordonnées toroïdales peut s'avérer particulièrement utile pour décrire la configuration ainsi obtenue (voir par exemple [42]).

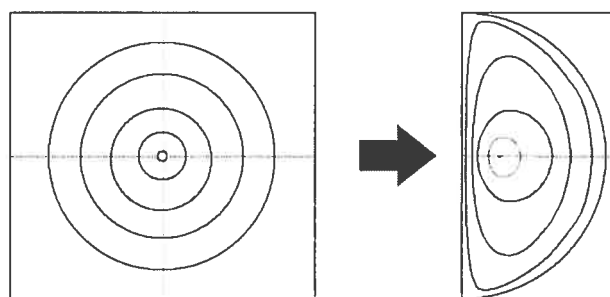


Figure D-3: Courbes de niveau de la composante n_3 des bébés skyrmions isotrope (à gauche) et anisotrope (à droite). Sur chacune des courbes la valeur de n_3 est constante. Puisque $n_3 = \cos(f)$, ces courbes de niveau sont aussi celles de la fonction f .