

Université de Montréal

Étude de solutions solitoniques nommées Q -balls dans le contexte de
théories lagrangiennes jaugées

par

Martin Deshaies-Jacques
Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

décembre, 2005



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Étude de solutions solitoniques nommées Q -balls dans le contexte de
théories lagrangiennes jaugées

présenté par:

Martin Deshaies-Jacques

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

M. Manu Paranjape, président-rapporteur
M. Richard MacKenzie, directeur de recherche
M. David London, membre du jury

Mémoire accepté le: 06/03/04

Je dédie ce mémoire à Denis Soulières

Résumé

Après quelques précisions sur la notion de soliton, nous étudions les caractéristiques d'une solution solitonique de nature non topologique nommée Q -ball. Celle-ci survient dans des théories faisant intervenir un champ scalaire complexe pour lesquelles le lagrangien possède la symétrie interne $U(1)$. Nous considérons une première théorie pour laquelle cette symétrie est globale, pour ensuite étudier le cas où elle est locale, nécessitant l'ajout d'un champ vectoriel de jauge. Finalement nous explorons les implications de l'ajout au lagrangien d'un terme dit de Chern-Simons. Dans chacun de ces trois modèles, nous effectuons une recherche numérique de solutions et portons une attention particulière à la stabilité de celles-ci.

Mots Clef: Physique théorique, solitons, solitons non topologiques, Q -balls, Chern-Simons.

Abstract

After a review of the basic definition and properties of solitons, we study the characteristics of a nontopological soliton known as the Q -ball. This soliton occurs in certain theories with conserved charge; this simplest example is a complex scalar field with $U(1)$ symmetry. We consider first a model for which the symmetry is global; then we study two cases of local (gauge) symmetries, with and without a term in the Lagrangian known as a Chern-Simons term (unique to two spatial dimensions). For all three models, we find Q -ball solutions numerically. We pay particular attention to the issue of Q -ball stability.

Key Words: Theoretical physics, solitons, non-topological solitons, Q -balls, Chern-Simons.

TABLE DES MATIERES

Résumé

Abstract

i

TABLE DES MATIERES

ii

LISTE DES FIGURES

vii

Remerciements

x

CHAPITRE 1: Introduction

1

CHAPITRE 2: Équations différentielles et Solitons

5

2.1 Quelques définitions 5

2.1.1 Le soliton rigide 6

2.1.2 Le soliton souple 8

2.2 Masse et configurations d'énergie finie 9

2.3	Solitons topologiques	10
2.4	Solitons non topologiques	11
2.5	Solitons statiques	11
2.6	Stabilité des solitons	12
2.6.1	Stabilité classique	13
2.6.2	Stabilité quantique	13
2.6.3	Liberté asymptotique	14
2.6.4	Modes d'excitation et processus de décomposition	15
CHAPITRE 3: Le Q-ball de Coleman		17
3.1	Contexte théorique	18
3.1.1	Ansatz Q -ball	19
3.2	Existence du Q -ball	21
3.2.1	Symétrie et espace des phases	21
3.2.2	Configuration d'énergie minimale	22
3.3	Étude des propriétés du Q -ball	27

3.3.1	Ansatz du gros Q -ball	28
3.3.2	Ansatz du petit Q -ball	30
3.4	Stabilité	31
3.5	Validation numérique	33
3.5.1	Méthodologie	33
3.5.2	Espace des paramètres	35
3.5.3	Résultats et discussion	36
CHAPITRE 4: Le Q-ball jaugé		43
4.1	Contexte théorique	43
4.2	Aspects de l'électromagnétisme	46
4.2.1	Sur la liberté de jauge	46
4.2.2	Divergence dimensionnelle	47
4.2.3	Effet Meissner	48
4.3	Caractéristiques des profils du Q -ball jaugé	48
4.3.1	Ansatz du Q -ball jaugé	49

4.3.2	Approximation du profil palier	52
4.4	Résultats numériques	55
4.4.1	Méthodologie	56
4.4.2	Espace des paramètres	56
4.4.3	Résultats et discussion	56
CHAPITRE 5: Le Q-ball de Maxwell-Chern-Simons		64
5.1	Contexte théorique	64
5.2	Électromagnétisme de Maxwell-Chern-Simons	66
5.2.1	Effet magnéto-électrique	67
5.3	Ansatz Q -ball	69
5.3.1	Conditions aux frontières	71
5.4	Résultats numériques	72
5.4.1	Méthodologie	72
5.4.2	Espace des paramètres	73
5.4.3	Résultats et discussion	73

TABLE DES MATIERES

vi

CHAPITRE 6: Conclusion

78

BIBLIOGRAPHIE

xiii

LISTE DES FIGURES

2-1	Profil d'un kink, une solution localisée (il s'agit d'un soliton topologique). À droite est illustrée sa densité d'énergie	7
3-1	Profils d'un petit et d'un gros Q -ball	20
3-2	Potentiel dans l'analogie cinématique	25
3-3	Espace des paramètres	36
3-4	Comparaison des profils numériques et des ansatz utilisés	36
3-5	Contribution de l'énergie gradiente à l'énergie totale. Sur l'espace des paramètres à gauche. En fonction de la charge à droite pour $g = 1$	37
3-6	À gauche, rayon de Q -balls 3D en fonction de la charge pour $g = 0, 253$. À droite rayon en fonction du paramètre g , $\omega = 0.92$	38
3-7	Stabilité de l'échantillon, à droite $g = 1$	38
3-8	Énergie totale sur l'espace des paramètres	39
3-9	Énergie totale et prédictions pour $\omega = 0.92$; à gauche $D = 3$ et à droite $D = 2$	40

3-10	Densité au coeur, $g = 1$	41
3-11	Densité au coeur; à gauche $g = 0.253$, à droite $g = 1$	41
3-12	Densité de charge et densités énergétiques pour trois Q -balls en trois dimensions spatiales. En haut, $g = 0.253$ et $Q = 89$, au milieu, $g = 0.2$ et $Q = 423$ et en bas $g = 1.1$ et $Q = 42270$	42
4-1	Ansatz palier pour le Q -ball jaugé	52
4-2	Densité de charge et d'énergie pour des constantes de couplage 0.1, 0.05 et 0.01 par ordre croissant de rayon. À gauche, $g = \frac{3}{16}$ (le potentiel est dégénéré); à droite $g = 0.5$	57
4-3	À gauche, paramètre x en fonction de la charge. À droite, rayon du Q -ball pour $g = 1$ et $e = 0.01$	58
4-4	Proportion d'énergie gradiente, $e = 0.1$	59
4-5	Stabilité en fonction de la charge, $g = 0.2$	60
4-6	À gauche : proportion de l'énergie électrostatique extérieure ($r > R$) au Q -ball, $g = 1$. À droite : énergie électrostatique totale.	61
4-7	Énergie total. À gauche, en fonction de Q pour $g = 1$ et $e = 0.01$ ($x < 0.19$). À droite en fonction de x pour $g = 0.2$ et $e = 1.41$	62
4-8	À gauche : évolution de la densité au coeur en fonction de la charge. À droite : forme du profil pour différentes valeurs de charge.	62

- 4-9 Densité de charge et distribution d'énergie; $Q = 14841$, $g = 0.2$ et $e = 0.1$. 63
- 5-1 À gauche: énergie et charge des solutions en fonction de κ pour $g=0.5$, $e=0.1$ et $\omega=0.9$. À droite $\frac{E}{Q}$ pour le même échantillon. 74
- 5-2 Deux profils de Q -balls de MCS pour un modèle décrit par les paramètres $e = 0.1$, $\kappa = 2$ et $g = 0.5$. À gauche, un petit Q -ball de 20.47 unités de charge dont la pulsation interne $\omega = 0.9$. À droite un Q -ball très étendu de 18522.3 unités de charges pour lequel $\omega = 0.888$ 75
- 5-3 À gauche: étendue des solutions Q -balls de MCS en fonction de la charge pour différentes valeurs du paramètre κ ; $e = 0.1$ et $g = 0.5$. À droite: même échantillon, mais exprimé en terme de la pulsation, ω 76
- 5-4 À gauche: densité au coeur des solutions Q -balls de MCS en fonction de la charge pour différentes valeurs du paramètre κ ; $e = 0.1$ et $g = 0.5$. À droite : pulsation en fonction de la charge pour le même échantillon. . . 77
- 5-5 Stabilité des solutions étendues en fonction de la charge pour différentes valeurs de κ ; $g = 0.5$ et $e = 0.1$ 77

Remerciements

Je me dois d'abord de remercier Richard MacKenzie, mon directeur, pour la proposition de ce projet, pour sa rigueur, ses idées, les outils et commentaires relatifs à mes travaux. Je le remercie tout particulièrement pour sa patience.

Je veux aussi souligner ma grande reconnaissance à Patrice Roy et John Idarraga pour leur soutien informatique sans quoi rien n'aurait convergé.

Merci à mes amis et collègues du bunker; particulièrement à Pierre-Luc Roussel et Samuel Giard avec qui j'ai découvert l'exaltation et les difficultés de la recherche. Mes plus belles élucubrations théoriques, c'est avec vous que je les ai construites au coin d'une table ou au salon. Merci aussi à Vincent Pouliot et Jonathan Martineau avec qui j'ai partagé mes questionnements et ouvert mes horizons scientifiques.

Merci à Denis Soulières pour son soutien vital et sa foi en mon potentiel.

Finalement merci à ma famille, mes amis et amies, à cette myriade de personnes que j'aime et dont les noms sont inscrits sur mon coeur.

CHAPITRE 1

Introduction

Il y a un peu plus de 150 ans, un ingénieur écossais du nom de John Scott Russell fait une remarquable découverte alors qu'il travaille à l'amélioration du Union Canal près d'Edinburgh [1].

"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation."

Au retour de ses travaux sur le chantier, J. S. Russel mène plusieurs expériences sur les ondes de translations convaincu de leur importance fondamentale. Vers la fin du siècle, son onde de translation est associée avec une solution de l'équation de Korteweg-

de-Vries, une équation non linéaire aux dérivées partielles. Mais ce ne sera que vers la moitié du 20^{ième} siècle que ses observations trouvent un écho important dans la communauté scientifique alors que l'avènement des ordinateurs permet de résoudre numériquement ces équations complexes. Ces solutions exhibant cette caractéristique d'être non dispersives sont nommées solitons. Depuis la notion s'est à la fois précisée et diversifiée selon le contexte de son invocation. En physique, les solitons sont utilisés pour modéliser des phénomènes au sein de disciplines très diversifiées; de l'hydrodynamique à l'optique non linéaire aux ondes de choc lors de supernovae en passant par les tornades en climatologie.

En physique moderne, une solution propagative conservant ses propriétés évoque la nature d'une particule. Quoique la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell soit à la source des développements résultant en la théorie de la relativité puis en l'avènement de la physique quantique, son modèle linéaire ne permet pas l'existence de solitons. Avec des méthodes perturbatives le modèle sera considérablement enrichi, mais ses solutions classiques resteront, en définitive, dispersives. C'est pourquoi l'étude de systèmes classiques non linéaires est de première importance. En effet, l'étude des solitons classiques permet de modéliser une batterie importante de phénomènes à l'échelle macroscopique, mais c'est avec pour objectif d'améliorer la description du monde microscopique que doit d'abord être compris l'étude des solitons en physique moderne. Rappelons-nous que toute théorie quantique doit d'abord faire l'objet d'une formulation hamiltonienne dans la description classique des champs avant d'être quantifiée. C'est pourquoi l'étude des solitons classiques est un premier pas vers la description d'un ensemble de solutions nouvelles, qui ne s'obtiennent pas par perturbation, aux théories quantiques des champs.

Ce mémoire analyse les propriétés d'un soliton nommé Q -ball découvert par S. Coleman en 1985 [2]. Si depuis les années 1950 un intérêt important a été porté aux solitons de nature topologique [3], [4], [5], [6], [7], la recherche de solutions solitoniques de nature non topologique est encore en émergence. Les travaux de Friedberg, Lee, Sirling et Wick [8], [9], [10], [11], [12] mettent en évidence la possibilité d'obtenir des solutions solitoniques grâce à l'existence de charges conservées associées aux symétries

du lagrangien. Ils montrent aussi que pour une charge suffisamment grande, leur soliton aura une énergie inférieure à μQ , l'énergie d'autant de charges libres. La nouveauté amenée par Coleman, est la possibilité d'obtenir une solution solitonique dans un modèle ne faisant intervenir qu'un seul champ, un champ scalaire complexe.

Le Q -ball survient dans des modèles possédant la symétrie $U(1)$. Le soliton est une distribution sphérique de champ dont l'état interne, cohérent, est en rotation à vitesse constante. C'est cette rotation de la phase qui confère au soliton sa charge conservée. Tout comme les solitons de Friedberg et ses collaborateurs, le Q -ball est un état lié énergétiquement favorable devant autant de charges libres. Nous nous intéresserons aux conditions sur le potentiel d'interaction permettant l'existence de Q -balls et analyserons ses caractéristiques.

Alors que la solution de Coleman survient dans une théorie pour laquelle la symétrie $U(1)$ est globale, nous considérerons deux théories où la symétrie est locale. Ces théories sont de première importance en physique moderne pour modéliser les interactions à distance. En effet la théorie de la relativité exige que toute interaction non locale doive faire intervenir un champ médiateur transportant à vitesse finie l'influence des charges entre elles [13], [14]. Pour une symétrie $U(1)$ locale, c'est un quadrivecteur de jauge qui modélise ce champ d'influence. Comme l'électromagnétisme classique est une telle théorie, nous verrons que les propriétés du champ de jauge sont similaires aux potentiels scalaire et vecteur desquels découle le champ électromagnétique.

Le premier chapitre servira d'abord à préciser la définition de soliton. Nous y différencierons notamment les solitons topologiques et non topologiques. Nous préciserons aussi les notions de masse et de stabilité. Les trois chapitres suivants forment le corps de ce mémoire. Dans chacun d'eux, nous considérerons une densité lagrangienne pour un champ scalaire complexe Φ et montrerons l'existence d'une solution de type Q -ball décrit par l'ansatz quasi statique

$$\Phi(x) = \phi(r)e^{i\omega t}$$

Au chapitre 2, la théorie considérée est celle analysée par Coleman,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - V(|\Phi|)$$

Nous démontrerons l'existence de solutions stables arbitrairement chargées et établirons leurs caractéristiques par une étude analytique dans deux régimes limites valables pour les Q -balls très volumineux ou très petits. Nous obtiendrons ensuite un échantillon de solutions numériques et comparerons leurs caractéristiques aux prédictions.

Au chapitre 3, nous considérerons les implications d'une théorie pour laquelle la symétrie $U(1)$ est locale. Nous devons modifier le lagrangien par l'introduction de la dérivée covariante et du champ de jauge

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(|\Phi|)$$

Nous verrons alors que la dynamique du système sera considérablement affectée par l'existence d'un champ électrostatique répulsif responsable d'une pression pouvant déstabiliser le Q -ball. Nous montrerons néanmoins l'existence de solutions stables en trois dimensions spatiales et étudierons analytiquement le régime de faible couplage. Nous comparerons ensuite ces prédictions à notre échantillon de solutions numériques.

Finalement au chapitre 4, nous modifierons le lagrangien précédent en y ajoutant un terme de Chern-Simons valable en $2 + 1D$

$$\Delta \mathcal{L}_{CS} = -\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

Celui-ci aura pour effet de rendre le champ électromagnétique massif permettant de contourner le problème de la divergence énergétique de la théorie électromagnétique en 2 dimensions spatiales réglant ainsi le problème de l'inexistence de solitons bidimensionnels en l'absence du terme de Chern-Simons. Nous étudierons donc un modèle en deux dimensions spatiales et verrons que dans ce contexte il existe des Q -balls jaugés. En outre ce terme réduira, voire annulera, la pression électrostatique déstabilisatrice restreignant le volume des Q -balls jaugés. Le système des équations du mouvement devenant très complexe nous ne ferons qu'une étude des solutions numériques obtenues.

CHAPITRE 2

Équations différentielles et Solitons

Un soliton est une solution localisée d'un système d'équations différentielles non linéaires, possédant des caractéristiques pouvant rappeler celles d'une particule. Ce chapitre servira à préciser cette notion, d'abord en cherchant à la définir formellement puis en analysant les circonstances permettant son existence et sa stabilité. Comme nous travaillerons dans le cadre de théories invariantes sous transformation de Lorentz, nous nous intéresserons à l'existence de solutions statiques, car telles solutions pourront par la suite être *boostées* dans un référentiel en motion.

2.1 Quelques définitions

Il n'y a pas de consensus au sujet d'une définition du terme soliton; ingénieurs, mathématiciens et physiciens l'utilisent pour parler d'objets similaires, mais dont les définitions formelles varient et ne sont pas toutes équivalentes. Nous discuterons sommairement quelques unes de celles-ci et en choisirons une adaptée à nos objectifs.

Tout d'abord, il importe de préciser ce que l'on entend par solution localisée. Précisons que nous sommes dans le contexte de la physique classique, c'est à dire de modèles dont l'évolution est décrite par des systèmes d'équations différentielles. Les solutions de ces systèmes modélisent des objets dans la réalité et doivent donc posséder certaines caractéristiques de nature physique, notamment, à chacune doit être associée une énergie. C'est à la densité d'énergie que nous nous référons pour définir l'attribut

localisé.

DÉFINITION Solution localisée [15]

Une solution Φ est qualifiée de localisée si et seulement si elle est une solution d'un système d'équations différentielles non linéaires dont la densité d'énergie $\mathcal{H}[\Phi]$ est finie en tout point de l'espace, non identiquement nulle à tout instant et décroît suffisamment rapidement à zéro pour être intégrable.

Une solution non localisée est de peu d'intérêt pour la présente étude car son énergie divergente la disqualifie d'emblée comme solution physiquement acceptable, a fortiori comme une solution énergétiquement minimale.

2.1.1 Le soliton rigide

Le soliton rigide est le candidat conceptuellement le plus simple de solution localisée. Cependant, nous verrons qu'il est très difficile d'établir mathématiquement son existence pour un système d'équation donné. En premier lieu, définissons l'onde solitaire puis ensuite, l'exigence supplémentaire en faisant un soliton rigide.

DÉFINITION Onde solitaire [15]¹

Une solution Φ est une onde solitaire si et seulement si elle est localisée et dont la dépendance spatiotemporelle de sa densité d'énergie est de la forme

$$\mathcal{H}[\Phi](\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}[\Phi](\mathbf{x} - \mathbf{u}t) \quad (2.1)$$

DÉFINITION Soliton rigide [15]

Soit Φ_0 une onde solitaire et N , un entier positif arbitraire. Considérons N copies de

¹A. Scott [16] propose que ce soit le profil de Φ qui possède cette forme de dépendance temporelle, cependant, telle exigence exclue quantité de solutions d'intérêt physique comme le kink (figure 2-1). En revanche une telle définition permet d'étudier des solutions auxquelles n'est pas associée une énergie (ce qui est de peu d'intérêt pour la présente étude).

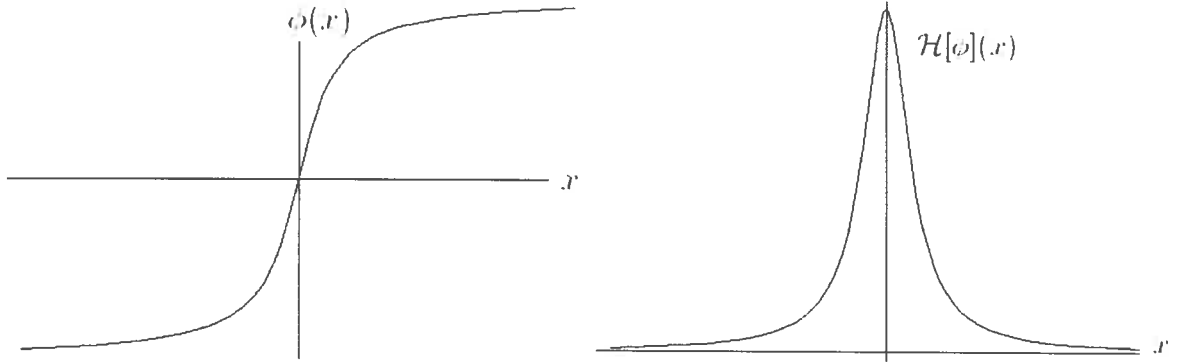


Figure 2-1: Profil d'un kink, une solution localisée (il s'agit d'un soliton topologique). À droite est illustrée sa densité d'énergie

cette onde solitaire à $t = -\infty$ avec des vitesses \mathbf{u}_i et des positions \mathbf{a}_i arbitraires.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t) \quad (2.2)$$

La densité d'énergie est alors

$$\mathcal{H}[\Phi] = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}[\Phi_0](\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t) \quad \text{à } t \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

Φ_0 est un soliton rigide si suite à l'évolution de ce système de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, la densité d'énergie est

$$\mathcal{H}[\Phi] = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}[\Phi_0](\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t + \Delta \mathbf{x}_i) \quad \text{à } t \rightarrow +\infty \quad (2.4)$$

où $\Delta \mathbf{x}_i$ sont des vecteurs constants. En d'autres termes, ce sont des solitons rigides si le profil de densité d'énergie de chacune des Φ_i retrouve asymptotiquement sa forme et sa vitesse initiale, l'interaction ayant possiblement eu lieu entre les ondes solitaires ne doit résulter en définitive qu'en des translations.

Cette définition n'est pas sans rappeler les propriétés de particules qui conservent leur identité suite aux collisions. Cependant, quoique formellement simple et évocante, cette définition est problématique lorsque vient temps de déterminer si telle solution est bel et bien un soliton rigide. Car alors, il devra être démontré qu'elle respecte le critère de superposition proposé pour N arbitrairement grand, ce qui est loin d'être trivial pour un système non linéaire.

2.1.2 Le soliton souple

Un aspect essentiel relié à la nature du soliton hérité de l'onde solitaire est sa stabilité face à une dissipation vers l'état de vide. C'est cette caractéristique qui nous intéresse le plus. Nous nous doterons d'une définition de travail plus souple, mais conservant cette caractéristique et faisant intervenir un langage propre aux objets que nous considérerons. De plus c'est ce sens souple de soliton qui sera le plus souvent rencontré dans la littérature de physique des particules.

DÉFINITION Solution dissipative [17]

Une solution Φ d'un système d'équations différentielles est dite dissipative si et seulement si elle possède une densité d'énergie qui évolue telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x}} \mathcal{H}[\Phi](\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.5)$$

DÉFINITION Soliton souple [9]

Une solution Φ est dite soliton souple si

1. elle est localisée
2. elle possède une masse au repos définie et non-nulle

Une telle définition assure que la solution est non dissipative. Aussi elle est moins rigide que la définition d'onde solitaire, car la forme du profil énergétique peut varier. Cette possibilité pour le soliton souple le rend propice à modéliser différents états excités d'un même objet. Rien n'est demandé au sujet de la rétention des caractéristiques suite à l'interaction entre solitons souples; les collisions plastiques ne sont pas exclues. En outre, pour chaque soliton classique au sens souple, il existe un soliton quantique correspondant [10], [17]. Dans ce qui suit, nous parlerons toujours de solitons au sens souple à moins d'avis spécifique.

2.2 Masse et configurations d'énergie finie

Mais qu'entendons-nous par masse au repos? La notion de masse d'un corps étendu fut précisée par la théorie de la relativité comme étant l'énergie d'un corps dans son état fondamental lorsqu'observé dans son référentiel propre. L'état fondamental est l'état de moindre énergie d'une classe de solutions définissant les états accessibles à un corps.

DÉFINITION Classe de solutions et état fondamental

Soit Φ_0 , une solution minimisant localement l'énergie. L'ensemble de toutes les solutions obtenues par perturbation de Φ_0 formera la classe des solutions de Φ_0 . Nous nommons Φ_0 l'état fondamental de la classe.

DÉFINITION Masse étendue²

Soit une solution localisée de champ Φ . Sa masse étendue est définie comme égale à l'énergie de son état fondamental Φ_0 dans son référentiel propre.

$$M[\Phi] \stackrel{def}{=} E[\Phi_0] \quad (2.6)$$

Ainsi, un critère partagé par les définitions que nous avons vues et nécessaire pour parler de soliton, est sa stabilité sous processus de dissipation et l'existence d'un état fondamental différent du vide. Nous discuterons plus loin de deux origines de cette stabilité; l'une de nature topologique et l'autre découlant de propriétés de symétrie.

Une condition nécessaire pour qu'une solution Φ soit localisée est qu'à la limite de l'espace, le champ soit dans une configuration de vide absolu, $\langle \Phi \rangle$. Cela est nécessaire pour que le profil d'énergie soit intégrable.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \langle \Phi \rangle \quad (2.7)$$

²Nous parlons de masse étendue pour la différencier de la masse d'un quantum, définie par la courbure du potentiel à un minimum.

2.3 Solitons topologiques

La topologie est l'étude des déformations continues et des propriétés des ensembles par rapport à ces déformations. Comme nous venons de le voir, l'existence de solitons est intimement liée à l'ensemble des vides absolus, \mathcal{V} , et donc incidemment à sa topologie. Lorsque \mathcal{V} ne possède qu'un seul élément, sa topologie est triviale et l'existence de solitons ne pourra être assurée par des considérations topologiques. Cependant si \mathcal{V} possède plusieurs éléments, voire un continuum alors à chaque application non triviale de l'infini d'espace, isomorphe à S_D pour un espace euclidien en D dimensions, vers l'ensemble des vides ($S_D \rightarrow \mathcal{V}$), est associée une solution localisée statique et donc potentiellement un soliton. Il sera en effet impossible de déformer continuellement la configuration pour retrouver un état homogène de vide. Cette situation survient notamment lors des transitions de phases. Si les paramètres du potentiel dépendent d'une quantité thermodynamique alors pour une certaine valeur critique le potentiel devient dégénéré et la topologie de \mathcal{V} non triviale.

L'exemple le plus simple est probablement le kink d'un modèle ϕ^4 en $1+1$ dimensions survenant dans une théorie pour laquelle la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \underbrace{\frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2}_{V(\phi)} \quad (2.8)$$

Pour cette théorie, l'infini de l'espace est isomorphe à S_1 et l'ensemble des vides $\mathcal{V} = \{-v, v\}$. Il y a donc quatre applications $S_D \rightarrow \mathcal{V}$ dont deux non triviales : $\{(-v, v), (v, -v)\}$. La première est nommée kink (figure 2-1) et la seconde antikink.

Le fait qu'aucune déformation continue ne pourra amener une configuration $S_D \rightarrow \mathcal{V}$ non triviale vers un état de vide homogène se traduit par la conservation d'une charge topologique dont les propriétés originent du groupe d'homotopie de \mathcal{V} . Comme le soliton que nous étudierons en détail n'est pas de nature topologique, le lecteur intéressé peut se référer à des ouvrages spécialisés pour une étude exhaustive sur les solitons topologiques.

2.4 Solitons non topologiques

La topologie de \mathcal{V} n'est pas seule à permettre l'existence de solitons. En effet, le théorème de Noether [19], [18] démontre qu'à chaque symétrie G du lagrangien \mathcal{L} est associée un courant conservée j

$$G : (x^\mu, \Phi^\alpha(x)) \mapsto (X^\mu(x; \epsilon), \Xi^\alpha(x, \Phi; \epsilon))$$

$$j^\mu = \left[\mathcal{L} \frac{\partial X^\mu}{\partial \epsilon} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha} \left(\frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \epsilon} - \partial_\lambda \phi^\alpha \frac{\partial X^\lambda}{\partial \epsilon} \right) \right]_{\epsilon=0} \quad (2.9)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, la conservation de ces charges pourra assurer l'existence de solutions de type solitonique. C'est de cette nature qu'est la solution que nous étudierons dans les prochains chapitres et nous en préciserons les caractéristiques au cours du développement.

2.5 Solitons statiques

L'intérêt de chercher des solutions statiques est multiple. D'abord la forme d'une telle solution est simplifiée par l'absence de dépendance temporelle. Ensuite, comme nous travaillons avec des théories invariantes de Lorentz, toute solution statique peut être *boostée* dans un référentiel en mouvement par une transformation de Lorentz, de sorte que nous pouvons restreindre notre analyse au référentiel propre sachant que les résultats sont transposables à tout autre référentiel.

DÉFINITION Solution statique

Une solution $\Phi(x)$ est statique si et seulement si Φ est strictement indépendante de t .

Il s'avère que pour une importante classe de théories, de tels solitons statiques n'existent pas, c'est ce qu'affirme le théorème de Derrick.

THÉORÈME de Derrick

Soit une théorie lagrangienne en $d + 1$ dimensions spatio-temporelles munie de champs scalaires Φ_α pour laquelle la densité lagrangienne est $\mathcal{L} = a\partial_\mu\Phi^\alpha\partial^\mu\Phi_\alpha - V(\Phi)$ où a est une constante et V un potentiel simple³, alors pour $d \geq 2$ les seules solutions non singulières d'énergie finie sont des vides.

Il existe des alternatives: théories jaugées, contraintes supplémentaires dans le lagrangien, champs tensoriels, etc. Cependant celle qui retiendra notre attention sera de contourner le problème en parlant de solutions quasi statiques. L'existence d'une charge de Noether associée à une symétrie interne⁴ implique par l'équation (2.9) que la dépendance du lagrangien sur la dérivée temporelle du champ soit non nulle. Ainsi aucun soliton non topologique ne peut être absolument statique.

DÉFINITION Solution quasi statique

Une solution $\Phi(x)$ est dite quasi statique si sa dépendance temporelle agit dans un sous-espace invariant d'une symétrie du lagrangien.

Ainsi, par exemple si le lagrangien possède la symétrie $U(1)$ et que l'unique dépendance temporelle d'une solution se trouve dans sa phase, alors celle-ci sera qualifiée de solution quasi statique. Nous pourrions dès lors l'étudier dans son référentiel au repos comme s'il s'agissait d'une solution absolument statique car aucune des propriétés observables découlant du lagrangien ne dépendra du temps.

2.6 Stabilité des solitons

Rappelons que pour être un soliton, la solution doit être non dissipative et doit posséder une masse définie. En effet ces solutions seraient de moindre intérêt si instables, car alors leur temps de vie pourrait s'avérer très bref et leur présence évanescence de peu

³Le potentiel est dit simple s'il ne dépend pas des dérivés des champs.

⁴Une symétrie est interne, si elle n'agit que sur les champs et non sur les variables spatio-temporelles.

d'effet sur la dynamique à long terme d'un système.

Nous discuterons d'abord de la stabilité classique, puis ensuite des processus de nature quantique pouvant provoquer des instabilités.

2.6.1 Stabilité classique

La stabilité au sens classique repose sur un concept local hérité de l'étude des équations différentielles. Une solution est perturbativement stable si elle est un minimum local de l'énergie et que lorsqu'infinimentésimalement perturbée elle aura tendance à retourner vers l'état initial. En termes physiques elle est l'état fondamental de sa classe.

Cependant même si la solution est stable sous perturbation, une influence non perturbative peut très bien lui donner suffisamment d'énergie pour franchir la barrière de son puits de potentiel et chuter vers un minimum d'énergie voisin. La stabilité classique absolue devra donc tenir compte de processus non perturbatifs. Nous dirons qu'une solution est classiquement absolument stable si elle est un minimum absolu de l'énergie sous la contrainte de la charge conservée.

2.6.2 Stabilité quantique

La stabilité quantique est quant à elle toujours globale. En effet, même lorsqu'une solution occupe un minimum local d'énergie, il existe une probabilité non nulle qu'elle traverse spontanément la barrière de potentiel la séparant d'un minimum d'énergie. En l'absence de charges conservées tout système quantique aboutirait éventuellement, mais inévitablement, dans un état homogène de vide absolu. Cela n'empêche pas des solutions occupant le minimum d'un puits de potentiel profond de posséder un temps de vie suffisamment long pour être considérées.

2.6.3 Liberté asymptotique

L'état d'énergie minimale sous contrainte que la charge soit conservée est en général assimilé à celui où chaque charge est isolée, asymptotiquement éloignée de toutes les autres et au repos. Cette situation est décrite par la solution en termes d'ondes planes. Pour illustrer, supposons que nous avons une théorie dynamique d'un champ complexe Φ munie de la symétrie interne $U(1)$ globale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - \frac{1}{2} \mu^2 |\Phi|^2 - V_I(|\Phi|)$$

dont les équations du mouvement sont

$$\partial^2 \Phi - \mu^2 \Phi - \frac{\Phi}{|\Phi|} V_I'(|\Phi|) = 0 \quad \wedge \quad c.c. \quad (2.10)$$

Supposant qu'il n'y ait pas d'interactions fortes à longue portée, l'hypothèse voulant que les particules soient asymptotiquement éloignées implique que leurs interactions sont négligeables et donc que le terme V_I peut être ignoré. Dans ces circonstances, l'équation du mouvement devient celle de Klein-Gordon dont les solutions sont des ondes planes massives,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \phi_0 e^{ik_\nu x^\nu} & k &= (\omega, \mathbf{k}) \\ k^2 &= \mu^2 \end{aligned}$$

Alors l'énergie de telles ondes planes est

$$E = \omega Q$$

Si l'on suppose que les particules sont stationnaires alors $\mathbf{k} = 0$ et $\omega = \mu$; l'énergie de cette configuration devient

$$E_0 = \mu Q \quad (2.11)$$

C'est l'énergie d'un système de Q charges sans interaction. Ainsi si l'énergie d'une configuration est inférieure à E_0 elle sera stable sous évaporation en quanta libres.

Dans cet ouvrage, nous comparerons l'énergie des solitons rencontrés à l'énergie d'autant de charges asymptotiquement libres, μQ . Si l'énergie du soliton est inférieure, alors nous concluerons que celui-ci est énergétiquement favorisé et devra être considéré

dans toute étude de la dynamique du vide et de ses perturbations. Il importe de noter qu'une telle étude de stabilité ne permet pas de conclure à la stabilité absolue du soliton, il est en effet envisageable qu'une autre solution du système d'équation soit d'énergie inférieure.

2.6.4 Modes d'excitation et processus de décomposition

Les processus d'excitation classique archétypaux sont les collisions. En outre, nous savons que lors de la quantification de la théorie, les perturbations du vide donneront existence aux mésons⁵ libres. Il pourra donc y avoir interaction entre mésons et solitons. De même pour une théorie munie d'une symétrie locale, le champ de jauge sera lui aussi porteur d'énergie et pourra perturber le soliton. Donc les processus d'excitation envisageables sont

- Collisions entre solitons
- Absorbtion d'un quantum
- Interaction avec un champ de jauge externe

La solution ainsi excitée pourra être déformée spatialement et altérée dans ses propriétés internes.⁶ Dépendant de l'intensité de l'excitation s'en suivra possiblement la fission du soliton, l'émission de mésons, voire sa décomposition complète en mésons. Dans la mesure où l'excitation reste perturbative, le soliton sera alors dans un état excité de sa classe de solutions: des ondes accoustiques et/ou de l'énergie cinétique supplémentera son énergie de masse.

⁵Empruntant ce terme à la physique quantique, nous entendons par méson un quantum de champ de charge unitaire. De même, pour les théories jaugées qui seront considérées nous utiliserons le terme de photon pour parler du quantum de champ de jauge.

⁶Nous appelons l'espace interne du champ, l'espace des phases de la variable de champ. À titre d'exemple, une propriété du soliton que nous étudierons, est sa cohérence interne, c'est à dire que sa

Un autre phénomène de nature quantique est à considérer: la formation de bulles de vide absolu à l'intérieur du soliton. Cependant ce processus conserve la charge et aura donc pour effet net de déformer le soliton. La dissipation complète est donc prévenue par conservation de la charge.

La question de stabilité fera l'objet d'une étude spécifique pour chaque théorie que nous considérerons dans les prochains chapitres.

phase est égale en tout point du soliton. L'absorption d'un photon induirait un gradient de phase et déstabiliserait ainsi ses propriétés internes.

CHAPITRE 3

Le Q -ball de Coleman

Le Q -ball est une solution solitonique de nature non topologique proposée par Coleman en 1985 [2]. Le principal intérêt de cette solution est que, pour une même charge, elle représente une configuration d'énergie moindre que la matière ordinaire. Son existence et sa stabilité sont conséquences de la conservation d'une charge de Noether et de l'existence de forces internes de cohésion. Dans son état fondamental, c'est un amas localisé et cohérent¹ de champ, énergétiquement favorable devant autant de mésons libres. Il s'agit d'un état lié qui ne s'obtient pas par perturbation du vide.

Nous présentons d'abord le contexte théorique dans lequel survient ce soliton et décrivons l'ansatz du Q -ball. Ensuite nous obtiendrons le profil de la solution minimisant l'énergie tout en conservant la charge et montrerons qu'il s'agit bien de celle anticipée. Ce faisant, nous obtiendrons ses conditions d'existence. Nous spécifions les critères de stabilité pour enfin étudier deux cas limites où nous pourrions montrer analytiquement l'existence de Q -balls stables. Nous concluons ce chapitre par l'analyse d'un échantillon de solutions Q -balls obtenues numériquement, nous pourrions ainsi valider et illustrer les prédictions.

Ce premier soliton étudié servira d'archétype pour les deux chapitres suivants où seront considérées des théories jaugées. C'est pourquoi un souci sera porté à préciser en détails ses caractéristiques, dont plusieurs seront héritées par ses homologues jaugés.

¹Le Q -ball survient dans le contexte d'un modèle d'un champ complexe, nous entendons par cohérent le fait que la phase soit constante.

3.1 Contexte théorique

Nous considérons une théorie dynamique en $D + 1$ dimensions munie d'un champ scalaire complexe. Nous exigeons que le lagrangien soit invariant de Lorentz pour respecter le cadre de la relativité et qu'il possède la symétrie globale interne $U(1)$. Le lagrangien simple et conservatif² respectant ces exigences aura deux termes, un terme dynamique et un terme potentiel qui dépend du champ Φ uniquement par sa norme.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - V(|\Phi|) \quad (3.1)$$

$$V(|\Phi|) = \sum_{k \geq 2} c_k |\Phi|^k = \frac{1}{2} \mu^2 |\Phi|^2 + V_I(|\Phi|) \quad (3.2)$$

où nous notons μ la masse, définie positive, du quantum de champ ($\mu^2 \stackrel{def}{=} V''(0) > 0$) et V_I le potentiel d'interaction comprenant les puissances supérieures de $|\Phi|$, c'est par ces termes que le lagrangien considéré diffère de celui de Klein-Gordon pour lequel les solutions sont des ondes planes et c'est aussi ces interactions non linéaires qui permettent l'existence de solutions non dissipatives. Nous imposons que le potentiel soit adéquatement calibré.³

$$\langle \Phi \rangle = 0 \wedge V(\langle \Phi \rangle) \stackrel{def}{=} 0 \quad (3.3)$$

Les perturbations par rapport à ce vide absolu sont nommées mésons. Ce sont les solutions obtenues en négligeant les interactions; des ondes planes de faible amplitude. Il importe de préciser que ce potentiel n'a pas à être celui décrivant les interactions fondamentales, en effet nous verrons que le plus simple potentiel permettant des solutions Q -balls stables n'est pas renormalisable en trois dimensions spatiales, car faisant intervenir des puissances du champ Φ supérieures à 4. Ce potentiel peut donc être effectif suite à l'intégration de degrés de libertés internes, inobservables ou faisant intervenir des effets thermiques.

²Nous entendons par simple, une densité lagrangienne dont le potentiel est dépourvu d'interactions comportant des dérivés des champs et munie d'un minimum absolu. La densité lagrangienne sera dite conservative si elle ne contient aucun terme dépendant explicitement des variables spatiotemporelles.

³Un potentiel est dit calibré s'il possède un minimum absolu à l'origine, ce minimum est nommé le vide absolu de la théorie, noté $\langle \Phi \rangle$.

Nous pouvons obtenir la charge⁴ associée à une configuration quelconque du champ Φ

$$Q = \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2i} \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \Phi \right) \quad (3.4)$$

ainsi que son énergie que nous séparons en quatres contributions; \mathcal{H}_∇ , la densité d'énergie gradiente, \mathcal{H}_K celle d'énergie cinétique, \mathcal{H}_μ celle associée à la masse des quanta et V_I la densité d'énergie d'interaction (nous utiliserons aussi $\mathcal{H}_p \stackrel{def}{=} \mathcal{H}_\mu + V_I$ l'énergie potentielle totale).

$$E = \int d\mathbf{x} \underbrace{\frac{1}{2} |\vec{\nabla}\Phi|^2}_{\mathcal{H}_\nabla} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2}_{\mathcal{H}_K} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2}_{\mathcal{H}_\mu} + V_I(\Phi) \quad (3.5)$$

3.1.1 Ansatz Q-ball

Avant de construire le Q-ball à partir du principe d'Hamilton et de conservation de la charge, présentons succinctement les caractéristiques de la solution. Dans son état fondamental, celle-ci représente une distribution sphérique de champ, différent du vide, cohérente et dont la phase varie périodiquement avec une pulsation constante.

$$\Phi(x) = e^{i\omega t} \phi(r) \quad (3.6)$$

Le Q-ball étant un soliton, nous savons alors que pour être localisé et donc que son énergie soit finie, le champ doit asymptotiquement tendre vers l'état de vide et ce de façon suffisamment rapide pour être intégrable.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0 \quad (3.7)$$

D'autre part, l'origine que l'on positionne au centre du Q-ball par convenance, n'est pas un point particulier de l'espace et nous exigeons donc que ϕ y soit continue. La figure 3-1 illustre deux profils de Q-balls .

$$\phi'(0) = 0 \quad (3.8)$$

⁴la charge est obtenu grâce au théorème de Noether énoncé au chapitre précédent : équation (2.9)

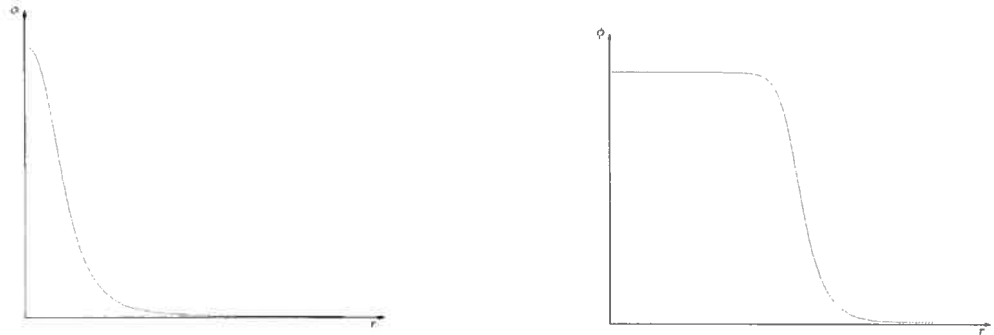


Figure 3-1: Profils d'un petit et d'un gros Q-ball

Énumérons les principales caractéristiques d'une solution Q-ball. Celles reliées à son profil sont la valeur de sa densité au coeur ϕ_0 et son rayon R

$$\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \phi(0) \quad (3.9)$$

$$\phi(R) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-1}\phi_0 \quad (3.10)$$

Ensuite nous avons sa masse, M , sa pulsation ω et sa charge Q . Pour un Q-ball dans son état fondamental, son énergie est égale par définition à sa masse. Comme nous n'étudierons que cet état fondamental, la masse étendue M et énergie totale E peuvent être confondues. Pour un potentiel donné et pour chaque valeur de ω , il existera au plus un Q-ball dans son état fondamental.

Dans cet état, le Q-ball est une solution quasi statique qui minimise l'énergie tout en conservant la charge. Il sera démontré que cette solution existe dans la mesure où le potentiel respecte un critère assurant l'existence de forces de cohésion suffisamment puissantes

$$\min_{\phi} \left\{ \frac{2V(\phi)}{\phi^2} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^2 < \mu^2 \quad (3.11)$$

Aussi, toute solution telle que

$$E[\Phi] < \mu Q \quad (3.12)$$

sera stable relativement à la décomposition en mésons libres. Nous montrerons, qu'il existe une charge Q_s telle que pour toute solution dont la charge $|Q[\Phi]| \geq Q_s$ satisfait ce critère de stabilité.

3.2 Existence du Q-ball

A partir du lagrangien dont nous nous sommes dotés, nous pouvons obtenir les équations du mouvement permettant d'obtenir les solutions Φ qui extrémisent l'action. Pour ce faire, nous appliquons l'équation d'Euler-Lagrange⁵ à Φ et Φ^* :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \wedge c.c. \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \partial^2 \Phi + \frac{\Phi}{|\Phi|} V'(|\Phi|) = 0 \wedge c.c. \quad (3.14)$$

Notons que toute solution physique respecte ces équations et non seulement celles d'énergie minimale. Évidemment la solution triviale est compatible avec ce système d'équations. Celle-ci représente le vide homogène et statique (de charge nulle). Nous déterminerons la solution différente du vide qui minimise l'énergie, ce sera notre Q-ball dans son état fondamental.

3.2.1 Symétrie et espace des phases

Sachant que notre lagrangien est invariant sous $U(1)$, si nous pouvons distinguer le sous-espace d'action du groupe de symétrie,

$$U(1) : \Phi \mapsto e^{i\epsilon} \Phi$$

alors, en termes des variables engendrant ce sous-espace et son complément, nous obtiendrons un système d'équations différentielles plus simple à résoudre.

Exprimons le champ complexe de façon polaire

$$\Phi(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x)$$

⁵Les équations d'Euler-Lagrange sont la conséquence du principe d'Hamilton stipulant que l'action associée à une solution physique est extrémale, pour plus de détails à ce sujet le lecteur est invité à consulter le troisième chapitre de la référence [19].

où $\theta \in S_2, \phi \in \mathfrak{R}^+$. On constate alors que S_2 , l'espace des phases, est ce sous-espace d'action de $U(1)$. Nous nommons $\phi(x)$ le profil et $\theta(x)$ la phase. Réécrivons notre lagrangien en ces termes.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - V(\phi) \quad (3.15)$$

On remarque effectivement que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$ et qu'ainsi θ est cyclique tel qu'attendu. Nos équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$\partial^2 \phi + V'(\phi) - \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta = 0 \quad (3.16)$$

$$\partial_\mu (\phi^2 \partial^\mu \theta) = 0 \quad (3.17)$$

La loi de conservation du courant est explicite dans (3.17)

$$j^\mu = \phi^2 \partial^\mu \theta \quad (3.18)$$

$$\rho[\phi, \theta](x) \stackrel{def}{=} j^0 = \phi^2 \dot{\theta} \quad (3.19)$$

$$Q[\phi, \theta] = \int d\mathbf{x} \rho[\phi, \theta](x) = \int d\mathbf{x} \phi^2(x) \dot{\theta}(x) \quad (3.20)$$

3.2.2 Configuration d'énergie minimale

La densité hamiltonienne générale pour notre théorie s'écrit

$$\mathcal{H}[\phi, \theta] = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \dot{\theta}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \vec{\nabla} \theta^2 \quad (3.21)$$

Nous possédons maintenant tous les éléments pour obtenir la configuration d'énergie minimale pour une charge donnée. Premièrement, celle-ci est de profil statique, une solution en motion est nécessairement d'énergie supérieure à une solution au repos et nous pouvons exiger $\dot{\phi} = 0$ dans (3.21) sans affecter la charge. Ensuite, pour que la charge soit non nulle, mais constante, la phase doit dépendre linéairement du temps. En outre l'état de moindre énergie est dépourvu de courant, car la présence d'un tel courant signifierait l'existence d'une onde θ , d'énergie positive, à l'intérieur de la matière ϕ . Résumons ces exigences:

$$\dot{\phi} = 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
Q \neq 0 \wedge \dot{Q} \stackrel{def}{=} 0 \wedge \vec{j} = 0 \\
\Rightarrow \theta(x) = \omega t + \phi_0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

La phase initiale ϕ_0 est sans importance et nous la posons nulle.⁶

Appliquons nos restrictions, remanions légèrement (3.21) afin d'exhiber la densité de charge et intégrons. Comme prévu, l'énergie est indépendante du temps et ne dépend de la phase que par un paramètre constant, ω .

$$E[\phi, \omega] = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + V(\phi) - \frac{1}{2} \phi^2 \omega^2 \right] + \omega Q \tag{3.24}$$

Déterminons, en variant l'énergie, la fonction $\tilde{\phi}$ qui minimise l'énergie, sachant que la charge Q est conservée.

$$\begin{aligned}
\delta E[\phi, \omega]|_{\tilde{\phi}} &= 0 \\
\delta E[\phi, \omega] &= \left[\Delta \phi + V'(\phi) - \omega^2 \phi^2 \right] \delta \phi + \left[Q - \omega \int d\mathbf{x} \phi^2 \right] \delta \omega
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Les coefficients des deux termes doivent être indépendamment nuls, or le second est la définition de la charge, conséquemment, le profil minimisant l'énergie doit respecter

$$\Delta \tilde{\phi} + V'_\omega(\tilde{\phi}) = 0 \tag{3.26}$$

$$V_\omega(\phi) \stackrel{def}{=} V(\phi) - \frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\mu^2 - \omega^2) \phi^2 + V_I(\phi) \tag{3.27}$$

L'obtention d'une expression générale pour le profil $\tilde{\phi}(x)$ pour un potentiel d'interaction V_I quelconque n'est pas analytiquement accessible. Cependant, nous pouvons obtenir un critère d'existence. Pour ce faire, nous devons d'abord nous convaincre que $\tilde{\phi}$ est de symétrie sphérique.

DÉFINITION Réarrangement sphérique d'une fonction [40]

Soit une fonction $\phi(x) \geq 0$ telle que $\phi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Le réarrangement sphérique est défini

⁶Si nous considérons une configuration comprenant plus d'un Q -ball (quoiqu'il s'agisse d'une approximation, car le système étant non linéaire, la superposition de solutions n'est pas nécessairement une solution), alors la différence de phase initiale entre les deux solitons serait importante. Au sujet de telles considérations, le lecteur peut consulter la référence [20].

par une fonction de symétrie sphérique, $\phi_R(r)$, monotone décroissante obéissant

$$\mu_L \{x \mid \phi_R(x) \geq \epsilon\} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_L \{x \mid \phi(x) \geq \epsilon\} \quad (3.28)$$

où μ_L est la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME Réarrangement sphérique [40] , [21]

Soit $U : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ et Φ_R le réarrangement sphérique de la fonction Φ .

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \left(\vec{\nabla} \phi_R(r) \right)^2 &\leq \int d\mathbf{x} \left(\vec{\nabla} \phi(x) \right)^2 \\ \int d\mathbf{x} U(\phi_R) &\leq \int d\mathbf{x} U(\phi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ce théorème formalise le pronostic voulant que la solution d'énergie minimale est de surface minimale.

Alors nous pouvons réécrire (3.26) comme une équation différentielle ordinaire

$$\tilde{\phi}''(r) + \frac{D-1}{r} \tilde{\phi}'(r) + V_\omega'(\tilde{\phi}) = 0 \quad (3.30)$$

Comme le souligne Coleman [2] il y a une similitude formelle entre cette équation et une équation de cinématique en une dimension. En effet, sous l'identification

$$\tilde{\phi} \mapsto y$$

$$r \mapsto t$$

$$V_\omega(\tilde{\phi}) \mapsto -U(y)$$

on obtient l'équation d'une particule de masse unitaire évoluant dans un potentiel $U = -V_\omega$ et soumise à une force de friction dépendant de la dimension spatiale et diminuant avec le temps:

$$\ddot{y} + \frac{D-1}{t} \dot{y} - U(y) = 0 \quad (3.31)$$

Cette analogie nous permet d'exploiter notre compréhension intuitive de la cinématique pour démontrer l'existence d'une solution pour $y(t)$. Rappelons que $\tilde{\phi}$ doit respecter deux conditions: continuité à l'origine $\phi'(0) = 0$ et localisation qui implique $\phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

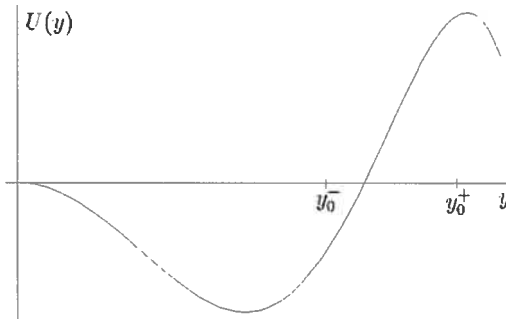


Figure 3-2: Potentiel dans l'analogie cinématique

0. Celles-ci deviennent respectivement les conditions initiale et finale dans l'analogie mécanique

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (3.32)$$

$$y \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (3.33)$$

Nous connaissons la forme du potentiel U au voisinage de l'origine.

$$U(y) = \frac{1}{2}(\omega^2 - \mu^2)y^2 + \mathcal{O}(y^3)$$

Comme nous cherchons une solution qui atteigne l'origine asymptotiquement, sa vitesse doit alors y être nulle. Cela indique que l'origine doit être un maximum du potentiel U et conséquemment

$$\omega^2 < \mu^2 \quad (3.34)$$

Aussi, de l'exigence que V ne possède qu'un seul minimum absolu, nous déduisons le comportement asymptotique du potentiel U .

$$U(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} -\infty$$

La solution cherchée se trouve initialement au repos en y_0 et doit atteindre l'origine avec une vitesse nulle. Pour qu'elle existe, il faut nécessairement un autre maximum du potentiel U . Or comme le terme de friction ne fait que diminuer l'énergie cinétique de

la particule, ce second maximum doit être supérieur à celui de l'origine. Le cas limite, pour lequel les deux maxima sont dégénérés survient lorsque

$$\begin{aligned} \exists y_c \neq 0 \mid U(y_c) &\mapsto 0^+ \\ U(0) = 0 &\Rightarrow \frac{2U(y_c)}{y_c^2} = 0 \\ \omega_0^2 \stackrel{def}{=} \frac{2U(y_c)}{y_c^2} &= \min_{\phi} \left(\frac{2V_I(\phi)}{\phi^2} + \mu^2 \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dans la mesure où $\omega_0 < \omega < \mu$, une solution pour y (et donc pour ϕ) existe. L'argument proposé par Coleman [2] repose sur la continuité. La particule doit nécessairement être relâchée sur le versant gauche (figure 3-2) du second maximum, $y_0 < y_c$, sinon elle chuterait sans retour vers $y \mapsto \infty$. Supposons qu'elle soit relâchée en y_0^- sur le versant gauche mais où le potentiel est négatif, alors comme la friction ne fait que diminuer son énergie, elle ne pourra jamais atteindre le sommet à l'origine. D'autre part, si la particule est au repos sur le versant gauche, mais très près du sommet, elle y séjournera une aussi longue période qu'elle est infinitésimalement près du maximum. Pendant ce temps, la force de friction ira décroissante. Comme ce maximum est supérieur à celui de l'origine, on peut fixer $y_0^+ \mapsto y_c$ suffisamment proche du sommet pour que lorsqu'elle amorce sa descente, la force de friction ne soit plus suffisante à lui faire perdre assez d'énergie pour qu'elle atteigne l'origine avec une vitesse nulle. Par continuité, il existe donc une position initiale $y_0 \in]y_0^-, y_0^+[$ pour laquelle la particule atteint l'origine avec une vitesse exactement nulle, c'est la position initiale recherchée qui se traduira pour notre profil par la donnée de $\phi(0)$, la densité au coeur du soliton.

Alors pour tout potentiel d'interaction respectant

$$\exists \phi_c \neq 0 \mid \min_{\phi} \left(\frac{2V_I(\phi)}{\phi^2} + \mu^2 \right) \stackrel{def}{=} \left(\frac{2V_I(\phi_c)}{\phi_c^2} + \mu^2 \right) \stackrel{def}{=} \omega_0^2 \quad (3.36)$$

il existe exactement une solution Q-ball de charge Q dans son état fondamental pour laquelle

$$\omega_0 < \omega < \mu \quad (3.37)$$

3.3 Étude des propriétés du Q -ball

L'obtention d'une expression pour le profil du Q -ball dans son état fondamental n'est pas possible analytiquement, nous verrons deux situations limites où nous obtiendrons analytiquement des solutions approchées. Pour l'instant obtenons quelques caractéristiques générales des solutions Q -ball en $D + 1$ dimensions.

La charge et les contributions énergétiques s'expriment en termes d'intégrales radiales. La charge, l'énergie cinétique et potentielle sont déterminées par la densité du Q -ball et l'énergie gradient quant à elle par l'épaisseur de la zone de transition reliée à $|\vec{\nabla}\phi|$, elle est proportionnelle à la surface.

$$Q = \omega \int d\Omega \int dr r^{D-1} \phi(r)^2 \quad (3.38)$$

$$E_{\nabla} = \int d\Omega \int dr r^{D-1} \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\phi(r)|^2 \quad (3.39)$$

$$E_K = \int d\Omega \int dr r^{D-1} \frac{1}{2} \omega^2 \phi(r)^2 \quad (3.40)$$

$$E_{\mu} = \int d\Omega \int dr r^{D-1} \frac{1}{2} \mu^2 \phi(r)^2 \quad (3.41)$$

$$E_I = \int d\Omega \int dr r^{D-1} V_I(\phi) \quad (3.42)$$

La charge et chacune des contributions à l'énergie sauf E_{∇} dépendent considérablement de l'extension spatiale R de la solution. L'observation de (3.30) montre que celle-ci augmente avec la dimension D (plus la friction est grande, plus longtemps la particule doit rester sur le sommet) et dépend de $|\phi_c - \phi_0|$ et ϕ_c , des paramètres du potentiel d'interaction. Il est donc a priori très difficile d'établir des corrélations directes. De façon qualitative, les Q -balls seront gros lorsque $|V_{\omega}(\phi_c)| \mapsto 0$ c'est à dire lorsque les deux maxima sont quasi dégénérés. Cette situation se produit lorsque $\omega \mapsto \omega_0$. Dans une telle situation la zone de transition est beaucoup plus petite que R et l'énergie de surface contribue pour peu. Ce cas de figure est développé en détail dans la section traitant l'ansatz des gros Q -balls .

Inversément, lorsque les minima du potentiel V_{ω} sont fortement non dégénérés

alors le rayon est petit et la zone de transition représente une importante fraction de celui-ci. L'ansatz gaussien du petit Q -ball nous servira à explorer cette situation. Nous obtiendrons des expressions pour les propriétés des Q -balls dans chacun des cas et pour une dimension spatiale quelconque. Nous pourrons dans les prochains chapitres comparer ces résultats avec ceux que nous obtiendrons pour le Q -ball jaugé en $3D$ et celui de Maxwell-Chern-Simons en $2D$, mais aussi avec les études sur l'effet de la dimensionalité sur les solutions Q -balls ⁷ [22] , [35].

3.3.1 Ansatz du gros Q -ball

Considérons la limite où $\omega = \omega_0$, le cas où les maxima de V_ω sont dégénérés. Alors la densité $\phi(r) = \phi_0 = \phi_c$ est homogène et l'extension spatiale infinie. Supposons maintenant que $\omega \approx \omega_0$, la solution sera presque homogène sur un très grand rayon et la zone de transition sera en principe négligeable, nous pourrons alors assimiler le profil à une distribution palier, c'est l'approximation *thin wall* [36].

$$\begin{aligned}\phi_\Pi(r) &\stackrel{def}{=} \phi_0 \Pi(r - R) & (3.43) \\ \Pi(r - R) &\stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 : r \leq R \\ 0 : r > R \end{cases} \\ \vec{\nabla} \Pi(r - R) &= \delta(r - R) \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

Nous pouvons aisément intégrer (3.21) pour obtenir l'énergie de cette configuration

$$E = \int d\Omega \int dr r^{D-1} \left[\Pi(r - R) \left(\frac{1}{2} \phi_0^2 \omega^2 + V(\phi_0) \right) + \frac{1}{2} \phi_0^2 \delta(r - R) \right] \quad (3.44)$$

$$E = \frac{1}{2} \phi_0^2 \omega^2 \mathcal{V} + V(\phi_0) \mathcal{V} + \frac{1}{2} \phi_0^2 S \quad (3.45)$$

où $\mathcal{V} \propto \mathcal{O}(r^D)$ est le volume et $S \propto \mathcal{O}(r^{D-1})$ est la surface de la D -sphère du Q -ball. Comme $R \gg 1$ par hypothèse, $S \ll \mathcal{V}$ et nous pouvons négliger sa contribution à

⁷Notons au passage la possibilité de considérer des théories unidimensionnelles ou bidimensionnelles plongées dans un espace tridimensionnel. R. B. MacKenzie et M. B. Paranjape explorent ainsi l'existence et la stabilité de Q -strings et de Q -walls [35].

l'énergie pour la suite. De façon similaire l'on obtient la charge à partir de l'équation (3.38),

$$Q = \omega \phi_0^2 \mathcal{V} \quad (3.46)$$

Pour obtenir les caractéristiques de la solution ϕ_{Π} fondamentale, éliminons ω et minimisons E par rapport au volume et à la densité au coeur pour obtenir la masse M du Q -ball. De la minimisation par rapport à ϕ_0 , nous obtenons la relation (3.35) définissant ϕ_c comme ce doit être le cas dans cette limite.

$$E = \frac{Q^2}{2\phi_0^2 \mathcal{V}} + V(\phi_0) \mathcal{V} \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow \mathcal{V} = \frac{Q}{\sqrt{2\phi_0^2 V(\phi_0)}} \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow M = Q \sqrt{\frac{2V(\phi_0)}{\phi_0^2}} = Q \omega_0 \quad (3.49)$$

Ainsi pour les gros Q -balls le volume et la masse sont proportionnels à la charge, mais la valeur de ϕ_0 ne dépend que du potentiel.

L'obtention du rayon s'effectue sans problème à partir de l'expression (3.48), du volume et de la dimension.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \Omega(D) \frac{R^D}{D} \\ \Omega(D) &= \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \\ R_0 &= \left(\frac{DQ}{\Omega(D)\phi_0 \sqrt{2V(\phi_0)}} \right)^{\frac{1}{D}} = \left(\frac{DQ}{\Omega(D)\phi_0^2 \omega_0} \right)^{\frac{1}{D}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Si l'on considère la contribution de l'énergie de surface alors le rayon diminue. En supposant que $R = R_0 + \delta R$, $\delta R \ll R_0$, l'on peut obtenir une première correction en calculant les extréma de variation de l'énergie par rapport à R [22].

$$R \cong R_0 - \frac{(D-1)\phi_0^2}{4DV(\phi_0)} \quad (3.51)$$

Explicitement pour $D = 2, 3$

$$R_{D=3} = \left(\frac{3Q}{4\pi\phi_0^2\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3\omega_0^2} \quad (3.52)$$

$$R_{D=2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi\phi_0^2\omega_0}} - \frac{1}{4\omega_0^2} \quad (3.53)$$

3.3.2 Ansatz du petit Q-ball

Inversément, si $\omega \mapsto \mu$, les maxima de V_ω sont fortement dégénérés et la solution est telle que ϕ_0 est très proche d'un zéro de V_ω . Utilisant les termes de l'analogie cinématique, la particule chute dès qu'elle est relâchée, c'est la friction qui amorti son mouvement. Le Q-ball est conséquemment de courte extension et la zone de transition occupe la majeure part de son rayon. Cette situation fut d'abord analysée en termes de solutions rebonds lors de la pénétration d'une barrière de potentiel (solutions *bounces*) [23] , [33]. Plus récemment, Gleiser et Thorarinson [22] proposent d'utiliser un ansatz gaussien pour les solutions de Q-balls dans ce régime.

$$\phi_g(r) \stackrel{def}{=} \phi_0 e^{-\frac{r^2}{R^2}} \quad (3.54)$$

Il est alors possible d'obtenir des expressions analytiques pour l'énergie et la charge. Préalablement définissons une famille de fonctions qui nous seront utiles

$$\int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-\frac{nr^2}{R^2}} = I_{n,d} R^d \quad (3.55)$$

$$I_{n,d} \stackrel{def}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2n^{\frac{1}{d}}} \quad (3.56)$$

Nous pouvons exprimer avec ces coefficients les contributions à l'énergie ainsi que la charge

$$Q = \Omega(D)\omega\phi_0^2 I_{2,D} R^D \quad (3.57)$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\Omega(D)\omega^2\phi_0^2 I_{2,D} R^D}_{E_k} + \underbrace{\Omega(D) \sum_{k \geq 2} c_k \phi_0^k I_{k,D} R^D}_{E_\mu + E_I} + \underbrace{\Omega(D) 2\phi_0^2 I_{2,(D+2)} R^{D-2}}_{E_\nabla} \quad (3.58)$$

Pour obtenir le rayon en extrémisant l'énergie sous cet ansatz, explicitons $\omega(Q, \phi_0)$ et dérivons l'énergie par rapport à R .

$$E = \alpha R^{-D} + \beta R^D + \gamma R^{D-2} \quad (3.59)$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q^2}{2\Omega(D)\phi_0^2 I_{2,D}} \quad (3.60)$$

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(D) \sum_{k \geq 2} c_k \phi_0^k I_{k,D} \quad (3.61)$$

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} 2\Omega(D)\phi_0^2 I_{2,(D+2)} \quad (3.62)$$

Si l'on suppose encore une fois que l'énergie gradient est négligeable devant les autres contributions l'on peut obtenir une première approximation du rayon

$$R_0 = \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2D}} = \left(\frac{Q}{\Omega(D)\phi_0 I_{2,D} (2 \sum_{k \geq 2} c_k \phi_0^k I_{k,D})} \right)^{\frac{1}{D}} \quad (3.63)$$

Puis en supposant $R = R_0 + \delta R$ dans (3.59)

$$\delta R = -\frac{(D-2)\gamma}{2D^2\beta R_0} = -\frac{(D-2)\phi_0^2 I_{2,(D+2)}}{D^2 R_0 \sum_{k \geq 2} c_k \phi_0^k I_{k,D}} \quad (3.64)$$

3.4 Stabilité

Maintenant que l'existence de Q -balls est assurée sous certaines conditions sur le potentiel, qu'en est-il de leur stabilité. Nous avons obtenu la solution Q -ball en minimisant l'énergie sous contrainte de conservation de la charge, ainsi nous savons dès lors que cette solution est classiquement perturbativement stable. Coleman démontre [2] un théorème établissant la stabilité absolue de Q -balls pour une charge suffisamment élevée.

Ce qui nous intéresse plus spécifiquement est de montrer que le Q -ball est un état lié d'énergie inférieure à autant de mésons libres, si tel est le cas, la présence de

solutions de type Q -ball pourrait influencer grandement la dynamique du vide, car la solution perturbative de mésons libres ne dominerait plus le spectre énergétique. Pour ce faire, il sera suffisant de comparer la masse du soliton à l'énergie de Q mésons asymptotiquement libres, μQ . Nous savons en effet que le profil est radial et monotone décroissant pour la solution d'énergie minimale, ainsi l'effet tunnel ne pourra pas former de bulles de vide à l'intérieur. La fission en deux Q -balls sera aussi énergétiquement défavorable puisqu'il ne s'agirait plus d'une solution monotone.

Il importe de noter que la solution que nous avons trouvée ne comporte qu'un seul Q -ball. Comme notre système contient des interactions non linéaires, le système d'équations du mouvement est lui aussi non linéaire et conséquemment la superposition de solutions n'est plus nécessairement solution. Il est possible de construire une solution approximative de deux Q -balls initialement asymptotiquement libres et de les soumettre aux équations du mouvement pour étudier leur dynamique et les collisions pouvant en résulter. Une analyse de telles collisions fut effectuée par R. A. Battye et P. M. Sutcliffe [20] et leurs conclusions indiquent que l'interaction entre deux Q -balls est très complexe et dépend de plusieurs paramètres. Elle sera tantôt attractive, tantôt répulsive dépendant de la différence de phase, des pulsations relatives lors de l'interaction et du paramètre d'impact. Plusieurs processus peuvent survenir, collision élastique, plastique avec transfert de charge, annihilation partielle ou totale, voire non-interaction dans certains cas (les solitons s'interpénètrent et retrouvent leur profil inchangé suite à l'interaction). Nous laissons au lecteur le loisir de consulter cet article pour plus de détails sur la dynamique de plusieurs Q -balls.

Dans la section précédente nous étudions les propriétés du Q -ball. Nous avons obtenu, pour deux situations limites, des expressions analytiques pour M que nous pouvons comparer à la masse d'autant de mésons libres. Pour un Q -ball de charge élevée, donc de rayon et volume important, nous avons obtenu une expression approchée pour la masse du soliton dans l'approximation *thin wall* de l'ansatz palier, l'équation (3.49). Celle-ci démontre que dans la mesure où cette approximation est valide le Q -ball est stable car $\frac{M}{Q} = \omega_0 < \mu$. Or comme la charge est proportionnelle au volume et que cette approximation est d'autant plus valide que le volume est grand, l'on conclue qu'il

existe une charge Q_s à partir de laquelle tout Q -ball de charge supérieure est stable tel que nous l'avions prétendu.

Pour un Q -ball de petite charge, nous devons préciser le potentiel avant de pouvoir faire une analyse explicite de stabilité. Dans la prochaine section, une analyse systématique de stabilité sera faite pour chaque solution numérique obtenue, nous pourrons ainsi déterminer la région dans l'espace des paramètres où les Q -balls sont stables sous processus de décomposition.

3.5 Validation numérique

Nous avons obtenu numériquement plusieurs solutions Q -balls en deux et trois dimensions. Nous allons dans cette section, les présenter et comparer les résultats obtenus aux prédictions.

3.5.1 Méthodologie

Nous avons choisit un potentiel analytique d'ordre 6, c'est l'ordre minimal d'un développement pair permettant le respect du critère (3.11) d'existence de solutions Q -balls .

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{6}g\phi^6 \quad (3.65)$$

En renormalisant le lagrangien il est possible d'éliminer deux des trois paramètres du potentiel:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{6}g\phi^6 \\ \tilde{x} &= \frac{1}{\mu}x \quad \tilde{\phi} = \frac{\mu}{\lambda}\phi \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{\mu^4}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi}\tilde{\partial}^\mu\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 - \frac{1}{4}\tilde{\phi}^4 + \frac{1}{6}\tilde{g}\tilde{\phi}^6 \right) \end{aligned}$$

En supposant qu'une telle renormalisation ait été effectuée et ignorant la constante multiplicative sans effet sur les équations du mouvement⁸, le potentiel devient (laissant tomber les tildes pour alléger l'écriture)

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 + \frac{1}{6}g\phi^6 \quad (3.66)$$

Ainsi celui-ci n'est déterminé que par le paramètre g dont la valeur influe sur le niveau de dégénérescence du potentiel.

Nous avons utilisé la méthode dite *shooting* [24] pour intégrer l'équation différentielle du profil du Q -ball. De façon succincte cette méthode consiste à suppléer la condition initiale manquante (ϕ_0), d'intégrer par un algorithme Runge-Kutta (un algorithme d'Euler amélioré par réitérations successives) puis calculer la différence obtenue d'avec la condition finale (3.7). De cette différence est obtenu, par l'algorithme de Newton-Raphson, une correction à appliquer sur la condition initiale supputée. L'on réitère cette procédure jusqu'à ce que la distance soit inférieure à un paramètre de tolérance.

En principe cette méthode est facilement implémentable et atteint la précision recherchée, cependant notre système d'équations s'est avéré exhiber une propriété rendant la recherche de solutions beaucoup plus ardue. La solution cherchée décroît exponentiellement à zéro, cependant pour d'autres conditions initiales, des solutions exponentiellement croissantes sont aussi acceptables de sorte qu'avec l'imprecision numérique irréductible subsiste toujours une contribution indésirable exponentiellement croissante rendant la recherche difficile et requérant une très grande précision sur ϕ_0 . Pour les très gros Q -balls nous avons rencontré la limite ultime où la précision accessible n'était plus suffisante et l'obtention de Q -balls plus volumineux impossible sans modifications importantes à l'algorithme.

Nous avons échantillonné nos solutions sur 100 points répartis également sur un intervalle variant entre 15 et 40 unités d'espace selon la taille attendue du Q -ball.

⁸Cette constante serait cependant significative lors de la quantification du soliton, à ce sujet, le lecteur est référé au chapitre 6 de [17] où est abordé la quantification des solitons.

Notre facteur de tolérance est de $1e - 4$. L'intégration est effectuée sur le domaine où le profil de la solution est supérieur au seuil de tolérance, comme tous les profils décroissent exponentiellement l'erreur comise sera de l'ordre du seuil de tolérance.

3.5.2 Espace des paramètres

Ainsi pour la donnée de (ω, g) (alternativement (Q, g)) il existe au maximum un Q -ball dans son état fondamental. Nommons $\Omega \stackrel{def}{=} \{(\omega, g)\}$ l'espace des paramètres et déterminons la région où se trouvent potentiellement des solutions. D'abord nous savons que $|\omega| < \mu$, alors suite à notre normalisation, $|\omega| < 1$. Ensuite nous savons que le Q -ball n'existe que lorsque le potentiel n'est pas dégénéré, nous pouvons donc établir un critère sur g

$$g > \frac{3}{16} \quad (3.67)$$

Si $g = \frac{3}{16}$ le potentiel est dégénéré et $\omega = 0$. D'autre part, si $g < \frac{3}{16}$ alors le minimum absolu est négatif et le potentiel n'est plus calibré tel qu'exigé. Finalement $|\omega| > \omega_0(g)$, que l'on peut déterminer pour notre potentiel à partir de la relation (3.36) à la limite de dégénérescence,

$$\omega_0 \stackrel{def}{=} \min_{\phi} \left\{ \frac{2V(\phi)}{\phi^2} \right\} = \sqrt{1 - \frac{3}{16g}} \quad (3.68)$$

$$\phi_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{g}} \quad (3.69)$$

Il y a donc des solutions Q -ball dans $\Omega^* \stackrel{def}{=} \{(\omega, g) \mid g > \frac{3}{16} \wedge \omega_0(g) < |\omega| < 1\} \subset \Omega$ illustré à la figure 3-3. Cependant rien n'assure que ces solutions soient stables.

Nous avons obtenu une soixantaine Q -balls en deux et trois dimensions répartis dans Ω^* .

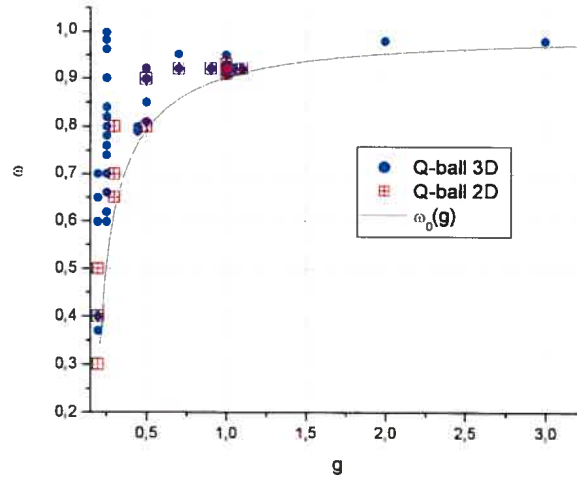


Figure 3-3: Espace des paramètres

3.5.3 Résultats et discussion

Nous présentons dans cette section les caractéristiques des Q -balls obtenus par intégration numérique. Nous comparons celles-ci aux prédictions théoriques effectuées pour les deux ansatz avec lesquels nous avons travaillé.

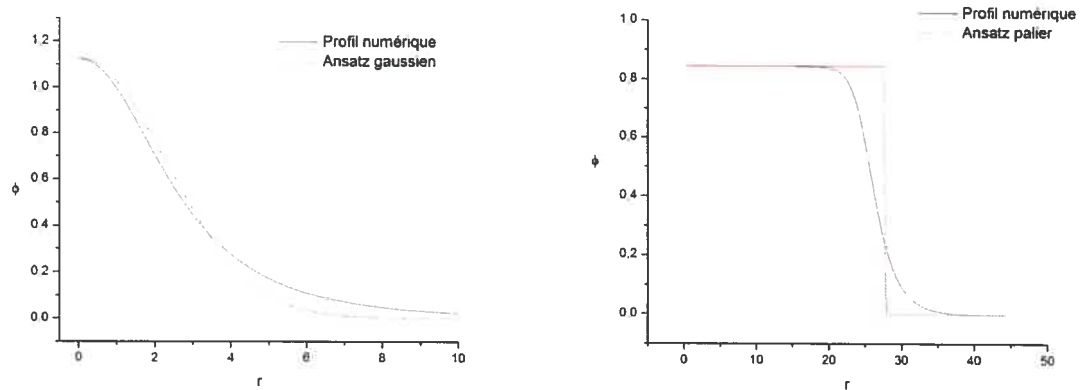


Figure 3-4: Comparaison des profils numériques et des ansatz utilisés

La figure 3-4 illustre le profil de deux Q -balls obtenus numériquement comparés

aux ansatz gaussien et palier. Dans les deux cas, nous avons invoqué l'approximation *thin wall* pour minimiser l'énergie et obtenir les caractéristiques de la solution fondamentale. Dans quel sous domaine de Ω^* cette approximation est-elle valide? L'on

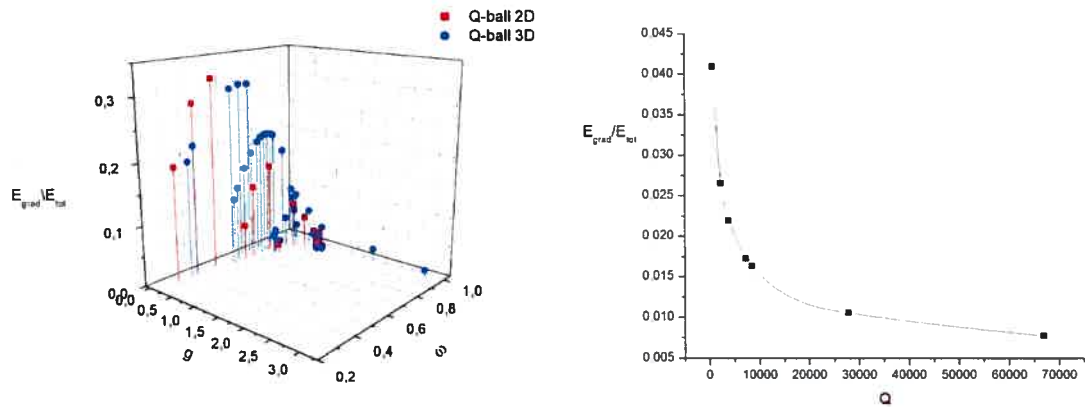


Figure 3-5: Contribution de l'énergie gradient à l'énergie totale. Sur l'espace des paramètres à gauche. En fonction de la charge à droite pour $g = 1$

observe sur la figure 3-5 que plus g est petit, c'est à dire plus V_ω est dégénéré, plus l'énergie gradient associée à la surface est importante. En effet, l'augmentation de g a pour effet de diminuer la hauteur de la barrière de V_ω et de rapprocher ϕ_c et ϕ_0 de l'origine, deux facteurs impliquant une décroissance de $|\vec{\nabla}\phi|$. On observe sur la figure de droite une forte décroissance du rapport $\frac{E_{\nabla}}{E}$ avec l'augmentation de la charge tel que supposé dans l'approximation palier.

Vérifions ensuite nos résultats sur l'étendue spatiale dans cette approximation *thin wall*. Si on compare le rayon obtenu versus celui prédit dans l'approximation du Q -ball palier par l'équation (3.50), on constate que le comportement est bon, mais subsiste une différence en apparence indépendante de la charge probablement due à notre définition du rayon. Cette différence ne peut pas être expliquée par la négligence des termes du développement d'ordre supérieurs de R , car ceux-ci comptent pour moins de 0,2% de l'approximation d'ordre 0. Gleiser et Thorarinson [22] remarquaient la présence d'une rapide dilatation du rayon lorsque le soliton devient instable. Quatre Q -balls pour lesquels $\frac{E}{Q} > 1$ sur la figure 3-6 de droite exhibent effectivement ce comportement.

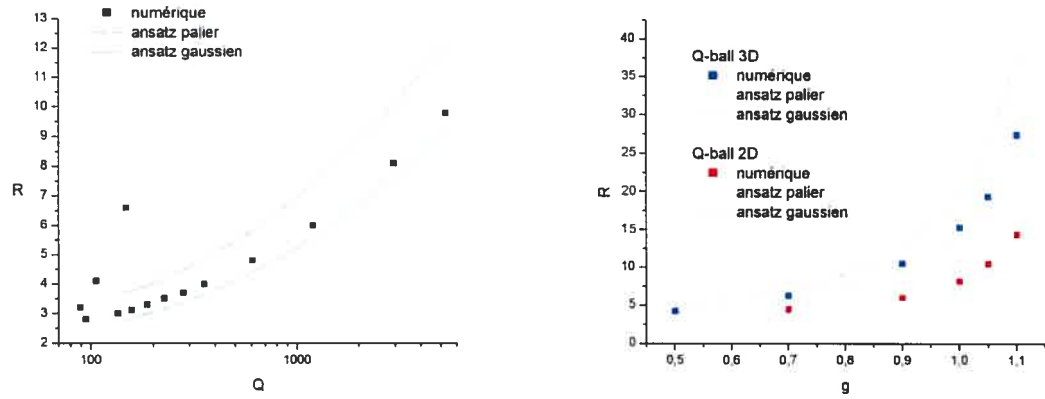


Figure 3-6: À gauche, rayon de Q -balls 3D en fonction de la charge pour $g = 0,253$. À droite rayon en fonction du paramètre g , $\omega = 0.92$.

Au sujet de la stabilité il est très clair sur la figure 3-7 que plus $|\omega|$ est petit, donc plus la charge est élevée, plus le Q -ball est stable. Aussi comme l'indique (3.68) $\omega_0 \mapsto 1$ lorsque $g \mapsto \infty$ et la fenêtre d'existence devient rapidement étroite. Par exemple, lorsque $g = 3$, $\omega_0 = 0,968$ laissant peu de liberté quant à la pulsation et minorant le rapport $\frac{E}{Q}$. En même temps, nous avons constaté que c'est pour les grandes valeurs de g que l'approximation *thin wall* est la meilleure. Sur la figure 3-7 à droite on peut

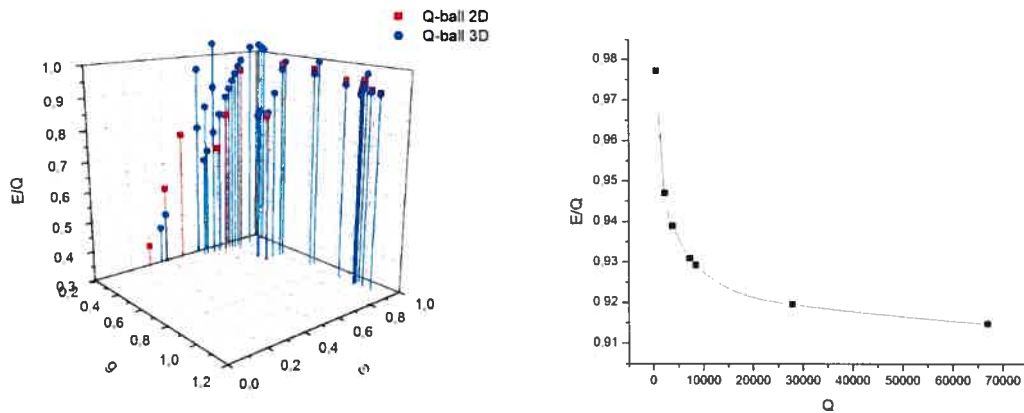


Figure 3-7: Stabilité de l'échantillon, à droite $g = 1$

observer la tendance de $\frac{E}{Q}$ à tendre comme prévue vers ω_0 avec l'augmentation de la charge ($\omega_0(1) = 0.901$).

Pour ce qui est de l'énergie des Q -balls nos résultats (figure 3-9) montrent que dans la mesure où l'énergie gradient est négligeable, les deux approximations correspondent très bien et ce même pour des Q -balls de courte extension spatiale. Par exemple, pour un potentiel de paramètre $g = 2$, l'on a obtenu un Q -ball de rayon de 8.7 unités dont le profil est de forme gaussienne, mais dont $\frac{E}{E_{\nabla}} = 0,0216$. L'erreur commise en approximant l'énergie par $\omega_0 Q$ est de 4%. Comme nous le remarquons sur la figure 3-7 à droite, plus la charge est élevée, plus l'énergie tend à adopter une dépendance linéaire sur la charge tel que prédit.

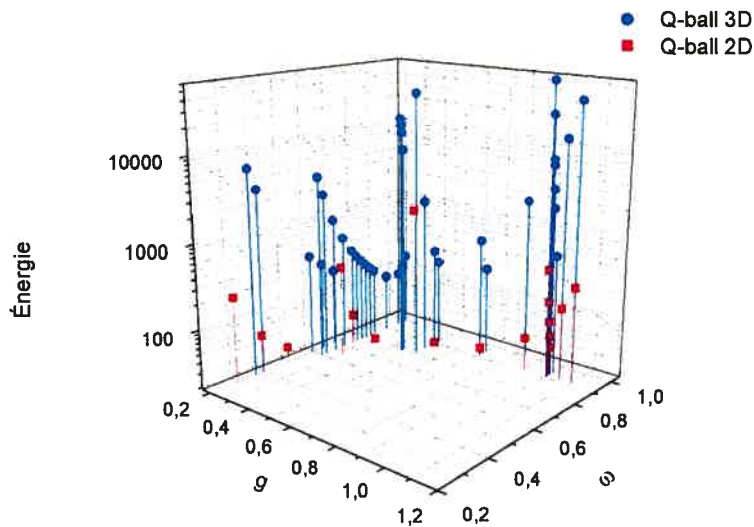


Figure 3-8: Énergie totale sur l'espace des paramètres

Comme nous l'avons indiqué, la densité au coeur se rapproche de plus en plus de zéro à mesure que le potentiel V_{ω} devient non dégénéré en augmentant g , l'on observe ce comportement sur la figure 3-10. Il est intéressant de constater sur la figure 3-11 à gauche l'influence de ω (donc de Q) sur ϕ_0 . Partant près de $\omega_0(1) = 0.901$, ϕ_0 est près $\phi_c = 0.866$ indépendamment de la dimension. Cela est normal car dans ce régime le Q -ball est étendu et le terme de friction dépendant de D dans l'analogie cinématique de peu d'influence. Cependant en s'éloignant de ω_0 , la densité augmente jusqu'à un maximum avant de décroître et que la solution devienne instable. Ce maximum survient

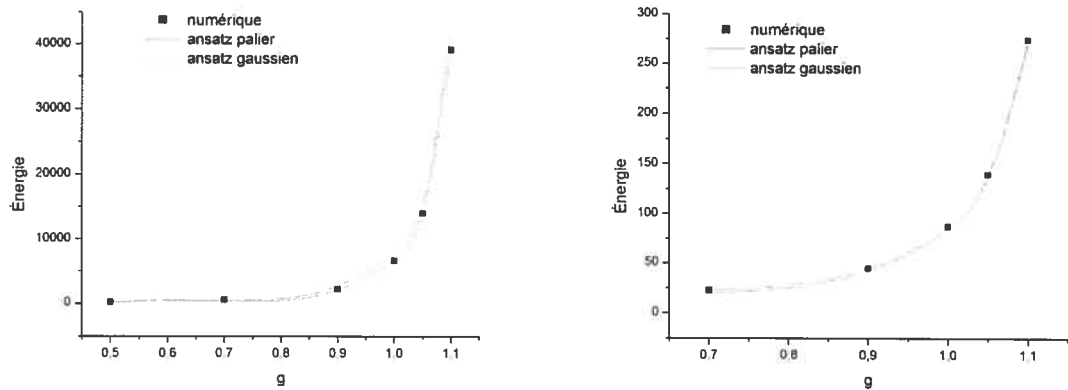


Figure 3-9: Énergie totale et prédictions pour $\omega = 0.92$; à gauche $D = 3$ et à droite $D = 2$

d'autant plus rapidement que D est petit. Sur la figure de gauche où $g=0.253$, l'on observe le même maximum, mais en fonction de la charge. On voit la tendance pour ϕ_0 à tendre vers $\phi_c(0.253) = 1.722$. Ainsi un petit Q -ball soumis à un influx de charge commence par augmenter sa densité jusqu'à l'atteinte d'un maximum pour ensuite s'étendre dans l'espace en la diminuant.

Finalement, nous illustrons sur la figure 3-12 les profils de densités de charge et d'énergies pour trois Q -balls différents; deux de courte extension (charges de 89 et 423 respectivement) et un très étendu (de 42270 unités de charge).

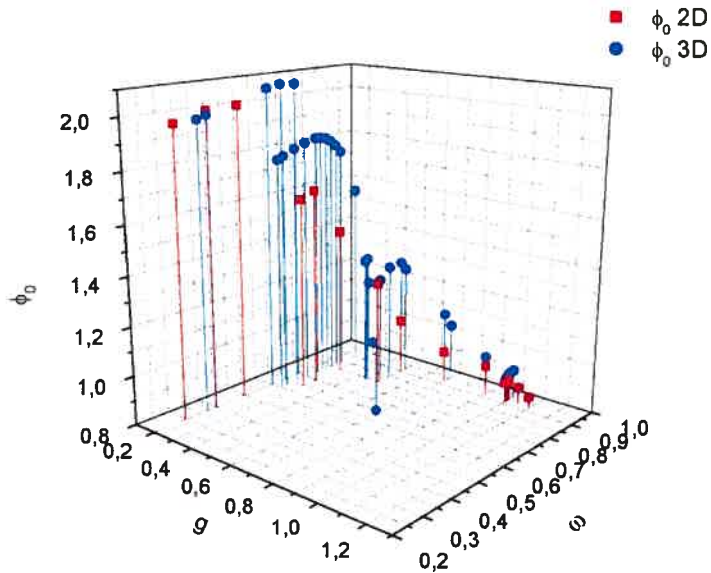


Figure 3-10: Densité au coeur, $g = 1$

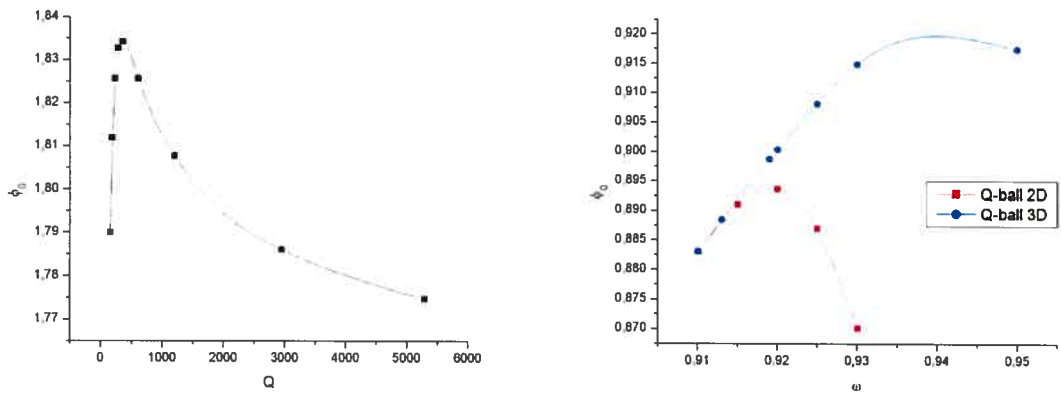


Figure 3-11: Densité au coeur; à gauche $g = 0.253$, à droite $g = 1$

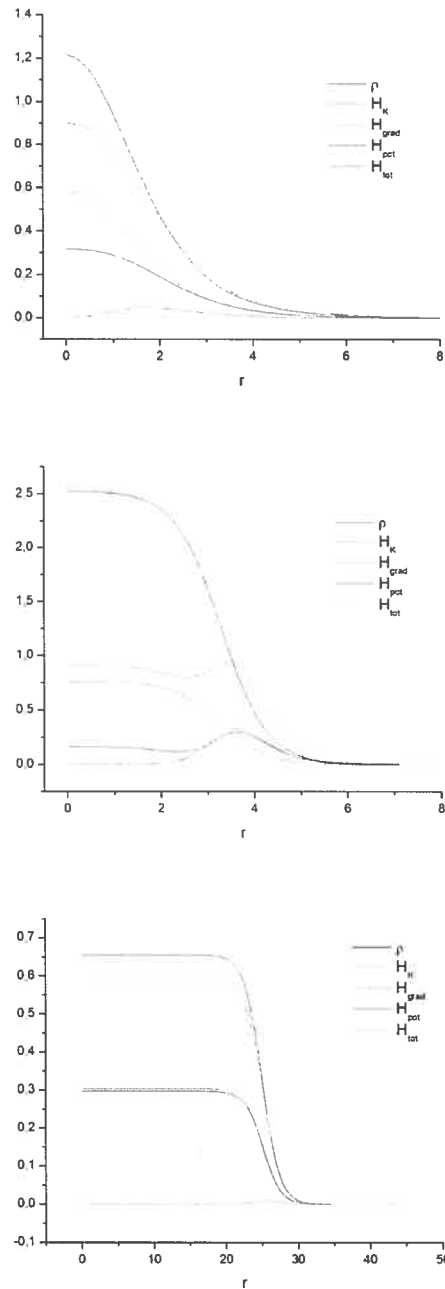


Figure 3-12: Densité de charge et densités énergétiques pour trois Q -balls en trois dimensions spatiales. En haut, $g = 0.253$ et $Q = 89$, au milieu, $g = 0.2$ et $Q = 423$ et en bas $g = 1.1$ et $Q = 42270$.

CHAPITRE 4

Le Q -ball jaugé

Nous avons, dans le précédent chapitre, démontré l'existence d'une solution solitonique survenant dans une théorie dynamique simple respectant la symétrie $U(1)$ globale. Or beaucoup de théories contemporaines de la physique font intervenir des symétries locales. Celles-ci modélisent les interactions par l'introduction de champs de jauge. Nous modifierons la densité lagrangienne du chapitre précédent pour tenir compte de l'aspect local de la symétrie $U(1)$.

Nous démontrerons qu'il y existe des solutions analogues au Q -ball de Coleman qui, sous certaines conditions, seront elles aussi énergétiquement favorables devant autant de quanta asymptotiquement libres.

4.1 Contexte théorique

Nous considérons une théorie dynamique en $3+1$ dimensions munie d'un champ scalaire complexe Φ et possédant la symétrie $U(1)$ locale. Nous verrons dans la prochaine section qu'une telle théorie en $2+1D$ n'est pas envisageable. Comme la symétrie est locale, la définition de la dérivation doit être modifiée

$$n^\mu \partial_\mu \stackrel{def}{=} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} [\Phi(x + n\delta x) - \Phi(x)]$$

En effet, les propriétés de symétrie du champ Φ dépendent maintenant des coordonnées spatiotemporelles,

$$\Phi \xrightarrow{U(1)} e^{i\alpha(x)}\Phi$$

de sorte que $\Phi(x+n\delta x)$ ne se transforme pas comme $\Phi(x)$ sous l'action du groupe. Pour que la soustraction dans la dérivation ait un sens, nous devons ajouter une connection, $U(x, x+n\delta x)$, qui compense pour cette différence induite par la localité du groupe de symétrie.¹ Nous définissons ainsi la dérivée covariante D_μ

$$n^\mu D_\mu \stackrel{def}{=} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} [\Phi(x+n\delta x) - U(x+n\delta x, x)\Phi(x)]$$

Remplaçons dans (3.1) les dérivées normales par des dérivées covariantes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi^* - V(|\Phi|) \quad (4.1)$$

$$V(|\Phi|) = \sum_{k \geq 2} c_k |\Phi|^k = \frac{1}{2} \mu^2 |\Phi|^2 + V_I(|\Phi|) \quad (4.2)$$

C'est par ce terme de connection qu'est introduit le champ quadrivectoriel de jauge, $A_\mu(x)$,

$$U(x+n\delta x, x) = 1 - ie \delta x n^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (4.3)$$

et l'expression pour la dérivée covariante devient

$$D_\mu \stackrel{def}{=} \partial_\mu + ie A_\mu \quad (4.4)$$

où la constante e quantifie le couplage du champ de jauge au champ complexe Φ . Notons que la dérivée covariante du champ se transforme comme le champ sous l'action de la symétrie

$$\begin{aligned} A_\mu &\xrightarrow{U(1)} A_\mu - \frac{\partial_\mu \alpha}{e} \\ D_\mu \Phi &\xrightarrow{U(1)} e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le champ de jauge transporte l'information des propriétés de symétrie de chaque point spatiotemporel, physiquement, il est interprété comme le champ d'influence des charges découlant de cette symétrie. Insistons aussi sur le fait que le quadrivecteur de

¹Pour un traitement mathématique plus complet sur la notion de connection, le lecteur peut consulter la section 15.1 de [25]

jaugé n'est pas uniquement défini, plusieurs quadrvecteurs différents conduisent aux mêmes équations du mouvement, nous y reviendrons dans la prochaine section.

Pour que notre lagrangien (4.1) soit complet, nous devons ajouter un terme décrivant la dynamique du champ de jauge; un terme impliquant les dérivées de celui-ci. Le lagrangien devant rester un scalaire de Lorentz, le plus simple terme dynamique pour le champ de jauge est la contraction d'un tenseur antisymétrique de second rang, $F_{\mu\nu}$.

$$F_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.6)$$

Ainsi notre lagrangien complet s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi^* - V(|\Phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Exprimons le champ complexe de façon polaire, $\Phi(x) \stackrel{def}{=} \phi(x)e^{i\theta(x)}$ et explicitons les dérivations covariantes dans (4.7)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \phi^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi) \quad (4.8)$$

Par l'application du théorème de Noether, nous obtenons le courant et la charge conservée

$$j^\mu = \phi^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu) \quad (4.9)$$

$$Q = \int d\mathbf{x} \phi^2 (\dot{\theta} - eA_0) \quad (4.10)$$

Nous appliquons ensuite les équations d'Euler-Lagrange pour obtenir les équations du mouvement du système

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi (\partial_\mu \theta - eA_\mu)^2 + V'(\phi) = 0 \quad (4.11)$$

$$\partial_\mu (\phi^2 (\partial^\mu \theta - eA^\mu)) = 0 \stackrel{(4.9)}{\Leftrightarrow} \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.12)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - e j^\nu = 0 \quad (4.13)$$

Finalement, déterminons la densité hamiltonienne associée à une configuration arbitraire des champs (ϕ, θ, A_μ)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 (\dot{\theta} - eA_0)^2 + \frac{1}{2} \phi^2 (\vec{\nabla} \theta - e\vec{A})^2 + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + V(\phi) \quad (4.14)$$

4.2 Aspects de l'électromagnétisme

Dans la théorie électromagnétique classique, la charge du champ de jauge est portée par des fermions, modélisés par des spineurs. Cependant, son origine mathématique est identique; il s'agit d'un lagrangien localement $U(1)$ symétrique et le champ de jauge nécessaire y est de même nature. C'est pourquoi les équations du mouvement pour le champ vectoriel A_μ , les équations (4.13), sont identiques aux équations de Maxwell avec sources de l'électromagnétisme classique. Il n'est donc pas surprenant que des similitudes qualitatives surviennent et nous en exploitons le langage et la phénoménologie associés.

Définissons en ce sens les composantes du tenseur de force F

$$F_{0i} \stackrel{def}{=} E_i \wedge F_{ij} \stackrel{def}{=} -\epsilon_{ijk} B^k \quad (4.15)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut ainsi identifier les deux termes faisant intervenir les composantes de F dans la densité hamiltonienne (4.14) comme associés aux énergies du champ électrique et du champ magnétique.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} &= \frac{1}{2} \vec{E}^2 \\ \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} &= \frac{1}{2} \vec{B}^2 \end{aligned}$$

4.2.1 Sur la liberté de jauge

Un mot s'impose sur la liberté du choix du quadrivecteur de jauge. Supposons que nous changions le quadrivecteur de jauge par l'addition d'une divergence totale

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

Alors les équations du mouvement (4.11, 4.12) seraient changées par une redéfinition du courant. Alternativement, l'on pourrait redéfinir θ de façon à absorber cette différence. Or, comme θ engendre précisément le sous-espace d'action de la symétrie $U(1)$ cela n'aurait aucune influence sur les observables du système. De même, les équations dynamiques (4.13) sont formellement inchangées par une telle transformation de jauge à cause de la propriété de commutation des dérivées normales. Ainsi l'ajout d'un quadrivecteur de jauge introduit un surplus de structure mathématique qui doit être réduit par le choix, arbitraire, d'une jauge de travail [26]. Dans le cas présent, ce choix influe sur la définition de la variable θ , il existe en effet une intime relation entre A_μ et $\partial_\mu\theta$ qui agissent tous deux dans le sous-espace d'action du groupe de symétrie.

4.2.2 Divergence dimensionnelle

Nous disions précédemment que cette théorie jaugee est inadmissible en $2 + 1D$. Cela s'explique par le fait que l'énergie électrostatique diverge lorsque les dimensions spatiales sont en nombre inférieure à trois. Pour le montrer, examinons le cas en deux dimensions spatiales: supposons une charge Q à l'intérieur d'une 2-sphère de Gauss de rayon R . Alors le champs électrique à l'extérieur de la 2-sphère décroît selon $\frac{Q}{r}$, et l'énergie électrostatique à l'extérieur de la sphère, $E_{j_{ext}}$, s'exprime

$$E_{j_{ext}} \propto Q \int_R^\infty r dr \frac{1}{r^2}$$

qui diverge logarithmiquement. Il n'y aura donc pas de Q -balls jaugeés en deux dimensions spatiales alors qu'en trois dimensions cet argument ne s'appliquera pas, c'est pourquoi dans la prochaine section nous nous bornerons à chercher des Q -balls jaugeé en trois dimensions spatiales.

4.2.3 Effet Meissner

Le champ électromagnétique classique est quantifié en la particule du photon. Celle-ci est dépourvue de masse comme en témoigne l'action à longue portée de la force électromagnétique. Mais il s'agit ici de l'action du champ électromagnétique se propageant dans le vide. Certains milieux ont la propriété d'être imperméables au champ magnétique et d'être caractérisés par une conductibilité infinie, ils sont dits supraconducteurs. Mathématiquement, cette imperméabilité magnétique, nommée effet Meissner, est représentée par une décroissance exponentielle du potentiel vecteur de jauge.

Il est possible de montrer que cette décroissance exponentielle est associée au coefficient du terme A^2 dans le lagrangien. Si l'on développe le second terme de l'équation (4.8), nous obtenons un terme $\frac{1}{2}e^2\phi^2A^2$ qui est un terme de masse pour le champ de jauge.²

$$m_A = e\phi \quad (4.16)$$

Nous savons dès lors que si $\phi \neq 0$ le champ décroîtra selon $e^{-\frac{r}{\lambda_A}}$, où $\lambda_A \stackrel{def}{=} m_A^{-1}$ est la longueur de Compton associée au champ de jauge.

4.3 Caractéristiques des profils du Q -ball jaugé

Nous cherchons donc une solution analogue au Q -ball de Coleman, qui soit stable, du moins énergétiquement favorable devant la solution de quanta asymptotiquement libres. Cependant, la présence du champ de jauge implique l'existence d'une force électrostatique répulsive qui pourra potentiellement déstabiliser le Q -ball.

En outre, à l'intérieur du Q -ball, le champ de jauge acquiert une masse entraînant sa décroissance exponentielle. Ainsi, si le rayon de la solution Q -ball est supérieur à λ_A , le champ entrainera la charge en surface dans une coquille d'épaisseur de l'ordre

²À ce sujet, le lecteur intéressé est invité à consulter la section 20.1 de la référence [25]

de λ_A et l'état quasi homogène intérieur sera supraconducteur. Cet aspect nouveau implique l'existence d'une limite supérieure sur le volume du Q -ball, car éventuellement, le champ électrostatique devenant trop intense en surface, des charges y seraient expulsées. Nous indexons cette tendance à la supraconduction par le rapport du rayon de la solution sur la longueur de Compton du champ de jauge;

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{\lambda_A} \quad (4.17)$$

Pour montrer l'existence du Q -ball, nous postulons un ansatz analogue au Q -ball de Coleman et obtenons les équations du mouvement pour celui-ci. Nous suivons essentiellement l'étude menée par Lee et ses collaborateurs [27]. L'obtention d'une solution sera suffisante à démontrer l'existence du soliton, mais nous ne l'obtiendrons, en toute rigueur, que numériquement. Nous discuterons ensuite des considérations de stabilité et des prédictions de ses caractéristiques.

4.3.1 Ansatz du Q -ball jaugé

À l'image du Q -ball de Coleman, nous cherchons une solution de champ Φ localisée, cohérente et quasi statique;

$$\Phi(x) = \phi(x)e^{i\omega t}, \quad \phi \geq 0 \quad (4.18)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$$

Par convention, nous posons $\omega > 0$. Nous travaillons dans une jauge telle que

$$A_0(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (4.19)$$

À partir de (4.10), la charge s'exprime donc

$$Q = \int d\mathbf{x} \phi^2 (\omega - eA_0) \quad (4.20)$$

Nous cherchons l'état de moindre énergie pour une charge donnée. L'observation de l'expression pour la densité hamiltonienne (4.14) suggère de poser $\vec{A} = 0$ pour

minimiser l'énergie, car cela n'influence point la charge. A fortiori, puisque l'on cherche une configuration cohérente, il ne peut y avoir aucun courant et le champ magnétique doit être nul partout dans l'espace. Sous ces hypothèses, décrivant l'électrostatique, la densité hamiltonienne devient

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 (\omega - eA_0)^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} A_0^2 + V(\phi) \quad (4.21)$$

Nous invoquons de nouveau le théorème de réarrangement sphérique (3.29) pour se convaincre que les champs ϕ et A_0 minimisant l'énergie sont tous deux de symétrie sphérique. Notre objectif est de trouver une solution aux équations du mouvement (4.11, 4.13) pour les profils $\phi(r)$ et $\Omega(r) \stackrel{\text{def}}{=} \omega - eA_0(r)$.

$$\phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'(r) + \phi(r) \Omega(r)^2 - V'(\phi) = 0 \quad (4.22)$$

$$\Omega''(r) + \frac{2}{r} \Omega'(r) - e\phi^2 \Omega = 0 \quad (4.23)$$

sous la contrainte de continuité à l'origine et de finitude de l'énergie,

$$\phi'(0) = 0 \quad (4.24)$$

$$A'_0(0) = 0 \Rightarrow \Omega'(0) = 0 \quad (4.25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad (4.26)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0 = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega = \omega \quad (4.27)$$

Comme pour son homologue non jaugé, l'obtention d'une solution analytique n'est possible que moyennant certaines approximations. Nous cherchons donc à poser un ansatz pour le profil $\phi(x)$ qui s'approche le plus possible de la solution réelle. En premier lieu, obtenons des informations sur le profil Ω . Il est montré par Lee et ses collaborateurs que Ω est positif, monotone croissant et borné par ω [27].

Obtenons d'abord une expression approchée pour la charge totale en prenant la limite où $r \mapsto \infty$ dans (4.23), intégrant sur l'espace et substituant l'expression (4.20) pour la charge:

$$(4.23) \Leftrightarrow (r^2 \Omega')' = e^2 r^2 \phi^2 \Omega \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow e^2 Q = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \Omega'(r) \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow \Omega(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \omega - \frac{e^2 Q}{4\pi r} \quad (4.30)$$

Si $\Omega(0) = 0$ et comme $\Omega'(0) = 0$ par (4.25), alors (4.28) implique que le profil est nul sur tout l'espace. D'autre part, si $\Omega(0) < 0$ alors Ω' est monotone décroissant. Aucun de ces deux cas n'est envisageable car $\Omega \mapsto \omega > 0$. Donc $\Omega(0) > 0$ et est monotone croissant jusqu'à atteindre ω .

De plus, comme pour le Q-ball de Coleman, $\omega < \mu$. En effet dans la limite où $r \mapsto \infty$, ϕ tend vers zéro et nous pouvons négliger les termes du potentiel d'interaction pour résoudre (4.22) en ne conservant que le terme de masse,

$$\begin{aligned} \phi'' + \frac{2}{r}\phi' + (\omega^2 - \mu^2)\phi &= 0 \\ \Rightarrow \phi &\propto \frac{e^{-r\sqrt{\mu^2 - \omega^2}}}{r} \end{aligned}$$

Comme le profil est défini positif, il ne peut osciller autour de 0, ainsi l'argument de l'exponentielle doit être réel

$$\Rightarrow \omega < \mu$$

Pour synthétiser ces informations sur Ω ,

$$0 < \Omega(0) \leq \Omega(r) \leq \Omega(\infty) = \omega < \mu \quad (4.31)$$

L'approximation pour le profil ϕ avec laquelle nous travaillerons devra respecter ce comportement.

Qu'en serait-il si $\omega < 0$? Suivant le même raisonnement, l'on obtient que $0 > \Omega(0) \geq \Omega(r) \geq \Omega(\infty) = \omega > -\mu$. Essentiellement le comportement est le même, il ne s'agit que d'une inversion de polarité, l'anti-Q-ball d'un Q-ball de pulsation ω .

4.3.2 Approximation du profil palier

N'étant pas en mesure d'obtenir de solution exacte analytiquement, nous devons trouver une approximation permettant la résolution du système d'équation. Nous allons reprendre la solution d'essai proposée pour le gros Q -ball de Coleman, l'approximation du profil ϕ par une distribution palier. Malheureusement, l'ansatz gaussien que nous utilisons pour les Q -balls de Coleman de courte extension ne nous permettra pas la résolution analytique. Dans la limite où le couplage est nul, l'on devrait retrouver tous les résultats obtenus pour le Q -ball de Coleman sous cette même approximation.

$$\phi_{\Pi}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_0 \Pi(r - R) \quad (4.32)$$

Obtenons le profil correspondant pour Ω en résolvant (4.23) dans chacune des régions

$$\Rightarrow \Omega_{\Pi}(r) = \begin{cases} \left(\omega - \frac{e^2 Q}{4\pi R} \right) \frac{R \sinh(e\phi_0 r)}{r \sinh(e\phi_0 R)} & : r \leq R \\ \left(\omega - \frac{e^2 Q}{4\pi r} \right) & : r > R \end{cases} \quad (4.33)$$

Nous constatons que ce profil pour Ω concorde avec l'exigence (4.29) et que dans la mesure où $\omega < \mu$, il satisfait aussi (4.31).

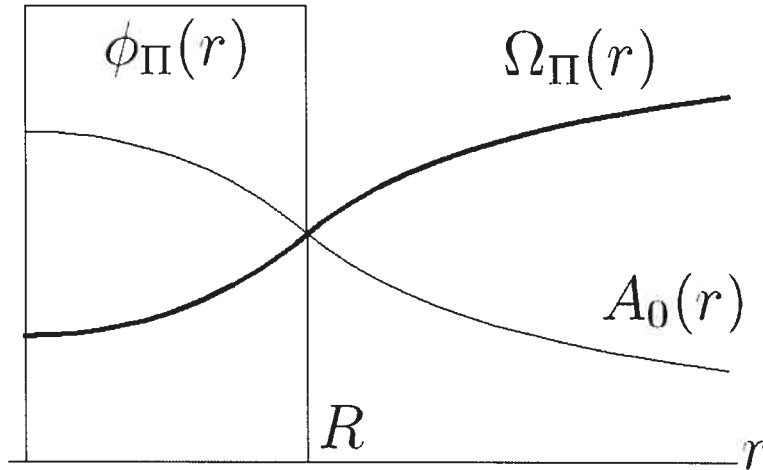


Figure 4-1: Ansatz palier pour le Q -ball jaugé

À partir de ces deux profils nous pouvons obtenir des expressions pour l'énergie et la charge et mener une étude de stabilité. L'expression (4.20) nous permet de calculer

la charge totale

$$Q = 4\pi\phi_0^2 \int dr r^2 \Omega(r) = \frac{4\pi R\omega}{e^2} \left(1 - \frac{\tanh(x)}{x}\right) \quad (4.34)$$

Réexprimons notre densité hamiltonienne (4.21) en terme de Ω

$$E = 4\pi \int dr r^2 \left[\underbrace{\frac{1}{2}\phi'^2}_{\mathcal{H}_\nabla} + \underbrace{\frac{1}{2e^2}\Omega'^2}_{\mathcal{H}_J} + \underbrace{\frac{1}{2}\phi^2\Omega^2}_{\mathcal{H}_K} + V(\phi) \right] \quad (4.35)$$

Nous appliquons encore ici l'approximation *thin wall* et négligeons la contribution de l'énergie de surface, E_∇ . Alors l'énergie totale du Q-ball est

$$E = 4\pi \int dr r^2 \left[\frac{1}{2e^2}\Omega'^2 + \frac{1}{2}\phi^2\Omega^2 \right] + \frac{4\pi R^3}{3}V(\phi_0)$$

En remplaçant l'expression (4.28) dans \mathcal{H}_K , intégrant par partie et utilisant l'expression (4.29), nous obtenons

$$\begin{aligned} E_K + E_J &= \frac{1}{2}\omega Q \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{2}\omega Q + \frac{4\pi R^3}{3}V(\phi_0) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nous pouvons alors éliminer ω en utilisant (4.34) et obtenir une expression pour l'énergie en terme de e, Q, R, ϕ_0 et x .

$$E = \frac{e^2 Q^2}{8\pi R} \left(1 - \frac{\tanh(x)}{x}\right)^{-1} + \frac{4\pi R^3}{3}V(\phi_0) \quad (4.37)$$

Nous avons donc maintenant une expression pour l'énergie en terme de x , donc de R et de ϕ_0 . En minimisant E par rapport à x avec Q et ϕ_0 fixées l'on obtient une expression transcendente en x . Dans la limite où $x \ll 1$, nous pouvons ne conserver que les premiers termes du développement.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\tanh x} - 1\right) x &= \frac{e^3 Q \phi_0^2}{4\pi \sqrt{2V(\phi_0)}} \\ \Rightarrow x^3 \left(1 - \frac{x^2}{15}\right) + \mathcal{O}(x^7) &= \frac{3e^3 Q \phi_0}{4\pi \omega_0} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{2V(\phi_0)}{\phi_0^2}} \\ \Rightarrow x &= e \left(\frac{3Q\phi_0}{4\pi\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{e^2}{45} \left(\frac{3Q\phi_0}{4\pi\omega_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nous pouvons alors exprimer le rayon avec une première correction

$$R = \left(\frac{3Q}{4\pi\phi_0^2\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{e^2}{45} \left(\frac{3Q\phi_0}{4\pi\omega_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (4.40)$$

Remarquons que le premier terme du développement du rayon correspond avec l'expression (3.50) obtenue pour le Q-ball de Coleman dans l'approximation palier.

Reste à minimiser l'énergie par rapport à ϕ_0 , ce que Lee et ses collaborateurs font en supposant que $\phi_0 = \phi_c(1 - \Lambda)$ où ϕ_c est la densité dans le cas du Q-ball non jaugé dans la limite où $\omega \mapsto \omega_0$. Ils obtiennent alors que

$$\Lambda = \frac{e^2}{5} \left(\frac{2Q^2\omega_0^4}{3\pi^2\phi_0^4} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \left[\frac{V(\phi)}{\phi^2} \right]_{\phi=\phi_0} \right)^{-1} \quad (4.41)$$

En considérant les deux premiers termes de la série de Laurent de $\left(1 - \frac{\tanh x}{x}\right)^{-1}$, on peut exprimer l'énergie totale du Q-ball comme la somme de deux termes dont le premier est formellement identique à l'énergie totale pour le Q-ball de Coleman dans l'approximation palier, donné par l'équation (3.49).

$$M = Q \sqrt{\frac{2V(\phi_0)}{\phi_0^2}} + \frac{3e^2Q^2}{20\pi R} \quad (4.42)$$

Le second représente l'énergie électrostatique. De cette énergie, une importante fraction se trouve dans le champ à l'extérieur du Q-ball puisque le champ électrique décroît en $\frac{1}{r}$.

$$E_J|_{r>R} = 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{2e^2} \Omega'^2 = 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{2e^2} \left(\frac{e^2Q}{4\pi r^2} \right)^2 = \frac{e^2Q^2}{8\pi R} \quad (4.43)$$

Ainsi, pour cet ansatz, les $\frac{5}{6}$ de l'énergie électrostatique se trouve à l'extérieur du soliton.

Si nous remplaçons dans (4.42) le premier terme du développement pour le rayon

$$E = Q\omega_0 \left(1 + \frac{3}{20} e^2 \left(\frac{4Q^2\phi_0^2}{3\pi^2\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.44)$$

Et nous pouvons alors obtenir le rapport $\frac{E}{Q}$ permettant de comparer la stabilité de la configuration à celle de mésons asymptotiquement libres et obtenir la charge maximale pour laquelle le Q -ball est énergétiquement favorable.

$$\frac{E}{Q} = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{20} e^2 \left(\frac{4Q^2\phi_0^2}{3\pi^2\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.45)$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{20\sqrt{5}\pi (\mu - \omega_0)^{\frac{3}{2}}}{3e^3\phi_0 \sqrt{\omega_0}} \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow \frac{e^2 Q_{max}}{4\pi R} = \frac{5}{3} (\mu - \omega_0) \quad (4.47)$$

Incidentement, l'on obtient le rayon maximal d'un Q -ball stable sous décomposition.

$$R_{max} = \frac{\sqrt{5}}{e\phi_0} \sqrt{\frac{\mu - \omega_0}{\omega_0}} \quad (4.48)$$

Cependant, il faut prendre ces dernières prédictions avec circonspection. Car rappelons-nous qu'elles ne sont valables que lorsque $x \ll 1$. Or $x = e\phi R$, ainsi soit il s'agit du régime très faiblement couplé ou encore pour des Q -balls de courte extension. Le second cas est de peu d'intérêt puisque ceux-ci ne seront justement pas ceux de charge maximal. Conséquemment ces expressions doivent être plutôt considérées à titre indicatif.

4.4 Résultats numériques

Nous avons obtenu plusieurs Q -balls en trois dimensions pour différentes valeurs des paramètres. Nous présentons ceux-ci et comparons leurs caractéristiques avec celles prédites dans l'approximation palier. Comme nous avons déjà effectué une analyse de l'effet du potentiel au chapitre précédent, nous concentrerons notre étude sur les différences apportées par l'existence d'un champ de jauge.

4.4.1 Méthodologie

La procédure utilisée pour intégrer les équations du mouvement fut la même que pour le Q -ball de Coleman. En outre, le potentiel choisi est identique, décrit par (3.65), afin de pouvoir comparer les solutions avec celles obtenues en l'absence de champ de jauge, car en définitive, une symétrie globale est un cas particulier de symétrie locale. Encore ici, nous éliminons deux des trois paramètres du potentiel, μ et λ , en opérant une normalisation, ceux-ci prennent alors la valeur 1.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 + \frac{1}{6}g\phi^6 \quad (4.49)$$

Lors de l'intégration des profils énergétiques, nous avons du cette fois ajouter la contribution du champ électromagnétique extérieur au Q -ball, car Ω décroît selon $\frac{1}{r}$ et non exponentiellement comme le profil pour ϕ .

4.4.2 Espace des paramètres

Notre espace des paramètres est maintenant tridimensionnel, pour chaque triplet de (Ω_0, g, e) il existe au maximum un Q -ball dans son état fondamental. Comme pour la théorie non jaugée, pour que le potentiel soit calibré la contrainte (3.67) minorant g doit être respectée. Quoique ce ne soit plus rigoureusement une contrainte, la donnée de ω_0 par (3.68) est un indicateur de la région au voisinage de laquelle se trouveront des solutions étendues, assimilables à l'ansatz palier.

4.4.3 Résultats et discussion

Nous avons d'abord vérifié que les solutions de Q -balls aux équations du mouvement pour le Q -ball jaugé, mais avec une constante de couplage $e = 0$ sont identiques aux solutions trouvées pour le Q -ball de Coleman.

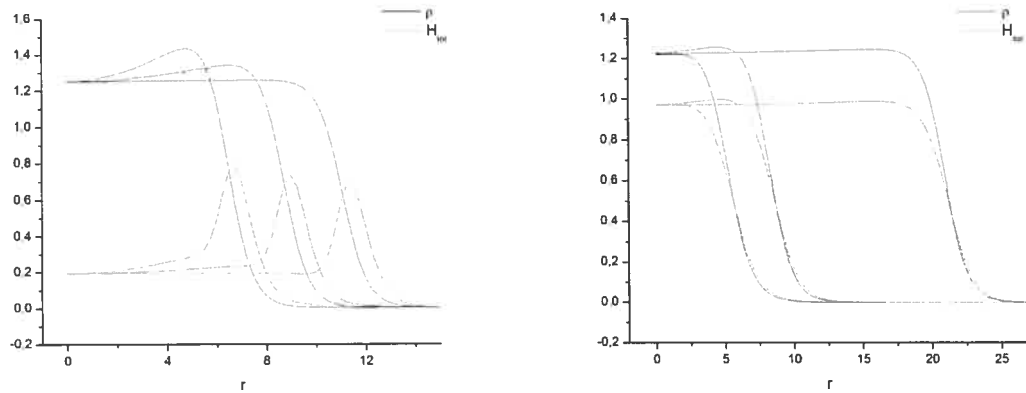


Figure 4-2: Densité de charge et d'énergie pour des constantes de couplage 0.1, 0.05 et 0.01 par ordre croissant de rayon. À gauche, $g = \frac{3}{16}$ (le potentiel est dégénéré); à droite $g = 0.5$.

Observons d'abord l'influence de la constante de couplage sur le profil de densité de charge; sur la figure 4-2 sont illustrés de tels profils pour différentes valeurs de e . Comme nous l'avons dit, lorsque le rayon est de l'ordre ou supérieur à λ_A la charge s'accumule en surface et la densité y est plus importante. L'on y observe ce comportement: pour $g = 3/16$ les valeurs de x sont 1.53, 1.00 puis 0.25 selon l'ordre croissant de rayon des Q -balls. À noter sur cette figure que la densité d'énergie dans le coeur quasi homogène du Q -ball pour $g = 3/16$ n'est que de l'énergie cinétique due à la rotation interne, car les deux valeurs pour ϕ , interne et externe, sont dégénérées en terme d'énergie potentielle. L'importante concentration énergétique en surface origine de l'addition de l'énergie gradient et potentielle, la contribution d'énergie électrostatique occupe respectivement 19%, 10% et 0,8% et n'y est pas aussi concentrée en surface. C'est beaucoup plus subtil pour la figure de droite où $g = 0.5$, car x prend les valeurs 0.86, 0.81, 0.28. Considérant qu'ici une importante contribution d'énergie potentielle est présente à l'intérieur du Q -ball, la contribution d'énergie électrostatique représente 7%, 5% et 1% respectivement.

Plusieurs des prédictions de Lee et ses collaborateurs reposent sur un développement en terme de x et la représentativité des premiers termes ne sera valable que lorsque que $x \ll 1$. Or, comme le montre la figure 4-3, x croît avec la charge, restreignant

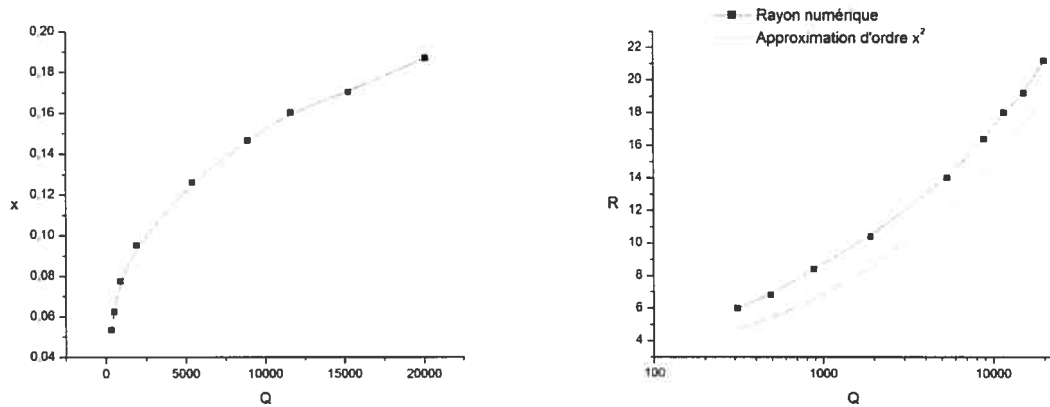


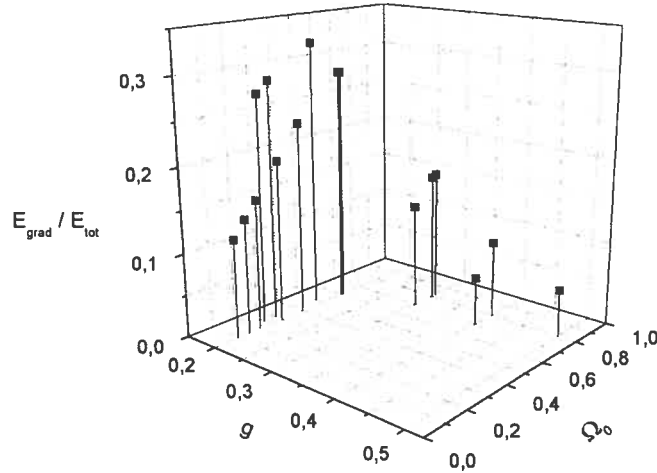
Figure 4-3: À gauche, paramètre x en fonction de la charge. À droite, rayon du Q -ball pour $g = 1$ et $e = 0.01$.

alors le domaine de validité aux petits Q -balls à faible tendance supraconductrice.

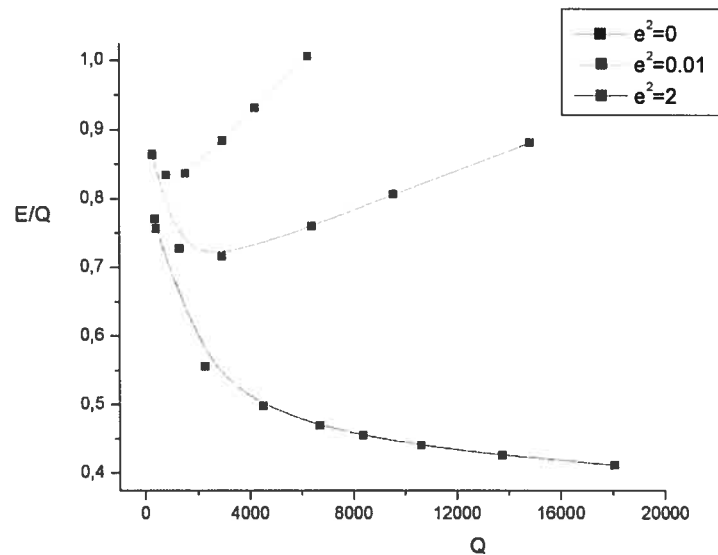
Comme pour le Q -ball de Coleman, nous avons invoqué l'approximation *thin wall* pour négliger l'énergie de surface lors de la minimisation de l'énergie pour obtenir les caractéristiques des Q -balls dans l'approximation palier. Encore ici, plus g est près de la brisure de symétrie ($g = 3/16$), plus la proportion d'énergie gradient est importante. L'observation de la figure 4-4 montre aussi que ce rapport décroît avec Ω_0 . Comme pour le cas non jaugé, l'on s'attend qu'avec l'augmentation de la charge et donc du rayon l'approximation gagne en validité.

Ainsi, les expressions obtenues ne sont valides que sur un intervalle borné de charge, car les deux approximations avec lesquelles nous avons travaillé ne sont valides que l'une à faible charge et l'autre à forte charge.

Comme c'était le cas pour le Q -ball de Coleman, les prédictions pour le rayon ne sont pas trop bonnes. L'échantillonnage présenté sur la figure 4-3 est pourtant composé de Q -balls pour lesquels $x < 0,19$. La correction de d'ordre x^2 étant infime ($< 1\%$ en général), il est plutôt question de la définition choisie pour le rayon, la même que pour le Q -ball de Coleman, $\phi(R) \stackrel{def}{=} \frac{1}{e}\phi_0$.

Figure 4-4: Proportion d'énergie gradiente, $e = 0.1$

La question principale reste la stabilité. Nous avons obtenu des courbes de stabilité en fonction de la charge pour trois constantes de couplages différentes. Alors que pour le Q -ball de Coleman il n'existait pas de charge maximale, lorsque le couplage est non nul, la répulsion des charges entraîne une déstabilisation du Q -ball qui empire avec l'augmentation de la charge. De sorte qu'il existe une charge maximale jusqu'à laquelle un Q -ball reste énergétiquement favorable devant autant de mésons libres. Cette tendance s'observe clairement sur la figure 4-5. Il importe de noter sur la figure 4-6 la contribution importante de l'énergie électrostatique extérieure au Q -ball, en effet celle-ci est la principale responsable de cette déstabilisation. En outre, on peut montrer que la prédiction pour Q_{max} n'est pas valable pour $e \approx 0.1$ a fortiori encore moins pour $e > 0.1$. Considérons un potentiel caractérisé par $g = 0.2$, alors à partir de l'équation (4.46) $Q_{max} \approx \frac{5}{e^3}$. Pour $e \approx 0.1$ ($e^2 \approx 0.01$), $Q_{max} \approx 5000$, alors que pour une telle valeur de charge $\frac{E}{Q} \approx 0.75$. Il est difficile de montrer sa validité pour des valeurs de $e < 0.1$, car alors Q_{max} atteint des valeurs énormes pour lesquelles nous n'avons pas de solutions numériques; nous avons évoqué au chapitre précédent la difficulté de trouver de très gros Q -balls, cette difficulté existe toujours pour le cas des jaugés.

Figure 4-5: Stabilité en fonction de la charge, $g = 0.2$

Lorsque x est faible, les prédictions pour l'énergie sont quant à elles très bonnes comme le démontre la figure 4-7 à gauche. Il s'agit du même échantillonnage que pour la figure 4-3. Cependant, les prédictions perdent leur validité lorsque $x > 1$ comme on le voit sur la figure de droite sur laquelle est représentée l'énergie de Q -balls dont la constante de couplage est plus élevée ($e = \sqrt{2}$).

De même la prédiction pour l'énergie électrostatique donnée par le second terme de l'équation (4.44) correspond très bien, comme en témoigne la figure 4-7 et ce même pour l'échantillonnage de couplage plus élevé où $x > 1$. En revanche que l'énergie électrostatique extérieure représente $\frac{5}{6}$ de l'énergie électrostatique total semble exagéré. Il est possible que pour des Q -balls beaucoup plus volumineux la tendance montrée sur la figure 4-6 atteigne cette proportion, mais alors le Q -ball risquerait d'être instable.

La densité au coeur montre le même comportement que pour le Q -ball de Coleman lorsque le couplage est faible. La figure 4-8 montre d'abord une augmentation jusqu'à une densité maximale suivie d'une décroissance vers ϕ_c . À droite est illustré la forme du haut du profil pour ϕ pour quatre valeurs de la charge. Ainsi l'accumulation de charge

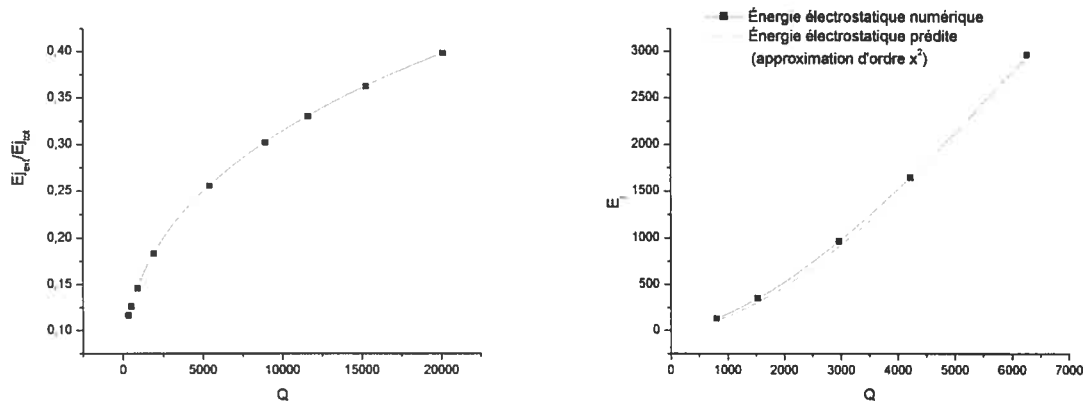


Figure 4-6: À gauche : proportion de l'énergie électrostatique extérieure ($r > R$) au Q -ball , $g = 1$. À droite : énergie électrostatique totale.

forme d'abord un pic relativement étroit de densité qui augmentera jusqu'à atteindre un maximum pour décroître ensuite en s'étendant jusqu'à ce que le rayon devienne de l'ordre de λ_A où la charge s'accumulera de plus en plus en surface et destabilisera éventuellement le Q -ball . À ce sujet, même en l'absence de prééminence du profil de ϕ , le Q -ball peut très bien exhiber cette concentration de charge en surface. La figure 4-9 montre un Q -ball modélisé adéquatement par l'approximation thin wall qui exhibe une telle concentration.

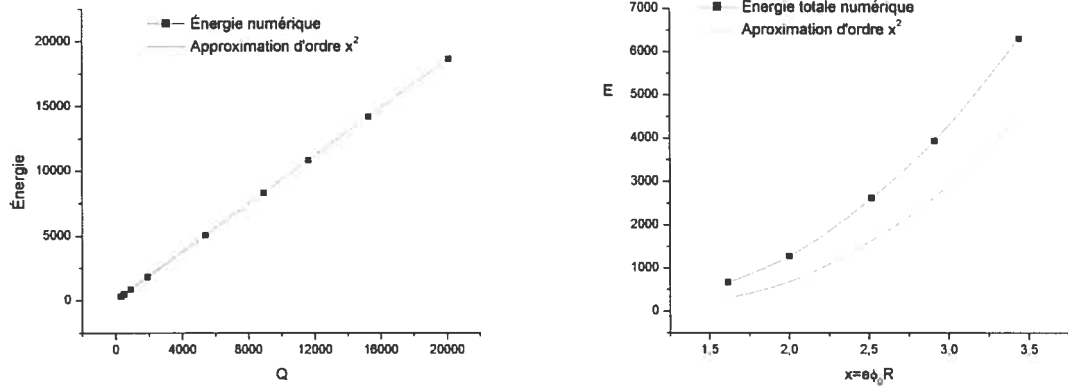


Figure 4-7: Énergie total. À gauche, en fonction de Q pour $g = 1$ et $e = 0.01$ ($x < 0.19$). À droite en fonction de x pour $g = 0.2$ et $e = 1.41$.

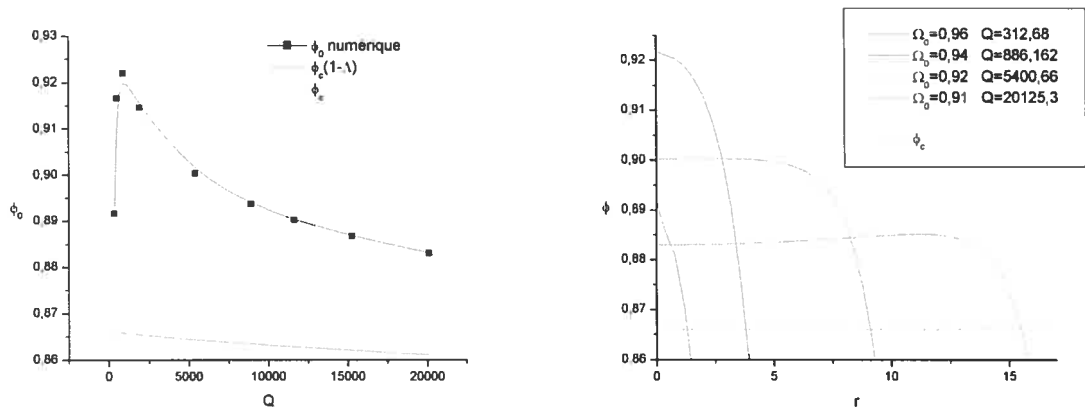


Figure 4-8: À gauche : évolution de la densité au coeur en fonction de la charge. À droite : forme du profil pour différentes valeurs de charge.

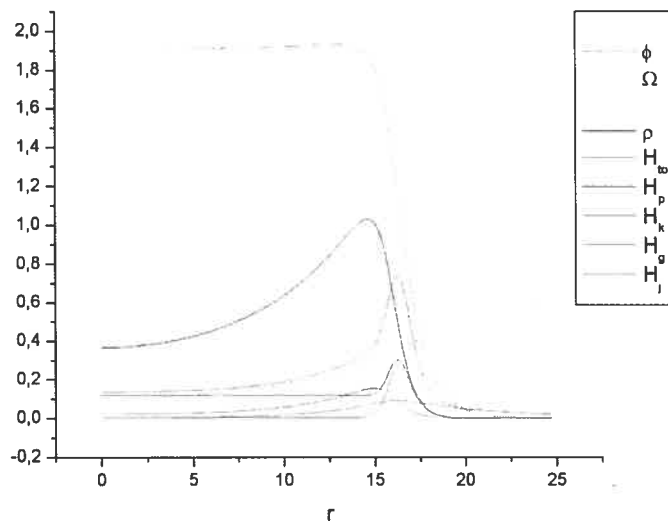


Figure 4-9: Densité de charge et distribution d'énergie; $Q = 14841$, $g = 0.2$ et $e = 0.1$.

CHAPITRE 5

Le Q -ball de Maxwell-Chern-Simons

Nous considérons un troisième lagrangien possédant des solutions de type Q -ball. L'ajout d'un terme de Chern-Simons à la densité lagrangienne du dernier chapitre vient considérablement altérer la dynamique du système, notamment en rendant massif le champ de jauge dans tout l'espace et en exhibant une nouvelle propriété, l'effet magnéto-électrique. Ces caractéristiques permettront de contourner la divergence énergétique rendant impossible l'obtention de Q -balls jaugés en deux dimensions spatiales.

5.1 Contexte théorique

Nous considérons une théorie lagrangienne en $2 + 1D$ pour un champ scalaire complexe Φ possédant la symétrie $U(1)$ locale. Pour les raisons qui furent exposées dans le chapitre précédent, nous devons introduire un champ quadrivectoriel de jauge ainsi qu'un tenseur de second rang contenant la dynamique de celui-ci. La densité lagrangienne (4.7) est modifiée par l'ajout d'un terme de Chern-Simons^{1 2}

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \quad (5.1)$$

¹Nous pourrions définir un terme similaire en $3 + 1D$, cependant celui-ci serait identiquement nul par les propriétés de symétrie du tenseur antisymétrique

$$\Delta\mathcal{L}_{CS_{3+1D}} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\rho$$

Comme auparavant, nous écrivons le champ complexe de façon polaire; $\Phi(x) \stackrel{def}{=} \phi(x)e^{i\theta(x)}$ et notre densité lagrangienne devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\phi^2(\partial_\mu\theta - eA_\mu)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - V(\phi) \quad (5.2)$$

L'application du théorème de Noether nous donne le même courant de charge conservé qu'en l'absence du terme de Chern-Simons

$$j^\mu = \phi^2(\partial_\mu\theta - eA_\mu) \quad (5.3)$$

$$Q = \int d\mathbf{x} \phi^2(\dot{\theta} - eA_0) \quad (5.4)$$

Celui-ci découle de la symétrie locale $U(1)$, cependant la présence du terme de Chern-Simons implique l'existence d'une autre symétrie, de divergence cette fois.³ En effet sous la transformation de jauge (4.5)

$$A_\mu \xrightarrow{U(1)} A_\mu - \frac{\partial_\mu\alpha}{e} \quad (5.5)$$

$\Delta\mathcal{L}_{CS}$ n'est modifié que par une divergence totale alors que le reste du lagrangien est invariant.

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda \xrightarrow{U(1)} \epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \frac{1}{e}\partial_\mu\epsilon^{\mu\nu\lambda}\alpha\partial_\nu A_\lambda$$

L'on identifie donc un courant de divergence qui est lui aussi conservé

$$\tilde{j}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda \quad (5.6)$$

$$\partial_\mu\tilde{j}^\mu = 0$$

$$\tilde{Q} = \int d\mathbf{x} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \quad (5.7)$$

²Il est intéressant de considérer qu'un tel terme puisse originer d'une définition plus générale de la dérivée covariante,

$$\tilde{D}_\mu\Phi = (\partial_\mu + ieA_\mu + i\tilde{e}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda)\Phi$$

cependant, le paramètre κ serait alors égal à $2e\tilde{e}|\Phi|^2$ et serait nulle dans le vide. À ce sujet le lecteur peut se référer à [28]

³Pour un traitement exhaustif sur les symétries de divergence et les courants associés, le lecteur peut se référer à [18].

Nous obtenons les équations du mouvement grâce aux équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi (\partial_\mu \theta - e A_\mu)^2 + V'(\phi) = 0 \quad (5.8)$$

$$\partial_\mu (\phi^2 (\partial^\mu \theta - e A^\mu)) = 0 \stackrel{(5.3)}{\Leftrightarrow} \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.9)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \kappa \tilde{j}^\nu - e j^\nu = 0 \quad (5.10)$$

La présence du terme $\Delta \mathcal{L}_{CS}$ n'a pas d'influence sur l'hamiltonien du système, décrit par (4.14). Étant de premier ordre de dérivation spatiotemporelle; celui-ci n'induit qu'une divergence spatiale totale [34]

$$\Delta \mathcal{H}_{CS} = \partial_k (F^{k0} A_0) \quad (5.11)$$

En effet, comme l'on impose que les champs soient nuls à l'infini, l'application du théorème de Gauss à (5.11) sur tout l'espace implique que l'ajout de ce terme ne contribue pas directement à l'énergie totale du système et qu'il peut être ignoré dans l'expression de l'hamiltonien. Cependant, du à l'effet magnéto-électrique, qui sera décrit dans la prochaine section, la configuration des champs sera affectée et donc incidemment, l'énergie du système.

5.2 Électromagnétisme de Maxwell-Chern-Simons

Nous avons souligné pour le cas simplement jaugeé que les équations du mouvement pour le champ de jauge engendrent les équations de l'électromagnétisme classique. La présence de $\Delta \mathcal{L}_{CS}$ modifie cela, il y a maintenant deux courants conservés et les équations (5.10) ne sont plus identiques à celles de Maxwell. Il s'agit néanmoins du champ de jauge originant d'une symétrie $U(1)$ locale héritant donc de caractéristiques propres à l'électromagnétisme.

Comme auparavant, nous identifions les composantes temporelles du tenseur de force F au champ électrique et celles spatiales au champ magnétique. Cependant comme

nous sommes maintenant en deux dimensions spatiales, ce dernier est un scalaire et le champ électrique n'a que deux composantes

$$F_{0i} \stackrel{def}{=} E_i \wedge F_{ij} \stackrel{def}{=} -\epsilon_{ij} B \quad (5.12)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 \\ -E_1 & 0 & -B \\ -E_2 & B & 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc réécrire les équations du mouvement (5.11) dans le formalisme vectoriel pour constater la différence avec les équations de Maxwell⁴ .⁵

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \kappa \tilde{\rho} + e\rho \quad (5.13)$$

$$\nabla \wedge B = \dot{\mathbf{E}} + \kappa \tilde{\mathbf{j}} + e\mathbf{j} \quad (5.14)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\dot{B} \quad (5.15)$$

$$\tilde{\rho} \stackrel{(5.6)}{=} \epsilon^{ij} \partial_i A_j = -B$$

$$\tilde{\mathbf{j}}^k \stackrel{(5.6)}{=} \epsilon^{ki} F_{0i} = \epsilon^{ki} E_i$$

5.2.1 Effet magnéto-électrique

L'intégration de (5.13) indique que le champ électrique est engendré par la présence de charges électriques (celles découlant de la symétrie $U(1)$), mais aussi par l'existence d'un flux magnétique Φ_m .

$$\int d\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{E} = \kappa \int d\mathbf{x} \tilde{\rho} + e \int d\mathbf{x} \rho$$

⁴Une étude des solutions générales de l'électromagnétisme de Maxwell-Chern-Simons est effectuée dans l'article S. G. Kamath [29] ainsi que dans l'appendice de l'article de R. D. Pisarski et S. Rao [38]. Il peut être intéressant de faire un rapprochement entre les équations de Maxwell-Chern-Simons et l'électrodynamique des axions [39].

⁵En deux dimensions spatiales, le rotationnel d'un vecteur donne un scalaire et celui d'un scalaire donne un vecteur:

$$(\nabla \wedge)_{2D} \stackrel{def}{=} \epsilon^{ij} \partial_i$$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \kappa \underbrace{\int d\mathbf{x} (-B)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Q} = -\Phi_m} + eQ \quad (5.16)$$

La charge du courant de divergence n'est autre que le flux magnétique. De même, un champ électrique, même statique, induit un champ magnétique comme le montre l'équation (5.14).

Un autre effet important de l'ajout du terme de Chern-Simons est de conférer une masse aux champs électrique et magnétique assurant leur localisation [37]. En effet, $\Delta\mathcal{L}_{CS}$ est un terme de masse invariant de jauge

$$\begin{aligned} \epsilon_{\nu\lambda\rho} \cdot (5.10) &\Rightarrow \partial_\lambda \tilde{j}_\rho + \frac{\kappa}{2} F_{\lambda\rho} + \frac{e}{2} \epsilon_{\nu\lambda\rho} j^\nu = 0 \\ &\stackrel{\cdot\partial^\lambda}{\Rightarrow} \partial^2 \tilde{j}_\rho + \kappa^2 \tilde{j}_\rho + \frac{\kappa e}{2} j_\rho + \frac{e}{2} \epsilon_{\nu\lambda\rho} \partial^\lambda j^\nu = 0 \\ &\Rightarrow (\partial^2 + \kappa^2) \tilde{j}_\rho = \left(\frac{\kappa e}{e} g_{\rho\nu} + \frac{e}{2} \epsilon_{\nu\lambda\rho} \partial^\lambda \right) j^\nu \end{aligned}$$

Ainsi, en l'absence de courant j ,

$$\stackrel{\cdot\epsilon^{\rho\alpha\beta}}{\Rightarrow} (\partial^2 + \kappa^2) F^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.17)$$

C'est pourquoi les champs \mathbf{E} et B sont tous deux confinés au voisinage des charges et décroissent selon $e^{-\kappa r}$. Ce constat en conjonction avec l'équation (5.16) implique que la charge électrique et le flux magnétique, Φ_m , sont intimement liés. Supposons qu'une surface fermée S englobe la charge électrique, le champ \mathbf{E} est nul à l'extérieur (en toute rigueur il subsiste une infime densité de champs électrique qui décroît exponentiellement que nous assimilons à zéro).

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \kappa \tilde{Q} + eQ = 0 \\ \Rightarrow \kappa \tilde{Q} &= -eQ \Leftrightarrow \Phi_m = \frac{e}{\kappa} Q \end{aligned} \quad (5.18)$$

Les deux charges sont mutuellement conservées; la charge électrique engendre le flux magnétique et inversement.⁶

⁶Cette étrange propriété fut observée dans la nature, en effet certains cristaux exhibent l'effet magnéto-électrique. Pour plus de détails à ce sujet le lecteur peut se référer à [30], [31].

Cet effet de confinement des champs prévient la divergence énergétique que l'on retrouve pour l'électromagnétisme classique en $2 + 1D$. Nous pouvons donc conclure qu'il existe une solution de Q mésons libres d'énergie μQ obtenus par perturbation du vide.⁷

5.3 Ansatz Q-ball

Puisqu'il est maintenant possible de parler de solutions d'énergie finie dans le contexte d'une théorie de Maxwell-Chern-Simons (MCS) en deux dimensions spatiales, peut-on trouver des Q-balls dont l'énergie soit moindre qu'autant de mésons libres?

Reprenons notre ansatz quasi statique, $\Phi(x) = \phi(r)e^{i\omega t}$ et choisissons la même jauge de travail qu'au chapitre précédent; la charge électrique reste identique

$$Q = \int d\mathbf{x} \phi^2 (\omega - eA_0)$$

mais implique maintenant l'existence d'un flux magnétique conservé

$$\Phi_m = \frac{e}{\kappa} \int d\mathbf{x} \phi^2 (\omega - eA_0) = \int d\mathbf{x} B \quad (5.19)$$

Ainsi le champ manétique ne peut être nul lorsque $Q = 0$.

Exprimons la densité d'énergie à partir de (4.14) en se rappelant que pour une solution quasi statique, le champ de jauge est indépendant du temps

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 (\omega - eA_0)^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\nabla} A_0^2}_{=|\mathbf{E}|^2} + \frac{1}{2} e^2 \phi^2 |\mathbf{A}|^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon^{ij} \partial_i A_j)^2}_{=B^2} + V \quad (5.20)$$

Nous savons par le théorème de réarrangement sphérique (3.29) que ϕ et A_0 sont des fonctions radiales pour la configuration d'énergie minimale. Mais le théorème ne

⁷À noter qu'il n'est plus nécessaire de parler de liberté asymptotique, car les champs étant confinés, les mésons n'interagiront pas entre eux à moins d'être en contact. Il peut néanmoins subsister des corrélations de nature quantique entre les particules.

nous permet pas directement de conclure au sujet de A_i . Cependant comme A_0 et ϕ sont radiaux, alors la distribution de charge électrique est de symétrie sphérique et ainsi par (5.13) $\bar{\rho}$ doit aussi être de symétrie sphérique. L'on conclue que les composantes de \mathbf{A} sont des fonctions à dépendance radiale. Ce vecteur peut être exprimé en composantes radiale et tangentielle:

$$A_i = \theta_i a(r) + \frac{r_i}{r} c(r) \quad (5.21)$$

$$\theta^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon^{ij} r_j}{r}$$

La composante radiale est sans intérêt et ne contribue pas au flux, nous la posons nulle. Elle origine du choix de jauge (5.5) et l'on ne lui attribue pas de signification physique dans le contexte d'une description classique.⁸

$$\Phi_m = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (d\mathbf{l} \perp \hat{r}) \quad (5.22)$$

$$\partial_i \alpha = \frac{r_i}{r} \alpha'(r) \Rightarrow c(r) = \frac{1}{r} \alpha'(r)$$

Nous pouvons donc réécrire les équations du mouvement (5.8, 5.10) pour des profils radiaux et chercher les caractéristiques des solutions.

$$\frac{1}{r} (r\phi')' + \phi \left((\omega - eA_0)^2 - e^2 a^2 \right) - V'(\phi) = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{r} (rA_0')' - 2e\phi^2 (\omega - eA_0) + \frac{\kappa}{r} (ra)' = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{r} (ra')' - \frac{1}{r^2} a - 2e^2 \phi^2 a - \kappa A_0' = 0 \quad (5.25)$$

Exprimons la densité hamiltonienne pour une configuration cohérente de symétrie sphérique

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \left((\omega - eA_0)^2 + e^2 a^2 \right) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} A_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} (ra)' \right)^2 + V \quad (5.26)$$

⁸Aharonov et Bohm ont cependant montré que le quadrivecteur de jauge peut avoir des effets mesurables dans le paradigme quantique [32]

5.3.1 Conditions aux frontières

Nous savons d'emblée que ϕ et A_0 doivent respecter des conditions à l'origine et à l'infini spatial,

$$\phi'(0) = 0 \quad , \quad \phi(0) \stackrel{def}{=} \phi_0 \quad (5.27)$$

$$A'_0(0) = 0 \quad (5.28)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad (5.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_0 = 0 \quad (5.30)$$

Obtenons le comportement de $a(r)$ à l'origine en imposant $r \ll 1$ dans (5.25)

$$\begin{aligned} r \ll 1 \quad \Rightarrow \quad a'' + \frac{1}{r}a' - \frac{1}{r^2}a &= 0 \\ \Rightarrow a(r) &= C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Comme le second terme diverge à l'origine, on le pose nul, ce qui implique

$$a'(0) = C_1 \stackrel{def}{=} da_0 \quad (5.31)$$

Aussi, l'on peut obtenir son comportement asymptotique

$$\begin{aligned} (5.22) \wedge (5.18) \Rightarrow Q &= \frac{\kappa}{e} \oint_R a \theta^k dl_k = \frac{2\pi\kappa}{e} a R \\ a &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{eQ}{2\pi\kappa r} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Disposant des ces conditions aux frontières notre tâche est de trouver les profils pour ϕ , A_0 et a ainsi que l'énergie et la charge associées. Cependant, le système d'équations étant très complexe, seule une approche numérique nous a semblée possible. Même l'ansatz d'un profil palier pour ϕ ne suffit à permettre l'obtention de prédictions analytiques.

5.4 Résultats numériques

Nous avons obtenu plusieurs Q -balls de MCS en deux dimensions spatiales. En soit cela suffit à prouver leur existence. Nous étudions dans cette section leurs caractéristiques, principalement l'influence du paramètre κ . Nous comparons l'énergie de ces solutions avec celle de Q mésons libres et montrons qu'il existe des solutions énergétiquement favorables et donc stables sous processus de décomposition.

5.4.1 Méthodologie

L'obtention de solutions au système d'équation (5.23,5.24,5.25) s'est avérée beaucoup plus difficile que pour les cas de Q -balls de Coleman et jaugés. La procédure d'intégration utilisée jusqu'alors, utilisant l'algorithme *shooting*, ne nous a pas permis de trouver de solutions. Nous avons du avoir recours à une méthode alternative nommée relaxation. Alors que la première ne fait intervenir que les conditions aux frontières comme intrants, la seconde nécessite une première approximation de solution qu'elle modifie itérativement jusqu'à l'obtention d'une solution satisfaisante. Tout le détail de l'algorithme se trouve dans [24].

Par soucis de continuité, nous avons utilisé le même potentiel d'interaction que pour les deux chapitres précédents, décrit par (3.65).

Dans le cas des Q -balls jaugés, nous devons suppléer à l'intégration numérique de l'énergie la contribution du champ électrique extérieure au domaine numérique. Ce n'est plus nécessaire ici puisque la présence du terme de Chern-Simons rend le champ électromagnétique massif et donc celui-ci décroît exponentiellement hors de la distribution de charge.

5.4.2 Espace des paramètres

L'espace des paramètres est engendré par (ω, g, e, κ) . Nous ne prétendons pas l'avoir couvert, sinon effectué un travail de débroussaillage exhibant les caractéristiques principales des solutions.

Pour que le potentiel soit calibré,

$$g > \frac{3}{16}$$

5.4.3 Résultats et discussion

C'est en observant l'influence du paramètre κ que nous avons découvert un comportement fort étrange de l'évolution des solutions dans l'espace des paramètres. Il semble y avoir deux types de solutions Q -balls de MCS; des petits très étroits et des gros, étendus. Rien de nouveau jusqu'à présent, nous avons observé la même chose tant pour le Q -ball de Coleman que pour celui simplement jaugé. Ce qui est particulier est leur apparente localisation dans l'espace des paramètres. Pour certaines valeurs de (ω, g, e, κ) l'on obtient une solution étendue dont l'énergie est de l'ordre de $10^2, 10^3$ ou 10^4 unités alors que pour un point voisin, la solution obtenue est très étroite et d'énergie de l'ordre de 10 unités! La figure 5-1 illustre le phénomène. L'on y observe une tendance brisée abruptement en deux endroits. D'une part les gros Q -balls sont de plus en plus gros et stables à mesure que κ augmente; cela correspond à nos attentes puisque l'augmentation du paramètre κ a pour effet de diminuer la portée du champ électromagnétique, sa contribution à l'énergie et la pression électrostatique en surface. D'autre part sur certains intervalles ce sont des petits Q -balls qui sont solutions. Ces frontières abruptes entre solutions étendues, stables et très fortement chargées et petits Q -balls métastables ($\frac{E}{Q} > 0.95$) faiblement chargés se retrouvent un peu partout dans l'espace des paramètres. La figure 5-2 illustre deux tels profils. Il importe de noter la grande proximité dans l'espace des paramètres de ces deux solutions, une différence de

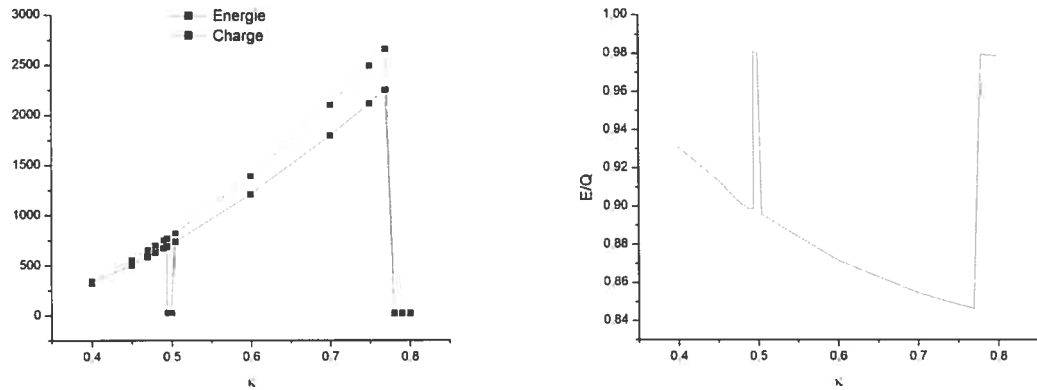


Figure 5-1: À gauche: énergie et charge des solutions en fonction de κ pour $g=0.5$, $e=0.1$ et $\omega=0.9$. À droite $\frac{E}{Q}$ pour le même échantillon.

0.012 pour la pulsation interne seulement, alors que leurs caractéristiques sont complètement différentes.

Comment expliquer cette discontinuité? La réponse réside dans le fait que la pulsation n'est pas une donnée a priori du système, mais bien une conséquence. En effet ce qui est donnée en plus des paramètres e , κ et g est la quantité de charge totale. C'est pourquoi ces frontières dans l'espace des paramètres n'ont pas d'existence physique. Pour illustrer notre propos, considérons un système paramétré par $e = 0.1$, $\kappa = 2$ et $g = 0.5$ possédant 20.47 unités de charges. Alors la configuration adoptée serait celle illustrée sur la figure 5-2 à gauche. Supposons que l'on ajoute progressivement des charges au système. Alors, le profil et la pulsation du Q-ball seraient modifiés, et ce de façon continue. Lorsqu'éventuellement serait atteinte une charge totale de 18522.3 unités, la configuration serait celle de la figure 5-2 à droite. En aucun moment ne s'observerait de saut discontinu d'un état à un autre.

Une autre chose à ce sujet mérite d'être mentionnée. Rappelons-nous que pour la donnée de (ω, g, e, κ) il peut y avoir plus d'une solution, car le système d'équations différentielles est non linéaire. Il est donc fort probable qu'en réalité, il existe des solutions venant interpoler continuellement les courbes E et Q sur la figure 5-1. Les

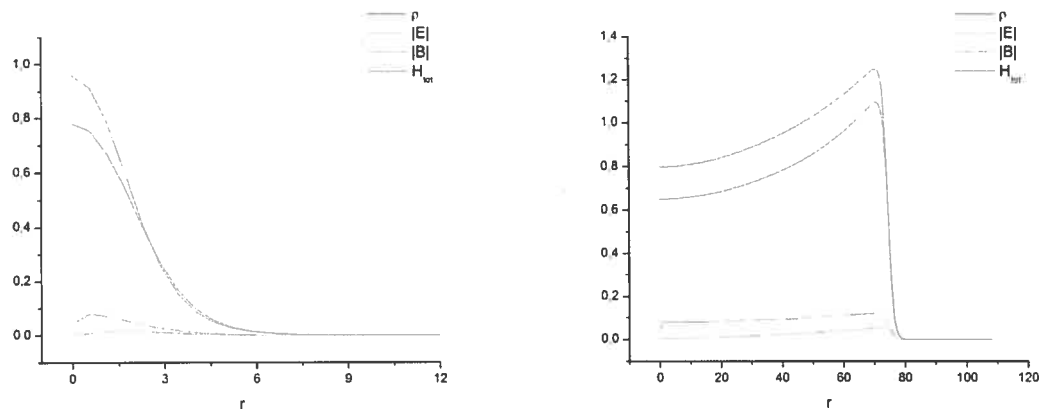


Figure 5-2: Deux profils de Q -balls de MCS pour un modèle décrit par les paramètres $e = 0.1$, $\kappa = 2$ et $g = 0.5$. À gauche, un petit Q -ball de 20.47 unités de charge dont la pulsation interne $\omega = 0.9$. À droite un Q -ball très étendu de 18522.3 unités de charges pour lequel $\omega = 0.888$.

petits Q -balls métastables ne seraient alors qu'une solution moins stable pour le même point de l'espace des paramètres. Si tel est le cas, alors selon la quantité de charge disponible, la configuration adoptée sera la plus stable des deux.

Maintenant que nous avons éclairé cette situation, examinons l'influence de κ sur la caractéristiques des Q -balls de MCS. La figure 5-3 à gauche nous montre la dépendance du rayon sur la charge. Le comportement est très similaire à celui observé tant pour les Q -balls simplement jaugés, figure 4-3, que pour ceux de Coleman, figure 3-6. La figure 5-4 à gauche quant à elle met en évidence un autre comportement observé pour les homologues de Coleman et ceux simplement jaugés (figures 3-11 et 4-8 respectivement), l'absorption de charge pour un petit Q -ball provoque d'abord une hausse de la densité jusqu'à l'atteinte d'un maximum puis une diminution lente de celle-ci accompagnée d'une expansion dans l'espace et une migration des charges vers la surface.

Quant à la stabilité, comme nous arguons dans le chapitre précédent que la présence d'un champ électrique vient déstabiliser le Q -ball en créant une pression due à la concentration de charge, nous nous attendons à ce que l'augmentation de κ diminue le rapport $\frac{E}{Q}$ et augmente ainsi la stabilité. En effet, la présence du terme de Chern-

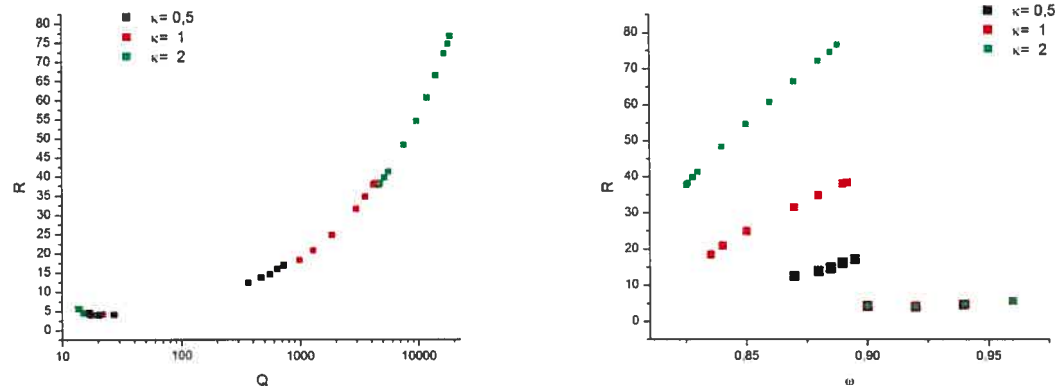


Figure 5-3: À gauche: étendue des solutions Q -balls de MCS en fonction de la charge pour différentes valeurs du paramètre κ ; $e = 0.1$ et $g = 0.5$. À droite: même échantillon, mais exprimé en terme de la pulsation, ω .

Simons a pour effet de rendre le champ électromagnétique massif dans tout l'espace diminuant considérablement l'effet répulsif, même à l'intérieur du Q -ball. Nous observons sur la figure 5-5 que la présence de ce terme rend possible l'existence et la stabilité de très gros Q -balls. Celle-ci doit être comparée avec la figure 4-5 du chapitre précédent qui indiquait l'existence d'une charge maximale pour le cas simplement jauge. Quoiqu'il n'en est pas certain, cette figure suggère que des Q -balls arbitrairement chargés puissent être stables dans la mesure où κ est d'autant plus grand que le couplage avec le champ de jauge est important.

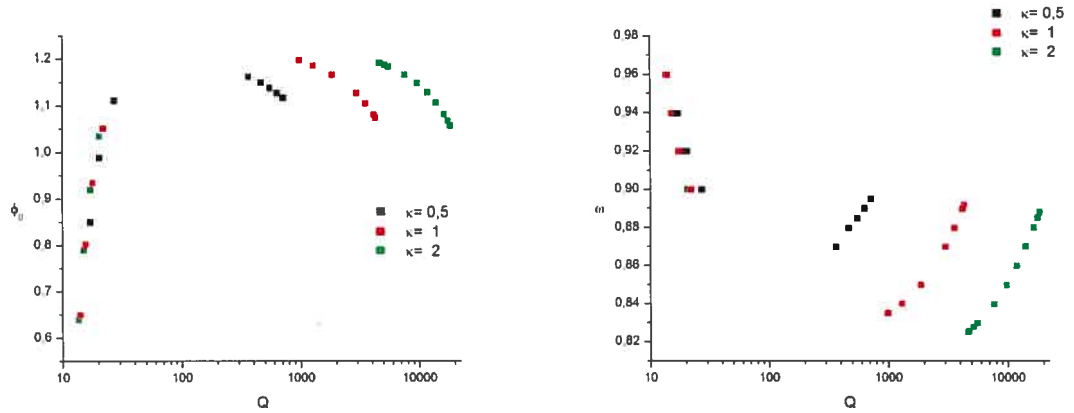


Figure 5-4: À gauche: densité au coeur des solutions Q -balls de MCS en fonction de la charge pour différentes valeurs du paramètre κ ; $e = 0.1$ et $g = 0.5$. À droite : pulsation en fonction de la charge pour le même échantillon.

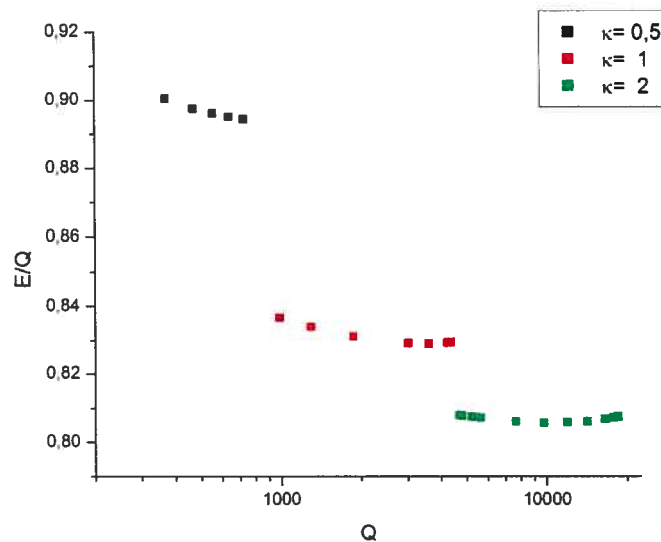


Figure 5-5: Stabilité des solutions étendues en fonction de la charge pour différentes valeurs de κ ; $g = 0.5$ et $e = 0.1$.

CHAPITRE 6

Conclusion

Nous avons montré l'existence de solutions de type Q -balls, stables sous décomposition, dans trois théories lagrangiennes classiques.

L'étude du lagrangien simple possédant la symétrie globale nous a permis de bien caractériser le comportement des Q -balls selon le potentiel d'interaction et la charge totale. En premier lieu, nous avons constaté que les Q -balls très massifs sont adéquatement modélisé par une approximation de leur profil par une distribution palier. Dans ce régime, il fut montré que la masse et le volume du Q -ball sont proportionnelles à la charge contenue. Il fut démontré que dans la mesure où le potentiel admet une solution Q -ball, qu'il existe une charge minimale critique à partir de laquelle tout Q -ball de charge supérieure est stable sous décomposition. Nous avons aussi analysé une autre approximation, valable pour les Q -balls peu chargés. Finalement, nous avons caractérisé l'évolution du Q -ball sous l'accumulation progressive de charges; d'abord par une augmentation de la densité jusqu'à un maximum, suivi d'une dilatation lente et progressive jusqu'à une valeur asymptotique de densité.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié le Q -ball dans le contexte d'une théorie jaugée. Il fut montré qu'à l'intérieur du soliton, le champ de jauge acquiert une masse rendant la configuration supraconductrice et concentrant les charges en surface. Nous avons put dériver ses caractéristiques dans le régime faiblement supraconducteur. Il fut argumenté que de la concentration de densité de charge en surface résulte une pression électrostatique qui pour une charge trop élevée destabilisera le Q -ball. Ce fut confirmé par nos résultats numériques.

Dans le dernier chapitre nous ajoutons un terme de Chern-Simons au lagrangien et considérons le Q -ball dans le contexte d'une théorie bidimensionnelle de Maxwell-Chern-Simons. Nous décrivons l'effet magnéto-électrique impliquant l'existence d'un flux magnétique conservé lié à la charge électrique. Nous montrons de plus que dans ce contexte, le champ électromagnétique acquiert dans tout l'espace une masse, permettant l'existence de solution d'énergie finie en deux dimensions. Nous obtenons un échantillon de solutions numériques stables sous décomposition et envisageons la possibilité que comme pour le Q -ball de Coleman, il n'y ait pas de limite maximale de charge pour une valeur du paramètre κ suffisamment élevée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. S. Russell, *Report on Waves*, Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, (1844) 311-390 XLVII-LVII.
- [2] S. Coleman, *Q-balls* , Nuclear Physics B **262** (1985) 263.
- [3] R. Finkelstein, R Lelevier, M Ruderman, *Nonlinear Spinor Fields*, Physical Review **83** (1951) 326.
- [4] J. K. Perring, T. H. Skyrme, *A model unified field equation*, Nuclear Physics **31** (1962) 550.
- [5] D. Finkelstein, C. W. Misner, *Some new conservation laws*, Annals of Physics **6** (1959) 230
- [6] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nuclear Physics B **79** (1974) 276.
- [7] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in the quantum field theory*, Pisma Zh. Eksp. Teor .Fiz. **20** (1974) 430.
- [8] T. D. Lee, G. C. Wick, *Vacuum stability and vacumm excitation in a spin 0 field theory*, Physical Review D **9** (1974) 2291
- [9] T. D. Lee, *Proceedings of the Conference on Extended Systems in Field Theory*, Physical Review C **23** (1976) 254.
- [10] R. Friedberg, T. D. Lee, A. Sirlin, *Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions*, Physical Review D **13** 10 (1976) 2739.
- [11] R. Friedberg, T. D. Lee, *Fermion field nontopological solitons 1*, Physical Review D **15** (1976) 1694.

- [12] R. Friedberg, T. D. Lee, *Fermion field nontopological solitons 2 - Models for hadrons*, Physical Review D **16** (1977) 1096.
- [13] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 1982
- [14] H. Ohanian, R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company, New York-London, 1994.
- [15] Rajaraman, R., *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1982.
- [16] A. C. Scott, f.Y.F. Chu, D. W. McLaughlin, *The soliton: a new concept in applied science*, IEEE Proc. **61** (1973) 1443-1483.
- [17] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: selected Erice Lectures of Sidney Colman*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [18] P. J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, Verlag-New York, 1993.
- [19] D. E. Soper, *Classical Field Theory*, John Wiley & sons, New York, 1943.
- [20] R. A. Battye, P. M. Sutcliffe, *Q-balls Dynamic*, arXiv:hep-th/0003252v1 (2000).
- [21] V. Glaser, H. Grosse, A. Martin, W Thirring, *Studies in mathematical physics*, Editions E. Lieb, B. Simon & A. Wightman (princeton University), 1976.
- [22] M. Gleiser, J. Thorarinson, *Energy Landscape of d-Dimensional Q-balls* , arXiv:hep-th/0505251 v1 (2005).
- [23] A. Kusenko, *Small Q balls*, arXiv:hep-th/9704073 v1 (1997).
- [24] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [25] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, West-view Press, Oxford, 1995.
- [26] A. Guay, *Symétrie: réflexions sur les formes naturelles*, Université de Montréal, Montréal, 2003.

- [27] K. Lee, J. A. Stein-Schabes, R. Watkins, L. M. Widrow, *Gauged Q balls*, Physical Review D **39** 6 (1988) 1665.
- [28] S. K. Paul, A. Khare, Physics Letters **193** (1987) 253.
- [29] S. G. Kamath, *Classical solutions of Maxwell's equations in (2+1)-dimensional electrodynamics with the Chern-Simons term*, Physical Review A **40** 12 (1989) 6791.
- [30] L.D Landau, E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* Second Edition, Pergamon Press, 1963.
- [31] T.H O'Dell, *The Electrodynamics of Magneto-Electric Media*, North Holland, 1970.
- [32] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Physical Review **115** (1959) 485.
- [33] S. Coleman, *Fate of false vacuum: Semiclassical theory*, Physical Review D **15** 10 (1977) 2929.
- [34] G. Dunne, *Slef-Dual Chern-Simons Theories*, Springer, 1995.
- [35] R. B. MacKenzie, M. B. Paranjape, *From Q-Walls to Q-Balls*, Journal of High Energy Physics **0108:003** (2001)
- [36] A. D. Linde, *Decay of the false vacuum at finite temperature*, Nuclear Physics B **216** (1983) 421.
- [37] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Annals of Physics **140** (1982) 372.
- [38] R. D. Pisarski, S. Rao, *Topologically massive chromodynamics in the perturbative regime*, Physical Review D **32** 8 (1985) 2081.
- [39] F. Wilczek, *Two Applications of Axion Electrodynamics*, Physical Review Letters **58** 18 (1987) 1799.
- [40] S. Coleman, V. Glaser, A. Martin, *Action minima among solutions of a class of euclidean scalar field equations*, Ref.TH.2364-CERN (1977)

